UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

UM ESTUDO SOBRE AS ESTRATÉGIAS DE RESOLUÇÃO DE QUESTÕES DA OBMEP

PRODUTO DA DISSERTAÇÃO – SEQUÊNCIA DIDÁTICA

LUCIONE DE BITENCOURT MARTINS

PORTO ALEGRE

2015

ANEXO A – Produto da Dissertação

A sequência didática trata de atividades voltadas para a construção de um Ambiente de Aprendizagem em sala de aula, caracterizado por um Cenário para Investigação. Além disso, observamos os passos propostos (citados no texto da dissertação, p.26-28) pelas educadoras Onuchic e Allevato (2009), bem como as formas que os alunos interagem com os colegas e com a pesquisadora e, na reflexão, buscamos oferecer uma educação matemática crítica, em um Ambiente de Aprendizagem que abrange os diferentes modos de pensamentos (algébrico, geométrico, aritmético e combinatório).

Como produto dessa dissertação, reapresentamos as questões que foram selecionadas das provas da segunda fase da OBMEP, do período de 2005 a 2013, seguidas de comentários acerca das estratégias usadas pelos participantes dessa pesquisa. Esperamos que a mesma possa contribuir em outras situações de aprendizagem com alunos da Escola Básica.

Atividade 1

A1

Numa aula de Matemática, a professora inicia uma brincadeira, escrevendo no quadro-negro um número. Para continuar a brincadeira, os alunos devem escrever outro número, seguindo as regras abaixo:

(1) Se o número escrito só tiver um algarismo, ele deve ser multiplicado por 2.

(2) Se o número escrito tiver mais de um algarismo, os alunos podem escolher entre apagar o algarismo das unidades ou multiplicar esse número por 2.

Regras da Brincadeira	
Números com 1 algarismo	**Números com mais de 1 algarismo**
multiplicar por 2	*multiplicar por 2* OU *apagar o algarismo das unidades*

Depois que os alunos escrevem um novo número a brincadeira continua com este número, sempre com as mesmas regras.

Veja a seguir dois exemplos desta brincadeira, um começando com 203 e o outro com 4197:

$$203 \xrightarrow{\text{dobra}} 406 \xrightarrow{\text{apaga}} 40 \xrightarrow{\text{apaga}} 4\ldots$$

$$4197 \xrightarrow{\text{apaga}} 419 \xrightarrow{\text{dobra}} 838 \xrightarrow{\text{apaga}} 83\ldots$$

A) Comece a brincadeira com o número 45 e mostre uma maneira de prosseguir até chegar ao número 1.

B) Comece agora a brincadeira com o número 345 e mostre uma maneira de prosseguir até chegar ao número 1.

C) Explique como chegar ao número 1 começando a brincadeira com qualquer número natural diferente de zero.

Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

A atividade A1 gerou alguns questionamentos como: "um exemplo é suficiente como explicação para qualquer número natural?" Com um representante de cada grupo indo à lousa e apresentando as maneiras de chegar ao número 1, citando exemplos, a professora perguntou: "é necessário prosseguir ou saberiam explicar como chegar ao número 1 começando a brincadeira com qualquer número natural diferente de zero?" Dessa forma, os alunos se envolveram no processo de exploração e explicação. Logo, após as respostas serem representadas na lousa e discutidas, alguns alunos fizeram alguns ajustes nas suas respostas, como a flecha com indicação da ordem decrescente. Assim, cada aluno teve a oportunidade de pensar e criar sua estratégia e, juntos, chegaram à solução considerada correta por todos.

Atividade 2

A2

A caminhonete de Beremiz pode carregar até 2 000 quilos. Ele aceita um serviço para transportar uma carga de 150 sacas de açúcar de 60 quilos cada e 100 sacas de milho de 25 quilos cada.

A) Beremiz conseguirá fazer o serviço em cinco viagens? Por quê?
B) Descreva uma maneira de fazer o serviço em seis viagens.

Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

A atividade A2 não foi considerada como uma situação-problema, mas sim um exercício. Os alunos não encontraram dificuldades na resolução, foram identificando as operações ou algoritmos necessários para resolvê-la, assim, apenas reforçou conhecimentos anteriores.

Atividade 3

A3

A Princesa Telassim cortou uma folha de papel retangular em 9 quadrados de lados 1, 4, 7, 8, 9, 10, 14, 15 e 18 centímetros.

A) Qual era a área da folha antes de ser cortada?
B) Quais eram as medidas da folha antes de ser cortada?
C) A Princesa Telassim precisa montar a folha de novo. Ajude-a mostrando, com um desenho, como fazer esta montagem.

Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

Nas estratégias evidenciadas na atividade A3, temos: o uso de material concreto com a aplicação de problemas correlatos e o estudo de geometria sem aplicação de fórmulas ou regras, proporcionando um ambiente de investigação. Na troca de ideias, com a representação das diferentes resoluções na lousa, com a plenária, ocorreram as discussões e a análise das respostas pelos integrantes da pesquisa. A atividade também trata da semirrealidade em um cenário de investigação e, a cada item, gradualmente, percebemos que a situação foi aumentando a dificuldade, tornando-se um desafio para os participantes.

Atividade 4

A4

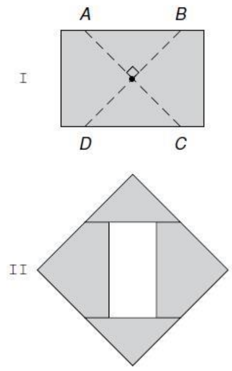
Uma folha retangular de 20 cm por 30 cm foi cortada ao longo das linhas tracejadas *AC* e *BD* em quatro pedaços: dois triângulos iguais e dois polígonos iguais de cinco lados cada um, como na figura I.

Os segmentos *AC* e *BD* têm o mesmo comprimento e se encontram no centro do retângulo formando ângulos retos.

(a) Qual é o comprimento do segmento *AB*?

(b) Qual é a área de um pedaço triangular? E de um pedaço de cinco lados?

(c) Com os quatro pedaços podemos montar um quadrado com um buraco retangular, como na figura II. Qual é a área do buraco?



Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

Na atividade A4 percebemos que o domínio do vocabulário geométrico se faz necessário para o entendimento da situação apresentada. Na primeira leitura vimos que nem todos dominavam a linguagem matemática. Logo, alguns questionamentos foram feitos. Pergunta: “o que é um polígono?” A professora: “o texto não esclarece o que é um polígono?” Resposta: “polígono é um triângulo?” A professora: “o texto apresenta somente triângulos como polígonos?” Resposta: “apresenta o triângulo, o retângulo e a figura de cinco lados”. Assim, mesmo desconhecendo as nomenclaturas, mas com o conhecimento do quadrado e do retângulo, o aluno do N1 foi aprendendo novos conceitos.

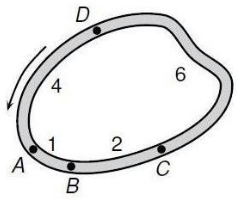
Com o diálogo a professora pode auxiliar o aluno esclarecendo suas dúvidas. Ainda como mediadora, levou o aluno a pensar em problemas correlatos envolvendo o pensamento geométrico.

Os alunos do N2 no primeiro momento começaram a aplicar fórmulas, mas com as explanações das estratégias na lousa, viram que o conhecimento da área do quadrado e do triângulo era suficiente para determinar a solução da situação proposta.

Atividade 5

A5

A figura representa o traçado de uma pista de corrida. Os postos *A*, *B*, *C* e *D* são usados para partidas e chegadas de todas as corridas. As distâncias entre postos vizinhos, em quilômetros, estão indicadas na figura e as corridas são realizadas no sentido indicado pela flecha.
Por exemplo, uma corrida de 17 km pode ser realizada com partida em *D* e chegada em *A*.



(a) Quais são os postos de partida e chegada de uma corrida de 14 quilômetros?

(b) E para uma corrida de 100 quilômetros, quais são esses postos?

(c) Mostre que é possível realizar corridas com extensão igual a qualquer número inteiro de quilômetros.

Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

Na atividade A5, observamos a aplicação do algoritmo da divisão, a soma de parcelas iguais e a presença do diálogo, entre professora e aluna, possibilitou para que ela se manifestasse, dando abertura para suas colocações. Assim, foi criado um cenário para investigação, com busca de esclarecimentos de algumas dúvidas, como o ponto de partida e de chegada. Também evidenciamos o pensamento aritmético e, na generalização, o pensamento algébrico.

A maioria dos alunos considerou o item **c** difícil e poucos conseguiram resolvê-lo sozinho. A troca de ideias entre os alunos possibilitaram no desenvolvimento da atividade a construção de uma tabela. Com a representação na lousa, nas reflexões sobre as estratégias apresentadas e discutidas, percebemos que a plenária contribuiu para a busca de um consenso e para que chegassem à formalização.

Atividade 6

A6

O quadrado da figura I é chamado *especial* porque

1. ele está dividido em 16 quadrados iguais;
2. em cada linha e em cada coluna aparecem os algarismos 1, 2, 3 e 4;
3. em cada um dos quadrados *A*, *B*, *C* e *D* (como na figura II) aparecem os algarismos 1, 2, 3 e 4.

4	2	1	3
1	3	2	4
3	1	4	2
2	4	3	1

I

A	*B*
C	*D*

II

(a) Complete o quadrado abaixo de modo que ele se torne especial.

	2		
3	4		
		1	
			2

(b) É possível completar o quadrado abaixo de modo a obter um quadrado especial? Por quê?

1	2		
3	4		
			2
			1

(c) Exiba todas as maneiras de completar o quadrado abaixo de modo a obter um quadrado especial.

1	2		
3	4		
			1

(d) Quantos quadrados especiais existem?

Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

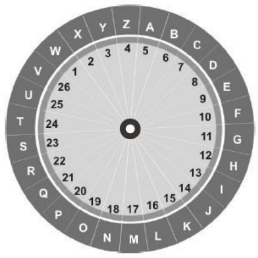
A atividade A6 gerou muitas discussões, principalmente entre os alunos do nível três, em especial, por admitir respostas diferentes. A apresentação na lousa possibilitou aos participantes da pesquisa fazerem a defesa do seu raciocínio, mas nas discussões não entraram num consenso. Como as estratégias utilizadas não foram adequadas para aquela situação às respostas divergiam. As mediações, por meio de questionamentos, sobre as resoluções apresentadas favoreceram nas investigações na busca de um padrão para chegar à generalização.

Com as observações das respostas dadas pelos grupos, perceberam que para obter o número de quadrados especiais é necessário multiplicar as possibilidades, chegando, assim, ao total de quadrados especiais.

Atividade 7

A7

Um antigo método para codificar palavras consiste em escolher um número de 1 a 26, chamado *chave* do código, e girar o disco interno do aparelho ilustrado na figura até que essa chave corresponda à letra A. Depois disso, as letras da palavra são substituídas pelos números correspondentes, separados por tracinhos. Por exemplo, na figura ao lado a chave é 5 e a palavra *PAI* é codificada como 20-5-13.



(a) Usando a chave indicada na figura, descubra qual palavra foi codificada como 23-25-7-25-22-13.

(b) Codifique *OBMEP* usando a chave 20.

(c) Chicó codificou uma palavra de 4 letras com a chave 20, mas esqueceu-se de colocar os tracinhos e escreveu 2620138. Ajude o Chicó colocando os tracinhos que ele esqueceu e depois escreva a palavra que ele codificou.

(d) Em uma outra chave, a soma dos números que representam as letras *A*, *B* e *C* é 52. Qual é essa chave?

Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

A atividade A7 mostra a chave indicada, mas em algumas soluções apresentadas evidenciamos que não passaram da chave cinco para a chave vinte. Muitos alunos custaram a entender que ao passar da chave 5 para a chave 20 deveriam somar 15 aos números do enunciado, lembrando que quando a soma fosse superior a 26 deveriam subtrair 26. Assim, a estratégia utilizada por vários alunos não era a correta.

Com a representação na lousa, por um colega, os demais participantes da pesquisa, que até o momento não tinham compreendido, conseguiram entender e chegaram à resposta correta. No grupo G3 muitos alunos apresentaram o mesmo erro. Não mudavam de chave. Mas uma menina que compareceu apenas em dois encontros foi rápida na resolução. Pedimos para não dizer de imediato o caminho que ela utilizou, dando oportunidade para os colegas pensarem em uma estratégia para que os levasse à solução.

No item **d** alguns alunos precisaram de ajuda, pois foram muitas as tentativas e, estavam prestes a desistir. Mas, com a troca de ideias em cada grupo, todos conseguiram chegar à resposta correta. Observamos que alguns alunos obtiveram a soma dos números que representam as letras A, B e C igual a 52, mas não determinaram a chave.

Atividade 8

A8

Os times *A*, *B*, *C*, *D* e *E* disputaram, entre si, um torneio de futebol com as seguintes regras:

- o vencedor de uma partida ganha 3 pontos e o perdedor não ganha nada;
- em caso de empate cada um dos times ganha 1 ponto;
- cada time joga exatamente uma vez com cada um dos outros.

O campeão do torneio foi o time *A*, seguido na classificação por *B*, *C*, *D* e *E*, nessa ordem. Além disso

- o time *A* não empatou nenhuma partida;
- o time *B* não perdeu nenhuma partida;
- todos os times terminaram o torneio com números diferentes de pontos.

(a) O time *A* ganhou, perdeu ou empatou sua partida contra o time *B*? Por quê?

(b) Com quantos pontos o time *A* terminou o torneio? Por quê?

(c) Explique porque o time *B* obteve um número par de pontos nesse torneio.

(d) Na tabela, cada coluna representa uma partida. Sabendo que ocorreram exatamente 5 empates nesse torneio, desenhe, em cada coluna da tabela, um círculo em volta do nome do time ganhador ou em volta do ×, em caso de empate.

A	*A*	*A*	*A*	*B*	*B*	*B*	*C*	*C*	*D*
×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
B	*C*	*D*	*E*	*C*	*D*	*E*	*D*	*E*	*E*

Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

Na atividade A8, por tratar-se de um torneio de futebol, caracterizamos de acordo com Skovsmose (2000), a situação abordada, por meio da Matemática, como um Ambiente de Aprendizagem com referência à realidade.

Inicialmente, a atividade foi considerada uma brincadeira e depois com as regras estabelecidas pelo problema foram surgindo dificuldades para a resolução. As diversas tentativas e o envolvimento dos alunos na atividade mostraram que eles sentiram-se desafiados e interessados em resolvê-la, propondo uma investigação. Pois, instiga os alunos a pensarem em uma estratégia na busca da solução.

Nas discussões nos grupos, e por meio de reflexões na ação, diversas tabelas foram construídas, com os mesmos resultados, mas colocadas de formas diferentes. Os registros na lousa possibilitaram, no grande grupo, discussões e reflexões sobre cada solução compartilhada, que favoreceram a compreensão de novos conceitos e conteúdos matemáticos. Percebemos ainda que, por meio de problemas, os alunos não ficam presos a uma única estratégia.

Atividade 9

A9

Fernando e Isaura inventaram um jogo diferente, cujas regras são as seguintes:

1. eles começam uma partida com 128 palitos cada um;
2. em cada jogada, eles tiram par ou ímpar; se sai par, Fernando dá metade dos palitos que tem para Isaura e, se sai ímpar, Isaura dá a metade dos palitos que tem para Fernando.
3. eles repetem o procedimento da regra 2 até que um deles fique com um número ímpar de palitos, quando a partida acaba. Ganha quem ficar com maior número de palitos.

Veja o que acontece em uma partida onde a seqüência das três primeiras jogadas é **par**, **ímpar**, **par**:

Fernando	Isaura
128	128

$\xrightarrow[1^a \text{ jogada}]{\text{par}}$

Fernando	Isaura
64	192

$\xrightarrow[2^a \text{ jogada}]{\text{ímpar}}$

Fernando	Isaura
160	96

$\xrightarrow[3^a \text{ jogada}]{\text{par}}$

Fernando	Isaura
80	176

...

(a) Complete o esquema com o número de palitos de Fernando e Isaura, de acordo com as jogadas indicadas.

(b) Uma partida acabou quando Fernando ficou com 101 palitos. Na última jogada saiu par ou ímpar?

(c) Qual foi a seqüência de pares e ímpares da partida que acabou quando Fernando ficou com 101 palitos?

(d) Mostre que qualquer partida acaba com exatamente sete jogadas.

(a)

Fernando	Isaura
128	128

$\xrightarrow[1^a \text{ jogada}]{\text{ímpar}}$

Fernando	Isaura

$\xrightarrow[2^a \text{ jogada}]{\text{ímpar}}$

Fernando	Isaura

$\xrightarrow[3^a \text{ jogada}]{\text{par}}$

Fernando	Isaura

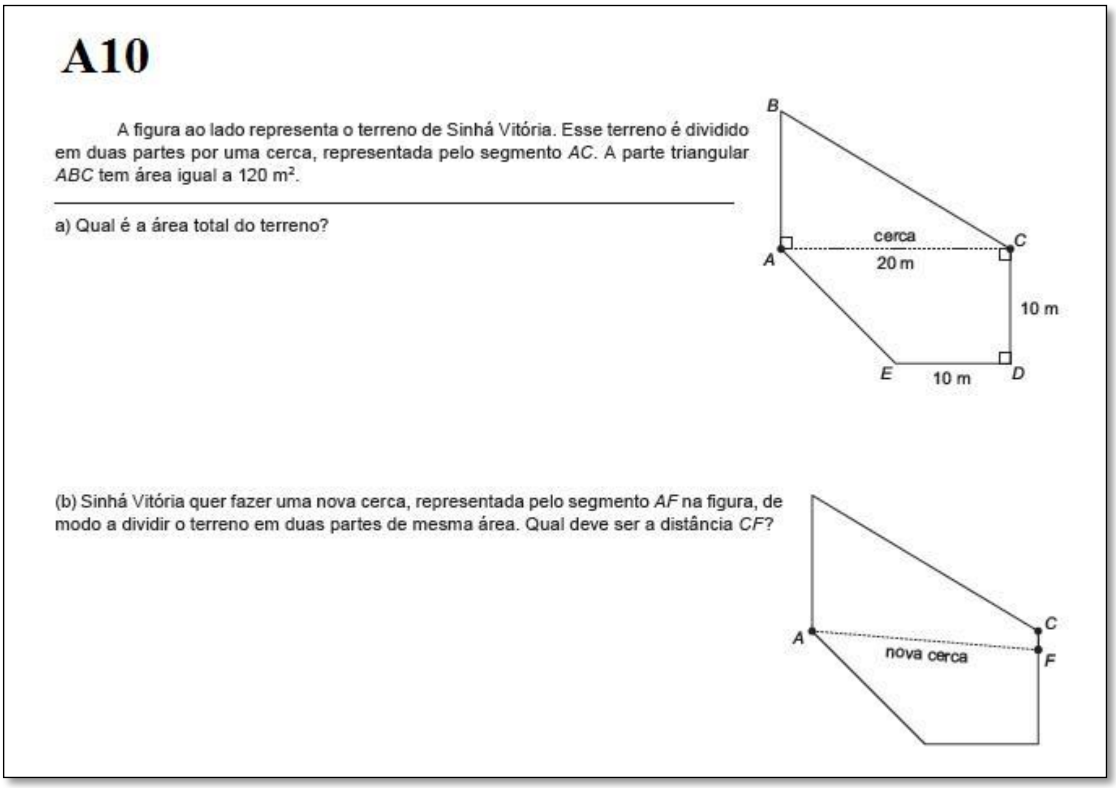
...

Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

A atividade A9 consta no nível 2 e no nível 3, mas foi desenvolvida somente pelos alunos do nível 3. A aluna G criou uma tabela e o aluno S descreveu a sequência de jogadas se foi par ou ímpar.

O item **d** foi resolvido no encontro seguinte com registro da solução de um aluno na lousa, a qual mostrou que qualquer partida terminará exatamente com sete jogadas.

Atividade 10



A10

A figura ao lado representa o terreno de Sinhá Vitória. Esse terreno é dividido em duas partes por uma cerca, representada pelo segmento *AC*. A parte triangular *ABC* tem área igual a 120 m².

a) Qual é a área total do terreno?

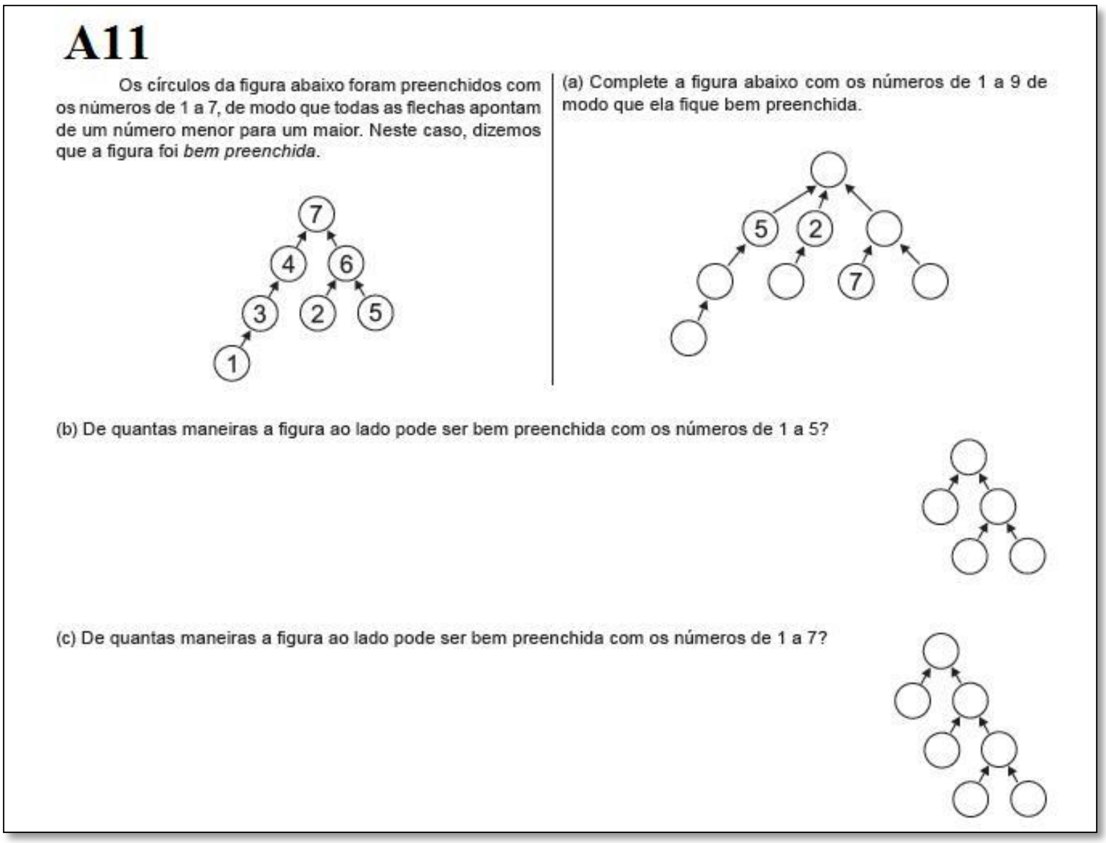
(b) Sinhá Vitória quer fazer uma nova cerca, representada pelo segmento *AF* na figura, de modo a dividir o terreno em duas partes de mesma área. Qual deve ser a distância *CF*?

Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

A atividade A10 provocou alguns questionamentos, tais como: "qual é a fórmula para calcular a área do trapézio?" Neste instante os alunos do nível 1 questionaram: "O que é um trapézio?" Os colegas mostraram na lousa que o terreno era formado por um triângulo e um trapézio. Sugerimos ao grupo que pensassem em um problema correlato e começaram a surgir diferentes formas de resoluções. Observamos que no item **a** os alunos não utilizaram a fórmula do cálculo de áreas de um trapézio, mas os cálculos básicos da área do quadrado e do retângulo. A maioria dos alunos do nível 1 não colocou a unidade de medida na resposta final. No item **c** percebemos que os alunos do N2 apresentaram o **x** como o termo desconhecido, estabelecendo relações com conteúdos aprendidos anteriormente e desenvolvendo o pensamento algébrico.

Os alunos do N1 usaram ferramentas mais simples, chegando aos mesmos resultados. Eles resolveram por meio de tentativas, por aproximações e as com o uso das quatro operações fundamentais. Durante a plenária os alunos do N1 aprenderam novos conceitos e os alunos do N2 perceberam que existiam formas mais simples para chegarem à solução.

Atividade 11



A11

Os círculos da figura abaixo foram preenchidos com os números de 1 a 7, de modo que todas as flechas apontam de um número menor para um maior. Neste caso, dizemos que a figura foi *bem preenchida*.

(a) Complete a figura abaixo com os números de 1 a 9 de modo que ela fique bem preenchida.

(b) De quantas maneiras a figura ao lado pode ser bem preenchida com os números de 1 a 5?

(c) De quantas maneiras a figura ao lado pode ser bem preenchida com os números de 1 a 7?

Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

A atividade A11 trabalha o desenvolvimento do pensamento combinatório a partir do Princípio Multiplicativo, um dos fundamentos da contagem.

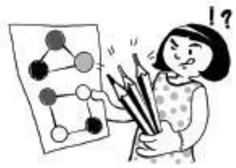
O item **a**, abrange a ideia de resposta única e exata, o que caracteriza um Ambiente de Aprendizagem enquadrado no paradigma do exercício. Os ambientes correspondentes aos demais itens dessa questão, possibilitam a discussão e o questionamento, classificados como Cenários para a Investigação.

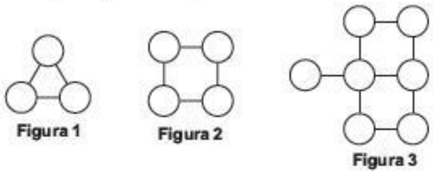
Como as respostas divergiam foi solicitado que um representante de cada grupo colocasse na lousa sua resolução, com as discussões nos grupos, foram encontrados padrões, que contribuíram para que juntos chegassem a um consenso na elaboração de uma resposta correta. Na Resolução de Problemas, essa etapa é importante, conforme Onuchic e Allevato, para a formalização de conteúdos, por parte dos alunos.

Atividade 12

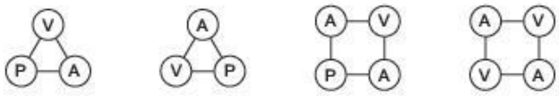
A12

Ana quer colorir as bolinhas das figuras 1, 2 e 3 de azul (A), preto (P) ou vermelho (V) de modo que **bolinhas ligadas por um segmento tenham cores diferentes.**





Veja a seguir duas maneiras diferentes de colorir a figura 1 e duas maneiras diferentes de colorir a figura 2:



(a) De quantas maneiras diferentes Ana pode colorir a figura 1?

(b) De quantas maneiras diferentes Ana pode colorir a figura 2?

(c) De quantas maneiras diferentes Ana pode colorir a figura 3?

Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

Na atividade A12, após a leitura foi necessário o manuseio de material concreto. Usamos três lápis de cores diferentes e, por meio de questionamentos, os alunos chegaram ao entendimento da questão. Como exemplo desses questionamentos, seguem duas perguntas feitas pela professora/pesquisadora: “quantos lápis tenho na minha mão?” e “pintei uma bolinha e agora quantos lápis sobraram para pintar as bolinhas ligadas por um segmento com cores diferentes?” Assim, a partir do entendimento propiciado por algumas perguntas, os alunos iniciaram a investigação.

No item **b** as respostas nos grupos eram 12 ou 18. Então perguntamos se alguém estava interessado em mostrar na lousa para os demais as diferentes maneiras de colorir a figura 2. Cada representante justificou a sua resposta e os grupos que tinham encontrado 12 perceberam, pelas respostas dos colegas, que a solução correta era 18 maneiras.

No item **c** alguns alunos tiraram uma folha de caderno e, por tentativas, buscavam chegar ao número de maneiras diferentes para colorir a figura 3. Outros tentavam pelo Princípio Multiplicativo e foram encontradas várias respostas. As mesmas foram representadas, na lousa, por um integrante de cada grupo, discutidas e analisadas por todos. Nas estratégias utilizadas nesta questão, alguns grupos não consideraram o item anterior chegando ao resultado que não contemplava todas as maneiras diferentes. Os alunos que consideraram o item anterior, ao apresentarem na lousa os passos percorridos em cada item, evidenciaram que 108 era a solução que contemplava as diferentes maneiras para colorir a figura 3. Assim, todos os participantes chegaram ao consenso e à formalização do correspondente conteúdo.

Atividade 13

A13

Um número inteiro n é *simpático* quando existem inteiros positivos a, b e c tais que $a < b < c$ e $n = a^2 + b^2 - c^2$. Por exemplo, os números 1 e 2 são simpáticos, pois $1 = 4^2 + 7^2 - 8^2$ e $2 = 5^2 + 11^2 - 12^2$.

(a) Verifique que $(3x+1)^2 + (4x+2)^2 - (5x+2)^2$ é igual a $2x+1$, qualquer que seja x.

(b) Encontre números inteiros m e n tais que $(3x-m)^2 + (4x-n)^2 - (5x-5)^2 = 2x$, qualquer que seja x.

(c) Mostre que o número 4 é simpático.

(d) Mostre que todos os números inteiros positivos são simpáticos.

Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

A atividade A13 é pseudotransversal, mas foi desenvolvida apenas pelos alunos do nível três. A atividade não despertou o interesse dos mesmos que acabaram não respondendo o item **d.** Como não surgiram procedimentos diferentes as soluções para os primeiros itens foram representados na lousa. Não houve discussões, mas surgiram alguns comentários de que todos os números são simpáticos, talvez uma consequência do enunciado do item **d**.

Atividade 14

A14

No jogo do *Troca-Cor* usa-se um tabuleiro com duas linhas e com quantas colunas quisermos, cujas casas podem mudar da cor branca para cinza e vice-versa. As casas da 1ª linha são numeradas com os números ímpares e as da 2ª linha com os números pares. Em cada jogada aperta-se uma casa e, então, essa casa e as casas vizinhas mudam de cor. Uma *partida completa* começa com todas as casas brancas e termina quando todas ficam cinzas. Veja dois exemplos de partidas completas (os números acima das flechas indicam a casa apertada em cada jogada):

Casas vizinhas são casas que têm um lado comum.

Tabuleiro	Partida completa	Jogadas
2×3	1 3 5 / 2 4 6 $\xrightarrow{1}$ 1 3 5 / 2 4 6 $\xrightarrow{6}$ 1 3 5 / 2 4 6	1 e 6
2×2	1 3 / 2 4 $\xrightarrow{1}$ 1 3 / 2 4 $\xrightarrow{2}$ 1 3 / 2 4 $\xrightarrow{4}$ 1 3 / 2 4 $\xrightarrow{3}$ 1 3 / 2 4	1, 2, 4 e 3

Tabuleiro	Jogadas
1 3 5 7 9 / 2 4 6 8 10	
1 3 5 7 / 2 4 6 8	

(a) Escreva as jogadas de uma partida completa nos tabuleiros ao lado.

(b) Explique como jogar uma partida completa no tabuleiro 2×100.

(c) Explique como jogar uma partida completa com exatamente 51 jogadas no tabuleiro 2×101.

(d) Explique porque não é possível jogar uma partida completa com menos que 51 jogadas no tabuleiro 2×101.

Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

Na atividade A14, no item **a,** a leitura individual no N1 não foi suficiente para o entendimento da questão, sendo necessária a leitura em conjunto. Alguns alunos precisaram tirar uma folha do caderno para fazer os registros e somente depois de várias tentativas conseguiram solucioná-lo.

Nas representações de um tabuleiro 2x100 para os alunos do G2 foi necessário levá-los a percepção de que uma partida completa não cessava em cem. Sugerimos para um dos alunos fazer a representação na lousa de um tabuleiro 2x3, 2x4,... Em seguida perceberam que deveriam prosseguir para determinar o tabuleiro 2x100. Somente depois das representações na lousa perceberam que não era possível acabar o jogo com menos de 51 jogadas. Nesse grupo a professora/pesquisadora utilizou o “erro” na busca do consenso e ao resultado correto.

O uso de material concreto como estratégia de solução, propiciou com a manipulação autônoma à busca da solução, com a introdução de símbolos que facilitaram a visualização das representações no imaginário, ou seja, começaram as abstrações.

Atividade 15

A15

Um "matemágico" faz mágicas com cartões verdes, amarelos, azuis e vermelhos, numerados de 1 a 13 para cada cor. Ele mistura os cartões e diz para uma criança: "Sem que eu veja, escolha um cartão, calcule o dobro do número desse cartão, some 3 e multiplique o resultado por 5. Depois

- some 1, se o cartão for verde;
- some 2, se o cartão for amarelo;
- some 3, se o cartão for azul;
- some 4, se o cartão for vermelho.

Diga-me o resultado final e eu lhe direi a cor e o número do cartão que você escolheu."

a) Joãozinho escolheu o cartão vermelho com o número 3. Qual é o número que ele deve dizer ao matemágico?

b) Mariazinha disse "Setenta e seis" para o matemágico. Qual é o número e a cor do cartão que ela escolheu?

c) Após escolher um cartão, Pedrinho disse "Sessenta e um" e o matemágico respondeu "Você errou alguma conta". Explique como o matemágico pôde saber isso.

Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

A atividade A15 foi desenvolvida apenas com o grupo G3. Os alunos não encontraram dificuldades para resolver esta questão. As respostas eram semelhantes. Os alunos resolveram a partir de tentativas, fazendo as operações e chegando aos valores numéricos. Não surgiu nenhum cálculo algébrico nas resoluções apresentadas.

Atividade 16

A16

Gabriel desenha quadrados divididos em nove casas e escreve os números naturais de 1 a 9, um em cada casa. Em seguida, ele calcula a soma dos números de cada linha e de cada coluna. A figura mostra um dos quadrados do Gabriel; observe que a soma dos números da terceira linha é $5+8+2=15$ e a soma dos números da segunda coluna é $9+7+8=24$. Nesse exemplo, as seis somas são 6, 12, 15, 15, 18 e 24.

6	9	3	18
4	7	1	12
5	8	2	15
15	24	6	

a) Gabriel preencheu um quadrado e fez apenas cinco somas: 9, 13, 14, 17 e 18. Qual é a soma que está faltando?

b) Explique por que não é possível que, em um quadrado do Gabriel, todas as somas sejam números pares.

c) Preencha o quadrado de modo que as somas sejam 7, 13, 14, 16, 18 e 22.

Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

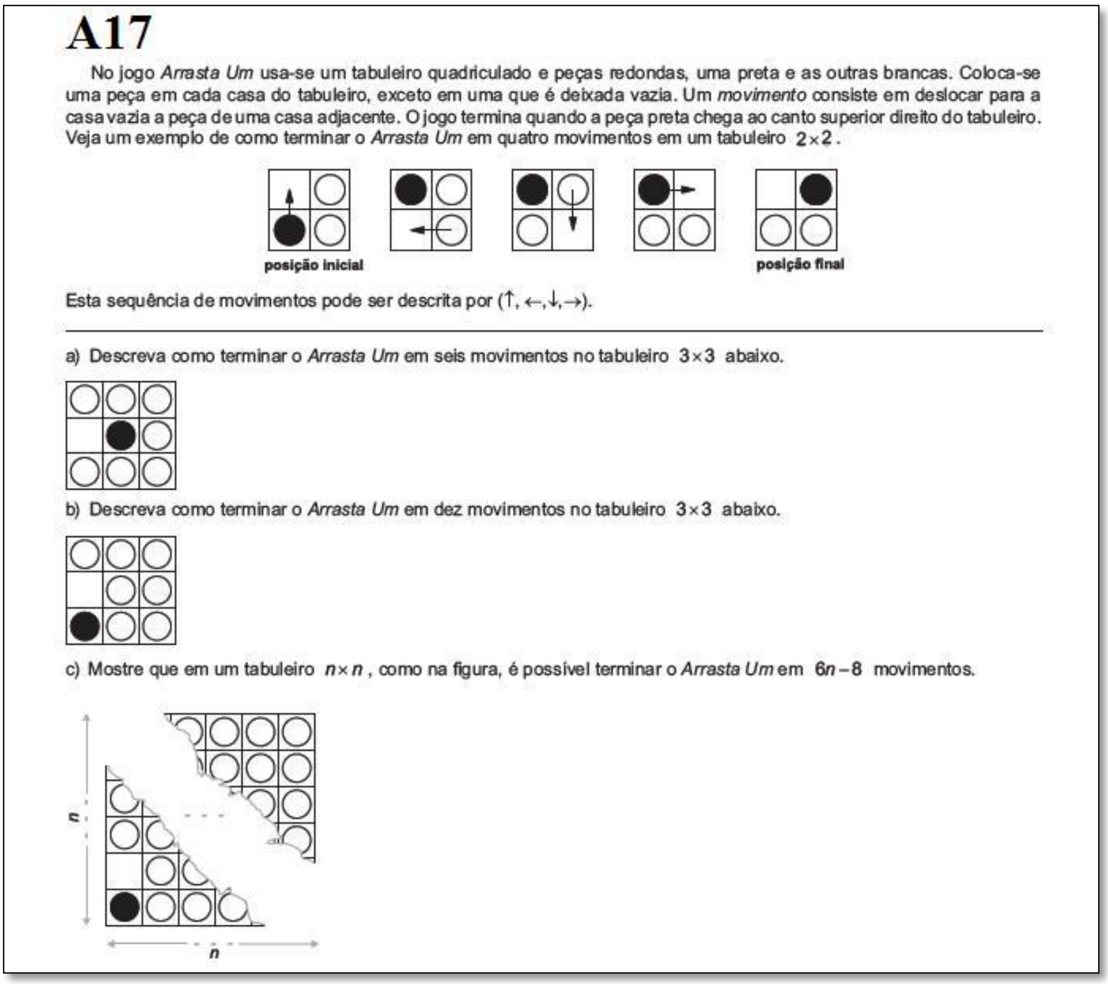
A atividade A16 envolve o pensamento aritmético, mas especificamente operações com números naturais, utilizando o lúdico na busca do desenvolvimento do raciocínio lógico.

Essa atividade, de acordo com Skovsmose, caracteriza um ambiente de aprendizagem com referência a Matemática pura, pois trata da matemática sem interação com o meio. As soluções representadas na lousa levaram os alunos à discussão e pelo envolvimento no desenvolvimento da atividade, caracterizamos o Ambiente de Aprendizagem construído, como um cenário de investigação.

Na resolução os alunos associaram com *problemas correlatos* (Polya), talvez porque já tenham visto anteriormente problemas parecidos, como quadrado mágico.

A escrita foi uma dificuldade encontrada, pois os alunos, em voz alta, comentavam porque não era possível que todas as somas fossem pares, mas na escrita a organização consciente do pensamento era diferente da organização expressa oralmente. A compreensão dos itens anteriores auxiliaram na compreensão e na solução no item **c.** Desse modo, as estratégias aplicadas e assimiladas pelos alunos, contribuíram para o desenvolvimento da capacidade de resolver o problema.

Atividade 17



A17

No jogo *Arrasta Um* usa-se um tabuleiro quadriculado e peças redondas, uma preta e as outras brancas. Coloca-se uma peça em cada casa do tabuleiro, exceto em uma que é deixada vazia. Um *movimento* consiste em deslocar para a casa vazia a peça de uma casa adjacente. O jogo termina quando a peça preta chega ao canto superior direito do tabuleiro. Veja um exemplo de como terminar o *Arrasta Um* em quatro movimentos em um tabuleiro 2×2.

Esta sequência de movimentos pode ser descrita por $(\uparrow, \leftarrow, \downarrow, \rightarrow)$.

a) Descreva como terminar o *Arrasta Um* em seis movimentos no tabuleiro 3×3 abaixo.

b) Descreva como terminar o *Arrasta Um* em dez movimentos no tabuleiro 3×3 abaixo.

c) Mostre que em um tabuleiro $n \times n$, como na figura, é possível terminar o *Arrasta Um* em $6n - 8$ movimentos.

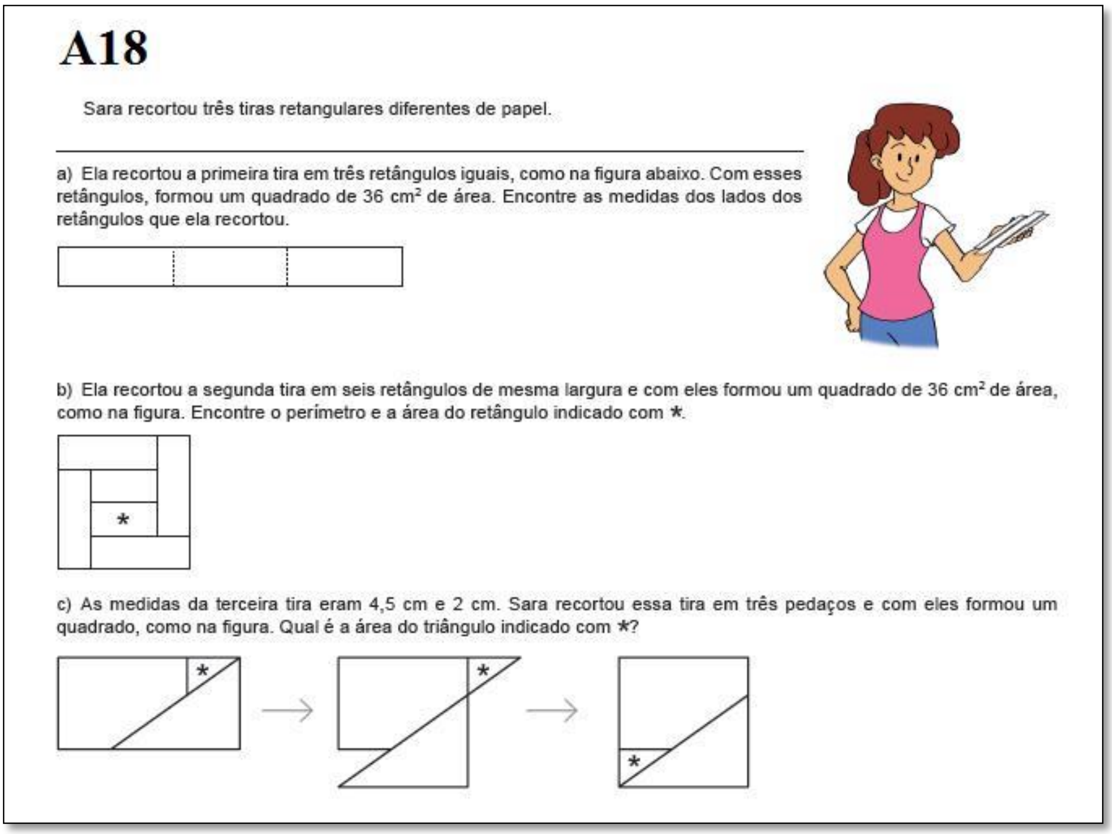
Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

Na atividade A17 os registros apresentados pelos alunos do N2 mostraram o tabuleiro e a sequência de movimentos, mas os alunos do N3 representaram somente a sequência de movimentos. Com a representação do tabuleiro, nos primeiros movimentos, observamos que a visualização contribuiu para a compreensão.

No item c os alunos custaram para entender que a ideia era fazer a peça preta mover ao longo da diagonal do tabuleiro, foram várias representações até chegarem a essa conclusão.

No início os alunos ficavam atribuindo valores para n e depois de várias representações as soluções apresentadas na lousa foram discutidas e chegaram ao final do jogo com 4 + 6(n-2) = 6n-8 movimentos. A atividade foi considerada difícil, diante das diferentes soluções representadas na lousa e das discussões que ocorreram, a mesma foi considerada um desafio e na exploração criou um ambiente investigativo.

Atividade 18



A18

Sara recortou três tiras retangulares diferentes de papel.

a) Ela recortou a primeira tira em três retângulos iguais, como na figura abaixo. Com esses retângulos, formou um quadrado de 36 cm^2 de área. Encontre as medidas dos lados dos retângulos que ela recortou.

b) Ela recortou a segunda tira em seis retângulos de mesma largura e com eles formou um quadrado de 36 cm^2 de área, como na figura. Encontre o perímetro e a área do retângulo indicado com *.

c) As medidas da terceira tira eram 4,5 cm e 2 cm. Sara recortou essa tira em três pedaços e com eles formou um quadrado, como na figura. Qual é a área do triângulo indicado com *?

Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

Na atividade A18, no item **a,** os alunos pensaram apenas no retângulo, não levando em consideração que era para formar um quadrado com as tiras. No item **b** a unidade de medida era desconsiderada por grande parte dos alunos (alguns colocavam até mesmo o perímetro com cm^2). A pesquisadora questionou os integrantes dos grupos sobre essas resoluções diferentes representadas na lousa e os alunos que demonstraram corretamente todos os passos, tiraram as dúvidas dos colegas que não tinham chegado à resposta correta.

No item **c** os alunos do nível 1 perguntavam aos colegas do nível 2 quais as medidas dos lados da segunda e terceira figura. Alguns apresentavam erros nos cálculos, pois não dominavam as operações com números decimais. A atividade apresentou conteúdos que embora não conhecidos por todos proporcionou com as representações das resoluções na lousa a compreensão de novos conteúdos. Assim, essa atividade, permitiu que os estudantes trabalhassem e desenvolvessem o pensamento aritmético e geométrico. Alguns chegaram a apresentar soluções com aplicação do pensamento algébrico.

Atividade 19

A19

Começando com qualquer número natural não nulo é sempre possível formar uma sequência de números que termina em 1, seguindo repetidamente as instruções abaixo:

- se o número for ímpar, soma-se 1;
- se o número for par, divide-se por 2.

Por exemplo, começando com o número 21, forma-se a seguinte sequência:

$$21 \to 22 \to 11 \to 12 \to 6 \to 3 \to 4 \to 2 \to 1$$

Nessa sequência aparecem nove números; por isso, dizemos que ela tem *comprimento* 9. Além disso, como ela começa com um número ímpar, dizemos que ela é uma *sequência ímpar*.

---

a) Escreva a sequência que começa com 37.

b) Existem três sequências de comprimento 5, sendo duas pares e uma ímpar. Escreva essas sequências.

c) Quantas são as sequências pares e quantas são as sequências ímpares de comprimento 6? E de comprimento 7?

d) Existem ao todo 377 sequências de comprimento 15, sendo 233 pares e 144 ímpares. Quantas são as sequências de comprimento 16? Dessas, quantas são pares? Não se esqueça de justificar sua resposta.

Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

Na atividade A19, vários alunos chegavam ao número das sequências possíveis por tentativas, com números aleatórios. Apagavam aquelas cujo comprimento era diferente do enunciado, ficando assim somente com os números desejados. Outros faziam o processo ao contrário, iniciando com o número 1 e abriam um “leque de possibilidades”, não encontrando dificuldades para responder o item posterior. Todas as maneiras foram consideradas, inclusive o “pensar alto” ou a fala de como resolver o problema. Além disso, depois das resoluções serem apresentadas na lousa, juntos, definimos a solução mais adequada, ou seja, que contemplava todas as sequências solicitadas.

Os alunos do N1 e alguns do N2 custaram a compreender o item **d**, mesmo depois de analisadas e discutidas as respostas no grande grupo. No final acabaram aceitando a resposta dos colegas. Logo, nesse item um dos objetivos, que era fazer o aluno pensar e não apenas copiar dos colegas, não foi atingido em relação aos alunos do nível N1 e alguns do N2. No entanto, Polya (2006, p.) diz que: “Ao tentarmos resolver problemas, temos de observar e imitar o que fazem outras pessoas quando resolvem os seus e, por fim, aprendemos a resolver problemas, resolvendo-os.”

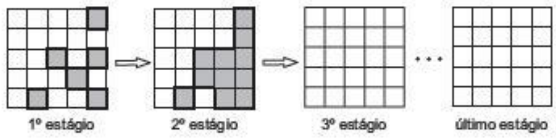
Atividade 20

A20

Uma contaminação em um tabuleiro 5×5, formado por quadrados de 1 cm de lado, propaga-se em estágios de acordo com as seguintes regras:

- quadrados contaminados, indicados em cinza, permanecem contaminados no estágio seguinte;
- um quadrado não contaminado, indicado em branco, torna-se contaminado no estágio seguinte quando tem pelo menos dois lados comuns com quadrados contaminados; caso contrário, permanece não contaminado;
- a contaminação acaba quando não é possível contaminar novos quadrados.

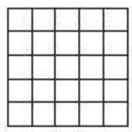
a) Complete a figura abaixo, desenhando o terceiro e o último estágios da contaminação nos respectivos tabuleiros.



O *perímetro de contaminação* de um estágio é a medida do contorno da área contaminada. Por exemplo, os perímetros de contaminação do primeiro e do segundo estágios da contaminação ilustrada são 24 cm e 20 cm, respectivamente, como mostram as linhas em destaque na figura do item a.

b) Escreva os perímetros de contaminação do terceiro e do último estágios da contaminação do item a.

c) Desenhe um estágio com apenas 5 quadrados contaminados tal que, ao final da contaminação, todo o tabuleiro fique contaminado.



d) Explique por que o perímetro de contaminação nunca aumenta de um estágio para o seguinte.

e) Explique por que não é possível contaminar todo o tabuleiro a partir de um estágio com menos de 5 quadrados contaminados.

Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

A atividade A20 foi considerada difícil, pelos alunos. Na busca da solução, alguns alunos retiraram uma folha do caderno para fazerem os registros a partir de seus modos de pensar. Comentavam suas representações, apenas oralmente, e apresentavam para a professora/pesquisadora a forma escrita. Depois as respostas obtidas foram registradas na lousa. No grupo G3, a visualização, com o uso de cores diferentes de giz na resolução contribuiu para a compreensão da situação-problema apresentada.

Em cada item, foram observadas resoluções distintas e a professora/pesquisadora, como mediadora, incentivou a troca de ideias entre os grupos e fez alguns questionamentos, como: “De que forma identificamos, no item **a,** os quadrados contaminados representados em cada estágio?”; “A situação do item **b**, indica os quadrados contaminados em cada estágio com os respectivos perímetros e a unidade de medida?”; “Observamos que muitos mostraram a contaminação completa exibindo cinco quadradinhos em uma diagonal. No item **c**, há existência de outras configurações?”; e “Nas respostas, nos itens **d** e **e**, diante das várias representações dadas pelos grupos, existe um padrão”. Como os alunos buscaram as respostas, para tais questionamentos, caracterizamos a situação como um cenário para investigação. A plenária, após a representação na lousa das diferentes resoluções auxiliou para discussões proporcionando um espaço para que cada aluno pensasse numa estratégia de solução e chegasse com as discussões à construção de noções de lógica e aritmética. Diante dos conflitos, como consequência, o tempo utilizado para resolver esta questão foi maior.

Atividade 21

A21

Juca quer pintar os algarismos do número 2013, como na figura ao lado, de modo que cada região seja pintada com uma das cores branca, cinza ou preta e que regiões vizinhas tenham cores diferentes.

a) Observe que Juca pode pintar o algarismo 2 de $3\times2\times2$ maneiras diferentes. De quantas maneiras diferentes ele pode pintar o algarismo 1?

b) De quantas maneiras diferentes Juca pode pintar o algarismo 3?

c) De quantas maneiras diferentes Juca pode pintar o algarismo 0?

d) Escreva uma expressão numérica que permita calcular de quantas maneiras Juca pode pintar o número 2013.

Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

A atividade A21 foi trabalhada apenas pelos alunos do nível 3. No item **a** todos consideraram que há 3 opções para pintar a primeira parte da figura e há duas opções para pintar a segunda parte da figura.

No item **b** os alunos consideraram as divisões do algarismo 3 como 5 regiões. Iniciando na parte superior há 3 opções para pintar a primeira região e há 2 opções para pintar a segunda. Mas, desconsideraram que a quarta região é vizinha da segunda e da terceira região e colocaram 2 opções para pintar a quarta região, onde só há uma cor possível. A cor da terceira região não deve coincidir com a cor da segunda região, logo há 2 opções para a cor da terceira região. A cor da quinta região não deve coincidir com a quarta, logo há 2 opções para a cor da quinta região. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, há $3 \times 1\times2 \times 2\times = 24$ maneiras distintas para pintar o algarismo 3. Mas somente depois das diferentes estratégias representadas na lousa e de muitas discussões, compreenderam em qual passo estavam errando.

No item **c** os alunos perceberam dois casos. Na troca de ideias entre os grupos acabaram chegando aos mesmos resultados. No primeiro caso as cores coincidiam, fizeram as representações e chegaram ao resultado correto. No segundo as cores eram diferentes, aplicaram direto o Princípio Multiplicativo e não consideraram as partes vizinhas, pois ao fechar a volta no algarismo zero teriam apenas uma cor e não duas como representaram. Ao aplicar o Princípio Aditivo chegaram a 12 + 12 = 24 maneiras, mas ao analisar as diferentes representações perceberam que o algarismo zero pode ser pintado de 12+ 6 = 18 maneiras distintas.

No item **d** um dos registros mostrou que uma aluna ao invés de aplicar o Princípio Multiplicativo utiliza o Princípio Aditivo. Para pintar os algarismos 2, 0, 1 e 3, consideraram o número de maneiras de pintar os algarismos nos itens anteriores e o número 2 de 3 x 2 x 2 = 12 maneiras diferentes e chegaram ao resultado errado, por abordarem uma estratégia incorreta.

Os alunos, na medida em que foram descobrindo que o item anterior não estava correto, depois de muitas discussões, com a professora interrogando as representações na lousa, chegaram a 12 x 18 x 6 x 24 = 31.104 maneiras diferentes de pintar o número 2013.

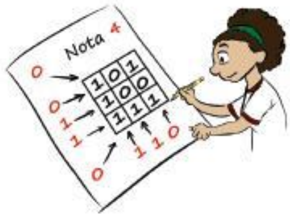
Durante essa atividade os alunos comentavam que era muito difícil. Sabiam que tinham muitas maneiras e sentiram-se desafiados a descobrir, assim, foi criado um ambiente de investigação e na busca da resposta correta, trabalhado o desenvolvimento do pensamento aritmético.

Atividade 22

A22

Helena brinca com tabuleiros 3×3, preenchidos com os algarismos 0 ou 1, da seguinte maneira:

- ela atribui o número 0 a cada linha, coluna ou diagonal cuja soma de seus algarismos seja par e o número 1 a cada linha, coluna ou diagonal para a qual essa soma seja ímpar;
- em seguida, ela calcula a *nota* do tabuleiro, que é a soma dos números que ela atribuiu.



Por exemplo, a nota do tabuleiro na ilustração é $0+0+1+1+0+1+1+0=4$.

a) Qual é a nota do tabuleiro abaixo?

0	0	1
1	1	1
0	0	0

b) Preencha os tabuleiros abaixo de quatro maneiras diferentes e de modo que todos tenham nota 8.

c) Explique por que, quando se troca o número de um dos cantos de um tabuleiro de nota ímpar, sua nota torna-se par.

d) De quantas maneiras diferentes um tabuleiro pode ser preenchido de modo que sua nota seja ímpar?

Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

A última atividade, dessa pesquisa, desenvolvida pelos grupos de estudo foi à atividade A22. No item **a** e no item **b**, os dados fornecidos no tabuleiro e utilizados pelos alunos para a resolução da atividade proposta, de acordo com Skovsmose (2000), enquadram-se no "paradigma do exercício", pois estão centrados em uma única resposta obtida por uma aplicação direta de uma estratégia.

Para obterem as quatro maneiras diferentes pedidas no item **b**, alguns alunos levaram um tempo maior, mas sabiam que estavam no caminho certo, na busca das formas diferentes de preencher os tabuleiros. Os grupos G2 e G3 não registraram na lousa suas estratégias.

No grupo G1, todos os itens foram discutidos e apresentados na lousa. Mas para o item **d** somente um aluno apresentou para os colegas na lousa a estratégia utilizada na busca da solução. Ele mostrava-se interessado e centrado na busca da resposta. Logo, não ocorreram discussões e os demais aceitaram as justificativas do colega.

O tempo não foi suficiente para que todos chegassem a uma resposta, nos grupos G2 e G3, as discussões ocorreram de forma oral, pois poucos mostraram interesse para desenvolver algum tipo de estratégia na busca da solução dos itens **c** e **d.**

Assim, com a resposta dos grupos errada e pouco interesse na busca da solução, não ocorreu à formalização. A atenção deles, naquele momento, estava voltada para a confraternização, programada para o final dos encontros.