Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Contribuições para a teoria de equações do p-Laplaciano evolutivo com termos advectivos

Patrícia Lisandra Guidolin

Tese de Doutorado

Porto Alegre, 25 de setembro de 2015.

Tese submetida por Patrícia Lisandra Guidolin[1] como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:
Dr. Paulo Ricardo de Avila Zingano (UFRGS)

Banca Examinadora:
Dr. Fábio Souto de Azevedo (UFRGS)
Dra. Janaína Pires Zingano (UFRGS)
Dr. Leonardo Prange Bonorino (UFRGS)
Dra. Lucinéia Fabris (UFSM)
Dr. Wilberclay Gonçalves Melo (UFS)

Data da Apresentação: 25 de setembro de 2015.

[1]Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Capes

Agradecimentos

Ao longo destes quatro anos de doutorado, muitas pessoas e instituições foram importantes e indispensáveis para a realização deste trabalho, e merecem a minha lembrança e agradecimento.

Primeiramente gostaria de agradecer ao meu orientador, Paulo Zingano, que me acolheu, confiou no meu trabalho e me transmitiu muitos ensinamentos, dentre eles, o gosto pela pesquisa.

Gostaria de agradecer também à banca examinadora, pela disponibilidade e ótimas sugestões, tornando este texto mais claro e preciso.

À UFRGS e ao CNPq, por todo o suporte técnico e financeiro.

Aos meus colegas e amigos, em especial, Nicolau e Jocemar, pela troca de conhecimento, momentos de estudo e descontração.

À minha família e aos demais amigos, que mesmo indiretamente me ajudaram, tornando a minha vida leve e divertida.

Ao meu melhor amigo e meu amor Fagner Rodriguês, que sempre me motiva e me apoia, acreditando em mim e me dando todo o suporte para realizar o meu trabalho com alegria e satisfação.

Conteúdo

Resumo

Neste trabalho, investigamos diversas propriedades de soluções limitadas de equações de difusão não linear com termos advectivos na forma conservativa, onde o mecanismo de difusão é dado pelo p - Laplaciano.

Dois problemas principais são considerados: no primeiro, o termo advectivo tem natureza dissipativa e como consequência as soluções são globalmente definidas e decaem a zero (em várias normas) ao $t \to \infty$. As taxas de decaimento obtidas neste caso, pela análise apresentada (uma variação do clássico método $L^p - L^q$) são optimais.

No segundo problema, considera-se o caso em que o termo advectivo estimula o crescimento da solução em certas regiões (ou mesmo no espaço todo), de modo a competir com a tendência de decaimento devido ao termo difusivo. O resultado desta interação é difícil de ser previsto fisicamente, e requer uma análise matemática cuidadosa para a precisão dos resultados. Em particular, que sob certas condições, a solução existe globalmente (embora possa ocorrer blow-up no infinito). A análise é centrada na obtenção de estimativas para a norma do sup, que (como mostramos) é determinada por normas mais baixas.

Abstract

In this work, we investigate several important properties of bounded solutions of nonlinear diffusion equation (where the diffusion mechanism is modeled by the p-Laplacian operator) in conservative form with the presence of first-order advective terms. Two major problems are considered: in the first, the advective term has a dissipative nature, which renders the solutions globally defined and decaying to zero (in several norms) as $t \to \infty$. The decay rates obtained in this case by our analysis (based on a variation of the $L^p - L^q$ approach) are optimal. In our second problem, we examine the case in which the advection term makes the solution grow in certain regions (or even everywhere), so as to oppose itself to the decaying tendency due to the diffusion term alone. The outcome of this interaction is hard to predict on physical grounds and requires a very careful mathematical analysis to be correctly assessed. In particular, we show that under certain important conditions the solution remains globally defined (even though blow-up at infinity may still happen). Our analysis is centered on deriving supnorm estimates for the solution by looking at the behavior of suitable lower norms.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Introdução

Neste trabalho vamos investigar algumas propriedades básicas, de soluções (clássicas, limitadas) do problema de difusão não linear com termo advectivo

$$u_t + \mathrm{div}\big(\boldsymbol{f}(x,t,u)\big) = \mu(t)\mathrm{div}\big(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\big) + \eta\Delta u, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0 \quad (1.1.1)$$

correspondentes a dados iniciais

$$u(\cdot,0) = u_0 \ \in \ L^{p_0}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n), \quad (1.1.2)$$

com $p > 2$, $1 \leq p_0 < \infty$, $\eta > 0$ constantes, $\mu \ \in C^0\big([0,\infty[\big)$ é uma função positiva, e a função $f \in C^0(\mathbb{R}^n \times [0,\infty) \times \mathbb{R})$ satisfazendo $f_{x_1}, ..., f_{x_n}, f_u \in C^0(\mathbb{R}^n \times [0,\infty) \times \mathbb{R})$ e alguma das condições abaixo:

$$\sum_{j=1}^{n} u\frac{\partial f_j}{\partial x_j}(x,t,u) \geq 0 \ \ \forall\ x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0 \text{ e } u \in \mathbb{R}, \quad (1.1.3)$$

ou

$$|f(x,t,u)| \leq B(t)|u|^{1+k} \ \ \forall\ x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0 \text{ e } u \in \mathbb{R}, \quad (1.1.4)$$

para uma certa constante $k \geq 0$, onde $B \in C^0([0,\infty[)$ é não negativa. O caso (1.1.3), por exemplo, inclui em particular, a equação

$$u_t + \mathrm{div} f(u) = \mu(t)\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + \eta\Delta u \ \ x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0,$$

para $f \in C^1(\mathbb{R})$ arbitrária.

Nosso objetivo é encontrar uma estimativa a priori para a norma do sup das soluções de (1.1.1), investigar blow-up e condições de existência global.

Em ambos os casos, (1.1.3) e (1.1.4), as soluções de (1.1.1) exibem (enquanto existirem) várias propriedades conhecidas de problemas parabólicos em forma conservativa, como por exemplo, regularidade, decrescimento na norma L^1, conservação de massa, contração e propriedades de comparação. Mas no caso (1.1.4), outras propriedades famíliares deixam, em geral, de serem válidas (decrescimento em norma L^q para $q > 1$, decaimento a zero em várias normas ao $t \to \infty$ em caso de existência global, etc). De fato, o problema (1.1.1)-(1.1.2)-(1.1.4), pode tornar-se muito complicado quando a condição (1.1.3) for violada, como indicaremos intuitivamente a seguir.

Considere, por exemplo, soluções $v(\cdot, t)$ não negativas do problema

$$\begin{cases} v_t + \operatorname{div}(b(x)v^{k+1}) = \operatorname{div}(|\nabla v|^{p-2}\nabla v) + \eta\Delta v \quad x \in \mathbb{R}^n \text{ e } t > 0, \\ \\ v(\cdot, 0) \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n), \end{cases} \tag{1.1.5}$$

podemos reescrever a equação na forma

$$v_t + (k+1)b(x)v^k\nabla v = \operatorname{div}(|\nabla v|^{p-2}\nabla v) + \eta\Delta v + \beta(x)v^{k+1} \tag{1.1.6}$$

onde $\beta(x) := -\operatorname{div}b(x)$. Supondo $\Omega \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : \beta(x) > 0\}$ seja não vazio, vê-se de (1.1.6) que $v(x,t)$ é estimulada a crescer nos pontos $x \in \Omega$, particularmente onde ocorrer $\beta(x) \gg 1$. Como (1.1.5) conserva massa, se $v(\cdot, t)$ crescer consideravelmente em alguma parte de Ω então o perfil de $v(\cdot, t)$ terá de afinar-se, tornando-se assim, mais suscetível aos efeitos dissipativos do termo difusivo presente no lado direito de (1.1.5). O efeito final sobre a solução (explosão ou não em tempo finito, existência global, comportamento ao $t \to \infty$ e etc) resultante dessa competição entre os termos do lado direito de (1.1.6) é difícil de ser previsto.

Para problemas (1.1.1)-(1.1.2)-(1.1.4) acima, é natural pensar com base na discussão anterior, que as soluções $u(\cdot, t)$ possam existir globalmente (isto é, estar definidas para todo $t > 0$) se $k \geq 0$ e $u_0 \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$ não forem grandes (em um sentido apropriado). Neste trabalho, resultados nesta direção serão obtidos.

Esta tese está organizada do seguinte modo: No capítulo 1, exibiremos notações, definições, funções auxiliares e funções de corte que serão usadas no decorrer deste trabalho, a fim de facilitar a leitura do texto.

No capítulo 2, mostraremos várias propriedades básicas das soluções $u(\cdot, t) \in L^\infty([0,T], L^\infty(\mathbb{R}^n)) \cap C^0([0,T], L^{p_0}(\mathbb{R}^n))$ do problema (1.1.1)-(1.1.2)-(1.1.4), com $p_0 = 1$ e $T \in (0, T_*)$, onde $[0, T_*)$ é o intervalo de existência maximal da solução. Em particular, é mostrado que se tem

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \quad \forall\, t \in [0,T_*). \tag{1.1.7}$$

Esta propriedade é fundamental para garantir a existência global do problema (1.1.1)-(1.1.2)-(1.1.4), no caso em que $k \geq 0$ satisfaz (1.1.11). Mostrando que a teoria desenvolvida no capítulo principal deste trabalho (capítulo 5) não é infundada.

No capítulo 3, onde tratamos da solução $u(\cdot,t) \in L^\infty([0,T_*), L^\infty(\mathbb{R}^n))$ do problema (1.1.1)-(1.1.2)-(1.1.3), obtemos o decaimento da norma L^q para todo $p_0 \leq q \leq \infty$, isto é,

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \|u_0\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \quad \forall\, t > 0, \tag{1.1.8}$$

garantindo a existência global da solução ($T_* = \infty$), veja [13], [18]. Além disso, $u(\cdot,t) \in C^0([0,T_*), L^{p_0}(\mathbb{R}^n))$ e vale a estimativa

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K(n,p,p_0)(t)^{-\frac{n}{n(p-2)+p_0p}} \|u_0\|_{L^{p_0}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{p_0p}{n(p-2)+p_0p}} \tag{1.1.9}$$

onde a constante $K(n,p,p_0) > 0$ é limitada, mas não optimal.

A estimativa (1.1.9) pode ser obtida por vários métodos, como por exemplo, desigualdades de Sobolev logarítmicas, outras desigualdades de energia, técnicas de Fourier splitting, ver [9],[17],[19] e [5] . Estas técnicas podem ser aplicadas mais geralmente (com mais ou menos dificuldade) para outras equações também. No nosso caso, usamos estimativas de energia, a desigualdade de Sobolev-Nirenberg-Gagliardo (ver [15]), e um simples processo de bootstrap.

Com o intuito de obter um controle da norma L^∞, no capítulo 4, é tomado um caminho distinto do que foi feito anteriormente, pois para o problema (1.1.1)-(1.1.2)-(1.1.4) não é garantida a propriedade (1.1.8) para $q > 1$ e $q \geq p_0$. Sendo assim, usando um novo método $L^p - L^q$, é obtido uma estimativa fundamental:

Teorema 1.1.1 (Teorema Principal). *Sejam $k \geq 0$, $p_0 \geq 1$ e $u(\cdot,t)$ solução do problema (1.1.1)-(1.1.2)-(1.1.4). Para cada $\bar{q}$ que satisfaz a condição $\bar{q} > \frac{n(k-p+2)}{p-1}$, $\bar{q} \geq p_0$, tem-se*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \\ \mathbf{K} \max\left\{ \|u(\cdot,t_0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}; \mathbb{B}_\mu(t_0;t)^{\frac{n}{\bar{q}(p-1)-n(k-p+2)}} \mathbb{U}_{\bar{q}}(t_0;t)^{\frac{\bar{q}(p-1)}{\bar{q}(p-1)-n(k-p+2)}} \right\}$$

para todo $0 \leq t_0 < t < T_*$, $\mathbf{K}$ *dependendo apenas de* $\bar{q}, n, p$ *e* k *e com* $\mathbb{B}_\mu(t_0;t)$ *e* $\mathbb{U}_{\bar{q}}(t_0;t)$ *definidas por*

$$\mathbb{B}(t_0;t) := \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \frac{B(\tau)}{\mu(\tau)} \quad e \quad \mathbb{U}_{\bar{q}}(t_0;t) := \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|u(\cdot,\tau)\|_{L^{\bar{q}}(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.1.10}$$

Neste caso, uma solução será garantidamente global quando conseguir ser mostrado que alguma (e então todas) de suas normas altas $L^{\bar{q}}$, $\bar{q} > \frac{n(k-p+2)}{p-1}$ não puder explodir em tempo finito. Em particular, é mostrado que se

$$k < p - 2 + \frac{p-1}{n} \tag{1.1.11}$$

então a solução $u(\cdot,t)$ do problema (1.1.1)-(1.1.2)-(1.1.4) acima é globalmente definida qualquer que seja a condição inicial $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, tendo-se $u(\cdot,t) \in C^0([0,\infty), L^1(\mathbb{R}^n)) \cap L^\infty_{loc}([0,\infty), L^\infty(\mathbb{R}^n))$. (Quando $k \geq p-2+\frac{p-1}{n}$, a existência global é garantida para u_0 apropriadamente pequena.)

A respeito do comportamento de $u(\cdot,t)$ para $t \gg 1$, não é garantido que haja decaimento (em geral), podendo existir soluções estacionárias. Este fato, por si só, já constitui um problema em aberto. Essa e outras questões são postas para o problema (1.1.1)-(1.1.2)-(1.1.4): no caso de soluções globalmente definidas, que condições gerais sobre f e u_0 impedem explosão (blow-up) no infinito, isto é, $u(\cdot,t) \in L^\infty([0,\infty), L^\infty(\mathbb{R}^n))$, ou condições garantindo decaimento assintótico ($\lim_{t\to\infty} \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = 0$), convergência a estados estacionários (quando existirem),e caso existam soluções estacionárias, se estas são estáveis, entre outras.

Uma observação importante acerca da função f é que esta poderia ser escrita de uma forma mais geral, por exemplo

$$h(x,t,u) = f(x,t,u) + g(t,u).$$

Como $g(t,u)$ não tem dependência espacial direta, não irá ocasionar maiores problemas nos cálculos que serão feitos, acabando por desaparecer. Sendo assim, nos atemos ao termo $f(x,t,u)$, que no capítulo 4 possui a propriedade (1.1.4). Tal propriedade pode nos levar a ideia errada de que o importante é a magnitude de f. Para corrigir essa falsa impressão, tomamos como exemplo a função $f(x,t,u) = b(x,t,u)|u|^k u$, com $|b(x,t,u)| \gg 1$, e definimos:

$$b_1 := \inf_{x\in\mathbb{R}^n} b(x,t,u), \quad b_2 := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} b(x,t,u) \quad \text{e } \beta(t) := \frac{b_1+b_2}{2}.$$

A princípio, pela hipótese (1.1.4), $|b(x,t,u)| \leq B(t)$, com $B(t) \gg 1$, mas podemos decompor a função f do seguinte modo:

$$f(x,t,u) = b(x,t,u)|u|^k u = (b(x,t,u) - \beta(t))|u|^k u + \beta(t)|u|^k u.$$

Com isso vemos que, pela decomposição acima, o termo de f importante a ser analisado é

$$\tilde{f}(x,t,u) := (b(x,t,u) - \beta(t))|u|^k u.$$

Isto nos faz perceber que o valor $B(t)$ está relacionado com a oscilação de f e não com sua magnitude. O Exemplo 1.1.5 que apresentamos acima mostra este fato.

1.2 Hipóteses e Notacões

Por *solução* do problema regularizado (1.1.1)-(1.1.2) num determinado intervalo de tempo $[0,T]$, para $0 < T < T_* \leq \infty$, consideramos a função $u(\cdot,t) \in L^\infty([0,T], L^\infty(\mathbb{R}^n))$, que resolve a equação (1.1.1) no sentido clássico para $0 < t < T < T_*$ e satisfaz a condição inicial (1.1.2) no sentido de $L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$ quando $t \to 0$, ou seja, satisfaz

$$\|u(\cdot,t) - u_0\|_{L^{p_0}(\mathbb{R}^n)} \to 0 \quad \text{quando} \quad t \to 0.$$

Como descrito na seção anterior, consideramos $[0,T_*)$, com $0 < T_* \leq \infty$, o intervalo maximal de existência da solução (a existência local de solução suave segue da teoria clássica de equações parabólicas, veja [13] e [18]). E para cada $0 < T < T_*$, a solução é limitada na faixa espaço-tempo $S_T := \mathbb{R}^n \times [0,T]$ com $\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq M(T)$, para todo $t \in [0,T]$.

1.3 Funções de Corte

Como função de corte, dados $R > 0$ e $0 < \epsilon \leq 1$, utilizaremos ζ_R, definida por

$$\zeta_R(x) := \begin{cases} e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} - e^{-\varepsilon\sqrt{1+R^2}}, & se \quad |x| < R \\ 0, & se \quad |x| \geq R. \end{cases} \tag{1.3.1}$$

Note que a função $\zeta_R(x)$ se anula em $|x| = R$, mas suas derivadas parciais de primeira e segunda não. Quanto às derivadas parciais, para $|x| \leq R$, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \zeta_R(x)}{\partial x_i} &= -\varepsilon\, e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}}\, \frac{x_i}{\sqrt{1+|x|^2}}, \\
\nabla \zeta_R(x) &= -\varepsilon\, e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}}\, \frac{\boldsymbol{x}}{\sqrt{1+|x|^2}},
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \zeta_R(x)}{(\partial x_i)^2} &= \frac{-\varepsilon\, e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}}}{\sqrt{1+|x|^2}} + \frac{\varepsilon\,(x_i)^2 e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}}}{\sqrt{(1+|x|^2)^3}} + \frac{\varepsilon^2 (x_i)^2 e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}}}{(1+|x|^2)}, \\
\Delta \zeta_R(x) &= \frac{-\varepsilon\, n\, e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}}}{\sqrt{1+|x|^2}} + \varepsilon\, e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}}\, \frac{|x|^2}{\sqrt{(1+|x|^2)^3}} + \varepsilon^2\, e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}}\, \frac{|x|^2}{(1+|x|^2)},
\end{aligned}$$

e, consequentemente, valem as seguintes estimativas:

$$|\nabla \zeta_R(x)| \leq \varepsilon\, e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}}; \quad \text{e} \tag{1.3.2}$$

$$|\Delta \zeta_R(x)| \leq \varepsilon\,(n+2)\, e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}}. \tag{1.3.3}$$

1.4 Funções Suavizadoras

Introduziremos algumas funções suavizadoras que serão utilizadas no decorrer do texto. Consideramos uma função $S \in C^1(\mathbb{R})$ tal que:

$$\begin{cases} S'(v) \geq 0, & \forall\ v; \\ S(0) = 0; \quad \text{e} & \\ S(v) = \operatorname{sgn}(v), & |v| \geq 1, \end{cases}$$

e para cada $\delta > 0$, construimos a função regularizadora

$$S_\delta(v) := S\Big(\frac{v}{\delta}\Big)$$

e definimos a seguinte função aproximação para $|u|$:

$$L_\delta(u) := \int_0^u S\Big(\frac{v}{\delta}\Big) dv. \tag{1.4.1}$$

Observamos que, quando $\delta \to 0$, temos que $S\Big(\dfrac{u}{\delta}\Big) \to \text{sgn}(u)$ e $L_\delta(u) \to |u|$, uniformemente em u. Além disso, dado $u \in \mathbb{R}$ e $\delta > 0$ fixo, temos:

$$0 \le L_\delta(u) \le |u|; \tag{1.4.2}$$

$$L'_\delta(u) \le C.\frac{|u|}{\delta}; \quad \text{e} \tag{1.4.3}$$

$$0 \le L''_\delta(u) \le \frac{C}{\delta}. \tag{1.4.4}$$

Outra importante propriedade de $L_\delta(u)$ é:

$$L_\delta(u).L''_\delta(u) \to 0, \qquad \text{quando } \delta \to 0. \tag{1.4.5}$$

Definimos também a seguinte função auxiliar:

$$\Phi_\delta(u) := \begin{cases} u^2, & \text{se} \quad q = 2 \\ \big(L_\delta(u)\big)^q, & \text{se} \quad q > 2, \end{cases} \tag{1.4.6}$$

onde $p_0 \le q < \infty$. Para $q > 2$, temos

$$\Phi'_\delta(u) = q\big(L_\delta(u)\big)^{q-1} L'_\delta(u); \quad \text{e} \tag{1.4.7}$$

$$\Phi''_\delta(u) = q(q-1)\big(L_\delta(u)\big)^{q-2}\big(L'_\delta(u)\big)^2 + q\big(L_\delta(u)\big)^{q-1} L''_\delta(u). \tag{1.4.8}$$

Seja $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1, tal que

$$H'(v) \ge 0, \quad \forall\, v \in \mathbb{R},$$

$$H(v) := \begin{cases} 0, & se \quad |v| \le 0, \\ 1, & se \quad |v| \ge 1, \end{cases}$$

e, para cada $\delta > 0$, construimos a função regularizadora

$$H_\delta(v) := H\Big(\frac{v}{\delta}\Big)$$

e definimos

$$G_\delta(u) := \int_0^u H\Big(\frac{v}{\delta}\Big) dv. \tag{1.4.9}$$

Não é difícil de mostrar que quando $\delta \to 0$ temos que $H\Big(\dfrac{u}{\delta}\Big) \to (u)_+$ uniformemente em u, onde $(u)_+$ denota a parte positiva de u. Além disso, o comportamento de $G_\delta(u)$ é semelhante ao comportamento de $L_\delta(u)$, e, $\forall\, u \in \mathbb{R}$

e $\delta > 0$ fixo,

$$
\begin{aligned}
&0 \leq G_\delta(u) \leq (u)_+ \leq |u|; \\
&G'_\delta(u) \leq C.\frac{|u|}{\delta}; \quad \text{e} \\
&0 \leq G''_\delta(u) \leq \frac{C}{\delta},
\end{aligned}
$$

e, quando $\delta \to 0$, é válida a seguinte convergência:

$$|u|.G''_\delta(u) \xrightarrow{\delta\to 0} 0.$$

1.5 Notações

Precisaremos mais adiante, para bem descrever os resultados principais desta tese, de algumas grandezas que definiremos a seguir:

$$\mathbb{B}_\mu(t_0;t) := \sup_{t_0\leq\tau\leq t} \frac{B(\tau)}{\mu(\tau)}, \qquad \text{para } t_0 \leq t < T_*, \tag{1.5.1}$$

e se $t_0 = 0$, escrevemos $\mathbb{B}_\mu(0;t) \equiv \mathbb{B}_\mu(t)$.

$$\mathbb{U}_p(t_0;t) := \sup_{t_0\leq\tau\leq t} \|u(\cdot,\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \qquad \text{para } 1 \leq p_0 \leq p \leq \infty, \tag{1.5.2}$$

e se $t_0 = 0$, escrevemos $\mathbb{U}_p(0;t) \equiv \mathbb{U}_p(t)$. Quando $T_* = \infty$, definimos também:

$$\mathbb{B}_\mu(t_0) := \sup_{\tau\geq t_0} \frac{B(\tau)}{\mu(\tau)}, \qquad \text{para } t_0 \geq 0, \tag{1.5.3}$$

$$\mathbb{U}_p(t_0) := \sup_{\tau\geq t_0} \|u(\cdot,\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \qquad \text{para } t_0 \geq 0 \ \text{ e } \ 1 \leq p_0 \leq p \leq \infty. \tag{1.5.4}$$

Capítulo 2

Algumas Propriedades Básicas

2.1 O problema p-Laplaciano evolutivo

Nesta seção vamos considerar o problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t + \operatorname{div}(f(x,t,u)) &= \mu(t)\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + \eta\Delta u \\ u(\cdot,0) &= u_0 \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n)\bigcap L^\infty(\mathbb{R}^n) \end{cases} \tag{2.1.1}$$

onde $p > 2$, $p_0 \geq 1$, $\mu \in C^0([0,\infty[)$ positiva e a função $f \in C^0(\mathbb{R}^n \times [0,\infty) \times \mathbb{R})$ satisfazendo $f_{x_1},...,f_{x_n}, f_u \in C^0(\mathbb{R}^n \times [0,\infty) \times \mathbb{R})$, e

$$|f(x,t,u)| \leq B(t)|u|^{k+1} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0, u \in \mathbb{R}, \tag{2.1.2}$$

para uma certa constante $k \geq 0$, onde $B \in C^0([0,\infty))$ é não negativa.

Estamos considerando sempre, $u(\cdot,t) \in L^\infty_{loc}([0,T_*), L^\infty(\mathbb{R}^n))$, onde $0 < T_* \leq \infty$, onde $[0,T_*)$ denota sempre o intervalo máximo de existência da solução $u(\cdot,t)$ considerada. Caso algumas desta hipóteses sejam retiradas, será observado no decorrer do texto.

2.2 Decrescimento da norma L^1

Nesta seção vamos estudar o caso $p_0 = 1$ para o problema (2.1.1).

Teorema 2.2.1. *Seja $u(\cdot,t)$ solução do problema de valor inicial* (2.1.1), *com $p_0 = 1$. Sabendo que $\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq M(T)$ para todo $t \in [0,T]$, e considerando as seguintes hipóteses adicionais,*

1. $u(\cdot,t) \in C([0,T], L^1(\mathbb{R}^n))$,

2. $\nabla u \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times [t_0, T])$.

Então
$$\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \quad \forall \;\; 0 < t \leq T,$$
onde $0 < T < T_*$.

Demonstração. Multiplicamos a Equação (2.1.1) por $L'_\delta(u)\zeta_R(x)$ e integramos na região $[t_0, t] \times \mathbb{R}^n$. Sabendo que $\zeta_R(x) = 0$ fora da bola de raio R, a equação fica

$$\underbrace{\int_{t_0}^t \int_{B_R} u_\tau L'_\delta(u)\zeta_R(x)dxd\tau}_{I} = \underbrace{-\int_{t_0}^t \int_{B_R} \operatorname{div}(f(x,\tau,u))L'_\delta(u)\zeta_R(x)dxd\tau}_{II}$$
$$+\underbrace{\int_{t_0}^t \mu(\tau)\int_{B_R} \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)L'_\delta(u)\zeta_R(x)dxd\tau}_{III} + \underbrace{\eta\int_{t_0}^t \int_{B_R} \Delta u L'_\delta(u)\zeta_R(x)dxd\tau}_{IV}. \tag{2.2.1}$$

Em I usamos o Teorema de Fubini, obtendo

$$\begin{aligned} I &= \int_{B_R}\int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial\tau}L_\delta(u)\zeta_R(x)d\tau dx \\ &= \int_{B_R} L_\delta(u(\cdot,t))\zeta_R(x)dx - \int_{B_R} L_\delta(u(\cdot,t_0))\zeta_R(x)dx. \end{aligned}$$

Em II, III e IV, usando o Teorema do Divergente, obtemos

$$\begin{aligned} II = &\int_{t_0}^t \int_{B_R} f(x,\tau,u)\cdot\nabla u\zeta_R(x)L''_\delta(u)dxd\tau \\ &+ \int_{t_0}^t \int_{B_R} f(x,\tau,u)\cdot\nabla\zeta_R(x)dxL'_\delta(u)d\tau. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} III = &-\int_{t_0}^t \mu(\tau)\int_{B_R} |\nabla u|^p L''_\delta(u)\zeta_R(x)dxd\tau \\ &- \int_{t_0}^t \mu(\tau)\int_{B_R} |\nabla u|^{p-2}L'_\delta(u)\nabla u\cdot\nabla\zeta_R(x)dxd\tau. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
IV &= -\eta\int_{t_0}^{t}\int_{B_R}|\nabla u|^2 L_\delta''(u)\zeta_R(x)dxd\tau-\eta\int_{t_0}^{t}\int_{B_R}\nabla(L_\delta(u))\cdot\nabla\zeta_R(x)dxd\tau\\
&= -\eta\int_{t_0}^{t}\int_{B_R}|\nabla u|^2 L_\delta''(u)\zeta_R(x)dxd\tau-\eta\int_{t_0}^{t}\int_{\partial B_R}L_\delta(u)\nabla\zeta_R(x)\cdot\frac{x}{R}dSd\tau\\
&+\eta\int_{t_0}^{t}\int_{B_R}L_\delta(u)\Delta\zeta_R(x)dxd\tau.
\end{aligned}
$$

Juntando todos os termos de forma conveniente, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\int_{B_R}L_\delta(u(x,t))\zeta_R(x)dx+\eta\int_{t_0}^{t}\int_{B_R}|\nabla u|^2L_\delta''(u)\zeta_R(x)dxd\tau\\
&+\int_{t_0}^{t}\mu(\tau)\int_{B_R}|\nabla u|^pL_\delta''(u)\zeta_R(x)dxd\tau=\int_{B_R}L_\delta(u(x,t_0))\zeta_R(x)dx\\
&+\int_{t_0}^{t}\int_{B_R}L_\delta''(u)f(x,\tau,u)\cdot\nabla u\zeta_R(x)dxd\tau+\int_{t_0}^{t}\int_{B_R}L_\delta'(u)f(x,\tau,u)\cdot\nabla\zeta_R(x)dxd\tau\\
&-\int_{t_0}^{t}\mu(\tau)\int_{B_R}|\nabla u|^{p-2}L_\delta'(u)\nabla u\cdot\nabla\zeta_R(x)dxd\tau-\eta\int_{t_0}^{t}\int_{\partial B_R}L_\delta(u)\nabla\zeta_R(x)\cdot\frac{x}{R}dSd\tau\\
&+\eta\int_{t_0}^{t}\int_{B_R}L_\delta(u)\Delta\zeta_R(x)dxd\tau. \qquad (2.2.2)
\end{aligned}
$$

Sabendo que $|f(x,t,u)|\leq B(t)|u|^{k+1}$, $|\nabla\zeta_R|\leq\epsilon e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}$ e $|\Delta\zeta_R|\leq n\epsilon e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}$, podemos majorar o lado direito da igualdade (2.2.2), obtendo

$$
\begin{aligned}
&\int_{B_R}L_\delta(u(x,t))\zeta_R(x)dx+\eta\int_{t_0}^{t}\int_{B_R}|\nabla u|^2L_\delta''(u)\zeta_R(x)dxd\tau\\
&+\int_{t_0}^{t}\mu(\tau)\int_{B_R}|\nabla u|^pL_\delta''(u)\zeta_R(x)dxd\tau\leq\int_{B_R}L_\delta(u(x,t_0))\zeta_R(x)dx\\
&+\int_{t_0}^{t}\int_{B_R}B(\tau)|u|^{k+1}L_\delta''(u)|\nabla u|\zeta_R(x)dxd\tau+\epsilon\int_{t_0}^{t}\int_{B_R}B(\tau)|u|^{k+1}|L_\delta'(u)|e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}dxd\tau\\
&+\epsilon\int_{t_0}^{t}\mu(\tau)\int_{B_R}|\nabla u|^{p-1}|L_\delta'(u)|e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}dxd\tau+\epsilon\eta\int_{t_0}^{t}\int_{\partial B_R}L_\delta(u)e^{-\epsilon\sqrt{1+R^2}}dSd\tau\\
&+n\epsilon\eta\int_{t_0}^{t}\int_{B_R}L_\delta(u)e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}dxd\tau. \qquad (2.2.3)
\end{aligned}
$$

Como $\int_{t_0}^{t}\mu(\tau)\int_{B_R}|\nabla u|^pL_\delta''(u)\zeta_R(x)dxd\tau\geq 0$ para todo $R>0$, podemos descartar este termo, mantendo a desigualdade. Além disso, usando desigualdade de Young no segundo termo do lado direito da desigualdade, com parâmetro $\frac{\eta}{2}$, então (2.2.3) fica,

$$\begin{aligned}
&\int_{B_R} L_\delta(u(x,t))\zeta_R(x)dx + \eta\int_{t_0}^{t}\int_{B_R} |\nabla u|^2 L''_\delta(u)\zeta_R(x)dxd\tau \\
&\leq \int_{B_R} L_\delta(u(x,t_0))\zeta_R(x)dx + \frac{\eta}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{B_R} |\nabla u|^2 L''_\delta(u)\zeta_R(x)dxd\tau \\
&+ \frac{1}{2\eta}\int_{t_0}^{t}\int_{B_R} B(\tau)^2|u|^{2k+2}L''_\delta(u)\zeta_R(x)dxd\tau + \epsilon\int_{t_0}^{t}\int_{B_R} B(\tau)|u|^{k+1}|L'_\delta(u)|e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}dxd\tau \\
&+ \epsilon\int_{t_0}^{t}\mu(\tau)\int_{B_R}|\nabla u|^{p-1}|L'_\delta(u)|e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}dxd\tau + \epsilon\eta\int_{t_0}^{t}\int_{\partial B_R} L_\delta(u)e^{-\epsilon\sqrt{1+R^2}}dSd\tau \\
&+ n\epsilon\eta\int_{t_0}^{t}\int_{B_R} L_\delta(u)e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}dxd\tau. \qquad (2.2.4)
\end{aligned}$$

Notamos então que pelas propriedade da função $L_\delta(u)$, $L_\delta(u) \leq |u| \leq \|u\|_\infty \leq M(T)$, $|L'_\delta(u)| \leq \frac{C}{\delta}|u|$ e também $|L'_\delta(u)| \leq 1$. Assim, podemos reescrever (2.2.4) da seguinte forma

$$\begin{aligned}
&\int_{B_R} L_\delta(u(x,t))\zeta_R(x)dx + \frac{\eta}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{B_R} |\nabla u|^2 L''_\delta(u)\zeta_R(x)dxd\tau \\
&\leq \int_{B_R} L_\delta(u(x,t_0))\zeta_R(x)dx + \frac{M(T)^{2k}}{2\eta}\int_{t_0}^{t} B(\tau)^2\int_{B_R}|u|^2 L''_\delta(u)\zeta_R(x)dxd\tau \\
&+ \epsilon M(T)^k\int_{t_0}^{t} B(\tau)\int_{B_R}|u|e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}dxd\tau + \epsilon\frac{C}{\delta}\int_{t_0}^{t}\mu(\tau)\int_{B_R}|\nabla u|^{p-1}|u|e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}dxd\tau \\
&+ \epsilon\eta M(T)e^{-\epsilon\sqrt{1+R^2}}\int_{t_0}^{t}\int_{\partial B_R} dSd\tau + n\epsilon\eta\int_{t_0}^{t}\int_{B_R}|u|e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}dxd\tau. \quad (2.2.5)
\end{aligned}$$

Eliminando o termo $\frac{\eta}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{B_R}|\nabla u|^2 L''_\delta(u)\zeta_R(x)dxd\tau \geq 0$, usando a hipótese do teorema, $\nabla u \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times [t_0, T])$, e aplicando o Teorema da Convergência Monótona, ao fazer $R \to \infty$, a desigualdade (2.2.5) fica

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(u(x,t))e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(u(x,t_0))e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}dx\\
&+ \frac{M(T)^{2k}}{2\eta}\int_{t_0}^{t} B(\tau)^2 \int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 L''_\delta(u)e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}dxd\tau\\
&+ \epsilon M(T)^k \int_{t_0}^{t} B(\tau)\int_{\mathbb{R}^n}|u|e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}dxd\tau\\
&+ \epsilon\frac{\tilde{C}}{\delta}\int_{t_0}^{t}\mu(\tau)\int_{\mathbb{R}^n}|u|e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}dxd\tau\\
&+ n\epsilon\eta\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^n}|u|e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}dxd\tau \qquad (2.2.6)\end{aligned}$$

Já que $\epsilon\eta M(T)e^{-\epsilon\sqrt{1+R^2}}\int_{t_0}^{t}\int_{\partial B_R} dSd\tau \to 0$ ao $R\to\infty$.
Agora fazemos $\epsilon\to 0$, usando o Teorema da Convergência Monótona, e nos três últimos termos, o fato da solução $u(\cdot,t)\in L^1(\mathbb{R}^n)$ em $[0,T]$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(u(x,t))dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(u(x,t_0))dx \qquad (2.2.7)\\
&+ \frac{M(T)^{2k}}{2\eta}\int_{t_0}^{t} B(\tau)^2\int_{\mathbb{R}^n}|u|^2 L''_\delta(u)dxd\tau.\end{aligned}$$

Como $|u|L''_\delta(u)\leq C_1$ uniformemente em δ, e $L''_\delta(u)\to 0$ quando $u\neq 0$, usamos que $u(\cdot,t)$ é integrável e aplicamos o Teorema da Convergencia Dominada. Ao fazer $\delta\to 0$, a desigualdade (2.2.7) fica

$$\int_{\mathbb{R}^n}|u(x,t)|dx \leq \int_{\mathbb{R}^n}|u(x,t_0)|dx. \qquad (2.2.8)$$

Usando a hipótese 1 do teorema, concluímos o decrescimento da norma L^1,

$$\|u(x,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \qquad (2.2.9)$$

□

Para ilustrar graficamente estas propriedades, com o auxílio do Matlab, podemos observar o comportamento da solução $u(\cdot,t)$ (suave), correspondente ao problema

$$\begin{cases} u_t + (b(x,t)|u|^{k+1})_x &= (|u_x|^{p-2}u_x)_x + \eta u_{xx} \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [0, T_*) \\ u(\cdot, 0) &= u_0 \end{cases} \tag{2.2.10}$$

onde

$$u_0 := \begin{cases} 0, & se \quad x < -4, \\ \frac{x^3 - 2x^2 - 16x + 32}{50}, & se \quad -4 \leq x \leq 4, \\ 0, & se \quad x > 4. \end{cases}$$

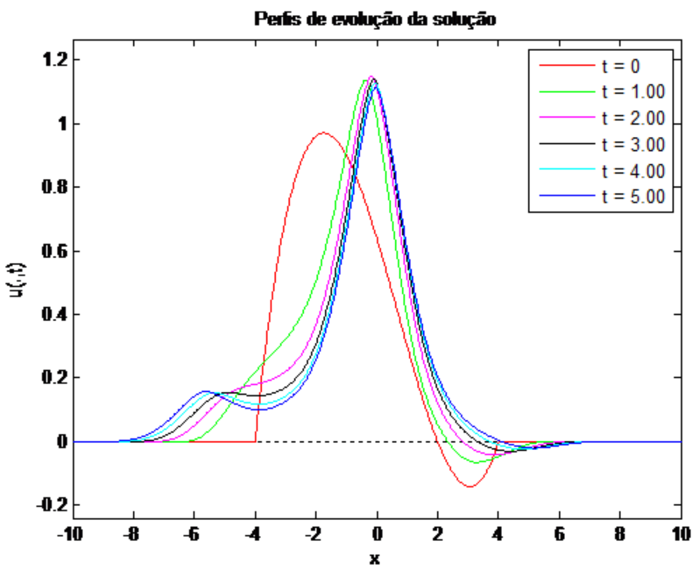

Figura 2.1: Representação da evolução da solução u do Problema (2.2.10), para $b(x,t) = -sen(x), \eta = 0.01, p = 2.5$ e $k = 0.5$.

2.3 Contração na norma L^1

Para o próximo teorema, consideramos os problemas de valor inicial, dados por

$$\begin{cases} u_t + \operatorname{div}(f(x,t,u)) &= \mu(t)\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + \eta \Delta u \\ u(\cdot, 0) &= u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \end{cases} \tag{2.3.1}$$

e

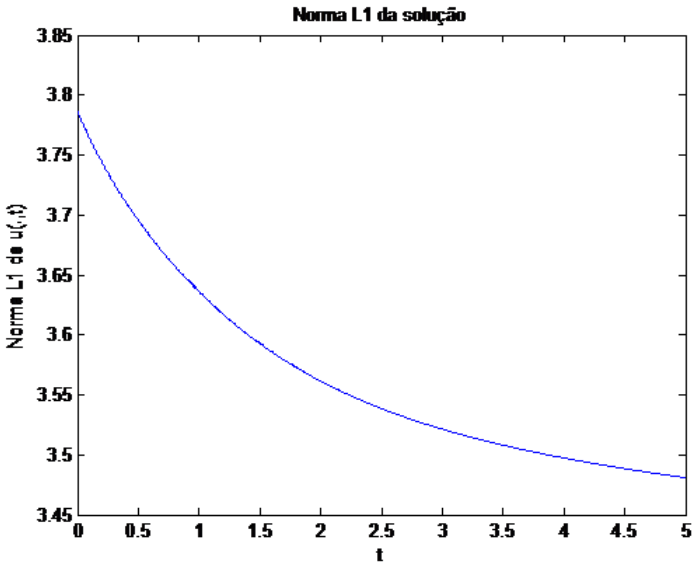

Figura 2.2: Representação do decrescimento da norma L^1 da solução u do Problema (2.2.10), para $b(x,t) = -sen(x), \eta = 0.01, p = 2.5$ e $k = 0.5$.

$$\begin{cases} v_t + \text{div}(f(x,t,v)) &= \mu(t)\text{div}(|\nabla v|^{p-2}\nabla v) + \eta\Delta v \\ v(\cdot,0) &= v_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \end{cases} \tag{2.3.2}$$

onde $u_0 - v_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $|f(x,t,u) - f(x,t,v)| \leq F_M(T)|u-v|$, $\|u(\cdot,t)\|_\infty \leq M(T)$ e $\|v(\cdot,t)\|_\infty \leq M(T)$ para todo $t \in [0,T]$.

Teorema 2.3.1. *Sejam $u(\cdot,t), v(\cdot,t)$ soluções limitadas dos problemas de valor inicial (2.3.1) e (2.3.2) respectivamente, ou seja, $\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq M(T)$ e $\|v(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq M(T)$. Além disso, ∇u e $\nabla v \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times [t_0,T])$, $0 < t_0 \leq T$ e $u(\cdot,t) - v(\cdot,t) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ com $\|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq M_1(T)$, $\forall\ 0 \leq t \leq T$, então*

$$\|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|u(\cdot,t_0) - v(\cdot,t_0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)},\ \forall\ 0 < t_0 \leq t \leq T. \tag{2.3.3}$$

Se $u(\cdot,t) - v(\cdot,t) \in C([0,T], L^1(\mathbb{R}^n))$, concluímos ainda que

$$\|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|u_0 - v_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)},\ \forall\ 0 \leq t \leq T. \tag{2.3.4}$$

Demonstração. Definimos $\theta := u - v$. Subtraindo as Equações (2.3.1) e (2.3.2), obtemos

$$\theta_t + \mathrm{div}\tilde{f}(x,t,\theta) = \mu(t)\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v) + \eta\Delta\theta, \tag{2.3.5}$$

onde $\tilde{f}(x,t,\theta) := f(x,t,u) - f(x,t,v)$. Agora multiplicamos a equação (2.3.5) por $L'_\delta(\theta)\zeta_R(x)$ e integramos na região $[t_0,t] \times \mathbb{R}^n$, como feito no teorema anterior, obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{t}\int_{B_R} \theta_\tau L'_\delta(\theta)\zeta_R(x)dxd\tau = -\int_{t_0}^{t}\int_{B_R} \mathrm{div}\tilde{f}(x,\tau,\theta)L'_\delta(\theta)\zeta_R(x)dxd\tau \\
&+ \int_{t_0}^{t}\mu(\tau)\int_{B_R} \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v)L'_\delta(\theta)\zeta_R(x)dxd\tau \\
&+ \eta\int_{t_0}^{t}\int_{B_R} \Delta\theta L'_\delta(\theta)\zeta_R(x)dxd\tau.
\end{aligned} \tag{2.3.6}$$

Usando Teorema de Fubini no primeiro termo e o Teorema do Divergente nos demais termos, obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_{B_R} L_\delta(\theta(x,t))\zeta_R(x)dx \\
&\underbrace{+ \int_{t_0}^{t}\mu(\tau)\int_{B_R} L''_\delta(\theta)(|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v)\cdot\nabla\theta\zeta_R(x)dxd\tau}_{a} \\
&+ \eta\int_{t_0}^{t}\int_{B_R} L''_\delta(\theta)|\nabla\theta|^2\zeta_R(x)dxd\tau = \int_{B_R} L_\delta(\theta(x,t_0))\zeta_R(x)dx \\
&+ \int_{t_0}^{t}\int_{B_R} \tilde{f}(x,\tau,\theta)\cdot\nabla\theta L''_\delta(\theta)\zeta_R(x)dxd\tau \\
&+ \int_{t_0}^{t}\int_{B_R} L'_\delta(\theta)\tilde{f}(x,\tau,\theta)\cdot\nabla\zeta_R(x)dxd\tau \\
&- \int_{t_0}^{t}\mu(\tau)\int_{B_R} L'_\delta(\theta)(|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v)\cdot\nabla\zeta_R(x)dxd\tau \\
&+ \eta\int_{t_0}^{t}\int_{B_R} L_\delta(\theta)\Delta\zeta_R(x)dxd\tau - \eta\int_{t_0}^{t}\int_{\partial B_R} L_\delta(\theta)\nabla\zeta_R(x)\cdot\frac{x}{R}dSd\tau.
\end{aligned} \tag{2.3.7}$$

Pelo argumento de simetrização que pode ser visto abaixo, provamos que

$$a = \int_{t_0}^{t}\mu(\tau)\int_{B_R} (|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v)L''_\delta(\theta)\nabla\theta\zeta_R(x)dxd\tau \geq 0 \tag{2.3.8}$$

Argumento de Simetrização:

Como

$$\begin{aligned}
&\langle |\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v, \nabla\theta\rangle \\
&= \langle |\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v + |\nabla v|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla u, \nabla\theta\rangle \\
&= |\nabla v|^{p-2}\langle \nabla\theta, \nabla\theta\rangle + \big(|\nabla u|^{p-2} - |\nabla v|^{p-2}\big)\langle \nabla u, \nabla\theta\rangle \\
&= |\nabla v|^{p-2}|\nabla\theta|^2 + \big(|\nabla u|^{p-2} - |\nabla v|^{p-2}\big)\big(|\nabla u|^2 - \langle \nabla u, \nabla v\rangle\big),
\end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned}
a = &\int_{t_0}^{t}\mu(\tau)\int_{B_R}|\nabla v|^{p-2}|\nabla\theta|^2 L_\delta''(\theta)\zeta_R(x)dxd\tau \\
&+ \int_{t_0}^{t}\mu(\tau)\int_{B_R}\big(|\nabla u|^{p-2} - |\nabla v|^{p-2}\big)\big(|\nabla u|^2 - \langle \nabla u, \nabla v\rangle\big)L_\delta''(\theta)\zeta_R dxd\tau.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
&\langle |\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v, \nabla\theta\rangle = \\
&\langle |\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v + |\nabla u|^{p-2}\nabla v - |\nabla u|^{p-2}\nabla v, \nabla\theta\rangle = \\
&|\nabla u|^{p-2}\langle \nabla\theta, \nabla\theta\rangle + \big(|\nabla u|^{p-2} - |\nabla v|^{p-2}\big)\langle \nabla v, \nabla\theta\rangle = \\
&|\nabla u|^{p-2}|\nabla\theta|^2 + \big(|\nabla u|^{p-2} - |\nabla v|^{p-2}\big)\big(-|\nabla v|^2 + \langle \nabla u, \nabla v\rangle\big),
\end{aligned}$$

logo também podemos escrever que

$$\begin{aligned}
a = &\int_{t_0}^{t}\mu(\tau)\int_{B_R}|\nabla u|^{p-2}|\nabla\theta|^2 L_\delta''(\theta)\zeta_R dxd\tau \\
&+ \int_{t_0}^{t}\mu(\tau)\int_{B_R}\big(|\nabla u|^{p-2} - |\nabla v|^{p-2}\big)\big(-|\nabla v|^2 + \langle \nabla u, \nabla v\rangle\big)L_\delta''(\theta)\zeta_R dxd\tau.
\end{aligned}$$

Fazendo $\dfrac{a+a}{2}$ para as duas igualdades para a acima, obtemos

$$\begin{aligned}
a = &\int_{t_0}^{t}\mu(\tau)\int_{B_R}\frac{|\nabla u|^{p-2} + |\nabla v|^{p-2}}{2}|\nabla\theta|^2 L_\delta''(\theta)\zeta_R dxd\tau \\
&+ \int_{t_0}^{t}\mu(\tau)\int_{B_R}\big(|\nabla u|^{p-2} - |\nabla v|^{p-2}\big)\frac{|\nabla u|^2 - |\nabla v|^2}{2}L_\delta''(\theta)\zeta_R dxd\tau \geq 0.
\end{aligned}$$

Desta forma, podemos retirar este termo, obtendo uma desigualdade e ainda majorar o seu lado direito. Assim (2.3.7) fica

$$
\begin{aligned}
&\int_{B_R} L_\delta(\theta(x,t))\zeta_R(x)dx \\
&+\eta\int_{t_0}^{t}\int_{B_R} L''_\delta(\theta)|\nabla\theta|^2\zeta_R(x)dxd\tau \le \int_{B_R} L_\delta(\theta(x,t_0))\zeta_R(x)dx \\
&+\int_{t_0}^{t}\int_{B_R} |\tilde{f}(x,\tau,\theta)||\nabla\theta|L''_\delta(\theta)\zeta_R(x)dxd\tau \\
&+\int_{t_0}^{t}\int_{B_R} |\tilde{f}(x,\tau,\theta)||L'_\delta(\theta)||\nabla\zeta_R(x)|dxd\tau \\
&+\int_{t_0}^{t}\mu(\tau)\int_{B_R} ||\nabla u|^{p-2}\nabla u-|\nabla v|^{p-2}\nabla v||L'_\delta(\theta)||\nabla\zeta_R(x)|dxd\tau \\
&+\eta\int_{t_0}^{t}\int_{B_R} L_\delta(\theta)|\Delta\zeta_R(x)|dxd\tau+\eta\int_{t_0}^{t}\int_{\partial B_R} L_\delta(\theta)|\nabla\zeta_R(x)|dSd\tau. \qquad (2.3.9)
\end{aligned}
$$

Lembrando que $|\nabla\zeta(x)| \le \epsilon e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}$, $|\Delta\zeta(x)| \le n\epsilon e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}$, $L'_\delta(\theta) \le 1$ e no antepenúltimo termo usamos a propriedade $L'_\delta(\theta) \le \dfrac{C}{\delta}|\theta|$ e a hipótese sobre o gradiente de u e v, garantindo $||\nabla u|^{p-2}\nabla u-|\nabla v|^{p-2}\nabla v| \le C(t_0,T)$. A Desigualdade (2.3.9) fica,

$$
\begin{aligned}
&\int_{B_R} L_\delta(\theta(x,t))\zeta_R(x)dx+\eta\int_{t_0}^{t}\int_{B_R} L''_\delta(\theta)|\nabla\theta|^2\zeta_R(x)dxd\tau \\
&\le \int_{B_R} L_\delta(\theta(x,t_0))\zeta_R(x)dx \\
&+\int_{t_0}^{t}\int_{B_R} |\tilde{f}(x,\tau,\theta)||\nabla\theta|L''_\delta(\theta)\zeta_R(x)dxd\tau \\
&+\epsilon\int_{t_0}^{t}\int_{B_R} |\tilde{f}(x,\tau,\theta)|e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}dxd\tau \\
&+\epsilon\frac{C}{\delta}C(t_0,T)\int_{t_0}^{t}\mu(\tau)\int_{B_R} |\theta|e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}dxd\tau \\
&+\epsilon n\eta\int_{t_0}^{t}\int_{B_R} L_\delta(\theta)e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}dxd\tau \\
&+\epsilon\eta e^{-\epsilon\sqrt{1+R^2}}\int_{t_0}^{t}\int_{\partial B_R} L_\delta(\theta)dSd\tau. \qquad (2.3.10)
\end{aligned}
$$

Agora, usando a hipótese

$$|\tilde{f}(x,t,\theta)| = |f(x,t,u) - f(x,t,v)| \leq F_M(T)|u-v| = F_M(T)|\theta|$$

e a seguinte desigualdade de Young:

$$\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{t}\int_{B_R} |\tilde{f}(x,\tau,\theta)||\nabla\theta|L''_\delta(\theta)\zeta_R(x)dxd\tau \\
&\leq \int_{t_0}^{t}\int_{B_R} F_M(T)|\theta||\nabla\theta|L''_\delta(\theta)\zeta_R(x)dxd\tau \\
&\leq \int_{t_0}^{t}\int_{B_R} \left(\frac{1}{2\eta}F_M^2(T)|\theta|^2 + \frac{\eta}{2}|\nabla\theta|^2\right) L''_\delta(\theta)\zeta_R(x)dxd\tau.
\end{aligned}$$

A Desigualdade (2.3.10) fica

$$\begin{aligned}
&\int_{B_R} L_\delta(\theta(x,t))\zeta_R(x)dx + \frac{\eta}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{B_R} L''_\delta(\theta)|\nabla\theta|^2\zeta_R(x)dxd\tau \\
&\leq \int_{B_R} L_\delta(\theta(x,t_0))\zeta_R(x)dx \\
&+ \frac{F_M^2(T)}{2\eta}\int_{t_0}^{t}\int_{B_R} |\theta|^2 L''_\delta(\theta)\zeta_R(x)dxd\tau \\
&+ \epsilon F_M(T)\int_{t_0}^{t}\int_{B_R} |\theta|e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}dxd\tau \\
&+ \epsilon\frac{C}{\delta}C(t_0,T)\int_{t_0}^{t}\mu(\tau)\int_{B_R} |\theta|e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}dxd\tau \\
&+ \epsilon n\eta\int_{t_0}^{t}\int_{B_R} L_\delta(\theta)e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}dxd\tau \\
&+ \epsilon\eta e^{-\epsilon\sqrt{1+R^2}}\int_{t_0}^{t}\int_{\partial B_R} L_\delta(\theta)dSd\tau. \qquad (2.3.11)
\end{aligned}$$

Aplicando o Teorema da Convergência Monótona ao fazer $R \to \infty$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(\theta(x,t))e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}dx + \frac{\eta}{2}\int_{t_0}^t\int_{\mathbb{R}^n} L''_\delta(\theta)|\nabla\theta|^2 e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}dxd\tau \tag{2.3.12}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(\theta(x,t_0))e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}dx \\
&+ \frac{F_M^2(T)}{2\eta}\int_{t_0}^t\int_{\mathbb{R}^n} |\theta|^2 L''_\delta(\theta)e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}dxd\tau \\
&+ \epsilon F_M(T)\int_{t_0}^t\int_{\mathbb{R}^n} |\theta| e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}dxd\tau \\
&+ \epsilon\frac{C}{\delta}C(t_0,T)\int_{t_0}^t \mu(\tau)\int_{\mathbb{R}^n} |\theta| e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}dxd\tau \\
&+ \epsilon n\eta\int_{t_0}^t\int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(\theta)e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}dxd\tau.
\end{aligned} \tag{2.3.13}$$

Já que

$$\lim_{R\to\infty} \epsilon\eta e^{-\epsilon\sqrt{1+R^2}}\int_{t_0}^t\int_{\partial B_R} L_\delta(\theta)dSd\tau = 0.$$

Fazendo $\epsilon \to 0$, usando o Teorema da Convergência Monótona, e sabendo que $L_\delta(\theta) \leq |\theta|$ e $\theta \in L^1(\mathbb{R}^n)$, a desigualdade (2.3.12) fica

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(\theta(x,t))dx + \frac{\eta}{2}\int_{t_0}^t\int_{\mathbb{R}^n} L''_\delta(\theta)|\nabla\theta|^2 dxd\tau &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\theta(x,t_0)|dx \\
&+ \frac{F_M^2(T)}{2\eta}\int_{t_0}^t\int_{\mathbb{R}^n} |\theta|^2 L''_\delta(\theta)dxd\tau.
\end{aligned} \tag{2.3.14}$$

Como $\frac{\eta}{2}\int_{t_0}^t\int_{\mathbb{R}^n} L''_\delta(\theta)|\nabla\theta|^2 dxd\tau \geq 0$, podemos eliminar este termo. Lembrando que $|\theta|L''_\delta(\theta)$ é uniformemente limitado e que, para $\theta \neq 0$, $L''_\delta(\theta) \to 0$ ao $\delta \to 0$, usando o Teorema da Convergêcia Dominada, concluímos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\theta(x,t)|dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\theta(x,t_0)|dx \tag{2.3.15}$$

demonstrando o teorema.

□

2.4 Conservação de Massa

Com o objetivo de provar a propriedade de conservação de massa para solução $u(\cdot, t)$ do problema (2.1.1), vamos introduzir uma solução v do problema

$$\begin{cases} v_t + \text{div}(f(x,t,v)) = \mu(t)\text{div}(|\nabla v|^{p-2}\nabla v) + \eta\Delta v \\ v(\cdot, 0) = v_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \end{cases} \tag{2.4.1}$$

e mostrar que v conserva massa. Depois, faremos uso da propriedade de contração para concluir que u também conserva massa.

Teorema 2.4.1. *Seja $u(\cdot, t)$ solução do problema (2.1.1), com $u(\cdot, t) \in C([0,T], L^1(\mathbb{R}^n))$ e $\nabla u \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times [t_0, T])$, então vale a propriedade de conservação de massa, isto é,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x,t)dx = \int_{\mathbb{R}^n} u_0 dx. \tag{2.4.2}$$

Demonstração. Primeiro, notamos que como $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$, existe uma sequência $v_0^m \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ que converge na norma L^1 para u_0. Sendo assim, dado um $\hat{\epsilon} > 0$, existe $v_0 := v_0^{\hat{m}}$, tal que

$$\|u_0 - v_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \hat{\epsilon}. \tag{2.4.3}$$

Tomando v_0 como condição inicial do problema (2.4.1), com a solução $v(\cdot, t)$ satisfazendo

1. $v(\cdot, t) \in C([0,T], L^1(\mathbb{R}^n)) \cap L^\infty([0,T], L^\infty(\mathbb{R}^n))$;
2. $\nabla v \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times [t_0, T])$;
3. $\displaystyle\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^{p-1} dxdt < \infty$.

Podemos usar o Teorema 2.3.1, garantindo a contração:

$$\|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|u_0 - v_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.4.4}$$

Afirmação: A solução $v(\cdot, t)$ conserva massa.

Antes de provarmos a conservação de massa da solução $u(\cdot, t)$, vamos provar a conservação de massa para a solução $v(\cdot, t)$ que possui mais regularidade. Para isto, multiplicamos a equação (2.4.1) pela função de corte $\zeta_R(x)$, e integramos na região $[t_0, t] \times \mathbb{R}^n$, obtendo

$$\int_{t_0}^{t}\int_{B_R} v_\tau \zeta_R(x)dxd\tau = -\int_{t_0}^{t}\int_{B_R} \operatorname{div}(f(x,\tau,v))\zeta_R(x)dxd\tau \tag{2.4.5}$$
$$+\int_{t_0}^{t}\mu(\tau)\int_{B_R}\operatorname{div}(|\nabla v|^{p-2}\nabla v)\zeta_R(x)dxd\tau + \eta\int_{t_0}^{t}\int_{B_R}\Delta v\zeta_R(x)dxd\tau.$$

Com os mesmos cálculos feitos anteriormente, a igualdade (2.4.5) fica

$$\int_{B_R} v(x,t)\zeta_R(x)dx = \int_{B_R} v(x,t_0)\zeta_R(x)dx + \int_{t_0}^{t}\int_{B_R} f(x,\tau,v)\cdot\nabla\zeta_R(x)dxd\tau$$
$$-\int_{t_0}^{t}\mu(\tau)\int_{B_R}(|\nabla v|^{p-2}\nabla v)\cdot\nabla\zeta_R(x)dxd\tau + \eta\int_{t_0}^{t}\int_{B_R} v(x,\tau)\Delta\zeta_R(x)dxd\tau$$
$$-\eta\int_{t_0}^{t}\int_{\partial B_R} v(x,\tau)\nabla\zeta_R(x)\cdot\frac{x}{R}dSd\tau. \tag{2.4.6}$$

Lembrando que $\nabla\zeta_R = \epsilon e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}O_1(x)$ e $\Delta\zeta_R = \epsilon e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}O_2(x)$, onde $O_1(x)$ e $O_2(x)$ são limitadas para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Fazemos $R \to \infty$, aplicando o Teorema da Converegência Dominada, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} v(x,t)e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}dx = \int_{\mathbb{R}^n} v(x,t_0)e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}dx$$
$$+\epsilon\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^n} f(x,\tau,v)e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}O_1(x)dxd\tau$$
$$-\epsilon\int_{t_0}^{t}\mu(\tau)\int_{\mathbb{R}^n}(|\nabla v|^{p-2}\nabla v)e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}O_1(x)dxd\tau$$
$$+\eta\epsilon\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^n} v(x,\tau)e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}O_2(x)dxd\tau. \tag{2.4.7}$$

Pelas hipóteses de $v(\cdot,t)$ garantimos que as últimas três integrais são finitas. Desta forma, fazendo $\epsilon \to 0$, a igualdade (2.4.7) fica

$$\int_{\mathbb{R}^n} v(x,t)dx = \int_{\mathbb{R}^n} v(x,t_0)dx. \tag{2.4.8}$$

Agora fazendo $t_0 \to 0$, obtemos a conservação de massa para solução $v(\cdot,t)$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} v(x,t)dx = \int_{\mathbb{R}^n} v_0 dx. \tag{2.4.9}$$

Agora, provamos a conservação de massa para solução $u(x,t)$. Note que, usando (2.4.9), temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} u(x,t)dx &= \int_{\mathbb{R}^n} v(x,t)dx + \int_{\mathbb{R}^n} (u-v)(x,t)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} v_0 dx + \int_{\mathbb{R}^n} (u-v)(x,t)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} u_0 dx + \int_{\mathbb{R}^n} (v_0-u_0)dx + \int_{\mathbb{R}^n} (u-v)(x,t)dx.\end{aligned} \tag{2.4.10}$$

Agora usando (2.4.3) e (2.4.4), temos

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^n} u(x,t)dx - \int_{\mathbb{R}^n} u_0 dx\right| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |v_0-u_0|dx + \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)-v(x,t)|dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |v_0-u_0|dx + \int_{\mathbb{R}^n} |v_0-u_0|dx \leq 2\hat{\epsilon}.\end{aligned} \tag{2.4.11}$$

Como $\hat{\epsilon}$ é arbitrário, concluímos o teorema.

□

2.5 Comparação

Nesta seção consideramos os problemas (2.3.1) e (2.3.2), com as condições iniciais satisfazendo

$$u_0 \leq v_0 \ q.t.p. \ x \in \mathbb{R}^n,$$

e com as mesmas hipóteses do Teorema 2.3.1, é possível comparar as soluções que se alimentam destas condições iniciais respectivamente, isto é,

$$u(x,t) \leq v(x,t) \quad \forall \ t \in [0,T].$$

Esta próxima propriedade é de grande importância, e sua validade implica na unicidade de solução.

Teorema 2.5.1. *Sob as mesmas hipóteses do Teorema 2.3.1, se* $u_0 \leq v_0$ *q.t.p.* $x \in \mathbb{R}^n$ *então* $u(x,t) \leq v(x,t)$ *para todo* $t \in [0,T]$*, isto é, vale a Propriedade da Comparação.*

Para demonstrar o Teorema 2.5.1, basta mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^n} (u-v)_+ = 0.$$

Considerando $\theta = u - v$, provaremos a propriedade de Comparação de duas formas distintas. A primeira usando propriedades já conhecidas a respeito de θ, contração e conservação de massa. A segunda, usando função auxiliar e função de corte.

Demonstração A Sabendo que a parte positiva de θ, isto é, $(\theta)_+$, pode ser escrita da seguinte forma:

$$(\theta)_+ = \frac{|\theta| + \theta}{2}.$$

Então, aplicando as propriedades de conservação de massa e contração na desigualdade abaixo, $\star$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} (u(x,t) - v(x,t))_+ dx = \int_{\mathbb{R}^n} (\theta(x,t))_+ dx &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\theta(x,t)| dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \theta(x,t) dx \\ &\underset{\star}{\leq} \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\theta_0| dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \theta_0 dx = \int_{\mathbb{R}^n} (u_0 - v_0)_+ dx = 0,\end{aligned}$$

já que $u_0 \leq v_0$. Então $u(x,t) \leq v(x,t) q.t.p.\ x \in \mathbb{R}^n,\ \ t \in (0,T]$, mas como u, v são suaves, temos $u(x,t) \leq v(x,t) \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n$ e $\ t \in (0,T]$.

$\square$

Demonstração B Para estudar a comparação, vamos considerar a função $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, satisfazendo

(i) $H \in C^1(\mathbb{R})$,
(ii) $H' \geq 0$,
(iii) $H(\theta) = 0\ \forall \theta \leq 0$,
(iv) $H(\theta) = 1\ \forall \theta \geq 1$.

A partir da função H, definimos a função $H_\delta(\theta) =: H(\frac{\theta}{\delta})$ e G_δ dada por

$$G_\delta(\theta) := \int_0^\theta H_\delta(s) ds.$$

Note que $G_\delta(\theta) \longrightarrow \theta_+$ uniformemente quando $\delta \to 0$. Multiplicamos (2.3.5) por $G'_\delta(\theta)\zeta_R(x)$ e integramos no conjunto $[t_0, t] \times \mathbb{R}^n$.

$$\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq R}\theta_t G'_\delta(\theta)\zeta_R(x)dxd\tau = -\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq R}\operatorname{div}\left(\tilde{f}(x,\tau,\theta)\right)G'_\delta(\theta)\zeta_R(x)dxd\tau$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq R}\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u-|\nabla v|^{p-2}\nabla v\right)G'_\delta(\theta)\zeta_R(x)dxd\tau$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq R}\eta\Delta\theta G'_\delta(\theta)\zeta_R(x)dxd\tau.$$

Usando o Teorema de Fubini no primeiro termo e Teorema do Divergente nos demais termos, temos

$$\int_{|x|\leq R}G_\delta(\theta(x,t))\zeta_R(x)dx = \int_{|x|\leq R}G_\delta(\theta(x,t_0))\zeta_R(x)dx$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq R}\tilde{f}(x,\tau,\theta)\cdot\nabla\theta G''_\delta(\theta)\zeta_R(x)dxd\tau$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq R}\tilde{f}(x,\tau,\theta)\cdot\nabla\zeta_R(x)G'_\delta(\theta)dxd\tau$$

$$\underbrace{-\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq R}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u-|\nabla v|^{p-2}\nabla v\right)\cdot\nabla\theta G''_\delta(\theta)\zeta_R(x)dxd\tau}_{a}$$

$$-\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq R}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u-|\nabla v|^{p-2}\nabla v\right)\cdot\nabla\zeta_R(x)G'_\delta(\theta)dxd\tau$$

$$\underbrace{-\eta\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq R}G''_\delta(\theta)|\nabla\theta|^2\zeta_R(x)dxd\tau}_{b}-\eta\int_{t_0}^{t}\int_{|x|=R}G_\delta(\theta)\nabla\zeta_R(x)\cdot\frac{x}{R}dSd\tau$$

$$+\eta\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq R}G_\delta(\theta)\Delta\zeta_R(x)dxd\tau.$$

Observe que $a\leq 0$ e $b\leq 0$. De fato, a desigualdade para b é evidente e para a segue da mesma justificativa dada no Teorema 2.3.1 (pelo argumento de semitrização). Assim, elimine o termo a da equação acima, obtendo uma desigualdade. E some o termo b em ambos os lados, pois nos será útil mais adiante.

$$\begin{aligned}
&\int_{|x|\le R} G_\delta(\theta(x,t))\zeta_R(x)dx + \eta\int_{t_0}^t\int_{|x|\le R} G''_\delta(\theta)|\nabla\theta|^2\zeta_R(x)dxd\tau\\
&\qquad\le \int_{|x|\le R} G_\delta(\theta(x,t_0))\zeta_R(x)dx\\
&\qquad+\int_{t_0}^t\int_{|x|\le R}\tilde f(x,\tau,\theta)\nabla\theta G''_\delta(\theta)\zeta_R(x)dxd\tau\\
&\qquad+\int_{t_0}^t\int_{|x|\le R}\tilde f(x,\tau,\theta)\nabla\zeta_R(x)G'_\delta(\theta)dxd\tau\\
&\qquad-\int_{t_0}^t\int_{|x|\le R}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u-|\nabla v|^{p-2}\nabla v\right)\nabla\zeta_R(x)G'_\delta(\theta)dxd\tau\\
&\qquad-\eta\int_{t_0}^t\int_{|x|=R}G_\delta(\theta)\nabla\zeta_R(x)\frac{x}{R}dSd\tau+\eta\int_{t_0}^t\int_{|x|\le R}G_\delta(\theta)\Delta\zeta_R(x)dxd\tau.
\end{aligned}$$

Agora, majorando o lado direito da desigualdade e sabendo que $|f(x,t,u)-f(x,t,v)|\le F_M(T)|u(x,t)-v(x,t)|$, $|\nabla\zeta_R(x)|\le\epsilon e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}$ e $|\Delta\zeta_R(x)|\le\epsilon n e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}$, e ainda que $G'_\delta(\theta)\le 1$ no termo que acompanha $|\theta|$, ficamos com

$$\begin{aligned}
&\int_{|x|\le R} G_\delta(\theta(x,t))\zeta_R(x)dx + \eta\int_{t_0}^t\int_{|x|\le R} G''_\delta(\theta)|\nabla\theta|^2\zeta_R(x)dxd\tau\\
&\qquad\le \int_{|x|\le R} G_\delta(\theta(x,t_0))\zeta_R(x)dx\\
&\qquad\underbrace{+F_M(T)\int_{t_0}^t\int_{|x|\le R}|\theta||\nabla\theta|G''_\delta(\theta)\zeta_R(x)dxd\tau}_{c}\\
&\qquad+\epsilon F_M(T)\int_{t_0}^t\int_{|x|\le R}|\theta|e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}dxd\tau\\
&\qquad+\epsilon\int_{t_0}^t\int_{|x|\le R}\left||\nabla u|^{p-2}\nabla u-|\nabla v|^{p-2}\nabla v\right|e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}G'_\delta(\theta)dxd\tau\\
&\qquad+\eta\epsilon\int_{t_0}^t\int_{|x|=R}G_\delta(\theta)e^{-\epsilon\sqrt{1+R^2}}dSd\tau+n\eta\epsilon\int_{t_0}^t\int_{|x|\le R}G_\delta(\theta)e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}dxd\tau.
\end{aligned}\tag{2.5.1}$$

Usando desigualdade de Young no termo c, isto é

$$\begin{aligned}&\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\le R} F_M(T)|\theta||\nabla\theta|G''_\delta(\theta)\zeta_R(x)dxd\tau\\ &\le \int_{t_0}^{t}\int_{|x|\le R}\left(\frac{1}{2\eta}F_M^2(T)|\theta|^2+\frac{\eta}{2}|\nabla\theta|^2\right)G''_\delta(\theta)\zeta_R(x)dxd\tau.\end{aligned}$$

Podemos absorver o termo $\frac{\eta}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\le R}|\nabla\theta|^2G''_\delta(\theta)\zeta_R(x)dxd\tau$ no lado esquerdo da desigualdade (2.5.1). Além disso, sabendo que $G'_\delta(\theta)\le\frac{\tilde{C}}{\delta}|\theta|$ e $\nabla u,\nabla v\in L^\infty([t_0,T]\times\mathbb{R}^n)$, obtemos

$$\begin{aligned}&\int_{|x|\le R} G_\delta(\theta(x,\tau))\zeta_R(x)dx+\frac{\eta}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\le R}G''_\delta(\theta)|\nabla\theta|^2\zeta_R(x)dxd\tau\\ &\le \int_{|x|\le R}G_\delta(\theta(x,t_0))\zeta_R(x)dx\\ &+\frac{F_M^2(T)}{2\eta}\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\le R}|\theta|^2G''_\delta(\theta)\zeta_R(x)dxd\tau\\ &+\epsilon F_M(T)\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\le R}|\theta|e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}dxd\tau\\ &+\epsilon C(t_0,T)\frac{\tilde{C}}{\delta}\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\le R}|\theta|e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}dxd\tau\\ &+\eta\epsilon\int_{t_0}^{t}\int_{|x|=R}G_\delta(\theta)e^{-\epsilon\sqrt{1+R^2}}dSd\tau+n\eta\epsilon\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\le R}G_\delta(\theta)e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}dxd\tau.\end{aligned}\tag{2.5.2}$$

Usando o Teorema da Convergência Monótona ao fazer $R\to\infty$, (2.5.2) fica

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} G_\delta(\theta(x,\tau))e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}dx + \frac{\eta}{2}\int_{t_0}^t\int_{|x|\le R} G''_\delta(\theta)|\nabla\theta|^2 e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}dxd\tau \\
&\quad\le \int_{\mathbb{R}^n} G_\delta(\theta(x,t_0))e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}dx \\
&\quad+ \frac{F_M^2(T)}{2\eta}\int_{t_0}^t\int_{\mathbb{R}^n}|\theta|^2 G''_\delta(\theta)e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}dxd\tau \\
&\quad+ \epsilon F_M(T)\int_{t_0}^t\int_{\mathbb{R}^n}|\theta|e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}dxd\tau \\
&\quad\epsilon\bar{C}\frac{\tilde{C}}{\delta}\int_{t_0}^t\int_{\mathbb{R}^n}|\theta|e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}dxd\tau + n\eta\epsilon\int_{t_0}^t\int_{\mathbb{R}^n} G_\delta(\theta)e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}dxd\tau.
\end{aligned}
\tag{2.5.3}
$$

Como $\frac{\eta}{2}\int_{t_0}^t\int_{|x|\le R} G''_\delta(\theta)|\nabla\theta|^2 e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}dxd\tau \ge 0$, podemos descartá-lo mantendo a desigualdade. Podemos fazer $\epsilon \to 0$, usando o Teorema da convergência Monótona, e como $G_\delta(\theta) \le |\theta|$ com θ integrável, os últimos termos de (2.5.3) desaparecerão. Logo

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} G_\delta(\theta(x,\tau))dx &\le \int_{\mathbb{R}^n} G_\delta(\theta(x,t_0))dx \\
&+ \frac{F_M^2(T)}{2\eta}\int_{t_0}^t\int_{\mathbb{R}^n}|\theta|^2 G''_\delta(\theta)dxd\tau.
\end{aligned}
\tag{2.5.4}
$$

Finalmente, vamos fazer $\delta \to 0$, usando o Teorema da Convergência Dominada. Assim, o último termo de (2.5.4) desaparece, já que θ é integrável e $G''_\delta(\theta)|\theta| \le C$ com $G''_\delta(\theta) \to 0$. E (2.5.4) fica

$$
\int_{\mathbb{R}^n}\theta(x,\tau)_+dx \le \int_{\mathbb{R}^n}\theta(x,t_0)_+dx. \tag{2.5.5}
$$

Assim, se $u(x,t_0) \le v(x,t_0)$, então $(\theta(x,t_0))_+ = 0$, e portanto

$$
\int_{\mathbb{R}^n}(\theta(x,\tau))_+dx = 0.
$$

Concluindo que $u(x,t) \le v(x,t)$ q.t.p, $\forall t \in (t_0,T]$.

$\square$

Para ilusatrar esta propriedade, a figura abaixo relaciona o perfil inicial e o perfil após $t = 5s$ das soluções do problema (2.2.10), cujas condições iniciais são:

$$u_0 := \begin{cases} 0, & se \quad x < -4, \\ \frac{x^3-2x^2-16x+32}{50}, & se \quad -4 \leq x \leq 4, \\ 0, & se \quad x > 4. \end{cases}$$

e

$$v_0 = \max\left\{0; \frac{16-(x+1)^2}{14}\right\}.$$

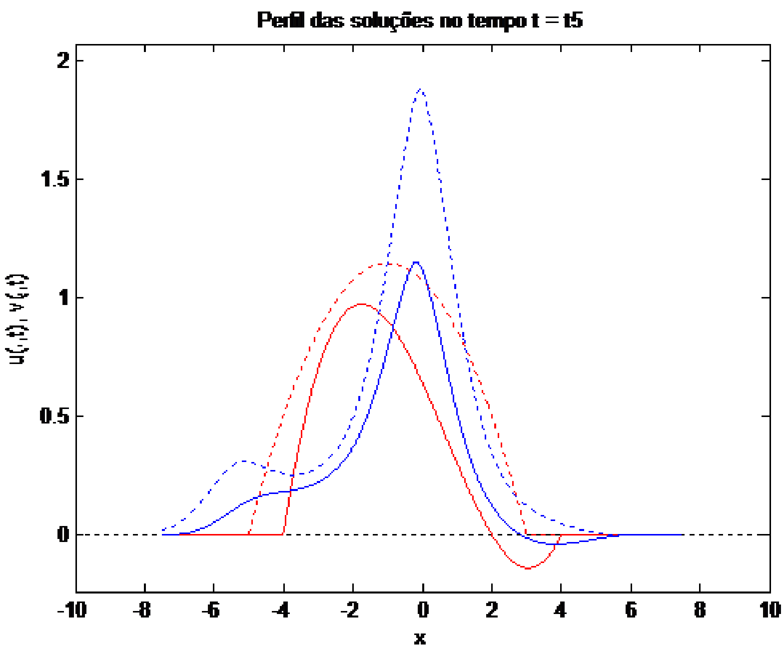

Figura 2.3: perfis das condições iniciais u_0, e v_0, linha contínua e tracejada respectivamente, e os perfis das soluções após $5s$.

Capítulo 3

Equação do p-Laplaciano com termo advectivo: caso semidissipativo

3.1 Definindo o problema

Neste capítulo, consideraremos o problema de valor inicial

$$u_t + \operatorname{div}(f(x,t,u)) = \mu(t)\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + \eta\Delta u, \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ e } t > 0, \quad (3.1.1)$$
$$u(\cdot,0) = u_0 \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n),$$

onde $\eta > 0$ está fixo, $p > 2$, $p_0 \geq 1$ e $f = f(x,t,u) \in C^0(\mathbb{R}^n \times [0,\infty) \times \mathbb{R})$ satisfazendo $f_{x_1}, ..., f_{x_n}, f_u \in C^0(\mathbb{R}^n \times [0,\infty) \times \mathbb{R})$ e a condição de semidissipatividade, ou seja,

$$\sum_{i=1}^{n} u\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x,t,u) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \ t \geq 0 \ \text{ e } u \in \mathbb{R}. \quad (3.1.2)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0$ e $u \in \mathbb{R}$.

Mostraremos a seguir, a propriedade de decrescimento da norma L^q para todo $q \geq p_0$. Este resultado foi alcançado devido a condição (3.1.2) da função f. Condição que chamamos *semidissipativa*, este nome não é encontrado na literatura, mas achamos um nome adequado, já que, com a hipótese (3.1.2), o termo advectivo não atrapalha a ação do termo difusivo, que é responsável pela dissipação da solução.

Teorema 3.1.1. *Seja $u(\cdot,t) \in L^\infty\big([0,T], L^\infty(\mathbb{R}^n)\big) \cap C^0([0,T], L^{p_0}(\mathbb{R}^n))$ solução (suave) de (3.1.1), com $f(x,t,u)$ satisfazendo a condição (3.1.2). Então*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \|u(\cdot,0)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)},$$

para todo $p_0 \leq q \leq \infty$, *e* $\forall t \in [0, T]$.

Demonstração. Consideramos $\phi_\delta(u)$ e ζ_R as funções auxiliar e de corte, respectivamente, definidas por

$$\phi_\delta(u) = \begin{cases} L_\delta^q(u), \text{ se } 1 < q \neq 2; \\ u^2, \text{ se } q = 2 \end{cases}$$

$$\zeta_R(x) = \begin{cases} e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}} - e^{-\epsilon\sqrt{1+R^2}}, \text{ se } |x| < R; \\ 0, \text{ se } |x| \geq R. \end{cases}$$

Agora, multiplicamos a equação (3.1.1) por $\phi'_\delta(u)\zeta_R$ e integramos na região $[t_0, t] \times \mathbb{R}^n$, onde $\delta > 0,\ R > 0,\ 0 < \epsilon \leq 1$.

Temos então dois casos a analisar: quando $q = 2$ e quando $1 < q \neq 2$.

$$\underbrace{\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq R} \phi'_\delta(u)\zeta_R u_\tau dx d\tau}_{I} = \underbrace{-\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq R} \phi'_\delta(u)\zeta_R div\big(f(x,\tau,u)\big) dx d\tau}_{II}$$
$$+ \underbrace{\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq R} \mu(\tau) div\big(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\big)\phi'_\delta(u)\zeta_R dx d\tau}_{III} + \underbrace{\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq R} \eta\Delta u \phi'_\delta(u)\zeta_R dx d\tau.}_{IV} \tag{3.1.3}$$

Analisando cada termo de (3.1.3), temos que para I, aplicando Teorema de Fubini, segue

$$\begin{aligned} I = \int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq R} \phi'_\delta(u)\zeta_R u_\tau dx d\tau &= \int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq R} \frac{\partial\big(\phi_\delta(u)\big)}{\partial\tau}\zeta_R dx d\tau \\ &\int_{|x|\leq R} \phi_\delta(u(x,t))\zeta_R dx - \int_{|x|\leq R} \phi_\delta(u(x,t_0))\zeta_R dx. \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

Passamos para o próximo termo,

$$
\begin{aligned}
II &= -\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq R} \phi'_\delta(u)\zeta_R div\big(f(x,\tau,u)\big)dxd\tau \\
&= -\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq R} \phi'_\delta(u)\zeta_R \left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}f_i(x,\tau,u) + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial u}f_i(x,\tau,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right]dxd\tau \\
&= -\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq R} \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}f_i(x,\tau,u)\right)\phi'_\delta(u)\zeta_R dxd\tau \\
&- \int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq R} f'(u)\cdot\nabla u\phi'_\delta(u)\zeta_R dxd\tau, \qquad (3.1.5)
\end{aligned}
$$

onde $f'(u) = (\frac{\partial f_1}{\partial u}(x,\tau,u),...,\frac{\partial f_n}{\partial u}(x,\tau,u))$.

Analisando III, usando novamente o Teorema do Divergente, obtemos

$$
\begin{aligned}
III &= \int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq R} \mu(\tau)div\big(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\big)\phi'_\delta(u)\zeta_R dxd\tau \\
&= -\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq R} \mu(\tau)|\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla\big(\phi'_\delta(u)\zeta_R\big)dxd\tau \\
&= -\int_{t_0}^{t}\mu(\tau)\int_{|x|\leq R}|\nabla u|^{p}\phi''_\delta(u)\zeta_R dxd\tau \\
&- \int_{t_0}^{t}\mu(\tau)\int_{|x|\leq R}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla\zeta_R\phi'_\delta(u)dxd\tau. \qquad (3.1.6)
\end{aligned}
$$

Para o último termo, usando duas vezes o Teorema do Divergente, ficamos com

$$
\begin{aligned}
IV &= \eta\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq R}\Delta u\phi'_\delta(u)\zeta_R dxd\tau = -\eta\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq R}\nabla u\cdot\nabla\big(\phi'_\delta(u)\zeta_R\big)dxd\tau \\
&= -\eta\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq R}|\nabla u|^2\phi''_\delta(u)\zeta_R dxd\tau - \eta\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq R}\nabla u\cdot\nabla\zeta_R\phi'_\delta(u)dxd\tau \\
&= -\eta\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq R}|\nabla u|^2\phi''_\delta(u)\zeta_R dxd\tau - \eta\int_{t_0}^{t}\int_{|x|=R}\phi_\delta(u)\nabla\zeta_R\cdot\frac{x}{R}dxd\tau \\
&+ \eta\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq R}\phi_\delta(u)\Delta\zeta_R dxd\tau. \qquad (3.1.7)
\end{aligned}
$$

Agora, juntando todos os termos de forma conveniente, obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_{|x|\le R}\phi_\delta(u(x,t))\zeta_R dx+\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\le R}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}f_i(x,\tau,u)\right)\phi'_\delta(u)\zeta_R dxd\tau\\
&+\int_{t_0}^{t}\mu(\tau)\int_{|x|\le R}|\nabla u|^p\phi''_\delta(u)\zeta_R dxd\tau+\eta\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\le R}|\nabla u|^2\phi''_\delta(u)\zeta_R dxd\tau\\
&=\int_{|x|\le R}\phi_\delta(u(x,t_0))\zeta_R dx\underbrace{-\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\le R}f'(u)\cdot\nabla u\phi'_\delta(u)\zeta_R dxd\tau}_{a}\\
&-\int_{t_0}^{t}\mu(\tau)\int_{|x|\le R}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla\zeta_R\phi'_\delta(u)dxd\tau\\
&-\eta\int_{t_0}^{t}\int_{|x|=R}\phi_\delta(u)\nabla\zeta_R\cdot\frac{x}{R}dxd\tau+\eta\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\le R}\phi_\delta(u)\Delta\zeta_R dxd\tau.
\end{aligned}\tag{3.1.8}$$

Nosso próximo passo é fazer uma modificação no termo a, pois na forma em que se encontra, não será útil na nossa análise.

$$\begin{aligned}
a&=-\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\le R}f'_i(u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\phi'_\delta(u)\zeta_R dxd\tau\\
&=-\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\le R}\left(f'_i(u)\phi'_\delta(u)\right)\frac{\partial u}{\partial x_i}\zeta_R dxd\tau\\
&=-\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\le R}F'_i(u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\zeta_R dxd\tau\\
&=-\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\le R}\frac{\partial F_i(u)}{\partial x_i}\zeta_R dxd\tau\\
&=\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\le R}F_i(u)\frac{\partial\zeta_R}{\partial x_i}dxd\tau,
\end{aligned}$$

onde $F_i(u)=\displaystyle\int_0^u F'_i(v)dv$ e $F'_i(v)=f'_i(x,\tau,v)\phi'_\delta(v)$.

Desta forma a igualdade (3.1.8) fica

$$
\begin{aligned}
&\int_{|x|\le R}\phi_\delta(u(x,t))\zeta_R dx+\int_{t_0}^t\int_{|x|\le R}\left(\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}f_i(x,\tau,u)\right)\phi_\delta'(u)\zeta_R dxd\tau\\
&+\int_{t_0}^t\mu(\tau)\int_{|x|\le R}|\nabla u|^p\phi_\delta''(u)\zeta_R dxd\tau+\eta\int_{t_0}^t\int_{|x|\le R}|\nabla u|^2\phi_\delta''(u)\zeta_R dxd\tau\\
&=\int_{|x|\le R}\phi_\delta(u(x,t_0))\zeta_R dx+\sum_{i=1}^n\int_{t_0}^t\int_{|x|\le R}\left(\int_0^u f_i'(x,\tau,v)\phi_\delta'(v)dv\right)\frac{\partial\zeta_R}{\partial x_i}dxd\tau\\
&-\int_{t_0}^t\mu(\tau)\int_{|x|\le R}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla\zeta_R\phi_\delta'(u)dxd\tau\\
&-\eta\int_{t_0}^t\int_{|x|=R}\phi_\delta(u)\nabla\zeta_R\cdot\frac{x}{R}dSd\tau+\eta\int_{t_0}^t\int_{|x|\le R}\phi_\delta(u)\Delta\zeta_R dxd\tau. \qquad (3.1.9)
\end{aligned}
$$

Neste momento é preciso dividir em casos: $q=2$ e $1<q\neq 2$. Começamos pelo caso $q=2$.

Reescrevendo (3.1.9) em função de u, lembrando que $\phi_\delta(u)=u^2$, $\phi_\delta'(u)=2u$ e $\phi_\delta''(u)=2$, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\int_{|x|\le R}u^2(x,\tau)\zeta_R dx+\underbrace{2\int_{t_0}^t\int_{|x|\le R}\left(\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}f_i(x,\tau,u)\right)u\zeta_R dxd\tau}_{b}\\
&+2\int_{t_0}^t\mu(\tau)\int_{|x|\le R}|\nabla u|^p\zeta_R dxd\tau+2\eta\int_{t_0}^t\int_{|x|\le R}|\nabla u|^2\zeta_R dxd\tau\\
&=\int_{|x|\le R}u^2(x,t_0)\zeta_R dx+\sum_{i=1}^n\int_{t_0}^t\int_{|x|\le R}\left(\int_0^u f_i'(x,\tau,v)2vdv\right)\frac{\partial\zeta_R}{\partial x_i}dxd\tau\\
&-2\int_{t_0}^t\mu(\tau)\int_{|x|\le R}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla\zeta_R u dxd\tau\\
&-\eta\int_{t_0}^t\int_{|x|=R}u^2\nabla\zeta_R\cdot\frac{x}{R}dSd\tau+\eta\int_{t_0}^t\int_{|x|\le R}u^2\Delta\zeta_R dxd\tau. \qquad (3.1.10)
\end{aligned}
$$

Usando a hipótese (3.1.2) sobre a f, concluímos que $b\geq 0$ e assim, podemos descartar este termo, transformando a igualdade (3.1.10) numa desigualdade,

$$
\begin{aligned}
&\int_{|x|\leq R} u^2(x,\tau)\zeta_R dx + 2\int_{t_0}^{t}\mu(\tau)\int_{|x|\leq R}|\nabla u|^p\zeta_R dx d\tau \\
&+ 2\eta\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq R}|\nabla u|^2\zeta_R dx d\tau \\
&\leq \int_{|x|\leq R} u^2(x,t_0)\zeta_R dx + \sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq R}\left(\int_0^u f_i'(x,\tau,v)2v dv\right)\frac{\partial \zeta_R}{\partial x_i} dx d\tau \\
&- 2\int_{t_0}^{t}\mu(\tau)\int_{|x|\leq R}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla\zeta_R u dx d\tau \\
&- \eta\int_{t_0}^{t}\int_{|x|=R} u^2\nabla\zeta_R\cdot\frac{x}{R} dS d\tau + \eta\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq R} u^2\Delta\zeta_R dx d\tau. \qquad (3.1.11)
\end{aligned}
$$

Agora majoramos o lado direito da desigualdade acima. Usando o fato de que $|f'(u)| \leq K(T)$, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\int_{|x|\leq R} u^2(x,\tau)\zeta_R dx + 2\int_{t_0}^{t}\mu(\tau)\int_{|x|\leq R}|\nabla u|^p\zeta_R dx d\tau \\
&+ 2\eta\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq R}|\nabla u|^2\zeta_R dx d\tau \\
&\leq \int_{|x|\leq R} u^2(x,t_0)\zeta_R dx + 2K(T)\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq R}\left(\int_0^u |v| dv\right)\left|\frac{\partial \zeta_R}{\partial x_i}\right| dx d\tau \\
&+ 2\int_{t_0}^{t}\mu(\tau)\int_{|x|\leq R}|\nabla u|^{p-1}|u||\nabla\zeta_R| dx d\tau \\
&+ \eta\int_{t_0}^{t}\int_{|x|=R} u^2|\nabla\zeta_R| dS d\tau + \eta\int_{t_0}^{t}\int_{|x|\leq R} u^2|\Delta\zeta_R| dx d\tau. \qquad (3.1.12)
\end{aligned}
$$

Em (3.1.12) usamos a propriedade $|\nabla\zeta_R| < \epsilon w_\epsilon(x)$ e $|\Delta\zeta_R| < n\epsilon w_\epsilon(x)$. Além disso, sabendo que $\zeta_R \to w_\epsilon(x)$ ao $R \to \infty$, aplicamos o Teorema da Convergência Monótona, obtendo

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} u^2(x,\tau)w_\epsilon(x)dx + 2\int_{t_0}^t \mu(\tau)\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p w_\epsilon(x)dxd\tau \\
&+ 2\eta\int_{t_0}^t\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 w_\epsilon(x)dxd\tau \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} u^2(x,t_0)w_\epsilon(x)dx + nK(T)\epsilon\int_{t_0}^t\int_{\mathbb{R}^n} u^2 w_\epsilon(x)dxd\tau \\
&+ 2\epsilon\int_{t_0}^t \mu(\tau)\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^{p-1}|u| w_\epsilon(x)dxd\tau + n\eta\epsilon\int_{t_0}^t\int_{\mathbb{R}^n} u^2 w_\epsilon(x)dxd\tau. \quad (3.1.13)
\end{aligned}
$$

Agora no penúltimo termo da desigualdade acima, usamos Desigualdade de Young com parâmetros p e $\frac{p}{p-1}$, obtendo

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} u^2(x,\tau)w_\epsilon(x)dx + 2\int_{t_0}^t \mu(\tau)\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p w_\epsilon(x)dxd\tau \\
&+ 2\eta\int_{t_0}^t\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 w_\epsilon(x)dxd\tau \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} u^2(x,t_0)w_\epsilon(x)dx + nK(T)\epsilon\int_{t_0}^t\int_{\mathbb{R}^n} u^2 w_\epsilon(x)dxd\tau \\
&+ \underbrace{2\epsilon\int_{t_0}^t \mu(\tau)\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{p-1}{p}|\nabla u|^p + \frac{1}{p}|u|^p\right) w_\epsilon(x)dxd\tau}_{c} \\
&+ n\eta\epsilon\int_{t_0}^t\int_{\mathbb{R}^n} u^2 w_\epsilon(x)dxd\tau. \quad (3.1.14)
\end{aligned}
$$

Uma parte do termo c será absorvida no lado esquerdo da desigualdade acima, enquanto a outra parte, usaremos o fato de $p > 2$ e $\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq M(T)$, ficando com

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} u^2(x,\tau)w_\epsilon(x)dx + (2-2\epsilon)\int_{t_0}^t \mu(\tau)\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p w_\epsilon(x)dxd\tau \\
&+ 2\eta\int_{t_0}^t\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 w_\epsilon(x)dxd\tau \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} u^2(x,t_0)w_\epsilon(x)dx + nK(T)\epsilon\int_{t_0}^t\int_{\mathbb{R}^n} u^2 w_\epsilon(x)dxd\tau \\
&+ M(T)^{p-2}\epsilon\int_{t_0}^t \mu(\tau)\int_{\mathbb{R}^n} u^2 w_\epsilon(x)dxd\tau + n\eta\epsilon\int_{t_0}^t\int_{\mathbb{R}^n} u^2 w_\epsilon(x)dxd\tau. \quad (3.1.15)
\end{aligned}
$$

Sabendo que para qualquer $0 < \epsilon < 1$, o 2º e 3º termo do lado esquerdo da desigualdade (3.1.15) são maiores ou iguais a zero, podemos assim descartá-los e manter a desigualdade. E o próximo passo será fazer $\epsilon \to 0$, usando o Teorema da Convergência Monótona, lembrando que $w_\epsilon(x) \to 1$ ao $\epsilon \to 0$. Além disso como $u(\cdot,t) \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, por interpolação, $u(\cdot,t) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ para $1 \leq p_0 \leq 2$, fazendo com que os três últimos termos desapareção ao $\epsilon \to 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} u^2(x,\tau)dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} u^2(x,t_0)dx$$

Agora ao $t_0 \to 0$, obtemos

$$\|u(x,\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \tag{3.1.16}$$

Vamos agora para o caso $q > 1$ com $q \neq 2$. Reescrevemos (3.1.9) em função de $L_\delta^q(u)$, lembramos que $\phi_\delta(u) = L_\delta^q(u)$, $\phi'_\delta(u) = qL_\delta^{q-1}(u)L'_\delta(u)$ e $\phi''_\delta(u) = q(q-1)L_\delta^{q-2}(u)(L'_\delta(u))^2 + qL_\delta^{q-1}(u)L''_\delta(u)$. Vamos desconsiderar a integral onde $u(x,t) = 0$, já que nesta região o integrando será zero e fazendo isso, não teremos uma indeterminação. Após as considerações acima temos

$$\begin{aligned}
&\int_{|x|\leq R} L_\delta^q(u(x,t))\zeta_R dx + q\int_{t_0}^t \int_{|x|\leq R} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} f_i(x,\tau,u)\right) L_\delta^{q-1}(u)L'_\delta(u)\zeta_R dxd\tau \\
&+ q(q-1)\int_{t_0}^t \mu(\tau)\int_{\{u\neq 0\}\cap B_R} |\nabla u|^p L_\delta^{q-2}(u)(L'_\delta(u))^2\zeta_R dxd\tau \\
&+ q\int_{t_0}^t \mu(\tau)\int_{|x|\leq R} |\nabla u|^p L_\delta^{q-1}(u)L''_\delta(u)\zeta_R dxd\tau \\
&+ q(q-1)\eta\int_{t_0}^t \int_{\{u\neq 0\}\cap B_R} |\nabla u|^2 L_\delta^{q-2}(u)(L'_\delta(u))^2\zeta_R dxd\tau \\
&+ \eta q\int_{t_0}^t \int_{|x|\leq R} |\nabla u|^2 L_\delta^{q-1}(u)L''_\delta(u)\zeta_R dxd\tau = \int_{|x|\leq R} L_\delta^q(u(x,t_0))\zeta_R dx \\
&+ q\sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t \int_{|x|\leq R} \left(\int_0^u f'_i(x,\tau,v)L_\delta^{q-1}(v)L'_\delta(v)dv\right)\frac{\partial \zeta_R}{\partial x_i} dxd\tau \\
&- q\int_{t_0}^t \mu(\tau)\int_{|x|\leq R} |\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla\zeta_R L_\delta^{q-1}(u)L'_\delta(u)dxd\tau \\
&- \eta\int_{t_0}^t \int_{|x|=R} L_\delta^q(u)\nabla\zeta_R\cdot\frac{x}{R}dxd\tau + \eta\int_{t_0}^t \int_{|x|\leq R} L_\delta^q(u)\Delta\zeta_R dxd\tau.
\end{aligned} \tag{3.1.17}$$

Majoramos o lado direito da igualdade (3.1.17), usando que $|f'(x,t,v)| < K(T)$ e $|L'_\delta(v)| \leq 1$,

$$\int_{|x|\leq R} L^q_\delta(u(x,t))\zeta_R dx + q\int_{t_0}^t \int_{|x|\leq R} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} f_i(x,\tau,u)\right) L^{q-1}_\delta(u) L'_\delta(u)\zeta_R dxd\tau$$
$$+ q(q-1)\int_{t_0}^t \mu(\tau)\int_{\{u\neq 0\}\cap B_R} |\nabla u|^p L^{q-2}_\delta(u)(L'_\delta(u))^2\zeta_R dxd\tau$$
$$+ q\int_{t_0}^t \mu(\tau)\int_{|x|\leq R} |\nabla u|^p L^{q-1}_\delta(u) L''_\delta(u)\zeta_R dxd\tau$$
$$+ q(q-1)\eta\int_{t_0}^t \int_{\{u\neq 0\}\cap B_R} |\nabla u|^2 L^{q-2}_\delta(u)(L'_\delta(u))^2\zeta_R dxd\tau$$
$$+ \eta q\int_{t_0}^t \int_{|x|\leq R} |\nabla u|^2 L^{q-1}_\delta(u) L''_\delta(u)\zeta_R dxd\tau \leq \int_{|x|\leq R} L^q_\delta(u(x,t_0))\zeta_R dx$$
$$+ qK(T)\sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t \int_{|x|\leq R} \left(\int_0^u L^{q-1}_\delta(v)dv\right)\left|\frac{\partial \zeta_R}{\partial x_i}\right| dxd\tau$$
$$+ q\int_{t_0}^t \mu(\tau)\int_{|x|\leq R} |\nabla u|^{p-1}|\nabla\zeta_R| L^{q-1}_\delta(u)|L'_\delta(u)| dxd\tau$$
$$+ \eta\int_{t_0}^t \int_{|x|=R} L^q_\delta(u)|\nabla\zeta_R|\left|\frac{x}{R}\right| dxd\tau + \eta\int_{t_0}^t \int_{|x|\leq R} L^q_\delta(u)|\Delta\zeta_R| dxd\tau. \quad (3.1.18)$$

Na desigualdade acima, usaremos que $|\nabla\zeta_R| \leq \epsilon w_\epsilon(x)$ e $|\Delta\zeta_R| \leq n\epsilon w_\epsilon(x)$. Além disso, pela propriedade semidissipativa da f, podemos descartar o segundo termo da desigualdade (3.1.18), obtendo

$$
\begin{aligned}
&\int_{|x|\le R} L_\delta^q(u(x,t))\zeta_R dx \\
&+ q(q-1)\int_{t_0}^t \mu(\tau)\int_{\{u\neq 0\}\cap B_R} |\nabla u|^p L_\delta^{q-2}(u)(L_\delta'(u))^2\zeta_R dx d\tau \\
&+ q\int_{t_0}^t \mu(\tau)\int_{|x|\le R} |\nabla u|^p L_\delta^{q-1}(u)L_\delta''(u)\zeta_R dx d\tau \\
&+ q(q-1)\eta\int_{t_0}^t \int_{\{u\neq 0\}\cap B_R} |\nabla u|^2 L_\delta^{q-2}(u)(L_\delta'(u))^2\zeta_R dx d\tau \\
&+ \eta q\int_{t_0}^t \int_{|x|\le R} |\nabla u|^2 L_\delta^{q-1}(u)L_\delta''(u)\zeta_R dx d\tau \le \int_{|x|\le R} L_\delta^q(u(x,t_0))\zeta_R dx \\
&+ nK(T)\epsilon\int_{t_0}^t \int_{|x|\le R} L_\delta^q(u)w_\epsilon(x) dx d\tau \\
&+ q\epsilon\int_{t_0}^t \mu(\tau)\int_{|x|\le R} |\nabla u|^{p-1} L_\delta^{q-1}(u)|L_\delta'(u)|w_\epsilon(x) dx d\tau \\
&+ \eta\epsilon\int_{t_0}^t \int_{|x|=R} L_\delta^q(u)w_\epsilon(x) dx d\tau + n\eta\epsilon\int_{t_0}^t \int_{|x|\le R} L_\delta^q(u)w_\epsilon(x) dx d\tau. \quad (3.1.19)
\end{aligned}
$$

Fazemos $R \to \infty$, usando o Teorema da Convergência Monótona, e para simplificar a notação, denotamos por $u \neq 0$ a região $\{x \in \mathbb{R}^n; u(x,t) \neq 0\}$, temos

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} L_\delta^q(u(x,t))w_\epsilon(x)dx \\
&+ q(q-1)\int_{t_0}^t \mu(\tau)\int_{u\neq 0} |\nabla u|^p L_\delta^{q-2}(u)(L_\delta'(u))^2 w_\epsilon(x)dxd\tau \\
&+ q\int_{t_0}^t \mu(\tau)\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p L_\delta^{q-1}(u)L_\delta''(u)w_\epsilon(x)dxd\tau \\
&+ q(q-1)\eta\int_{t_0}^t \int_{u\neq 0} |\nabla u|^2 L_\delta^{q-2}(u)(L_\delta'(u))^2 w_\epsilon(x)dxd\tau \\
&+ \eta q\int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 L_\delta^{q-1}(u)L_\delta''(u)w_\epsilon(x)dxd\tau \leq \int_{\mathbb{R}^n} L_\delta^q(u(x,t_0))w_\epsilon(x)dx \\
&+ nK(T)\epsilon\int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} L_\delta^q(u)w_\epsilon(x)dxd\tau \\
&+ q\epsilon\int_{t_0}^t \mu(\tau)\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^{p-1} L_\delta^{q-1}(u)|L_\delta'(u)|w_\epsilon(x)dxd\tau \\
&+ n\eta\epsilon\int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} L_\delta^q(u)w_\epsilon(x)dxd\tau. \qquad (3.1.20)
\end{aligned}
$$

onde termo de fronteira desaparece, já que

$$
\begin{aligned}
&\int_{t_0}^t \int_{|x|=R} |u|^q w_\epsilon(x)dxd\tau \leq M(T)^q \int_{t_0}^t \int_{|x|=R} e^{-\epsilon\sqrt{1+R^2}}dxd\tau \\
&\leq M(T)^q T\omega_n R^{n-1}e^{-\epsilon\sqrt{1+R^2}} \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}
$$

Agora no penúltimo termo da desigualdade (3.1.20), aplicamos Desigualdade de Young da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^{p-1} L_\delta^{q-1}(u)|L_\delta'(u)|w_\epsilon(x)dx \\
&= \int_{u\neq 0} |\nabla u|^{p-2} L_\delta^{q-2}(u)L_\delta(u)|\nabla u||L_\delta'(u)|w_\epsilon(x)dx \\
&\leq \int_{u\neq 0} |\nabla u|^{p-2} L_\delta^{q-2}(u)|L_\delta'(u)|w_\epsilon(x)\left(|L_\delta'(u)||\nabla u|^2 + \frac{L_\delta(u)^2}{4|L_\delta'(u)|}\right)dx \\
&= \int_{u\neq 0} |\nabla u|^p L_\delta^{q-2}(u)|L_\delta'(u)|^2 w_\epsilon(x) + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^{p-2} L_\delta^q(u)w_\epsilon(x)dx
\end{aligned}
$$

Assim a desigualdade (3.1.20) fica

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} L_\delta^q(u(x,t))w_\epsilon(x)dx \\
&+ q(q-1)\int_{t_0}^{t}\mu(\tau)\int_{u\neq 0}|\nabla u|^p L_\delta^{q-2}(u)(L_\delta'(u))^2 w_\epsilon(x)dxd\tau \\
&+ q\int_{t_0}^{t}\mu(\tau)\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^p L_\delta^{q-1}(u)L_\delta''(u)w_\epsilon(x)dxd\tau \\
&+ q(q-1)\eta\int_{t_0}^{t}\int_{u\neq 0}|\nabla u|^2 L_\delta^{q-2}(u)(L_\delta'(u))^2 w_\epsilon(x)dxd\tau \\
&+ \eta q\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^2 L_\delta^{q-1}(u)L_\delta''(u)w_\epsilon(x)dxd\tau \leq \int_{\mathbb{R}^n} L_\delta^q(u(x,t_0))w_\epsilon(x)dx \\
&+ nK(T)\epsilon\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^n} L_\delta^q(u)w_\epsilon(x)dxd\tau \\
&\underbrace{+ q\epsilon\int_{t_0}^{t}\mu(\tau)\int_{u\neq 0}|\nabla u|^p L_\delta^{q-2}(u)|L_\delta'(u)|^2 w_\epsilon(x)dxd\tau}_{d} \\
&+ \frac{q\epsilon}{4}\int_{t_0}^{t}\mu(\tau)\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^{p-2} L_\delta^q(u)w_\epsilon(x)dxd\tau \\
&+ n\eta\epsilon\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^n} L_\delta^q(u)w_\epsilon(x)dxd\tau. \qquad (3.1.21)
\end{aligned}
$$

Desta forma, para cada q, podemos escolher um ϵ tal que seja possível absorver o termo d no lado esquerdo da desigualdade (3.1.21). Além disso, como $p > 2$, usamos a hipótese $\nabla u \in L^\infty([t_0,T]\times\mathbb{R}^n)$, onde $|\nabla u| \leq \hat{C}(t_0,T)$, obtendo

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} L_\delta^q(u(x,t))w_\epsilon(x)dx \\
&+ q(q-1-\epsilon)\int_{t_0}^t \mu(\tau)\int_{u\neq 0} |\nabla u|^p L_\delta^{q-2}(u)(L_\delta'(u))^2 w_\epsilon(x)dxd\tau \\
&+ q\int_{t_0}^t \mu(\tau)\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p L_\delta^{q-1}(u)L_\delta''(u)w_\epsilon(x)dxd\tau \\
&+ q(q-1)\eta\int_{t_0}^t \int_{u\neq 0} |\nabla u|^2 L_\delta^{q-2}(u)(L_\delta'(u))^2 w_\epsilon(x)dxd\tau \\
&+ \eta q\int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 L_\delta^{q-1}(u)L_\delta''(u)w_\epsilon(x)dxd\tau \leq \int_{\mathbb{R}^n} L_\delta^q(u(x,t_0))w_\epsilon(x)dx \\
&+ nK(T)\epsilon\int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} L_\delta^q(u)w_\epsilon(x)dxd\tau + \frac{q\hat{C}^{p-2}\epsilon}{4}\int_{t_0}^t \mu(\tau)\int_{\mathbb{R}^n} L_\delta^q(u)w_\epsilon(x)dxd\tau \\
&+ n\eta\epsilon\int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} L_\delta^q(u)w_\epsilon(x)dxd\tau. \qquad (3.1.22)
\end{aligned}
$$

Descartando o 2º, 3º, 4º e 5º termo do lado direito da desigualdade acima, mantemos a desigualdade e obtemos

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} L_\delta^q(u(x,t))w_\epsilon(x)dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} L_\delta^q(u(x,t_0))w_\epsilon(x)dx \\
&+ nK(T)\epsilon\int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} L_\delta^q(u)w_\epsilon(x)dxd\tau \\
&+ \frac{q\hat{C}^{p-2}\epsilon}{4}\int_{t_0}^t \mu(\tau)\int_{\mathbb{R}^n} L_\delta^q(u)w_\epsilon(x)dxd\tau \\
&+ n\eta\epsilon\int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} L_\delta^q(u)w_\epsilon(x)dxd\tau, \qquad (3.1.23)
\end{aligned}
$$

Como $u(\cdot,t) \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, por interpolação, $u(\cdot,t) \in L^q(\mathbb{R}^n)$ para todo $q \geq p_0$. Além disso, $|L_\delta^q(u(x,t))| \leq |u(x,t)|^q$ e $w_\epsilon(x) \to 1$ ao $\epsilon \to 0$. Nestas condições, fazendo $\epsilon \to 0$, os três últimos termos desaparecem e a desigualdade acima fica

$$
\int_{\mathbb{R}^n} L_\delta^q(u(x,t))dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} L_\delta^q(u(x,t_0))dx.
$$

Agora fazendo $\delta \to 0$, usando o Teorema da Convergência Dominada, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^q dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t_0)|^q dx.$$

Fazendo $t_0 \to 0$, concluímos o teorema, isto é,

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \|u_0\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} < \infty \quad \forall\, 0 \leq t \leq T \tag{3.1.24}$$

para todo $q \geq p_0,\ q > 1$. Por fim, fazendo $q \to \infty$ em (3.1.24), obtemos

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|u(\cdot,0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \quad \forall\, 0 \leq t \leq T. \tag{3.1.25}$$

Assim, concluimos que $u(\cdot,t) \in L^q(\mathbb{R}^n)$ e que a norma L^q decresce. $\square$

Observação 3.1.2. A teoria geral de equações parabólicas garante que, enquanto a solução permanecer limitada, pode ser estendida a intervalos de existência mais amplos e pelo teorema acima, garantimos que a solução é global (isto é, é definida para todo $t > 0$), e as propriedades (3.1.24) e (3.1.25) valem para todo $t > 0$.

Observação 3.1.3. Lembre também, que nas propriedades (Capitulo 1), obtemos decrescimento da norma L^1 quando $p_0 = 1$, onde a função $f(x,t,u)$ é mais geral, isto é, não é necessário f satisfazer a condição (3.1.2) para obter o decrescimento. E neste caso mais geral, a norma L^1 é a única na qual garantimos esta propriedade.

Corolário 3.1.4. *Com as mesmas hipóteses do Teorema 3.1.1, concluimos que*

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^q dx + q(q-1)\int_{t_0}^{t} \mu(\tau)\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p |u(x,t)|^{q-2} dx d\tau \\ \leq \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t_0)|^q dx < \infty,\end{aligned} \tag{3.1.26}$$

$$\int_{t_0}^{T} \mu(\tau)\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p |u(x,\tau)|^{q-2} dx d\tau < \infty, \tag{3.1.27}$$

$$\int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 |u(x,\tau)|^{q-2} dx d\tau < \infty. \tag{3.1.28}$$

para todo $q \geq \max\{2, p_0\}$ *finito e* $0 \leq t_0 < t < T$.

Demonstração. Refazendo os cálculos do Teorema 3.1.1, para todo $q \geq \max\{2, p_0\}$, a desigualdade (3.1.19) fica

$$
\begin{aligned}
&\int_{|x|\leq R} L_\delta^q \zeta_R dx \\
&+ q(q-1)\int_{t_0}^t \mu(\tau)\int_{|x|\leq R} |\nabla u|^p L_\delta^{q-2}(u)(L'_\delta(u))^2 \zeta_R dx d\tau \\
&+ q\int_{t_0}^t \mu(\tau)\int_{|x|\leq R} |\nabla u|^p L_\delta^{q-1}(u) L''_\delta(u)\zeta_R dx d\tau \\
&+ q(q-1)\eta\int_{t_0}^t \int_{|x|\leq R} |\nabla u|^2 L_\delta^{q-2}(u)(L'_\delta(u))^2 \zeta_R dx d\tau \\
&+ \eta q\int_{t_0}^t \int_{|x|\leq R} |\nabla u|^2 L_\delta^{q-1}(u) L''_\delta(u)\zeta_R dx d\tau \leq \int_{|x|\leq R} L_\delta^q(u(x,t_0))\zeta_R dx \\
&+ nK(T)\epsilon\int_{t_0}^t \int_{|x|\leq R} L_\delta^q(u) w_\epsilon(x) dx d\tau \\
&+ q\epsilon\int_{t_0}^t \mu(\tau)\int_{|x|\leq R} |\nabla u|^{p-1} L_\delta^{q-1}(u)|L'_\delta(u)| w_\epsilon(x) dx d\tau \\
&+ \eta\epsilon\int_{t_0}^t \int_{|x|=R} L_\delta^q(u) w_\epsilon(x) dx d\tau + n\eta\epsilon\int_{t_0}^t \int_{|x|\leq R} L_\delta^q(u) w_\epsilon(x) dx d\tau. \qquad (3.1.29)
\end{aligned}
$$

Fazendo $\delta \to 0$, usando o Teorema da Convergência Dominada, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\int_{|x|\leq R} |u(x,\tau)|^q \zeta_R dx \\
&+ q(q-1)\int_{t_0}^t \mu(\tau)\int_{|x|\leq R} |\nabla u|^p |u(x,\tau)|^{q-2}\zeta_R dx d\tau \\
&+ q(q-1)\eta\int_{t_0}^t \int_{|x|\leq R} |\nabla u|^2 |u(x,\tau)|^{q-2}\zeta_R dx d\tau \leq \int_{|x|\leq R} |u(x,t_0)|^q \zeta_R dx \\
&+ nK(T)\epsilon\int_{t_0}^t \int_{|x|\leq R} |u(x,\tau)|^q w_\epsilon(x) dx d\tau \\
&+ q\epsilon\int_{t_0}^t \mu(\tau)\int_{|x|\leq R} |\nabla u|^{p-1}|u(x,\tau)|^{q-1} w_\epsilon(x) dx d\tau \\
&+ \eta\epsilon\int_{t_0}^t \int_{|x|=R} |u(x,\tau)|^q w_\epsilon(x) dx d\tau + n\eta\epsilon\int_{t_0}^t \int_{|x|\leq R} |u(x,\tau)|^q w_\epsilon(x) dx d\tau.
\end{aligned}
\qquad (3.1.30)
$$

já que $L_\delta^{q-1}(u)L''_\delta(u)$ é limitada uniformemente em δ, com $L''_\delta(u) \to 0$ para todo $u \neq 0$ e $L'_\delta(u) \to \operatorname{sgn}(u)$ ao $\delta \to 0$.

Agora, fazendo $R \to \infty$, usando o Teorema da convergência Monótona e lembrando que o termo de fronteira desaparece ao aplicar este limite, obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,\tau)|^q w_\epsilon(x)dx \\
&+ q(q-1)\int_{t_0}^t \mu(\tau)\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p |u(x,\tau)|^{q-2} w_\epsilon(x)dxd\tau \\
&+ q(q-1)\eta\int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 |u(x,\tau)|^{q-2} w_\epsilon(x)dxd\tau \leq \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t_0)|^q w_\epsilon(x)dx \\
&+ nK(T)\epsilon\int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,\tau)|^q w_\epsilon(x)dxd\tau \\
&+ \underbrace{q\epsilon\int_{t_0}^t \mu(\tau)\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^{p-1} |u(x,\tau)|^{q-1} w_\epsilon(x)dxd\tau}_{a} \\
&+ n\eta\epsilon\int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,\tau)|^q w_\epsilon(x)dxd\tau. \qquad (3.1.31)
\end{aligned}$$

Aplicamos desiguandade de Young no termo a com parâmetros p e $\frac{p}{p-1}$, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
&q\epsilon\int_{t_0}^t \mu(\tau)\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^{p-1} |u(x,\tau)|^{q-1} w_\epsilon(x)dxd\tau \\
&q\epsilon\int_{t_0}^t \mu(\tau)\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{p-1}{p}|\nabla u|^p + \frac{1}{p}|u|^p\right) |u(x,\tau)|^{q-2} w_\epsilon(x)dxd\tau
\end{aligned}$$

Assim, podemos absorver uma parte do termo a no lado esquerdo da desigualdade, e a desigualdade (3.1.31) fica

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,\tau)|^q w_\epsilon(x)dx \\
&+ q(q-1-\epsilon)\int_{t_0}^t \mu(\tau)\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p |u(x,\tau)|^{q-2} w_\epsilon(x)dxd\tau \\
&+ q(q-1)\eta\int_{t_0}^t\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 |u(x,\tau)|^{q-2} w_\epsilon(x)dxd\tau \leq \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t_0)|^q w_\epsilon(x)dx \\
&+ nK(T)\epsilon\int_{t_0}^t\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,\tau)|^q w_\epsilon(x)dxd\tau \\
&+ \frac{q}{p}\epsilon\int_{t_0}^t \mu(\tau)\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,\tau)|^{q-2+p} w_\epsilon(x)dxd\tau \\
&+ n\eta\epsilon\int_{t_0}^t\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,\tau)|^q w_\epsilon(x)dxd\tau. \qquad (3.1.32)
\end{aligned}
$$

onde $q-1-\epsilon > 0$ para todo $0 < \epsilon < 1$. Sabendo que $|u(x,\tau)|^{q-2+p} \leq M(T)^{p-2}|u(x,\tau)|^q$, já que $\|u(x,\tau)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq M(T)$ para todo $\tau \in [0,T]$, podemos reescrever a desigualdade (3.1.32) da seguinte forma

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,\tau)|^q w_\epsilon(x)dx \\
&+ q(q-1-\epsilon)\int_{t_0}^t \mu(\tau)\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p |u(x,\tau)|^{q-2} w_\epsilon(x)dxd\tau \\
&+ q(q-1)\eta\int_{t_0}^t\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 |u(x,\tau)|^{q-2} w_\epsilon(x)dxd\tau \leq \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t_0)|^q w_\epsilon(x)dx \\
&+ nK(T)\epsilon\int_{t_0}^t\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,\tau)|^q w_\epsilon(x)dxd\tau \\
&+ \frac{q}{p}M(T)^{p-2}\epsilon\int_{t_0}^t \mu(\tau)\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,\tau)|^q w_\epsilon(x)dxd\tau \\
&+ n\eta\epsilon\int_{t_0}^t\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,\tau)|^q w_\epsilon(x)dxd\tau. \qquad (3.1.33)
\end{aligned}
$$

Por fim, fazendo $\epsilon \to 0$, usando o Teorema da Convergência Monótona e lembrando que pelo Teorema anterior, ficou provado que $u(\cdot,t) \in L^q(\mathbb{R}^n)$ para todo $t \geq 0$, a desigualdade (3.1.33) fica

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,\tau)|^q dx \\
&+ q(q-1)\int_{t_0}^{t} \mu(\tau)\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p |u(x,\tau)|^{q-2} dx d\tau \\
&+ q(q-1)\eta \int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 |u(x,\tau)|^{q-2} dx d\tau \leq \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t_0)|^q dx < \infty
\end{aligned}
$$

onde $0 < T_0 \leq t \leq T$.

$\square$

Observação 3.1.5. Por (3.1.26) conseguimos uma desigualdade de energia

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^q dx + q(q-1)\int_{t_0}^{t} \mu(\tau)\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p |u(x,t)|^{q-2} dx d\tau \\
\leq \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t_0)|^q dx < \infty,
\end{aligned}
$$

para todo $q \geq \max\{p_0, 2\}$. Esta propriedade pode ser usada para estimar a norma do sup para $u(\cdot,t)$, mas podemos melhorar este resultado se no lugar de (3.1.34), trabalharmos com a desigualdade

$$
\begin{aligned}
&(t-t_0)^\gamma \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^q dx + \\
&+ q(q-1)\int_{t_0}^{t} \mu(\tau)(\tau - t_0)^\gamma \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p |u|^{q-2} dx d\tau \\
&\leq \gamma \int_{t_0}^{t} (\tau - t_0)^{\gamma-1} \int_{\mathbb{R}^n} |u|^q dx d\tau.
\end{aligned} \tag{3.1.34}
$$

3.2 Desigualdade de Energia

Nesta seção, vamos provar a desigualdade de energia (3.1.34) a qual será usada na demonstração do resultado principal deste capítulo.

Lema 3.2.1. *Seja* $u(\cdot,t) \in L^\infty([0,\infty), L^\infty(\mathbb{R}^n)) \cap C^0\big([0,\infty), L^{p_0}(\mathbb{R}^n)\big)$ *solução (suave) do problema* (3.1.1), *onde* $f(x,t,u)$ *satisfaz a condição* (3.1.2), *então para qualquer* $q \geq \max\{2, p_0\}$ *e* $\gamma > 0$, *obtemos*

$$
\begin{aligned}
&(t-t_0)^\gamma \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^q dx+ \\
&+ q(q-1)\int_{t_0}^t \mu(\tau)(\tau-t_0)^\gamma \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p |u|^{q-2} dx d\tau \\
&\leq \gamma \int_{t_0}^t (\tau-t_0)^{\gamma-1} \int_{\mathbb{R}^n} |u|^q dx d\tau, \qquad (3.2.1)
\end{aligned}
$$

para todo $0 \leq t_0 < t \leq T$.

Demonstração. A prova é análoga ao que foi feito na demonstração do Corolário 3.1.4, porém a desigualdade de energia a ser obtida terá um termo extra, $(t-t_0)^\gamma$. Para resolver isto, multiplicamos a equação (3.1.1) por $(t-t_0)^\gamma \phi'_\delta(u)\zeta_R$, (onde $\gamma > 0$ será escolhido mais tarde, de forma adequada) e integramos em relação a $[t_0, t] \times \mathbb{R}^n$, seguindo os mesmos passos do Teorema 3.1.1.

$$
\begin{aligned}
&\underbrace{\int_{t_0}^t \int_{|x|\leq R} u_\tau (\tau-t_0)^\gamma \phi'_\delta(u)\zeta_R dx d\tau}_{I} \qquad (3.2.2) \\
&+ \underbrace{\int_{t_0}^t \int_{|x|\leq R} \text{div } \left(f(x,\tau,u)\right)(\tau-t_0)^\gamma \phi'_\delta(u)\zeta_R dx d\tau}_{II} \qquad (3.2.3) \\
&= \underbrace{\int_{t_0}^t \int_{|x|\leq R} \mu(\tau)\text{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)(\tau-t_0)^\gamma \phi'_\delta(u)\zeta_R dx d\tau}_{III} \\
&+ \underbrace{\int_{t_0}^t \int_{|x|\leq R} \eta \Delta u (\tau-t_0)^\gamma \phi'_\delta(u)\zeta_R dx d\tau}_{IV}.
\end{aligned}
$$

Agora, usando Fubini e integração por partes, observamos que

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{t_0}^t \int_{|x|\leq R} u_\tau (\tau-t_0)^\gamma \phi'_\delta(u)\zeta_R dx d\tau = \int_{t_0}^t \int_{|x|\leq R} (\tau-t_0)^\gamma \frac{\partial}{\partial\tau}\phi_\delta(u)\zeta_R dx d\tau \\
&= \int_{|x|\leq R} \left((\tau-t_0)^\gamma \phi_\delta(u)\Big]_{t_0}^t - \int_{t_0}^t \gamma(\tau-t_0)^{\gamma-1}\phi_\delta(u) \right) \zeta_R dx \\
&= (t-t_0)^\gamma \int_{|x|\leq R} \phi_\delta(u(x,t))\zeta_R dx - \gamma \int_{t_0}^t (\tau-t_0)^{\gamma-1} \int_{|x|\leq R} \phi_\delta(u)\zeta_R dx d\tau.
\end{aligned}
$$

Para os demais termos II, III e IV, como aplicamos o Teorema do Divergente, e todos os cálculos são feitos em relação a variável espacial, procede-se da mesma forma que foi feito no Corolário 3.1.4, obtendo uma desigualdade parecida com (3.1.33), com a diferença que vamos carregar $(\tau - t_0)^\gamma$ em todos os termos.

$$\begin{aligned}
&(\tau - t_0)^\gamma \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^q w_\epsilon(x)dx \\
&+ (q(q-1) - \epsilon q) \int_{t_0}^t \mu(\tau)(\tau - t_0)^\gamma \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p |u(x,t)|^{q-2} w_\epsilon(x)dxd\tau \\
&+ \eta q(q-1) \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^\gamma \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 |u|^{q-2} w_\epsilon(x)dxd\tau \\
&\leq \gamma \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^\gamma \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^q w_\epsilon(x)dx \\
&+ \epsilon n K(T) \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^\gamma \int_{\mathbb{R}^n} |u|^q w_\epsilon(x)dxd\tau \\
&+ \epsilon M(T)^{p-2} \frac{q}{p} \int_{t_0}^t \mu(\tau)(\tau - t_0)^\gamma \int_{\mathbb{R}^n} |u|^q w_\epsilon(x)dxd\tau \\
&+ n\epsilon\eta \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^\gamma \int_{\mathbb{R}^n} |u|^q w_\epsilon(x)dxd\tau, \qquad (3.2.4)
\end{aligned}$$

válida para $q \geq 2$. A seguir, fazendo $\epsilon \to 0$, usando o Teorema da Convergência Monótona e sabendo que os últimos termos da desigualdade (3.2.4) são finitos, já que $u(\cdot,t) \in L^q(\mathbb{R}^n)$ para $q \geq \max\{2, p_0\}$, ficamos apenas com

$$\begin{aligned}
&(\tau - t_0)^\gamma \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^q dx + q(q-1) \int_{t_0}^t \mu(\tau)(\tau - t_0)^\gamma \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p |u(x,t)|^{q-2} dxd\tau \\
&+ \eta q(q-1) \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^\gamma \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 |u|^{q-2} dxd\tau \leq \gamma \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^\gamma \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^q dx. \qquad (3.2.5)
\end{aligned}$$

Retirando o termo (que não será necessário):

$$\eta q(q-1) \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^\gamma \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 |u|^{q-2} dxd\tau \geq 0,$$

mantemos a desigualdade,

$$
\begin{aligned}
(t-t_0)^\gamma \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^q dx + q(q-1)\int_{t_0}^t \mu(\tau)(\tau-t_0)^\gamma \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p |u|^{q-2} dx d\tau \\
\leq \gamma \int_{t_0}^t (\tau-t_0)^{\gamma-1} \int_{\mathbb{R}^n} |u|^q dx d\tau \qquad (3.2.6)
\end{aligned}
$$

concluindo a prova do teorema. □

Nosso objetivo é mostrar a propriedade de ultracontratividade, isto é

$$
\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K(n,p,p_0)\|u_0\|_{L^{p_0}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{p_0 p}{n(p-2)+p_0 p}} \left(\int_0^t \mu(\tau)d\tau\right)^{-\frac{n}{n(p-2)+p_0 p}}.
$$

Mas podemos a partir de agora, considerar o caso $\mu(t)=1$, simplificando os cálculos dos próximos resultados e pela observação abaixo, podemos através de uma mudança de variável voltar a desigualdade acima.

Observação 3.2.2. A partir daqui vamos considerar $\mu(t)=1$, $\forall t>0$. Veremos que este caso é suficiente para os nossos estudos. De fato, fazendo a seguinte mudança de variável em t,

$$
\tau := \int_0^t \mu(s)ds
$$

e considerando $U(x,\tau) := u(x,t(\tau))$, onde u é solução da equação (3.1.1), obtemos $U_\tau(x,\tau) = u_t(x,t(\tau))t'(\tau)$ e $\frac{d\tau}{dt} = \mu(t)$. Pelo Teorema da Função Inversa, temos $\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\mu(t)}$. Logo, $U_\tau(x,\tau) = u_t(x,t(\tau))\frac{1}{\mu(t(\tau))}$. Substituindo na equação (3.1.1), obtemos

$$
\begin{aligned}
U_\tau(x,\tau) &= u_t(x,t(\tau))\frac{1}{\mu(t(\tau))} = \\
&= \frac{1}{\mu(t(\tau))}\left[-\mathrm{div} f(x,t(\tau),u(x,t(\tau))) + \mu(t(\tau))\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + \eta\Delta u\right] \\
&= -\mathrm{div}\tilde{f}(x,\tau,U(x,\tau)) + \mathrm{div}(|\nabla U(x,\tau)|^{p-2}\nabla U(x,\tau)) + \eta\Delta U(x,\tau), \qquad (3.2.7)
\end{aligned}
$$

onde $\tilde{f}(x,\tau,U(x,\tau)) = \dfrac{f(x,t(\tau),u(x,t(\tau)))}{\mu(t(\tau))}$ satisfaz a condição (3.1.2). E vale para $U_\tau(x,\tau)$ a estimativa de ultracontratividade, isto é

$$\|U(\cdot,\tau)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K(p_0,n,p)\|U_0\|^{\delta}_{L^{p_0}(\mathbb{R}^n)}\tau^{-\gamma}, \quad \forall \tau > 0,$$

onde

$$\delta = \frac{p_0 p}{n(p-2)+p_0 p} \quad \text{e} \quad \gamma = -\frac{n}{n(p-2)+p_0 p}.$$

Agora, voltando para u, sabendo que $U_0 = U(x,0) = u(x,t(0)) = u(x,0) = u_0(x)$, e como $U(x,\tau) = u(x,t(\tau))$, temos $\|U(\cdot,\tau)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \|u(\cdot,t(\tau))\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$. Logo,

$$\begin{aligned}
\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} &\leq K(p_0,p,n)\|u_0\|^{\delta}_{L^{p_0}(\mathbb{R}^n)}\tau^{-\gamma} \\
&= K(p_0,p,n)\|u_0\|^{\delta}_{L^{p_0}(\mathbb{R}^n)}\left(\int_0^t \mu(s)ds\right)^{-\gamma}, \quad \forall t > 0.
\end{aligned}$$

3.3 Estimativa da norma L^∞

Nesta seção mostraremos como usar a desigualdade de energia dada em (3.2.1) para obter uma estimativa fundamental para norma do sup. Tal estimativa mostra que a solução $u(\cdot,t)$ (globalmente definida) decai ao $t \to \infty$ e além disso nos fornece a taxa de decaimento. Começaremos mostrando uma aproximação $L^q - L^p$ e aplicaremos um processo bootstrap.

Teorema 3.3.1. *Seja $u(\cdot,t) \in C^0([0,\infty), L^{p_0}(\mathbb{R}^n)) \bigcap L^\infty([0,\infty), L^\infty(\mathbb{R}^n))$ a única solução limitada de* (3.1.1)*, então para cada $q \geq 2p_0$ temos*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq K(n,q,p,p_0)\|u(\cdot,t_0)\|^{\delta}_{L^{\frac{q}{2}}(\mathbb{R}^n)}\left(\int_{t_0}^t \mu(\tau)d\tau\right)^{-\gamma}$$

para $0 \leq t_0 < t$.

Demonstração. Sem perda de generaldade, supomos que $\mu(\tau) = 1$ para todo $\tau \in (t_0,t)$. A desigualdade (3.2.6) acima obtida, pode ser reescrita da seguinte forma

$$\begin{aligned}
(t-t_0)^\gamma\|u(\cdot,t)\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} + q(q-1)\int_{t_0}^t (\tau-t_0)^\gamma \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p|u|^{q-2}dxd\tau \\
\leq \gamma\int_{t_0}^t (\tau-t_0)^{\gamma-1}\|u(\cdot,\tau)\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)}d\tau. \qquad (3.3.1)
\end{aligned}$$

Definimos a seguinte função

$$w(x,t) = \begin{cases} u(x,t), & q = 2 \\ |u(x,t)|^{\lambda}, & q > 2. \end{cases} \tag{3.3.2}$$

onde $\lambda = \dfrac{p+q-2}{p}$. Assim, obtemos a seguinte mudança de variável

$$\|u(\cdot,t)\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^q dx = \int_{\mathbb{R}^n} |w(x,t)|^{\frac{q}{\lambda}} dx = \|w(\cdot,t)\|^{\beta}_{L^{\beta}(\mathbb{R}^n)},$$

onde $\beta := \dfrac{q}{\lambda}$ e

$$\|u(\cdot,t)\|^{\frac{q}{2}}_{L^{\frac{q}{2}}(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^{\frac{q}{2}} dx = \int_{\mathbb{R}^n} |w(x,t)|^{\frac{q}{2\lambda}} dx = \|w(\cdot,t)\|^{\beta_0}_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)},$$

onde $\beta_0 := \dfrac{\beta}{2}$.

Reescrevendo (3.3.1) em função de $w(\cdot,t)$,

$$\begin{aligned}(t-t_0)^{\gamma}\|w(\cdot,t)\|^{\beta}_{L^{\beta}(\mathbb{R}^n)} + \frac{q(q-1)}{\lambda^p}\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^{\gamma}\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla w(x,\tau)|^p dx d\tau \\ \leq \gamma \underbrace{\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^{\gamma-1}\|w(\cdot,\tau)\|^{\beta}_{L^{\beta}(\mathbb{R}^n)} d\tau}_{*}.\end{aligned} \tag{3.3.3}$$

Agora usando em $*$ a desigualdade (SNG) (veja em [15]), temos

$$\|w(\cdot,\tau)\|^{\beta}_{L^{\beta}} \leq K(n)^{\beta}\|w(\cdot,\tau)\|^{(1-\theta)\beta}_{L^{\beta_0}}\|\nabla w(\cdot,\tau)\|^{\theta\beta}_{L^p} \tag{3.3.4}$$

onde $0 < \beta_0 < \beta$, $K := K(n)$ e θ satisfaz

$$\frac{1}{\beta} = \theta\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{n}\right) + \frac{2}{\beta}(1-\theta) \tag{3.3.5}$$

obtemos

$$
\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{t} (\tau - t_0)^{\gamma-1} \|w(\cdot,\tau)\|^{\beta}_{L^{\beta}(\mathbb{R}^n)} d\tau \leq \\
&\quad \leq \int_{t_0}^{t} (\tau - t_0)^{\gamma-1} K^{\beta} \|w(\cdot,\tau)\|^{(1-\theta)\beta}_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)} \|\nabla w(\cdot,\tau)\|^{\theta\beta}_{L^{p}(\mathbb{R}^n)} d\tau \\
&\quad \overset{(i)}{\leq} K^{\beta} \|w(\cdot,t_0)\|^{(1-\theta)\beta}_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)} \int_{t_0}^{t} (\tau - t_0)^{\gamma-1} \|\nabla w(\cdot,\tau)\|^{\theta\beta}_{L^{p}(\mathbb{R}^n)} d\tau \\
&\quad \overset{(ii)}{\leq} K^{\beta} \|w(\cdot,t_0)\|^{(1-\theta)\beta}_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)} \left(\int_{t_0}^{t} (\tau - t_0)^{(\gamma-1)\frac{p}{\theta\beta}} \|\nabla w(\cdot,\tau)\|^{p}_{L^{p}(\mathbb{R}^n)} d\tau \right)^{\frac{\theta\beta}{p}} (t - t_0)^{\frac{p-\theta\beta}{p}} \\
&\quad = (t - t_0)^{\frac{p-\theta\beta}{p}} K^{\beta} \|w(\cdot,t_0)\|^{(1-\theta)\beta}_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)} A^{-\frac{\theta\beta}{p}} \left(A \int_{t_0}^{t} (\tau - t_0)^{(\gamma-1)\frac{p}{\theta\beta}} \|\nabla w(\cdot,\tau)\|^{p}_{L^{p}(\mathbb{R}^n)} d\tau \right)^{\frac{\theta\beta}{p}}
\end{aligned}
$$

onde A será determinado mais tarde. Observe que em (i) usamos que a norma L^{β_0} decai, isto é, $\|w(\cdot,\tau)\|_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)} \leq \|w(\cdot,t_0)\|_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)}$ $\forall \tau \geq t_0$, já que

$$
\|w(\cdot,t_0)\|^{\beta_0}_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)} = \|u(\cdot,t_0)\|^{\frac{q}{2}}_{L^{\frac{q}{2}}(\mathbb{R}^n)} \geq \|u(\cdot,\tau)\|^{\frac{q}{2}}_{L^{\frac{q}{2}}(\mathbb{R}^n)} = \|w(\cdot,\tau)\|^{\beta_0}_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)}
$$

e (pela hipótese) $q \geq 2p_0$, com $p_0 \geq 1$. E em (ii) usamos Desigualdade de Holder com parâmetros $\frac{p}{\theta\beta}$ e $\frac{p}{p-\theta\beta}$. Então a Desigualdade 3.3.3 fica

$$
\begin{aligned}
&(t - t_0)^{\gamma} \|w(\cdot,t)\|^{\beta}_{L^{\beta}(\mathbb{R}^n)} + \frac{q(q-1)}{\lambda^p} \int_{t_0}^{t} (\tau - t_0)^{\gamma} \|\nabla w\|^{p}_{L^{p}(\mathbb{R}^n)} d\tau \qquad (3.3.6) \\
&\leq \gamma (t - t_0)^{\frac{p-\theta\beta}{p}} K^{\beta} \|w(\cdot,t_0)\|^{(1-\theta)\beta}_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)} A^{-\frac{\theta\beta}{p}} \left(A \int_{t_0}^{t} (\tau - t_0)^{(\gamma-1)\frac{p}{\theta\beta}} \|\nabla w\|^{p}_{L^{p}(\mathbb{R}^n)} d\tau \right)^{\frac{\theta\beta}{p}}.
\end{aligned}
$$

Neste momento, podemos escolher γ, de forma que $\gamma = (\gamma - 1)\frac{p}{\theta\beta}$, isto é, $\gamma := \dfrac{p}{p-\theta\beta}$, permitindo que as integrais em (3.3.6) tornem-se semelhantes. Usando Desigualdade de Young com parâmetros $\frac{p}{\theta\beta}$ e $\frac{p}{p-\theta\beta}$, obtemos

$$
\begin{aligned}
&(t-t_0)^\gamma \|w(\cdot,t)\|^\beta_{L^\beta(\mathbb{R}^n)} + \frac{q(q-1)}{\lambda^p}\int_{t_0}^t (\tau-t_0)^\gamma \|\nabla w\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} d\tau \\
&\le \gamma \left[\frac{p-\theta\beta}{p} \left(A^{-\frac{\theta\beta}{p}} (t-t_0)^{\frac{p-\theta\beta}{p}} K^\beta \|w(\cdot,t_0)\|^{(1-\theta)\beta}_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)} \right)^{\frac{p}{p-\theta\beta}} \right. \\
&\left. + \frac{\theta\beta}{p} A \int_{t_0}^t (\tau-t_0)^\gamma \|\nabla w\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} d\tau \right] \\
&= (t-t_0) A^{-\frac{\theta\beta}{p-\theta\beta}} K^{\beta\gamma} \|w(\cdot,t_0)\|^{(1-\theta)\beta\gamma}_{L^{\beta_0}} \\
&+ \frac{\theta\beta}{p-\theta\beta} A \int_{t_0}^t (\tau-t_0)^\gamma \|\nabla w\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} d\tau. \qquad (3.3.7)
\end{aligned}
$$

Agora escolhemos A, tal que $\dfrac{\theta\beta}{p-\theta\beta}A = \dfrac{q(q-1)}{\lambda^p}$, ou seja,

$$
A := q(q-1)\frac{2n(p-2)+pq}{nq}\left(\frac{p}{p+q-2}\right)^p. \qquad (3.3.8)
$$

Assim, eliminamos o termo

$$
\frac{q(q-1)}{\lambda^p}\int_{t_0}^t (\tau-t_0)^\gamma \|\nabla w\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} d\tau,
$$

e ficamos com

$$
(t-t_0)^\gamma \|w(\cdot,t)\|^\beta_{L^\beta(\mathbb{R}^n)} \le A^{\frac{-\theta\beta}{p-\theta\beta}} K^{\beta\gamma} (t-t_0) \|w(\cdot,t_0)\|^{(1-\theta)\beta\gamma}_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)}.
$$

Dividindo tudo por $(t-t_0)^\gamma$, obtemos

$$
\|w(\cdot,t)\|^\beta_{L^\beta(\mathbb{R}^n)} \le A^{\frac{-\theta\beta}{p-\theta\beta}} K^{\beta\gamma} (t-t_0)^{1-\gamma} \|w(\cdot,t_0)\|^{(1-\theta)\beta\gamma}_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)}. \qquad (3.3.9)
$$

Reescrevendo (3.3.9) em função de $u(\cdot,t)$, temos

$$
\|u(\cdot,t)\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le A^{\frac{-\theta\beta}{p-\theta\beta}} K^{\beta\gamma} (t-t_0)^{1-\gamma} \|u(\cdot,t_0)\|^{(1-\theta)\gamma q}_{L^{\frac{q}{2}}(\mathbb{R}^n)}.
$$

Isto é,

$$
\|u(\cdot,t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le A^{\frac{-\theta\beta}{p-\theta\beta}\frac{1}{q}} K^{\frac{\beta\gamma}{q}} (t-t_0)^{\frac{1-\gamma}{q}} \|u(\cdot,t_0)\|^{(1-\theta)\gamma}_{L^{\frac{q}{2}}(\mathbb{R}^n)}. \qquad (3.3.10)
$$

Lembrando que θ satisfaz (3.3.5) e calculando os expoentes em função de p, q e n, obtemos

- $\displaystyle -\frac{\theta\beta}{p-\theta\beta} = -\frac{1}{\frac{2}{q}(p-2)+\frac{p}{n}} = -\frac{qn}{2n(p-2)+pq}$
- $\displaystyle \frac{1-\gamma}{q} = -\frac{1}{2(p-2)+\frac{pq}{n}} = -\frac{n}{2n(p-2)+pq}$
- $\displaystyle \frac{\beta\gamma}{q} = \frac{p}{p+q-2}\left(1+\frac{qn}{2n(p-2)+pq}\right)$
- $\displaystyle (1-\theta)\gamma = 1-\left[\frac{n(p-2)}{2n(p-2)+pq}\right].$

Substituindo os expoentes encontrados, concluímos o teorema.

□

Até o momento, obtivemos a estimativa

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq A^{-\frac{n}{2n(p-2)+pq}} K^{\frac{p}{p+q-2}\left(1+\frac{qn}{2n(p-2)+pq}\right)}. \quad (3.3.11)$$
$$(t-t_0)^{-\frac{n}{2n(p-2)+pq}} \|u(\cdot,t_0)\|_{L^{\frac{q}{2}}(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{n(p-2)}{2n(p-2)+pq}},$$

onde a constante A é dada por (3.3.8) e a constante K que surge da desigualdade (3.3.4).

Teorema 3.3.2. *Seja* $u(\cdot,t) \in C^0([0,\infty), L^{p_0}(\mathbb{R}^n)) \bigcap L^\infty([0,\infty), L^\infty(\mathbb{R}^n))$ *solução do problema* (3.1.1), *então*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K(n,p,p_0)(t)^{-\frac{n}{n(p-2)+p_0p}} \|u_0\|_{L^{p_0}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{p_0p}{n(p-2)+p_0p}}.$$

Demonstração. Seja $q \geq 2p_0$. Definindo $h := 2n(p-2)$, que não depende de q, podemos reescrever (3.3.11) com uma notação mais sucinta,

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq A^{-\frac{n}{h+pq}} K^{\frac{p}{p+q-2}\left(1+\frac{qn}{h+pq}\right)}.$$
$$(t-t_0)^{-\frac{n}{h+pq}} \|u(\cdot,t_0)\|_{L^{\frac{q}{2}}(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{\frac{h}{2}}{h+pq}}, \quad (3.3.12)$$

onde $A = (q-1)^{\frac{h+pq}{n}} \left(\frac{p}{p+q-2}\right)^p$.

Dado $m \geq 1$, tomando $t \in (0,\infty)$, sejam

$$t_0^m = 2^{-m}t \ \text{ e } \ t_j^m = t_0^m + (1-2^{-j})t, \quad \forall \ \ 1 \leq j \leq m. \quad (3.3.13)$$

Podemos estimar $\|u(\cdot,t_j^m)\|_{L^{2^jp_0}(\mathbb{R}^n)}$ em termos de $\|u(\cdot,t_{j-1}^m)\|_{L^{2^{j-1}p_0}(\mathbb{R}^n)}$ para todo $1\leq j\leq m$, já que (3.3.12) ocorre para $q\geq 2p_0$ e $t>t_0\geq 0$.

Note que $t_j^m - t_{j-1}^m = 2^{-j}t$. Aplicando três vezes este argumento na estimativa (3.3.12), podemos ter uma ideia do que está acontecendo,

$$\|u(\cdot,t_j^m)\|_{L^{2^jp_0}(\mathbb{R}^n)} \leq \left[(2^jp_0-1)\frac{h+2^jp_0p}{n}\left(\frac{p}{p-2+2^jp_0}\right)^p\right]^{\frac{-n}{h+2^jp_0p}}\cdot$$
$$\left[(2^{j-1}p_0-1)\frac{h+2^{j-1}p_0p}{n}\left(\frac{p}{p-2+2^{j-1}p_0}\right)^p\right]^{\frac{-n}{h+2^{j-1}p_0p}\left(1-\frac{\frac{h}{2}}{h+2^jp_0p}\right)}\cdot$$
$$\left[(2^{j-2}p_0-1)\frac{h+2^{j-2}p_0p}{n}\left(\frac{p}{p-2+2^{j-2}p_0}\right)^p\right]^{\frac{-n}{h+2^{j-2}p_0p}\left(1-\frac{\frac{h}{2}}{h+2^jp_0p}\right)\left(1-\frac{\frac{h}{2}}{h+2^{j-1}p_0p}\right)}\cdot$$
$$K^{\frac{p}{p+2^jp_0-2}\left(1+\frac{2^jp_0n}{h+2^jp_0p}\right)}\cdot K^{\frac{p}{p+2^{j-1}p_0-2}\left(1+\frac{2^{j-1}p_0n}{h+2^{j-1}p_0p}\right)\left(1-\frac{\frac{h}{2}}{h+2^jp_0p}\right)}\cdot$$
$$K^{\frac{p}{p+2^{j-2}p_0-2}\left(1+\frac{2^{j-2}p_0n}{h+2^{j-2}p_0p}\right)\left(1-\frac{\frac{h}{2}}{h+2^jp_0p}\right)\left(1-\frac{\frac{h}{2}}{h+2^{j-1}p_0p}\right)}\cdot\left(\frac{t}{2^j}\right)^{-\frac{n}{h+2^jp_0p}}$$
$$\left(\frac{t}{2^{j-1}}\right)^{-\frac{n}{h+2^{j-1}p_0p}\left(1-\frac{\frac{h}{2}}{h+2^jp_0p}\right)}\left(\frac{t}{2^{j-2}}\right)^{-\frac{n}{h+2^{j-2}p_0p}\left(1-\frac{\frac{h}{2}}{h+2^jp_0p}\right)\left(1-\frac{\frac{h}{2}}{h+2^{j-1}p_0p}\right)}$$
$$\|u(\cdot,t_{j-3}^m)\|_{L^{2^{j-3}p_0}(\mathbb{R}^n)}^{\left(1-\frac{\frac{h}{2}}{h+2^jp_0p}\right)\left(1-\frac{\frac{h}{2}}{h+2^{j-1}p_0p}\right)\left(1-\frac{\frac{h}{2}}{h+2^{j-2}p_0p}\right)}.$$

Definindo $C_l := 1-\dfrac{\frac{h}{2}}{h+2^lp_0p}$, notamos que

$$\begin{aligned} C_m\cdots C_j &= \prod_{l=j}^{m}\left(1-\frac{\frac{h}{2}}{h+2^lp_0p}\right) \qquad (3.3.14)\\ &= \left(\frac{\frac{h}{2}+2^jp_0p}{h+2^jp_0p}\right)\left(\frac{\frac{h}{2}+2^{j+1}p_0p}{h+2^{j+1}p_0p}\right)\cdots\left(\frac{\frac{h}{2}+2^{m-1}p_0p}{h+2^{m-1}p_0p}\right)\left(\frac{\frac{h}{2}+2^mp_0p}{h+2^mp_0p}\right)\\ &= \left(\frac{\frac{h}{2}+2^mp_0p}{h+2^jp_0p}\right)\frac{1}{2^{m-j}}. \end{aligned}$$

Estimando $\|u(\cdot,t_m^m)\|_{L^{2^mp_0}(\mathbb{R}^n)}$ em termos de $\|u(\cdot,t_0^m)\|_{L^{p_0}(\mathbb{R}^n)}$, usando (3.3.14), obtemos

$$
\|u(\cdot,t_m^m)\|_{L^{2^m p_0}(\mathbb{R}^n)} \leq \prod_{j=1}^{m} A_j^{-\frac{n(\frac{h}{2}+2^m p_0 p)}{2^m}\left(\frac{2^{j+1}}{(h+2^j p_0 p)(h+2^{j+1}p_0 p)}\right)}
$$

$$
K^{\left(\frac{\frac{h}{2}+2^m p_0 p}{2^m}\right)\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{h+2^j p_0(p+n)}{h+2^j p_0 p}\right)\left(\frac{2^{j+1}}{h+2^{j+1}p_0 p}\right)\left(\frac{p}{2^j p_0+p-2}\right)}
$$

$$
\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{t}{2^j}\right)^{-\frac{n(\frac{h}{2}+2^m p_0 p)}{2^m}\left(\frac{2^{j+1}}{(h+2^j p_0 p)(h+2^{j+1}p_0 p)}\right)} \|u(\cdot,t_0^m)\|_{L^{p_0}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{\frac{h}{2}+2^m p_0 p}{h+2p_0 p}\frac{1}{2^{m-1}}}. \tag{3.3.15}
$$

Nosso objetivo é fazer $m \to \infty$, pois $t_0^m \to 0$ e $L^{2^m p_0}(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n)$ onde $t_m^m = t$ para qualquer $m \geq 1$. Fazendo $m \to \infty$ em (3.3.15) e substituindo $h = 2n(p-2)$, obtemos

$$
\|u(\cdot,t_0^m)\|_{L^{p_0}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{\frac{h}{2}+2^m p_0 p}{h+2p_0 p}\frac{1}{2^{m-1}}} \to \|u(\cdot,0)\|_{L^{p_0}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{p_0 p}{\frac{h}{2}+p_0 p}} = \|u_0\|_{L^{p_0}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{p_0 p}{n(p-2)+p_0 p}}. \tag{3.3.16}
$$

Enquanto que o termo que contém a variável tempo é

$$
\begin{aligned}
&\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{t}{2^j}\right)^{-\frac{n(\frac{h}{2}+2^m p_0 p)}{2^m}\left(\frac{2^{j+1}}{(h+2^j p_0 p)(h+2^{j+1}p_0 p)}\right)} \\
&= \underbrace{\prod_{j=1}^{m} t^{-\frac{n(\frac{h}{2}+2^m p_0 p)}{2^m}\left(\frac{2^{j+1}}{(h+2^j p_0 p)(h+2^{j+1}p_0 p)}\right)}}_{I} \\
&\cdot \underbrace{\prod_{j=1}^{m} 2^{\frac{n(\frac{h}{2}+2^m p_0 p)}{2^m}\left(\frac{j2^{j+1}}{(h+2^j p_0 p)(h+2^{j+1}p_0 p)}\right)}}_{II}.
\end{aligned} \tag{3.3.17}
$$

Analisando I e II e usando frações parciais, isto é

$$
\frac{2^{j+1}}{(h+2^j p_0 p)(h+2^{j+1}p_0 p)} = \frac{2}{p_0 p}\left(\frac{1}{h+2^j p_0 p} - \frac{1}{h+2^{j+1}p_0 p}\right), \tag{3.3.18}
$$

obtemos para I:

$$
\begin{aligned}
I &= (t)^{-\frac{n(\frac{h}{2}+2^m p_0 p)}{2^m}\sum_{j=1}^m \frac{2^{j+1}}{(h+2^j p_0 p)(h+2^{j+1}p_0 p)}} \\
&= (t)^{-\frac{2n(\frac{h}{2}+2^m p_0 p)}{2^m p_0 p}\sum_{j=1}^m \frac{1}{h+2^j p_0 p}-\frac{1}{h+2^{j+1}p_0 p}} \\
&= (t)^{-\frac{2n(\frac{h}{2}+2^m p_0 p)}{2^m p_0 p}\left(\frac{1}{h+2p_0 p}-\frac{1}{h+2^{m+1}p_0 p}\right)},
\end{aligned}
$$

que quando $m \to \infty$, e substituindo $h = 2n(p-2)$, fica

$$
\lim_{m\to\infty} I = (t)^{-\frac{2n}{h+2p_0 p}} = (t)^{-\frac{n}{n(p-2)+p_0 p}}. \tag{3.3.19}
$$

Para II temos

$$
\begin{aligned}
II &= (2)^{\frac{n(\frac{h}{2}+2^m p_0 p)}{2^m}\sum_{j=1}^m \frac{j2^{j+1}}{(h+2^j p_0 p)(h+2^{j+1}p_0 p)}} \\
&= (2)^{\frac{2n(\frac{h}{2}+2^m p_0 p)}{2^m p_0 p}\sum_{j=1}^m \frac{j}{h+2^j p_0 p}-\frac{j}{h+2^{j+1}p_0 p}} \\
&= (2)^{\frac{2n(\frac{h}{2}+2^m p_0 p)}{2^m p_0 p}\left(\sum_{j=1}^m \frac{j}{h+2^j p_0 p}-\frac{j+1}{h+2^{j+1}p_0 p}+\sum_{j=1}^m \frac{1}{h+2^{j+1}p_0 p}\right)} \\
&\leq (2)^{\frac{2n(\frac{h}{2}+2^m p_0 p)}{2^m p_0 p}\left(\sum_{j=1}^m \frac{j}{h+2^j p_0 p}-\frac{j+1}{h+2^{j+1}p_0 p}+\sum_{j=1}^m \frac{1}{2^{j+1}p_0 p}\right)}
\end{aligned}
$$

que quando $m \to \infty$, temos $\frac{2n(\frac{h}{2}+2^m p_0 p)}{2^m p_0 p} \to 2n$, $\sum_{j=1}^\infty \frac{j}{h+2^j p_0 p} - \frac{j+1}{h+2^{j+1}p_0 p} = 0$ e $\sum_{j=1}^\infty \frac{1}{2^{j+1}p_0 p} = \frac{1}{p_0 p}$. Assim, segue que

$$
\lim_{m\to\infty} II \leq 2^{\frac{2n}{p_0 p}}. \tag{3.3.20}
$$

Desta forma, o termo que envolve o tempo, por (3.3.17), (3.3.19) e (3.3.20), quando $m \to \infty$ fica estimado por

$$
\lim_{m\to\infty} \prod_{j=1}^m \left(\frac{t}{2^j}\right)^{-\frac{n(\frac{h}{2}+2^m p_0 p)}{2^m}\left(\frac{2^{j+1}}{(h+2^j p_0 p)(h+2^{j+1}p_0 p)}\right)} \leq 2^{\frac{2n}{p_0 p}}(t)^{-\frac{n}{n(p-2)+p_0 p}}.
$$

Agora precisamos garantir que as constantes em (3.3.15) ficam limitadas uniformemente em m. Primeiramente notamos que

$$\lim_{m\to\infty} K^{\left(\frac{\frac{h}{2}+2^m p_0 p}{2^m}\right)\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{h+2^j p_0(p+n)}{h+2^j p_0 p}\right)\left(\frac{2^{j+1}}{h+2^{j+1}p_0 p}\right)\left(\frac{p}{2^j p_0+p-2}\right)}$$
$$\leq K_*(p,n,p_0), \tag{3.3.21}$$

já que $\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{h+2^j p_0(p+n)}{h+2^j p_0 p}\right)\left(\frac{2^{j+1}}{h+2^{j+1}p_0 p}\right)\left(\frac{p}{2^j p_0+p-2}\right)$ é convergente pelo teste da razão e $\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{\frac{h}{2}+2^m p_0 p}{2^m} = p_0 p$.

Finalmente, analisando

$$\prod_{j=1}^{m} A_j^{-\frac{n(\frac{h}{2}+2^m p_0 p)}{2^m}\left(\frac{2^{j+1}}{(h+2^j p_0 p)(h+2^{j+1}p_0 p)}\right)},$$

onde $A_j = (2^j p_0 - 1)\left(\frac{h+2^j p_0 p}{n}\right)\left(\frac{p}{p+2^j p_0-2}\right)^p$. Separamos este produtório em duas partes, isto é

$$\prod_{j=1}^{m} A_j^{-\frac{n(\frac{h}{2}+2^m p_0 p)}{2^m}\left(\frac{2^{j+1}}{(h+2^j p_0 p)(h+2^{j+1}p_0 p)}\right)} = \tag{3.3.22}$$
$$\underbrace{\prod_{j=1}^{m}\left[(2^j p_0 - 1)\left(\frac{h+2^j p_0 p}{n}\right)\right]^{-\frac{n(\frac{h}{2}+2^m p_0 p)}{2^m}\left(\frac{2^{j+1}}{(h+2^j p_0 p)(h+2^{j+1}p_0 p)}\right)}}_{i}$$
$$\underbrace{\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{p+2^j p_0-2}{p}\right)^{p\frac{n(\frac{h}{2}+2^m p_0 p)}{2^m}\left(\frac{2^{j+1}}{(h+2^j p_0 p)(h+2^{j+1}p_0 p)}\right)}}_{ii}$$

Vamos analisar (i) e (ii). Lembrando que

$$\lim_{m\to\infty}\frac{n(\frac{h}{2}+2^m p_0 p)}{2^m}\sum_{j=1}^{m}\frac{2^{j+1}}{(h+2^j p_0 p)(h+2^{j+1}p_0 p)} < \infty,$$

$$\lim_{m\to\infty}\frac{n(\frac{h}{2}+2^m p_0 p)}{2^m}\sum_{j=1}^{m}\frac{j2^{j+1}}{(h+2^j p_0 p)(h+2^{j+1}p_0 p)} < \infty$$

como foi visto em (3.3.19) e (3.3.20) . Em (i), existe $l > 0$ tal que, para todo $j > l$, temos

$$(2^j p_0 - 1)\left(\frac{h + 2^j p_0 p}{n}\right) \geq 1,$$

e então

$$\lim_{m\to\infty} \prod_{j=l+1}^{m} \left[(2^j p_0 - 1)\left(\frac{h + 2^j p_0 p}{n}\right)\right]^{-\frac{n(\frac{h}{2}+2^m p_0 p)}{2^m}\left(\frac{2^{j+1}}{(h+2^j p_0 p)(h+2^{j+1}p_0 p)}\right)}$$
$$\leq \lim_{m\to\infty} \prod_{j=l+1}^{m} (1)^{\frac{n(\frac{h}{2}+2^m p_0 p)}{2^m}\left(\frac{2^{j+1}}{(h+2^j p_0 p)(h+2^{j+1}p_0 p)}\right)}$$
$$= \lim_{m\to\infty} (1)^{\sum_{j=l+1}^{m} \frac{n(\frac{h}{2}+2^m p_0 p)}{2^m}\left(\frac{2^{j+1}}{(h+2^j p_0 p)(h+2^{j+1}p_0 p)}\right)} \leq 1.$$

Desta forma, i fica

$$\lim_{m\to\infty} \prod_{j=1}^{m} \left[(2^j p_0 - 1)\left(\frac{h + 2^j p_0 p}{n}\right)\right]^{-\frac{n(\frac{h}{2}+2^m p_0 p)}{2^m}\left(\frac{2^{j+1}}{(h+2^j p_0 p)(h+2^{j+1}p_0 p)}\right)} =$$
$$\prod_{j=1}^{l} \left[(2^j p_0 - 1)\left(\frac{h + 2^j p_0 p}{n}\right)\right]^{-\frac{n(\frac{h}{2}+2^m p_0 p)}{2^m}\left(\frac{2^{j+1}}{(h+2^j p_0 p)(h+2^{j+1}p_0 p)}\right)} .$$
$$\lim_{m\to\infty} \prod_{j=l+1}^{m} \left[(2^j p_0 - 1)\left(\frac{h + 2^j p_0 p}{n}\right)\right]^{-\frac{n(\frac{h}{2}+2^m p_0 p)}{2^m}\left(\frac{2^{j+1}}{(h+2^j p_0 p)(h+2^{j+1}p_0 p)}\right)}$$
$$< K_*^1(p, p_0, n). \tag{3.3.23}$$

Enquanto que em ii, temos

$$
\begin{aligned}
&\lim_{m\to\infty}\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{p+2^jp_0-2}{p}\right)^{p\frac{n(\frac{h}{2}+2^mp_0p)}{2^m}\left(\frac{2^{j+1}}{(h+2^jp_0p)(h+2^{j+1}p_0p)}\right)}\\
&\leq \lim_{m\to\infty}\prod_{j=1}^{m}(2^jp_0)^{p\frac{n(\frac{h}{2}+2^mp_0p)}{2^m}\left(\frac{2^{j+1}}{(h+2^jp_0p)(h+2^{j+1}p_0p)}\right)}\\
&= \lim_{m\to\infty}\prod_{j=1}^{m}(2p_0)^{p\frac{n(\frac{h}{2}+2^mp_0p)}{2^m}\left(\frac{j2^{j+1}}{(h+2^jp_0p)(h+2^{j+1}p_0p)}\right)}\\
&= \lim_{m\to\infty}(2p_0)^{p\frac{n(\frac{h}{2}+2^mp_0p)}{2^m}\sum_{j=1}^{m}\frac{j2^{j+1}}{(h+2^jp_0p)(h+2^{j+1}p_0p)}}\\
&< K_*^2(p,p_0,n). \qquad (3.3.24)
\end{aligned}
$$

Concluímos assim, que

$$
\lim_{m\to\infty}\prod_{j=1}^{m}A_j^{-\frac{n(\frac{h}{2}+2^mp_0p)}{2^m}\left(\frac{2^{j+1}}{(h+2^jp_0p)(h+2^{j+1}p_0p)}\right)} < K_*^1(p,p_0,n)K_*^2(p,p_0,n). \qquad (3.3.25)
$$

Portanto, fazendo $m\to\infty$ na estimativa (3.3.15), usando os resultados obtidos em (3.3.16), (3.3.21) e (3.3.25), concluímos o teorema, obtendo

$$
\begin{aligned}
\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq & K_*^1(p,p_0,n)K_*^2(p,p_0,n)K_*(p,n,p_0)2^{\frac{2n}{p_0p}} \qquad (3.3.26)\\
&(t)^{-\frac{n}{n(p-2)+p_0p}}\|u_0\|_{L^{p_0}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{p_0p}{n(p-2)+p_0p}}
\end{aligned}
$$

onde $K_*^1(p,p_0,n)K_*^2(p,p_0,n)K_*(p,n,p_0)2^{\frac{2n}{p_0p}} =: K(n,p,p_0)$. □

Corolário 3.3.3. *Com as mesmas hipóteses do teorema anterior, temos*

$$
\|u(\cdot,t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \to 0 \text{ ao } t\to\infty,
$$

para todo $q \geq 2p_0$.

Demonstração. Usando o Teorema 3.3.2 e a propriedade de decrescimento da norma L^q, para todo $q\geq 2p_0$, temos

$$
\begin{aligned}
\|u(\cdot,t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q &= \int_{\mathbb{R}^n}|u(\cdot,t)|^{q-1}|u(\cdot,t)|dx\\
&\leq \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|u(\cdot,t)\|_{L^{q-1}(\mathbb{R}^n)}^{q-1} \to 0,
\end{aligned}
$$

ao $t\to\infty$. □

Observação 3.3.4. No Teorema 3.3.2, poderíamos obter um resultado mais geral, isto é,

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K(n,p,p_0)(t-t_0)^{-\frac{n}{n(p-2)+p_0p}} \|u(\cdot,t_0)\|_{L^{p_0}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{p_0p}{n(p-2)+p_0p}} \ \forall\ 0 \leq t_0 < t,$$

se no lugar de (3.3.13)) tivéssemos definido assim,

- $t_0^m = t_0 + 2^{-m}(t-t_0)$
- $t_j^m = t_0^m + (1-2^{-j})(t-t_0), \quad \forall\ 1 \leq j \leq m.$

Neste caso, $t_m^m = t$, e $t_j^m - t_{j-1}^m = 2^{-j}(t-t_0)$.

Observação 3.3.5. Note que não estamos interessados, neste momento, em obter a melhor constante, e sim a propriedade de decaimento da norma L^∞.

3.4 Análise de escalas

A fim de confirmar as estimativas obtidas na seção anterior, vamos fazer uso do argumento de análise de escalas. Primeiro, tomamos uma função $\tilde{u}(x,t) := \lambda u(Lx, \theta t)$ e encontramos a relação entre os parâmetros λ, θ, L de forma que, a nova função $\tilde{u}(x,t)$ satisfaça a equação (3.1.1) para uma função $g(x,t,\tilde{u})$ qualquer, com a condição de semidissipatividade (3.1.2).

Desta forma, todos os resultados obtidos para a solução u também serão alcançados pela nova solução $\tilde{u}$, mas agora teremos parâmetros livres e relacionados, os quais serão úteis para encontrar os candidatos a expoentes das estimativas da seção anterior.

Seja $u(\cdot,t)$ solução da equação

$$u_t + \mathrm{div} f(x,t,u) = \mu(t)\mathrm{div}\big(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\big) + \eta\Delta u, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0. \tag{3.4.1}$$

Podemos reescrever (3.4.1) da seguinte forma,

$$u_t + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x,t,u) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial u}(x,t,u)u_{x_i} = \mu(t)\sum_{i=1}^n \big(|\nabla u|^{p-2}u_{x_i}\big)_{x_i} + \eta\Delta u. \tag{3.4.2}$$

Tomando $\tilde{u}(x,t) = \lambda u(Lx, \theta t)$, e sabendo que u satisfaz a equação (3.4.2) no ponto $(Lx, \theta t)$, notamos que

$$
\begin{aligned}
\tilde{u}_t(x,t) &= \lambda\theta u_t(Lx,\theta t) \\
&= \lambda\theta \left[-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(Lx,\theta t, u(Lx,\theta t)) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial u}(Lx,\theta t, u(Lx,\theta t)) u_{x_i}(Lx,\theta t) \right. \\
&+ \mu(\theta t) \sum_{i=1}^{n} (p-2) u_{x_i}(Lx,\theta t) |\nabla u(Lx,\theta t)|^{p-4} \sum_{j=1}^{n} u_{x_j}(Lx,\theta t) u_{x_j x_i}(Lx,\theta t) \\
&+ \left. |\nabla u(Lx,\theta t)|^{p-2} u_{x_i x_i}(Lx,\theta t) + \eta \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}(Lx,\theta t) \right]. \qquad (3.4.3)
\end{aligned}
$$

Vamos reescrever (3.4.2) em função de $\tilde{u}$. Definindo $\tilde{f}(x,t,\tilde{u}) := f(Lx,\theta t, u(Lx,\theta t))$, onde $\tilde{u}(x,t) = \lambda u(Lx,\theta t)$, notamos que

1. $\dfrac{\partial}{\partial x_i} \tilde{f}(x,t,\tilde{u}) = L \dfrac{\partial}{\partial x_i} f(Lx,\theta t, u(Lx,\theta t))$
2. $\dfrac{\partial}{\partial \tilde{u}} \tilde{f}(x,t,\tilde{u}). \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i} = L \dfrac{\partial}{\partial u} f(Lx,\theta t, u(Lx,\theta t)) u_{x_i}(Lx,\theta t)$,

onde o segundo item fica do seguinte modo

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \tilde{u}} \tilde{f}(x,t,\tilde{u}). \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial u} f(Lx,\theta t, u(Lx,\theta t)) \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} . \lambda L u_{x_i}(Lx,\theta t) \\
&= \frac{\partial}{\partial u} f(Lx,\theta t, u(Lx,\theta t)) \frac{1}{\lambda} . \lambda L u_{x_i}(Lx,\theta t).
\end{aligned}
$$

Sendo assim,

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{div} f(Lx,\theta t, u(Lx,\theta t)) = \\
&= -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(Lx,\theta t, u(Lx,\theta t)) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial u}(Lx,\theta t, u(Lx,\theta t)) u_{x_i}(Lx,\theta t) \\
&= \frac{1}{L} \left(-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial x_i}(x,t,\tilde{u}) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial \tilde{u}}(x,t,\tilde{u}) \tilde{u}_{x_i}(x,t) \right) \\
&= \frac{1}{L} \mathrm{div}(\tilde{f}(x,t,\tilde{u})). \qquad (3.4.4)
\end{aligned}
$$

Olhamos agora para o terceiro termo do lado direito de (3.4.3),

$$
\begin{aligned}
&\mu(\theta t)\sum_{i=1}^{n}(p-2)|\nabla u(Lx,\theta t)|^{p-4}\left(\sum_{j=1}^{n}u_{x_j}(Lx,\theta t)u_{x_jx_i}(Lx,\theta t)\right)u_{x_i}(Lx,\theta t)\\
&+|\nabla u(Lx,\theta t)|^{p-2}u_{x_ix_i}(Lx,\theta t)\\
&=\mu(\theta t)\sum_{i=1}^{n}(p-2)\left(\frac{|\nabla\tilde{u}|}{\lambda L}\right)^{p-4}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\tilde{u}_{x_j}}{\lambda L}\frac{\tilde{u}_{x_jx_i}}{\lambda L^2}\right)\frac{\tilde{u}_{x_i}}{\lambda L}+\left(\frac{|\nabla\tilde{u}|}{\lambda L}\right)^{p-2}\frac{\tilde{u}_{x_ix_i}}{\lambda L^2}\\
&=\frac{\mu(\theta t)}{\lambda^{p-1}L^p}\sum_{i=1}^{n}(p-2)|\nabla\tilde{u}(x,t)|^{p-4}\left(\sum_{j=1}^{n}\tilde{u}_{x_j}(x,t)\tilde{u}_{x_jx_i}(x,t)\right)\tilde{u}_{x_i}(x,t)\\
&+|\nabla\tilde{u}(x,t)|^{p-2}\tilde{u}_{x_ix_i}(x,t).
\end{aligned}\tag{3.4.5}
$$

E por último,

$$
\eta\sum_{i=1}^{n}u_{x_ix_i}(Lx,\theta t)=\frac{\eta}{\lambda L^2}\sum_{i=1}^{n}\tilde{u}_{x_ix_i}(x,t).\tag{3.4.6}
$$

Substituindo (3.4.4), (3.4.5) e (3.4.6) em (3.4.3), obtemos

$$
\begin{aligned}
\tilde{u}_t(x,t)=\lambda\theta\Bigg[&\frac{1}{L}\left(-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\tilde{f}_i}{\partial x_i}(x,t,\tilde{u})-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\tilde{f}_i}{\partial\tilde{u}}(x,t,\tilde{u})\tilde{u}_{x_i}(x,t)\right)\\
&+\frac{\mu(\theta t)}{\lambda^{p-1}L^p}\sum_{i=1}^{n}(p-2)|\nabla\tilde{u}(x,t)|^{p-4}\left(\sum_{j=1}^{n}\tilde{u}_{x_j}(x,t)\tilde{u}_{x_jx_i}(x,t)\right)\tilde{u}_{x_i}(x,t)\\
&+|\nabla\tilde{u}(x,t)|^{p-2}\tilde{u}_{x_ix_i}(x,t)+\frac{\eta}{\lambda L^2}\sum_{i=1}^{n}\tilde{u}_{x_ix_i}(x,t)\Bigg]\\
=\lambda\theta\Bigg[&\frac{1}{L}\left(-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\tilde{f}_i}{\partial x_i}(x,t,\tilde{u})-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\tilde{f}_i}{\partial\tilde{u}}(x,t,\tilde{u})\tilde{u}_{x_i}(x,t)\right)\\
&+\frac{\mu(\theta t)}{\lambda^{p-1}L^p}\sum_{i=1}^{n}\big(|\nabla\tilde{u}(x,t)|^{p-2}\tilde{u}_{x_i}(x,t)\big)_{x_i}+\frac{\eta}{\lambda L^2}\Delta\tilde{u}(x,t)\Bigg].
\end{aligned}\tag{3.4.7}
$$

Definindo $g(x,t,\tilde{u}):=\dfrac{\lambda\theta}{L}\tilde{f}(x,t,\tilde{u})$, $\tilde{\eta}:=\dfrac{\theta}{L^2}\eta$ e $\tilde{\mu}(t):=\mu(\theta t)$. Escrevemos (3.4.7) da seguinte forma,

$$
\tilde{u}_t(x,t)+\operatorname{div}\big(g(x,t,\tilde{u})\big)=\frac{\theta}{\lambda^{p-2}L^p}\tilde{\mu}(t)\operatorname{div}\big(|\nabla\tilde{u}|^{p-2}\nabla\tilde{u}\big)+\tilde{\eta}\Delta\tilde{u}.\tag{3.4.8}
$$

Assim, escolhendo $\theta = \lambda^{p-2}L^p$, $\tilde{u}$ satisfaz a equação da forma (3.4.1). Observamos que $g(x,t,\tilde{u})$ satisfaz a mesma condição de semidissipatividade, e todos os resultados obtidos para u valem também para $\tilde{u}$, como por exemplo, a estimativa

$$\|\tilde{u}(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K(n)\|\tilde{u}_0\|^{\delta}_{L^{p_0}(\mathbb{R}^n)} t^{-\gamma}. \tag{3.4.9}$$

Para determinarmos os expoentes da estimativa (3.4.9), vamos usar a relação encontrada $\theta = \lambda^{p-2}L^p$ e comparar as normas de u e $\tilde{u}$:

$$\begin{aligned}\|\tilde{u}_0\|^{p_0}_{L^{p_0}(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{u}_0(x)|^{p_0}dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\lambda u_0(Lx)|^{p_0}dx \\ &= \lambda^{p_0}\int_{\mathbb{R}^n} |u_0(\underbrace{Lx}_{y})|^{p_0}dx = \frac{\lambda^{p_0}}{L^n}\int_{\mathbb{R}^n} |u_0(y)|^{p_0}dy = \frac{\lambda^{p_0}}{L^n}\|u_0\|^{p_0}_{L^{p_0}(\mathbb{R}^n)},\end{aligned} \tag{3.4.10}$$

$$\begin{aligned}\|\tilde{u}(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} &\leq K(n)\|\tilde{u}_0\|^{\delta}_{L^{p_0}(\mathbb{R}^n)} t^{-\gamma} \\ \|\lambda u(\cdot,\theta t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} &\leq K(n)\left(\frac{\lambda}{L^{\frac{n}{p_0}}}\|u_0(\cdot)\|_{L^{p_0}(\mathbb{R}^n)}\right)^{\delta} t^{-\gamma}\theta^{-\gamma}\theta^{\gamma} \\ \lambda\|u(\cdot,\theta t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} &\leq \frac{\lambda^{\delta}\theta^{\gamma}}{L^{\frac{\delta n}{p_0}}}K(n)\|u_0(\cdot)\|^{\delta}_{L^{p_0}(\mathbb{R}^n)}(\theta t)^{-\gamma} \\ \|u(\cdot,\tau)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} &\leq \frac{\lambda^{\delta-1}\theta^{\gamma}}{L^{\frac{\delta n}{p_0}}}K(n)\|u_0(\cdot)\|^{\delta}_{L^{p_0}(\mathbb{R}^n)}(\tau)^{-\gamma},\end{aligned} \tag{3.4.11}$$

onde necessariamente, $\dfrac{\lambda^{\delta-1}\theta^{\gamma}}{L^{\frac{\delta n}{p_0}}} = 1$, ou seja, usando $\theta = \lambda^{p-2}L^p$, temos

$$\lambda^{\gamma(p-2)+\delta-1}L^{\gamma p-\frac{\delta n}{p_0}} = 1. \tag{3.4.12}$$

Assim, resolvendo o sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} \gamma(p-2)+\delta &=& 1 \\ \gamma p - \frac{\delta n}{p_0} &=& 0 \end{array}\right.$$

obtemos $\gamma = \dfrac{n}{pp_0 + n(p-2)}$ e $\delta = \dfrac{pp_0}{pp_0 + n(p-2)}$.

Capítulo 4

Equação do p-Laplaciano com termo advectivo, limitação global

4.1 Definindo o problema

Neste capítulo, vamos tratar do problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t + \operatorname{div}\big(f(x,t,u)\big) & = & \mu(t)\operatorname{div}\big(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\big) + \eta\Delta u; \\ u(\cdot,0) & = & u_0 \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n); \end{cases} \tag{4.1.1}$$

onde $1 \leq p_0 < \infty$, $p > 2$, $\eta > 0$ e $f \in C^0(\mathbb{R}^n \times [0,\infty) \times \mathbb{R})$ satisfazendo $f_{x_1}, ..., f_{x_n}, f_u \in C^0(\mathbb{R}^n \times [0,\infty) \times \mathbb{R})$ e a condição

$$|f(x,t,u)| \leq B(t)|u|^{1+k} \quad \forall\ x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0 \text{ e } u \in \mathbb{R} \tag{4.1.2}$$

para uma certa constante $k \geq 0$, onde $B \in C^0([0,\infty[)$ é não negativa. Além disso, estamos sempre considerando que a solução $u(\cdot,t)$ (suave) construída na faixa $\mathbb{R}^n \times [0,T_*)$, onde $0 < T_* \leq \infty$, satisfaz:

(i) $u(\cdot,t) \in L^\infty_{loc}([0,T_*), L^\infty(\mathbb{R}^n)) \cap C([0,T_*), L^{\bar{q}}(\mathbb{R}^n))$, para algum $\bar{q} \geq p_0$;

(ii) $\nabla u \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times [t_0,T])$ para cada $0 < t_0 < T < T_*$.

No capítulo anterior, obtemos o decrescimento da norma L^q, para todo $q \geq 1$ e $q \geq p_0$ e com esta propriedade, concluímos que a solução $u(\cdot,t)$ tem uma limitação uniforme no intervalo de existência $[0,T_*)$, isto é, $\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty} \leq \|u_0\|_{L^\infty}$ $\forall 0 \leq t < T_*$, garantindo sua existência global ($T_* = \infty$). Neste capítulo, buscaremos uma estimativa que controle a norma do sup, já que para o problema (4.1.1)-(4.1.2) não temos a propriedade de decrescimento da norma L^q, para $q > 1$.

Observação 4.1.1. Note que a função f poderia ser escrita de forma mais geral como

$$\boldsymbol{f}(x,t,u) = \boldsymbol{h}(x,t,u) + \boldsymbol{g}(t,u),$$

e como o termo $\boldsymbol{g}(t,u)$ não apresenta dependência espacial direta, não irá ocasionar maiores problemas nos cálculos que serão feitos (com a dependência direta de x, teríamos que considerar a hipótese feita no capítulo anterior). Por esse motivo, e buscando simplificar um pouco os cálculos que serão apresentados, vamos ignorar este termo a mais em todo o texto que segue.

4.2 Análise de escalas

O principal resultado deste capítulo é uma estimativa do tipo

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \mathbf{K} \max\left\{\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}, \mathbb{B}_\mu(0;t)^\delta \mathbb{U}_{\bar{q}}(0;t)^\gamma\right\}, \tag{4.2.1}$$

onde $\mathbf{K} > 0$ depende de $p, n, \bar{q}$ e k. Por meio desta estimativa é que obtemos condições para existência global da solução. A análise de escalas nos indica que se uma desigualdade do tipo (4.2.1) é valida para a solução do problema (4.1.1), com uma função f qualquer satisfazendo a condição (4.1.2), então devemos ter a condição $\bar{q} - \dfrac{n(k-p+2)}{p-1} > 0$, e neste caso,

$$\delta = \frac{n}{\bar{q}(p-1) - n(k-p+2)}, \quad \gamma = \frac{\bar{q}(p-1)}{\bar{q}(p-1) - n(k-p+2)}. \tag{4.2.2}$$

Proposição 4.2.1. *Seja $u(\cdot,t) \in L^\infty_{loc}([0,T_*), L^\infty(\mathbb{R}^n)) \cap C^0([0,T_*), L^{\bar{q}}(\mathbb{R}^n))$ solução da equação dada em (4.1.1), para alguma f satisfazendo a condição (4.1.2) e suponhamos que tal solução satisfaça a desigualdade (4.2.1). Então, os valores δ e γ devem ser*

$$\delta = \frac{n}{(p-1)\bar{q} - n(k-p+2)} \quad e \quad \gamma = \frac{(p-1)\bar{q}}{(p-1)\bar{q} - n(k-p+2)} \tag{4.2.3}$$

quando $\bar{q} - \dfrac{n(k-p+2)}{p-1} > 0$ ocorrer.

Demonstração. Seja $u(\cdot,t)$ solução da equação dada em (4.1.1), mudando a escala em u, t e x, isto é, considerando a função $\tilde{u}(x,t)=\lambda u(Lx,\theta t)$ com $\lambda>0$, $L>0$ e $\theta>0$, encontraremos uma relação entre λ, L e θ, (já que são parâmetros livres) a fim de $\tilde{u}$ satisfazer uma equação da forma (4.1.1), ou seja, $\tilde{u}$ seja solução de

$$\tilde{u}_t+\operatorname{div}\big(\tilde{f}(x,t,\tilde{u})\big)=\tilde{\mu}(t)\operatorname{div}\big(|\nabla\tilde{u}|^{p-2}|\nabla\tilde{u}|\big)+\tilde{\eta}\Delta\tilde{u}. \tag{4.2.4}$$

Primeiramente, note que podemos escrever (4.1.1), da seguinte forma

$$\begin{aligned}
&u_t+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}f_i(x,t,u)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial u}f_i(x,t,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\\
&=\mu(t)\sum_{i=1}^{n}\left((p-2)|\nabla u|^{p-4}u_{x_i}\sum_{j=1}^{n}u_{x_j}u_{x_jx_i}+|\nabla u|^{p-2}u_{x_ix_i}\right)+\eta\sum_{i=1}^{n}u_{x_ix_i}.
\end{aligned} \tag{4.2.5}$$

Sabendo que $\tilde{u}_t=\lambda\theta u(Lx,\theta t)$ e que u satisfaz (4.2.5) no ponto $(Lx,\theta t)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_t(x,t)&=\lambda\theta u_t(Lx,\theta t)\\
&=\lambda\theta\left[-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(Lx,\theta t,u(Lx,\theta t))-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial u}(Lx,\theta t,u(Lx,\theta t))u_{x_i}(Lx,\theta t)\right.\\
&+\mu(\theta t)\sum_{i=1}^{n}\left((p-2)|\nabla u(Lx,\theta t)|^{p-4}u_{x_i}(Lx,\theta t)\sum_{j=1}^{n}u_{x_j}(Lx,\theta t)u_{x_jx_i}(Lx,\theta t)\right.\\
&\left.\left.+|\nabla u(Lx,\theta t)|^{p-2}u_{x_ix_i}(Lx,\theta t)\right)+\eta\sum_{i=1}^{n}u_{x_ix_i}(Lx,\theta t)\right].
\end{aligned} \tag{4.2.6}$$

Vamos reescrever (4.2.6) em função de $\tilde{u}$. Para isto, observe que $\tilde{u}_{x_i}(x,t)=\lambda L u_{x_i}(Lx,\theta t)$ e $\tilde{u}_{x_ix_j}(x,t)=\lambda L^2u_{x_ix_j}(Lx,\theta t)$. E definindo $\tilde{f}(x,t,\tilde{u})=f(Lx,\theta t,u(Lx,\theta t))$, temos

$$\frac{\partial\tilde{f}_i}{\partial x_i}(x,t,\tilde{u})=L\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(Lx,\theta t,u(Lx,\theta t)) \quad \text{e}$$

$$\frac{\partial\tilde{f}_i}{\partial\tilde{u}}(x,t,\tilde{u})=\frac{\partial f_i}{\partial u}(Lx,\theta t,u(Lx,\theta t))\frac{\partial u}{\partial\tilde{u}}$$

Assim, podemos reescrever (4.2.6) da seguinte forma

$$
\begin{aligned}
&\tilde{u}_t(x,t) = \lambda\theta u_t(Lx,\theta t)\\
&= \lambda\theta\left[-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{L}L\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(Lx,\theta t,u(Lx,\theta t)) - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{L\lambda}\frac{\partial f_i}{\partial u}(Lx,\theta t,u(Lx,\theta t))\lambda L u_{x_i}(Lx,\theta t)\right.\\
&+\mu(\theta t)\sum_{i=1}^{n}\left((p-2)|\frac{\lambda L}{\lambda L}\nabla u(Lx,\theta t)|^{p-4}\frac{\lambda L}{\lambda L}u_{x_i}(Lx,\theta t)\sum_{j=1}^{n}\frac{\lambda L}{\lambda L}u_{x_j}(Lx,\theta t)\frac{\lambda L^2}{\lambda L^2}u_{x_jx_i}(Lx,\theta t)\right.\\
&\left.\left.+|\frac{\lambda L}{\lambda L}\nabla u(Lx,\theta t)|^{p-2}\frac{\lambda L^2}{\lambda L^2}u_{x_ix_i}(Lx,\theta t)\right) + \eta\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda L^2}{\lambda L^2}u_{x_ix_i}(Lx,\theta t)\right]\\
&= \lambda\theta\left[-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{L}\frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial x_i}(x,t,\tilde{u}) - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{L}\frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial \tilde{u}}(x,t,\tilde{u})\tilde{u}_{x_i}(x,t)\right.\\
&+\mu(\theta t)\sum_{i=1}^{n}\left((p-2)\frac{1}{(\lambda L)^{p-4}}|\tilde{u}(x,t)|^{p-4}\frac{1}{\lambda L}\tilde{u}_{x_i}(x,t)\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\lambda L}\tilde{u}_{x_j}(x,t)\frac{1}{\lambda L^2}\tilde{u}_{x_jx_i}(x,t)\right.\\
&\left.\left.+\frac{1}{(\lambda L)^{p-2}}|\nabla\tilde{u}(x,t)|^{p-2}\frac{1}{\lambda L^2}\tilde{u}_{x_ix_i}(x,t)\right) + \eta\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda L^2}\tilde{u}_{x_ix_i}(x,t)\right]\\
&= \lambda\theta\left[-\frac{1}{L}\text{ div }\tilde{f}(x,t,\tilde{u})\right.\\
&+\frac{\mu(\theta t)}{\lambda^{p-1}L^p}\sum_{i=1}^{n}\left((p-2)|\tilde{u}(x,t)|^{p-4}\tilde{u}_{x_i}(x,t)\sum_{j=1}^{n}\tilde{u}_{x_j}(x,t)\tilde{u}_{x_jx_i}(x,t)\right.\\
&\left.\left.+|\nabla\tilde{u}(x,t)|^{p-2}\tilde{u}_{x_ix_i}(x,t)\right) + \frac{\eta}{\lambda L^2}\sum_{i=1}^{n}\tilde{u}_{x_ix_i}(x,t)\right]. \qquad (4.2.7)
\end{aligned}
$$

Concluindo que $\tilde{u}(x,t)$ satisfaz a equação:

$$
\tilde{u}_t + \frac{\lambda\theta}{L}\text{ div }\tilde{f}(x,t,\tilde{u}) = \frac{\lambda\theta}{\lambda^{p-1}L^p}\mu(\theta t)\text{ div }(|\nabla\tilde{u}|^{p-2}\nabla\tilde{u}) + \frac{\lambda\theta}{\lambda L^2}\eta\Delta\tilde{u}. \quad (4.2.8)
$$

Definimos

$$
\tilde{g}(x,t,\tilde{u}) := \frac{\lambda\theta}{L}\tilde{f}(x,t,\tilde{u}),
$$

$$
\tilde{\mu}(t) = \frac{\theta}{\lambda^{p-2}L^p}\mu(\theta t) \quad \text{e} \quad \tilde{\eta} = \eta\frac{\theta}{L^2},
$$

temos que $\tilde{u}(x,t)$ satisfaz a equação

$$
\tilde{u}_t + \text{ div }\tilde{g}(x,t,\tilde{u}) = \tilde{\mu}(\theta t)\text{ div }(|\nabla\tilde{u}|^{p-2}\nabla\tilde{u}) + \tilde{\eta}\Delta\tilde{u}, \qquad (4.2.9)
$$

e portanto vale também para $\tilde{u}(\cdot,t)$ a estimativa (4.2.1). Isto é,

$$\|\tilde{u}(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \mathbf{K}\max\{\|\tilde{u}_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}; \tilde{\mathbb{B}}_{\tilde{\mu}}(0;t)^\delta \tilde{\mathbb{U}}_{\bar{q}}(0;t)^\gamma\}. \tag{4.2.10}$$

Precisamos agora comparar $\tilde{\mathbb{B}}_{\tilde{\mu}}(0;t)$ e $\tilde{\mathbb{U}}_{\bar{q}}(0;t)$ com $\mathbb{B}_\mu(0;t)$ e $\mathbb{U}_{\bar{q}}(0;t)$. Para isso, note que

$$\begin{aligned}
\|\tilde{u}(\cdot,t)\|_{L^{\bar{q}}(\mathbb{R}^n)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{u}(x,t)|^{\bar{q}} dx\right)^{\frac{1}{\bar{q}}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\lambda u(Lx,\theta t)|^{\bar{q}} dx\right)^{\frac{1}{\bar{q}}} \\
&= \lambda\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(Lx,\theta t)|^{\bar{q}} dx\right)^{\frac{1}{\bar{q}}} \\
&= \frac{\lambda}{L^{\frac{n}{\bar{q}}}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(y,\theta t)|^{\bar{q}} dy\right)^{\frac{1}{\bar{q}}} = \frac{\lambda}{L^{\frac{n}{\bar{q}}}}\|u(\cdot,\theta t)\|_{L^{\bar{q}}(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

e, consequentemente,

$$\tilde{\mathbb{U}}_{\bar{q}}(0;t) = \frac{\lambda}{L^{\frac{n}{\bar{q}}}}\mathbb{U}_{\bar{q}}(0;\theta t). \tag{4.2.11}$$

Para analisar $\mathbb{B}_\mu(0;t) := \sup\limits_{0\leq\tau\leq t} \dfrac{B(\tau)}{\mu(\tau)}$, precisamos comparar B e $\tilde{B}$. Lembramos que

$$\begin{aligned}
|f(x,t,u)| \leq B(t)|u|^{k+1} &\Leftrightarrow |f(Lx,\theta t,u(Lx,\theta t))| \leq B(\theta t)|u(Lx,\theta t)|^{k+1} \\
&\Leftrightarrow |\tilde{f}(x,t,\tilde{u})| \leq \frac{B(\theta t)}{\lambda^{k+1}}|\tilde{u}(x,t)|^{k+1} \\
&\Leftrightarrow \frac{L}{\lambda\theta}\left|\frac{\lambda\theta}{L}\tilde{f}(x,t,\tilde{u})\right| \leq \frac{B(\theta t)}{\lambda^{k+1}}|\tilde{u}(x,t)|^{k+1} \\
&\Leftrightarrow |\tilde{g}(x,t,\tilde{u})| \leq \frac{\theta}{L\lambda^k}B(\theta t)|\tilde{u}(x,t)|^{k+1}.
\end{aligned} \tag{4.2.12}$$

Portanto $\tilde{B}(t) = \frac{\theta}{L\lambda^k}B(\theta t)$ e como já havíamos visto, $\tilde{\mu}(t) = \frac{\theta}{\lambda^{p-2}L^p}\mu(\theta t)$. Desta forma, temos

$$\tilde{\mathbb{B}}_{\tilde{\mu}}(0;t) = \sup_{0\leq\tau\leq t}\frac{\tilde{B}(\tau)}{\tilde{\mu}(\tau)} = \sup_{0\leq\tau\leq t}\frac{\lambda^{p-2}L^p}{L\lambda^k}\frac{B(\theta\tau)}{\mu(\theta\tau)} = \lambda^{p-2-k}L^{p-1}\mathbb{B}_\mu(0;\theta t). \tag{4.2.13}$$

Portanto, usando (4.2.11), (4.2.13) e (4.2.10), obtemos

$$\begin{aligned}\lambda\|u(\cdot,\theta t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} &\leq \mathbf{K}\max\left\{\lambda\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)};\, \left(\lambda^{p-2-k}L^{p-1}\mathbb{B}_\mu(0;\theta t)\right)^\delta \left(\frac{\lambda}{L^{\frac{n}{\bar q}}}\mathbb{U}_{\bar q}(0;\theta t)\right)^\gamma\right\} \\ &= \mathbf{K}\max\left\{\lambda\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)};\, \lambda^{\delta(p-2-k)+\gamma}L^{(p-1)\delta-\frac{n}{\bar q}\gamma}\mathbb{B}_\mu(0;\theta t)^\delta\mathbb{U}_{\bar q}(0;\theta t)^\gamma\right\}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\|u(\cdot,\theta t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \mathbf{K}\max\left\{\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)};\, \lambda^{\delta(p-2-k)+\gamma-1}L^{(p-1)\delta-\frac{n}{\bar q}\gamma}\mathbb{B}_\mu(0;\theta t)^\delta\mathbb{U}_{\bar q}(0;\theta t)^\gamma\right\}.$$

Como os parâmetros λ e L estão livres, note que se seus respectivos expoentes não forem nulos, podemos fazer $\lambda, L \to 0$ ou $\lambda, L \to \infty$ (de acordo com o sinal dos expoentes), e assim obter:

$$\|u(\cdot,\tau)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq 0 \text{ ou } \|u(\cdot,\tau)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \infty,$$

tornando inútil a estimativa. Para que isto não ocorra é necessário que os expoentes de λ e L sejam nulos, isto é, devemos ter

$$(p-2-k)\delta+\gamma = 1 \quad \text{e} \quad (p-1)\delta - \frac{n}{\bar q}\gamma = 0$$

o que resulta no seguinte sistema

$$\begin{cases} (p-2-k)\delta+\gamma &= 1 \\ (p-1)\delta-\frac{n}{\bar q}\gamma &= 0 \end{cases}$$

cuja solução é única se $\bar q - \dfrac{n(k-p+2)}{p-1} \neq 0$, isto é,

$$\bar q - \frac{n(k-p+2)}{p-1} > 0 \text{ ou } \bar q - \frac{n(k-p+2)}{p-1} < 0.$$

Como queremos $\bar q$ grande, a hipótese natural é

$$\bar q - \frac{n(k-p+2)}{p-1} > 0, \tag{4.2.14}$$

e desta forma, teremos como solução

$$\delta = \frac{n}{\bar q(p-1)-n(k-p+2)}, \quad \gamma = \frac{\bar q(p-1)}{\bar q(p-1)-n(k-p+2)}. \tag{4.2.15}$$

□

4.3 Estimativa de energia

Teorema 4.3.1. *Seja $u(\cdot,t) \in L^{\infty}_{loc}([0,T_*)) \cap C^0([0,T_*), L^{\bar{q}}(\mathbb{R}^n))$ solução do problema de valor inicial (4.1.1), para algum $\bar{q} \geq p_0$. Então*

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,\tau)|^{q-2} f(x,\tau,u) \cdot \nabla u dx d\tau < \infty \tag{4.3.1}$$

$$\int_0^T \mu(\tau) \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,\tau)|^{q-2} |\nabla u(x,\tau)|^p dx d\tau < \infty \tag{4.3.2}$$

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,\tau)|^{q-2} |\nabla u(x,\tau)|^2 dx d\tau < \infty \tag{4.3.3}$$

para todo $T \in (0,T_*)$, $q \geq \bar{q}$ e $q \geq 2$. E além disso, temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\|u(\cdot,t)\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} + \mu(t)q(q-1)\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-2}|\nabla u|^p dx + \eta q(q-1)\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-2}|\nabla u|^2 dx \\ = q(q-1)\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-2} \nabla u \cdot f(x,\tau,u) dx\end{aligned}$$

para todo $t \in (0,T_*) \setminus E_q$, onde E_q é um conjunto de medida nula.

Demonstração. Multiplicamos a equação do problema (4.1.1) por $\phi'_\delta(u)\zeta_R(x)$ e integramos na região $[t_0,t] \times \mathbb{R}^n$, onde $0 < t_0 < t \leq T$,

$$\begin{aligned}&\int_{t_0}^t \int_{B_R} u_\tau \phi'_\delta(u)\zeta_R(x) dx d\tau + \int_{t_0}^t \int_{B_R} \operatorname{div}(f(x,\tau,u))\phi'_\delta(u)\zeta_R(x) dx d\tau \\ &= \int_{t_0}^t \int_{B_R} \mu(\tau)\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)\phi'_\delta(u)\zeta_R(x) dx d\tau + \int_{t_0}^t \int_{B_R} \eta \Delta u \phi'_\delta(u)\zeta_R(x) dx d\tau.\end{aligned} \tag{4.3.4}$$

No primeiro termo, usamos Teorema de Fubini e nos demais termos usaremos o Teorema do Divergente. Assim a igualdade (4.3.4), pode ser reescrita da seguinte forma

$$
\begin{aligned}
&\int_{B_R} \phi_\delta(u(x,t))\zeta_R(x)dx + \int_{t_0}^{t} \mu(\tau) \int_{B_R} \phi_\delta''(u)|\nabla u|^p \zeta_R(x)dxd\tau \\
&+ \eta \int_{t_0}^{t} \int_{B_R} \phi_\delta''(u)|\nabla u|^2 \zeta_R(x)dxd\tau \\
&= \int_{B_R} \phi_\delta(u(x,t_0))\zeta_R(x)dx + \int_{t_0}^{t} \int_{B_R} \phi_\delta''(u) f(x,\tau,u)\cdot \nabla u \zeta_R(x)dxd\tau \\
&+ \int_{t_0}^{t} \int_{B_R} \phi_\delta'(u) f(x,\tau,u)\cdot \nabla \zeta_R(x)dxd\tau - \int_{t_0}^{t} \mu(\tau) \int_{B_R} \phi_\delta'(u)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\zeta_R(x)dxd\tau \\
&+ \eta \int_{t_0}^{t} \int_{B_R} \phi_\delta(u)\Delta\zeta_R(x)dxd\tau - \eta \int_{t_0}^{t} \int_{\partial B_R} \phi_\delta(u)\nabla\zeta_R(x)\cdot \frac{x}{R} dSd\tau. \qquad (4.3.5)
\end{aligned}
$$

Note que, usando Desigualdade de Young no segundo termo do lado direito da igualdade (4.3.5), obtemos

$$
\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{t} \int_{B_R} \phi_\delta''(u) f(x,\tau,u)\cdot \nabla u \zeta_R(x)dxd\tau \\
&\leq \int_{t_0}^{t} \int_{B_R} B(\tau)|u|^{k+1}\phi_\delta''(u)|\nabla u|\zeta_R(x)dxd\tau \\
&\leq \int_{t_0}^{t} \int_{B_R} \phi_\delta''(u)\zeta_R(x)\left(\frac{\eta}{2}|\nabla u|^2 + \frac{B(\tau)^2}{2\eta}|u|^{2k+2}\right)dxd\tau,
\end{aligned}
$$

já que $|f(x,t,u)| \leq B(t)|u|^{k+1}$. Desta forma, majorando o lado direito de (4.3.5), e usando a hipótese (4.1.2), obtemos

$$
\begin{aligned}
&\int_{B_R} \phi_\delta(u(x,t))\zeta_R(x)dx + \int_{t_0}^{t} \mu(\tau) \int_{B_R} \phi_\delta''(u)|\nabla u|^p \zeta_R(x)dxd\tau \\
&+ \frac{\eta}{2} \int_{t_0}^{t} \int_{B_R} \phi_\delta''(u)|\nabla u|^2 \zeta_R(x)dxd\tau \\
&\leq \int_{B_R} \phi_\delta(u(x,t_0))\zeta_R(x)dx + \frac{1}{2\eta}\int_{t_0}^{t} B(\tau)^2 \int_{B_R} \phi_\delta''(u)|u|^{2k+2}\zeta_R(x)dxd\tau \\
&+ \int_{t_0}^{t} B(\tau) \int_{B_R} |\phi_\delta'(u)||u|^{k+1}|\nabla\zeta_R(x)|dxd\tau + \int_{t_0}^{t} \mu(\tau) \int_{B_R} |\phi_\delta'(u)||\nabla u|^{p-1}|\nabla\zeta_R(x)|dxd\tau \\
&+ \eta \int_{t_0}^{t} \int_{B_R} \phi_\delta(u)|\Delta\zeta_R(x)|dxd\tau + \eta \int_{t_0}^{t} \int_{\partial B_R} \phi_\delta(u)|\nabla\zeta_R(x)|dSd\tau. \qquad (4.3.6)
\end{aligned}
$$

Sabendo que $|\nabla\zeta_R(x)| \le \epsilon e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}$, $|\Delta\zeta_R(x)| \le \epsilon n e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}$, e além disso, usando a hipótese $\nabla u \in L^\infty(\mathbb{R}^n, [t_0, T])$, com $\|\nabla u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le \hat{C}$ para todo $t_0 \le t \le T$, podemos escrever (4.3.6) da seguinte forma

$$
\begin{aligned}
&\int_{B_R}\phi_\delta(u(x,t))\zeta_R(x)dx + \int_{t_0}^t \mu(\tau)\int_{B_R}\phi_\delta''(u)|\nabla u|^p\zeta_R(x)dxd\tau \\
&\frac{\eta}{2}\int_{t_0}^t\int_{B_R}\phi_\delta''(u)|\nabla u|^2\zeta_R(x)dxd\tau \\
&\le \int_{B_R}\phi_\delta(u(x,t_0))\zeta_R(x)dx + \frac{1}{2\eta}\int_{t_0}^t B(\tau)^2\int_{B_R}\phi_\delta''(u)|u|^{2k+2}\zeta_R(x)dxd\tau \\
&+ \epsilon\int_{t_0}^t B(\tau)\int_{B_R}|\phi_\delta'(u)||u|^{k+1}e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}dxd\tau + \epsilon\hat{C}^{p-1}\int_{t_0}^t\mu(\tau)\int_{B_R}|\phi_\delta'(u)|e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}dxd\tau \\
&+ \epsilon n\eta\int_{t_0}^t\int_{B_R}\phi_\delta(u)e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}dxd\tau + \epsilon\eta\int_{t_0}^t\int_{\partial B_R}\phi_\delta(u)e^{-\epsilon\sqrt{1+R^2}}dSd\tau.
\end{aligned}
\tag{4.3.7}
$$

Substituindo

$$\phi_\delta(u) = L_\delta^q(u) \le |u|^q,$$
$$\phi_\delta'(u) = qL_\delta^{q-1}(u)L_\delta'(u) \le q|u|^{q-1},$$

e fazendo $R \to \infty$, (4.3.7) fica

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n}\phi_\delta(u(x,t))e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}dx+\int_{t_0}^t\mu(\tau)\int_{\mathbb{R}^n}\phi_\delta''(u)|\nabla u|^pe^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}dxd\tau\\
&\frac{\eta}{2}\int_{t_0}^t\int_{\mathbb{R}^n}\phi_\delta''(u)|\nabla u|^2e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}dxd\tau\\
&\leq\int_{\mathbb{R}^n}\phi_\delta(u(x,t_0))e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}dx\\
&+\frac{1}{2\eta}\int_{t_0}^tB(\tau)^2\int_{\mathbb{R}^n}\phi_\delta''(u)|u|^{2k+2}e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}dxd\tau\\
&+\epsilon\int_{t_0}^tB(\tau)\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{q-1}|u|^{k+1}e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}dxd\tau\\
&+\epsilon\hat{C}^{p-1}\int_{t_0}^t\mu(\tau)\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{q-1}|L_\delta'(u)|e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}dxd\tau\\
&+\epsilon n\eta\int_{t_0}^t\int_{\mathbb{R}^n}|u|^qe^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}dxd\tau.
\end{aligned}\tag{4.3.8}
$$

Usando a propriedade $|L_\delta'(u)|\leq\frac{C}{\delta}|u|$, e sabendo que, por interpolação, $u(\cdot,t)\in L^q(\mathbb{R}^n)$ para todo $q\geq\bar{q}$, já que $u(\cdot,t)\in L^{\bar{q}}(\mathbb{R}^n)\cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, e como $e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}\leq 1$, então as últimas três integrais de (4.3.8) são finitas. Assim fazendo $\epsilon\to 0$, usando o Teorema da Convergência Monótona nos demais termos, temos

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n}\phi_\delta(u(x,t))dx+\int_{t_0}^t\mu(\tau)\int_{\mathbb{R}^n}\phi_\delta''(u)|\nabla u|^pdxd\tau\\
&\frac{\eta}{2}\int_{t_0}^t\int_{\mathbb{R}^n}\phi_\delta''(u)|\nabla u|^2dxd\tau\\
&\leq\int_{\mathbb{R}^n}\phi_\delta(u(x,t_0))dx\\
&+\frac{1}{2\eta}\int_{t_0}^tB(\tau)^2\int_{\mathbb{R}^n}\phi_\delta''(u)|u|^{2k+2}dxd\tau\\
&=\int_{\mathbb{R}^n}\phi_\delta(u(x,t_0))dx\\
&+q(q-1)\frac{1}{2\eta}\int_{t_0}^tB(\tau)^2\int_{\mathbb{R}^n}L_\delta^{q-2}(u)(L_\delta'(u))^2|u|^{2k+2}dxd\tau\\
&+q\frac{1}{2\eta}\int_{t_0}^tB(\tau)^2\int_{\mathbb{R}^n}L_\delta^{q-1}(u)L_\delta''(u)|u|^{2k+2}dxd\tau.
\end{aligned}\tag{4.3.9}
$$

Fazendo $\delta \to 0$, usando o Teorema da Convergencia Dominada, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} |u(\cdot,t)|^q dx + q(q-1)\int_{t_0}^t \mu(\tau)\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-2}|\nabla u|^p dx d\tau \\
&q(q-1)\frac{\eta}{2}\int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,\tau)|^{q-2}|\nabla u|^2 dx d\tau \\
&\leq \|u(\cdot,t_0)\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} \\
&+ q(q-1)\frac{1}{2\eta}\int_{t_0}^t B(\tau)^2 \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q+2k} dx d\tau < \infty.
\end{aligned} \tag{4.3.10}
$$

E agora, fazendo $t_0 \to 0$, concluímos que

$$
\int_0^t \mu(\tau)\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-2}|\nabla u|^p dx d\tau < \infty \tag{4.3.11}
$$

$$
\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-2}|\nabla u|^2 dx d\tau < \infty \tag{4.3.12}
$$

para todo $0 < t \leq T$.

Voltamos a igualdade (4.3.5), fazendo $\delta \to 0$, usando o Teorema da Convergencia Dominada, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\int_{B_R} |u(x,t)|^q \zeta_R(x) dx + q(q-1)\int_{t_0}^t \mu(\tau)\int_{B_R} |u(x,\tau)|^{q-2}|\nabla u|^p \zeta_R(x) dx d\tau \\
&+ \eta q(q-1)\int_{t_0}^t \int_{B_R} |u(x,\tau)|^{q-2}|\nabla u|^2 \zeta_R(x) dx d\tau \\
&= \int_{B_R} |u(x,t_0)|^q \zeta_R(x) dx + q(q-1)\int_{t_0}^t \int_{B_R} |u(x,\tau)|^{q-2} f(x,\tau,u)\cdot \nabla u \zeta_R(x) dx d\tau \\
&+ q\int_{t_0}^t \int_{B_R} |u(x,\tau)|^{q-1} sgn(u) f(x,\tau,u)\cdot \nabla \zeta_R(x) dx d\tau \\
&- q\int_{t_0}^t \mu(\tau)\int_{B_R} |u(x,\tau)|^{q-1} sgn(u)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla \zeta_R(x) dx d\tau \\
&+ \eta\int_{t_0}^t \int_{B_R} |u(x,\tau)|^q \Delta\zeta_R(x) dx d\tau - \eta\int_{t_0}^t \int_{\partial B_R} |u(x,\tau)|^q \nabla\zeta_R(x)\cdot \frac{x}{R} dS d\tau.
\end{aligned} \tag{4.3.13}
$$

Lembrando que $\nabla\zeta_R(x) = \epsilon e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}} O_1(x)$ e $\Delta\zeta_R(x) = \epsilon e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}} O_2(x)$ onde O_1, O_2 são limitados uniformemente em x (isto é, $O_1(x) \leq C_1$, $O_2(x) \leq$

C_2). Além disso, $e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}} \leq 1$, e f satisfaz $|f(x,t,u)| \leq B(t)|u|^{k+1}$. Assim, usando (4.3.11), (4.3.12), concluímos (4.3.14) e (4.3.15) abaixo:

$$
\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{t}\mu(\tau)\int_{\mathbb{R}^n}|u(x,\tau)|^{q-1}sgn(u)|\nabla u|^{p-2}\nabla u e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}O_1(x)dxd\tau\\
&\leq C_1\int_{t_0}^{t}\mu(\tau)\int_{\mathbb{R}^n}|u(x,\tau)|^{q-1}|\nabla u|^{p-1}e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}dxd\tau\\
&\leq C_1\int_{t_0}^{t}\mu(\tau)\int_{\mathbb{R}^n}|u(x,\tau)|^{q-1}|\nabla u|^{p-1}dxd\tau\\
&\leq C_1\int_{t_0}^{t}\mu(\tau)\int_{\mathbb{R}^n}|u(x,\tau)|^{q-2}\left(\frac{p-1}{p}|\nabla u|^{p}+\frac{1}{p}|u|^{p}\right)dxd\tau\\
&\leq C_1\frac{p-1}{p}\int_{t_0}^{t}\mu(\tau)\int_{\mathbb{R}^n}|u(x,\tau)|^{q-2}|\nabla u|^{p}dxd\tau\\
&+C_1\frac{1}{p}\int_{t_0}^{t}\mu(\tau)\int_{\mathbb{R}^n}|u(x,\tau)|^{q-2+p}dxd\tau<\infty
\end{aligned}
\tag{4.3.14}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^n}|u(x,\tau)|^{q-2}f(x,\tau,u)\cdot\nabla u e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}dxd\tau\\
&\leq\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^n}|u(x,\tau)|^{q-2}|f(x,\tau,u)||\nabla u|dxd\tau\\
&\leq\int_{t_0}^{t}B(\tau)\int_{\mathbb{R}^n}|u(x,\tau)|^{q-2}|u(x,\tau)|^{k+1}|\nabla u|dxd\tau\\
&\leq\int_{t_0}^{t}B(\tau)\int_{\mathbb{R}^n}|u(x,\tau)|^{q-2}\left(\frac{1}{2}|u(x,\tau)|^{2k+2}+\frac{1}{2}|\nabla u|^{2}\right)dxd\tau\\
&\leq\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}B(\tau)\int_{\mathbb{R}^n}|u(x,\tau)|^{q+2k}dxd\tau\\
&+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}B(\tau)\int_{\mathbb{R}^n}|u(x,\tau)|^{q-2}|\nabla u|^{2}dxd\tau<\infty
\end{aligned}
\tag{4.3.15}
$$

Desta forma, na igualdade (4.3.13), fazemos $R \to \infty$, $\epsilon \to 0$ e $t_0 \to 0$, nesta ordem, garantimos que a convergência existe e que os três últimos termos do lado direito da igualdade se anulam (ao $\epsilon \to 0$), já que suas integrais são finitas. Portanto (4.3.13) fica

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^q dx + q(q-1)\int_0^t \mu(\tau)\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,\tau)|^{q-2}|\nabla u|^p dx d\tau \\
&+ \eta q(q-1)\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,\tau)|^{q-2}|\nabla u|^2 dx d\tau \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,0)|^q dx + q(q-1)\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,\tau)|^{q-2} f(x,\tau,u)\cdot\nabla u dx d\tau.
\end{aligned} \tag{4.3.16}
$$

Observe que, por (4.3.11), (4.3.12) e (4.3.15) concluímos a primeira parte do Teorema 4.3.1, e garantimos que todos os termos de (4.3.16) são integráveis. Assim $\|u(\cdot,t)\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)}$ é uma função absolutamente continua em t, e pelo Teorema da Diferenciação de Lebesgue, sabemos que existe um conjunto de medida nula E_q, tal que $\|u(\cdot,t)\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)}$ é diferenciável em $t \in (0,T_*) \setminus E_q$. Assim, podemos derivar (4.3.16) em relação a t, concluindo o Teorema 4.3.1.

$\square$

4.4 Método $L^p - L^q$

Voltando a igualdade

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\|u(.,t)\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} + \mu(t)q(q-1)\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-2}|\nabla u(x,t)|^p dx + \eta q(q-1)\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-2}|\nabla u(x,t)|^p dx \\
= q(q-1)\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-2}\nabla u(x,t)\cdot f(x,t,u)dx.
\end{aligned}
$$

e sabendo que

$$
\eta q(q-1)\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-2}|\nabla u(x,t)|^2 \geq 0
$$

é finito, temos

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\|u(.,t)\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} + \mu(t)q(q-1)\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-2}|\nabla u(x,t)|^p dx \\
\leq q(q-1)\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-2} f(x,t,u)\cdot\nabla u(x,t)dx.
\end{aligned} \tag{4.4.1}
$$

Esta forma diferencial é boa, mas tem a desvantagem de não conhecermos o sinal do termo $\frac{\partial}{\partial t}\|u(\cdot,t)\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)}$. Quando

$$\frac{\partial}{\partial t}\|u(\cdot,t)\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} < 0,$$

sabemos que $\|u(\cdot,t)\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)}$ está decrescendo e de certa forma a norma L^q está controlada. Quando

$$\frac{\partial}{\partial t}\|u(\cdot,t)\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} \geq 0,$$

vamos conseguir uma limitação para a norma L^q. Lembremos que $\|u(\cdot,t)\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)}$ é absolutamente continua em $(0,T_*)$.

Para o próximo Teorema, vamos usar o seguinte resultado que pode ser encontrado em [15].

Teorema 4.4.1 (**Desigualdade de Sobolev-Nirenberg-Gagliardo (SNG)**). *Para qualquer* $0 < s \leq r \leq \infty$, $1 \leq p \leq \infty$, *temos*

$$\|w\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq C(r,s,p,n)\|w\|^{1-\theta}_{L^s(\mathbb{R}^n)}\|\nabla w\|^{\theta}_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \tag{4.4.2}$$

onde θ *satisfaz*

$$\frac{1}{r} = \theta\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{n}\right) + (1-\theta)\frac{1}{s} \tag{4.4.3}$$

e podemos encontrar um $C(n) \geq C(r,s,p,n)$ *para todo* $r \in [r_1,r_2] \subset (0,\infty)$, $s \in [s_1,s_2] \subset (0,\infty)$ *e* $p \in [p_1,p_2] \subset (1,\infty)$.

Teorema 4.4.2. *Seja* $u(\cdot,t)$ *solução do problema* (4.1.1), $2\bar{q} \leq q < \infty$ *e* $\dfrac{n(k-p+2)}{p-1} < \dfrac{q}{2}$. *Se* $\hat{t} \in [0,T_*)\setminus E_q$ *é tal que* $\frac{\partial}{\partial t}\|u(.,t)\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)}\ |_{t=\hat{t}} \geq 0$, *então*

$$\|u(\cdot,\hat{t})\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq K^{\frac{\beta}{q}}\left(\alpha^p C^{\tilde{\beta}}\right)^{\frac{\beta b}{q(p-a\tilde{\beta})}}\left(\frac{B(\hat{t})}{\mu(\hat{t})}\right)^{\frac{\beta b p'}{q(p-a\tilde{\beta})}}\|u(\cdot,\hat{t})\|^{\left[(1-b)+\frac{b\tilde{\beta}(1-a)}{p-a\tilde{\beta}}\right]}_{L^{\frac{q}{2}}(\mathbb{R}^n)},$$

onde $\bar{q} \geq p_0$, p' *o conjugado de* p *e* $\beta,\tilde{\beta},b,a$ *dependem de* p,n,k *e* q *e podem ser vistos na página (89).*

Demonstração. Se $\hat{t} \in (0,T_*)\setminus E_q$ é tal que $\frac{\partial}{\partial t}\|u(.,t)\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)}\ |_{t=\hat{t}} \geq 0$, a desigualdade (4.4.1) fica

$$\mu(\hat{t})\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{q-2}|\nabla u|^p dx \leq \int_{\mathbb{R}^n}|u|^{q-2}f(x,\hat{t},u)\cdot\nabla u dx.$$

Usando desigualdade de Holder no lado direito com parâmetros p e $p' = \frac{p}{p-1}$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\mu(\hat{t}) \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-2} |\nabla u|^p dx &\leq \int_{\mathbb{R}} |u|^{q-2} f(x,\hat{t},u) \cdot \nabla u dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{q-2}{p}} |u|^{(q-2)\frac{p-1}{p}} f(x,\hat{t},u) \cdot \nabla u dx \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-2} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-2} |f(x,\hat{t},u)|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-2} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(B(\hat{t})^{p'} \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{(q-2)+(k+1)p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-2} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(B(\hat{t})^{p'} \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q+\gamma} \right)^{\frac{1}{p'}} . \qquad (4.4.4)
\end{aligned}
$$

onde $\gamma := \dfrac{p(k+1) - 2(p-1)}{p-1}$, e vale $q + \gamma \geq \frac{q}{2}$, já que $q \geq 2$.

Juntando os termos semelhantes em (4.4.4), obtemos

$$
\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-2} |\nabla u|^p dx \leq \left(\frac{B(\hat{t})}{\mu(\hat{t})} \right)^{p'} \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q+\gamma} \qquad (4.4.5)
$$

Para facilitar os cálculos, vamos fazer a seguinte mudança de variável:

$$
w(x) = \begin{cases} u(x,\hat{t}), & q = 2 \\ |u(x,\hat{t})|^{\alpha}, & q > 2. \end{cases} \qquad (4.4.6)
$$

onde $\alpha := \dfrac{p+q-2}{p}$ e w depende de $\hat{t}$, mas como $\hat{t}$ está fixo vamos omiti-lo.

Logo,

- $\|u(\cdot,\hat{t})\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \|w(\cdot)\|^{\beta}_{L^{\beta}(\mathbb{R}^n)}$, onde $\beta = \frac{pq}{p+q-2} = \frac{q}{\alpha}$;
- $\|u(\cdot,\hat{t})\|^{\frac{q}{2}}_{L^{\frac{q}{2}}(\mathbb{R}^n)} = \|w(\cdot)\|^{\beta_0}_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)}$, onde $\beta_0 = \frac{\beta}{2}$;
- $\|u(\cdot,\hat{t})\|^{q+\gamma}_{L^{q+\gamma}(\mathbb{R}^n)} = \|w(\cdot)\|^{\tilde{\beta}}_{L^{\tilde{\beta}}(\mathbb{R}^n)}$ onde $\tilde{\beta} = \frac{(q+\gamma)p}{p+q-2} = \frac{q+\gamma}{\alpha}$.

Além disso, temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-2}|\nabla u|^p dx = \frac{1}{\alpha^p}\|\nabla w(\cdot)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{4.4.7}$$

Podemos reescrever (4.4.5) em função de w,

$$\frac{1}{\alpha^p}\|\nabla w(\cdot)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \left(\frac{B(\hat{t})}{\mu(\hat{t})}\right)^{p'} \|w(\cdot)\|^{\tilde{\beta}}_{L^{\tilde{\beta}}(\mathbb{R}^n)} \tag{4.4.8}$$

Como $\tilde{\beta} > \beta_0$, pois

$$\begin{aligned}\tilde{\beta} &= \left(\frac{(q-2)(p-1)+p(k+1)}{q+p-2}\right)\left(\frac{p}{p-1}\right) \\ &> \frac{(q-2)(p-1)+p}{q+p-2} = \frac{pq-p-q+2}{p+q-2} \\ &\geq \frac{pq}{2(p+q-2)} = \beta_0, \end{aligned} \tag{4.4.9}$$

onde a última desigualdade segue do fato de $q \geq 2$ e $p > 2$. Desta forma, podemos usar a desigualdade (SNG), Teorema 4.4.1, com $r = \tilde{\beta}$ e $s = \beta_0$, obtendo a desigualdade

$$\|w(\cdot)\|_{L^{\tilde{\beta}}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|w(\cdot)\|^{1-a}_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)}\|\nabla w(\cdot)\|^a_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{4.4.10}$$

onde C:=C(n) e a satisfaz

$$\frac{1}{\tilde{\beta}} = a\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{n}\right) + (1-a)\frac{1}{\beta_0} \tag{4.4.11}$$

Usando a desigualdade (4.4.10) em (4.4.8), obtemos

$$\begin{aligned}\|\nabla w(\cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\leq \alpha \left(\frac{B(\hat{t})}{\mu(\hat{t})}\right)^{\frac{p'}{p}} \|w(\cdot)\|^{\frac{\tilde{\beta}}{p}}_{L^{\tilde{\beta}}(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \alpha \left(\frac{B(\hat{t})}{\mu(\hat{t})}\right)^{\frac{p'}{p}} C^{\frac{\tilde{\beta}}{p}}\|w(\cdot)\|^{(1-a)\frac{\tilde{\beta}}{p}}_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)}\|\nabla w(\cdot)\|^{a\frac{\tilde{\beta}}{p}}_{L^p(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned} \tag{4.4.12}$$

Em (4.4.12) podemos juntar os termos semelhantes, já que $\dfrac{a\tilde{\beta}}{p} < 1$. Podemos conferir que esta desigualdade é satisfeita no capítulo Apêndice em

(4.7.1), onde é usada a hipótese $\dfrac{n(k-p+2)}{p-1} < \dfrac{q}{2}$, que apareceu naturalmente na análise de escalas.. Assim, juntando os termos semelhantes em (4.4.12), obtemos

$$\|\nabla w(\cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{a\tilde{\beta}}{p}} \leq \alpha \left(\frac{B(\hat{t})}{\mu(\hat{t})}\right)^{\frac{p'}{p}} C^{\frac{\tilde{\beta}}{p}} \|w(\cdot)\|_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)}^{(1-a)\frac{\tilde{\beta}}{p}}.$$

$$\|\nabla w(\cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \alpha^{\frac{p}{p-a\tilde{\beta}}} \left(\frac{B(\hat{t})}{\mu(\hat{t})}\right)^{\frac{p'}{p-a\tilde{\beta}}} C^{\frac{\tilde{\beta}}{p-a\tilde{\beta}}} \|w(\cdot)\|_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{\tilde{\beta}(1-a)}{p-a\tilde{\beta}}}.$$

Usando novamente o Teorema 4.4.1 (Desigualdade (SNG)) com parâmetros β e β_0, temos

$$\begin{aligned}
\|w(\cdot)\|_{L^\beta(\mathbb{R}^n)} &\leq K\|w(\cdot)\|_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)}^{1-b}\|\nabla w(\cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{b} \\
&\leq K\|w(\cdot)\|_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)}^{1-b}\alpha^{\frac{bp}{p-a\tilde{\beta}}} \left(\frac{B(\hat{t})}{\mu(\hat{t})}\right)^{\frac{bp'}{p-a\tilde{\beta}}} C^{\frac{b\tilde{\beta}}{p-a\tilde{\beta}}} \|w(\cdot)\|_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{b\tilde{\beta}(1-a)}{p-a\tilde{\beta}}} \\
&= K\alpha^{\frac{bp}{p-a\tilde{\beta}}} \left(\frac{B(\hat{t})}{\mu(\hat{t})}\right)^{\frac{bp'}{p-a\tilde{\beta}}} C^{\frac{b\tilde{\beta}}{p-a\tilde{\beta}}} \|w(\cdot)\|_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)}^{(1-b)+\frac{b\tilde{\beta}(1-a)}{p-a\tilde{\beta}}} \qquad (4.4.13)
\end{aligned}$$

onde b satisfaz

$$\frac{1}{\beta} = b\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{n}\right) + (1-b)\frac{1}{\beta_0}, \qquad (4.4.14)$$

e K vem da desigualdade (SNG).

Elevando a desigualdade (4.4.13) na potência β, obtemos

$$\|w(\cdot)\|_{L^\beta(\mathbb{R}^n)}^{\beta} \leq K^\beta \alpha^{\frac{\beta bp}{p-a\tilde{\beta}}} \left(\frac{B(\hat{t})}{\mu(\hat{t})}\right)^{\frac{\beta bp'}{p-a\tilde{\beta}}} C^{\frac{\beta b\tilde{\beta}}{p-a\tilde{\beta}}} \|w(\cdot)\|_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)}^{\beta\left[(1-b)+\frac{b\tilde{\beta}(1-a)}{p-a\tilde{\beta}}\right]}. \qquad (4.4.15)$$

Reescrevendo a desiqualdade (4.4.15) em função de $\|u(\cdot,\hat{t})\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$, obtemos

$$\|u(\cdot,\hat{t})\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq K^{\frac{\beta}{q}} \left(\alpha^p C^{\tilde{\beta}}\right)^{\frac{\beta b}{q(p-a\tilde{\beta})}} \left(\frac{B(\hat{t})}{\mu(\hat{t})}\right)^{\frac{\beta bp'}{q(p-a\tilde{\beta})}} \|u(\cdot,\hat{t})\|_{L^{\frac{q}{2}}(\mathbb{R}^n)}^{\left[(1-b)+\frac{b\tilde{\beta}(1-a)}{p-a\tilde{\beta}}\right]}.$$

$\square$

Podemos demonstrar este Teorema 4.4.2 de outra forma, com a vantagem de carregar o termo $\frac{\partial}{\partial t}\|u(\cdot,t)\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)}$ por mais tempo e enquanto isto ocorre, os resultados obtidos não são pontuais, isto é, valem para $t \in (0, T_*)$. Além disso, usaremos uma estimativa encontrada nesta demonstração que será útil na última seção deste capítulo. Entretanto a demonstração é um pouco mais longa.

Demonstração Alternativa Na desigualdade (4.4.1) aplicamos desigualdade de Holder, obtendo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\|u(\cdot,t)\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} + \mu(t)q(q-1)\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{q-2}|\nabla u|^p dx \\
\leq q(q-1)\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{q-2}f(x,t,u)\cdot\nabla u dx \\
\leq q(q-1)B(t)\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{q-2}|\nabla u|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{q+\gamma}\right)^{\frac{1}{p'}}.
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável abaixo

$$w(x,t) = \begin{cases} u(x,t), & q = 2 \\ |u(x,t)|^\alpha, & q > 2, \end{cases} \tag{4.4.16}$$

onde $\alpha := \dfrac{p+q-2}{p}$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\|w(\cdot,t)\|^\beta_{L^\beta(\mathbb{R}^n)} + \frac{\mu(t)q(q-1)}{\alpha^p}\|\nabla w(\cdot,t)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \frac{q(q-1)B(t)}{\alpha}\|w(\cdot,t)\|^{\frac{\tilde{\beta}}{p'}}_{L^{\tilde{\beta}}(\mathbb{R}^n)}\|\nabla w(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned} \tag{4.4.17}$$

Sabendo que $\tilde{\beta} > \beta_0$, podemos ver isto em (4.4.9), conseguimos aplicar a desigualdade (4.4.2) do Teorema 4.4.1 com os paramêtros $\tilde{\beta}$ e β_0, obtendo

$$\|w(\cdot,t)\|^{\frac{\tilde{\beta}}{p'}}_{L^{\tilde{\beta}}(\mathbb{R}^n)} \leq C^{\frac{\tilde{\beta}}{p'}}\|w(\cdot,t)\|^{(1-a)\frac{\tilde{\beta}}{p'}}_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)}\|\nabla w(\cdot,t)\|^{a\frac{\tilde{\beta}}{p'}}_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

onde a satisfaz (4.4.11).

Substituindo esta desigualdade em (4.4.17), obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t}\|w\|^{\beta}_{L^{\beta}(\mathbb{R}^n)} + \frac{\mu(t)q(q-1)}{\alpha^p}\|\nabla w\|^{p}_{L^{p}(\mathbb{R}^n)}$$

$$\leq \frac{q(q-1)B(t)}{\alpha} C^{\frac{\tilde{\beta}}{p'}} \|w\|^{(1-a)\frac{\tilde{\beta}}{p'}}_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)} \|\nabla w\|^{1+\frac{a\tilde{\beta}}{p'}}_{L^{p}(\mathbb{R}^n)}. \tag{4.4.18}$$

Agora usando desigualdade de Young no último termo com os parâmetros $\theta = \frac{pp'}{p'+a\tilde{\beta}}$ e $\theta' = \frac{pp'}{pp'-p'-a\tilde{\beta}}$, obtemos

$$\frac{q(q-1)B(t)}{\alpha} C^{\frac{\tilde{\beta}}{p'}} \|w\|^{(1-a)\frac{\tilde{\beta}}{p'}}_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)} \|\nabla w\|^{1+\frac{a\tilde{\beta}}{p'}}_{L^{p}(\mathbb{R}^n)}$$

$$= \mu(t)^{\frac{1}{\theta}} \left(\frac{q(q-1)}{\alpha^p}\right)^{\frac{1}{\theta}} \|\nabla w\|^{1+\frac{a\tilde{\beta}}{p'}}_{L^{p}(\mathbb{R}^n)} C^{\frac{\tilde{\beta}}{p'}} B(t)\alpha^{\frac{p}{p'}} \mu(t)^{-\frac{1}{\theta}} \left(\frac{q(q-1)}{\alpha^p}\right)^{\frac{1}{\theta'}} \|w\|^{(1-a)\frac{\tilde{\beta}}{p'}}_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)}$$

$$\leq \frac{1}{\theta}\mu(t)\frac{q(q-1)}{\alpha^p}\|\nabla w\|^{p}_{L^{p}(\mathbb{R}^n)} + \frac{1}{\theta'}\mu(t)^{-\frac{\theta'}{\theta}} \left(C^{\tilde{\beta}}\alpha^p\right)^{\frac{\theta'}{p'}} B(t)^{\theta'} \frac{q(q-1)}{\alpha^p}\|w\|^{(1-a)\frac{\tilde{\beta}\theta'}{p'}}_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)}$$

$$= \frac{1}{\theta}\mu(t)\frac{q(q-1)}{\alpha^p}\|\nabla w\|^{p}_{L^{p}(\mathbb{R}^n)} + \frac{1}{\theta'}\frac{\mu(t)q(q-1)}{\alpha^p} \left(C^{\tilde{\beta}}\alpha^p\right)^{\frac{\theta'}{p'}} \left(\frac{B(t)}{\mu(t)}\right)^{\theta'} \|w\|^{(1-a)\frac{\tilde{\beta}\theta'}{p'}}_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)}. \tag{4.4.19}$$

Por (4.4.18) e (4.4.19), obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t}\|w\|^{\beta}_{L^{\beta}(\mathbb{R}^n)} + \frac{\mu(t)q(q-1)}{\alpha^p}\|\nabla w\|^{p}_{L^{p}(\mathbb{R}^n)}$$

$$\leq \frac{1}{\theta}\mu(t)\frac{q(q-1)}{\alpha^p}\|\nabla w\|^{p}_{L^{p}(\mathbb{R}^n)} + \frac{1}{\theta'}\frac{\mu(t)q(q-1)}{\alpha^p} \left(C^{\tilde{\beta}}\alpha^p\right)^{\frac{\theta'}{p'}} \left(\frac{B(t)}{\mu(t)}\right)^{\theta'} \|w\|^{(1-a)\frac{\tilde{\beta}\theta'}{p'}}_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)}. \tag{4.4.20}$$

Juntando os termos semelhantes, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\|w\|^{\beta}_{L^{\beta}(\mathbb{R}^n)} + \frac{1}{\theta'}\frac{\mu(t)q(q-1)}{\alpha^p}\|\nabla w\|^{p}_{L^{p}(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \frac{1}{\theta'}\frac{\mu(t)q(q-1)}{\alpha^p}\left(C^{\tilde{\beta}}\alpha^p\right)^{\frac{\theta'}{p'}}\left(\frac{B(t)}{\mu(t)}\right)^{\theta'}\|w\|^{(1-a)\frac{\tilde{\beta}\theta'}{p'}}_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}
$$

Se $\hat{t} \in [0, T_*)$ tal que $\frac{\partial}{\partial t}\|u\|^{q}_{L^{q}(\mathbb{R}^n)}\ |_{t=\hat{t}} \geq 0$, temos $\frac{\partial}{\partial t}\|w\|^{\beta}_{L^{\beta}(\mathbb{R}^n)}\ |_{t=\hat{t}} \geq 0$ e a desigualdade acima em $\hat{t}$, fica

$$
\|\nabla w\|^{p}_{L^{p}(\mathbb{R}^n)} \leq \left(C^{\tilde{\beta}}\alpha^p\right)^{\frac{\theta'}{p'}}\left(\frac{B(\hat{t})}{\mu(\hat{t})}\right)^{\theta'}\|w\|^{(1-a)\frac{\tilde{\beta}\theta'}{p'}}_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)}.
$$

Usando novamente o Teorema 4.4.1 com β e β_0, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\|w(\cdot,\hat{t})\|_{L^{\beta}(\mathbb{R}^n)} \leq K\|w(\cdot,\hat{t})\|^{1-b}_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)}\|\nabla w(\cdot,\hat{t})\|^{b}_{L^{p}(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq K\|w(\cdot,\hat{t})\|^{1-b}_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)}\left(C^{\tilde{\beta}}\alpha^p\right)^{\frac{\theta' b}{pp'}}\left(\frac{B(\hat{t})}{\mu(\hat{t})}\right)^{\theta'\frac{b}{p}}\|w(\cdot,\hat{t})\|^{(1-a)\frac{\tilde{\beta}\theta' b}{pp'}}_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)} \\
&= K\left(C^{\tilde{\beta}}\alpha^p\right)^{\frac{\theta' b}{pp'}}\left(\frac{B(\hat{t})}{\mu(\hat{t})}\right)^{\theta'\frac{b}{p}}\|w(\cdot,\hat{t})\|^{(1-b)+(1-a)\frac{\tilde{\beta}\theta' b}{pp'}}_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)},
\end{aligned}
$$

onde b satisfaz (4.4.14).

Elevando a desigualdade na β, obtemos

$$
\|w(\cdot,\hat{t})\|^{\beta}_{L^{\beta}(\mathbb{R}^n)} \leq K^{\beta}\left(C^{\tilde{\beta}}\alpha^p\right)^{\frac{\theta' b\beta}{pp'}}\left(\frac{B(\hat{t})}{\mu(\hat{t})}\right)^{\frac{\theta' b\beta}{p}}\|w(\cdot,\hat{t})\|^{\left[(1-b)+(1-a)\frac{\tilde{\beta}\theta' b}{pp'}\right]\beta}_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)}.
$$

Substituindo θ', obtemos a mesma desigualdade encontrada na demosntração anterior.

$$
\|w(\cdot,\hat{t})\|^{\beta}_{L^{\beta}(\mathbb{R}^n)} \leq K^{\beta}\left(\alpha^p C^{\tilde{\beta}}\right)^{\frac{\beta b}{p-a\tilde{\beta}}}\left(\frac{B(\hat{t})}{\mu(\hat{t})}\right)^{\frac{\beta b p'}{p-a\tilde{\beta}}}\|w(\cdot,\hat{t})\|^{\beta\left[(1-b)+\frac{b\tilde{\beta}(1-a)}{p-a\tilde{\beta}}\right]}_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)}.
$$

Reescrevento a desigualdade acima em função de $\|u(\cdot,\hat{t})\|_{L^{q}(\mathbb{R}^n)}$, obtemos

$$
\|u(\cdot,\hat{t})\|_{L^{q}(\mathbb{R}^n)} \leq K^{\frac{\beta}{q}}\left(\alpha^p C^{\tilde{\beta}}\right)^{\frac{\beta b}{q(p-a\tilde{\beta})}}\left(\frac{B(\hat{t})}{\mu(\hat{t})}\right)^{\frac{\beta b p'}{q(p-a\tilde{\beta})}}\|u(\cdot,\hat{t})\|^{\left[(1-b)+\frac{b\tilde{\beta}(1-a)}{p-a\tilde{\beta}}\right]}_{L^{\frac{q}{2}}(\mathbb{R}^n)}.
$$

$\square$

Para cada valor de q temos um cenário diferente, pois a estimativa que acabamos de encontrar é pontual, temos de alguma forma juntar tudo e para isto, é conveniente introduzir as quantidades $\mathbb{B}_\mu(t_0;t)$ e $\mathbb{U}_q(t_0;t)$ definidas por

$$\mathbb{B}_\mu(t_0;t) = \sup\left\{\frac{B(\tau)}{\mu(\tau)} : t_0 \le \tau \le t\right\}, \tag{4.4.21}$$

$$\mathbb{U}_q(t_0;t) = \sup\left\{\|u(\cdot,\tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} : t_0 \le \tau \le t\right\}, \tag{4.4.22}$$

dado $0 \le t_0 \le t < T_*$ arbitrário.

Teorema 4.4.3. *Seja $q \ge 2\bar{q}$ e $\dfrac{n(k-p+2)}{p-1} < \dfrac{q}{2}$. Para cada $0 \le t_0 < t < T_*$, temos*

$$\mathbb{U}_q(t_0;t) \le \max\left\{\|u(\cdot,t_0)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}; \left[K^\beta(\alpha^p C^{\tilde{\beta}})^{\frac{\beta b}{p-a\tilde{\beta}}}\right]^{\frac{1}{q}} \mathbb{B}_\mu(t_0;t)^{\frac{\beta b p'}{q(p-a\tilde{\beta})}} \mathbb{U}_{\frac{q}{2}}(t_0;t)^{(1-b)+\frac{b\tilde{\beta}(1-a)}{p-a\tilde{\beta}}}\right\}. \tag{4.4.23}$$

Demonstração. Definimos

$$\lambda_q(t) = \left[K^\beta(\alpha^p C^{\tilde{\beta}})^{\frac{\beta b}{p-a\tilde{\beta}}}\right]^{\frac{1}{q}} \mathbb{B}_\mu(t_0;t)^{\frac{\beta b p'}{q(p-a\tilde{\beta})}} \mathbb{U}_{\frac{q}{2}}(t_0;t)^{(1-b)+\frac{b\tilde{\beta}(1-a)}{p-a\tilde{\beta}}}. \tag{4.4.24}$$

A prova se resume a analisar três casos:

Caso I:$\|u(\cdot,\tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} > \lambda_q(t)$ para todo $t_0 \le \tau \le t$.

Pelo Teorema 4.4.1, devemos ter $\dfrac{d}{d\tau}\|u(\cdot,\tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} < 0$ para toda $\tau \in [t_0,t] \setminus E_q$, então $\|u(\cdot,\tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$ decresce monotonamente em $[t_0,t]$. Em particular, $\mathbb{U}_q(t_0;t) = \|u(\cdot,t_0)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$.

Caso II:$\|u(\cdot,t_0)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} > \lambda_q(t)$ e $\|u(\cdot,t_1)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le \lambda_q(t)$ para algum $t_1 \in (t_0,t]$.

Neste caso, seja $t_2 \in (t_0,t]$, tal que para todo $t_0 < \tau < t_2$ $\|u(\cdot,\tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} > \lambda_q(t)$ e $\|u(\cdot,t_2)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \lambda(t)$. Provamos a seguinte afirmação.

Afirmação: Para todo $\tau \in [t_2,t]$, $\|u(\cdot,\tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le \lambda_q(t)$.

Supomos que isto não é verdade, isto é, podemos encontrar t_3, t_4, com $t_2 \le t_3 < t_4 \le t$, tal que $\|u(\cdot,\tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} > \lambda_q(t)$ para todo $\tau \in (t_3,t_4]$, com $\|u(\cdot,t_3)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \lambda_q(t)$, então pelo 4.4.1, para todo $\tau \in (t_3,t_4]$ temos $\dfrac{d}{d\tau}\|u(\cdot,\tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} < 0$, logo $\|u(\cdot,\tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$ é decrescente, contrariando o fato de $\|u(\cdot,t_3)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \lambda_q(t) < \|u(\cdot,t_4)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$, concluindo a afirmação.

E além disso, como no caso I, $\|u(\cdot,\tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} > \lambda_q(t) \quad \forall \tau \in [t_0, t_2]$, concluindo que $\|u(\cdot,\tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$ decresce monotonamente em $[t_0, t_2)$, portando $\mathbb{U}_q(t_0; t) = \|u(\cdot, t_0)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$.

Caso III:$\|u(\cdot, t_0)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \lambda_q(t)$.
Isto implica que $\|u(\cdot,\tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \lambda_q(t)$ para todo $t_0 \leq \tau \leq t$. Para mostrar, basta usar o mesmo argumento usado no Caso II para o intervalo $[t_2, t]$. E isto completa a prova do Teorema. $\square$

Para mostrar o próximo resultado, precisamos reescrever (4.4.23) em função de p, q, k, n. Já vimos as seguintes relações:

$$\gamma := \frac{p(k+1) - 2(p-1)}{p-1} \tag{4.4.25}$$

$$\alpha := \frac{p+q-2}{p} \tag{4.4.26}$$

$$\beta := \frac{pq}{p+q-2} \tag{4.4.27}$$

$$\beta_0 := \frac{\beta}{2} \tag{4.4.28}$$

$$\tilde{\beta} := \frac{q+\gamma}{\alpha} = \frac{p}{p-1}\frac{(p-1)(q-2)+p(k+1)}{p+q-2} \tag{4.4.29}$$

$$\frac{1}{\tilde{\beta}} = a\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{n}\right) + (1-a)\frac{1}{\beta_0} \tag{4.4.30}$$

$$\frac{1}{\beta} = b\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{n}\right) + (1-b)\frac{1}{\beta_0}. \tag{4.4.31}$$

Com alguns cálculos, obtemos

$$\frac{\beta b p'}{p - a\tilde{\beta}} = \frac{qn}{q(p-1) - 2n(k-p+2)} \tag{4.4.32}$$

$$\frac{b\tilde{\beta}}{p - a\tilde{\beta}} = \frac{n[(p-1)(q-2)+p(k+1)]}{p[q(p-1) - 2n(k-p+2)]} \tag{4.4.33}$$

$$(1-b) = \frac{(2-n)(p+q-2) + q(p-n)}{2(p+q-2) + q(p-n)} \tag{4.4.34}$$

$$(1-b) + \frac{b\tilde{\beta}}{p - a\tilde{\beta}}(1-a) = 1 + \frac{n(k-p+2)}{q(p-1) - 2n(k-p+2)}. \tag{4.4.35}$$

Além disso, sabendo que $C = C(n)$ e $K = K(n)$, podemos reescalonar estas constantes, obtendo $\tilde{C} = C^{\frac{1}{a}}$ e $\tilde{K} = K^{\frac{1}{b}}$. E assim escrever

$$K^{\beta}(\alpha^p C^{\tilde{\beta}})^{\frac{\beta b}{p-a\tilde{\beta}}} = \tilde{K}^{b\beta}\tilde{C}^{\frac{a\tilde{\beta}\beta b}{p-a\tilde{\beta}}}\alpha^{\frac{p\beta b}{p-a\tilde{\beta}}}. \tag{4.4.36}$$

Agora, tomando $\mathcal{C} = max\{\tilde{C}, \tilde{K}\}$, (4.4.36), fica

$$K^{\beta}(\alpha^p C^{\tilde{\beta}})^{\frac{\beta b}{p-a\tilde{\beta}}} \leq \mathcal{C}^{b\beta + \frac{a\tilde{\beta}\beta b}{p-a\tilde{\beta}}}\alpha^{\frac{p\beta b}{p-a\tilde{\beta}}}. \tag{4.4.37}$$

É fácil verificar que $b\beta + \dfrac{a\tilde{\beta}\beta b}{p-a\tilde{\beta}} = \dfrac{p\beta b}{p-a\tilde{\beta}}$. Note que reescalonar e tomar o máximo entre as duas constantes, serviu para nos dar uma nova constante mais fácil de ser trabalhada, ou seja,

$$K^{\beta}(\alpha^p C^{\tilde{\beta}})^{\frac{\beta b}{p-a\tilde{\beta}}} \leq (\mathcal{C}\alpha)^{\frac{p\beta b}{p-a\tilde{\beta}}}, \tag{4.4.38}$$

onde $\frac{p\beta b}{p-a\tilde{\beta}} = \frac{nq(p-1)}{q(p-1)-2n(k-p+2)}$ e $\alpha = \frac{p+q-2}{p}$. Assim, escrevendo a nova constante em função de p, q, n e k, obtemos

$$K^{\beta}(\alpha^p C^{\tilde{\beta}})^{\frac{\beta b}{p-a\tilde{\beta}}} \leq \left(\mathcal{C}(n)\frac{p+q-2}{p}\right)^{\frac{nq(p-1)}{q(p-1)-2n(k-p+2)}}. \tag{4.4.39}$$

Observação 4.4.4. No caso unidimensional, temos uma expressão para as constantes $\tilde{C}$ e $\tilde{K}$ e $\tilde{C} = \tilde{K}$, sendo assim, neste caso é desnecessário tomar o máximo entre as duas constantes. Podemos ver este fato no Apêndice.

Desta forma, podemos reescrever (4.4.23) da seguinte forma

$$\mathbb{U}_q(t_0,t) \leq \max\left\{\|u(\cdot,t_0)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}; \left[\left(\mathcal{C}(n)\frac{p+q-2}{p}\right)^{\frac{nq(p-1)}{q(p-1)-2n(k-p+2)}}\right]^{\frac{1}{q}} \cdot \right.$$
$$\left. \mathbb{B}_{\mu}(t_0,t)^{\frac{n}{q(p-1)-2n(k-p+2)}}\mathbb{U}_{\frac{q}{2}}(t_0,t)^{1+\frac{n(k-p+2)}{q(p-1)-2n(k-p+2))}}\right\}$$

ou ainda,

$$\mathbb{U}_q(t_0,t) \leq \max\left\{\|u(\cdot,t_0)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}; \left(\mathcal{C}(n)\frac{p+q-2}{p}\right)^{\frac{n(p-1)}{q(p-1)-2n(k-p+2)}} \cdot \right.$$
$$\left. \mathbb{B}_{\mu}(t_0,t)^{\frac{n}{q(p-1)-2n(k-p+2)}}\mathbb{U}_{\frac{q}{2}}(t_0,t)^{1+\frac{n(k-p+2)}{q(p-1)-2n(k-p+2))}}\right\} \tag{4.4.40}$$

Antes do próximo lema, definimos

$$\mathcal{K}(q) := \left(\mathcal{C}(n)\frac{p+q-2}{p}\right)^{\frac{n(p-1)}{q(p-1)-2n(k-p+2)}}. \qquad (4.4.41)$$

Observação 4.4.5. Até o momento, consideramos sobre q, as condições $2\bar{q} \leq q$ e $\dfrac{n(k-p+2)}{p-1} < \dfrac{q}{2}$ onde $\bar{q} \geq p_0$ fixo, isto é, tomamos q tal que $\frac{q}{2}$ no mínimo é $\bar{q}$. Em outras palavras, para todo $q \geq 2\bar{q}$ onde $\bar{q}$ satisfaz

$$\bar{q} \geq p_0, \quad \bar{q} > \frac{n(k-p+2)}{p-1} \qquad (4.4.42)$$

garantimos todos os resultados acima.

4.5 Estimativas para a normal L^∞

Nesta seção provaremos o resultado principal deste trabalho, uma estimativa que controla a norma L^∞, e por meio desta estimativa obtemos condições que nos garantam a existência global da solução. Uma condição fundamental é garantir que alguma (e então todas) norma $L^{\bar{q}}$ com $\bar{q}$ satisfazendo (4.4.42) não exploda em tempo finito.

Para mostrar o resultado principal, demonstraremos alguns lemas:

Lema 4.5.1. *Sejam $\bar{q}$ satisfazendo* (4.4.42) *e $u(\cdot,t)$ solução de* (4.1.1) *no intervalo $[0,T_*)$, tem-se*

$$\mathbb{U}_{2^m\bar{q}}(t_0,t) \leq \max\left\{ \begin{array}{l} \|u(\cdot,t_0)\|_{L^{2^m\bar{q}}}; \\ K(l,m)\mathbb{B}_\mu^{b(l,m)}\|u(\cdot,t_0)\|_{L^{2^{l-1}\bar{q}}}^{\frac{2^m\bar{q}(p-1)-h}{2^l\bar{q}(p-1)-2h}\frac{1}{2^{m-l}}}, \ 2 \leq l \leq m; \\ K(1,m)\mathbb{B}_\mu^{b(1,m)}\mathbb{U}_{\bar{q}}^{\frac{2^m\bar{q}(p-1)-h}{2\bar{q}(p-1)-2h}\frac{1}{2^{m-1}}} \end{array}\right\}, \qquad (4.5.1)$$

onde $K(l,m) = \displaystyle\prod_{j=l}^{m}\mathcal{K}(2^j\bar{q})^{\frac{2^m\bar{q}(p-1)-h}{2^{j+1}\bar{q}(p-1)-2h}\frac{1}{2^{m-(j+1)}}}$ *e*

$$b(l,m) = \frac{n}{2^m\bar{q}(p-1)}\left[\frac{2^{m+1}\bar{q}(p-1)-2h}{2^l\bar{q}(p-1)-2h} - 1\right] \quad \forall 1 \leq l \leq m,$$

com $h := n(k-p+2)$, e $\mathbb{B}_\mu(t_0,t)$, $\mathbb{U}_{\bar{q}}(t_0,t)$ dados em (4.4.21), (4.4.22) e $0 \leq t_0 < t < T_*$.

Demonstração. Aplicando (4.4.40) sucessivamente para $q = 2\bar{q}, 4\bar{q}, ..., 2^m\bar{q}$ e como vamos variar apenas o valor q, denotamos $h := n(k-p+2)$, assim

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{U}_{2^m\bar{q}}(t_0,t) \le \max\Bigg\{ \|u(\cdot,t_0)\|_{L^{2^m\bar{q}}};\\
&\mathcal{K}(2^m\bar{q})\mathbb{B}_\mu(t_0,t)^{\frac{n}{2^m\bar{q}(p-1)-2h}}\|u(\cdot,t_0)\|_{L^{2^{m-1}\bar{q}}}^{1+\frac{h}{2^m\bar{q}(p-1)-2h}};\\
&\mathcal{K}(2^m\bar{q})\mathcal{K}(2^{m-1}\bar{q})^{\left(1+\frac{h}{2^m\bar{q}(p-1)-2h}\right)}\mathbb{B}_\mu(t_0,t)^{\frac{n}{2^m\bar{q}(p-1)-2h}}\\
&\mathbb{B}_\mu(t_0,t)^{\frac{n}{2^{m-1}\bar{q}(p-1)-2h}\left(1+\frac{h}{2^m\bar{q}(p-1)-2h}\right)}\|u(\cdot,t_0)\|_{L^{2^{m-2}\bar{q}}}^{\left(1+\frac{h}{2^m\bar{q}(p-1)-2h}\right)\left(1+\frac{h}{2^{m-1}\bar{q}(p-1)-2h}\right)};\\
&\mathcal{K}(2^m\bar{q})\mathcal{K}(2^{m-1}\bar{q})^{\left(1+\frac{h}{2^m\bar{q}(p-1)-2h}\right)}\mathcal{K}(2^{m-2}\bar{q})^{\left(1+\frac{h}{2^m\bar{q}(p-1)-2h}\right)\left(1+\frac{h}{2^{m-1}\bar{q}(p-1)-2h}\right)}\\
&\mathbb{B}_\mu(t_0,t)^{\frac{n}{2^m\bar{q}(p-1)-2h}}\mathbb{B}_\mu(t_0,t)^{\frac{n}{2^{m-1}\bar{q}(p-1)-2h}\left(1+\frac{h}{2^m\bar{q}(p-1)-2h}\right)}\\
&\mathbb{B}_\mu(t_0,t)^{\frac{n}{2^{m-2}\bar{q}(p-1)-2h}\left(1+\frac{h}{2^m\bar{q}(p-1)-2h}\right)\left(1+\frac{h}{2^{m-1}\bar{q}(p-1)-2h}\right)}\\
&\|u(\cdot,t_0)\|_{L^{2^{m-3}\bar{q}}}^{\left(1+\frac{h}{2^m\bar{q}(p-1)-2h}\right)\left(1+\frac{h}{2^{m-1}\bar{q}(p-1)-2h}\right)\left(1+\frac{h}{2^{m-2}\bar{q}(p-1)-2h}\right)};\cdots\\
&\mathcal{K}(2^m\bar{q})\cdots\mathcal{K}(2\bar{q})^{\left(1+\frac{h}{2^m\bar{q}(p-1)-2h}\right)\cdots\left(1+\frac{h}{2^2\bar{q}(p-1)-2h}\right)}\\
&\mathbb{B}_\mu(t_0,t)^{\frac{n}{2^m\bar{q}(p-1)-2h}}\cdots\mathbb{B}_\mu(t_0,t)^{\frac{n}{2\bar{q}(p-1)-2h}\left(1+\frac{h}{2^m\bar{q}(p-1)-2h}\right)\cdots\left(1+\frac{h}{2^2\bar{q}(p-1)-2h}\right)}\\
&\mathbb{U}_{\bar{q}}(t_0,t)^{\left(1+\frac{h}{2^m\bar{q}(p-1)-2h}\right)\cdots\left(1+\frac{h}{2\bar{q}(p-1)-2h}\right)}\Bigg\}
\end{aligned}
\tag{4.5.2}
$$

A partir de agora, tentaremos simplificar os termos da desigualdade (4.5.2) e mais tarde veremos que os termos intermediários do lado direito da desigualdade podem ser escritos como uma combinação do primeiro termo com o último. Começamos escrevendo o expoente

$$C_j := \left(1 + \frac{h}{2^j\bar{q}(p-1)-2h}\right) = \frac{2^j\bar{q}(p-1)-h}{2^j\bar{q}(p-1)-2h}. \tag{4.5.3}$$

Note que

$$
\begin{aligned}
C_m \cdots C_j &= \left(\frac{2^m\bar{q}(p-1)-h}{2^m\bar{q}(p-1)-2h}\right)\left(\frac{2^{m-1}\bar{q}(p-1)-h}{2^{m-1}\bar{q}(p-1)-2h}\right)\\
&\cdots\left(\frac{2^{j+1}\bar{q}(p-1)-h}{2^{j+1}\bar{q}(p-1)-2h}\right)\left(\frac{2^{j}\bar{q}(p-1)-h}{2^{j}\bar{q}(p-1)-2h}\right)\\
&= \left(\frac{2^m\bar{q}(p-1)-h}{2^m\bar{q}(p-1)-2h}\right)\left(2\frac{2^{m-1}\bar{q}(p-1)-h}{2^{m-1}\bar{q}(p-1)-2h}\right)\\
&\cdots\left(2\frac{2^{j+1}\bar{q}(p-1)-h}{2^{j+1}\bar{q}(p-1)-2h}\right)\left(2\frac{2^{j}\bar{q}(p-1)-h}{2^{j}\bar{q}(p-1)-2h}\right)\frac{1}{2^{m-j}}\\
&= \left(\frac{2^m\bar{q}(p-1)-h}{2^{j}\bar{q}(p-1)-2h}\right)\frac{1}{2^{m-j}} \qquad (4.5.4)
\end{aligned}
$$

Além disso, para simplificar a notação, usando a definição (4.4.41) e o resultado obtido em (4.5.4), escrevemos

$$
\begin{aligned}
K(l,m) :&= \mathcal{K}(2^m\bar{q})\mathcal{K}(2^{m-1}\bar{q})^{C_m}\mathcal{K}(2^{m-2}\bar{q})^{C_mC_{m-1}}\cdots\mathcal{K}(2^l\bar{q})^{C_m\cdots C_{l+1}}\\
&= \mathcal{K}(2^m\bar{q})\mathcal{K}(2^{m-1}\bar{q})^{\frac{2^m\bar{q}(p-1)-h}{2^m\bar{q}(p-1)-2h}}\mathcal{K}(2^{m-2}\bar{q})^{\frac{2^m\bar{q}(p-1)-h}{2^{m-1}\bar{q}(p-1)-2h}\frac{1}{2}}\\
&\cdots\mathcal{K}(2^l\bar{q})^{\frac{2^m\bar{q}(p-1)-h}{2^{l+1}\bar{q}(p-1)-2h}\frac{1}{2^{m-(l+1)}}} \qquad (4.5.5)\\
&= \prod_{j=l}^{m}\mathcal{K}(2^j\bar{q})^{\frac{2^m\bar{q}(p-1)-h}{2^{j+1}\bar{q}(p-1)-2h}\frac{1}{2^{m-(j+1)}}} \qquad (4.5.6)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b(l,m) := {} & \frac{n}{2^m\bar{q}(p-1)-2h} + \frac{n}{2^{m-1}\bar{q}(p-1)-2h}\left(\frac{2^m\bar{q}(p-1)-h}{2^m\bar{q}(p-1)-2h}\right) \\
& + \frac{n}{2^{m-2}\bar{q}(p-1)-2h}\left(\frac{2^m\bar{q}(p-1)-h}{2^{m-1}\bar{q}(p-1)-2h}\right)\frac{1}{2}+ \qquad (4.5.7) \\
& + \frac{n}{2^{m-3}\bar{q}(p-1)-2h}\left(\frac{2^m\bar{q}(p-1)-h}{2^{m-2}\bar{q}(p-1)-2h}\right)\frac{1}{2^2}+\cdots \\
& + \frac{n}{2^{l}\bar{q}(p-1)-2h}\left(\frac{2^m\bar{q}(p-1)-h}{2^{l+1}\bar{q}(p-1)-2h}\right)\frac{1}{2^{m-l-1}} \\
= {} & \frac{n}{2^m\bar{q}(p-1)-2h}\left(\frac{2^m\bar{q}(p-1)-h}{2^{m+1}\bar{q}(p-1)-2h}\right)2 \\
& + \frac{n}{2^{m-1}\bar{q}(p-1)-2h}\left(\frac{2^m\bar{q}(p-1)-h}{2^m\bar{q}(p-1)-2h}\right) \\
& + \frac{n}{2^{m-2}\bar{q}(p-1)-2h}\left(\frac{2^m\bar{q}(p-1)-h}{2^{m-1}\bar{q}(p-1)-2h}\right)\frac{1}{2}+ \\
& + \frac{n}{2^{m-3}\bar{q}(p-1)-2h}\left(\frac{2^m\bar{q}(p-1)-h}{2^{m-2}\bar{q}(p-1)-2h}\right)\frac{1}{2^2}+\cdots \\
& + \frac{n}{2^{l}\bar{q}(p-1)-2h}\left(\frac{2^m\bar{q}(p-1)-h}{2^{l+1}\bar{q}(p-1)-2h}\right)\frac{1}{2^{m-l-1}} \\
= {} & \frac{n[2^m\bar{q}(p-1)-h]}{2^m}\sum_{j=l}^{m}\frac{2^{j+1}}{[(2^j\bar{q}(p-1)-2h)][2^{j+1}\bar{q}(p-1)-2h]}
\end{aligned}
\tag{4.5.8}
$$

Usando em (4.5.7) frações parciais, obtemos

$$
\begin{aligned}
& \frac{2^{j+1}}{(2^j\bar{q}(p-1)-2h)(2^{j+1}\bar{q}(p-1)-2h)} = \\
& \frac{1}{\bar{q}(p-1)}\left(\frac{2}{2^j\bar{q}(p-1)-2h} - \frac{2}{2^{j+1}\bar{q}(p-1)-2h}\right).
\end{aligned}
\tag{4.5.9}
$$

Podemos escrever

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=l}^{m} \frac{2^{j+1}}{[(2^j\bar{q}(p-1)-2h)][2^{j+1}\bar{q}(p-1)-2h]} \\
&= \frac{1}{\bar{q}(p-1)} \sum_{j=l}^{m} \frac{2}{2^j\bar{q}(p-1)-2h} - \frac{2}{2^{j+1}\bar{q}(p-1)-2h} \\
&= \frac{1}{\bar{q}(p-1)} \left(\frac{2}{2^l\bar{q}(p-1)-2h} - \cancel{\frac{2}{2^{l+1}\bar{q}(p-1)-2h}} + \cancel{\frac{2}{2^{l+1}\bar{q}(p-1)-2h}} \cdots - \frac{2}{2^{m+1}\bar{q}(p-1)-2h} \right) \\
&= \frac{1}{\bar{q}(p-1)} \left(\frac{2}{2^l\bar{q}(p-1)-2h} - \frac{2}{2^{m+1}\bar{q}(p-1)-2h} \right).
\end{aligned}
$$

Desta forma, conseguimos cancelar muitos termos de $b(l,m)$, obtendo

$$
\begin{aligned}
b(l,m) =& \frac{n(2^m\bar{q}(p-1)-h)}{2^m\bar{q}(p-1)} \left[\frac{2}{2^l\bar{q}(p-1)-2h} - \frac{2}{2^{m+1}\bar{q}(p-1)-2h} \right] \\
=& \frac{n}{2^m\bar{q}(p-1)} \left[\frac{2^{m+1}\bar{q}(p-1)-2h}{2^l\bar{q}(p-1)-2h} - 1 \right].
\end{aligned} \tag{4.5.10}
$$

Assim, usando (4.5.4), a notação (4.5.5) e o que obtemos para $b(l,m)$ em (4.5.10), podemos escrever (4.5.2) da seguinte maneira:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{U}_{2^m\bar{q}}(t_0,t) \leq \max\Bigg\{ & \|u(\cdot,t_0)\|_{L^{2^m\bar{q}}};\ K(m,m)\mathbb{B}_\mu^{b(m,m)} \|u(\cdot,t_0)\|_{L^{2^{m-1}\bar{q}}}^{\frac{2^m\bar{q}(p-1)-h}{2^m\bar{q}(p-1)-2h}}; \\
& K(m-1,m)\mathbb{B}_\mu^{b(m-1,m)} \|u(\cdot,t_0)\|_{L^{2^{m-2}\bar{q}}}^{\frac{2^m\bar{q}(p-1)-h}{2^{m-1}\bar{q}(p-1)-2h}\frac{1}{2}}; \\
& K(m-2,m)\mathbb{B}_\mu^{b(m-2,m)} \|u(\cdot,t_0)\|_{L^{2^{m-3}\bar{q}}}^{\frac{2^m\bar{q}(p-1)-h}{2^{m-2}\bar{q}(p-1)-2h}\frac{1}{2^2}}; \cdots ; \\
& K(l,m)\mathbb{B}_\mu^{b(l,m)} \|u(\cdot,t_0)\|_{L^{2^{l-1}\bar{q}}}^{\frac{2^m\bar{q}(p-1)-h}{2^l\bar{q}(p-1)-2h}\frac{1}{2^{m-l}}}; \\
& \cdots ;\ K(1,m)\mathbb{B}_\mu^{b(1,m)} \mathbb{U}_{\bar{q}}^{\frac{2^m\bar{q}(p-1)-h}{2\bar{q}(p-1)-2h}\frac{1}{2^{m-1}}} \Bigg\},
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$\mathbb{U}_{2^m\bar{q}}(t_0,t) \le \max\Bigg\{ \|u(\cdot,t_0)\|_{L^{2^m\bar{q}}};$$

$$K(l,m)\mathbb{B}_\mu^{b(l,m)}\|u(\cdot,t_0)\|_{L^{2^{l-1}\bar{q}}}^{\frac{2^m\bar{q}(p-1)-h}{2^l\bar{q}(p-1)-2h}\frac{1}{2^{m-l}}},\ 2\le l\le m;$$

$$K(1,m)\mathbb{B}_\mu^{b(1,m)}\mathbb{U}_{\bar{q}}^{\frac{2^m\bar{q}(p-1)-h}{2\bar{q}(p-1)-2h}\frac{1}{2^{m-1}}}\Bigg\}, \qquad (4.5.11)$$

onde

$$K(l,m) = \prod_{j=l}^{m} \mathcal{K}(2^j\bar{q})^{\frac{2^m\bar{q}(p-1)-h}{2^{j+1}\bar{q}(p-1)-2h}\frac{1}{2^{m-(j+1)}}},$$

$$b(l,m) = \frac{n}{2^m\bar{q}(p-1)}\left[\frac{2^{m+1}\bar{q}(p-1)-2h}{2^l\bar{q}(p-1)-2h} - 1\right] \quad \forall\ 1\le l\le m.$$

□

O próximo resultado consiste em majorar os termos intermediários da estimativa (4.5.11) em função do primeiro e do último termo.

Lema 4.5.2. *Sejam $\bar{q}$ satisfazendo* (4.4.42) *e $u(\cdot,t)$ solução de* (4.1.1) *no intervalo $[0,T_*)$, então* (4.5.11) *pode ser estimada por*

$$\mathbb{U}_{2^m\bar{q}}(t_0,t) \le \max\Bigg\{ \|u(\cdot,t_0)\|_{L^{2^m\bar{q}}};\ K(l,m)\|u(\cdot,t_0)\|_{L^{2^m\bar{q}}(\mathbb{R}^n)};$$

$$K(l,m)\mathbb{B}_\mu^{\frac{n}{2^m\bar{q}(p-1)}\left[\frac{2^{m+1}\bar{q}(p-1)-2h}{2\bar{q}(p-1)-2h}-1\right]}\mathbb{U}_{\bar{q}}^{\frac{1}{2^{m-1}}\left(\frac{2^m\bar{q}(p-1)-h}{2\bar{q}(p-1)-2h}\right)};$$

$$K(1,m)\mathbb{B}_\mu^{\frac{n}{2^m\bar{q}(p-1)}\left[\frac{2^{m+1}\bar{q}(p-1)-2h}{2\bar{q}(p-1)-2h}-1\right]}\mathbb{U}_{\bar{q}}^{\frac{1}{2^{m-1}}\left(\frac{2^m\bar{q}(p-1)-h}{2\bar{q}(p-1)-2h}\right)}\Bigg\}, \qquad (4.5.12)$$

para todo $2\le l\le m$.

Demonstração.

Agora vamos majorar os termos intermediários,

$$K(l,m)\mathbb{B}_\mu(t_0;t)^{b(l,m)}\|u(\cdot,t_0)\|_{L^{2^{l-1}\bar{q}}(\mathbb{R}^n)}^{\left(\frac{2^m\bar{q}(p-1)-h}{2^l\bar{q}(p-1)-2h}\right)\frac{1}{2^{m-l}}} \text{ para } 2\le l\le m,$$

da desigualdade (4.5.11) em função do primeiro e último termo.

Começamos usando uma interpolação para a norma $L^{2^{l-1}\bar{q}}$, já que $\bar{q} \leq 2^{l-1}\bar{q} \leq 2^m\bar{q}$, obtendo

$$\|u(\cdot,t_0)\|_{L^{2^{l-1}\bar{q}}(\mathbb{R}^n)} \leq \|u(\cdot,t_0)\|^{1-\theta}_{L^{\bar{q}}(\mathbb{R}^n)}\|u(\cdot,t_0)\|^{\theta}_{L^{2^m\bar{q}}}, \tag{4.5.13}$$

onde θ satisfaz $\dfrac{1}{2^{l-1}\bar{q}} = \dfrac{1-\theta}{\bar{q}} + \dfrac{\theta}{2^m\bar{q}}$, ou seja,

$$\theta = \frac{1-2^{-l+1}}{1-2^{-m}} \quad \text{e} \quad 1-\theta = \frac{2^{-l+1}-2^{-m}}{1-2^{-m}}. \tag{4.5.14}$$

Desta forma, temos

$$K(l,m)\mathbb{B}_{\mu}^{b(l,m)}\|u(\cdot,t_0)\|_{L^{2^{l-1}\bar{q}}(\mathbb{R}^n)}^{\left(\frac{2^m\bar{q}(p-1)-h}{2^l\bar{q}(p-1)-2h}\right)\frac{1}{2^{m-l}}}$$

$$\leq K(l,m)\mathbb{B}_{\mu}^{b(l,m)}\|u(\cdot,t_0)\|_{L^{\bar{q}}(\mathbb{R}^n)}^{\left(\frac{\bar{q}(p-1)-2^{-m}h}{\bar{q}(p-1)-2^{-l+1}h}\right)\left(\frac{2^{-l+1}-2^{-m}}{1-2^{-m}}\right)}\|u(\cdot,t_0)\|_{L^{2^m\bar{q}}(\mathbb{R}^n)}^{\left(\frac{\bar{q}(p-1)-2^{-m}h}{\bar{q}(p-1)-2^{-l+1}h}\right)\left(\frac{1-2^{-l+1}}{1-2^{-m}}\right)}$$

$$= K(l,m)^{\frac{1}{p_1}}\|u(\cdot,t_0)\|_{L^{2^m\bar{q}}(\mathbb{R}^n)}^{\left(\frac{\bar{q}(p-1)-2^{-m}h}{\bar{q}(p-1)-2^{-l+1}h}\right)\left(\frac{1-2^{-l+1}}{1-2^{-m}}\right)} \tag{4.5.15}$$

$$\cdot K(l,m)^{\frac{1}{p_2}}\mathbb{B}_{\mu}^{b(l,m)}\|u(\cdot,t_0)\|_{L^{\bar{q}}(\mathbb{R}^n)}^{\left(\frac{\bar{q}(p-1)-2^{-m}h}{\bar{q}(p-1)-2^{-l+1}h}\right)\left(\frac{2^{-l+1}-2^{-m}}{1-2^{-m}}\right)},$$

onde $\dfrac{1}{p_1}+\dfrac{1}{p_2} = 1$. Escolhendo $p_1 = \left(\frac{\bar{q}(p-1)-2^{-l+1}h}{\bar{q}(p-1)-2^{-m}h}\right)\left(\frac{1-2^{-m}}{1-2^{-l+1}}\right) > 1$, temos $p_2 = \left(\frac{1-2^{-m}}{2^{-l+1}-2^{-m}}\right)\left(\frac{\bar{q}(p-1)-2^{-l+1}h}{\bar{q}(p-1)-h}\right)$ e usando desigualdade de Young na estimativa (4.5.15), obtemos

$$
\begin{aligned}
&K(l,m)\mathbb{B}_\mu^{b(l,m)}\|u(\cdot,t_0)\|_{L^{2^{l-1}\bar{q}}(\mathbb{R}^n)}^{\left(\frac{2^m\bar{q}(p-1)-h}{2^l\bar{q}(p-1)-2h}\right)\frac{1}{2^{m-l}}} \\
&\leq \frac{1}{p_1}K(l,m)\|u(\cdot,t_0)\|_{L^{2^m\bar{q}}(\mathbb{R}^n)} + \frac{1}{p_2}K(l,m) \\
&\cdot \left(\mathbb{B}_\mu^{b(l,m)}\|u(\cdot,t_0)\|_{L^{\bar{q}}(\mathbb{R}^n)}^{\left(\frac{\bar{q}(p-1)-2^{-m}h}{\bar{q}(p-1)-2^{-l+1}h}\right)\left(\frac{2^{-l+1}-2^{-m}}{1-2^{-m}}\right)}\right)^{p_2} \\
&\frac{1}{p_1}K(l,m)\|u(\cdot,t_0)\|_{L^{2^m\bar{q}}(\mathbb{R}^n)} + \frac{1}{p_2}K(l,m)\mathbb{B}_\mu^{b(1,m)}\|u(\cdot,t_0)\|_{L^{\bar{q}}(\mathbb{R}^n)}^{\left(\frac{\bar{q}(p-1)-2^{-m}h}{\bar{q}(p-1)-h}\right)} \\
&\leq \max\{K(l,m)\|u(\cdot,t_0)\|_{L^{2^m\bar{q}}(\mathbb{R}^n)}; \\
&K(l,m)\mathbb{B}_\mu^{\frac{n}{2^m\bar{q}(p-1)}\left[\frac{2^{m+1}\bar{q}(p-1)-2h}{2\bar{q}(p-1)-2h}-1\right]}\|u(\cdot,t_0)\|_{L^{\bar{q}}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{2^{m-1}}\frac{2^m\bar{q}(p-1)-h}{2\bar{q}(p-1)-2h}}\}.
\end{aligned}
\tag{4.5.16}
$$

Aplicando (4.5.16) em (4.5.11), obtemos

$$
\begin{aligned}
\mathbb{U}_{2^m\bar{q}}(t_0,t) \leq \max\Bigg\{ &\|u(\cdot,t_0)\|_{L^{2^m\bar{q}}};\ K(l,m)\|u(\cdot,t_0)\|_{L^{2^m\bar{q}}(\mathbb{R}^n)}; \\
&K(l,m)\mathbb{B}_\mu^{\frac{n}{2^m\bar{q}(p-1)}\left[\frac{2^{m+1}\bar{q}(p-1)-2h}{2\bar{q}(p-1)-2h}-1\right]}\mathbb{U}_{\bar{q}}^{\frac{1}{2^{m-1}}\left(\frac{2^m\bar{q}(p-1)-h}{2\bar{q}(p-1)-2h}\right)}; \\
&K(1,m)\mathbb{B}_\mu^{\frac{n}{2^m\bar{q}(p-1)}\left[\frac{2^{m+1}\bar{q}(p-1)-2h}{2\bar{q}(p-1)-2h}-1\right]}\mathbb{U}_{\bar{q}}^{\frac{1}{2^{m-1}}\left(\frac{2^m\bar{q}(p-1)-h}{2\bar{q}(p-1)-2h}\right)}\Bigg\}
\end{aligned}
$$

para todo $2 \leq l \leq m$.

$\square$

Definindo,

$$K_1(m) := \max_{2\leq l\leq m} K(l,m) \tag{4.5.17}$$

$$K_2(m) := \max\{1, K_1(m)\} = \max\{1, K(2,m), \ldots, K(m,m)\} \text{ e} \tag{4.5.18}$$

$$K_3(m) := \max\{K(1,m), K_1(m)\} = \max_{1\leq l\leq m} C(l,m). \tag{4.5.19}$$

Assim, podemos escrever (4.5.17) da seguinte forma

$$\mathbb{U}_{2^m\bar{q}}(t_0,t) \leq max\Bigg\{ \|u(\cdot,t_0)\|_{L^{2^m\bar{q}}};\ K_1(m)\|u(\cdot,t_0)\|_{L^{2^m\bar{q}}(\mathbb{R}^n)};$$

$$K_1(m)\mathbb{B}_\mu^{\frac{n}{2^m\bar{q}(p-1)}\left[\frac{2^{m+1}\bar{q}(p-1)-2h}{2\bar{q}(p-1)-2h}-1\right]}\mathbb{U}_{\bar{q}}^{\frac{1}{2^{m-1}}\left(\frac{2^m\bar{q}(p-1)-h}{2\bar{q}(p-1)-2h}\right)};$$

$$K(1,m)\mathbb{B}_\mu^{\frac{n}{2^m\bar{q}(p-1)}\left[\frac{2^{m+1}\bar{q}(p-1)-2h}{2\bar{q}(p-1)-2h}-1\right]}\mathbb{U}_{\bar{q}}^{\frac{1}{2^{m-1}}\left(\frac{2^m\bar{q}(p-1)-h}{2\bar{q}(p-1)-2h}\right)}\Bigg\}$$

$$\leq \max\left\{K_2(m)\|u(\cdot,t_0)\|_{L^{2^m\bar{q}}}; K_3(m)\mathbb{B}_\mu^{\frac{n}{2^m\bar{q}(p-1)}\left[\frac{2^{m+1}\bar{q}(p-1)-2h}{2\bar{q}(p-1)-2h}-1\right]}\mathbb{U}_{\bar{q}}^{\frac{1}{2^{m-1}}\left(\frac{2^m\bar{q}(p-1)-h}{2\bar{q}(p-1)-2h}\right)}\right\} \tag{4.5.20}$$

Basta agora garantir que $K_3(m)$ é uniformemente limitado em m, isto é, existe uma constante que independe de m, tal que

$$K_3(m) = \max_{1\leq l\leq m} K(l,m) \leq \mathbf{K}(p,n,\bar{q},k).$$

Lema 4.5.3. *Sejam $\bar{q}$ satisfazendo* (4.4.42)*. Então, para $K(l,m)$ dado em* (4.5.5)*, tem-se*

$$K(l,m) \leq \mathbf{K}(p,n,\bar{q},k), \quad \forall 1 \leq l \leq m \ \ e \quad m \geq 2, \tag{4.5.21}$$

isto é, $K(l,m)$ é uniformemente limitado em m.

Demonstração. Sabendo que $\mathcal{K}(2^j\bar{q}) = \left(\mathcal{C}(n)\frac{p+2^j\bar{q}-2}{p}\right)^{\frac{n(p-1)}{2^j\bar{q}(p-1)-2h}}$, temos

$$
\begin{aligned}
K(l,m) &= \prod_{j=l}^{m} \mathcal{K}(2^j\bar{q})^{\frac{2^m\bar{q}(p-1)-h}{2^{j+1}\bar{q}(p-1)-2h}\frac{1}{2^{m-(j+1)}}} \\
&= \prod_{j=l}^{m} \left(\mathcal{C}(n)\frac{p+2^j\bar{q}-2}{p}\right)^{\left(\frac{n(p-1)}{2^j\bar{q}(p-1)-2h}\right)\left(\frac{2^m\bar{q}(p-1)-h}{2^{j+1}\bar{q}(p-1)-2h}\frac{1}{2^{m-(j+1)}}\right)} \\
&\le \underbrace{\prod_{j=1}^{m} \mathcal{C}(n)^{\left(\frac{n(p-1)}{2^j\bar{q}(p-1)-2h}\right)\left(\frac{2^m\bar{q}(p-1)-h}{2^{j+1}\bar{q}(p-1)-2h}\frac{1}{2^{m-(j+1)}}\right)}}_{I} \\
&\times \underbrace{\prod_{j=1}^{m} \left(\frac{p+2^j\bar{q}-2}{p}\right)^{\left(\frac{n(p-1)}{2^j\bar{q}(p-1)-2h}\right)\left(\frac{2^m\bar{q}(p-1)-h}{2^{j+1}\bar{q}(p-1)-2h}\frac{1}{2^{m-(j+1)}}\right)}}_{II}.
\end{aligned}
$$

Antes de analisar I e II vale observar que por (4.4.42), temos $\bar{q}(p-1)-h \geq 0$. E ainda,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{\infty} \frac{2^{j+1}}{(2^j\bar{q}(p-1)-2h)(2^{j+1}\bar{q}(p-1)-2h)} = \\
&\frac{1}{\bar{q}(p-1)} \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{2}{2^j\bar{q}(p-1)-2h} - \frac{2}{2^{j+1}\bar{q}(p-1)-2h}\right) = \\
&\frac{1}{\bar{q}(p-1)} \left(\frac{1}{\bar{q}(p-1)-h}\right) \qquad (4.5.22)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j2^{j+1}}{(2^j\bar{q}(p-1)-2h)(2^{j+1}\bar{q}(p-1)-2h)} = \\
&\frac{1}{\bar{q}(p-1)} \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{2j}{2^j\bar{q}(p-1)-2h} - \frac{2j}{2^{j+1}\bar{q}(p-1)-2h}\right) = \\
&\frac{1}{\bar{q}(p-1)} \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{2j}{2^j\bar{q}(p-1)-2h} - \frac{2(j+1)}{2^{j+1}\bar{q}(p-1)-2h} + \frac{2}{2^{j+1}\bar{q}(p-1)-2h}\right) \leq \\
&\frac{1}{\bar{q}(p-1)} \left(\frac{1}{\bar{q}(p-1)-h}\right) \qquad (4.5.23)
\end{aligned}
$$

já que

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{2j}{2^j\bar{q}(p-1)-2h}-\frac{2(j+1)}{2^{j+1}\bar{q}(p-1)-2h}=0 \quad \text{e}$$

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{2^j\bar{q}(p-1)-h}\leq\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{2^j(\bar{q}(p-1)-h)}, \quad \text{com}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j(\bar{q}(p-1)-h)}=\frac{1}{\bar{q}(p-1)-h}.$$

Se $\mathcal{C}(n)\leq 1$ então $I\leq 1$ para todo $1\leq l\leq m$;
Se $\mathcal{C}(n)>1$, usando (4.5.22), então

$$\begin{aligned} I &= \prod_{j=1}^{m}(\mathcal{C}(n))^{\frac{n(p-1)[2^m\bar{q}(p-1)-h]}{2^m}\left(\frac{2^{j+1}}{[2^j\bar{q}(p-1)-2h][2^{j+1}\bar{q}(p-1)-2h]}\right)} \\ &\leq \prod_{j=1}^{m}(\mathcal{C}(n))^{\frac{n(p-1)[2^m\bar{q}(p-1)]}{2^m}\left(\frac{2^{j+1}}{[2^j\bar{q}(p-1)-2h][2^{j+1}\bar{q}(p-1)-2h]}\right)} \\ &\leq (\mathcal{C}(n))^{n\bar{q}(p-1)^2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{2^{j+1}}{[2^j\bar{q}(p-1)-2h][2^{j+1}\bar{q}(p-1)-2h]}} \\ &= (\mathcal{C}(n))^{\frac{n(p-1)}{\bar{q}(p-1)-h}}. \end{aligned} \tag{4.5.24}$$

Antes de estimar II, note que para todo $p>2$ e $q\geq 2$, vale

$$\frac{p+q-2}{p}<q.$$

Como $2^j\bar{q}\geq 2$ para todo j, temos $\dfrac{p+2^j\bar{q}-2}{p}\leq 2^j\bar{q}$. Assim, usando (4.5.22) e (4.5.23), podemos estimar II da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
II &\le \prod_{j=1}^{m}(2^j\bar{q})^{\left(\frac{n(p-1)}{2^j\bar{q}(p-1)-2h}\right)\left(\frac{2^m\bar{q}(p-1)-h}{2^{j+1}\bar{q}(p-1)-2h}\frac{1}{2^{m-(j+1)}}\right)}\\
&= \prod_{j=1}^{m}(2)^{\left(\frac{n(p-1)[2^m\bar{q}(p-1)-h]}{2^m}\right)\left(\frac{j2^{j+1}}{(2^j\bar{q}(p-1)-2h)(2^{j+1}\bar{q}(p-1)-2h)}\right)}\\
&\times \prod_{j=1}^{m}\bar{q}^{\left(\frac{n(p-1)[2^m\bar{q}(p-1)-h]}{2^m}\right)\left(\frac{2^{j+1}}{(2^j\bar{q}(p-1)-2h)(2^{j+1}\bar{q}(p-1)-2h)}\right)}\\
&\le \prod_{j=1}^{m}(2)^{\left(\frac{n(p-1)[2^m\bar{q}(p-1)]}{2^m}\right)\left(\frac{j2^{j+1}}{(2^j\bar{q}(p-1)-2h)(2^{j+1}\bar{q}(p-1)-2h)}\right)}\\
&\times \prod_{j=1}^{m}\bar{q}^{\left(\frac{n(p-1)[2^m\bar{q}(p-1)]}{2^m}\right)\left(\frac{2^{j+1}}{(2^j\bar{q}(p-1)-2h)(2^{j+1}\bar{q}(p-1)-2h)}\right)}\\
&\le (2)^{n\bar{q}(p-1)^2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{j2^{j+1}}{(2^j\bar{q}(p-1)-2h)(2^{j+1}\bar{q}(p-1)-2h)}}\\
&\times \bar{q}^{n\bar{q}(p-1)^2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{2^{j+1}}{(2^j\bar{q}(p-1)-2h)(2^{j+1}\bar{q}(p-1)-2h)}}\\
&\le (2\bar{q})^{\frac{n(p-1)}{\bar{q}(p-1)-h}} \qquad (4.5.25)
\end{aligned}
$$

Portanto, para todo $1 \le l \le m$,

$$K(l,m) \le (2\bar{q}\mathcal{C}(n))^{\frac{n(p-1)}{\bar{q}(p-1)-h}} =: \mathbf{K}(\bar{q},n,k,p),$$

concluindo a prova.

□

Usando o que acabamos de provar, podemos escrever (4.5.20) da seguinte forma

$$
\mathbb{U}_{2^m\bar{q}}(t_0,t) \le
\mathbf{K}(\bar{q},n,p,k)\max\left\{\|u(\cdot,t_0)\|_{L^{2^m\bar{q}}};\mathbb{B}_\mu(t_0;t)^{\frac{n}{2^m\bar{q}(p-1)}\left[\frac{2^{m+1}\bar{q}(p-1)-2h}{2\bar{q}(p-1)-2h}-1\right]}\mathbb{U}_{\bar{q}}(t_0;t)^{\frac{1}{2^{m-1}}\left(\frac{2^m\bar{q}(p-1)-h}{2\bar{q}(p-1)-2h}\right)}\right\} \qquad (4.5.26)
$$

para todo $\bar{q}$ que satisfaz (4.4.42) e $0 \le t_0 < t < T_*$. Fazendo $m \to \infty$, obtemos o teorema principal:

Teorema 4.5.4 (Teorema Principal). *Sejam $k \geq 0$, $p_0 \geq 1$ e $u(\cdot,t)$ solução do problema* (4.1.1). *Para cada $\bar{q}$ que satisfaz a condição* (4.4.42), *tem-se*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \mathbf{K}(\bar{q},n,p,k) \cdot \max\{\|u(\cdot,t_0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}; \mathbb{B}_\mu(t_0;t)^{\frac{n}{\bar{q}(p-1)-n(k-p+2)}} \mathbb{U}_{\bar{q}}(t_0;t)^{\frac{\bar{q}(p-1)}{\bar{q}(p-1)-n(k-p+2)}}\}$$

para todo $0 \leq t_0 < t < T_*$, e $\mathbb{B}_\mu(t_0;t)$ e $\mathbb{U}_{\bar{q}}(t_0;t)$ definidas em (4.4.21),(4.4.22) *acima.*

Para o caso particular onde $p_0 = 1$ e $\bar{q} = 1$ satisfazendo a condição (4.4.42), isto é

$$k < (p-2) + \frac{p-1}{n},$$

segue o seguinte corolário:

Corolário 4.5.5. *Sejam $0 \leq k < (p-2) + \frac{p-1}{n}$, $p_0 = 1$ e $u(\cdot,t) \in L^\infty_{loc}([0,T_*), L^\infty(\mathbb{R}^n)) \cap C([0,T_*), L^1(\mathbb{R}^n))$ solução do problema* (4.1.1), *tem-se*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \mathbf{K}(n,p,k) \cdot \max\{\|u(\cdot,t_0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}; \mathbb{B}_\mu(t_0;t)^{\frac{n}{(p-1)-n(k-p+2)}} \mathbb{U}_1(t_0;t)^{\frac{(p-1)}{(p-1)-n(k-p+2)}}\}$$

para todo $0 \leq t_0 < t < T_*$, e $\mathbb{B}_\mu(t_0;t)$ e $\mathbb{U}_1(t_0;t)$ definidas em (4.4.21),(4.4.22) *acima.*

No capítulo 1, provamos que para $p_0 = 1$, a solução $u(\cdot,t) \in L^\infty_{loc}([0,T_*), L^\infty(\mathbb{R}^n)) \cap C^0([0,T_*), L^1(\mathbb{R}^n))$ do problema (4.1.1), possui a seguinte propriedade:

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall\, 0 \leq t < T_*.$$

Portanto, no corolário acima com $t_0 = 0$, temos $\mathbb{U}_1(0;t) \leq \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ para todo $t \in [0,T_*)$, e sabe-se que $\mathbb{B}_\mu(0;T) < \infty$ para todo $0 < T < T_*$ então

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \max\{\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}; \mathbb{B}_\mu(0;t)^{\frac{n}{(p-1)-n(k-p+2)}} \mathbb{U}_1(0;t)^{\frac{(p-1)}{(p-1)-n(k-p+2)}}\} < \infty$$

para todo $0 \leq t < T^*$. Concluímos assim, que $T_* = \infty$, pois a solução pode ser estendida a intervalos de existência mais amplos enquanto esta permanecer limitada.

4.6 Condições de existência global

Nesta seção, vamos aplicar a análise acima de modo a obter condições garantindo existência global (isto é, $T_* = \infty$) das soluções $u(\cdot,t) \in L^\infty_{loc}([0,T_*), L^\infty(\mathbb{R}^n)) \cap C([0,T_*), L^1(\mathbb{R}^n))$ do problema (4.1.1), com $p_0 = 1$.
Observamos que $\mathbb{B}_\mu(0;\infty) \leq \infty$, mas para $0 \leq T < \infty$, $\mathbb{B}_\mu(0;T) < \infty$.

Teorema 4.6.1. *Na notação acima, tem-se a respeito das soluções do problema:*

(i) *se* $0 \leq k < (p-2) + \dfrac{p-1}{n}$, *então* $u(\cdot,t)$ *está definida para todo* $t > 0$ *(para todo dado* u_0*);*

(ii) *se* $k = (p-2) + \dfrac{p-1}{n}$, *as soluções são globais sempre que* $\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \{\tilde{C}\mathbb{B}_\mu(0;\infty)\}^{-n}$ *com* $\mathbb{B}_\mu(0;\infty) < \infty$*;*

(iii) *se* $k > (p-2) + \dfrac{p-1}{n}$, *as soluções são globais sempre que o dado inicial satisfizer*

$$\|u_0\|^{p-1}_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|u_0\|^{n(k-p+2)-(p-1)}_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \{\tilde{C}^{(p-1)}\mathbb{B}_\mu(0,\infty)\}^{-n} \tag{4.6.1}$$

com $\mathbb{B}_\mu(0;\infty) < \infty$.

Demonstração. O caso **(i)** é consequência imediata da propriedade do decaimento da solução em L^1, isto é, $\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ e do **Teorema principal** (tomando $\bar{q} = 1$). Nos casos **(ii)** e **(iii)**, podemos proceder do seguinte modo. Da desigualdade (4.4.18) reescrita em função de u, obtemos

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\|u(\cdot,t)\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} + \mu(t)q(q-1)\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-2}|\nabla u|^p dx \\ &\leq \frac{q(q-1)B(t)}{\alpha} C^{\frac{\tilde{\beta}}{p'}} \|u\|_{\frac{q}{2}}^{\frac{q}{2\beta_0}\frac{(1-a)\tilde{\beta}}{p'}} \left(\alpha \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-2}|\nabla u|^p\right)^{\frac{1}{p}\left(\frac{a\tilde{\beta}}{p'}+1\right)}, \end{aligned} \tag{4.6.2}$$

onde

$$\alpha = \frac{p+q-2}{p},\ \beta_0 = \frac{pq}{2(p+q-2)},\ \tilde{\beta} = \left(\frac{(q-2)(p-1)+p(k+1)}{q+p-2}\right)\left(\frac{p}{p-1}\right)$$

e a satisfaz

$$\frac{1}{\tilde{\beta}} = a\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{n}\right) + (1-a)\frac{1}{\beta_0}. \tag{4.6.3}$$

Além disso, vale observar que reescalonamos a constante C, isto é, $\tilde{C} = C^{\frac{1}{a}}$ tal que $C^{\frac{\tilde{\beta}}{p'}} = \tilde{C}^{\frac{a\tilde{\beta}}{p'}}$. Como temos informação sobre a norma L^1, é natural escolhermos $q = 2\left(\frac{n(k-p+2)}{p-1}\right) \geq 2$, que satisfaz (4.6.2). E com este q escolhido, (4.6.2) fica

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\|u(\cdot,t)\|^{\frac{2n(k-p+2)}{p-1}}_{L^{\frac{2n(k-p+2)}{p-1}}(\mathbb{R}^n)} \\
&+ \mu(t)\frac{2n(k-p+2)}{p-1}\left(\frac{2n(k-p+2)}{p-1} - 1\right)\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{\frac{2n(k-p+2)}{p-1}-2}|\nabla u|^p dx \\
&\leq \tilde{C}^{(p-1)}\mathbb{B}_\mu(0;\infty)\|u\|^{k-p+2}_{L^{\frac{n(k-p+2)}{p-1}}(\mathbb{R}^n)} \times \\
&\left\{\mu(t)\frac{2n(k-p+2)}{p-1}\left(\frac{2n(k-p+2)}{p-1} - 1\right)\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{\frac{2n(k-p+2)}{p-1}-2}|\nabla u|^p dx\right\}.
\end{aligned}
\tag{4.6.4}
$$

Note que a norma $\|u(\cdot,t)\|_{L^{\frac{2n(k-p+2)}{p-1}}(\mathbb{R}^n)}$ decresce para todo $t \in [0, T_*)$ sempre que $\tilde{C}^{(p-1)}\mathbb{B}_\mu(0;\infty)\|u\|^{k-p+2}_{L^{\frac{n(k-p+2)}{p-1}}(\mathbb{R}^n)} \leq 1$ em $[0, T_*)$.

Analisando o caso **(ii)**, onde $k = (p-2) + \frac{p-1}{n}$, ou seja, $\frac{n(k-p+2)}{p-1} = 1$. A norma $\|u(\cdot,t)\|_{L^2}$ decresce no intervalo que $\tilde{C}^{(p-1)}\mathbb{B}_\mu(0,\infty)\|u\|^{\frac{p-1}{n}}_{L^1} \leq 1$. Pela propriedade do decaimento da norma L^1, temos

$$
\tilde{C}^{(p-1)}\mathbb{B}_\mu(0;\infty)\|u\|^{\frac{p-1}{n}}_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \tilde{C}^{(p-1)}\mathbb{B}_\mu(0;\infty)\|u_0\|^{\frac{p-1}{n}}_{L^1(\mathbb{R}^n)}. \tag{4.6.5}
$$

E usando a hipótese $\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \{\tilde{C}\mathbb{B}_\mu(0,\infty)\}^{-n}$, concluímos que

$$
\tilde{C}^{(p-1)}\mathbb{B}_\mu(0;\infty)\|u\|^{\frac{p-1}{n}}_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq 1. \tag{4.6.6}
$$

Garantindo assim, que a norma $\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ é monotonicamente decrescente em $[0, T_*)$. Pelo teorema principal, a norma $\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ é controlada pela norma $\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$, e assim sendo, $\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ tem que permanecer limitada em qualquer intervalo limitado. Logo não podemos ter $T_* < \infty$, concluindo **(ii)**.

Finalmente, considerando o caso **(iii)**.

Como $1 < \dfrac{n(k-p+2)}{p-1} < \dfrac{2n(k-p+2)}{p-1}$, usando interpolação, temos

$$
\begin{aligned}
&\tilde{C}^{(p-1)}\mathbb{B}_\mu(0;\infty)\|u\|^{k-p+2}_{L^{\frac{n(k-p+2)}{p-1}}(\mathbb{R}^n)}\\
&\qquad\le \tilde{C}^{(p-1)}\mathbb{B}_\mu(0;\infty)\|u\|^{\frac{(p-1)(k-p+2)}{2n(k-p+2)-(p-1)}}_{L^1(\mathbb{R}^n)}\|u\|^{(k-p+2)\frac{2n(k-p+2)-2(p-1)}{2n(k-p+2)-(p-1)}}_{L^{\frac{2n(k-p+2)}{p-1}}(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}
\tag{4.6.7}
$$

E novamente por interpolação, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\tilde{C}^{(p-1)}\mathbb{B}_\mu(0;\infty)\|u\|^{\frac{(p-1)(k-p+2)}{2n(k-p+2)-(p-1)}}_{L^1(\mathbb{R}^n)}\|u\|^{(k-p+2)\frac{2n(k-p+2)-2(p-1)}{2n(k-p+2)-(p-1)}}_{L^{\frac{2n(k-p+2)}{p-1}}(\mathbb{R}^n)}\\
&\qquad< \tilde{C}^{(p-1)}\mathbb{B}_\mu(0;\infty)\|u\|^{\frac{p-1}{n}}_{L^1(\mathbb{R}^n)}\|u\|^{\frac{n(k-p+2)-(p-1)}{n}}_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}
\tag{4.6.8}
$$

para todo $t\in[0,T_*)$.

Por (4.6.8) e pela hipótese (4.6.1), concluímos que

$$
\tilde{C}^{(p-1)}\mathbb{B}_\mu(0;\infty)\|u\|^{\frac{(p-1)(k-p+2)}{2n(k-p+2)-(p-1)}}_{L^1(\mathbb{R}^n)}\|u\|^{(k-p+2)\frac{2n(k-p+2)-2(p-1)}{2n(k-p+2)-(p-1)}}_{L^{\frac{2n(k-p+2)}{p-1}}(\mathbb{R}^n)}<1 \tag{4.6.9}
$$

para $t\in[0,T_*)$ suficientemente próximo de zero.

Afirmamos que (4.6.9) seja verdadeira para todo $t\in[0,T_*)$. De fato, se não fosse, existiria $T_1\in(0,T_*)$ tal que se teria

$$
\tilde{C}^{(p-1)}\mathbb{B}_\mu(0;\infty)\|u\|^{\frac{(p-1)(k-p+2)}{2n(k-p+2)-(p-1)}}_{L^1(\mathbb{R}^n)}\|u\|^{(k-p+2)\frac{2n(k-p+2)-2(p-1)}{2n(k-p+2)-(p-1)}}_{L^{\frac{2n(k-p+2)}{p-1}}(\mathbb{R}^n)}<1, \tag{4.6.10}
$$

para todo $t\in(0,T_1)$, enquanto que

$$
\tilde{C}^{(p-1)}\mathbb{B}_\mu(0;\infty)\|u(\cdot,T_1)\|^{\frac{(p-1)(k-p+2)}{2n(k-p+2)-(p-1)}}_{L^1(\mathbb{R}^n)}\|u(\cdot,T_1)\|^{(k-p+2)\frac{2n(k-p+2)-2(p-1)}{2n(k-p+2)-(p-1)}}_{L^{\frac{2n(k-p+2)}{p-1}}(\mathbb{R}^n)}=1.
$$

Assim, por (4.6.7), teríamos $\tilde{C}^{(p-1)}\mathbb{B}_\mu(0,\infty)\|u\|^{k-p+2}_{L^{\frac{n(k-p+2)}{p-1}}(\mathbb{R}^n)}\le 1$ para todo $t\in[0,T_1]$. De modo que, por (4.6.4), provaríamos que $\|u(\cdot,t)\|_{L^{\frac{2n(k-p+2)}{p-1}}(\mathbb{R}^n)}$ não cresce neste intervalo. Desta forma, teríamos

$$
\begin{aligned}
1&=\tilde{C}^{(p-1)}\mathbb{B}_\mu(0,\infty)\|u(\cdot,T_1)\|^{\frac{(p-1)(k-p+2)}{2n(k-p+2)-(p-1)}}_{L^1(\mathbb{R}^n)}\|u(\cdot,T_1)\|^{(k-p+2)\frac{2n(k-p+2)-2(p-1)}{2n(k-p+2)-(p-1)}}_{L^{\frac{2n(k-p+2)}{p-1}}(\mathbb{R}^n)}\\
&\le \tilde{C}^{(p-1)}\mathbb{B}_\mu(0,\infty)\|u_0\|^{\frac{(p-1)(k-p+2)}{2n(k-p+2)-(p-1)}}_{L^1(\mathbb{R}^n)}\|u_0\|^{(k-p+2)\frac{2n(k-p+2)-2(p-1)}{2n(k-p+2)-(p-1)}}_{L^{\frac{2n(k-p+2)}{p-1}}(\mathbb{R}^n)}<1,
\end{aligned}
\tag{4.6.11}
$$

já que a norma L^1 também decresce, chegando assim numa contradição. Concluindo que (4.6.9) é valido para todo $t \in [0, T_*)$.

Sendo (4.6.9) verdadeira para todo $0 \leq t < T_*$, mostrando que $\|u(\cdot,t)\|_{L^{\frac{2n(k-p+2)}{p-1}}(\mathbb{R}^n)}$ é decrescente em $[0, T_*)$.

Portanto pelo teorema principal, aplicado para $\bar{q} = \frac{2n(k-p+2)}{p-1}$ obtemos que T_* não pode ser finito.

$\square$

4.7 Apêndice

Prova de desigualdades:

Lema 4.7.1. *Sabendo que a satisfaz* $\frac{1}{\tilde{\beta}} = a\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{n}\right) + (1-a)\frac{1}{\beta_0}$, *onde* $\tilde{\beta} = \frac{p}{p-1}\frac{(p-1)(q-2)+p(k+1)}{p+q-2}$ *e* $\beta_0 = \frac{pq}{2(p+q-2)}$, *então vale*

$$\frac{a\tilde{\beta}}{p} < 1 \Leftrightarrow \frac{q}{2} > \frac{n(k-p+2)}{p-1}$$

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tilde{\beta}} &= a\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{n}\right) + (1-a)\frac{1}{\beta_0} \\ \Leftrightarrow 1 &= a\tilde{\beta}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{n}\right) + (1-a)\frac{\tilde{\beta}}{\beta_0} \\ \Leftrightarrow 1 - \frac{\tilde{\beta}}{\beta_0} &= a\tilde{\beta}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{n} - \frac{1}{\beta_0}\right) \\ \Leftrightarrow \frac{\tilde{\beta}}{\beta_0} - 1 &= a\tilde{\beta}\left(-\frac{1}{p} + \frac{1}{n} + \frac{1}{\beta_0}\right) > 0 \end{aligned} \tag{4.7.1}$$

Portanto, usando (4.7.1)

$$
\begin{aligned}
a\tilde{\beta} < p \Leftrightarrow \frac{\tilde{\beta}}{\beta_0} - 1 &< p\left(-\frac{1}{p} + \frac{1}{n} + \frac{1}{\beta_0}\right) \\
\Leftrightarrow \frac{\tilde{\beta}}{\beta_0} - 1 &< -1 + \frac{p}{n} + \frac{p}{\beta_0} \\
\Leftrightarrow \frac{\tilde{\beta}}{\beta_0} &< \frac{p}{n} + \frac{p}{\beta_0} \\
\Leftrightarrow \frac{\tilde{\beta} - p}{\beta_0} &< \frac{p}{n}
\end{aligned}
\tag{4.7.2}
$$

Substituindo $\tilde{\beta}$, β_0, obtemos $\dfrac{\tilde{\beta} - p}{\beta_0} = \dfrac{2p}{q}\left(\dfrac{k - p + 2}{p - 1}\right)$. Voltando a (4.7.2), temos

$$
\begin{aligned}
a\tilde{\beta} < p &\Leftrightarrow \frac{\tilde{\beta} - p}{\beta_0} < \frac{p}{n} \\
&\Leftrightarrow \frac{2p}{q}\left(\frac{k - p + 2}{p - 1}\right) < \frac{p}{n} \\
&\Leftrightarrow n\left(\frac{k - p + 2}{p - 1}\right) < \frac{q}{2}
\end{aligned}
\tag{4.7.3}
$$

$\square$

Bibliografia

[1] Barrionuevo, J. A.; Oliveira, L. S.; Zingano, P.R. - *General asymptotic supnorm estimates for solutions of one-dimensional advection-diffusion equations in heterogeneous media*, Intern. J. Partial Diff. Equations (2014), 1-8.

[2] Braz e Silva, P.; Melo, W. G.; Zingano, P. R. - *An asymptotic supnorm estimate for solutions of 1-D systems of convection-diffusion equations*, J. Diff. Eqs. 258 (2015), 2806-2822.

[3] Braz e Silva, P.; Schutz, L.; Zingano, P.R.- On some energy inequalities and supnorm estimates for advection-diffusion equations in $\mathbb{R}^n$, Nonlinear Anal. T.M.A, vol. 93 (2013), 90-96.

[4] Chagas,J.Q.; Diehl, N.M.L. ; and Guidolin, P.L.- Some properties of Steklov averages (in Portuguese), unpublished note, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brazil, 2015.

[5] Cipriani,F.; Grillo, G. - *Uniform bounds for solutions to quasilinear parabolic equation*, J.Diff.Eqs., 177 (2001), 209-234.

[6] E. DiBenedetto, Degenerate Parabolic Equations, Springer, New York, 1993.

[7] DiBenedetto, E. - *Partial Differential Equations*, Birkhauser, (2000).

[8] Diehl, N. M. L. - *Some results for unsigned porous medium equations with advection* (Portuguese), Tese, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil, (2015).

[9] Escobedo, M.; Zuazua, E. - *Large time behavior for convection-diffusion equations in* $\mathbb{R}^n$, J. Funct. Anal., 100 (1991).

[10] Escobedo, M; Vazquez, J. L.; Zuazua, E. - *Asymptotic behavior and source-type solutions for a diffusion-convection equation.* Arch. Rat. Mech. Anal., 124 (1993), 43-65.

[11] Evans, L. C. - *Partial Differential Equations*. Graduate Studies in Mathematics, vol. 19, American Mathematical Society, (2010).

[12] Fabris, L. - *Sobre a existência global e limitação uniforme de soluções da equação dos meios porosos com termos advectivos arbitrários*, Tese, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil, (2013), [disponível no endereço http://hdl.handle.net/10183/88277].

[13] Ladyzhenskaya, O. A.; Solonnikov, V. A.; Uralceva, N. N. - *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*, American Mathematical Society, Providence, 1968.

[14] Melo, W.G. -Estimativas a priori para sistemas de equações de advecção-difusão, Tese de Doutorado, UFPE, Recife, PE, Fevereiro/2011, [disponível no endereço http://hdl.handle.net/123456789/7355].

[15] Nirenberg, L.-On elliptic partial diferential equations, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3ª série, tome 13, nº 2 (1959), 115-162.

[16] Oliveira, L. S. - Dois resultados em análise clássica, Tese de Doutorado, PPGMap, Ufrgs, Porto Alegre, Janeiro/2013,[disponível no endereço http://hdl.handle.net/10183/70212].

[17] Porzio, M. M. - *On decay estimates*, J. Evol. Equations, 9 (2009), 561-591.

[18] Serre, D. - *Systems of Conservation Laws*, vol. 1, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[19] Schonbek, M. E. - *Uniform decay rates for parabolic conservations laws*, Nonlinear Anal. T.M.A, 10 (1986), 943-956.

[20] Urbano, J. M. -Regularity for partial differential equations: from De Giorgi-Nash-Moser theory to intrinsic scaling, CIM Bull., **12** (2002), $8-14$.

[21] Urbano, J. M.- The Method of Intrinsic Scaling: a systematic approach to regularity for degenerate and singular PDEs, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1930, Springer, New York, 2008.

[22] Vázquez, J. L. - *The porous medium equation: mathematical theory*, Clarendon Press, Oxford, (2007).

[23] Wu, Z.; Zhao, J.; Yin, J.; Li, H. - *Nonlinear Diffusion Equations*. World Scientific, Singapore, (2001).