

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA

Estudo da Matéria Escura Mimética

Guilherme Lorenzatto Volkmer

Trabalho de Conclusão de Curso realizado sob a
orientação do Professor Dr. Dimiter Hadjimichef.

Porto Alegre
Novembro de 2015

Agradecimentos

Agradeço ao Prof. Dr. Dimiter Hadjimichef, meu orientador, por ter aceitado realizar esse trabalho comigo, me guiando de maneira exemplar para que a cada passo eu explorasse ideias mais profundas e interessantes, tendo contribuído não somente aos meus conhecimentos em Relatividade Geral, mas que também me ensinou valiosas lições no que diz respeito a pesquisa em Física Teórica.

Agradeço à minha namorada, Amanda Kronhardt Fritsch, que esteve ao meu lado desde o início do curso e sem a qual provavelmente não teria chegado a esse ponto.

Agradeço à minha família pelo apoio incondicional e por compreender minhas ausências.

Para finalizar esta seção agradeço a todos meus amigos, em especial Erison dos Santos Rocha, um irmão que encontrei no Instituto de Física.

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo o estudo de um novo modelo gravitacional, a teoria mimética, capaz de *imitar* o efeito da matéria escura. Nessa proposta a Relatividade Geral é modificada definindo-se uma métrica física escrita em termos de uma métrica auxiliar e um campo escalar, ou seja, a ideia é promover a Relatividade Geral a uma teoria tensorial-escalar.

Revisamos as equações de campo de Einstein através do método variacional e em seguida apresentamos o modelo mimético. As equações de movimento obtidas são mais gerais que as da Relatividade Geral e obtemos uma contribuição extra ao tensor energia-momentum. Mostramos que esse termo representa uma poeira residual, ou *matéria escura mimética*, que se comporta no que diz respeito a interação gravitacional da mesma maneira que a matéria escura usual.

A proposta é então reformulada acoplando-se um potencial e diferentes soluções cosmológicas foram desenvolvidas.

Abstract

The present work aims the study of a new gravitational model, the mimetic theory, able to *mimic* the effect of dark matter. In this proposal the General Relativity is modified by writing a physical metric in terms of an auxiliary metric and a scalar field, in other words, the idea is to promote General Relativity to a scalar-tensor theory.

We review the Einstein's field equations through the variational method and then present the mimetic model. The equations of motion obtained are more general than those of General Relativity and we get an extra contribution to the energy-momentum tensor. We show that this term represents a residual dust, or *mimetic dark matter*, which behaves in the same way that the usual dark matter with respect to the gravitational interaction.

The proposal is then reformulated by coupling a potential and different cosmological solutions were developed.

Índice

Introdução	p. 3
1 Preliminares	p. 6
1.1 Notação e convenções	p. 6
1.2 Equações de Campo na Relatividade Geral	p. 6
1.3 Teorias Escalares-Tensoriais	p. 10
2 Gravidade Mimética	p. 12
2.1 Derivação das Equações de Movimento	p. 12
2.2 Uma simples aplicação	p. 16
2.3 Formulação Equivalente	p. 17
2.4 Acoplamento de Potencial	p. 18
3 Soluções Cosmológicas	p. 23
3.1 Uma primeira análise	p. 23
3.2 Matéria Mimética como Quintessência	p. 25
3.3 Matéria Mimética como um Inflaton	p. 26
3.4 Matéria Mimética em um “bouncing universe”	p. 26
3.5 Potencial Exponencial	p. 28
3.5.1 Comportamento para $t \rightarrow +\infty$	p. 29

3.5.2	Comportamento para $t \rightarrow 0$	p. 29
4	Candidatos a Campo Escalar	p. 31
4.1	Espaços Internos Compactificados	p. 31
4.2	Radions	p. 32
5	Considerações Finais	p. 33
	Apêndice A – Dedução de algumas relações	p. 34
A.1	Primeiro Resultado	p. 34
A.2	Segundo Resultado	p. 35
A.3	Terceiro Resultado	p. 35
	Apêndice B – Transformações Conformes	p. 37
	Referências Bibliográficas	p. 38

Introdução

O universo não é só mais estranho do que imaginamos, mas mais estranho do que podemos imaginar.

— Werner Heisenberg, *Across the Frontiers*.

O problema da matéria escura remonta a 1932 quando J. H. Oort constatou que o movimento das estrelas na Via Láctea insinuava que a Galáxia seria muito mais massiva do que qualquer outro já havia predito [1]. Estimando, via efeito Doppler, a velocidade de estrelas que se deslocam próximas ao plano Galáctico, ele notou que elas deveriam estar se movendo rápido o suficiente para superar a atração gravitacional da Galáxia. Oort então propôs que a Via Láctea deveria conter mais matéria para manter essas estrelas em suas órbitas observadas. Foram apontadas como explicações alternativas que talvez 85% da matéria luminosa da Galáxia seria obscurecida por matéria não luminosa ou até mesmo que os cálculos das velocidades das estrelas em questão estariam errados. No ano seguinte, o astrônomo suíço F. Zwicky se deparou com o mesmo problema de matéria faltante, todavia em maiores proporções. Ao estudar galáxias do aglomerado de Coma ele obteve velocidades de dispersão extremamente altas levando-o a crer que a matéria visível contribui apenas com uma pequena fração da massa total do aglomerado [1, 2].

Décadas após, Vera Rubin e colaboradores realizaram uma análise da curva de rotação de 60 galáxias isoladas. Era assumido que a órbita das estrelas nas galáxias se comportava aproximadamente como as órbitas planetárias ao redor do Sol. Se uma estrela possui uma distância orbital média r do centro de sua galáxia, pode se estimar da Gravitação Newtoniana que sua velocidade orbital será $v(r) \approx \sqrt{\frac{M(r)}{r}}$, onde $v(r)$ é a velocidade orbital de um objeto a uma distância r e $M(r)$ é a massa total contida no interior dessa distância radial. Essa distribuição $v(r) \propto \frac{1}{\sqrt{r}}$ é referida como comportamento Kepleriano. No entanto, o que Rubin observou estava em desacordo com essas previsões, pois o comportamento na realidade era uma curva “plana”, ou seja, as velocidades continuavam a crescer com

a distância até atingir um limite [1]. Astrônomos têm observado ainda, através de lentes gravitacionais, desvios na trajetória da luz de tal magnitude que não podem ser explicados pela matéria luminosa observada, indicando uma enorme presença de matéria escura [3]. Talvez uma das mais contundentes evidências da matéria escura advém de estudos do aglomerado 1E0657-56. Esse aglomerado é o resultado da extremamente energética colisão de outros dois aglomerados, onde o menor aglomerado atravessou o maior. Os estudos apontam que a matéria bariônica de cada aglomerado foi deslocada da sua respectiva matéria escura. Os halos de matéria escura atravessaram-se sem perturbações ou distorções [3].

Inúmeras propostas foram feitas para atacar o problema da matéria escura [3]. A proposta menos radical é a dos MACHOs (objetos compactos massivos de halo) que tenta solucionar o problema valendo-se de matéria bariônica, afirmando que a matéria escura poderia ser, por exemplo, anãs marrons. Contudo estudos da nucleossíntese do Big Bang indicam que a densidade de bárions é incompatível com o necessário para solucionar inteiramente o problema da matéria escura [4]. Os candidatos não-bariônicos consistem basicamente de partículas ainda não descobertas. Dentre essas partículas podemos citar os *áxions* que foram postulados na década de 70 como possível solução para o fato de a QCD não parecer violar a simetria CP. Outro exemplo são as amplamente estudadas WIMPs (partículas massivas fracamente interagentes) que consiste num grupo de centenas de candidatas, onde talvez o favorito seja o *neutralino* predito pela Supersimetria [3].

Outros suspeitam que a solução reside em modificar a Relatividade Geral (RG). A RG somente consegue lidar com dados galácticos, extragalácticos e cosmológicos combinados se for assumida uma constante cosmológica não nula e algo em torno de seis vezes mais matéria escura (até o momento só detectada gravitacionalmente) do que matéria visível [5]. A mais simples modificação possível consiste na promoção da RG a uma teoria tensorial-escalar. Nesse âmbito um interessante modelo foi proposto em 2013 tendo como ideia central que não é necessário introduzir nenhum tipo de matéria para explicar o fenômeno atribuído a matéria escura, o que precisa ser feito é extrair campos escondidos da métrica [6]. Propondo uma métrica física dependente de uma métrica auxiliar e de um campo escalar, o princípio variacional notavelmente nos forneceu um modo longitudinal extra do campo gravitacional que imita o comportamento da matéria escura. Através de mínimas modificações a proposta mimética nos permite ainda abordar o problema da expansão acelerada do universo atual, conhecido como *energia escura*. Nessa reformulação

a matéria e a energia escura aparecem como constantes de integração.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Notação e convenções

Adotaremos um sistema de unidades onde $8\pi G = c = 1$, implicando em $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4} = 1$ e uma métrica com assinatura -2 , ou seja, $(+,-,-,-)$.

No decorrer deste trabalho índices gregos vão de 0 a 3 (exceto quando explicitamente dito o contrário) correspondendo as coordenadas espaço-temporais e índices latinos vão de 1 a 3 correspondendo as três coordenadas espaciais. Também será utilizada a convenção de soma de Einstein onde fica implícita a soma quando houver índices repetidos, sendo um covariante e outro contravariante, dessa forma:

$$A^\mu A_\mu = \sum_{\mu=0}^3 A^\mu A_\mu.$$

1.2 Equações de Campo na Relatividade Geral

Como será visto no próximo capítulo o cálculo variacional é a ferramenta utilizada para formalizar o modelo mimético e adotaremos o mesmo procedimento nessa seção, contudo não haverá enfoque no rigor matemático. Formulações lagrangianas da RG podem ser encontradas em [7, 8]. Historicamente David Hilbert foi o primeiro a derivar as equações de campo da RG valendo-se do princípio de mínima ação e tradicionalmente chamamos a ação da RG de ação de Einstein-Hilbert.

Precisamos propor uma lagrangiana L_G para descrever o campo gravitacional que é um escalar. Como pode ser consultado em (A.3) a expressão $\sqrt{-g}d^4x$ (onde $g = \det(g_{\mu\nu})$) representa um elemento de volume invariante. A integral de ação para o campo gravitacional deveria ter o seguinte formato:

$$\alpha \int \sqrt{-g} L_G d^4x \quad (1.1)$$

onde a integração é efetuada sobre todas as coordenadas espaço-temporais entre dois pontos e α representa uma constante real qualquer.

Espera-se que a equação de movimento da RG não possua derivadas com ordens superiores a segunda. Derivadas de ordens superiores levam a complicações matemáticas e são difíceis de tratar, sem mencionar que surgem problemas de instabilidade relacionados com hamiltonianos que não possuem limite inferior [5]. Usualmente as equações de movimento obtidas a partir de uma lagrangiana possuem uma ordem superior em relação a própria lagrangiana, logo seria interessante L_G fosse composta de expressões contendo o tensor métrica $g_{\mu\nu}$ e os símbolos de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$.

O escalar de Ricci R ($R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$) pode não parecer adequado para os nossos propósitos, pois ele inclui derivadas de primeira e segunda ordem do tensor métrica, além do próprio tensor. Contudo os termos de segunda ordem do tensor métrica ocorrem linearmente em R e devido a essa linearidade, as derivadas de segunda ordem não contribuem para termos com derivadas de terceira ordem do tensor métrica nas equações de campo. Portanto, podemos usar R como a lagrangiana do campo gravitacional e (1.1) torna-se:

$$S_G = \alpha \int \sqrt{-g} R d^4x. \quad (1.2)$$

Podemos ainda acrescentar a essa integral um outro termo S_F responsável por todos os outros campos presentes no sistema físico além do gravitacional. Sob essas modificações considere a integral de ação com a seguinte forma:

$$S = S_G + S_F = \int \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} L_G + L_F \right) d^4x. \quad (1.3)$$

Em (1.3) $L_G = R$ é a lagrangiana do campo gravitacional e L_F é a lagrangiana para todos os outros campos. Do princípio de mínima ação impomos ainda:

$$\delta S = 0. \quad (1.4)$$

Variando o primeiro termo em (1.3) ignorando momentaneamente a constante:

$$\begin{aligned}\delta \int \sqrt{-g} R d^4x &= \delta \int \sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} d^4x \\ &= \int \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} d^4x + \int R_{\mu\nu} \delta(\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) d^4x.\end{aligned}\quad (1.5)$$

Para encontrar a variação do tensor de Ricci note que em um sistema de coordenadas geodésicas temos que:

$$\begin{aligned}\delta R_{\mu\nu} &= \delta \left(\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\rho}^{\nu}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} \Gamma_{\rho\sigma}^{\rho} - \Gamma_{\mu\rho}^{\sigma} \Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} \right) \\ &= \delta \left(\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\rho}^{\nu}}{\partial x^{\nu}} \right) \\ &= \frac{\partial \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial \delta \Gamma_{\mu\rho}^{\nu}}{\partial x^{\nu}} \\ &= \nabla_{\rho} (\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}) - \nabla_{\nu} (\delta \Gamma_{\mu\rho}^{\nu}).\end{aligned}\quad (1.6)$$

Como a relação obtida é uma equação tensorial o resultado obtido é válido em todos os sistemas de coordenadas e em todos os pontos espaço-temporais sem estarmos restringidos a sistemas de coordenadas geodésicas. Com esse resultado o integrando da primeira integral em (1.5) pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned}\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} &= \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \left\{ \nabla_{\rho} (\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}) - \nabla_{\nu} (\delta \Gamma_{\mu\rho}^{\nu}) \right\} \\ &= \sqrt{-g} \left\{ \nabla_{\rho} (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}) - \nabla_{\nu} (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\rho}^{\nu}) \right\} \\ &= \sqrt{-g} \left\{ \nabla_{\alpha} (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}) - \nabla_{\alpha} (g^{\mu\alpha} \delta \Gamma_{\mu\rho}^{\rho}) \right\} \\ &= \sqrt{-g} \nabla_{\alpha} Q^{\alpha}\end{aligned}\quad (1.7)$$

onde:

$$Q^{\alpha} = g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} - g^{\mu\alpha} \delta \Gamma_{\mu\rho}^{\rho}.\quad (1.8)$$

Pode-se escrever a divergência covariante de um vetor como:

$$\nabla_{\mu} Q^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} (\sqrt{-g} Q^{\mu})\quad (1.9)$$

logo a primeira integral em (1.5) assume a seguinte forma:

$$\int \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} d^4x = \int \frac{\partial (\sqrt{-g} Q^{\alpha})}{\partial x^{\alpha}} d^4x.\quad (1.10)$$

Do Teorema de Gauss temos que a integral acima pode ser igualada a uma integral de superfície em $\sqrt{-g} Q^{\alpha}$, que se anula em consequência das variações dos símbolos de

Christoffel nos limites de integração. Concluimos então que a primeira integral em (1.5) é igual a zero.

Para a segunda integral em (1.5) temos:

$$\begin{aligned} \int R_{\mu\nu} \delta(\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) d^4x &= \int \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d^4x + \int R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \delta \sqrt{-g} d^4x \\ &= \int \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d^4x + \int R \delta \sqrt{-g} d^4x \\ &= \int \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} d^4x \end{aligned} \quad (1.11)$$

onde foi utilizada a relação (A.2) do apêndice A. Logo a variação da parte gravitacional da integral de ação resulta em:

$$-\frac{1}{2} \delta \int \sqrt{-g} R d^4x = -\frac{1}{2} \int \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} d^4x. \quad (1.12)$$

Variando agora o segundo termo em (1.3) escrevemos

$$\delta \int \sqrt{-g} L_F d^4x = \int \left[\frac{\partial(\sqrt{-g} L_F)}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial(\sqrt{-g} L_F)}{\partial g^{\mu\nu}_{,\alpha}} \delta g^{\mu\nu}_{,\alpha} \right] d^4x \quad (1.13)$$

onde $h_{,\alpha} \equiv \frac{\partial h}{\partial x^\alpha}$. O segundo termo em (1.13) pode ser reescrito como a diferença entre uma integral de superfície que é igual a zero por causa da anulação da variação nos limites de integração e um outro termo, como segue abaixo:

$$\delta \int \sqrt{-g} L_F d^4x = \int \left\{ \frac{\partial(\sqrt{-g} L_F)}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left[\frac{\partial(\sqrt{-g} L_F)}{\partial g^{\mu\nu}_{,\alpha}} \right] \right\} \delta g^{\mu\nu} d^4x. \quad (1.14)$$

Definimos o tensor energia-momentum como:

$$T_{\mu\nu} \equiv \frac{2}{\sqrt{-g}} \left\{ \frac{\partial(\sqrt{-g} L_F)}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left[\frac{\partial(\sqrt{-g} L_F)}{\partial g^{\mu\nu}_{,\alpha}} \right] \right\} \quad (1.15)$$

e obtemos a variação da parte não gravitacional reescrevendo (1.14) como:

$$\delta \int \sqrt{-g} L_F d^4x = \frac{1}{2} \int \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d^4x. \quad (1.16)$$

Combinando os resultados (1.16) com (1.17) nas equações (1.3) e (1.5) obtemos:

$$\delta S = -\frac{1}{2} \int \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - T_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} d^4x = 0 \quad (1.17)$$

Como a expressão acima é supostamente válida para uma variação arbitrária $\delta g^{\mu\nu}$ somos forçados a concluir que o integrando da equação acima é nulo e obtemos enfim as equações

de campo de Einstein na presença de matéria

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = T_{\mu\nu}. \quad (1.18)$$

1.3 Teorias Escalares-Tensoriais

O componente central da Relatividade Geral é o campo tensorial métrico, em virtude disso a teoria é classificada como uma “teoria tensorial”. Antes da própria RG, o físico finlandês G. Nordström tentou construir uma “teoria escalar” promovendo a função potencial newtoniana a um escalar de Lorentz. A proposta era incompatível com o princípio de equivalência e não possuía uma natureza geométrica. Einstein, insatisfeito com tais ideias, eventualmente chegou a uma descrição dinâmica do espaço-tempo de natureza geométrica que se tornou a teoria padrão da gravidade tendo sido amplamente testada desde então [9].

As previsões da RG tem sido ratificadas por experimentos cujos comprimentos característicos variam de micrometros (μm) até algo em torno de uma unidade astronômica (UA) [5]. Apesar do grande sucesso é legítimo nos indagarmos se algum tipo de modificação na ação de Einstein-Hilbert poderia englobar na teoria os grandes enigmas da cosmologia, a matéria e energia escura. O Teorema de Lovelock nos deixa aparentemente atados pois ele estabelece que a ação de Einstein-Hilbert é a única possível frente as seguintes suposições [5, 10, 11]:

1. A ação é invariante frente a difeomorfismos¹;
2. Ela fornece equações de campo de segunda ordem da métrica;
3. O espaço-tempo considerado é quadridimensional;
4. Nenhum campo além da métrica participa da ação gravitacional.

Diversas teorias alternativas têm sido propostas com diferentes finalidades relaxando uma ou mais dessas suposições, o que leva a mais graus de liberdade na teoria. Contudo modificar a RG se mostrou uma tarefa delicada, frequentemente surgem problemas de

¹Um difeomorfismo f de duas variedades é uma bijeção para qual ambos f e f^{-1} são C^∞ [12].

estabilidade e podem surgir ainda dificuldades em reobter os resultados da RG onde ela é inegavelmente bem sucedida [5, 9]. Esse ramo de teorias tensoriais-escalares teve início com Jordan que embutiu uma variedade quadridimensional curva em um espaço-tempo não-curvo de cinco dimensões. Ele mostrou que um campo escalar quadridimensional podia ser obtido dessa geometria projetiva como um vínculo, o que permitia o advento de uma “constante” gravitacional dependente do espaço-tempo em sintonia com o argumento de Dirac que a constante gravitacional deveria possuir dependência temporal.

C. Brans e R. H. Dicke, profundamente influenciados pelo Princípio de Mach (além do argumento de Dirac) levaram além as ideias de Jordan e propuseram uma formulação que, dentre outras vantagens, era compatível com o Princípio de Equivalência fraco. Devida a importância do modelo como referência para diversas outras propostas vale a pena apresentar a forma inicial da lagrangiana de Brans-Dicke que é dada por [9]:

$$L_{BD} = \sqrt{-g} \left(\varphi R - \omega \frac{1}{\varphi} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi + L_m \right) \quad (1.19)$$

onde φ representa um campo escalar, ω é uma constante e L_m denota a lagrangiana da matéria. Dentre os modelos posteriores se encontra o mimético no qual ao invés de se introduzir campos escalares de fora à lagrangiana, assume-se um tensor métrica que depende de um campo escalar. No próximo capítulo o modelo mimético será formalizado.

Capítulo 2

Gravidade Mimética

2.1 Derivação das Equações de Movimento

O ponto de partida da proposta feita por Chamseddine e Mukhanov em [6] para modificar a RG consiste em reescrever a métrica física $g_{\mu\nu}$ em termos de uma métrica auxiliar $\tilde{g}_{\mu\nu}$ e um campo escalar φ que se manifesta através de suas primeiras derivadas da seguinte forma:

$$g_{\mu\nu} = (\tilde{g}^{\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi) \tilde{g}_{\mu\nu} \equiv P \tilde{g}_{\mu\nu}. \quad (2.1)$$

Diante dessa modificação a ação de Einstein-Hilbert torna-se:

$$S = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g(\tilde{g}_{\mu\nu}, \varphi)} [R(g(\tilde{g}_{\mu\nu}, \varphi)) + L_m] \quad (2.2)$$

onde L_m representa a lagrangiana da matéria. A ação é conformalmente invariante² pois depende apenas de $g_{\mu\nu}$ que por sua vez já é conformalmente invariante. Visando obter as equações de movimento para esse formalismo aplica-se novamente o princípio variacional:

$$\delta S = \int d^4x \frac{\delta S}{\delta g_{\alpha\beta}} \delta g_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} (G^{\alpha\beta} - T^{\alpha\beta}) \delta g_{\alpha\beta}. \quad (2.3)$$

Note que a variação da métrica pode ser reescrita como:

$$\delta g_{\alpha\beta} = P \delta \tilde{g}_{\alpha\beta} + \tilde{g}_{\alpha\beta} \delta P \quad (2.4)$$

²Veja o Apêndice B

onde:

$$\delta P = \delta(\tilde{g}^{\kappa\lambda} \partial_\kappa \varphi \partial_\lambda \varphi) = \delta \tilde{g}^{\kappa\lambda} \partial_\kappa \varphi \partial_\lambda \varphi + \tilde{g}^{\kappa\lambda} \delta(\partial_\kappa \varphi \partial_\lambda \varphi) \quad (2.5)$$

Do Apêndice usaremos os resultados (A.1) e (A.2):

$$\delta g^{\kappa\lambda} = -g^{\kappa\mu} g^{\lambda\nu} \delta g_{\mu\nu} \quad (2.6)$$

$$\delta \sqrt{-g} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}. \quad (2.7)$$

Observe ainda a relação obtível da definição (2.1)

$$g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta_\nu^\mu \rightarrow g^{\mu\alpha} (P \tilde{g}_{\alpha\nu}) = \delta_\nu^\mu \rightarrow g^{\mu\alpha} (P \tilde{g}_{\alpha\mu}) = 1 \rightarrow g^{\mu\alpha} = \frac{1}{P} \tilde{g}^{\mu\alpha} \quad (2.8)$$

Combinando (2.6) com (2.5)

$$\delta P = -\tilde{g}^{\kappa\mu} \tilde{g}^{\lambda\nu} \delta \tilde{g}_{\mu\nu} \partial_\kappa \varphi \partial_\lambda \varphi + 2\tilde{g}^{\kappa\lambda} \partial_\kappa \delta \varphi \partial_\lambda \varphi \quad (2.9)$$

e substituindo (2.9) em (2.4)

$$\begin{aligned} \delta g_{\alpha\beta} &= P \delta \tilde{g}_{\alpha\beta} + \tilde{g}_{\alpha\beta} (-\tilde{g}^{\kappa\mu} \tilde{g}^{\lambda\nu} \delta \tilde{g}_{\mu\nu} \partial_\kappa \varphi \partial_\lambda \varphi + 2\tilde{g}^{\kappa\lambda} \partial_\kappa \delta \varphi \partial_\lambda \varphi) \\ &= P \delta \tilde{g}_{\alpha\beta} - \tilde{g}_{\alpha\beta} \tilde{g}^{\kappa\mu} \tilde{g}^{\lambda\nu} \delta \tilde{g}_{\mu\nu} \partial_\kappa \varphi \partial_\lambda \varphi + 2\tilde{g}_{\alpha\beta} \tilde{g}^{\kappa\lambda} \partial_\kappa \delta \varphi \partial_\lambda \varphi. \end{aligned}$$

Logo:

$$\delta g_{\alpha\beta} = \delta \tilde{g}_{\mu\nu} \left[P \delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu - \tilde{g}_{\alpha\beta} \tilde{g}^{\kappa\mu} \tilde{g}^{\lambda\nu} \partial_\kappa \varphi \partial_\lambda \varphi \right] + 2\tilde{g}_{\alpha\beta} \tilde{g}^{\kappa\lambda} \partial_\kappa \delta \varphi \partial_\lambda \varphi. \quad (2.10)$$

Para melhorar a expressão acima utiliza-se (2.8)

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{\alpha\beta} \tilde{g}^{\kappa\mu} \tilde{g}^{\lambda\nu} \partial_\kappa \varphi \partial_\lambda \varphi &= \left(\frac{1}{P} g_{\alpha\beta} \right) (P g^{\kappa\mu}) (P g^{\lambda\nu}) \partial_\kappa \varphi \partial_\lambda \varphi \\ &= P g_{\alpha\beta} g^{\kappa\mu} g^{\lambda\nu} \partial_\kappa \varphi \partial_\lambda \varphi \end{aligned} \quad (2.11)$$

e retornando a (2.10)

$$\begin{aligned} \delta g_{\alpha\beta} &= \delta \tilde{g}_{\mu\nu} \left[P \delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu - P g_{\alpha\beta} g^{\kappa\mu} g^{\lambda\nu} \partial_\kappa \varphi \partial_\lambda \varphi \right] + 2 \left(\frac{1}{P} g_{\alpha\beta} \right) (P g^{\kappa\lambda}) \partial_\kappa \delta \varphi \partial_\lambda \varphi \\ &= P \delta \tilde{g}_{\mu\nu} \left[\delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu - g_{\alpha\beta} g^{\kappa\mu} g^{\lambda\nu} \partial_\kappa \varphi \partial_\lambda \varphi \right] + 2g_{\alpha\beta} g^{\kappa\lambda} \partial_\kappa \delta \varphi \partial_\lambda \varphi. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Substituindo (2.12) na variação da ação em (2.3)

$$\delta S = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left(G^{\alpha\beta} - T^{\alpha\beta} \right) \left(P \delta \tilde{g}_{\mu\nu} \left[\delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu - g_{\alpha\beta} g^{\kappa\mu} g^{\lambda\nu} \partial_\kappa \varphi \partial_\lambda \varphi \right] + 2g_{\alpha\beta} g^{\kappa\lambda} \partial_\kappa \delta \varphi \partial_\lambda \varphi \right) \quad (2.13)$$

do segundo termo do lado direito de (2.13) note que:

$$\begin{aligned} & \int d^4x \sqrt{-g} (G^{\alpha\beta} - T^{\alpha\beta}) g_{\alpha\beta} g^{\kappa\lambda} \partial_\kappa \delta\varphi \partial_\lambda \varphi = \\ & \sqrt{-g} (G^{\alpha\beta} - T^{\alpha\beta}) g_{\alpha\beta} g^{\kappa\lambda} \partial_\lambda \varphi \delta\varphi - \int d^4x \partial_\kappa (\sqrt{-g} (G^{\alpha\beta} - T^{\alpha\beta}) g_{\alpha\beta} g^{\kappa\lambda} \partial_\lambda \varphi) \delta\varphi. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Retomando δS tendo em mente que o primeiro termo do lado direito de (2.14) é nulo:

$$\begin{aligned} \delta S = & \int d^4x \sqrt{-g} (G^{\alpha\beta} - T^{\alpha\beta}) P (\delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu - g_{\alpha\beta} g^{\kappa\mu} g^{\lambda\nu} \partial_\kappa \varphi \partial_\lambda \varphi) \delta \tilde{g}_{\mu\nu} \\ & - 2 \int d^4x \partial_\kappa (\sqrt{-g} (G^{\alpha\beta} - T^{\alpha\beta}) g_{\alpha\beta} g^{\kappa\lambda} \partial_\lambda \varphi) \delta\varphi = 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Tratando $\delta \tilde{g}_{\mu\nu}$ e $\delta\varphi$ como duas variações independentes obtemos duas equações de Euler-Lagrange para duas variáveis resultando em duas equações de movimento.

$$\sqrt{-g} (G^{\alpha\beta} - T^{\alpha\beta}) P (\delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu - g_{\alpha\beta} g^{\kappa\mu} g^{\lambda\nu} \partial_\kappa \varphi \partial_\lambda \varphi) = 0 \quad (2.16)$$

$$\partial_\kappa (\sqrt{-g} (G^{\alpha\beta} - T^{\alpha\beta}) g_{\alpha\beta} g^{\kappa\lambda} \partial_\lambda \varphi) = 0. \quad (2.17)$$

Simplificando (2.16) temos a forma final da primeira equação de movimento:

$$G^{\mu\nu} - T^{\mu\nu} - (G - T) g^{\kappa\mu} g^{\lambda\nu} \partial_\kappa \varphi \partial_\lambda \varphi = 0. \quad (2.18)$$

Em (2.17) observe que $g^{\kappa\lambda} \partial_\lambda \varphi = \partial^\kappa \varphi$ e ainda que $G^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}$ é um escalar, então pode-se definir o vetor:

$$V^\kappa \equiv (G^{\alpha\beta} - T^{\alpha\beta}) g_{\alpha\beta} g^{\kappa\lambda} \partial_\lambda \varphi = (G - T) \partial^\kappa \varphi \quad (2.19)$$

com isso (2.17) torna-se:

$$\partial_\kappa (\sqrt{-g} V^\kappa) = 0 \rightarrow \partial_\kappa (\sqrt{-g}) V^\kappa + \sqrt{-g} \partial_\kappa (V^\kappa) = 0 \quad (2.20)$$

mas as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \partial_\kappa \sqrt{-g} &= -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \partial_\kappa g \\ \partial_\kappa g &= g g^{\gamma\theta} \partial_\kappa g_{\gamma\theta} \end{aligned}$$

implicam em:

$$\partial_\kappa \sqrt{-g} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\gamma\theta} \partial_\kappa g_{\gamma\theta} = \sqrt{-g} \Gamma_{\kappa\gamma}^\gamma \quad (2.21)$$

pois $\Gamma_{\kappa\gamma}^\gamma = \frac{1}{2} g^{\gamma\theta} \partial_\kappa g_{\gamma\theta}$, então:

$$(\Gamma_{\kappa\gamma}^\gamma + \partial_\kappa) V^\kappa = \nabla_\kappa V^\kappa \equiv \nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (2.22)$$

e obtemos finalmente a forma mais compacta da segunda equação de movimento:

$$\nabla_\kappa [(G - T) \partial^\kappa \varphi] = 0. \quad (2.23)$$

Note que a partir de (2.8) pode se explicitar um interessante vínculo:

$$g^{\mu\nu} = \frac{1}{P} \tilde{g}^{\mu\nu} \rightarrow g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi = \tilde{g}_{\alpha\beta} \partial^\alpha \varphi \partial^\beta \varphi \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi = 1. \quad (2.24)$$

Que nada mais é do que a equação de Hamilton-Jacobi para uma partícula relativística de massa unitária em um campo gravitacional [6, 13]. Tomando o traço de (2.16):

$$(G - T) - (G - T) g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi = 0 \rightarrow (G - T) (1 - g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi) = 0. \quad (2.25)$$

Devido ao vínculo a relação acima é verdadeira mesmo quando $G - T \neq 0$. Uma faceta interessante é que mesmo na ausência de matéria, quando $T^{\mu\nu} = 0$ as equações de campo do modelo mimético apresentam soluções não triviais para o modo conforme. O campo gravitacional adquire, além de dois graus de liberdade transversais que descrevem grávitons, um grau longitudinal extra compartilhado pelo campo escalar e um fator conforme P da métrica física. Com intuito de analisar o comportamento desse grau extra de liberdade reescrevemos (2.16) como:

$$G^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \tilde{T}^{\mu\nu}; \quad \tilde{T}^{\mu\nu} \equiv (G - T) g^{\mu\alpha} g^{\mu\beta} \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi. \quad (2.26)$$

Comparando $\tilde{T}^{\mu\nu}$ com a expressão do tensor energia-momentum de um fluido perfeito:

$$T^{\mu\nu} = (\epsilon + p) u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu} \quad (2.27)$$

onde ϵ é a densidade de energia, p é a pressão e u^μ é a quadrivelocidade que satisfaz $u^\mu u_\mu = 1$. Se impusermos $p = 0$ podemos identificar:

$$\epsilon = (G - T); \quad u^\mu = g^{\mu\alpha} \partial_\alpha \varphi \quad (2.28)$$

e $\tilde{T}^{\mu\nu}$ fica equivalente a equação de um fluido perfeito. Observe que em decorrência de (2.25) a densidade de energia pode ser não nula mesmo na ausência de matéria. Note ainda que:

$$\tilde{T}_\nu^\mu = (G - T) \partial^\mu \varphi \partial_\nu \varphi.$$

Da conservação de energia-momentum temos:

$$0 = \nabla_\mu \tilde{T}_\nu^\mu = \partial_\nu \varphi \nabla_\mu ((G - T) \partial^\mu \varphi) + (G - T) \partial^\mu \varphi \nabla_\mu \partial_\nu \varphi. \quad (2.29)$$

Note que diferenciando $g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi = 1$ obtemos $\partial^\mu \varphi \nabla_\nu \partial_\mu \varphi = 0$ e como $\nabla_\nu \partial_\mu \varphi = \nabla_\mu \partial_\nu \varphi$ a conservação gera:

$$\partial_\nu \varphi \nabla_\nu ((G - T) \partial^\mu \varphi) = 0 \rightarrow \nabla_\mu ((G - T) \partial^\mu \varphi) = 0. \quad (2.30)$$

Que é um cálculo para checar consistência. Note que resultou na segunda equação de movimento. Para grandes escalas e tempos suficientemente iniciais, a matéria escura é descrita como um fluido perfeito sem pressão (poeira) que não interage com os campos do modelo padrão [14], exatamente como se comporta o grau extra de liberdade do modelo mimético.

2.2 Uma simples aplicação

Para encontrar soluções trabalharemos em um *sistema de coordenadas síncrono* onde a métrica é expressa por [6, 13]:

$$ds^2 = d\tau^2 - \gamma_{ij} dx^i dx^j; \quad \gamma_{ij} = -g_{ij}. \quad (2.31)$$

Igualamos as hipersuperfícies de tempo constante às hipersuperfícies de φ constante, ou seja:

$$\varphi(x^\mu) \equiv \tau \quad (2.32)$$

a particularidade desse sistema de coordenadas é a equivalência entre o tempo e o tempo próprio. Reescrevendo a equação (2.17) tendo em mente a equivalência entre φ e o tempo juntamente com a definição de γ_{ij} presente em (2.31) a segunda equação de movimento se torna:

$$\partial_0 \left(\sqrt{\det \gamma} (G - T) \right) = 0 \rightarrow G - T = \frac{C(x^i)}{\sqrt{\det \gamma}} \quad (2.33)$$

onde $C(x^i)$ é uma constante de integração que depende apenas das coordenadas espaciais. No caso particular de um *Universo plano de Friedmann*, onde $\gamma_{ij} = a^2(\tau) \delta_{ij}$, sendo $a(t)$ o fator de escala, temos:

$$\gamma = a^6(\tau) \rightarrow G - T = \frac{C}{a^3} \quad (2.34)$$

Ou seja, a densidade de energia é inversamente proporcional ao volume do universo e a “quantidade” dessa matéria escura mimética é determinada pela constante de integração C . O modo extra do campo gravitacional nos traz os efeitos da matéria escura sem a necessidade de matéria alguma. Aparentemente a matéria escura mimética não interage de nenhuma forma, além da gravitacional, sendo influenciada por instabilidades gravitacionais.

2.3 Formulação Equivalente

Em [15] foi proposta uma reformulação utilizando a equação de vínculo (2.8) e aplicou-se o método dos multiplicadores de Lagrange, eliminando assim a necessidade de uma métrica auxiliar. Nessa formulação reescrevemos a ação como [16]:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2}R(g_{\mu\nu}) + L_m(g_{\mu\nu}, \dots) + \lambda(g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - 1) + \tilde{\lambda}(\nabla_\mu V^\mu - 1) \right] \quad (2.35)$$

onde V representa um potencial arbitrário que respeita o vínculo $\nabla_\mu V^\mu = 1$.

Dessa forma tanto a energia quanto a matéria escura surgem como constantes de integração. Essa ideia não é exclusiva do modelo mimético, em particular o modelo de gravitação quântica de Horava-Lifshitz apresenta a mesma possibilidade [17] (na realidade tem sido mostrado um certo alinhamento entre as duas propostas [14]). O termo com λ está associado com a matéria escura mimética como visto anteriormente e o último termo com $\tilde{\lambda}$ está associado a energia escura [18]. A obtenção de equações de movimento para a ação (2.35) é análoga ao que foi feito no capítulo anterior e não será reproduzido aqui. As equações de movimento nesse caso são dadas por:

$$G_{\mu\nu} - T_{\mu\nu} + 2\lambda\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi + g_{\mu\nu}\tilde{\lambda} = 0 \quad (2.36)$$

$$\partial_\mu\tilde{\lambda} = 0 \quad (2.37)$$

onde identificamos a constante cosmológica $\tilde{\lambda} = \Lambda$ e λ é obtido através do traço da expressão (2.36):

$$G - T + 2\lambda + 4\Lambda = 0 \quad (2.38)$$

$$\lambda = -\frac{1}{2}(G - T + 4\Lambda) \quad (2.39)$$

Utilizando esse resultado (2.36) torna-se:

$$G_{\mu\nu} - T_{\mu\nu} + 2 \left(-\frac{1}{2}(G - T + 4\Lambda) \right) \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi + g_{\mu\nu} \Lambda \quad (2.40)$$

$$G_{\mu\nu} - T_{\mu\nu} - (G - T) \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi + \Lambda (g_{\mu\nu} - 4 \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi). \quad (2.41)$$

As equações (2.41) e (2.8) evidenciam que a partir de modificações mínimas na RG podemos obter a matéria e energia escura como constantes de integração. Na próxima seção vamos acoplar um potencial ao modelo e analisar algumas das possíveis soluções cosmológicas.

2.4 Acoplamento de Potencial

Considere a seguinte ação [16]:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} R(g_{\mu\nu}) + L_m(g_{\mu\nu}, \dots) + \lambda (g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - 1) - V(\varphi) \right]. \quad (2.42)$$

A constante cosmológica foi deixada de lado, pois seu efeito em soluções clássicas é alterar o potencial por uma constante Λ . Variando com respeito a λ fornece novamente a equação (2.8) e variando $g^{\mu\nu}$ de maneira análoga ao que foi feito na primeira seção desse capítulo resulta em:

$$G_{\mu\nu} - 2\lambda \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - g_{\mu\nu} V(\varphi) = T_{\mu\nu}. \quad (2.43)$$

Tomando o traço da expressão acima para determinar λ :

$$G - 2\lambda - 4V(\varphi) = T \rightarrow \lambda = \frac{1}{2} (G - T - 4V) \quad (2.44)$$

e a equação (2.43) torna-se:

$$G_{\mu\nu} - (G - T - 4V) \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - g_{\mu\nu} V(\varphi) = T_{\mu\nu} \quad (2.45)$$

que juntamente com:

$$g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi = 1. \quad (2.46)$$

São as equações equivalentes às equações de campo da RG para o modelo. É importante salientar que o modo extra do campo gravitacional não pode ser inteiramente atribuído ao campo escalar, pois o vínculo de Hamilton-Jacoby impede que ele seja intrinsecamente dinâmico.

Levando em consideração a identidade de Bianchi $\nabla^\nu G_{\mu\nu} = 0$ e impondo a conservação de energia $\nabla^\nu T_{\mu\nu} = 0$ temos para a derivada covariante de (2.45):

$$\nabla^\nu ((G - T - 4V) \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi + g_{\mu\nu} V(\varphi)) = 0. \quad (2.47)$$

A equação acima ainda pode ser simplificada considerando que:

$$\nabla^\rho (g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi) = 2g^{\mu\nu} (\nabla^\rho \partial_\mu \varphi) \partial_\nu \varphi = 2g^{\mu\nu} (\nabla_\mu \partial^\rho \varphi) \partial_\nu \varphi = 0. \quad (2.48)$$

Como $\partial_\mu \varphi \neq 0$ pelo menos para um índice μ e lembrando-se que a derivada covariante de uma função escalar é apenas o gradiente pois há independência dos vetores de base somos levados a:

$$\nabla^\nu ((G - T - 4V) \partial_\nu \varphi) = -V'(\varphi). \quad (2.49)$$

O resultado acima pode ser alternativamente obtido como indicado em [16] a partir da densidade lagrangiana correspondente a ação proposta:

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left(-\frac{R}{2} + \lambda (g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - 1) - V(\varphi) + L_m \right). \quad (2.50)$$

Da equação de Euler-Lagrange para φ podemos obter a equação de movimento:

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi_\mu} = \partial_\beta \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi_{\mu,\beta}} \quad (2.51)$$

no nosso caso:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \varphi} &= -\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\nu (\sqrt{-g} \lambda g^{\mu\nu} \partial_\nu \varphi) \\ &= -\nabla^\nu (\lambda \partial_\nu \varphi) \\ &= -\nabla^\nu ((G - T - 4V) \partial_\nu \varphi). \end{aligned} \quad (2.52)$$

Se novamente escrevermos $G_{\mu\nu} = \tilde{T}_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}$, onde $\tilde{T}_{\mu\nu} \equiv (G - T - 4V) \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi + g_{\mu\nu} V(\varphi)$ e compararmos esse termo com o tensor energia momentum de um fluido perfeito:

$$(\epsilon + p)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu} = (G - T - 4V) \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi + g_{\mu\nu} V(\varphi) \quad (2.53)$$

comparando os últimos termos de ambos os lados podemos escolher $\tilde{p} = -V$ e para igualar os termos restantes $\tilde{\epsilon} = (G - T - 3V)$ e $u_\mu = \partial_\mu \varphi$.

Agora buscaremos soluções para um universo plano de métrica dada por:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \delta_{ik} dx^i dx^k. \quad (2.54)$$

A análise será feita em uma região onde $T_{\mu\nu} = 0$, com intuito de nos focarmos no modo extra do campo gravitacional. Assim como no caso anterior podemos utilizar o sistema de coordenadas síncrono onde $\varphi = t$. Levando em conta que a pressão e a densidade de energia dependem apenas do tempo temos:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V}{\partial \varphi} &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\nu \left(\sqrt{-g} \lambda g^{\mu\nu} \partial_\nu \varphi \right) \\ -\frac{dV}{dt} &= \frac{1}{\sqrt{\det \gamma}} \frac{d}{dt} \left(\sqrt{\det \gamma} (\tilde{\epsilon} - V) \right) \\ -\dot{V} &= \frac{1}{a^3} \frac{d}{dt} (a^3 (\tilde{\epsilon} - V)). \end{aligned} \quad (2.55)$$

Para expressar a densidade de energia em termos do potencial integramos a expressão acima:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (a^3 (\tilde{\epsilon} - V)) &= -a^3 \frac{dV}{dt} \\ \int \frac{d}{dt} (a^3 (\tilde{\epsilon} - V)) dt &= - \int a^3 \frac{dV}{dt} dt \\ (a^3 (\tilde{\epsilon} - V)) &= - \int a^3 dV \\ \tilde{\epsilon} &= V - \frac{1}{a^3} \left(V a^3 - \int 3a^2 V da \right) \\ \tilde{\epsilon} &= \frac{1}{a^3} \int 3a^2 V da. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Podemos checar que a pressão e a densidade de energia satisfazem a equação da continuidade [19]:

$$\dot{\tilde{\epsilon}} = -3H(\tilde{\epsilon} + \tilde{p}); \quad H \equiv \frac{\dot{a}}{a} \quad (2.57)$$

onde H é o parâmetro de Hubble. Calculando a derivada temporal de (2.56):

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\epsilon}} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{a^3} \int 3a^2 V da \right) \\ &= \frac{-3\dot{a}}{a^4} \int 3a^2 V da + \frac{1}{a^3} \int (3a^2 \dot{V} + 6a\dot{a} + 3Ha^2 V) da \\ &= -3H\tilde{\epsilon} + \frac{1}{a^3} \int (3a^3 H dV + 6a^2 H V da) + H\tilde{\epsilon} \\ &= -3H\tilde{\epsilon} + 3HV - 3H\tilde{\epsilon} + 2H\tilde{\epsilon} + H\tilde{\epsilon} \\ &= -3H(\tilde{\epsilon} + \tilde{p}). \end{aligned}$$

A equação de Friedmann é obtida calculando-se a componente com ambos índices tem-

porais de (2.45):

$$\begin{aligned} G_{00} - (\tilde{\epsilon} + \tilde{p})(\partial_0 t)^2 - V &= T_{00} \\ G_{00} - (\tilde{\epsilon} + \tilde{p}) + \tilde{p} &= T_{00} \\ G_{00} - T_{00} &= \tilde{\epsilon}. \end{aligned}$$

Da RG sabemos que $G_{00} - T_{00} = 3H^2$ [19], portanto:

$$H^2 = \frac{\tilde{\epsilon}}{3} = \frac{1}{a^3} \int a^2 V da. \quad (2.58)$$

Para um dado potencial essa equação poderia ser resolvida para $a(t)$. Contudo é conveniente expressar a relação através de uma equação diferencial que será obtida derivando a expressão acima com relação ao tempo da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (a^3 H^2) &= \frac{d}{dt} \left(\int a^2 V da \right) \\ 3a^2 H^2 \dot{a} + 2a^3 H \dot{H} &= \int (2a \dot{a} V + a^2 \dot{V} + a^2 V \dot{H}) da \\ 3a^2 H^2 \dot{a} + 2a^3 H \dot{H} &= 2H^3 a^3 + H a^3 V - 3H^3 a^3 + H^3 a^3 \\ 3a^2 H^2 \dot{a} + 2a^3 H \dot{H} &= H a^3 V \\ 3H^2 + 2\dot{H} &= V. \end{aligned}$$

A equação acima pode ser posta em uma forma mais agradável com a seguinte substituição de variável:

$$y = a^{\frac{3}{2}} \quad (2.59)$$

essa substituição implica em:

$$H = \frac{2\dot{y}}{3y}, \quad \dot{H} = \frac{2}{3} \left(\frac{\ddot{y}}{y} - \left(\frac{\dot{y}}{y} \right)^2 \right) \quad (2.60)$$

e a equação diferencial pode ser reescrita como:

$$\frac{4}{3} \left(\frac{\ddot{y}}{y} - \left(\frac{\dot{y}}{y} \right)^2 + \frac{\dot{y}^2}{y^2} \right) = \frac{4}{3} \frac{\ddot{y}}{y} = V \quad (2.61)$$

que resulta em:

$$\ddot{y} - \frac{3}{4} V(t) y = 0. \quad (2.62)$$

Que será a equação fundamental na análise de soluções cosmológicas no próximo capítulo. Observe que o procedimento para investigarmos soluções da equação (2.62) se resume

basicamente em propor funções temporais, logo temos liberdade suficiente para obter praticamente qualquer evolução cosmológica.

Capítulo 3

Soluções Cosmológicas

3.1 Uma primeira análise

Neste capítulo analisaremos alguns cenários cosmológicos através de diferentes potenciais [16, 20]. Primeiramente considere o seguinte potencial:

$$V(\varphi) = \frac{\alpha}{\varphi^2} = \frac{\alpha}{t^2} \quad (3.1)$$

onde α é uma constante. Substituindo esse potencial na equação (2.62)

$$\ddot{y} - \frac{3}{4} \frac{\alpha}{t^2} y = 0. \quad (3.2)$$

A solução geral desta equação é dada por:

$$y = \begin{cases} C_1 t^{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{|1+3\alpha|} \ln(t) + C_2\right), & \text{para } \alpha < -\frac{1}{3} \\ C_1 t^{\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+3\alpha})} + C_2 t^{\frac{1}{2}(1-\sqrt{1+3\alpha})}, & \text{para } \alpha \geq -\frac{1}{3} \end{cases} \quad (3.3)$$

onde C_1 e C_2 são constantes de integração. Note para o primeiro caso que sob a condição do argumento da raiz ser suficientemente grande temos um *universo oscilante*, cuja amplitude é regida pelo tempo. Esse comportamento decorre da grande pressão positiva correspondente.

Usando (2.59) é fácil obter o fator de escala do segundo caso (assumindo $C_1 \neq 0$) que é dado por:

$$a(t) = t^{\frac{1}{3}(1+\sqrt{1+3\alpha})} \left(1 + At^{-\sqrt{1+3\alpha}}\right)^{\frac{2}{3}} \quad (3.4)$$

onde $A \equiv \frac{C_1}{C_2}$. Para encontrar a densidade de energia primeiramente calculamos H :

$$\begin{aligned} H &= \frac{\frac{1}{3}(1+\beta)t^{\frac{\beta-2}{3}}(1+At^{-\beta})^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}t^{\frac{1}{3}(1+\beta)}(1+At^{-\beta})^{-\frac{1}{3}}(-\beta At^{-\beta-1})}{t^{\frac{1}{3}(1+\beta)}(1+At^{-\beta})^{\frac{2}{3}}} \\ &= \frac{1}{3t} \left(1 + \beta - \frac{2\beta At^{-\beta}}{1+At^{-\beta}} \right) \\ &= \frac{1}{3t} \left(1 + \beta \frac{1-At^{-\beta}}{1+At^{-\beta}} \right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

onde utilizei $\beta \equiv \sqrt{1+3\alpha}$. Com (3.5) temos:

$$\tilde{\epsilon} = 3H^2 = \frac{1}{3t^2} \left(1 + \sqrt{1+3\alpha} \frac{1-At^{-\sqrt{1+3\alpha}}}{1+At^{-\sqrt{1+3\alpha}}} \right)^2. \quad (3.6)$$

Obter \tilde{p} é trivial:

$$\tilde{p} = -\frac{\alpha}{t^2} \quad (3.7)$$

Para expressar uma equação de estado assumiremos que a mesma tem a forma $p = \epsilon\omega$, onde ω é o chamado parâmetro da equação de estado. Logo:

$$\omega = \frac{\tilde{p}}{\tilde{\epsilon}} = -3\alpha \left(1 + \sqrt{1+3\alpha} \frac{1-At^{-\sqrt{1+3\alpha}}}{1+At^{-\sqrt{1+3\alpha}}} \right)^{-2}. \quad (3.8)$$

Pode-se mostrar que tanto os limites superior e inferior da expressão acima tendem a constantes. Note que se $\alpha = -1/3$ o argumento da raiz é nulo restando $\tilde{p} = \tilde{\epsilon}$ e temos uma equação de estado ultrarrígida com $a \propto t^{\frac{1}{3}}$. Se $\alpha = -1/4$ note que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1-At^{-\frac{1}{2}}}{1+At^{-\frac{1}{2}}} \right) = 1 \quad (3.9)$$

e que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1-At^{-\frac{1}{2}}}{1+At^{-\frac{1}{2}}} \right) = -1. \quad (3.10)$$

Obtemos então um fluido ultrarrelativístico para tempos grandes com $\tilde{p} = \frac{1}{3}\tilde{\epsilon}$ e para tempos pequenos (com $A \neq 0$) temos $\tilde{p} = 3\tilde{\epsilon}$. Quando α é muito pequeno obtemos a matéria escura mimética com pressão desprezível. Para α positivo a pressão torna-se negativa e com o crescimento de α tendemos a caso da energia escura com $\tilde{p} = -\tilde{\epsilon}$.

3.2 Matéria Mimética como Quintessência

A *quintessência* se apresenta como uma proposta alternativa a constante cosmológica para explicar a energia escura. Ela é descrita por um campo escalar que é acoplado minimamente à gravidade. Das formulações baseadas em um campo escalar a quintessência se mostra a mais simples que não acarreta problemas como fantasmas e instabilidades laplacianas [21]. Com intuito de analisarmos o comportamento da matéria mimética nessa situação considere um universo que é dominado por algum tipo de matéria (diferente da mimética) com equação de estado constante dada por $p = \omega\epsilon$. O potencial é dado por (3.1) seguindo o formato originalmente proposto em [22]. Manipulando um pouco as expressões (3.4) e (3.8) pode-se reescrever o fator de escala como:

$$a = \gamma t^{\frac{2}{3(1+\omega)}} \quad (3.11)$$

onde γ é uma constante. Para encontrar a densidade de energia referente a matéria mimética computamos (2.56):

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon} &= V - \frac{1}{a^3} \int a^3 \dot{V} dt \\ &= \frac{\alpha}{t^2} + 2\alpha t^{\frac{-2}{1+\omega}} \int t^{-\frac{1+3\omega}{1+\omega}} dt \\ &= \frac{\alpha}{t^2} - 2\alpha t^{\frac{-2}{1+\omega}} \frac{1+\omega}{\omega} t^{\frac{-2\omega}{1+\omega}} \\ &= \frac{\alpha}{t^2} \left(1 - \frac{1+\omega}{\omega} \right) \\ &= -\frac{\alpha}{\omega t^2} \end{aligned} \quad (3.12)$$

onde a constante de integração foi anulada. Como a pressão é dada por $\tilde{p} = -\frac{\alpha}{t^2}$ temos o mesmo comportamento para matéria mimética e a matéria dominante.

Note que:

$$\dot{a} = \frac{2\gamma}{3(1+\omega)} t^{\frac{2-3(1+\omega)}{3(1+\omega)}} \quad (3.13)$$

com isso podemos obter o parâmetro de Hubble:

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{3(1+\omega)} t^{-1} \quad (3.14)$$

e calcular a densidade de energia total:

$$\epsilon = 3H^2 = \frac{4}{3(1+\omega)^2 t^2} \quad (3.15)$$

Logo a matéria mimética não é dominante nesse universo apenas quando $\frac{\alpha}{\omega} \ll 1$.

3.3 Matéria Mimética como um Inflaton

O *inflaton* é outro campo escalar hipotético que seria responsável pela dinâmica do universo durante o período da inflação [23]. Com um pouco de engenharia reversa, ou seja, utilizando a equação (2.62) para um fator de escala qualquer pode-se obter o potencial e dessa forma pode-se construir soluções inflacionárias com relativa facilidade. O potencial:

$$V(\varphi) = \frac{\alpha\varphi^2}{e^\varphi + 1} \quad (3.16)$$

com $\alpha > 0$ descreve um inflaton que para grandes valores de $\varphi = t$ dá lugar a um universo dominado por matéria. Note que para quando $\varphi \rightarrow \infty$ o potencial tende a zero e conseqüentemente temos para o fator de escala:

$$\ddot{y} = 0 \rightarrow a \propto t^{\frac{2}{3}}. \quad (3.17)$$

Que é a proporcionalidade do fator de escala para um universo dominado por matéria não-relativística. Para o limite inferior podemos ver que o comportamento desejado pode ser obtido por:

$$a = \gamma e^{-\sqrt{\frac{\alpha}{12}} t^2} \quad (3.18)$$

que gera o potencial:

$$V = \frac{4\ddot{y}}{3y} = \frac{4\gamma^{\frac{3}{2}} \frac{9\alpha}{12} t^2 e^{-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{12}} t^2}}{\gamma^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{12}} t^2}} = \alpha t^2 \quad (3.19)$$

como é esperado para limite inferior.

3.4 Matéria Mimética em um “bouncing universe”

Uma solução peculiar surge do seguinte potencial:

$$V(\varphi) = \frac{4}{3} \frac{1}{(1+\varphi^2)^2} = \frac{4}{3} \frac{1}{(1+t^2)^2} \quad (3.20)$$

substituindo esse potencial na equação (2.62) temos:

$$\ddot{y} - \frac{1}{(1+t^2)^2}y = 0. \quad (3.21)$$

A solução dessa equação diferencial é dada por:

$$y(t) = \sqrt{1+t^2}(C_1 + C_2 \arctan(t)). \quad (3.22)$$

Por simplicidade vamos escolher para as constantes $C_2 = 0$ e $C_1 = 1$, dessa forma:

$$y = \sqrt{1+t^2} \rightarrow a = (1+t^2)^{\frac{1}{3}} \quad (3.23)$$

segue que:

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{\frac{2t}{3}(1+t^2)^{-\frac{2}{3}}}{(1+t^2)^{\frac{1}{3}}} = \frac{2t}{3(1+t^2)} \quad (3.24)$$

Calculando densidade de energia e pressão temos:

$$\tilde{\epsilon} = 3H^2 = \frac{4}{3} \frac{t^2}{(1+t^2)^2} \quad (3.25)$$

$$\tilde{p} = -\frac{4}{3} \frac{1}{(1+t^2)^2} \quad (3.26)$$

Com esses resultados estamos aptos a descrever a evolução desse universo. No limite inferior de t a pressão se anula e temos um universo dominado por poeira e passa por um período de contração. Para o mesmo período note que:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \tilde{\epsilon} = \frac{4}{3} \frac{2t}{4t(1+t^2)} = \frac{2}{3(1+t^2)} \quad (3.27)$$

Ou seja primeiramente o universo é regido por uma densidade de energia $\tilde{\epsilon} \propto a^{-3}$ e depois quando $|t| = 1$ temos $\tilde{\epsilon} + \tilde{p} = 0$ e o período de contração termina dando início a expansão. Conforme t cresce nos encaminhamos para um universo dominado por poeira. O interessante desse modelo é a passagem de uma equação de estado convencional com $\tilde{\epsilon} + \tilde{p} > 0$ para uma equação de estado com $\tilde{\epsilon} + \tilde{p} < 0$ que descreve uma matéria mimética fantasma para $|t| < 1$. Porém pode-se mostrar que se modificarmos o potencial para [16]:

$$V(\varphi) = \frac{4}{3} \frac{1}{(t_0^2 + t^2)^2} \quad (3.28)$$

esse efeito é eliminado.

3.5 Potencial Exponencial

Agora utilizaremos o seguinte potencial [20]:

$$V = \alpha e^{-\gamma t} \quad (3.29)$$

onde tanto α quanto γ são constantes. Substituindo na equação (2.62):

$$\ddot{y} - \frac{3}{4}\alpha e^{-\gamma t} y = 0. \quad (3.30)$$

A equação acima é uma equação de Bessel, isso fica mais evidente usando a transformação $s \equiv \frac{\sqrt{-3\alpha}}{\gamma} e^{-\frac{\gamma t}{2}}$ e lembrando que a equação de Bessel possui o seguinte formato:

$$s^2 \frac{d^2 y}{ds^2} + s \frac{dy}{ds} + s^2 y = 0. \quad (3.31)$$

Computando os termos necessários para escrever a equação acima:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{ds} &= \frac{dy}{dt} \frac{dt}{ds} = -\frac{2}{\sqrt{-3\alpha}} e^{\frac{\gamma t}{2}} \dot{y} = -\frac{2}{\gamma s} \dot{y} \\ \frac{d^2 y}{ds^2} &= \frac{d}{ds} \frac{dy}{ds} = \frac{2}{\gamma s^2} \dot{y} - \frac{2}{\gamma s} \left(-\frac{2}{\sqrt{-3\alpha}} e^{\frac{\gamma t}{2}} \right) \ddot{y} = \frac{2\dot{y}}{\gamma s^2} + \frac{4\ddot{y}}{\gamma^2 s^2} \\ s^2 &= -\frac{3\alpha}{\gamma^2} e^{-\gamma t} \end{aligned}$$

com esses resultados podemos verificar que a substituição é a correta:

$$\frac{2\dot{y}}{\gamma} + \frac{4\ddot{y}}{\gamma^2} - \frac{2\dot{y}}{\gamma} - \frac{3\alpha}{\gamma^2} e^{-\gamma t} y = 0 \rightarrow 4\ddot{y} - 3\alpha e^{-\gamma t} y = 0.$$

As soluções são dadas pelas funções de Bessel:

$$y(t) = C_1 J_0 \left(\frac{\sqrt{-3\alpha}}{\gamma} e^{-\frac{\gamma t}{2}} \right) + C_2 Y_0 \left(\frac{\sqrt{-3\alpha}}{\gamma} e^{-\frac{\gamma t}{2}} \right) \quad (3.32)$$

e escrevendo $a(t)$

$$a(t) = \left(C_1 J_0 \left(\frac{\sqrt{-3\alpha}}{\gamma} e^{-\frac{\gamma t}{2}} \right) + C_2 Y_0 \left(\frac{\sqrt{-3\alpha}}{\gamma} e^{-\frac{\gamma t}{2}} \right) \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (3.33)$$

É interessante verificar os limites da expressão (3.33) para $t \rightarrow +\infty$ e $t \rightarrow 0$.

3.5.1 Comportamento para $t \rightarrow +\infty$

Analisando primeiramente a função de Bessel de primeira espécie é fácil notar que por causa da função exponencial o argumento da função se anula, logo o primeiro termo resulta em $J_0(0) = 1$. Para a função de Bessel de segunda espécie partimos da seguinte expansão [24]:

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} \left(\left(\ln \left(\frac{x}{2} \right) + \xi \right) J_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} H_k \frac{\left(\frac{x^2}{4} \right)^k}{(k!)^2} \right). \quad (3.34)$$

Onde ξ é a constante de Euler-Mascheroni ($\xi \approx 0.5772$) e H_k é um número harmônico. Devido ao argumento da função no nosso caso o segundo termo é desprezado e o primeiro é reescrito como:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \left(\ln \left(\frac{1}{2} \frac{\sqrt{-3\alpha}}{\gamma} e^{-\frac{\gamma t}{2}} \right) + \xi \right) J_0(0) &= \frac{2}{\pi} \left(\ln \left(\frac{1}{2} \frac{\sqrt{-3\alpha}}{\gamma} \right) + \ln \left(e^{-\frac{\gamma t}{2}} \right) + \xi \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\ln \left(\frac{1}{2} \frac{\sqrt{-3\alpha}}{\gamma} \right) - \frac{\gamma t}{2} + \xi \right) \end{aligned} \quad (3.35)$$

juntando os resultados na expressão (3.33)

$$a(t \rightarrow +\infty) = \left(C_1 + \frac{2C_2}{\pi} \left(\ln \left(\frac{1}{2} \frac{\sqrt{-3\alpha}}{\gamma} \right) - \frac{\gamma t}{2} + \xi \right) \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (3.36)$$

Logo nesse limite como $a \propto t^{\frac{2}{3}}$ o modelo reproduz aproximadamente um universo dominado por matéria não-relativística.

3.5.2 Comportamento para $t \rightarrow 0$

Nesse caso a abordagem mais simples é retornar a equação (3.37) e nela aplicar o limite. A equação diferencial torna-se:

$$\ddot{y} - \frac{3}{4}\alpha y = 0 \quad (3.37)$$

que nada mais é do que uma equação diferencial de coeficientes constantes cuja a solução é:

$$y(t) = C_1 e^{\sqrt{\frac{3\alpha}{4}}t} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{3\alpha}{4}}t} \rightarrow a(t) = \left(C_1 e^{\sqrt{\frac{3\alpha}{4}}t} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{3\alpha}{4}}t} \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (3.38)$$

Para α positivo esse fator de escala corresponde a um cenário inflacionário e para α negativo temos um universo que oscila perto do *Big-Bang*.

Capítulo 4

Candidatos a Campo Escalar

Nas teorias tensoriais-escalares o campo escalar é o grande diferencial frente a RG, logo é fundamental identificar a origem de tal campo e nesta seção citaremos alguns candidatos. Tenha em mente que as ideias envolvidas estão além do escopo do presente trabalho, logo o objetivo é somente mencionar como o campo escalar pode surgir de teorias amplamente estudadas na atualidade.

4.1 Espaços Internos Compactificados

Vem de T. Kaluza a ideia de dimensões extras “compactificadas” em pequenos círculos além das 4 dimensões usuais que se estendem infinitamente. Essas dimensões extras seriam tão diminutas que nenhum experimento a suficientemente baixas energias poderia detectá-lo. A teoria que se desenvolve entorno desses espaços internos é conhecida por Teoria de Kaluza-Klein. Para ilustrar o surgimento do campo escalar considere o “Ansatz” para um espaço de D dimensões, com $D = 4 + n$ onde n é o número de dimensões compactificadas. A métrica nesse espaço pode ser parametrizada como [9]:

$$g_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu}(x) & 0 \\ 0 & A(x)^2 \tilde{g}_{\alpha\beta}(\theta) \end{pmatrix}$$

onde A representa o raio do espaço compactificado, $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ (com α e β variando de 1 até n) é a métrica referente a parte compactificada e θ é uma coordenada adimensional, como ângulos. As componentes fora da diagonal (relacionadas aos campos de gauge) são omitidas para se focar no campo escalar. A partir da métrica parametrizada é desenvolvido

em [9] um cálculo através do computo do termo de Einstein-Hilbert nas D dimensões para $n > 1$, obtendo-se a seguinte expressão para o campo escalar:

$$\varphi = 2\sqrt{\frac{n-1}{n}}A^{\frac{n}{2}}. \quad (4.1)$$

Logo, nessa proposta, o campo escalar poderia estar relacionado com o número de dimensões compactificadas e com o raio das mesmas. É verificado ainda que apesar desse campo ser um fantasma, ele não leva a inconsistências físicas mantendo a energia total do sistema sempre positiva.

4.2 Radions

A Teoria das cordas sem dúvida é a que mais fornece candidatos a campo escalar que se encaixariam nos propósitos das teorias tensoriais-escalares da gravidade. Outro campo escalar é oriundo das estruturas não lineares previstas pela Teoria das Cordas denominadas *branas*. São estruturas dinâmicas nas quais as extremidades de cordas abertas estão presas. Nessa proposta nosso espaço-tempo quadridimensional estaria contido em um “bulk” com mais dimensões, ideia em contraste com os espaços compactificados citados na proposta anterior. O campo escalar poderia surgir de duas formas, uma é análoga ao que foi feito para espaços compactificados e a outra é exclusiva das branas onde o campo escalar corresponderia a distância entre as branas denominada radion [9].

Tem-se ainda outras propostas como o *dilaton*, um bóson de Goldstone, também proveniente da Teoria das Cordas e trabalhos em geometria não-comutativa que tem gerado interessantes campos escalares como campos de gauge em espaços discretos [9].

Capítulo 5

Considerações Finais

O objetivo principal deste trabalho foi o estudo do modelo mimético, que teve início em uma tentativa de imitar o efeito da matéria escura fria através de mudanças na ação de Einstein-Hilbert, mais especificamente na introdução de um campo escalar no escopo da teoria. Com uma pequena modificação no formalismo foi visto que a energia escura poderia facilmente ser incluída no tratamento. Através de um acoplamento mínimo de potencial podemos evidenciar a versatilidade do modelo abrangendo diferentes cenários cosmológicos como solução. Frente ao que foi apresentado a proposta mimética sem dúvida se coloca como forte candidata a solucionar o problema da matéria escura, em contraste com as propostas de partículas postuladas.

Os caminhos que podem ser tomados para uma futura pesquisa na teoria são diversos. Existem outros trabalhos que tornam a teoria ainda mais interessante, dentre eles, podemos citar a aplicação do modelo mimético a estrelas compactas, através da derivação de uma versão mimética da equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff, feita em [25]. O modelo até mesmo já possui propostas de generalização como feito em [26] para alcançar outras propriedades desejáveis introduzindo um campo vetorial na reescrita da métrica física.

APÊNDICE A – Dedução de algumas relações

Nesta seção obtemos alguns resultados auxiliares utilizados ao longo das demonstrações presentes no trabalho.

A.1 Primeiro Resultado

Buscamos demonstrar a seguinte identidade:

$$\delta g^{\kappa\lambda} = -g^{\kappa\mu} g^{\lambda\nu} \delta g_{\mu\nu}.$$

Partimos de:

$$\delta g = \frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} \rightarrow \delta g = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}$$

onde foi utilizado $\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}} = g g^{\mu\nu}$, seguindo:

$$\delta(g_{\mu\nu} g^{\nu\lambda}) = \delta(\delta_{\mu}^{\lambda}) = 0 = \delta g_{\mu\nu} g^{\nu\lambda} + g_{\mu\nu} \delta g^{\nu\lambda}.$$

Multiplicando por $g^{\mu\kappa}$:

$$-g^{\mu\kappa} \delta g_{\mu\nu} g^{\nu\lambda} = g^{\mu\kappa} g_{\mu\nu} \delta g^{\nu\lambda} = \delta_{\nu}^{\kappa} \delta g^{\nu\lambda} \rightarrow \delta g^{\kappa\lambda} = -g^{\kappa\mu} g^{\lambda\nu} \delta g_{\mu\nu}.$$

Logo temos o primeiro resultado auxiliar:

$$\delta g^{\kappa\lambda} = -g^{\kappa\mu} g^{\lambda\nu} \delta g_{\mu\nu} \tag{A.1}$$

A.2 Segundo Resultado

Agora buscamos obter a seguinte equação:

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}.$$

Usando a seguinte relação:

$$\text{Tr} \left[\frac{dA}{d\lambda} A^{-1} \right] = \frac{1}{\det A} \frac{d(\det A)}{d\lambda}$$

segue que:

$$\frac{dg_{\mu\nu}(\lambda)}{d\lambda} g^{\mu\nu}(\lambda) = \frac{1}{g(\lambda)} \frac{dg(\lambda)}{d\lambda} = \frac{2}{\sqrt{-g(\lambda)}} \frac{d\sqrt{-g(\lambda)}}{d\lambda}$$

e temos o segundo resultado auxiliar

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \tag{A.2}$$

A.3 Terceiro Resultado

O objetivo é encontrar uma expressão para o elemento de volume invariante. A regra de transformação de um tensor covariante de segunda ordem pode ser escrita como:

$$T'_{\alpha\beta} = \frac{\partial X^\mu}{\partial X'^\alpha} T_{\mu\nu} \frac{\partial X^\nu}{\partial X'^\beta}$$

usando a regra para o determinante do produto de matrizes temos que:

$$\det T'_{\alpha\beta} = \left| \frac{\partial X}{\partial X'} \right|^2 \det T_{\alpha\beta}.$$

Logo o determinante de um tensor covariante de ordem 2 é uma densidade escalar de peso 2. Podemos aplicar isso ao tensor métrica e nesse caso temos:

$$g' = \left| \frac{\partial X}{\partial X'} \right|^2 g.$$

Da teoria do cálculo diferencial e integral é conhecido que em uma transformação de coordenadas geral de forma $x'^\mu = f^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3)$ o elemento de volume se transforma de

acordo:

$$d^4x' = \left| \frac{\partial X}{\partial X'} \right| d^4x.$$

Para definir um elemento de volume invariante podemos multiplicar d^4x por $\sqrt{-g}$ de forma que os jacobianos se cancelam e obtemos assim a seguinte relação para o elemento de volume invariante:

$$\sqrt{-g'} d^4x' = \sqrt{-g} d^4x. \quad (\text{A.3})$$

APÊNDICE B – Transformações Conformes

As transformações conformes têm sido amplamente utilizadas para estudar as relações entre propostas alternativas para a gravidade e a RG [27]. Uma transformação conforme transforma uma métrica $g_{\mu\nu}$ em outra métrica $\tilde{g}_{\mu\nu}$ de acordo com:

$$g_{\mu\nu} = \Omega^2(x)\tilde{g}_{\mu\nu} \tag{B.1}$$

onde $\Omega^2(x)$ representa uma função arbitrária da coordenada espaço-temporal x . As transformações conformes geralmente alteram as equações de movimento, nos específicos casos onde as equações de movimento não são modificadas chamamos a teoria de conformalmente invariante. Pode se mostrar ainda que uma consequência de (B.1) é que os ângulos entre quaisquer dois vetores é invariante [9].

Agora note que o tensor métrica em 4 dimensões tem 10 componentes independentes. Cada uma tem o potencial de ser um grau dinâmico de liberdade, também conhecido como modo. Existem muitas maneiras de parametrizar essas 10 componentes e geralmente podemos escolher uma das 10 componentes para corresponder a escala local geral da métrica, e isso é o referido modo conforme. Em (B.1) (assumindo $\det \tilde{g}_{\mu\nu} = 1$) o modo conforme é codificado no campo escalar e $\tilde{g}_{\mu\nu}$ não possui mais um grau de liberdade conforme, já que sua escala global não muda. Dito de outra forma, as 10 componentes independentes de $g_{\mu\nu}$ são codificadas pelas 9 componentes independentes de $\tilde{g}_{\mu\nu}$ (a componente a menos é devida a restrição sobre o determinante) mais uma componente independente associada a Ω .

No caso mimético a particularidade é o uso de $\tilde{g}^{\alpha\beta}\partial_\alpha\varphi\partial_\beta\varphi$ como grau de liberdade conforme.

Referências Bibliográficas

- [1] GARRETT, K.; DUDA, G. Dark Matter: A Primer. *Advances in Astronomy*, 968283, 2011.
- [2] BERGH, S. van den. The Early History of Dark Matter. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, v. 111, n. 760, p. 657–660, junho 1999.
- [3] MAJUMDAR, D. *Dark Matter: An Introduction*. New York: CRC Press, 2015.
- [4] KANE, G.; WATSON, S. Dark Matter and LHC: What is the Connection? *Mod.Phys.Lett.*, A23:2103-2123, 2008.
- [5] PAPANTONOPOULOS, E. (Ed.). *Modifications of Einstein's Theory of Gravity at Large Distances*. New York: Springer, 2015.
- [6] CHAMSEDDINE, A. H.; MUKHANOV, V. Mimetic dark matter. *JHEP*, 1308.5410, v. 11, p. 135, 2013.
- [7] WALD, R. M. *General Relativity*. Chicago: University Of Chicago Press, 1984.
- [8] CARMELI, M. *Classical Fields: General Relativity and Gauge Theory*. New Jersey: World Scientific, 1982.
- [9] FUJII, Y.; MAEDA, K. ichi. *The Scalar-Tensor Theory of Gravitation*. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
- [10] LOVELOCK, D. The Einstein tensor and its generalizations. *J. Math. Phys.*, v. 12, p. 498–501, 1971.
- [11] LOVELOCK, D. The four-dimensionality of space and the einstein tensor. *J. Math. Phys.*, v. 13, p. 874–876, 1972.
- [12] THIRRING, W. *Classical Mathematical Physics: Dynamical Systems and Field Theories*. Viena: Springer, 1997.
- [13] LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. *The Classical Theory of Fields*. 4. ed. Oxford: Butterworth–Heinemann, 1980.
- [14] CAPELA, F.; RAMAZANOV, S. Modified Dust and the Small Scale Crisis in CDM. *JCAP*, 1412.2051, v. 1504, p. 051, 2015.

- [15] GOLOVNEV, A. On the recently proposed mimetic Dark Matter. *Phys. Lett.*, 1310.2790, B728, p. 39–40, 2014.
- [16] CHAMSEDDINE, A. H.; MUKHANOV, V.; VIKMAN, A. Cosmology with Mimetic Matter. *JCAP*, 1403.3961, v. 1406, p. 017, 2014.
- [17] MUKOHYAMA, S. Dark matter as integration constant in Horava-Lifshitz gravity. *Phys. Rev.*, 0905.3563, D80, p. 064005, 2009.
- [18] HENNEAUX, M.; TEITELBOIM, C. The Cosmological Constant and General Covariance. *Phys. Lett.*, B222, p. 195–199, 1989.
- [19] LYTH, D. H.; LIDDLE, A. R. *The primordial density perturbation: Cosmology, inflation and the origin of structure*. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.
- [20] SAADI, H. A Cosmological Solution to Mimetic Dark Matter. arxiv:1411.4531 [gr-qc], 2014.
- [21] TSUJIKAWA, S. Quintessence: A Review. *Class. Quant. Grav.*, 1304.1961, v. 30, p. 214003, 2013.
- [22] PEEBLES, P. J. E.; RATRA, B. Cosmology with a Time Variable Cosmological Constant. *Astrophys. J.*, 10.1086/185100, v. 325, p. L17, 1988.
- [23] BOYANOVSKY, D.; VEGA, H. J. de; SANCHEZ, N. G. The Classical and quantum inflaton: The Precise inflationary potential and quantum inflaton decay after WMAP. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, astro-ph/0503128, v. 148, p. 96–107, 2005.
- [24] DOBRUSHKIN, V. A. *Applied Differential Equations: The Primary Course*. New York: CRC Press, 2015.
- [25] MOMENI, D. et al. Mimetic Compact Stars. arXiv:1505.05113 [gr-qc], 2015.
- [26] CHAICHIAN, M. et al. Mimetic Dark Matter, Ghost Instability and a Mimetic Tensor-Vector-Scalar Gravity. *JHEP*, 1404.4008, v. 12, p. 102, 2014.
- [27] FARAONI, V.; GUNZIG, E.; NARDONE, P. Conformal transformations in classical gravitational theories and in cosmology. *Fund. Cosmic Phys.*, v. 20, p. 121, 1999.