UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM ENSINO DE MATEMÁTICA

LUCIONE DE BITENCOURT MARTINS

UM ESTUDO SOBRE AS ESTRATÉGIAS DE RESOLUÇÃO DE QUESTÕES DA OBMEP

PORTO ALEGRE

2015

LUCIONE DE BITENCOURT MARTINS

UM ESTUDO SOBRE AS ESTRATÉGIAS DE RESOLUÇÃO DE QUESTÕES DA OBMEP

Dissertação de Mestrado em Ensino de Matemática apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Alvino Alves Sant'Ana.

PORTO ALEGRE
2015

LUCIONE DE BITENCOURT MARTINS

UM ESTUDO SOBRE AS ESTRATÉGIAS DE RESOLUÇÃO DE QUESTÕES DA OBMEP

Dissertação de Mestrado em Ensino de Matemática apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Alvino Alves Sant'Ana.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. José Carlos Pinto Leivas - PPG Ensino de Ciências e Matemática / UNIFRA

Profa. Dra. Márcia Rodrigues Notare Meneghetti - PPGEMat / UFRGS

Prof. Dr. Marcus Vinícius de Azevedo Basso - PPGEMat / UFRGS

AGRADECIMENTOS

Agradeço...

... a Deus, pela vida e pelas pessoas que colocou em meu caminho.

... aos colegas, pelas trocas de ideias e experiências que contribuíram na construção de novos conhecimentos.

... aos grupos de estudo que, de forma voluntária, participaram da pesquisa, contribuindo com os registros analisados.

... ao meu pai e minha mãe, pela presença em minha vida.

... a Débora e a Jéssica, companheiras no desejo de fazer o melhor.

... aos professores do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da UFRGS, principalmente ao meu orientador Prof. Dr. Alvino Alves Sant'Ana, pela dedicação de seu tempo e ensinamentos, que possibilitaram a elaboração dessa pesquisa.

... ao meu marido pelo apoio e atenção aos nossos filhos Luiza, José e Tomás, aos quais podemos deixar como exemplo nossas atitudes. Agradeço a eles pela compreensão nos momentos de estudo e ausências.

... as pessoas que de alguma forma participaram. Com certeza, juntos na ação, crescemos.

"... existem as escolas: não para ensinar as respostas, mas para ensinar as perguntas. As respostas nos permitem andar sobre a terra firme. Mas somente as perguntas nos permitem entrar pelo mar desconhecido."

Rubem Alves

RESUMO

Esta dissertação apresenta uma proposta de aprendizagem que consiste no desenvolvimento de uma pesquisa utilizando, como material didático, algumas questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), acompanhadas de experimentação no Ensino Fundamental e Ensino Médio. As questões selecionadas permitem diferentes formas de resolução, em especial por serem questões discursivas transversais e pseudotransversais da segunda fase. A pesquisa foi desenvolvida durante 8 encontros com 52 alunos de duas escolas da rede pública estadual de ensino, no período de agosto e setembro de 2014. O principal objetivo foi elaborar uma sequência de atividades ou material didático que evidenciasse a importância das estratégias usadas pelos alunos na resolução dos problemas. As diferentes estratégias utilizadas pelos participantes da pesquisa foram analisadas de acordo com a teoria da Resolução de Problemas (segundo Polya e Onuchic-Allevato), com ênfase para a construção de um Cenário para a Investigação (Skovsmose). Ao refletir sobre e analisar as estratégias registradas na busca da solução dos problemas, professor-aluno, percebemos que as mesmas favorecem para a compreensão de conceitos e conteúdos matemáticos. Além disso, promovem a aprendizagem e o desenvolvimento do raciocínio matemático.

PALAVRAS-CHAVE: Resolução de Problemas. Cenários para Investigação. OBMEP.

ABSTRACT

This work presents a learning proposal which is based on the development of a research using some questions from the Brazilian Math Olympiads of Public Schools (OBMEP – Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas) as teaching materials, followed by experimentation in elementary and high school. The selected questions allow different solving ways; especially because they are discursive cross- questions and pseudo cross of the second phase. The research was conducted during eight meetings with 52 students from two schools of the public school system, between August and September 2014. The main objective was to develop a sequence of activities or teaching materials that showed the importance of the strategies used by the students in solving the problems. The different strategies used by the participants were analyzed according to the theory of Problem Solving (Polya and Onuchic-Allevato), with emphasis on the construction of a Landscapes of Investigation (Skovsmose). By reflecting about it and analyzing the recorded strategies in the search for solving the problems, teacher-student, we conclude that these questions foment for the understanding of the mathematical concepts and content. Besides, they promote learning and development of mathematical logic.

KEYWORDS: Problem Solving. Landscapes of *Investigation*. OBMEP.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE SIGLAS

CE − Conselho Escolar

IMPA − Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada

MCTI − Ministério da Ciência e Tecnologia e Inovação

MEC − Ministério da Educação

OBMEP − Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

PCN − Parâmetros Curriculares Nacionais

PCNEM − Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio

SBM − Sociedade Brasileira de Matemática

SUMÁRIO

Introdução

No atual panorama da educação pública um professor deve ser criativo e capaz de mobilizar o interesse do educando para a aquisição de novos conhecimentos. A pesquisa é um dos caminhos que permite ao professor-pesquisador levar o educando, por meio de práticas pedagógicas, a pensar, a estabelecer relações entre as coisas e a criar um plano na busca de soluções de problemas. Assim, propiciando aos alunos as condições necessárias para que os mesmos prosperem.

É com este intuito que este trabalho apresenta uma pesquisa que visa, nas interações nos grupos de estudos, motivar cada aluno a pesquisar, no sentido de fazer o seu próprio questionamento e a sua elaboração própria de resultados. E, diante de problemas novos, ao elaborar algum tipo de estratégia para a resolução destes, se torne capaz de criar e, de forma cooperativa e colaborativa, possa construir a aprendizagem e o desenvolvimento do raciocínio matemático.

O interesse pelo estudo de Resolução de Problemas em Matemática, por parte da professora pesquisadora, teve início no curso de Especialização em Educação Matemática em 2001. A pesquisa foi realizada com alunos da 5ª série (6º ano) no Ensino Fundamental, como exigência parcial para obter o título de Especialista em Educação Matemática, investigando sobre "Resolução de Problemas e os diversos significados das operações fundamentais."

Também no Programa de Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática da UFRGS, as leituras e discussões sobre a metodologia da Resolução de Problemas contribuíram para a escolha do tema desta pesquisa. Visto que este não se restringe a aplicação de técnicas e conceitos, mas exige que o educando estabeleça relações, tenha liberdade de pôr em prática seu raciocínio e, nas comunicações de ideias, faça uso da linguagem Matemática.

A temática apresentada foi observada nas questões das provas da segunda fase da OBMEP, escolhida pela constatação das dificuldades que os alunos enfrentam na resolução de problemas e mediante os resultados obtidos abaixo do esperado pelos professores, geralmente evidenciado em relação à disciplina de Matemática nas escolas em que a pesquisadora atua.

A pesquisa de campo foi aplicada para analisar o contexto de sala de aula e as estratégias desenvolvidas pelos alunos para a resolução das questões discursivas transversais e pseudotransversais das provas da segunda fase da OBMEP, acompanhada de experimentação, no Ensino Fundamental e Ensino Médio. Também para verificar se as questões da OBMEP, com as diferentes formas de resolução, contribuem para a aprendizagem e para o desenvolvimento do raciocínio matemático.

Neste trabalho apresentamos a sequência de atividades pedagógicas, elaborada a partir de questões selecionadas das provas de segunda fase da OBMEP; os diferentes procedimentos utilizados pelos participantes da pesquisa na resolução das questões no desenvolvimento das atividades propostas; os relatos dos registros feitos pelos mesmos; e a análise de cada atividade, com base na fundamentação teórica.

Este trabalho está dividido em seis capítulos e quatro anexos. No primeiro capítulo apresentamos a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), a responsabilidade, criação, objetivos, público alvo, fases e premiação e tópicos importantes para esta pesquisa.

No segundo capítulo tratamos do problema e dos objetivos da pesquisa. Explanando como foi diagnosticado o problema e listando os objetivos traçados, visando à melhoria na qualidade do ensino e na aprendizagem dos alunos.

A Fundamentação Teórica está dividida em quatro subseções: apresentamos a metodologia da Resolução de Problemas no processo de ensino e aprendizagem de Matemática; o Ambiente de Aprendizagem de acordo com a teoria de Skovsmose; o papel do professor na Resolução de Problema; e outras pesquisas realizadas com base em questões propostas nas provas da OBMEP.

O quarto capítulo trata da caracterização da pesquisa destacando a metodologia utilizada neste trabalho: a coleta de dados; a caracterização do ambiente em que as atividades foram desenvolvidas com uma breve retrospectiva histórica de cada escola; os sujeitos da pesquisa; e procedimentos pedagógicos utilizados para selecionar as atividades, bem como apresentamos as vinte e duas atividades selecionadas para a pesquisa.

No quinto capítulo fazemos um relato e análise de nove atividades escolhidas dentre as vinte duas trabalhadas. Para cada atividade escolhida, reapresentamos a questão (OBMEP) com as estratégias utilizadas pelos alunos para sua resolução. Em seguida, mostramos de forma descritiva uma análise do material produzido pelos participantes no decorrer dessas atividades, com ênfase na fundamentação teórica.

No último capítulo, a partir das análises das estratégias usadas pelos participantes, fazemos nossas considerações finais exibindo uma reflexão sobre o processo, buscando responder a questão norteadora da pesquisa.

No anexo A encontramos cada uma das questões selecionadas e desenvolvidas junto aos estudantes acompanhada de considerações acerca das estratégias usadas pelos participantes, o que constitui o produto independente dessa Dissertação. No anexo B registramos, por meio de fotos, os grupos durante algumas atividades desenvolvidas em sala de aula. Finalmente, nos dois últimos anexos, apresentamos, respectivamente, o modelo do termo de consentimento para a participação dos alunos e cópias dos termos de consentimento assinados pelos representantes das escolas nas quais a pesquisa foi realizada.

1 OBMEP

Iniciamos com uma breve apresentação da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), em especial, a responsabilidade, criação, objetivos, público alvo, fases e premiação, tópicos importantes para esta pesquisa. As informações foram retiradas do site oficial da OBMEP [1].

A OBMEP é uma promoção do Ministério da Ciência e Tecnologia e Inovação (MCTI) e do Ministério da Educação (MEC), em parceria com Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) e da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), responsáveis pela Direção Acadêmica da OBMEP.

A OBMEP foi inspirada no Projeto Numeratizar [2] do Estado do Ceará, considerado um exemplo a ser seguido pelas suas experiências bem sucedidas. As Olimpíadas de Matemática, em geral, têm como objetivo principal o desenvolvimento de estratégias que possibilitem melhorar a qualidade do Ensino de Matemática na Educação Básica.

Em particular, os objetivos da OBMEP são:

> Estimular e promover o estudo da Matemática entre alunos das escolas públicas; Contribuir para a melhoria da qualidade da Educação Básica; Identificar jovens talentos e incentivar seu ingresso nas áreas científicas e tecnológicas; Incentivar o aperfeiçoamento dos professores das escolas públicas, contribuindo para a sua valorização profissional; Contribuir para a integração das escolas públicas com as universidades públicas, os institutos de pesquisa e sociedades científicas; Promover a inclusão social por meio da difusão do conhecimento (OBMEP, 2014).

É voltada especificamente para alunos do 6º ao 9º anos do Ensino Fundamental e alunos do Ensino Médio de escolas públicas municipais, estaduais e federais. Suas provas são divididas em três níveis: *Nível 1* – alunos do 6º ou 7º, *Nível 2* – alunos

---

[1] obmep2014.obmep.org.br e obmep.org.br. Acessados em setembro de 2015.

[2] Em 2003 o Governo do Estado do Ceará criou o Projeto Linguagem das Letras e dos Números – Numeratizar e Leituralizar. O Projeto Numeratizar são Olimpíadas de Matemática em Escolas Públicas do Estado, as informações deste parágrafo estão disponível em: sbpcnet.org.br/livro/57ra/programas/CONF_SIMP/textos/joaolucasbarbosa-simp.htm. Acessado em setembro de 2015.

matriculados no 8º ou 9º anos do Ensino Fundamental e *Nível 3* – alunos matriculados em qualquer ano do Ensino Médio.

A coordenação da OBMEP é responsável pelo planejamento e organização do projeto. Todas as escolas públicas são convidadas a participar da OBMEP. As provas são aplicadas em duas fases.

Na primeira fase, as provas são objetivas (múltipla escolha) com 20 questões e devem ser aplicadas a todos os alunos inscritos pela escola. No momento da inscrição as escolas indicam os professores responsáveis pela aplicação e correção das provas da primeira fase. As escolas recebem as provas, as soluções e os gabaritos com as máscaras para a conferência das grades de respostas. De acordo com o número de acertos, é definida a lista dos classificados para participarem da segunda fase.

Na segunda fase, as questões são abertas (discursivas) e as escolas participantes são classificadas, em cada nível, em cinco grupos conforme os critérios descritos no regulamento[3], sendo que o número de alunos classificados para a segunda fase, por nível, depende do número de inscritos na primeira fase. Observamos que o número de alunos classificados, em cada nível, não é inferior a cinco por cento dos inscritos.

As provas discursivas da segunda fase são aplicadas por fiscais selecionados pela Coordenação da OBMEP para esse fim, não sendo de responsabilidade das escolas participantes. A correção das provas e as correspondentes premiações[4], também são atribuições e responsabilidades da Coordenação. A OBMEP premia alunos, professores, escolas e Secretarias Municipais de Educação, com base, exclusivamente, nos resultados das provas da segunda fase.

[3] Item 5 do regulamento. Ver em obmep2014.obmep.org.br/regulamento.html. Acessado em agosto de 2015.
[4] Item 7 do regulamento. Ver em obmep2014.obmep.org.br/regulamento.html. Acessado em agosto de 2015.

2 Problema e Objetivo da Pesquisa

Nesse capítulo, descrevemos as inquietações que motivaram a presente pesquisa e os objetivos que a nortearam.

2.1 Problema

A Escola é um ambiente para a aprendizagem, mas percebemos que nem todos os alunos possuem os mesmos interesses, habilidades e dificuldades. Diante dessa diversidade, a partir da prática em sala de aula, diagnosticamos nas Escolas, nas quais a professora pesquisadora leciona, alunos com dificuldades nos processos de Resolução de Problemas. Dentre as dificuldades que observamos, listamos como principais, a deficiência de conhecimentos prévios, a falta de interpretação e de argumentação em respostas com justificativas.

Além de demonstrar dificuldades no aprendizado de Matemática, falta mobilização e interesse dos alunos para desenvolverem algum tipo de estratégia de solução de problemas, no que se refere às provas da OBMEP.

Após receberem a prova da primeira fase da OBMEP, os alunos questionam se vale nota e não mostram interesse em ler com atenção e tão pouco em buscar uma solução para os problemas propostos. Em particular, o número de acertos obtidos pelos alunos, nas provas da primeira fase, é considerado baixo pelos professores que atuam na mesma escola da pesquisadora.

Quando indagados sobre a estratégia utilizada para chegar à resposta marcada como correta, a maioria se manifesta dizendo que “chutaram”. Diante das questões discursivas, não sabem como resolvê-las. Com isso, após a prova de primeira fase, percebemos que poucos alunos apresentam as tentativas efetuadas para a solução dos problemas. Ao receberem os resultados, com a lista dos alunos classificados para participarem da segunda fase, grande parte, dentre os alunos não selecionados, se mostram indiferente.

Por outro lado, os alunos classificados ficam querendo informações e aulas extras para a participação da próxima fase, visando resultados positivos. No entanto, nem sempre é possível, pois os professores precisam de tempo para preparar as situações de aprendizagem voltadas para a participação na segunda fase. Assim, percebemos que é necessário melhorar a qualidade do ensino oferecido e proporcionar um trabalho diferenciado na Escola, com atividades que visam sanar as dificuldades encontradas nas questões discursivas da segunda fase da OBMEP.

Pelos meios de comunicação, tais como revistas, rádio, televisão, blog[5]·, etc. e na página oficial da OBMEP [6], temos exemplos com experiências de grupos de estudo que estão fazendo a diferença. Com os resultados positivos, os alunos da rede pública, conquistaram medalhas, menções honrosas, livros para a composição de uma biblioteca básica de Matemática, troféus e oportunidades de ingresso nas carreiras científica e tecnológica. Essas experiências nos indicam que as provas da OBMEP não visam apenas a formar novos talentos, mas a criar novas formas de agir contribuindo para a aprendizagem de matemática.

Assim, diante das dificuldades que os alunos enfrentam na resolução de problemas e mediante os resultados obtidos abaixo do esperado pelos professores de Matemática das escolas em que a pesquisadora atua, sentimos uma inquietação, que motivou a pesquisa, resumida na seguinte pergunta: “As estratégias desenvolvidas pelos alunos para a resolução das provas da OBMEP contribuem para a aprendizagem e para o desenvolvimento do raciocínio matemático?”

Com o objetivo de realizar um estudo sobre as estratégias apresentadas pelos alunos para resolver problemas matemáticos, foram selecionadas questões discursivas dos três níveis da OBMEP. Estas questões foram trabalhadas com um grupo de alunos na preparação deles para a segunda fase da edição de 2014. Durante esse trabalho, procuramos construir um ambiente de aprendizagem que incentivasse a participação e o interesse dos alunos. Com as atividades desenvolvidas buscamos desafiar o aluno a refletir, discutir com o grupo, elaborar hipóteses e desenvolver procedimentos na busca das soluções.

Na pesquisa o aluno participante foi incentivado a ler, interpretar, investigar, resolver problemas, discutir, questionar, criar, comparar, perguntar, bem como comunicar suas ideias, descobertas e conclusões, tanto oralmente, como de forma escrita, usando símbolos, elaborando textos, desenhos ou esquemas gráficos.

[5] blog.educacao.mg.gov.br/?p=7592
[6] obmep.org.br/obmep-na-midia.html

2.2 Objetivos

Os objetivos a seguir serão apresentados com o intuito de responder a questão norteadora da pesquisa.

2.2.1 Objetivo principal

Elaborar uma sequência de atividades ou material didático que evidencie a importância das estratégias usadas pelos alunos na resolução de problemas.

2.2.2 Objetivos gerais

- Propiciar ao aluno a oportunidade de pensar, não apenas copiar ou reproduzir soluções;
- Elaborar uma sequência de atividades ou material didático que proporcione ao aluno um Ambiente de Aprendizagem que favoreça o pensamento e o raciocínio matemáticos;
- Promover por meio de grupos de estudos, atividades que despertem o entusiasmo dos alunos, desenvolvendo sua capacidade de criar, atuar em conjunto, aproximando-se uns dos outros, demonstrando a importância de cada um;
- Analisar as estratégias utilizadas pelos alunos na solução dos problemas propostos.

3 Fundamentação Teórica

Neste capítulo, para um melhor entendimento das teorias envolvidas no desenvolvimento da pesquisa, fazemos algumas considerações sobre Resolução de Problemas, Ambiente de Aprendizagem, o Papel do Professor e outras pesquisas realizadas com base em questões propostas nas provas da OBMEP.

3.1 Resolução de Problemas

Escolhemos como estratégia de ação a Resolução de Problemas que dá abertura ao aluno para procurar suas próprias ideias e assim construir modelos matemáticos que possibilitem a solução de problemas, independentemente da área de conhecimento, desenvolvendo atitudes favoráveis à aprendizagem.

A Resolução de Problemas, em Matemática, constitui a base das experiências de aprendizagem que se dá por meio de questões desafiadoras que instigam e promovem a investigação na busca de respostas e soluções.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN),

> A resolução de problemas, como eixo organizador do processo de ensino e aprendizagem de Matemática pode ser resumida nos seguintes princípios: a situação-problema é o ponto de partida da atividade matemática e não a definição. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las; o problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada; aproximações sucessivas de um conceito são construídas para resolver certo tipo de problema; (...) a resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se podem apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas (BRASIL, 1998,40-41).

O professor tem a função de orientar o trabalho por ele preparado, mobilizando os alunos na busca das estratégias de resolução, desenvolvendo assim o seu raciocínio.

O professor deve valorizar o conhecimento do aluno e, recorrendo às hipóteses evidenciadas, buscar intervir neste processo. Como mediador, questionar as hipóteses para que ocorra o conflito cognitivo, no sentido de desestabilizar as certezas e reformular suas hipóteses para que o sujeito cognoscente realmente tenha a compreensão dos conceitos Matemáticos.

A pesquisa sobre Resolução de Problemas e as iniciativas de considerá-la como uma forma de ensinar Matemática passou a ter atenção a partir de George Polya, considerado o "pai" da Resolução de Problemas. Em seu livro "A arte de resolver problemas", publicado em 1944, Polya preocupou-se em descobrir como resolver problemas e como ensinar estratégias que levassem a enxergar caminhos para resolver problemas.

No quadro a seguir, constam os passos para Resolver um Problema, baseado na teoria proposta por Polya.

Quadro 1 – Roteiro para resolver problemas

Compreender um problema

a) O que se pede no problema?
b) Quais são os dados e as condições do problema?
c) É possível fazer uma figura, um esquema ou um diagrama?
d) É possível estimar a resposta?

Elaborar um plano

a) Qual o seu plano para resolver o problema?
b) Que estratégia você tentará desenvolver?
c) Você se lembra de um problema semelhante que pode ajudá-lo a resolver este?
d) Tente organizar os dados em tabelas e gráficos.
e) Tente resolver o problema por partes.

Executar um plano

a) Execute o plano elaborado, verificando-o passo a passo.
b) Efetue todos os cálculos indicados no plano.
c) Execute todas as estratégias pensadas, obtendo várias maneiras de resolver o mesmo problema.

Fazer o retrospecto ou verificação

a) Examine se a solução obtida está correta.
b) Existe outra maneira de resolver o problema?
c) É possível usar o método empregado para resolver problemas semelhantes?

Fonte: elaboração da autora baseado no quadro proposto por (POLYA, 2006, p. XIX-XX).

Segundo as educadoras Onuchic e Allevato, é possível aprender novos conceitos através do processo de descoberta da solução de problemas propostos (ONUCHIC e ALLEVATO, 2011). A partir do trabalho desenvolvido por Polya, em pesquisas realizadas pelas educadoras Allevato e Onuchic (2009), as mesmas constataram que são necessários alguns conhecimentos prévios dos alunos para a Resolução de Problemas. Também verificaram que os mesmos têm demonstrado aversão aos conteúdos trabalhados e então as autoras incluíram novos elementos, totalizando nove passos que podem auxiliar o professor ao trabalhar com esta metodologia. A seguir apresentamos os nove passos propostos pelas pesquisadoras:

1º) **Preparação do problema**

Selecionar um problema visando à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento. Esse problema será chamado problema gerador. É bom ressaltar que o conteúdo matemático necessário para a resolução do problema não tenha, ainda, sido trabalhado em sala de aula.

2º) **Leitura individual**

Entregar uma cópia do problema para cada aluno e solicitar que seja feita sua leitura.

3º) **Leitura em conjunto**

Formar grupos e solicitar nova leitura do problema, agora nos grupos.

• Se houver dificuldade na leitura do texto, o próprio professor pode auxiliar os alunos, lendo o problema.

• Se houver, no texto do problema, palavras desconhecidas para os alunos, surge um problema secundário. Busca-se uma forma de poder esclarecer as dúvidas e, se necessário, pode-se, com os alunos, consultar um dicionário.

4º) **Resolução do problema**

A partir do entendimento do problema, sem dúvidas quanto ao enunciado, os alunos, em seus grupos, em um trabalho cooperativo e colaborativo, buscam resolvê-lo. Considerando os alunos como co-construtores da *matemática nova* que se quer abordar, o problema gerador é aquele que, ao longo de sua resolução, conduzirá os alunos para a construção do conteúdo planejado pelo professor para aquela aula.

5º) **Observar e incentivar**

Nessa etapa, o professor não tem mais o papel de transmissor do conhecimento. Enquanto os alunos, em grupo, buscam resolver o problema, o professor observa, analisa o comportamento dos alunos e estimula o trabalho colaborativo. Ainda, o professor como mediador leva os alunos a pensar, dando-lhes tempo e incentivando a troca de ideias entre eles.

• O professor incentiva os alunos a utilizarem seus conhecimentos prévios e técnicas operatórias, já conhecidas, necessárias à resolução do problema proposto. Estimula-os a escolher diferentes caminhos (métodos) a partir dos próprios recursos de que dispõem. Entretanto, é necessário que o professor atenda os alunos em suas dificuldades, colocando-se como interventor e questionador. A fim de possibilitar a continuação do trabalho, o professor acompanha suas explorações e ajuda-os, quando necessário, a resolver problemas secundários que podem surgir no decurso da resolução: notação; passagem da linguagem vernácula para a linguagem matemática; conceitos relacionados; e técnicas operatórias.

6º) **Registro das resoluções na lousa**

Representantes dos grupos são convidados a registrar, na lousa, suas resoluções. Resoluções certas, erradas ou feitas por diferentes processos devem ser apresentadas para que todos os alunos as analisem e discutam.

7º) **Plenária**

Para esta etapa são convidados todos os alunos, a fim de discutirem as diferentes resoluções registradas na lousa pelos colegas, para defenderem seus pontos de vista e esclarecerem suas dúvidas. O professor se coloca como guia e mediador das discussões, incentivando a participação ativa e efetiva de todos os alunos. Este é um momento bastante rico para a aprendizagem.

8º) **Busca do consenso**

Depois de sanadas as dúvidas, e analisadas as resoluções e soluções obtidas para o problema, o professor tenta, com toda a classe, chegar a um consenso sobre os resultados corretos.

9º) **Formalização do conteúdo**

Neste momento, denominado *formalização*, o professor registra na lousa uma apresentação *formal* – organizada e estruturada em linguagem matemática- padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos através da resolução do problema, destacando as diferentes técnicas operatórias e as demonstrações das propriedades qualificadas sobre o assunto.

Considerada como método de ensino, a Resolução de Problemas é alvo de diferentes interpretações. A ideia comum a todas elas é que os alunos devem construir o conhecimento matemático com base em problemas.

Para Onuchic (1999, p. 215), "problema é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em resolver."

Portanto, a Resolução de Problemas é uma peça central no ensino e aprendizagem, pois o pensar e o agir matemático se desenvolvem no momento que o aluno se depara com novas situações e se envolve na ação, ocasião na qual cria e desenvolve novas habilidades e constrói novas competências.

Segundo PIRES (2001):

> Um indivíduo encara uma situação como sendo um problema quando: Compreende a situação e não enxerga uma solução óbvia imediata; dá-se conta que a situação requer uma ação; quer ou precisa agir sobre a situação.
> [...]Uma questão por si só não caracteriza um problema, mesmo que sua resposta seja desconhecida, mas caracteriza um problema aquela questão cuja resposta não é conhecida, porém se deseja conhecê-la. (p.3)

Por sua vez, nos PCN (BRASIL, 1998), encontramos a seguinte definição: "Um problema matemático é a situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado."(p.44)

Nas definições de problema observamos que o aluno passa a ser o "juiz", pois é ele que determina se as questões propostas são problemas ou exercícios. No momento que ele define como difícil e mostra interesse em solucioná-lo, podemos definir como um problema. Mas se o mesmo não encontrar dificuldades em resolver a questão, neste instante esta passa a ser considerada como um exercício. O que diferencia um problema de um exercício segundo (ECHEVERRÍA e POZO, 1998) é:

> [...] um problema se diferencia de um exercício na medida em que, neste último caso, dispomos e utilizamos mecanismos que nos levam, de forma imediata, à solução. Por isso, é possível que uma mesma situação represente um problema para uma pessoa enquanto que para outra esse problema não existe, quer porque ela não se interessa pela situação, quer porque possua mecanismos para resolvê-la com um investimento mínimo de recursos cognitivos e pode reduzi-la a um simples exercício (p. 16).

Segundo a educadora MEDEIROS (1994) é o aluno que define se uma questão é um problema.

> Todo problema pode ser entendido como uma questão, mas a recíproca não é verdadeira, nem toda questão constitui-se num problema. Uma questão torna-se um problema para o aluno apenas se este necessitar ou desejar a sua solução. Um problema só é problema quando o indivíduo se apropria dele e é apropriado por ele, deseja pensar a respeito dele, estabelece uma busca contínua para a compreensão e solução do mesmo. Para que essas surjam é preciso que o sujeito se correlacione intencionalmente com o objeto de investigação. É preciso que haja participação intelectual do sujeito, que aprende, na construção do conhecimento (p.25-26).

A busca de um caminho ainda não percorrido pelo educando, saber o que ele conhece ou desconhece na hora de elaborar uma atividade não são tarefas fáceis para o educador. O acesso às tecnologias de informação e comunicação na educação abre as portas da sala de aula e da escola, integrando-o à comunidade que o cerca, à sociedade da informação e a outros espaços produtores de conhecimento. Com isso fica difícil uma seleção de problemas inéditos que levem o aluno a se empenhar na construção de seus conhecimentos. É importante salientar que, atualmente, até mesmo o que o educador considera um problema, o educando pode julgar como um simples exercício.

Para Dante (1998), um problema é qualquer situação que exija a maneira matemática de pensar e conhecimentos específicos para solucioná-la. Dante (2010) ressalta que um bom problema apresenta as seguintes características: ser desafiador; ser real; ser interessante; ser o elemento de um problema realmente desconhecido; não consistir na aplicação evidente e direta de uma ou mais operações aritméticas e ter um nível adequado de dificuldade.

Ser desafiador: São problemas que despertam a curiosidade e a vontade dos alunos em querer pensar neles na busca da solução;

Ser real para o aluno: São problemas que nas informações e nos valores numéricos apresentam dados reais;

Ser do interesse do aluno: São problemas motivadores, com dados e perguntas que fazem parte do dia a dia do aluno;

Ser o elemento de um problema realmente desconhecido: É interessante que o que se procura responder no problema, o elemento desconhecido, seja algo que na realidade desconhecemos e queremos saber;

Não consistir na aplicação evidente e direta de uma ou mais operações aritméticas: O aluno possa levantar hipóteses e criar diversas estratégias de solução;

Ter um nível adequado de dificuldade: O problema deve ser desafiador, mas com um nível de dificuldade razoável à faixa etária do aluno.

Dante (1998) também estabelece diferença entre exercícios e problemas. Para o autor, exercício serve para exercitar, para praticar um determinado algoritmo ou processo e problema é a descrição de uma situação na qual se procura algo desconhecido e não temos previamente nenhum algoritmo que garanta a solução. Segundo o mesmo autor, a resolução de um problema exige certa dose de iniciativa e criatividade, aliada ao conhecimento de algumas estratégias.

3.2 Ambiente de Aprendizagem

De acordo com Skovsmose (2000), o ambiente de aprendizagem diz respeito a todas as condições de aprendizagens proporcionadas aos educandos, tais como: ambiente físico, recursos, propostas metodológicas, entre outras. Skovsmose (2000) classifica o ambiente de aprendizagem em seis tipos, conforme as referências e os paradigmas, como mostra o quadro abaixo.

Quadro 2 − Ambientes de aprendizagem

	Exercícios	Cenário para Investigação
Referências à matemática pura	(1)	(2)
Referências à semirrealidade	(3)	(4)
Referências à realidade	(5)	(6)

Fonte: Skovsmose (2000), p. 8.

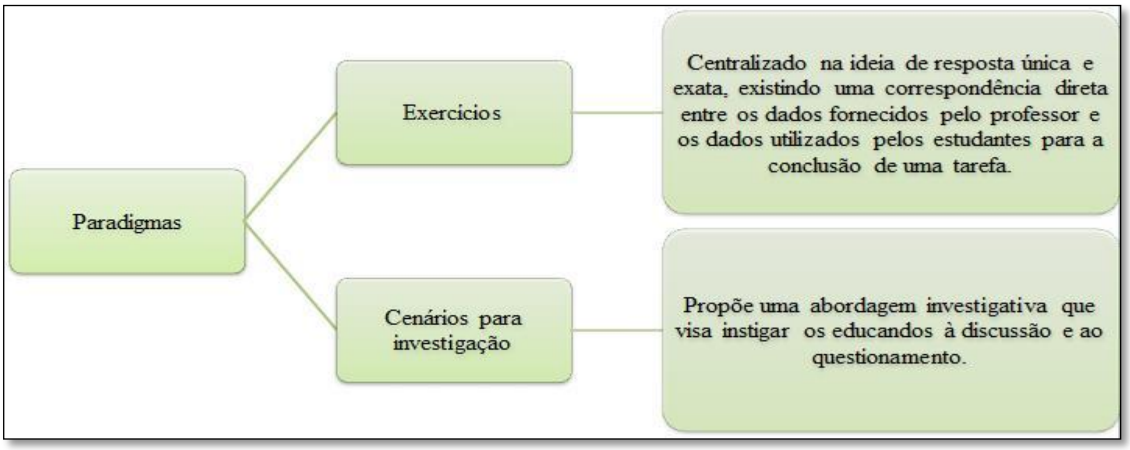
O autor considera três referências: Matemática Pura; Semirrealidade; e Realidade. No quadro a seguir, apresentamos as características de cada ambiente de aprendizagem conforme a referência.

Quadro 3 − Referências

Fonte: elaboração da autora baseada em Skovsmose (2000)

De acordo com o autor um ambiente de aprendizagem ainda está dividido em dois paradigmas: do Exercício e do Cenário para Investigação. No quadro 4, apresentamos as características de cada ambiente de aprendizagem conforme o paradigma considerado.

Quadro 4 − Paradigmas



Fonte: elaboração da autora baseada em Skovsmose (2000)

Para Skovsmose (2000), todos os ambientes de aprendizagem podem ou devem ser explorados, mas grande parte das escolas enquadra-se no “paradigma do exercício”, centrados naqueles que possuem uma única resposta. Segundo o autor “... que a busca de um caminho entre os diferentes ambientes de aprendizagem possa oferecer novos recursos para levar os alunos a agir e refletir e, dessa maneira, oferecer uma educação matemática de dimensão crítica.” (p. 19-20). O autor ainda salienta que os exercícios com desafios são considerados importantes nas práticas pedagógicas, além disso, deve-se dar maior ênfase as situações definidas como cenários para investigação.

O professor que propõe atividades que instigam os alunos à investigação, levando-os ao diálogo, troca de ideias e discussões diante das diferentes resoluções apresentadas, juntos, construirão um ambiente de aprendizagem enriquecedor para o ensino de Matemática.

Neste trabalho, as atividades focalizam um ambiente de aprendizagem com referência à semirrealidade e ao cenário para investigação. Para isso, a professora/pesquisadora selecionou questões da OBMEP que abordam, em geral, situações fictícias que buscam estabelecer relações com o cotidiano do aluno. Além disso, ao escolher a Resolução de Problemas como estratégia de solução dessas questões buscou contribuir para a construção, por parte dos alunos, de um cenário para investigações matemáticas. Dessa forma, na ação, por meio da Resolução de Problemas, pretendemos durante as interações nos grupos instigá-los a participação, de forma que todos os alunos participantes da pesquisa possam explanar na lousa as diferentes estratégias utilizadas para a solução do problema proposto. Após as discussões no grupo, sanadas as dúvidas e analisadas as soluções, o professor e os alunos, juntamente, devem buscar um consenso sobre o resultado correto, criando assim um ambiente que contribui para a formação sociocrítica dos participantes.

3.3 Papel do Professor

Cabe ao professor à responsabilidade pela organização e a condução de todas as atividades propostas aos alunos. É importante que o professor não seja um transmissor de conhecimento, que esteja apto a criar um Ambiente de Aprendizagem com ênfase no cenário para investigação.

Segundo Skovsmose (2000), as Resoluções de Problemas transformam-se em genuínas investigações matemáticas. Nessa metodologia, os alunos são os responsáveis pelo processo investigativo, mas o professor, nas mediações, de forma colaborativa, contribuirá para o envolvimento dos alunos nos processos de exploração e de argumentação justificada.

Embora na Resolução de Problema, o professor não possa prever quais questionamentos aparecerão, o mesmo, tem a tarefa de levar os alunos a pensarem em estratégias e agirem na busca de soluções. Para Skovsmose (2000), "... a ênfase especial no Cenário para Investigação causarão certa incerteza que não deve ser eliminada, mas, sobretudo enfrentada, diagnosticada e investigada." Da perspectiva dos professores, pode parecer o movimento de uma zona de conforto para uma zona de risco.

Para Onuchic e Allevato (2009), a Resolução de Problemas favorece ao professor, como mediador, a levar o aluno a pensar em estratégias de soluções. As mediações oportunizam o aluno por meio de questionamentos, tais como: os "porquês" ou os "como", a reflexões e a criar estratégias na busca da solução de problemas, além disso, ajuda-o a sanar as suas dificuldades e à construção de conhecimentos.

O professor, para as autoras Onuchic e Allevato (2009), diante das dificuldades encontradas pelos alunos para a solução do problema investigado , ao fazer intervenções e questionamentos, proporciona nas comunicações e nas reflexões, a partir das resoluções apresentadas, que os mesmos aprendam os saberes escolares em interação com o outro. O professor pode ajudá-los, quando necessário, no decurso da resolução, à compreensão da linguagem matemática, conceitos e técnicas operatórias. Assim, através da Resolução de Problemas, ao estabelecer relações com diferentes ramos da matemática, geram novas aprendizagens.

3.4 Outras pesquisas

Fizemos uma revisão bibliográfica sobre outras pesquisas realizadas com base em questões propostas nas provas da OBMEP e, a seguir, apresentamos um relato de dois trabalhos que têm alguma relação com a nossa pesquisa.

A dissertação de mestrado de Marcos Vinicius Milan Maciel, com o título "GEMaTh – A criação de um grupo de estudos segundo fundamentos da Educação Matemática Crítica: uma proposta de Educação Inclusiva", apresentada em 2008, elaborada a partir de uma pesquisa cujo objetivo foi organizar e desenvolver um conjunto de atividades extracurriculares com um grupo de alunos de uma escola pública federal de Educação Básica interessados em aprofundar seus conhecimentos em Matemática. Como na Escola nem todos os alunos têm os mesmos interesses, habilidades e dificuldades, no planejamento das atividades iniciais, as seguintes questões nortearam o desenvolvimento das atividades propostas:

a. É possível encontrar nas Escolas alunos e professores dispostos a participar de atividades que envolvam o estudo de matemática fora do espaço da sala de aula?
b. Que estratégias podemos utilizar para engajar esses alunos e professores em tais atividades?
c. Que alunos demonstram interesse e devem participar dessas atividades?
d. Que materiais de apoio o professor pode utilizar?
e. Como usar as Olimpíadas de Matemática nessas atividades?
f. Essas atividades podem ser elaboradas com base nos Fundamentos Filosóficos da Educação Inclusiva e da Educação Matemática Crítica?

Incialmente, o autor faz um relato sobre suas atividades no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (PPG-ENSIMAT/UFRGS), bem como sobre as convicções relacionadas com sua prática docente em Escolas da Educação Básica, que motivaram a concepção inicial da pesquisa.

Depois, o autor apresenta as expectativas e intenções quanto ao desenvolvimento do trabalho e as bases teóricas utilizadas como suporte às ideias apresentadas na dissertação. Faz uma inserção histórica da origem das Olimpíadas de Matemática, apresentando os argumentos que levaram a utilizar as questões da OBMEP nas atividades realizadas com os alunos. Mostra o planejamento das atividades segundo os objetivos da OBMEP - “inclusão social e científica” e os Fundamentos Filosóficos da Educação Matemática Crítica – desenvolvimento das competências “matemática”, “tecnológica” e “reflexiva”. (SKOVSMOSE, 2004). O autor concluiu que:

> Os Fundamentos Filosóficos da Educação Matemática Crítica foram essenciais ao aprimoramento das concepções iniciais das atividades propostas ao Grupo de Estudos Professor Malba Tahan (GEMaTh), ao agregar à hipótese de contribuição com a formação dos futuros quadros técnico-científicos do país, a intensão de qualificar esse processo, enfatizando a necessidade do comprometimento desses quadros com o desenvolvimento do processo político-social do país.[...] foi observado um “argumento social de democratização” que exige um aprofundamento em conceitos de natureza matemática, para que seja possível trabalhar sobre hipóteses reais que poderão ser vinculadas ao exercício (posterior) pleno de cidadania. (MACIEL, 2008, p.98).

A pesquisa foi realizada, a partir da criação de um espaço institucional denominado Grupo de Estudos Professor Malba Tahan (GEMaTh), com os alunos que cursavam o 6° e 7º anos do Ensino Fundamental no Colégio Militar de Porto Alegre (CMPA). Desenvolvida com 15 alunos que apresentavam maior facilidade no aprendizado da Matemática, dando oportunidades para desenvolverem seu potencial.

A seguir, relatamos a dissertação de mestrado de Clailton Costa Cordeiro com o título: “Análise e classificação de erros de questões de Geometria Plana da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas”, apresentada em 2009.

O objetivo geral do autor na pesquisa foi analisar as resoluções e tentativas de resoluções dos alunos e, a partir destas, apresentar sugestões de estratégias para que o professor possa: reforçar, modificar e inovar a sua forma de ensinar, identificar que tipo de questão os alunos têm mais dificuldades, que tipo de erro eles cometem com mais frequência nas suas resoluções e propor soluções para os problemas encontrados e apresentados ao longo da análise para o Ensino de Geometria.

Para analisar, identificar, classificar e quantificar os tipos de erros mais frequentes o autor utilizou questões de geometria da primeira fase dos quatro primeiros anos da OBMEP (de 2005 a 2008). As referidas questões, que originalmente eram aplicadas no formato de múltipla escolha, foram modificadas e aplicadas de forma discursiva, para que fosse valorizado o processo de resolução e não somente o resultado.

O autor primeiramente faz um breve estudo sobre o Ensino de Matemática e diz: “... é preciso abrir espaço no planejamento para ouvir meus alunos e discutir com eles as estratégias utilizadas para a solução de problemas ou atividades” (CORDEIRO, 2009, p.17). Na seção seguinte aponta algumas alternativas como ponto de partida para o ensino matemático, entre elas a Resolução de Problemas. Segundo o autor:

> O trabalho com a Resolução de Problemas favorece a possibilidade de mobilização de conhecimentos prévios; a elaboração de estratégias de resolução; leva ao desenvolvimento da compreensão de alguns conceitos; favorece a aplicação e a revisão de processos que já foram aprendidos ou apresentados; possibilita a comparação de resultados e propiciam uma análise mais profunda das respostas, ou seja, sua existência e adequação (CORDEIRO, 2009, p.18).

Depois, o autor aponta como a geometria é vista e considerada nos Ensinos Fundamental e Médio no período em que a pesquisa foi realizada. Utiliza como base para a pesquisa os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) e estudos de Cury. A pesquisa apresenta aspectos quantitativos e qualitativos, definida por Creswell (2007, p. 34) como uma investigação de natureza mista. Como metodologia foi utilizada a análise de erros cometidos no desenvolvimento das questões de Geometria das provas OBMEP. Para a análise dos dados descritos na dissertação foi utilizada a seguinte classificação dos erros, creditada a Radatz (1979, p. 165-169), considerada “clássica” por Cury (2006) e traduzida pelo autor:

> • erros devido a dificuldades na linguagem: são apresentados na utilização de conceitos, vocabulário e símbolos matemáticos, e ao efetuar a passagem da linguagem corrente para linguagem matemática.
> • erros devido a dificuldades para obter informação espacial (dificuldades em obter informação a partir de representações gráficas): aparecem na representação espacial de uma situação matemática ou um problema geométrico.
> • erros devido a uma aprendizagem deficiente de fatos, habilidades e conceitos prévios (deficiência de pré-requisitos): são os cometidos por deficiências na manipulação de algoritmos, fatos básicos, procedimentos, símbolos e conceitos matemáticos.
> • erros devido a associações incorretas ou a rigidez de raciocínio: são causados pela falta de flexibilidade no pensamento para adaptar-se a novas situações; compreendem os erros por persistência, erros de associação, de interferência e de assimilação.
> • erros devido à aplicação de regras ou estratégias irrelevantes: são produzidas por aplicação de regras ou estratégias semelhantes em diferentes conteúdos. (CORDEIRO, 2009, p.49).

O autor analisou oito questões, desenvolvidas por 18 alunos do Ensino Médio, na rede estadual do município de Nova Iguaçu (RJ) e conclui que:

> O professor deveria aprender a identificar os diferentes tipos de erros cometidos pelos alunos, distinguir qual a natureza de cada um desses erros, bem como que ações precisam realizar para explorá-los a fim minimizar as deficiências no aprendizado e fazer com que os alunos entendam seus erros e como podem saná-los. (CORDEIRO, 2009, p. 78-79).

4 Caracterização da Pesquisa

Neste capítulo, exibimos os procedimentos metodológicos utilizados no decorrer das atividades. Destacando como metodologia de pesquisa, o estudo de caso, a forma utilizada para coleta de dados, a caracterização do ambiente, os sujeitos da pesquisa, os procedimentos pedagógicos e as atividades selecionadas para a pesquisa.

4.1 O Estudo de Caso

A partir da escolha de algumas questões discursivas da segunda fase da OBMEP aplicadas no Ensino Fundamental e no Ensino Médio, utilizamos nesse trabalho como metodologia de pesquisa, o estudo de caso, que é uma abordagem qualitativa de pesquisa.

Com a preocupação de descrever o ambiente e as estratégias utilizadas por um grupo específico de alunos, ao trabalhar com as questões da OBMEP nos três níveis, se fez necessário a realização da pesquisa com estudantes de duas escolas, pois a professora pesquisadora trabalhava pela manhã em uma Escola com os alunos do Ensino Fundamental e no período da tarde em outra Escola com alunos do Ensino Médio.

No planejamento, ao elaborar a sequência de atividades ou material didático com a seleção das questões transversais[7] e pseudotransversais[8] surgiram algumas reflexões relacionadas ao desenvolvimento cognitivo. Como alunos que estão em níveis diferentes de ensino resolveriam uma mesma questão? Quais as estratégias utilizadas? E diante de tais reflexões, a questão: "As estratégias desenvolvidas pelos alunos para a resolução das provas da OBMEP contribuem para a aprendizagem e para o desenvolvimento do raciocínio matemático?"

No estudo de caso o material produzido pelo aluno ocupa lugar de destaque, desempenhando papel fundamental no processo de resolução dos problemas trabalhados e na socialização destas soluções entre os membros dos grupos de educandos.

---

[7] São denominadas de questões transversais porque são comuns às provas dos três níveis da OBMEP.
[8] São denominadas de questões pseudotransversais, pois são comuns aos níveis 1 e 2 ou comuns aos níveis 2 e 3.

Segundo Gil (1998), o estudo de caso é “o estudo profundo e exaustivo de um ou de poucos objetos, com contornos claramente definidos, permitindo seu amplo e detalhado conhecimento”. (apud. FIORENTINI, 1988, p.58).

O estudo de caso é uma investigação de natureza empírica. Baseia-se fortemente em trabalho de campo ou em análise documental. Um tipo de pesquisa que tem sempre um forte cunho descritivo. Segundo GODOY (1995), a pesquisa qualitativa:

> envolve a obtenção de dados descritivos sobre pessoas, lugares e processos interativos pelo contato direto do pesquisador com a situação estudada, procurando compreender os fenômenos segundo a perspectiva dos sujeitos, ou seja, dos participantes da situação em estudo (p.58).

Conforme LUDKE e ANDRÉ (1986) “a pesquisa qualitativa supõe o contato direto e prolongado do pesquisador com o ambiente e a situação que está sendo investigada, via de regra, através do trabalho intensivo de campo.” (p.11)

Para D’AMBRÓSIO (2013) uma pesquisa qualitativa em Educação Matemática apresenta algumas características:

> ... no meu entender é o caminho para sair da mesmice. Lida e dá atenção às pessoas e às suas ideias, procura fazer sentido de discurso e narrativas que estariam silenciosas. E a análise dos resultados permitirá propor os próximos passos. Qual é a boa pesquisa qualitativa? É muito difícil adotar critérios, sem o grande risco de despersonalizar e manietar o pesquisador. Algumas pesquisas dirão mais, outras dirão menos, algumas terão credibilidade, outras não. A análise comparativa de uma variedade de pesquisas, conduzidas com metodologias distintas, pode definir cursos de ação, mas seus resultados jamais poderão ser considerados definitivos (p.21).

Nessa pesquisa, temos como objetivos elaborar uma sequência de atividades, observar as estratégias utilizadas no seu desenvolvimento, analisar e compreender como acontece a Aprendizagem e o Raciocínio dos alunos no processo educativo.

Ao relatar as estratégias aplicadas nas resoluções pretendemos responder a questão da pesquisa e permitir aos leitores desse trabalho a viabilidade da aplicação da proposta pedagógica em outras realidades, obtendo novas estratégias na resolução da mesma atividade, ou não.

4.2 Coleta de dados

Para a realização deste trabalho foi realizada uma seleção de questões das provas da OBMEP, destacando as questões discursivas da segunda fase que estão presentes nos três níveis da mesma.

No desenvolvimento das atividades, nas mediações entre o aluno e o conhecimento, pretendemos estimular o aluno a pensar ativa, criativa e autonomamente.

Nas resoluções de situações problemas, pretendemos incentivá-los a elaborar os próprios planos e estratégias para a solução dos problemas, desenvolvendo formas de raciocínio (estimativa, analogia, indução, busca de padrão ou regularidades, pequenas inferências lógicas, etc.), executando estes planos e estas estratégias com procedimentos adequados, com embasamento na fundamentação teórica.

O aluno deverá comunicar-se de modo matemático, argumentando, escrevendo e representando de várias maneiras as ideias matemáticas (com figuras, sequências numéricas, gráficos, etc.).

Quanto à metodologia de trabalho adotada na realização das atividades em sala de aula, utilizamos as questões da OBMEP, seguindo os passos das educadoras Onuchic e Allevato para a resolução dos problemas escolhidos. Nas atividades propostas, um dos objetivos foi construir um ambiente de busca, interação com os colegas cooperativamente, em pequenos grupos ou com toda a turma, auxiliando-os na construção e na descoberta, visando favorecer a curiosidade e a aprendizagem Matemática.

As observações foram feitas sobre como os alunos reagiram diante das situações de aprendizagem propostas e as estratégias utilizadas nas resoluções. No desenvolvimento da proposta pedagógica, os dados foram coletados com o uso de equipamentos de filmagem e fotografia, anotações de campo e coleta do material produzido pelos alunos durante as aulas. Os registros no desenvolvimento das atividades são fundamentais, pois possibilitam a análise detalhada de cada aluno durante o processo.

Nossa expectativa por ocasião da realização das atividades era de que os alunos desenvolvessem habilidades que permitissem confrontar os resultados, testar seus efeitos, comparar diferentes caminhos para obter a solução.

Ao apresentar um problema ou desafio é importante que todos tentem, de modo persistente, pois nessas tentativas ocorrem muitas aprendizagens. Com isso, estaremos contribuindo para que os mesmos não desistam diante dos primeiros obstáculos e no momento que solucionar um problema, experimentem o sentimento da autoconfiança.

4.3 Caracterização do Ambiente

A pesquisa foi desenvolvida na Escola Estadual Básica Prof.ª Erica Marques, situada no município de Terra de Areia (RS), com os alunos de Ensino Médio e Ensino Fundamental e na Escola Estadual de Ensino Fundamental Guilherme Schmitt, situada no município vizinho de Itati (RS), com os alunos do Ensino Fundamental, ambas no segundo semestre de 2014. As escolas estão situadas entre a Serra Geral e o Oceano Atlântico, no Litoral Norte do Rio Grande do Sul.

Por referir-se a um Estudo de Caso é importantíssimo compreender o contexto (ambiente) em que ocorreu o desenvolvimento da pesquisa. Para isso, apresentamos uma breve descrição de cada uma das duas escolas, desde a fundação até o momento que esta pesquisa foi realizada.

A caracterização da Escola Erica Marques foi elaborada a partir de um texto dos professores Felipe Krás de Oliveira e Tatiana de Souza, com algumas alterações feitas pela pesquisadora, devido à desatualização do Projeto Político Pedagógico.

A Escola Erica Marques foi oficializada pelo Decreto nº 3871 de 13 de março de 1953. Iniciou suas atividades como Escola Rural Isolada de Encruzilhada. Situada no então distrito de Terra de Areia, município de Osório.

Em 1960, transformou-se em Grupo Escolar Rural de Encruzilhada. No início dessa década a escola contou com valiosos professores que tomaram a frente em uma série de novidades como a Banda Marcial, para a qual, o Prof. Laertsan, confeccionou junto com os alunos, os primeiros instrumentos em 1963. Neste mesmo ano acontece o primeiro desfile cívico percorrendo a estrada de saibro que ainda viria a ser a BR-101. Em 1965, surgem as primeiras equipes de vôlei tendo como rede um saco de cisal, confeccionada pela Profª Candinha. Também era desenvolvido o teatro, o boxe e a ginástica rítmica. O fato triste desta época foi à morte prematura de uma professora chamada Erica Marques, no dia 10 de março de 1960, em Osório. Em homenagem à Professora Erica, no ano de 1963, a escola passa a denominar-se Escola Rural Profª Erica Marques.

Em 1969, foi reclassificada para Grupo Escolar Profª Erica Marques. O início da década seguinte é marcado pela criação de um Centro de Tradições Gaúchas dentro da escola denominado CTG Areia do Pago com direito a um galpão e apresentações artísticas bem elaboradas a cargo dos próprios professores. Nesta mesma época é criado o Clube Agrícola Integrado na Educação no qual os alunos aprendem a desenvolver técnicas no cultivo da terra.

Com a construção de um novo prédio (conhecido como o “prédio do currículo”) e ampliação de novas turmas em 1986, a escola passa a se chamar Escola Estadual de 1º Grau Prof.ª Erica Marques. A década de 80 também é marcada pelo Coral da escola que se apresentou em eventos por toda a região.

Em 1989, com a construção do prédio de dois pavimentos e a inauguração do 2º grau, nossa casa mais uma vez é rebatizada, agora como Escola Estadual de 1º e 2º Graus Profª Erica Marques. A década seguinte é marcada pela criação do Teatro Profª Dulce M. Ramos, uma homenagem do Profº Roberto Thomas e seus alunos/atores a uma engajada professora. Os anos 90 também foram importantes na atuação do GEEM (Grêmio Estudantil Erica Marques) nos encontros, fóruns e seminários em todo o estado e nas festas que eram realizadas no saguão da escola.

Em março de 2000, a escola passa a se chamar Escola Estadual Básica Profª Erica Marques, sua atual denominação. Nesse ano, a escola é cercada, ganha duas novas salas e um respeitado auditório que leva o mesmo nome do grupo de teatro. Também é o ano da criação do Ensino Médio Noturno. É a época em que a escola atrai muitos jovens de municípios vizinhos chegando a abrigar mais de 1300 alunos em sua totalidade.

Em 2006, a escola é destaque nacional com um troféu, representando o município na OBMEP. Em 2008, ficou em 1º lugar no ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) dentre as escolas públicas do Litoral Norte do Rio Grande do Sul.

Atualmente a escola conta com 750 alunos distribuídos nos três turnos e 65 profissionais entre professores e funcionários. Dispõe de supervisão escolar, orientação educacional, laboratórios de ciências, aprendizagem e informática, biblioteca, sala de Educação Física, sala de vídeo, cozinha com forno industrial, refeitório, quadra poliesportiva com arquibancada, pátio amplo, auditório, internet wireless, barzinho terceirizado, uma pracinha inigualável na região para os alunos das séries iniciais, salas para atender o Novo Ensino Médio, entre outros.

A Escola Estadual Básica Professora Erica Marques atende alunos no Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Construída na Zona Rural, mas com o crescimento do povoado em torno da BR 101 e com a emancipação do município, a escola passou a situar-se na Zona Urbana.

Já a escola Guilherme Schmitt pertence à Zona Rural e atende alunos no Ensino Fundamental. A cada ano o número de alunos diminui, pois muitos jovens mudam para as cidades maiores na busca de melhores oportunidades.

Conforme relato feito por professores aposentados e por integrantes da comunidade escolar, por meio de entrevista, elaborou-se uma retrospectiva histórica da escola, pois muitos registros foram perdidos. Alguns dados foram coletados pela professora/pesquisadora e outros pela professora Marli Margarete Alves Cardoso[9].

No ano de 1959, um grupo de amigos moradores de Itati, que na época, distrito do município de Osório, teve a iniciativa em reivindicar a construção de uma escola. A Escola Rural de Itati foi criada pelo Decreto nº 12.241, de 30 de março de 1961, pela Secretaria Estadual do Rio Grande do Sul. Inicialmente, a Escola funcionava no salão de baile do senhor Laudelino Menger, na localidade de Três Pinheiros. Tendo como diretor o professor Laertsan Tavares de Carvalho, as professoras Cândida Elisabetha Martins Carvalho e Neli Marques Ferreira.

Neste mesmo ano, o Senhor Edmar Torres e o Senhor Balduíno José Jacoby doaram um terreno de um hectare de terra onde foi construída a Escola.

Em maio de 1962 começa a construção da tão sonhada escola que tinha o nome de Escola Rural Isolada de Itati, denominada de Brizoleta. Era um prédio de madeira com duas salas de aula, uma secretaria e uma área coberta. Sua inauguração ocorreu em agosto de 1963.

Começa a lecionar nesta Escola a Professora Clorecy Andrade Costa. Em agosto deste mesmo ano o professor, Pedro Osmar Schütt assume como professor regente, cargo que corresponde atualmente ao diretor de escola. Os professores Clorecy Andrade Costa e Pedro Osmar Schütt assumem as vagas deixadas pelos professores Laertsan Tavares de Carvalho e de Cândida Elisabetha Martins de Carvalho. Por não ter residência própria hospedavam-se na casa dos moradores.

Devido ao fato do nome da Escola ser semelhante à outra já existente, causando confusão na entrega de correspondência entre as mesmas, no ano de 1965, houve necessidade de trocar o nome da escola, que passou a ser Escola Rural Isolada Guilherme Schmitt. Este em homenagem ao Senhor Guilherme Schmitt, funcionário público, que no ano de 1902 assumiu o cargo de Subprefeito de Itati, o qual exerceu durante 22 anos. Em 1914 assumiu também o cargo de Subdelegado de Polícia. Desta

[9] Pesquisa: http://marlialvesitati.pbworks.com/w/page/20397231/Memorial%20da%20Escola

data em diante, administrou os dois cargos prestando relevantes serviços à comunidade, vindo a falecer em 16 de maio de 1924.

Com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, em 1971, foi criado na escola o Supletivo à noite, para aqueles que não tiveram oportunidade no tempo ideal.

Em 1979 a Escola Rural Guilherme Schmitt passa a ser chamada de Escola Estadual de 1º Grau Incompleto Guilherme Schmitt, com complementação dos estudos de 1º Grau na Escola Estadual de 1º Grau Pastor Voges.

Em 1984 a direção da escola junto com o Sr. José Lenor Eberhardt presidente do Circulo de Pais e Mestres (C.P.M.) não mediram esforços para realizar mais um sonho da escola e da comunidade, uma quadra de esportes.

Sob a direção do professor diretor Pedro Osmar Schütt, de l985 a 1988 foram implantadas a 6ª, 7ª e 8ª séries. Com isso, o nome da escola passou a ser Escola Estadual de 1º Grau Guilherme Schmitt.

No decorrer do mês de maio de l988 o professor Pedro Osmar Schütt aposentou-se e a professora Maria de Matos Teixeira assumiu a direção da escola.

Com a implantação do 1º grau completo e o aumento do número de turmas, em 1989, foram construídas mais duas salas de aula.

Em dezembro de 2000, o nome da escola foi alterado para Escola Estadual de Ensino Fundamental Guilherme Schmitt, atual denominação da escola. No ano seguinte, em 2001, a escola recebeu mais duas salas de aula. Infelizmente em 2006, a antiga “Brizoleta” foi queimada, perdendo assim, os registros de documentos e todo o arquivo passivo da Escola.

Em 2007, a professora Maria Matos Teixeira aposentou-se completando dez anos na direção da escola. Cabe destacar que deixou como legado suas ações em prol da educação, como a horta escolar, plantações de palmeiras, coleta seletiva na escola, Grupo de Teatro, turno inverso com aulas de reforço, entre outras.

A comunidade escolar, depois de vários pedidos aos órgãos competentes, adquiriu uma nova sala de alvenaria no local das salas queimadas, atual laboratório de informática. E, com doações da comunidade foi construída uma sala para armazenar o material do Grupo de Teatro (Luz do Sol).

O Grupo de Teatro com apoio da comunidade escolar, da equipe diretiva da escola, em parceria com a Secretaria de Educação e Cultura de Itati e sob a coordenação das professoras Lucione de Bitencourt Martins[10] e Marli Margarete Alves Cardoso[11], realizaram cinco Seminários de Teatro na Escola, de 2005 a 2009.

A escola chegou a abrigar 130 alunos, mas no momento a escola tem, do 1º ao 9º ano, cerca de 80 alunos. Como o número de alunos é inferior a 100, a escola não tem vice-direção, nem supervisão escolar. No turno da manhã estudam os alunos do 6º ao 9º ano e, à tarde, os alunos do 1º ao 5º ano.

Atualmente a escola está sob a direção do professor Milton Volnei Bobsin, e tem no quadro funcional 17 profissionais na Educação, entre professores e funcionários. Dispõe de coordenação pedagógica, laboratório de informática, biblioteca, sala de Educação Física, sala de artes, cozinha, refeitório, quadra poliesportiva sem cobertura, uma pracinha para os alunos das séries iniciais, quatro salas de aula, entre outros.

Nas duas escolas a comunidade se faz presente por meio do Círculo de Pais e Mestres (CPM) e do Conselho Escolar (CE).

4.4 Sujeitos da pesquisa

A escolha das escolas deu-se pelo diagnóstico das dificuldades enfrentadas pelos alunos nas resoluções das provas da OBMEP. Como a distância entre as escolas é de aproximadamente doze quilômetros, que considero pequena, e, diante da necessidade de um trabalho diferenciado, surgiu a ideia de criar um ambiente de aprendizagem para os alunos que mostrassem interesse em participar da pesquisa.

Com o desenvolvimento das atividades selecionadas envolvendo as questões transversais e pseudotransversais, buscamos observar quais estratégias foram aplicadas pelos alunos em cada atividade. Para isso, optamos pela participação de alunos nos três níveis da OBMEP, envolvendo duas escolas que vem participando das provas desde a primeira edição (2005).

No primeiro encontro os alunos foram informados de como funcionaria o trabalho, os objetivos que deveriam ser atingidos e que suas produções seriam utilizadas na elaboração de uma dissertação de Mestrado. Também acertamos que as atividades propostas seriam desenvolvidas fora do turno das aulas, em dois períodos semanais, durante 8 semanas e que cada aluno, se assim o desejasse, poderia se retirar da pesquisa a qualquer momento sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

[10] Professora/pesquisadora deste trabalho que leciona a disciplina de Matemática desde 1995 nesta escola.
[11] Professora da escola.

O projeto de pesquisa foi apresentado para os alunos nas duas escolas e os grupos de estudo foram constituídos por adesão voluntária. Observamos que a maioria desses alunos apresentou baixo desempenho na primeira fase da OBMEP.

Após os esclarecimentos do trabalho pela pesquisadora, foram formados três grupos de estudos, somente com os alunos interessados em participar da pesquisa. Os grupos G1 e G2 formados pelos alunos da Escola Estadual Básica Professora Erica Marques e o grupo G3 formado por alunos da Escola Estadual de Ensino Fundamental Guilherme Schmitt. Ficou definido que os encontros do grupo G1 ocorreriam nas terças-feiras no turno vespertino, do grupo G2, nas quintas-feiras no turno da manhã e do grupo G3, no turno da tarde.

No primeiro encontro 58 alunos mostraram interesse em participar da pesquisa, mas após a determinação dos dias e os horários viáveis para a maioria, o número de alunos diminuiu para 52 alunos. Dentre esses, 10 alunos (N1N2N3) das duas escolas estavam classificados para a segunda fase da OBMEP.

Os respectivos pseudônimos constam no relato do primeiro encontro quando foram definidos os componentes dos grupos de estudo.

4.5 Procedimentos pedagógicos

As atividades foram selecionadas pela professora/pesquisadora a partir de provas da segunda fase da OBMEP. As estratégias utilizadas pelos participantes da pesquisa, ou seja, as respostas com justificativas são o foco da investigação. A pesquisa poderia ser realizada com outras questões, no entanto, diante das dificuldades encontradas pelos nossos alunos nas provas da OBMEP, utilizamos as questões da segunda fase que permitem a articulação de vários conceitos e possibilitam ao educador e ao educando conceber e representar o conhecimento como algo dinâmico e interativo, levando em conta que uma dada situação requer e permite explorar vários conceitos e procedimentos. As questões selecionadas permitem que os alunos construam e compartilhem hipóteses, troquem ideias, descubram e construam de forma interativa os saberes.

Para a escolha das questões, não foram considerados conteúdos específicos, mas as questões transversais ou pseudotransversais. As questões transversais são comuns aos três níveis $(N_1N_2N_3)$ e as pseudotransversais, a dois níveis, ou seja, comum nos níveis um e dois (N_1N_2) ou comum nos níveis dois e três (N_2N_3). Essas questões tratam de diferentes modos de pensamentos que constituem a Matemática (algébrico, geométrico, aritmético e combinatório).

Na aplicação dessas questões como atividade, no desenvolvimento de estratégias diferentes, no envolvimento do aluno na resolução das questões e nas ideias expostas nas discussões nos grupos, esperamos que os envolvidos na ação possam superar as dificuldades encontradas e, com isso, melhorar a qualidade no Ensino de Matemática.

Primeiramente, os alunos foram convidados para esclarecimentos sobre a pesquisa. Neste encontro ficaram definidos os dias, os horários e a carga horária prevista. Para orientá-los na sequência didática pedagógica explorando a Resolução de Problemas, com o auxílio de um *software*, apresentamos os nove passos propostos pelas educadoras Onuchic e Allevato (2009). Assim, no desenvolvimento das questões selecionadas discursivas, classificadas como transversais e pseudotransversais, no material produzido pelos participantes, nos relatos e análises das atividades evidenciamos os passos propostos por Onuchic e Allevato (2009). Também analisamos, no desenvolvimento das atividades, a formação do Ambiente de Aprendizagem segundo Skovsmose (2000).

No quadro 5, apresentamos as 22 questões selecionadas das provas de segunda fase da OBMEP realizadas entre 2005 e 2013. Como o primeiro encontro foi utilizado para esclarecimentos da proposta de trabalho, as 22 questões foram trabalhadas nos demais (sete encontros). O número de questões por encontro foi definido pela situação-problema apresentada e pela complexidade encontrada em cada grupo.

Quadro 5 − Questões desenvolvidas pelos alunos

ANO	ATIVIDADES	NÍVEL 1	NÍVEL 2	NÍVEL 3
2005	A1	Q6	Q1	-
	A2	Q4	Q2	-
	A3	-	Q6	Q6
2006	A4	Q4	Q1	-
	A5	Q6	Q3	Q2
	A6	-	Q6	Q4
2007	A7	Q2	Q1	-
	A8	Q6	Q5	Q3
	A9	-	Q6	Q4
2008	A10	Q2	Q1	-
	A11	Q5	Q2	Q1
2009	A12	Q5	Q2	-
	A13	-	Q5	Q2
	A14	Q6	Q6	Q3
2010	A15	Q2	Q1	-
	A16	Q6	Q4	Q2
	A17	-	Q6	Q4
2011	A18	Q3	Q1	-
	A19	Q6	Q4	Q2
2012	A20	Q6	Q4	Q2
	A21	-	Q5	Q3
2013	A22	Q6	Q5	Q3

Fonte: elaboração da autora.

O quadro acima apresenta o número de atividades desenvolvidas e identifica cada questão selecionada em cada ano, por nível. Observamos que o número de questões selecionadas por nível foi diferente.

Para os alunos do Nível 1 foram selecionadas 16 questões, sendo oito questões transversais $(N_1N_2N_3)$ e oito questões pseudotransversais (N_1N_2). Para os alunos do Nível 2 foram selecionadas 22 questões. Sendo oito questões transversais $(N_1N_2N_3)$ e quatorze pseudotransversais, oito (N_1N_2) e seis (N_2N_3). Para os alunos do Nível 3 foram selecionadas 14 questões, sendo oito questões transversais $(N_1N_2N_3)$ e seis (N_2N_3) pseudotransversais, conforme o quadro 5.

No segundo encontro, foram definidos os grupos de trabalho, formados preferencialmente por três componentes, escolhidos por afinidade pelos participantes da pesquisa. Logo, houve a distribuição da primeira questão ou problema, de um total de

22 questões selecionadas. As demais questões foram distribuídas nos encontros seguintes, de acordo com o ritmo de aprendizado de cada grupo.

4.5.1 Atividades desenvolvidas

Na construção da proposta didática a professora investigadora selecionou para os três níveis algumas questões da OBMEP, visando atingir o objetivo principal da pesquisa: elaborar uma sequência de atividades ou material didático que evidencie a importância das estratégias usadas pelos alunos na resolução de problemas.

A seguir, apresentamos todas as 22 atividades que foram desenvolvidas com o grupo de alunos participantes da pesquisa.

Figura 1 − Atividade 1

A1

Numa aula de Matemática, a professora inicia uma brincadeira, escrevendo no quadro-negro um número. Para continuar a brincadeira, os alunos devem escrever outro número, seguindo as regras abaixo:

(1) Se o número escrito só tiver um algarismo, ele deve ser multiplicado por 2.
(2) Se o número escrito tiver mais de um algarismo, os alunos podem escolher entre apagar o algarismo das unidades ou multiplicar esse número por 2.

Regras da Brincadeira	
Números com 1 algarismo	**Números com mais de 1 algarismo**
multiplicar por 2	*multiplicar por 2* OU *apagar o algarismo das unidades*

Depois que os alunos escrevem um novo número a brincadeira continua com este número, sempre com as mesmas regras.
Veja a seguir dois exemplos desta brincadeira, um começando com 203 e o outro com 4197:

$$203 \xrightarrow{\text{dobra}} 406 \xrightarrow{\text{apaga}} 40 \xrightarrow{\text{apaga}} 4\ldots$$

$$4197 \xrightarrow{\text{apaga}} 419 \xrightarrow{\text{dobra}} 838 \xrightarrow{\text{apaga}} 83\ldots$$

A) Comece a brincadeira com o número 45 e mostre uma maneira de prosseguir até chegar ao número 1.
B) Comece agora a brincadeira com o número 345 e mostre uma maneira de prosseguir até chegar ao número 1.
C) Explique como chegar ao número 1 começando a brincadeira com qualquer número natural diferente de zero.

Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

Figura 2 − Atividade 2

A2

A caminhonete de Beremiz pode carregar até 2 000 quilos. Ele aceita um serviço para transportar uma carga de 150 sacas de açúcar de 60 quilos cada e 100 sacas de milho de 25 quilos cada.

A) Beremiz conseguirá fazer o serviço em cinco viagens? Por quê?
B) Descreva uma maneira de fazer o serviço em seis viagens.

Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

Figura 3 − Atividade 3

A3

A Princesa Telassim cortou uma folha de papel retangular em 9 quadrados de lados 1, 4, 7, 8, 9, 10, 14, 15 e 18 centímetros.

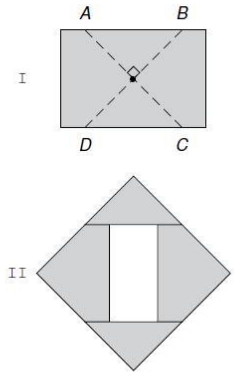
A) Qual era a área da folha antes de ser cortada?
B) Quais eram as medidas da folha antes de ser cortada?
C) A Princesa Telassim precisa montar a folha de novo. Ajude-a mostrando, com um desenho, como fazer esta montagem.

Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

Figura 4 − Atividade 4

A4

Uma folha retangular de 20 cm por 30 cm foi cortada ao longo das linhas tracejadas *AC* e *BD* em quatro pedaços: dois triângulos iguais e dois polígonos iguais de cinco lados cada um, como na figura I.



Os segmentos *AC* e *BD* têm o mesmo comprimento e se encontram no centro do retângulo formando ângulos retos.

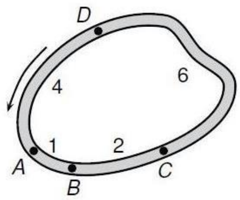
(a) Qual é o comprimento do segmento *AB*?
(b) Qual é a área de um pedaço triangular? E de um pedaço de cinco lados?
(c) Com os quatro pedaços podemos montar um quadrado com um buraco retangular, como na figura II. Qual é a área do buraco?

Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

Figura 5− Atividade 5

A5

A figura representa o traçado de uma pista de corrida. Os postos *A*, *B*, *C* e *D* são usados para partidas e chegadas de todas as corridas. As distâncias entre postos vizinhos, em quilômetros, estão indicadas na figura e as corridas são realizadas no sentido indicado pela flecha.
Por exemplo, uma corrida de 17 km pode ser realizada com partida em *D* e chegada em *A*.



(a) Quais são os postos de partida e chegada de uma corrida de 14 quilômetros?
(b) E para uma corrida de 100 quilômetros, quais são esses postos?
(c) Mostre que é possível realizar corridas com extensão igual a qualquer número inteiro de quilômetros.

Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

Figura 6 − Atividade 6

A6

O quadrado da figura I é chamado *especial* porque

1. ele está dividido em 16 quadrados iguais;
2. em cada linha e em cada coluna aparecem os algarismos 1, 2, 3 e 4;
3. em cada um dos quadrados *A*, *B*, *C* e *D* (como na figura II) aparecem os algarismos 1, 2, 3 e 4.

4	2	1	3
1	3	2	4
3	1	4	2
2	4	3	1

I

A	*B*
C	*D*

II

(a) Complete o quadrado abaixo de modo que ele se torne especial.

	2		
3	4		
		1	
			2

(b) É possível completar o quadrado abaixo de modo a obter um quadrado especial? Por quê?

1	2		
3	4		
			2
			1

(c) Exiba todas as maneiras de completar o quadrado abaixo de modo a obter um quadrado especial.

1	2		
3	4		
			1

(d) Quantos quadrados especiais existem?

Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

Figura 7 − Atividade 7

A7

Um antigo método para codificar palavras consiste em escolher um número de 1 a 26, chamado *chave* do código, e girar o disco interno do aparelho ilustrado na figura até que essa chave corresponda à letra A. Depois disso, as letras da palavra são substituídas pelos números correspondentes, separados por tracinhos. Por exemplo, na figura ao lado a chave é 5 e a palavra *PAI* é codificada como 20-5-13.

(a) Usando a chave indicada na figura, descubra qual palavra foi codificada como 23-25-7-25-22-13.

(b) Codifique *OBMEP* usando a chave 20.

(c) Chicó codificou uma palavra de 4 letras com a chave 20, mas esqueceu-se de colocar os tracinhos e escreveu 2620138. Ajude o Chicó colocando os tracinhos que ele esqueceu e depois escreva a palavra que ele codificou.

(d) Em uma outra chave, a soma dos números que representam as letras *A*, *B* e *C* é 52. Qual é essa chave?

Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

Figura 8 − Atividade 8

A8

Os times *A*, *B*, *C*, *D* e *E* disputaram, entre si, um torneio de futebol com as seguintes regras:

- o vencedor de uma partida ganha 3 pontos e o perdedor não ganha nada;
- em caso de empate cada um dos times ganha 1 ponto;
- cada time joga exatamente uma vez com cada um dos outros.

O campeão do torneio foi o time *A*, seguido na classificação por *B*, *C*, *D* e *E*, nessa ordem. Além disso

- o time *A* não empatou nenhuma partida;
- o time *B* não perdeu nenhuma partida;
- todos os times terminaram o torneio com números diferentes de pontos.

(a) O time *A* ganhou, perdeu ou empatou sua partida contra o time *B*? Por quê?

(b) Com quantos pontos o time *A* terminou o torneio? Por quê?

(c) Explique porque o time *B* obteve um número par de pontos nesse torneio.

(d) Na tabela, cada coluna representa uma partida. Sabendo que ocorreram exatamente 5 empates nesse torneio, desenhe, em cada coluna da tabela, um círculo em volta do nome do time ganhador ou em volta do ×, em caso de empate.

A	*A*	*A*	*A*	*B*	*B*	*B*	*C*	*C*	*D*
×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
B	*C*	*D*	*E*	*C*	*D*	*E*	*D*	*E*	*E*

Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

Figura 9 − Atividade 9

A9

Fernando e Isaura inventaram um jogo diferente, cujas regras são as seguintes:

1. eles começam uma partida com 128 palitos cada um;
2. em cada jogada, eles tiram par ou ímpar; se sai par, Fernando dá metade dos palitos que tem para Isaura e, se sai ímpar, Isaura dá a metade dos palitos que tem para Fernando.
3. eles repetem o procedimento da regra 2 até que um deles fique com um número ímpar de palitos, quando a partida acaba. Ganha quem ficar com maior número de palitos.

Veja o que acontece em uma partida onde a seqüência das três primeiras jogadas é **par**, **ímpar**, **par**:

Fernando	Isaura		Fernando	Isaura		Fernando	Isaura		Fernando	Isaura	
128	128	$\xrightarrow[\text{1ª jogada}]{\text{par}}$	64	192	$\xrightarrow[\text{2ª jogada}]{\text{ímpar}}$	160	96	$\xrightarrow[\text{3ª jogada}]{\text{par}}$	80	176	...

(a) Complete o esquema com o número de palitos de Fernando e Isaura, de acordo com as jogadas indicadas.

(b) Uma partida acabou quando Fernando ficou com 101 palitos. Na última jogada saiu par ou ímpar?

(c) Qual foi a seqüência de pares e ímpares da partida que acabou quando Fernando ficou com 101 palitos?

(d) Mostre que qualquer partida acaba com exatamente sete jogadas.

(a)

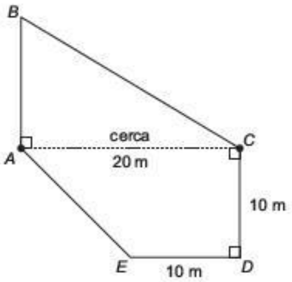
Fernando	Isaura		Fernando	Isaura		Fernando	Isaura		Fernando	Isaura	
128	128	$\xrightarrow[\text{1ª jogada}]{\text{ímpar}}$			$\xrightarrow[\text{2ª jogada}]{\text{ímpar}}$			$\xrightarrow[\text{3ª jogada}]{\text{par}}$			...

Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

Figura 10 − Atividade 10

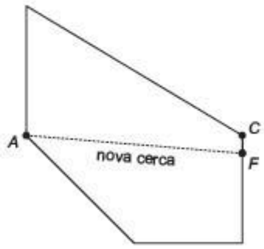
A10

A figura ao lado representa o terreno de Sinhá Vitória. Esse terreno é dividido em duas partes por uma cerca, representada pelo segmento *AC*. A parte triangular *ABC* tem área igual a 120 m².



a) Qual é a área total do terreno?

(b) Sinhá Vitória quer fazer uma nova cerca, representada pelo segmento *AF* na figura, de modo a dividir o terreno em duas partes de mesma área. Qual deve ser a distância *CF*?

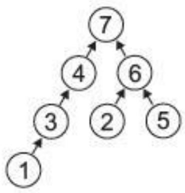


Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

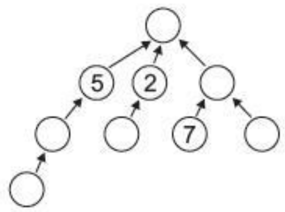
Figura 11 − Atividade 11

A11

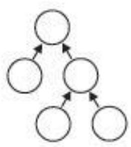
Os círculos da figura abaixo foram preenchidos com os números de 1 a 7, de modo que todas as flechas apontam de um número menor para um maior. Neste caso, dizemos que a figura foi *bem preenchida*.



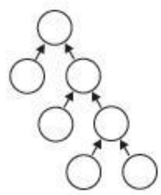
(a) Complete a figura abaixo com os números de 1 a 9 de modo que ela fique bem preenchida.



(b) De quantas maneiras a figura ao lado pode ser bem preenchida com os números de 1 a 5?



(c) De quantas maneiras a figura ao lado pode ser bem preenchida com os números de 1 a 7?

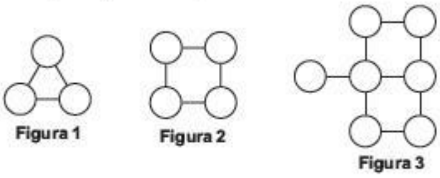


Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

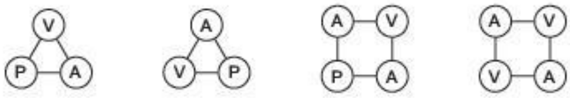
Figura 12 − Atividade 12

A12

Ana quer colorir as bolinhas das figuras 1, 2 e 3 de azul (A), preto (P) ou vermelho (V) de modo que **bolinhas ligadas por um segmento tenham cores diferentes**.



Veja a seguir duas maneiras diferentes de colorir a figura 1 e duas maneiras diferentes de colorir a figura 2:



(a) De quantas maneiras diferentes Ana pode colorir a figura 1?

(b) De quantas maneiras diferentes Ana pode colorir a figura 2?

(c) De quantas maneiras diferentes Ana pode colorir a figura 3?

Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

Figura 13 − Atividade 13

A13

Um número inteiro n é *simpático* quando existem inteiros positivos a, b e c tais que $a < b < c$ e $n = a^2 + b^2 - c^2$. Por exemplo, os números 1 e 2 são simpáticos, pois $1 = 4^2 + 7^2 - 8^2$ e $2 = 5^2 + 11^2 - 12^2$.

(a) Verifique que $(3x+1)^2 + (4x+2)^2 - (5x+2)^2$ é igual a $2x+1$, qualquer que seja x.

(b) Encontre números inteiros m e n tais que $(3x-m)^2 + (4x-n)^2 - (5x-5)^2 = 2x$, qualquer que seja x.

(c) Mostre que o número 4 é simpático.

(d) Mostre que todos os números inteiros positivos são simpáticos.

Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

Figura 14 − Atividade 14

A14

No jogo do *Troca-Cor* usa-se um tabuleiro com duas linhas e com quantas colunas quisermos, cujas casas podem mudar da cor branca para cinza e vice-versa. As casas da 1ª linha são numeradas com os números ímpares e as da 2ª linha com os números pares. Em cada jogada aperta-se uma casa e, então, essa casa e as casas vizinhas mudam de cor. Uma *partida completa* começa com todas as casas brancas e termina quando todas ficam cinzas. Veja dois exemplos de partidas completas (os números acima das flechas indicam a casa apertada em cada jogada):

Casas vizinhas são casas que têm um lado comum.

Tabuleiro	Partida completa	Jogadas
2×3	$\begin{smallmatrix}1&3&5\\2&4&6\end{smallmatrix} \xrightarrow{1} \begin{smallmatrix}1&3&5\\2&4&6\end{smallmatrix} \xrightarrow{6} \begin{smallmatrix}1&3&5\\2&4&6\end{smallmatrix}$	1 e 6
2×2	$\begin{smallmatrix}1&3\\2&4\end{smallmatrix} \xrightarrow{1} \begin{smallmatrix}1&3\\2&4\end{smallmatrix} \xrightarrow{2} \begin{smallmatrix}1&3\\2&4\end{smallmatrix} \xrightarrow{4} \begin{smallmatrix}1&3\\2&4\end{smallmatrix} \xrightarrow{3} \begin{smallmatrix}1&3\\2&4\end{smallmatrix}$	1, 2, 4 e 3

Tabuleiro	Jogadas
$\begin{smallmatrix}1&3&5&7&9\\2&4&6&8&10\end{smallmatrix}$	
$\begin{smallmatrix}1&3&5&7\\2&4&6&8\end{smallmatrix}$	

(a) Escreva as jogadas de uma partida completa nos tabuleiros ao lado.

(b) Explique como jogar uma partida completa no tabuleiro 2×100.

(c) Explique como jogar uma partida completa com exatamente 51 jogadas no tabuleiro 2×101.

(d) Explique porque não é possível jogar uma partida completa com menos que 51 jogadas no tabuleiro 2×101.

Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

Figura 15 − Atividade 15

A15

Um "matemágico" faz mágicas com cartões verdes, amarelos, azuis e vermelhos, numerados de 1 a 13 para cada cor. Ele mistura os cartões e diz para uma criança: "Sem que eu veja, escolha um cartão, calcule o dobro do número desse cartão, some 3 e multiplique o resultado por 5. Depois

- some 1, se o cartão for verde;
- some 2, se o cartão for amarelo;
- some 3, se o cartão for azul;
- some 4, se o cartão for vermelho.

Diga-me o resultado final e eu lhe direi a cor e o número do cartão que você escolheu."

a) Joãozinho escolheu o cartão vermelho com o número 3. Qual é o número que ele deve dizer ao matemágico?

b) Mariazinha disse "Setenta e seis" para o matemágico. Qual é o número e a cor do cartão que ela escolheu?

c) Após escolher um cartão, Pedrinho disse "Sessenta e um" e o matemágico respondeu "Você errou alguma conta". Explique como o matemágico pôde saber isso.

Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

Figura 16 − Atividade 16

A16

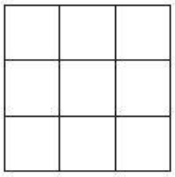
Gabriel desenha quadrados divididos em nove casas e escreve os números naturais de 1 a 9, um em cada casa. Em seguida, ele calcula a soma dos números de cada linha e de cada coluna. A figura mostra um dos quadrados do Gabriel; observe que a soma dos números da terceira linha é $5+8+2=15$ e a soma dos números da segunda coluna é $9+7+8=24$. Nesse exemplo, as seis somas são 6, 12, 15, 15, 18 e 24.

6	9	3	18
4	7	1	12
5	8	2	15
15	24	6	

a) Gabriel preencheu um quadrado e fez apenas cinco somas: 9, 13, 14, 17 e 18. Qual é a soma que está faltando?

b) Explique por que não é possível que, em um quadrado do Gabriel, todas as somas sejam números pares.

c) Preencha o quadrado de modo que as somas sejam 7, 13, 14, 16, 18 e 22.

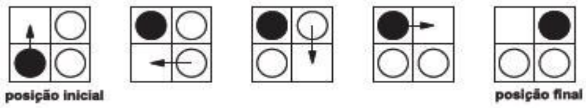


Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

Figura 17 − Atividade 17

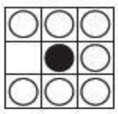
A17

No jogo *Arrasta Um* usa-se um tabuleiro quadriculado e peças redondas, uma preta e as outras brancas. Coloca-se uma peça em cada casa do tabuleiro, exceto em uma que é deixada vazia. Um *movimento* consiste em deslocar para a casa vazia a peça de uma casa adjacente. O jogo termina quando a peça preta chega ao canto superior direito do tabuleiro. Veja um exemplo de como terminar o *Arrasta Um* em quatro movimentos em um tabuleiro 2×2.

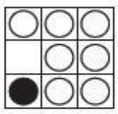


Esta sequência de movimentos pode ser descrita por $(\uparrow, \leftarrow, \downarrow, \rightarrow)$.

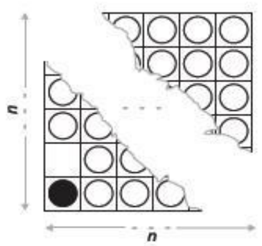
a) Descreva como terminar o *Arrasta Um* em seis movimentos no tabuleiro 3×3 abaixo.



b) Descreva como terminar o *Arrasta Um* em dez movimentos no tabuleiro 3×3 abaixo.



c) Mostre que em um tabuleiro $n\times n$, como na figura, é possível terminar o *Arrasta Um* em $6n-8$ movimentos.



Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

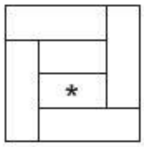
Figura 18 − Atividade 18

A18

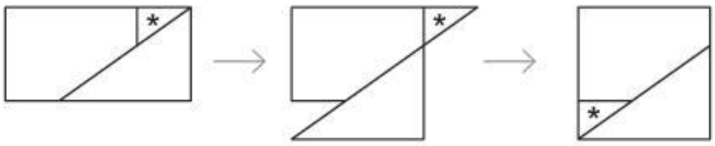
Sara recortou três tiras retangulares diferentes de papel.

a) Ela recortou a primeira tira em três retângulos iguais, como na figura abaixo. Com esses retângulos, formou um quadrado de 36 cm² de área. Encontre as medidas dos lados dos retângulos que ela recortou.

b) Ela recortou a segunda tira em seis retângulos de mesma largura e com eles formou um quadrado de 36 cm² de área, como na figura. Encontre o perímetro e a área do retângulo indicado com *.



c) As medidas da terceira tira eram 4,5 cm e 2 cm. Sara recortou essa tira em três pedaços e com eles formou um quadrado, como na figura. Qual é a área do triângulo indicado com *?



Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

Figura 19 − Atividade 19

A19

Começando com qualquer número natural não nulo é sempre possível formar uma sequência de números que termina em 1, seguindo repetidamente as instruções abaixo:

- se o número for ímpar, soma-se 1;
- se o número for par, divide-se por 2.

Por exemplo, começando com o número 21, forma-se a seguinte sequência:

21→22→11→12→6→3→4→2→1

Nessa sequência aparecem nove números; por isso, dizemos que ela tem *comprimento* 9. Além disso, como ela começa com um número ímpar, dizemos que ela é uma *sequência ímpar*.

a) Escreva a sequência que começa com 37.

b) Existem três sequências de comprimento 5, sendo duas pares e uma ímpar. Escreva essas sequências.

c) Quantas são as sequências pares e quantas são as sequências ímpares de comprimento 6? E de comprimento 7?

d) Existem ao todo 377 sequências de comprimento 15, sendo 233 pares e 144 ímpares. Quantas são as sequências de comprimento 16? Dessas, quantas são pares? Não se esqueça de justificar sua resposta.

Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

Figura 20 − Atividade 20

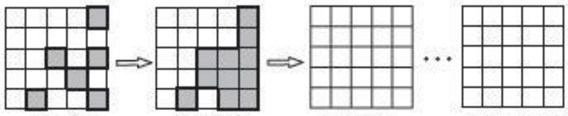
A20

Uma contaminação em um tabuleiro 5×5, formado por quadrados de 1 cm de lado, propaga-se em estágios de acordo com as seguintes regras:

- quadrados contaminados, indicados em cinza, permanecem contaminados no estágio seguinte;
- um quadrado não contaminado, indicado em branco, torna-se contaminado no estágio seguinte quando tem pelo menos dois lados comuns com quadrados contaminados; caso contrário, permanece não contaminado;
- a contaminação acaba quando não é possível contaminar novos quadrados.

---

a) Complete a figura abaixo, desenhando o terceiro e o último estágios da contaminação nos respectivos tabuleiros.



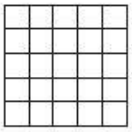
1º estágio 2º estágio 3º estágio último estágio

O *perímetro de contaminação* de um estágio é a medida do contorno da área contaminada. Por exemplo, os perímetros de contaminação do primeiro e do segundo estágios da contaminação ilustrada são 24 cm e 20 cm, respectivamente, como mostram as linhas em destaque na figura do item a.

---

b) Escreva os perímetros de contaminação do terceiro e do último estágios da contaminação do item a.

c) Desenhe um estágio com apenas 5 quadrados contaminados tal que, ao final da contaminação, todo o tabuleiro fique contaminado.



d) Explique por que o perímetro de contaminação nunca aumenta de um estágio para o seguinte.

e) Explique por que não é possível contaminar todo o tabuleiro a partir de um estágio com menos de 5 quadrados contaminados.

Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

Figura 21 − Atividade 21

A21

Juca quer pintar os algarismos do número 2013, como na figura ao lado, de modo que cada região seja pintada com uma das cores branca, cinza ou preta e que regiões vizinhas tenham cores diferentes.

---

a) Observe que Juca pode pintar o algarismo 2 de $3 \times 2 \times 2$ maneiras diferentes. De quantas maneiras diferentes ele pode pintar o algarismo 1?

b) De quantas maneiras diferentes Juca pode pintar o algarismo 3?

c) De quantas maneiras diferentes Juca pode pintar o algarismo 0?

d) Escreva uma expressão numérica que permita calcular de quantas maneiras Juca pode pintar o número 2013.

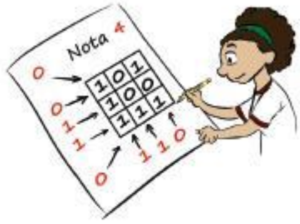
Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

Figura 22 − Atividade 22

A22

Helena brinca com tabuleiros 3×3, preenchidos com os algarismos 0 ou 1, da seguinte maneira:

- ela atribui o número 0 a cada linha, coluna ou diagonal cuja soma de seus algarismos seja par e o número 1 a cada linha, coluna ou diagonal para a qual essa soma seja ímpar;
- em seguida, ela calcula a *nota* do tabuleiro, que é a soma dos números que ela atribuiu.



Por exemplo, a nota do tabuleiro na ilustração é $0+0+1+1+0+1+1+0=4$.

a) Qual é a nota do tabuleiro abaixo?

0	0	1
1	1	1
0	0	0

b) Preencha os tabuleiros abaixo de quatro maneiras diferentes e de modo que todos tenham nota 8.

c) Explique por que, quando se troca o número de um dos cantos de um tabuleiro de nota ímpar, sua nota torna-se par.

d) De quantas maneiras diferentes um tabuleiro pode ser preenchido de modo que sua nota seja ímpar?

Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

Dentre as 22 atividades desenvolvidas, escolhemos 9 que tratamos no próximo capítulo, analisando a prática e as estratégias utilizadas pelos alunos para a solução dos problemas.

5 Relatos e análises das atividades

Neste capítulo descrevemos, de forma interpretativa, nove questões selecionadas após os encontros realizados. A pesquisa de campo foi desenvolvida com 22 questões da OBMEP que possibilitaram a obtenção de registros escritos de todos os participantes.

Das vinte e duas questões desenvolvidas pelos alunos, nove foram selecionadas pela pesquisadora para uma análise mais profunda Para não alongar demasiadamente o texto e também para evitar determinadas repetições, selecionamos, dentre as vinte e duas questões trabalhadas na pesquisa, nove questões para apresentar uma análise mais detalhada. Os critérios utilizados para a seleção foram os seguintes: aplicação do primeiro passo proposto pelas educadoras Onuchic e Allevato, no qual os conteúdos matemáticos utilizados para a resolução do problema não tinham, ainda, sido trabalhados em sala de aula; escolha de uma questão em cada edição da OBMEP, de 2005 a 2013; e as questões com maior produção escrita.

No quadro abaixo apresentamos as questões que foram selecionadas para apresentarmos os relatos e as análises.

Quadro 6 − Atividades selecionadas pela pesquisadora

ANO	ATIVIDADES	NÍVEIS
2005	A3	N_2N_3
2006	A5	$N_1N_2N_3$
2007	A8	$N_1N_2N_3$
2008	A11	$N_1N_2N_3$
2009	A14	$N_1N_2N_3$
2010	A16	$N_1N_2N_3$
2011	A19	$N_1N_2N_3$
2012	A20	$N_1N_2N_3$
2013	A22	$N_1N_2N_3$

Fonte: elaboração da autora.

Conforme o quadro acima, foram oito questões transversais e uma pseudotransversal: a atividade três é uma questão pseudotransversal (N_2N_3) da prova de 2005, pois nesse ano não houve questões transversais; as demais questões selecionadas são transversais.

5.1 Formas e convenções utilizadas na coleta de dados

No primeiro encontro foi realizada uma reunião com os alunos interessados em participar do grupo de estudos das questões da OBMEP. Nessa reunião foi apresentada a proposta de trabalho e o termo de consentimento informado para a participação na pesquisa, que deveriam trazer assinado pelos responsáveis. Também ficaram definidos os horários dos encontros, buscando favorecer a maioria dos alunos. O quadro a seguir mostra o cronograma dos encontros previstos.

Quadro 7 − Cronograma dos encontros

GRUPOS DE ESTUDO DE MATEMÁTICA								
GRUPOS	ENCONTROS							
	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º
Grupo 1- G1	08/08	12/08	19/08	26/08	02/09	09/09	16/09	23/09
Grupo 2- G2	08/08	14/08	21/08	28/08	04/09	11/09	18/09	25/09
Grupo 3- G3	07/08	14/08	21/08	28/08	04/09	11/09	18/09	25/09

Fonte: elaborado pela pesquisadora

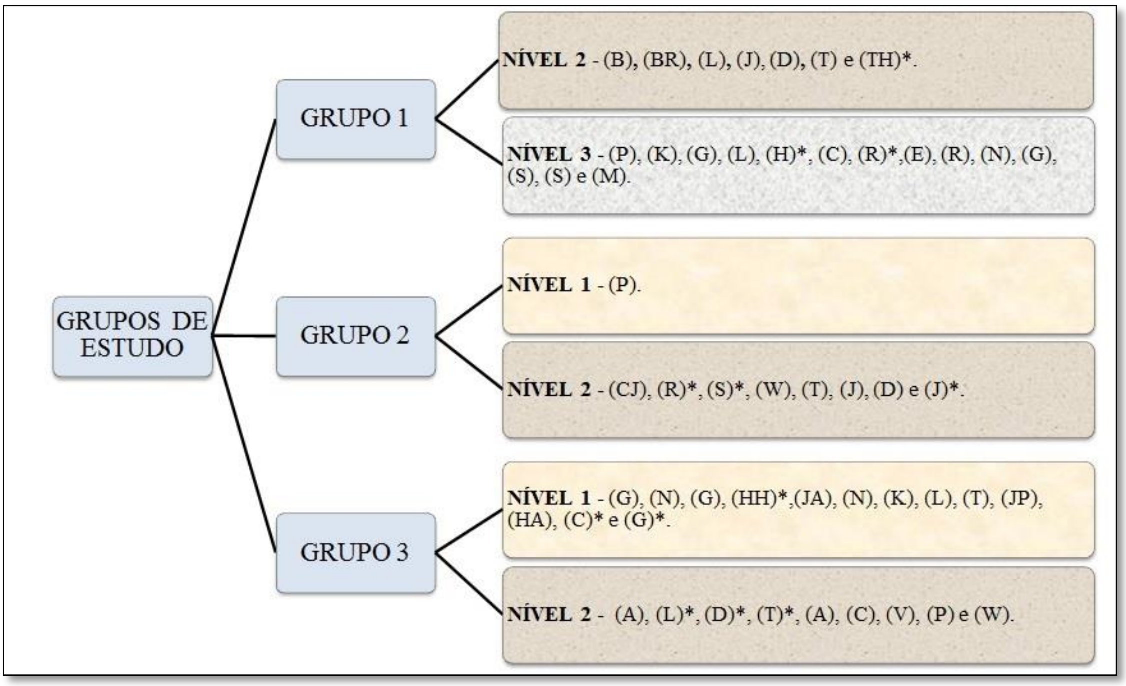
Além disso, ficou combinado que, em todos os encontros de cada grupo de estudo, seriam aplicadas questões discursivas selecionadas dentre as provas da segunda fase da OBMEP, com questões dos três níveis: Nível 1 (N1) – para os alunos do 6º e 7º anos do Ensino Fundamental, Nível 2 (N2) – para os alunos matriculados no 8º e 9º anos do Ensino Fundamental e Nível 3 (N3) – para os alunos matriculados em qualquer ano do Ensino Médio.

Ao iniciar o desenvolvimento das atividades a professora/pesquisadora estabeleceu uma convenção coletiva de trabalho, com o objetivo de esclarecer para os alunos e para o leitor as anotações realizadas.

O material produzido pelos alunos e selecionado foi transcrito literalmente, mantendo em sigilo suas identidades. Para a apresentação dos dados foi utilizada a seguinte convenção: cada participante da pesquisa escolheu uma letra maiúscula do alfabeto como pseudônimo. No caso de letras iguais, pois à formação dos grupos ocorreu em momentos diferentes, acrescentamos outra letra. Para identificar a professora/pesquisadora nos diálogos, usamos as letras PP.

No quadro 8, apresentamos os grupos de alunos [12] que participaram dos encontros e o pseudônimo utilizado no relato das resoluções apresentadas por eles.

Quadro 8 − Grupos e pseudônimos dos alunos que participaram da pesquisa



Fonte: elaboração da autora baseado nos registros de presença nos encontros.

Assim ficaram definidos os grupos de estudos:

- Os grupos G1 e G2 são alunos da Escola Estadual Básica Professora Erica Marques, situada no município de Terra de Areia/ RS. Participaram da pesquisa nessa Escola um total de 30 alunos, sendo um aluno do Nível 1, quinze alunos do Nível 2 e quatorze alunos do Nível 3.
- O grupo G3 são alunos da Escola Estadual de Ensino Fundamental Guilherme Schmitt, situada no município de Itati/RS. Nessa Escola participaram da pesquisa 22 alunos, sendo treze alunos do Nível 1 e nove alunos do Nível 2.

Os grupos foram formados por aderência voluntária, após apresentação do projeto de trabalho pela pesquisadora. Os encontros foram semanais, fora do turno de aula, sendo cada um deles com duas horas de duração. Ocorreram no período de 07/08/2014 a 25/09/2014, totalizando de 16 horas em cada grupo.

[12] Os alunos, cuja frequência foi inferior a 75%, estão marcados com um asterisco.

Em 2014 as provas da segunda fase da OBMEP foram realizadas no dia 13 de setembro. Assim, os participantes da pesquisa que foram classificados para a segunda fase, tiveram nas atividades propostas, a oportunidade de explorar diferentes caminhos na busca das soluções e preparar-se melhor para enfrentar situações novas de aprendizagem.

Durante as aulas foram utilizados alguns instrumentos para guardar a memória do percurso da atividade prática. Destacamos o diário de campo nos registros dos diálogos e ações dos grupos enquanto buscavam as soluções para as questões. Também, tiramos fotos e todos os encontros foram filmados. Assim, foi elaborado um relatório de cada atividade desenvolvida. Tais instrumentos possibilitaram a produção de material com dados para posterior seleção e análise.

As manifestações ocorreram de forma individualizada, mas em muitas situações representavam opiniões tiradas em discussões no grupo. Os diálogos, ideias e soluções apresentadas pelos grupos foram mantidos na íntegra, para não interferir na investigação.

Em cada atividade, procuramos identificar e compreender os passos utilizados pelos alunos. Para isso, pedimos a todos que apresentassem, por escrito, suas respostas com justificativas. Além disso, de acordo com as educadoras Onuchic e Allevato, as soluções foram socializadas e discutidas.

5.2 Relatos e Análises das atividades selecionadas

No segundo encontro, foram definidos os grupos de trabalho de preferência com três componentes, escolhido por afinidade pelos participantes da pesquisa. Em seguida, houve a distribuição da primeira questão ou situação-problema. Para cada encontro selecionamos três atividades por nível, mas no desenvolvimento das questões a proposta foi alterada, pois o tempo utilizado em cada grupo era variável. Então, as questões foram distribuídas de acordo com o ritmo de aprendizado de cada grupo. Assim, optamos em fazer o relato de uma atividade para cada ano de OBMEP, no período de 2005 a 2009 e não por encontro.

Todos os dados foram coletados por meio de registros escritos, fotos e filmagens dos encontros, como já mencionado anteriormente, os quais serviram de subsídio às nossas análises. Verificamos o material escrito, as falas e as imagens dos participantes, procurando registrar as discussões nos grupos, os questionamentos, a busca do consenso nas soluções dos problemas, destacando as diferentes estratégias e demonstrações das propriedades qualificadas, aplicadas em cada atividade proposta. Após o relato de cada atividade, apresentamos a correspondente análise.

5.2.1 Atividade A3

Na figura abaixo apresentamos a questão (N_2N_3) selecionada da OBMEP (2005) como terceira atividade. A situação-problema apresentada é a mesma, mas com personagens diferentes. No Nível 2 a Princesa Telassim, em homenagem ao autor Malba Tahan e no Nível 3 a Capitu, personagem do autor Machado de Assis. Esta questão na época foi divulgada pelos meios de comunicação como difícil e até questionada se teria solução.

Figura 23 − Atividade 3

A3

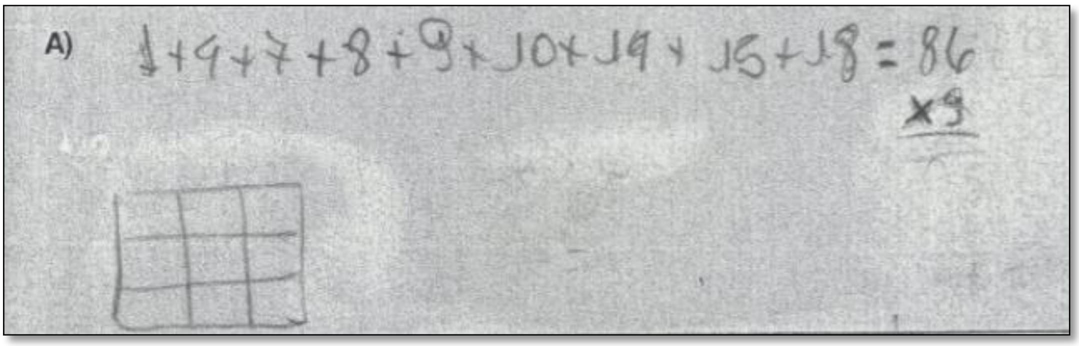
A Princesa Telassim cortou uma folha de papel retangular em 9 quadrados de lados 1, 4, 7, 8, 9, 10, 14, 15 e 18 centímetros.

A) Qual era a área da folha antes de ser cortada?
B) Quais eram as medidas da folha antes de ser cortada?
C) A Princesa Telassim precisa montar a folha de novo. Ajude-a mostrando, com um desenho, como fazer esta montagem.

Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

Como professora pesquisadora ficava atenta na ação dos participantes. Logo, após a leitura individual os alunos de um dos pequenos grupos do G3 começaram a somar as medidas dos lados dos quadrados ao invés de somar as áreas dos quadrados, conforme apresentado na figura abaixo.

Figura 24 − Resolução apresentada pela aluna P do G3N2.



Fonte: arquivo pessoal.

A resposta imediata levou à indagação:

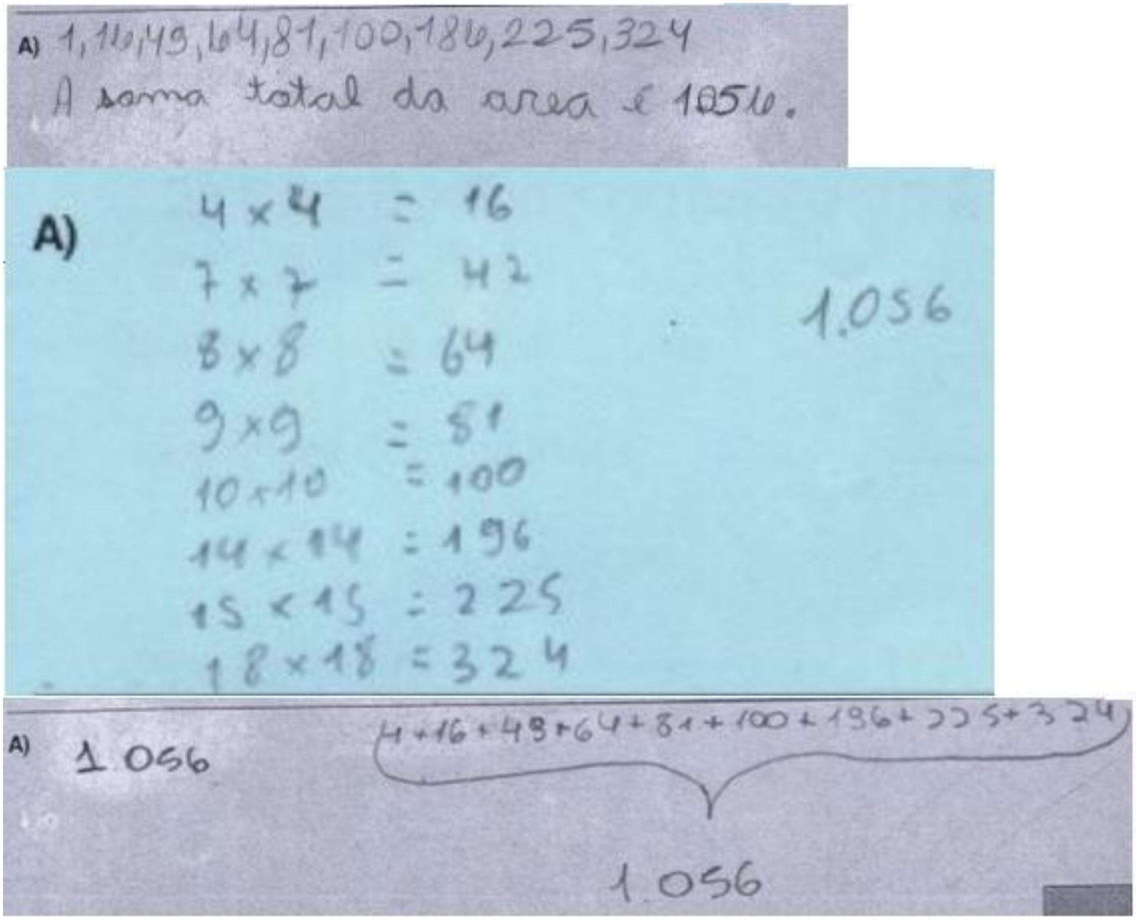
PP – “Como calculamos a área do quadrado?”

Logo, o aluno H do N1 que estava próximo respondeu:

G – “lado x lado”.

No mesmo instante começaram a apagar, percebendo que tinham somado os lados ao invés da soma das áreas dos quadrados. Nesse momento a professora pesquisadora solicitou que o grupo fizesse o registro do erro, depois os membros do grupo efetuaram os cálculos e chegaram à área da folha. A figura abaixo mostra alguns erros cometidos na resolução do item **a**.

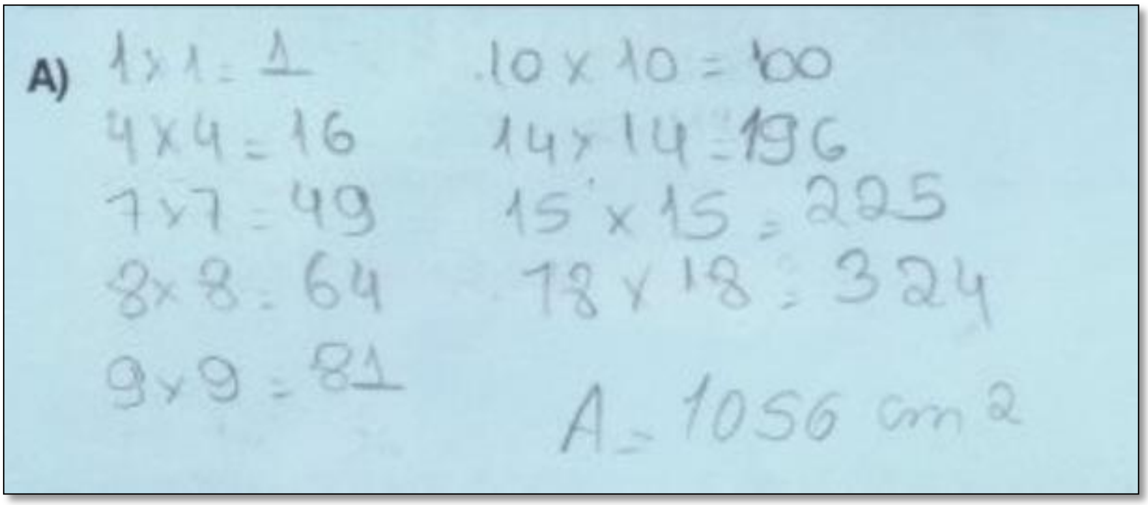
Figura 25 − Resolução da aluna J do G2N2, do aluno C do G1N3 e da aluna B do G1N2.



Fonte: arquivo pessoal.

Observamos na figura 25 que a aluna J, ao calcular as áreas parciais, encontrou 186 para a área de um quadrado cujos lados medem 14 centímetros. Mas, para a soma total das áreas, a aluna encontrou o mesmo resultado dos demais colegas. Após a plenária, a resposta correta escolhida pelos grupos é apresentada na figura 26.

Figura 26 − Resolução apresentada pelo aluno S do N3G1.

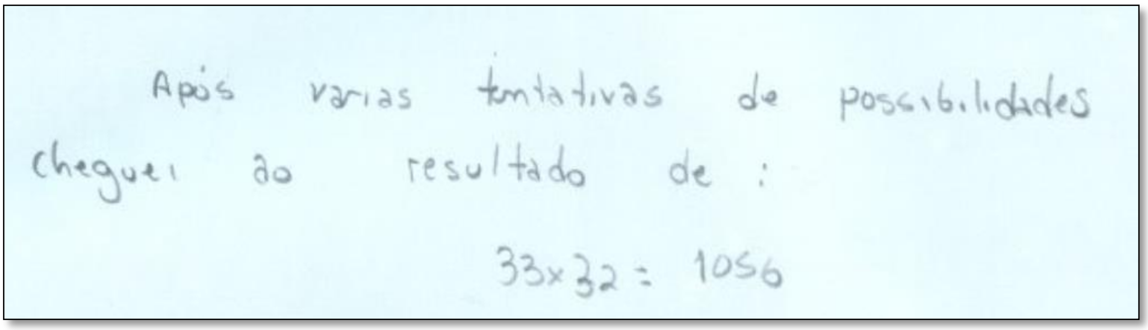


Fonte: arquivo pessoal.

A maioria das resoluções era incompleta. Por exemplo, poucos alunos colocaram a unidade de medida.

No item **b**, conhecendo a área total, vários grupos utilizaram o método de sucessivas multiplicações para resolver o que foi pedido. Assim, por tentativas e erros, determinaram às medidas da folha antes de ser cortada, conforme registrado na figura abaixo.

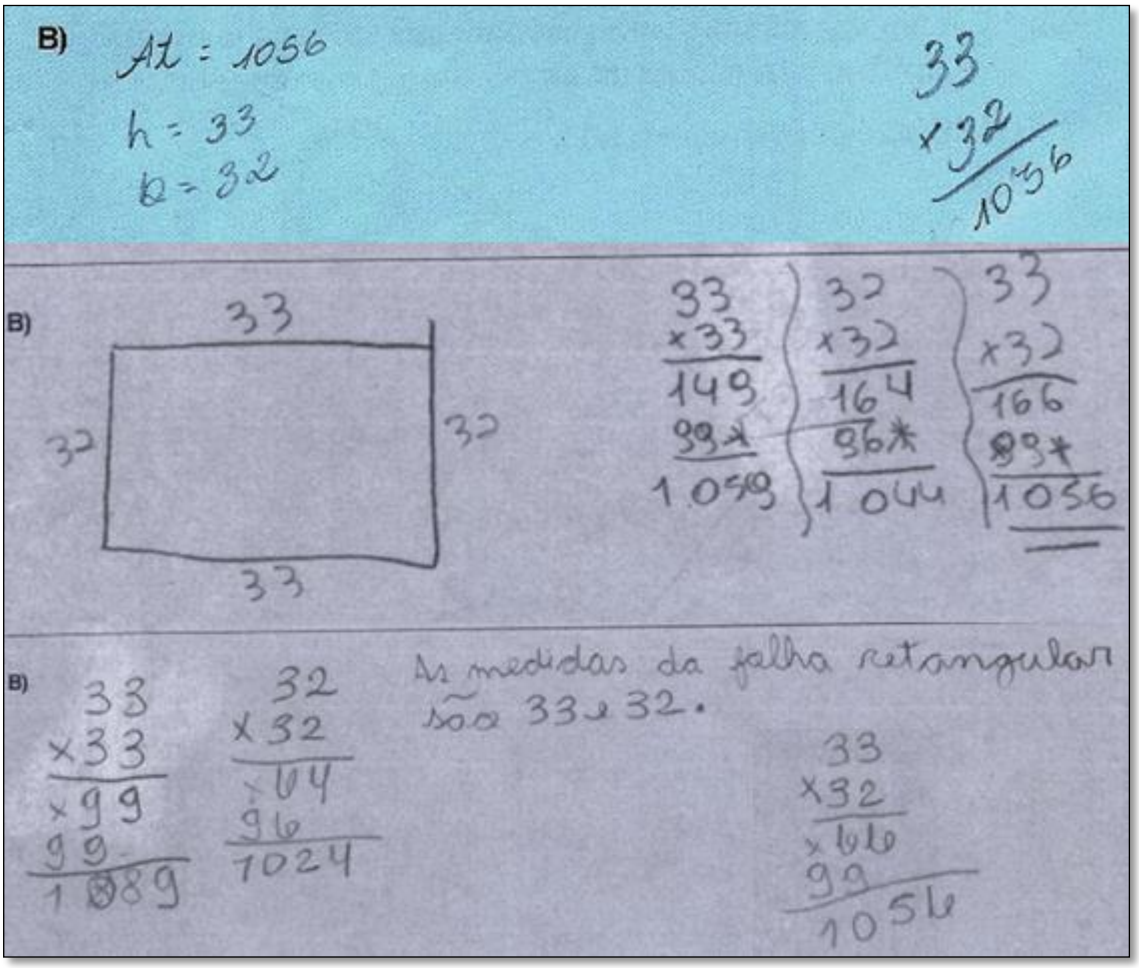
Figura 27 − Resolução apresentada pelo aluno R do N3G1.



Fonte: arquivo pessoal.

Alguns alunos chegaram às dimensões da folha aplicando o cálculo da raiz quadrada da área total, mesmo não sendo exata, pelas aproximações o número de tentativas diminuíram. A figura 28 mostra registros dos alunos no item **b**.

Figura 28 − Registros do G1 das alunas E do N3e B do N2 e da aluna J do N2G2.

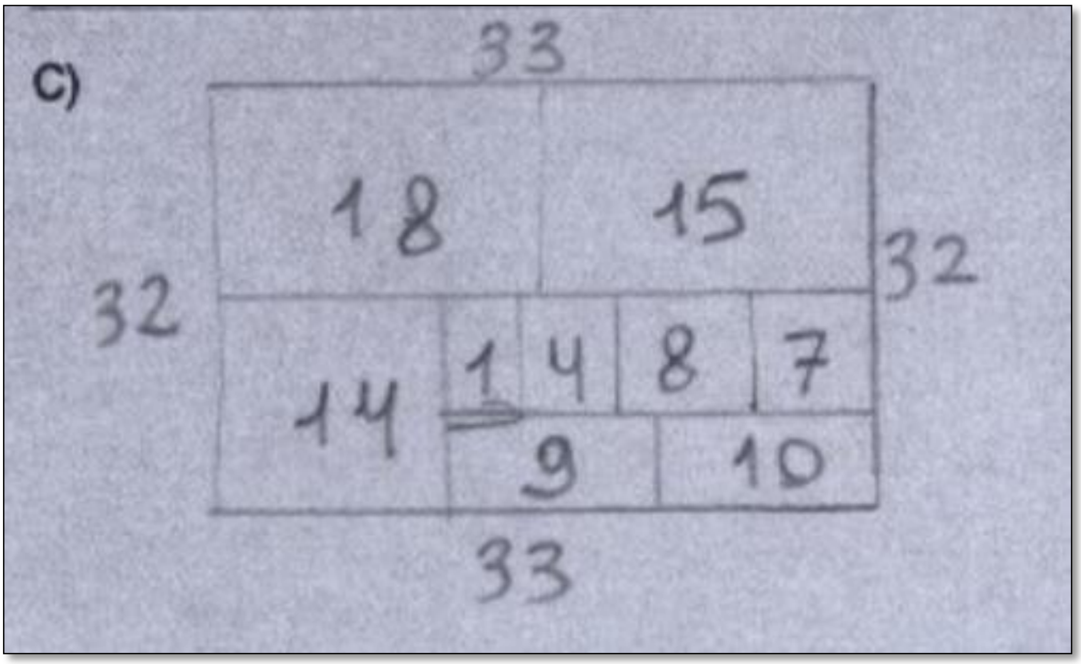


Fonte: arquivo da pesquisadora.

Vemos na figura acima que a aluna E do N3 utiliza representações algébricas para expressar a área total, a altura e a base, mas não coloca a unidade de área, assim como grande parte dos participantes. Por outro lado, o aluno S, em sua solução registrou que realizou multiplicações por aproximação. Além disso, ele colocou a unidade de área, conforme a transcrição de sua solução: “Encontramos os valores mais próximos inteiros (32x33) que multiplicados dão a área de 1056 cm^2.”

Nessa questão os alunos do N1 e N2 não conseguiram montar a folha por meio de desenho como pede o item **c**. A figura 29 apresenta uma das tentativas da aluna J do N2G2, na qual a aluna não soluciona o problema.

Figura 29 − Resposta da aluna J do N2G2.

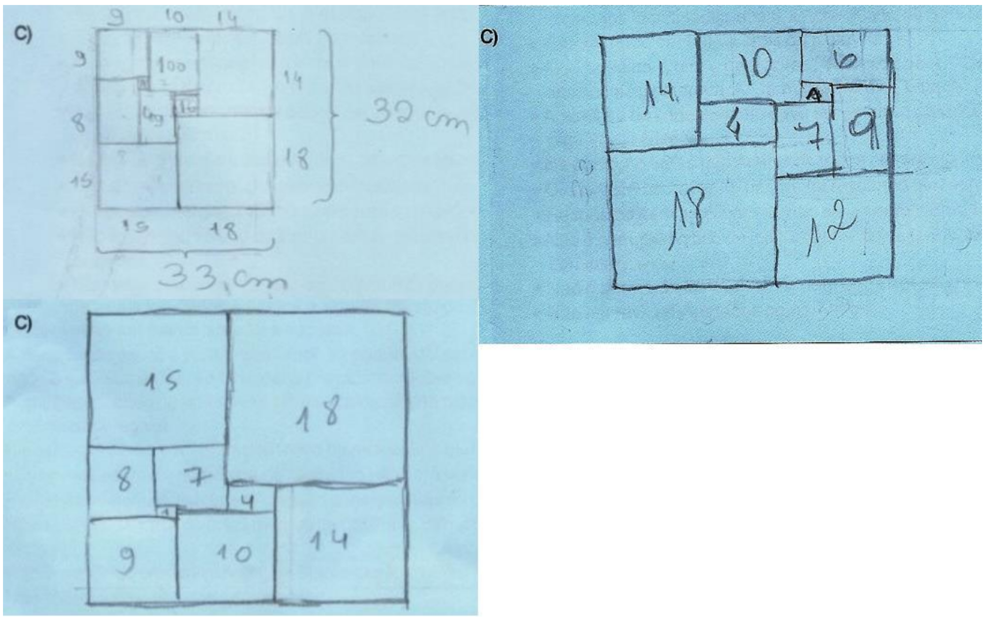


Fonte: arquivo da pesquisadora.

As formas de montar a folha novamente foram apagadas várias vezes, a cada tentativa que não encaixava. A figura acima é um dos exemplos que não deram certo. A ideia era do todo e não conseguiam imaginar as partes com proporcionalidade.

Os alunos do Nível 3 montaram de imediato o desenho da folha, como mostra a figura abaixo.

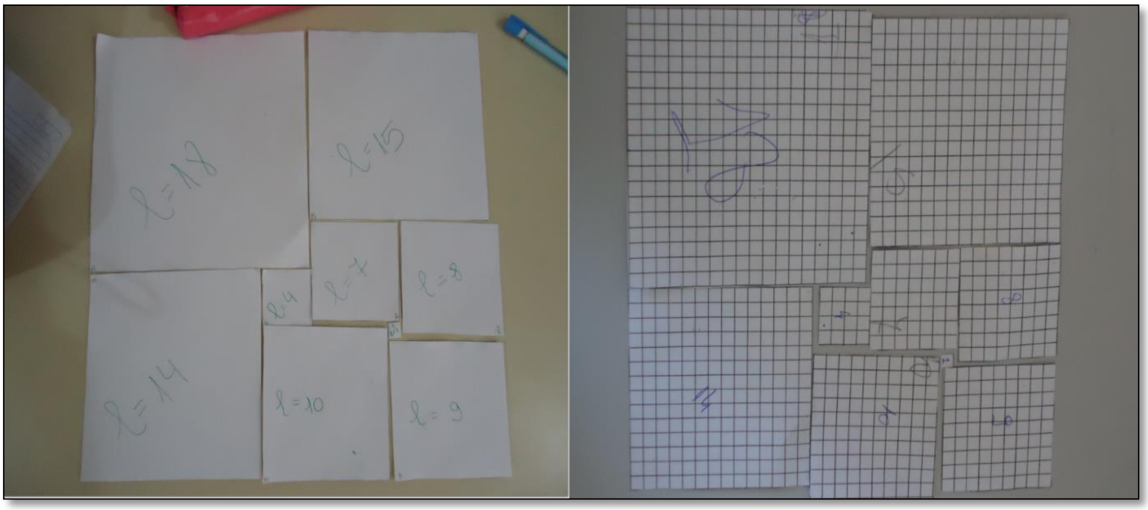
Figura 30 − Resposta da aluna E, dos alunos C e S do N3G1.



Fonte: arquivo da pesquisadora.

Os alunos do N2 que fazem parte do G1, após de várias tentativas nas quais não solucionaram o problema, pediram ajuda aos alunos do N3. No entanto, os alunos do N1 e N2 que fazem parte dos grupos G2 e G3 depois das diversas tentativas sem êxito estavam afim de desistir. Então sugerimos aos grupos para recortarem os quadrados e depois montarem a folha com as dimensões determinada no item anterior. Os alunos denominaram de “quebra cabeça”. Assim, chegaram à resolução como mostra a imagem abaixo.

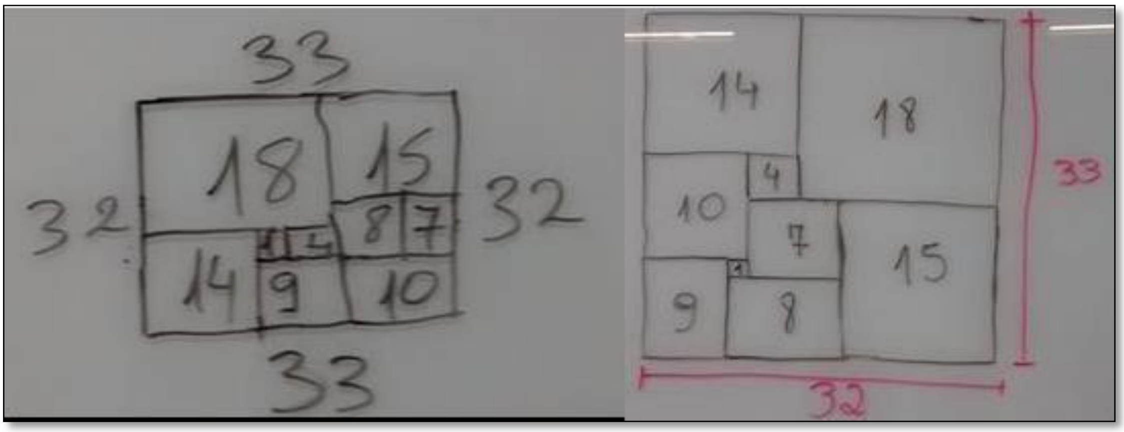
Figura 31 − Produção dos alunos dos grupos G2 e G3.



Fonte: arquivo da pesquisadora.

A figura 32 apresenta o pensamento inicial e o desenho da folha na lousa depois da resolução de forma empírica-experimental.

Figura 32 − Resposta do aluno W do N2G2, o antes e o depois.



Fonte: arquivo da pesquisadora.

Cada grupo, mesmo depois de montar a figura utilizando recortes, reconstruiu na lousa a folha com as dimensões solicitadas pelo problema.

5.2.2 Análise da Atividade A3

Após a leitura individual e a troca de ideias no pequeno e no grande grupo, foram visualizadas diferentes estratégias utilizadas para resolver um mesmo problema. Nos itens **a e b** os alunos participaram com sua resolução e no compartilhamento com os demais chegaram num consenso. No item **b,** os alunos que calcularam a raiz quadrada da área total, estabeleceram relações com estudos anteriores, nos quais a medida do lado de um quadrado corresponde à raiz quadrada de sua área. Observando os passos indicados pelas as educadoras Onuchic e Allevato (2009), a plenária nos itens **a** e **b** ocorreu de forma oral, nos grupos escolhidos por afinidade e nas conversas com os demais. Assim, não encontramos a necessidade de exposição na lousa.

As dificuldades que os alunos encontraram, principalmente no item **c,** foram superadas nas interações entre os alunos e entre a professora pesquisadora e os alunos. A pesquisadora, nas mediações, buscou incentivá-los a não desistir, ajudá-los na compreensão do problema e a pensar no que deveria ser feito. Assim, na prática com o recorte e a montagem da folha, os envolvidos buscaram a solução do problema. Tais atitudes, seguramente, contribuíram para a atenção e à busca de procedimentos adequados para a sua solução. A plenária, após a explanação na lousa foi muito importante, pois os diferentes procedimentos utilizados na resolução do problema favoreceram para a compreensão e para a reflexão dos participantes na ação.

Diante das respostas apresentadas, de forma oral ou escrita, nas observações no trabalho nos grupos, percebemos diferentes formas de abordar uma mesma situação-problema. Nessa atividade é importante destacar que a ajuda da professora pesquisadora dando a dica da utilização do material concreto, como mediadora da ação e articuladora da situação, na construção, na visualização e no manuseio, acabou auxiliando-os na compreensão e na resolução da situação-problema naquele instante. Assim, a manipulação e a construção de objetos geométricos, facilita a exploração de hipóteses e permite a formalização. Tendo em vista uma posterior abstração e sistematização.

Na situação aqui considerada, a atividade com o uso de material concreto correspondeu à aplicação de problemas correlatos, provavelmente, os alunos estabeleceram relações com um problema que já foi antes resolvido. No lugar de trabalhar com um problema mais simples de mesma natureza, a simplificação foi atendida pelo uso do material manipulativo.

Além disso, a atividade envolvendo o estudo de geometria sem aplicação de fórmulas ou regras proporciona um ambiente de investigação, que difere do paradigma do exercício, pois os alunos são convidados a fazerem explorações e explicações.

Pois, juntos, de modo colaborativo na sala de aula, na busca de respostas satisfatórias para a situação dada, o aluno adquire novos conhecimentos que possibilitam o desenvolvimento de síntese e análise.

De acordo com Skovsmose (2000), a atividade trata da semirrealidade em um cenário de investigação. Uma vez que, a Capitu é um personagem fictícia e que, em cada item, gradualmente, a situação foi aumentando a dificuldade, tornando-se um desafio para os participantes.

A busca de soluções, a troca de ideias com os seus pares, ora no pequeno grupo, ora no grande grupo, contribuíram para o desenvolvimento de abstrações e representações de espaço.

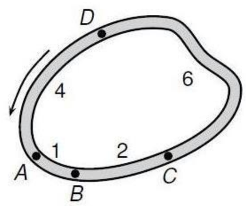
5.2.3 Atividade A5

A questão $(N_1N_2N_3)$ apresentada na figura abaixo foi selecionada da OBMEP (2006) como quinta atividade.

Figura 33 − Atividade 5

A5

A figura representa o traçado de uma pista de corrida. Os postos *A*, *B*, *C* e *D* são usados para partidas e chegadas de todas as corridas. As distâncias entre postos vizinhos, em quilômetros, estão indicadas na figura e as corridas são realizadas no sentido indicado pela flecha.
Por exemplo, uma corrida de 17 km pode ser realizada com partida em *D* e chegada em *A*.



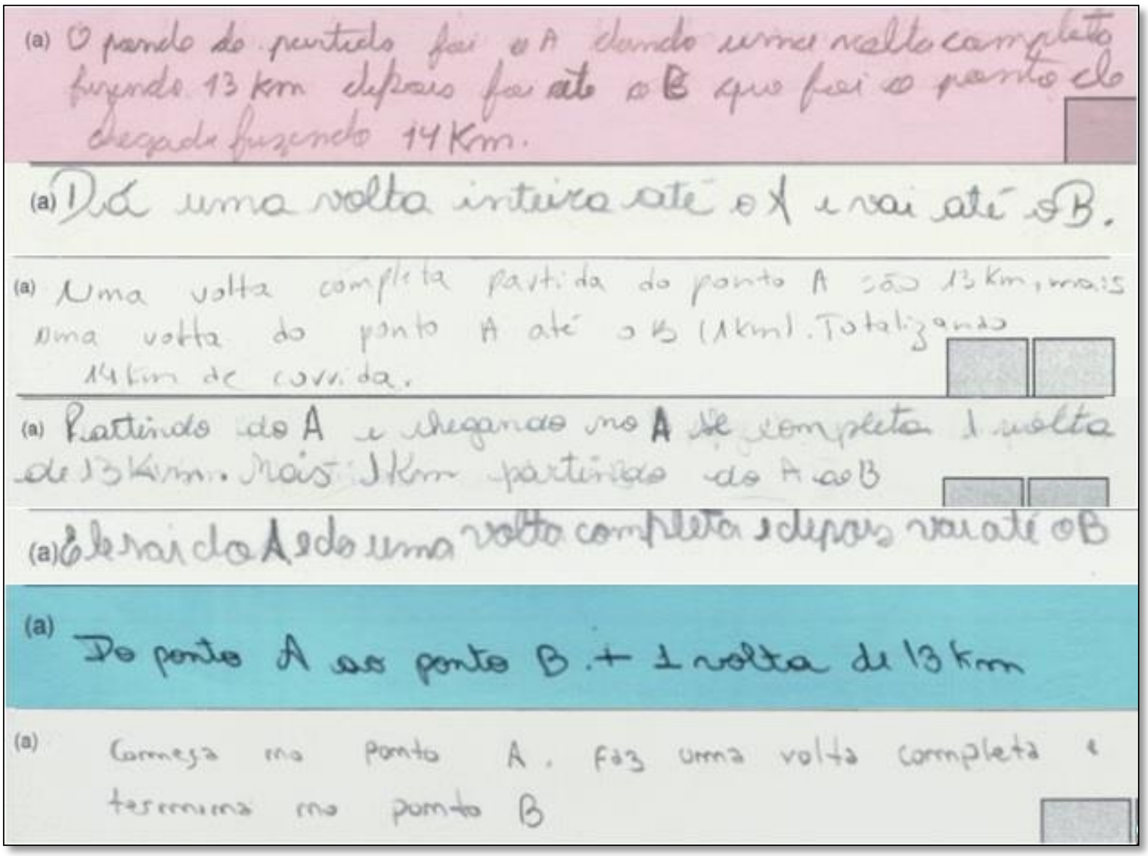
(a) Quais são os postos de partida e chegada de uma corrida de 14 quilômetros?
(b) E para uma corrida de 100 quilômetros, quais são esses postos?
(c) Mostre que é possível realizar corridas com extensão igual a qualquer número inteiro de quilômetros.

Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

Ao receber a questão cada aluno fez a leitura individual. Aqueles que compreenderam a situação-problema apresentada começaram a resolvê-la. Poucos alunos tiveram dúvidas no item **a**. Quando surgiram no pequeno grupo, com o auxílio de um colega, uma nova leitura foi o suficiente para saná-las.

Assim, de forma colaborativa, a partir do entendimento do problema os alunos criavam estratégias diferenciadas na resolução. A figura abaixo mostra algumas estratégias apresentadas pelos alunos como resolução do item **a**.

Figura 34 − Respostas dos alunos: G do N2G1, L do N1G3, C do N3G1, V.do N2G3, N do N1G3, G do N3G1 e R do N3G1.



Fonte: arquivo da pesquisadora.

A resolução da aluna V.do N2G3, acima, considerando o posto de partida e de chegada para completar 13 Km e também para pecorrer mais 1 Km, representa uma das respostas, consideradas pelo G3, como justificativa correta. Mesmo com entendimento da pergunta, os registros mostram respostas incompletas e com a palavra pontos no lugar de postos.

O item **b** questiona os postos de partida e chegada para uma corrida de 100 Km. Com a representação das respostas dos colegas na lousa surgiram alguns comentários, como:

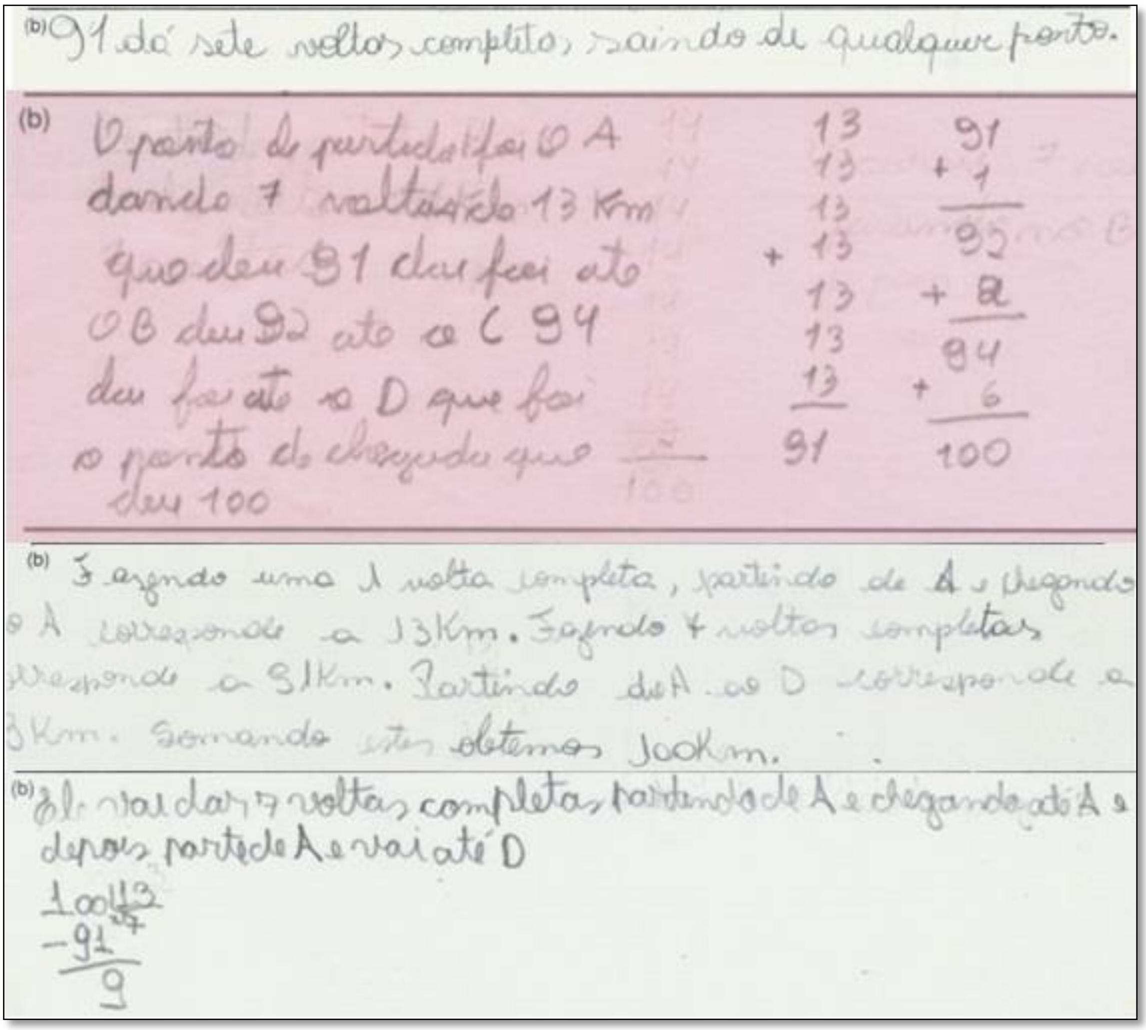
Aluna A do grupo G3: “... 100 km podem sair de qualquer ponto.”

PP – “Como assim? Dê dois exemplos, cada um com um ponto de partida diferente.”

Logo, após algumas tentativas, ela percebeu que 100 km era somente com partida em A e chegada em A, mais 9 km com partida em A e chegada em D.

As resoluções certas, erradas ou diferentes foram representadas na lousa, em cada grupo de estudo. A figura 35 mostra algumas resoluções apresentadas pelos alunos no item **b**.

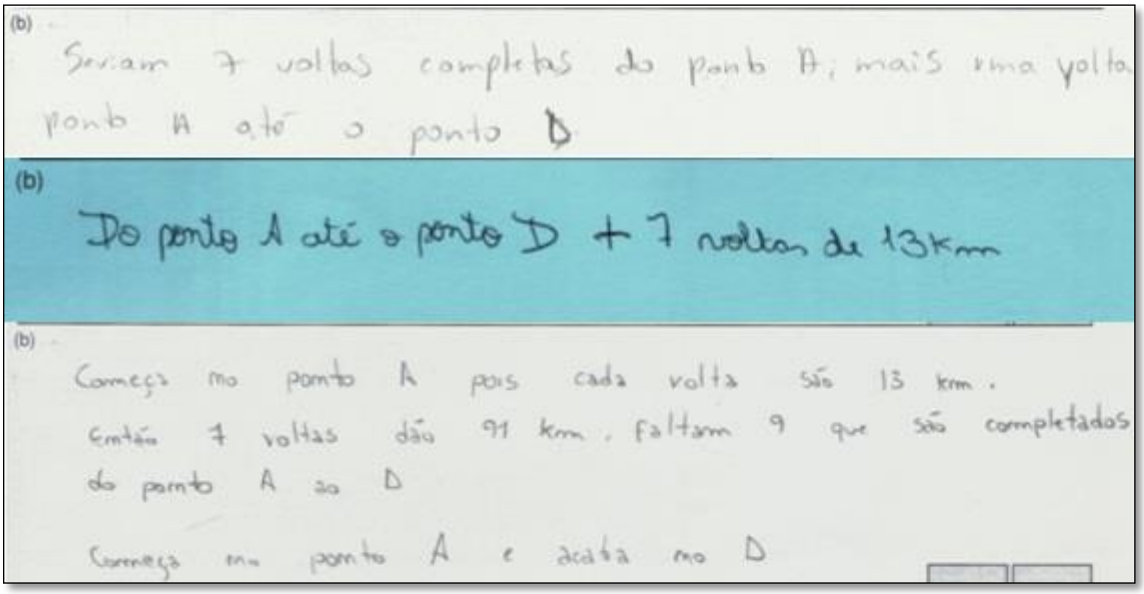
Figura 35 − Respostas dos alunos: L do N1G3, G do N2G2 , V.do N2G3 e N do N1G3.



Fonte: arquivo da pesquisadora.

A figura acima mostra que as soluções apresentadas pelos alunos do Nível 1 e Nível 2 foram parecidas. Alguns alunos utilizaram a adição de parcelas iguais, outros a divisão para obter o número de voltas completas. No Nível 3 as respostas eram mais diretas, não apresentavam algoritmos, conforme mostra a figura 36.

Figura 36 − Resposta do aluno C, da aluna G e do aluno R do N3G1.

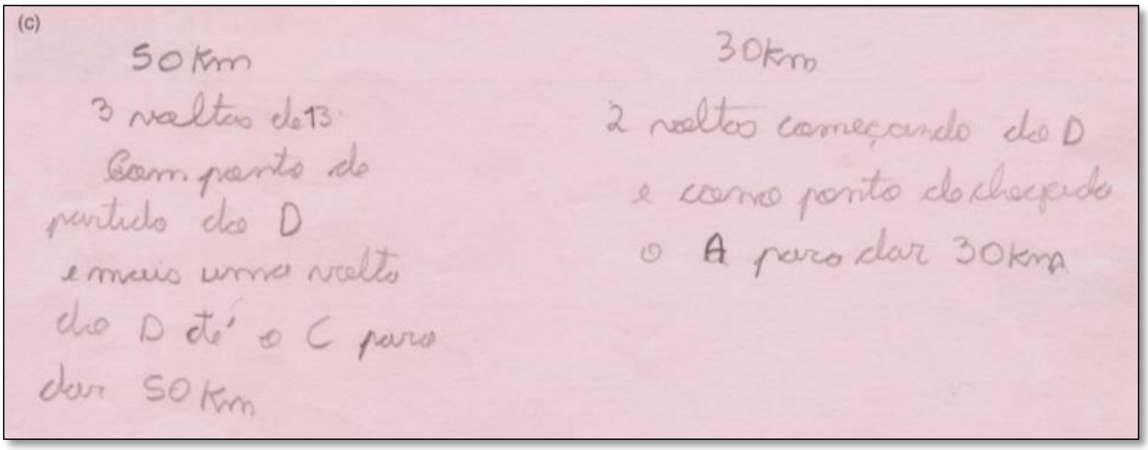


Fonte: arquivo da pesquisadora.

Os alunos dos três níveis não encontraram dificuldades nos itens **a** e **b**. Todos estavam dispostos e um representante por grupo apresentou as soluções na lousa. Nas discussões cada grupo defendia seu ponto de vista e as respostas eram reconstruídas.

Em relação ao item **c**, nenhum aluno do N1 conseguiu mostrar que era possível realizar corridas com extensão igual a qualquer número inteiro de quilômetros. O mesmo ocorreu com a maioria dos estudantes do N2, pois apresentavam apenas exemplos com outras distâncias possíveis. Temos, na figura a seguir, um exemplo das representações realizadas.

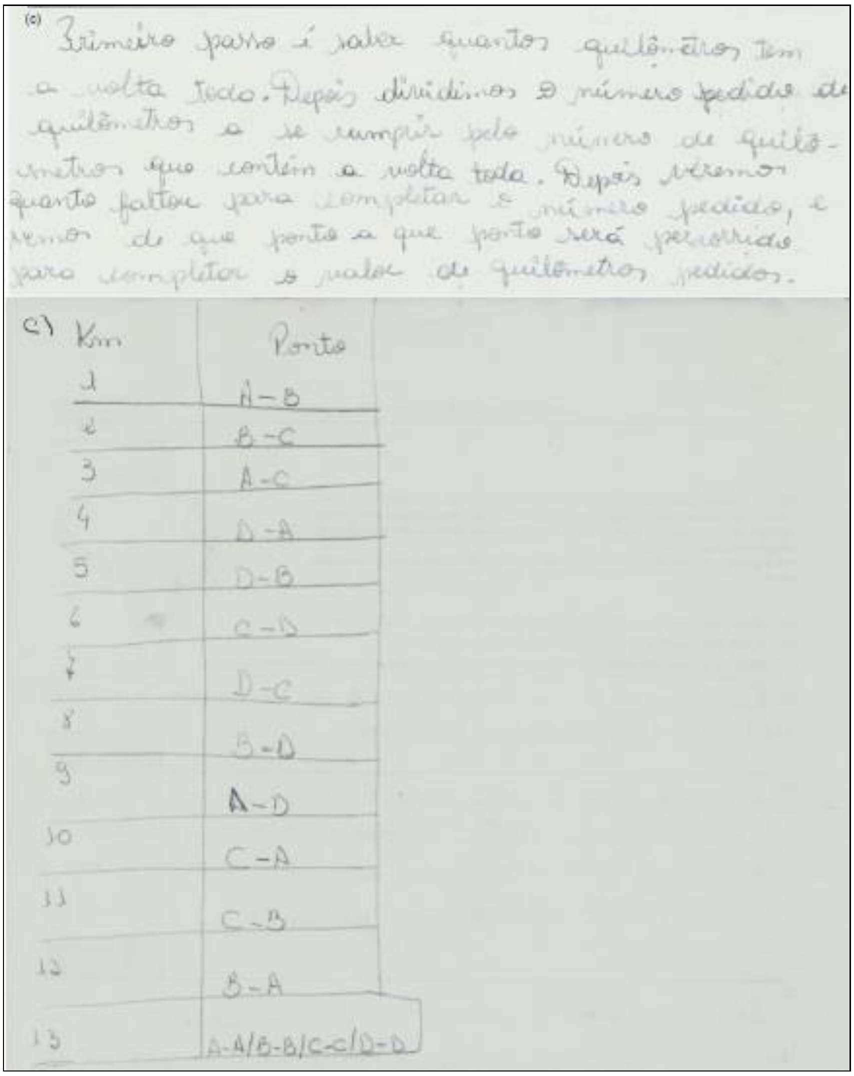
Figura 37 – Registro do aluno G do N2G1.



Fonte: arquivo da pesquisadora.

No nível N2 apenas a aluna V do grupo G3 apresentou uma solução que não difere da resolução apresentada no N3 pelo aluno R do grupo G1, conforme mostram as figuras 38 e 39. É importante registrar que esses alunos estudam em escolas e níveis diferentes.

Figura 38 − Resposta da aluna V do N2G3.



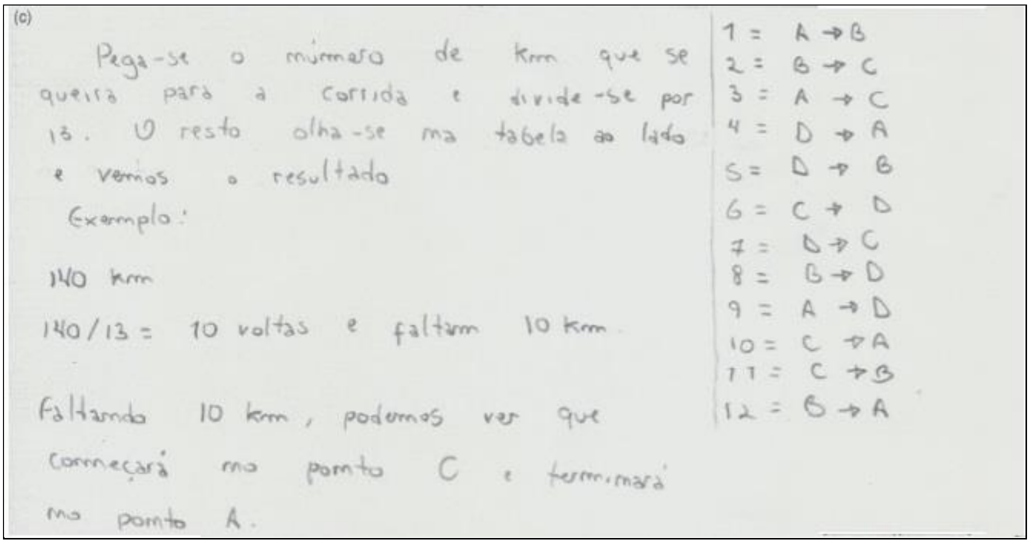
(c) Primeiro passo é saber quantos quilômetros tem a volta toda. Depois dividimos o número pedido de quilômetros e se cumprir pelo número de quilômetros que contém a volta toda. Depois veremos quanto falta para completar o número pedido, e vemos de que ponto a que ponto será percorrido para completar o valor de quilômetros pedidos.

c)

Km	Ponto
1	A − B
2	B − C
3	A − C
4	D − A
5	D − B
6	C − D
7	D − C
8	B − D
9	A − D
10	C − A
11	C − B
12	B − A
13	A-A/B-B/C-C/D-D

Fonte: arquivo da pesquisadora.

Figura 39 − Resposta do aluno R do N3G1.



(c)

Pega-se o número de km que se queira para a corrida e divide-se por 13. O resto olha-se na tabela ao lado e vemos o resultado

Exemplo:

140 km

140/13 = 10 voltas e faltam 10 km

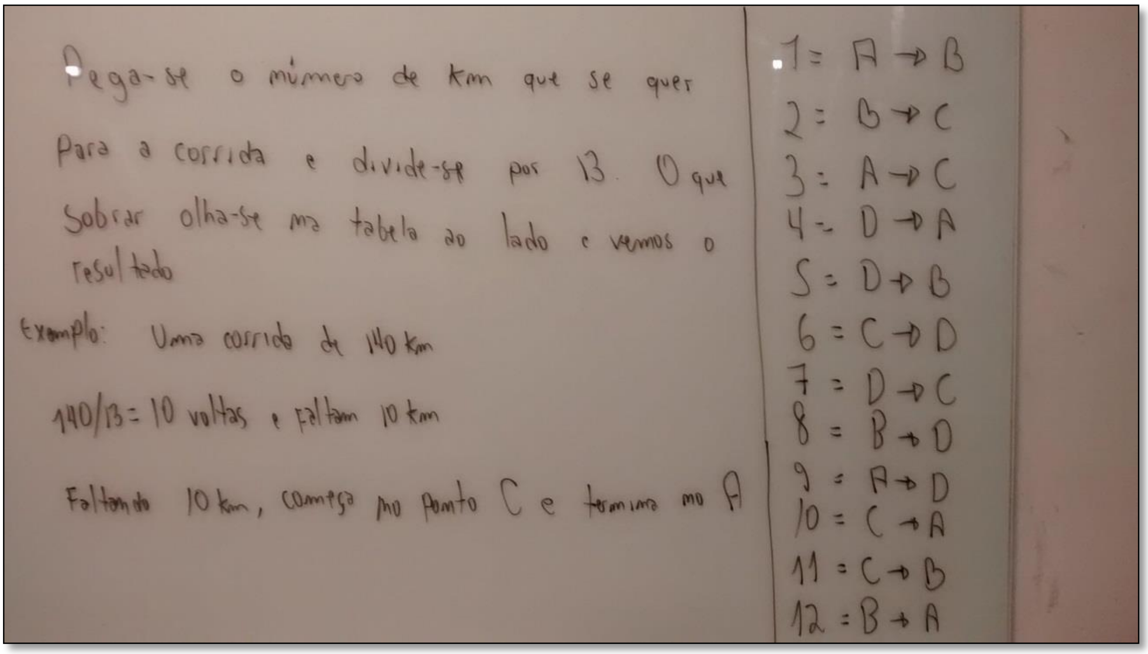
Faltando 10 km, podemos ver que começará no ponto C e terminará no ponto A.

1 = A → B
2 = B → C
3 = A → C
4 = D → A
5 = D → B
6 = C → D
7 = D → C
8 = B → D
9 = A → D
10 = C → A
11 = C → B
12 = B → A

Fonte: arquivo da pesquisadora.

Nos grupos G1 e G3, no momento que os alunos V e R apresentaram na lousa as respostas com suas respectivas justificativas, os colegas que não tinham respondido o item **c**, ou apenas citado um exemplo, compreenderam e concordaram que uma distância como exemplo não contemplava corridas com extensão igual a qualquer número inteiro de quilômetros. Imagem da lousa na figura abaixo.

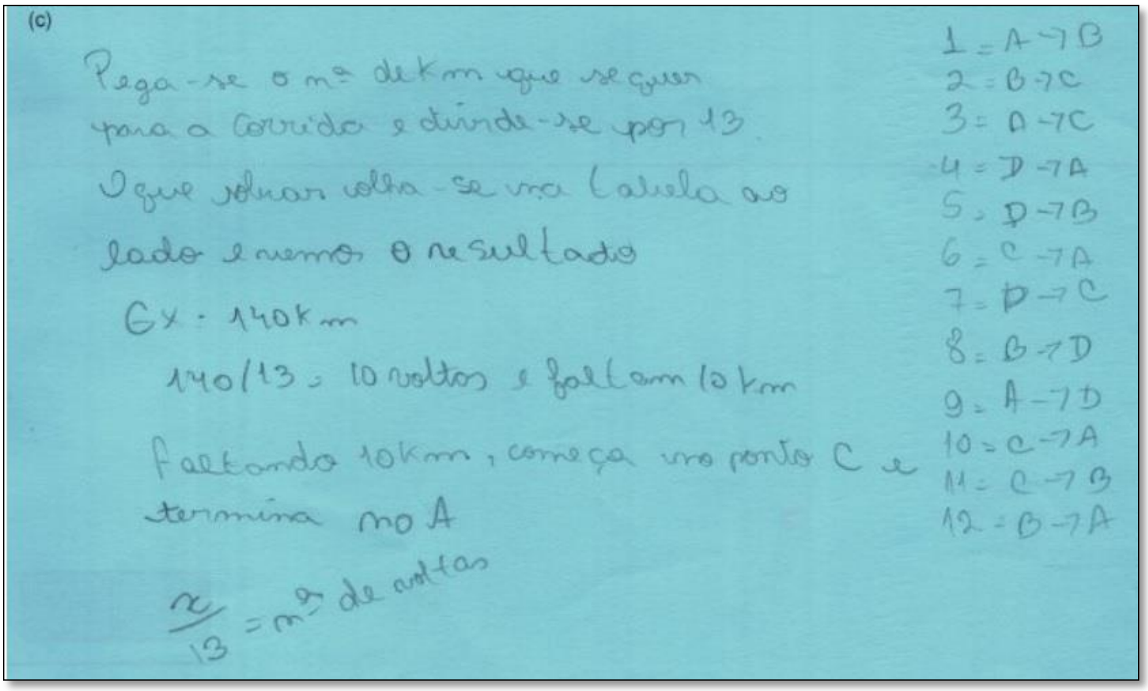
Figura 40− Explanação na lousa pelo aluno R do N3 G1.



Fonte: arquivo da pesquisadora.

Após a explanação do colega, a aluna G do N3G1 comentou que a distância seria o termo desconhecido **x** dividido por treze e acrescentou na sua resolução, conforme mostra a figura a seguir.

Figura 41− Resposta da aluna G do N3G1.



(c)

Pega-se o nº de Km que se quer para a corrida e divide-se por 13

O que sobrar volta-se na tabela ao lado e vemos o resultado

Gx: 140km

140/13 = 10 voltas e faltam 10 km

faltando 10km, começa no ponto C e termina no A

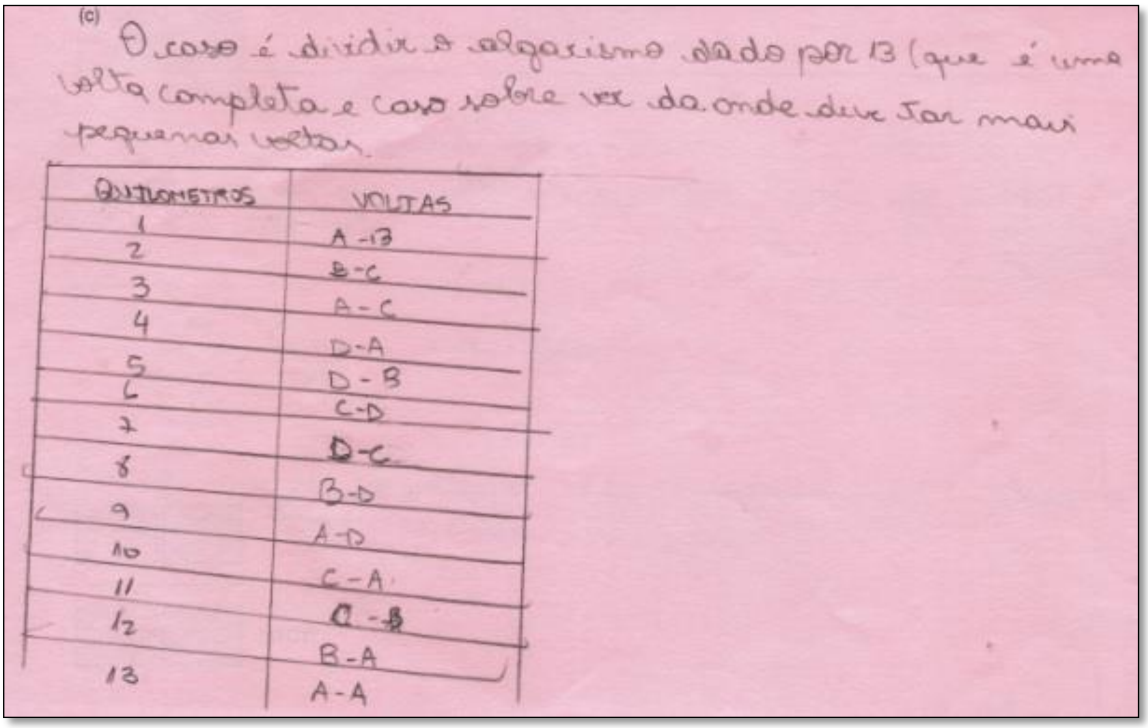
$\frac{x}{13}$ = nº de voltas

1 = A → B
2 = B → C
3 = A → C
4 = D → A
5 = D → B
6 = C → A
7 = D → C
8 = B → D
9 = A → D
10 = C → A
11 = C → B
12 = B → A

Fonte: arquivo da pesquisadora.

Os alunos do G2 não chegaram sozinhos a construção da tabela, pois eles insistiam em exibir exemplos, embora não representassem todos os números inteiros. Como esse grupo era pequeno, pois na maioria dos encontros participaram seis alunos, utilizamos a sala de apoio das séries iniciais, na qual os alunos ficaram próximos, sentados ao redor de uma mesa. Assim com a proximidade as soluções eram parecidas, atribuíam distâncias, determinavam o número de voltas e o ponto de chegada. Então, a professora pesquisadora solicitou que organizassem as distâncias atribuídas, por cada aluno do grupo, em ordem crescente e construíssem uma tabela, apresentada na figura 42.

Figura 42 − Registro do aluno W do N2G2.



(c) O caso é dividir o algarismo dado por 13 (que é uma volta completa e caso sobre vez da onde deve dar mais pequenas voltas.

QUILOMETROS	VOLTAS
1	A-B
2	B-C
3	A-C
4	D-A
5	D-B
6	C-D
7	D-C
8	B-D
9	A-D
10	C-A
11	C-B
12	B-A
13	A-A

Fonte: arquivo da pesquisadora.

A solicitação da professora/pesquisadora foi aceita e com a ajuda dos demais colegas, a tabela acima foi construída.

5.2.4 Análise da Atividade A5

O diálogo estabelecido entre a pesquisadora e a aluna A do N2G3 mostra que, a pesquisadora atenta aos comentários da aluna, via questionamento, possibilitou para que ela se manifestasse, dando abertura para suas colocações. Aceitando o convite, assim, foi criado um cenário para investigação, no qual a aluna passou a ser responsável pela construção de uma estratégia de resolução.

Os registros expressam, por meio da escrita, a fala e a análise realizada pelos alunos nas discussões das diferentes soluções. As respostas com a palavra “pontos”, ao invés de “postos”, nas observações feitas pela pesquisadora, foram consideradas como corretas, pois é usual representarmos pontos nas ilustrações com o uso de uma letra maiúscula.

O item **b** traz algumas dúvidas, quanto ao ponto de partida e de chegada. O questionamento feito pela professora/pesquisadora levou a aluna A do N2G3 a pensar em pontos de partida diferente e verificar se o ponto de chegada seria o mesmo. Nesse instante, a investigação, proporcionou à aluna a construção de uma resposta.

A figura 35 no item **b** mostra que o aluno G do N2G2 utilizou a soma de parcelas iguais para representar o número de voltas dadas, mas ao visualizar na lousa a aplicação do algoritmo da divisão apresentado pelos representantes de outros grupos, observamos que o plano executado por ele, depois das discussões acabou sendo reelaborado. Essa atitude mostrou que, a plenária auxilia na escolha de procedimentos mais apreciados à solução.

As figuras 38 e 39 mostram que, aluna V do N2G3 teve o mesmo raciocínio do aluno R do N3G1, embora outros alunos do N3 somente depois do compartilhamento das soluções na lousa conseguiram resolver o mesmo problema. No entanto, as dificuldades encontradas na Resolução de Problemas, pela maioria, não impossibilitou à busca da resposta.

Inicialmente, a partir das diferentes distâncias atribuídas pelos grupos, evidenciamos o pensamento aritmético e, na generalização, o pensamento algébrico. A aluna G do N3G1, diante das regularidades expressas na lousa, utilizou o **x** para expressar as diferentes distâncias, substituindo os números pela linguagem matemática.

No grupo G2, a professora/pesquisadora incentivou a troca de ideias entre os alunos, o que possibilitou a continuação do trabalho e a construção da tabela. O tempo utilizado para chegar à generalização, pelos alunos do N1 e N2, foi maior. A maioria dos alunos considerou o item **c** difícil e poucos conseguiram resolvê-lo sozinho. Nas discussões, no instante que pensaram e falaram em desistir, a pesquisadora foi incentivando os colegas que tinham solucionado o problema para esclarecerem suas dúvidas, oportunizando-os à sua solução. No G2 as diferentes distâncias, que eram exemplos, serviram na troca de ideias, como um caminho para a generalização.

Com a representação na lousa, nas reflexões sobre as estratégias apresentadas e discutidas, percebemos que a plenária contribuiu para a busca de um consenso e para que chegassem na formalização. Conforme figura 41.

Para Polya (2006), a diferença entre problema fácil e difícil pode estar em conhecer ou não um problema correlato resolvido anteriormente. No entanto, a atividade mesmo sendo considerada difícil, mostra que o envolvimento no trabalho de forma cooperativa e colaborativa foi um momento rico para a aprendizagem.

5.2.5 Atividade A8

Na figura abaixo mostramos a questão $(N_1 N_2 N_3)$ selecionada da OBMEP (2007), como oitava atividade.

Figura 43 − Atividade 3

A8

Os times *A*, *B*, *C*, *D* e *E* disputaram, entre si, um torneio de futebol com as seguintes regras:

- o vencedor de uma partida ganha 3 pontos e o perdedor não ganha nada;
- em caso de empate cada um dos times ganha 1 ponto;
- cada time joga exatamente uma vez com cada um dos outros.

O campeão do torneio foi o time *A*, seguido na classificação por *B*, *C*, *D* e *E*, nessa ordem. Além disso

- o time *A* não empatou nenhuma partida;
- o time *B* não perdeu nenhuma partida;
- todos os times terminaram o torneio com números diferentes de pontos.

(a) O time *A* ganhou, perdeu ou empatou sua partida contra o time *B*? Por quê?

(b) Com quantos pontos o time *A* terminou o torneio? Por quê?

(c) Explique porque o time *B* obteve um número par de pontos nesse torneio.

(d) Na tabela, cada coluna representa uma partida. Sabendo que ocorreram exatamente 5 empates nesse torneio, desenhe, em cada coluna da tabela, um círculo em volta do nome do time ganhador ou em volta do ×, em caso de empate.

A × B	A × C	A × D	A × E	B × C	B × D	B × E	C × D	C × E	D × E

Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

A leitura individual não foi suficiente para o entendimento do problema, sendo que alguns alunos precisaram da leitura no grupo. Aos poucos, foram mostrando as respostas para a professora/pesquisadora. Na figura 44, temos algumas resoluções do item **a**.

Figura 44– Registro do aluno C do N3G1, do aluno P do N1G2, das alunas D e T do N2G2.

(a) time A perdeu, pois nunca empatou e time B nunca perdeu.

(a) O time A perdeu para o time B porque o B não perdeu nenhuma e o A não empatou nenhuma!

(a) Perdeu → Porque o B não perdeu, e o A não empatou então o A perdeu

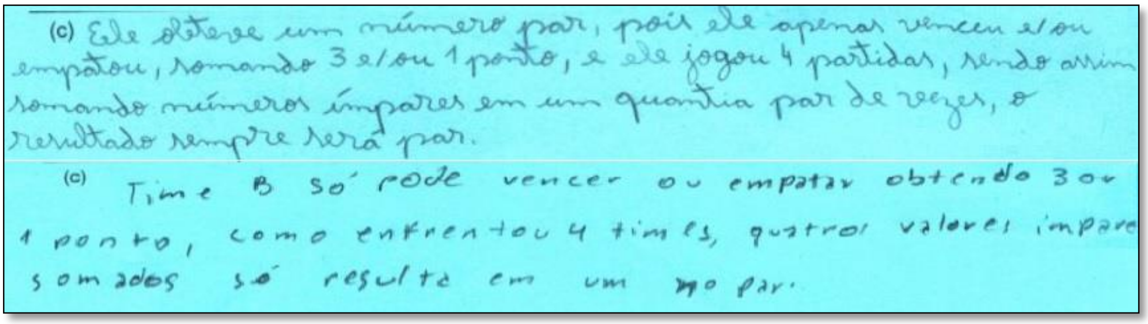
(a) O time A perdeu porque ele não empatou e nem ganhou.

Fonte: arquivo da pesquisadora.

Observamos que as cores de fundo na figura acima (e em outras) correspondem a níveis diferentes. A amarela é do N1, a cor de rosa do N2 e a azul do N3.

Depois que entenderam o enunciado, cada um elaborou sua resposta. No item **a** as respostas foram comentadas. Não houve a necessidade de representá-las na lousa, pois não ocorreram divergências nas resoluções, conforme mostra a figura 45.

Figura 45 – Registro dos alunos G e C do N3G1.

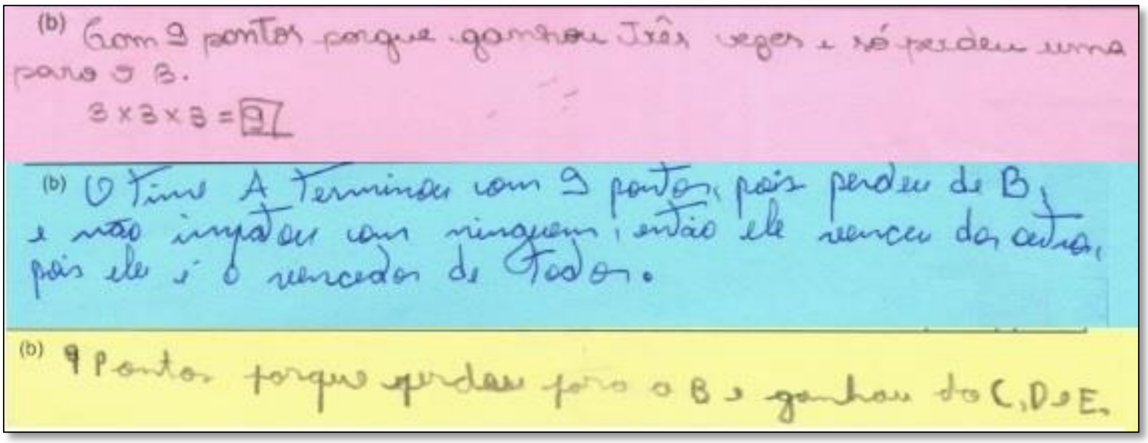

(c) Ele obteve um número par, pois ele apenas venceu e/ou empatou, somando 3 e/ou 1 ponto, e ele jogou 4 partidas, sendo assim somando números ímpares em um quantia par de vezes, o resultado sempre será par.

(c) Time B só pode vencer ou empatar obtendo 3 ou 1 ponto, como enfrentou 4 times, quatro valores ímpare somados só resulte em um ~~no~~ par.

Fonte: arquivo da pesquisadora.

Os itens **b** e **c** foram respondidos depois do item **d**. Isso aconteceu em todos os grupos. Em particular, no caso dos alunos do N3, somente após a leitura do item **d** que as ideias começaram a surgir e junto, os questionamentos para a professora pesquisadora. Entre as questões colocadas, os estudantes queriam saber se a resposta do grupo estava certa. Pedimos que aguardassem as respostas dos colegas. Somente, depois de todos os itens respondidos, que houve a apresentação na lousa das estratégias utilizadas pelos grupos para a resolução do problema. Abaixo a figura 46 mostra o item **b.**

Figura 46 – Registro do aluno W do N2G2, do aluno C do N3G1 e do aluno P do N1G2.


(b) Com 9 pontos porque ganhou três vezes e só perdeu uma para o B.
3 x 3 x 3 = $\boxed{9}$

(b) O Time A Terminou com 9 pontos, pois perdeu de B, e não impatou com ninguem, então ele venceu dos outros, pois ele é o vencedor de Todos.

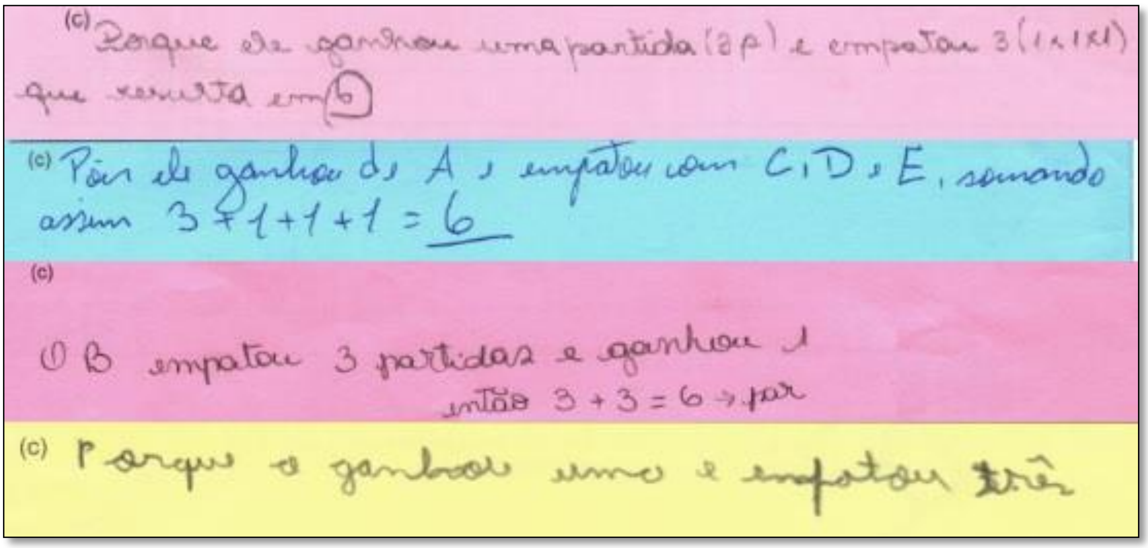
(b) 9 Pontos porque perdeu para o B e ganhou do C, D e E.

Fonte: arquivo da pesquisadora

De todas as questões trabalhadas, essa foi a única que os alunos responderam primeiramente o último item, depois os itens anteriores. As estratégias apresentadas na figura 46 são diferentes, mas a pontuação obtida pelo time A foi a mesma, nos três níveis.

O compartilhamento com o grupo maior foi realizado somente quando concluíram nos pequenos grupos as respostas de todos os itens. Assim, a cada item**,** as respostas eram relatadas oralmente e discutidas nos pequenos grupos. A figura seguinte mostra as estratégias observadas pela pesquisadora, antes da apresentação na lousa.

Figura 47 – Registro do alunoW do N2G2, da aluna S do N3G1, da aluna D do N2G2 e do aluno P do N1G2.

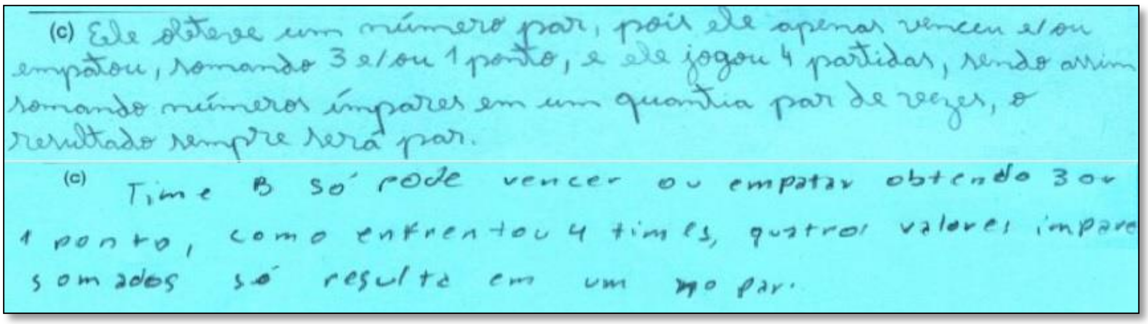


Fonte: arquivo da pesquisadora

Nas estratégias apresentadas na figura acima, os alunos nos três níveis não representam uma explicação com evidências de que os mesmos têm o conhecimento que a soma de quatro números ímpares resulta em número par. Eles mostraram o número de pontos da equipe, o número de partida ganha e o número de empates.

A maioria dos alunos do N3, no item **c**, não determinou o número de pontos da equipe B, mas demonstrou maior entendimento da pergunta e buscou esclarecer o porquê do time B obter número par de pontos no torneio, conforme mostra a figura 48.

Figura 48 – Registro dos alunos G e C do N3G1.

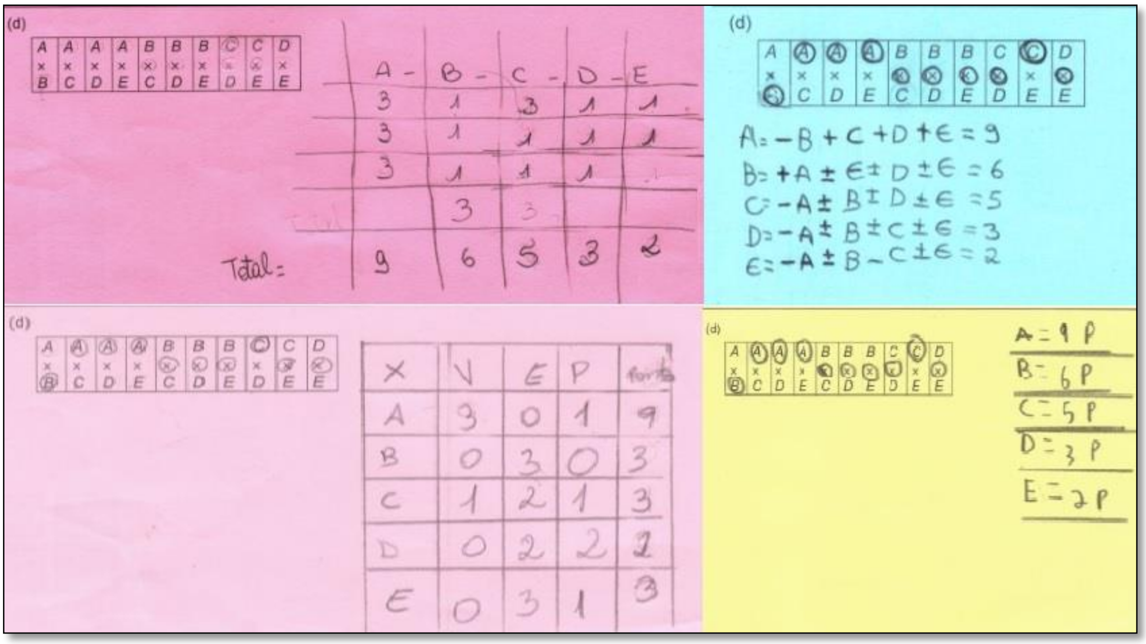


Fonte: arquivo da pesquisadora.

No momento em que os alunos do G2 e G3 colocaram suas resoluções na lousa, solicitamos que tentassem conferir se a soma dos pontos em todas as situações eram números pares. Logo responderam que não. Mais ainda, nos comentários, surgiram contraexemplos, como “a soma de uma vitória e dois empates é ímpar.”

O item **d** foi considerado um desafio, pois os alunos levaram um tempo maior para resolvê-lo. Alguns, após várias tentativas chegaram a rasgar a folha. Esse item pede que o aluno desenhe um círculo em volta do nome do time ganhador ou em volta do **x**, em caso de empate. Nesse caso, os alunos acabaram construindo uma tabela com a pontuação de cada time, mas a questão não solicitava a pontuação final por equipe. A figura 49 mostra algumas representações do item **d,** por nível.

Figura 49 − Resposta da aluna D do N2G2, do aluno L do N3G1, da aluna T do N2G2 e do aluno P do N1G2.

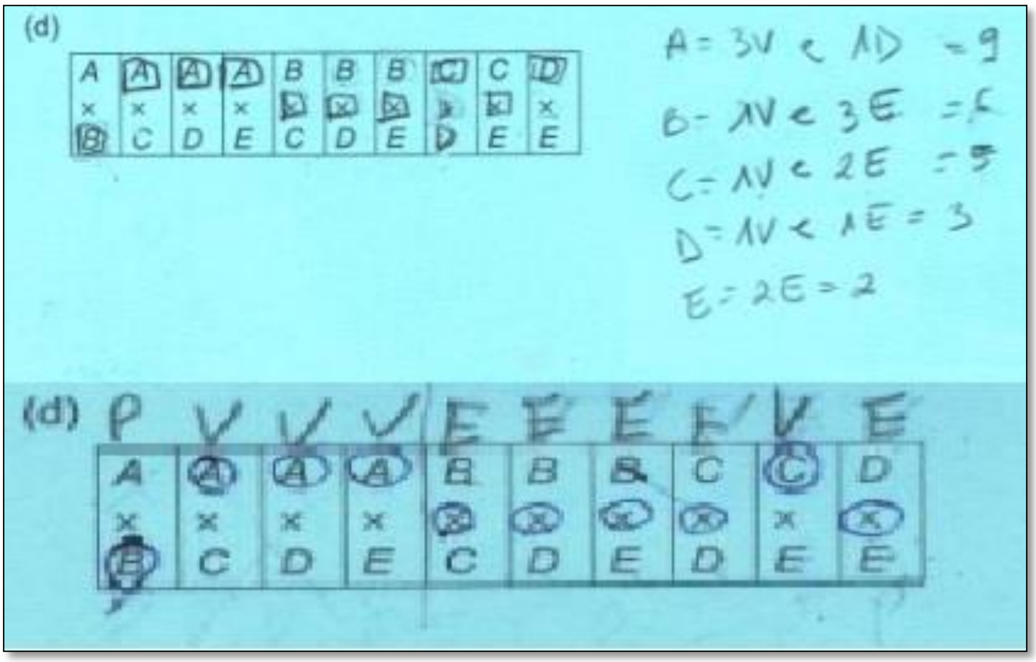


Fonte: arquivo da pesquisadora.

As diferentes estratégias representadas, acima, nos três níveis, mostram que as discussões nos grupos corroboraram para a aprendizagem. A partir do pensamento aritmético os alunos organizaram os dados em tabelas e utilizaram a álgebra nas suas representações. Também usaram códigos da linguagem matemática, como o sinal positivo para representar as vitórias, o positivo e negativo para os empates e o negativo para as derrotas. Além disso, apresentaram tabelas com as inicias das palavras vitória, derrota, empate e com a pontuação final de cada time.

Alguns alunos do N3, não construíram a tabela. A figura 50 apresenta outras estratégias utilizadas para a resolução do problema.

Figura 50 – Soluções apresentadas pelas alunas G e S do N3G1.

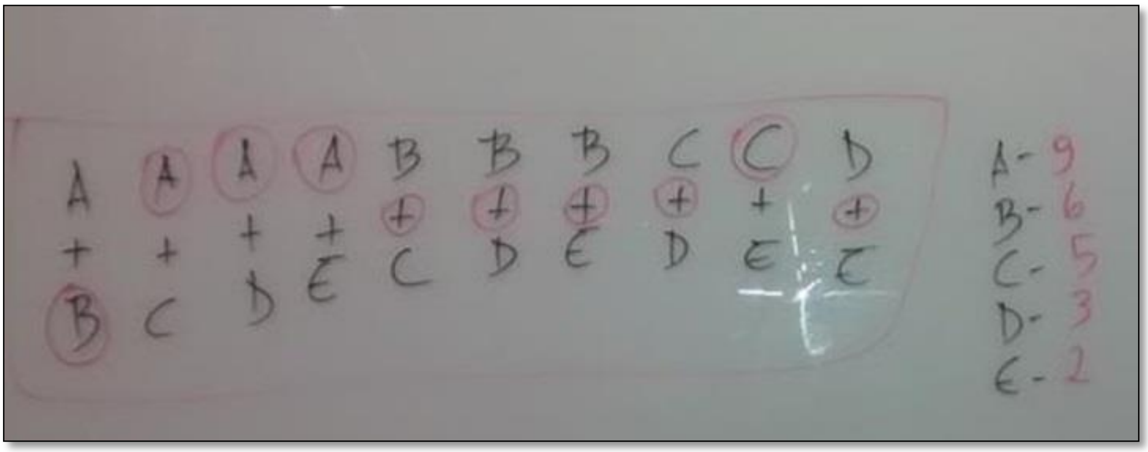


Fonte: arquivo da pesquisadora.

As soluções foram discutidas nos grupos e compartilhadas na lousa. Cada estratégia diferente foi apresentada por um representante do correspondente grupo. O mesmo defendia a estratégia apresentada e assim chegaram a um consenso na pontuação final dos times, mas com tabelas representadas de diversas formas.

A figura 51 mostra a resposta ao item **d** da questão na lousa. Esse momento permitiu à busca do consenso, após serem sanadas as dúvidas e analisadas as diferentes estratégias registradas pelos colegas.

Figura 51 – Registro da aluna K do N3G1.



Fonte: arquivo da pesquisadora.

5.2.6 Análise da Atividade A8

Por tratar-se de um torneio de futebol, os alunos mostraram-se interessados, pois o assunto faz parte do dia a dia dos mesmos. O autor Skovsmose (2000), caracteriza a situação abordada, por meio da Matemática, como um Ambiente de Aprendizagem com referência a realidade.

Inicialmente, a atividade foi considerada uma brincadeira e depois com as regras estabelecidas pelo problema, foram surgindo dificuldades na resolução, principalmente pelos alunos do N1 e N2. Mas, as diversas tentativas e o envolvimento dos alunos na atividade mostraram que eles sentiram-se desafiados e interessados em resolvê-la.

Os alunos do N1 e do N2, responderam os itens **b** e **c** somente depois que a tabela com a pontuação dos times foi construída. Para a maioria dos alunos do N3, tal procedimento não se fez necessário.

As resoluções desenvolvidas no item **c,** pelos alunos do N3, foram mais elaboradas, pois buscaram explicar porque a soma dos pontos do time B era par. Já os alunos do N1 e N2 frisaram mais o resultado, não o porquê do resultado par. Nesse momento, a pesquisadora pediu para que os participantes da pesquisa conferissem as somas dos pontos em novas situações e, nos grupos, oralmente, surgiram contraexemplos. Ficou evidente que tinham o entendimento que a soma de quatro números ímpares é um número par.

No item **d** a satisfação, principalmente dos alunos dos níveis N1 e N2, ao solucioná-lo foi visível. Este item exigiu um tempo maior para os alunos pensarem e arquitetarem um plano de ação. Essa atividade as educadoras Onuchic e Allevato caracterizam como Problema gerador, pois reflete uma reação ao conhecimento obtido por aplicação direta de algoritmos ou por exercício mental.

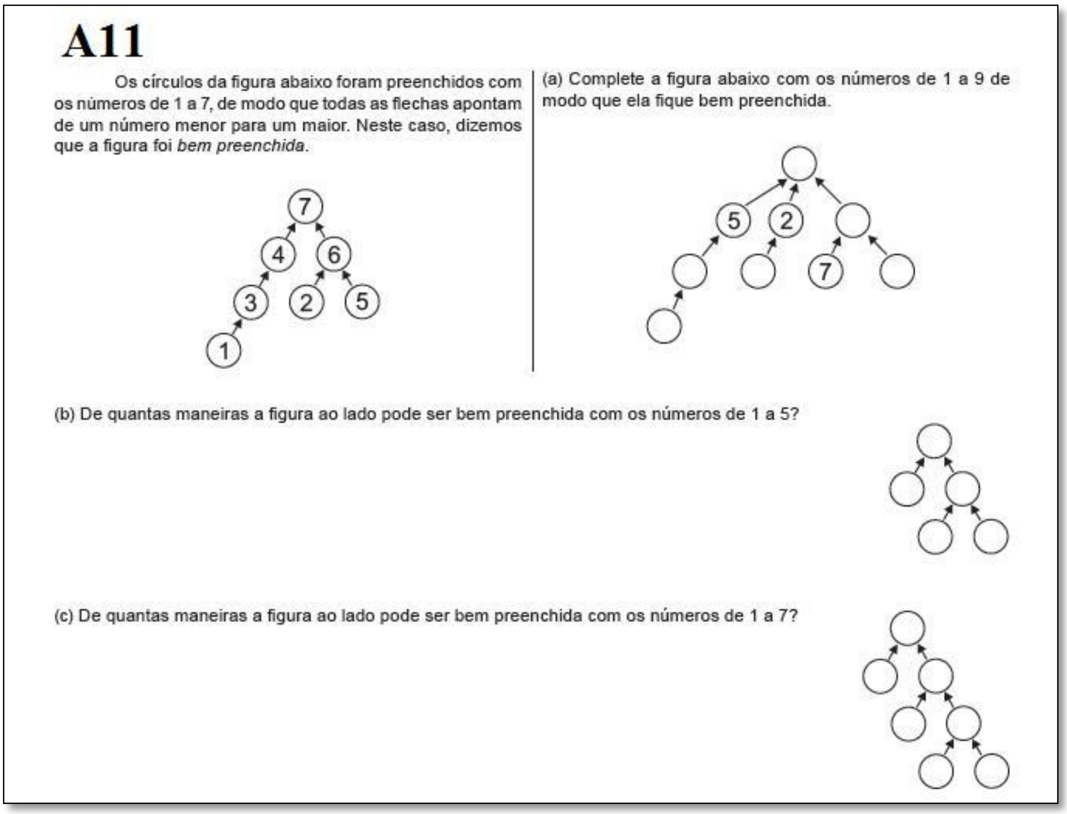
De acordo com Dante (2010, p.26), tornam-se mais interessantes e pode ser classificado como problema-heurístico. “Estes problemas aguçam a curiosidade do aluno e permitem que ele desenvolva a criatividade, a iniciativa e o espírito explorador.” Assim, chegaram à resposta por meio da construção de uma tabela, com uma simulação de pontos ganhos, perdidos e empates nas partidas.

As tabelas apresentadas como estratégia de Resolução do Problema, fazem parte das vivências dos alunos, pois participam de torneios de futebol. No entanto, propõe uma investigação, instiga os alunos a pensarem em uma estratégia na busca da solução. Nas discussões nos grupos, e por meio de reflexões na ação, diversas tabelas foram construídas, com os mesmos resultados, mas colocadas de formas diferentes. Também, os registros na lousa possibilitaram, no grande grupo, discussões e reflexões sobre cada solução compartilhada. Assim, com as diferentes estratégias apresentadas, as dúvidas que surgiram foram esclarecidas e sanadas, com a participação de todos. Através de problemas percebemos que os alunos não ficam presos a uma única resposta. Com a exploração e as investigações produzem diferentes estratégias, que socializadas têm favorecido na compreensão de novos conceitos e conteúdos matemáticos.

5.2.7 Atividade A11

Para a décima primeira atividade foi selecionada a questão (*N1N2N3)* da OBMEP (2008), que apresentamos na figura a seguir.

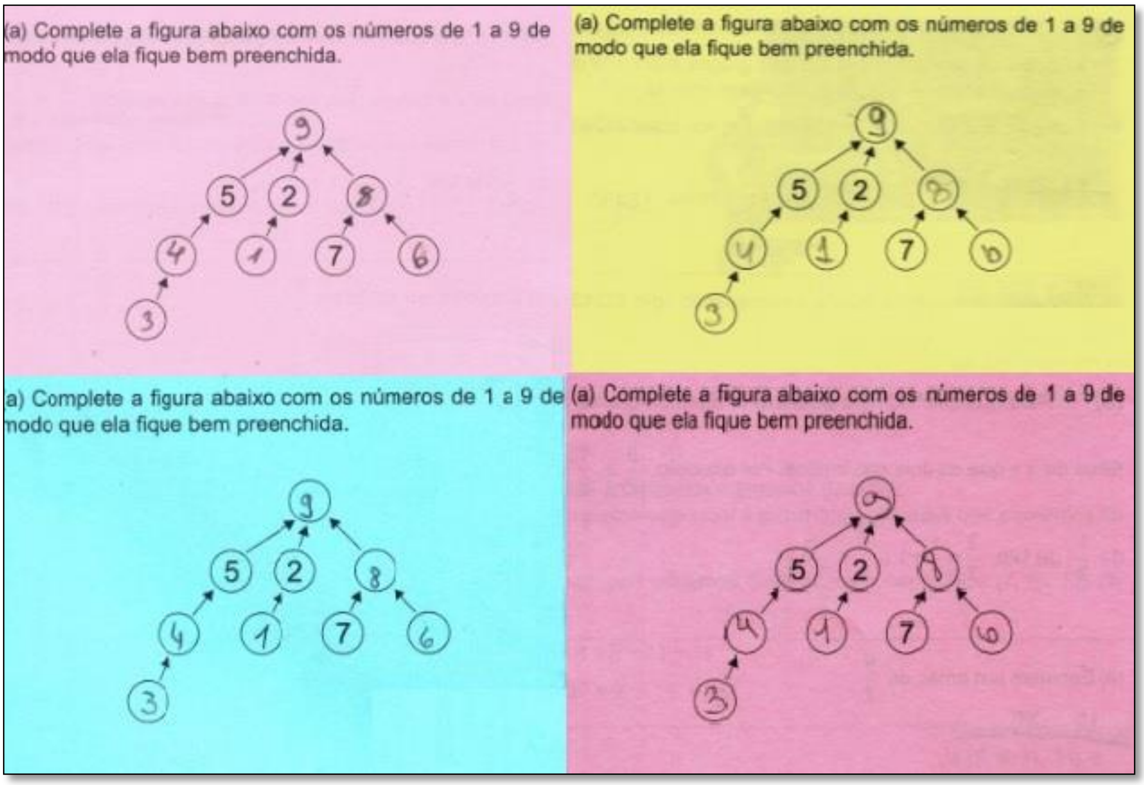
Figura 52– Atividade 11



Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

Após a leitura individual os alunos iniciaram a busca da solução. No item **a** não encontraram dificuldades para chegar à resposta correta, conforme vemos na figura 53.

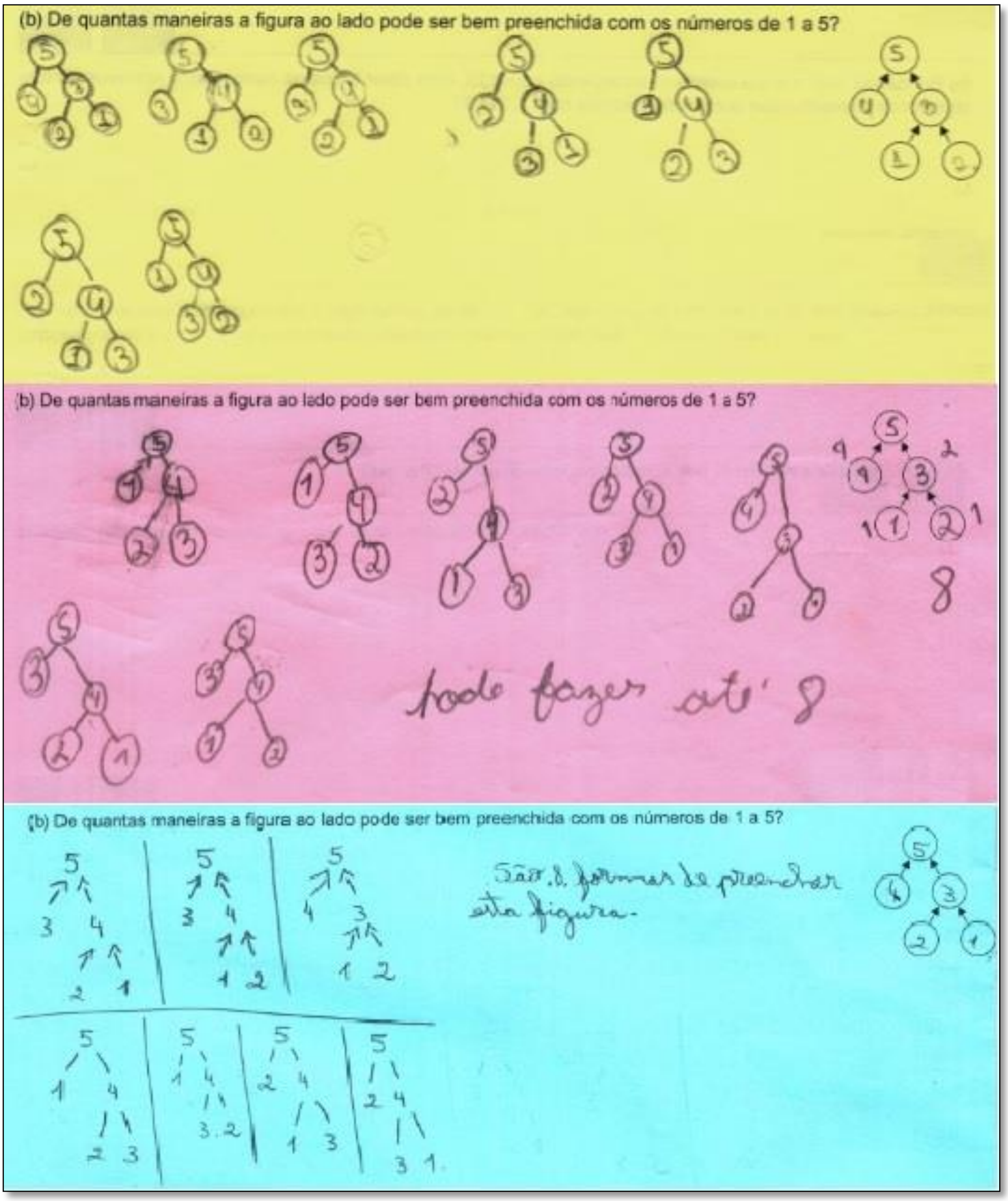
Figura 53− Registro da aluna C do N2G3, da aluna N do N1G3, do aluno G do G1N3 e da aluna T do N2G1.



Fonte: arquivo da pesquisadora.

No item **b,** alguns alunos levaram um tempo maior representando os possíveis diagramas, mas todos chegaram à mesma resposta, como mostra a figura 54.

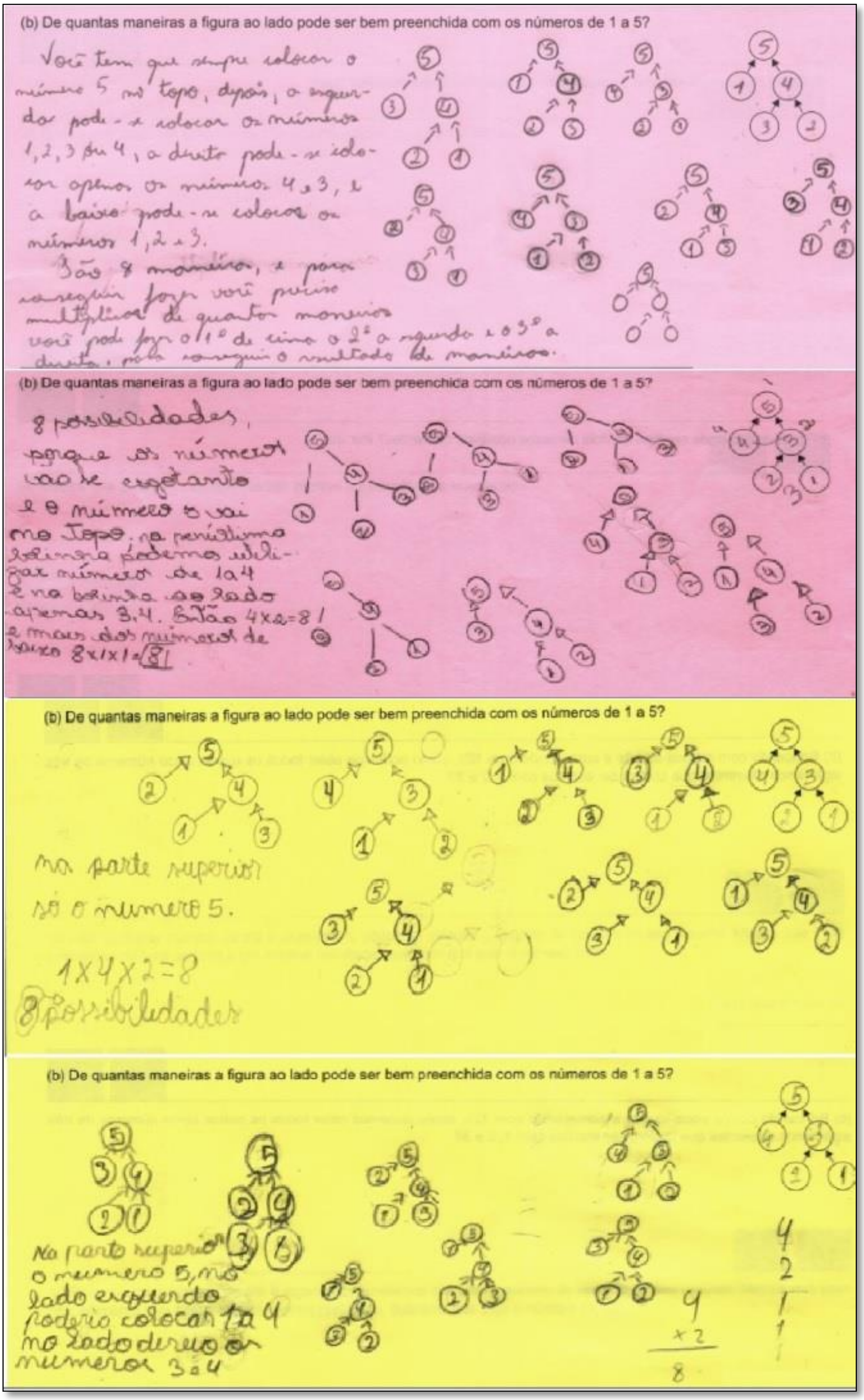
Figura 54− Registro da aluna N do N1G3, do aluno J do N2G2 e do aluno G do N3G1.



Fonte: arquivo da pesquisadora.

No entanto, outros tentavam generalizar. As estratégias utilizadas foram diferentes, mas as respostas ficaram semelhantes. Observamos isso na figura 55.

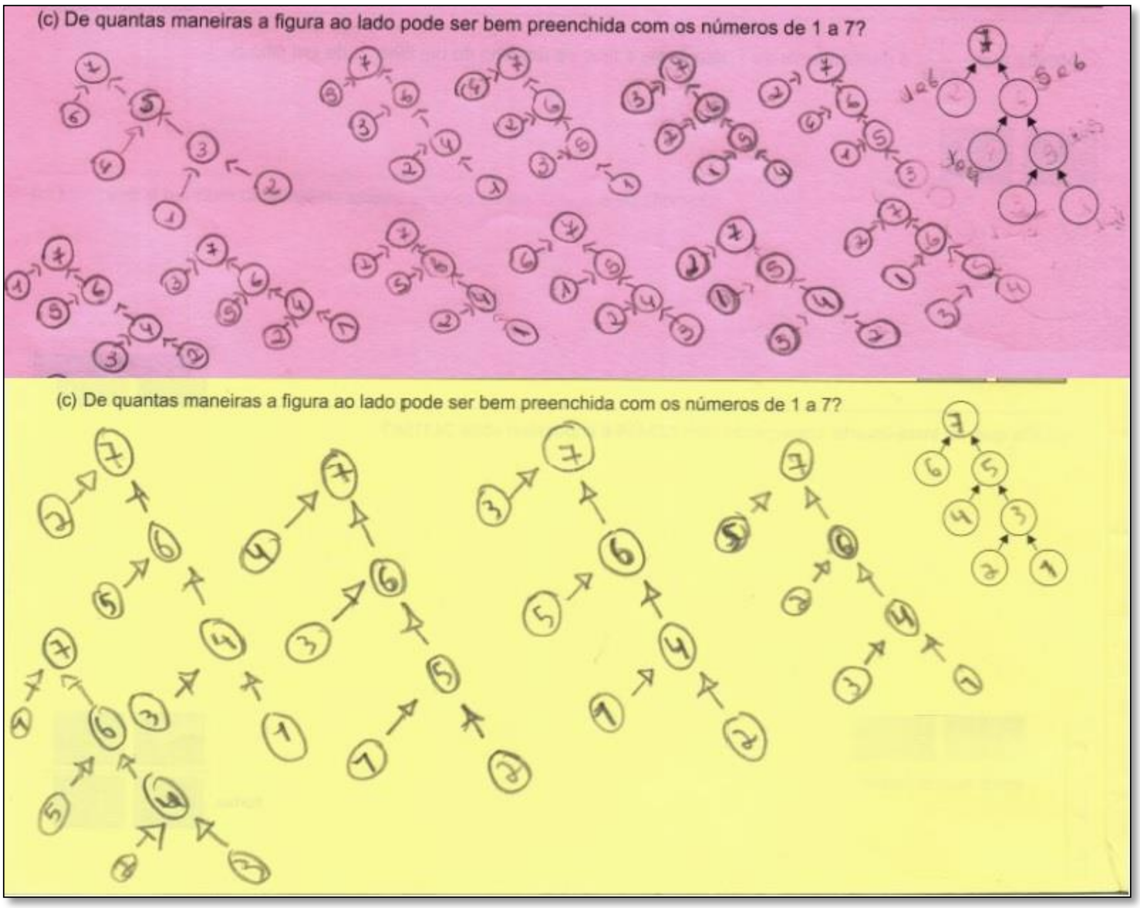
Figura 55− Registro da aluna C do N2G3, do aluno JP do N1G3. Do aluno W do N2G2 e do aluno G do N1G3.



Fonte: arquivo da pesquisadora.

Nessa questão os alunos não estabeleciam relações entre os itens e com isso no item **c** os resultados divergiam. Os alunos do N1 e N2, no primeiro momento, não utilizaram o princípio multiplicativo e no preenchimento dos diagramas não contemplaram todas as maneiras diferentes, conforme mostra a figura abaixo.

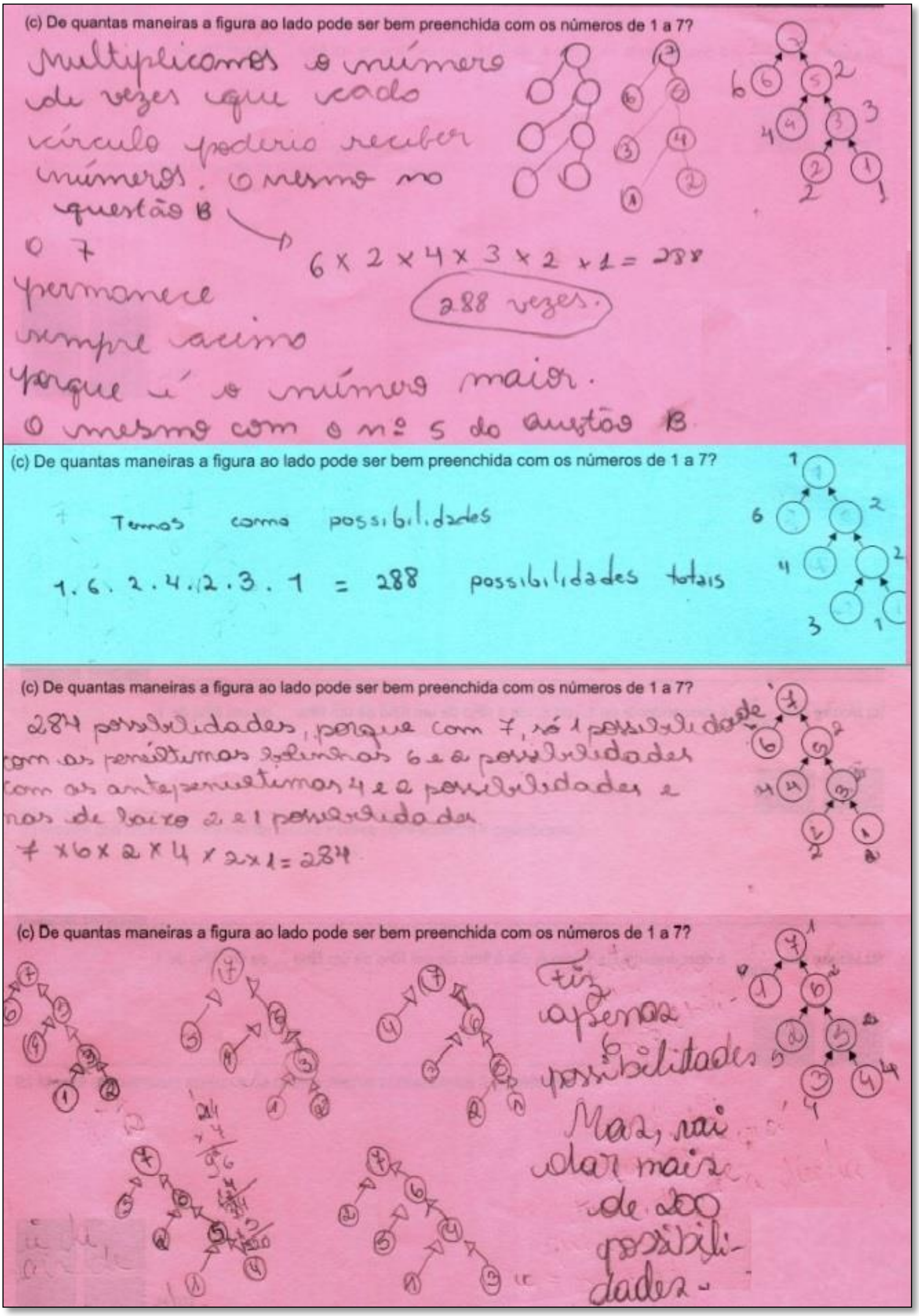
Figura 56− Registro da aluna V do N2G3 e do aluno P do N1G2.



Fonte: arquivo da pesquisadora.

As sequências registradas na figura 57 ilustram os passos do raciocínio e o número de maneiras possíveis de preencher o diagrama. Mostramos registros das estratégias de solução apresentadas nos três níveis

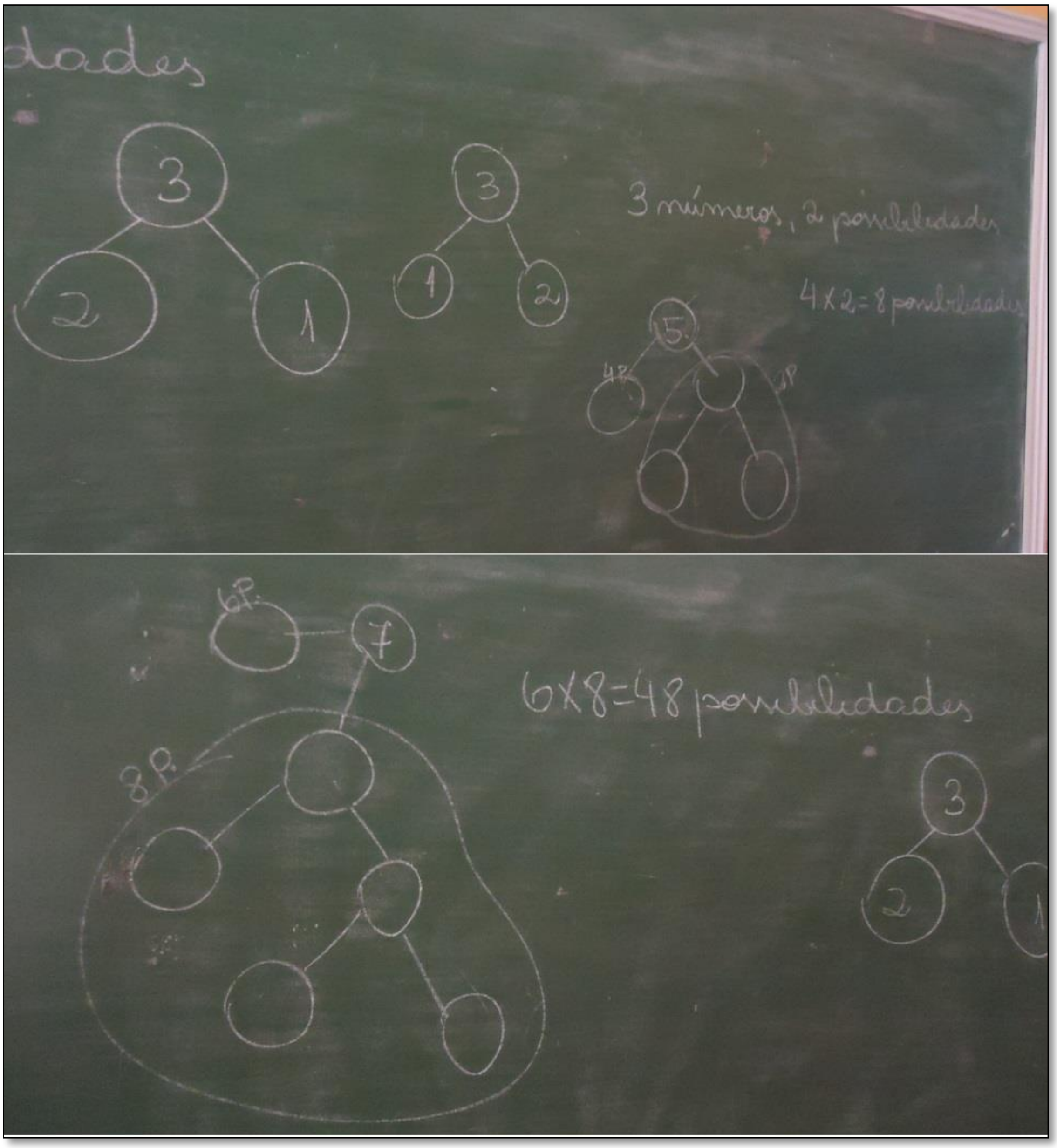
Figura 57− Registro da aluna T do N2G1, do aluno R do N3G1, do aluno W do N2G2 e da aluna D do N2G2.



Fonte: arquivo da pesquisadora.

Percebendo que os alunos não estabeleciam relações com os itens anteriores na questão, pedimos para um voluntário representar na lousa os diagramas com números de 1 a 3, de 1 a 5 e de 1 a 7. A figura 58 mostra a resolução apresentada.

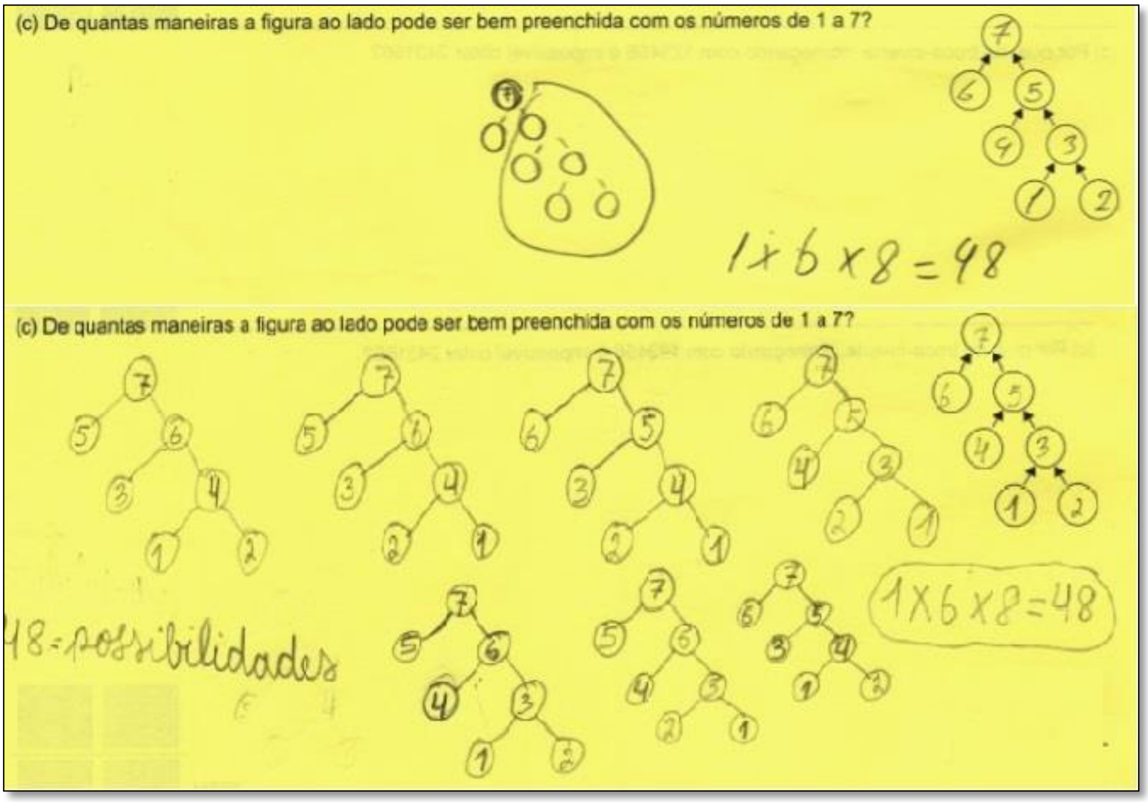
Figura 58− Registro na lousa pela aluna P do N2G3.



Fonte: arquivo da pesquisadora.

Com a participação de um representante em cada grupo, logo o diagrama pode ser preenchido de 1x6x8 = 48 maneiras diferentes. A atuação da professora pesquisadora, como orientadora e ao mesmo tempo questionadora, solicitando as representações de forma gradual, de acordo com os itens, favoreceu a construção de uma solução por parte dos alunos. Com o uso do Princípio Multiplicativo, os alunos chegaram juntos, à solução da atividade proposta.

Figura 59 − Registro do aluno G e do aluno JP do N1G3.



Fonte: arquivo da pesquisadora.

A figura acima mostra as respostas elaboradas, após as representações na lousa e discussões nos grupos.

5.2.8 Análise da Atividade A11

A atividade selecionada trabalha o desenvolvimento do pensamento combinatório a partir do Princípio Multiplicativo, um dos fundamentos da contagem.

Observamos que no primeiro item os participantes não encontraram dificuldades. Logo, após a leitura compreenderam o enunciado: que a posição do número nove era no topo; que abaixo ficava o oito; ao lado o sete; e, depois de algumas tentativas, os outros números foram posicionados. Conforme a figura 53, eles resolveram a situação proposta. Segundo Skovsmose, o item **a**, que abrange a ideia de resposta única e exata, caracteriza um Ambiente de Aprendizagem enquadrado no paradigma do exercício. Os ambientes correspondentes aos demais itens dessa questão, que possibilitam a discussão e o questionamento, são classificados como Cenários para a Investigação. Conforme Skovsmose, “É importante que os alunos e professores, juntos, achem seus percursos entre os diferentes ambientes de aprendizagem” (Skovsmose, 2000, p.14).

No segundo item, como mostra a figura 55, depois da compreensão, os alunos tentavam representar todos os diagramas possíveis, de acordo com a intuição. Antes mesmo da representação na lousa, de forma oral, ocorria a plenária, pois nas diversas tentativas e na troca de ideias com os colegas, alguns alunos perceberam que tinham diagramas repetidos ou que não seguiam a ordem prevista no item. Mas, como eram apenas oito maneiras para representar os diagramas, todos conseguiram.

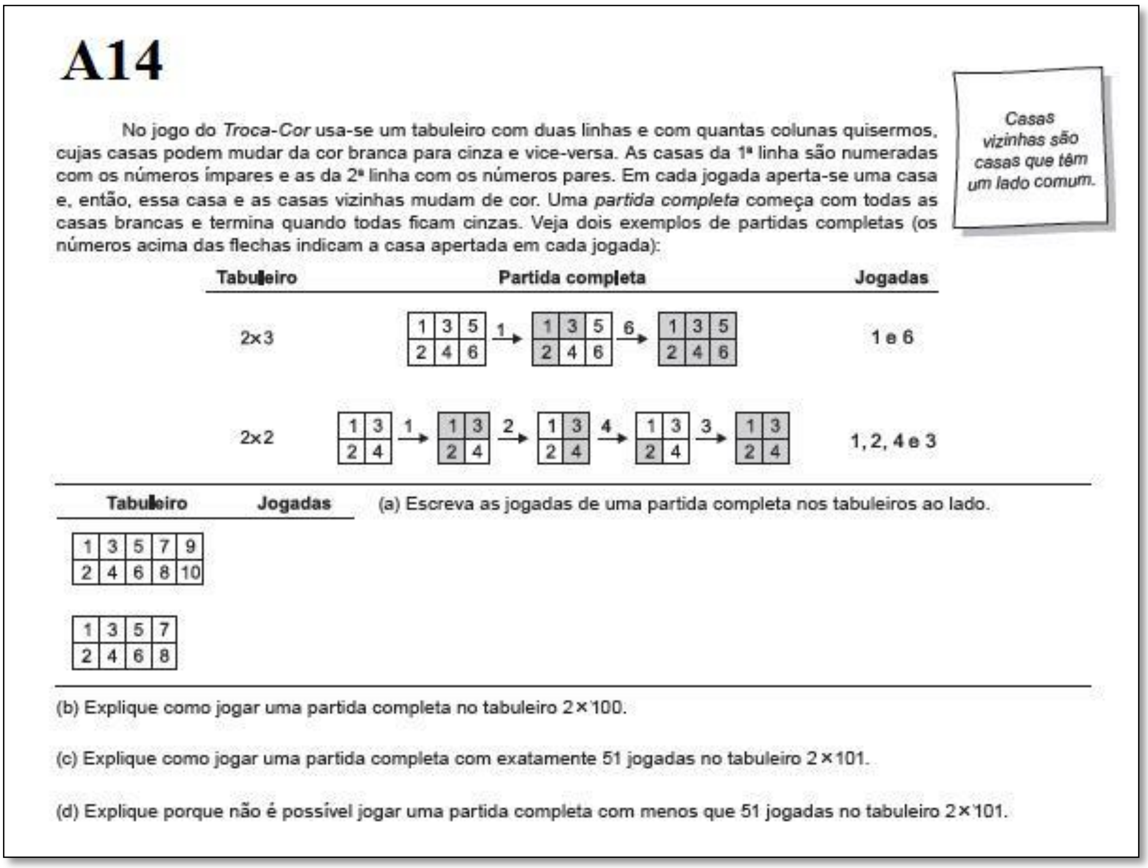
Nos itens **c** e **d** muitos tentavam desenhar todos os diagramas possíveis**.** Somente depois de um tempo perceberam que eram muitos, mas mostravam interesse em saber quantos. Alguns perguntavam para a professora/pesquisadora e, em resposta, observou que o mais importante não era o resultado exato, mas o processo e as estratégias aplicadas para determinar o número de diagramas possíveis.

Como mediadora, durante as observações dos trabalhos nos grupos, a professora/pesquisadora incentivou a troca de ideias entre eles. Também solicitou que nas representações na lousa, observassem as soluções dos colegas e analisassem se tinham algo em comum nas resoluções. Dessa forma, buscamos a identificação de um padrão e pensando numa resolução sem mostrar todas as maneiras possíveis, procurando regularidades e estabelecendo generalizações. Como as respostas divergiam, figura 56, os padrões encontrados e os procedimentos construídos e apresentados na resolução do problema, contribuíram para a resposta elaboração de uma resposta correta, figuras 58 e 59, chegando assim, junto com os alunos, em um consenso. Na Resolução de Problemas, essa etapa é importante, conforme Onuchic e Allevato, para a formalização de conteúdos, por parte dos alunos.

5.2.9 Atividade A14

Na figura 60 mostramos a questão (*N1N2N3)* selecionada da OBMEP (2009) como décima quarta atividade.

Figura 60– Atividade 5



A14

No jogo do *Troca-Cor* usa-se um tabuleiro com duas linhas e com quantas colunas quisermos, cujas casas podem mudar da cor branca para cinza e vice-versa. As casas da 1ª linha são numeradas com os números ímpares e as da 2ª linha com os números pares. Em cada jogada aperta-se uma casa e, então, essa casa e as casas vizinhas mudam de cor. Uma *partida completa* começa com todas as casas brancas e termina quando todas ficam cinzas. Veja dois exemplos de partidas completas (os números acima das flechas indicam a casa apertada em cada jogada):

Casas vizinhas são casas que têm um lado comum.

Tabuleiro	Partida completa	Jogadas
2×3	$\xrightarrow{1}$ $\xrightarrow{6}$	1 e 6
2×2	$\xrightarrow{1}$ $\xrightarrow{2}$ $\xrightarrow{4}$ $\xrightarrow{3}$	1, 2, 4 e 3

Tabuleiro	Jogadas
1 3 5 7 9 / 2 4 6 8 10	
1 3 5 7 / 2 4 6 8	

(a) Escreva as jogadas de uma partida completa nos tabuleiros ao lado.

(b) Explique como jogar uma partida completa no tabuleiro 2×100.

(c) Explique como jogar uma partida completa com exatamente 51 jogadas no tabuleiro 2×101.

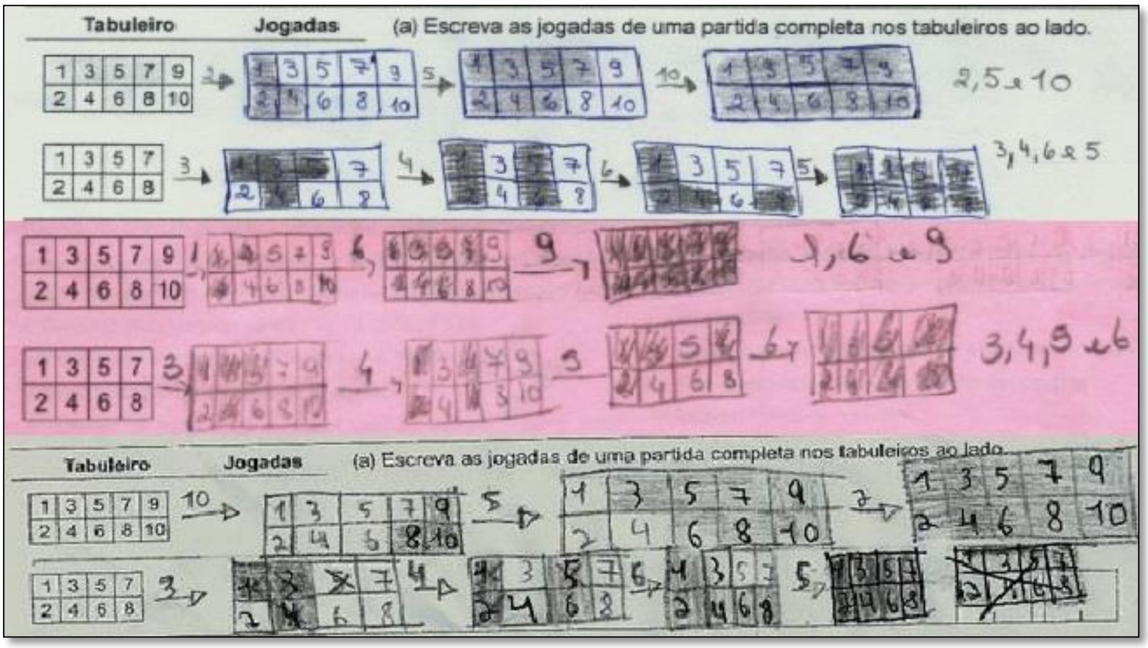
(d) Explique porque não é possível jogar uma partida completa com menos que 51 jogadas no tabuleiro 2×101.

Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

No item **a** os alunos dos três níveis não encontraram dificuldades, mas os alunos do Nível 1 levaram um tempo maior para compreender o jogo. Também foi necessária a leitura no grupo para o entendimento da situação-problema.

No item **a** as soluções não foram representadas na lousa, mas comentadas e registradas nas folhas, conforme mostra a figura 61.

Figura 61− Registro da aluna S do N3G1, da aluna V do N2G3 e do aluno P do N1G2.

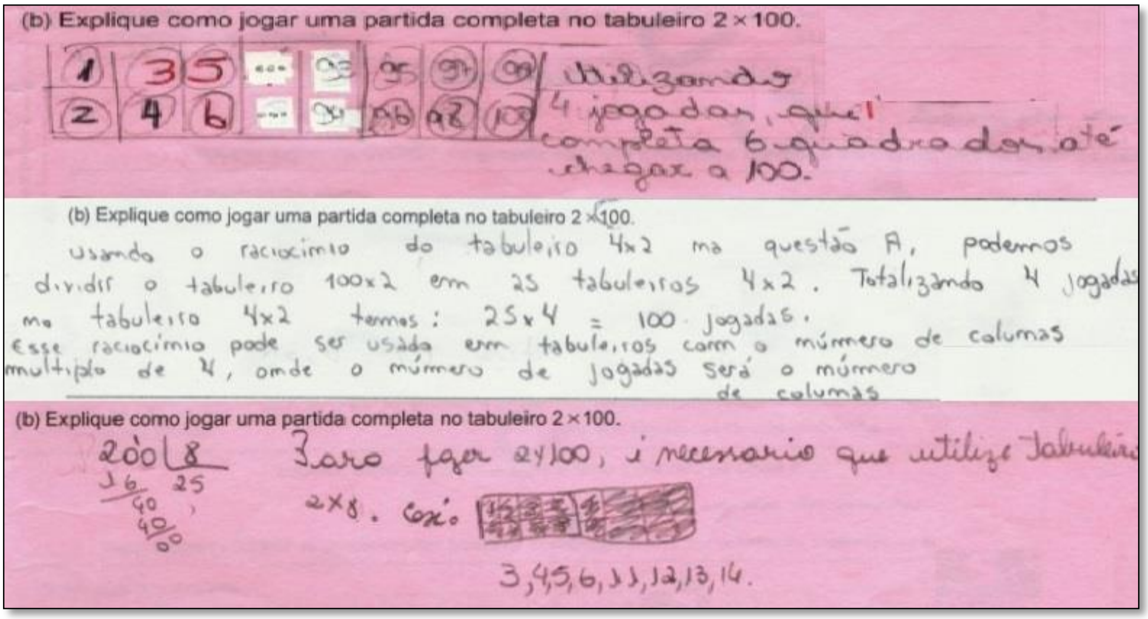


Fonte: arquivo da pesquisadora.

A figura acima mostra um jogo completo para cada tabuleiro, destacando as casas apertadas.

Na figura 62, temos as representações do item **b.**

Figura 62− Registro do aluno W do N2G2, do aluno R do N3G1 e da aluna V do N2G3.

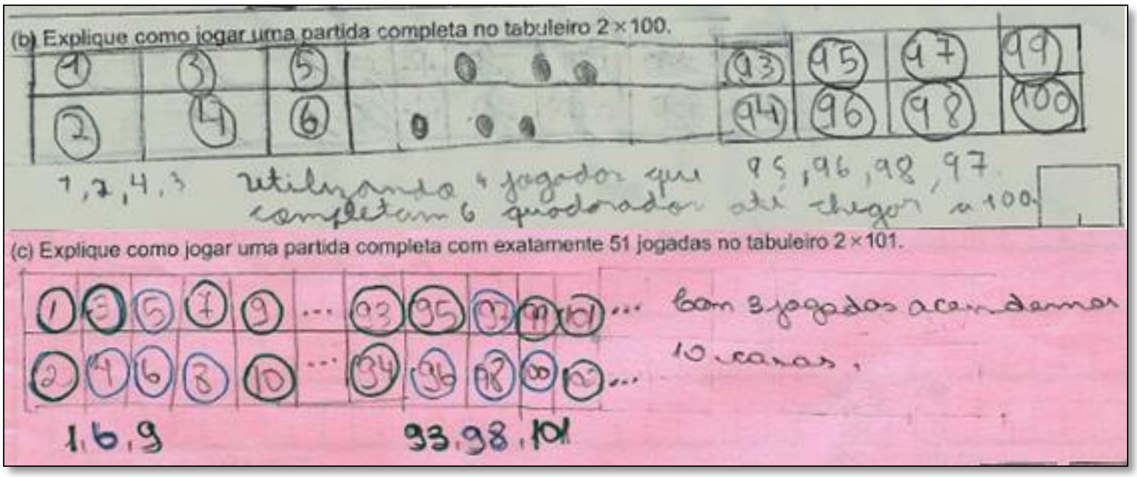


Fonte: arquivo da pesquisadora

Vimos que o aluno N2G2, assim como os colegas do seu grupo, não representou de forma correta o tabuleiro 2x100. No item **b,** os alunos do N3G1, descreveram como jogar uma partida completa no tabuleiro 2x100 e do N2G3 dividiram o tabuleiro 2x100 em 25 retângulos 2x8, ao invés de 2x4.

Na figura 63, temos outras representações.

Figura 63− Registro do aluno P do N1G2 e do aluno W do N2G2.

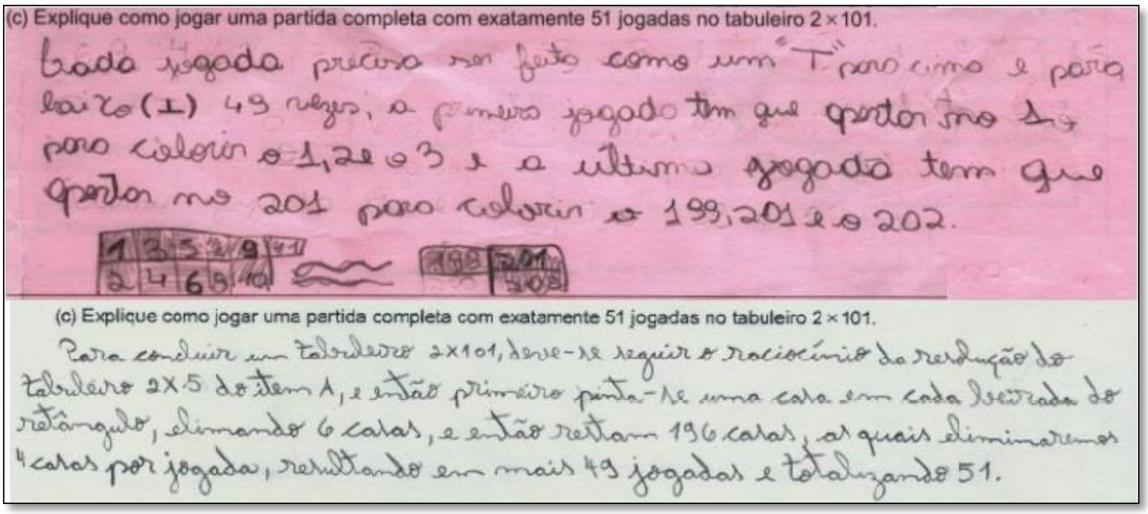


Fonte: arquivo da pesquisadora.

Os alunos do N1 e do N2 utilizaram o desenho do tabuleiro para representar o número de jogadas nos itens **b** e **c.** Mas, como mostra a figura 63, o grupo G2 não representou a situação apresentada na questão.

No G3 uma das meninas do N2 contestou a resposta dos colegas de seu grupo e fez o tabuleiro 2x101, mostrando o jogo completo, apresentado na figura 64.

Figura 64− Registro da aluna B do N2G1 e da aluna S do N3G1.


(c) Explique como jogar uma partida completa com exatamente 51 jogadas no tabuleiro 2 × 101.

Cada jogada precisa ser feita como um "T" para cima e para baixo (⊥) 49 vezes, a primeira jogada tem que apertar no 1, para colorir o 1,2 e o 3 e a última jogada tem que apertar no 201 para colorir o 199,201 e o 202.

(c) Explique como jogar uma partida completa com exatamente 51 jogadas no tabuleiro 2 × 101.

Para concluir um tabuleiro 2x101, deve-se seguir o raciocínio da redução do tabuleiro 2X5 do item A, e então primeiro pinta-se uma casa em cada lateral do retângulo, eliminando 6 casas, e então restam 196 casas, as quais eliminaremos 4 casas por jogada, resultando em mais 49 jogadas e totalizando 51.

Fonte: arquivo da pesquisadora.

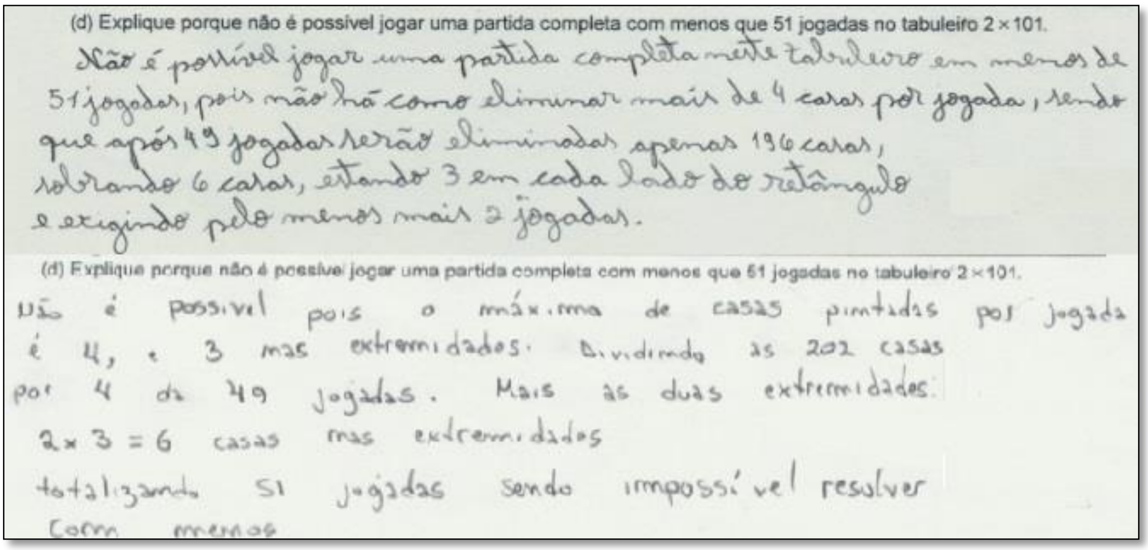
Nos grupos G1 e G3 as explicações foram descritivas e por meio de desenhos. A figura acima representa a ideia de início, meio e fim; representada pela aluna B do N2G1, que na prática construiu o tabuleiro 2x101, como mostra a figura 65.

Figura 65− Registro da aluna B do N2G1.

Fonte: arquivo da pesquisadora.

Vimos que o modo descrito no item **c** ajudou no item seguinte. Os alunos do N3 perceberam que a cada jogada muda a cor de no máximo quatro casas, mas não notam que 200 é múltiplo de 4. Depois de muitas discussões concordaram que é impossível fazer menos do que 51 jogadas e deixar todas as casas do tabuleiro cinza. Como mostra a figura abaixo.

Figura 66 − Registro da aluna S do N3G1 e do aluno R do N3G1.


(d) Explique porque não é possível jogar uma partida completa com menos que 51 jogadas no tabuleiro 2 × 101.

Não é possível jogar uma partida completa neste tabuleiro em menos de 51 jogadas, pois não há como eliminar mais de 4 casas por jogada, sendo que após 49 jogadas serão eliminadas apenas 196 casas, sobrando 6 casas, estando 3 em cada lado do retângulo e exigindo pelo menos mais 2 jogadas.

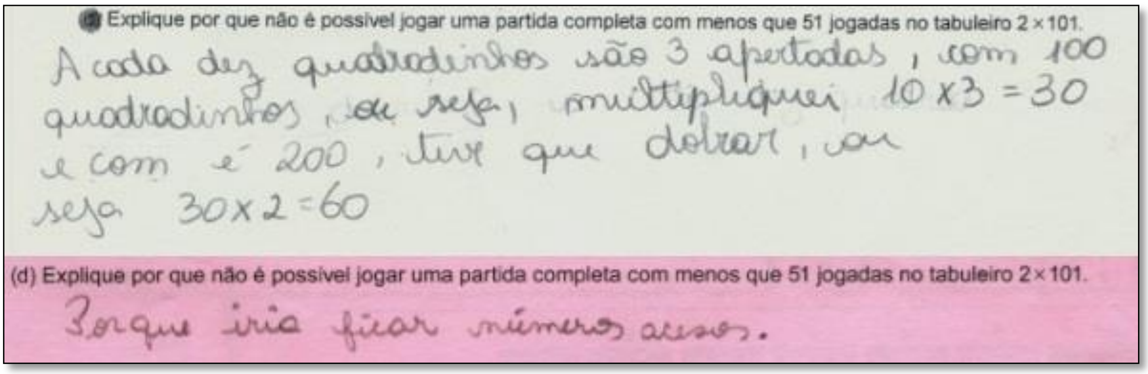
(d) Explique porque não é possível jogar uma partida completa com menos que 51 jogadas no tabuleiro 2 × 101.

Não é possivel pois o máximo de casas pintadas por jogada é 4, e 3 nas extremidades. Dividindo as 202 casas por 4 da 49 jogadas. Mais as duas extremidades. 2 x 3 = 6 casas nas extremidades totalizando 51 jogadas sendo impossível resolver com menos

Fonte: arquivo da pesquisadora.

No Nível 1 observamos respostas que não utilizavam os múltiplos de 4 e com isso o número de jogadas aumentavam. A figura 67 mostra um exemplo no qual o aluno não explica porque era impossível completar a partida com menos de 51 jogadas no tabuleiro 2x100.

Figura 67− Registro da aluna T do N2G2 e da aluna V do N2G3.


Explique por que não é possível jogar uma partida completa com menos que 51 jogadas no tabuleiro 2 × 101.

A cada dez quadradinhos são 3 apertadas, com 100 quadradinhos, ou seja, multipliquei 10 x 3 = 30 e com é 200, tive que dobrar, ou seja 30 x 2 = 60

(d) Explique por que não é possível jogar uma partida completa com menos que 51 jogadas no tabuleiro 2 × 101.

Porque iria ficar números acesos.

Fonte: arquivo da pesquisadora.

Os alunos do Nível 1 utilizaram vários exemplos para explicar porque não é possível jogar uma partida completa com menos de 51 jogadas dada na questão.

As diferentes resoluções registradas na lousa geraram discussões e questionamentos pelos colegas, que acabaram levantando dúvidas, mas logo depois foram esclarecidas e chegaram ao resultado correto.

5.2.10 Análise da Atividade A14

No item **a,** a leitura individual no N1 não foi suficiente para o entendimento da questão, sendo necessária a leitura em conjunto. Alguns alunos precisaram tirar uma folha do caderno para fazer os registros e somente depois de várias tentativas conseguiram solucioná-lo.

Nas representações de um tabuleiro 2x100 para os alunos do G2 foi necessário levá-los a percepção de que uma partida completa não cessava no 100, como podemos observar na figura 62. Sugerimos para um dos alunos fazer a representação na lousa de um tabuleiro 2x3, 2x4,... Em seguida perceberam que deveriam prosseguir para determinar o tabuleiro 2x100. Esse grupo, na explicação do último item, citou exemplos. Somente depois das representações na lousa perceberam que não era possível acabar o jogo com menos de 51 jogadas. Nesse grupo a professora/pesquisadora utilizou o "erro" na busca do consenso e ao resultado correto.

Nas figuras 64 e 65 vimos às estratégias utilizadas pela aluna do N2, que utilizando a manipulação autônoma chegou à solução com a aplicação de material concreto. Percebemos também, que os símbolos $\top$ e $\perp$, tornam a visualização das representações no imaginário, ou seja, começam as abstrações.

No item **d** os alunos do N1, dos demais grupos, também atribuíram exemplos como justificativa para explicar a pergunta. Nesse caso, a estratégia criada pela colega, como mostra a figura 65, serviu para levá-los a compreensão.

A professora pesquisadora citou nos demais grupos, que a colega do G1 construiu o tabuleiro ilustrando as casas afetadas, logo no G2 o aluno W e no G3, o aluno T, foram na lousa e, com a ajuda dos colegas, representaram o tabuleiro do item **c**, sendo que não foi necessário o registro formal da professora. Depois de sanadas as dúvidas, em cada item, buscamos o consenso sobre o resultado correto. É importante registrar que cada estratégia propiciou reflexões, que contribuíram muito para a aprendizagem.

5.2.11 Atividade A16

Na figura 68 a questão (*N1N2N3)* que foi selecionada da OBMEP (2010), como décima sexta atividade.

Figura 68 − Atividade 16

A16

Gabriel desenha quadrados divididos em nove casas e escreve os números naturais de 1 a 9, um em cada casa. Em seguida, ele calcula a soma dos números de cada linha e de cada coluna. A figura mostra um dos quadrados do Gabriel; observe que a soma dos números da terceira linha é $5+8+2=15$ e a soma dos números da segunda coluna é $9+7+8=24$. Nesse exemplo, as seis somas são 6, 12, 15, 15, 18 e 24.

6	9	3	18
4	7	1	12
5	8	2	15
15	24	6	

a) Gabriel preencheu um quadrado e fez apenas cinco somas: 9, 13, 14, 17 e 18. Qual é a soma que está faltando?

b) Explique por que não é possível que, em um quadrado do Gabriel, todas as somas sejam números pares.

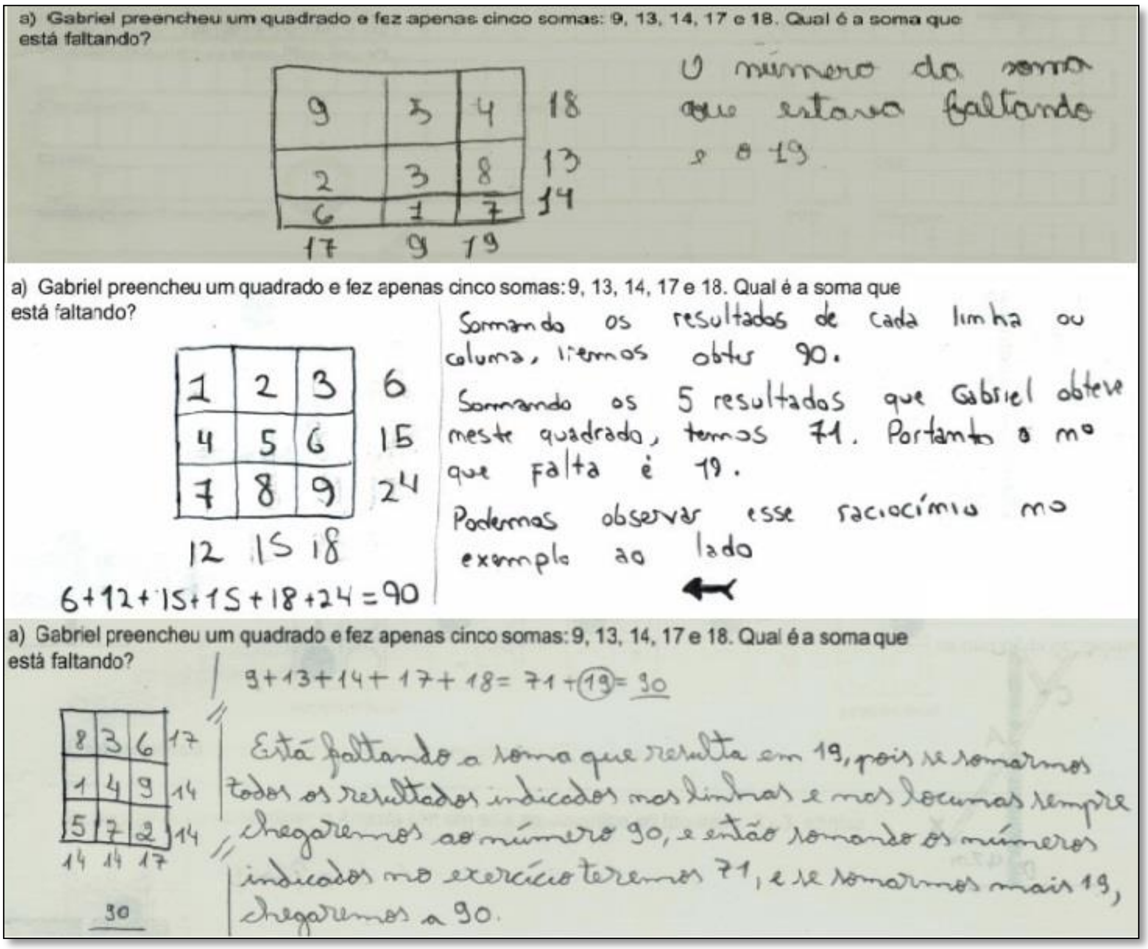
c) Preencha o quadrado de modo que as somas sejam 7, 13, 14, 16, 18 e 22.

Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

Na figura 69, podemos observar que nas resoluções apresentadas pelos alunos do N3, os mesmos, utilizaram a soma das linhas e colunas dadas na questão para determinar a soma que faltava no item **a**.

Os alunos dos níveis 1 e 2 não fizeram nenhum comentário relacionado a esta observação do nível 3. Alguns chegaram a dizer que não era possível, mas depois de várias tentativas frustradas, sugerimos aos grupos para cada um começar por um número diferente no centro e, de preferência, que não apagassem para que observassem os números utilizados nas tentativas anteriores. Após várias tentativas, um colega preencheu um quadrado com os números de 1 a 9 e chegou às somas estabelecidas pela questão. Os demais continuaram tentando até conseguir. A figura abaixo apresenta as soluções.

Figura 69− Registro do aluno JA do N1G3, do aluno R do N3G1 e do aluno G do N3G1.


a) Gabriel preencheu um quadrado e fez apenas cinco somas: 9, 13, 14, 17 e 18. Qual é a soma que está faltando?

9	5	4	18
2	3	8	13
6	1	7	14
17	9	19	

O número da soma que estava faltando é o 19

a) Gabriel preencheu um quadrado e fez apenas cinco somas: 9, 13, 14, 17 e 18. Qual é a soma que está faltando?

1	2	3	6
4	5	6	15
7	8	9	24
12	15	18	

6+12+15+15+18+24=90

Somando os resultados de cada linha ou coluna, iremos obter 90. Somando os 5 resultados que Gabriel obteve neste quadrado, temos 71. Portanto o nº que falta é 19. Podemos observar esse raciocínio no exemplo ao lado

a) Gabriel preencheu um quadrado e fez apenas cinco somas: 9, 13, 14, 17 e 18. Qual é a soma que está faltando?

8	3	6	17
1	4	9	14
5	7	2	14
14	14	17	

30

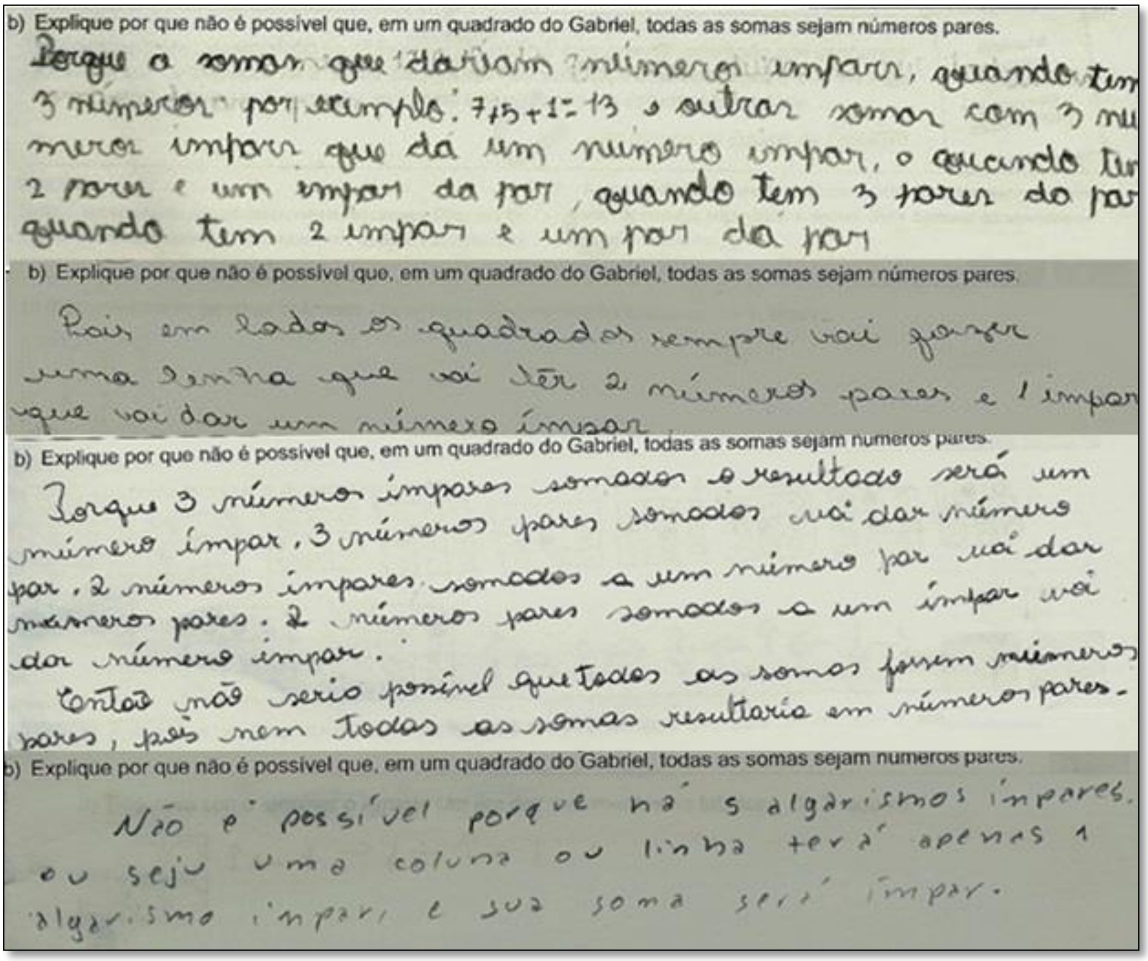
9+13+14+17+18= 71+19= 90

Está faltando a soma que resulta em 19, pois se somarmos todos os resultados indicados nas linhas e nas colunas sempre chegaremos ao número 90, e então somando os números indicados no exercício teremos 71, e se somarmos mais 19, chegaremos a 90.

Fonte: arquivo da pesquisadora.

No item **b**, ao visualizar os diversos quadrados preenchidos no item anterior, os alunos, em suas discussões nos grupos, concluíram que pelo menos uma linha de um quadrado preenchido contém um ou três números ímpares, sendo os restantes pares. Assim em qualquer caso, obtemos uma linha cuja soma é ímpar. Registros das conclusões dadas na figura 70.

Figura 70 − Registro do aluno JA do N1G3, do aluno P do N1G2, da aluna V do N2G3 e do aluno C do N3G1.


b) Explique por que não é possível que, em um quadrado do Gabriel, todas as somas sejam números pares.

Porque a somas que darão números impares, quando tem 3 números por exemplo: 7+5+1=13 e outras somas com 3 números impares que dá um numero impar, e quando tem 2 pares e um impar da par, quando tem 3 pares da par quando tem 2 impar e um par da par

b) Explique por que não é possível que, em um quadrado do Gabriel, todas as somas sejam números pares.

Pois em todos os quadrados sempre vai fazer uma linha que vai ter 2 números pares e 1 impar que vai dar um número ímpar

b) Explique por que não é possível que, em um quadrado do Gabriel, todas as somas sejam números pares.

Porque 3 números ímpares somados o resultado será um número ímpar, 3 números pares somados vai dar número par. 2 números impares somados a um número par vai dar números pares. 2 números pares somados a um ímpar vai dar número impar.
Então não seria possível que todas as somas fossem números pares, pois nem todas as somas resultaria em números pares.

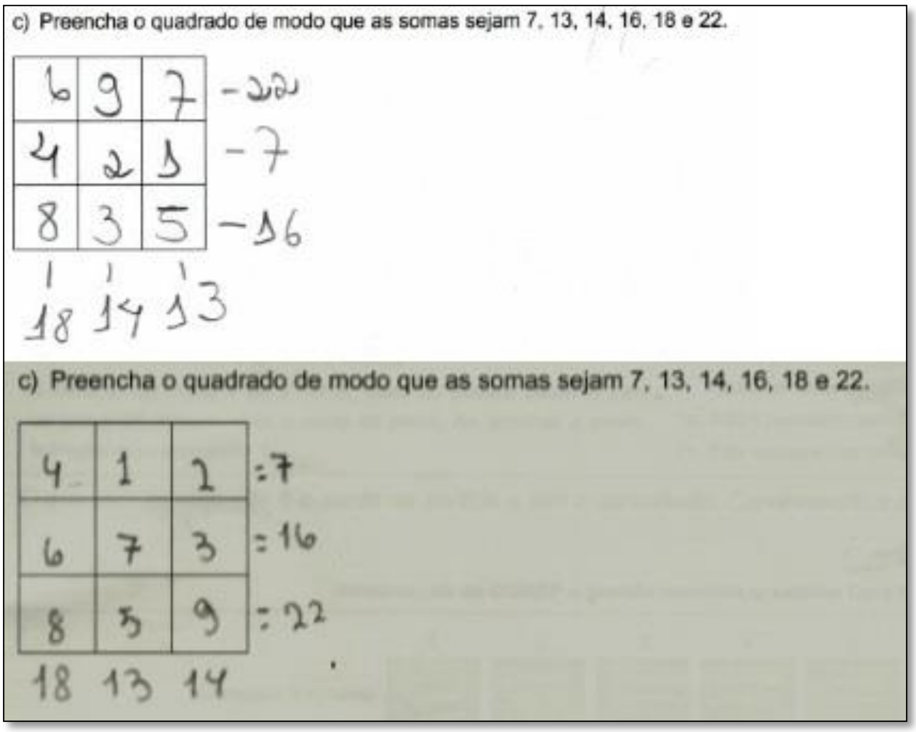
b) Explique por que não é possível que, em um quadrado do Gabriel, todas as somas sejam números pares.

Não é possível porque há 5 algarismos ímpares. ou seja uma coluna ou linha terá apenas 1 algarismo ímpar, e sua soma será ímpar.

Fonte: arquivo da pesquisadora.

No item **c** podemos observar que mesmo sendo de grupos diferentes começaram a preencher o quadrado pela soma 7. Pois perceberam que a única maneira de obter a soma 7 é 1+ 2 + 4 = 7, conforme a figura 71.

Figura 71− Registro da aluna D do N2G1 e do aluno JA do N1G3.



Fonte: arquivo da pesquisadora.

Também comentaram que as únicas possibilidades para a soma 22 são $5 + 8 + 9 = 22$ e $6 + 7 + 9 = 22$. Desse modo, chegaram à solução e apresentaram na lousa as diferentes maneiras, observando a troca de posição de colunas e troca das linhas pelas colunas.

5.2.12 Análise da Atividade A16

A situação apresentada envolve o pensamento aritmético, mas especificamente operações com números naturais, utilizando o lúdico na busca do desenvolvimento do raciocínio lógico.

Essa atividade, de acordo com Skovsmose, caracteriza um ambiente de aprendizagem com referência a Matemática pura, pois trata da matemática sem interação com o meio. As soluções representadas na lousa levaram os alunos à discussão e pelo envolvimento no desenvolvimento da atividade, caracterizamos a mesma, como um paradigma que possibilita um cenário de investigação.

Nas primeiras observações feitas podemos constatar que os alunos fizeram a leitura, compreenderam o problema e criaram estratégias diferentes de resolução.

Percebemos também que o raciocínio dos alunos do N3 foi mais rápido, na compreensão, ao criar, executar um plano e na verificação das respostas (passos de Polya), talvez porque já tenham visto anteriormente problemas parecidos, como quadrado mágico.

Alguns alunos do N1 e do N2 mesmo seguindo um caminho mais lento, sentiram-se desafiados diante do problema, prova disso foram as diversas tentativas realizadas e a vontade de solucioná-lo. Os valores numéricos desconhecidos no item **a** despertaram o interesse dos alunos que não desistiam diante da dificuldade encontrada inicialmente. Neste item os grupos menores não aceitavam respostas dos colegas dos outros grupos, pois sabiam o que estava sendo solicitado no enunciado.

A escrita foi uma dificuldade encontrada (figura 70) e os alunos, em voz alta, comentavam porque não era possível que todas as somas fossem pares, mas na escrita a organização consciente do pensamento era diferente da organização expressa oralmente. Assim, muitas respostas ficaram incompletas, ao distribuir os números no quadrado perceberam que pelo menos uma linha de um quadrado preenchido tinha um ou três números ímpares. Como há cinco números ímpares de 1 a 9, os restantes eram pares. Logo, com as representações na lousa, evidenciaram uma linha cuja soma é ímpar e uma linha cuja soma é par. Não consideraram que a soma das três linhas é 45, que é um número ímpar.

Os itens anteriores auxiliaram na compreensão e na solução no item **c.** Desse modo, as estratégias aplicadas e assimiladas pelos alunos, contribuíram para o desenvolvimento da capacidade de resolver o problema.

5.2.13 Atividade A19

Na figura 72 mostramos a questão (*N1N2N3)* selecionada da OBMEP (2011) como décima nona atividade.

Figura 72− Atividade 19

A19

Começando com qualquer número natural não nulo é sempre possível formar uma sequência de números que termina em 1, seguindo repetidamente as instruções abaixo:

- se o número for ímpar, soma-se 1;
- se o número for par, divide-se por 2.

Por exemplo, começando com o número 21, forma-se a seguinte sequência:

21→22→11→12→6→3→4→2→1

Nessa sequência aparecem nove números; por isso, dizemos que ela tem *comprimento* 9. Além disso, como ela começa com um número ímpar, dizemos que ela é uma *sequência ímpar*.

---

a) Escreva a sequência que começa com 37.

b) Existem três sequências de comprimento 5, sendo duas pares e uma ímpar. Escreva essas sequências.

c) Quantas são as sequências pares e quantas são as sequências ímpares de comprimento 6? E de comprimento 7?

d) Existem ao todo 377 sequências de comprimento 15, sendo 233 pares e 144 ímpares. Quantas são as sequências de comprimento 16? Dessas, quantas são pares? Não se esqueça de justificar sua resposta.

Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

Os alunos fizeram a leitura e não tiveram dúvidas quanto ao enunciado do item **a** e, logo as resoluções foram surgindo A figura 73 mostra algumas soluções coletadas.

Figura 73 − Registro da aluna N do N1G3, da aluna P do N2G3 e do aluno G do N3G1.

a) Escreva a sequência que começa com 37.

37 → 38 → 19 → 20 → 10 → 5 → 6 → 3 → 4 → 2 → 1

a) Escreva a sequência que começa com 37.

37 → 38 → 19 → 20 → 10 → 5 → 6 → 3 → 4 → 2 → 1

a) Escreva a sequência que começa com 37.

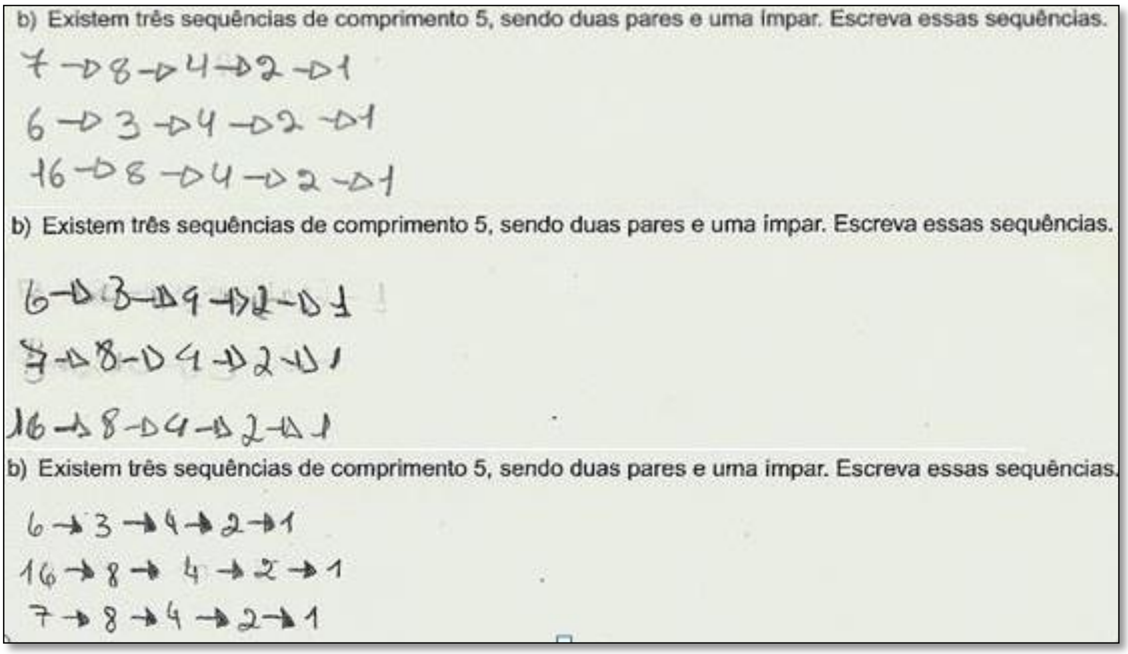
37 → 38 → 19 → 20 → 10 → 5 → 6 → 3 → 4 → 2 → 1

Fonte: arquivo da pesquisadora.

Nas estratégias apresentadas, no item **a** da atividade A19, observamos que todos os participantes colocaram a flecha e que o mesmo não ocorreu na atividade A1.

No item **b**, todos os alunos demonstraram certa facilidade. Mas, as sequências foram construídas separadamente De acordo com a figura 74.

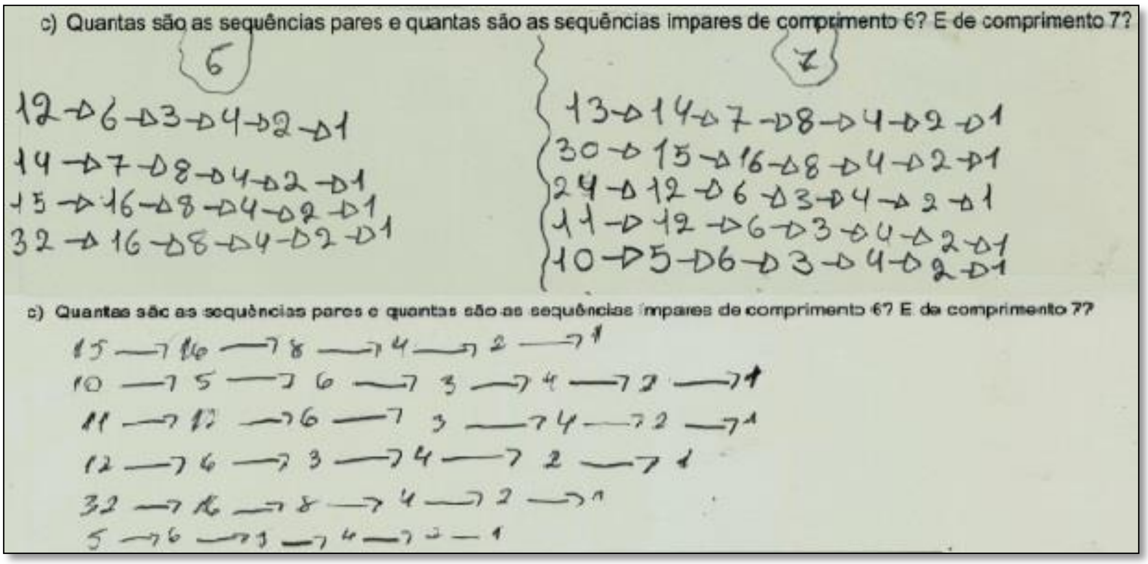
Figura 74− Registro da aluna N do N1G3, da aluna P do N2G3 e do aluno G do N3G1.



Fonte: arquivo da pesquisadora.

No item **c,** vários alunos do N1 e do N2 não determinaram todas as sequências de comprimento 6 e 7, como mostra a figura 75.

Figura 75− Registro da aluna C do N2G3 e a aluna N do N1G3.

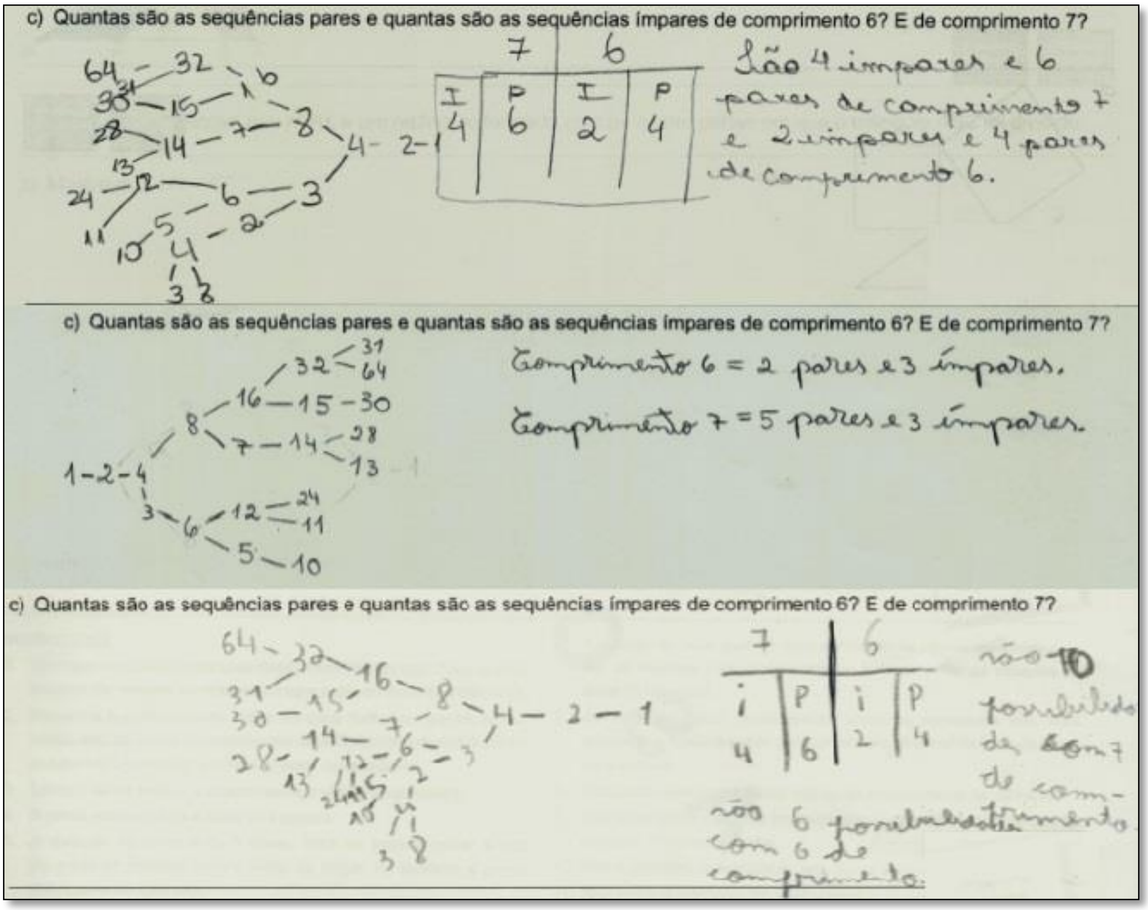


Fonte: arquivo da pesquisadora.

No item **c**, o número de sequências pares e ímpares de comprimento seis e sete foram diferentes nos grupos.

Os alunos que representaram da forma ilustrada na figura 76 conseguiram responder o item **d** com mais facilidade.

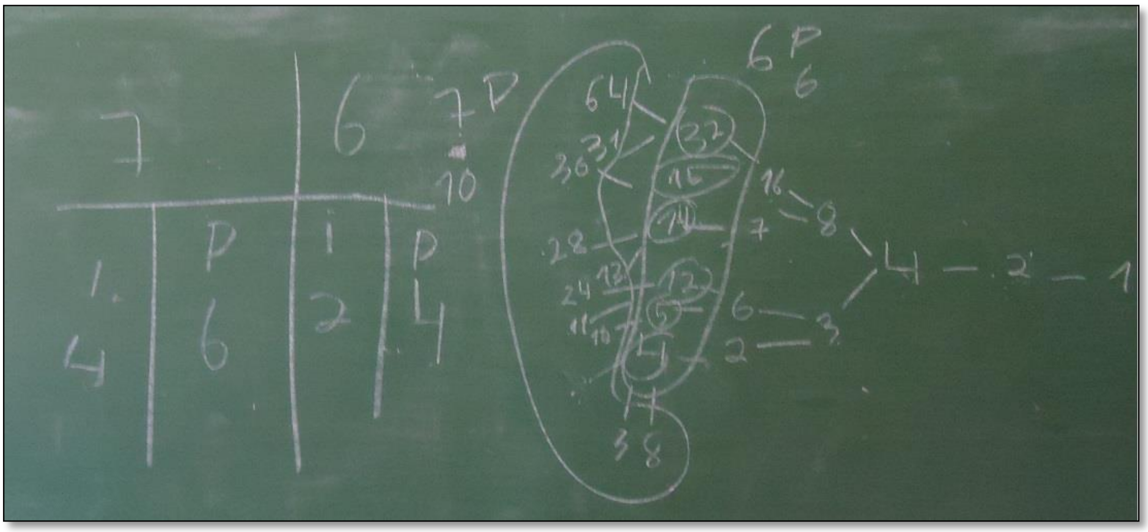
Figura 76− Registro do aluno W do N2G2, do aluno G do N3G1 e do aluno P do N1G2.



Fonte: arquivo da pesquisadora.

A iniciativa de partir do número um, seguir a regra para chegar nas sequências pares e ímpares de comprimentos 6 e 7, foi notada primeiramente no G1. Os demais grupos começaram testando os números separadamente, em ordem decrescente. Para os alunos que não tiveram o mesmo raciocínio, foi apresentada a resolução na lousa por um colega em cada grupo. Na figura 77, temos uma imagem da lousa.

Figura 77− Registro na lousa pelo aluno W do N2G2.



Fonte: arquivo da pesquisadora.

Na figura 78 temos quatro soluções para o item **d**, com maneiras diferentes de pensar sobre uma mesma situação-problema.

Figura 78− Registro do aluno W do N2G2, do aluno R do N3G1, do aluno G do N3G1 e da aluna A do N2G3.

d) Existem ao todo 377 sequências de comprimento 15, sendo 233 pares e 144 ímpares. Quantas são as sequências de comprimento 16? Dessas, quantas são pares? Não se esqueça de justificar sua resposta.

São 610 possibilidades, sendo 466 pares e 144 ímpares, porque de cada número par, dele sai mais 2 números e de ímpares vezes 1.

$233 \cdot 2 = 466 + 144 \cdot 1 = 144$

$233 + 114 = 610$ POSSIBILIDEDES

d) Existem ao todo 377 sequências de comprimento 15, sendo 233 pares e 144 ímpares. Quantas são as sequências de comprimento 16? Dessas, quantas são pares? Não se esqueça de justificar sua resposta.

Para descobrirmos o número de possibilidades de certo comprimento basta pegarmos o número de possibilidades ímpares e pares do comprimento anterior e fazer a seguinte conta:

Comprimento 15 = 233 pares / 144 ímpares

Comprimento 16 = $144 + 2 \cdot 233 = 610$

PI = Possibilidades ímpares

Fórmula = $PI + 2 \cdot PP$

PP = Possibilidades Pares

d) Existem ao todo 377 sequências de comprimento 15, sendo 233 pares e 144 ímpares. Quantas são as sequências de comprimento 16? Dessas, quantas são pares? Não se esqueça de justificar sua resposta.

Existem 610 sequências de comprimento 16, pois tomando como base os números das sequências de comprimento 15, podemos concluir que cada sequência ímpar de comprimento 15, gerará uma sequência par de comprimento 16, e cada sequência par de comprimento 15 gerará 1 sequência par e 1 sequência ímpar de comprimento 16, ou seja, teremos $233 + 144 = 377$ sequências pares e 233 sequências ímpares.

d) Existem ao todo 377 sequências de comprimento 15, sendo 233 pares e 144 ímpares. Quantas são as sequências de comprimento 16? Dessas, quantas são pares? Não se esqueça de justificar sua resposta.

$$466 + 144 = 610$$

$$233 \times 2 = 466$$

$$144 \times 1 = 144$$

multiplicamos os pares por 2 e os ímpares por 1 depois somamos os resultados

Fonte: arquivo da pesquisadora.

5.2.14 Análise da Atividade A19

Nas observações realizadas pela professora/pesquisadora durante o trabalho nos grupos, destacamos que os resultados obtidos nos itens **a** e **b** eram os mesmos, nos três níveis. Nesses itens, vimos que todos os alunos colocaram a flecha, notando que na atividade A1 desenvolvida a maioria não visualizou ou não deu importância para este símbolo.

No item **c** alguns alunos do N1 e N2 ficaram representando as sequências pares e as sequências ímpares de comprimento 6 e 7 durante um tempo considerável, escolhiam um número aleatoriamente e aplicavam a ordem de somar 1 quando o número era ímpar ou calcular metade quando era par, até chegar ao número 1. Logo, contavam quantos números tinham na sequência, apagavam aquelas que o comprimento era diferente de 6 e 7, ficando assim somente os números desejados, como visualizamos na figura 75. A estratégia utilizada por eles não permitiu determinar todas as sequências possíveis, mas, quando descobriam sozinhos mais um número da sequência, seus olhos brilhavam.

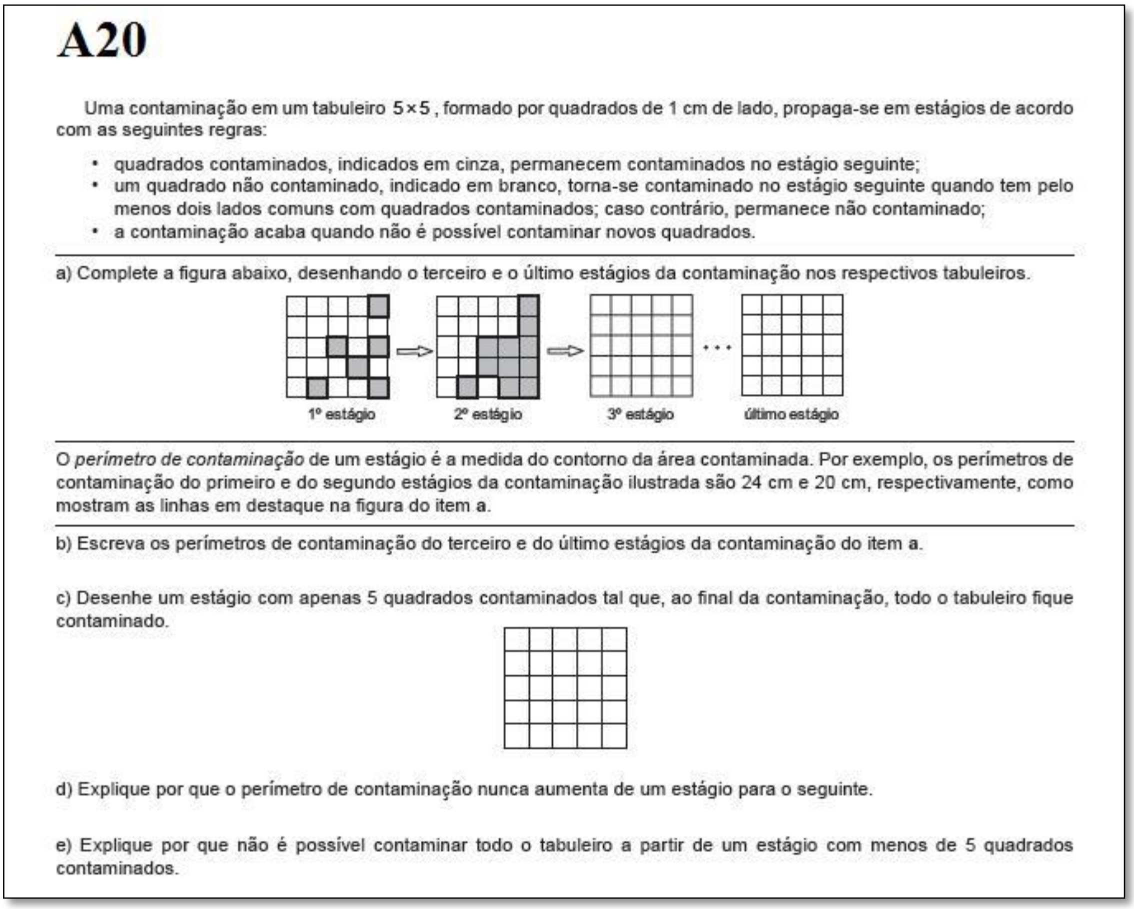
No mesmo instante, outros faziam o processo ao contrário, iniciavam do número 1 e abriam um leque de possibilidades, como exibimos na figura 76. Os alunos que raciocinaram desta forma não encontraram dificuldades para responder o item posterior. Todas as maneiras foram consideradas, inclusive o "pensar alto" ou a fala de como resolveu o problema. Além disso, depois das resoluções serem apresentadas na lousa os alunos definiram a solução mais adequada, ou seja, que contemplava todas as sequências. A figura 77 mostra as sequências socializadas, que após a análise nos grupos foi alterada o número de sequências pares e ímpares. Contaram novamente, chegando assim, a três sequências pares e duas ímpares de comprimento seis e cinco sequências pares e três ímpares de comprimento sete.

Os alunos do N1 e alguns do N2 custaram a compreender o item **d**, mesmo depois de analisadas e discutidas as respostas no grande grupo. No final aceitaram a resposta dos colegas do N3. Logo, nesse item um dos objetivos, que era fazer o aluno pensar e não apenas copiar dos colegas, não foi atingido em relação aos alunos do nível N1 e alguns do N2. No entanto, Polya (2006, p.) diz que: "Ao tentarmos resolver problemas, temos de observar e imitar o que fazem outras pessoas quando resolvem os seus e, por fim, aprendemos a resolver problemas, resolvendo-os.".

5.2.15 Atividade A20

Na figura 78 apresentamos a questão (*N1N2N3)* selecionada da OBMEP (2012) como vigésima atividade.

Figura 79 − Atividade 20



A20

Uma contaminação em um tabuleiro 5×5, formado por quadrados de 1 cm de lado, propaga-se em estágios de acordo com as seguintes regras:

- quadrados contaminados, indicados em cinza, permanecem contaminados no estágio seguinte;
- um quadrado não contaminado, indicado em branco, torna-se contaminado no estágio seguinte quando tem pelo menos dois lados comuns com quadrados contaminados; caso contrário, permanece não contaminado;
- a contaminação acaba quando não é possível contaminar novos quadrados.

a) Complete a figura abaixo, desenhando o terceiro e o último estágios da contaminação nos respectivos tabuleiros.

O *perímetro de contaminação* de um estágio é a medida do contorno da área contaminada. Por exemplo, os perímetros de contaminação do primeiro e do segundo estágios da contaminação ilustrada são 24 cm e 20 cm, respectivamente, como mostram as linhas em destaque na figura do item a.

b) Escreva os perímetros de contaminação do terceiro e do último estágios da contaminação do item a.

c) Desenhe um estágio com apenas 5 quadrados contaminados tal que, ao final da contaminação, todo o tabuleiro fique contaminado.

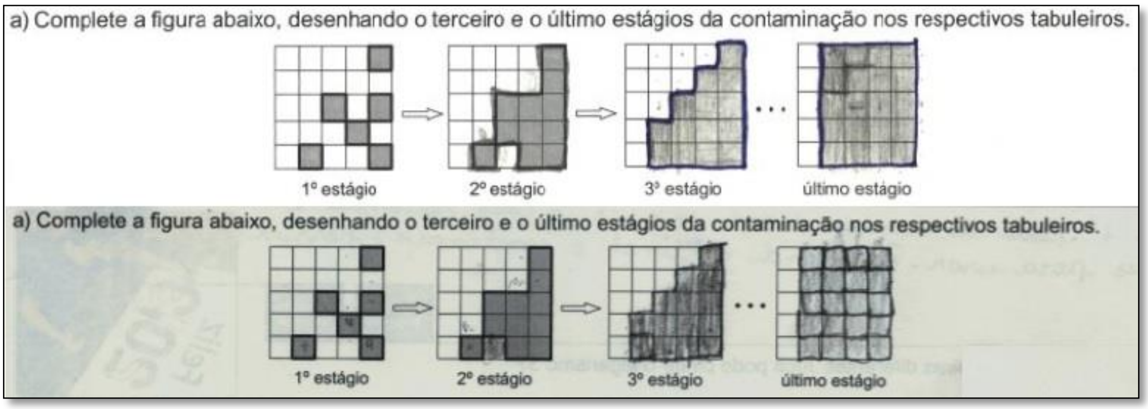
d) Explique por que o perímetro de contaminação nunca aumenta de um estágio para o seguinte.

e) Explique por que não é possível contaminar todo o tabuleiro a partir de um estágio com menos de 5 quadrados contaminados.

Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

No item **a,** os alunos não registraram a sequência de contaminação solicitada. Representaram, nas figuras dadas, os estágios de contaminação até chegar ao último estágio, sem especificar o terceiro estágio. A figura 80 mostra os registros.

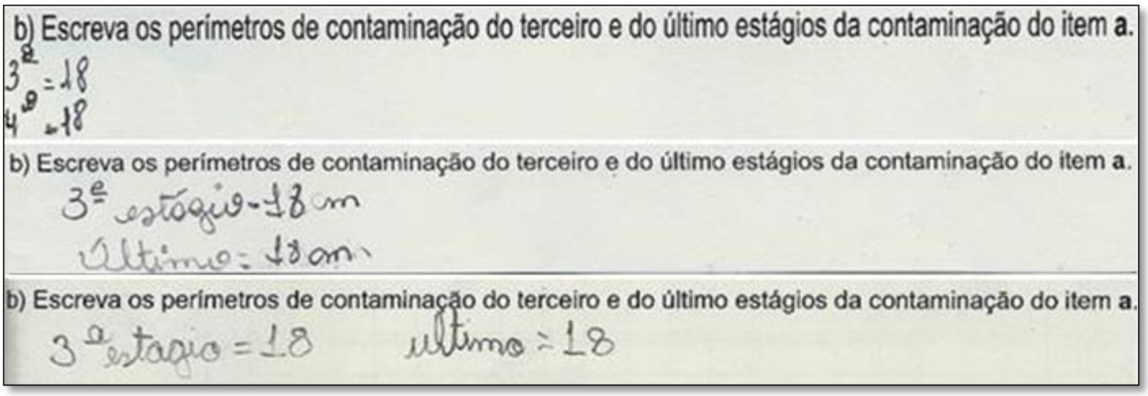
Figura 80− Registro da aluna N do N1G3 e da aluna M do N3G1.



Fonte: arquivo da pesquisadora.

A figura 81 apresenta o item **b**, na qual os alunos não indicam os quadrados contaminados em cada estágio subsequente, mas mostram os resultados dos perímetros no terceiro e último estágio de contaminação. Os alunos do N3 por não representarem os estágios de contaminação acabaram colocando o quarto estágio como último.

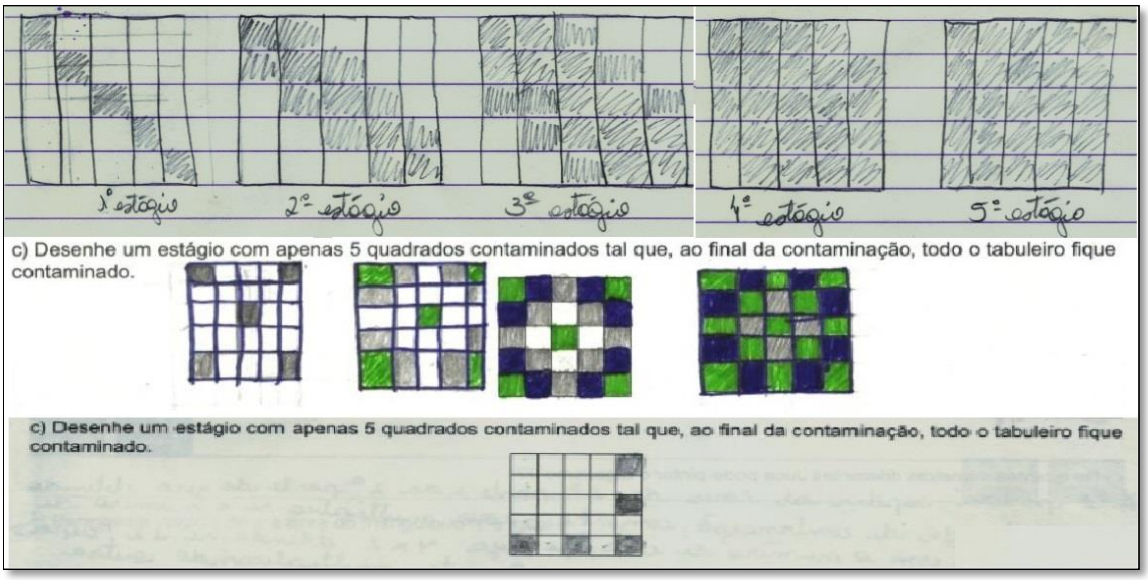
Figura 81− Registro do aluno G do N3G1, da aluna N do N1G3 e da aluna V do N2G3.



Fonte: arquivo da pesquisadora.

No item **c,** foram apresentadas várias configurações com 5 quadradinhos que levam à completa contaminação. A mais simples é a formada por 5 quadradinhos em uma diagonal, conforme mostra a figura 82.

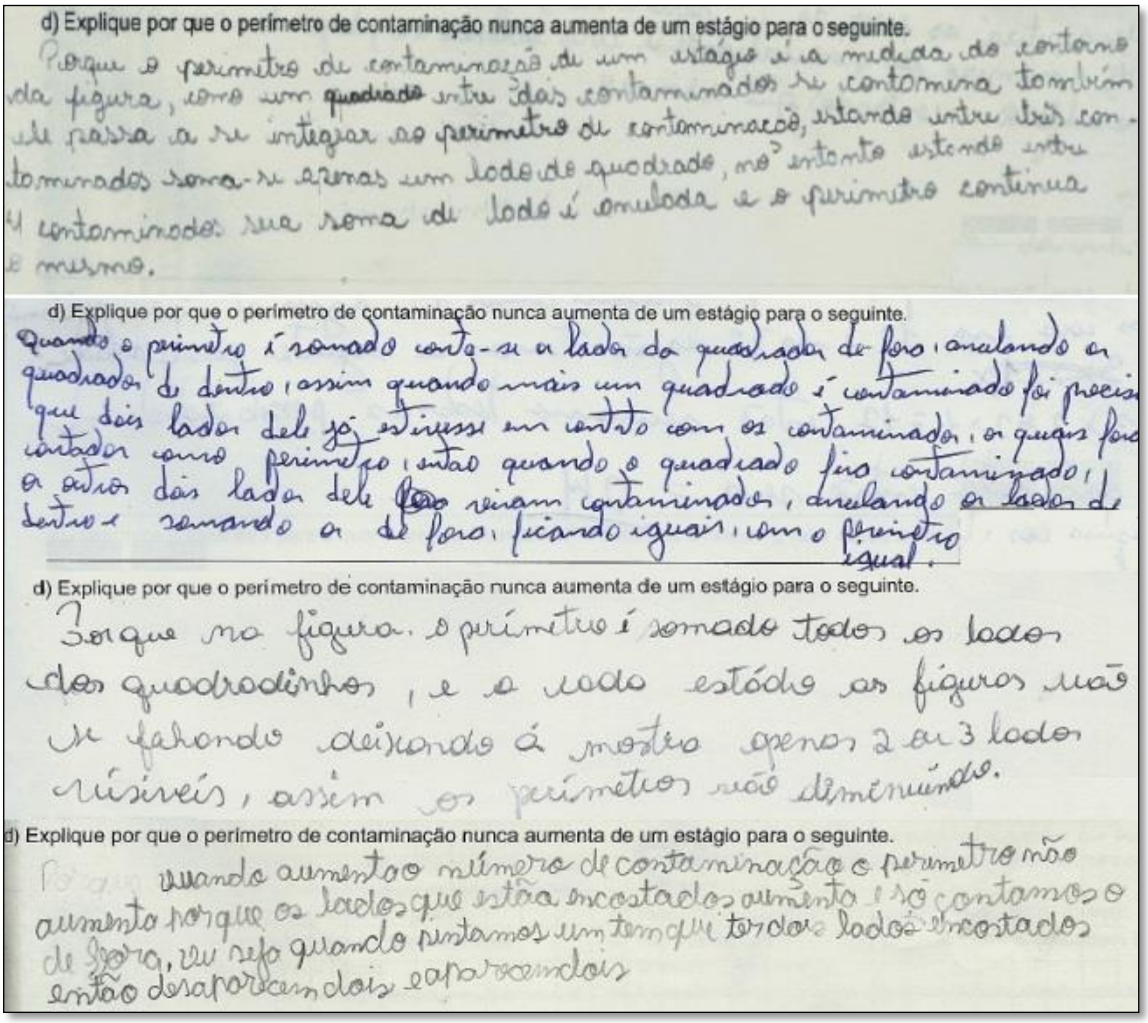
Figura 82− Registro da aluna V do N2G3, da aluna N do N1G3 e da aluna M do N3G1.



Fonte: arquivo da pesquisadora.

No item **d**, figura 83, apresentamos algumas estratégias em que a variação do perímetro de contaminação é igual à diferença entre o número de lados expostos e o número de lados em contato. Observamos nos comentários em sala de aula, que os alunos perceberam que o quadrado deve ter pelo menos dois lados em contato com outros quadrados para ser contaminado, que esta diferença é sempre menor ou igual a zero. Mas, não registraram nas soluções as falas.

Figura 83− Registro das alunas: M do N3G3, S do N3G1, Vdo N2G3 e N do N1G3.


d) Explique por que o perímetro de contaminação nunca aumenta de um estágio para o seguinte.

Porque o perímetro de contaminação de um estágio é a medida do contorno da figura, como um quadrado entre 2 dois contaminados se contamina também ele passa a se integrar ao perímetro de contaminação, estando entre três contaminados soma-se apenas um lado de quadrado, no entanto estende entre 4 contaminados sua soma de lado é anulada e o perímetro continua o mesmo.

d) Explique por que o perímetro de contaminação nunca aumenta de um estágio para o seguinte.

Quando o perímetro é somado conta-se os lados dos quadrados de fora, anulando os quadrados de dentro, assim quando mais um quadrado é contaminado foi preciso que dois lados dele já estivesse em contato com os contaminados, os quais foram contados como perímetro, então quando o quadrado foi contaminado, os outros dois lados dele viram contaminados, anulando os lados de dentro e somando os de fora, ficando iguais, com o perímetro igual.

d) Explique por que o perímetro de contaminação nunca aumenta de um estágio para o seguinte.

Porque na figura o perímetro é somado todos os lados dos quadradinhos, e o lado estando as figuras vão se fechando deixando á mostra apenas 2 ou 3 lados visíveis, assim os perímetros não diminuindo.

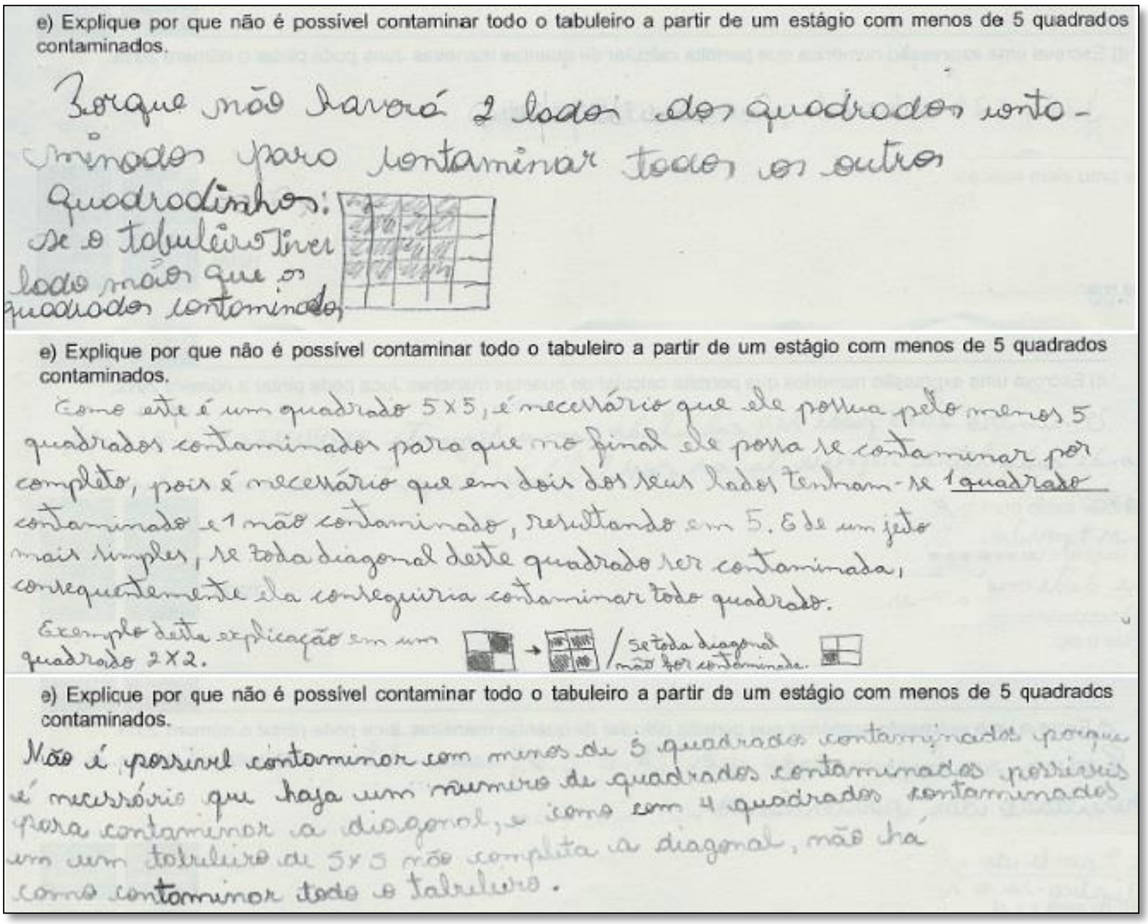
d) Explique por que o perímetro de contaminação nunca aumenta de um estágio para o seguinte.

quando aumenta o número de contaminação o perímetro não aumenta porque os lados que estão encostados aumenta e só contamos o de fora, eu vejo quando pintamos um tem que ter dois lados encostados então desaparecem dois e aparecem dois

Fonte: arquivo da pesquisadora.

No item **e**, figura 84, temos um perímetro de contaminação que não aumenta, para que esta contaminação seja capaz de contaminar todo o tabuleiro, é necessário que 4n seja no mínimo igual a 20, ou seja, n deve ser no mínimo igual a 5.

Figura 84− Registro da aluna V do N2G3, do aluno G do N3G1 e da aluna M do N3G1.



e) Explique por que não é possível contaminar todo o tabuleiro a partir de um estágio com menos de 5 quadrados contaminados.

Porque não haverá 2 lados dos quadrados conta-minados para contaminar todos os outros quadradinhos: se o tabuleiro tiver lado maior que os quadrados contaminados

e) Explique por que não é possível contaminar todo o tabuleiro a partir de um estágio com menos de 5 quadrados contaminados.

Como este é um quadrado 5x5, é necessário que ele possua pelo menos 5 quadrados contaminados para que no final ele possa se contaminar por completo, pois é necessário que em dois dos seus lados tenham-se 1 quadrado contaminado e 1 não contaminado, resultando em 5. E de um jeito mais simples, se toda diagonal deste quadrado ser contaminada, consequentemente ela conseguiria contaminar todo quadrado.

Exemplo desta explicação em um quadrado 2X2.

Se toda diagonal não for contaminada.

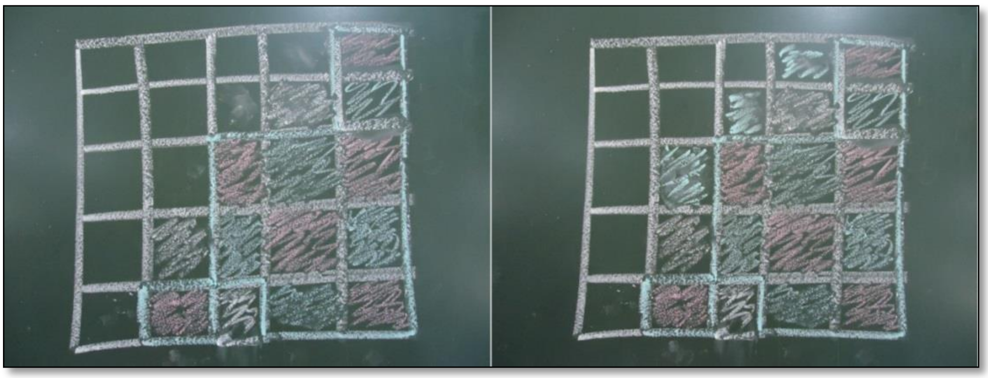
e) Explique por que não é possível contaminar todo o tabuleiro a partir de um estágio com menos de 5 quadrados contaminados.

Não é possível contaminar com menos de 5 quadrados contaminados porque é necessário que haja um número de quadrados contaminados possíveis para contaminar a diagonal, e como com 4 quadrados contaminados em um tabuleiro de 5x5 não completa a diagonal, não há como contaminar todo o tabuleiro.

Fonte: arquivo da pesquisadora

A figura abaixo mostra a imagem da lousa que ilustra as tentativas dos grupos para compreender o que acontece ao acrescentar um quadrado à contaminação. Foram várias representações até chegar a um resultado aprovado por todos os integrantes do grupo.

Figura 85− Registro, na lousa, da aluna N do N1G3.



Fonte: arquivo da pesquisadora.

Esta questão foi considerada difícil pelos grupos, que, levaram um tempo maior para resolvê-la.

5.2.16 Análise da Atividade A20

Nessa atividade observamos que após a leitura, a cada item, surgiam as trocas de ideias entre os participantes. Na busca da solução, alguns alunos retiraram uma folha do caderno para fazerem os registros a partir de seus modos de pensar. Comentavam suas representações oralmente, apresentavam para a professora/pesquisadora a forma escrita e depois as respostas obtidas foram registradas na lousa. No grupo G3, a visualização, com o uso de cores diferentes de giz na resolução contribuiu para a compreensão da situação-problema apresentada.

Em cada item, conforme vemos nas figuras acima, foram observadas resoluções distintas e a professora/pesquisadora, como mediadora, incentivou a troca de ideias entre os grupos e fez alguns questionamentos, como: “De que forma identificamos, no item **a,** os quadrados contaminados representados em cada estágio?”; “A situação do item **b**, indica os quadrados contaminados em cada estágio com os respectivos perímetros e a unidade de medida?”; “Observamos que muitos mostraram a contaminação completa exibindo cinco quadradinhos em uma diagonal. No item **c**, há existência de outras configurações?”; e “Nas respostas, nos itens **d** e **e**, diante das várias representações dadas pelos grupos, existe um padrão.”

Notamos que todos os alunos defendiam suas conjecturas e assim as diferentes resoluções registradas eram defendidas de acordo com o ponto de vista de quem apresentava. Quando tinham dúvidas, buscávamos esclarecê-las no grande grupo. Identificamos, assim, nas trocas de ideias e na apresentação na lousa, que na análise das respostas obtidas, alguns alunos, fizeram ajustes em suas respostas. Assim, de acordo com Onuchic e Allevato (1999), a plenária, com as representações na lousa destacando as diferentes estratégias utilizadas pelos alunos na busca da solução do problema, auxiliou para análise e para que os grupos de estudos chegassem a um consenso sobre a resposta correta.

Também evidenciamos nas observações um cenário para investigação, de acordo com Skovsmose (2000), pois, todos os itens dessa atividade geraram discussões nos grupos. Essas discussões proporcionaram um espaço para que cada aluno pensasse numa estratégia de solução e chegasse às discussões a construção de noções de lógica e aritmética. Diante dos conflitos, como consequência, o tempo utilizado para resolver esta questão foi maior.

5.2.17 Atividade A22

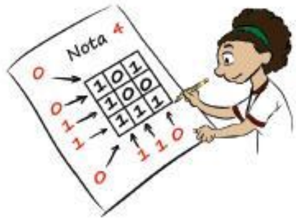
Na figura 86 apresentamos a questão (*N1N2N3)* selecionada da OBMEP (2013) como vigésima segunda atividade.

Figura 86– Atividade 22

A22

Helena brinca com tabuleiros 3×3, preenchidos com os algarismos 0 ou 1, da seguinte maneira:

- ela atribui o número 0 a cada linha, coluna ou diagonal cuja soma de seus algarismos seja par e o número 1 a cada linha, coluna ou diagonal para a qual essa soma seja ímpar;
- em seguida, ela calcula a *nota* do tabuleiro, que é a soma dos números que ela atribuiu.



Por exemplo, a nota do tabuleiro na ilustração é $0+0+1+1+0+1+1+0=4$.

a) Qual é a nota do tabuleiro abaixo?

0	0	1
1	1	1
0	0	0

b) Preencha os tabuleiros abaixo de quatro maneiras diferentes e de modo que todos tenham nota 8.

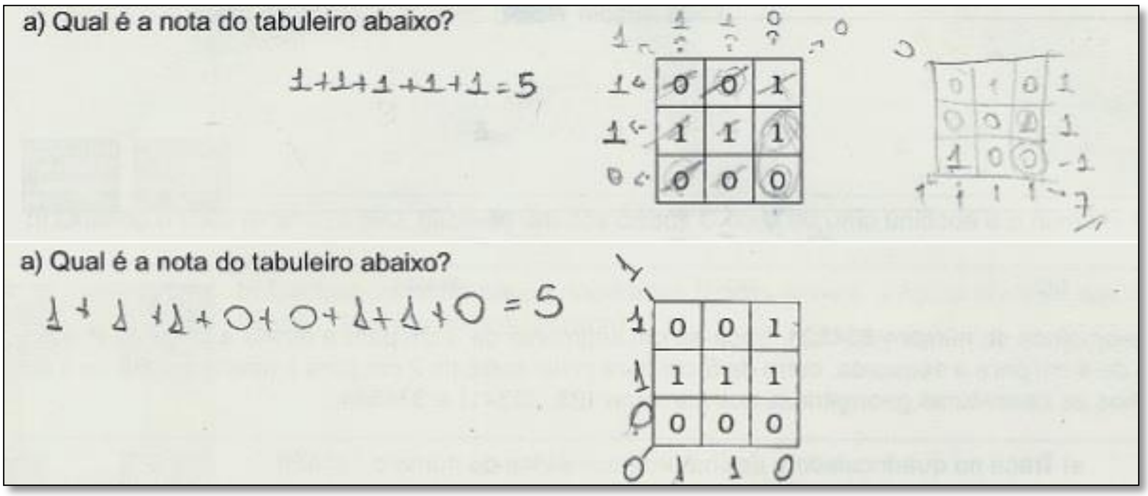
c) Explique por que, quando se troca o número de um dos cantos de um tabuleiro de nota ímpar, sua nota torna-se par.

d) De quantas maneiras diferentes um tabuleiro pode ser preenchido de modo que sua nota seja ímpar?

Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

No item **a**, temos que no tabuleiro dado aparecem somas ímpares na primeira e na segunda linhas, primeira e segunda colunas e na diagonal principal. Desse modo, a nota desse tabuleiro é 5, como mostra a figura 87.

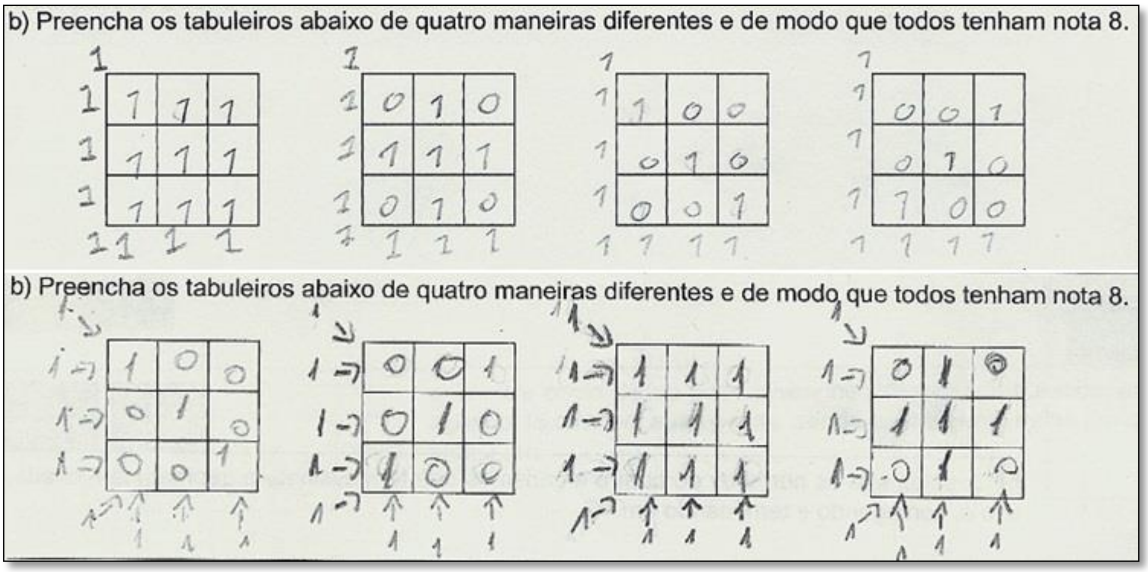
Figura 87– Registro do aluno S do N3G1 e da aluna V do N2G3.



Fonte: arquivo da pesquisadora

No item **b** abaixo temos os tabuleiros com nota 8, apresentados por alunos de níveis diferentes.

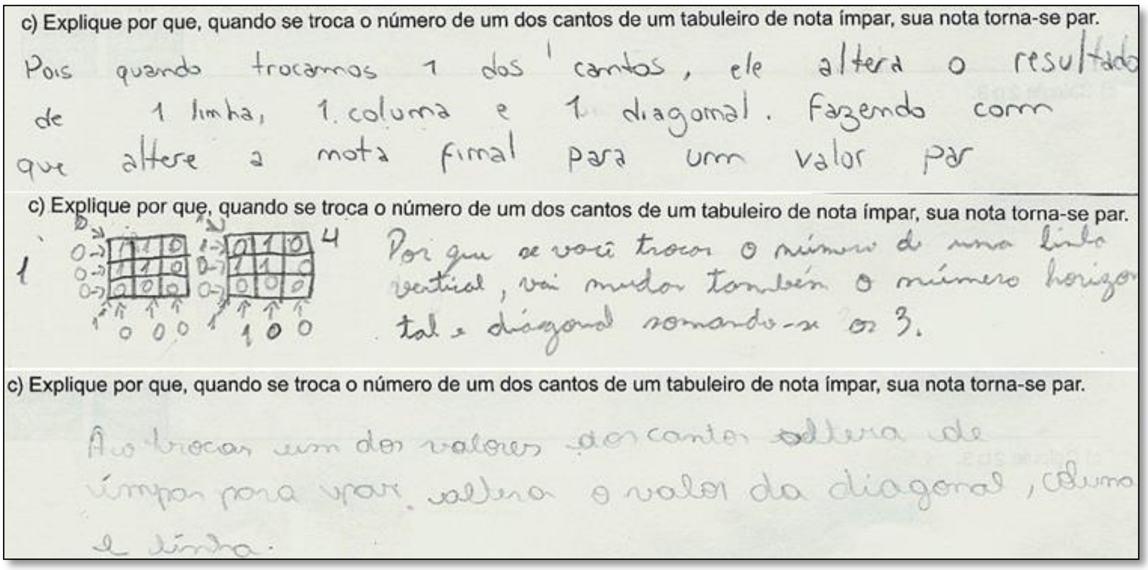
Figura 88– Registro do aluno S do N3G1 e da aluna C do N2G3.



Fonte: arquivo da pesquisadora

No item **c** em qualquer caso, vemos que se a nota original do tabuleiro é par (ou ímpar), ela se tornará ímpar (ou par), pois aumentará ou diminuirá de 1 ou 3. Conforme figura 89.

Figura 89 – Registro do aluno R do N3G1, da aluna C do N2G3 e do aluno S do N3G3.



c) Explique por que, quando se troca o número de um dos cantos de um tabuleiro de nota ímpar, sua nota torna-se par.

Pois quando trocamos 1 dos cantos, ele altera o resultado de 1 linha, 1 coluna e 1 diagonal. Fazendo com que altere a nota final para um valor par

c) Explique por que, quando se troca o número de um dos cantos de um tabuleiro de nota ímpar, sua nota torna-se par.

Por que se você trocar o número de uma linha vertical, vai mudar também o número horizontal e diagonal somando-se os 3.

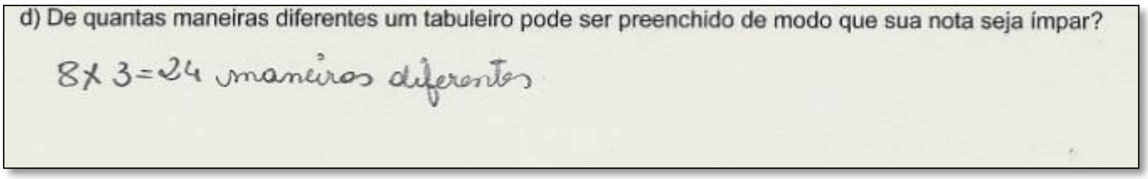
c) Explique por que, quando se troca o número de um dos cantos de um tabuleiro de nota ímpar, sua nota torna-se par.

Ao trocar um dos valores dos cantos altera de ímpar para par, altera o valor da diagonal, coluna e linha.

Fonte: arquivo da pesquisadora

Os alunos dos grupos G2 e G3 com as estratégias apresentadas não determinaram o número correto de maneiras diferentes de preencher os tabuleiros. A figura a seguir mostra a resposta obtida com maior frequência nesses grupos.

Figura 90 – Registro da aluna V do N2G3.



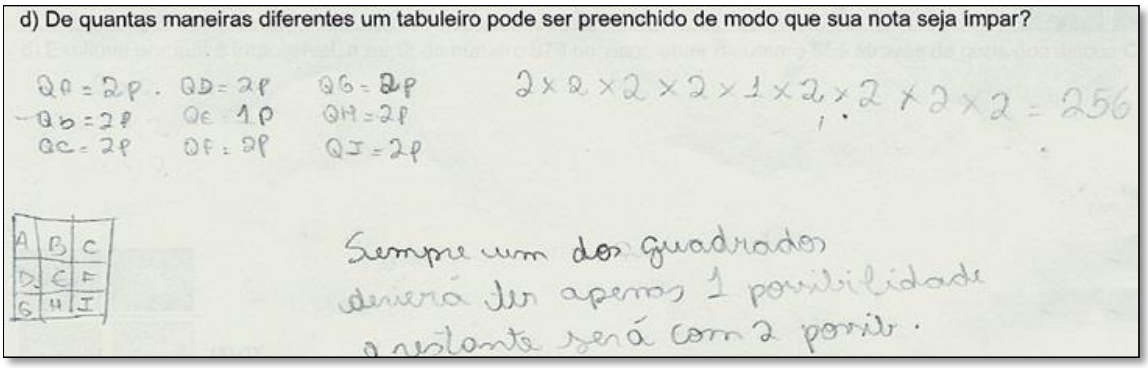
d) De quantas maneiras diferentes um tabuleiro pode ser preenchido de modo que sua nota seja ímpar?

8x3=24 maneiras diferentes

Fonte: arquivo da pesquisadora

No item **d**, para preencher todas as casas de um tabuleiro, exceto (por exemplo) a do canto superior direito, temos 258 maneiras diferentes. Mas, somente um dos pequenos grupos do N3 chegaram à resposta correta. A figura 91 mostra a estratégia utilizada pelo aluno S, apresentada na lousa para os colegas do G1, que possibilitou chegar à solução correta.

Figura 91– Registro do aluno S do N3G1.



Fonte: arquivo da pesquisadora

5.2.18 Análise da Atividade A22

Nessa pesquisa, a atividade A22 foi a última atividade desenvolvida pelos grupos de estudos. As figuras representam registros de estratégias apresentadas nas resoluções de cada item.

No item **a** e no item **b**, os dados fornecidos no tabuleiro e utilizados pelos alunos para a resolução da atividade proposta, de acordo com Skovsmose (2000), enquadram-se no "paradigma do exercício", pois estão centrados em uma única resposta, conforme mostramos na figura 87 e 88.

Após a leitura, os alunos não encontraram dificuldades no enunciado e iniciaram à busca da solução. Para obterem as quatro maneiras diferentes pedidas no item **b**, alguns alunos levaram um tempo maior, mas sabiam que estavam no caminho certo, na busca das formas diferentes de preencher os tabuleiros.

Nos itens **c** e **d**, os alunos foram instigados a se envolverem na busca de argumentação justificada. Nesse momento, para Skovsmose (2000), temos um cenário para a investigação. Porém, para que as investigações aconteçam é necessário que os alunos se mobilizem no processo de exploração e nas explicações, em direção as investigações matemáticas. No entanto, evidenciamos o contrário, o que foi um convite para uns alunos, para outros não.

Nessa atividade, os grupos G2 e G3 não chegaram a plenária. Como foi a última atividade, o tempo utilizado para a resolução não foi o suficiente para eles elaborarem uma estratégia, apresentarem para os demais colegas e realizarem as discussões entre grupos. Além disso, as estratégias não foram apresentadas na lousa. As discussões ocorreram de forma oral, pois poucos mostraram interesse para desenvolver algum tipo de estratégia na busca da solução dos itens **c** e **d.** Assim, com a resposta dos grupos errada e pouco interesse na busca da solução, não ocorreu a formalização. A atenção deles, naquele momento, estava voltada para a confraternização, programada para o final dos encontros.

No grupo G1, todos os itens foram discutidos e apresentados na lousa. Mas para o item **d**, como vemos na figura 91, somente o aluno S do N3G1 apresentou para os colegas na lousa a estratégia utilizada na busca da solução. Ele mostrava-se interessado e centrado na busca da resposta. Logo, não ocorreram discussões e os demais aceitaram as justificativas do colega. Nas observações constatamos que, segundo Skovsmose (2000), naquele momento os alunos tinham outras prioridades.

O último registro dos alunos foi um relato individual escrito no último encontro, que será tratado na próxima seção.

5.3 Reflexões dos participantes da pesquisa

No último encontro os alunos fizeram, de forma individual, o registro por escrito com reflexões sobre a experiência vivenciada. A seguir, apresentamos a transcrição de algumas reflexões consideradas significativas pela professora/pesquisadora, tais como: a formação dos grupos; a postura inicial dos participantes; dificuldades conceituais; as tarefas compartilhadas; a participação; e a questão do tempo.

A formação dos grupos

No primeiro encontro ficou definido que seriam formados três grupos de trabalho, sendo dois grupos de alunos da Escola Estadual Básica Professora Erica Marques (G1 e G2) e um grupo da Escola Estadual de Ensino Fundamental Guilherme Schmitt (G3).

Os grupos de trabalho em sala de aula seriam formados com três componentes. No início das atividades uniram-se por afinidade, ficando visível a divisão por turmas, quebrando a regra do trio. A maioria dos grupos era formado somente por meninos ou por meninas. Porém, na hora de resolver um problema, a formação dos grupos modificava-se novamente, com alguns integrantes buscando estratégias de ação nos grupos vizinhos.

Como mediadora, no processo de aprendizagem, as interferências foram realizadas, no momento em que as respostas não condiziam com as propriedades ou conceitos matemáticos e nas práticas compartilhadas na busca de estabelecer relações com um problema auxiliar que já tenha sido resolvido, ou mais simples. A reflexão feita pela aluna N do N3G1 chama a atenção para este fato: “... todos interagiam com seus respectivos grupos, perguntavam e conseguiam chegar a um resultado que agradava a professora. Ela nos questionava sobre os resultados, de como chegamos e se realmente estávamos certos. A professora nos fazia pensar até entender o porquê daquele resultado.”

Na reflexão acima a aluna diz que chegavam a um resultado que “agradava a professora”. A mesma refere-se às situações em que as respostas não eram justificadas por escrito, apenas de forma oral.

A postura inicial dos participantes

As primeiras questões escolhidas eram mais fáceis e, gradualmente, as dificuldades foram aumentando. A ideia era proporcionar aos alunos atividades que, por meio de indagações e sugestões, viessem provocar “uma luz” e entusiasmassem os estudantes. Mesmo encontrando dificuldades ou nos sucessos momentâneos, não desistissem e buscassem a solução do problema até o final.

No início, estavam preocupados em responder tudo rápido, não registravam os comentários, bem como as discussões realizadas nos pequenos grupos. Mas, com o registro na lousa, começaram as percepções de que as resoluções não eram apenas aplicações de algoritmos. Algumas resoluções que apresentavam textos, muitas vezes foram consideradas como corretas pela maioria. Assim, passaram a ter mais atenção em relação ao entendimento dos enunciados e respostas. A reflexão da aluna G do N3G1 retrata o que evidenciamos: “... a professora fez com que nós nos empenhássemos ao máximo, com que realmente nós entendêssemos o que estávamos fazendo, fez também que criássemos uma maior percepção sobre os problemas e exercícios.”

Dificuldades conceituais

Percebemos algumas lacunas na construção de conceitos matemáticos necessários às resoluções dos problemas propostos e estas influenciaram no ritmo dos grupos. Também, a cada atividade, os alunos que tinham dificuldades, ao invés de pensar numa estratégia de ação, pediam ajuda para a professora/pesquisadora. Diante de tal observação apresentamos a reflexão do aluno P do N3G1: “... podemos dizer que começamos mais lentos, mas logo depois de algumas aulas conseguimos nos adaptar e acompanhar o ritmo que a professora propôs, sendo que tudo foi feito sem a ajuda dela, apenas com a motivação de tal e em minha opinião valeu a pena."

Alguns participantes em certas situações necessitaram de material concreto e outros aguardavam pelos colegas. Verificamos também alunos com a capacidade de entrelaçar os grupos fazendo com que cada um, no seu tempo, chegasse as suas conclusões no momento adequado. É importante destacar que mesmo diante das dificuldades os alunos aprenderam que todos os problemas tinham solução. Cabe destacar a reflexão da aluna V do N2G3: "... essas aulas nos ensinaram mais do que apenas fazer simples contas, mas que não podemos desistir, mesmo sendo difícil sempre há solução."

As tarefas compartilhadas

A cada atividade os registros escritos, as expressões, sejam elas faciais, corporais ou orais, o material produzido e compartilhado nas interações nos grupos, evidenciaram a importância da linguagem no desenvolvimento da atenção, abstração e na capacidade de estabelecer diferenças e comparações diante das tarefas compartilhadas nos grupos de estudo. O registro do aluno C do N3G1 faz menção ao resultado dessa ação: "Ajudou-me bastante, pois adquiri um raciocínio mais rápido e desenvolvi uma análise das questões podendo observar e bolar uma maneira mais simples de resolver as questões."

As tarefas compartilhadas nos grupos, para Onuchic e Allevato (1999), com as representações na lousa explicam plenamente a situação estudada e, nas discussões, das diferentes estratégias apresentadas pelos colegas, com a plenária, o aluno, pode sanar suas dúvidas, defender seu ponto de vista e chegar a um consenso sobre a solução correta.

A participação e a questão do tempo.

O tempo utilizado para a pesquisa foi considerado curto, mas rico em material produzido pelos participantes aumentando assim as possibilidades de análise. A participação foi voluntária, mas ao querer, os alunos relizaram ações que contribuíram para o desenvolvimento das capacidades de observação, atenção, memória e pensamento.

A seguir, os registros dos alunos mostram os resultados positivos com relação à pesquisa. Aluna C do N2G3: "... essas aulas ajudaram muito a desenvolver o raciocínio e começar a pensar de outra forma. Realmente, as questões não eram fáceis, pois precisavam de muita calma e atenção.” Também destacamos o registro do aluno R do N3G1: “... as aulas complementares de Matemática foram muito produtivas e me auxiliaram para fazer a prova da 2ª fase da OBMEP de 2014.” Cabe salientar que o aluno R do N3G1 foi premiado com medalha de bronze.

6 Considerações Finais

A sequência pedagógica proposta neste trabalho visava verificar se as estratégias desenvolvidas pelos alunos para a resolução das questões das provas de segunda fase da OBMEP contribuem para a aprendizagem e para o desenvolvimento do raciocínio matemático.

Para a realização deste trabalho, selecionamos vinte e duas questões da OBMEP, que possibilitaram a obtenção de registros escritos de todos os participantes e, dentre estas, nove foram selecionadas pela pesquisadora para uma análise mais detalhada, destacando as questões discursivas, transversais e pseudotransversais, no período de 2005 a 2013.

As questões da OBMEP tratam dos diferentes modos de pensamentos que constituem a Matemática (algébrico, geométrico, aritmético e combinatório). Além disso, evidenciamos nas atividades desenvolvidas que, as mesmas, proporcionam uma educação matemática entre diferentes ambientes de aprendizagem.

Nas análises das atividades constatamos que, na maioria delas, o primeiro item foi considerado como sendo um exercício. Por outro lado, observamos que os itens subsequentes, gradualmente, foram sendo considerados como investigações matemáticas. De acordo com Skovsmose (2000), as questões selecionadas permitiram o deslocamento entre os Ambientes de Aprendizagem, do Exercício e para o Cenário de Investigação. Com essa transição de Ambientes os alunos foram instigados à discussão com troca de ideias nos grupos.

Durante as mediações, nos questionamentos, a professora atuou de forma colaborativa, contribuindo para o envolvimento dos alunos nos processos de exploração. Dessa maneira, os participantes da pesquisa passaram a atuar com mais responsabilidades nas aulas, formulando respostas com argumentação justificada. Assim, percebemos uma contribuição importante para o amadurecimento da linguagem matemática dos alunos.

De acordo com as educadoras Onuchic e Allevato (2009), a metodologia das Resoluções de Problemas propicia um trabalho cooperativo e colaborativo, favorecendo para a construção do conhecimento. Em nossa pesquisa, esse fato ficou evidente, uma vez que o trabalho foi desenvolvido com alunos de diferentes níveis de escolaridade em um mesmo ambiente.

No momento em que analisamos as estratégias dos participantes, foi consideramos o trabalho desenvolvido por Polya (2006), em especial, a importância que o autor atribui aos *problemas correlatos*. A cada pensamento que os educandos buscavam estabelecer relações no desenvolvimento das atividades (identificado por meio de representações escritas ou de forma oral), estes mostravam que, na medida em que lhes foram oferecidos problemas (que muitas vezes não conseguiam resolver sozinhos), eles estavam sendo instigados à mobilização e à organização de conhecimentos adquiridos anteriormente. Assim, as atividades propiciaram o desenvolvimento do raciocínio matemático. A partir das observações realizadas, foi possível perceber as dificuldades que alguns alunos enfrentavam na resolução de problemas. Ao mesmo tempo, estes participavam dos encontros, mostravam que eram capazes de resolver até mesmo as questões consideradas mais difíceis por muitos deles. Durantes as plenárias, nas interações nos grupos com troca de ideias e explanação na lousa, evidenciamos a contribuição da Resolução dos Problemas de forma muito clara.

Nas atividades desenvolvidas, observamos que, em muitas situações, a sequência com os nove passos proposta por Onuchic e Allevato (2009) foi alterada. Em geral, os passos não ocorreram, necessariamente, na mesma ordem apresentada pelas autoras. Como as questões da OBMEP não abrangem um único conteúdo, em algumas atividades foram utilizados o material concreto construído pelos alunos, que pelo manuseio possibilitou a compreensão e a resolução do problema (por exemplo, atividade A3 e a atividade A14). Nesses casos, observamos na iniciativa uma postura crítica em relação à informação que lhe foi fornecida e veiculada.

As resoluções apresentadas, em cada atividade foram, em geral, discutidas e socializadas na lousa, o que contribuiu para aprendizagem dos conteúdos envolvidos. Verificamos que a sequência didática selecionada propiciou, nos três níveis, para um mesmo problema, diferentes estratégias para a sua resolução. Na ação docente por meio da Resolução de Problemas, o professor tem a função de orientador e mediador, mas deve estar preparado, pois um Cenário para Investigação “convida” os participantes, alunos e professores, a formularem questões. Mas, os alunos são responsáveis pela busca de explicações e estratégias que levem à solução.

Desse modo, com o trabalho desenvolvido nos grupos e as produções em sala de aula, esses alunos tiveram a oportunidade de encarar as provas da segunda fase com um olhar na qual o aluno se sinta engajado ativamente e, no pensar e no agir matemático, possa criar desenvolver novas habilidades e construir competências no enfrentamento das situações novas.

Finalmente, destacamos a premiação do aluno R do grupo G1 que conquistou uma Medalha de Bronze na (OBMEP/2014). Este fato ocorreu pela primeira vez na Escola Estadual Básica Professora Erica Marques. Além do aluno R, outros quatro alunos que participaram da pesquisa receberam Menção Honrosa. O objetivo principal dos grupos de estudos, não era a conquista de medalhas, mas os registros escritos pelos participantes no último encontro evidenciaram que a participação na pesquisa contribuiu para as conquistas individuais dos participantes.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R**. Ensinando matemática na sala de aula através da resolução de problemas.** Boletim GEPEM, Rio de Janeiro, ano 33, n. 55, p. 133-156, jul./dez. 2009.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: MEC, 1998.

CORDEIRO, C C. **Análise e classificação de erros de questões de geometria plana da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas.** 171 f. Curso de Mestre em Ensino das Ciências na Educação Básica. Universidade do Grande Rio "prof. José de Souza Herdy", Duque de Caxias, 2009.

D'AMBROSIO, Ubiratan. Prefácio. In: BORBA, Marcelo de Carvalho; ARAÚJO, Jussara de Loiola (orgs). **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática.** 5ª edição. Belo Horizonte: Autêntica, 2013. p. 11-22.

DANTE, Luiz Roberto. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. 2ªedição. São Paulo: Ática, 1998.

DANTE, Luiz Roberto.**Formulação e resolução de problemas de matemática: teoria e prática.**São Paulo: Ática, 2010. 191 p.

ECHEVERRÍA, María del Pérez; POZO, Juan Ignacio. **Aprender a Resolver Problemas e Resolver Problemas para Aprender.** Disponível em: <http://boltz.ccne.ufsm.br/pub/mpeac/other/pozo_solucao_problemas_cap_01.pdf>. Acesso em: 16 jan. 2015.

FIORENTINI, D; LORENZATO, S. **Investigações em Educação Matemática.** Campinas: Autores associados, 2006.

GODOY, A. S. **Introdução à pesquisa qualitativa e suas possibilidades**. RAE-Revista de Administração de Empresas, São Paulo, v. 35, n. 2, p. 57-63, 1995.

LÜDKE, M. e ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas.** São Paulo: EPU, 1986.

MACIEL, M. V. **GEMaTh − A criação de um grupo de estudos segundo fundamentos de uma Educação Matemática Crítica:uma proposta de Educação Inclusiva.** 135 f. Curso de Mestre em Ensino de Matemática. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008.

MEDEIROS, Cleide Farias de. Por uma Educação matemática como intersubjetividade. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (org). **Educação Matemática.** São Paulo: Moraes, 1984. p. 13-44.

OBMEP - **OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS.** Disponível em http://www.obmep.org.br/apresentacao.html Acesso em 15 maio 2014.

ONUCHIC, Lourdes de La Rosa. Ensino-aprendizagem de Matemática na sala de aula através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, M. A. V. **Pesquisa em Educação Matemática.** São Paulo: Editora UNESP, 1999. Cap.12, p.199-220.

ONUCHIC, Lourdes de La Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. **Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas.** Bolema, Rio Claro (SP), v. 25, n. 41, p. 73-98, dez. 2011. Disponível em: <http://www.redalyc.org/pdf/2912/291223514005.pdf>. Acesso em: 05 ago. 2014.

PIRES, M.N.M., GOMES, M.T. **Trabalhando em sala de aula com Resolução de Problemas.** Anais do VII Encontro Nacional de Educação Matemática, Rio de Janeiro, 2001.

POLYA, G.**A arte de resolver problemas.** . Um novo aspecto do método matemático Rio de Janeiro: Interciência, 2006. Tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo.

SKOVSMOSE, Ole. **Cenários para investigação**. Bolema. No. 14, p. 66 – 91. Rio Claro: 2000.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

UM ESTUDO SOBRE AS ESTRATÉGIAS DE RESOLUÇÃO DE QUESTÕES DA OBMEP

PRODUTO DA DISSERTAÇÃO – SEQUÊNCIA DIDÁTICA

LUCIONE DE BITENCOURT MARTINS

PORTO ALEGRE

2015

ANEXO A – Produto da Dissertação

A sequência didática trata de atividades voltadas para a construção de um Ambiente de Aprendizagem em sala de aula, caracterizado por um Cenário para Investigação. Além disso, observamos os passos propostos (citados no texto da dissertação, p.25-27) pelas educadoras Onuchic e Allevato (2009), bem como as formas que os alunos interagem com os colegas e com a pesquisadora e, na reflexão, buscamos oferecer uma educação matemática crítica, em um Ambiente de Aprendizagem que abrange os diferentes modos de pensamentos (algébrico, geométrico, aritmético e combinatório).

Como produto dessa dissertação, reapresentamos as questões que foram selecionadas das provas da segunda fase da OBMEP, do período de 2005 a 2013, seguidas de comentários acerca das estratégias usadas pelos participantes dessa pesquisa. Esperamos que a mesma possa contribuir em outras situações de aprendizagem com alunos da Escola Básica.

Atividade 1

A1

Numa aula de Matemática, a professora inicia uma brincadeira, escrevendo no quadro-negro um número. Para continuar a brincadeira, os alunos devem escrever outro número, seguindo as regras abaixo:

(1) Se o número escrito só tiver <u>um</u> algarismo, ele deve ser multiplicado por 2.

(2) Se o número escrito tiver <u>mais de um</u> algarismo, os alunos podem escolher entre apagar o algarismo das unidades ou multiplicar esse número por 2.

Regras da Brincadeira	
Números com 1 algarismo	Números com mais de 1 algarismo
multiplicar por 2	*multiplicar por 2* OU *apagar o algarismo das unidades*

Depois que os alunos escrevem um novo número a brincadeira continua com este número, sempre com as mesmas regras.

Veja a seguir dois exemplos desta brincadeira, um começando com 203 e o outro com 4197:

$$203 \xrightarrow{\text{dobra}} 406 \xrightarrow{\text{apaga}} 40 \xrightarrow{\text{apaga}} 4\ldots$$

$$4197 \xrightarrow{\text{apaga}} 419 \xrightarrow{\text{dobra}} 838 \xrightarrow{\text{apaga}} 83\ldots$$

A) Comece a brincadeira com o número 45 e mostre uma maneira de prosseguir até chegar ao número 1.

B) Comece agora a brincadeira com o número 345 e mostre uma maneira de prosseguir até chegar ao número 1.

C) Explique como chegar ao número 1 começando a brincadeira com qualquer número natural diferente de zero.

Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

A atividade A1 gerou alguns questionamentos como: "um exemplo é suficiente como explicação para qualquer número natural?" Com um representante de cada grupo indo à lousa e apresentando as maneiras de chegar ao número 1, citando exemplos, a professora perguntou: "é necessário prosseguir ou saberiam explicar como chegar ao número 1 começando a brincadeira com qualquer número natural diferente de zero?" Dessa forma, os alunos se envolveram no processo de exploração e explicação. Logo, após as respostas serem representadas na lousa e discutidas, alguns alunos fizeram alguns ajustes nas suas respostas, como a flecha com indicação da ordem decrescente. Assim, cada aluno teve a oportunidade de pensar e criar sua estratégia e, juntos, chegaram à solução considerada correta por todos.

Atividade 2

A2

A caminhonete de Beremiz pode carregar até 2 000 quilos. Ele aceita um serviço para transportar uma carga de 150 sacas de açúcar de 60 quilos cada e 100 sacas de milho de 25 quilos cada.

A) Beremiz conseguirá fazer o serviço em cinco viagens? Por quê?
B) Descreva uma maneira de fazer o serviço em seis viagens.

Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

A atividade A2 não foi considerada como uma situação-problema, mas sim um exercício. Os alunos não encontraram dificuldades na resolução, foram identificando as operações ou algoritmos necessários para resolvê-la, assim, apenas reforçou conhecimentos anteriores.

Atividade 3

A3

A Princesa Telassim cortou uma folha de papel retangular em 9 quadrados de lados 1, 4, 7, 8, 9, 10, 14, 15 e 18 centímetros.

A) Qual era a área da folha antes de ser cortada?
B) Quais eram as medidas da folha antes de ser cortada?
C) A Princesa Telassim precisa montar a folha de novo. Ajude-a mostrando, com um desenho, como fazer esta montagem.

Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

Nas estratégias evidenciadas na atividade A3, temos: o uso de material concreto com a aplicação de problemas correlatos e o estudo de geometria sem aplicação de fórmulas ou regras, proporcionando um ambiente de investigação. Na troca de ideias, com a representação das diferentes resoluções na lousa, com a plenária, ocorreram as discussões e a análise das respostas pelos integrantes da pesquisa. A atividade também trata da semirrealidade em um cenário de investigação e, a cada item, gradualmente, percebemos que a situação foi aumentando a dificuldade, tornando-se um desafio para os participantes.

Atividade 4

A4

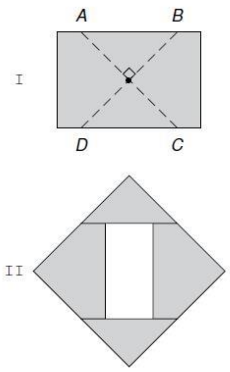
Uma folha retangular de 20 cm por 30 cm foi cortada ao longo das linhas tracejadas *AC* e *BD* em quatro pedaços: dois triângulos iguais e dois polígonos iguais de cinco lados cada um, como na figura I.

Os segmentos *AC* e *BD* têm o mesmo comprimento e se encontram no centro do retângulo formando ângulos retos.

(a) Qual é o comprimento do segmento *AB*?

(b) Qual é a área de um pedaço triangular? E de um pedaço de cinco lados?

(c) Com os quatro pedaços podemos montar um quadrado com um buraco retangular, como na figura II. Qual é a área do buraco?



Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

Na atividade A4 percebemos que o domínio do vocabulário geométrico se faz necessário para o entendimento da situação apresentada. Na primeira leitura vimos que nem todos dominavam a linguagem matemática. Logo, alguns questionamentos foram feitos. Pergunta: “o que é um polígono?” A professora: “o texto não esclarece o que é um polígono?” Resposta: “polígono é um triângulo?” A professora: “o texto apresenta somente triângulos como polígonos?” Resposta: “apresenta o triângulo, o retângulo e a figura de cinco lados”. Assim, mesmo desconhecendo as nomenclaturas, mas com o conhecimento do quadrado e do retângulo, o aluno do N1 foi aprendendo novos conceitos.

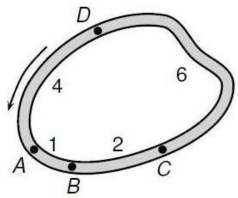
Com o diálogo a professora pode auxiliar o aluno esclarecendo suas dúvidas. Ainda como mediadora, levou o aluno a pensar em problemas correlatos envolvendo o pensamento geométrico.

Os alunos do N2 no primeiro momento começaram a aplicar fórmulas, mas com as explanações das estratégias na lousa, viram que o conhecimento da área do quadrado e do triângulo era suficiente para determinar a solução da situação proposta.

Atividade 5

A5

A figura representa o traçado de uma pista de corrida. Os postos *A*, *B*, *C* e *D* são usados para partidas e chegadas de todas as corridas. As distâncias entre postos vizinhos, em quilômetros, estão indicadas na figura e as corridas são realizadas no sentido indicado pela flecha.
Por exemplo, uma corrida de 17 km pode ser realizada com partida em *D* e chegada em *A*.



(a) Quais são os postos de partida e chegada de uma corrida de 14 quilômetros?

(b) E para uma corrida de 100 quilômetros, quais são esses postos?

(c) Mostre que é possível realizar corridas com extensão igual a qualquer número inteiro de quilômetros.

Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

Na atividade A5, observamos a aplicação do algoritmo da divisão, a soma de parcelas iguais e a presença do diálogo, entre professora e aluna, possibilitou para que ela se manifestasse, dando abertura para suas colocações. Assim, foi criado um cenário para investigação, com busca de esclarecimentos de algumas dúvidas, como o ponto de partida e de chegada. Também evidenciamos o pensamento aritmético e, na generalização, o pensamento algébrico.

A maioria dos alunos considerou o item **c** difícil e poucos conseguiram resolvê-lo sozinho. A troca de ideias entre os alunos possibilitaram no desenvolvimento da atividade a construção de uma tabela. Com a representação na lousa, nas reflexões sobre as estratégias apresentadas e discutidas, percebemos que a plenária contribuiu para a busca de um consenso e para que chegassem à formalização.

Atividade 6

A6

O quadrado da figura I é chamado *especial* porque

1. ele está dividido em 16 quadrados iguais;
2. em cada linha e em cada coluna aparecem os algarismos 1, 2, 3 e 4;
3. em cada um dos quadrados *A*, *B*, *C* e *D* (como na figura II) aparecem os algarismos 1, 2, 3 e 4.

4	2	1	3
1	3	2	4
3	1	4	2
2	4	3	1

I

A	*B*
C	*D*

II

(a) Complete o quadrado abaixo de modo que ele se torne especial.

	2		
3	4		
		1	
			2

(b) É possível completar o quadrado abaixo de modo a obter um quadrado especial? Por quê?

1	2		
3	4		
			2
			1

(c) Exiba todas as maneiras de completar o quadrado abaixo de modo a obter um quadrado especial.

1	2		
3	4		
			1

(d) Quantos quadrados especiais existem?

Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

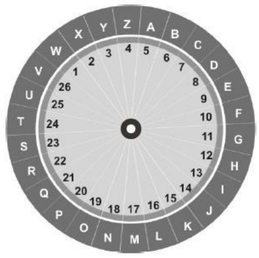
A atividade A6 gerou muitas discussões, principalmente entre os alunos do nível três, em especial, por admitir respostas diferentes. A apresentação na lousa possibilitou aos participantes da pesquisa fazerem a defesa do seu raciocínio, mas nas discussões não entraram num consenso. Como as estratégias utilizadas não foram adequadas para aquela situação às respostas divergiam. As mediações, por meio de questionamentos, sobre as resoluções apresentadas favoreceram nas investigações na busca de um padrão para chegar à generalização.

Com as observações das respostas dadas pelos grupos, perceberam que para obter o número de quadrados especiais é necessário multiplicar as possibilidades, chegando, assim, ao total de quadrados especiais.

Atividade 7

A7

Um antigo método para codificar palavras consiste em escolher um número de 1 a 26, chamado *chave* do código, e girar o disco interno do aparelho ilustrado na figura até que essa chave corresponda à letra A. Depois disso, as letras da palavra são substituídas pelos números correspondentes, separados por tracinhos. Por exemplo, na figura ao lado a chave é 5 e a palavra *PAI* é codificada como 20-5-13.



(a) Usando a chave indicada na figura, descubra qual palavra foi codificada como 23-25-7-25-22-13.

(b) Codifique *OBMEP* usando a chave 20.

(c) Chicó codificou uma palavra de 4 letras com a chave 20, mas esqueceu-se de colocar os tracinhos e escreveu 2620138. Ajude o Chicó colocando os tracinhos que ele esqueceu e depois escreva a palavra que ele codificou.

(d) Em uma outra chave, a soma dos números que representam as letras *A*, *B* e *C* é 52. Qual é essa chave?

Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

A atividade A7 mostra a chave indicada, mas em algumas soluções apresentadas evidenciamos que não passaram da chave cinco para a chave vinte. Muitos alunos custaram a entender que ao passar da chave 5 para a chave 20 deveriam somar 15 aos números do enunciado, lembrando que quando a soma fosse superior a 26 deveriam subtrair 26. Assim, a estratégia utilizada por vários alunos não era a correta.

Com a representação na lousa, por um colega, os demais participantes da pesquisa, que até o momento não tinham compreendido, conseguiram entender e chegaram à resposta correta. No grupo G3 muitos alunos apresentaram o mesmo erro. Não mudavam de chave. Mas uma menina que compareceu apenas em dois encontros foi rápida na resolução. Pedimos para não dizer de imediato o caminho que ela utilizou, dando oportunidade para os colegas pensarem em uma estratégia para que os levasse à solução.

No item **d** alguns alunos precisaram de ajuda, pois foram muitas as tentativas e, estavam prestes a desistir. Mas, com a troca de ideias em cada grupo, todos conseguiram chegar à resposta correta. Observamos que alguns alunos obtiveram a soma dos números que representam as letras A, B e C igual a 52, mas não determinaram a chave.

Atividade 8

A8

Os times *A*, *B*, *C*, *D* e *E* disputaram, entre si, um torneio de futebol com as seguintes regras:

- o vencedor de uma partida ganha 3 pontos e o perdedor não ganha nada;
- em caso de empate cada um dos times ganha 1 ponto;
- cada time joga exatamente uma vez com cada um dos outros.

O campeão do torneio foi o time *A*, seguido na classificação por *B*, *C*, *D* e *E*, nessa ordem. Além disso

- o time *A* não empatou nenhuma partida;
- o time *B* não perdeu nenhuma partida;
- todos os times terminaram o torneio com números diferentes de pontos.

(a) O time *A* ganhou, perdeu ou empatou sua partida contra o time *B*? Por quê?

(b) Com quantos pontos o time *A* terminou o torneio? Por quê?

(c) Explique porque o time *B* obteve um número par de pontos nesse torneio.

(d) Na tabela, cada coluna representa uma partida. Sabendo que ocorreram exatamente 5 empates nesse torneio, desenhe, em cada coluna da tabela, um círculo em volta do nome do time ganhador ou em volta do ×, em caso de empate.

A	*A*	*A*	*A*	*B*	*B*	*B*	*C*	*C*	*D*
×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
B	*C*	*D*	*E*	*C*	*D*	*E*	*D*	*E*	*E*

Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

Na atividade A8, por tratar-se de um torneio de futebol, caracterizamos de acordo com Skovsmose (2000), a situação abordada, por meio da Matemática, como um Ambiente de Aprendizagem com referência à realidade.

Inicialmente, a atividade foi considerada uma brincadeira e depois com as regras estabelecidas pelo problema foram surgindo dificuldades para a resolução. As diversas tentativas e o envolvimento dos alunos na atividade mostraram que eles sentiram-se desafiados e interessados em resolvê-la, propondo uma investigação. Pois, instiga os alunos a pensarem em uma estratégia na busca da solução.

Nas discussões nos grupos, e por meio de reflexões na ação, diversas tabelas foram construídas, com os mesmos resultados, mas colocadas de formas diferentes. Os registros na lousa possibilitaram, no grande grupo, discussões e reflexões sobre cada solução compartilhada, que favoreceram a compreensão de novos conceitos e conteúdos matemáticos. Percebemos ainda que, por meio de problemas, os alunos não ficam presos a uma única estratégia.

Atividade 9

A9

Fernando e Isaura inventaram um jogo diferente, cujas regras são as seguintes:

1. eles começam uma partida com 128 palitos cada um;
2. em cada jogada, eles tiram par ou ímpar; se sai par, Fernando dá metade dos palitos que tem para Isaura e, se sai ímpar, Isaura dá a metade dos palitos que tem para Fernando.
3. eles repetem o procedimento da regra 2 até que um deles fique com um número ímpar de palitos, quando a partida acaba. Ganha quem ficar com maior número de palitos.

Veja o que acontece em uma partida onde a seqüência das três primeiras jogadas é **par**, **ímpar**, **par**:

Fernando	Isaura	par → 1ª jogada	Fernando	Isaura	ímpar → 2ª jogada	Fernando	Isaura	par → 3ª jogada	Fernando	Isaura	...
128	128		64	192		160	96		80	176	

(a) Complete o esquema com o número de palitos de Fernando e Isaura, de acordo com as jogadas indicadas.

(b) Uma partida acabou quando Fernando ficou com 101 palitos. Na última jogada saiu par ou ímpar?

(c) Qual foi a seqüência de pares e ímpares da partida que acabou quando Fernando ficou com 101 palitos?

(d) Mostre que qualquer partida acaba com exatamente sete jogadas.

(a)

Fernando	Isaura	ímpar → 1ª jogada	Fernando	Isaura	ímpar → 2ª jogada	Fernando	Isaura	par → 3ª jogada	Fernando	Isaura	...
128	128										

Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

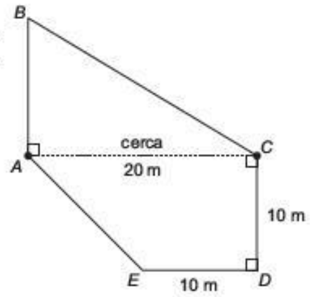
A atividade A9 consta no nível 2 e no nível 3, mas foi desenvolvida somente pelos alunos do nível 3. A aluna G criou uma tabela e o aluno S descreveu a sequência de jogadas se foi par ou ímpar.

O item **d** foi resolvido no encontro seguinte com registro da solução de um aluno na lousa, a qual mostrou que qualquer partida terminará exatamente com sete jogadas.

Atividade 10

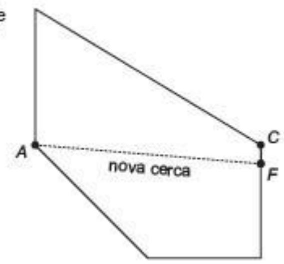
A10

A figura ao lado representa o terreno de Sinhá Vitória. Esse terreno é dividido em duas partes por uma cerca, representada pelo segmento *AC*. A parte triangular *ABC* tem área igual a 120 m².



a) Qual é a área total do terreno?

(b) Sinhá Vitória quer fazer uma nova cerca, representada pelo segmento *AF* na figura, de modo a dividir o terreno em duas partes de mesma área. Qual deve ser a distância *CF*?

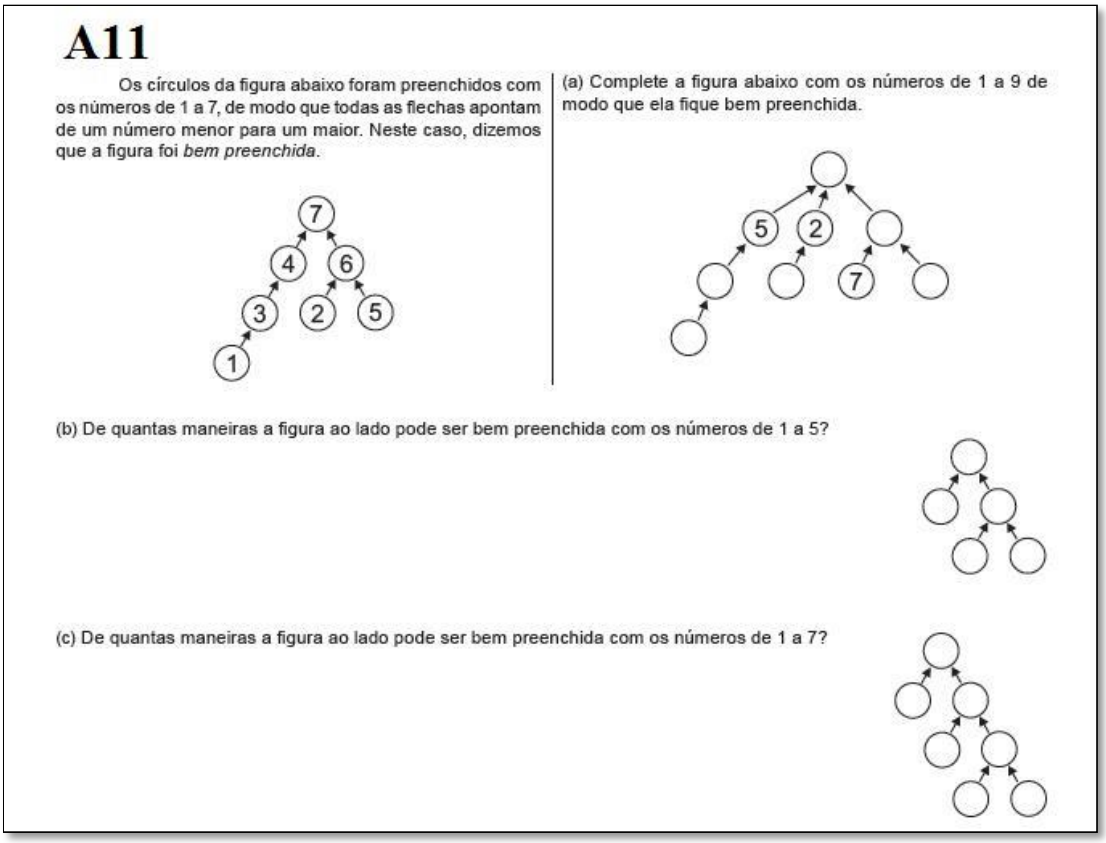


Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

A atividade A10 provocou alguns questionamentos, tais como: "qual é a fórmula para calcular a área do trapézio?" Neste instante os alunos do nível 1 questionaram: "O que é um trapézio?" Os colegas mostraram na lousa que o terreno era formado por um triângulo e um trapézio. Sugerimos ao grupo que pensassem em um problema correlato e começaram a surgir diferentes formas de resoluções. Observamos que no item **a** os alunos não utilizaram a fórmula do cálculo de áreas de um trapézio, mas os cálculos básicos da área do quadrado e do retângulo. A maioria dos alunos do nível 1 não colocou a unidade de medida na resposta final. No item **c** percebemos que os alunos do N2 apresentaram o **x** como o termo desconhecido, estabelecendo relações com conteúdos aprendidos anteriormente e desenvolvendo o pensamento algébrico.

Os alunos do N1 usaram ferramentas mais simples, chegando aos mesmos resultados. Eles resolveram por meio de tentativas, por aproximações e as com o uso das quatro operações fundamentais. Durante a plenária os alunos do N1 aprenderam novos conceitos e os alunos do N2 perceberam que existiam formas mais simples para chegarem à solução.

Atividade 11



A11

Os círculos da figura abaixo foram preenchidos com os números de 1 a 7, de modo que todas as flechas apontam de um número menor para um maior. Neste caso, dizemos que a figura foi *bem preenchida*.

(a) Complete a figura abaixo com os números de 1 a 9 de modo que ela fique bem preenchida.

(b) De quantas maneiras a figura ao lado pode ser bem preenchida com os números de 1 a 5?

(c) De quantas maneiras a figura ao lado pode ser bem preenchida com os números de 1 a 7?

Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

A atividade A11 trabalha o desenvolvimento do pensamento combinatório a partir do Princípio Multiplicativo, um dos fundamentos da contagem.

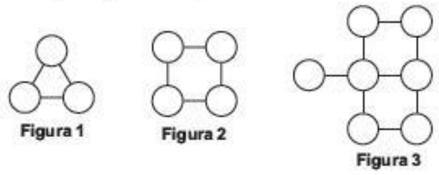
O item **a**, abrange a ideia de resposta única e exata, o que caracteriza um Ambiente de Aprendizagem enquadrado no paradigma do exercício. Os ambientes correspondentes aos demais itens dessa questão, possibilitam a discussão e o questionamento, classificados como Cenários para a Investigação.

Como as respostas divergiam foi solicitado que um representante de cada grupo colocasse na lousa sua resolução, com as discussões nos grupos, foram encontrados padrões, que contribuíram para que juntos chegassem a um consenso na elaboração de uma resposta correta. Na Resolução de Problemas, essa etapa é importante, conforme Onuchic e Allevato, para a formalização de conteúdos, por parte dos alunos.

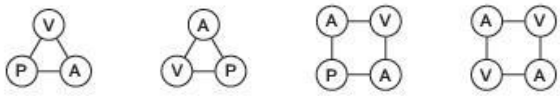
Atividade 12

A12

Ana quer colorir as bolinhas das figuras 1, 2 e 3 de azul (A), preto (P) ou vermelho (V) de modo que **bolinhas ligadas por um segmento tenham cores diferentes.**



Veja a seguir duas maneiras diferentes de colorir a figura 1 e duas maneiras diferentes de colorir a figura 2:



(a) De quantas maneiras diferentes Ana pode colorir a figura 1?

(b) De quantas maneiras diferentes Ana pode colorir a figura 2?

(c) De quantas maneiras diferentes Ana pode colorir a figura 3?

Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

Na atividade A12, após a leitura foi necessário o manuseio de material concreto. Usamos três lápis de cores diferentes e, por meio de questionamentos, os alunos chegaram ao entendimento da questão. Como exemplo desses questionamentos, seguem duas perguntas feitas pela professora/pesquisadora: “quantos lápis tenho na minha mão?” e “pintei uma bolinha e agora quantos lápis sobraram para pintar as bolinhas ligadas por um segmento com cores diferentes?” Assim, a partir do entendimento propiciado por algumas perguntas, os alunos iniciaram a investigação.

No item **b** as respostas nos grupos eram 12 ou 18. Então perguntamos se alguém estava interessado em mostrar na lousa para os demais as diferentes maneiras de colorir a figura 2. Cada representante justificou a sua resposta e os grupos que tinham encontrado 12 perceberam, pelas respostas dos colegas, que a solução correta era 18 maneiras.

No item **c** alguns alunos tiraram uma folha de caderno e, por tentativas, buscavam chegar ao número de maneiras diferentes para colorir a figura 3. Outros tentavam pelo Princípio Multiplicativo e foram encontradas várias respostas. As mesmas foram representadas, na lousa, por um integrante de cada grupo, discutidas e analisadas por todos. Nas estratégias utilizadas nesta questão, alguns grupos não consideraram o item anterior chegando ao resultado que não contemplava todas as maneiras diferentes. Os alunos que consideraram o item anterior, ao apresentarem na lousa os passos percorridos em cada item, evidenciaram que 108 era a solução que contemplava as diferentes maneiras para colorir a figura 3. Assim, todos os participantes chegaram ao consenso e à formalização do correspondente conteúdo.

Atividade 13

A13

Um número inteiro n é *simpático* quando existem inteiros positivos a, b e c tais que $a < b < c$ e $n = a^2 + b^2 - c^2$. Por exemplo, os números 1 e 2 são simpáticos, pois $1 = 4^2 + 7^2 - 8^2$ e $2 = 5^2 + 11^2 - 12^2$.

(a) Verifique que $(3x+1)^2 + (4x+2)^2 - (5x+2)^2$ é igual a $2x+1$, qualquer que seja x.

(b) Encontre números inteiros m e n tais que $(3x-m)^2 + (4x-n)^2 - (5x-5)^2 = 2x$, qualquer que seja x.

(c) Mostre que o número 4 é simpático.

(d) Mostre que todos os números inteiros positivos são simpáticos.

Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

A atividade A13 é pseudotransversal, mas foi desenvolvida apenas pelos alunos do nível três. A atividade não despertou o interesse dos mesmos que acabaram não respondendo o item **d.** Como não surgiram procedimentos diferentes as soluções para os primeiros itens foram representados na lousa. Não houve discussões, mas surgiram alguns comentários de que todos os números são simpáticos, talvez uma consequência do enunciado do item **d**.

Atividade 14

A14

No jogo do *Troca-Cor* usa-se um tabuleiro com duas linhas e com quantas colunas quisermos, cujas casas podem mudar da cor branca para cinza e vice-versa. As casas da 1ª linha são numeradas com os números ímpares e as da 2ª linha com os números pares. Em cada jogada aperta-se uma casa e, então, essa casa e as casas vizinhas mudam de cor. Uma *partida completa* começa com todas as casas brancas e termina quando todas ficam cinzas. Veja dois exemplos de partidas completas (os números acima das flechas indicam a casa apertada em cada jogada):

> *Casas vizinhas são casas que têm um lado comum.*

Tabuleiro	Partida completa	Jogadas
2×3	$\begin{smallmatrix}1&3&5\\2&4&6\end{smallmatrix} \xrightarrow{1} \begin{smallmatrix}1&3&5\\2&4&6\end{smallmatrix} \xrightarrow{6} \begin{smallmatrix}1&3&5\\2&4&6\end{smallmatrix}$	1 e 6
2×2	$\begin{smallmatrix}1&3\\2&4\end{smallmatrix} \xrightarrow{1} \begin{smallmatrix}1&3\\2&4\end{smallmatrix} \xrightarrow{2} \begin{smallmatrix}1&3\\2&4\end{smallmatrix} \xrightarrow{4} \begin{smallmatrix}1&3\\2&4\end{smallmatrix} \xrightarrow{3} \begin{smallmatrix}1&3\\2&4\end{smallmatrix}$	1, 2, 4 e 3

Tabuleiro	Jogadas
$\begin{smallmatrix}1&3&5&7&9\\2&4&6&8&10\end{smallmatrix}$	
$\begin{smallmatrix}1&3&5&7\\2&4&6&8\end{smallmatrix}$	

(a) Escreva as jogadas de uma partida completa nos tabuleiros ao lado.

(b) Explique como jogar uma partida completa no tabuleiro 2×100.

(c) Explique como jogar uma partida completa com exatamente 51 jogadas no tabuleiro 2×101.

(d) Explique porque não é possível jogar uma partida completa com menos que 51 jogadas no tabuleiro 2×101.

Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

Na atividade A14, no item **a,** a leitura individual no N1 não foi suficiente para o entendimento da questão, sendo necessária a leitura em conjunto. Alguns alunos precisaram tirar uma folha do caderno para fazer os registros e somente depois de várias tentativas conseguiram solucioná-lo.

Nas representações de um tabuleiro 2x100 para os alunos do G2 foi necessário levá-los a percepção de que uma partida completa não cessava em cem. Sugerimos para um dos alunos fazer a representação na lousa de um tabuleiro 2x3, 2x4,... Em seguida perceberam que deveriam prosseguir para determinar o tabuleiro 2x100. Somente depois das representações na lousa perceberam que não era possível acabar o jogo com menos de 51 jogadas. Nesse grupo a professora/pesquisadora utilizou o “erro” na busca do consenso e ao resultado correto.

O uso de material concreto como estratégia de solução, propiciou com a manipulação autônoma à busca da solução, com a introdução de símbolos que facilitaram a visualização das representações no imaginário, ou seja, começaram as abstrações.

Atividade 15

A15

Um "matemágico" faz mágicas com cartões verdes, amarelos, azuis e vermelhos, numerados de 1 a 13 para cada cor. Ele mistura os cartões e diz para uma criança: "Sem que eu veja, escolha um cartão, calcule o dobro do número desse cartão, some 3 e multiplique o resultado por 5. Depois

- some 1, se o cartão for verde;
- some 2, se o cartão for amarelo;
- some 3, se o cartão for azul;
- some 4, se o cartão for vermelho.

Diga-me o resultado final e eu lhe direi a cor e o número do cartão que você escolheu."

a) Joãozinho escolheu o cartão vermelho com o número 3. Qual é o número que ele deve dizer ao matemágico?

b) Mariazinha disse "Setenta e seis" para o matemágico. Qual é o número e a cor do cartão que ela escolheu?

c) Após escolher um cartão, Pedrinho disse "Sessenta e um" e o matemágico respondeu "Você errou alguma conta". Explique como o matemágico pôde saber isso.

Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

A atividade A15 foi desenvolvida apenas com o grupo G3. Os alunos não encontraram dificuldades para resolver esta questão. As respostas eram semelhantes. Os alunos resolveram a partir de tentativas, fazendo as operações e chegando aos valores numéricos. Não surgiu nenhum cálculo algébrico nas resoluções apresentadas.

Atividade 16

A16

Gabriel desenha quadrados divididos em nove casas e escreve os números naturais de 1 a 9, um em cada casa. Em seguida, ele calcula a soma dos números de cada linha e de cada coluna. A figura mostra um dos quadrados do Gabriel; observe que a soma dos números da terceira linha é $5+8+2=15$ e a soma dos números da segunda coluna é $9+7+8=24$. Nesse exemplo, as seis somas são 6, 12, 15, 15, 18 e 24.

6	9	3	18
4	7	1	12
5	8	2	15
15	24	6	

a) Gabriel preencheu um quadrado e fez apenas cinco somas: 9, 13, 14, 17 e 18. Qual é a soma que está faltando?

b) Explique por que não é possível que, em um quadrado do Gabriel, todas as somas sejam números pares.

c) Preencha o quadrado de modo que as somas sejam 7, 13, 14, 16, 18 e 22.

Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

A atividade A16 envolve o pensamento aritmético, mas especificamente operações com números naturais, utilizando o lúdico na busca do desenvolvimento do raciocínio lógico.

Essa atividade, de acordo com Skovsmose, caracteriza um ambiente de aprendizagem com referência a Matemática pura, pois trata da matemática sem interação com o meio. As soluções representadas na lousa levaram os alunos à discussão e pelo envolvimento no desenvolvimento da atividade, caracterizamos o Ambiente de Aprendizagem construído, como um cenário de investigação.

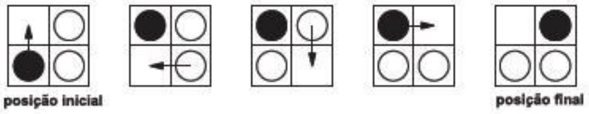
Na resolução os alunos associaram com *problemas correlatos* (Polya), talvez porque já tenham visto anteriormente problemas parecidos, como quadrado mágico.

A escrita foi uma dificuldade encontrada, pois os alunos, em voz alta, comentavam porque não era possível que todas as somas fossem pares, mas na escrita a organização consciente do pensamento era diferente da organização expressa oralmente. A compreensão dos itens anteriores auxiliaram na compreensão e na solução no item **c.** Desse modo, as estratégias aplicadas e assimiladas pelos alunos, contribuíram para o desenvolvimento da capacidade de resolver o problema.

Atividade 17

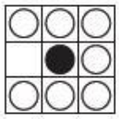
A17

No jogo *Arrasta Um* usa-se um tabuleiro quadriculado e peças redondas, uma preta e as outras brancas. Coloca-se uma peça em cada casa do tabuleiro, exceto em uma que é deixada vazia. Um *movimento* consiste em deslocar para a casa vazia a peça de uma casa adjacente. O jogo termina quando a peça preta chega ao canto superior direito do tabuleiro. Veja um exemplo de como terminar o *Arrasta Um* em quatro movimentos em um tabuleiro 2×2.

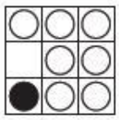


Esta sequência de movimentos pode ser descrita por $(\uparrow, \leftarrow, \downarrow, \rightarrow)$.

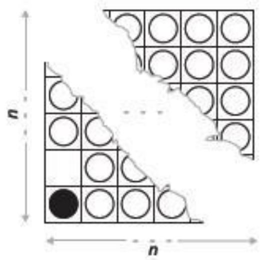
a) Descreva como terminar o *Arrasta Um* em seis movimentos no tabuleiro 3×3 abaixo.



b) Descreva como terminar o *Arrasta Um* em dez movimentos no tabuleiro 3×3 abaixo.



c) Mostre que em um tabuleiro $n \times n$, como na figura, é possível terminar o *Arrasta Um* em $6n - 8$ movimentos.



Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

Na atividade A17 os registros apresentados pelos alunos do N2 mostraram o tabuleiro e a sequência de movimentos, mas os alunos do N3 representaram somente a sequência de movimentos. Com a representação do tabuleiro, nos primeiros movimentos, observamos que a visualização contribuiu para a compreensão.

No item c os alunos custaram para entender que a ideia era fazer a peça preta mover ao longo da diagonal do tabuleiro, foram várias representações até chegarem a essa conclusão.

No início os alunos ficavam atribuindo valores para n e depois de várias representações as soluções apresentadas na lousa foram discutidas e chegaram ao final do jogo com 4 + 6(n-2) = 6n-8 movimentos. A atividade foi considerada difícil, diante das diferentes soluções representadas na lousa e das discussões que ocorreram, a mesma foi considerada um desafio e na exploração criou um ambiente investigativo.

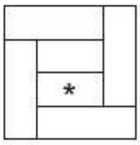
Atividade 18

A18

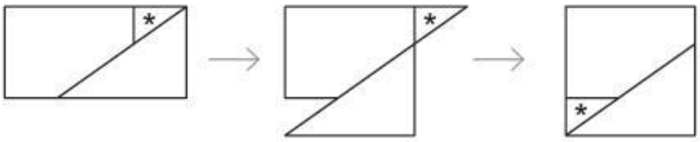
Sara recortou três tiras retangulares diferentes de papel.

a) Ela recortou a primeira tira em três retângulos iguais, como na figura abaixo. Com esses retângulos, formou um quadrado de 36 cm^2 de área. Encontre as medidas dos lados dos retângulos que ela recortou.

b) Ela recortou a segunda tira em seis retângulos de mesma largura e com eles formou um quadrado de 36 cm^2 de área, como na figura. Encontre o perímetro e a área do retângulo indicado com *.



c) As medidas da terceira tira eram 4,5 cm e 2 cm. Sara recortou essa tira em três pedaços e com eles formou um quadrado, como na figura. Qual é a área do triângulo indicado com *?



Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

Na atividade A18, no item **a,** os alunos pensaram apenas no retângulo, não levando em consideração que era para formar um quadrado com as tiras. No item **b** a unidade de medida era desconsiderada por grande parte dos alunos (alguns colocavam até mesmo o perímetro com cm^2). A pesquisadora questionou os integrantes dos grupos sobre essas resoluções diferentes representadas na lousa e os alunos que demonstraram corretamente todos os passos, tiraram as dúvidas dos colegas que não tinham chegado à resposta correta.

No item **c** os alunos do nível 1 perguntavam aos colegas do nível 2 quais as medidas dos lados da segunda e terceira figura. Alguns apresentavam erros nos cálculos, pois não dominavam as operações com números decimais. A atividade apresentou conteúdos que embora não conhecidos por todos proporcionou com as representações das resoluções na lousa a compreensão de novos conteúdos. Assim, essa atividade, permitiu que os estudantes trabalhassem e desenvolvessem o pensamento aritmético e geométrico. Alguns chegaram a apresentar soluções com aplicação do pensamento algébrico.

Atividade 19

A19

Começando com qualquer número natural não nulo é sempre possível formar uma sequência de números que termina em 1, seguindo repetidamente as instruções abaixo:

- se o número for ímpar, soma-se 1;
- se o número for par, divide-se por 2.

Por exemplo, começando com o número 21, forma-se a seguinte sequência:

$$21 \to 22 \to 11 \to 12 \to 6 \to 3 \to 4 \to 2 \to 1$$

Nessa sequência aparecem nove números; por isso, dizemos que ela tem *comprimento* 9. Além disso, como ela começa com um número ímpar, dizemos que ela é uma *sequência ímpar*.

---

a) Escreva a sequência que começa com 37.

b) Existem três sequências de comprimento 5, sendo duas pares e uma ímpar. Escreva essas sequências.

c) Quantas são as sequências pares e quantas são as sequências ímpares de comprimento 6? E de comprimento 7?

d) Existem ao todo 377 sequências de comprimento 15, sendo 233 pares e 144 ímpares. Quantas são as sequências de comprimento 16? Dessas, quantas são pares? Não se esqueça de justificar sua resposta.

Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

Na atividade A19, vários alunos chegavam ao número das sequências possíveis por tentativas, com números aleatórios. Apagavam aquelas cujo comprimento era diferente do enunciado, ficando assim somente com os números desejados. Outros faziam o processo ao contrário, iniciando com o número 1 e abriam um “leque de possibilidades”, não encontrando dificuldades para responder o item posterior. Todas as maneiras foram consideradas, inclusive o “pensar alto” ou a fala de como resolver o problema. Além disso, depois das resoluções serem apresentadas na lousa, juntos, definimos a solução mais adequada, ou seja, que contemplava todas as sequências solicitadas.

Os alunos do N1 e alguns do N2 custaram a compreender o item **d**, mesmo depois de analisadas e discutidas as respostas no grande grupo. No final acabaram aceitando a resposta dos colegas. Logo, nesse item um dos objetivos, que era fazer o aluno pensar e não apenas copiar dos colegas, não foi atingido em relação aos alunos do nível N1 e alguns do N2. No entanto, Polya (2006, p.) diz que: “Ao tentarmos resolver problemas, temos de observar e imitar o que fazem outras pessoas quando resolvem os seus e, por fim, aprendemos a resolver problemas, resolvendo-os.”

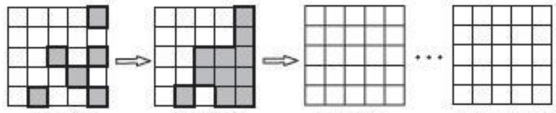
Atividade 20

A20

Uma contaminação em um tabuleiro 5×5, formado por quadrados de 1 cm de lado, propaga-se em estágios de acordo com as seguintes regras:

- quadrados contaminados, indicados em cinza, permanecem contaminados no estágio seguinte;
- um quadrado não contaminado, indicado em branco, torna-se contaminado no estágio seguinte quando tem pelo menos dois lados comuns com quadrados contaminados; caso contrário, permanece não contaminado;
- a contaminação acaba quando não é possível contaminar novos quadrados.

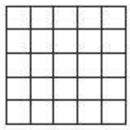
a) Complete a figura abaixo, desenhando o terceiro e o último estágios da contaminação nos respectivos tabuleiros.



O *perímetro de contaminação* de um estágio é a medida do contorno da área contaminada. Por exemplo, os perímetros de contaminação do primeiro e do segundo estágios da contaminação ilustrada são 24 cm e 20 cm, respectivamente, como mostram as linhas em destaque na figura do item a.

b) Escreva os perímetros de contaminação do terceiro e do último estágios da contaminação do item a.

c) Desenhe um estágio com apenas 5 quadrados contaminados tal que, ao final da contaminação, todo o tabuleiro fique contaminado.



d) Explique por que o perímetro de contaminação nunca aumenta de um estágio para o seguinte.

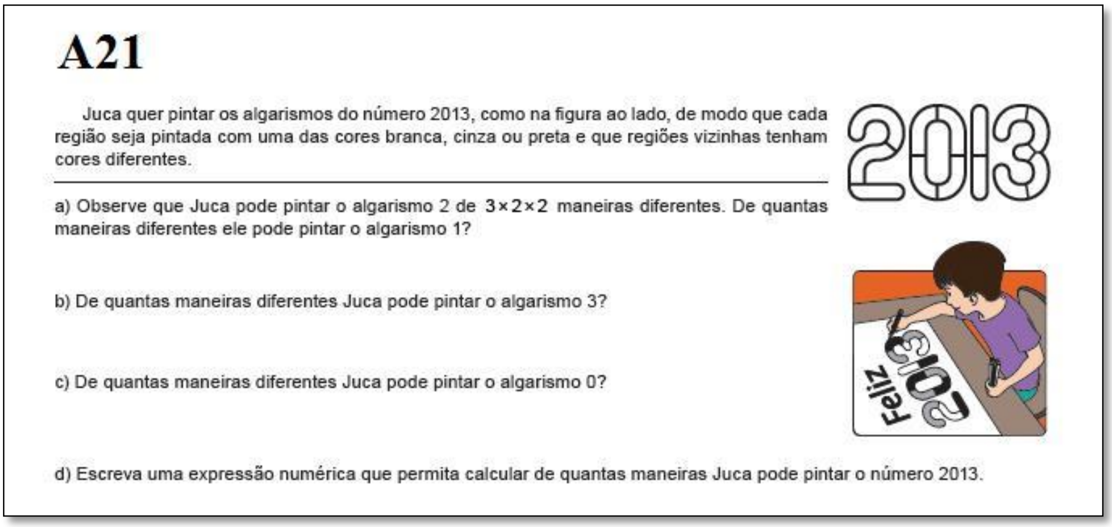
e) Explique por que não é possível contaminar todo o tabuleiro a partir de um estágio com menos de 5 quadrados contaminados.

Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

A atividade A20 foi considerada difícil, pelos alunos. Na busca da solução, alguns alunos retiraram uma folha do caderno para fazerem os registros a partir de seus modos de pensar. Comentavam suas representações, apenas oralmente, e apresentavam para a professora/pesquisadora a forma escrita. Depois as respostas obtidas foram registradas na lousa. No grupo G3, a visualização, com o uso de cores diferentes de giz na resolução contribuiu para a compreensão da situação-problema apresentada.

Em cada item, foram observadas resoluções distintas e a professora/pesquisadora, como mediadora, incentivou a troca de ideias entre os grupos e fez alguns questionamentos, como: “De que forma identificamos, no item **a,** os quadrados contaminados representados em cada estágio?”; “A situação do item **b**, indica os quadrados contaminados em cada estágio com os respectivos perímetros e a unidade de medida?”; “Observamos que muitos mostraram a contaminação completa exibindo cinco quadradinhos em uma diagonal. No item **c**, há existência de outras configurações?”; e “Nas respostas, nos itens **d** e **e**, diante das várias representações dadas pelos grupos, existe um padrão”. Como os alunos buscaram as respostas, para tais questionamentos, caracterizamos a situação como um cenário para investigação. A plenária, após a representação na lousa das diferentes resoluções auxiliou para discussões proporcionando um espaço para que cada aluno pensasse numa estratégia de solução e chegasse com as discussões à construção de noções de lógica e aritmética. Diante dos conflitos, como consequência, o tempo utilizado para resolver esta questão foi maior.

Atividade 21



A21

Juca quer pintar os algarismos do número 2013, como na figura ao lado, de modo que cada região seja pintada com uma das cores branca, cinza ou preta e que regiões vizinhas tenham cores diferentes.

a) Observe que Juca pode pintar o algarismo 2 de $3\times2\times2$ maneiras diferentes. De quantas maneiras diferentes ele pode pintar o algarismo 1?

b) De quantas maneiras diferentes Juca pode pintar o algarismo 3?

c) De quantas maneiras diferentes Juca pode pintar o algarismo 0?

d) Escreva uma expressão numérica que permita calcular de quantas maneiras Juca pode pintar o número 2013.

Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

A atividade A21 foi trabalhada apenas pelos alunos do nível 3. No item **a** todos consideraram que há 3 opções para pintar a primeira parte da figura e há duas opções para pintar a segunda parte da figura.

No item **b** os alunos consideraram as divisões do algarismo 3 como 5 regiões. Iniciando na parte superior há 3 opções para pintar a primeira região e há 2 opções para pintar a segunda. Mas, desconsideraram que a quarta região é vizinha da segunda e da terceira região e colocaram 2 opções para pintar a quarta região, onde só há uma cor possível. A cor da terceira região não deve coincidir com a cor da segunda região, logo há 2 opções para a cor da terceira região. A cor da quinta região não deve coincidir com a quarta, logo há 2 opções para a cor da quinta região. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, há 3 × 1×2 × 2× = 24 maneiras distintas para pintar o algarismo 3. Mas somente depois das diferentes estratégias representadas na lousa e de muitas discussões, compreenderam em qual passo estavam errando.

No item **c** os alunos perceberam dois casos. Na troca de ideias entre os grupos acabaram chegando aos mesmos resultados. No primeiro caso as cores coincidiam, fizeram as representações e chegaram ao resultado correto. No segundo as cores eram diferentes, aplicaram direto o Princípio Multiplicativo e não consideraram as partes vizinhas, pois ao fechar a volta no algarismo zero teriam apenas uma cor e não duas como representaram. Ao aplicar o Princípio Aditivo chegaram a 12 + 12 = 24 maneiras, mas ao analisar as diferentes representações perceberam que o algarismo zero pode ser pintado de 12+ 6 = 18 maneiras distintas.

No item **d** um dos registros mostrou que uma aluna ao invés de aplicar o Princípio Multiplicativo utiliza o Princípio Aditivo. Para pintar os algarismos 2, 0, 1 e 3, consideraram o número de maneiras de pintar os algarismos nos itens anteriores e o número 2 de 3 x 2 x 2 = 12 maneiras diferentes e chegaram ao resultado errado, por abordarem uma estratégia incorreta.

Os alunos, na medida em que foram descobrindo que o item anterior não estava correto, depois de muitas discussões, com a professora interrogando as representações na lousa, chegaram a 12 x 18 x 6 x 24 = 31.104 maneiras diferentes de pintar o número 2013.

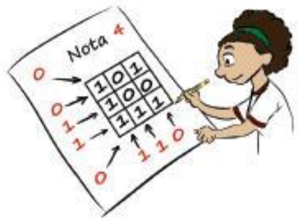
Durante essa atividade os alunos comentavam que era muito difícil. Sabiam que tinham muitas maneiras e sentiram-se desafiados a descobrir, assim, foi criado um ambiente de investigação e na busca da resposta correta, trabalhado o desenvolvimento do pensamento aritmético.

Atividade 22

A22

Helena brinca com tabuleiros 3×3, preenchidos com os algarismos 0 ou 1, da seguinte maneira:

- ela atribui o número 0 a cada linha, coluna ou diagonal cuja soma de seus algarismos seja par e o número 1 a cada linha, coluna ou diagonal para a qual essa soma seja ímpar;
- em seguida, ela calcula a *nota* do tabuleiro, que é a soma dos números que ela atribuiu.



Por exemplo, a nota do tabuleiro na ilustração é $0+0+1+1+0+1+1+0=4$.

a) Qual é a nota do tabuleiro abaixo?

0	0	1
1	1	1
0	0	0

b) Preencha os tabuleiros abaixo de quatro maneiras diferentes e de modo que todos tenham nota 8.

c) Explique por que, quando se troca o número de um dos cantos de um tabuleiro de nota ímpar, sua nota torna-se par.

d) De quantas maneiras diferentes um tabuleiro pode ser preenchido de modo que sua nota seja ímpar?

Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

A última atividade, dessa pesquisa, desenvolvida pelos grupos de estudo foi à atividade A22. No item **a** e no item **b**, os dados fornecidos no tabuleiro e utilizados pelos alunos para a resolução da atividade proposta, de acordo com Skovsmose (2000), enquadram-se no "paradigma do exercício", pois estão centrados em uma única resposta obtida por uma aplicação direta de uma estratégia.

Para obterem as quatro maneiras diferentes pedidas no item **b**, alguns alunos levaram um tempo maior, mas sabiam que estavam no caminho certo, na busca das formas diferentes de preencher os tabuleiros. Os grupos G2 e G3 não registraram na lousa suas estratégias.

No grupo G1, todos os itens foram discutidos e apresentados na lousa. Mas para o item **d** somente um aluno apresentou para os colegas na lousa a estratégia utilizada na busca da solução. Ele mostrava-se interessado e centrado na busca da resposta. Logo, não ocorreram discussões e os demais aceitaram as justificativas do colega.

O tempo não foi suficiente para que todos chegassem a uma resposta, nos grupos G2 e G3, as discussões ocorreram de forma oral, pois poucos mostraram interesse para desenvolver algum tipo de estratégia na busca da solução dos itens **c** e **d.** Assim, com a resposta dos grupos errada e pouco interesse na busca da solução, não ocorreu à formalização. A atenção deles, naquele momento, estava voltada para a confraternização, programada para o final dos encontros.

ANEXO B − Registro dos grupos em sala de aula.

Observamos que os responsáveis pelos alunos assinaram um termo de consentimento, permitindo a divulgação dos trabalhos e das imagens dos alunos.

Figura 1 − Participantes da pesquisa.

Figura 2 − Alunos do G3 resolvendo as questões.

Figura 3 − Alunos do G1 resolvendo as questões

Figura 4 − Alunos do G1 resolvendo as questões.

Figura 5 − Alunos do G2 resolvendo as questões.

ANEXO C – Modelo do termo de consentimento para a participação dos alunos.

TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu, --, R.G. ------------------------, responsável pelo (a) aluno (a) --, da turma--------, declaro, por meio deste, que concordei em que o (a) aluno (a) participe da pesquisa intitulada **"Algumas questões da OBMEP por meio da Resolução de Problemas"**, desenvolvida pela pesquisadora Lucione de Bitencourt Martins junto ao Programa de Pós Graduação em Ensino de Matemática da UFRGS. Fui informado (a), ainda, de que a pesquisa é orientada pelo Professor Alvino Alves Sant'Ana, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, através do e-mail ----------------------.

Tenho ciência de que a participação do (a) aluno (a) não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação à contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado (a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, são:

OBJETIVO PRINCIPAL: Proporcionar uma sequência de atividades ou material didático que estimule o aluno a pensar e a raciocinar matematicamente.

OBJETIVOS GERAIS:

1. Propiciar ao aluno a oportunidade de pensar, não apenas fazer;
2. Promover por meio de grupos de estudos, atividades que despertem o entusiasmo dos alunos, desenvolvendo sua capacidade de criar, atuar em conjunto, aproximando-se uns dos outros, demonstrando a importância de cada um.
3. Analisar as estratégias utilizadas pelos alunos na solução de problemas;

Fui também esclarecido (a) de que os usos das informações oferecidas pelo (a) aluno (a) será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas pela inicial de seu nome e pela idade.

A colaboração do (a) aluno (a) se fará por meio da participação e do material escrito produzido durante as aulas, em que ele (ela) será observado (a) e sua produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. No caso de filmagens e fotos, obtidas durante a participação do (a) aluno (a), autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários etc, sem identificação. A colaboração do (a) aluno (a) se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado (a), poderei contatar o (a) pesquisador (a) responsável no endereço, ---------------------------------, telefone Res: ---------------------- ou Cel: ----------------------, e-mail: ----------------------.

Fui ainda informado (a) de que o (a) aluno (a) pode se retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Três Pinheiros, _____ de ________________ de _______.

Assinatura do Responsável:

Assinatura do (a) pesquisador (a):

Assinatura do Orientador da pesquisa:

ANEXO D – Termos de Consentimento das Escolas

Termo assinado pelo representante da Escola Estadual de Ensino Fundamental Guilherme Schmitt

TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Autorização

A Escola Estadual de Ensino Fundamental Guilherme Schmitt, escola da rede pública estadual de ensino, neste ano, representada pela direção por intermédio do presente instrumento, autoriza Lucione de Bitencourt Martins, brasileira, casada, estudante, RG: 8036546458, a utilizar a proposta de aprendizagem: "Algumas questões da OBMEP por meio da Resolução de Problemas" em seu trabalho de pesquisa para a elaboração da dissertação de Mestrado Profissionalizante no Ensino de Matemática na Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS).

A autorizada, por sua vez, se obriga a manter em absoluto sigilo a identidade dos discentes que participaram da aplicação da proposta de aprendizagem.

Terra de Areia, 30 de julho de 2014.

Diretor(a) da escola

Milton Valvei Bobsin
Diretor ID 1578669/02
Pág. 43 D.O 28/04/14

Lucione de Bitencourt Martins

Termo assinado pelo representante da Escola Estadual Básica Professora Erica Marques:

TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Autorização

A Escola Estadual Básica Professora Erica Marques, escola da rede pública estadual de ensino, neste ano, representada pela direção por intermédio do presente instrumento, autoriza Lucione de Bitencourt Martins, brasileira, casada, estudante, RG 8036546458 a utilizar a proposta de aprendizagem: " Algumas questões da OBMEP por meio de Resolução de Problemas" em seu trabalho de pesquisa para a elaboração da dissertação de Mestrado Profissionalizante no Ensino de Matemática na Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS).

A autorizada, por sua vez, se obriga a manter em absoluto sigilo a identidade dos discentes que participaram da aplicação da proposta de aprendizagem.

Terra de Areia, 30 de julho de 2014

E.E. BÁS. PROFª ERICA MARQUES
TERRA DE AREIA - RS
Fone: (51) 3666.1294

Diretor (a) da escola
Maria Lucia da Silveira
DIRETORA
ID - 721166/02
D.O.: 04/01/2013 - PAG 72

Lucione de Bitencourt Martins