UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

LUCAS HENRIQUE BACKES

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UMA ALTERNATIVA PARA O ENSINO DE FUNÇÕES

100 PROBLEMAS PROPOSTOS

Porto Alegre, 2008

Lucas Henrique Backes

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UMA ALTERNATIVA PARA O ENSINO DE FUNÇÕES

100 PROBLEMAS PROPOSTOS

Trabalho de conclusão de curso de graduação apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Prof. Dra. Marilaine de Fraga Sant'Ana

Porto Alegre, 2008

Lucas Henrique Backes

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UMA ALTERNATIVA PARA O ENSINO DE FUNÇÕES

100 PROBLEMAS PROPOSTOS

Trabalho de conclusão de curso de graduação apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Prof. Dra. Marilaine de Fraga Sant'Ana

Aprovado em 03 de dezembro de 2008.

Banca Examinadora:

Prof. Dra. Marilaine de Fraga Sant'Ana – Orientadora – Professora do Instituto de Matemática da UFRGS

Prof. Dr. Eduardo Henrique Brietzke – Professor do Instituto de Matemática da UFRGS

Prof. Dra. Vera Clotilde Garcia Carneiro – Professora do Instituto de Matemática da UFRGS

Resumo

Este trabalho trata da aplicação da metodologia de resolução de problemas como uma alternativa para o ensino de funções no Ensino Médio, visto que a resolução de problemas é um meio de pôr a ênfase no aluno e em seus processos de pensamento. Desenvolvemos este trabalho baseado em autores como George Polya, Juan Ignácio Pozo e Antoni Vila.

Apresentamos uma análise de um projeto desenvolvido com alunos do Ensino Médio sobre resolução de problemas e funções na qual destacamos momentos que evidenciem processos criativos, de pensamento crítico, de reflexão e investigamos sobre a viabilidade do uso da proposta em sala de aula. Por fim, apresentamos uma seção com 100 problemas propostos relativos a funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica e uma atividade envolvendo funções e frenagem de veículos.

Palavras-chave:
Resolução de problemas – Funções – Ensino Médio

Abstract

This work is about the application of the problem solving methodology as an alternative to teaching functions in the Secondary Education, since solving problems is a way of placing the emphasis in the student and in his processes of thought. We develop this work based on authors like George Polya, Juan Ignácio Pozo and Antoni Vila.

We present an analysis of a project developed with students of the Secondary Education that is about problem solving and functions in which we single out moments that show creative processes, of critical thought, of reflection and we investigate the viability of using the problem solving methodology in classroom. Finally, we present a section with 100 proposed problems relative to affine, quadratic, exponential and logarithmic functions and an activity about functions and vehicles braking.

Key-words:
Problem solving – Functions – Secondary Education

Sumário

INTRODUÇÃO

Uma professora fez a seguinte pergunta a seus alunos: se uma criança tem sete lápis e lhe tiram os sete, ela ainda poderá escrever? Um aluno de 6 anos responde: "Isso depende, se ela tiver canetas ou pincéis". Quatro anos mais tarde quando recordava do ocorrido falou: "que problema mais tonto; claro que não poderá escrever."[1]

Se analisarmos o dia-dia de uma escola, sem dúvida encontraríamos exemplos semelhantes a este que nos dão indícios de que, com o passar do tempo na escola, os alunos vão perdendo a capacidade criativa, reflexo de uma atividade escolar que prioriza a aprendizagem de mecanismos e respostas automáticas em detrimento ao desenvolvimento do pensamento. Ao encontro do que acabamos de expor Puing Adam (1960 apud Callejo e Vila 2004 p. 22) afirmou: "o ensino, que deveria ser antes de mais nada a formação do educando se transformou em preparação, o que não é o mesmo mas sim, bem o contrário".

O que se pode fazer para invertermos esta situação? Qual(is) é(são) a(s) solução(ões) para esta questão?

Estas são perguntas cuja resposta sem dúvida não se conhece por completo, porém vários estudos apontam algumas possíveis soluções, ou melhor, apontam estratégias que podem auxiliar na mudança desta situação, entre as quais, destacaremos neste trabalho a resolução de problemas.

Por que a resolução de problemas encontra-se entre estas possíveis soluções?

Para resolver um problema, é necessário compreender bem a situação, interpretar o que é dito, estabelecer estratégias que levem a solução, mudar de estratégia se a anterior não funcionou (aprofundaremos isso mais adiante), enfim, a resolução de problemas exige uma

---

[1] Exemplo extraído de Callejo e Vila (2004).

série de atitudes que mexem com a nossa capacidade criativa. Vejamos o que Callejo e Vila nos dizem:

> os problemas são um meio de por a ênfase nos alunos e em seus processos de pensamento e não em métodos *inquisitivos*[2]; uma ferramenta para formar sujeitos com capacidade autônoma de resolver problemas, críticos e reflexivos, capazes de se perguntar sobre o que foi feito, sobre suas interpretações e explicações, de ter seus próprios critérios e modificá-los se for preciso e propor soluções (2004, p. 32).

Segundo Polya (1978) se propusermos problemas compatíveis com os conhecimentos dos alunos, que desafiem sua curiosidade, se os auxiliarmos por meio de indagações estimulantes, poderemos incutir o gosto pelo raciocínio independente desenvolvendo assim sua autonomia.

Neste trabalho apresentaremos, no primeiro capítulo, uma revisão bibliográfica acerca da resolução de problemas contemplando autores como George Polya, Juan Ignácio Pozo e Antoni Vila.

No segundo capítulo, faremos uma exposição e análise do desenvolvimento de um projeto realizado com alunos do Ensino Médio com o tema funções e resolução de problemas.

No terceiro capítulo apresentaremos uma seção com 100 problemas propostos que pode servir como fonte para professores de Matemática. Tais problemas envolvem funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica. Apresentaremos também uma atividade envolvendo funções e frenagem de veículos.

Por fim, como apêndice apresentaremos os planos de trabalho do projeto analisado no segundo capítulo.

Os objetivos deste trabalho são, através da análise de um projeto sobre resolução de problemas e funções desenvolvido de acordo com as indicações dadas pelos autores da área, comprovar que a metodologia de resolução de problemas é uma estratégia de ensino que auxilia no desenvolvimento da autonomia e da criatividade, ou seja, que a resolução de

[2] Termo não traduzido do espanhol.

problemas realmente está entre as possíveis estratégias que auxiliam na solução da questão proposta anteriormente e também apresentar uma coleção de situações (problemas ou exercícios de acordo com as definições que veremos posteriormente), cujo objetivo é servir como fonte de consulta para professores e estudantes.

Mas como se deu o interesse para pesquisar mais sobre este tema?

Numa aula da disciplina de Pesquisa em Educação Matemática, no segundo semestre de 2007, o então aluno do programa de pós-graduação em Educação Matemática da universidade, Marcelio Diogo, a convite da professora Vera Carneiro, fez uma breve apresentação do seu trabalho de conclusão (dissertação), trabalho este sobre o uso de problemas geradores no ensino médio. Achei suas propostas muito interessantes e viáveis.

Na disciplina de Laboratório de Prática de Ensino-Aprendizagem em Matemática III, no primeiro semestre de 2007, desenvolvemos no Colégio de Aplicação da UFRGS uma oficina sobre funções, trabalho este que eu achei muito interessante. Conversando então com a professora orientadora, decidimos fazer um trabalho que envolvesse as duas coisas: resolução de problemas e funções.

Comecei minha pesquisa estudando o trabalho do Marcelio Diogo, passando a seguir para as bibliografias que ele usou. Pesquisei também em diversos livros e sites buscando problemas a respeito funções.

Posteriormente, na disciplina de Estágio em Educação Matemática III, no segundo semestre de 2008, desenvolvemos um projeto com alunos do Ensino Médio a respeito de resolução de problemas e funções. Projeto este que serviu de base para as análises apresentadas no segundo capítulo.

Capítulo 1:

Resolução de problemas

"De que me irei ocupar no céu, durante toda a Eternidade, se não me derem uma infinidade de problemas de Matemática para resolver?" (Augustin Louis Cauchy)

Antes de qualquer coisa precisamos entender o que significa a palavra problema. Então:

1.1 O que é um problema matemático?

Se fizermos esta pergunta a um grupo de alunos, por exemplo, da 8ª série do ensino fundamental, sem dúvida a maioria deles responderia que um problema matemático é uma questão de matemática que caracteriza-se pelos aspectos formais de sua representação, ou seja, é uma questão cujo enunciado está escrito por extenso do qual devemos retirar as instruções e montar um cálculo aritmético que nos leve a solução. Resumindo: a idéia que se tem é de que os problemas caracterizam-se pelos seus aspectos formais. Mas o que seria "realmente" um problema?

Segundo Lester (apud Pozo, 1998, p. 15) um problema seria "uma situação que um indivíduo ou um grupo quer ou precisa resolver e para o qual não dispõe de um caminho rápido e direto que leve à solução"

Quanto a isso Callejo e Vila nos dizem o seguinte:

> Reservaremos, pois, o termo problema para designar uma situação, proposta com finalidade educativa, que propõe uma questão matemática cujo método de solução não é imediatamente acessível ao aluno/resolvedor ou ao grupo de alunos que tenta resolvê-la, porque não dispõe de um algoritmo que relaciona os dados e a incógnita com a conclusão e, portanto, deverá buscar, investigar, estabelecer relações e envolver suas emoções para enfrentar uma situação nova (2004, p. 31-32).

Porto da Silveira nos dá a seguinte definição:

> Um problema matemático é toda situação requerendo a descoberta de informações matemáticas desconhecidas para a pessoa que tenta resolvê-lo, e/ou a invenção de uma demonstração de um resultado matemático dado. O fundamental é que o resolvedor tenha de inventar estratégias e criar idéias; ou seja: pode até ocorrer que o resolvedor conheça o objetivo a chegar, mas só estará enfrentando um problema se ele ainda não tem os meios para atingir tal objetivo.

Analisando estas definições percebe-se que a definição de problema concentra-se basicamente na exigência cognitiva e na necessidade de que o resolvedor elabore estratégias e procedimentos a partir de seus conhecimentos e de sua experiência e não em seus aspectos formais. Sendo assim, uma situação que constitui-se em um problema para um certo indivíduo pode constituir apenas um exercício para outro pois, por exemplo, o segundo já pode dispor de um método rápido (pronto) e direto para a solução da questão enquanto o primeiro não o tem. Nesta perspectiva um problema, resolvido repetidamente, acaba por tornar-se um exercício. Observamos também que uma situação constitui-se num problema para uma certa pessoa unicamente se ela desejar ou necessitar resolvê-la.

1.2 Diferenças entre problemas e exercícios

Mas afinal qual a diferença entre exercícios e problemas?

O exercício é apenas uma aplicação de conhecimento já adquirido com o objetivo de "treinar" alguma habilidade já adquirida pelo resolvedor, por exemplo, a aplicação de uma fórmula, enquanto a resolução de um problema envolve necessariamente a investigação, a criação de caminhos, de estratégias de resolução.

Vejamos o Quadro 1 abaixo que explicita melhor estas diferenças reunindo características de ambos.

1. Ao ler um exercício, vê-se imediatamente em que consiste a questão e qual o meio de resolvê-la.

1. Diante de um problema não se sabe, a primeira vista, como atacá-lo e resolvê-lo; as vezes, nem se quer se vê com clareza em que consiste o problema.

2. O objetivo que o professor persegue quando propõe um exercício é que o aluno aplique de forma mecânica conhecimentos de algoritmos já adquiridos e fáceis de aplicar.

2. O objetivo que o professor persegue ao propor um problema é que o aluno busque, investigue, utilize a intuição, aprofunde o conjunto de conhecimentos e experiências anteriores e elabore uma estratégia de resolução.

3. Em geral, a resolução de um exercício exige pouco tempo e este pode ser previsto de antemão.

3. Em geral, a resolução de um problema exige um tempo que é impossível prever.

4. A resolução de um exercício não costuma envolver os afetos.

4. A resolução de um problema supõe um forte investimento de energia e afeto. Ao longo da resolução, é normal experimentar sentimentos de ansiedade, de confiança, de frustração, de entusiasmo, de alegria, etc.

5. Em geral, os exercícios são questões fechadas.

5. Os problemas estão abertos a possíveis variantes e generalizações a novos problemas.

6. Os exercícios são abundantes nos livros didáticos.

6. Os problemas costumam ser escassos nos livros didáticos.

Quadro 1: características de exercícios e problemas. Extraído de Callejo e Vila (2004, p. 74)

A partir destas características podemos perceber que ambos têm sua devida importância nas aulas de matemática, mas o que acaba acontecendo muitas vezes é que usam-se apenas exercício. Segundo Polya (1978), um ensino que se reduz ao treinamento de técnicas, ao desenvolvimento mecânico de atividades fica bem abaixo do nível do livro de cozinha, pois as receitas culinárias sempre deixam alguma coisa para a imaginação e análise do cozinheiro, mas as receitas matemáticas não deixam nada disso. Talvez esteja ai uma "explicação" para o fraco desempenho de nossos estudantes em Matemática.

1.3 Resolvendo um problema

A capacidade de resolução de problemas não é inata, muito pelo contrário é uma competência que desenvolvemos com a prática como nos sugere Polya:

> A resolução de problemas é uma competência prática como, digamos, o é a natação. Adquirimos qualquer competência por imitação e prática. Ao tentarmos nadar, imitamos o que os outros fazem com as mãos e os pés para manterem suas cabeças fora da água e, finalmente, aprendemos a nadar pela prática da natação. Ao tentarmos resolver problemas, temos de observar e imitar o que fazem outras pessoas quando resolvem os seus problemas e, por fim, aprendemos a resolver problemas, resolvendo-os (1978, p. 3).

Polya (1978) distingue quatro fases importantes na resolução de um problema: compreender o problema, estabelecer um plano de resolução, executar o plano e refletir sobre a solução encontrada.

- *Compreender o problema:* entender claramente o que é informado pelo problema. Para tanto o autor nos sugere os seguintes questionamentos e atitudes: Qual a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condição? É possível satisfazer a condição? A condição é suficiente para determinar a incógnita? Ou é insuficiente? Ou redundante? Ou contraditória?

Trace uma figura. Adote uma notação adequada. Separe as diversas partes da condição. É possível escrevê-las?

- *Estabelecer um plano de resolução:* ver como os diversos itens trazidos pelo problema estão relacionados para podermos ter uma idéia da resolução, para tanto ele nos sugere novamente alguns questionamentos: Já viu o problema antes? Ou já viu o mesmo problema apresentado sob forma ligeiramente diferente? Conhece um problema relacionado com este? Conhece um problema que lhe pode ser útil? Considere a incógnita! E procure pensar num problema conhecido que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante. Eis um problema correlato e já antes resolvido. É possível utiliza-lo? É possível utilizar seu resultado? É possível utilizar o seu método. Deve-se introduzir algum elemento auxiliar para tornar possível a sua solução? É possível reformular o problema? É possível reformulá-lo ainda de outra maneira? Volte as definições. Se não puder resolver o problema proposto, procure antes resolver algum problema correlato. É possível imaginar um problema correlato mais acessível? Um problema mais genérico? Um problema mais específico? Um problema análogo? É possível resolver uma parte do problema? É possível obter dos dados alguma coisa útil? Utilizou todos os dados? Utilizou toda a condicionante?

- *Executar o plano:* executar o plano verificando cada passo. Atitudes sugeridas pelo autor: Ao executar o seu plano de resolução, verifique cada passo. É possível verificar claramente que o passo está correto? É possível demonstrar que ele está correto?

- *Reflexão sobre a solução encontrada:* refletir sobre a validade da solução encontrada. Atitudes sugeridas pelo autor: É possível verificar o resultado? É possível verificar o argumento? É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema?

Salientamos que a atividade de resolução de problemas não é linear, ou seja, não é necessário que comecemos pela primeira fase e terminemos com a quarta, pelo contrário, durante o processo de resolução é comum avançar e depois se voltar para fases anteriores, fazendo novas abordagens, procurando entender melhor o problema. De maneira resumida: em muitos casos, as fases podem estar interligadas de forma complexa, exigindo uma contínua reformulação de cada uma delas.

1.4 Tipos de problemas

Na literatura acerca da resolução de problemas encontramos diversos tipos de classificação dos mesmos. Apresentamos abaixo a classificação que Polya (1978) nos deu, fazendo distinção entre os seguintes tipos de problemas: problemas rotineiros, problemas de determinação, problemas de demonstração e problemas práticos.

- *Problemas rotineiros*: este tipo de problema na verdade coincide com a nossa definição de exercício dada anteriormente e que segundo Echeverría (1998) podemos distinguir entre dois grupos: o primeiro consiste na repetição de uma determinada técnica já exposta pelo professor, por exemplo, encontrar as raízes da equação $x^2 + 5x + 6$ após a apresentação da fórmula de Bhaskara. O objetivo deste tipo de exercício é automatizar uma certa técnica. O outro tipo de exercício tem por objetivo além da automatização de técnicas, o aprendizado de procedimentos nos quais se inserem estas técnicas, por exemplo, ao invés de pedir quanto é $3 + 2$ (exercício do primeiro tipo) pede-se da seguinte forma: João tem três bolinhas de gude e Pedro tem duas. Quantas bolinhas de gude os dois possui juntos? A diferença entre os dois tipos de exercícios reside no fato de que no segundo o aluno tem que fazer a tradução da linguagem falada para a linguagem matemática.

- *Problemas de determinação:* este tipo de problema tem como objetivo, como o próprio nome já diz, encontrar um certo objeto, determinar o valor da incógnita. Estes problemas podem ser teóricos ou práticos, abstratos ou concretos, problemas sérios ou simples enigmas. Suas partes principais são a incógnita, os dados e as condições (condicionante). Este tipo de problema é mais "importante" na matemática elementar. Um exemplo deste tipo de problema pode ser: "Quando Pascal nasceu, Descartes tinha 27 anos e quando Descartes morreu, Pascal tinha 27 anos. Pascal morreu aos 39 anos. A média aritmética das datas das mortes de ambos é 1656. Ache o ano de nascimento e o de morte de cada um deles." (Hariki e Onaga, 1979)

- *Problemas de demonstração:* o objetivo deste tipo de problema é mostrar de forma que se possa concluir que uma certa afirmação é verdadeira ou é falsa. As partes principais de um problema comum deste tipo são as hipóteses e a conclusão. Para se resolver um destes problemas é necessário que se conheça perfeitamente as suas partes principais. Estes problemas são mais "importantes" na Matemática superior. Como exemplo podemos citar: Prove que o quadrilátero regular cujo perímetro é 16 cm com maior área é o quadrado de lado 4 cm. Hipóteses: quadrilátero regular de perímetro 16 cm. Conclusão: quadrado de lado 4 cm. É importante lembrar que nem todos os problemas de demonstração podem ser divididos naturalmente em hipótese e conclusão, por exemplo, o seguinte Teorema: "Há uma infinidade de números inteiros".

- *Problemas práticos:* diferem em vários aspectos dos problemas puramente matemáticos embora muitos motivos e procedimentos de resolução sejam essencialmente os mesmos. Um exemplo de problema prático aplicado a engenharia seria a construção de um tunel. Neste problema as incógnitas tais como dimensões, forma geométrica, materiais para a construção..., assim como as condicionantes são muitas. Nos problemas matemáticos todos os dados e condicionantes são essenciais e tem de ser levados em conta já nos problemas práticos podemos ter uma vasta gama de dados e condicionantes o que nos obriga a desprezar alguns.

Lembrando novamente que a definição de problema concentra-se na exigência cognitiva então, por exemplo, um problema de determinação pode passar a ser um problema rotineiro.

1.5 Resolução de problemas em sala de aula

Vivemos numa sociedade muito flexível e em constante avanço. Como fazemos parte desta sociedade também precisamos estar em contínuo crescimento, em contínuo avanço.

Nesta perspectiva, como nos sugere Pozo (1998), vemos a necessidade de que nas escolas, as aulas de matemática possibilitem aos alunos não somente a "aquisição" de um conjunto de conhecimentos já elaborados que constituem a cultura e a ciência, mas que lhes possibilitem adquirir/desenvolver habilidades, que lhes permitam aprender por si mesmos, ou seja, que desenvolvam a capacidade de aprender a aprender e assim consigam acompanhar o avanço da sociedade. Neste sentido o conjunto de conhecimentos fechados em si mesmos não basta, visto que os alunos precisam tornar-se capazes de enfrentar situações variáveis e que exijam destes a aprendizagem de novos conhecimentos e habilidades.

Uma maneira de os alunos desenvolverem este espírito, ou uma estratégia que nos auxilia nesta tarefa é a resolução de problemas, visto que esta exige que o resolvedor ponha em funcionamento sua capacidade criativa, desenvolva estratégias, busque soluções por seus próprios meios.

> Assim, ensiná-los a resolver problemas supõe dotá-los da capacidade de *aprender a aprender*, no sentido de habituá-los a encontrar por si mesmos respostas às perguntas que os inquietam ou que precisam responder, ao invés de esperar uma resposta elaborada por outros e transmitida pelo livro-texto ou pelo professor (Pozo, 1998, p. 9).

É com base nestes argumentos que podemos fundamentar a utilização da resolução de problemas em sala de aula, resolução de problemas que pode ser tanto objeto como instrumento de aprendizagem.

A resolução de problemas no currículo de matemática como objeto de aprendizagem (ou como nos dizem Callejo e Vila (2004): "aprender a resolver problemas" ou "aprender a pensar matematicamente") tem como objetivo o desenvolvimento de estratégias e processo gerais ou específicos de pensamento matemático, o desenvolvimento da capacidade criativa (citação de Pozo (1998) acima).

A resolução de problemas assumiria o papel de instrumento de aprendizagem ("aprender resolvendo problemas"), por exemplo, quando usados na introdução de algum conteúdo (problemas geradores). O uso desta estratégia, segundo Diogo (2007) possibilita uma aprendizagem por descoberta. Afirma ainda que tal estratégia contribui para justificar o aprendizado de um novo tópico uma vez que os conhecimentos que os alunos teriam em relação a este assunto seriam insuficientes para resolver o problema proposto.

1.6 Atitudes do professor em relação à resolução de problemas

A resolução de problemas não é uma tarefa fácil tanto para professores quanto para os alunos visto que, como diz Pozo (1998), é um processo complexo no qual entram em jogo diversos componentes como vontade, conhecimentos técnicos, criatividade, crenças (ver Callejo e Vila (2004)). Então para que esta tenha resultados satisfatórios vários autores como Callejo e Vila (2004), Pozo (1998) nos orientam sobre algumas atitudes e sobre a postura do professor durante este processo. Tais atitudes já começam com a escolha do problema visto que:

- Existe a necessidade do problema ser desafiador e interessante, pois resolver problemas exige tempo e só se vai "gastar" tempo e energia numa tarefa que nos interesse, a qual estamos motivados a realizar;
- O problema deve ser possível de abordar pelo menos parcialmente, pois se não tiver a menor perspectiva de êxito o aluno abandonará a tarefa;

Durante a resolução de problemas em sala de aula o professor deve adotar uma postura mais orientativa e menos diretiva como nos sugere Callejo e Vila (2004, p. 151):

- orientar e coordenar mais que guiar por um caminho;
- perguntar, incitar e questionar para "produzir" reflexões mais do que dar respostas;
- animar mais que exigir;
- duvidar, refletir, explorar, experimentar, conjecturar... mais que informar;

Como dito acima, a resolução de problemas é um processo logo é necessário que se avalie o processo como um todo e não simplesmente a resposta, acompanhando cada aluno o mais próximo possível. Vejamos o Quadro 2 abaixo que complementa o que foi exposto acima:

Na proposição de um problema
1. Propor tarefas abertas que admitam vários caminhos possíveis de resolução e, inclusive, várias soluções possíveis, evitando as tarefas fechadas. 2. Modificar o formato ou a definição dos problemas, evitando que o aluno identifique uma forma de apresentação como um tipo de problema. 3. Diversificar os contextos nos quais se propõe a aplicação de uma mesma estratégia, fazendo com que o aluno trabalhe os mesmos tipos de problemas em diferentes momentos do currículo, diante de conteúdos conceituais diferentes. 4. Propor tarefas não só com um formato acadêmico mas também dentro de cenários

cotidianos e significativos para o aluno, procurando fazer com que o aluno estabeleça conexões entre ambos os tipos de situações.

5. Adequar a definição do problema, as perguntas e a informação proporcionada aos objetivos da tarefa, usando, em diferentes momentos, formatos mais ou menos abertos, em função destes objetivos.
6. Usar os problemas com fins diversos durante o desenvolvimento ou seqüência didática de um tema, evitando que as tarefas práticas apareçam como ilustração, demonstração ou exemplificação de alguns conteúdos previamente apresentados ao aluno.

Durante a solução do problema

7. Habituar o aluno a adotar as suas próprias decisões sobre o processo de resolução, assim como refletir sobre esse processo, dando-lhe uma autonomia crescente nesse processo de tomada de decisões.
8. Fomentar a cooperação entre os alunos na realização das tarefas, mas também incentivar a discussão e os pontos de vista diversos, que obriguem a explorar o espaço do problema para comparar as soluções ou caminhos de resolução alternativos.
9. Proporcionar aos alunos a informação que precisem durante o processo de resolução, realizando um trabalho de apoio, dirigido mais a fazer perguntas ou fomentar nos alunos o hábito de perguntar-se do que dar respostas às perguntas dos alunos.

Na avaliação do problema

10. Avaliar mais os processos de resolução seguidos pelo aluno do que a correção final da resposta obtida. Ou seja, avaliar mais do que corrigir.
11. Valorizar especialmente o grau em que esse processo de resolução envolve um

planejamento prévio, uma reflexão durante a realização da tarefa e uma auto-avaliação pelo aluno do processo seguido.

12. Valorizar a reflexão e a profundidade das soluções alcançadas pelos alunos e não a rapidez com que são obtidas.

Quadro 2: Atitudes do professor em relação à resolução de problemas. Extraído de Pozo, 1998, p.161

Analisando estas atitudes sugeridas percebemos, como já mencionado anteriormente, que a atividade de resolução de problemas não é tarefa fácil, talvez por isso ela seja muitas vezes "esquecida" pelos professores de Matemática. Passa-se então a dar ênfase quase que exclusiva ao treinamento de técnicas, de procedimentos mecânicos cujas conseqüências já sabemos.

Capítulo 2:

Exposição e análise do desenvolvimento do projeto

Neste capítulo faremos a exposição e a análise do projeto sobre resolução de problemas desenvolvido com alunos do Ensino Médio.

Objetivos:

- Destacar momentos que evidenciem processos criativos;

- Identificar pontos que evidenciem processos de pensamento crítico, de reflexão;

- Investigar sobre a viabilidade de uso da proposta de resolução de problemas em sala de aula;

Metodologia:

A metodologia utilizada será a de estudo de caso. Será feita a análise de um projeto desenvolvido extraclasse com alunos do Ensino Médio.

2.1 Descrição do projeto

Na disciplina de Estágio em Educação Matemática III, no segundo semestre de 2008, desenvolvemos um projeto extraclasse com os alunos do turno da manhã do Colégio Estadual Júlio de Castilhos sob o nome Resolução de Problemas (APÊNDICE 1). Tal colégio é público de Ensino Médio, situado próximo ao centro de Porto Alegre e recebe alunos de diversos bairros.

Como se tratava de um projeto extraclasse nenhum dos alunos era obrigado a participar, participava quem quisesse. Fizemos então o convite a todos os alunos do turno da manhã do colégio (cerca de 820) e se inscreveram 57. Dividimos estes em duas turmas com as quais trabalhamos 5 semanas, nas segundas-feiras. A coleta de dados foi feita nas 4 primeiras semanas. Trabalhávamos com uma turma das 13h30min às 15h25min e com a outra das 15h30min às 17h25min. Participavam em média 6 alunos por encontro (por dia).

2.2 Descrição e análise - Função afim

No primeiro encontro fizemos as apresentações, conversamos um pouco e começamos o estudo da função afim propondo o seguinte problema:

Problema 1: Na clínica odontológica A, um aparelho ortodôntico custa R$ 380,00 mais uma taxa mensal de manutenção de 20 reais. Na clínica odontológica B, o mesmo aparelho custa R$ 250,00 porém a taxa de manutenção é de 50 reais por mês. Qual das duas opções é mais vantajosa?

Os participantes tiveram bastante dificuldades para resolver este problema. Nenhum deles apresentou uma solução "completa" (que poderia ser algo mais ou menos conforme a resolução abaixo):

Função para o custo do aparelho na clínica A $\Longrightarrow$ $f_A(x) = 20 \cdot x + 380.$

Função para o custo do aparelho na clínica B $\Longrightarrow$ $f_B(x) = 50 \cdot x + 250.$

(onde x está representado em meses e $f_A(x)$ e $f_B(x)$ em reais). Vejamos na Figura 1 os gráficos dessas funções:

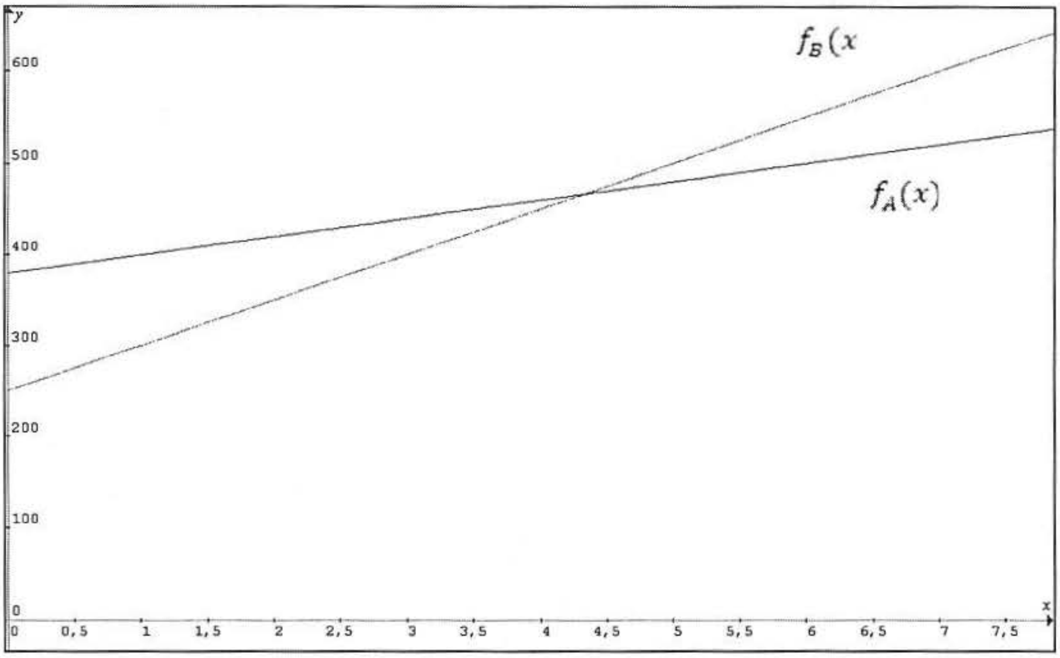


Figura 1: gráfico das funções $f_A(x) = 20 \cdot x + 380$ e $f_B(x) = 50 \cdot x + 250$.

A interseção dos dois se dá em $x = \frac{13}{3} = 4,3333\ldots$ e $y = \frac{1400}{3} = 466,666\ldots$ Logo até 4, 333... meses a clínica B é mais vantajosa, após este período a clínica A passa a ser a mais vantajosa.

A grande maioria dos participantes fez o cálculo pra ver qual das clínicas era mais vantajosa num determinado tempo, por exemplo, se usasse o aparelho no período de um ano, seis meses, enfim num período específico. Nenhum deles fez a resolução usando funções que era um assunto que "teoricamente" todos já tinham estudado. Um exemplo é a resolução apresentada na Figura 2 que segue:

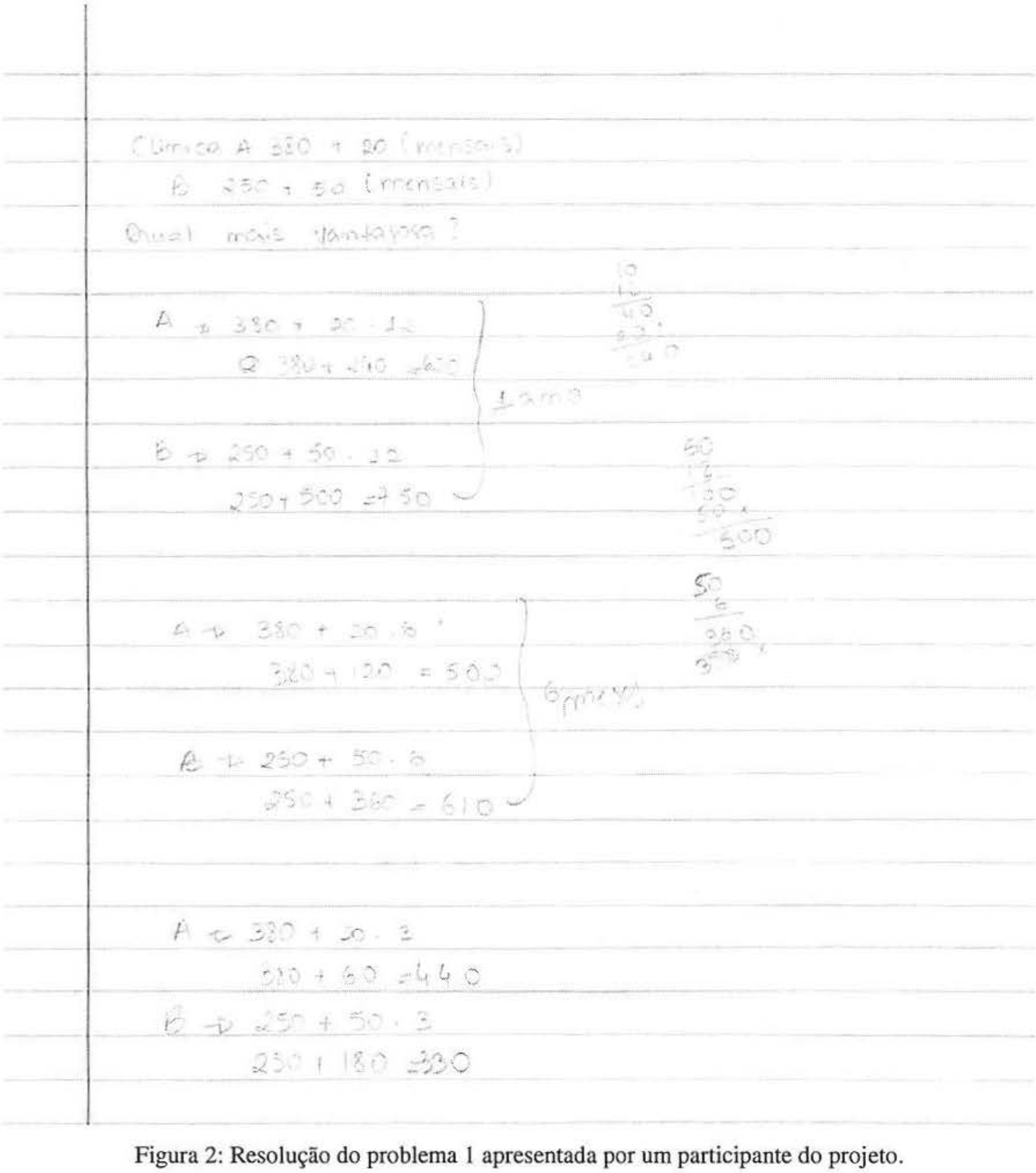


Figura 2: Resolução do problema 1 apresentada por um participante do projeto.

Através desta resolução o participante concluiu que a clínica A era a mais vantajosa. Fizemos então o seguinte questionamento:

<u>Professor:</u> *bom, mas pelos cálculos que você fez se eu usar o aparelho três meses a clínica B é que é a mais vantajosa.*

O participante fez mais alguns cálculos no rascunho e respondeu:

<u>Participante:</u> *A clínica A é mais vantajosa porque se você vai usar aparelho nos dentes vai usar pelo menos uns seis meses, e para um tempo maior que seis meses a clínica A*

é sempre mais vantajosa. Pra usar menos tempo que isso os dentes tem que estar muito retos ai quase nem precisa usar aparelho.

A conclusão de que a clínica A era a mais vantajosa foi baseada em resultados de cálculos da vantagem em períodos específicos, 6 meses, 1 ano (cálculos estes que aparecem na resolução acima) e 8 e 10 meses que o participante calculou depois do questionamento feito.

Note que, para chegar a tal conclusão, o participante fez relações do problema com a realidade, analisou, interpretou, ou seja, alguns dos objetivos da metodologia de resolução de problemas foram atingidos.

Após este período, fizemos uma pequena revisão de conceitos como função e função afim. Trabalhamos com alguns exemplos de função afim, com seus relativos gráficos, analisando em cada um se a função é crescente, decrescente ou constante e a relação disso com o coeficiente da variável. Após este trabalho pedimos que os participantes tentassem resolver novamente o problema proposto tentando utilizar os conceitos que haviam sido abordados anteriormente.

Novamente os participantes tiveram dificuldades e ninguém apresentou a resolução "completa". Alguns tiveram dificuldades em "montar" a lei da função e a maioria teve dificuldade em encontrar o ponto a partir do qual uma clínica passasse a ser mais vantajosa do que a outra.

Transcorrido um certo tempo fizemos uma resolução juntos no quadro (semelhante a apresentada na Figura 1 porém mais detalhada frisando partes como "montar" a lei da função e encontrar o ponto de intersecção dos gráficos) e, ao final da resolução, um dos participantes disse:

<u>Participante:</u> *Eu já tinha visto esse negócio de função, de gráfico e de reta, mas o professor nunca trouxe problemas desse tipo que são coisas da realidade. Eu nunca ia saber resolver isso sozinho.*

Ele não saberia resolver sozinho este problema porque talvez nunca tenha feito, nunca tenha sido incitado a fazer algo semelhante, como ele mesmo coloca *"o professor nunca trouxe problemas desse tipo"*, uma vez que a resolução de problemas é uma competência prática, como Polya (1978) nos coloca: aprende-se a resolver problemas resolvendo.

Na seqüência propusemos mais um problema (semelhante ao anterior):

<u>Problema 2:</u> Três planos de telefonia celular são apresentados na tabela abaixo:

Plano	*Custo fixo mensal*	*Custo adicional por minuto*
A	R$ 35,00	R$ 0,50
B	R$ 20,00	R$ 0,80
C	0	R$ 1,20

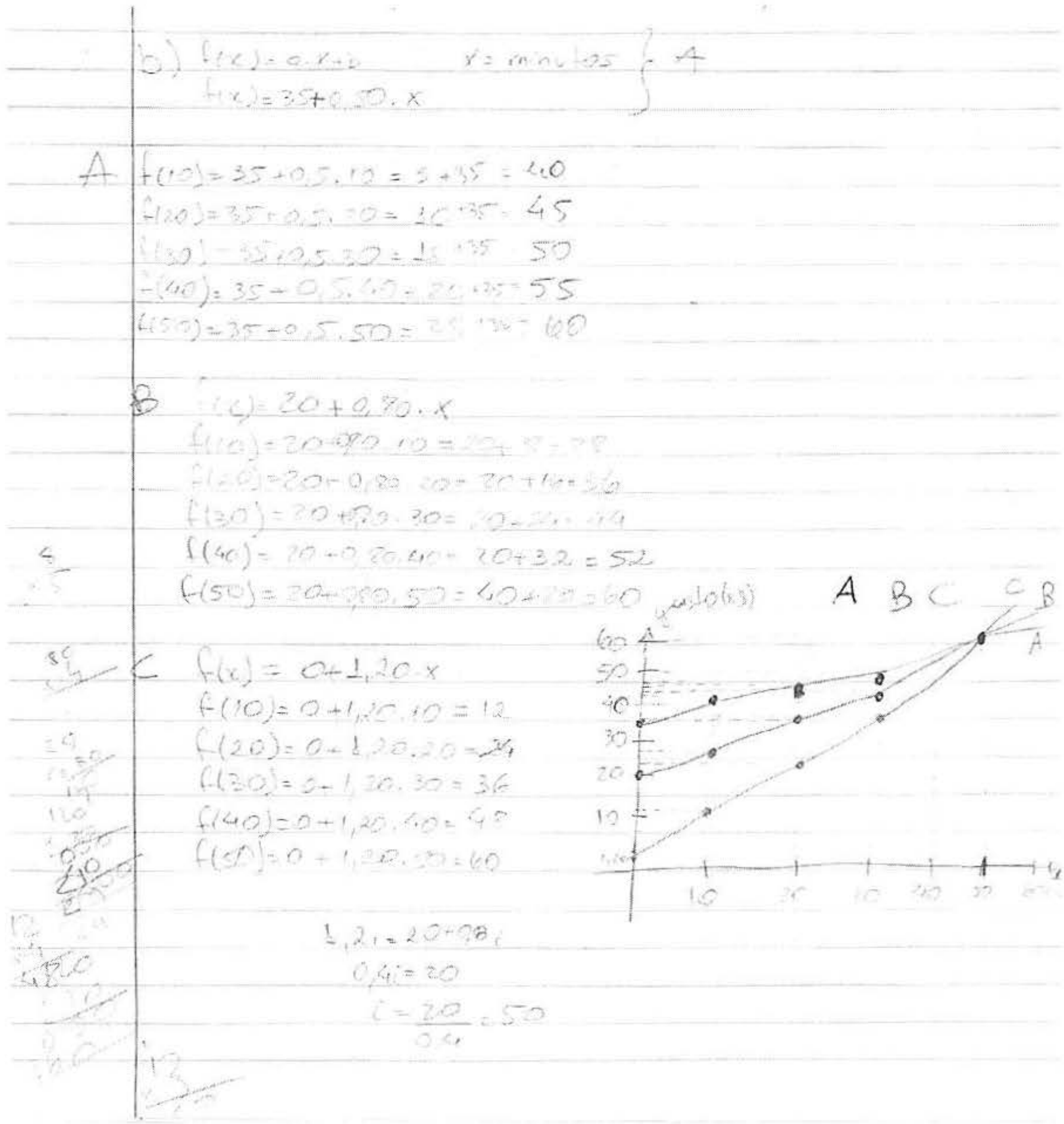
a) Qual é o plano mais vantajoso para alguém que utilize 25 minutos por mês?

b) A partir de quantos minutos de uso mensal o plano A é mais vantajoso que os outros dois?

Propusemos mais uma pergunta adicional:

c) Discuta sobre a vantagem de um plano sobre o outro.

Para alguns participantes este já não se tratava de um problema, mas sim de um exercício (de acordo com a definição de problemas vistas no capítulo 1), visto que já sabiam como ele poderia ser resolvido. Porém, a maioria teve dificuldades na resolução do item (b) e da pergunta adicional: montaram as leis das funções, fizeram os gráficos, mas não conseguiram fazer a interpretação dos mesmos concluindo qual dos planos é o melhor (que poderia ser algo semelhante a isso: tal plano é melhor se eu falar entre n_1 e n_2 minutos mensais). Um exemplo disso é a resolução (itens b e c) apresentada na Figura 3 abaixo:



b) f(x) = a.x+b   x = minutos   A
f(x) = 35+0,50.x

A f(10) = 35+0,5.10 = 5+35 = 40
f(20) = 35+0,5.20 = 10+35 = 45
f(30) = 35+0,5.30 = 15+35 = 50
f(40) = 35+0,5.40 = 20+35 = 55
f(50) = 35+0,5.50 = 25+35 = 60

B f(x) = 20+0,80.x
f(10) = 20+0,80.10 = 20+8 = 28
f(20) = 20+0,80.20 = 20+16 = 36
f(30) = 20+0,80.30 = 20+24 = 44
f(40) = 20+0,80.40 = 20+32 = 52
f(50) = 20+0,80.50 = 40+20 = 60

C f(x) = 0+1,20.x
f(10) = 0+1,20.10 = 12
f(20) = 0+1,20.20 = 24
f(30) = 0+1,20.30 = 36
f(40) = 0+1,20.40 = 48
f(50) = 0+1,20.50 = 60

1,2x = 20+0,8x
0,4x = 20
x = 20/0,4 = 50

Figura 3: Resolução dos itens b) e c) do problema 2 apresentada por um participante do projeto.

Percebemos que o participante montou as leis das funções, esboçou os gráficos, porém não conseguiu fazer a interpretação dos dados de que dispunha, ou seja, não conseguiu concluir a resolução. Isso pode ser um indício de que em parte do nosso sistema educacional, talvez até em grande parte das aulas de matemática, os alunos apenas decorem procedimentos e fórmulas e os reproduzam sem que sejam necessárias qualquer reflexão ou interpretação acerca dos mesmos. Estas foram as maiores dificuldades apresentadas durante o desenvolvimento do projeto (reflexão, interpretação e criação, aptidões estas indispensáveis para resolver um problema) talvez porque no dia a dia escolar eles não sejam instigados a isso.

2.3 Descrição e análise - Função quadrática

Começamos o trabalho com função quadrática, propondo o seguinte problema:

<u>Problema 1:</u> Com 80 metros de cerca um fazendeiro deseja circundar uma área retangular junto a um rio para confinar alguns animais.

Quais devem ser as medidas do retângulo para que a área cercada seja a maior possível?

Observação: tínhamos planejado inicialmente propor o seguinte problema (como pode ser visto no plano no Apêndice 1):

- Um restaurante a quilo vende 100 kg de comida por dia, a R$ 12,00 o quilo. Uma pesquisa de opinião revelou que, por cada real de aumento no preço, o restaurante perderia 10 clientes com consumo médio de 500 gramas cada um. Qual deve ser o preço do quilo de comida para que o restaurante tenha a maior receita possível?

Porém, durante o desenvolvimento das outras atividades, percebemos que este problema seria muito difícil e as possibilidades de sucesso frente a sua resolução, mesmo que parcial, seriam muito pequenas, decidimos então trocar, visto que como Callejo e Villa (2004) e Pozo (1998) nos orientam, um problema deve ser possível de abordar pelo menos parcialmente, pois se não tiver a menor perspectiva de êxito, o aluno abandonará a tarefa.

Os participantes tiveram muitas dificuldades para resolvê-lo. Um deles encontrou a resposta certa, porém ele chegou à conclusão pelo método de tentativa (como pode ser visto na Figura 4 abaixo), método este empregado por todos os participantes.

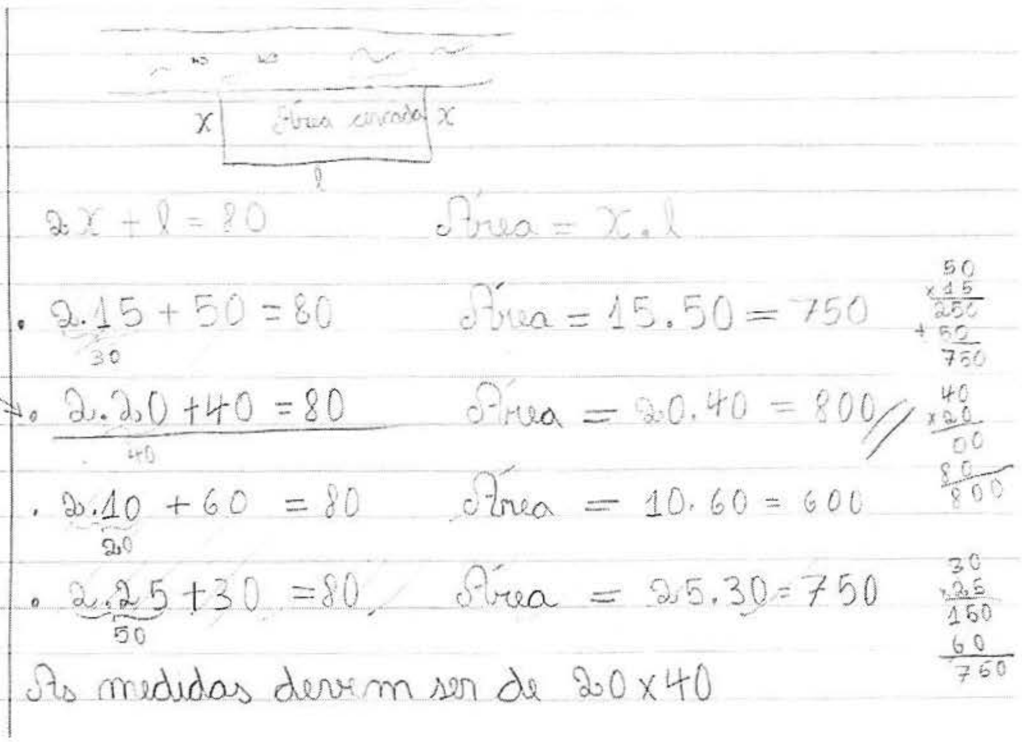


Figura 4: Resolução do problema 1 apresentada por um participante do projeto.

Fizemos então os seguintes questionamentos:

Professor: *Você tem certeza de que é esta a resposta?*

Ele respondeu que não tinha certeza absoluta, mas acreditava que era isso mesmo porque para os valores que ele havia testado tinha dado certo. Perguntamos novamente:

Professor: *E se dois lados tiverem 22 metros e o outro tiver 36 metros, qual vai ter a maior área?*

Ele respondeu que não sabia, mas que para saber bastaria fazer o cálculo e comparar. Perguntamos então:

Professor: *Será que não existe outro método para resolver este problema? Um método que nos de a resposta sem precisar ficar testando valores?*

Ele tentou por alguns minutos, mas acabou desistindo. Esses mesmos questionamentos foram propostos para o grande grupo e que, a exemplo do colega citado anteriormente, depois de alguns questionamentos, algumas reflexões e algumas tentativas frustradas, acabou desistindo.

Apesar da desistência, verificamos que este problema fez com que os participantes se colocassem em movimento na busca de uma solução. Pôs em ação a capacidade criativa quando estes estavam em busca de uma "solução melhor", gerou reflexões e questionamentos, ou seja, alguns dos objetivos principais da metodologia de resolução de problemas foram alcançados.

Após este período fizemos uma pequena revisão do conceito de função quadrática. Trabalhamos com alguns exemplos e com seus relativos gráficos. Fizemos o estudo das raízes das funções, do vértice, da relação entre o coeficiente do termo de grau 2 com a concavidade da parábola e pontos de máximo e mínimo das funções. Terminada esta etapa, pedimos para que os participantes tentassem resolver novamente o problema proposto, tentando utilizar os conceitos que haviam sido abordados anteriormente.

Vejamos na Figura 5, uma resolução feita por um dos participantes após o estudo citado anteriormente:

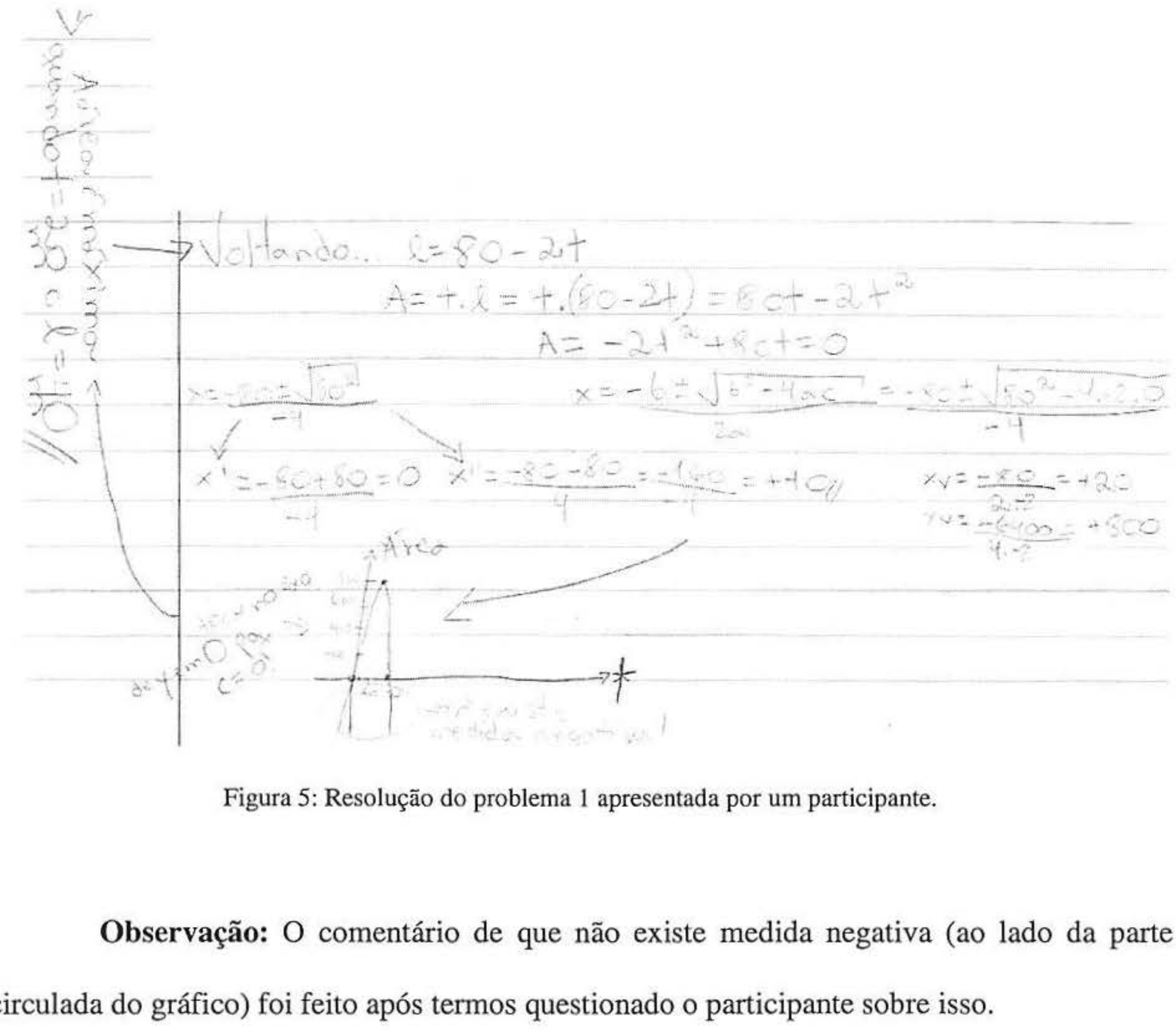


Figura 5: Resolução do problema 1 apresentada por um participante.

Observação: O comentário de que não existe medida negativa (ao lado da parte circulada do gráfico) foi feito após termos questionado o participante sobre isso.

Um fato interessante que se percebe nesta resolução é que, na equação para a área, ele usou a letra *t* como variável e depois na resolução usou a letra *x*, letra que normalmente se usa como variável. Isto novamente pode ser um indício do fato de que a Matemática na escola muitas vezes é tratada como memorização de fórmulas e procedimentos.

A resolução acima já não se tratava mais da resolução de um problema para este participante e sim da resolução de um exercício (conforme a definição de problema vista no capítulo 1), visto que, após o estudo descrito anteriormente, ele sabia perfeitamente os procedimentos que deveriam ser feitos para resolvê-lo. Fato que ocorreu com mais alguns participantes.

No decorrer do projeto percebemos que os participantes tiveram uma mudança de postura frente à resolução de problemas, por exemplo, no início das atividades alguns participantes limitavam-se a ler o problema, afirmar que não sabiam resolver e esperar pela resolução que seria feita pelo grande grupo. No decorrer das atividades esta postura foi se modificando e nas últimas atividades percebemos, por exemplo, que a partir do momento que propúnhamos um problema, a maioria dos participantes começava a traçar e desenvolver estratégias para a resolução, processos nos quais percebemos a presença da autonomia, da criatividade e da reflexão, como pôde ser visto anteriormente.

Tendo em mente o que Polya (1978) nos coloca sobre a resolução de problemas: "A resolução de problemas é uma competência prática como, digamos, o é a natação... Aprendemos a resolver problemas resolvendo-os"(p.3), as dificuldades que os alunos tiveram durante o desenvolvimento do projeto e alguns de seus discursos, percebemos que a resolução de problemas em sala de aula não está sendo favorecida com este grupo, como conseqüência coloca-se toda ênfase na resolução de exercícios. Neste momento cabe retomar o que Polya (1978) diz e que já mencionamos no capítulo 1: um ensino que se reduz ao treinamento de técnicas, ao desenvolvimento mecânico de atividades fica bem abaixo do nível do livro de cozinha, pois as receitas culinárias sempre deixam alguma coisa para a imaginação e análise do cozinheiro, mas as receitas matemáticas não deixam nada disso. Talvez esteja aí uma "explicação" para o fraco desempenho de nossos estudantes em Matemática.

Capítulo 3:

Problemas Propostos

Neste capítulo, será exposta uma seção com problemas relativos à função afim, quadrática, exponencial e logarítmica. Seu objetivo é servir como fonte de consulta para professores e estudantes.

Observação: cabe lembrar mais uma vez que a definição de problema concentra-se basicamente na exigência cognitiva e na necessidade de que o resolvedor elabore estratégias e procedimentos a partir de seus conhecimentos e de sua experiência e não em seus aspectos formais, sendo assim algumas das situações apresentadas abaixo podem constituir-se em um problema para um certo indivíduo e para outros pode ser apenas um exercício pois, por exemplo, o segundo já pode dispor de um método rápido (pronto) e direto para a solução da questão, enquanto o primeiro não o tem.

3.1 Problemas Propostos - Função Afim

1) Um grupo de alunos recolherá dinheiro para uma excursão. Se cada um pagar R$ 20,00 haverá um déficit de R$ 60,00; se cada um pagar R$ 25,00 haverá um excesso R$ 100,00. De quantos alunos é constituído o grupo e quanto custa a excursão? (Adaptado de Hariki e Onaga, 1979)
2) Quando dobra o percurso em uma corrida de táxi, o custo da nova corrida é igual ao dobro, maior que o dobro ou menor que o dobro da corrida original? (Lima, 1996)
3) Dois homens saem numa caminhada, do mesmo ponto, ao mesmo tempo, por caminhos retos perpendiculares um ao outro. Um anda 2 quilômetros por hora e o

outro 3 quilômetros por hora. Expresse a distância entre eles como função do tempo. (Doering, 2007)

4) Uma caixa d'água de 1000 litros tem um furo no fundo por onde escoa água a uma vazão constante. Ao meio dia de certo dia ela foi cheia e, às 6 horas da tarde só tinha 850 litros. Quando ficará pela metade? (Lima, 1996)

5) Dois carros partem, ao mesmo tempo, em movimento retilíneo uniforme, de duas cidades A e B. O carro que parte de A para B tem velocidade de 75km/h e o outro que vai de B para A anda a 80km/h. Sabendo que a distância entre A e B é 300 km determine a que distância de A ocorre o encontro. (Adaptado de Hariki e Onaga, 1979)

6) Admita que 3 operários, trabalhando 8 horas por dia, construam um muro de 36 metros em 5 dias.

   a) Quantos dias são necessários para que uma equipe de 5 operários, trabalhando 6 horas por dia, construa um muro de 15 metros?

   b) Que hipóteses foram implicitamente utilizadas na solução do item anterior?

   c) Dentro dessas mesmas hipóteses, exprima o número D de dias necessários à construção de um muro em função do número N de operários, do comprimento C do muro e do número H de horas trabalhadas por dia. (Lima, 1996)

7) Um tanque de combustível, cuja capacidade é de 1.000 litros, contém 800 litros de uma mistura formada por 24% de álcool e 76% de gasolina. Quantos litros de gasolina devem ser colocados no referido tanque a fim de que a mistura resultante tenha apenas 20% de álcool? (A Prática, 2008)

8) Pessoas apressadas podem diminuir o tempo gasto em uma escada rolante subindo alguns degraus da escada no percurso. Para uma certa escada, observa-se que uma pessoa gasta 30 segundos na escada quando sobe 5 degraus e 20 segundos quando sobe 10 degraus. Quantos são os degraus da escada e qual o tempo normalmente gasto no percurso? (Lima, 1996)

9) Quantos galões de álcool puro devem ser adicionados a 240 galões de gasolina com 3% de álcool para obter uma gasolina com 4% de álcool? (Hariki e Onaga, 1979)

10) O custo de transporte de uma certa carga por ferrovia é composta de uma quantidade fixa de R$ 100,00 mais R$ 5,00 por quilometro rodado. A mesma carga transportada por rodovia tem um custo fixo de R$ 60,00 mais R$ 6,00 por quilometro rodado.

a) Expresse o custo em função da quilometragem rodada do transporte por ferrovia e do transporte por rodovia.

b) Encontre quando os transportes por ferrovia e por rodovia terão o mesmo custo.

c) Esboce o gráfico de cada função no mesmo sistema de eixos e estabeleça um bom critério para transportar de um ou de outro meio. (Doering, 2007)

11) Augusto, certo dia, fez compras em 5 lojas. Em cada loja, gastou metade do que possuía e pagou, na saída, R$ 2,00 de estacionamento. Se após todo essa atividade ainda ficou com R$ 20,00, que quantia ele tinha inicialmente? (Lima, 1996)

12) Um granjeiro ia vender ovos a R$ 2,75 a dúzia. Quando estava colocando na prateleira quebraram-se 5 dúzias e não pretendendo ter prejuízos, resolveu vender a R$ 3,00 a dúzia. Quantas dúzias o granjeiro possuía no início? (Adaptado de Hariki e Onaga, 1979)

13) Na década de 90 estudava-se a implantação da chamada "fórmula 95". Por essa fórmula os trabalhadores teriam direito a aposentadoria quando a soma da idade com o número de anos de serviço atingisse 95. Adotada essa fórmula, quem começasse a trabalhar com 25 anos, com que idade se aposentaria. (Adaptado de Lima, 1996)

14) Um produtor de leite necessita de um hectare para criar uma vaca leiteira. Cada vaca produz 4500 litros de leite por ano, em média, que é vendido por 0,20 dólares o litro. Este produtor tem um gasto anual de 20.000 dólares para manutenção das instalações.

Um pecuarista produz 250 kg da carne por hectare por ano e vende por 0,80 dólares o quilo, sem custos adicionais.

a) Expresse o ganho mensal do produtor de leite em função da área de terra destinada ao leite.

b) Expresse o ganho mensal do pecuarista em função da área de terra destinada à criação.

c) Faça o gráfico de ambas as funções num mesmo sistema de eixos. Localize, calcule e dê o significado do ponto de intersecção dos dois gráficos.

d) Enuncie um critério para determinar qual o melhor investimento: leite ou pecuária, considerando a área de terra destinada a cada um. (Carneiro, 1993)

15) Em uma escola há duas provas mensais, a primeira com peso 2 e a segunda com peso 3. Se o aluno não alcançar média 7 nessas provas, fará prova final. Sua média final será então a média entre a nota da prova final, com peso 2 e a média das provas mensais, com peso 3. João obteve 4 e 6 nas provas mensais. Se a média final para a aprovação é 5, quanto ele precisa obter na prova final para ser aprovado? (Lima, 1996)

16) Na clínica odontológica A, um aparelho ortodôntico custa R$ 380,00 mais uma taxa mensal de manutenção de 20 reais. Na clínica odontológica B, o mesmo aparelho custa R$ 250,00 porém a taxa de manutenção é de 50 reais por mês. Qual das duas opções é mais vantajosa? (Lima, 2001)

17) Arnaldo dá a Beatriz tantos reais quanto Beatriz possui e dá a Carlos tantos reais quanto Carlos possui. Em seguida, Beatriz dá a Arnaldo e a Carlos tantos reais quanto cada um possui. Finalmente, Carlos faz o mesmo. Terminam todos com R$16,00 cada. Quanto cada um possuía no início? (Lima, 1996)

18) Um grupo de estudantes dedicado à confecção de produtos de artesanato gasta R$15,00 em material, por unidade produzida e, além disso, tem um gasto fixo de

R$600,00. Cada unidade será vendida por R$85,00. Quantas unidades terão de vender para obterem um lucro de R$800,00? (UFRGS, ?)

a) 7
b) 10
c) 12
d) 15
e) 20

19) Um carro sai de A para B e outro de B para A, simultaneamente, em linha reta, com velocidades constantes e se cruzam em um ponto situado 720 metros do ponto de partida mais próximo. Completada a viagem, cada um deles pára por 10 min e regressa, com mesma velocidade da ida. Na volta, cruzam-se em um ponto situado a 400 metros do outro ponto de partida. Qual a distância de A até B? (Lima, 1996)

20) Ana e Ivo resolveram trocar mensagens sigilosa usando funções inversas. Inicialmente, relacionam números ao alfabeto (veja a tabela abaixo onde o símbolo # representa um espaço em branco).

#	A	B	C	...	J	K	L	...	W	X	Y	Z
0	1	2	3	...	10	11	12	...	23	24	25	26

Em seguida definem a função que vai codificar a mensagem: $y = 2x - 3$. Assim, por exemplo, à mensagem REVISTA, Ana associa a seqüência numérica 18 5 22 9 19 20 1, mas envia a Ivo a seqüência numérica obtida pelas imagens da função $y = 2x - 3$, ou seja, 33 7 41 15 35 37 -1. Desta forma se Ana envia a Ivo, utilizando-se da mesma função, a seqüência -1 3 7 33 37 27 39, qual é a mensagem que será compreendida pelo Ivo? (Math, 2008)

21) Em uma ferrovia, as estações A e B distam entre si 3 km e a cada 3 min parte um trem de cada uma delas em direção à outra. Um pedestre parte de A para B, no exato momento em que um trem parte de A para B e outro chega a A vindo de B. Ele chega a B no exato momento em que um trem parte de B para A e outro trem chega a B vindo de A. Em seu caminho, o pedestre encontrou 17 trens que iam no mesmo sentido que ele e com 23 trens que iam no sentido oposto ao seu, aí incluídos os 4 trens já citados anteriormente. As velocidades dos trens são iguais. Calcule as velocidades dos trens e do pedestre. (Lima, 1996)

22) Quando Pascal nasceu, Descartes tinha 27 anos e quando Descartes morreu, Pascal tinha 27 anos. Pascal morreu aos 39 anos. A média aritmética das datas das mortes de ambos é 1656. Ache o ano de nascimento e o de morte de cada um deles. (Hariki e Onaga, 1979)

23) Um supermercado está fazendo uma promoção na venda de alcatra: um desconto de 10% é dado nos quilos que excederem a 3. Sabendo que o preço do quilo de alcatra é R$ 4,00, pede-se:

a) O gráfico do total pago em função da quantidade comprada.

b) O gráfico do preço médio por quilo em função da quantidade comprada.

c) A determinação de quantos quilos foram comprados por um consumidor que pagou R$ 15,00. (Lima, 1996)

24) Joaquim deve transportar alguns sacos para um depósito, recebendo R$0,20 por quilo transportado. Os sacos podem pesar 30, 40 ou 50 kg e ele demora 8, 12 ou 20 minutos para transportá-los, respectivamente. Qual é a quantia máxima que o Joaquim poderá ganhar em exatamente uma hora de trabalho? (Revista, 2008)

25) O imposto de renda y pago por uma pessoa que, em 1995, teve uma renda líquida x é calculado através de uma expressão da forma $y = a.x - p$, onde a alíquota a e a parcela a deduzir p dependem da renda x e são dadas por uma tabela, parcialmente fornecida a seguir.

Renda (em R$)	Alíquota (a)	Parcela a deduzir (p)

Até 8.800	0	0
De 8.800 a 17.160	15%	
De 17.160 a 158.450	26%	
Mais de 158.450	35%	

a) Complete a tabela, de modo que o imposto a pagar varie continuamente com a renda (isto é, não haja saltos ao se passar de uma faixa de renda para a outra).

b) Se uma pessoa esta na terceira faixa salarial e sua renda aumenta de R$ 5.000,00, qual será seu imposto adicional (supondo que este acréscimo não acarrete uma mudança de faixa)?

c) É comum encontrar pessoas que lamentam estar no início de uma faixa de taxação ("que azar ter recebido este dinheiro a mais!"). Este tipo de reclamação é procedente?

d) Os casais têm uma alternativa de apresentar declaração em conjunto ou separadamente. No primeiro caso, o "cabeça do casal" pode efetuar uma dedução de R$ 3.000,00 em sua renda líquida mas, em compensação, tem que acrescentar a renda do cônjuge. Em que casos é vantajosa a declaração em separado?

e) A tabela de taxação é, as vezes, dada de uma outra forma, para permitir o cálculo do imposto através de uma expressão da forma $y = b(x - q)$ (isto é, primeiro se deduz a parcela q e depois se aplica a alíquota). Converta a tabela acima para este formato (isto é, calcule os valores de b e q para cada faixa).

f) Qual a renda para qual o imposto é de R$ 20.000,00?

g) Esboce o gráfico da função que associa a cada renda x o percentual desta renda que é pago de imposto. (Lima, 1996)

26) Três planos de telefonia celular são apresentados na tabela abaixo:

Plano	*Custo fixo mensal*	*Custo adicional por minuto*
A	R$ 35,00	R$ 0,50
B	R$ 20,00	R$ 0,80
C	0	R$ 1,20

a) Qual é o plano mais vantajoso para alguém que utilize 25 minutos por mês?

b) A partir de quantos minutos de uso mensal o plano A é mais vantajoso que os outros dois? (UNICAMP, ?)

27) Uma copiadora publicou a seguinte tabela de preços:

Número de cópias de mesmo original	**Preço por cópia**
De 1 a 19	R$ 0,10
De 20 a 49	R$ 0,08
50 ou mais	R$ 0,06

a) Esboce o gráfico da função que associa a cada natural n o custo de n cópias de um mesmo original.

b) O uso da tabela acima provoca distorções. Aponte-as e sugira uma tabela de preços mais razoável. (Lima, 1996)

28) *A* e *B* são locadoras de automóvel. *A* cobra R$ 1,00 por quilômetro rodado mais uma taxa de R$ 100,00 fixa. *B* cobra R$ 0,80 por quilômetro mais uma taxa de R$ 200,00. Discuta a vantagem de *A* sobre *B* ou de *B* sobre *A* em função do número de quilômetros a serem rodados. (Lima, 1996)

29) Quanto tempo levará e que distância terá que percorrer um ciclista, com velocidade de 8km/h, para alcançar um outro que partiu há 3 horas com velocidade de 3km/h? (Hariki e Onaga, 1979)

30) Uma caravana de 7 pessoas deve atravessar o Sahara em 42 dias. Seu suprimento de água permite que cada pessoa disponha de 3,5 litros de água por dia. Após 12 dias a caravana encontra 3 beduínos sedentos, vítimas de uma tempestade de areia, e os acolhe. Pergunta-se:

a) Quantos litros de água caberão a cada pessoa se a caravana prosseguir sua rota como planejado?

b) Se os membros da caravana (beduínos inclusive) continuarem consumindo água como antes, em quantos dias, o máximo, será necessário encontrar um oásis? (Lima, 2001)

31) Dois trens de carga, na mesma linha férrea, seguem uma rota de colisão. Um deles vai a 46 km/h e o outro a 58km/h. No instante em que eles se encontraram a 260 km um do outro, um pássaro que voa a 60 km/h, parte de um ponto entre os dois, até encontrar um deles e então volta para o outro e continua nesse vai-e-vem até morrer esmagado no momento em que os trens se chocam. Quantos quilômetros voou o pobre pássaro? (Lima, 2001)

32) Ao chegar a um aeroporto, um turista informou-se sobre a locação de automóveis e condensou as informações na tabela seguinte:

Opções	Diária	Preço por km rodado
Locadora 1	R$ 50,00	R$ 0,20
Locadora 2	R$ 30,00	R$ 0,40
Locadora 3	R$ 65,00	Km livre

a) Obtenha uma equação que defina o preço y da locação por um dia, em função do número de km rodados, em cada uma das situações apresentadas na tabela.

b) Esboce os gráficos de cada uma das situações.

c) A partir de quantos km a Locadora 1 sairá mais barata do que a Locadora 2?

d) A partir de quantos km a Locadora 3 sairá mais em conta? (Doering, 2007)

33) Um fazendeiro possui ração suficiente para alimentar suas 16 vacas durante 62 dias. Após 14 dias ele vende 4 vacas. Passados 15 dias ele compra 9 vacas. Quantos dias, no total, durou sua reserva de ração? (Lima, 2001)

34) As escalas termométricas assinalam valores positivos e negativos. Elas se baseiam na altura de uma coluna de mercúrio, a qual aumenta ou diminui conforme a temperatura sobe ou desce. Na escala Celsius, o valor 0 corresponde à temperatura em que o gelo começa a fundir-se e o valor 100 assinala a temperatura em que a água entre em ebulição (a pressão do nível do mar). Na escala Fahrenheit esses valores são 32 e 212 respectivamente. Assim, 0° C = 32° F e 100° C = 212° F. Os demais vlores na escala Celsius são marcados dividindo-se os intervalos entre aquelas duas temperaturas em 100 partes de igual comprimento, e na escala Fahrenheit, em 180 partes também de mesmo comprimento. Usando-se esses comprimentos em cada caso, as escalas são estendidas para assinalarem temperaturas superiores à da ebulição e inferiores à da fusão do gelo. Isso requer o uso de números negativos. Pergunta-se em que temperatura as escalas Celsius e Fahrenheit assinalam o mesmo valor? Qual a temperatura em que a marcação em graus Celsius é a metade do valor correspondente em graus Fahrenheit? (Lima, 2001)

35) Numa rodovia, um carro mantém uma velocidade constante de 90 km/h.

a) O que é dado em função do que?

b) Construa uma tabela que indique a correspondência entre a quantidade de horas (de 1até 5 horas) e a distância percorrida.

c) Qual é a regra que associa o número de horas e a distância percorrida?

d) Nesse caso, se o carro percorreu 225 km, quantas horas ele gastou?

e) Se a viagem durasse 6 horas, quantos quilômetros seriam percorridos?*

36) Um fabricante vende um produto por R$0,80 a unidade. O custo total do produto consiste numa taxa fixa de R$ 40,00 mais o custo de produção de R$ 0,30 por unidade.

a) Qual o número de unidades que o fabricante deve vender para não ter lucro nem prejuízo?

b) Se vender 200 unidades desse produto, o comerciante terá prejuízo ou lucro?*

37) Um pedreiro ganha R$6,25 por hora de trabalho, até um total de 48 horas semanais. Se trabalhar mais de 48 horas, numa semana, ganha 20% a mais por hora trabalhada.

a) Quanto ganhará se trabalhar 48 horas?

b) Quanto ele ganhará se trabalhar 50 horas?

c) Descubra a lei que associa o ganho semanal G em função do número t de horas trabalhadas, sendo $t < 48$.

d) Faça o mesmo para o caso em que $t > 48$.*

38) Em Salvador, a bandeirada de uma corrida de táxi é R$ 2,50 e o km rodado custa R$ 0,90.

a) Expresse o valor a ser pago P em função de x km rodados.

---

* Problemas coletados de uma oficina desenvolvida na disciplina de Laboratório de Prática de Ensino Aprendizagem em Matemática III no primeiro semestre de 2007 sob a orientação do professor Marcus Basso.

b) Se paguei R$18,70 por uma corrida de táxi em Salvador, quantos km andei nesta corrida?*

39) O custo total (y) para se produzir um determinado produto é calculado através da soma de um custo variável, que depende da quantidade produzida (x), cujo custo unitário da produção é de R$10,00, mais um custo de R$1.000,00. Pede-se:

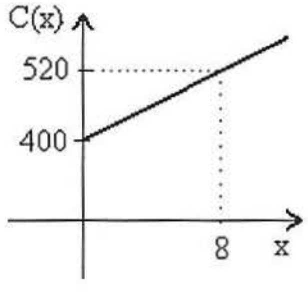
a) A função que representa o custo total em relação à quantidade produzida.

b) O custo total na produção de 20 unidades.

c) O número de unidades que deverão ser produzidas para que o custo total seja de R$4.000,00.

d) O gráfico da função custo total, destacando os dados obtidos nos itens anteriores.*

40) Numa fábrica, o custo C de produção de x litros de certa substância é dado pela função C(x), cujo gráfico está representado abaixo. O custo de R$ 700,00 corresponde à produção de quantos litros? (Math, 2008)



41) No dia 18 dezembro, um cliente de uma loja ao pagar uma prestação de R$ 120,00, com vencimento no dia 03 de dezembro, foi informado que, por razão do atraso, o valor a ser pago deveria ser acrescido de 2% de multa sobre o valor da prestação e mais R$ 0,17 por dia de atraso. Qual o valor final da prestação a ser paga pelo cliente? (FAETEC, ?)

* Problemas coletados de uma oficina desenvolvida na disciplina de Laboratório de Prática de Ensino Aprendizagem em Matemática III no primeiro semestre de 2007 sob a orientação do professor Marcus Basso.

42) Amélia trabalha como empacotadora numa fábrica e gasta, em média, 6 minutos em cada pacote que faz. Quantos pacotes ela prepara em 6 horas de trabalho, se leva um tempo médio de 3 minutos separando o material para cada pacote e gasta 15 minutos no lanche? (CASA DA MOEDA, ?)

43) O José e o Rufino vivem em cidades diferentes que distam 480km uma da outra. Partiram, cada um da sua cidade às oito horas da manhã para se encontrarem algures na estrada que liga as duas cidades. O José vai de carro a uma velocidade média de 80km por hora. O Rufino vai de bicicleta a 30 km por hora. Ao fim de quanto tempo se encontram? (Resolução, 2008)

44) O Carlos sai de Viana do Castelo, viajando com velocidade constante. Passa por um marco que contém dois algarismos. Uma hora depois passa por outro marco, contendo os mesmos dois algarismos, mas em ordem inversa. Uma hora depois passa por um terceiro marco, contendo os mesmos algarismos, separados por um zero. Qual é a velocidade a que vai? (Resolução, 2008)

45) Motorista Matemático - baseado em Boris A. Kordemsky.

Um número palíndromo é aquele que é "o mesmo" lido da esquerda para a direita e vice-versa. Exemplos: 343; 1.001; 245.542, etc. Existem muitas "histórias" sobre esses números. Por exemplo, todo número palíndromo com um número par de dígitos é divisível por 11. Mas essa e outras histórias ficam para outra ocasião...

Vamos ao nosso problema.

Um motorista dirige em uma rodovia cuja velocidade máxima permitida é de 100 km/h. E ele obedece! Então observa que o marcador de quilometragem indica 15.951 km, e diz para si mesmo: "Um palíndromo - e isso aconteceu há um bom tempo". Mas exatamente duas horas depois o marcador apresenta um novo número palíndromo. A que velocidade viaja o motorista matemático? (Resolução, 2008)

46) Um carro acelera do repouso até a velocidade de 8 K, em km/h, durante K/5 minutos. Ele continua com essa velocidade constante por K minutos. Em seguida, desacelera uniformemente e leva outros K/5 minutos até parar, tendo viajado (K – 1) quilômetros. Essa viagem durou um número inteiro em minutos. Quantos? (Resolução, 2008)

47) Um cão persegue uma lebre. Enquanto o cão dá 5 pulos, a lebre dá 8 pulos. Porém, 2 pulos de cão equivalem a 5 pulos de lebre. Sendo a distância entre os dois igual a 36 pulos de cão, qual deverá ser o número de pulos que o cão deve dar para alcançar a lebre? (Resolução, 2008)

48) De dois pontos A e B, distantes 90 m , soltam-se, ao mesmo tempo e em sentido contrário, uma lebre a 10 m/s e um cachorro a 5 m/s.

i. Depois de quanto tempo eles se encontrarão?

ii. Em que lugar isso ocorrerá? (Resolução, 2008)

49) Um rato está 48 metros na frente de um gato que o persegue. Enquanto o rato percorre 4 metros, o gato percorre 7 metros. Quantos metros deverá percorrer o gato para alcançar o rato? (Resolução, 2008)

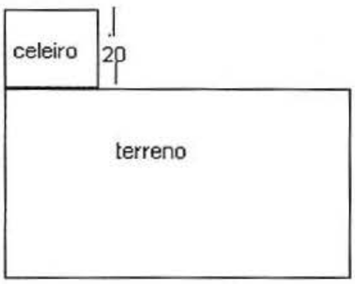
50) Um cãozinho está a 10 m de um balão pousado no solo. O cão começa a correr em direção ao balão no mesmo instante em que este se desprende do solo e inicia uma ascensão vertical. Se o cão corre com velocidade de 2 m/s e o balão ascende com velocidade de 1 m/s qual é a distância mínima entre o cão e o balão? Quantos segundos após o início da corrida essa distância é mínima? (Lima, 2006)

3.2 Problemas Propostos - Função Quadrática

1) Deseja-se cavar um buraco retangular com 1m de largura de modo que o volume cavado tenha $300m^3$. Sabendo que cada metro quadrado de área cavada custa R$ 10,00 e cada metro de profundidade custa R$ 30,00, determinar o comprimento e a profundidade do buraco a fim de que seu custo seja o menor possível. (Lima, 2001)

2) Uma máquina produz 10 000 parafusos num certo tempo. Outra, mais eficiente, pode produzir 250 parafusos a mais por hora e produziria os 10 000 em 2 horas a menos. Quantos parafusos por hora a máquina mais eficiente produz? (Hariki e Onaga, 1979)

3) Um fazendeiro tem 500m de tela para cercar um terreno retangular. Um celeiro quadrado, cujos lados medem 20m será usado como parte da cerca, conforme a figura abaixo.



a) Esboce o gráfico da área do celeiro em função de um dos seus lados.

b) Determine as dimensões do terreno de área máxima que poderá ser cercado nestas condições. (Doering, 2007)

4) Duas torneiras juntas enchem um tanque em 12 horas. Uma delas sozinha levaria 10 horas mais do que a outra pra enchê-lo. Quantas horas leva cada uma das torneiras para encher esse tanque? (Lima, 2001)

5) Se uma torneira enche um tanque em x horas e outra em y horas, quanto tempo levariam as duas juntas para encher esse mesmo tanque? (Lima, 2001)

6) Uma pessoa possui a quantia de R$7.560,00 para comprar um terreno, cujo preço é de R$15,00 por metro quadrado. Considerando que os custos para obter a documentação do imóvel oneram o comprador em 5% do preço do terreno, pergunta-se:

a) Qual é o custo final de cada m² do terreno?

b) Qual é a área máxima que a pessoa pode adquirir com o dinheiro que ela possui? (UNICAMP, ?)

7) Dois comerciantes vendem um certo tipo de tecido. O segundo vendeu 3 metros a mais do que o primeiro. No fim do dia, os dois recebem juntos R$ 35,00 pela venda daquele tecido. O primeiro diz: "Se eu tivesse vendido a meu preço a quantidade que você vendeu, teria obtido R$ 24,00". O segundo responde: "E eu teria recebido R$ 12,50 pelo tecido que você vendeu". Quantos metros vendeu cada um e a que preço? (Lima, 2001)

8) Uma caixa aberta é feita a partir de um pedaço retangular de cartolina, removendo em cada canto um quadrado de lado x e dobrando as abas. Sabendo que os lados da cartolina medem 8 cm e 6 cm, expresse o volume da caixa como função de x. Qual a área externa desta caixa? Existe uma área máxima ou mínima? Caso exista, qual é esta área?(Adaptado de Doering, 2007)

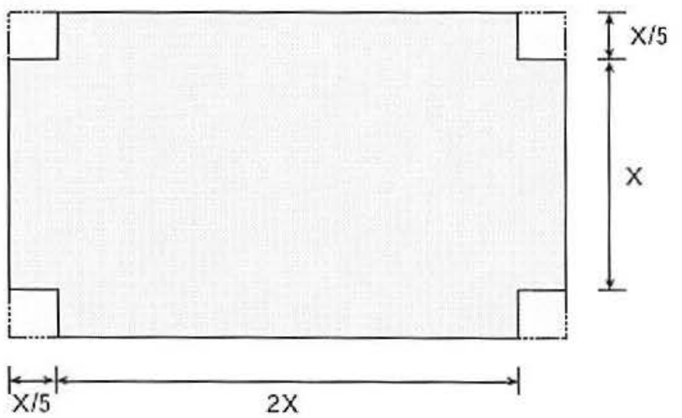
9) Um professor comprou vários exemplares de um livro para presentear seu alunos, gastando R$ 180,00. Ganhou 3 livros a mais de bonificação e com isso cada livro ficou R$ 3,00 mais barato. Quantos livros comprou e a que preço? (Lima, 2001)

10) Um campeonato é disputado em 2 turnos, cada clube jogando duas vezes com cada um dos outros. O total de partidas é 306. Quantos clubes estão no campeonato? (Lima, 2001)

11) O diretor de uma orquestra percebeu que, com o ingresso, a R$ 9,00, em média 300 pessoas assistem aos concertos e que para cada redução de R$ 1,00 no preço dos ingressos, o público aumenta de 100 espectadores. Qual deve ser o preço do ingresso para que a receita seja máxima? (Lima, 1996)

12) Um grupo de amigos, numa excursão, aluga uma van por R$ 342,00. Findo o passeio, três deles estavam sem dinheiro e os outros tiveram que completar o total, pagando R$ 19,00 a mais. Quantos eram os amigos? (Lima, 2001)

13) A figura abaixo é a planificação de uma caixa sem tampa:



a) Encontre o valor de x, em centímetros, de modo que a capacidade dessa caixa seja de 50 litros.

b) Se o material utilizado custa R$ 10,00 por metro quadrado, qual é o custo de uma dessas caixas de 50 litros considerando-se apenas o custo da folha retangular plana? (UNICAMP, ?)

14) Nas águas paradas de um lago, um remador rema seu barco a 12 km/h. Num certo rio, com o mesmo barco e a mesma força nas remadas, ele percorreu 12 km a favor da corrente e 8 km contra a corrente, num tempo total de 2 horas. Qual era a velocidade do rio, quanto tempo ele levou para ir e quanto tempo ele levou para voltar? (Lima, 2001)

15) Dois digitadores, A e B, se alteram na preparação de um manuscrito de 354 laudas. A trabalhou 3 horas a mais do que B. Se A tivesse trabalhado durante o mesmo tempo que B trabalhou teria digitado 120 laudas. Se B tivesse digitado durante o mesmo tempo que A trabalhou, teria completado 252 laudas. Durante quanto tempo cada um trabalhou e quantas laudas cada um digitou? (Lima, 2001)

16) Um terreno retangular deverá ser cercado de modo que dois lados opostos recebam uma cerca reforçada, que custa R$5,00 por metro, enquanto que os outros dois lados receberão uma cerca padrão que custa R$3,00 por metro. Determine as medidas dos lados do terreno de maior área com estas características, sabendo que o custo total para cercá-lo será de R$8.000,00. (Doering, 2007)

17) De um tonel de vinho, alguém retira uma certa quantidade e a substitui por um volume igual de água. Após repetida a mesma operação, o líquido que restou no tonel é a metade vinho e metade água. Quanta água foi colocada no tonel cada uma das duas vezes? (Lima, 2001)

18) Um restaurante a quilo vende 100 kg de comida por dia, a R$ 12,00 o quilo. Uma pesquisa de opinião revelou que, por cada real de aumento no preço, o restaurante perderia 10 clientes com consumo médio de 500 gramas cada um. Qual deve ser o preço do quilo de comida para que o restaurante tenha a maior receita possível? (Lima, 2001)

19) Tenho material para construir 20 metros de cerca. Com ele pretendo fazer um cercado retangular de 26 m^2 de área. Quanto devem medir os lados desse retângulo? (Lima, 2001)

20) Comprei um relógio vagabundo que não funciona direito: ele adianta. Porém num certo instante ele está marcando a hora com atraso de 4 minutos. Se tivesse mostrado um atraso de 6 minutos naquele instante, mas adiantasse ½ minuto a mais por dia, então ele marcaria a hora exata 2 dias mais cedo do que realmente o faz. Quantos minutos o relógio adianta por dia? (Adaptado de Hariki e Onaga, 1979)

21) Numa festa todos se cumprimentam. Sabendo-se que houve 231 cumprimentos, quantas pessoas estavam na festa? (Hariki e Onaga, 1979)

22) Um triângulo isósceles mede 4 cm de base e 5 cm de altura. Nele deve-se inscrever outro triângulo isósceles invertido, cuja base é paralela a base do maior e cujo vértice é o ponto médio da base do primeiro. Qual a área máxima possível do triângulo invertido? Qual a altura desse triângulo de área maior? (Lima, 2001)

23) Quais são os valores possíveis para o produto de dois números reais cuja diferença é 8? Há um menor valor possível? Um maior? (Lima, 2001)

24) Quais números:

a) São pelo menos 16% maiores do que seus quadrados?

b) São no máximo 22% menores do que o quadrado de suas metades?

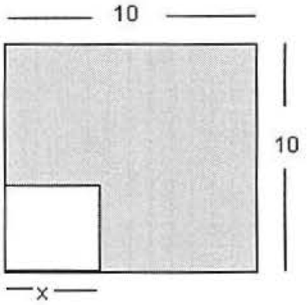
c) Têm o quadrado de sua metade 30% maior do que sua quinta parte? (Lima, 2001)

25) Com 80 metros de cerca um fazendeiro deseja circundar uma área retangular junto a um rio para confinar alguns animais.

Quais devem ser as medidas do retângulo para que a área cercada seja a maior possível? (Lima, 1996)

26) Uma loja está fazendo uma promoção na venda de balas: "Compre x balas e ganhe x% de desconto". A promoção é válida para a compra de até 60 balas, caso em que é concedido o desconto máximo de 60%. Alfredo, Beatriz, Carlos e Daniel compraram 10, 15, 30 e 45 balas, respectivamente. Qual deles poderia ter comprado mais balas e gasto a mesma quantia, se empregassem melhor seus conhecimentos de Matemática? (Lima, 1996)

27) Um quadrado de cartolina tem lados medindo 10 cm. Em um dos cantos foi cortado um pedaço quadrado cujos tamanhos dos lados medem x.



a) Determine a expressão que representa a área da figura pintada de cinza.

b) Qual é a medida da área pintada de cinza quando x=4?

c) Qual é o valor de x para que a área da parte pintada de cinza seja $64cm^2$?

d) Quais são os valores possíveis para x?

e) Qual é a área máxima que o quadrado branco poderá assumir? E quanto à outra parte, qual será a sua área máxima?

f) Esboce o gráfico desta função.*

28) Um avião de 100 lugares é fretado para uma excursão. A companhia exigiu de cada passageiro R$ 800,00 mais R$ 10,00 por cada lugar vago. Para que número de passageiros a rentabilidade da empresa é máxima? (Lima, 1996)

29) João tem uma fábrica de sorvetes. Ele vende, em média, 300 caixas de picolés por R$ 20,00. Entretanto, percebeu que, cada vez que diminuía R$ 1,00 no preço da caixa, vendia 40 caixas a mais. Quanto ele deveria cobrar pela caixa para que sua receita fosse máxima? (Lima, 1996)

30) Um andarilho percorreu 240 km. Se caminhasse 4km a mais por dia chegaria 2 dias antes ao seu destino. Quantos dias levou para fazer a viagem e quantos quilômetros andou por dia? (Adaptado de Hariki e Onaga, 1979)

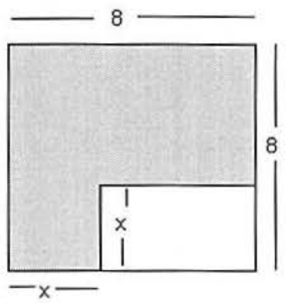
* Problema coletado de uma oficina desenvolvida na disciplina de Laboratório de Prática de Ensino Aprendizagem em Matemática III no primeiro semestre de 2007 sob a orientação do professor Marcus Basso.

31) Um barqueiro leva 4 horas para descer 18km de um rio e voltar ao local de partida. Sabendo-se que a velocidade do barco em água parada 12km/h, qual a velocidade da correnteza? (Hariki e Onaga, 1979)

32) Um prédio de 1 andar, de forma retangular, com lados proporcionais a 3 e 4, vai ser construído. O imposto predial é de R$ 1,00 por metro quadrado, mais uma taxa fixa de R$ 250,00. a prefeitura concede um desconto de R$ 1,00 por metro linear do perímetro, como recompensa pela iluminação externa e pela calçada em volta do prédio. Qual devem ser as medidas dos lados para que o imposto seja o mínimo possível? Qual o valor desse imposto mínimo? Esboce o gráfico do valor do imposto como função do lado maior do retângulo. (Lima, 1996)

33) Determine entre os retângulos de mesma área *a*, aquele que tem o menor perímetro. Existe algum retângulo cujo perímetro seja maior do que todos os demais com mesma área? (Lima, 1996)

34) Observe a figura abaixo:



a) Determine a relação que representa a área da figura pintada de cinza em função do lado x.

b) Quais são os possíveis valores para x?

c) Qual a medida da área pintada de cinza quando x=2? E quando x=3?

d) Encontre o valor de x para que a área pintada de cinza tenha uma medida de 60 unidades de área.

e) Qual será a área máxima da parte branca? E da parte cinza, qual será a área máxima?

f) Esboce o gráfico desta função.*

35) Numa concorrência pública para a construção de uma pista circular de patinação apresentam-se as firmas *A* e *B*. A firma *A* cobra R$ 20,00 por metro quadrado de pavimentação, R$ 15,00 por metro linear do cercado, mais uma taxa de R$ 200,00 para a administração. Por sua vez, a firma *B* cobra R$ 18,00 por metro quadrado de pavimentação, R$ 20,00 por metro linear do cercado e taxa de administração de R$ 600,00. Para quais valores do diâmetro da pista a firma *A* é mais vantajosa? Esboce um gráfico que ilustre a situação. Resolva um problema análogo com os números 18, 20 e 400 para *A* e 20, 10, 150 para *B*. (Lima, 1996)

3.3 Problemas Propostos – Funções Exponencial e Logarítmica

1) Alguns cientistas acreditam que se pode produzir, na Terra, no máximo alimento para 40 bilhões de pessoas. A população da Terra era de 3 bilhões em 1960 e 4 bilhões em 1975. Se a população estiver crescendo exponencialmente, com taxa porcentual constante, em que ano atingirá o limite hipotético de 40 bilhões? Analisando a população atual (aproximadamente 6,7 bilhões), ela realmente cresceu exponencialmente com aquela taxa dada? (Adaptado de Carneiro, 1993)

2) Estima-se que a população de uma cidade cresça 2% a cada 5 anos.

a) Qual é o crescimento estimado para um período de 20 anos?

b) E em um período de t anos? (Lima, 2001)

* Problema coletado de uma oficina desenvolvida na disciplina de Laboratório de Prática de Ensino Aprendizagem em Matemática III no primeiro semestre de 2007 sob a orientação do professor Marcus Basso.

3) As bactérias em um recipiente se reproduzem de forma tal que o aumento do seu número em um intervalo de tempo de comprimento fixo é proporcional ao número de bactérias presentes no início do intervalo. Suponhamos que, inicialmente, haja 1000 bactérias no recipiente e que, após 1 hora, este número tenha aumentado para 1500. Quantas bactérias haverá 5 horas depois do experimento? (Lima, 2001)

4) Em 1993 a taxa média de crescimento populacional do Brasil era de 2,4% ao ano. Se a população daquele ano era de 150 milhões de habitantes, de acordo com aquela taxa:

   a) Qual seria a população no ano 2000?

   b) E no ano 2008?

   c) Compare esses valores com os valores reais. A população continuou crescendo de acordo com aquela taxa? (Adaptado de Carneiro, 1993)

5) A lei do resfriamento de Newton estabelece que, quando um corpo é colocado em um ambiente mantido a temperatura constante, sua temperatura varia de modo a ser a mesma do ambiente, a uma taxa proporcional a diferença de temperatura entre o corpo e o ambiente. Uma peça de metal a 120° C é colocada sobre a bancada do laboratório, mantido a temperatura constante de 20° C. Dez minutos mais tarde, verificou-se que a temperatura da peça tinha reduzido para 80° C.

   a) Qual será a temperatura da peça uma hora depois de ter sido colocada na bancada?

   b) Esboce o gráfico que exprime a temperatura da peça ao longo do tempo. (Lima, 2001)

6) Num jarro estão 7 flores. Elas multiplicam-se tão rapidamente que dobram seu volume a cada minuto. Se para encher o jarro, elas levam 40 minutos, quanto tempo levarão para encher metade do jarro? (Resolução, 2008)

7) A água de um reservatório se evapora a taxa de 10% ao mês. Em quanto tempo ela se reduzirá a um terço do que era no início? (Lima, 2001)

8) Uma pessoa deposita uma quantia em um banco que remunera a taxa de 1% ao mês. Em quantos meses a quantia depositada dobra? (Lima, 2001)

9) Suponha que o preço de um automóvel tenha uma desvalorização média de 19% ao ano sobre o preço do ano anterior. Se F representa o preço inicial e p(t) o preço após t anos, pede-se:

(a) A expressão para p(t);

(b) O tempo mínimo necessário, em número inteiro de anos, após a saída da fábrica, para que um automóvel venha valer menos que 5% do valor inicial. (UNICAMP, ?)

10) Em 1992, um banco afirmava que emprestaria dinheiro a juros de 100% ao ano. Na hora de pagar a sua dívida, um ano depois, um cliente observou que os juros cobrados eram mais altos. Ele procura o gerente do banco que explica que, na verdade, os juros são capitalizados mensalmente, à taxa de $\frac{1}{12}\times 100\% = 8{,}333\%$ ao mês.

a) Qual é a taxa anual efetivamente cobrada pelo banco?

b) E se o banco resolve considerar que os juros são capitalizados a cada dia?

c) E se o banco resolve considerar que os juros são capitalizados continuamente? (Adaptado de Lima, 2001)

11) Uma pessoa tomou 60 mg de uma certa medicação. A bula do remédio informava que sua meia-vida era de seis horas. Como o paciente não sabia o significado da palavra, foi a um dicionário e encontrou a seguinte definição:

Meia-vida: tempo necessário para que uma grandeza (física, biológica ...) atinja metade do seu valor inicial.

Sabendo que o comportamento desta droga é exponencial:

a) Após 12 horas da ingestão do remédio, qual é a quantidade do remédio ainda presente no organismo?

b) E após 3 horas da ingestão?

c) E após t horas de sua ingestão? (Lima, 2001)

12) Observações por longo tempo mostram que, após períodos de mesma duração, a população da terra fica multiplicada pelo mesmo fator. Sabendo que essa população era de 2,68 bilhões em 1956 e 3,78 bilhões 1972, pede-se:

a) O tempo necessário para que a população da terra dobre de valor;

b) A população estimada para o ano 2012;

c) Em que ano a população da terra era de 1 bilhão; (Lima, 1996)

13) Com um lápis cuja ponta tem 0,02mm de espessura, deseja-se traçar o gráfico da função $f(x) = 2^x$. Até que distância à esquerda do eixo vertical pode-se ir sem que o gráfico atinja o eixo horizontal? (Lima, 1996)

14) Um laboratório farmacêutico lançou no mercado um novo analgésico: o *AntiDor*. A concentração deste medicamento, em decigramas por litro de sangue, *t* horas após ser administrado a uma pessoa, é dada por $C(t) = t^2 \cdot e^{-0,6t}$

a) Recorrendo à calculadora, determine o valor de t para o qual é máxima a concentração de *AntiDor* no sangue de uma pessoa que o tenha tomado. Apresente o resultado em horas e minutos. Indique o valor dessa concentração máxima, apresentando o resultado na unidade considerada, com aproximação às décimas.

b) O mesmo laboratório realizou uma campanha de promoção deste medicamento, baseada no *slogan*: «***AntiDor* - Acção rápida e prolongada!**» Numa breve composição, de sessenta a cento e vinte palavras, comente o *slogan*, tendo em conta que:

- para a maioria das dores, o *AntiDor* só produz efeito se a sua concentração for superior a " decigrama por litro de sangue;

- de acordo com uma associação de defesa do consumidor, um bom analgésico deve começar a produzir efeito, no máximo, meia hora após ter sido tomado, e a sua ação deve permanecer durante, pelo menos, cinco horas (após ter começado a produzir efeito). (Escola, 2008)

15) Uma bactéria divide-se em duas a cada "período de geração".

a) Expresse matematicamente o número de bactérias existentes numa cultura, partindo de um só individuo, em função do tempo decorrido em "períodos de geração". Se o período de geração é de 20 minutos (*escherichia coli*), quantas bactérias existirão após 3 horas? Em quanto tempo estarão presentes 1000 bactérias na cultura?

b) Faça o gráfico para essa função em escala usual. (Carneiro, 1993)

3.4 Atividade Proposta - Distância de frenagem de veículos

Um veículo em movimento, ao ser freado pelo motorista, percorre uma certa distância até parar. À distância percorrida pelo veículo nestas circunstâncias chamamos de *distância de frenagem.*

Os motoristas experientes sabem que a distância de frenagem cresce muito com o aumento da velocidade. Usando certas leis da Física é possível determinar aproximadamente a distância percorrida pelo veículo até a parada.

Um guarda rodoviário utiliza a seguinte regra para determinar a distância de frenagem: *elevar a velocidade ao quadrado e dividir o resultado por 100.* Nesta regra, a velocidade é dada em km/h e a distância, em metros.

Problema 1: Usando a regra do guarda rodoviário, calcule a distância de freagem de um carro que está a:

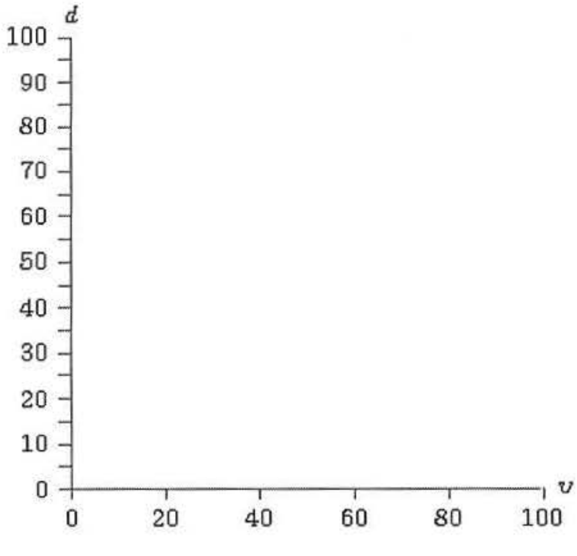
a) 40 km/h;

b) 80 km/h.

Vemos que 80 km/h é o dobro de 40 km/h. Vale o mesmo para as distâncias correspondentes?

Problema 2: Usando ainda a regra do guarda rodoviário, complete a tabela abaixo, onde v é a velocidade e d a distância de frenagem. Plote os resultados no gráfico.

v	20	40	60	80	100	120
d	4					



A regra do guarda rodoviário pode ser traduzida como uma função $d(v)$ que fornece a distância em relação à velocidade. Complete a fórmula desta função:

$d(v) =$

Problema 3: Observe a seguinte tabela de frenagem de um veículo de uma certa marca, divulgada por uma revista especializada:

v	40	60	80	100
d	8,2	18,1	31,8	50,3

a) Aumente a tabela calculando outros valores.

v	20	40	60	80	100	120
d		8,2	18,1	31,8	50,3	

b) Supondo que a função $d(v)$ neste caso obedeça a uma regra do tipo $d(v) = (1/k).v^2$, encontre um valor k que corresponda aproximadamente aos dados da tabela.

c) Comparando estes resultados com a regra do guarda rodoviário, você pode imaginar as razões pelas quais a regra do guarda considera distâncias duplicadas em relação a um teste profissional?

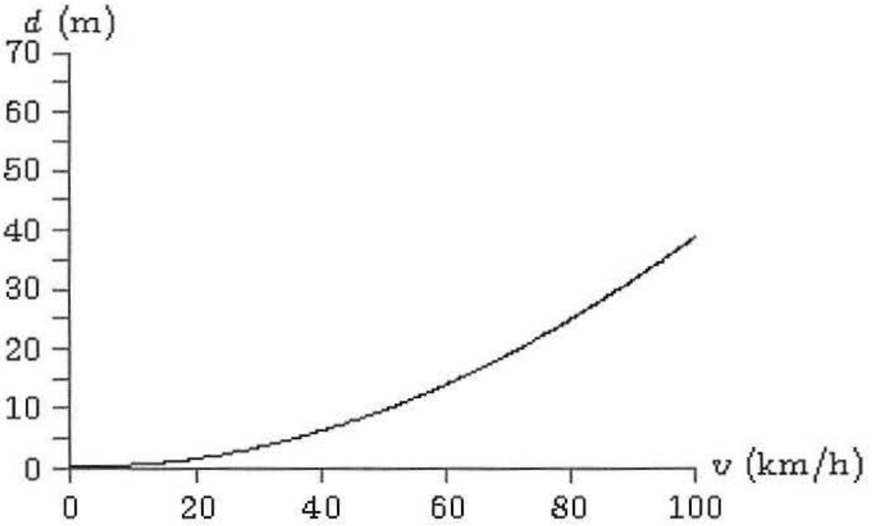
Problema 4: Uma indústria montadora de automóveis está substituindo um modelo já superado por outro que incorpora inovações técnicas. O novo modelo traz um sistema de freios computadorizado que permite uma frenagem muito mais eficiente. Supondo que as distâncias de frenagem nos dois modelos obedeçam às equações $d_1(v)=(1/k).v^2$ e $d_2(v)=(1/k).v^2$ (modelos antigo e novo, respectivamente), assinale a resposta verdadeira:

a) $k_1 < k_2$

b) $k_1 = k_2$

c) $k_1 > k_2$

Problema 5: O gráfico abaixo fornece as distâncias de frenagem de um certo veículo. Admitindo que a função $d(v)$ neste caso é do tipo $d(v) = (1/k).v^2$, encontre um valor k que corresponda aproximadamente aos dados do gráfico.



Tarefa 1: Procure em um dicionário da Língua Portuguesa o significado das palavras freio, frear, freada, freagem, freamento, frenar, frenamento, frenação, breque.

Tarefa 2: Procure, em revistas especializadas, tabelas de distâncias de frenagens de veículos de várias marcas. Em cada caso obtenha uma fórmula aproximada para a função ***d(v)*** correspondente e plote os dados em um gráfico. Utilize gráficos cartesianos e em barras.

Tarefa 3: Consulte seu professor de Física para obter uma justificativa para a regra *distância de frenagem* = ***(constante)***.v^2.

Sugestão: temos *energia cinética* = ***(m.***v^2***)/2***. Em situações ideais, *energia cinética* = *f* . ***(deslocamento)***, onde *f* é constante. (Hipertexto, 2008)

CONCLUSÃO

A metodologia de resolução de problemas, do ponto de vista conceitual, não é uma metodologia nova, basta ver que um dos grandes autores da área, George Polya, tem livros publicados sobre o assunto na década de 70. Porém, o que se percebeu no desenvolvimento do projeto descrito no capítulo 2 é que os alunos, neste caso, em sua grande maioria, a desconheciam uma vez que várias vezes afirmaram nunca terem tido contato com problemas da natureza dos que foram propostos. Do ponto de vista prático trata-se de uma metodologia nova para este grupo evidenciando o fato de que o ensino da Matemática, neste caso, restringe-se a um ensino baseado na aprendizagem de mecanismos e respostas automáticas, na memorização de procedimentos em detrimento ao desenvolvimento do pensamento. Ensino este que, como Polya (1978) nos disse e já comentamos anteriormente, fica abaixo do nível do livro de cozinha. Talvez aí esteja uma das explicações para o fato do desempenho insatisfatório dos alunos em Matemática.

Apesar de termos comprovado durante o planejamento e desenvolvimento do projeto que a resolução de problemas não é uma tarefa fácil tanto para os professores quanto para os alunos, acreditamos na viabilidade de sua aplicação em sala de aula. Acreditamos nisso visto que, trabalhando pouco mais de 10 horas aula com cada turma, conseguimos obter resultados satisfatórios. Consideramos resultados satisfatórios, por exemplo, o crescimento com relação aos conhecimentos técnicos relativos a funções, a mudança da postura frente à resolução dos problemas (descrita no capítulo 2).

A análise do projeto permite também concluirmos que a metodologia de resolução de problemas faz com que o resolvedor, para ter sucesso em sua resolução, necessite pôr em movimento sua capacidade criativa e exige deste uma postura reflexiva e crítica frente aos problemas. Uma vez que o resolvedor não tenha esta postura, dificilmente terá sucesso na sua resolução como pôde ser visto na seção 2.2, quando o resolvedor apresentou praticamente toda a resolução, porém não soube interpretar os dados de que dispunha e concluir a resolução. Sendo assim comprovamos que a resolução de problemas é uma estratégia de ensino que auxilia na solução da questão proposta anteriormente: Quais são as soluções ou o que podemos fazer para mudar o fato de que os alunos, com o passar do tempo na escola, vão perdendo sua capacidade criativa?

Referências:

A PRÁTICA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/erpm2005/anais/m_cur/mc11.pdf>. Acesso em: 19 maio 2008.

CALLEJO, Maria L. e VILA, Antoni. **Matemáticas para aprender a pensar: El papel de las creencias en la resolución de problemas**. Madri: Narcea, S.A. de Ediciones, 2004.

CARNEIRO, Vera C. **Funções Elementares: 100 situações-problema de matemática**. Porto Alegre: UFRGS, 1993.

CONCEIÇÃO, Katiani da. **Um protótipo para resolução de problemas de máximos e mínimos de funções de várias variáveis.** 2001 In: http://teses.eps.ufsc.br/defesa/pdf/4923.pdf Acesso em: 25 maio 2008.

DIOGO, Marcelio Adriano. **Problemas Geradores no Ensino-Aprendizagem de Matemática no Ensino Médio.** Porto Alegre: UFRGS, 2007. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática), Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

DOERING, Ada M. de S. **Apostila de Pré-Cálculo**. Porto Alegre: UFRGS, 2007.

ECHEVERRÍA, María del P. P. **A Solução de Problemas em Matemática.** In: POZO, Juan Ignácio (org). A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: Artmed, 1998.

ESCOLA Secundária Marques de Castilhos Disponível em: <http://membros.aveiro-digital.net/pinto/matematica/escola/05-06/12_Ano/Funcoes/Exp_Log_2.pdf>. Acesso em: 10 out. 2008.

HARIKI, Seiji. ONAGA, Dulce S. **Curso de Matemática.** São Paulo: Harper & Row do Brasil Ltda, v. 1, 1979.

HIPERTEXTO Pitágoras: ensino e investigação em Matemática Disponível em: <http://www.dm.ufscar.br/hp/hp202/hp2021/hp2021001/hp2021001a.html>. Acesso em: 21 maio 2008.

LIMA, Elon L. et al. **A matemática do ensino médio.** Rio de Janeiro: IMPA, v. 1, 1996.

LIMA, Elon L. et al. **Temas e Problemas.** Rio de Janeiro: SBM, 2001.

LIMA, Elon L. et al. **Temas e problemas elementares**. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

MATH: Prof. Ezequias Disponível em: <http://br.geocities.com/silvandabr/>. Acesso em: 20 maio 2008.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático.** Rio de Janeiro: Interciência, 1978

PORTO DA SILVEIRA, J. F. **O que é um problema matemático?** Disponível em: <http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/resu1.html>. Acesso em: 19 maio 2008.

POZO, Juan Ignácio (org). **A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender.** Porto Alegre: Artmed, 1998.

RESOLUÇÃO de Problemas Matemáticos Disponível em: <http://ricardosilva.com.sapo.pt/problemas.htm>. Acesso em: 19 maio 2008.

REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA 47, 2001 Disponível em: <http://www.sbm.org.br/periodicos/rpm/47/Problemas47.doc>. Acesso em: 20 maio 2008.

APÊNDICE:

1. Atividades do Projeto:

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Estágio Em Educação Matemática III (EDU 02X15)

PROJETO: Resolução de Problemas

COORDENADORES DO PROJETO: Lucas Henrique Backes e Rene Baltazar Júnior;

PÚBLICO ALVO: Alunos do Ensino Médio

Ao cursarmos disciplinas como Laboratório de Prática de Ensino-Aprendizagem em Matemática (I, II e III) e Estágio em Educação Matemática (I e II) percebemos que muitos alunos têm uma grande dificuldade de desenvolver uma idéia, um raciocínio, de refletir criticamente. Percebemos também que muitos têm a crença de que a Matemática é apenas um conjunto de fórmulas e que o papel do aluno é decorá-las e aplicá-las, talvez porque durante todos os anos de estudo eles tenham sido "treinados" apenas para isso. O que se pode fazer para invertermos esta situação? Qual(is) é(são) a(s) solução(ões) para esta questão?

Estas são perguntas cuja resposta sem dúvida não se conhece por completo, porém vários estudos nos apontam algumas possíveis soluções, ou melhor, nos apontam estratégias que podem auxiliar na mudança desta situação entre as quais destacaremos neste trabalho a resolução de problemas.

O projeto de *Resolução de Problemas* consiste numa atividade que se desenvolverá semanalmente, num período extraclasse, em horário e local pré determinados proporcionando um total de pelo menos 25 horas de estudo.

TEMA/ASSUNTO:

- Resolução de problemas;

- Funções;

OBJETIVOS:

O objetivo principal desta atividade é o de desenvolver (ou ampliar) a capacidade criativa, de reflexão crítica. Desenvolver algumas formas de pensamentos que são principalmente abordadas na matemática superior (introdução a demonstrações) além de proporcionar uma revisão e aprofundamento de assuntos consagrados visando o vestibular, mais especificamente, trabalharemos com funções.

METODOLOGIA:

Nosso trabalho desenvolver-se-á basicamente da seguinte forma:

- Resolução de problemas em grupos e individualmente;
- Análise das resoluções tentando abordar diferentes formas de resolver um mesmo problema;
- Revisão de tópicos de matemática que serão abordados nos problemas;
- Dicas referentes a estes tópicos visando o vestibular;

Colégio Estadual Julio de Castilhos

Projeto: **Resolução de Problemas**

Coordenadores do projeto: Lucas Henrique Backes e Rene Baltazar Júnior;

Primeira atividade (15/09/08, duração de 1h55min):

Conteúdo:

- Funções (conceito);
- Função afim;

Objetivos:

- Compreensão dos conceitos de função, função afim, domínio, contradomínio, imagem.
- Compreensão de técnicas para resolver problemas/questões utilizando a função afim;

Procedimento:

O trabalho será desenvolvido em grupos de no máximo quatro pessoas.

Passos:

1º) Deixaremos 15 minutos para que os participantes resolvam (ou tentem resolver) o problema motivador;

2º) Conceito de função;

3º) Conceito de função afim, exemplos com seus relativos gráficos, analisando se ela é crescente, decrescente, constante e a relação disso com o coeficiente da variável;

4º) Retomaremos os problemas motivadores resolvendo-os usando e identificando os conceitos trabalhados e proporemos mais dois problemas;

5ª) Trabalho com questões de vestibular;

OBS.: Estamos levando em consideração o fato de que os tópicos abordados nos passos 2 e 3 não serão novidade para os participantes, portanto os trataremos rapidamente.

1º Passo:

Problema motivador:

1) Na clínica odontológica A, um aparelho ortodôntico custa R$ 3800,00 mais uma taxa mensal de manutenção de 20 reais. Na clínica odontológica B, o mesmo aparelho custa R$ 2500,00 porém a taxa de manutenção é de 50 reais por mês. Qual das duas opções é mais vantajosa?

Problema extra:

1) (UNICAMP) Três planos de telefonia celular são apresentados na tabela abaixo:

Plano	*Custo fixo mensal*	*Custo adicional por minuto*
A	R$ 35,00	R$ 0,50
B	R$ 20,00	R$ 0,80
C	0	R$ 1,20

a) Qual é o plano mais vantajoso para alguém que utilize 25 minutos por mês?

b) A partir de quantos minutos de uso mensal o plano A é mais vantajoso que os outros dois?

2º Passo:

Depende ou não depende?

a) A primeira jogada do JOGO DA VELHA determina o resultado final, isto é, o resultado do jogo **depende** da primeira jogada? (não)

b) A população de um país **depende** de sua área? (não)

c) A medida do lado de um quadrado determina sua área, ou seja, a área do quadrado **depende** da medida do lado? (sim)

d) A área do retângulo **depende** da medida de apenas um de seus lados? (não)

e) A medida do perímetro das figuras geométricas **depende** da medida da área? (não)

Definição:

Dados dois conjuntos não vazios A e B, uma função de A em B é uma regra que diz como associar cada elemento $x \in A$ a um único elemento $y \in B$ (Notação: $f: A \rightarrow B$ onde A é chamado de domínio e B de contradomínio).

- O que podemos dizer a respeito do item c? (a área do quadrado é determinada em função do tamanho do lado, ou seja, a cada tamanho do lado temos uma área associada, é uma função).

- Exemplos de funções usando conjuntos nos quais identificaremos domínio, contradomínio e imagem;

<u>3º Passo:</u>

Uma função $f: A \rightarrow B$ chama-se *função afim* quando existem dois números **a** e **b** tais que $f(x) = \mathbf{a} \cdot x + \mathbf{b}$, para todo $x \in A$.

Exemplos:

a) $f(x) = 2 \cdot x + 1$

b) $f(x) = -1 \cdot x - 3$

c) $f(x) = 1$

d) $f(x) = \frac{1}{3} \cdot x$

4º Passo:

51) Uma caixa d'água de 1000 litros tem um furo no fundo por onde escoa água a uma vazão constante. Ao meio dia de certo dia ela foi cheia e, às 6 horas da tarde só tinha 850 litros. Quando ficará pela metade?

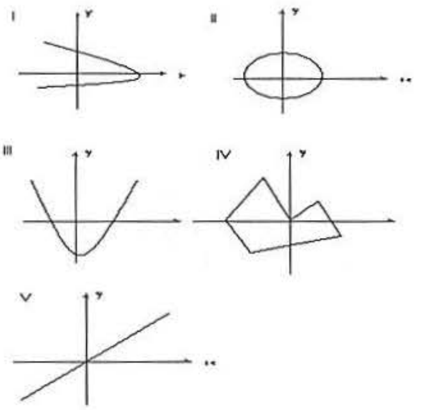
52) Um fabricante vende um produto por R$ 0,80 a unidade. O custo total do produto consiste numa taxa fixa de R$ 40,00 mais o custo de produção de R$ 0,30 por unidade.

a) Qual o número de unidades que o fabricante deve vender para não ter lucro nem prejuízo?

b) Se vender 200 unidades desse produto, o comerciante terá prejuízo ou lucro?

5º Passo:

1) Entre os gráficos abaixo, quais os que podem representar funções:

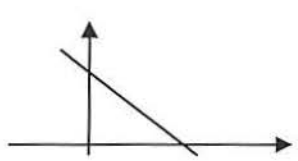


a) I, II e IV   c) IV e III   e) I, II e III

b) I e V   d) III e V

2) (Unifor-CE) O gráfico abaixo representa a função de R em R dada por

f(x) = a·x + b (a, b ∈ R).



De acordo com o gráfico, conclui-se que

(A) $a < 0$ e $b > 0$

(B) $a < 0$ e $b < 0$

(C) $a > 0$ e $b > 0$

(D) $a > 0$ e $b < 0$

(E) $a > 0$ e $b = 0$

3) (UFPI) A função real de variável real, definida por $f(x) = (3 - 2a)x + 2$, é crescente quando:

(A) $a > 0$

(B) $a < 0$

(C) $a = 3/2$

(D) $a > 3/2$

(E) $a < 3/2$

4) (UFRGS) Para que os pontos (1; 3), (3; 1) pertençam ao gráfico da função dada por $f(x) = a \cdot x + b$, o valor de $b - a$ deve ser:

a) 7

b) 5

c) 3

d) -3

e) -7

5) (PUC) Uma função f é dada por $f(x) = a \cdot x + b$, onde a e b são números reais. Se $f(-1) = 3$ e $f(1) = -1$, então $f(3)$ vale

a) 1

b) 3

c) -3

d) 5

f) -5

Desafio:

1) Joaquim deve transportar alguns sacos para um depósito, recebendo R$0,20 por quilo transportado. Os sacos podem pesar 30, 40 ou 50 kg e ele demora 8, 12 ou 20 minutos para transportá-los, respectivamente. Qual é a quantia máxima que o Joaquim poderá ganhar em exatamente uma hora de trabalho?

Referências:

CARNEIRO, Vera Clotilde. Funções elementares, 1ª edição, Editora da Universidade/UFRGS. Porto Alegre: 1993.

DANTE, Luiz R. Matemática: Contexto e Aplicações. 2ª edição, v. 1, Ática, São Paulo, 2000.

LIMA, Elon L. CARVALHO, Paulo C. P. WAGNER, Eduardo. MORGADO, Augusto C. Temas e Problemas. Coleção do Professor de Matemática. SBM, Rio de Janeiro, 2001.

Colégio Estadual Julio de Castilhos

Projeto: **Resolução de Problemas**

Coordenadores do projeto: Lucas Henrique Backes e Rene Baltazar Júnior;

Segunda atividade (22/09/08, duração de 1h55min):

Conteúdo:

- Função afim;
- Função quadrática;
- Modelagem;

Objetivos:

- Compreensão dos conceitos envolvidos com função quadrática: máximo e mínimo, raízes, concavidade, "sinal" da função numa determinada parte do domínio;
- Compreensão de técnicas para resolver problemas/questões utilizando a função afim e função quadrática;

Procedimento:

O trabalho será desenvolvido em grupos de no máximo quatro pessoas.

Passos:

1º) Retomada dos conceitos vistos no encontro anterior, correção do desafio e de alguma atividade que tenha ficado sem correção;

2º) Deixaremos 15 minutos para que os participantes resolvam (ou tentem resolver) o problema motivador;

3º) Definição de função quadrática, exemplos com seus relativos gráficos. Para isso faremos o estudo das raízes das funções, do vértice, a relação do coeficiente do termo de grau 2 com a concavidade, máximos e mínimos;

4°) Retomaremos os problemas motivadores propondo que os participantes (caso não tenham conseguido resolver) os resolvam utilizando os conceitos trabalhados. Posteriormente os resolveremos junto com o grande grupo usando e identificando os conceitos trabalhados. Se tiver algum participante que já tenha resolvido os dois problemas proporemos mais um;

5°) Proposição de um desafio para o próximo encontro;

6°) Proposição da seguinte atividade: Descreva (e posteriormente resolva) uma situação do seu cotidiano na qual você usaria a função quadrática para resolvê-lo;

OBS.: Estamos levando em consideração o fato de que os tópicos abordados no passo 3 não serão novidade para os participantes, portanto os trataremos rapidamente.

Semana- 3 (continuação com funções quadráticas)

1°) Retomada dos conceitos vistos no encontro anterior, correção do desafio e de alguma atividade que tenha ficado sem correção, exposição das atividades do passo 6 do encontro anterior;

2°) Proposição e resolução de problemas envolvendo função quadrática e função afim;

3°) Trabalho com questões de vestibular;

4°) Proposição de um desafio para o próximo encontro;

Passo 2:

Problema motivador:

36) Um restaurante a quilo vende 100 kg de comida por dia, a R$ 12,00 o quilo. Uma pesquisa de opinião revelou que, por cada real de aumento no preço, o restaurante perderia 10 clientes com consumo médio de 500 gramas cada um. Qual deve ser o preço do quilo de comida para que o restaurante tenha a maior receita possível?

Problema extra:

37) João tem uma fábrica de sorvetes. Ele vende, em média, 300 caixas de picolés por R$ 20,00. Entretanto, percebeu que, cada vez que diminuía R$ 1,00 no preço da caixa, vendia 40 caixas a mais. Quanto ele deveria cobrar pela caixa para que sua receita fosse máxima?

Passo 3:

Definição: Uma função f: $A \rightarrow B$ chama-se quadrática quando existem números reais **a**, **b**, **c**, com **a** $\neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in A$.

Sabemos que o gráfico de uma função quadrática é uma parábola e que esta é simétrica em relação a reta que passa pelo vértice, então para esboçá-lo de maneira satisfatória basta que conheçamos:

- Interseção do gráfico com o eixo x (**raízes**): fórmula de Baskara ($x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$ onde $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$).

- Interseção com o eixo y: basta calcular o valor de $f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$

- Concavidade: quando $a > 0$ a concavidade é pra cima; quando $a < 0$ a concavidade é pra baixo;

- Vértice: chamemos o vértice de $V = (x_v, y_v)$. Para determinar x_v usaremos o fato de que a parábola é simétrica em relação a reta que passa pelo vértice, então: $f(x_v - m) = f(x_v + m) \rightarrow a\cdot(x_v - m)^2 + b\cdot(x_v - m) + c = a\cdot(x_v + m)^2 + b\cdot(x_v + m) + c \rightarrow \ldots \rightarrow x_v = \frac{-b}{2a}$

Para determinarmos y_v basta calcularmos $f(x_v) = \frac{-\Delta}{4a}$. Logo $V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$.

- Exemplos com seus respectivos gráficos:

a) $f(x) = x^2 - 2x + 1$

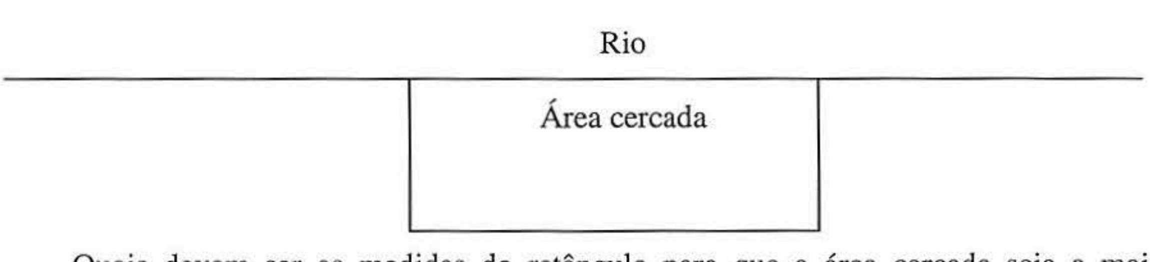
b) $f(x) = -4x^2 + 1$

c) $f(x) = x^2 + 2x + 3$

Nestes exemplos comentaremos também sobre *valor máximo e mínimo* da função, a relação do Δ com o número de raízes reais e também o estudo do sinal da função.

<u>**Passo 4:**</u> Retomada dos problemas motivadores

1) Com 80 metros de cerca um fazendeiro deseja circundar uma área retangular junto a um rio para confinar alguns animais.



Quais devem ser as medidas do retângulo para que a área cercada seja a maior possível?

<u>**Passo5:**</u>

Desafio

Deseja-se cavar um buraco retangular com 1 metro de largura de modo que o volume cavado tenha $300m^3$. Sabendo que cada metro quadrado de área cavada custa R$ 10,00 e cada metro de profundidade custa R$ 30,00, determinar o comprimento e a profundidade do buraco a fim de que seu custo seja o menor possível.

Passo 6:

Descreva (e posteriormente resolva) uma situação do seu cotidiano na qual você usaria a função quadrática para resolvê-la;

Referências:

CARNEIRO, Vera Clotilde. Funções elementares, 1ª edição, Editora da Universidade/UFRGS. Porto Alegre: 1993.

DANTE, Luiz R. Matemática: Contexto e Aplicações. 2ª edição, v. 1, Ática, São Paulo, 2000.

LIMA, Elon L. CARVALHO, Paulo C. P. WAGNER, Eduardo. MORGADO, Augusto C. Temas e Problemas. Coleção do Professor de Matemática. SBM, Rio de Janeiro, 2001.

Colégio Estadual Julio de Castilhos

Projeto: **Resolução de Problemas**

Coordenadores do projeto: Lucas Henrique Backes e Rene Baltazar Júnior;

Terceira atividade (29/09/08, duração de 1h55min):

Conteúdo:

- Função afim;
- Função quadrática;
- Modelagem;

Objetivos:

- Fixação dos conceitos trabalhados nos encontros anteriores;
- Compreensão de técnicas para resolver problemas/questões utilizando a função afim e função quadrática;

Procedimento:

O trabalho será desenvolvido em grupos de no máximo quatro pessoas.

Passos:

1°) Retomada dos conceitos vistos no encontro anterior, correção do desafio e de alguma atividade que tenha ficado sem correção, exposição das atividades do passo 6 do encontro anterior (Descreva (e posteriormente resolva) uma situação do seu cotidiano na qual você usaria a função quadrática para resolvê-lo);

2°) Proposição e resolução de problemas envolvendo função quadrática e função afim;

3°) Trabalho com questões de vestibular;

4°) Proposição de um desafio para o próximo encontro;

Passo 2:

Problemas

38) *A* e *B* são locadoras de automóvel. *A* cobra R$ 1,00 por quilômetro rodado mais uma taxa de R$ 100,00 fixa. *B* cobra R$ 0,80 por quilômetro mais uma taxa de R$ 200,00. Discuta a vantagem de *A* sobre *B* ou de *B* sobre *A* em função do número de quilômetros a serem rodados.

39) Tenho material para construir 20 metros de cerca. Com ele pretendo fazer um cercado retangular de 26 m^2 de área. Quanto devem medir os lados desse retângulo?

40) Um grupo de amigos, numa excursão, aluga uma van por R$ 342,00. Findo o passeio, três deles estavam sem dinheiro e os outros tiveram que completar o total, pagando R$ 19,00 a mais. Quantos eram os amigos?

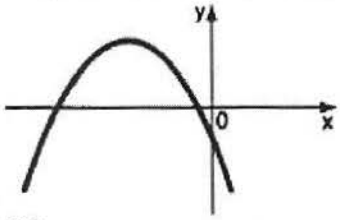
41) Um avião de 100 lugares é fretado para uma excursão. A companhia exigiu de cada passageiro R$ 800,00 mais R$ 10,00 por cada lugar vago. Para que número de passageiros a rentabilidade da empresa é máxima?

42) O diretor de uma orquestra percebeu que, com o ingresso, a R$ 9,00, em média 300 pessoas assistem aos concertos e que para cada redução de R$ 1,00 no preço dos ingressos, o público aumenta de 100 espectadores. Qual deve ser o preço do ingresso para que a receita seja máxima?

Passo 4:

Questões de vestibular

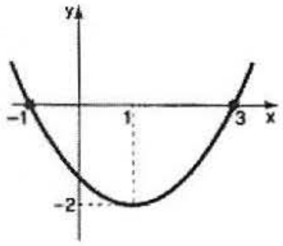
(UFMG) O trinômio $y = ax^2 - bx - c$ está representado na figura.



A afirmativa certa é:
(A) $a > 0$, $b > 0$, $c < 0$
(B) $a < 0$, $b < 0$, $c < 0$
(C) $a < 0$, $b > 0$, $c < 0$
(D) $a < 0$, $b > 0$, $c > 0$
(E) $a < 0$, $b < 0$, $c > 0$

(Fuvest-SP) A equação do segundo grau $ax^2 - 4x - 16 = 0$ tem uma raiz cujo valor é 4. A outra raiz é:
(A) 1
(B) 2
(C) 3
(D) -1
(E) -2

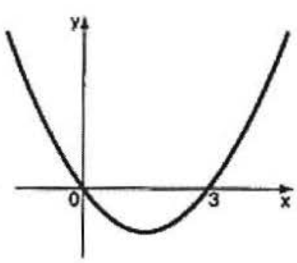
(Cescem-SP) Sabe-se que o gráfico abaixo representa uma função quadrática



Esta função é:
(A) $x^2/2 - x - 3/2$
(B) $x^2/2 - x - 3/2$
(C) $-x^2/2 - x - 3/2$
(D) $x^2 - 2x - 3$
(E) $x^2 - 2x - 3$

(Cesgranirio-RJ) O valor mínimo do polinômio $y = x^2 - bx - c$, cujo gráfico é mostrado na figura, é:

(A) -1
(B) -2
(C) -9/4
(D) -9/2
(E) 3/2



Desafio:

1) Dois comerciantes vendem um certo tipo de tecido. O segundo vendeu 3 metros a mais do que o primeiro. No fim do dia, os dois recebem juntos R$ 35,00 pela venda daquele tecido. O primeiro diz: "Se eu tivesse vendido a meu preço a quantidade que você vendeu, teria obtido R$ 24,00". O segundo responde: "E eu teria recebido R$ 12,50 pelo tecido que você vendeu". Quantos metros vendeu cada um e a que preço?

2) UNICAMP - Uma pessoa possui a quantia de R$7.560,00 para comprar um terreno, cujo preço é de R$15,00 por metro quadrado. Considerando que os custos para obter a documentação do imóvel oneram o comprador em 5% do preço do terreno, pergunta-se:

a) Qual é o custo final de cada m² do terreno?

b) Qual é a área máxima que a pessoa pode adquirir com o dinheiro que ela possui?

Referências:

CARNEIRO, Vera Clotilde. Funções elementares, 1ª edição, Editora da Universidade/UFRGS. Porto Alegre: 1993.

DANTE, Luiz R. Matemática: Contexto e Aplicações. 2ª edição, v. 1, Ática, São Paulo, 2000.

LIMA, Elon L. CARVALHO, Paulo C. P. WAGNER, Eduardo. MORGADO, Augusto C. Temas e Problemas. Coleção do Professor de Matemática. SBM, Rio de Janeiro, 2001.

Colégio Estadual Julio de Castilhos

Projeto: **Resolução de Problemas**

Coordenadores do projeto: Lucas Henrique Backes e Rene Baltazar Júnior;

Quarta atividade (06/10/08, duração de 1h55min):

Conteúdo:

- Função exponencial e logarítmica;
- Modelagem;

Objetivos:

- Compreensão dos conceitos envolvidos com função exponencial e logarítmica;
- Compreensão de técnicas para resolver problemas/questões utilizando a função exponencial e logarítmica;

Procedimento:

O trabalho será desenvolvido em grupos de no máximo quatro pessoas.

Passos:

1º) Retomada dos desafios propostos no último encontro;

2º) Deixaremos 15 minutos para que os participantes resolvam (ou tentem resolver) o problema motivador;

3º) Definição de função exponencial, exemplos com seus relativos gráficos. Relação entre a base e o fato de a função ser crescente ou decrescente; Equações exponenciais;

4º) Definição de função logarítmica, exemplos com seus relativos gráficos. Propriedades dos logaritmos;

5º) Retomaremos os problemas motivadores propondo que os participantes (caso não tenham conseguido resolver) os resolvam utilizando os conceitos trabalhados. Posteriormente os resolveremos junto com o grande grupo usando e identificando os conceitos trabalhados. Se tiver algum participante que já tenha resolvido os dois problemas proporemos mais um;

6°) Proposição de mais um problema e questões de vestibular;

7°) Finalização do projeto;

Passo 2:

Problema motivador

16) A água de um reservatório se evapora a taxa de 10% ao mês. Em quanto tempo ela se reduzirá a um terço do que era no início?

Problema extra:

17) Uma pessoa deposita uma quantia em um banco que remunera a taxa de 1% ao mês. Em quantos meses a quantia depositada dobra?

Passo 3:

Definição: Dado um número real a ($a > 0$ e $a \neq 1$), denomina-se função **exponencial de base *a*** uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ definida por $f(x) = a^x$

Exemplos:

a) $f(x) = 2^x$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

- Gráfico de uma função exponencial;

- Relação da função exponencial crescente e decrescente com $a > 1$ e $0 < a < 1$;

Relembrando algumas propriedades da potenciação:

- Multiplicação de potências de mesma base $\quad \mathbf{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$

- Divisão de potências de mesma base $a^m \div a^n = a^{m-n}$

- Potência de Potência $(a^m)^n = a^{m.n}$

- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

- $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

Equações exponenciais: são aquelas em que a incógnita aparece nos expoentes.

Vejamos alguns exemplos:

$4^x = 32$ $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 81$

__Passo 4:__

Definição de logaritmo: $log_b a = c \leftrightarrow b^c = a$, com $a > 0$ e $0 < b \neq 1$

Relembrando algumas propriedades dos logaritmos:

- $log_a(M \cdot N) = log_a M + log_a N$

- $log_a \frac{M}{N} = log_a M - log_a N$

- $log_a M^n = n \cdot log_a M$

- $log_b N = \frac{log_a N}{log_a b}$

Definição: A função f que associa a cada número real $x > 0$ o número real $log_a x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, é chamada função logarítmica.

Exemplos com seus gráficos:

a) $f(x) = log_{10} x$

b) $f(x) = log_{10} \frac{1}{x}$

__Passo 5:__

Passo 6:

1) Em 1993 um banco emprestava dinheiro a juros de 100% ao ano. Na hora de pagar a sua dívida, um ano depois, um cliente observou que os juros cobrados eram mais altos. Ele procura o gerente do banco que explica que, na verdade, os juros foram capitalizados mensalmente, à taxa de $\frac{1}{12} \times 100\% = 8{,}333\%$ ao mês.

a) Qual é a taxa anual efetivamente cobrada pelo banco?

b) E se o banco resolvesse considerar que os juros são capitalizados a cada dia?

c) E se o banco resolvesse considerar que os juros são capitalizados continuamente?

Questões de vestibular:

1. (Mack) Se $3^{x+2} + 9^{x+1} = 12.3^{x+1}$, então x – 2 vale:

a) 2 c) 0 e) –1

b) 1 d) –2

2. (LUMEN) O maior valor inteiro que devemos atribuir a "p" para que a função f(x) = $(11 - p)^x$ seja crescente é:

a) 7 c) 9 e) 11

b) 8 d) 10

3. Se $3^{x+1} - (2/3^x) = 1$, então o valor de 2x + 1 é:

a) 1 c) –2 e) 3

b) 0 d) –3

4. (UNICAMP) Considere a equação $2^x + m\, 2^{2-x} - 2m - 2 = 0$, onde m é um número real .

a) Resolva essa equação par m = 1.

b) Encontre todos os valores de m para os quais a equação tem uma única raiz real.

5. (UFPB) O valor de um certo imóvel, em reais, daqui a t anos é dado pela função $V(t) = 1000(0,8)^t$. Daqui a dois anos, esse imóvel sofrerá, em relação ao valor atual, uma desvalorização de:

a) R$ 800,00

c) R$ 512,00

b) R$ 640,00

d) R$ 360,00

e) R$ 200,00

6. (UFV) Uma pessoa deposita uma quantia em dinheiro na caderneta de poupança . Sabendo-se que o montante na conta, após t meses, é dado por $M(t) = C.2^{0,01t}$, onde C é uma constante positiva, o tempo mínimo para duplicar a quantia depositada é:

a) 6 anos e 8 meses

d) 9 anos e 3 meses

b) 7 anos e 6 meses

e) 10 anos e 2 meses

c) 8 anos e 4 meses

7. (VUNESP) Num período prolongado de seca, a variação da quantidade de água de certo reservatório é dada pela função $\mathbf{q(t) = q_0 \,.\, 2(^{-0,1})^t}$, sendo q_0 a quantidade inicial de água no reservatório e q(t) a quantidade de água no reservatório após t meses. Em quantos meses a quantidade de água do reservatório se reduzirá à metade do que era no início?

a) 5

c) 8

e) 10

b) 7

d) 9

Referências:

CARNEIRO, Vera Clotilde. Funções elementares, 1ª edição, Editora da Universidade/UFRGS. Porto Alegre: 1993.

DANTE, Luiz R. Matemática: Contexto e Aplicações. 2ª edição, v. 1, Ática, São Paulo, 2000.

LIMA, Elon L. CARVALHO, Paulo C. P. WAGNER, Eduardo. MORGADO, Augusto C. Temas e Problemas. Coleção do Professor de Matemática. SBM, Rio de Janeiro, 2001.