

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Pulsos Elétricos em Cavidades Ressonantes Retangulares Plasmônicas

Felipe Russman

Trabalho de Conclusão de Curso realizado sob orientação do Prof. Dr. Felipe Barbedo Rizzato apresentado ao Instituto de Física da UFRGS para obtenção do título de Bacharel em Física - Pesquisa Básica, modalidade graduação.

Porto Alegre, Novembro de 2015

"A Matemática parece ser uma faculdade da mente humana destinada a suplementar a brevidade da vida e a imperfeição dos sentidos."

Jean J. B. Fourier

Sumário

1	Agradecimentos	4
2	Introdução	5
3	Abstract	6
4	Apresentação Teórica	7
4.1	A Equação de Onda Unidimensional do Eletromagnetismo Clássico no Vácuo	7
4.1.1	Considerações Históricas	7
4.1.2	As Equações de Maxwell do Eletromagnetismo Clássico	9
4.2	As Séries de Fourier e a Função Transformada de Fourier	14
4.2.1	As Séries de Fourier	14
4.2.2	As Transformadas Contínuas e Discretas de Fourier	15
4.2.3	Teoremas e Propriedades das Transformadas de Fourier	17
5	A Cavidade Ressonante a Vácuo	19
5.1	A Relação de Dispersão	20
5.2	Discretização das Frequências	21
5.3	Uma Solução Analítica	23
5.4	O Pulso Elétrico	25
6	A Cavidade Ressonante Plasmônica	28
6.1	A Equação de Onda Plasmônica	28
6.2	A Relação de Dispersão, Discretização do Número de Onda e Frequência de Corte	31
6.3	Uma Solução Numérica	35
6.4	Uma Solução Analítica	40
7	Considerações Finais	47
7.1	Gráfico de Soluções e Comparação de Resultados	47
8	Referências	52

1 Agradecimentos

Agradeço a Universidade Federal do Rio Grande do Sul pela formação e, em especial, ao Instituto de Física. A todos professores que tive pelo presente do ensino e contribuição para minha formação. Em especial, ao meu orientador Prof. Dr. Felipe Barbedo Rizzato ,por além de ser um excelente professor, pelos conhecimentos compartilhados, ensinamentos valiosos para toda uma vida profissional, paciência exemplar e ajuda constante no desenvolvimento deste trabalho. Aos meus colegas, em especial, Ivanessa e Anna, pelo compartilhamento de aprendizados, paixões e de um dia-a-dia de *ups and downs*. Aos meus pais pelo ritual da Vida, propiciado a mim desde antes de meu nascimento até o presente dia. Em especial a minha mãe, pela presença e por lembrar-me de caminhar sempre com os *pés no chão*, e a meu pai por ser um amigo fiel e *infalível*, exemplo a seguir e um sorriso acalentador em todas as horas. A estes e todos meus amigos, meu sincero obrigado.

2 Introdução

Cavidades Ressonantes são guias de ondas perfeitamente fechadas por paredes metálicas. Sua tecnologia confina a energia eletromagnética em um padrão de ondas eletromagnéticas estacionárias com frequências bem definidas e, em geral, altas. Dentre algumas, uma das vantagens sobre o circuito LC (o qual também armazena energia eletromagnética) vale ressaltar que o mesmo não é capaz de suportar altas frequências como as cavidades ressonantes. Além disso, as possíveis dissipações que ocorrem na cavidade são sempre menores que no circuito LC e com as mesmas é possível gerar e filtrar ondas em equipamentos de radar, fornos de micro-ondas e aceleradores de partículas. Ainda, dadas sucessivas reflexões nas paredes condutoras, as cavidades ressonantes podem ser aplicadas (em especial para a Ótica) na tecnologia de laser à fim de intensificar a radiação. Neste projeto serão estudadas cavidades ressonantes retangulares cujo interior é, a princípio, vácuo e de principal interesse em pulsos elétricos. Em sequência, serão estudados os pulsos na presença de plasmas rarefeitos.

3 Abstract

Resonant cavities are waveguides perfectly closed by metallic walls. Its technology confines the electromagnetic energy in a pattern of stationary electromagnetic waves with well defined frequencies and usually also high frequencies. Among some, one of the benefits about the LC circuit (which also stores electromagnetic energy) is worth mentioning that it is not capable of withstanding high frequencies as resonant cavities. Furthermore, the possible dissipations which occur in the cavity are always lower than the LC circuit, and with them is possible to generate and filter waves in radar equipment, microwave ovens and particle accelerators. Yet, given the successive reflections on the conductive walls, resonant cavities can be applied (in particular for optics) in laser technology to intensify radiation. This project will study rectangular resonant cavities in which the interior is, at first, vacuum and main interest into electrical pulses. In sequence, the pulses will be studied in the presence of rarefied plasmas.

4 Apresentação Teórica

4.1 A Equação de Onda Unidimensional do Eletromagnetismo Clássico no Vácuo

4.1.1 Considerações Históricas

Nascemos inseridos em um mistério. Clara e evidente, a constante evolução do Mundo nos traz a mais simples pergunta já feita: *como* o mundo evolui? A todos seres humanos dotados de espírito científico, a Natureza exerce fascínio. Seu mistério é sedutor. Mais do que o simples prazer de entender e conhecer (e porque não dizer *a si mesmo*), seu desvendo é a forma que nós -enquanto seres inteligentes, raciocinantes- temos para enriquecer nossos conhecimentos, ampliar nossa percepção de realidade e, por fim, desenvolver nossa tecnologia.

Dentre numeráveis fenômenos fascinantes que acarretaram o desenvolvimento de uma mobilidade científica está o Eletromagnetismo. A fusão entre Eletricidade e Magnetismo nem sempre existiu. Os primeiros homens que se tem relato de explorar e manipular as evidências da existência da eletricidade são, para surpresa de ninguém, os antigos gregos. Uma força misteriosa surgia quando Tales de Mileto (primeiro filósofo grego que se tem notícia de envolver-se com eletricidade, nascido no final do século VII a.C) esfregava uma pedra de âmbar em lã de ovelha. A pedra passava a ser capaz de atrair e grudar em seu corpo pedaços de palha. De fato, o vocábulo grego que designava a pedra âmbar era "elektron" de onde nasceu a palavra Eletricidade. Há textos gregos também datados dessa época que sugerem o conhecimento das propriedades magnéticas de um mineral originário da região da Magnésia (daí o nome magnetismo) e alguns textos chineses relatando o uso de bússolas como técnica de navegação. Muitos séculos à frente, a eletricidade e magnetismo ficaram na obscuridade e presentes ao desinteresse da humanidade (Era das Trevas). Somente no início do século XV d.C, no auge do Renascimento europeu, que os fenômenos elétricos e magnéticos sofreram a atenção de estudiosos visando a compreensão dos mesmos, já que as técnicas de navegação com bússola, agora conhecidas na Europa, tinham tido, nessa época, grande impacto.

Do século XV d.C até o século XIX d.C foram feitos avanços significativos no entendimento da eletricidade e magnetismo. Porém, nenhum destes se compara ao descobrimento mais importante da carreira de Humphry Dave (químico britânico nascido em 1778 famoso por descobrir o Sódio e o Cálcio): Michael Faraday. Em 1791 nasce, em um subúrbio de Londres, Michael Faraday que trabalhou desde cedo (aos 13 anos) com encadernação de livros. Graças à isto que conheceu a Eletricidade, citada nos livros que encadernava e lia. Fenômeno este que, na época, era espetacular, no sentido *teatral*, de "espetáculo" da palavra. Um tipo de entreterimento famoso nesta época se fazia presente na Royal Institute de Londres onde Humphry exibia à seu público, sempre fascinado e satisfeito, os efeitos da *força misteriosa do fluido elétrico*. Desde Volta, já se tinham pilhas para gerar energia elétrica que eram muito bem manipuladas pelos conhecimentos químicos de Humphry. Não tardando a ansiar por carreira científica, Michael Faraday se torna assistente de Dave onde, em seus experimentos pessoais, planta a semente do motor elétrico. Este é um dos grandes momentos da história da Ciência. Até então, a eletricidade e magnetismo

estavam separadas e eram usadas como um passatempo que intrigava os cientistas da época. Agora, graças às descobertas de Faraday e outros cientistas seus contemporâneos (como Ampère e Lenz), sabemos que eletricidade e magnetismo são manifestações distintas de um mesmo fenômeno: o Eletromagnetismo. Faraday observou e mostrou à comunidade científica que tinha contato na época que (os ainda não definidos assim) *campos* magnéticos dinâmicos (não-estáticos) produziam correntes elétricas em fios condutores quando aproximados. Este fenômeno veio mais tarde a ser descrito pela Lei da Indução de Faraday. Graças à sua pouca educação matemática, Faraday não possuía o conhecimento necessário para satisfazer e convencer o mundo científico, em sua própria linguagem, a existência das, assim chamadas por Faraday, linhas de força invisíveis que constituíam os campos magnéticos. Esta tarefa deu-se a James Clerk Maxwell (o físico escocês considerado o maior teórico do século XIX, nascido em 1831 de uma família rica) que interessou-se pelos trabalhos de Faraday e acreditou nele dando uma formulação matemática precisa aos campos elétrico e magnético. Esta formulação foi publicada em 1855 por Maxwell no artigo *Sobre Linhas de Força de Faraday* e ficou mundialmente conhecida como, até os dias de hoje, as "Equações de Maxwell". [1]

4.1.2 As Equações de Maxwell do Eletromagnetismo Clássico

Todos os fenômenos eletromagnéticos clássicos conhecidos até a atualidade são significativamente muito bem descritos pelas Equações de Maxwell, munidas, naturalmente, pela Lei da Força de Lorentz. Esse conjunto de quatro equações diferenciais parciais dita, na formulação original, a evolução em tempo e espaço dos *campos* elétrico e magnético e mostra claramente a relação íntima que um tem para com o outro. Graças à peculiaridade desta formulação (que será logo explorada), aplica-se diretamente o teorema da Decomposição de Helmholtz e os campos elétrico e magnético são totalmente conhecidos em toda região pertinente do espaço. Em especial, cada uma das quatro equações tem um nome. A primeira, mas não mais importante, é a Lei de Gauss da eletricidade, que é assim chamada em homenagem ao matemático alemão Carl Friedrich Gauss. Esta equação relaciona a evolução espacial de campos elétricos dada uma certa configuração de cargas estáticas. É com esta que podemos facilmente calcular a intensidade de campos elétricos gerados por cargas elétricas uma vez conhecida a direção e sentido deste campo em todo ponto pertinente do espaço. Em termos de linhas de campos, como gostaria que fizéssemos Faraday, esta Lei afirma que, na possibilidade de calcular o fluxo de linhas de campo elétrico em uma superfície fechada, seremos capazes, também, de dizer qual a quantidade de carga elétrica que se faz presente no interior desta superfície. As linhas de campo elétrico na descrição de Maxwell são nascidas e mortas nas cargas elétricas. Cada carga é um sorvedouro ou sumidouro de linhas de campo elétrico. A segunda equação, que também leva o nome de Gauss, é a Lei de Gauss para o magnetismo. Esta, afirma fortemente a inexistência de *monopolos* magnéticos, que seriam análogos às cargas elétricas. Isto é, campos magnéticos estáticos não são gerados da mesma forma que campos elétricos estáticos. Em termos de linhas de campo, o fluxo de linhas de campo magnético em uma superfície fechada é *sempre* nulo. Isto sugere que estas linhas são sempre fechadas em si mesmas não sendo possível a existência de, como na eletricidade, sorvedouros ou sumidouros de linhas de campo. A terceira equação que aparece na lista de Maxwell é a Lei da Indução de Faraday. Esta, como já mencionado anteriormente neste texto, mostra como campos magnéticos não-estáticos influenciam o aparecimento de campos elétricos. Este é o princípio fundamental de muitos geradores elétricos já produzidos pela humanidade. Por fim e não, decididamente, menos importante, a quarta equação é conhecida como Lei de Ampère *corrigida*, assim chamada em homenagem ao físico André-Marie Ampère. O fato de que correntes elétricas produziam campos magnéticos era conhecido pela comunidade científica. Esta é a Lei de Ampère original. Até o olhar atento de exímio matemático de Maxwell, a possibilidade de campos elétricos dinâmicos também serem capazes de produzir este fenômeno era desconhecida. Em seu artigo, analisando a "simetria" das equações produzidas, Maxwell acrescenta um termo à Lei de Ampère e é esse termo que muda toda a nossa História. É este termo que torna os campos, antes estáticos, elétrico e magnético agora dinâmicos, propagantes. Campos elétricos dinâmicos geram campos magnéticos também dinâmicos que, por sua vez, geram campos elétricos dinâmicos e assim sucessivamente. Graças a este termo que as equações de Maxwell *preveem* (e está aqui o imaculado poder científico) a existência de um *fenômeno ondulatório* relacionado aos campos elétrico e magnético. Tanto quanto uma onda sonora pode se propagar no ar ou uma

perturbação pode se propagar na superfície de um lago, o campo eletromagnético pode se propagar no espaço e, curiosamente, sem um meio material necessário para isto, já que a natureza destes campos é autossustentável.

Eis as Equações de Maxwell na sua forma diferencial, na sua versão microscópica e na ordem sugerida acima: [2]

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (4.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.2)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.3)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4.4)$$

Aqui, \vec{E} é o campo elétrico, \vec{B} é o campo de *indução* magnética, ou, também comumente chamado simplesmente de campo magnético, ρ é a densidade de cargas, \vec{J} a densidade de corrente elétrica, ϵ_0 a permissividade elétrica do vácuo e μ_0 é a permeabilidade magnética do vácuo. É claro que à época do velho Maxwell as notações compactas apresentadas atualmente não existiam e esse conjunto aparentemente simples de equações era, na verdade, um conjunto bastante complexo de manipular. Felizmente, a notação sugere uma fácil compreensão do fenômeno que cada equação descreve. Note que o termo corrigido na Lei de Ampère é $\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ e é ele que faz toda diferença. Naturalmente, na ausência de cargas e correntes, isto é, no regime de vácuo em que $\rho = 0$ e $\vec{J} = 0$, temos as Equações de Maxwell dadas por

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (4.5)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.6)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.7)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4.8)$$

Uma vez que as coordenadas espaciais e temporal são independentes, podemos aplicar o operador rotacional em ambos membros da equação 4.7 e reescrevê-la como

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{B}) \quad (4.9)$$

de onde, pela identidade vetorial $\nabla \times (\nabla \times \vec{a}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{a}) - \nabla^2 \vec{a}$, \vec{a} um campo vetorial arbitrário, a equação (4.9) fica

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \quad (4.10)$$

Agora, substituindo a equação (4.5) temos, finalmente, rearranjando os termos

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (4.11)$$

E o mesmo pode ser feito para o campo magnético. Basta aplicar o operador rotacional em ambos membros de (4.8) e prosseguir analogamente. Obteremos, então,

$$\nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (4.12)$$

Estas equações são velhas conhecidas das equações diferenciais parciais. É possível mostrar (como faremos adiante) que as funções que as solucionam são *ondas*. Neste caso, ondas eletromagnéticas cuja velocidade de propagação no vácuo deve ser $\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$. Este valor calculado de velocidade se assemelha com muitos algarismos significativos do valor calculado para a *velocidade da luz* no vácuo e, por este fato (não somente, obviamente), que investigou-se a possibilidade de a luz ser um fenômeno ondulatório eletromagnético. Abaixo segue uma possível estratégia de procura do conjunto de soluções das equações para os campos. Podemos reescrever as equações (4.11) ou (4.12) em função das *componentes* de cada vetor. Já que são análogas, vamos compactá-las em

$$\vec{\phi}(x, y, z, t) = \phi_x(x, y, z, t)\hat{i} + \phi_y(x, y, z, t)\hat{j} + \phi_z(x, y, z, t)\hat{k}$$

que descreve um campo vetorial em um espaço tridimensional euclidiano em coordenadas retangulares x, y e z cujas direções fixas são representadas pelos vetores unitários \hat{i}, \hat{j} e \hat{k} e as respectivas componentes $\phi_x(x, y, z, t), \phi_y(x, y, z, t)$ e $\phi_z(x, y, z, t)$. Ou então, de forma mais econômica, podemos indexar cada direção do espaço por $i = 1, 2, 3$, onde $i = 1$ é associado a x , $i = 2$ a y e $i = 3$ a z , e reescrever o campo como

$$\vec{\phi}(\{x_i\}, t) = \sum_{i=1}^3 \phi_i(\{x_i\}, t) \hat{e}_i \quad (4.13)$$

Daí, qualquer que seja a componente do campo elétrico ou magnético que estudemos, a mesma apresentar-se-a na equação

$$\nabla^2 \phi_i(\{x_i\}, t) - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \phi_i(\{x_i\}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (4.14)$$

Vamos simplificar a situação (apenas para não exaurir o leitor com muito rigor desnecessário já que a discussão subsequente pode ser facilmente estendida) para o caso em que o campo $\vec{\phi}$ seja unidimensional e dependa apenas de uma coordenada do espaço. Isto é, $\vec{\phi} = \phi(x, t)\hat{i}$. Neste caso, o operador laplaciano se resume à derivada parcial segunda com respeito a x e a equação (4.14) reescreve-se como

$$\frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (4.15)$$

onde c é a velocidade de propagação da onda eletromagnética dada por, como anteriormente dito, $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$. Vamos, agora, mostrar que, de fato, a equação (4.15)

tem como solução um fenômeno ondulatório, propagante. Para isto, vamos, primeiramente, reescrever a equação (4.15) sugerindo a noção de que há um *operador diferencial parcial* agindo sobre a função $\phi(x, t)$ da forma

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi(x, t) = 0 \quad (4.16)$$

ou então, igualmente,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \phi(x, t) = 0 \quad (4.17)$$

Em seguida, vamos efetuar a transformação de coordenadas $(x, t) \rightarrow (u, v)$ indicada explicitamente por:

$$\begin{cases} u(x, t) = x + ct \\ v(x, t) = x - ct \end{cases} \quad (4.18)$$

Percebe-se facilmente que a transformação correspondente para as derivações de um espaço para outro é dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial}{\partial v} = c \frac{\partial}{\partial u} - c \frac{\partial}{\partial v} \end{aligned}$$

de onde podemos transformar a equação (4.17) para

$$\left[\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} - \frac{1}{c} \left(c \frac{\partial}{\partial u} - c \frac{\partial}{\partial v} \right) \right] \left[\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} - \frac{1}{c} \left(c \frac{\partial}{\partial u} + c \frac{\partial}{\partial v} \right) \right] \tilde{\phi}(u, v) = 0$$

onde indicamos $\tilde{\phi}(u, v)$ como a função $\phi(x, t)$ representada no espaço transformado. Simplificando os operadores, temos

$$\begin{aligned} \left(2 \frac{\partial}{\partial u} \right) \left(2 \frac{\partial}{\partial v} \right) \tilde{\phi}(u, v) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial v \partial u} \right) \tilde{\phi}(u, v) &= 0 \end{aligned}$$

já que as derivadas com respeito a u e v são comutativas. A equação obtida para a função transformada tem como solução a soma de duas funções arbitrárias onde uma dependa exclusivamente de u e a outra exclusivamente de v . Podemos então escrever

$$\tilde{\phi}(u, v) = \tilde{F}(u) + \tilde{G}(v)$$

ou, efetuando a transformação inversa,

$$\phi(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct) \quad (4.19)$$

que mostra claramente o caráter ondulatório do *conjunto de soluções* da equação original. De fato, o conjunto de soluções é representado por formas funcionais que se propagam no sentido positivo do eixo x e que se propagam no sentido negativo do mesmo eixo com velocidade constante c . Daí o batismo **Equação de Onda**. [3]

Uma vez que estamos na presença de uma equação diferencial parcial, o conjunto de soluções pertinentes é diretamente influenciado pelas condições de contorno e *condições iniciais* do problema que é modelado pela mesma. No caso particular desta dissertação, estamos interessados nas *Condições de Contorno de Dirichlet* apresentados no subcapítulo seguinte.

4.2 As Séries de Fourier e a Função Transformada de Fourier

Em 1822 o matemático e físico francês Jean Joseph Baptiste Fourier publicou em um livro intitulado A Teoria Analítica do Calor a hoje chamada *Análise de Fourier*. Nesta obra, estudou a transmissão de calor através de uma barra metálica usando um método novo desenvolvido por ele mesmo. Tal método consistia em tratar funções periódicas de forma funcional complicada como uma combinação linear de formas funcionais periódicas analíticas "bem comportadas": senóides. Em outras palavras, Fourier sugeriu que uma dada função periódica poderia ser *representada* como uma soma sucessiva de senóides, mesmo que para isso a soma devesse estender-se a infinitas parcelas. Também desta semente, nasceram as chamadas funções transformadas de Fourier que tratam de funções com uma melhor aceitação de comportamento. O matemático Dirichlet provou após a morte de Fourier que seu teorema era verdadeiro anunciando um teorema chamada de Condições de Dirichlet, as quais exibiam condições suficientes (mas não necessárias) para uma dada função ser representada pelo método de Fourier. É claro que, na época, Fourier não tinha noção da grande engenhosidade que havia criado, mas desde então a sua Análise auxiliou inclusive a própria evolução do *conceito* de função. Também chamada de Teoria das Comunicações, Sinais e Sistemas, o método de Expansão em Séries e Transformadas de Fourier é aplicado em diversas áreas da Física, Matemática e Engenharia. O processamento e transmissão de dados usados atualmente se baseiam no método de Fourier, sem os quais não teríamos desenvolvido a tal ponto nossa tecnologia. Fourier foi um dos poucos físicos-matemáticos que tiveram seu nome permanente em todas as línguas e não há, certamente, um estudioso de Ciência que não conheça seu nome. [4]

4.2.1 As Séries de Fourier

Diz-se que uma função é *seccionalmente contínua* em um intervalo se (i) o intervalo pode ser subdividido em um número finito de subintervalos em cada um dos quais $f(x)$ é contínua, e (ii) os limites laterais de $f(x)$, quando x tende para os pontos extremos desses subintervalos, são finitos. Mais brevemente, uma função é seccionalmente contínua em um intervalo se tem neste no máximo um número finito de descontinuidades finitas. O *limite de $f(x)$ à direita* do ponto x denotar-se-á por $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(x + \epsilon) = f(x + 0)$ onde $\epsilon > 0$. Analogamente, o *limite de $f(x)$ à esquerda* do ponto x denotar-se-á por $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(x - \epsilon) = f(x - 0)$. [4]

Definição de Séries de Fourier Seja $f(x)$ definida no intervalo $(0, L)$ e determinada fora deste intervalo por $f(x+L) = f(x)$, isto é, suponhamos $f(x)$ periódica de período L . Define-se a *série de Fourier*, ou *desenvolvimento de Fourier*, de $f(x)$, como:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \left(n \frac{2\pi x}{L} \right) + b_n \sin \left(n \frac{2\pi x}{L} \right) \right)$$

onde os *coeficientes de Fourier* a_n e b_n são

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(n \frac{2\pi x}{L}\right) dx \text{ e } b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(n \frac{2\pi x}{L}\right) dx$$

com $n = 0, 1, 2, \dots$.

Salienta-se que a série apenas *corresponde* a $f(x)$. Não sabemos, por enquanto, se tal série converge ou se, em caso afirmativo, converge *para* $f(x)$. Este problema, como já dito, foi estudado por Dirichlet, que formulou as condições de convergência das séries de Fourier, que passamos a considerar.

Condições de Dirichlet Suponhamos que:

- (i) $f(x)$ seja definida, exceto possivelmente em um número finito de pontos de $(0, L)$;
- (ii) $f(x)$ seja periódica com período L ;
- (iii) $f(x)$ e $f'(x)$ sejam seccionalmente contínuas em $(0, L)$. Então a série de Fourier converge para
 - (a) $f(x)$ se x é ponto de continuidade
 - (b) $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ se x é ponto de descontinuidade.

Estas condições impostas a $f(x)$ são *suficientes*, mas *não* são *necessárias*, isto é, se elas são satisfeitas a convergência está garantida. Todavia, não sendo elas satisfeitas, a série poderá, ou não, convergir. As condições em questão são, em geral, satisfeitas nos problemas que surgem na Ciência.[4]

4.2.2 As Transformadas Contínuas e Discretas de Fourier

A análise de Fourier se mostrou tão poderosa que podemos aplicá-la para representar também funções que não são periódicas. O processo envolve a abstração de que o período da função periódica representada pelas séries de Fourier tende a ser um número muito grande, de modo que a função se torna, gradativamente não-periódica. Disto, nasce a *Integral de Fourier*. Definiremos as Funções Transformadas Contínuas e Discretas de Fourier. Por contínuas diremos que as variáveis independentes das funções que serão transformadas pertencem a um subconjunto \mathbb{D} dos números reais \mathbb{R} . Nesta dissertação, as variáveis espacial e temporal serão sempre tomadas contínuas de modo que as respectivas transformações nestas variáveis serão as definidas contínuas. As transformadas inversas das funções definidas nesta seção apresentar-se-ão já na suposição do domínio discreto, uma vez que este será nosso domínio de interesse acerca das soluções buscadas neste trabalho. Ou seja, a variável real contínua $x \in \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}$ fará correspondência com uma variável real pertencente a um subconjunto real *discreto* de números reais $k_n \in \{k_1, k_2, k_3, \dots\} \in \mathbb{D}' \subseteq \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$. Já a variável real contínua $t \in \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}$ fará correspondência com uma variável real *discreta* ao mesmo subconjunto de números reais $\omega_{n'} \in \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots\} \in \mathbb{D}' \subseteq \mathbb{R}$, $n' \in \mathbb{Z}$. As funções definidas nestes domínios terão como imagem subconjuntos \mathbb{I} e \mathbb{I}' do conjunto dos números complexos.[5]

Definição 1. Dada uma função $f(x) : x \in \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ seccionalmente contínua, bem como sua derivada $\frac{df}{dx}$ e assegurada a convergência absoluta da integral $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$, definimos a função

$$F(k) = \mathfrak{F}\{f(x)\} : k \in \mathbb{D}' \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{I}' \subseteq \mathbb{C}$$

tal que $f(x) \xrightarrow{\mathfrak{F}} F(k)$, chamada de Transformada Contínua de Fourier como a integral

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \quad (4.20)$$

e a respectiva transformação inversa $F(k) \xrightarrow{\mathfrak{F}^{-1}} f(x)$ pela soma

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(k_n) e^{ik_n x} \quad (4.21)$$

De fato (e esta demonstração poderá seguir para as demais generalizações) temos

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(k_n) e^{ik_n x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{-ik_n x'} dx' \right) e^{ik_n x} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \left(\frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{ik_n(x-x')} \right) dx' \end{aligned} \quad (4.22)$$

Já que a função Delta de Dirac $\delta(x-a)$ tem como uma de suas representações a expressão $\delta(x-x') = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in(x-x')}$, então, continuando, supondo convenientemente comportamento linear de k com relação a n ,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \left(\frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{ik_n(x-x')} \right) dx' = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \delta(x-x') dx' = f(x) \end{aligned} \quad (4.23)$$

e mostramos a veracidade da transformação inversa.

Definição 2. Dada uma função $f(x, t) : (x, t) \in \mathbb{D}^2 \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{I}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ seccionalmente contínua, bem como suas derivadas $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial t}$ e assegurada a convergência absoluta das integrais $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x, t)| dx < \infty$ e $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x, t)| dt < \infty$, definimos as funções

$$\begin{cases} F_x(k, t) = \mathfrak{F}_x\{f(x, t)\} : (k, t) \in \mathbb{D}' \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{I}' \times \mathbb{I} \subseteq \mathbb{C}^2 \\ F_t(x, \omega) = \mathfrak{F}_t\{f(x, t)\} : (x, \omega) \in \mathbb{D} \times \mathbb{D}' \rightarrow \mathbb{I} \times \mathbb{I}' \subseteq \mathbb{C}^2 \\ F(k, \omega) = \mathfrak{F}\{f(x, t)\} : (k, \omega) \in \mathbb{D}'^2 \rightarrow \mathbb{I}'^2 \subseteq \mathbb{C}^2 \end{cases}$$

tal que $f(x, t) \xrightarrow{\mathfrak{F}_x} F_x(k, t)$, $f(x, t) \xrightarrow{\mathfrak{F}_t} F_t(x, \omega)$ e $f(x, t) \xrightarrow{\mathfrak{F}} F(k, \omega)$, chamadas de, respectivamente, Transformada Contínua de Fourier Espacial, Transformada Contínua de Fourier Temporal e Transformada Contínua de Fourier Espaço-Temporal como as integrais

$$F_x(k, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) e^{-ikx} dx \quad (4.24)$$

$$F_t(x, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) e^{-i\omega t} dt \quad (4.25)$$

$$F(k, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) e^{-i(kx + \omega t)} dx dt \quad (4.26)$$

Definimos as respectivas funções de transformações inversas pelos somatórios $F_x(k, t) \xrightarrow{\mathfrak{F}_x^{-1}} f(x, t)$, $F_t(x, \omega) \xrightarrow{\mathfrak{F}_t^{-1}} f(x, t)$ e $F(k, \omega) \xrightarrow{\mathfrak{F}^{-1}} f(x, t)$ como

$$f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_x(k_n, t) e^{ik_n x} \quad (4.27)$$

$$f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} F_t(x, \omega_{n'}) e^{i\omega_{n'} t} \quad (4.28)$$

$$f(x, t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} F(k, \omega) e^{i(k_n x + \omega_{n'} t)} \quad (4.29)$$

4.2.3 Teoremas e Propriedades das Transformadas de Fourier

Teorema 1. Se $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x, t) = 0$, que concorda muito bem com condições de existência da transformação, então o efeito de transformação de Fourier espacial na derivada de ordem n com respeito ao espaço é amplificar a função transformada de um fator $(ik)^n$. Isto é, se existe a transformada da n -ésima derivada parcial da função, então

$$\mathfrak{F}_x \left\{ \frac{\partial^n}{\partial x^n} f(x, t) \right\} = (ik)^n \mathfrak{F}_x \{ f(x, t) \}$$

Demonstração. De fato, transformando a derivada com respeito ao espaço, temos, da definição

$$\mathfrak{F}_x \left\{ \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) e^{-ikx} dx$$

de onde, fazendo uma integração por partes, temos

$$\mathfrak{F}_x \left\{ \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[[e^{-ikx} f(x, t)]_{-\infty}^{\infty} - (-ik) \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) e^{-ikx} dx \right]$$

Supondo a hipótese de convergência, segue facilmente que

$$\mathfrak{F}_x \left\{ \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (ik) \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) e^{-ikx} dx = ik \mathfrak{F}_x \{ f(x, t) \}$$

Por indução, temos

$$\mathfrak{F}_x \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \right) \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (ik)(ik) \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) e^{-ikx} dx = (ik)^2 \mathfrak{F}_x \{f(x, t)\}$$

de onde, finalmente,

$$\mathfrak{F}_x \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \dots \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \right) \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (ik) \dots (ik) \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) e^{-ikx} dx = (ik)^n \mathfrak{F}_x \{f(x, t)\}$$

e está demonstrado o teorema. □

Teorema 2. Se $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(x, t) = 0$, então o efeito de transformação de Fourier espacial na derivada de ordem n com respeito ao espaço é amplificar a função transformada de um fator $(i\omega)^n$. Isto é,

$$\mathfrak{F}_t \left\{ \frac{\partial^n}{\partial t^n} f(x, t) \right\} = (i\omega)^n \mathfrak{F}_t \{f(x, t)\}$$

Demonstração. A demonstração segue idêntica a do Teorema 1 trocando as derivadas espaciais por temporais e apenas k por ω . □

Teorema 3. A transformada de Fourier de uma função deslocada em seu domínio na forma $f(x - a)$, onde $a \in \mathbb{R}$, é modulada pela exponencial e^{-ika} . Isto é,

$$\mathfrak{F} \{f(x - a)\} = e^{-ika} \mathfrak{F} \{f(x)\}$$

Demonstração. Decorre diretamente da definição que

$$\mathfrak{F} \{f(x - a)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - a) e^{-ikx} dx$$

de onde fazendo a mudança de variáveis $x - a = x'$, temos

$$\mathfrak{F} \{f(x - a)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{-ik(x'+a)} dx' = e^{-ika} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{-ikx'} dx' = e^{-ika} \mathfrak{F} \{f(x)\}$$

e está demonstrado o teorema. [5] □

5 A Cavidade Ressonante a Vácuo

Campos eletromagnéticos na presença de fronteiras metálicas formam, em aspecto prático, um assunto de importância considerável. Em altas frequências onde os comprimentos de onda são de ordens menores que metros ou até menos, a única forma prática de gerar e transmitir radiação eletromagnética envolve estruturas metálicas com dimensões comparáveis aos comprimentos de onda envolvidos. A cavidade ressonante pode ser construída a partir de um guia de ondas fazendo com que o mesmo seja perfeitamente fechado. Ou seja, a cavidade ressonante é uma estrutura (não restringindo a forma geométrica da mesma) fechada por paredes metálicas que, de modo usual, tem uma condutividade elétrica muito elevada. Assim, como esperado e contrário aos guias de onda, as cavidades ressonantes trabalharão com ondas estacionárias. Por este motivo, estes dispositivos quando há em seu interior apenas vácuo são excelentes para armazenar grandes quantidades de energia na forma de ondas eletromagnéticas de alta frequência, o que não é possível em circuitos RLC. As frequências de possível armazenamento são funções das dimensões da cavidade e, daí, o nome ressonante. As várias reflexões sofridas no interior da cavidade diminuem muito os fatores de perda de energia e tornam considerável o fator de qualidade destes dispositivos. As geometrias mais usuais das cavidades são a retangular e cilíndrica. Nesta dissertação estaremos interessados na geometria retangular onde apenas uma das dimensões da cavidade será de importância para as frequências permitidas. Faremos isso para atermo-nos, basicamente, no aspecto perturbativo da ondulatória envolvida colocando em contraste as cavidades ressonantes a vácuo e na presença de plasmas rarefeitos. Nesta seção trataremos do caso da cavidade a vácuo cuja relação entre as suas dimensões possibilitará a clausura de ondas eletromagnéticas unidimensionais facilmente.[6]

Tratemos do interior de uma cavidade ressoante retangular fechada por paredes metálicas. Dada geometria, mapearemos todo o espaço do problema por pontos (x, y, z) localizados pelo vetor $\vec{r} = x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z}$ onde \hat{x} , \hat{y} e \hat{z} são vetores unitários ligados as direções de crescimento das coordenadas x , y e z . A dimensão fisicamente considerável será, arbitrariamente escolhida, o comprimento $\Delta y = L$. Os comprimentos nas demais direções serão tomados como não-comparáveis ao da direção de propagação y . Desta maneira, iremos implantar ad hoc que a direção de propagação da onda enclausurada será \hat{y} e o vetor campo elétrico da onda eletromagnética será representado por $\vec{E} = E(y, t) \hat{x}$ para $0 < y < L$. Isto é, o campo elétrico terá sua amplitude dependente apenas da coordenada espacial y e, obviamente, da temporal t e desenvolverá sua ondulatória na direção \hat{x} . O campo elétrico no exterior da cavidade é nulo. Uma vez que consideramos vácuo no interior da cavidade, as Equações de Maxwell para o problema são idênticas as equações 4.5,4.6,4.7 e 4.8 da seção 4.1 e delas obtemos a equação de onda para o campo elétrico da forma

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (5.30)$$

Como a direção efetiva de propagação é y o operador ∇^2 pode ser apenas substituído por $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ de modo que a equação de evolução espaço-temporal para a amplitude

do campo elétrico no interior da cavidade é

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} E(y, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E(y, t) = 0 \quad (5.31)$$

a muito bem conhecida equação de onda eletromagnética no vácuo. Uma vez conhecida a sua solução podemos, então, aplicar a Lei de Faraday e obter a respectiva componente magnética da onda.

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{B} = -\int \nabla \times \vec{E} dt \quad (5.32)$$

Isto é, já que

$$\nabla \times \vec{E} = \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} \times E(y, t) \hat{x} = -\frac{\partial}{\partial y} E(y, t) \hat{z}$$

então

$$\vec{B} = \hat{z} \int \frac{\partial}{\partial y} E(y, t) dt \quad (5.33)$$

que é perpendicular à componente de campo elétrico.

5.1 A Relação de Dispersão

Para extrair a relação de dispersão muito bem conhecida das ondas eletromagnéticas no vácuo no interior da cavidade vamos levar a equação (5.31) para o espaço recíproco de número de onda k e frequência angular ω . Para isto, vamos utilizar da tecnologia das funções Transformadas de Fourier em, respectivamente, posição e tempo.

Uma vez observadas as propriedades das transformadas, temos

$$\begin{aligned} & \mathfrak{F} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial y^2} E(y, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E(y, t) \right\} = \mathfrak{F} \{0\} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} E(y, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E(y, t) \right] e^{-i(ky+\omega t)} dy dt = 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial y^2} E(y, t) e^{-iky} dy \right] e^{-i\omega t} dt - \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E(y, t) e^{-i\omega t} dt \right] e^{-iky} dx = 0 \end{aligned}$$

A manipulação das integrais é coerente já que a coordenada de espaço é independente da coordenada de tempo e a transformação é linear. Prosseguindo, observamos que estamos, respectivamente, na presença das transformadas das derivadas segundas com relação a espaço e tempo. Portanto, de acordo com o Teorema 2, temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} (ik)^2 \tilde{E}_x(k, t) e^{-i\omega t} dt - \int_{-\infty}^{\infty} (i\omega)^2 \tilde{E}_t(x, \omega) e^{-ikx} dx = 0$$

onde indicamos por $\tilde{E}_x(k, t)$ e $\tilde{E}_t(x, \omega)$, respectivamente, a transformada espacial e temporal de Fourier da função $E(y, t)$. A última equação nada mais é do que a transformada espaço-temporal manifestada de duas formas diferentes. Assim,

$$-k^2 \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}_x(k, t) e^{-i\omega t} dt \right] + \frac{\omega^2}{c^2} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}_t(x, \omega) e^{-ikx} dx \right] = 0$$

e, finalmente,

$$\left[\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right] \tilde{E}(k, \omega) = 0 \quad (5.34)$$

que nos dá a conhecida Relação de Dispersão $\omega(k)^2 = c^2 k^2$, já que a função transformada não deve ser identicamente nula. Portanto, para altas frequências $f = \frac{\omega}{2\pi}$ é preciso pequenos comprimentos de onda $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ já que o mediador da relação $\lambda f = c$ é a velocidade da luz no vácuo com ordem de grandeza 10^8 m/s. Percebemos que neste caso a velocidade de fase $v_p = \frac{\omega(k)}{k}$ é idêntica a velocidade de grupo $v_g = \frac{\partial \omega(k)}{\partial k}$, que é $\pm c$. Desta maneira, não só todos os modos normais do pacote de ondas se movem exatamente à mesma velocidade da luz no vácuo como o próprio pacote também. Ou seja, o vácuo é um meio não dispersivo e devemos esperar que as ondas nesta situação mantenham suas características de forma a medida que se propagam.[2]

5.2 Discretização das Frequências

As Condições de Contorno de Dirichlet, assim chamadas em homenagem ao matemático Dirichlet, caracterizam a situação de que uma dada função definida em um domínio deve, além de satisfazer a uma equação diferencial dada neste domínio, assumir certos valores em certas regiões pré-estabelecidas. No contexto das cavidades ressonantes, já que as paredes são metálicas, essas condições são particularmente interessantes já que nos limites da cavidade o campo elétrico deve ser nulo. Isto deve-se ao fato de que consideramos a continuidade do campo elétrico na fronteira da cavidade. Claro, o campo elétrico na região externa da cavidade deve ser nulo e, portanto, exatamente sobre a fronteira também o deve ser já que supomos a amplitude do campo elétrico uma função diferenciável (se não fosse não haveria equação diferencial envolvida). Então, consideramos o campo elétrico identicamente nulo, isto é, com amplitude zero para todo instante t nos pontos $y = 0$ e $y = L$. Ou seja, o contorno do problema é representado por

$$\begin{cases} E(y = 0, t) = 0 \\ E(y = L, t) = 0 \end{cases} \quad (5.35)$$

Vamos agora estudar a equação (4.15) mais uma vez na sua representação no espaço de frequência ω e imprimir sobre ela as condições de contorno dadas. De fato,

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_t \left\{ \frac{\partial^2}{\partial y^2} E(y, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E(y, t) \right\} &= \mathfrak{F}_t \{ \alpha^2 E(y, t) \} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E(y, t) e^{-i\omega t} dt \right) - \frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E(y, t) e^{-i\omega t} dt \right) &= \alpha^2 \tilde{E}_t(y, \omega) \end{aligned}$$

que nos dá, uma vez que estaremos diferenciando com relação ao espaço a função transformada, a seguinte equação:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \tilde{E}_t(y, \omega) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \alpha^2 \right) \tilde{E}_t(y, \omega) = 0 \quad (5.36)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \tilde{E}_t(y, \omega) + k^2 \tilde{E}_t(y, \omega) = 0$$

Para resolvê-la, iremos introduzir o seguinte *ansatz*: $\tilde{E}_t(y, \omega) = a(\omega)e^{b(\omega)y}$. Aqui, $a(\omega)$ e $b(\omega)$ são supostas funções da variável ω . Pois bem, aplicando tal *ansatz* na equação (5.36) obtemos

$$a(\omega)e^{b(\omega)y} \left[b^2(\omega) + \frac{\omega^2}{c^2} \right] = 0$$

cuja solução clara é $b(\omega) = \pm i\frac{\omega}{c}$. Isto é, a solução mais geral possível é dada pela combinação

$$\tilde{E}_t(y, \omega) = a_+(\omega)e^{i\frac{\omega}{c}y} + a_-(\omega)e^{-i\frac{\omega}{c}y} \quad (5.37)$$

$$\tilde{E}_t(y, k) = a_+(k)e^{iky} + a_-(k)e^{-iky}$$

onde $a_-(\omega)$ (que *amplifica* a exponencial de argumento positivo) e $a_+(\omega)$ (que *amplifica* a exponencial de argumento negativo) são funções de ω a ser determinadas. Para aplicar as condições de contorno (5.35) a esta solução devemos também transformá-las com respeito ao tempo. Assim, fazendo isso, temos

$$\begin{cases} \tilde{E}_t(y=0, \omega) = 0 \\ \tilde{E}_t(y=L, \omega) = 0 \end{cases} \quad (5.38)$$

Ou seja, as funções $a_-(\omega)$ e $a_+(\omega)$ devem ser tais que

$$\begin{cases} \tilde{E}_t(y=0, \omega) = 0 \Rightarrow a_+ + a_- = 0 \\ \tilde{E}_t(y=L, \omega) = 0 \Rightarrow a_+e^{i\frac{\omega}{c}L} + a_-e^{-i\frac{\omega}{c}L} = 0 \end{cases} \quad (5.39)$$

Combinando essas equações obtemos $a_+(\omega) = -a_-(\omega)$ de onde

$$a_+ [e^{i\frac{\omega}{c}L} - e^{-i\frac{\omega}{c}L}] = 0 \Rightarrow a_+ \sin\left(\frac{\omega}{c}L\right) = 0 \quad (5.40)$$

Para que as soluções não sejam triviais ($a_+(\omega) = a_-(\omega) = 0$) é preciso que a quantidade $\frac{\omega}{c}L$ assuma apenas valores múltiplos *inteiros* de π , de modo a assegurar a nulidade da função seno ($\sin(y) = 0 \Rightarrow x = n\pi, n \in \mathbb{Z}$). Portanto, se faz presente a *Discretização das Frequências* possíveis para o intervalo $0 < y < L$:

$$\frac{\omega}{c}L = n\pi \Rightarrow \omega_n = n\frac{c\pi}{L} \quad (5.41)$$

$$\sin(kL) = 0 \Rightarrow kL = n\pi \Rightarrow$$

$$k_n = n \frac{\pi}{L} \Rightarrow \omega_n = c \sqrt{n^2 \frac{\pi^2}{L^2} + \alpha^2}$$

Gera-se, portanto, um conjunto infinito contável de possíveis valores de frequências associadas à solução (5.37). Consideramos, evidentemente, apenas inteiros positivos, já que as frequências devem ser números reais positivos. A solução mais geral possível será a sobreposição de cada uma das soluções. Aqui está o fato importante sobre as cavidades ressonantes. Não é qualquer frequência f de onda que poderá ser armazenada na cavidade. A relação entre a frequência física f e o número de onda k com as correspondentes frequência e número de onda no espaço recíproco ω e k são

$$\omega = 2\pi f \text{ e } k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (5.42)$$

de onde relacionamos, dada relação de dispersão, $\lambda f = c$

Portanto, temos a relação

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = n \frac{c}{2L}$$

Somente as ondas eletromagnéticas com frequência representada por um múltiplo inteiro da quantidade fundamental (menor de todas e chamada de frequência de ressonância e/ou frequência de corte) $f_{n=1} = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{c}{2L}$ que serão enclausuradas com sucesso. Os comprimentos de onda característicos são

$$\lambda_n = \frac{c}{f_n} = \frac{2L}{n}$$

e, então, o maior comprimento de onda das ondas enclausuradas será $\lambda_1 = 2L$. Ou seja, para cavidades ressonantes da ordem de alguns centímetros, isto é, $L \sim 10^{-2} \text{ m}$ a frequência de ressonância fundamental é $f_1 \sim 10^{10} \text{ s}^{-1}$ que são perfeitas para o armazenamento de micro-ondas. Eis um dos principais fatos dos revolucionários *fornos de micro-ondas*. Uma caixa metálica simples com comprimentos da ordem de (até) dezenas de centímetros pode conter ondas que excitam energias de modos rotacionais de moléculas como a da água (por exemplo) e, por fim, elevar sua temperatura.[6]

5.3 Uma Solução Analítica

Já estabelecido o conhecimento da discretização das frequências e, portanto, estabelecido o conhecimento que devemos tratar as *transformações inversas* das funções observando este fato, vamos definir as **Condições Iniciais**. Vamos supor que inicialmente a cavidade ressonante esteja inabitada de radiação eletromagnética. Porém, repentinamente, esta condição tende a mudar e dar uma forma funcional $f(y)$ para a intensidade do campo elétrico. Isto é, abruptamente tende a surgir um campo elétrico com uma amplitude bem definida na direção x . O par de condições iniciais que bem simulará esta realidade é

$$\begin{cases} \vec{E}(y, t = 0) = 0 \hat{x} \\ \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(y, t = 0) = f(y) \hat{x} \end{cases} \quad (5.43)$$

Não nos é mais pertinente trabalhar com a equação (5.31) no espaço recíproco de frequências, como em (5.36). Para exprimir um resultado relacionado a solução do problema das condições iniciais supracitadas precisamos trabalhar com a equação (5.31) no espaço recíproco de números de onda. Ou seja, precisamos aplicar a transformação espacial na equação (5.31). Segue que

$$\begin{aligned} & \mathfrak{F}_y \left\{ \frac{\partial^2}{\partial y^2} E(y, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E(y, t) \right\} = \mathfrak{F}_y \{0\} \Rightarrow \\ \Rightarrow & \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial y^2} E(y, t) e^{-iky} dy \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} E(y, t) e^{-iky} dy \right) = 0 \end{aligned}$$

que nos dá, uma vez que estaremos diferenciando com relação ao tempo a função transformada, a seguinte equação:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tilde{E}_y(k, t) + (ck)^2 \tilde{E}_y(k, t) = 0 \quad (5.44)$$

Transformando, também, as condições iniciais, obtemos, preocupando-nos apenas com o módulo do vetor campo elétrico pertinente à equação acima

$$\begin{cases} \vec{E}(y, t=0) = 0 \hat{x} \\ \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(y, t=0) = f(y) \hat{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{E}_y(k, t=0) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \tilde{E}_y(k, t=0) = F(k) \end{cases} \quad (5.45)$$

onde $F(k) = \mathfrak{F}_y \{f(y)\}$

O procedimento é semelhante: sugeriremos um *ansatz* $\tilde{E}_y(k, t) = h(k)e^{q(k)t}$ como solução de (5.44). Aplicando tal função na equação, obtemos

$$h(k)e^{c(k)t} [q(k)^2 + (ck)^2] = 0 \quad (5.46)$$

de onde solucionamos $q_+(k) = ick$ e $q_-(k) = -ick$. Assim, a solução mais geral possível para um número de onda dado k é

$$\tilde{E}_y(k, t) = h_+(k)e^{ickt} + h_-(k)e^{-ickt} \quad (5.47)$$

Impondo sobre esta solução as condições de contorno obtemos as equações

$$\begin{cases} h_+(k) + h_-(k) = 0 \\ ick h_+(k) - ick h_-(k) = F(k) \end{cases} \quad (5.48)$$

e, facilmente, concluimos que

$$\begin{cases} h_+(k) = -h_-(k) \\ h_-(k) = -\frac{1}{2c} \frac{F(k)}{ik} \end{cases} \quad (5.49)$$

Daí, a solução para o campo transformado no espaço recíproco de número de onda é

$$\tilde{E}_y(k, t) = \frac{1}{2c} \frac{F(k)}{ik} e^{ickt} - \frac{1}{2c} \frac{F(k)}{ik} e^{-ickt} \quad (5.50)$$

Multiplicando ambos lados por ik e aplicando a transformação inversa obtemos

$$\mathfrak{F}_y^{-1} \left\{ ik\tilde{E}_y(k, t) \right\} = \frac{1}{2c} \mathfrak{F}_y^{-1} \left\{ F(k)e^{ickt} \right\} - \frac{1}{2c} \mathfrak{F}_y^{-1} \left\{ F(k)e^{-ickt} \right\} \quad (5.51)$$

Dos Teoremas acerca das transformadas de Fourier da seção 4 reconhecemos do lado esquerdo a transformada inversa da derivada da amplitude do campo elétrico e do lado direito as transformadas inversas das translações de domínio da identidade funcional da amplitude de campo elétrico na derivada temporal inicial.[5] Portanto,

$$\frac{\partial}{\partial y} E(y, t) = \frac{1}{2c} f(y + ct) - \frac{1}{2c} f(y - ct) \quad (5.52)$$

Uma vez conhecida a função $f(y)$ basta trasladá-la de $\pm ct$ e integrar com relação a y para obter solução de campo elétrico.

5.4 O Pulso Elétrico

Caracterizaremos como um *pulso elétrico* muito bem localizado em um ponto $x = x_0$ um campo elétrico da forma $E(x) = E_0\delta(x - x_0)$, onde E_0 é um número real que dá a intensidade deste pulso. Estamos particularmente interessados neste tipo de comportamento para a condição inicial da derivada do campo elétrico no interior da cavidade ressonante. Queremos obter soluções para o caso de que, no instante inicial, a cavidade esteja isenta de radiação eletromagnética e abruptamente(muito abruptamente) esta realidade é tensionada a mudar para uma intensidade múltipla de uma quantidade definida A_0 que tem unidades de campo elétrico por unidades de velocidade em um ponto específico $y = y_0$. Isto é, tomaremos $f(y) = A_0\delta(y - y_0)$ de modo que as condições iniciais de nosso interesse serão

$$\begin{cases} \vec{E}(y, t = 0) = 0 \hat{x} \\ \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(y, t = 0) = A_0\delta(y - y_0) \hat{x} \end{cases} \quad (5.53)$$

Portanto, da solução (5.52) identificamos

$$\frac{\partial}{\partial y} E(y, t) = \frac{A_0}{2c} \delta[y - (y_0 - ct)] - \frac{A_0}{2c} \delta[y - (y_0 + ct)] \quad (5.54)$$

de onde, observando a relação da Delta de Dirac com a função Step de Heaviside, temos a solução da amplitude de campo elétrico dada por

$$E(y, t) = \frac{A_0}{2} [H(y - (y_0 - ct)) - H(y - (y_0 + ct))] \quad (5.55)$$

De fato, a constante de integração deve ser nula para satisfazer $E(y, 0) = 0$. Explicitamente,

$$E(y, t) = \begin{cases} 0 & , y \in (0, y_0 - ct) \cup (y_0 + ct, L) \\ \frac{A_0}{4c} & , y = y_0 \pm ct \\ \frac{A_0}{2c} & , y \in (y_0 - ct, y_0 + ct) \end{cases} \quad (5.56)$$

Uma vez seccionalmente contínua, a fim de explorar graficamente esta solução, vamos obter a representação desta função em Série de Fourier. Suponhamos que a coordenada inicial y_0 seja o centro da cavidade. Isto é, $y_0 = \frac{L}{2}$. Daí, da seção 4.1,

$$E(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right) + b_n(t) \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right)$$

Para $n = 0$ temos $k = 0$, que não faz sentido. Portanto, não contabilizaremos na representação. Os Coeficientes de Fourier são

$$\begin{aligned} a_n(t) &= \frac{1}{L} \int_0^L E(y, t) \cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy \\ &= \frac{1}{L} \int_0^L \frac{A_0}{2} \left[H\left(y - \left(\frac{L}{2} - ct\right)\right) - H\left(y - \left(\frac{L}{2} + ct\right)\right) \right] \cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy = \\ &= \frac{1}{L} \int_{\frac{L}{2}-ct}^{\frac{L}{2}+ct} \frac{A_0}{2c} \cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy = \frac{A_0}{2cn\pi} \left[\sin\left(\frac{n\pi}{L} \left(\frac{L}{2} + ct\right)\right) - \sin\left(\frac{n\pi}{L} \left(\frac{L}{2} - ct\right)\right) \right] = \\ &= \frac{A_0}{cn\pi} \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Mas, $\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}^*$. Assim, o primeiro coeficiente de Fourier é identicamente nulo: $a_n = 0 \forall n \in \mathbb{Z}^*$. Já o segundo,

$$\begin{aligned} b_n(t) &= \frac{1}{L} \int_0^L E(y, t) \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy \\ &= \frac{1}{L} \int_0^L \frac{A_0}{2} \left[H\left(y - \left(\frac{L}{2} - ct\right)\right) - H\left(y - \left(\frac{L}{2} + ct\right)\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy = \\ &= \frac{1}{L} \int_{\frac{L}{2}-ct}^{\frac{L}{2}+ct} \frac{A_0}{2c} \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy = -\frac{A_0}{2cn\pi} \left[\cos\left(\frac{n\pi}{L} \left(\frac{L}{2} + ct\right)\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{L} \left(\frac{L}{2} - ct\right)\right) \right] = \\ &= \frac{A_0}{cn\pi} \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Portanto, a representação da onda-solução é [4]

$$E(y, t) = \frac{A_0}{c\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \quad (5.57)$$

Tomando as variáveis adimensionais $\left\{ \tau = \frac{ct}{L} ; \ell = \frac{y}{L} ; \bar{A}_0 = \frac{A_0}{c\pi} \right\}$ a fim de visualizar os gráficos da solução, temos, a solução aproximada somando de $n = 1$ a $n = N$

$$E(y, t) \cong \bar{A}_0 \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \sin(n\pi\tau) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin(n\pi\ell) \quad (5.58)$$

Naturalmente, o período da onda é $P = \frac{2L}{c}$ de modo que exploraremos a solução quadro-a-quadro para $0 < \tau < 2$ para intervalos $\Delta\tau = 0.1$.

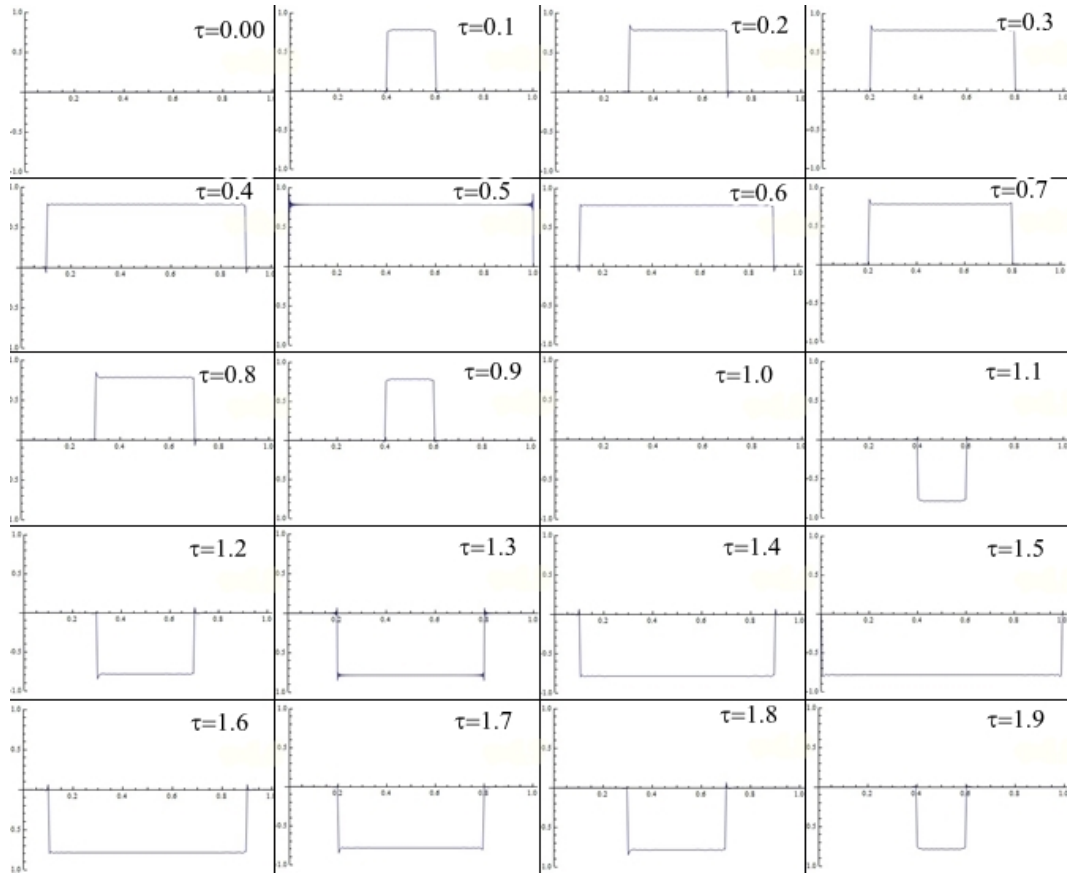


Figura 1: Solução quadro-a-quadro da onda para intervalos de tempo de $\tau = 0$ a $\tau = 2$ com $\bar{A}_0 = 1$ e $N = 700$.

A figura mostra a evolução espaço-temporal da onda na cavidade a vácuo. Inicialmente, como previmos, a cavidade é inabitada de radiação. As duas frentes de onda que viajam uma para a esquerda e outra para a direita com velocidade c surgem imediatamente o início da propagação e, cada uma, encontra as paredes da cavidade em $\tau = 0.5$ como podemos ver, onde são refletidas de volta ao centro da cavidade. As frentes continuam sua propagação invertendo os sentidos de suas velocidades e vão de encontro ao centro da cavidade. Uma vez chegando lá, se interferem e o campo é nulo novamente. Imediatamente após, as frentes continuam sua propagação e vão de encontro as paredes da cavidade. Novamente são refletidas e, fechando um período, em $\tau = 2$, o campo volta a ser nulo. Esta configuração se repetirá para instantes de tempo maiores que $\tau = 2$ devido a periodicidade da onda. Notamos que a amplitude da mesma é preservada. Isto é, durante a propagação do pacote de ondas a amplitude do mesmo assume apenas um dos dois valores 0 ou a fração de \bar{A}_0 .

6 A Cavidade Ressonante Plasmônica

Neste capítulo estudaremos o comportamento ondulatório das ondas enclausuradas na cavidade ressonante não mais no regime de vácuo. Acrescentaremos uma densidade de cargas livres em seu interior. Isto é, agora a cavidade será preenchida por um gás ionizado (um plasma). O nome plasma se dá, realmente, a um gás ionizado com uma densidade de partículas carregadas considerável. No caso deste trabalho consideraremos que o plasma interior tem uma densidade muito baixa, i.e, bastante rarefeito, de modo que desprezaremos uma série de fenômenos que poderiam ocorrer no processo. [6]

6.1 A Equação de Onda Plasmônica

Para chegarmos à equação que rege a evolução espaço-temporal das ondas eletromagnéticas no interior da cavidade na presença do plasma rarefeito temos de reescrever as Equações de Maxwell pertinentes a este sistema. Agora há uma certa densidade factível de cargas na cavidade bem como densidades de corrente elétrica que surgirão. Assim, as equações completas são:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (6.59)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (6.60)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (6.61)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (6.62)$$

Tomando a derivada com respeito ao tempo na última equação obtemos, devido a independência das coordenadas espaciais e temporais

$$\nabla \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

e, em seguida substituindo a lei de Faraday, obtemos

$$\begin{aligned} -\nabla \times \nabla \times \vec{E} &= \mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow -\nabla(\nabla \cdot \vec{E}) + \nabla^2 \vec{E} &= \mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (6.63)$$

Imprimindo novamente a unidimensionalidade de nosso estudo, a equação se resume a

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \vec{E}(y, t) = \mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(y, t)}{\partial t^2} \quad (6.64)$$

Temos de abordar uma forma mais convidativa a densidade de corrente \vec{J} . Suponhamos que a população de cargas elétricas sejam constituída de elétrons livres não-interagentes de carga de módulo e e massa m sujeitos a um número médio n muito pequeno de partículas por unidade de volume δV . Daí, nesta condição de plasma rarefeito, podemos calcular a densidade de corrente por

$$\vec{J} = \frac{1}{\delta V} \sum_i q_i \vec{v}_i$$

onde $q_i = -e$ é a carga de cada elétron e \vec{v}_i suas velocidades relativas a um referencial inercial em repouso com relação a cavidade. Como as cargas são idênticas, basicamente temos

$$\vec{J} = -n_0 e \vec{v}$$

onde n_0 é a densidade média de elétrons na cavidade e \vec{v} é a *velocidade de deriva* dos elétrons. Estamos supondo aqui que o sistema está em equilíbrio e esta velocidade é uma medida global do movimento do sistema.

Desprezaremos o efeito magnético da força de Lorentz, já que a densidade destes elétrons é baixa e as velocidades relativas ao referencial inercial em repouso em relação a cavidade são baixas o suficiente para justificar o desprezo. Aplicando a 2ª Lei de Newton ao sistema observamos facilmente que [8]

$$m \frac{d}{dt} \vec{v} = -e \vec{E}$$

de onde calculamos a relação entre a derivada temporal da densidade de corrente e o campo elétrico como

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{J} = \frac{n_0 e^2}{m} \vec{E} \quad (6.65)$$

Daí, substituindo na equação (6.64) obtemos

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \vec{E}(y, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}(y, t) = n_0 \frac{\mu_0 e^2}{m} \vec{E} \quad (6.66)$$

Identificando

$$\alpha^2 = n_0 \frac{\mu_0 e^2}{m}$$

podemos estimar sua ordem de grandeza substituindo os valores das grandezas físicas fundamentais. Esta constante é proporcional a conhecida "frequência de plasma" definida por $\omega_p = \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m}$. De fato,

$$\alpha^2 = \frac{\omega_p^2}{c^2} = n_0 [\text{m}^{-3}] \frac{4\pi \times 10^{-7} [\text{kg m/C}^2] \cdot 2,56 \times 10^{-38} [\text{C}^2]}{9,1 \times 10^{-31} [\text{kg}]} = 3,53 \times 10^{-14} \cdot n_0 \text{ m}^{-2}$$

o valor obtido é muito pequeno mesmo não considerando a possível ordem de grandeza da densidade de elétrons que é suposta muito baixa. Assim, o valor de α é, de fato, um valor de caráter *perturbativo* a equação de onda que, no vácuo teria o seu lado direito igual a zero.

A equação que, portanto, devemos nos ater a solucionar é

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \vec{E}(y, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}(y, t) = \alpha^2 \vec{E} \quad (6.67)$$

ou, já inferindo $\vec{E}(y, t) = E(y, t)\hat{x}$, obtemos a versão final

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} E(y, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E(y, t) = \alpha^2 E(y, t) \quad (6.68)$$

Neste caso, estaremos interessados em prever os efeitos dispersivos do meio plasmônico nas ondas no interior da cavidade. Daí, vamos tomar as mesmas condições de contorno do problema anterior, porém, com as condições iniciais modificadas. Vamos lançar uma onda na cavidade com derivada nula:

$$\begin{cases} E(y, t = 0) = f(y) , & \frac{\partial}{\partial t} E(y, t = 0) = 0 \\ E(y = 0, t) = 0 & E(y = L, t) = 0 \end{cases} \quad (6.69)$$

6.2 A Relação de Dispersão, Discretização do Número de Onda e Frequência de Corte

Para determinar a relação de dispersão destas ondas vamos, como no outro capítulo que buscava a mesma solução, transformar em tempo e espaço a equação obtida. Assim,

$$\begin{aligned} & \mathfrak{F} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial y^2} E(y, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E(y, t) \right\} = \mathfrak{F} \{ \alpha^2 E(y, t) \} \Rightarrow \\ \Rightarrow & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} E(y, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E(y, t) \right] e^{-i(ky+\omega t)} dy dt = \alpha^2 \tilde{E}(k, \omega) \Rightarrow \\ \Rightarrow & \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial y^2} E(y, t) e^{-iky} dy \right] e^{-i\omega t} dt - \frac{1}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E(y, t) e^{-i\omega t} dt \right] e^{-iky} dy = \alpha^2 \tilde{E} \end{aligned}$$

Prosseguindo, observamos que estamos, respectivamente, na presença das transformadas das derivadas segundas com relação a espaço e tempo. Portanto, de acordo com o Teorema 2, temos

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (ik)^2 \tilde{E}_y(k, t) e^{-i\omega t} dt - \frac{1}{c^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (i\omega)^2 \tilde{E}_t(y, \omega) e^{-iky} dy = \alpha^2 \tilde{E}$$

onde indicamos por $\tilde{E}_y(k, t)$ e $\tilde{E}_t(y, \omega)$, respectivamente, a transformada espacial e temporal de fourier da função $E(y, t)$. A última equação nada mais é do que a transformada espaço-temporal manifestada de duas formas diferentes. Assim,

$$-k^2 \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}_y(k, t) e^{-i\omega t} dt \right] + \frac{\omega^2}{c^2} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}_t(y, \omega) e^{-iky} dy \right] = \alpha^2 \tilde{E}$$

e, finalmente, $[\omega^2 - (c^2 k^2 + c^2 \alpha^2)] \tilde{E}(k, \omega) = 0$. Já que a função transformada idênticamente nula não nos interessa, a Equação de Dispersão é

$$\omega^2 - (c^2 k^2 + c^2 \alpha^2) = 0 \quad (6.70)$$

de onde temos a Relação de Dispersão dada por, inferindo frequência positiva,

$$\omega(k) = c\sqrt{k^2 + \alpha^2} \quad (6.71)$$

$$\omega^{(0)}(k) = ck$$

Como vemos, a frequência característica de cada modo normal k cresce com o mesmo e modos normais viajando em sentidos exatamente opostos, isto é, com o mesmo valor em módulo do número de onda k , apresentam uma mesma frequência. A velocidade de cada um dos modos normais, isto é, a velocidade de fase do modo de número de onda k é dada por[9]

$$v_p = \frac{\omega(k)}{k} = \frac{c\sqrt{k^2 + \alpha^2}}{k}$$

A função que representa a velocidade de fase é decrescente com relação a k . Assim, as ondas que constituem o pacote com maior número de onda tendem a ser mais lentas do que as de menor número de onda, que são mais rápidas. Note que fatorando k na expressão obtemos

$$v_p = c\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{k}\right)^2}$$

O módulo da velocidade limite de um modo cujo número de onda é muito grande é $v_p = c$. Portanto, os modos mais lentos tendem a se mover exatamente com a velocidade da luz no vácuo. Já os modos mais rápidos viajam com velocidade superior a velocidade da luz! Este fato, como sabido, não é motivo para maiores alardes porque a velocidade de fase é apenas a rapidez com que o modo se move. Não representa a transmissão de nenhum tipo de informação e, portanto, não viola o princípio de que informação alguma pode viajar mais rápido que a luz no vácuo da Relatividade Especial.[7] Reparámos também que à medida que o parâmetro α cresce, isto é, à medida que o plasma contido na cavidade se torna mais denso, os modos se tornam mais rápidos. A tendência de se mover com a menor velocidade possível $v_p = c$ é retardada pelo plasma mais denso. No limite de plasma algum, isto é, $\alpha \rightarrow 0$, recuperamos o resultado esperado de que todos os modos se movem a uma mesma velocidade de fase. A figura abaixo ilustra nossa análise. Suponhamos puramente por ilustração que o número de onda k seja contínuo. O eixo vertical representa os valores da velocidade de fase e o horizontal os valores do número de onda k . Cada uma das curvas é respectiva a uma densidade de plasma. Ou seja, cada curva se refere a um valor diferente de α . A curva mais de baixo em azul claro representa a menor das densidades de plasma α_1 e decresce muito rapidamente ao valor limite. A intermediária em vermelho representa uma densidade maior α_2 e decresce menos rapidamente. A mais de cima em roxo representa a maior das densidades α_3 e decresce muito mais lentamente.

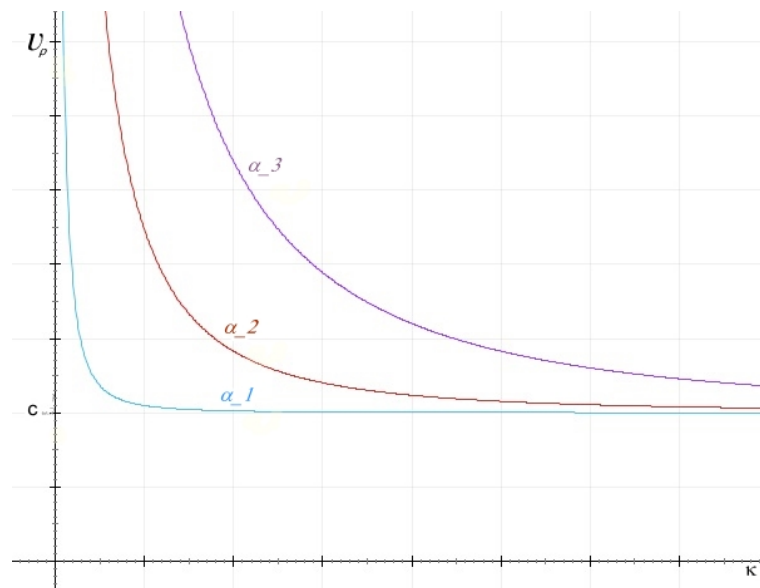


Figura 2: No eixo horizontal representam-se os valores de k e no vertical as velocidades de fase. A ordenação das densidades de plasma é $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$.

A velocidade de grupo do pacote de ondas, que é dada por[9]

$$v_g = \frac{\partial}{\partial k} \omega(k) = \frac{c k}{\sqrt{\alpha^2 + k^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{k}\right)^2}}$$

é, como esperado, uma função limitada inferior e superiormente pela velocidade de propagação da luz no vácuo: $\text{Im}[\omega'(k)] = (-c, c)$. Percebemos que a medida que o parâmetro α cresce, isto é, a medida que o plasma contido na cavidade se torna mais denso, para uma mesma diferença de valor de números de onda k sucessivos os pulsos de interferência são mais lentos. Portanto, em situações de plasma mais denso, o pacote de onda deve *precisar de mais tempo* para propagar-se a mesma distância que em plasmas menos densos. Em outras palavras, o plasma mais denso contém a propagação da onda. Em contra-partida, esses plasmas mais densos apresentam maior frequência. A onda oscila muito mais rapidamente em um dado ponto do que neste mesmo ponto para plasmas menos densos. A figura abaixo ilustra o gráfico da velocidade de grupo para os mesmos três valores diferentes do parâmetro α da figura anterior. Como vemos, as assíntotas verticais $\omega'(k) = \pm c$ são evidentes e a medida que a densidade de plasma cresce os pulsos se tornam mais lentos. A curva mais de cima em azul claro representa a menor das densidades de plasma α_1 e cresce rapidamente. A intermediária em vermelho representa uma densidade maior α_2 e cresce menos rapidamente que a primeira. A mais de baixo em roxo representa a maior das densidades α_3 e cresce muito mais lentamente.

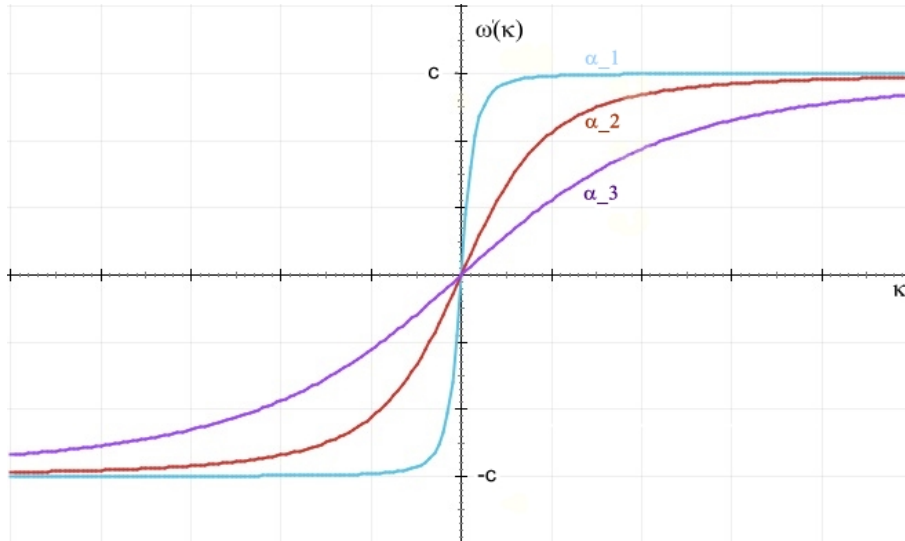


Figura 3: No eixo horizontal são representados os valores do número de onda k e no vertical as curvas $\omega'(k)$. A ordenação das densidades de plasma é $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$.

Da mesma maneira que na cavidade a vácuo, a plasmônica deve atender a condição de contorno de Dirichlet empregada anteriormente. Com o mesmo raciocínio feito antes obtemos que a discretização dos números de onda é da forma $k_n = n \frac{\pi}{L}$ e, portanto

$$\omega_n = c \sqrt{n^2 \frac{\pi^2}{L^2} + \alpha^2}$$

Desta maneira, observamos que há uma frequência mínima representada pelos modos correspondentes a $n = \pm 1$. Esta chamamos de *frequência de corte* e tem valor

$$\omega_{\min} = c\sqrt{\frac{\pi^2}{L^2} + \alpha^2} = \sqrt{\frac{c^2\pi^2}{L^2} + \omega_p^2}$$

Ou seja, nem todo modo normal pode se propagar no meio plasmônico. Propagar-se-ão com sucesso apenas aqueles modos para os quais $\omega(k) > \omega_{\min}$. Note que este valor mínimo *cresce* com a densidade de plasma. Plasmas mais densos tem um limite inferior de modo normal possível maior. Note também que a frequência mínima está acima da frequência de plasma

6.3 Uma Solução Numérica

Nesta seção solucionaremos a equação da onda plasmônica com uma abordagem diferente do capítulo anterior. Consideremos a equação

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} E(y, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E(y, t) = \alpha^2 E(y, t) \quad (6.72)$$

Para esta, buscaremos soluções separáveis do tipo $E(y, t) = Y(y)T(t)$ onde $Y = Y(y)$ é uma função real unicamente da variável real y e $T = T(t)$ é uma função real unicamente da variável real t . Assim, substituindo na equação dada e, em seguida, dividindo pelo próprio produto obtemos

$$\frac{1}{Y(y)} \frac{d^2}{dy^2} Y(y) - \frac{1}{c^2} \frac{1}{T(t)} \frac{d^2}{dt^2} T(t) = \alpha^2 \quad (6.73)$$

de onde, claramente, podemos prever que as três parcelas presentes devem representar valores reais contantes. Isto é, uma vez que uma função real *só* de y somada a uma função real *só* de t resulta, para todos os valores possíveis permitidos de y e t , um certo número independente destes, i.e, uma função constante, então é verdade que cada uma destas funções é também uma função constante. Daí, tomemos, por exemplo, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{Y(y)} \frac{d^2}{dy^2} Y(y) = a_1 \quad \text{e} \quad -\frac{1}{c^2} \frac{1}{T(t)} \frac{d^2}{dt^2} T(t) = a_2 \quad (6.74)$$

de modo que $a_1 + a_2 = \alpha^2$. Daí, podemos substituir $a_2 = \alpha^2 - a_1$ e, finalmente, obtemos um sistema de equações diferenciais ordinárias desacoplado

$$\frac{1}{Y(y)} \frac{d^2}{dy^2} Y(y) = a_1 \quad \text{e} \quad -\frac{1}{c^2} \frac{1}{T(t)} \frac{d^2}{dt^2} T(t) = \alpha^2 - a_1 \quad (6.75)$$

Agora, temos de decidir se a função constante a_1 é um número negativo, nulo ou positivo. Já que a condição de contorno implica que, para todo tempo t , isto é, para todo valor de $T(t)$, a função $Y(y)$ deve satisfazer $Y(y = 0) = Y(y = L) = 0$ podemos descartar as hipóteses de $a_1 > 0$ e $a_1 = 0$. Daí, façamos $a_1 = -m^2$, onde $m \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\frac{1}{Y(y)} \frac{d^2}{dy^2} Y(y) = -m^2 \quad \text{e} \quad -\frac{1}{c^2} \frac{1}{T(t)} \frac{d^2}{dt^2} T(t) = \alpha^2 + m^2 \quad (6.76)$$

A solução da parte espacial é imediatamente obtida como sendo

$$Y(y) = c_1 \sin(my) + c_2 \cos(my) \quad ; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

de onde, aplicando as condições de contorno, observamos que $c_2 = 0$, para satisfazer $Y(y = 0) = 0$, e, de $Y(y = L) = 0$, temos a seguinte equação para m : $\sin(mL) = 0$. Esta equação é satisfeita para todo valor de m tal que $m = n \frac{\pi}{L}$, onde n é um inteiro positivo (vamos tomá-lo positivo pela sua semelhança com valores de frequência). De fato, identificamos este como sendo exatamente o número de onda k_n das ondas na cavidade ressonante. Agora, olhando para a equação da função temporal identificamos que, dado $m = k_n$,

$$-\frac{1}{c^2} \frac{1}{T(t)} \frac{d^2}{dt^2} T(t) = \alpha^2 + n^2 \frac{\pi^2}{L^2} \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2} T(t) + c^2 \left(\alpha^2 + n^2 \frac{\pi^2}{L^2} \right) T(t) = 0$$

e, portanto, resumindo $\omega^2 = c^2 \left(\alpha^2 + n^2 \frac{\pi^2}{L^2} \right)$, temos a solução, para um dado n

$$T(t) = c_3 \sin(\omega t) + c_4 \cos(\omega t) \quad (6.77)$$

onde $c_3 = 0$ para satisfazer a condição inicial $\frac{\partial}{\partial t} T(t=0) = 0$. Daí, de forma geral, a solução mais geral possível para o problema é

$$E(y, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Y_n(y) T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(n \frac{\pi y}{L}\right) \cos(\omega_n t) \quad (6.78)$$

onde a amplitude c_n será calculada pela segunda condição inicial.

Já que $E(y, t=0) = f_\epsilon(y)$, então, calculando em $t=0$, obtemos

$$f_\epsilon(y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(n \frac{\pi y}{L}\right)$$

Se multiplicarmos em ambos membros da equação por, por exemplo, $\sin\left(p \frac{\pi y}{L}\right)$, onde p é um inteiro positivo, e integrarmos em y em todo espaço permitido, a expressão fica

$$\int_0^L f_\epsilon(y) \sin\left(p \frac{\pi y}{L}\right) dy = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_0^L \sin\left(n \frac{\pi y}{L}\right) \sin\left(p \frac{\pi y}{L}\right) dy$$

que devido a ortogonalidade da Função Seno simplificamos para

$$\int_0^L f_\epsilon(y) \sin\left(p \frac{\pi y}{L}\right) dy = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\frac{L}{2} \delta_{n,p}\right)$$

onde $\delta_{n,p}$ é a Delta de Kronecker de n, p . Finalmente, pela propriedade da mesma,

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f_\epsilon(y) \sin\left(n \frac{\pi y}{L}\right) dy \quad (6.79)$$

Para estudar melhor os efeitos na onda vamos substituir a condição inicial de função delta para uma função Gaussiana centrada no centro da cavidade cuja largura é muito fina. Vamos lançar a onda com forma funcional inicialmente dada por

$$E(y, t=0) = f_\epsilon(y) = \frac{E_0}{\epsilon} e^{-\frac{1}{\epsilon^2} \left(y - \frac{L}{2}\right)^2}$$

onde E_0 é uma amplitude conhecida medida em unidades de campo elétrico vezes unidade de comprimento e ϵ é a largura que vamos associar a esta configuração medida em unidades de comprimento. De fato, esta função se comporta de maneira assemelhada à função Delta de Dirac no limite em que $\epsilon \rightarrow 0$. Note que o valor

máximo desta função ocorre para, exatamente, o centro da Gaussiana. Suponha que o máximo ocorre para um dado $y = y_0$ de maneira que $\frac{d}{dx}f(y_0) = 0$. Ou seja,

$$\frac{d}{dx}f(y_0) = 0 \Rightarrow \frac{2E_0}{\epsilon^3} \left(\frac{L}{2} - y_0 \right) e^{-\frac{(y_0 - \frac{L}{2})^2}{\epsilon^2}} = 0 \Rightarrow y_0 = \frac{L}{2}$$

e o valor máximo é $f_\epsilon^{\max} = \frac{E_0}{\epsilon}$. Ao mesmo tempo, para que caracterizemos corretamente como largura genuína da curva o valor ϵ devemos medi-la na altura da função $f_\epsilon \left(\frac{L}{2} \pm \frac{\epsilon}{2} \right) = \frac{E_0}{\epsilon e^{1/4}}$. A figura abaixo mostra a curva para três diferentes valores ϵ_1 , ϵ_2 e ϵ_3 na ordenação $\epsilon_1 < \epsilon_2 < \epsilon_3$. Como percebemos, a medida que o valor de ϵ

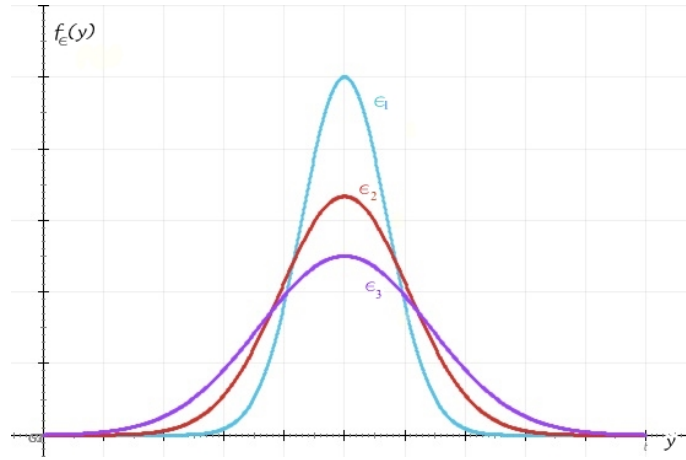


Figura 4: No eixo horizontal são representados os valores y e no vertical as curvas gaussianas. A ordenação dos valores de largura é $\epsilon_1 < \epsilon_2 < \epsilon_3$.

decrece a curva se torna mais estreita e mais alta. De fato, no limite de ϵ muito pequeno a curva vai, gradativamente, se aproximando cada vez melhor da função Delta. Ou seja,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{E_0}{\epsilon} e^{-\frac{1}{2\epsilon^2}(y - \frac{L}{2})^2} = E_0 \delta \left(y - \frac{L}{2} \right)$$

Portanto, uma vez que nos interessamos no limite $\epsilon \rightarrow 0$, isto é, na tendência da gaussiana de comportar-se tal qual a função Delta de Dirac, podemos tomar, aproximadamente, que o intervalo limitado de integração para calcularmos a amplitude c_n é substituível por um intervalo ilimitado, já que a Gaussiana varia muito rápido para pequenos acréscimos e decréscimos de $y - L/2$ neste regime. Assim, substituindo a condição inicial, então[10]

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L \frac{E_0}{\epsilon} e^{-\frac{(y - \frac{L}{2})^2}{\epsilon^2}} \sin \left(n \frac{\pi y}{L} \right) dy \sim \frac{2E_0}{\epsilon L} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(y - \frac{L}{2})^2}{\epsilon^2}} \sin \left(n \frac{\pi y}{L} \right) dy \quad (6.80)$$

Reescrevendo a função Seno como combinação de exponenciais imaginárias obtemos, integrando

$$c_n = \frac{2E_0\sqrt{\pi}}{L} e^{-\frac{\epsilon^2}{4L^2}n^2} \sin \left(n \frac{\pi}{2} \right)$$

Este resultado nos fornece uma aproximação do valor real do coeficiente c_n . Abaixo mostra-se uma tabela que calcula o n -ésimo coeficiente variando o parâmetro ϵ usando a integral aproximada com intervalo de integração ilimitado (indexada na lista com título "Aprox.") e a forma original da integral limitada (indexada na lista com título "Exact") no intervalo limitado de $(0, L)$. Este último envolve combinações da função $\text{erf}(x)$ e o cálculo foi feito através do Software Mathematica tomando $L \stackrel{N}{=} E_0$ por simplicidade.

	$\epsilon = 0.001$		$\epsilon = 0.01$		$\epsilon = 0.1$	
	Exact	Aprox.	Exact	Aprox.	Exact	Aprox.
n=1	3.5449	3.54491	3.54403	3.54482	3.45851	3.53606
n=5	3.54469	3.54469	3.52311	3.54269	1.91298	3.33013
n=15	-3.54294	-3.54471	-3.35347	-3.52502	-0.0137579	-2.01983
n=25	3.53945	3.54435	3.0383	3.48995	0.	0.7430533
n=35	-3.53421	-3.54382	-2.62021	-3.43799	0.	-0.165798
n=55	-3.51855	-3.54223	-1.68055	-3.28671	0.	-0.00184
n=75	-3.49605	-3.53993	-0.884793	-3.07987	0.	0.
n=95	-3.46684	-3.53692	-0.382389	-2.8289	0.	0.

Tabela 1: Valor do n -ésimo coeficiente para um n e um ϵ dado.

Para $\epsilon = 0.001$ o valor aproximado e o valor exato dos coeficientes c_n são satisfatoriamente próximos. Portanto, é seguro usar a aproximação feita para, ao menos, o intervalo de $n = 1$ até $n = 100$ com $\epsilon = 0.001$. Para $\epsilon = 0.01$ percebemos que a partir de $n = 25$ os valores da aproximação diferem significativamente dos valores exatos. Portanto, se usarmos $\epsilon = 0.01$ podemos apenas confiar nos coeficientes aproximados até ordem $n = 25$. A partir desta, a aproximação não é mais confiável. Tomando $\epsilon = 0.1$ a aproximação comparada à exata é absolutamente inválida de modo que este valor de ϵ será negligenciado em nosso estudo.

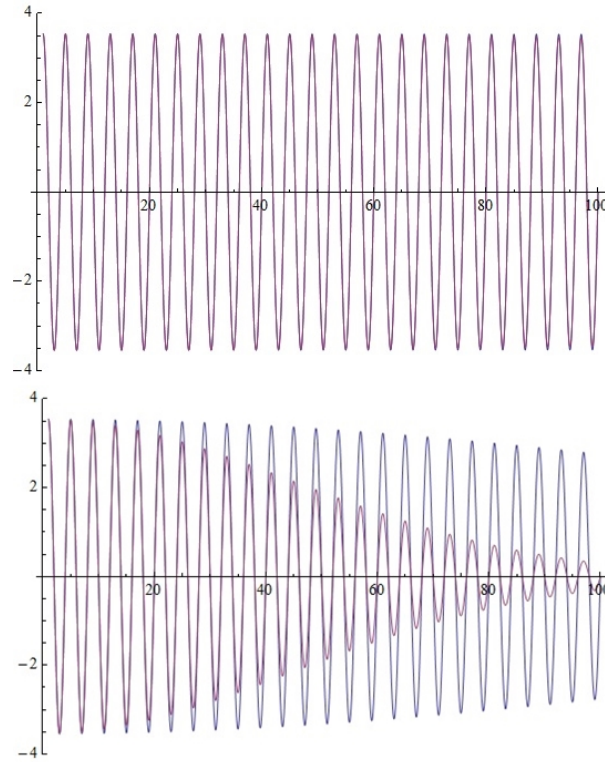


Figura 5: No eixo horizontal são representados os valores de n . No vertical, a curva em roxo representa os valores aproximados dos coeficientes c_n enquanto a curva em azul representa os valores exatos destes coeficientes para $\epsilon = 0.001$.

Na figura acima observamos que no gráfico superior, gerado para $\epsilon = 0.001$, há uma segurança de usar a forma aproximada dos coeficientes para todo um intervalo de $n = 1$ a $n = 100$ porque as curvas que representam a aproximação e a forma exata sobrepõe-se amigavelmente. Já para $\epsilon = 0.01$, representado no gráfico inferior, percebemos que já nas imediações de $n = 20$ os valores dos coeficientes variam significativamente de modo que para esse valor de ϵ somente é segura considerar amplitudes c_n na faixa até $n = 20$.

Uma vez estabelecido o intervalo de segurança de nossa aproximação para a determinação dos coeficientes c_n , podemos apresentar a solução completa como

$$E(y, t) = \frac{2E_0\sqrt{\pi}}{L} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\epsilon^2\pi^2}{4L^2}n^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(n\frac{\pi y}{L}\right) \cos(\omega_n t) \quad (6.81)$$

A fim de explorar o comportamento desta solução graficamente tomaremos as seguintes grandezas adimensionais

$$\left\{ \ell = \frac{y}{L}; \quad \beta = \frac{L\alpha}{\pi}; \quad \tau = \frac{tc}{L}; \quad \theta = \frac{\epsilon\pi}{2L} \right.$$

de modo que usaremos os coeficientes aproximados no regime de $\epsilon = 0.001$ para $n = 1$ até $n = N$. Assim,

$$E(\ell, \tau) \cong \frac{2E_0\sqrt{\pi}}{L} \sum_{n=1}^N e^{-\theta^2 n^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin(n\pi\ell) \cos\left(\pi\tau\sqrt{\beta^2 + n^2}\right) \quad (6.82)$$

6.4 Uma Solução Analítica

A fim de solucionar a equação (6.68) empregando as condições iniciais vamos transformá-la em espaço. Obtemos

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tilde{E}_y(k, t) + \omega^2(k) \tilde{E}_y(k, t) = 0$$

onde $\omega(k) = c\sqrt{\alpha^2 + k^2}$. Com as condições iniciais dadas por $E(y, 0) = f_\epsilon(y)$ e $\frac{\partial}{\partial t} E(y, 0) = 0$, a solução no espaço recíproco se apresenta como

$$\tilde{E}_y(k, t) = c(k) \cos[\omega(k)t] \quad (6.83)$$

onde $c(k)$ é uma função do número de onda a ser determinada.

Como já mencionado, interessamo-nos pelo limite em que ϵ é uma largura muito fina. Em decorrência disto, o número de onda k pode ser encarado como contínuo no processo de inversão da equação (6.83). Por essa razão, a solução deve apresentar-se como a transformada inversa de Fourier

$$E(y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} c(k) \cos[\omega(k)t] e^{iky} dk \quad (6.84)$$

onde

$$c(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E(y, 0) e^{-iky} dy$$

Substituindo $E(y, t=0) = \frac{E_0}{\epsilon} e^{-\frac{1}{2\epsilon^2}(y-\frac{L}{2})^2}$ na expressão de $c(k)$ obtemos

$$\begin{aligned} c(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E_0}{\epsilon} e^{-\frac{1}{2\epsilon^2}(y-\frac{L}{2})^2} e^{-iky} dy = \frac{E_0}{\epsilon} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\epsilon^2}(y-\frac{L}{2})^2 - iky} dy = \\ &= \frac{E_0}{\epsilon} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\sqrt{\pi} \epsilon e^{-ik\frac{L}{2} - \frac{\epsilon^2 k^2}{4}} \right] = \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{-ik\frac{L}{2} - \frac{\epsilon^2 k^2}{4}} \end{aligned} \quad (6.85)$$

Portanto,

$$E(y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{-ik\frac{L}{2} - \frac{\epsilon^2 k^2}{4}} \cos[\omega(k)t] e^{iky} dk \quad (6.86)$$

ou, escrevendo o cosseno como uma combinação de exponenciais imaginárias, temos

$$E(y, t) = \frac{E_0}{4\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{-\frac{\epsilon^2 k^2}{4}} e^{i[(y-\frac{L}{2})k + \omega(k)t]} + e^{-\frac{\epsilon^2 k^2}{4}} e^{i[(y-\frac{L}{2})k - \omega(k)t]} \right] dk \quad (6.87)$$

ou, ainda, já que a relação de dispersão é $\omega(k) = c\sqrt{\alpha^2 + k^2}$

$$E(y, t) = \frac{E_0}{4\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{-\frac{\epsilon^2 k^2}{4}} e^{i[(y-\frac{L}{2})k + ct\sqrt{\alpha^2 + k^2}]} + e^{-\frac{\epsilon^2 k^2}{4}} e^{i[(y-\frac{L}{2})k - ct\sqrt{\alpha^2 + k^2}]} \right] dk \quad (6.88)$$

A solução envolve integrais do tipo $I = \int f(x)e^{i\psi(x)} dx$ que podem ser aproximadamente calculadas com a ajuda do método de fase estacionária.[11] Este método consiste em calcular a integral citada considerando que a real contribuição do integrando para a integral encontra-se numa vizinhança próxima dos pontos de equilíbrio da função $\psi(x)$ cuja rápida variação nas imediações deste intervalo justifica o método. Este aproxima a integral para, aproximando até 2ª ordem :[12]

$$I \sim \frac{\sqrt{2\pi}f(x_0)e^{i\psi(x_0)}e^{i\sigma\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{|\psi''(x_0)|}}$$

onde x_0 é o ponto tal que $\psi'(x_0) = 0$ (aspóstrofe representa derivada com relação ao argumento) e $\sigma = \pm 1$ de acordo com , respectivamente, $\psi''(x_0) > 0$ ou $\psi''(x_0) < 0$. Identificamos, portanto, duas integrais do tipo

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(k)e^{i\psi_1(y,t,k)} dk \quad \text{e} \quad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(k)e^{i\psi_2(y,t,k)} dk \quad (6.89)$$

onde $f(k) = e^{-\frac{\epsilon^2 k^2}{4}}$ e as fases são, para I_1 , $\psi_1(y,t,k) = (y - \frac{L}{2})k + ct\sqrt{\alpha^2 + k^2}$ e, para I_2 , $\psi_2(y,t,k) = (y - \frac{L}{2})k - ct\sqrt{\alpha^2 + k^2}$. Assim,

$$E(y,t) = \frac{E_0}{4\sqrt{\pi}}(I_1 + I_2) \quad (6.90)$$

De acordo com o método que vamos empregar, é preciso conhecer os pontos de extremos dessas funções $\psi_1(y,t,k)$ e $\psi_2(y,t,k)$ bem como identificá-los como mínimos ou máximos. Ambas equações derivadas

$$\frac{\partial}{\partial k}\psi_1 = 0 \Rightarrow \left(y - \frac{L}{2}\right) + \frac{ct k}{\sqrt{\alpha^2 + k^2}} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial k}\psi_2 = 0 \Rightarrow \left(y - \frac{L}{2}\right) - \frac{ct k}{\sqrt{\alpha^2 + k^2}} = 0 \quad (6.91)$$

acusam as soluções

$$k_0 = \pm \alpha \left(\frac{c^2 t^2}{(y - \frac{L}{2})^2} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (6.92)$$

para ambas fases. A fim de estudar o regime de existência das duas soluções e em que circunstâncias cada uma é válida, criemos a variável $x \equiv y - \frac{L}{2}$. Nota-se, facilmente, que as soluções existem se, e somente se, $(\frac{ct}{x})^2 - 1 > 0$. A solução desta inequação é $\{\frac{ct}{x} > 1\} \cup \{\frac{ct}{x} < -1\}$. Já que vale sempre $ct > 0$, então a condição de existência de k_0 resume-se apenas a $x < ct$. Este é o intervalo de validade, inclusive, da aproximação da integral que estamos efetuando. No limite que $x \rightarrow 0$ a solução tende a $k_0 = 0$, já que o denominador de k_0 diverge. Portanto neste ponto nossa aproximação perde confiança absoluta, corroborando com o intervalo de validade supraprevisto.

Notamos que a função $\psi_1(x,t,k) = xk + ct\sqrt{\alpha^2 + k^2}$ no regime $x < ct$ admite como ponto extremo a solução $k_0 < 0$ se $x > 0$ e admite como extremo a solução $k_0 > 0$ se $x < 0$. Para demonstrar este fato observemos primeiramente que a segunda derivada de $\psi_1(x,t,k)$ com relação a k é

$$\frac{\partial^2}{\partial k^2}\psi_1(k) = \frac{ct\alpha^2}{(\alpha^2 + k^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (6.93)$$

de modo que, independentemente do sinal de k_0 , o ponto extremo é sempre um mínimo! A segunda derivada é sempre positiva. Assim, como já entendemos que k_0 é não nulo no regime $x < ct$, se calcularmos a função em $k = 0$ devemos ter $\psi(x, t, 0) > \psi_1(x, t, k_0)$. De fato, $\psi_1(x, t, 0) = ct|\alpha| = ct\alpha$ já que $\alpha > 0$. Existe uma outra solução $k = k^*$ para $\psi_1(x, t, k^*) = 0$. Esta é

$$\psi_1(x, t, k) = ct\alpha \Rightarrow xk + ct\sqrt{\alpha^2 + k^2} = ct\alpha \Rightarrow k^2 \left(1 - \left(\frac{x}{ct}\right)^2\right) + \frac{2x}{ct}k = 0$$

que nos recupera a solução $k = 0$ e nos dá outra $k^* = \frac{-2x/ct}{\left(1 - \left(\frac{x}{ct}\right)^2\right)}$. Uma vez que $k = k_0$ é um mínimo e, portanto, $\psi_1(x, t, 0) = \psi_1(x, t, k^*) > \psi_1(x, t, k_0)$, então é fato que

$$k_0 \in (0, k^*), \text{ se } k^* > 0 \quad \text{e} \quad k_0 \in (k^*, 0), \text{ se } k^* < 0$$

Observando mais atentamente $k = k^*$ notamos que o seu sinal é ditado pelo sinal de x . Já que estamos preservando $x < ct$, então $\left(1 - \left(\frac{x}{ct}\right)^2\right) > 0$ de modo que, se $x > 0$, então $k^* < 0$ e, do contrário, $x < 0$ então $k^* > 0$. Portanto está demonstrado. Se $x < 0$ então $k_0 \in (0, k^*)$, implicando que a contribuição desse ponto para integral I_1 se incorpora em $k_0 > 0$. Se $x > 0$ então $k_0 \in (k^*, 0)$, implicando que a contribuição desse ponto para integral I_1 se incorpora em $k_0 < 0$. Em resumo, podemos admitir que o ponto de equilíbrio que deve ser empregado na integral I_1 é a solução $k_0 > 0$ se $x < 0$ e a solução $k_0 < 0$ se $x > 0$. Ou seja, façamos a troca $k_0 \rightarrow -|k_0|S(x)$ na integral. A função $S(x)$ calcula o sinal de x . Se $x < 0$, então $S(x) = -1$ e se $x > 0$, então $S(x) = 1$.

Portanto,

$$I_1 = \frac{\sqrt{2\pi} f(-S(x)|k_0|) e^{i\psi_1(-S(x)|k_0|)} e^{i\sigma\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{|\psi_1''(-S(x)|k_0|)|}}$$

Já para $\psi_2(x, t, k) = xk - ct\sqrt{\alpha^2 + k^2}$ a situação se inverte. A sua segunda derivada com respeito a k é

$$\frac{\partial^2}{\partial k^2} \psi_2(k) = -\frac{ct\alpha^2}{(\alpha^2 + k^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (6.94)$$

de modo que, independentemente do sinal de k_0 , o ponto extremo é sempre um máximo! A segunda derivada é sempre negativa. Como para $x < ct$ sempre vale $\psi_2(x, t, k) < 0$, podemos fazer o mesmo raciocínio anterior mas garantido por $\psi_2(x, t, 0) = \psi_2(x, t, k^*) < \psi_2(x, t, k_0)$ tomando $\psi_2(x, t, 0) = \psi_2(x, t, k^*) = -ct\alpha$. Isto é,

$$\psi_2(x, t, k) = -ct\alpha \Rightarrow xk - ct\sqrt{\alpha^2 + k^2} = -ct\alpha \Rightarrow k^2 \left(1 - \left(\frac{x}{ct}\right)^2\right) - \frac{2x}{ct}k = 0$$

que nos dá a mesma solução $k = 0$ e, porém agora, $k^* = \frac{+2x/ct}{\left(1 - \left(\frac{x}{ct}\right)^2\right)}$. O sinal de k^* é o mesmo de x . Portanto, se $x < 0$, então $k^* < 0$ e, do contrário, se $x > 0$ então $k^* > 0$. A contribuição desse ponto para integral I_2 se incorpora em $k_0 > 0$ se

$x > 0$. Se $x < 0$ a contribuição desse ponto para integral I_2 se incorpora em $k_0 < 0$. Ou seja, façamos a troca $k_0 \rightarrow |k_0|S(x)$ na integral I_2 .

Portanto,

$$I_2 = \frac{\sqrt{2\pi} f(S(x) |k_0|) e^{i\psi_2(S(x)|k_0|)} e^{i\sigma \frac{\pi}{4}}}{\sqrt{|\psi_2''(S(x) |k_0|)|}}$$

O gráfico abaixo ilustra perfeitamente a situação que prevemos. O eixo horizontal representa os valores de k . A curva verde é a derivada $\frac{\partial}{\partial k}\omega(k)$. Lembrando que $\psi_1(k) = xk + ct\omega(k)$ então $\frac{\partial}{\partial k}\psi_1(k) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial k}\omega(k) = -x/ct$ e $\psi_2(k) = xk - ct\omega(k)$ então $\frac{\partial}{\partial k}\psi_2(k) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial k}\omega(k) = x/ct$. As retas azul e laranja são, respectivamente, valores tomados de $x/ct > 0$ e $x/ct < 0$. Como vemos, a intersecção entre a reta azul e a curva verde, que representa o ponto estacionário de I_2 , acontece no semi eixo $k > 0$. Já a intersecção entre a reta laranja e a curva verde, que representa o outro ponto estacionário, acontece no semi eixo $k < 0$. Invertendo o gráfico da derivada de $\omega(k)$ por $-\omega(k)$ representamos as intersecções como os pontos estacionários da I_1 e invertem-se os pontos de intersecção. A curva vermelha representa uma aproximação $\omega(k) \sim ck + \frac{\alpha^2}{2k}$ no regime em que $\alpha^2 \ll k^2$. Estudamos esta aproximação em vista de que a densidade de plasma é muito rarefeita. Porém, como vemos no gráfico, a mesma não é confiável para averiguarmos as intersecções da curva com as retas azul e laranja. As intersecções da curva original comparadas com a da curva aproximada diferem significativamente e, por isso, abandonamos a aproximação e lidamos com a curva original.

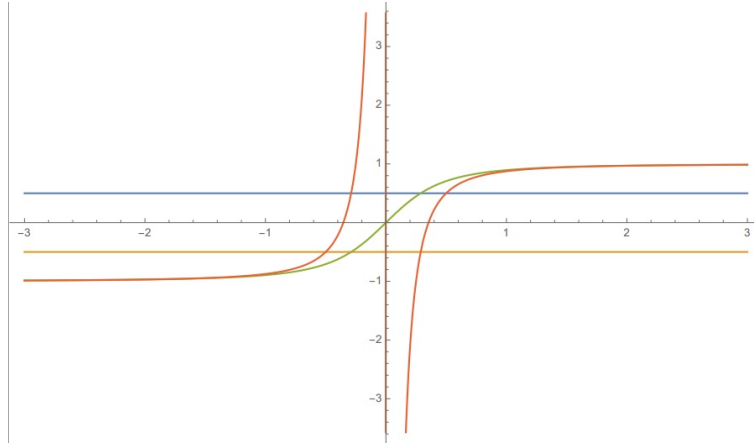


Figura 6: Gráfico representativo dos pontos estacionários.

Agora, aplicando nas derivadas os pontos de equilíbrio

$$\frac{\partial^2}{\partial k^2}\psi_1(y, t, -|k_0|S(x)) = \frac{ct\alpha^2}{\left(\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{\frac{c^2 t^2}{(y - \frac{L}{2})^2} - 1}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{(|y - \frac{L}{2}|)^3}{\alpha c^2 t^2} \left[\left(\frac{ct}{y - \frac{L}{2}}\right)^2 - 1 \right]^{\frac{3}{2}} \quad (6.95)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial k^2} \psi_2(y, t, |k_0| S(x)) = - \frac{ct\alpha^2}{\left(\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{\frac{c^2 t^2}{\left(y - \frac{L}{2}\right)^2 - 1}}\right)^{\frac{3}{2}}} = - \frac{\left(|y - \frac{L}{2}|\right)^3}{\alpha c^2 t^2} \left[\left(\frac{ct}{y - \frac{L}{2}}\right)^2 - 1 \right]^{\frac{3}{2}}$$

e, assim,

$$\frac{1}{\sqrt{|\psi_1''(k_0)|}} = \frac{1}{\sqrt{|\psi_2''(k_0)|}} = \frac{\sqrt{\alpha} ct}{\left(|y - \frac{L}{2}|\right)^{\frac{3}{2}}} \left| \left[\left(\frac{ct}{y - \frac{L}{2}}\right)^2 - 1 \right]^{\frac{3}{2}} \right|^{-\frac{1}{2}} \quad (6.96)$$

como também

$$\begin{aligned} \psi_1(-|k_0| S(x)) &= - \left(y - \frac{L}{2}\right) S(x) \alpha \left[\left(\frac{ct}{y - \frac{L}{2}}\right)^2 - 1 \right]^{-\frac{1}{2}} + \\ &+ ct \sqrt{\alpha^2 + \alpha^2 \left[\left(\frac{ct}{y - \frac{L}{2}}\right)^2 - 1 \right]^{-1}} = \\ &= - \left(y - \frac{L}{2}\right) S(x) \alpha \left[\left(\frac{ct}{|y - \frac{L}{2}|}\right)^2 - 1 \right]^{-\frac{1}{2}} + \\ &+ \frac{\alpha c^2 t^2}{|y - \frac{L}{2}|} \left[\left(\frac{ct}{y - \frac{L}{2}}\right)^2 - 1 \right]^{-\frac{1}{2}} = \\ &= \alpha \left(-S(x) \left(y - \frac{L}{2}\right) + \frac{c^2 t^2}{|y - \frac{L}{2}|} \right) \left[\left(\frac{ct}{y - \frac{L}{2}}\right)^2 - 1 \right]^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (6.97)$$

$$\begin{aligned}
\psi_2(|k_0|S(x)) &= \left(y - \frac{L}{2}\right) S(x) \alpha \left[\left(\frac{ct}{y - \frac{L}{2}}\right)^2 - 1 \right]^{-\frac{1}{2}} - \\
&\quad - ct \sqrt{\alpha^2 + \alpha^2 \left[\left(\frac{ct}{y - \frac{L}{2}}\right)^2 - 1 \right]^{-1}} = \\
&= \left(y - \frac{L}{2}\right) S(x) \alpha \left[\left(\frac{ct}{|y - \frac{L}{2}|}\right)^2 - 1 \right]^{-\frac{1}{2}} - \\
&\quad - \frac{\alpha c^2 t^2}{|y - \frac{L}{2}|} \left[\left(\frac{ct}{y - \frac{L}{2}}\right)^2 - 1 \right]^{-\frac{1}{2}} = \\
&= \alpha \left(S(x) \left(y - \frac{L}{2}\right) - \frac{c^2 t^2}{|y - \frac{L}{2}|} \right) \left[\left(\frac{ct}{y - \frac{L}{2}}\right)^2 - 1 \right]^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Portanto, finalmente

$$\begin{aligned}
\frac{I_1}{\sqrt{2\pi\alpha}} &= \exp \left[\frac{-\epsilon^2 \alpha^2 / 4}{\left| \left(\frac{ct}{y - \frac{L}{2}}\right)^2 - 1 \right|} \right] \exp \left[i \frac{\alpha \left(-S(x) \left(y - \frac{L}{2}\right) + \frac{c^2 t^2}{|y - \frac{L}{2}|} \right)}{\sqrt{\left(\frac{ct}{y - \frac{L}{2}}\right)^2 - 1}} \right] \frac{e^{i\frac{\pi}{4}ct}}{|y - \frac{L}{2}|^{\frac{3}{2}}} \left| \left[\left(\frac{ct}{y - \frac{L}{2}}\right)^2 - 1 \right]^{\frac{3}{2}} \right|^{-\frac{1}{2}} \\
\frac{I_2}{\sqrt{2\pi\alpha}} &= \exp \left[\frac{-\epsilon^2 \alpha^2 / 4}{\left| \left(\frac{ct}{y - \frac{L}{2}}\right)^2 - 1 \right|} \right] \exp \left[i \frac{\alpha \left(S(x) \left(y - \frac{L}{2}\right) - \frac{c^2 t^2}{|y - \frac{L}{2}|} \right)}{\sqrt{\left(\frac{ct}{y - \frac{L}{2}}\right)^2 - 1}} \right] \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}ct}}{|y - \frac{L}{2}|^{\frac{3}{2}}} \left| \left[\left(\frac{ct}{y - \frac{L}{2}}\right)^2 - 1 \right]^{\frac{3}{2}} \right|^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Reescrevendo o resultado das integrais em função das variáveis adimensionais

$$\left\{ \ell = \frac{y}{L}; \quad \beta = \frac{L\alpha}{\pi}; \quad \tau = \frac{tc}{L}; \quad \theta = \frac{\epsilon\pi}{2L}; \quad \bar{x} = \frac{x}{L}; \quad \bar{I}_1 = \sqrt{L/2\pi\alpha} I_1; \quad \bar{I}_2 = \sqrt{L/2\pi\alpha} I_2 \right.$$

temos

$$\begin{aligned}
\bar{I}_1 &= \exp \left[\frac{-\theta^2 \beta^2}{\left| \left(\frac{\tau}{\ell - \frac{1}{2}}\right)^2 - 1 \right|} \right] \exp \left[i\pi\beta \frac{\left(-S(\bar{x}) \left(\ell - \frac{1}{2}\right) + \frac{\tau^2}{|\ell - \frac{1}{2}|} \right)}{\sqrt{\left(\frac{\tau}{\ell - \frac{1}{2}}\right)^2 - 1}} \right] \frac{e^{i\frac{\pi}{4}\tau}}{|\ell - \frac{1}{2}|^{\frac{3}{2}}} \left| \left[\left(\frac{\tau}{\ell - \frac{1}{2}}\right)^2 - 1 \right]^{\frac{3}{2}} \right|^{-\frac{1}{2}} \\
\bar{I}_2 &= \exp \left[\frac{-\theta^2 \beta^2}{\left| \left(\frac{\tau}{\ell - \frac{1}{2}}\right)^2 - 1 \right|} \right] \exp \left[i\pi\beta \frac{\left(S(\bar{x}) \left(\ell - \frac{1}{2}\right) - \frac{\tau^2}{|\ell - \frac{1}{2}|} \right)}{\sqrt{\left(\frac{\tau}{\ell - \frac{1}{2}}\right)^2 - 1}} \right] \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}\tau}}{|\ell - \frac{1}{2}|^{\frac{3}{2}}} \left| \left[\left(\frac{\tau}{\ell - \frac{1}{2}}\right)^2 - 1 \right]^{\frac{3}{2}} \right|^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Como o campo elétrico é dado basicamente pela soma dos resultados das integrais, temos, no fim, após fazer uma certa ginástica algébrica envolvendo as propriedades das exponenciais imaginárias com as funções harmônicas, a expressão final:

$$\begin{aligned}
 E(\ell, \tau) = \frac{E_0 \sqrt{2\pi\beta}}{4L} \tau \left| \ell - \frac{1}{2} \right|^{-\frac{3}{2}} & \left| \left[\left(\frac{\tau}{\ell - \frac{1}{2}} \right)^2 - 1 \right]^{\frac{3}{2}} \right|^{-\frac{1}{2}} \exp \left[\frac{-\theta^2 \beta^2}{\left| \left(\frac{\tau}{\ell - \frac{1}{2}} \right)^2 - 1 \right|} \right] \times \\
 & \times \cos \left(\pi \beta \frac{\left(S(\bar{x}) \left(\ell - \frac{1}{2} \right) - \frac{\tau^2}{\left| \ell - \frac{1}{2} \right|} \right)}{\sqrt{\left(\frac{\tau}{\ell - \frac{1}{2}} \right)^2 - 1}} - \frac{\pi}{4} \right) \quad (6.97)
 \end{aligned}$$

7 Considerações Finais

7.1 Gráfico de Soluções e Comparação de Resultados

A evolução temporal da onda-pulso eletromagnética no ambiente plasmônico tanto na solução aproximada (6.97) quando na solução exata (6.81) se caracteriza por amplitudes que tendem a diminuir globalmente ao passo que a largura do pulso, caracterizada pelo argumento da função harmônica associada, tende a aumentar. Este comportamento é esperado, uma vez que a onda deve dispersar no meio plasmônico. Cada uma das ondas de vetor de onda k que constituem a onda-solução propaga-se com velocidades diferentes de modo que a largura do pulso deve, como previsto, alargar-se. De fato, há modos muito mais lentos do que outros. É vital lembrar que a solução obtida é uma aproximação. Como tal, existe um intervalo de validade para a mesma. Este se dá no intervalo $x < ct \Rightarrow y < L/2 + ct$. Ou seja, os resultados da expressão obtida devem ser considerados pertinentes à solução do problema somente para este intervalo e desconsiderando os pontos de divergência que ocorrem na expressão para a solução analítica. Além disso, no carácter contínuo de k que esta aproximação foi tomada, os resultados válidos para a comparação da solução sem aproximações tão drásticas quanto esta (k discreto) só são, de fato, pertinentes para $0 < \tau < 0.5$. Para $\tau > 0.5$ a solução aproximada perde validade. Isto porque a evolução da onda na cavidade caracterizada pela discretização do número de onda proveniente da condição de contorno implica na reflexão das ondas nas paredes da cavidade, de modo que a mesma deve passar sucessivas vezes pelo mesmo ponto no interior da cavidade sofrendo deformações. Este efeito de ida-e-volta *não* se observa na solução aproximada. Esta não vê paredes. Daí, é lógico apenas compararmos os resultados desta com a mais exata apenas em um intervalo de tempo que ambas soluções coexistam. Como o período da onda-solução original é $T = 2L/c$ então o pulso que evolui no intervalo $y < L/2 + ct$ encontra, pela primeira vez, a parede da cavidade em $t = T/4 = L/2c$. Ou seja, o intervalo de tempo que faremos a comparação dever ser $0 < t < L/2c \Rightarrow 0 < ct/L < 1/2 \Rightarrow 0 < \tau < 0.5$ como dito. Em contraste com a solução obtida para a cavidade a vácuo, onde preservamos amplitudes, percebemos que uma vez poluída a cavidade com íons as amplitudes não são mais preservadas.

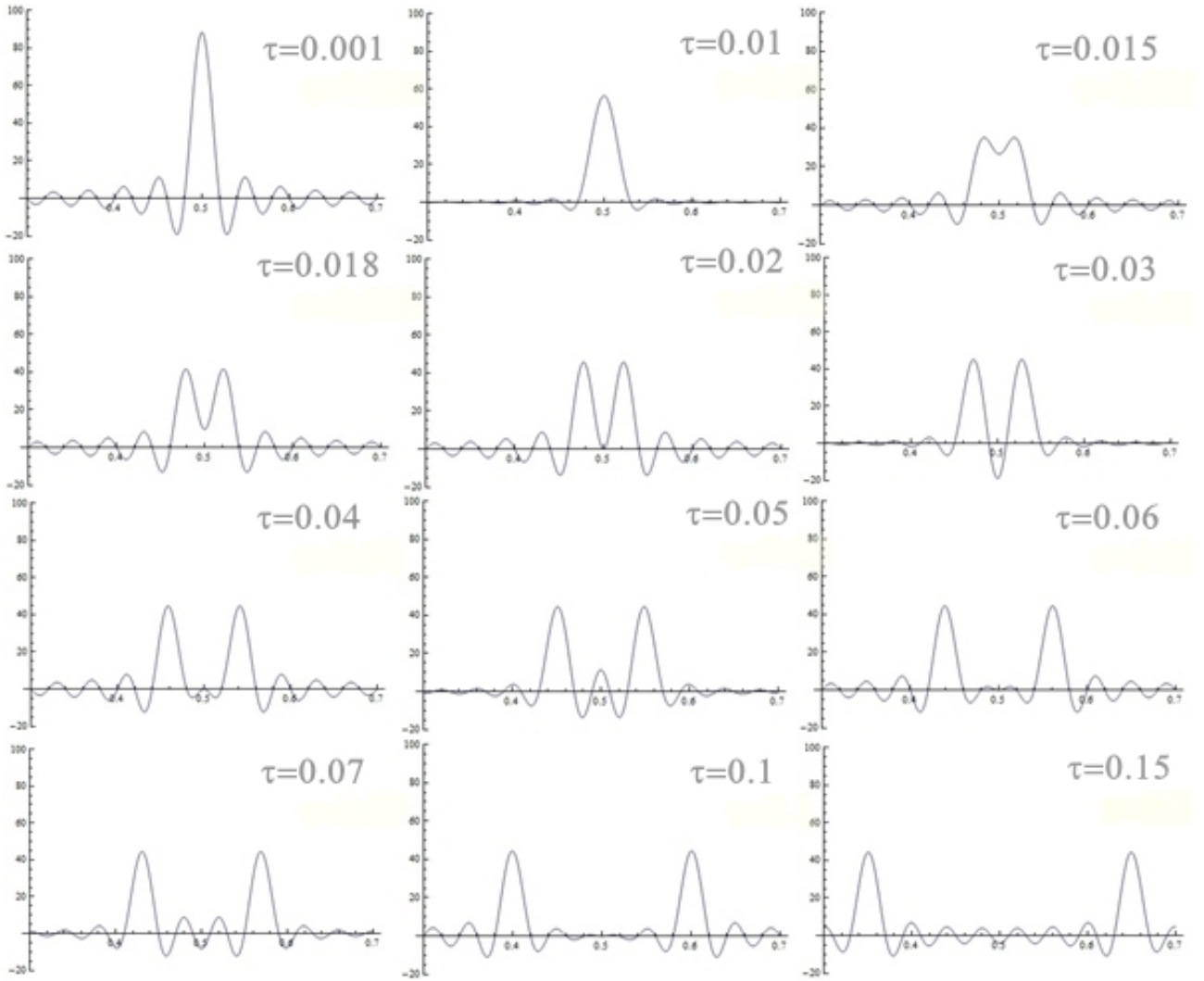


Figura 7: Simulação numérica quadro-a-quadro com $\theta = 0.001$, $\beta = 0.1$, $N = 50$ e $E_0 \stackrel{N}{=} L$. O eixo vertical é a amplitude do campo elétrico que varia de -10 a 100 e o eixo horizontal representamos a dimensão da cavidade de $\ell = 0.3$ a $\ell = 0.7$.

A Figura 7 mostra a evolução espaço-temporal quadro-a-quadro da onda elétrica (6.82). No início da evolução, como esperado, a onda apresenta uma grande amplitude. Logo nos primórdios da propagação sua amplitude diminui e surgem duas frentes de onda que viajam em direções opostas. A medida que o pacote de ondas evolui, a largura do mesmo aumenta. Como previsto, a onda se dispersa no meio plasmônico. Possíveis erros numéricos acarretam flutuações de amplitude na simulação concentrados principalmente na extremidades do intervalo considerado. Na próxima figura estaremos interessados em investigar o comportamento da onda para uma densidade de plasma maior. Isto é, vamos acrescentar algumas ordens de grandeza no número β (que se relaciona com a frequência de plasma/densidade de plasma por $\beta = \frac{L\alpha}{\pi}$).

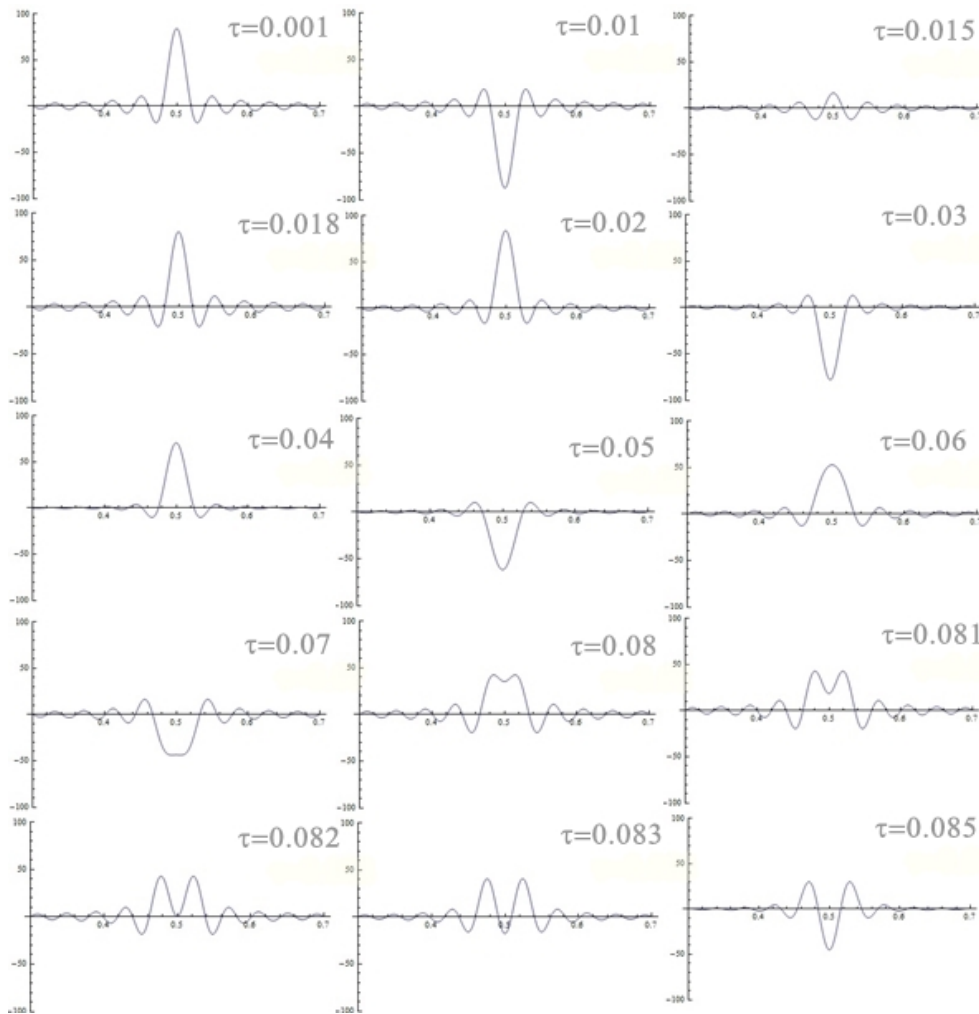


Figura 8: Simulação numérica quadro-a-quadro com $\theta = 0.001$, $\beta = 100$ e $N = 50$. O eixo vertical é a amplitude do campo elétrico que varia de -100 a 100 e o eixo horizontal representamos a dimensão da cavidade de $\ell = 0.3$ a $\ell = 0.7$. Tempos até $\tau = 0.085$.

A Figura 8 mostra a evolução espaço-temporal da onda elétrica (6.82) para β com 3 ordens de grandeza a mais que a da Figura 7. Percebemos que até o tempo $\tau = 0.07$ a onda apenas oscila no centro da cavidade tendo sua amplitude atenuada gradativamente. A separação em duas frentes de onda, que na situação anterior para um plasma menos denso acontecia logo nas imediações de $\tau = 0.015$, começa a se manifestar somente nas imediações de $\tau = 0.08$! O efeito de separação em duas frentes de onda é drasticamente atrasado.

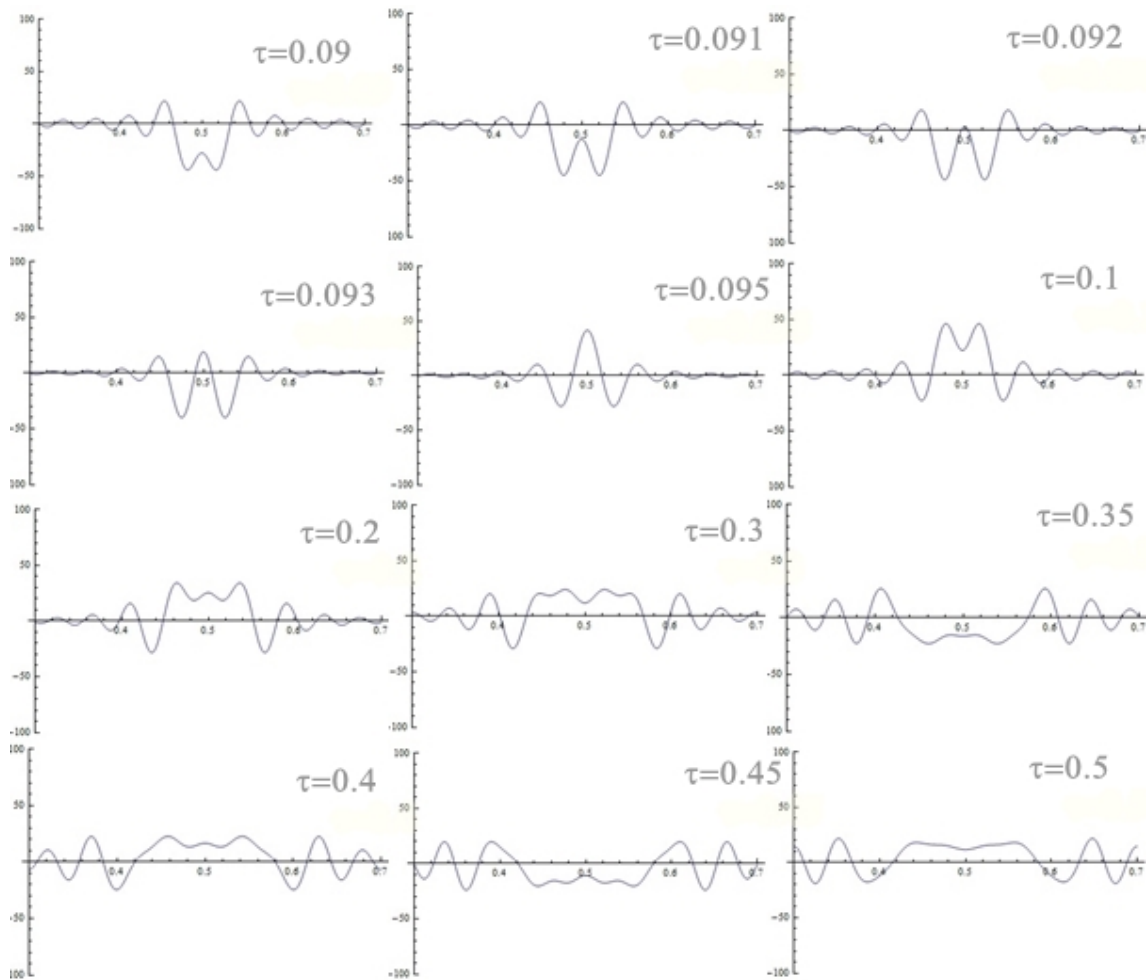


Figura 9: Simulação numérica quadro-a-quadro com $\theta = 0.001$, $\beta = 100$ e $N = 50$. O eixo vertical é a amplitude do campo elétrico que varia de -100 a 100 e o eixo horizontal representamos a dimensão da cavidade de $\ell = 0.3$ a $\ell = 0.7$. Tempos de $\tau = 0.09$ a $\tau = 0.5$.

A sequência de evolução é mostrada na Figura 9. Percebemos que mesmo o processo de separação das frentes de onda ter iniciado, a sua propagação em sentidos opostos é retardada: a onda continua ainda oscilando rapidamente nas imediações do centro da cavidade mesmo *durante* o processo de separação. A viagem de cada frente para sentidos contrários começa a ser observada a partir das imediações de $\tau = 0.1$. A partir deste tempo, a amplitude da onda é fortemente atenuada valendo uma pequena fração da amplitude de tempos passados.

A tabela abaixo compara sucessivos valores da amplitude da onda para diferentes tempos em posições muito próximas. Em virtude das fontes de erro presentes neste trabalho (que são o cálculo aproximado de coeficientes de Fourier, aproximação de número de onda contínuo e larguras iniciais minúsculas) a tabela compara amplitudes em um dado instante da solução numérica e analítica não para *exatamente* a mesma posição e, sim, para posições muito próximas. Embora algumas destas sejam tão próximas quanto a largura inicial que usamos para a segurança da aproximação dos coeficientes c_n , em virtude das aproximações feitas as amplitudes podem diferir significativamente para a mesma exata posição.

	Numérico	Analítico	Numérico	Analítico	Numérico	Analítico
$\tau = 0.25$	$\ell = 0.30079$ 0.5729	$\ell = 0.300$ 0.5739	$\ell = 0.3402$ 0.3644	$\ell = 0.35$ 0.3662	$\ell = 0.40$ 0.2634	$\ell = 0.409$ 0.2880
$\tau = 0.3$	$\ell = 0.4033$ 0.2594	$\ell = 0.4$ 0.2535	$\ell = 0.45$ 0.2449	$\ell = 0.45$ 0.2359	$\ell = 0.29909$ 0.2926	$\ell = 0.2905$ 0.3093
$\tau = 0.4$	$\ell = 0.22197$ 0.3849	$\ell = 0.2$ 0.3762	$\ell = 0.608$ 0.2003	$\ell = 0.6$ 0.0226	$\ell = 0.8014$ 0.3763	$\ell = 0.8$ 0.3762

Tabela 2: Tabela comparativa da solução numérica e analítica para $\beta = 0.01$ e $\theta = 0.001$. Os números sem identificação são as respectivas amplitudes da onda para dados τ e ℓ .

Os erros subentendidos poderiam, quase certamente, ser atenuados por uma melhor aproximação no cálculo do método de fase estacionária. Consideramos aproximação de até 2° ordem. Uma aproximação de até 3° ordem curaria possíveis diferenças significativas que apareceram.

8 Referências

1. "Michael Faraday." Famous Scientists. famousscientists.org. 24 Nov. 2014. Web. 11/15/2015 <<http://www.famousscientists.org/michael-faraday/>>.
2. J.D.Jackson, Classical Eletrodynamics, 2nd Edition, John Wiley Sons. Inc, 1975
3. George Arfken, Mathematical Methods For Physicists, 3rd Edition, Academic Press. Inc, 1985
4. Murray R. Spiegel, Análise de Fourier, Coleção Schaum, McGraw-Hill do Brasil, 1976.
5. Titchmarsh, E. C. Introduction to the Theory of Fourier Integrals, 3rd ed. Oxford, England: Clarendon Press, 1948.
6. Richar P. Feynman, Robert B. Leighton e Matthew Sands, The Feynman Lectures on Physics Vol.I, Addison-Wesley, 1963
7. Richar P. Feynman, Robert B. Leighton e Matthew Sands, The Feynman Lectures on Physics Vol.II, Addison-Wesley, 1963
8. Jerry B. Marion, Classical Dynamics of Particles and Systems, 2nd Edition, Academic Press, 1970
9. William C. Elmore e Mark A. Heald, Physics of Waves, Dover Publications. Inc, 1969
10. Sneddon, I. N. Fourier Transforms. New York: Dover, 1995.
11. M. FRICHEMBRUDER, R.PAKTER and F. B. RIZZATO, Coherenceincoherence transition in nonlinear wave interactions, J. Plasma Physics (2005), vol. 71, part 1, pp. 1121. ?c 2005 Cambridge University Press DOI: 10.1017/S0022377804002946 Printed in the United Kingdom
12. Geraldo Ávila, O Método da Fase Estacionária, Matemática Universitária Nº9/10, dezembro de 1989