

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL - UFRGS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA

SUPERFÍCIES COM CURVATURA MÉDIA CONSTANTE NÃO NULA

Nubem Ailton Cabral Medeiros

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Porto Alegre, maio de 1988.

N
043D:
M-1885

À Liane, ao Newton e ao Vladimir,
principalmente a este último, de quem
subtraí muitas horas de convívio para
realizar o presente trabalho.

Dissertação realizada sob a orientação do Prof. Dr. Marcos Sebastiani e apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática, por

Nubem Airton Cabral Medeiros.

AGRADECIMENTOS

A todas as pessoas que, de uma maneira ou de outra, contribuíram para a realização deste trabalho, em especial

-ao meu orientador prof. Dr. MARCOS SEBASTIANI, pelos seus sábios conselhos e sua disponibilidade;

-ao prof. Dr. JAIME BRUCK RIPOLL pela paciência e dedicação com que se houve nas inúmeras sessões de estudos e consultas;

-à FERNANDA VASQUES por ter me ajudado na edição deste texto;

-ao GILBERTO MERTINS, por ter colaborado nos programas de elaboração dos gráficos, e

-aos meus COLEGAS do D.M.P.A. que assumiram minhas turmas de aula, sem o que me teria sido impossível concluir o Mestrado.

RESUMO

Neste trabalho são tratados alguns resultados sobre superfícies com curvatura média constante, imersas no \mathbb{R}^3 , sendo destacados os teoremas de DELAUNAY (1841), LIEBMANN (1900), H. HOPF (1956), A.D. ALEXANDROV (1957) e J. RIPOLL (1985).

Demonstra-se, com algum detalhamento, o teorema de DELAUNAY para o caso da cônica que rola, sobre uma reta, sem deslizar, ser uma elipse e não uma hipérbole, como no trabalho original, bem como prova-se que para que a superfície de revolução com curvatura média constante seja completa, tal cônica deve ser, obrigatoriamente, uma elipse.

Utiliza-se, neste último teorema, resultados mais recentes como o devido a W. HSIANG (1981).

São também demonstrados o clássico teorema de ALEXANDROV de caracterização da esfera, como única superfície compacta e conexa que possui curvatura média constante não nula, e o de J. RIPOLL que generaliza o anterior pois substitui a hipótese de compacidade por outra mais fraca que é a sua completude, embora exija que seja propriamente mergulhada no \mathbb{R}^3 , bem como sua inclusão num cone plano.

RÉSUMÉ

Dans ce travail sont traités quelques résultats sur les surfaces à courbure moyenne constante, immergées dans R^3 , où l'on distingue les théorèmes de DELAUNAY (1841), LIEBMANN (1900), H. HOPF (1956), A. D. ALEXANDROV (1957) et J. RIPOLL (1985).

On démontre, avec quelques détails, le théorème de DELAUNAY, dans le cas où la conique qui roule sur une droite, sans glisser, est une ellipse et non une hyperbole comme dans le travail original; et on prouve aussi que, pour que la surface de révolution à courbure moyenne constante soit complète, cette conique doit être obligatoirement une ellipse.

On utilise dans ce dernier théorème des résultats plus récents comme ceux de W. HSIANG (1981).

On démontre aussi le théorème classique de ALEXANDROV qui caractérise la sphère comme l'unique surface compacte et connexe possédant une courbure moyenne constante non nulle et celui de J. RIPOLL qui généralise le précédent en substituant l'hypothèse de compacité par une autre plus faible: sa complétude, quoiqu'il exige qu'elle soit proprement plongée dans R^3 , ainsi que son inclusion dans un cône plan.

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO	1
CAPÍTULO I	
1. Preliminares.....	7
2. Curvatura Média.....	7
3. Vetor Curvatura Média.....	7
4. Proposição 1	8
5. Exemplos de Superfícies Com Curvatura Média Constante	10
6. Superfície de Revolução	11
7. Proposição 2	11
CAPÍTULO II	
Teorema de Delaunay - 1 ^a parte.....	13
Equações da Curva de Delaunay.....	18
Teorema de Delaunay - 2 ^a parte.....	27
CAPÍTULO III	
1. Princípio da Tangência	30
2. Teoremas de Caracterização	31
2.1 Introdução.....	31
2.2 Teorema de Liebmann (1900).....	31
2.3 Teorema de H. Hopf (1956).....	31
2.4 Teorema de A. D. Alexandrov (1957)	32
2.5 Teorema de J. Ripoll (1985).....	35
REFERÊNCIAS.....	40
ANEXOS.....	42

APRESENTAÇÃO

Superfícies (imersas em R^3) com curvatura média constante têm sido estudadas desde aproximadamente 1750. Exemplos conhecidos são o plano, a esfera e o cilindro, sendo o primeiro uma superfície mínima, isto é, com curvatura média nula, e os outros dois, com curvatura média distinta de zero. Outro exemplo, clássico, de superfície mínima é o catenóide, descoberto por MEUSNIER (1776). Novos exemplos com curvatura média constante foram obtidos por DELAUNAY (1841) a partir da revolução da curva plana descrita por um foco de uma cônica quando esta rola, sem deslizar, sobre o eixo de revolução. Neste caso, a esfera e o cilindro saem como casos particulares.

Curiosamente, enquanto as superfícies mínimas tiveram um desenvolvimento sistemático ao longo do tempo, não surgiram, desde DELAUNAY, até o início deste século, novos resultados sobre as superfícies com curvatura média constante não nula. Em particular, contrariamente ao que aconteceu com as mínimas, não foram descobertos (até recentemente 1982 [HS²] e 1984 [WE]) novos exemplos.

De fato, como se verifica atualmente, a teoria das superfícies com curvatura média constante não nula pouco tem a ver com a das superfícies mínimas, embora estes estudos tenham tido, ao que parece, um tronco comum a partir da publicação de MONGE [MO] em 1809, quando este se propôs a integrar a equação diferencial parcial encontrada por LAGRANGE em 1760 para o caso das mínimas, equação esta encontrada como simples exemplo da aplicação do método do que hoje chamamos cálculo das variações por ele desenvolvido.

A questão consistia em resolver o problema do isoperímetro: "dada uma curva fechada simples, achar a área mínima que tem esta curva como fronteira". Ou o problema: "dada uma extensão de superfície, qual deve ser a sua forma para que ela encerre um volume máximo."

DELAUNAY foi o último matemático a encontrar, até recentemente, exemplos de superfícies com curvatura média constante não nula e, na impossibilidade de se criarem novos exemplos, o que se fez foi tentar obter teoremas de caracterização dos exemplos conhecidos.

O primeiro resultado, ao que parece, é o devido a LIEBMANN [LIE] no final no século XIX, mais precisamente, em 1900, quando prova que "as esferas são os únicos ovalóides com curvatura média constante".

Em 1956, H. HOPF [HOP] generaliza o resultado anterior ao provar que "as esferas são as únicas superfícies homeomorfas a esferas com curvatura média constante".

Data desta época a famosa conjectura de H.HOPF: "Toda superfície compacta (imersa em R^3) com curvatura média constante é uma esfera redonda". Em 1982, W. HSIANG [HS²] e outros apresentaram exemplos de hipersuperfícies imersas em R^n com $n > 3$ compactas com curvatura média constante positiva, que não a esfera, mostrando assim a falsidade da conjectura em dimensões altas. Em 1984, finalmente, WENTE [WE] fez cair por terra definitivamente aquela conjectura ao apresentar exemplos (uma infinidade deles) de superfícies imersas em R^3 com curvatura média constante homeomorfas ao toro.

Com os exemplos de WENTE, tornou-se impraticável uma caracterização geral das superfícies imersas em \mathbb{R}^3 com curvatura média constante não nula. É notável, entretanto, que todos os exemplos obtidos até hoje, que não sejam as superfícies de Delaunay, são exemplos de superfícies com auto-intersecção. De fato, um resultado devido a A. D. ALEXANDROV [AL²] prova que *toda a superfície compacta mergulhada (sem auto-intersecção) com curvatura média constante é uma esfera redonda*. Este resultado foi apresentado numa comunicação feita pelo autor em julho de 1955, em Zurich, onde mostrou uma síntese de sua demonstração, embora a primeira demonstração rigorosa tenha sido tornada pública em março de 1956 por H. HOPF [HOP] e a demonstração dada por A. D. ALEXANDROV tenha aparecido pouco mais tarde, primeiro em russo, 1957 e depois em inglês, 1962 [AL²]. Tanto um como o outro utiliza a seguinte caracterização da esfera : *as esferas são as únicas superfícies compactas que possuem um plano de simetria em cada direção*. Ambos utilizam o princípio da tangência que enuciaremos no capítulo III.

Em 1985, J. RIPOLL [RI¹] provou que *as esferas são as únicas superfícies próprias completas com curvatura média constante que estão contidas em cones planos*. Desta forma, generaliza o teorema de ALEXANDROV, retirando deste último a hipótese da superfície ser compacta e a substituindo por outra mais fraca que é a sua completude. Em compensação exige a inclusão da superfície num cone plano bem como o fato dela ser própria. Embora a hipótese da conexidade da superfície não apareça explicitamente em [RI¹] como acontece em [AL²], esta hipótese é irrelevante pois se a superfície fosse desconexa, o que

teríamos seriam cópias da esfera, todas como o mesmo raio.

Mais recentemente, 1987, W. MEEKS III [ME] obteve generalização dos resultados anteriores num trabalho no qual fez um grande avanço no sentido de caracterizar as superfícies mergulhadas completas com curvatura média constante no \mathbb{R}^3 .

Entre os vários resultados, MEEKS prova que:

Teorema 1: Se S é uma superfície propriamente mergulhada em \mathbb{R}^3 com curvatura média constante não nula, então S não é homeomorfa a uma superfície fechada com um único ponto removido.

Teorema 2: Se S é uma superfície propriamente mergulhada em \mathbb{R}^3 com curvatura média constante não nula e S é homeomorfa a uma superfície fechada com dois pontos removidos, então S está a uma distância limitada de uma linha reta.

Teorema 3: Se S é uma superfície propriamente mergulhada em \mathbb{R}^3 com curvatura média constante não nula e S é homeomorfa a uma superfície fechada com três pontos removidos, então S está a uma distância limitada de um plano.

MEEKS lança também as seguintes conjecturas:

Conjectura 1: *Se uma superfície completa mergulhada com curvatura média constante em \mathbb{R}^3 não intercepta dois planos não paralelos em \mathbb{R}^3 , então ela é de Delaunay.*

Conjectura 2: *Se uma superfície completa mergulhada com curvatura média constante em \mathbb{R}^3 está num semi-espaco do \mathbb{R}^3 , então ela tem um plano de simetria.*

Por sugestão do professor LUCIO RODRÍGUEZ (IMPA), componente da banca de julgamento deste trabalho, juntamos dois resultados bem recentes.

O primeiro, de NICOLAOS KAPOULEAS [KAP] que ratifica a necessidade da hipótese feita por RIPOLL da superfície (completa, com curvatura média constante não nula, contida em um cone plano) estar mergulhada em \mathbb{R}^3 para que ela seja uma esfera redonda, pois aquele autor dá uma boa quantidade de exemplos de superfícies completas, com curvatura média constante não nula, contidas em cones planos arbitrariamente estreitos, não compactas, que estão imersas em \mathbb{R}^3 .

O segundo, de NICHOLAS KOREVAAR e outros [KOR] que prova as conjecturas de MEEKS adicionando às hipóteses uma a mais: a superfície possui um número finito de fins. Assim, KOREVAAR prova (corolário 2.11) que se a superfície é completa, propriamente mergulhada, com curvatura média constante não nula e possui dois fins, então ela é de Delaunay. E mais: se a superfície tem um número finito de fins e está contida num semi-espaço, então ela possui um plano de simetria na direção daquele plano de separação do espaço.

No capítulo I apresentaremos alguns conceitos preliminares de que faremos uso no trabalho, bem como duas proposições básicas que nos fornecem a curvatura média de uma superfície (regular, orientável), sem precisar recorrer à definição.

O capítulo II está reservado à demonstração do teorema de Delaunay, devido à sua importância histórica, para o caso da superfície de revolução ser completa (e mergulhada em \mathbb{R}^3). Tal demonstração será feita, em parte, utilizando resultados mais recentes, como o de H. HSIANG [HS¹]. A cônica que será usada para que seu foco descreva, pelo método de rolamento de Delaunay, a curva meridiana da superfície, é a elipse e não a hipérbole como no trabalho original do século passado, pois provaremos que se usássemos a hipérbole para construirmos a superfície completa, esta não poderia ser mergulhada em \mathbb{R}^3 .

Finalmente, no capítulo III trataremos de alguns teoremas de caracterização da esfera como única superfície com curvatura média constante não nula satisfazendo determinadas condições, isto é, dada uma superfície com curvatura média não nula, se adicionarmos a esta superfície outras hipóteses intrínsecas como compacidade e conexidade ou outras hipóteses que dependam do espaço no qual ela está imersa, tais hipóteses serão suficientes para se poder concluir a unicidade da superfície. Destacamos, assim, os teoremas de caracterização de LIEBAMANN (1900), H. HOPF (1956), A. D. ALEXANDROV (1957) e J. RIPOLL (1985), sendo que enquanto os dois primeiros são apenas enunciados, os dois últimos são demonstrados com rigor.

CAPÍTULO I

1. PRELIMINARES

Por superfície em \mathbb{R}^3 entenderemos Superfície Regular, conforme definição 1, página 52, em [doC¹]. De acordo com esta definição, superfície regular não possui auto-intersecção. Por simplicidade, nos referiremos a uma superfície regular apenas como superfície. Sendo S uma superfície orientável, admitiremos sempre que uma orientação de S foi escolhida de tal forma que está bem definida a aplicação Normal de Gauss, a qual denotaremos por $N : S \longrightarrow S^2$, onde S^2 é a esfera unitária.

2. CURVATURA MÉDIA DE UMA SUPERFÍCIE ORIENTÁVEL

Seja S uma superfície orientável.

A função curvatura média de S , denotada por H , é definida por

$$H(p) = -\frac{1}{2} \text{traço} (dN_p), \quad \forall p \in S,$$

onde dN_p é a diferencial, em p , da aplicação de Gauss de S .

3. VETOR CURVATURA MÉDIA (de uma superfície orientável)

Seja S uma superfície orientável.

A função $\vec{H} : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\vec{H}(p) = H(p)N(p)$, $\forall p \in S$, onde $H : S \longrightarrow \mathbb{R}$ é a função curvatura média e $N : S \longrightarrow S^2$ é a aplicação Normal de Gauss, é dita função vetor curvatura média e $\vec{H}(p)$ é dito vetor curvatura média em p de S .

4. PROPOSIÇÃO 1

Seja S uma superfície regular orientável.

Suponhamos que S seja dada pelo gráfico da função

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \text{com } U \subset \mathbb{R}^2 \text{ aberto.} \\ (u,v) \longmapsto f(u,v)$$

Então, a curvatura média $H(u,v)$ é dada pela fórmula

$$2H(u,v) (f_u^2 + f_v^2 + 1)^{3/2} = f_{uu} (f_v^2 + 1) + f_{vv} (f_u^2 + 1) - 2f_{uv} f_{uv}.$$

Demonstração da proposição 1

Seja $\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow S$ a parametrização de S dada por

$$\phi(u,v) = (u, v, f(u,v)), \quad \forall (u,v) \in U.$$

Sem perda de generalidade, suponhamos que a aplicação de Gauss N é dada nas coordenadas (u,v) por

$$N(u,v) = \frac{\phi_u \times \phi_v}{\|\phi_u \times \phi_v\|}; \quad \forall (u,v) \in U. \quad (1)$$

Como $\phi(u,v) = (u, v, f(u,v))$,
temos $\phi_u(u,v) = (1, 0, f_u(u,v))$
e $\phi_v(u,v) = (0, 1, f_v(u,v))$.

Portanto, uma base do plano tangente $T_{\phi(u,v)}(S)$ é

$$\beta = \{(1, 0, f_u), (0, 1, f_v)\}.$$

De (1) vem:

$$N = \frac{1}{(f_u^2 + f_v^2 + 1)^{1/2}} (-f_u, -f_v, 1).$$

Donde

$$N_U = \frac{1}{(f_U^2 + f_V^2 + 1)^{3/2}} (f_U f_V f_{UV} - f_{UU} (f_V^2 + 1), f_U f_V f_{UU} - f_{UV} (f_U^2 + 1), f_U f_{UU} + f_U f_{UV})$$

$$N_V = \frac{1}{(f_U^2 + f_V^2 + 1)^{3/2}} (f_U f_V f_{VV} - f_{UV} (f_V^2 + 1), f_U f_V f_{UV} - f_{VV} (f_U^2 + 1), f_V f_{VV} + f_U f_{UV})$$

Como o traço de uma transformação linear independe da base, podemos escolher a base $\beta = \{\phi_U, \phi_V\}$ e escrever a matriz da diferencial de N na base β para encontrar seu traço.

Se $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ é a matriz de $dN(u,v)$ na base β ,

$$N_U = dN_{(u,v)}(1,0) = a_{11}\phi_U + a_{21}\phi_V$$

$$N_V = dN_{(u,v)}(0,1) = a_{12}\phi_U + a_{22}\phi_V.$$

Fazendo os cálculos encontramos:

$$a_{11} = \frac{1}{(f_U^2 + f_V^2 + 1)^{3/2}} (f_U f_V f_{UV} - f_{UU} (f_V^2 + 1))$$

$$a_{22} = \frac{1}{(f_U^2 + f_V^2 + 1)^{3/2}} (f_U f_V f_{UV} - f_{VV} (f_U^2 + 1))$$

Logo,

$$H = -\frac{1}{2} (a_{11} + a_{22}) = \frac{f_{UU} (f_V^2 + 1) + f_{VV} (f_U^2 + 1) - 2f_U f_V f_{UV}}{2(f_U^2 + f_V^2 + 1)^{3/2}}. \quad \square$$

5. EXEMPLOS DE SUPERFÍCIES COM CURVATURA MÉDIA CONSTANTE

EXEMPLO 1

A esfera de raio r , $S^2(r) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$, com a orientação dada pelo vetor normal apontando para o seu centro, tem curvatura média constante $H = \frac{1}{r}$.

De fato, localmente, a esfera é dada, em um sistema conveniente de coordenadas, pelo gráfico da função

$$f(u,v) = \sqrt{r^2 - u^2 - v^2}, \text{ para } u^2 + v^2 < r^2.$$

Calculando as derivadas parciais de f até segunda ordem e as substituindo na fórmula dada pela proposição 1, encontramos $H = \frac{1}{r}$.

O vetor curvatura média é $\frac{1}{r}(x,y,z)$ em cada ponto (x,y,z) de $S^2(r)$.

EXEMPLO 2

O cilindro de raio r , $C(r) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = r^2\}$, com a orientação conveniente, tem curvatura média constante $H = \frac{1}{2r}$.

De fato, localmente o cilindro é dado, em um sistema conveniente de coordenadas, pelo gráfico da função

$$f(u,v) = \sqrt{r^2 - u^2}, \text{ para } |u| < r \text{ e } v \text{ qualquer.}$$

Procedendo como no exemplo anterior, encontramos $H = \frac{1}{2r}$.

O vetor curvatura média é $\frac{1}{r^2}(x,y,0)$ em cada ponto (x,y,z) do cilindro.

EXEMPLO 3

O plano $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax+by+cz+d = 0\}$ tem curvatura média $H = 0$.

De fato, caso $c \neq 0$, tal plano é dado pelo gráfico da função

$$f(u,v) = -\frac{a}{c}u - \frac{b}{c}v - \frac{d}{c} \text{ que possui segundas derivadas parciais contínuas.}$$

O vetor curvatura média é $(0,0,0)$ em qualquer ponto do plano.

Obs.: no caso da esfera e do plano, é mais prático aplicar a definição.

Outros exemplos de superfícies com curvatura H constante são algumas das

6. SUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO

DEFINIÇÃO

Superfície de revolução é aquela obtida pela rotação de uma curva regular plana em torno de um eixo do plano que não encontra a curva. Uma tal curva é dita meridiana ou geratriz da superfície. Dizemos também que a curva gera a superfície.

OBSERVAÇÃO:

1. *Toda superfície de revolução é orientável.*

EXEMPLOS DE SUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO

1. A esfera menos dois pontos antípodas.
2. O cilindro.

7. PROPOSIÇÃO 2

Se a curva $\gamma(s) = (x(s), y(s), 0)$, $y(s) > 0$, $\forall s \in \mathbb{R}$, parametrizada por comprimento de arco, ao fazer uma revolução em torno do eixo x , gera uma superfície S , então a função curvatura média H de S é dada por

$$H(\gamma(s)) = -\frac{1}{2} \left(\frac{\dot{x}}{y} + \ddot{x} \dot{y} - \dot{x} \ddot{y} \right), \forall s \in \mathbb{R}$$

onde as derivadas se referem ao comprimento de arco s .

Dem onstração da proposição 2

Se $\gamma(s) = (x(s), y(s), 0)$ com $s \in \mathbb{R}$, $y(s) > 0 \forall s \in \mathbb{R}$ é a curva geratriz da superfície de revolução S , com s designando o comprimento de arco, então S é dada localmente por

$$f(t, s) = (x(s), y(s)\cos t, y(s)\sin t) \text{ com } (t, s) \in U = (-\pi, \pi) \times \mathbb{R}.$$

Neste caso,

$$f(U) = S \text{ menos meridiano } (x(s), -y(s), 0).$$

Então,

$$f_t(t, s) = (0, -y(s)\sin t, y(s)\cos t)$$

$$f_s(t, s) = (\dot{x}(s), \dot{y}(s)\cos t, \dot{y}(s)\sin t).$$

A aplicação normal de Gauss nas coordenadas (t, s) será

$$N(t, s) = (-\dot{y}(s), \dot{x}(s)\cos t, \dot{x}(s)\sin t)$$

e a matriz de sua diferencial, num ponto $f(t, s)$, na base $\{f_t, f_s\}$ será

$$\begin{vmatrix} \dot{x} & 0 \\ y & \dot{x}\dot{y} - \dot{x}\dot{y} \\ 0 & \dot{x}\dot{y} - \dot{x}\dot{y} \end{vmatrix},$$

cujos semitraço é a fórmula a que se queria chegar, com o sinal menos. \square

OBSERVAÇÃO:

Decorre de $N(t, s) = (-\dot{y}(s), \dot{x}(s)\cos t, \dot{x}(s)\sin t)$ que

N aponta na direção do eixo de revolução, se e somente se $\dot{x} \leq 0$.

CAPÍTULO II

TEOREMA

A curva plana descrita por um dos focos de uma elipse quando esta rola sem deslizar sobre uma reta gera uma superfície de revolução com curvatura média constante.

Além disso, toda superfície completa de revolução com curvatura média constante é obtida desta maneira.

OBSERVAÇÕES:

1. Quando a elipse é degenerada num segmento de reta (excentricidade 1), a curva descrita é um semi-círculo e a superfície gerada uma esfera menos um meridiano. Neste caso, a curvatura média é constante, conforme exemplo 1, embora a superfície não seja completa.

2. Quando a elipse é degenerada num círculo (excentricidade 0), a curva descrita é uma reta e a superfície gerada um cilindro. Neste caso, a curvatura média é constante, conforme exemplo 2.

3. Chamaremos Curva de Delaunay à curva plana dada no teorema acima, bem como Superfície de Delaunay à superfície por ela gerada.

Demonstração do teorema

Demonstraremos somente para o caso da elipse não ser degenerada em segmento de reta ou em círculo, pois estes dois casos já foram tratados nos exemplos 1 e 2.

Provemos inicialmente que a curva de Delaunay gera uma superfície de revolução com curvatura média constante. Para isso, procuremos encontrar a expressão analítica de uma tal curva, o que faremos ao provar o seguinte

LEMA 1

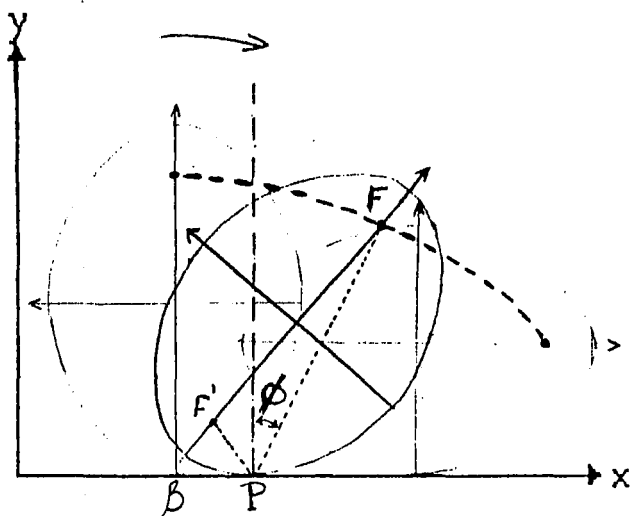
Uma elipse, com medida do eixo focal igual a $2a$ e excentricidade igual a e , contida no plano xy tangenciando o eixo x , com seus focos de coordenadas $(\beta, a(1 - e))$ e $(\beta, a(1 + e))$, respectivamente, ao rolar sem deslizar no sentido positivo de x , faz com que o foco mais longe do eixo x descreva, no seu primeiro quarto de volta, a curva dada pelas equações

$$y(\phi) = a \cos \phi + a \sqrt{e^2 - \sin^2 \phi}$$

$$x(\phi) = \beta + a \sin \phi + a \tan \phi \sqrt{e^2 - \sin^2 \phi} + a \int_0^\phi \frac{1 - e^2}{\cos^2 \phi \sqrt{e^2 - \sin^2 \phi}} d\phi$$

onde ϕ , que varia continuamente desde 0 até $\arcsin(e)$, é o ângulo que o raio focal ao foco mencionado faz com a normal à curva no ponto de tangência da elipse com o eixo de rolamento.

Demonstração do lema 1



Consideremos a ellipse numa posição genérica intermediária entre a posição inicial e a posição final de seu primeiro quarto de volta de rolamento.

Sejam P o ponto de contato da ellipse com o eixo x e F o foco da ellipse que descreve a curva cuja expressão analítica estamos procurando.

Seja F' o outro foco.

Seja ϕ o ângulo que o raio focal \overline{PF} forma com a normal à curva no ponto de contato P .

É conhecido que a normal à curva no ponto de contato é a bissetriz do ângulo entre os raios focais nesse ponto.

É fácil de ver que as coordenadas do foco descrevente são

$$(1) \quad \begin{aligned} y &= r \cos \phi \\ x &= \beta + s + r \sin \phi, \end{aligned}$$

onde s é a distância entre β e P , isto é, o comprimento de arco da parte da ellipse que rolou no eixo x desde a posição inicial $\phi=0$ até a posição $\phi=\phi$ ainda na sua primeira quarta parte de rolamento.

Calculemos, agora, as coordenadas do ponto de contato P mas relativamente ao sistema de coordenadas formado pelos eixos da ellipse, orientando o eixo x_1 , das abscissas, no sentido do seu centro para o foco descrevente F e orientando o eixo y_1 , das ordenadas, por exemplo, como o representado no desenho acima.

Para esse cálculo, podemos aplicar o teorema do cosseno ao triângulo $\Delta F'PF$ e levar em conta que

$$F'F = 2ea$$

$$FP = a - ex_1$$

$F'P = a + ex_1$, onde x_1 é a abscissa do ponto de contato P relativamente ao sistema de coordenadas formado pelos eixos da elipse, como acima exposto.

Aplicando-se, então, o teorema do cosseno e isolando-se x_1 , encontra-se:

$$x_1 = \frac{-a}{e \cos \phi} \sqrt{e^2 - \sin^2 \phi}.$$

Este último valor substituído na equação da elipse

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{a^2(1-e^2)} = 1$$

nos fornece

$$y_1 = -\frac{a(1-e^2)}{e} \tan \phi.$$

Temos, portanto, as coordenadas do ponto de contato:

$$(2.1) \quad x_1 = \frac{-a}{e \cos \phi} \sqrt{e^2 - \sin^2 \phi}$$

$$(2.2) \quad y_1 = \frac{-a(1-e^2)}{e} \tan \phi.$$

Por outro lado, o raio focal PF , do ponto de contato ao foco descrevente da curva pode ser facilmente calculado:

$$(3) \quad r = PF = a - ex_1.$$

Levando (3) em (2.1), obtemos:

$$(4) \quad \begin{aligned} r \cos \phi &= a \cos \phi + a \sqrt{e^2 - \sin^2 \phi} \\ r \sin \phi &= a \sin \phi + a \tan \phi \sqrt{e^2 - \sin^2 \phi} . \end{aligned}$$

Como $ds^2 = dx_1^2 + dy_1^2$, com x_1 e y_1 dados por (2.1) e (2.2), obtemos:

$$(5) \quad s = \int_0^\phi \frac{a(1 - e^2)}{\cos \phi \sqrt{e^2 - \sin^2 \phi}} d\phi .$$

Levando (4) e (5) em (1), concluímos:

$$\begin{aligned} y &= a \cos \phi + a \sqrt{e^2 - \sin^2 \phi} \\ x &= \beta + a \sin \phi + a \tan \phi \sqrt{e^2 - \sin^2 \phi} + \int_0^\phi \frac{a(1 - e^2)}{\cos \phi \sqrt{e^2 - \sin^2 \phi}} d\phi, \end{aligned}$$

que é o que queríamos obter. □

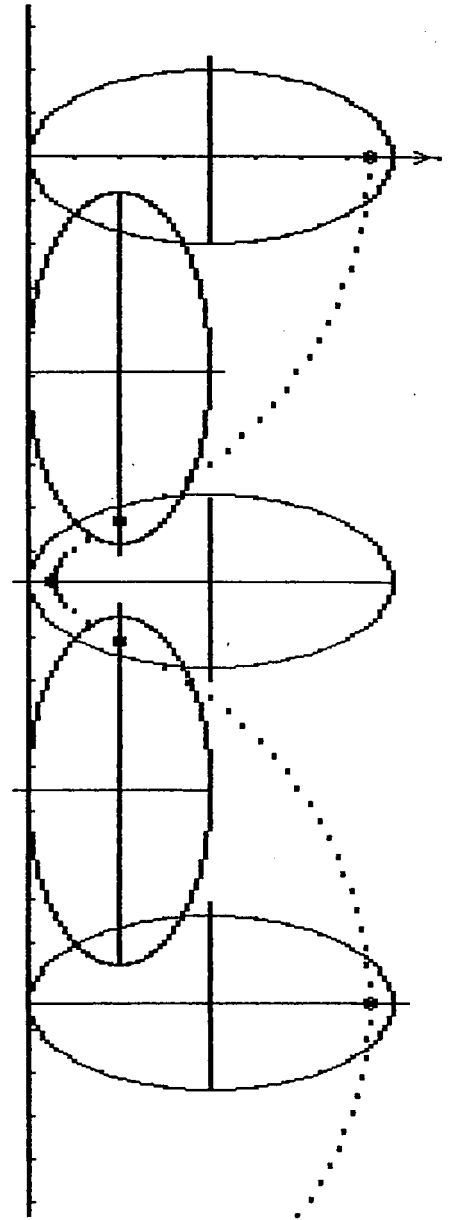
Se continuarmos a rolar a elipse mais um quarto de volta, as equações da curva do mesmo foco descrevente serão:

$$\begin{aligned} y &= a \cos \phi - a \sqrt{e^2 - \sin^2 \phi} \\ x &= \beta + a \sin \phi - a \tan \phi \sqrt{e^2 - \sin^2 \phi} + a \int_0^\phi \frac{1 - e^2}{\cos \phi \sqrt{e^2 - \sin^2 \phi}} d\phi . \end{aligned}$$

Seguem-se os quatro sistemas de equações que representam a curva toda:

EQUAÇÕES DA CURVA DE DELAUNAY

x	y
$\beta + a \sin \phi + a \tan \phi \sqrt{e^2 - \sin^2 \phi} + \int_0^\phi \frac{a(1-e^2)}{\cos^2 \phi \sqrt{e^2 - \sin^2 \phi}} d\phi$	$a \cos \phi + a \sqrt{e^2 - \sin^2 \phi}$
$\beta + a \sin \phi - a \tan \phi \sqrt{e^2 - \sin^2 \phi} + \int_0^\phi \frac{a(1-e^2)}{\cos^2 \phi \sqrt{e^2 - \sin^2 \phi}} d\phi$	$a \cos \phi - a \sqrt{e^2 - \sin^2 \phi}$
$\beta + a \sin \phi + a \tan \phi \sqrt{e^2 - \sin^2 \phi} + \int_0^\phi \frac{a(1-e^2)}{\cos^2 \phi \sqrt{e^2 - \sin^2 \phi}} d\phi$	$a \cos \phi - a \sqrt{e^2 - \sin^2 \phi}$
$\beta - a \sin \phi - a \tan \phi \sqrt{e^2 - \sin^2 \phi} + \int_0^\phi \frac{a(1-e^2)}{\cos^2 \phi \sqrt{e^2 - \sin^2 \phi}} d\phi$	$a \cos \phi + a \sqrt{e^2 - \sin^2 \phi}$



LEMA 2 (HSIANG)

Se $y = y(x)$, com $y(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, satisfaz à e. d. o.

$$y'^2 + 1 = \left[\frac{y}{c + dy^2} \right]^2, \text{ com } c \text{ e } d \text{ constantes, sendo } y' = \frac{dy}{dx},$$

então o gráfico de $y = y(x)$ gera, por revolução em torno do eixo x , uma superfície com curvatura média constante igual a d .

Demonstração do lema 2

$$y'^2 + 1 = \left[\frac{y}{c + dy^2} \right]^2 \implies \frac{\pm y}{\sqrt{y'^2 + 1}} - dy^2 = c \implies$$

$$\pm yy' \left[\frac{y''}{(y'^2 + 1)^{3/2}} - \frac{1}{y(y'^2 + 1)^{1/2}} \pm 2d \right] = 0.$$

Então, nos pontos onde $y' \neq 0$,

$$\begin{aligned} \pm 2d &= \frac{1}{y(y'^2 + 1)^{1/2}} - \frac{y''}{(y'^2 + 1)^{3/2}} = \\ &= \frac{1}{y(y'^2 + 1)^{1/2}} - \frac{y'^2 y''}{(y'^2 + 1)^{5/2}} - \frac{y''}{(y'^2 + 1)^{5/2}} = \frac{\dot{x}}{y} + \bar{x} \dot{y} - \dot{x} \bar{y}, \end{aligned}$$

onde estas últimas derivadas se referem ao comprimento de arco.

Ora, chegamos precisamente, pela proposição 2, a $-2H$.

Logo, $H = \pm d = \text{constante}$. □

Decorre da definição, que toda curva de Delaunay é gráfico de uma função diferenciável $y = y(x)$, com $x \in \mathbb{R}$.

Mostremos, usando o lema 1, que tal função satisfaz à equação diferencial do lema 2 para certos valores de c e d . Com isso fica provada a primeira parte do teorema.

De fato, por um lado,

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\phi}}{\frac{dx}{d\phi}} = \frac{-a \sin \phi \left(1 + \frac{\cos \phi}{\sqrt{e^2 - \sin^2 \phi}} \right)}{a \cos \phi \left(1 + \frac{\cos \phi}{\sqrt{e^2 - \sin^2 \phi}} \right)} = -\tan \phi$$

e daí $y'^2 + 1 = \sec^2 \phi$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \sec \phi &= \frac{1}{\cos \phi} = \frac{\cos \phi + \sqrt{e^2 - \sin^2 \phi}}{\cos^2 \phi + \cos \phi \sqrt{e^2 - \sin^2 \phi}} = \\ &= \frac{2 (\cos \phi + \sqrt{e^2 - \sin^2 \phi})}{1 - e^2 + \cos^2 \phi + e^2 - 1 + \cos^2 \phi + 2 \cos \phi \sqrt{e^2 - \sin^2 \phi}} = \\ &= \frac{a (\cos \phi + \sqrt{e^2 - \sin^2 \phi})}{\frac{a}{2} (1 - e^2) + \frac{1}{2a} a^2 (\cos^2 \phi + e^2 - \sin^2 \phi + 2 \cos \phi \sqrt{e^2 - \sin^2 \phi})} = \\ &= \frac{a \cos \phi + a \sqrt{e^2 - \sin^2 \phi}}{\frac{a}{2} (1 - e^2) + \frac{1}{2a} (a \cos \phi + a \sqrt{e^2 - \sin^2 \phi})^2} = \frac{y}{\frac{a}{2} (1 - e^2) + \frac{1}{2a} y^2} \end{aligned}$$

Portanto a função que descreve a curva de Delaunay satisfaz à equação diferencial ordinária em questão, com

$$c = \frac{a}{2}(1 - e^2) \quad \text{e com} \quad d = \frac{1}{2a} \quad \square$$

OBSERVAÇÕES

1) A demonstração da primeira parte do teorema foi feita no presente trabalho somente quando a elipse dá seu primeiro quarto de volta, a partir da posição inicial em que seu eixo maior - o eixo que contém seus focos - é perpendicular à reta de rolamento x . Para os outros três quartos de volta a demonstração é análoga, pois as equações que descrevem a curva em cada quarto de volta diferem da anterior apenas quanto aos sinais das parcelas de cada componente (ver página 16).

2) Como a curva de Delaunay é completa, a superfície por ela gerada também será completa.

3) Para que se tenha $H > 0$, a superfície de Delaunay deve ser orientada com vetor normal apontando para o eixo de revolução.

4) Também a curva descrita pelo foco de um dos ramos de uma hipérbole cujo eixo transversal é igual a $2a$, quando esta rola sem deslizar sobre o eixo x , que lhe é tangente, gera, por revolução em torno desse eixo, uma superfície com curvatura média constante e igual a $2a$. Neste caso, as equações de tal curva são

$$y(\phi) = -a \cos \phi + a \sqrt{e^2 - \sin^2 \phi}$$

$$x(\phi) = \beta + a \sin \phi - a \tan \phi \sqrt{e^2 - \sin^2 \phi} + a \int_0^{\phi} \frac{e^2 - 1}{\cos^2 \phi \sqrt{e^2 - \sin^2 \phi}} d\phi,$$

onde ϕ , e , β têm as mesmas interpretações geométricas dadas no caso da elipse. (ver [DEL]).

LEMA 3

Se a curva $\gamma(s) = (x(s), y(s), 0)$, com $y(s) > 0 \forall s \in \mathbb{R}$, parametrizada por comprimento de arco, ao fazer uma revolução em torno do eixo x , gera uma superfície com curvatura média constante H , então, nos pontos em que $y = y(x)$,

$$y'^2 + 1 = \left[\frac{y}{c - H y^2} \right]^2, \text{ onde } y' = \frac{dy}{dx} \text{ e } c \text{ é uma constante.}$$

Demonstração do lema 3

Se $\gamma(s) = (x(s), y(s), 0)$, com $y(s) > 0 \forall s \in \mathbb{R}$, está p.p.c.a. e gera uma superfície com curvatura média H , podemos aplicar a proposição 2:

$$H = -\frac{1}{2} \left(\frac{\dot{x}}{y} + \bar{x} \dot{y} - \dot{x} \bar{y} \right),$$

onde as derivadas se referem ao comprimento de arco s .

Pensando y como função de x , isto é, $y = y(x)$, temos:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{1}{(y'^2 + 1)^{1/2}} & \dot{y} &= \frac{y'}{(y'^2 + 1)^{1/2}} \\ \bar{x} &= \frac{-y' y''}{(y'^2 + 1)^2} & \bar{y} &= \frac{y''}{(y'^2 + 1)^2} \end{aligned} \quad \text{com } y' = \frac{dy}{dx}$$

Então aquela equação diferencial da proposição 2 fica:

$$-2H = \frac{1}{y(y'^2 + 1)} - \frac{y'^2 y''}{(y'^2 + 1)^{5/2}} - \frac{y''}{(y'^2 + 1)^{5/2}} = \frac{1}{y(y'^2 + 1)^{1/2}} - \frac{y''}{(y'^2 + 1)^{3/2}}$$

Então,

$$yy'' \left[\frac{-y''}{(y'^2 + 1)^{3/2}} + \frac{1}{y(y'^2 + 1)^{1/2}} + 2H \right] = 0.$$

Integrando esta última equação, teremos:

$$\frac{y}{\sqrt{y'^2 + 1}} + Hy^2 = c.$$

Daí,

$$y'^2 + 1 = \left[\frac{y}{c - Hy^2} \right]^2, \text{ que é o que queríamos.} \quad \square$$

OBSERVAÇÃO

Como $y' = \frac{dy}{dx}$, nos pontos onde $x = x(y)$ podemos escrever

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{c - Hy^2} \right)^2 - 1}}.$$

LEMA 4

Se a curva $\gamma(s) = (x(s), y(s), 0)$, com $y(s) > 0 \forall s \in \mathbb{R}$, parametrizada por comprimento de arco, ao fazer uma revolução em torno do eixo x , gera uma superfície com curvatura média H , então sua segunda coordenada satisfaz a uma das duas e. d. o. de segunda ordem:

$$\ddot{y} = 2H\sqrt{1 - \dot{y}^2} + \frac{1 - \dot{y}^2}{y} \quad , \text{ quando } \dot{x} \geq 0$$

$$\ddot{y} = -2H\sqrt{1 - \dot{y}^2} + \frac{1 - \dot{y}^2}{y} \quad , \text{ quando } \dot{x} \leq 0 ,$$

onde as derivadas se referem ao comprimento de arco s .

Demonstração do lema 4

Se $\gamma(s) = (x(s), y(s), 0)$, com $y(s) > 0 \forall s \in \mathbb{R}$, está p.p.c.a. e gera uma superfície com curvatura média H , podemos aplicar a proposição 2:

$$H = -\frac{1}{2} \left(\frac{\dot{x}}{y} + \ddot{x} \dot{y} - \dot{x} \ddot{y} \right)$$

Como $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 1, \forall s \in \mathbb{R}$, porque $\gamma(s)$ está p. p. c. a., temos dois casos a considerar:

$$\dot{x} = \sqrt{1 - \dot{y}^2} \quad \text{e} \quad \dot{x} = -\sqrt{1 - \dot{y}^2}$$

Em cada caso, teremos uma das duas fórmulas procuradas. □

OBSERVAÇÃO

Se $\gamma(s) = (x(s), y(s), 0)$ denota uma curva de Delaunay, p.p.c.a., então, para que o vetor normal N aponte para o eixo de rotação (e que portanto $H > 0$), devemos ter $\dot{x} \leq 0$. Portanto, $y = y(s)$ satisfaz à segunda das equações do lema 4:

$$\ddot{y} = -2H\sqrt{1 - \dot{y}^2} + \frac{1 - \dot{y}^2}{y} .$$

LEMA 5

Seja $H \geq 0$.

Dados $(x_0, y_0, 0)$, com $y_0 > 0$ e $v = (a_0, b_0, 0)$, com $\|v\| = 1$, existe uma única curva $\gamma(s) = (x(s), y(s), 0)$, parametrizada por comprimento de arco, gerando uma superfície de revolução com curvatura média constante H tal que $\gamma(0) = (x_0, y_0, 0)$ e $\dot{\gamma}(0) = v$.

Demonstração do lema 5

Pelo lema 4, a segunda coordenada da curva $\gamma(s)$ procurada deve satisfazer a uma das duas equações diferenciais ordinárias

$$\dot{y} = \pm 2H\sqrt{1 - \dot{y}^2} + \frac{1 - \dot{y}^2}{y}.$$

Fazendo $\dot{y} = z$, obtemos o sistema

$$\begin{cases} \dot{y} = z \\ \dot{z} = \pm 2H\sqrt{1 - z^2} + \frac{1 - z^2}{y}; \quad |z| < 1. \end{cases}$$

Para mostrar a existência e a unicidade da solução (local) desse sistema, sujeito às condições iniciais

$$y(0) = y_0$$

$$z(0) = b_0,$$

basta observar que cada uma das funções f

$$f(s, y, z) = \dot{z} = \pm 2H\sqrt{1 - z^2} + \frac{1 - z^2}{y}$$

é diferenciável (e daí Lipschitz) na vizinhança dos valores iniciais. \square

OBSERVAÇÃO

Em verdade, aqui consideramos o caso $a_0 \geq 0$ e o caso $a_0 \leq 0$.

LEMA 6

Seja $H > 0$.

Dado $(x_0, y_0, 0)$, com $0 < y_0 < \frac{1}{H}$, existe uma (única) curva de Delaunay $\gamma(s) = (x(s), y(s), 0)$, parametrizada por comprimento de arco, gerando uma superfície de Delaunay com curvatura média constante H tal que $\gamma(0) = (x_0, y_0, 0)$ e $\dot{\gamma}(0) = (-1, 0, 0)$.

Demonstração do lema 6

Sejam $H > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$ e $0 < y_0 < \frac{1}{H}$.

Então existe uma elipse com medida do eixo focal igual a $\frac{1}{H}$ e excentricidade $e = 1 - 2y_0H$.

Coloquemos essa elipse no sistema xy de coordenadas retangulares satisfazendo às seguintes condições:

- 1) a elipse é tangente ao eixo x ;
- 2) a elipse está no semi-plano $y \geq 0$;
- 3) seu diâmetro focal é paralelo ao eixo y e
- 4) o ponto de tangência tem como abscissa x_0 .

Com isso, as coordenadas dos seus focos passam a ser:

$$(x_0, y_0, 0) \text{ e } \left(x_0, \frac{1 - y_0H}{H}, 0\right).$$

Façamos a elipse, a partir da posição acima indicada, rolar sobre o eixo x , sem deslizar, em qualquer dos dois sentidos e estudemos a curva de Delaunay descrita pelo foco $(x_0, y_0, 0)$.

Já mostremos que tal curva de Delaunay gera uma superfície de Delaunay, ao fazer uma revolução em torno do eixo x , com curvatura média (constante) igual a H .

Se $0 < y_0 < \frac{1}{2H}$, o ponto $(x_0, y_0, 0)$ da curva de Delaunay é um ponto que dista minimalmente do eixo x . Sendo esta distância minimal, o vetor tangente à curva neste ponto é horizontal.

Se $\frac{1}{2H} < y_0 < \frac{1}{H}$, o ponto $(x_0, y_0, 0)$ da curva de Delaunay é um ponto que dista maximalmente do eixo x . Sendo esta distância maximal, o vetor tangente à curva neste ponto é horizontal.

Se $y_0 = \frac{1}{2H}$, ambos os focos da elipse em questão coincidem e teremos, então, um círculo cujo centro descreve uma reta que gera, por revolução em torno do eixo x , um cilindro. Mas este caso é trivial.

Orientando γ convenientemente, temos $\dot{\gamma}(s) = (-1, 0, 0)$. \square

Por fim, estamos em condições de provar a segunda parte do teorema que diz: "toda superfície completa de revolução com curvatura média constante é gerada por uma curva de Delaunay".

Demonstração da segunda parte do teorema

Seja S uma superfície completa de revolução com curvatura média constante H . A menos de congruência, podemos supor que S é gerada por uma curva no plano $z = 0$, digamos

$$\gamma(s) = (x(s), y(s), 0), \quad \forall s \in \mathbb{R}, \text{ e } y(s) > 0,$$

onde podemos supor que s é o comprimento de arco de γ .

Então existe $(a, b) \subset \mathbb{R}$ tal que uma porção de γ é dada por $y = y(x)$, $\forall x \in (a, b)$ e é maximal com esta propriedade.

Observação: podemos ter, eventualmente, $a = -\infty$, $b = +\infty$.

Também existe $(c, d) \subset y((a, b))$, maximal, tal que $x = x(y)$.

Então, como consequência do lema 3, em (c,d)

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{\left[\frac{y}{k - Hy^2}\right]^2 - 1}}, \quad \text{para algum } k \text{ constante.}$$

Observe-se que a integral acima é elíptica, e, então, x é uma função limitada de y no intervalo (c,d) .

Suponhamos $x = x(y)$ crescente em (c,d) .

Seja $x_0 = \lim_{y \rightarrow d} x(y)$.

Então x_0 é um ponto de máximo de $y = y(x)$, e, portanto, y_0 é um valor máximo de $y = y(x)$.

Se $y(x_0) = y_0 < \frac{1}{H}$,

podemos aplicar os lemas 5 e 6 para garantir que $\gamma(s)$ é de Delaunay.

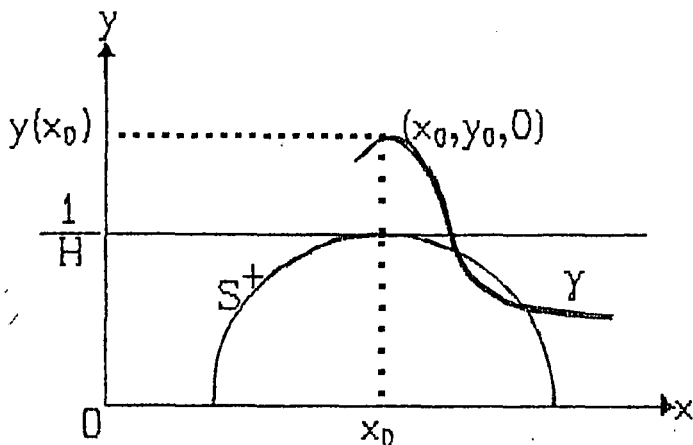
Se $y(x_0) = y_0 \geq \frac{1}{H}$,

vamos mostrar que para que $\gamma(s)$ gere, por revolução, uma superfície completa, ela deverá ter auto-intersecção, não gerando, portanto, superfície no sentido que está sendo dado neste trabalho. (ver página 5).

Seja S^+ o semicírculo de centro $(x_0, 0, 0)$ e raio $\frac{1}{H}$.

Então $\gamma(s)$ deve interceptar S^+ , pois caso contrário, quando $\gamma(s)$ girasse em torno do eixo x , geraria uma superfície de revolução tal que a porção de $R^3 \setminus S$ para a qual aponta o vetor curvatura média de S conteria uma esfera de raio $\frac{1}{H}$ (e, conseqüentemente, com a mesma curvatura média de S), o que contradiz o princípio da tangência (cap. III) pois $\gamma(s)$ gera - por hipótese - uma superfície com curvatura média H .

Logo, $\gamma(s)$ intersecciona S^+ em algum ponto.



Se $\gamma(s)$ não tivesse auto-intersecção, poderíamos transladá-la para a direita até que se tivesse um ponto de tangência da curva com S^+ , onde os vetores curvatura média de S e da esfera gerada por S^+ tivessem a mesma orientação.

Pelo princípio da tangência, S - que é gerada por $\gamma(s)$ - deveria coincidir com a esfera gerada por S^+ numa vizinhança daquele ponto de tangência, mas isso não é possível pois $\gamma(s)$ tem pontos cuja segunda coordenada é maior que $\frac{1}{H}$ (o ponto $(x_0, y_0, 0)$, por exemplo).

Logo, para que S - gerada por $\gamma(s)$ - seja completa, $\gamma(s)$ deve ter auto-intersecção.

Concluimos assim que $\gamma(s) = (x(s), y(s), 0)$, $y(s) > 0 \ \forall s \in \mathbb{R}$ ao gerar uma superfície com curvatura média H localmente é dada por $y = y(x)$ e seu máximo local estiver abaixo de $\frac{1}{H}$ então ela deverá coincidir com uma curva de Delaunay, mas se tal máximo estiver acima de $\frac{1}{H}$, a única maneira de $\gamma(s)$ gerar uma superfície é que esta tenha auto-intersecção.

Logo, toda superfície completa de revolução com curvatura média constante é gerada por uma curva de Delaunay. \square

CAPÍTULO III

1. PRINCÍPIO DA TANGÊNCIA

Sejam S_1 e S_2 superfícies do \mathbb{R}^3 com curvatura média H constante e $p \in S_1 \cap S_2$ um ponto de tangência.

Se S_1 e S_2 possuem a mesma orientação em p e S_2 está em cima de S_1 em uma vizinhança conexa, V , de p , então S_1 e S_2 coincidem em V .

OBSERVAÇÕES

1) $p \in S_1 \cap S_2$ é ponto de tangência significa que os planos tangentes a S_1 e a S_2 em p coincidem.

2) S_2 está em cima de S_1 significa que se $f_1, f_2 : U \rightarrow \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis, com U uma parte do plano tangente a S_1 em p , cujos gráficos são vizinhanças de S_1 e S_2 , respectivamente, então

$$\forall x \in U, f_1(x) \leq f_2(x).$$

3) O princípio da tangência para superfícies com curvatura média constante vale também quando o ponto de tangência p está no bordo.

4) Quando S_1 e S_2 são superfícies mínimas, isto é, quando têm curvatura média $H = 0$ em todos os pontos, podemos prescindir da hipótese de ambas terem a mesma orientação em p .

5) A demonstração do princípio da tangência poderá ser encontrada, por exemplo, em [LE A].

2. TEOREMAS DE CARACTERIZAÇÃO

2.1. INTRODUÇÃO

A questão de obter caracterizações de certas superfícies em \mathbb{R}^3 , principalmente da esfera, e, posteriormente das superfícies de Delaunay, (veja definição no capítulo 2) remonta há muitos anos.

Convém lembrar que quando falamos em superfícies do \mathbb{R}^3 , estamos nos referindo ao sentido dado por $[d\mathbb{C}^1]$; assim, por exemplo, nossas superfícies não possuem auto-intersecção.

Definimos superfície convexa como sendo aquela que é bordo de um corpo convexo, onde corpo convexo é qualquer subconjunto do \mathbb{R}^3 tal que dados dois quaisquer dos seus pontos, o segmento de reta que os une está inteiramente contido nesse subconjunto.

Por fim, definimos ovalóide como sendo uma superfície convexa compacta.

No que se segue, daremos os principais teoremas de caracterização, destacando dentre eles, para demonstração, os devidos a A. D. ALEXANDROV (1957), e J. RIPOLL (1985).

2.2. TEOREMA DE LIEBMANN (1900)

Se S é uma superfície convexa e compacta com curvatura média constante, então S é uma esfera.

2.3. TEOREMA DE H. HOPF (1956)

Se S é uma superfície homeomorfa a uma esfera e tem curvatura média constante, então S é uma esfera.

2.4. TEOREMA DE A. D. ALEXANDROV (1957)

Se S é uma superfície do \mathbb{R}^3 , conexa e compacta com curvatura média constante H , então S é uma esfera.

Demonstração do teorema de Alexandrov

Vamos dar a demonstração feita em [LEA].

Pela caracterização da esfera que será utilizada, basta mostrar que S possui um plano de simetria em cada direção, isto é, dada uma direção qualquer do \mathbb{R}^3 , um plano que possui esta direção deixa invariante, por reflexão euclidiana, a superfície S . Como sempre, a direção do plano é dada pela direção da normal a ele.

Seja P , plano, tal que S tenha um ponto de tangência p com P e que toda a superfície se encontre num dos dois subspaços determinados por P . Tomemos para direção, aquela do plano P e devemos mostrar que a superfície possui um plano de simetria nessa direção, isto é, paralelo a P .

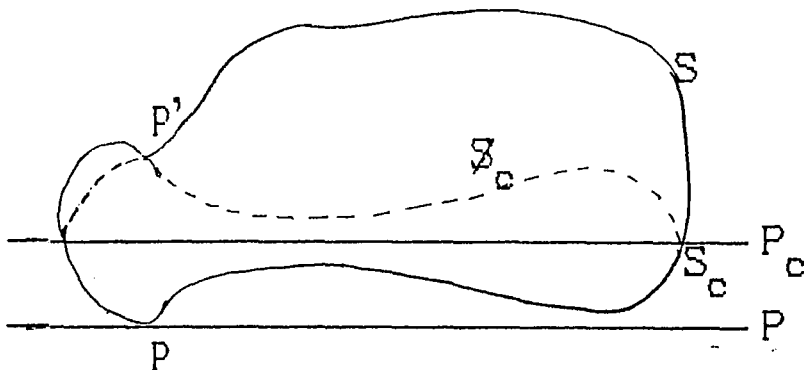
Agora, tomemos planos P_λ paralelos a P e que interseccionem S , tais que por reflexão euclidiana sobre cada P_λ o refletido da parte da superfície que esteja entre os dois planos P_λ e P caia ainda dentro de S .

Seja P_c o plano P_λ mais afastado de P e sejam S_c a porção da superfície entre P_c e P e \mathcal{R}_c a reflexão por P_c de S_c .

Duas situações podem ocorrer:

1ª situação:

Existe $p' \in (S \cap \mathcal{S}_c) \setminus P_c$



Neste caso, aplica-se o princípio da tangência para se provar que $\mathcal{S}_c = S$, em uma vizinhança conexa do p' .

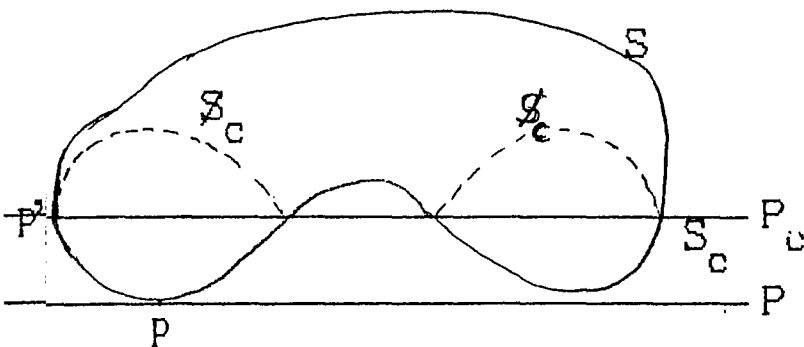
De fato, 1) $p \in \mathcal{S}_c \cap S$ é um ponto de tangência;

2) podemos orientar as superfícies de maneira que ambas tenham a mesma orientação;

3) S está por cima de \mathcal{S}_c em uma vizinhança de p' .

2ª situação.

Não existe $p \in (S \cap \mathcal{S}_c) \setminus P_c$.



Novamente, aplicando o princípio da tangência, desta vez para superfícies com bordo, prova-se que $\mathcal{S}_c = S$, localmente.

Em qualquer uma das duas situações, mostraremos que P_c é um plano de simetria para S .

De fato.

1) Chamemos de $\overset{\star}{X}$ a componente conexa de S_c que contém o ponto p e de X a parte de S_c da qual $\overset{\star}{X}$ é refletida.

2) Façamos

$$A = \{q \in \overset{\star}{X} \mid \overset{\star}{X} = S \text{ em uma vizinhança de } q\},$$

e observemos que

A é não vazio, aberto e fechado em $\overset{\star}{X}$.

3) Como $\overset{\star}{X}$ é conexo, e A é não vazio, aberto e fechado em $\overset{\star}{X}$, temos que $A = \overset{\star}{X}$.

4) Como $A \subset S$, $\overset{\star}{X} \subset S$.

5) Como $X \cup \overset{\star}{X} \subset S$ é uma superfície conexa e compacta (pois X e $\overset{\star}{X}$ são conexas e compactas que têm em comum apenas, eventualmente, o bordo) e como S é conexa e compacta, temos que $X \cup \overset{\star}{X} = S$.

Logo, P_c é um plano de simetria na direção de P .

Observe-se, por fim, que a direção do plano P inicialmente tomado foi arbitrária; portanto, provamos que a superfície S possui um plano de simetria em qualquer direção, a saber o plano P_c , como acima.

Logo, S é uma esfera redonda. □

2.5. TEOREMA DE J. RIPOLL (1985)

Se S é uma superfície do \mathbb{R}^3 , completa, própria, contida em um cone plano, com curvatura média constante, então S é uma esfera.

Para melhor compreensão do enunciado, vamos definir alguns termos que nele aparecem, bem como outros que virão no corpo da demonstração.

Superfície Própria

A superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ é própria quando para qualquer compacto $K \subset \mathbb{R}^3$, $S \cap K$ é compacta.

Cone Plano

Sejam v_1, v_2, v_3 três vetores linearmente independentes do \mathbb{R}^3 .

Sejam Π_1, Π_2, Π_3 os três planos que possuem como vetores normais respectivos v_1, v_2, v_3 ; temos $\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3 = \{0\}$.

Um cone plano C é qualquer das oito componentes conexas de $\mathbb{R}^3 \setminus (\Pi_1 \cup \Pi_2 \cup \Pi_3)$.

Definimos também cone plano como sendo qualquer conjunto que difere do cone plano C acima por um movimento rígido com $0 \rightarrow p_0$.

p_0 é chamado vértice do cone plano C e Π_1, Π_2, Π_3 , são chamados bordos de C .

Um plano Π é dito transversal a C quando $\Pi \cap C$ é limitado no \mathbb{R}^3 .

O espírito da demonstração do teorema é supor que a superfície S não seja compacta - pois fosse compacta não haveria o que provar desde uma vez que Alexandrov (1957) já o fez - e construir um plano transversal ao cone C da hipótese que seja plano de simetria para S . Como S é própria, a porção da superfície que está no semi-espaço determinado pelo vértice p_0 de C seria compacta e S seria compacta, o que é uma contradição com a hipótese aditiva de S não ser compacta.

Demonstração do teorema de Ripoll

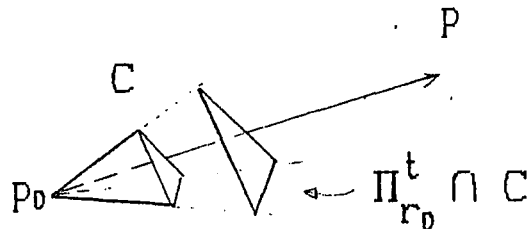
Suponhamos S não compacta.

Seja C o cone plano que contém S e suponhamos C determinado pelos planos Π_1, Π_2 e Π_3 cuja intersecção dá o vértice p_0 .

Construamos, agora, o plano Π transversal a C e que seja um plano de simetria para S .

Seja $r_0 = \{ p \in C \mid d(p, \Pi_i) = d(p, \Pi_j), \quad i, j = 1, 2, 3 \} = \overrightarrow{p_0 P}$,
onde $d(p, \Pi_k)$ é a distância euclidiana no \mathbb{R}^3 .

Chamemos r_0 de reta central a C .



Seja $\{ \Pi_{r_0}^t \}_{t \in \mathbb{R}}$ a família de planos do \mathbb{R}^3 que são ortogonais a r_0 :

$$\Pi_{r_0}^t \perp r_0, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Vê-se que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\Pi_{r_0}^t$ é transversal a C .

Denotaremos este último fato assim: $\Pi_{r_0}^t \intercal C$.

Observa-se, também, que

existe $\alpha > 0$ tal que

$(\forall r, \text{reta contendo } p_0) (\forall \Pi, \text{plano do } \mathbb{R}^3) [\Delta(r, r_0) < \alpha \text{ e } \Pi \perp r \Rightarrow \Pi \intercal C]$,

isto é, uma pequena variação de r_0 , mantendo fixo p_0 , faz com que os planos ortogonais a r_0 ainda permaneçam transversais a C . r_0 determina uma família de semi-retas, contidas em C , normais a planos ainda transversais a C .

Agora, sem perda de generalidade, suponhamos que

$$t < 0 \implies \Pi_{r_0}^t \cap C = \emptyset,$$

isto é, consideremos a família $\{\Pi_{r_0}^t\}$ só a partir do p_0 na direção do vetor $\overrightarrow{p_0 p}$, onde $p \in r_0$ e p_0 é o vértice de C .

Então existe t' tal que

$$s < t' \leq t \implies \begin{cases} \Pi_{r_0}^s \cap S = \emptyset \\ \Pi_{r_0}^{t'} \cap S \neq \emptyset \end{cases}$$

OBSERVAÇÃO

Observemos que poderia acontecer de existir $u > t'$ tal que $\Pi_{r_0}^u \cap S = \emptyset$ e $\forall v > u$, $\Pi_{r_0}^v = \emptyset$. Neste caso, S seria limitada. Como ela é própria, a porção de S que ficasse dentro do semi-espço que contém p_0 , determinada por $\Pi_{r_0}^v$, seria compacta. Mas tal "porção" seria toda a superfície, o que contradiria a hipótese da não compacidade de S . Portanto, podemos supor que todos os planos $\Pi_{r_0}^t$, a partir de t' , encontrem S em algum ponto.

Por outro lado, como S é própria e $\Pi_{r_0}^{t'} \cap C$ é compacto, existe um ponto de tangência entre $\Pi_{r_0}^{t'}$ e S .

Mostremos agora que a curvatura média de S não pode ser nula.

De fato.

A primeira daquelas superfícies é parte do plano.

Fosse também zero a curvatura de S , ambas deveriam coincidir pelo princípio da tangência, o que é um absurdo pois S está contido em C , enquanto que o plano que contém $\Pi_{r_0}^{t'}$ não está contido em C .

Logo, como a curvatura média H de S não é zero, podemos tomar $H > 0$.

Seja $q_0 \in \Pi_{r_0}^{t'} \cap S$.

Então

existe $C' \subset C$ com vértice q_0 cuja reta central r_0' é a semi-reta com origem q_0 e paralela a r_0 .

E mais:

podemos escolher C' tal que se $q \in C'$, $q \neq q_0$, então a reta r , determinada por q e q_0 , faz um ângulo com r_0' menor que α .

Portanto, qualquer plano ortogonal a r é transversal a C .

Como S é própria, $R^3 \setminus S$ tem duas componentes conexas.

Seja S^0 a componente conexa de $R^3 \setminus S$ para a qual aponta o vetor curvatura média.

Afirmamos:

$$C' \not\subset S^0,$$

De fato,

estivesse $C' \subset S^0$, pela ilimitação de C' poderíamos determinar uma esfera $S^2 \subset C' \subset S^0$ com a mesma curvatura média H de S .

Então, movimentando S^2 em direção a S , ocorreria um primeiro momento no qual $S^2 \cap S \neq \emptyset$, isto é, haveria um ponto de tangência entre S^2 e S .

Então, pelo princípio da tangência, $S^2 = S$; contradição, porque a esfera é limitada e a superfície S é ilimitada (porque contém o cone).

Portanto, $C' \not\subset S$.

Segue que

existe $q \in S$, $q \neq q_0$ tal que $q \in C'$.

Seja r a reta determinada por q_0 e q .

Seja ainda

$$\Gamma = \left\{ \Pi_r^t \right\}_{t \in \mathbb{R}}$$

a família de planos ortogonais a r tais que $\Pi_r^t \cap C' = \emptyset, \forall t < 0$.

Pela escolha do α , os planos Π_r^t são transversais a C e, como S é própria, existe um primeiro momento, digamos m , tal que Π_r^m e S são tangentes.

Mostraremos a existência de um elemento Π_r^t em Γ tal que a reflexão por Π_r^t deixa S invariante, isto é, um dos Π_r^t é um plano de simetria.

$\forall t \geq m$, seja U^t a componente conexa de $R^3 \setminus \Pi_r^t$ tal que $q_0 \in U^t$.

Seja $S^t = S \cap U^t$.

Seja \mathcal{S}^t a reflexão de S^t por Π_r^t .

Como S é própria, temos

$\mathcal{S}^t \subset S^0$, para $t > m$.

Sabemos que existe $\Pi_r^n \in \Gamma$ tal que a reflexão segundo Π_r^n reflete q_0 em q .

Então existe um primeiro momento $m' > m$ tal que

$\mathcal{S}^t \subset S^0$, para $t < m'$ e

$\mathcal{S}^t \not\subset S^0$, para $t \geq m'$.

Observando que desde uma vez que

$\Pi_r^t \cap C, \forall t, S^0 \cap U^t$ é compacto,

assim que

$\mathcal{S}^{m'}$ e $S \cap (R^3 \setminus U^t)$

devem ser realmente tangentes em um ponto de bordo ou em um ponto interior.

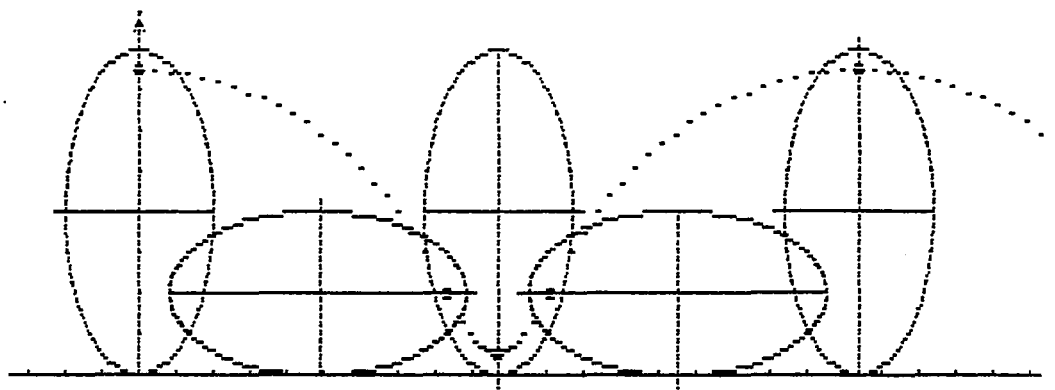
Logo, o princípio da tangência implica que

$\mathcal{S}^{m'} = S \cap (R^3 \setminus U^{m'})$, o que conclui a prova. □

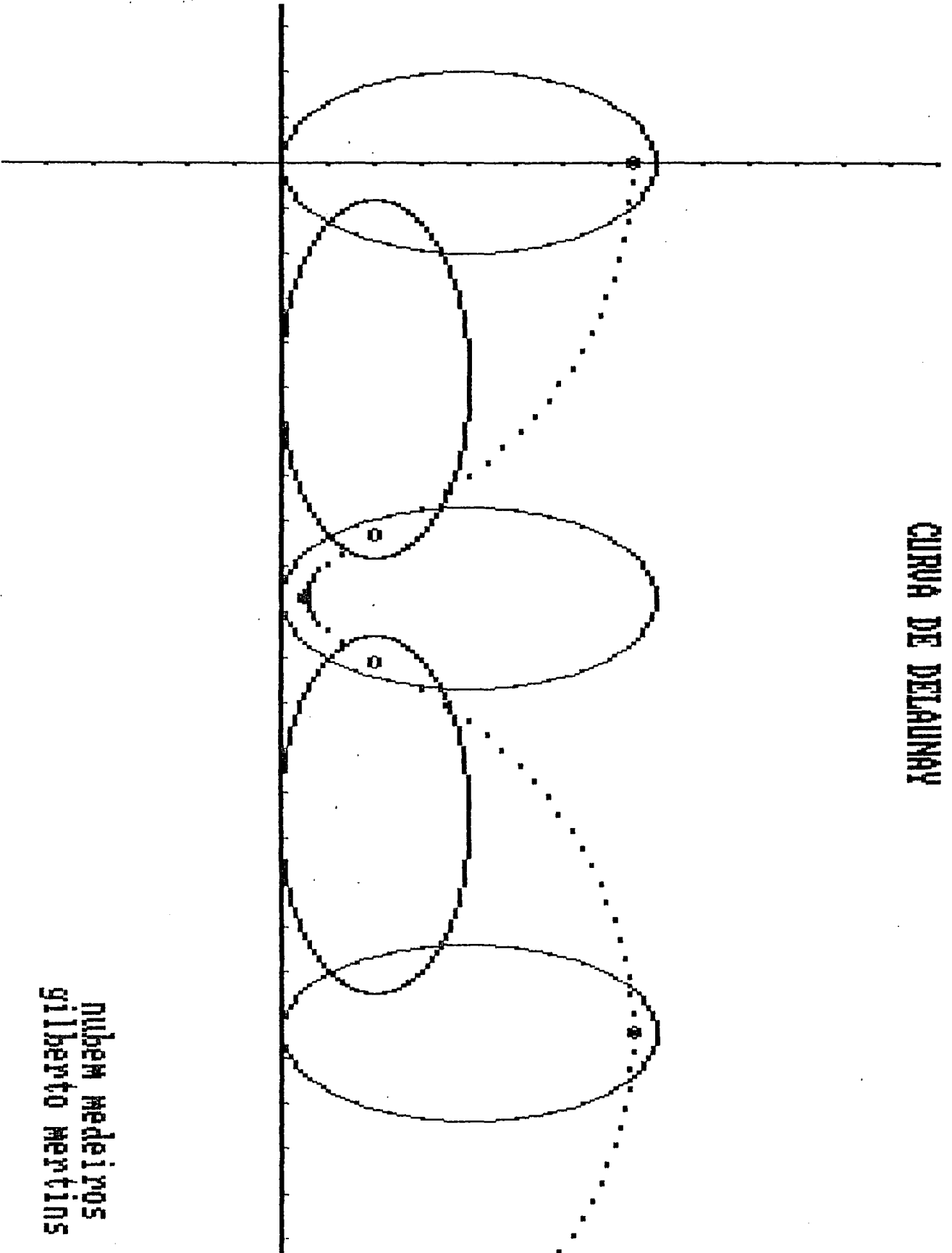
REFERÊNCIAS

- [AL¹] ALEXANDROV, A. D. *Ein allgemeiner Eindeutigkeitssatz geschlossene Flächen.* C. R. Doclady. Academy of Science URSS, Moscou, 19:227-229, 1938.
- [AL²] ALEXANDROV, A. D. *Uniqueness theorems for surfaces in the large.* American Mathematical Society Translations. (series 2) 21:412-416, 1962.
- [AL³] ALEXANDROV, A. D. *A characteristic property of spheres.* Annali di Mat. Pura ed Appl, Bologna, 58:303-315, 1962.
- [CHE] CHERN, S. S. *Some new characterizations of the Euclidean sphere.* Duke Mathematical Journal, Durhan NC, 12:279-290, 1945.
- [DEL] DELAUNAY, C. *Sur la surface de revolution dont la courbure moyenne est constante.* Journal des Mathématiques Pures et Appliquées. Paris, 6(1):309-320, 1841.
- [doC¹] DO CARMO, M. P. *Differential Geometry of Curves and Surfaces.* New Jersey, Prentice-Hall, 1976.
- [doC²] DO CARMO, M. P. *Superfícies Mínimas.* Rio, IMPA, 1987.
- [HC] HILBERT, D. & COHN-VOSSEN, S. *Geometry and Imagination.* New York, Chelsea, 1952.
- [HOF] HOFFMANN, D. A. *Surfaces of constant mean curvature in manifolds of constant curvature.* Journal of Differential Geometry, Providence, R. I., 8:161-176, 1973.
- [HOP] HOPF, H. *Differential Geometry in the Large.* Lecture Notes in Mathematics, Berlin, 1000:77-173, 1983.
- [HS¹] HSIANG, W. & YU, W. *A generalization of a Theorem of Delaunay.* Journal of Differential Geometry, Providence, 16:161-177, 1981.
- [HS²] HSIANG, W. *Generalized Rotational Hypersurfaces of constant mean curvature in the Euclidean Space.* Journal of Differential Geometry, Providence, R. I., 17:337-346, 1982.

- [KAP] KAPOULEAS, N. Complete constant mean curvature surfaces in euclidean three space. Doctoral thesis. 1987.
- [KOR] KOREVAAR, N. et alii. The structure of complete embedded surfaces with constant mean curvature. Preprint.
- [LEA] LEAO, K. R. F. O princípio da tangência e aplicações. Rio de Janeiro, I.M.P.A., 1983. Dissertação de Mestrado.
- [LIE] LIEBMANN, H. Über die Verbiegung der geschlossenen Flächen positiver Krümmung. Mathematische Annalen, Berlin, 53:81-112, 1900.
- [ME] MEEKS, W. H., III. The topology and geometry of embedded surfaces of constant mean curvature. Massachusetts, 1987. (a aparecer)
- [MO] MONGE, G. Application de l'Analyse a la Géométrie, Paris, Bachelier, 1850. (4ª edição de 1809 refeita por Liouville).
- [RI¹] RIPOLL, J. B. A characterization of the spheres in Euclidean Space. Rio de Janeiro, I.M.P.A., 1985.
- [RI²] RIPOLL, J. B. Superfícies invariantes de curvatura média constante. Rio de Janeiro, I.M.P.A., 1986. Tese de doutorado.
- [YA] YATES, R. C. The description of a surface of constant curvature. American Mathematical Monthly, Washington DC, 38(10): 573-574, 1931.
- [WE] WENTE, H. C. A counterexample in 3-space to a conjecture of H. Hopf. Lecture Notes in Mathematics. Berlin, 1111: 421-429, 1984.



CURVA DE DELAUNAY



**nubem medeiros
gilberto merzins**

```

10 CLS:SCREEN 2:XC=80:YC=90:KEY OFF
20 LINE (XC,0)-(XC,90)=LINE (0,YC)-(640,YC)
30 RR=.75:R=23:FOR X=YC TO 90 STEP 10:PSET(XC+1,X):NEXT:FOR X=YC TO 0 STEP -10:P
SET(XC+1,X):NEXT:FOR X=XC TO 640 STEP R:PSET(X,YC-1):NEXT:FOR X=XC TO 0 STEP -R:
PSET(X,YC-1):NEXT:R=R/10
40 A=4:B=2:C=SQR(A*A-B*B):E=C/A:U=A/(B*R)
50 CIRCLE (XC,YC-(A+C)*10),2.5:CIRCLE (XC,YC-40),46,,,,U:LINE (XC-23*2.3,YC-40)-
(XC+20*2.3,YC-40):LINE (77,5)-(80,2):LINE -(83,5)
60 EQ=E*E:DEF FN IN(X)=1/(COS(X)^2*SQR(.75-SIN(X)^2))
70 CX=9.688*R:C1X=CX:CY=A*(1-E):C2X=8.3083*R:C3X=19.376*R:C4X=11.0677*R
80 ARC=1.047:FOR FI=0 TO ARC STEP .05:G=0:B1=FI
90 GOSUB 380:X=A*(SIN(FI)+TAN(FI)*SQR(EQ-SIN(FI)^2)+S*(1-EQ))*R
100 Y=A*(COS(FI)+SQR(EQ-SIN(FI)^2))
110 CIRCLE(X*10+XC,YC-10*Y),RR:NEXT:X1=X:LINE (XC+20,YC-20)-(XC+209,YC-20):LINE
(XC+49*2.3,YC)-(XC+49*2.3,YC-43)
120 V=B/(A*R):CIRCLE(XC+C2X*10,YC-B*10),2.5:CIRCLE (XC+10*C1X/2,YC-A/2*10),92,,,
,V
130 FOR FI=ARC-.05 TO 0 STEP -.1:G=FI:B1=.0001
140 GOSUB 380:X=A*(SIN(FI)-TAN(FI)*SQR(EQ-SIN(FI)^2)+S*(1-EQ))*R+C2X+3.2
150 Y=A*(COS(FI)-SQR(EQ-SIN(FI)^2))
160 CIRCLE(X*10+XC,YC-10*Y),RR:NEXT:X1=X:LINE (XC+97*2.3,YC+3)-(XC+97*2.3,YC-80)
:LINE (XC+78*2.3,YC-40)-(XC+120*2.3,YC-40)
170 CIRCLE (XC+CX*10,YC-CY*10),2.5:CIRCLE (XC+CX*10,YC-40),46,,,,U
180 FOR FI=0 TO ARC STEP .1:G=0:B1=FI
190 GOSUB 380:X=A*(-SIN(FI)+TAN(FI)*SQR(EQ-SIN(FI)^2)+S*(1-EQ))*R+X1
200 Y=A*(COS(FI)-SQR(EQ-SIN(FI)^2))
210 CIRCLE (X*10+XC,YC-10*Y),RR:NEXT:X1=X:LINE (XC+102*2.3,YC-20)-(XC+185*2.3,YC
-20):LINE (XC+145*2.3,YC+3)-(XC+145*2.3,YC-40)
220 CIRCLE (XC+10*C1X/2+C3X/2*10,YC-B*10),92,,,,V
230 CX=11.0677*R:CIRCLE(XC+CX*10,YC-B*10),2.5
240 FOR FI=ARC-.05 TO 0 STEP -.05:G=FI:B1=0
250 GOSUB 380:X=A*(-SIN(FI)-TAN(FI)*SQR(EQ-SIN(FI)^2)+S*(1-EQ))*R+2*C1X
260 Y=A*(COS(FI)+SQR(EQ-SIN(FI)^2))
270 CIRCLE (X*10+XC,YC-10*Y),RR:NEXT:LINE (XC+171*2.3,YC-40)-(XC+214*2.3,YC-40):
LINE (XC+194*2.3,YC)-(XC+194*2.3,YC-83)
280 GOSUB 380:X=A*(-SIN(0)-TAN(0)*SQR(EQ-SIN(0)^2)+S*(1-EQ))*R+2*C1X
290 Y=A*(COS(0)+SQR(EQ-SIN(0)^2))
300 CX=19.376*R:C3X=CX:CIRCLE(XC+CX*10,YC-(A+C)*10),2.5:CIRCLE(XC+CX*10,YC-40),4
6,,,,U
310 PSET(X*10+XC,YC-10*Y)
320 FOR FI=0 TO ARC STEP .05:G=0:B1=FI
330 GOSUB 380:X=A*(SIN(FI)+TAN(FI)*SQR(EQ-SIN(FI)^2)+S*(1-EQ))*R+C3X
340 Y=A*(COS(FI)+SQR(EQ-SIN(FI)^2))
350 CIRCLE(X*10+XC,YC-10*Y),RR:NEXT:X1=X
360 V=B/(A*R):CIRCLE(XC+C2X*10,YC-B*10),2.5:CIRCLE (XC+10*C1X/2,YC-A/2*10),92,,,
,V
370 A$=INKEY$:IF A$="" THEN 370 ELSE SCREEN 0:CLS
380 P=FN IN(G):I=P:O=10:D=1/(2*O)*(B1-G)
390 G=G+D:P=FN IN(G):I=I+4*P:G=G+D:P=FN IN(G):I=I+2*P:O=O-1:IF O<>0 THEN 390
400 G=B1:P=FN IN(G):S=1/3*D*(I-P):RETURN

```