

Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Instituto de Física

# **Sobre o movimento de uma bola de tênis**

**Lucas Fabrício Palermo Ghisleni**

Trabalho de Conclusão do Curso  
**Bacharelado em Física**

Orientador: Prof. Rudi Gaelzer

Porto Alegre, 02 de dezembro de 2015



# Resumo

Este trabalho apresenta o comportamento da bola de tênis no seu deslocamento através do ar e nas colisões contra o pavimento. A modelagem física empregada para a dinâmica da bola inclui as forças gravitacional, de arrasto hidrodinâmico e de Magnus, sendo que estas últimas resultam do deslocamento de corpos físicos em rotação através de um fluido viscoso. O modelo também inclui a deformação da bola durante o tempo de colisão da mesma com a superfície da quadra de tênis e o seu subsequente arremesso ao ar. Este processo é denominado *quique* da bola e a ação das forças restauradora (devida à deformação) e de atrito com o piso irá determinar os valores de velocidade e ângulo de arremesso para o consequente voo da mesma através do ar. Essa sequência de voo através do ar e quique da bola pode ser descrita ao longo de um número arbitrário de etapas por meio da modelagem física realizada. Entretanto, devido aos fins práticos deste trabalho, o número de etapas será limitado às dimensões da quadra de tênis. Gráficos de diversas trajetórias da bola foram produzidos a partir de um programa numérico desenvolvido para resolver as equações do movimento. Por meio desse programa é possível mensurar as influências dos múltiplos fatores abordados (umidade, temperatura, pressão atmosférica, altitude, desgaste da bola, velocidades de translação e rotação, características do piso, etc.) durante a situação real de um jogo de tênis.

# Abstract

This work studies the behavior of a Tennis ball considering both its displacement through the air and the subsequent collision against the court's pavement. The ball dynamics is modeled by an equation of motion that includes the gravitational force, as well as the hydrodynamic drag and Magnus forces, which result from the motion of a physical body through a viscous fluid. The physical model also considers the deformation that the ball experiences during the collision period and the consequent pitch back to the air. This process is called the bounce of the ball and the kinematic parameters after the bounce (speed and pitch angle) are determined by the inbound parameters, by the restoring force (due to deformation), as well as by the normal and tangential friction forces. The sequence of events comprised by the flight of the ball followed by the bounce on the pavement can be described in an arbitrary number of steps via the proposed model. However, in order to reproduce real game conditions, the total displacement will be limited to the dimensions of a tennis court. The equation of motion is numerically solved by a computational code and the solutions obtained for several set of values of the physical parameters are shown in graphical plots. Employing the computational code, it is possible to quantify the effects of different physical parameters, such as air density and humidity, atmospheric pressure, ball wear and spin and pavement type, for realistic conditions that occur during a tennis match.

# **Sumário**

<b>Introdução</b>	<b>6</b>
<b>1 O Voo</b>	<b>7</b>
<b>2 O Quique</b>	<b>19</b>
<b>3 Os Parâmetros</b>	<b>28</b>
<b>4 Modelos Colisionais</b>	<b>32</b>
<b>5 Resultados</b>	<b>34</b>
<b>6 Considerações Finais</b>	<b>43</b>
<b>7 Referências</b>	<b>44</b>

## Introdução

O objetivo deste trabalho é apresentar alguns dos modelos existentes sobre o movimento de uma bola de tênis a partir do momento em que a mesma sai da raquete até o momento posterior ao quique (colisão com o pavimento). Como a proposta é a exposição dos modelos, não serão realizadas medições experimentais. Essa base virá de estudos já realizados. Os dados serão discutidos e, por fim, inseridos no programa. O programa computacional que foi desenvolvido resolverá numericamente as equações do movimento. Dadas as condições iniciais de saída da raquete: velocidade  $v_0$ , ângulo (com a horizontal)  $\theta_0$  e velocidade angular  $\omega_0$ , o programa predirá o estado da bola após o quique ( $v_2, \theta_2, \omega_2$ ), especificado o tipo de quadra e condições atmosféricas. São explicitadas também as coordenadas ( $v_1, \theta_1, \omega_1$ ) da bola imediatamente antes de colidir com o solo, isto é, ao final da etapa aérea. Através dele se investigará o comportamento da bola sob diversas condições, dentre as quais podemos citar jogos em altitude - nos quais a bola fica sujeita a uma menor pressão atmosférica -, bem como as diferenças do quique em uma quadra de grama e em uma quadra de saibro - as superfícies antagônicas do mundo do tênis.

A proposta maior é desenvolver uma visão ampla e uma descrição matemática do movimento esquematizado na figura 1.

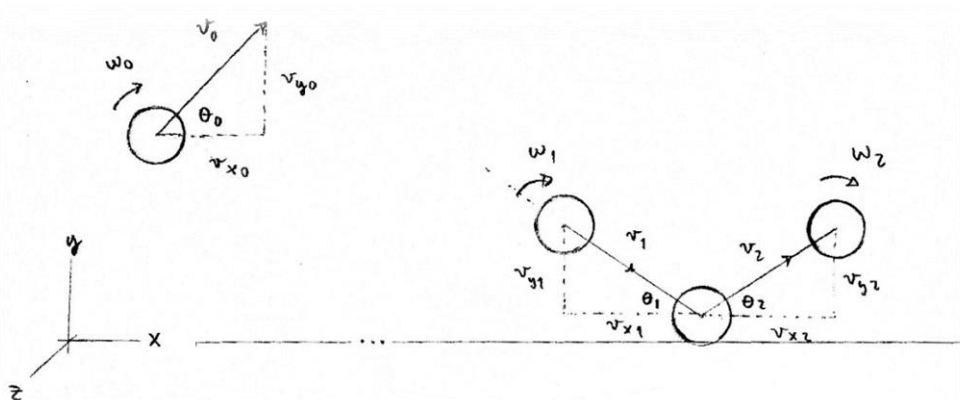


Figura 1: Questão fundamental do trabalho: conhecer as coordenadas finais da bola.

## 1 O voo

O estudo da bola que voa através do ar, golpeada pela raquete, requer fundamentalmente o conhecimento de duas áreas da física para sua descrição: aerodinâmica e balística.

Aerodinâmica é a subárea da dinâmica de fluido – que trata do fluxo de um fluido – particularizada para o comportamento do ar. Balística é o estudo de objetos voando através do ar.

No modelo teórico mais simples de descrição de uma bola de tênis em voo, considera-se uma partícula de massa  $m$  no vácuo, onde não há influência aerodinâmica no movimento. Somente a força gravitacional atua sobre a bola. A equação do movimento é

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g}.$$

Sendo  $\vec{g} = -g\hat{y}$ . O movimento ocorre num plano, de forma que um sistema de coordenadas de dois eixos  $(x, y)$  é suficiente para descrevê-lo.

Condições iniciais  $\vec{r}_0 = (x_0, y_0)$  e  $\vec{v}_0 = (v_{x0}, v_{y0})$ . A solução é

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)),$$

Com

$$x(t) = x_0 + v_{x0}t,$$

$$y(t) = y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Isto é, movimento retilíneo uniforme na direção  $x$  e retilíneo uniformemente acelerado na direção  $y$ , sujeito à aceleração gravitacional.

Obtém-se a trajetória do movimento isolando  $t$  em  $x(t)$  e substituindo em  $y(t)$ , isto é,  $y(t = t(x)) = y(x)$ :

$$y(x) = y_0 + \frac{v_{y0}}{v_{x0}}(x - x_0) - \frac{1}{2} \frac{g}{v_{x0}^2}(x - x_0)^2$$

Trata-se de uma trajetória parabólica.

O tempo de voo  $T$  é o tempo necessário para a bola tocar o chão (coordenada vertical nula), isto é

$$y(t = T) = 0 \therefore y_0 + v_{y0}T - \frac{1}{2}gT^2 = 0$$

$$T = \frac{v_{y0}}{g} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2gy_0}{v_{y0}^2}} \right)$$

Alcance  $A$  é a distância horizontal percorrida pela bola no tempo de voo

$$A = x(t = T)$$

$$A = x_0 + \frac{v_{x0}v_{y0}}{g} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2gy_0}{v_{y0}^2}} \right)$$

Veremos que a incorporação das forças aerodinâmicas impossibilita cálculos exatos do alcance e do tempo de voo. Isso ocorre porque essas forças dependem da velocidade da bola e as equações do movimento não possuem mais solução analítica.

## 1.1 Arrasto

Considerando a interação de um sólido com o fluido, sabe-se que, de maneira geral, um objeto movendo-se a velocidade  $v$  experimenta uma força de resistência que depende das propriedades do fluido, especificamente de sua densidade  $\rho$  e viscosidade dinâmica  $\mu$  (alternativamente, pode-se usar viscosidade cinética  $\vartheta = \frac{\mu}{\rho}$ , sendo que a unidade de  $\mu$  é  $\frac{N \cdot s}{m^2}$  e de  $\vartheta$  é  $\frac{m^2}{s}$ ).

Essa resistência tem em geral duas componentes: uma tensão tangencial denominada arrasto viscoso, e uma tensão normal denominada arrasto de pressão.



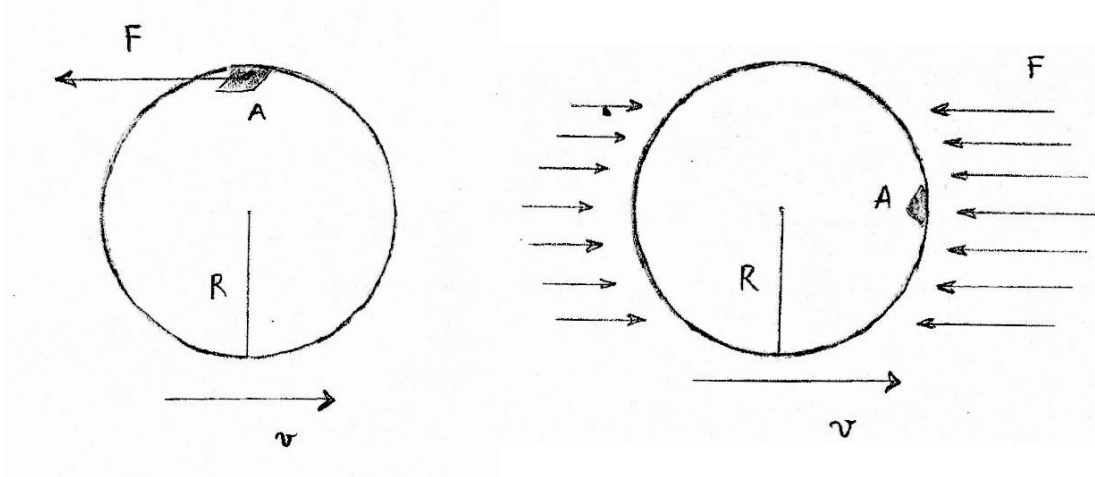


Figura 2: Esquema que representa as duas componentes do arrasto sobre uma esfera que se move no ar. A contribuição tangencial (à esquerda) constitui o arrasto viscoso e a contribuição normal (à direita) constitui o arrasto de pressão.

O arrasto viscoso é uma tensão tangencial da forma:

$$\frac{F}{A} \sim \frac{\mu v}{R}$$

Sendo  $F$  a força de arrasto viscoso,  $A$  a área da seção reta da esfera,  $v$  a velocidade relativa entre a esfera e o fluido e  $R$  o raio da esfera.

O arrasto de pressão resulta de uma diferença de pressão entre a dianteira e a traseira da esfera e segue a forma

$$\frac{F}{A} \sim \rho v^2.$$

A magnitude relativa entre estas duas componentes do arrasto é dada pelo número de Reynolds (quantidade adimensional inserida por George Stokes em 1851, mas popularizada por Osborne Reynolds em 1883),

$$Re = \frac{\text{arrasto de pressão}}{\text{arrasto viscoso}} = \frac{Rv}{\vartheta}.$$

Este parâmetro adimensional caracteriza o tipo de fluxo do fluido ao redor da esfera. Os valores de raio, massa e velocidade para diferentes bolas esportivas são apresentados na tabela 1.

Esporte	massa (g)	raio(cm)	velocidade(ms <sup>-1</sup> )	Re
Shot put	7260	6	10	40.000
Basquete	630	11,9	15	120.000
Tênis	58	3,8	70	180.000
Críquete	160	3,6	40	100.000
Beisebol	150	3,66	40	100.000
Futebol	430	11,3	32	240.000
Golfe	45	2,1	80	110.000
Voleibol	270	10,5	30	210.000
Squash	24	2	70	100.000
Ping-pong	2,5	2	45	60.000

Tabela 1: *Re* típicos. Os parâmetros físicos de diversas bolas esportivas. A velocidade referida é a velocidade de pico: a mais alta registrada no esporte. *Re* foram calculados para essas velocidades, com uso de  $\nu = 0,15 \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$ , a viscosidade cinemática do ar [1].

Os valores de *Re* mostram-se sempre muito maiores do que 1. Isso significa que o tipo de arrasto dominante é o arrasto de pressão. Sendo assim, a forma que se usa para a força de arrasto é oposta ao vetor velocidade e proporcional ao quadrado de seu módulo, definida como

$$\vec{F}_{arrasto} = \frac{1}{2} \rho A C_d v^2 (-\hat{v}),$$

sendo  $\hat{v}$  o vetor unitário na direção e sentido da velocidade.

Esta é conhecida como aproximação invíscida de fluxo.

No coeficiente  $C_d$ , denominado coeficiente de arrasto (*drag*), estão implícitas as peculiaridades da forma do projétil. É difícil, se não impossível, determinar-se o seu valor por primeiros princípios. Por isso, muitas medições experimentais dos seus valores para diversos tipos de bolas esportivas e projéteis de outra natureza são realizadas em túneis de ventos [2,3,4,5].

Tem-se a prática de usar parâmetros adimensionais para expressar as dependências dos coeficientes. Como visto, ao invés da velocidade de translação  $v$ , refere-se ao número de Reynolds  $Re = \frac{Rv}{\nu}$ . Ainda, ao invés da velocidade de rotação  $\omega$ , refere-se ao parâmetro de spin  $S = \frac{R\omega}{v}$ .

O coeficiente  $C_d$  é em geral função de *Re*, de *S* e da rugosidade da superfície da bola. Maiores detalhes serão apresentados nas seções 1.1.1, 1.1.2 e 3.1.

Considerando apenas a força de arrasto, tem-se a seguinte equação de movimento:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - \frac{1}{2} \rho A C_d v^2 \hat{v}.$$

Esta equação possui solução analítica somente no caso unidimensional e com  $C_d$  independente de  $v$ .

### 1.1.1 Fluxo do ar

Para compreender o fluxo real do ar ao redor de uma esfera de superfície irregular como a bola de tênis deve-se inicialmente descrever o fluxo de um fluido não viscoso (invíscido) ao redor de uma esfera lisa.

Na ausência de perturbações, o ar assume um escoamento laminar, no qual os elementos de fluido percorrem linhas retas e paralelas (correspondendo a lâminas paralelas). Encontrando a parte dianteira da esfera, o ar tende a contorná-la. Porém essa deformação do fluxo pela presença do corpo não implica somente a mudança de direção. Há também mudança de velocidade do fluido. Explica-se: o sistema é fechado (não entra nem sai matéria, conservação da massa) e o fluido é incompressível (“conservação da densidade”, válido para velocidades bem menores do que a do som). Assim, mantidos a massa e a densidade, o volume (ou vazão, volume por unidade de tempo) deve permanecer invariante.

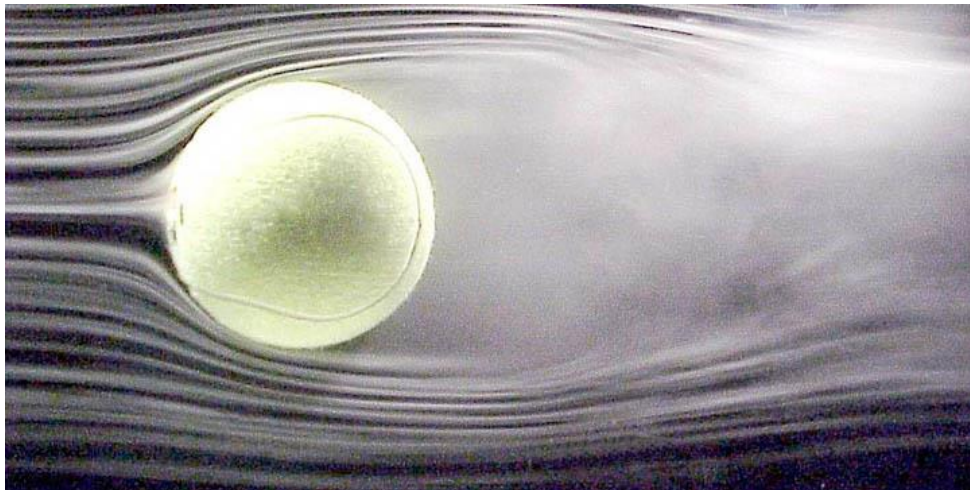
O fluido é forçado a um estreitamento do seu fluxo para realizar o contorno ao redor da parte dianteira da bola. A aproximação das linhas de fluxo pode ser vista claramente na figura 3. Por consequência, ocorre nesta região um aumento da velocidade, de forma que a vazão permaneça inalterada. Este aumento da velocidade do fluido é acompanhado pelo decréscimo de sua pressão (princípio de Bernoulli) até alcançar a máxima velocidade e mínima pressão no meridiano central da bola. O contrário ocorre na parte traseira: o fluxo volta a se ampliar, a velocidade diminui e a pressão aumenta.

Este é o fenômeno que permite a um avião voar. Suas asas cortam o ar ligeiramente inclinadas para cima: ocorre um estreitamento do fluxo sobre elas gerando um aumento da velocidade, e um alargamento sob as mesmas, onde a velocidade do ar, conseqüentemente, diminui. A pressão do ar junto à superfície se torna, assim, maior na parte de baixo da asa, causando a força aerodinâmica que sustenta o avião.

Incorporando viscosidade ao fluido, naturalmente surge uma fina camada de ar que tende a se mover junto à superfície da bola. Tal camada é conhecida como camada limite ou de Prandtl e pode ser visualizada na figura 3. Observa-se também que ela tende a se separar da superfície na parte traseira da mesma. Explica-se: o ar constituinte da camada sofre uma ação de frenagem causada pelo contato com a superfície, e os pontos onde este atinge o repouso são denominados pontos de separação. Surge, assim, uma cauda ou esteira no fluxo, onde a pressão é menor. Por que a pressão é menor? Porque o

ar não consegue exercer um fluxo liso ao redor da bola e não consegue preencher o espaço deixado por esta. Portanto, a pressão nessa região é menor porque o ar é mais rarefeito. Esta é a origem do arrasto de pressão: a separação da camada limite faz da parte traseira da bola uma região de menor pressão em relação à parte dianteira.

Portanto, destaca-se o seguinte fato: a viscosidade não contribui diretamente para o arrasto, mas é responsável por quebrar a simetria do fluxo ao redor da bola, criando uma cauda de menor pressão e originando o arrasto de pressão independente do valor da viscosidade do fluido.



**Figura 3: Translação sem rotação de uma bola de tênis. Fluxo laminar com formação de esteira na traseira da bola [6].**

Existe outro fenômeno que requer o conceito de camada limite para ser explicado: a crise do arrasto, uma queda repentina da resistência do ar a uma certa velocidade.

A camada limite pode ter dois estados distintos: “laminar”, com ar escoando suave e ordenadamente, como na figura 3, ou “turbulenta”, com o ar se movendo caoticamente pela camada (essencialmente, significa fluxo não-laminar: extinguem-se as linhas paralelas de fluxo. Os elementos de fluido oscilam caoticamente em torno de seu próprio eixo de translação, o que caracteriza uma mistura intensa do fluido em si mesmo e presença de pequenos redemoinhos ou vórtex).

Sabe-se que o ar próximo à superfície da bola se move mais lentamente em relação à esta, pois sofre maior ação da força de arrasto viscosa. Na camada laminar, a situação se mantém assim. Porém, na camada turbulenta, o ar próximo à superfície adquire uma velocidade maior, pois na sua trajetória turbulenta e caótica ele se mistura com o ar mais distante. A consequência direta é uma distância maior percorrida ao longo do contorno da bola até parar. Observa-se, assim, que os pontos de separação se tornam mais próximos na parte traseira da bola. Isto elucidada o seguinte fato: a separação da camada turbulenta ocorre mais tarde em relação à laminar. A camada turbulenta gera uma cauda mais estreita, e uma pressão maior na região traseira. Menor a diferença de pressão, menor o arrasto de pressão.

Portanto, o conhecido fenômeno de crise do arrasto corresponde à transição de uma camada laminar para uma camada turbulenta. Tal transição corre abruptamente quando o nº de Reynolds crítico é atingido.

Esta dependência com o número de Reynolds é incorporada ao modelo por variações do coeficiente de arrasto. Em suma, têm-se o seguinte:

Inicialmente,  $C_d$  é crescente monotonicamente com  $Re$  no regime subcrítico, caracterizado por uma camada limite laminar. O aumento de  $Re$  aumenta o atrito viscoso, o que antecipa os pontos de separação, aumentando o arrasto. Quando os pontos de separação estão próximos ao apex (“apex” ou “topo” se referem ao meridiano da bola; situação mostrada na figura 3) ocorre a transição da camada, reduzindo drasticamente o valor de  $C_d$ , tipicamente por um fator de 3. Este volta a crescer com aumento de  $Re$  no regime supercrítico, caracterizado por uma camada limite turbulenta, até os pontos de separação atingirem regiões próximas ao topo novamente. A partir de então, pela impossibilidade de maior alteração nos pontos de separação,  $C_d$  torna-se independente deste. Regime denominado transcrito. Neste regime, o aumento de  $Re$  aumenta a pressão igualmente por toda bola, não altera mais a diferença de pressão que é a responsável pelo arrasto de pressão.

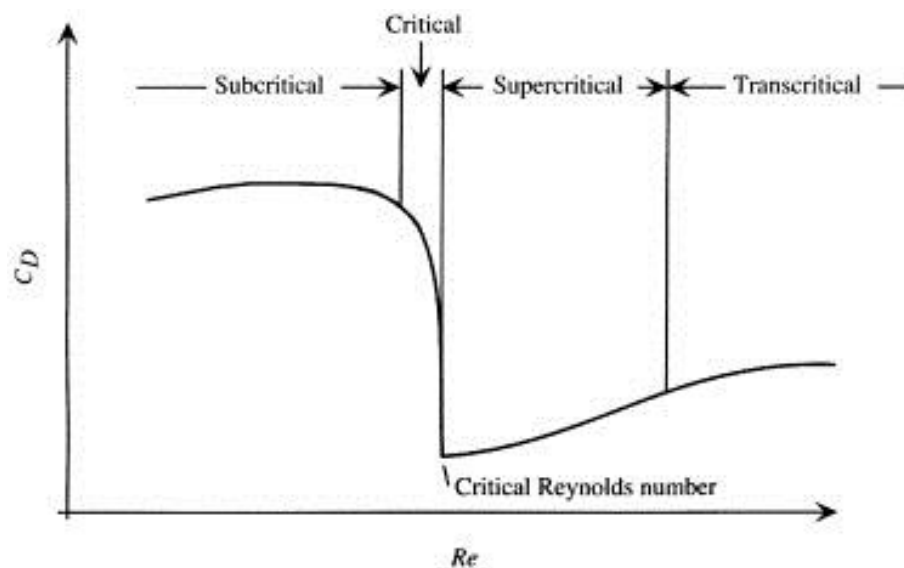


Figura 4: Relação do coeficiente de arrasto  $C_d$  com o número de Reynolds  $Re$  [6].

O fluxo por uma esfera rígida e lisa é um problema estudado exhaustivamente, tanto através de experimentos quanto teoricamente. A figura 5 expõe em detalhes as fases de fluxo.

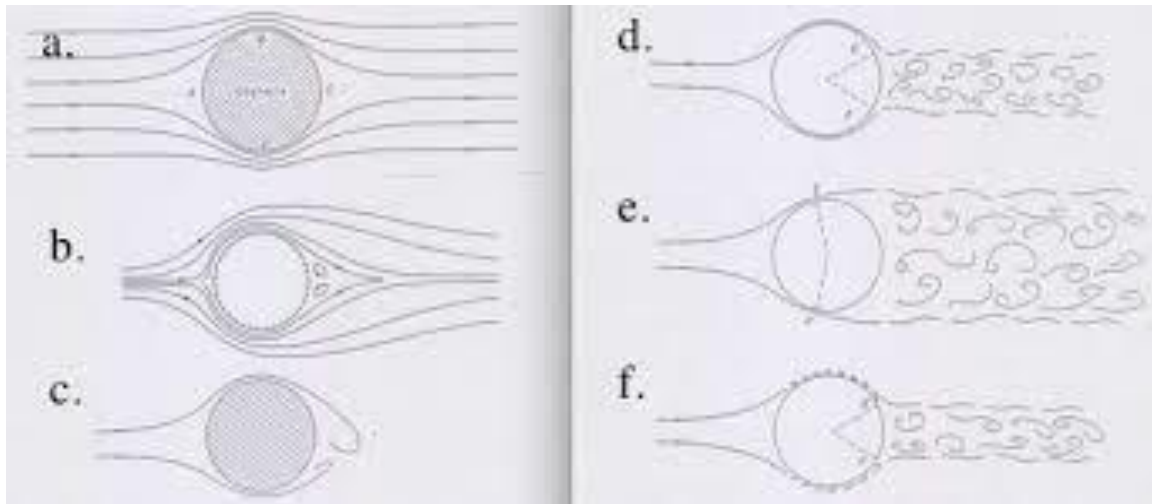


Figura 5: Representação esquemática da evolução do fluxo com crescente número de Reynolds  $Re$ . a) Para  $Re \ll 1$ , *fluxo laminar*. Escoamento liso, linhas de fluxo simétricas. Domínio do arrasto viscoso proporcional à viscosidade e à velocidade. b) Para  $Re > 10$ , *anéis de vórtex laminares*. Separação da camada limite inicia supremacia do arrasto de pressão, proporcional à densidade e ao quadrado da velocidade. A dificuldade do ar em preencher o espaço deixado pela bola se expressa pelo surgimento de redemoinhos. c) Para  $Re > 100$ , *anéis de vórtex turbulentos*. d) Para  $Re > 1000$ , em regime de camada limite laminar, ganha forma a esteira turbulenta que se amplia, aumentando o arrasto até um máximo em e)  $Re \approx 200.000$ . f) Para  $Re > 200.000$ , *camada limite turbulenta*. Separação mais tardia da camada limite causa a crise do arrasto. Estes valores são respectivos a uma esfera lisa [1].

### 1.1.2 Rugosidade

Corpos rugosos apresentam qualitativamente a mesma evolução de regimes de fluxo descrita na seção 1.1.1, porém, são quantitativamente distintos. Baseado na explanação anterior, espera-se que as irregularidades da superfície antecipem as transições do fluxo laminar para turbulento, pois elas estimulam a mistura do ar junto à superfície com o ar mais afastado. Assim, o nº de Reynolds crítico decresce conforme a irregularidade da superfície aumenta.

Portanto, sejam os filamentos da bola de tênis; os pontos de costura da bola de críquete ou de beisebol; as covas na bola de golfe. Em todas, a rugosidade serve para encorajar propositalmente camadas limite turbulentas ao invés de laminares, de forma que a crise do arrasto ocorra a menores velocidades.

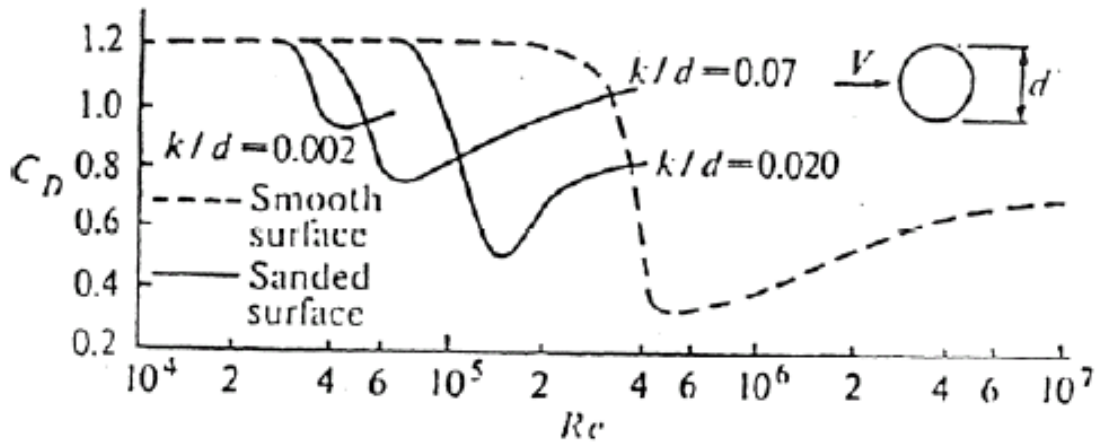


Figura 6: Os efeitos de irregularidades da superfície sobre o coeficiente de arrasto  $C_d$ . O parâmetro de rugosidade é  $k/d$ , onde  $k$  é a dimensão característica da irregularidade (comprimento do filamento para bolas de tênis; profundidade da cova para bolas de golfe; etc.) e  $d$  é o diâmetro da bola. Para a bola de tênis  $k \approx 1 \text{ cm}$ ,  $d = 6,5 \text{ cm} \therefore k/d \approx 0,15$ .

### 1.1.3 Parâmetros referência

Os parâmetros coeficiente de desempenho balístico

$$B = \frac{mg}{\rho A v^2}$$

e razão arrasto-peso (*drag-to-weight ratio*)

$$\epsilon = \frac{\rho A C_d v^2}{2mg}$$

são parâmetros que tem por finalidade avaliar a importância da força aerodinâmica sobre a trajetória de voo da bola. São muito importantes para as técnicas de solução analítica aproximada. Há métodos perturbativos que se baseiam em pequeno arrasto (pequenos  $\epsilon$ ) e em pequena gravidade (grandes  $\epsilon$ ). De Mestre [7] dedica seu capítulo 5 para esta análise.

A bola de tênis, que possui massa  $m = 58g$ , raio  $R = 3,25 \text{ cm}$  ( $A = \pi R^2 = 33,18 \text{ cm}^2$ ),  $C_d \approx 0,6$  (vide seção 4.1), e valor típico de velocidade de saída da raquete  $v = 30 \text{ ms}^{-1}$ , tem associado  $\epsilon \approx 1,9$ . Conclui-se que arrasto e gravidade são igualmente importantes no voo e os métodos perturbativos não se aplicam ao tênis. Caso semelhante é o do golfe ( $\epsilon \approx 1,2$ ).

As trajetórias da bola de basquete ( $\epsilon \approx 0,2$ ) e do disco do atletismo ( $\epsilon \approx 0,1$ ) são suscetíveis à aproximação de pequeno arrasto. As bolas de squash ( $\epsilon \approx 3,2$ ) e tênis de mesa ( $\epsilon \approx 8,8$ ) compõem os casos de pequena gravidade.

## 1.2 Sustentação

De maneira geral, um projétil que atravessa o ar pode experimentar uma força perpendicular a sua velocidade por diversos fatores: forma assimétrica do projétil, ângulo de ataque não-nulo, rotação do projétil, etc.

No caso de uma bola de tênis, esfericamente simétrica, o único fator que produz tal força é a rotação da bola.

### 1.2.1 Efeito Magnus

O efeito do giro da bola sobre sua trajetória foi observado e relatado por Isaac Newton em 1671 após assistir a uma partida de tênis em Cambridge. Em 1742 Benjamin Robins, oficial da artilharia britânica, engenheiro militar, examinou desvios de balas de mosquete e de canhão. Em 1777, Leonhard Euler rejeitou completamente a possibilidade de uma força aerodinâmica resultante do giro.



Figura 7: Heinrich Gustav Magnus

Em 1853 Heinrich Gustav Magnus (foto ao lado) demonstrou o efeito com cilindros, medindo a força lateral que atua sobre eles. Em 1877, Lord Rayleigh, no seu artigo sobre o voo irregular de uma bola de tênis, produziu a primeira descrição teórica, creditando Magnus pela primeira explicação verdadeira do efeito.

Foi somente em 1904 que Ludwig Prandtl forneceu sua teoria de camadas limite que proporcionou uma compreensão do efeito por completo.

Como explicado em detalhe na seção 1.1, a camada limite é uma fina porção de ar que se move junto com a bola devido à viscosidade. Com a rotação da bola em relação ao ar, este se comporta diferente em cada lado da bola. No lado em que a camada avança contra o fluxo, o ponto de separação se move a frente, pois atinge rapidamente o repouso, na vizinhança do apex. No lado que recua, o ar acompanha a superfície da bola, se separando somente mais atrás. Gera-se assim uma separação assimétrica da camada limite, uma cauda defletida e a diferença de pressão nesta outra direção (transversal a  $v$ ) é a causa da força Magnus.



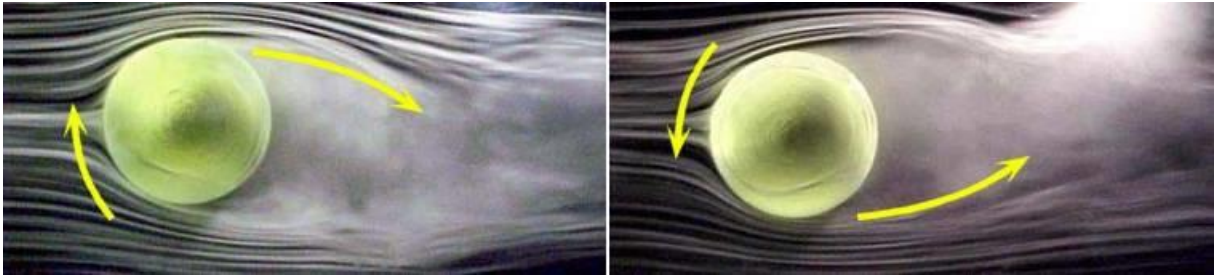


Figura 8: Uma bola de tênis que se desloca para a esquerda. Rotação para “trás” (foto à esquerda), denominada *backspin*, provoca deflexão da esteira para baixo, causando uma força Magnus para cima, pois o ar empurrado para baixo reage com uma força no sentido contrário. Rotação para “frente” (foto à direita), provoca deflexão da esteira para cima, causando uma força Magnus para baixo [6].

Uma bola com velocidade linear  $\vec{v}$  e velocidade angular  $\vec{\omega}$  que atravessa fluido de densidade  $\rho$  fica sujeita a uma força perpendicular a  $\vec{v}$  e  $\vec{\omega}$  simultaneamente (isto é, perpendicular ao plano formado por estes vetores). Esta força tem módulo proporcional a  $v^2$ , pois também se baseia na diferença de pressão entre dois lados da bola.

$$\vec{F}_{Magnus} = \frac{1}{2} \rho A C_l v^2 \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}}{|\vec{\omega} \times \vec{v}|}.$$

Analogamente a  $C_d$ , o coeficiente de sustentação (*lift*)  $C_l$  depende em geral de  $Re$ , de  $S$  e da rugosidade da superfície. Discussão detalhada na seção 3.1.

Uma bola que atravessa em rotação o ar é regida por

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - \frac{1}{2} \rho A C_d v^2 \hat{v} + \frac{1}{2} \rho A C_l v^2 \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}}{|\vec{\omega} \times \vec{v}|}. \quad (1)$$

Esta equação descreve de forma geral a dinâmica da bola de tênis quando a mesma se desloca no ar. Suas soluções serão obtidas numericamente no capítulo 5 para diversos valores de  $C_d$ ,  $C_l$  e  $\rho$ .

### 1.2.2 Efeito Magnus Reverso

No lado de avanço, há uma velocidade maior da bola relativa ao fluido, e conseqüentemente, maior é o  $n^\circ$  de Reynolds associado. No lado de recuo, menor  $Re$ . Estando nos regimes sub ou supercríticos, ocorre o efeito Magnus convencional. Porém, estando a bola na faixa de  $Re$  crítico, pode ocorrer a situação de o lado de avanço estar no regime supercrítico com uma camada limite turbulenta enquanto o lado de recuo estiver no regime subcrítico com camada limite laminar. Isso resultaria numa força Magnus negativa, visto que a camada turbulenta se separaria depois da camada laminar, resultando numa cauda defletida no sentido reverso. Porém, são bolas lisas que estão

mais sujeitas a este fenômeno. As bolas esportivas são projetadas com rugosidades, como explicado, justamente para operarem em velocidades muito maiores do que a velocidade crítica. Desta forma toda a bola, independente do giro que tiver, estará imersa no mesmo regime de fluxo do ar.

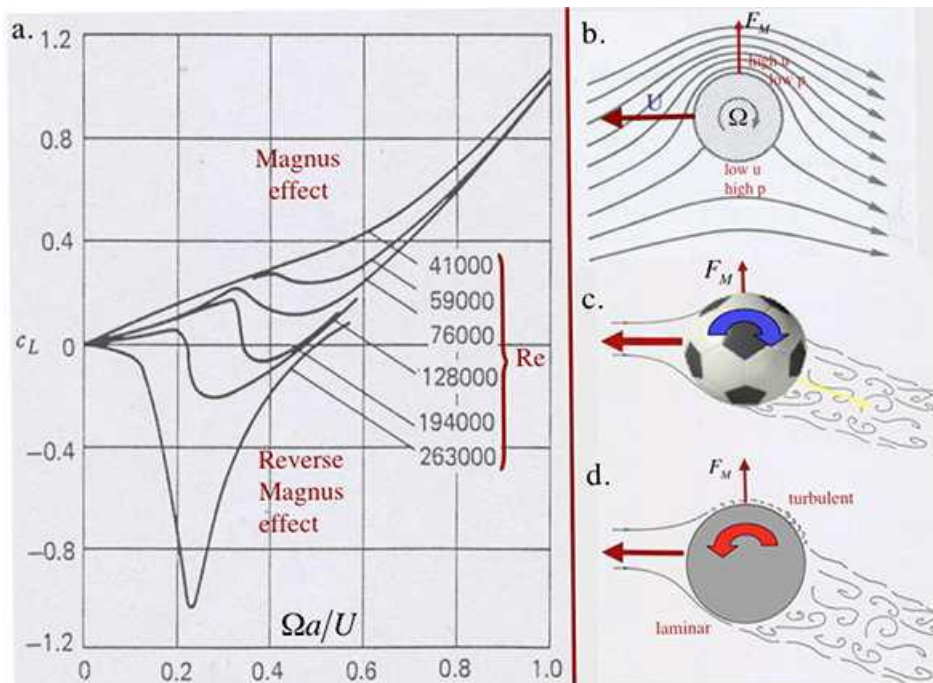


Figura 9: a) A dependência do coeficiente de sustentação  $C_L$  com as velocidades translacional  $U$  e rotacional  $\Omega$  de um cilindro liso de raio  $a$ . A  $Re$  suficientemente alto,  $C_L < 0$ , indicando reversão no sinal da força Magnus. b) Idealizado fluxo não viscoso por um cilindro que gira. c) Fluxo real por uma bola de futebol: efeito Magnus. d) Fluxo real por uma bola lisa: efeito Magnus reverso, originado pela diferença nas camadas limites dos lados de avanço e recuo da bola, o primeiro turbulento, o segundo laminar [1].

### 1.2.3 Torque aerodinâmico

As forças de atrito viscoso, tangenciais à superfície da bola, exercem um torque em relação ao centro de massa. A soma desses torques é em geral negativa e consequentemente a velocidade angular da esfera é continuamente decrescida conforme atravessa o ar [7]. Alaways [8] apresenta um sumário dos estudos realizados para esferas lisas, bolas de baseball e de golfe. Todos indicam decaimentos muito pequenos de  $\omega$ , inferiores a 1% em diversos casos realísticos de voo.

Goodwill et al [2] consideram que a mesma conclusão é também válida para o tênis. Por esta razão, o torque aerodinâmico é desconsiderado neste trabalho. A velocidade angular da bola de tênis não se altera significativamente durante o voo, de forma que  $\omega_0 = \omega_1$ . Isto é, a bola toca o chão com aproximadamente a mesma rotação com a qual saiu da raquete.

## 2 O Quique

### 2.1 Rigidez

O modelo mais simples que descreve o quique de uma bola em uma superfície considera ambos como corpos rígidos de forma que o contato entre eles ocorre em um único ponto. Para compreender o movimento da bola durante o impacto, deve-se explicitar dois casos possíveis de incidência, definidos pelo sentido da velocidade angular  $\omega_1$ .

Incidência com *topspin*:

Qualquer ponto da bola tem duas componentes de velocidade, devidas à translação e

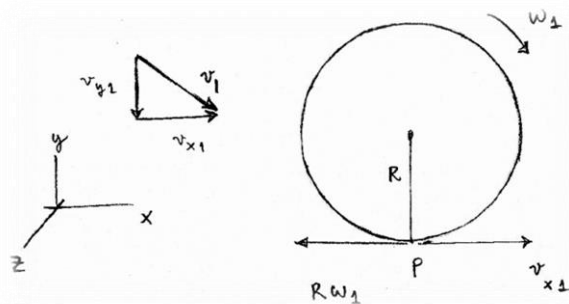


Figura 10: Uma bola que quica com *topspin*. Velocidades de rotação e translação se subtraem em P.

rotação da bola. O caso de incidência com *topspin* é caracterizado por  $\vec{\omega}_1 = \omega_1(-\hat{z})$  de acordo com o sistema de coordenadas explicitado na figura 10. Um ponto P da extremidade inferior tem componente  $v_{x1}$  para a direita (velocidade do CM; devido à translação) e componente  $R\omega_1$  para a esquerda (devido à rotação). A bola inicia seu contato com o chão deslizando para a direita (medidas corroboram que  $v_{x1}$  é quase sempre maior do que  $R\omega_1$  nas situações de jogo). Acompanhando o deslizamento, surge uma força de atrito cinético  $F$  para a esquerda. Pela ação desta força,  $v_x$  decresce e  $\omega$  cresce. Pode ocorrer das componentes se igualarem ( $v_x = R\omega$ ), de forma que P entre em repouso e a bola e a bola inicie movimento de rolamento. As condições para isto ocorrer serão apresentadas a seguir.

esquerda (devido à rotação). A bola inicia seu contato com o chão deslizando para a direita (medidas corroboram que  $v_{x1}$  é quase sempre maior do que  $R\omega_1$  nas situações de jogo). Acompanhando o deslizamento, surge uma força de atrito cinético  $F$  para a esquerda. Pela ação desta força,  $v_x$  decresce e  $\omega$  cresce. Pode ocorrer das componentes se igualarem ( $v_x = R\omega$ ), de forma que P entre em repouso e a bola e a bola inicie movimento de rolamento. As condições para isto ocorrer serão apresentadas a seguir.

esquerda (devido à rotação). A bola inicia seu contato com o chão deslizando para a direita (medidas corroboram que  $v_{x1}$  é quase sempre maior do que  $R\omega_1$  nas situações de jogo). Acompanhando o deslizamento, surge uma força de atrito cinético  $F$  para a esquerda. Pela ação desta força,  $v_x$  decresce e  $\omega$  cresce. Pode ocorrer das componentes se igualarem ( $v_x = R\omega$ ), de forma que P entre em repouso e a bola e a bola inicie movimento de rolamento. As condições para isto ocorrer serão apresentadas a seguir.

esquerda (devido à rotação). A bola inicia seu contato com o chão deslizando para a direita (medidas corroboram que  $v_{x1}$  é quase sempre maior do que  $R\omega_1$  nas situações de jogo). Acompanhando o deslizamento, surge uma força de atrito cinético  $F$  para a esquerda. Pela ação desta força,  $v_x$  decresce e  $\omega$  cresce. Pode ocorrer das componentes se igualarem ( $v_x = R\omega$ ), de forma que P entre em repouso e a bola e a bola inicie movimento de rolamento. As condições para isto ocorrer serão apresentadas a seguir.

Incidência com *backspin*:

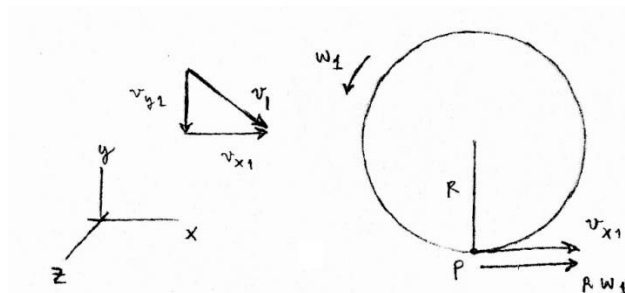


Figura 11: Uma bola que quica com *backspin*. As velocidades de rotação e translação se somam em P.

Neste caso, onde  $\vec{\omega}_1 = \omega_1(\hat{z})$ , tanto a translação como a rotação contribuem com o movimento do ponto P para a direita, de forma que ambos  $v_x$  e  $\omega$  decrescem sob a ação do atrito. Na maioria das situações no tênis, bolas incidentes com *backspin* (*slice*, nos termos do tênis) ocorrem com deslizamento puro para a direita. Puro no sentido de que a bola desliza durante

todo o tempo de contato com o pavimento. Porém, em raros casos, pode a bola parar horizontalmente ( $v_x = 0$ ) ou voltar (reversão de  $v_x$ ). Tais casos ocorrem quando a

componente horizontal da velocidade de incidência  $v_{x1}$  é pequena a ponto de o trabalho de  $F$  ser suficiente para revertê-la no pequeno tempo do impacto (da ordem de unidades de milissegundos [10]). A situação no tênis que exhibe este efeito é o golpe chamado *drop shot* ou “curta”. Neste trabalho, os golpes estudados são *groundstroke* ou “golpe de fundo” e *serve*, o saque. Portanto as análises realizadas consideram incidência com *topspin*.

Completando o diagrama de forças sobre a bola durante o quique há a reação normal  $N$ , que [neste modelo] atua no ponto de contato.

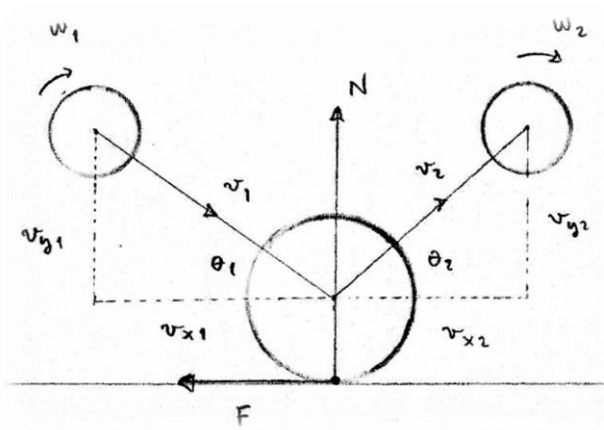


Figura 12: Diagrama de forças em uma bola rígida.

Equações do movimento:

$$m \frac{dv_x}{dt} = -F,$$

$$m \frac{dv_y}{dt} = N,$$

$$I \frac{d\omega}{dt} = RF.$$

Observa-se que o peso da bola é desconsiderado, pois  $N$  o supera enormemente. Tal afirmação verifica-se

pelo cálculo da aceleração média à qual está sujeita a bola durante o quique<sup>1</sup>, que revela um valor mais de 150 vezes superior à aceleração gravitacional imposta pelo peso. Usou-se expressão com coeficiente  $e_y$  que será definido na discussão a seguir – equação (4) -, e valorado na seção 3.2.

$I$  é o momento de inércia da bola em relação ao seu centro de massa. O momento de inércia de uma esfera é da forma  $I = \alpha mR^2$ . Para uma esfera sólida uniforme  $\alpha = \frac{2}{5}$  e para uma esfera oca  $\alpha = \frac{2}{3}$ . A bola de tênis é uma esfera de raio externo  $R = 3,25\text{cm}$ , com cavidade concêntrica de raio interno  $r = 2,6\text{cm}$ . Conhecida a expressão do momento de inércia desta forma geométrica, pode-se calcular  $\alpha$  que corresponda às características da bola:

$$\frac{2}{5} m \left( \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3} \right) = \alpha mR^2.$$

Usando-se os valores dos raios apresentados, obtém-se  $\alpha = 0,55$ .

<sup>1</sup> Cálculo da aceleração média:  $\frac{\Delta v_y}{\Delta t} = \frac{v_{y2} + v_{y1}}{\Delta t} = \frac{(1+e_y)v_{y1}}{\Delta t}$ . Para um quique a partir de 1m de altura,  $e_y = 0,78$ , sendo  $v_{y1} = 4,4\text{m/s}$  e  $\Delta t = 5\text{ms}$ . Resulta que  $\frac{\Delta v_y}{\Delta t} \approx 1566\text{m/s}^2$  [11].

Sabendo que  $F$  e  $N$  são variáveis no tempo e considerando o tempo de impacto  $\tau$  e as condições iniciais  $(v_{x1}, v_{y1}, \omega_1)$  e finais  $(v_{x2}, v_{y2}, \omega_2)$  do quique, esclarece-se:

Impulso de  $F$  no intervalo de impacto  $\tau$  determina  $v_{x2}$ :

$$\int_0^{\tau} F(t)dt = -m(v_{x2} - v_{x1}). \quad (2a)$$

Impulso de  $N$  no intervalo de impacto  $\tau$  determina  $v_{y2}$ :

$$\int_0^{\tau} N(t)dt = m(v_{y2} + v_{y1}). \quad (2b)$$

Impulso do torque  $RF$  determina  $\omega_2$ :

$$R \int_0^{\tau} F(t)dt = I(\omega_2 - \omega_1). \quad (2c)$$

As quantidades  $v_i$  são os módulos das velocidades; todas positivas.

### 2.1.1 Solução das equações de quique: modelo rígido.

Apesar de escritas as equações, o problema não está resolvido porque estas integrais não são conhecidas. Gráficos experimentais de  $F$  vs.  $t$  e  $N$  vs.  $t$  mostram que estas forças apresentam variações complicadas no tempo.

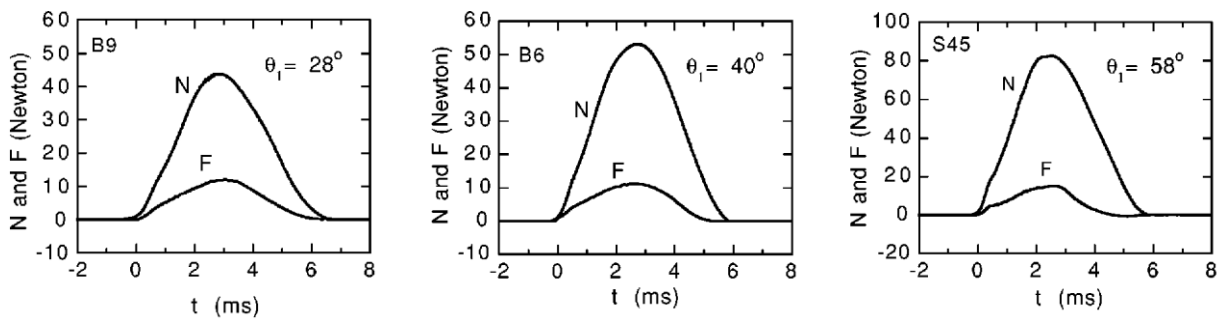


Figura 13: Forças normal e de atrito como funções do tempo de uma bola de tênis que quica. Da esquerda para a direita, ângulos de incidência  $\theta_1 = 28^\circ, 40^\circ$  e  $58^\circ$ . Testes dinâmicos realizados por Cross (2002).

Porém, ainda é possível calcular o estado final da bola. Para isso, necessita-se de uma relação entre  $F$  e  $N$ .

Na situação de deslizamento essa relação existe e é dada por

$$F = \mu N, \quad (3)$$

onde  $\mu$  é o coeficiente de atrito cinético entre a bola e o pavimento.

Adicionalmente, usando um coeficiente definido como a razão das componentes verticais da velocidade de depois e antes do impacto, chamado de coeficiente de restituição vertical  $e_y$

$$e_y = \frac{v_{y2}}{v_{y1}},$$

Sendo  $0 \leq e_y < 1$ . Se a bola perder toda sua energia associada ao movimento vertical, tem-se  $e_y = 0$ ; e como não existe, a rigor, colisão elástica na Natureza, pela dissipação de energia das interações,  $e_y < 1$ .

Através do coeficiente de restituição vertical, a componente vertical da velocidade está determinada:

$$v_{y2} = e_y v_{y1}. \quad (4)$$

Substituindo (3) em (2a) e igualando com (2b), têm-se uma relação entre as variações das componentes da velocidade, e encontra-se:

$$v_{x2} = v_{x1} - \mu(1 + e_y)v_{y1} \quad (5a)$$

Pela igualdade obtida das eqs. (2a) e (2c), determina-se a velocidade angular após o quique:

$$\omega_2 = \omega_1 + \frac{\mu}{\alpha R}(1 + e_y)v_{y1}. \quad (5b)$$

Como analisado anteriormente, o caso de incidência com *topspin* permite que  $v_x$  cresça e  $\omega$  decresça até ser atingida a condição  $v_x = R\omega$ , quando a bola altera seu movimento do deslizamento para o de rolamento.

Este modelo prevê que, atingido o rolamento, a força de atrito  $F$  decresce instantaneamente a zero (pois cessa o deslizamento) e, portanto,  $v_x$  e  $\omega$  não mais se alteram (pois a normal  $N$  não realiza trabalho). Isso significa que a condição de rolamento se aplica diretamente às coordenadas finais:  $v_{x2} = R\omega_2$ .

Inserindo (5b) nesta igualdade:

$$v_{x2} = R \left[ \omega_1 + \frac{\mu}{\alpha R}(1 + e_y)v_{y1} \right],$$

$$= R\omega_1 - \frac{v_{x2}}{\alpha} + \frac{v_{x1}}{\alpha}.$$

Onde usou-se (5a). Definindo ainda o parâmetro  $A = 1 + \frac{1}{\alpha}$ , obtém-se, por fim,

$$v_{x2} = \frac{R\omega_1 + \frac{v_{x1}}{\alpha}}{A}. \quad (6a)$$

Consequentemente, como  $\omega_2 = \frac{v_{x2}}{R}$ ,

$$\omega_2 = \frac{\omega_1 + \frac{v_{x1}}{\alpha R}}{A}. \quad (6b)$$

Estas são as velocidades horizontal e angular finais caso a bola role antes de perder contato com o piso. Mas surge a questão:

Como saber se o rolamento de fato ocorre quando se conhece apenas as coordenadas de incidência  $(v_1, \theta_1, \omega_1)$  e as características do contato bola-pavimento  $(e_y, \mu)$ ?

Usando o resultado acima pode-se determinar a condição de rolamento em termos do coeficiente de atrito  $\mu$ .

Naturalmente,  $v_{x2}$  é contínuo na transição do deslizamento para o rolamento. Igualando (4b) e (5a):

$$v_{x1} - \mu(1 + e_y)v_{y1} = \frac{R\omega_1 + \frac{v_{x1}}{\alpha}}{A}.$$

Resolvendo para  $\mu$ , obtém-se

$$\mu = \frac{v_{x1} - R\omega_1}{(1 + e_y)Av_{y1}}.$$

Esta expressão em  $\mu$  provê seu valor mínimo para alcançar-se a condição de rolamento ( $\mu_{\min}$ ). Ele pode ser escrito em termos do parâmetro de spin calculado nas condições de incidência  $s_1 = \frac{R\omega_1}{v_{x1}}$  - e do ângulo de incidência  $\theta_1$ :

$$\mu_{\min} = \frac{1 - s_1}{(1 + e_y)A} \cotg\theta_1.$$

Eis o grande mérito deste modelo. Esta expressão permite afirmar se a bola rolará ou não durante o quique.

Em suma, com as condições de incidência, calcula-se  $\mu_{\min}$ .

Se  $\mu < \mu_{\min}$ , a bola apenas desliza, e  $v_{x2}$  e  $\omega_2$  são dados pelas eqs. (5a-b).

Se  $\mu \geq \mu_{\min}$ , atinge-se o rolamento e  $v_{x2}$  e  $\omega_2$  são dados pelas eqs. (6a-b).

Resultados deste modelo mostram-se uma boa aproximação.

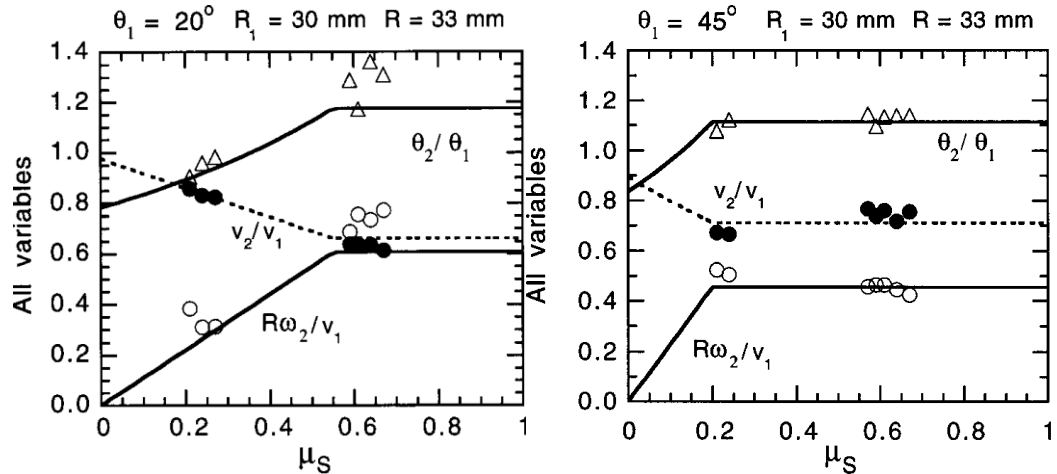


Figura 14: Resultados teóricos e experimentais para uma bola incidente a  $20^\circ$  (esquerda) e  $45^\circ$  (direita) em três superfícies diferentes. Vê-se que a partir de um certo valor  $\mu$ ,  $v_x$  e  $\omega$  tornam-se aproximadamente constantes (independentes de  $\mu$ ), corroborando os valores finais de rolamento previstos pelo modelo rígido [12].

## 2.2 Flexibilidade

O modelo de colisão rígida mostra-se simplificado demais. Apesar de fazer boas previsões sobre situações de suposto rolamento e, a partir daí condições finais da bola, não é capaz de explicar um resultado experimental: a reversão da força de atrito durante o quique [10].

Considerações da elasticidade da bola são necessárias para dar conta deste fenômeno. Como veremos, elas culminam em dois novos parâmetros de quique.

Considerando a bola de tênis uma esfera deformável, o contato com o pavimento ocorre não mais em um único ponto, mas em uma região. A principal consequência deste fato é que a força normal  $N$  não atua mais na linha do centro de massa da bola.

Para uma incidência com *topspin* (figura 10), devido à combinação de translação e rotação, pontos da parte dianteira da bola colidem com o pavimento a maiores velocidades do que os pontos da parte traseira. Isso causa maior compressão da bola na sua parte dianteira. A força normal é maior nesses pontos. Assim, a normal  $N$ , vetor que representa a força normal resultante sobre toda a região de contato, atua verticalmente em um ponto à frente do centro de massa, a uma distância  $D$ , como representado na figura 15. Tal fato altera as equações do movimento, pois a ação descentralizada de  $N$  produz o torque  $DN$ , que se opõe ao torque  $RF$  da força de atrito, reduzindo a variação da velocidade angular  $\omega$  durante o quique.



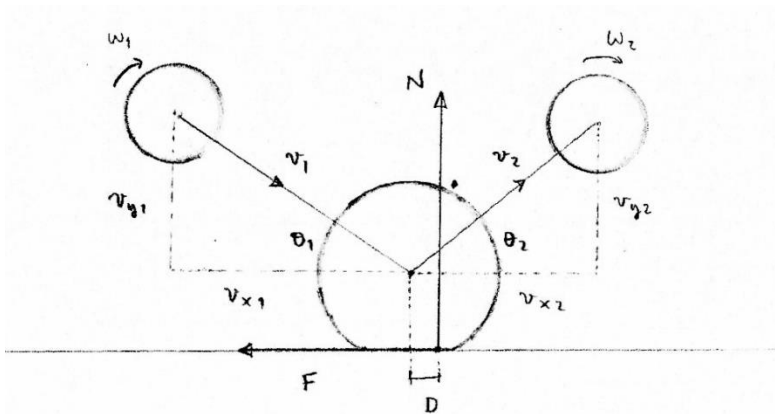


Figura 15: Diagrama de forças em uma bola flexível.

$F$  e  $N$  progridem juntas durante o deslizamento (isto é, crescem e decrescem juntas segundo a proporção  $F = \mu N$ ). Porém, caso seja atingida a condição de rolamento,  $F$  não cai instantaneamente a zero. Devido à energia elástica acumulada, a bola tende a recobrar seu formato original. Este fato gera uma tendência de deslizamento da extremidade inferior para trás (para a esquerda, na figura 15). Este deslizamento faz surgir uma força de atrito estática  $F$  para frente (direita), como observado experimentalmente [10,12].

Portanto, este modelo, mais fidedigno à realidade, afirma que uma bola de tênis inicia o quique deslizando, mas posteriormente, não rola com  $F$  tendendo a zero instantaneamente. Ao invés disso, oscila em tendências de deslizamento para frente e para trás devido às deformações horizontais da bola, com  $F$  tendendo a zero gradualmente e sujeito a uma ou mais reversões.

Maw [13] apresenta um resultado inusitado. Resolvendo numericamente o problema do quique, pelo método da análise de elemento finito, ele constatou que além de partes da

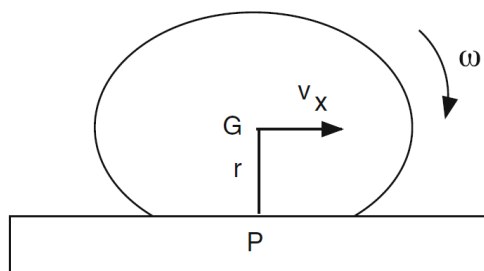


Figura 16: Fase de grip:  $v_x = r\omega$ [14].

região de contato que entram em repouso e sofrem ação da força de atrito estática, haveria partes da bola que sofreriam um efetivo deslizamento para trás e ficariam sujeitas a uma força de atrito cinético revertida. Seu trabalho conclui que existem ambos os efeitos no quique de uma bola, constituindo um movimento denominado grudar-deslizar (*grip-slip*) [10].

Porém, no estudo mais recente sobre o assunto [14], Cross afirma que, nas imagens de vídeo usadas no artigo, não há qualquer evidência de deslizamento para trás durante esta fase. Ele explica então pela variação do raio da bola como é possível  $R\omega_2 > v_{x2}$  sem haver deslizamento. Enquanto a bola está comprimida, o centro de massa,  $G$ , está localizado a distância  $r < R$  acima da superfície. Um ponto  $P$  da superfície da bola está em repouso instantâneo se  $v_x = r\omega$ . Todos os pontos a mesma altura de  $G$  também

transladam com velocidade horizontal  $v_x < R\omega$  durante a fase de *grip*. O movimento é semelhante ao de um tanque de guerra: a base permanece em repouso enquanto o corpo se move à frente. A diferença para o quique está no movimento vertical do centro de massa: conforme ele ascende,  $r$  cresce e  $r\omega$  pode então exceder  $v_x$ , causando deslizamento pra trás justamente na perda do contato.

Apesar desta complexidade, a única alteração explícita nas equações do movimento ocorre no torque. Têm-se:

$$\int_0^\tau F(t)dt = -m(v_{x2} - v_{x1}), \quad (7a)$$

$$\int_0^\tau N(t)dt = m(v_{y2} + v_{y1}), \quad (7b)$$

$$R \int_0^\tau F(t)dt - D \int_0^\tau N(t)dt = I(\omega_2 - \omega_1). \quad (7c)$$

### 2.2.1 Solução das equações de quique: modelo flexível.

O deslizamento tem solução conhecida a partir da relação  $F = \mu N$ :

$$v_{x2} = v_{x1} - \mu(1 + e_y)v_{y1}, \quad (8a)$$

$$\omega_2 = \omega_1 + \frac{(R\mu - D)(1 + e_y)v_{y1}}{\alpha R^2}. \quad (8b)$$

Ele ocorre por todo o quique caso

$$\mu < \frac{1 - s_1}{(1 + e_y)A} \cot g\theta_1 - \frac{D}{\alpha AR}.$$

$D \rightarrow 0$  conduz aos resultados do modelo rígido.

Se  $\mu$  supera este valor, sabe-se que a parte inferior da bola atingirá o repouso (*grudar*, *grip*).

Este regime é caracterizado pela presença do atrito estático regido pelas deformações horizontais da bola. Não há uma relação entre  $F$  e  $N$  que permita reescrever as equações do movimento. Desenvolve-se o modelo introduzindo um novo parâmetro: o coeficiente

de restituição horizontal  $e_x$ , definido pela razão entre as velocidades horizontais da extremidade inferior da bola depois e antes do quique.

$$e_x = -\frac{(v_{x2} - R\omega_2)}{(v_{x1} - R\omega_1)}.$$

Diferentemente de  $e_y$ ,  $e_x$  pode ser positivo ou negativo. O valor de  $e_x$  caracteriza o quique, como segue:

$e_x = -1$	superfície sem atrito	$v_{x2} = v_{x1}$ ; $\omega_2 = \omega_1$ .
$-1 < e_x < 0$	deslizamento	$R\omega_2 < v_{x2}$ .
$e_x = 0$	rolamento	$R\omega_2 = v_{x2}$ .
$0 < e_x < 1$	grude	$R\omega_2 > v_{x2}$ .
$e_x = 1$	energia elástica integral	$R\omega_2 > v_{x2}$ .

Se a bola gruda na superfície, isto é, se a extremidade inferior entra em repouso, então  $e_x = 0$ . Porém a energia elástica armazenada faz com que  $e_x > 0$ . Se nenhuma energia for dissipada, então  $e_x = 1$ . A magnitude de  $e_x$  nesse caso indica quão bem a bola adere à superfície e quanta rotação adicional pode ser esperada como resultado da “devolução” dessa energia.

De volta às equações, substituindo (7a) e (7b) em (7c), produz-se

$$I\omega_1 + mRv_{x1} - mDv_{y1} = I\omega_2 + mRv_{x2} + mDv_{y2}. \quad (9)$$

Combinando esta equação com os coeficientes de restituição vertical  $e_y$  e horizontal  $e_x$ , encontram-se as soluções

$$v_{x2} = \frac{(1 - \alpha e_x)}{1 + \alpha} v_{x1} + \frac{\alpha(1 + e_x)R}{1 + \alpha} \omega_1 - \frac{D(1 + e_y)}{R(1 + \alpha)} v_{y1}, \quad (10a)$$

que pode ser reescrita como

$$v_{x2} = v_{x1} - \frac{(1 + e_x)(v_{x1} - R\omega_1)}{A} - \frac{D(1 + e_y)v_{y1}}{\alpha AR}.$$

E

$$\omega_2 = \frac{(\alpha - e_x)}{1 + \alpha} \omega_1 + \frac{(1 + e_x)}{R(1 + \alpha)} v_{x1} - \frac{D(1 + e_y)}{R^2(1 + \alpha)} v_{y1}. \quad (10b)$$

Condições finais escritas em termos das condições iniciais e de três parâmetros de

quique  $e_y$ ,  $e_x$  (ou  $\mu$ ) e  $D$ . Sendo os valores destes parâmetros fixos, independentes das condições de incidência da bola, este modelo é muito útil.

Estas expressões (10a-b) são válidas independente de a bola deslizar, rolar ou grudar. Porém, no caso de deslizamento, elas não são úteis, pois comparando com (8a-b), vê-se que  $e_x$  é uma complicada função de  $\mu$  e  $D$ . No caso de *grip*, pode-se esperar que as expressões (10a-b) resultem (6a-b) com  $D \rightarrow 0$  e  $e_x \rightarrow 0$ , o que verifica-se verdadeiro. Porém, os valores assumidos por  $e_x$  não são zero, pois a bola não rola, mas “gruda” e oscila de acordo com as deformações horizontais da sua estrutura. Estes valores estão entre 0 e 0,2. Maiores detalhes apresentados na seção 3.2.

Costuma-se trabalhar com a variação relativa das componentes horizontais da velocidade ( $\frac{v_{x2}}{v_{x1}}$ ) para eliminar a necessidade de explicitar  $v_{x1}$  em cada caso. Então, em suma,

$$\frac{v_{x2}}{v_{x1}} = 1 - \mu(1 + e_y)tg\theta_1, \quad se \mu < \mu_{mín}.$$

$$\frac{v_{x2}}{v_{x1}} = 1 - \frac{(1 + e_x)(1 - s_1)}{A} - \frac{D(1 + e_y)}{\alpha AR}tg\theta_1, \quad se \mu \geq \mu_{mín}.$$

O próximo capítulo versa sobre os valores dos parâmetros aerodinâmicos e de quique, suas relações com as coordenadas da bola e a maneira como são medidos ou calculados.

## 3 Os Parâmetros

A dificuldade enfrentada pelos modelos apresentados é que, por não haver conhecimento sobre os detalhes do fenômeno, obscurecem-se nos coeficientes as nuances das interações. Eles não são derivados de primeiros princípios, então resta o esforço experimental de conhecer a dependência de  $C_d$ ,  $C_l$ ,  $e_y$ ,  $\mu$ ,  $e_x$  e  $D$  com a velocidade e rotação de voo e velocidade, rotação e ângulo de incidência no pavimento.

### 3.1. Parâmetros aerodinâmicos

As alterações das intensidades do arrasto e da sustentação (efeito Magnus), descritas nos capítulos 1 e 2, de acordo com alterações do número de Reynolds  $Re$ , da rugosidade e do parâmetro de spin  $S$  ocorrem, nos modelos aerodinâmicos apresentados, via alteração dos valores dos coeficientes implícitos nos modelos.

### 3.1.1 Bolas em translação pura (*non-spinning balls*)

Goodwill et al [2] realizaram testes de bolas novas de 3 marcas diferentes em um túnel de vento. Apresentaram  $C_d$  decrescente de 0,66 com  $Re = 80.000$  a um valor de aproximadamente 0,62 com  $Re = 250.000$ . A redução de  $C_d$  com  $Re$  é um fato bem conhecido, que se explica pelo “deitar” dos filamentos da bola sob altas velocidades [3,10]. Essa redução de 0,04 pode-se estimar pela redução do diâmetro da área projetada da bola em 2 mm. Imagens da felpa da bola se deitando confirmam estas ordens de magnitude da variação do diâmetro [15]. Verificou-se que bolas novas têm comportamentos indistintos pelas marcas.

Mehta e Pallis [16] testaram bolas usadas como função do número de “games”. No tênis, cada “game” corresponde a um conjunto de 4 a 10 “pontos”. Pode-se estabelecer que a bola sofre uma média de 4 impactos por ponto. Eles encontraram que  $C_d$  era 6% maior (que bolas novas) após a bola ter sido usada por 6 games. A partir de então decrescia, tornando-se 6% menor (do que bolas novas) após o uso por 9 games. Explicaram este resultado a partir da observação de que a bola fica com filamentos salientes (*fluffs up*) durante o uso inicial, mas após nove games a superfície se torna gasta, com perda de muitos filamentos. Este resultado concorda perfeitamente com o obtido por Chadwick [15] que mostrou que  $C_d$  apresenta essas variações de 6% simplesmente elevando os filamentos ou “barbeando” a bola.

Estes resultados elucidam a questão das velocidades de bolas novas e usadas. Durante os primeiros games, ou seja, até cerca de 50 impactos, a bola torna-se mais lenta pelo saltar dos filamentos. Isso ocorre devido às sucessivas colisões com o chão e com a raquete, causando um aumento de sua área (computado em  $C_d$ ) e, conseqüentemente, do arrasto. A partir de então, a bola se torna significativamente mais lisa pela perda de filamentos, tornando-se mais “rápida” do que a bola nova, isto é, sofrendo um menor arrasto aerodinâmico.

### 3.1.2 Bolas em rotação (*spinning-balls*)

Goodwill et al [2] mediram coeficientes  $C_d$  e  $C_l$  variando com rotações de 0 a 2750 RPM. Obtiveram que  $C_d$  varia de 0.65 a 0.69 para bolas novas e de 0.61 a 0.65 para bolas usadas. Registra-se a mesma diferença de 0,04 entre bolas novas e usadas, porém num regime de valores ligeiramente maiores em relação à ausência de rotação. Sob rotação, os filamentos tendem a se elevar, aumentando a área e conseqüentemente o arrasto.

O efeito Magnus, bem como o arrasto, também se torna mais intenso conforme maior a rotação da bola, pois maior é a deflexão da camada limite e, assim, maior contribuição à força aerodinâmica perpendicular decorrente. Portanto, espera-se que  $C_l$  cresça com a velocidade angular.

Pelos experimentos, evidencia-se uma proporção direta de  $C_l$  com  $\omega$ . Com  $v$ , inversa. Tais resultados reforçam que  $C_l$  suposto igual ao parâmetro de spin

$$C_l = \frac{R\omega}{v}$$

é uma boa aproximação para o coeficiente de sustentação de uma bola de tênis [6,17].

Ainda, verificou-se que, exatamente como para  $C_d$ , os valores de  $C_l$  são indistinguíveis entre bolas novas de marcas diferentes e bolas usadas possuem  $C_l$  inferiores aos de bolas novas.

Adicionalmente aos comportamentos citados, o estudo de Cooke [4] concluiu que, após perder o contato com a raquete, a bola atinge rapidamente um estado estável de voo: o estado transiente com a bola ainda deformada e o fluxo de ar ao redor ainda se formando geralmente não contribui significativamente a trajetória da bola.

Mehta e Pallis [16] verificaram que orientação da costura da bola não tem influência significativa sobre a trajetória.

## 3.2 Parâmetros de quique

### 3.2.1 Coeficiente de restituição vertical $e_y$

As regras do tênis, estabelecidas pela Federação Internacional de Tênis (ITF) especificam que uma bola solta de uma altura de 100 polegadas deve retornar a uma altura entre 53 e 58 in. [18]. Isso determina os valores permitidos de  $e_y$

$$e_y = \frac{v_{depois}}{v_{antes}} = \frac{\sqrt{2gh_{retorno}}}{\sqrt{2gh_{inicial}}},$$

$$0,728 \leq e_y \leq 0,762 .$$

Esta faixa é definida por um teste de queda vertical a partir da altura de (100in. = 2,54m). A bola colide com o chão a  $v_{antes} = 7,05 \text{ ms}^{-1}$ . A questão é que se verifica (pelas medidas de quique feitas com câmeras de alta precisão) que para os quiques oblíquos na maioria das quadras,  $e_y$  assume valores tipicamente entre 0,8 e 0,9. Conclui-se que este coeficiente depende da velocidade de colisão, e que ambos obedecem a uma relação de proporcionalidade inversa: nas situações de jogo, a componente vertical tem valores menores do que desta queda vertical, por isso que os valores típicos de  $e_y$  superam o intervalo de aprovação pela ITF.

### 3.2.2 Coeficiente de atrito cinético $\mu$

Uma forma de determina-lo é medindo-o diretamente.

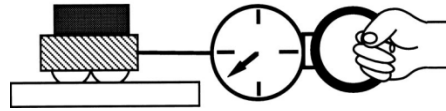


Figura 17: Aparato de medição do coeficiente de atrito cinético  $\mu$ . Consiste de quatro bolas fixas no interior de uma caixa e arrastadas sob um peso adicional [12].

Outra forma de determinar o valor de  $\mu$  é medindo as componentes horizontais da velocidade da bola antes e depois do impacto, com câmera de vídeo (como para  $e_y$ ). Importante realizá-las para ângulos de incidência pequenos, de forma a garantir que a bola apenas deslizará. Pode-se então usar a expressão de  $v_{x2}$  no caso do quique, que resolvendo para  $\mu$  conduz à

$$\mu = \frac{v_{x1} - v_{x2}}{(1 + e_y)v_{y1}}.$$

Resumo dos resultados das seções 3.2.1 e 3.2.2.

Superfície	$e_y$	$\mu$
Concreto liso	0,79	0,42
Grama ( <i>grass court</i> )	0,72	0,60
Rebound Ace ( <i>hard court</i> )	0,83	0,70
Saibro ( <i>clay court</i> )	0,88	0,80

Tabela 2: Valores de uma superfície lisa e dos três principais tipos de quadras de tênis. Existe a nomenclatura de “velocidade da quadra” que se refere à ação horizontal sobre a bola. Saibro é o grande representante das quadras ditas “lentas”. Rebound Ace é um tipo de concreto (usado no torneio Australian Open) representante das quadras ‘duras’, nas categorias de “média” e “rápida” e a grama a superfície considerada a mais “rápida”. Cross et al [19] afirmam que, grosso modo, as quadras de saibro, concreto e grama obedecem ao padrão de  $\mu$  na proporção 0,6; 0,7; 0,8 e de  $e_y$  na proporção de 0,75; 0,8; 0,85. Como uma média das medições de diversos autores [19,20,21], adotam-se para este trabalho os valores apresentados nesta tabela.

Esta tabela evidencia o fato de que quadras que são lentas horizontalmente (grande  $\mu$ ) geralmente são rápidas verticalmente (grande  $e_y$ ).

### 3.2.3 Coeficiente de restituição horizontal $e_x$

Quando a bola desliza por todo o quique, as suas coordenadas finais dependem do coeficiente de atrito  $\mu$ . No entanto, quando ela gruda (grip),  $v_{x2}$  e  $\omega_2$  não dependem mais de  $\mu$ , mas de um parâmetro relacionado à deformação horizontal da bola:  $e_x$

A relação de  $e_x$  com o ângulo de incidência  $\theta_1$  é, em suma, a seguinte: para  $\theta_1$  pequenos, tipicamente inferiores a  $15^\circ$ , a bola apenas desliza e quica com  $e_x < 0$ . Não interessa o valor de  $e_x$  pois  $v_{x2}$  e  $\omega_2$  são proporcionais a  $\mu$ , calculados pelas expressões em (5a-b). Para  $\theta_1$  maiores, a partir dos quais a bola gruda,  $e_x$  varia numa estreita faixa entre 0 e 0,2 e  $v_{x2}$  e  $\omega_2$  são calculados por (10a-b). Bolas que quicam com  $e_x > 0$  são chamadas

“overspinning”. Ressalva faz-se para o caso de  $\theta_1$  muito grande, no qual  $e_x$  pode ser negativo devido à uma prematura reversão da força de atrito que causa diminuição de  $\omega$  e aumento de  $v_x$ . É claro, então, que a situação que maximiza  $\omega$  e a minimiza  $v_x$  é a ocorrência de *grip* bem no final do quique.

Os valores de  $e_x$  foram obtidos com uma câmera de vídeo, medindo-se  $v_1, \omega_1, v_2$  e  $\omega_2$  e calculando-se pela própria definição do coeficiente [21].

### 3.2.4 Desalinhamento $D$

Devido à deformação da bola, a força normal, durante o quique, está aplicada a distância  $D$  à frente do centro de massa. Medições mostram que quanto mais rasante, mais à frente na bola atua a normal. Portanto,  $D$  decresce com o ângulo de incidência  $\theta_1$ . Porém essas variações são bem pequenas para bola de tênis e não se investigaram ainda suas causas [14,21].

Pelo mesmo procedimento para  $e_x$  e usando a equação (9) calculam-se os valores de  $D$ . Cross [21] obteve-os distribuídos numa faixa de 3 a 10 *mm*. A exceção à quadra de saibro que apresentou  $D = 11,1\text{mm}$ . Thorpe e Canaway [22] obtiveram valores entre 4 e 8 *mm*.

De maneira geral, em se tratando destes coeficientes de quique, a Federação Internacional de Tênis (ITF) é alvo de críticas. Ela os define por testes conduzidos em condições que não correspondem às do jogo, de forma que os valores reais assumidos são distintos e muitas vezes desconhecidos. Então, no meio científico, não há uniformidade nos valores e há o reconhecimento dos cientistas da dificuldade de precisá-los. O caso da quadra de grama, por exemplo, apresenta a maior variedade de medições, pois há forte influência desde fatores como a altura da grama, a umidade absorvida pelas folhas, etc.

## 4 Modelos Colisionais

Como explicado na seção 2.1, as forças  $F$  e  $N$  são dependentes do tempo. Em geral são difíceis ou mesmo impossíveis de serem determinadas analiticamente. Os modelos de quique apresentados não resolvem as equações do movimento, mas encontram as condições finais relacionando as equações e inserindo parâmetros. O problema se transfere para a determinação destes parâmetros. Estudos experimentais são amplamente realizados para determiná-los. A rigor, a dificuldade teórica continua quando os parâmetros se mostram dependentes das condições da bola, pois há um valor para cada caso particular. Porém, se os parâmetros mostram pouca variação ou uma variação bem comportada, podem ser previstos, e o modelo se torna útil, com considerável poder preditivo.



Questões como “quanto tempo dura o quique?” e “quanto a bola deforma?” requerem modelos que suponham teoricamente ou calculem numericamente as forças de contato com o pavimento.

#### 4.1 Modelo Hertziano

Este modelo de colisão é caracterizado por considerar a força normal  $N$  da forma

$$N = kx^n,$$

onde  $x$  é a compressão da bola.

Se a força normal é diretamente proporcional à deformação da bola, caso de Lei de Hooke ( $n = 1$ ), a equação do movimento da bola durante o quique é

$$m\ddot{x} = -kx,$$

com  $x(t = 0) = 0$  e  $\dot{x}(t = 0) = v_{y1}$ .

A solução é a forma senoidal

$$x(t) = x_m \text{sen}(\beta t),$$

$$N(t) = -kx_m \text{sen}(\beta t).$$

O tempo de contato da bola com o pavimento  $\tau$  pode ser previsto, pois corresponde a meio ciclo do movimento ( $N$  parte de zero, cresce a  $N_m = -kx_m$  e retorna a zero), isto é, metade do período:

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Usou-se que  $\tau = \frac{T}{2}$ , o período  $T = \frac{2\pi}{\beta}$  e a frequência angular  $\beta = \sqrt{\frac{k}{m}}$ . Sendo a massa da bola  $m = 58 \text{ g}$  e a constante elástica da bola  $k = 2 \cdot 10^4 \text{ N/m}$  [23], estima-se que

$$\tau \approx 5,3 \text{ ms}.$$

A deformação máxima da bola é dada por

$$x_m = v_{y1} \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Usou-se que  $\dot{x}(t) = \beta x_m \text{cos}(\beta t)$  e aplicou-se a condição inicial  $\dot{x}(t = 0) = v_{y1}$ . As diversas trajetórias estudadas no capítulo 5 revelaram que em situações de jogo uma bola de tênis quica com  $5,3 \text{ ms}^{-1} \leq v_{y1} \leq 7,5 \text{ ms}^{-1}$ , valores com os quais se estima

$$9,4 \text{ mm} \leq x_m \leq 12,7 \text{ mm}.$$

O modelo Hertziano, a despeito de sua simplicidade, se mostra consistente com as observações de tempo de impacto da ordem de 5 ms e compressão máxima da bola da ordem de 10 mm [9,12].

Porém, para todas as potências  $n$  da força, este modelo é elástico: prevê que a velocidade após a colisão é igual à velocidade antes ( $v_2 = v_1$ ). Sabe-se que a colisão de uma bola sempre envolve alguma perda de energia (fato que se faz presente nos modelos apresentados através dos coeficientes  $e_x$  e  $e_y$ , sempre inferiores a 1).

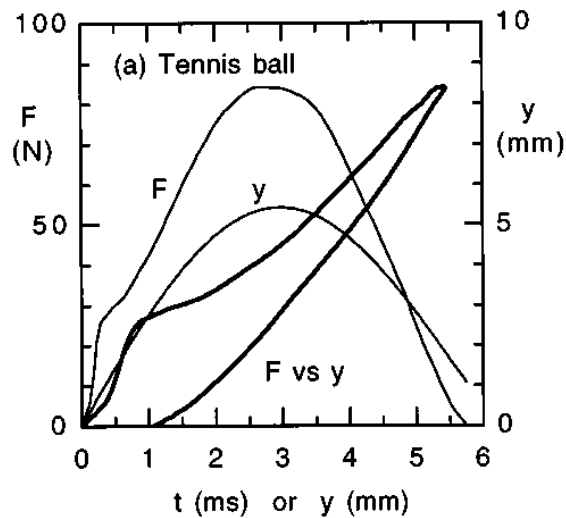


Figura 18: Medidas experimentais da força normal (nomeada  $F$ ) e da compressão da bola ( $y$ ). Testes de compressão estática da bola que mostram, além de  $F$  vs  $t$  e  $y$  vs  $t$ , a curva  $F$  vs  $y$ , em negrito. Esta última é chamada de curva de histerese. Observa-se que ela é aberta, o que significa que a bola permanece deformada após a força ter cessado. Corrobora-se assim a plasticidade da deformação da bola, e por consequência, a dissipação de energia durante o quique [23].

Como exemplo do modelo numérico, cita-se o modelo de Maw [13], que é efetivamente uma solução numérica pela técnica de análise de elemento finito.

## 5 Resultados

Desenvolveu-se um código computacional em linguagem Fortran 90, o qual resolve numericamente a equação para o voo (eq. 1). O método empregado é o Runge-Kutta de 4º ordem com parâmetro (passo temporal) de valor  $10^{-3}$  [24]. Adicionando-se ao programa as equações obtidas para o quique (eqs. 4 e 10a-b), se investigou a influência de diversos fatores sobre a trajetória da bola. São esses fatores:

Condições atmosféricas de umidade, temperatura, pressão e altitude.

Condições da bola referente ao desgaste (número de impactos sofrido).

Características da quadra.

## 5.1. Condições atmosféricas

Umidade, temperatura e altitude alteram o arrasto sofrido pela bola porque alteram a densidade do ar.

### 5.1.1 Umidade

Apesar de contra intuitivo, o aumento da umidade diminui a densidade do ar. Isso ocorre porque, obediente à lei de gás ideal, o ar úmido contém o mesmo número de moléculas num certo volume que o ar seco. O ar seco é composto basicamente por nitrogênio e oxigênio. No aumento da umidade algumas dessas moléculas são “substituídas” por moléculas de água, mais leves.

A razão de sentirmos o ar úmido mais “pesado” não se deve à variação de densidade. A presença de mais vapor de água no ambiente dificulta a evaporação do suor, causando maior esforço ao corpo neste processo de refrigeração; essa dificuldade interpretamos como “ar mais pesado”.

Medições científicas, por fim, atestam que a alteração da densidade do ar devido à umidade é mínima. No caso extremo em que o ambiente se encontre à temperatura de 45°C, a mudança na densidade do ar, ao passar de seco para úmido e saturado, representa uma redução de 4% da densidade do ar seco. Partidas de tênis sequer são realizadas em condições de alta temperatura e umidade, tamanho desgaste proporcionado ao corpo humano. A 25°C, esta mudança é de aproximadamente 1%.

Usando o programa desenvolvido, calculou-se a velocidade com que a bola, num típico golpe de fundo sem rotação<sup>2</sup>, chega à linha de fundo do oponente: 75,9 km/h. Com o ar 1% menos denso, sob as mesmas condições de saída da raquete, a bola chega com velocidade de 76,2 km/h. Uma variação de 0,3 km/h é bem pequena.

### 5.1.2 Temperatura e Pressão

Temperatura e pressão exercem efeitos mais intensos sobre a densidade do ar do que a umidade.

A mudança de temperatura razoável para esta análise, sabendo que o calendário dos torneios profissionais abrange o verão das localidades, é de 10°C a 38°C. Essa alteração é responsável pela redução da densidade em 10%. Pelo mesmo procedimento anterior, verifica-se que essa variação causa um acréscimo de cerca de 4 km/h na velocidade da bola.

A maioria das localidades da Terra apresentam pressão barométrica entre 737 e 787 mmHg, o que corresponde a uma variação potencial de 7% sobre a densidade.

---

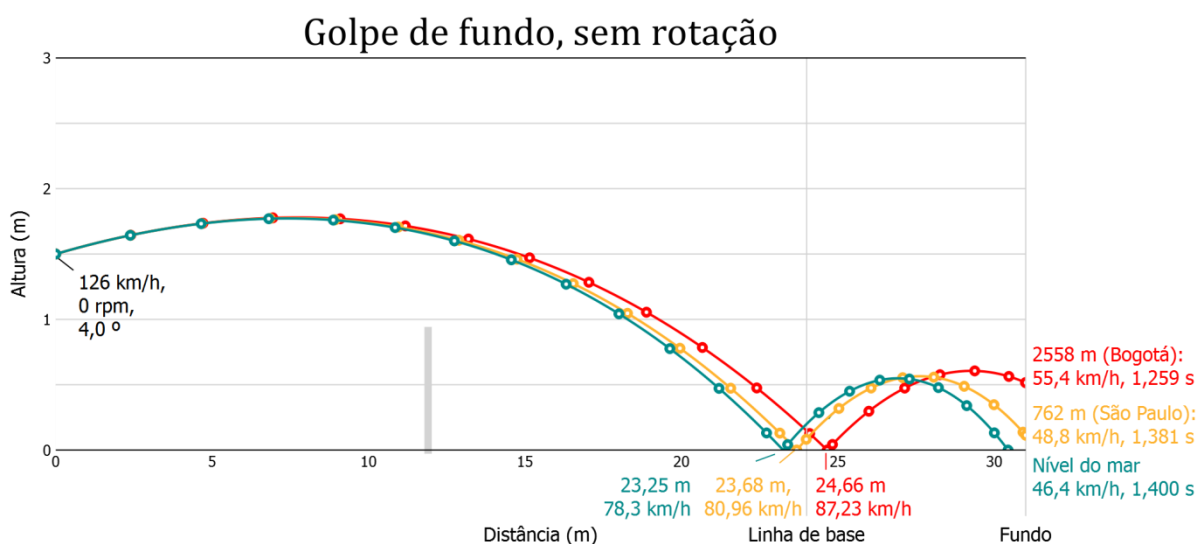
<sup>2</sup> Velocidade de 126 km/h e ângulo de 5° com a horizontal.

### 5.1.3 Altitude

A altitude é o fator atmosférico mais relevante sobre a trajetória da bola de tênis, pois causa uma variação de até cerca de 30% na densidade do ar.

No nível do mar, a 25°C, a densidade do ar é  $\rho_0 = 1,1839 \text{ kg/m}^3$ . Comparou-se a trajetória nestas condições com as condições de jogo em São Paulo, localizada a altitude de 762 m, onde a densidade é 91,3% da densidade no nível do mar. Por fim, o torneio de tênis profissional disputado a maior altitude ocorre em Bogotá, Colômbia, a 2558 m, onde a densidade é 73,2% do valor no nível do mar.

Primeiramente, um golpe de fundo sem rotação (eixo vertical ampliado para enfatizar as diferenças):



**Figura 19:** Bola projetada a 126 km/h, 4° com a horizontal e rotação nula, a partir da altura de 1,5 m (altura típica do contato da raquete com a bola num golpe de base). Para o voo, usou-se  $C_d = 0,64$ , correspondente a uma bola nova sem rotação. O gráfico mostra aterrissagens próximas à linha de base do oponente. Para o quique, usaram-se parâmetros intermediários:  $\mu = 0,7$  e  $e_y = 0,8$ . Como pouco se têm na literatura sobre o parâmetro  $D$ , assumiu-se, para essas comparações de voos, quique rígido:  $D = 0$ . Foram destacadas as velocidades e tempos nos pontos de contato com o chão e com a parede do fundo da quadra. Evidentemente que a bola no contato com o “fundo” não pode mais ser rebatida. Porém, como é incerto esse local onde o tenista rebaterá a bola, escolheram-se os pontos finais da trajetória para salientar as diferenças.

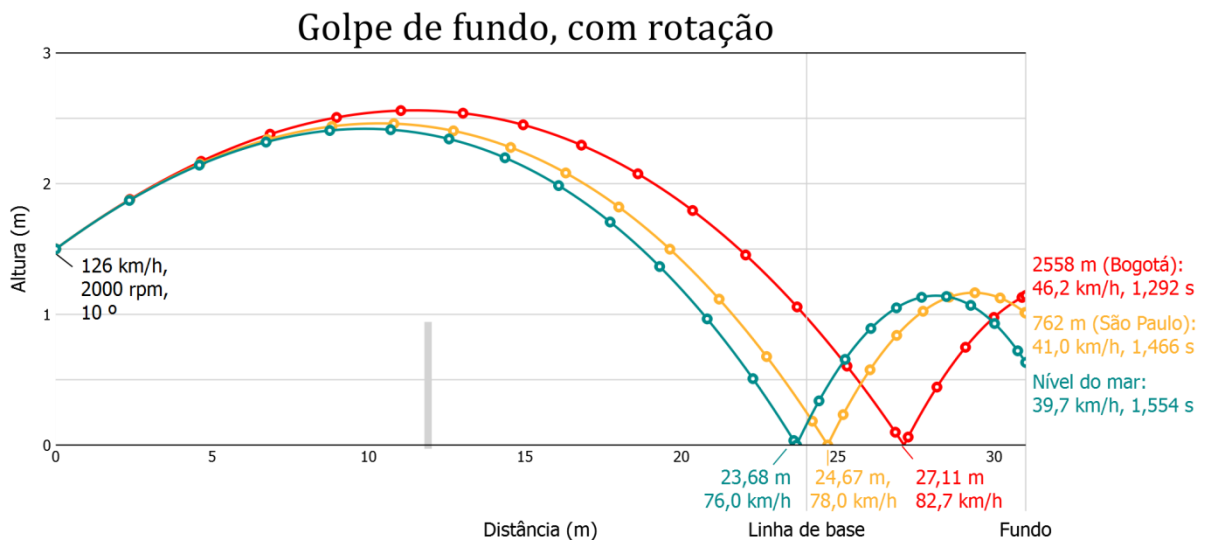
O comprimento de uma quadra de tênis é 23,77 m. Porém, os golpes no tênis não são desferidos em linha reta, mas na maioria dos casos em diagonal, então se optou pela análise com as linhas de base distando 24 m.

Uma projeção da bola a 126 km/h<sup>3</sup> e 4° a partir da altura de 1,5 m, aterrissa, no nível do mar, a 23,25 m. Em São Paulo, 43 cm adiante; em Bogotá, a bola viaja 1,41 m a mais. Destaca-se também, como resultado da redução do arrasto devido à altitude, a diferença nas velocidades da bola. No nível do mar, ela sofre redução de cerca de 38% até quicar, enquanto que em Bogotá essa redução é consideravelmente menor: 30%. Em uma

<sup>3</sup> Valor médio dos golpes de fundo dos profissionais de ponta. O mais veloz registrado foi realizado por James Blake no US Open de 2011: 199 km/h.

situação de defesa, o oponente se posiciona bem ao fundo para ter o maior tempo possível para chegar até a bola e rebatê-la. Para o mesmo golpe, verifica-se que os 1,4 s de que dispõe no nível do mar, se reduzem a 1,26 s em Bogotá. Reduções de tempo desta ordem de grandeza, de cerca de 10%, são muito significativas neste esporte de alta precisão.

A rotação em *topspin* é imprimida pela raquete golpeando a bola na sua traseira num movimento ascendente, o que em geral acarreta num arremesso desta a maior ângulo. Golpes a mesma velocidade mas com rotação (2000 rpm)<sup>4</sup> e a ângulo de saída de 10°:



**Figura 20:** Bola projetada a 126 km/h, 10° com a horizontal e 2000 rpm, a partir da altura de 1,5 m. A rotação estudada é o *topspin*: em termos da figura, a bola gira por um eixo perpendicular à página no sentido horário. A componente da força Magnus é para baixo: reduz o tempo de voo e acentua a incidência.  $C_d = 0,67$ , correspondente a bola nova sob rotação. Para o quique:  $\mu = 0,7$ ;  $e_y = 0,8$  e  $D = 0$ .

Vê-se que se acentuaram as diferenças de distância percorrida. O mesmo golpe, que produz uma bola “dentro” no nível do mar, resulta uma bola “fora” em Bogotá por mais de 3 m.

A densidade do ar  $\rho$  e a altitude  $h$  se relacionam pelo seguinte fator exponencial [20]

$$\rho(h) = \rho_0 e^{-\left(\frac{mg}{k_b T}\right)h},$$

Onde  $m$  é a massa média da molécula de ar,  $g$  é a aceleração gravitacional,  $k_b$  é a constante de Boltzmann,  $T$  é a temperatura e  $\rho_0$  é a densidade do ar no nível do mar a temperatura  $T$ . Adotou-se  $T = 25^\circ\text{C}$  e  $m = 5,1 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$ .

<sup>4</sup> Valor médio da rotação imposta à bola pelos profissionais. O tenista Rafael Nadal produz até 4900 rpm com seu impetuoso *topspin*; valor também alcançado por Pete Sampras nos seus melhores saques *kick*. Porém, há uma marca ainda superior. Esta, a maior rotação já registrada: 5300 rpm no *backspin (slice)* do lendário Roger Federer.

Calculando o alcance para densidades gradativamente menores e usando esta relação entre densidade do ar e altitude se produziu o gráfico alcance vs. altitude para os dois golpes explicitados acima:

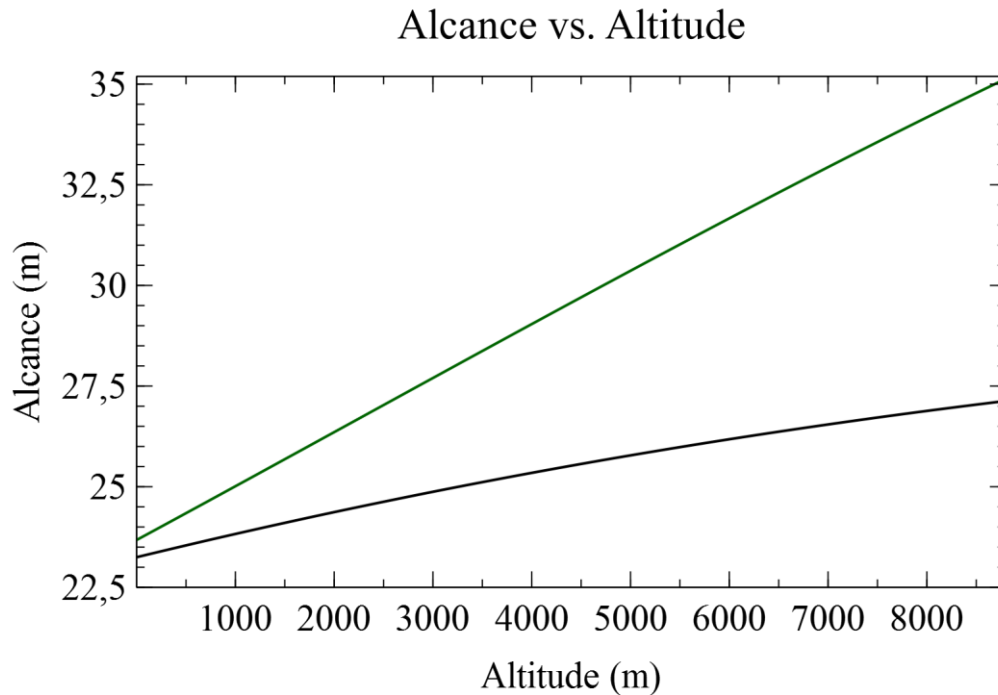


Figura 21: Alcance do golpe de fundo sem rotação da figura 19 (linha preta) e do golpe de fundo com rotação da figura 20 (linha verde) como função da altitude na qual o jogo é realizado. Acima de 2558 m de altitude não são disputados torneios profissionais; porém, calculou-se alcance até o ponto mais alto da superfície terrestre: o topo do Monte Everest, 8844 m.

## 5.2. Desgaste da bola

Uma bola nova apresenta  $C_d = 0,64$ . Como descrito na seção 4.1, deve-se distinguir uma bola usada em “pouco gasta” e “muito gasta”. O arrasto sofrido por uma bola usada até cerca de 50 impactos sofridos é maior:  $C_d = 0,67$ . A partir de então decresce até tornar-se menor do que o arrasto sobre uma bola nova. A bola muito gasta (1500 impactos) apresenta  $C_d = 0,60$ . Simulou-se um típico primeiro saque<sup>5</sup> com essas bolas.

<sup>5</sup> No tênis, para o início de cada ponto, o tenista dispõe de dois saques. Geralmente o primeiro é executado sem rotação e com alta velocidade. Para o segundo reduz-se a velocidade e adiciona-se rotação, de forma a ampliar a “janela de aceitação” [19]. O saque mais veloz já registrado foi executado por Sam Groth no Busan Open Challenger de 2012: 263 km/h.

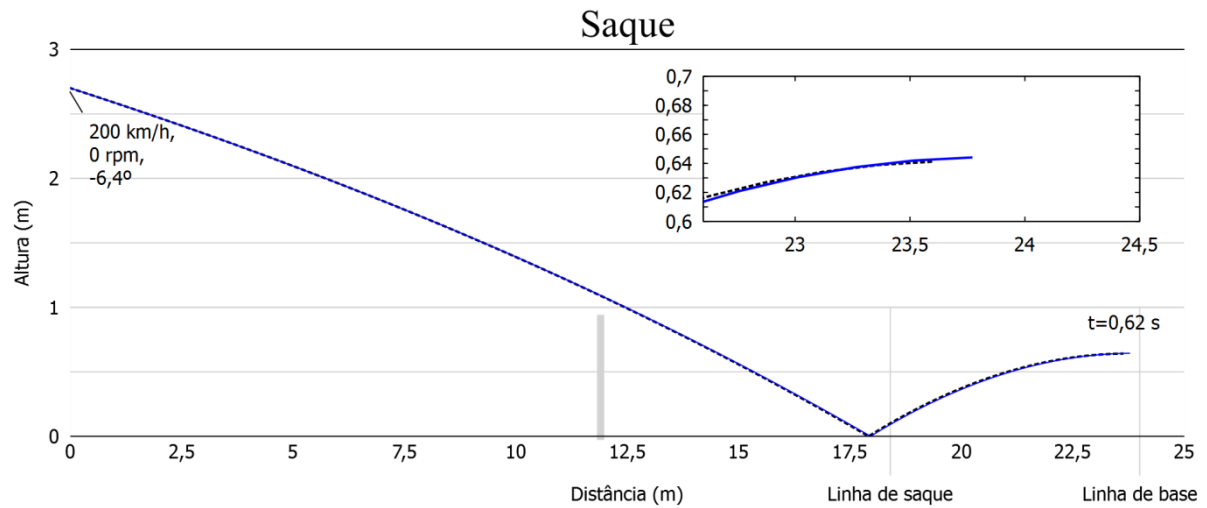


Figura 22: Bola projetada a 200 km/h, 6,4° abaixo da horizontal e rotação nula, a partir da altura de 2,7 m (altura típica do contato da raquete com a bola num saque). Para o quique:  $\mu = 0,7$ ;  $e_y = 0,8$  e  $D = 0$ . Gráfico comparativo de uma bola nova com  $C_d = 0,64$  (linha contínua) e uma bola ligeiramente gasta  $C_d = 0,67$  (linha tracejada).

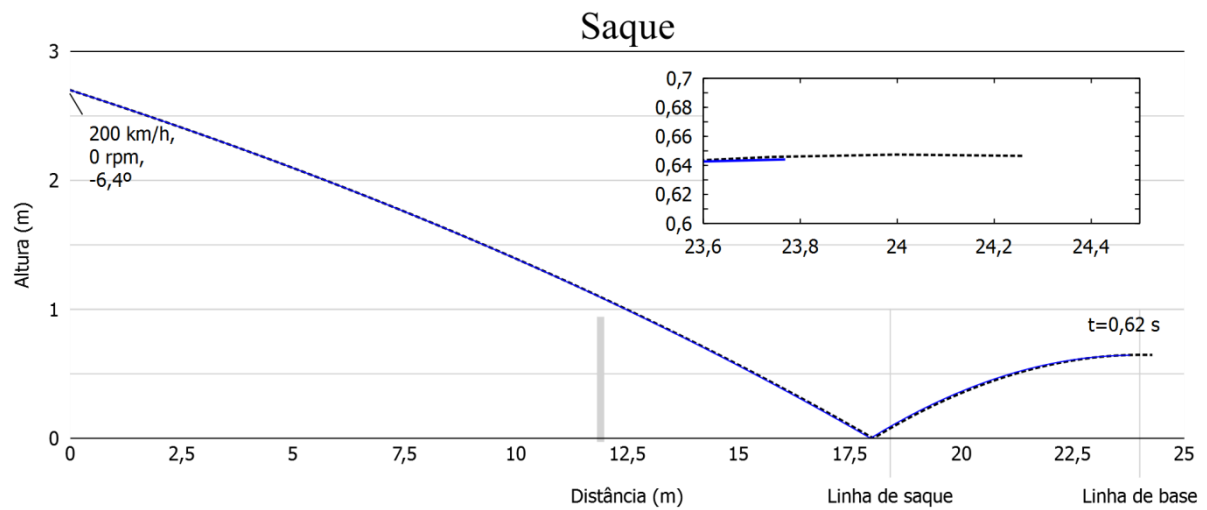


Figura 23: Bola projetada a 200 km/h, 6,4° abaixo da horizontal e rotação nula, a partir da altura de 2,7 m (altura típica do contato da raquete com a bola num saque). Para o quique:  $\mu = 0,7$ ;  $e_y = 0,8$  e  $D = 0$ . Gráfico comparativo de uma bola nova com  $C_d = 0,64$  (linha contínua) e uma bola bem gasta  $C_d = 0,60$  (linha tracejada).

Os gráficos exibem as diferenças da etapa aérea de bolas novas e bolas pouco gastas e muito gastas. Ambos mostram as trajetórias no instante  $t = 0,62$  s. Analisando a segunda a imagem, que compara uma bola nova e uma bola muito gasta (já “careca”) verifica-se que 62 centésimos de segundos após abandonarem a raquete, a bola usada já cruzou a linha de base enquanto que a bola nova ainda não o fizera. Porém, essa diferença temporal é mínima: a bola usada chega ao oponente cerca de 13,3 ms antes. A diferença de altura, como enfatizada pelo gráfico menor, é insignificante: cerca de 3 mm. A diferença mais significativa ocorre na velocidade de chegada: o oponente recebe a bola usada cerca de 3 km/h mais rápida.

A comparação da bola nova com a bola pouco gasta fornece diferenças ainda menores nas suas trajetórias.

### 5.3. Características da quadra

Dependendo das características da quadra, a trajetória da bola se torna diferente após o quique. Realizou-se a análise de golpes de fundo sobre quadras de saibro e de grama:

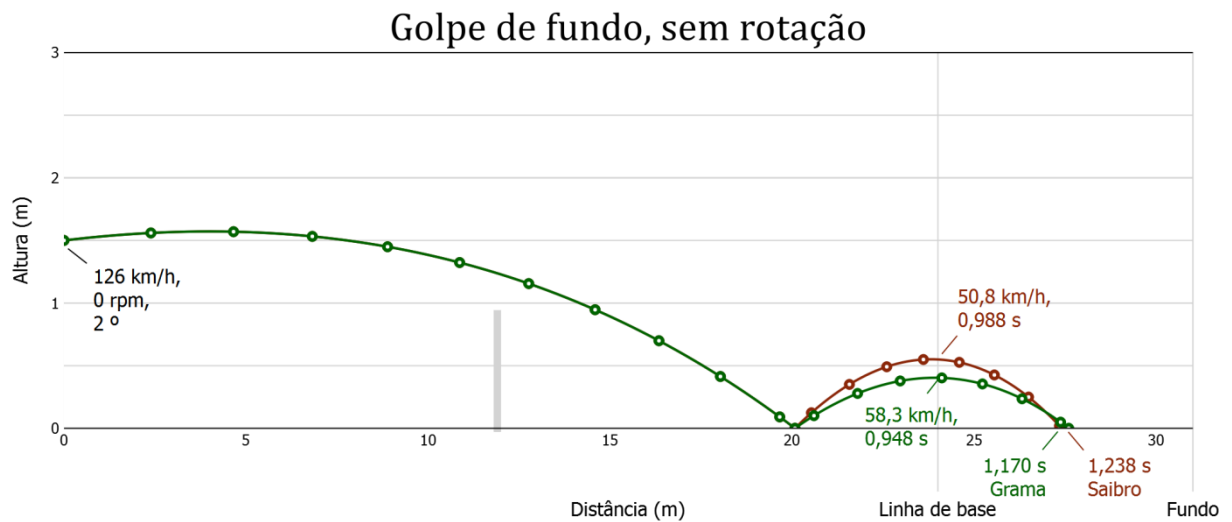


Figura 24: Bola projetada a 126 km/h, 2° com a horizontal e rotação nula, a partir da altura de 1,5 m.  $C_d = 0,64$ , correspondente a bola nova sem rotação. Para a grama usou-se  $\mu = 0,60$  e  $e_y = 0,72$ ; para o saibro,  $\mu = 0,80$  e  $e_y = 0,88$ , conforme tabela 2. Para ambos,  $D = 0$ . Foram destacadas as velocidades e os tempos nos pontos de cruzamento da “linha de base” e ao final da trajetória.

Vê-se que os maiores valores de coeficiente de restituição vertical e coeficiente de atrito correspondentes ao saibro de fato produzem um quique mais alto e uma maior redução da velocidade.



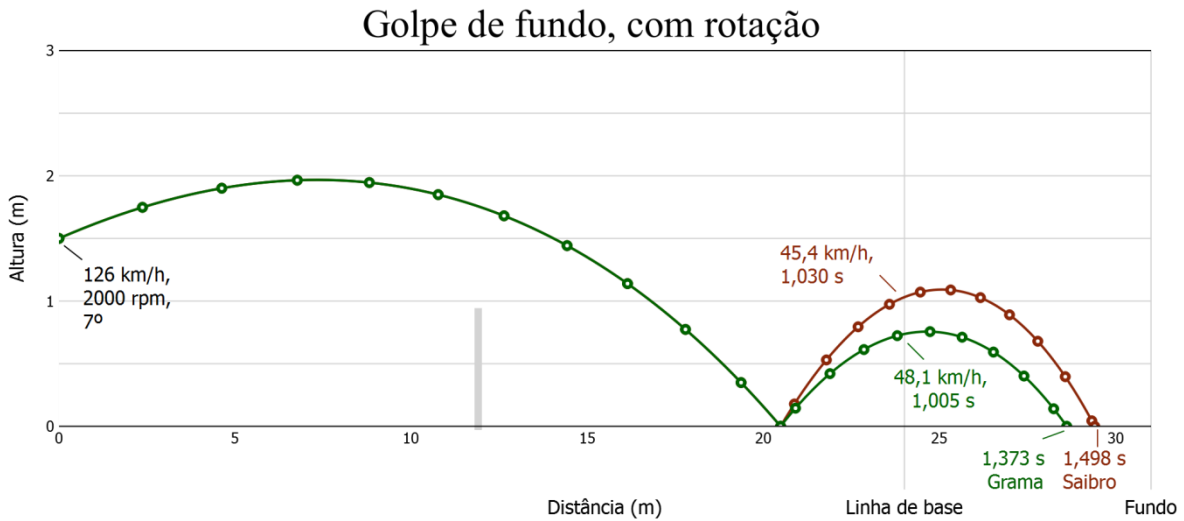


Figura 25: Bola projetada a 126 km/h, 7° com a horizontal e 2000 rpm em *topspin*, a partir da altura de 1,5 m.  $C_d = 0,67$ , correspondente a bola nova sob rotação. Para a grama usou-se  $\mu = 0,60$  e  $e_y = 0,72$ ; para o saibro,  $\mu = 0,80$  e  $e_y = 0,88$ , conforme tabela 2. Para ambos,  $D = 0$ . Verificou-se ocorrência de *grip* e usou-se  $e_x = 0,1$ .

Pela aparente inexistência de estudos que estimem o desalinhamento  $D$  para quadras de grama, as duas análises acima, bem como todas as anteriores, foram realizadas sob regime de colisão rígida:  $D = 0$ . Assumiu-se o valor de  $D = 0,01$  m para o saibro, compatível com os dados experimentais (seção 3.2.4). Considerando que a bola fica sujeita a uma menor deformação na colisão com a grama, estipulou-se  $D = 0,005$  m.

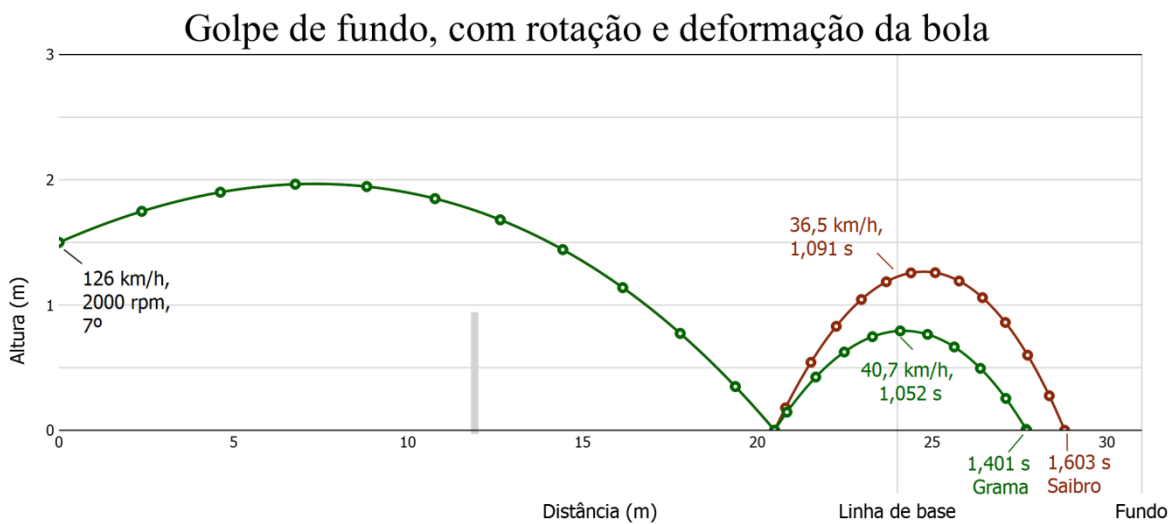


Figura 26: Bola projetada a 126 km/h, 7° com a horizontal e 2000 rpm em *topspin*, a partir da altura de 1,5 m.  $C_d = 0,67$ , correspondente a bola nova sob rotação. Para a grama usou-se  $\mu = 0,60$ ;  $e_y = 0,72$  e  $D = 0,005$  m. Para o saibro,  $\mu = 0,80$ ;  $e_y = 0,88$  e  $D = 0,010$  m. Verificou-se ocorrência de *grip* e usou-se  $e_x = 0,1$ .

A tabela 3 sintetiza as informações presentes nesses gráficos:

Diferenças	Velocidades	Tempo final	Altura
Sem rotação	13%	6%	27%
Com rotação	6%	8%	29%
Com rotação e deformação	10%	12%	35%

**Tabela 3: Uma síntese das diferenças apresentadas entre os quiques de uma bola de tênis nas quadras de saibro e grama. Tempo e altura são maiores para a quadra de saibro e revelam um padrão conforme adição dos efeitos da rotação e da deformação da bola. As velocidades, superiores na quadra de grama, não manifestam um padrão claro de comportamento.**

Estes resultados mostram que a maior diferença entre estas quadras está na diferença de altura atingida pela bola após o quique, enquanto que a diferença nos tempos e velocidades também se verificam, apesar de menos significativas. Ainda, a tabela evidencia que as diferenças de tempo e altura se acentuam sob as condições de rotação da bola, e ainda mais sob deformação desta.

Nas simulações em 5.1 e 5.2, nas quais se compararam diferenças de voo, usaram-se parâmetros de quique intermediários:  $\mu = 0,7$  e  $e_y = 0,8$ . Na maioria dos quiques estudados, a bola deslizou do início ao fim. Os únicos casos que apresentaram *grip* foram os quiques com rotação da seção 5.3, nos quais se usou o valor de  $e_x = 0,1$ .

## 6 Considerações Finais

A teoria da camada limite desenvolvida por Prandtl em 1904 explica, por meio dos conceitos de arrasto viscoso e arrasto de pressão, a resistência que o ar causa a uma bola que nele se movimentava. Explica também o desvio na trajetória que ocorre em caso de rotação da bola (efeito Magnus, descrito em 1853). Em suma, expôs-se que as forças aerodinâmicas são entendidas através de assimetrias geradas na camada limite: o arrasto como assimetria de fluxo, a sustentação como assimetria de separação.

O modelo de quique da bola rígida, desenvolvido por Brody, afirmou que uma bola de tênis que quica pode deslizar ou pode deslizar e então rolar. Permitiu determinar para quais ângulos de incidência em uma certa superfície a bola entrará em repouso em relação ao chão. Porém, a suposição de que ela rolaria mostrou-se falsa por dois resultados experimentais: “overspinning balls” e reversão da força de atrito. Rod Cross cria então, um modelo que inclui a deformação da bola. Este explica que, ao invés de rolar, a bola gruda: apesar do repouso da região do contato em relação ao chão, sua estrutura vibra horizontalmente e a força de atrito estático oscila de acordo com a frequência de oscilação horizontal, determinada em última análise pela rigidez horizontal da bola.

A discussão teórica e o uso do programa numérico para calcular as trajetórias da bola de tênis sob diferentes condições permitiram elucidar os seguintes fatos: a altitude exerce uma influência sobre a trajetória da bola muito maior do que a umidade, a pressão ou a temperatura. Estas apresentam alterações de não mais do que  $5\text{km/h}$  na velocidade da bola, enquanto que altitude causa variações da ordem de  $10\text{km/h}$ . Bolas usadas são mais lentas do que bolas novas somente até cerca de 50 impactos sofridos. A partir de então, a perda dos filamentos presentes na superfície torna-a sujeita a menor arrasto. A simulação de um saque revelou que essa diferença é pequena, da ordem de  $3\text{km/h}$  ao chegar no oponente. Conclui-se que a diferença entre bolas novas e usadas não está no voo. Maior clareza sobre essa diferença requer um estudo das alterações das propriedades de quique com o número de impactos. Por fim, os resultados dos quiques em quadras de saibro e grama se mostraram coerentes com a percepção dos tenistas de que na primeira a bola quica “mais lenta e mais alta”. Entretanto, salientou que a diferença na altura é mais significativa do que a diferença no tempo.

## 7 Referências

- [1] BUSH, J.W.M. "The aerodynamics of the beautiful game". Department of Mathematics, MIT, 2013
- [2] GOODWILL, S.R.; CHIN, S.B.; HAAKE, S.J. "Aerodynamics of spinning and non-spinning tennis balls". *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, v.92, pp. 935-358, 2004.
- [3] ALAM, F.; et al. A study of spin effects on tennis ball aerodynamics. *Wseas Transactions on Fluid Mechanics*, issue 3, v. 3, 2008. ISSN: 1790-5087.
- [4] COOKE, A.J. "An overview of tennis ball aerodynamics". *Sports Engineering*, 3(2): 123-129, 2000.
- [5] MEHTA, R.D.; PALLIS, J.M. "Sports ball aerodynamics: effects of velocity, spin and surface roughness". California: TMS., 2001
- [6] PALLIS, J.M. "Trajectories 101A. The flight of the tennis ball." Disponível em: <[http://www.tennisserver.com/set/set\\_02\\_01.html](http://www.tennisserver.com/set/set_02_01.html)>. Acesso em: 10 de novembro de 2015.
- [7] DE MESTRE. N. *The mathematics of projectiles in sports*. New York: Cambridge University Press, 1990.
- [8] ALAWAYS, L.W. *Aerodynamics of the curve-ball: an investigation of the effects of angular velocity on baseball trajectories*, Ph.D. Thesis, University of California, 1998.
- [9] BRODY, H. Physics of the tennis racket. *American Journal of Physics*, v. 47, p. 482-487, 1979.
- [10] CROSS, R. "Grip-slip behavior of a bouncing ball". *American Journal of Physics*, v.70, n.11, pp. 1093-1102, 2002.
- [11] BRODY, H., 1984. "That's how the ball bounces". *The Physics Teacher*, v.22, pp. 494-97, 1984.
- [12] CROSS, R. "Measurements of the horizontal coefficient of restitution for a superball and a tennis ball". *American Journal of Physics*, v.70, n.5, pp. 482-489, 2002.
- [13] MAW, N.; BARBER, J.R.; FAWCETT, J.N. "The oblique impact of elastic spheres". *Wear*, v. 38, n. 1, p. 101-114, 1975.
- [14] CROSS, R. Oblique bounce of a rubber ball. *Experimental Mechanics*, 54: 1523-1536, 2014.
- [15] CHADWICK, S.G. The aerodynamics of tennis balls". Ph.D. Thesis, University of Sheffield, 2003.

- [16] MEHTA, R.D.; PALLIS, J.M. The aerodynamics of tennis balls. *Sports Engineering*, v. 4, p. 1-13, 2001.
- [17] CHADWICK, S.G.; HAAKE, S.J. The drag coefficient of tennis balls. In: SUBIC, A.; HAAKE, S.J. (Eds.). *The Engineering of Sport*. Sydney: Blackwell Science Ltd, Oxford, 2000, p. 169-176.
- [18] INTERNATIONAL TENNIS FEDERATION. ITF Technical, apendix I. Disponível em: <<http://www.itftennis.com/technical/publications/rules/balls/appendix-i.aspx>>. Acesso em: 13 de novembro de 2015.
- [19] CROSS, R.; LINDSEY, C. *Technical Tennis*. Vista, California: Racquet Tech Publishing, 2005, 152 pp.
- [20] BRODY, H.; CROSS, R.; LINDSEY, C. *The Physics and Technology of Tennis*. Vista: USRSA, 2002. 437 p.
- [21] CROSS, R. "Measurements of the horizontal and vertical speeds of tennis courts". *Sports Engineering*, v. 6, p. 93-109, 2003.
- [22] THORPE, J.D.; CANAWAY, P.M. Performance of tennis court surfaces II. Photometric methods for measuring pace and bounce under playing conditions. *Journal of Sports Turf Research Institute*, v. 62, p. 101-117, 1986.
- [23] CROSS, R. The bounce of a ball. *American Journal of Physics*, v. 67, n. 3, 1999.
- [24] PRESS, W.H.; et al. *Numerical recipes in Fortran 90*. New York: Cambridge, 1997, 552 p.