

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Física

**A Física de Partículas e o Universo
Primordial: um estudo sobre a obtenção da
densidade de relíquia de partículas estáveis**

Rodrigo Mór Malossi

Trabalho de Conclusão de Curso realizado sob a orientação do Prof. Dr. Magno Machado.

Porto Alegre, 21 de dezembro de 2015.

Resumo

Neste trabalho de revisão, discutimos primeiro alguns aspectos básicos de Cosmologia, ou seja, as equações de Friedmann, equações de estado e a evolução da densidade de energia do Universo. Então solucionamos essas equações para alguns modelos cosmológicos clássicos, de modo a dar o contexto para o nosso estudo sobre abundâncias de relíquia.

Em seguida discutimos a história termal do Universo, com enfoque no Universo primordial. Assim, primeiro revisamos aspectos importantes da termodinâmica de equilíbrio, como a obtenção de propriedades físicas do banho térmico primordial, solucionando para regimes extremos.

Por fim aplicamos a equação de Boltzmann para a obtenção das densidades de relíquia para partículas massivas estáveis pouco interagentes (WIMPs). Iniciamos com uma estimativa e em seguida reproduzimos o cálculo padrão ou "canônico". Então expomos algumas das limitações dos métodos discutidos e apresentamos um procedimento para tratar o caso envolvendo coaniquilações, o qual é necessário para o cálculo de abundâncias de relíquia em modelos supersimétricos.

Abstract

In this review we first discuss some basic aspects of Cosmology, namely the Friedmann equations, equations of state and the evolution of the energy density of the Universe. We then solve these equations for some basic cosmological models, in order to provide the context for our discussion about relic densities.

After that we discuss the thermal history of the Universe, focusing on the early Universe. Therefore, we first review some important aspects of equilibrium thermodynamics, like the calculation of physical properties of the thermal bath, solving for extreme regimes.

We finally apply the Boltzmann equation for the calculation of the relic densities of weakly interacting massive particles (WIMPs). We begin by an estimation and then reproduce the standard or "canonical" calculation. After that we expose some limitations of the methods discussed and present a procedure to treat the case involving coannihilations, which is necessary for the calculation of relic abundances on supersymmetric models.

Sumário

Lista de Figuras	4
Lista de Tabelas	4
Introdução	5
1 Introdução	5
2 Cosmologia	7
2.1 Equações de Friedmann	7
2.2 Equações de Estado	10
2.3 Evolução da Densidade de Energia	13
2.4 Modelos Cosmológicos Clássicos	14
2.4.1 Modelos planos com uma componente	16
2.4.2 Modelos com mais de uma componente	18
3 História Termal do Universo	21
3.1 Revisão de Termodinâmica e Mecânica Estatística	21
3.2 Entropia	27
3.3 Interações	30
3.4 Fora do Equilíbrio	30
3.4.1 Equação de Boltzmann	30
4 WIMPs	33
4.1 Estimativa Simples	33
4.2 Cálculo Padrão	35
4.2.1 Discussão	39
Conclusões	41
5 Conclusões	41
A Equação de Boltzmann com Coaniquilações	42
Referências	45

Lista de Figuras

2.1	Evolução das densidades de energia no Universo.	20
3.1	Autoestados de momentum de uma partícula (ilustração) [17].	21
3.2	Evolução dos graus de liberdade relativísticos $g_*(T)$ para o conteúdo de partículas do Modelo Padrão. A linha pontilhada representa o número de graus efetivos de liberdade na entropia $h_*(T)$ [17].	26
3.3	Conteúdo de partículas do Modelo Padrão [17].	27
3.4	Ilustração do congelamento de partículas [17]. Para temperaturas altas ($T \gg m$), as abundâncias acompanham os valores de equilíbrio. Para temperaturas baixas ($T \ll m$), as partículas congelam e mantêm uma densidade muito maior do que a abundância de equilíbrio.	32
4.1	Densidade numérica comóvel de uma WIMP no Universo primordial. As curvas tracejadas correspondem à abundância real, enquanto a curva sólida à abundância de equilíbrio [1].	35
4.2	Evolução de Y_χ (curva sólida vermelha) e $Y_{\chi,eq}$ (curva pontilhada azul) como função de x para $m = 100$ GeV, $g_\chi = 2$, $g_* = 90$ (constante), $a = 1 \times 10^{-8} \text{GeV}^{-2}$ e $b = 0$ [11].	39

Lista de Tabelas

2.1	Classificação de modelos cosmológicos.	16
2.2	Soluções para Universos planos com uma componente.	18

1 Introdução

Ainda não se sabe do que a matéria escura é constituída, porém sua abundância é conhecida com precisão de 1-2%, $\Omega_{CDM} = 0.232 \pm 0.013$ [15] (*CDM* indica matéria escura fria e Ω é o parâmetro de densidade, que será introduzido no próximo capítulo) e sabemos que não é bariônica [14]. Também sabemos que a matéria escura não pode ser explicada pelo Modelo Padrão de partículas elementares. Assim, a maior contribuição para a matéria escura deve ser Fria (CDM) ou Quente (WDM), ou seja, respectivamente, não-relativística ou se tornando não-relativística no momento em que as galáxias começam a se formar no Universo primordial. Embora não haja candidatos para CDM ou WDM no Modelo Padrão, há muitas possibilidades em todas as suas extensões. Por exemplo, gravitinos podem ser WDM e partículas massivas pouco interagentes (WIMPs) podem ser CDM.

Em 1965, percebeu-se que se uma nova partícula estável χ existisse, ela poderia ter uma abundância cosmológica significativa atualmente [4]. Basicamente, essa partícula existiria em abundância e em equilíbrio térmico no Universo primordial, quando a temperatura do Universo era maior do que a massa m_χ da partícula.

A abundância de equilíbrio é mantida pela aniquilação da partícula com sua anti-partícula $\bar{\chi}$ em partículas mais leves l e vice-versa:

$$\chi\bar{\chi} \leftrightarrow l\bar{l}, \quad (1.1)$$

onde em muitos casos a partícula é uma Majorana ($\bar{\chi} = \chi$). Na medida em que o Universo se esfria para uma temperatura abaixo de m_χ , a abundância de equilíbrio diminui exponencialmente até que a taxa para a reação de aniquilação ($\chi\bar{\chi} \rightarrow l\bar{l}$) fica abaixo da taxa de expansão H e uma abundância cosmológica de relíquia é estabelecida.

Essa ideia foi revivida nos anos 1970 e utilizada para limitar a massa de neutrinos pesados e depois para sugerir que a matéria escura poderia ser composta de WIMPs. Desde então, cálculos da abundância cosmológica se tornaram padronizados e tem sido aplicados para vários candidatos.

Neste trabalho focaremos nas WIMPs por motivos que ficarão mais claros nos próximos capítulos. O argumento parte do fato de que a densidade por volume comóvel de partículas não-relativísticas em equilíbrio no Universo primordial diminui exponencialmente com a temperatura até que as reações que alteram o número de partículas deixam de ser efetivas. Nesse momento de desacoplamento químico (ou "congelamento"), o número de WIMPs por volume comóvel se torna constante. A densidade de relíquia atual é $\Omega \simeq 0.2 \times [(3 \times 10^{-26} \text{ cm}^3/\text{s})/\langle\sigma v\rangle]$ (2010, [14]), a qual gera a densidade correta de matéria escura para seções de choque da escala fraca ($\sigma \simeq 3 \times 10^{-26} \text{ cm}^3/\text{s}$) e

temperatura $T_f \simeq m_\chi/20$ para o congelamento de uma WIMP de massa m_χ . Esse fato é às vezes chamado de "milagre das WIMPs".

Contudo, a densidade de relíquia de WIMPs depende não somente do modelo para as partículas, mas também da história do Universo antes da Nucleossíntese do Big Bang (BBN), uma época para a qual falta informação. BBN é o episódio mais antigo do qual possuímos traços (a abundância de elementos leves). Como o número de WIMPs se fixa em T_f , uma partícula com massa $m_\chi > 100$ MeV seria um vestígio ainda mais antigo e forneceria informações novas sobre a época pré-BBN do Universo.

Como veremos, o cálculo padrão da densidade de relíquia supõe que na época pré-BBN a entropia da matéria e da radiação era conservada, as partículas eram produzidas termalmente (através de interações com partículas do plasma) e estavam em equilíbrio cinético e químico antes do seu desacoplamento em T_f . WIMPs produzidas dessa maneira são chamadas de "termais". Em alguns modelos cosmológicos viáveis da época pré-BBN essas suposições não valem e em alguns desses as densidades de relíquia das WIMPs podem ser muito diferentes. Por exemplo, em quase todos os modelos supersimétricos os neutralinos podem fornecer a densidade de matéria escura [10].

No Capítulo seguinte iniciamos nossa discussão revisando alguns aspectos básicos de Cosmologia.

2 Cosmologia

Neste capítulo fazemos uma revisão básica de Cosmologia, na qual discutimos as equações de Friedmann, equações de estado e a evolução da densidade de energia do Universo e então solucionamos as equações para alguns modelos cosmológicos clássicos. Para isso, seguimos as exposições de Roos [21], Elgaroy [12] e Ryden [7].

2.1 Equações de Friedmann

Um modelo cosmológico é constituído pelas *equações de Einstein*, que relacionam a geometria do Universo com o seu conteúdo de matéria e energia, pela *métrica*, que descreve as simetrias do problema e por *equações de estado*, que especificam as propriedades físicas da matéria e energia.

Equações de campo de Einstein

As equações de campo de Einstein podem ser escritas na forma [21]:

$$G_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

onde G é a constante gravitacional de Newton, $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momentum e $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}, \quad (2.2)$$

onde $R_{\mu\nu}$ é o tensor de curvatura de Ricci, R é a curvatura escalar e $g_{\mu\nu}$ é o tensor de métrica. Vemos na Equação (2.1) que tensor energia-momentum (lado direito) determina a geometria do Universo (lado esquerdo).

Métrica FLRW

Incluindo a coordenada de tempo t , o fator de escala $a(t)$ e o parâmetro de curvatura k , temos a métrica FLRW (Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker) [21]:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 \left(\frac{d\sigma^2}{1 - k\sigma^2} + \sigma^2 d\theta^2 + \sigma^2 \sin^2\theta d\phi^2 \right). \quad (2.3)$$

Equações de Friedmann

Para um Universo isotrópico e homogêneo com a métrica de Robertson-Walker é possível resolver as Equações de Einstein, obtendo duas relações dinâmicas independentes para $a(t)$ (*Equações de Friedmann*):

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho(t), \quad (2.4)$$

$$\frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} = -\frac{8\pi G}{c^2}P(t), \quad (2.5)$$

onde P é a pressão de matéria. Essas equações foram derivadas em 1922 por *Alexander Friedmann* e só foram confirmadas após a sua morte por uma derivação independente por *Georges Lemaitre* em 1927.

A expansão (ou contração) do Universo é inerente às equações de Friedmann. A Equação (2.4) mostra que a taxa de expansão \dot{a} aumenta com a densidade de massa ρ do Universo e a Equação (2.5) mostra que ela pode ser acelerada. Subtraindo (2.4) de (2.5), temos a *equação de Raychauduri*:

$$\frac{2\ddot{a}}{a} = -\frac{8\pi G}{3c^2}(\rho c^2 + 3P). \quad (2.6)$$

Universo de Einstein

Considere agora o Universo estático proposto por Einstein. Nesse caso definimos $a(t)$ constante e $a(t_0) = 1$, de modo que $\dot{a} = 0$ e $\ddot{a} = 0$ e a idade do Universo é infinita. Então as Equações (2.4) e (2.5) se reduzem para

$$kc^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho_0 = -\frac{8\pi}{c^2}GP_0. \quad (2.7)$$

Para que a densidade ρ_0 seja positiva atualmente, precisamos $k = +1$. Mas isso faz com que a pressão P_0 da matéria seja negativa.

Para corrigir esse problema, Einstein introduziu em 1917 um termo constante invariante de Lorentz $\Lambda g_{\mu\nu}$ na Equação (2.2), onde a *constante cosmológica* Λ corresponde a uma pequena correção na geometria do Universo. Então a Equação (2.2) fica

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu}, \quad (2.8)$$

No limite do espaço-tempo plano o termo $\Lambda g_{\mu\nu}$ não desaparece, ao contrário dos outros dois termos no lado direito. Assim, as equações de Friedmann

(2.4) e (2.5) ficam

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} - \frac{\Lambda}{3} = \frac{8\pi G}{3}\rho, \quad (2.9)$$

$$\frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} - \Lambda = -\frac{8\pi G}{c^2}P. \quad (2.10)$$

Um valor positivo para Λ curva o espaço-tempo de modo compensar o efeito gravitacional atrativo da matéria. Einstein ajustou Λ para conseguir uma solução estática, que ficou conhecida como *Universo de Einstein*.

Conservação de Energia-Momentum

Para examinar algumas soluções das equações de Friedmann, derivamos a Equação (2.4):

$$\frac{d}{dt}(\dot{a}^2 + kc^2) = \frac{8\pi G}{3} \frac{d}{dt}(\rho a^2), \quad (2.11)$$

obtendo uma equação de segunda ordem:

$$2\dot{a}\ddot{a} = \frac{8}{3}\pi G(\dot{\rho}a^2 + 2\rho a\dot{a}). \quad (2.12)$$

Utilizando a Equação (2.6) para cancelar a derivada de segunda ordem e multiplicando por c^2/a^2 , obtemos uma equação contendo apenas derivadas de primeira ordem:

$$\dot{\rho}c^2 + 3H(\rho c^2 + P) = 0, \quad (2.13)$$

onde utilizamos o parâmetro de Hubble, dado por

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}. \quad (2.14)$$

A Equação (2.13) não contém k e Λ , mas isso não é resultado de termos começado com as Equações (2.4) e (2.5). As Equações (2.9) e (2.10) geram o mesmo resultado.

Note que todos os termos possuem dimensão de energia por densidade por tempo. Ou seja, a Equação (2.13) afirma que a mudança da densidade de energia por tempo é nula, o que podemos interpretar como a *lei de conservação da energia local*.

Essa equação segue das equações de Friedmann sem precisarmos fazer outras suposições. Contudo, ela pode ser derivada de outra maneira. Suponha que toda a energia num volume comóvel a^3 seja

$$E = (\rho c^2 + P)a^3. \quad (2.15)$$

Se a expansão é adiabática, não há entrada ou saída de energia, de modo que

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}[(\rho c^2 + P)a^3] = 0. \quad (2.16)$$

Se a pressão é constante, as mudanças em ρ e a se compensam e obtemos a Equação (2.13).

2.2 Equações de Estado

As equações de Friedmann envolvem variáveis desconhecidas: o fator de escala a , o parâmetro de curvatura k , a densidade de matéria/energia ρ e a pressão P . Como vimos, apenas duas das equações são independentes, de modo que temos duas equações para quatro variáveis desconhecidas.

Podemos reescrever a Equação (2.4) como

$$kc^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(t)a(t)^2 - \dot{a}(t)^2. \quad (2.17)$$

O valor atual do parâmetro de Hubble é $H_0 = H(t_0) = \dot{a}(t_0)/a(t_0)$. Com isso e definindo $\rho_0 \equiv \rho(t_0)$, temos

$$\frac{kc^2}{a_0^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho_0 - H_0^2. \quad (2.18)$$

Assim, a curvatura espacial é determinada para qualquer tempo e ficamos com apenas três funções desconhecidas, $a(t)$, $\rho(t)$ e $P(t)$, para duas equações independentes. Podemos resolver isso especificando uma *equação de estado*, ou seja, uma relação entre a pressão P e a densidade de matéria/energia ρ . Os casos mais importantes em cosmologia podem ser descritos pela equação

$$P = w\rho c^2, \quad (2.19)$$

onde w é uma constante adimensional. Três casos importantes merecem anteção.

A) Matéria não-relativística (poeira)

A matéria do Universo (e.g. em galáxias) geralmente está se movendo em velocidades não-relativísticas e no contexto da cosmologia costuma ser chamada de *poeira*. Sabemos da Termodinâmica que para um gás ideal de

N partículas não-relativísticas de massa m a temperatura T em um volume V e em baixas densidades a equação de estado é

$$P = \frac{Nk_B T}{V}, \quad (2.20)$$

onde k_B é a constante de Boltzmann. Utilizando para a densidade de massa do gás $\rho = mN/V$, podemos reescrever a equação acima:

$$P = \frac{Nm c^2}{V m c^2} k_B T = \frac{k_B T}{m c^2} \rho c^2. \quad (2.21)$$

Lembrando que para um gás ideal a velocidade quadrática média da partícula está relacionada à temperatura por

$$m \langle v^2 \rangle = 3k_B T, \quad (2.22)$$

temos

$$P = \frac{\langle v^2 \rangle}{3c^2} \rho c^2. \quad (2.23)$$

Então para esse gás vemos que $w = \langle v^2 \rangle / 3c^2$. Contudo, como as partículas são não-relativísticas, temos $v \ll c$ e nesse caso utilizar $w \approx 0$ é uma excelente aproximação. Então em um Universo preenchido por poeira vamos utilizar a partir daqui a equação de estado

$$P = 0, \quad (2.24)$$

ou seja, a pressão da poeira é nula.

B) Matéria relativística (radiação)

Para um gás de partículas sem massa (e.g. fótons), a equação de estado é

$$P = \frac{1}{3} \rho c^2. \quad (2.25)$$

Ou seja, nesse caso $w = 1/3$. O Universo está preenchido por uma radiação remanescente da sua época primordial, a radiação cósmica de fundo (CMB). Embora sua contribuição para a densidade de energia do Universo atual seja desprezível, ela era uma componente dominante no Universo primordial, como discutiremos adiante.

Além disso, há uma radiação de fundo de neutrinos. Como os neutrinos possuem massas muito pequenas, iremos aproximá-los como partículas de massa nula no Universo primordial, de modo que também obedecem a equação de estado (2.25).

C) Constante cosmológica

As equações de Friedmann (2.9) e (2.10) podem ser expressas, para matéria com pressão nula,

$$\dot{a}^2 + kc^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 + \frac{\Lambda}{3}a^2, \quad (2.26)$$

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3}\rho a + \frac{\Lambda}{3}a. \quad (2.27)$$

Einstein originalmente introduziu a constante cosmológica como uma contribuição para a curvatura do espaço-tempo. Atualmente ela é considerada uma contribuição para a densidade de energia e a pressão do Universo, já que está relacionada com a energia do vácuo. O princípio da incerteza de Heisenberg implica que o espaço vazio possui uma densidade de energia associada a processos quânticos. Assim, podemos reformular as equações de Friedmann, incluindo poeira e a constante cosmológica:

$$\dot{a}^2 + kc^2 = \frac{8\pi G}{3}a^2(\rho + \rho_\Lambda)^2, \quad (2.28)$$

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho a + \rho_\Lambda + \frac{3P_\Lambda}{c^2}\right)a. \quad (2.29)$$

Comparando com as Equações (2.26) e (2.28), vemos que $\rho + \rho_\Lambda = \rho + \Lambda/8\pi G$. Logo:

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}. \quad (2.30)$$

Inserindo na segunda equação e comparando com a Equação (2.27), temos

$$-\frac{4\pi G}{3}\left(\frac{\Lambda}{8\pi G} + \frac{3P_\Lambda}{c^2}\right) = \frac{\Lambda}{3}. \quad (2.31)$$

Logo

$$P_\Lambda = -\frac{\Lambda}{8\pi G}c^2 = -\rho_\Lambda c^2. \quad (2.32)$$

Ou seja, $P = -\rho_\Lambda c^2$, de modo que $w = -1$. Assim, se $\Lambda > 0$, a pressão é negativa.

Numa interpretação Newtoniana (em termos de forças gravitacionais), ao invés da geometria do espaço-tempo, a constante cosmológica gera uma contribuição repulsiva à força gravitacional. Isso era necessário para se obter um Universo estático (*Universo de Einstein*), já que uma distribuição homogênea de matéria partindo do repouso colapsaria.

Quando Hubble descobriu a expansão do Universo em 1929, soluções para a expansão se tornaram possíveis sem a constante cosmológica. Atualmente a constante cosmológica é mantida por simplicidade e beleza, já que pode ser associada à energia do vácuo. Além disso, evidências recentes tem mostrado que a constante cosmológica é o fator mais importante na dinâmica do Universo.

2.3 Evolução da Densidade de Energia

Agora vamos obter ρ como função do fator de escala a . Começamos com a equação de estado $P = w\rho c^2$. Substituindo na Equação (2.13), temos

$$\dot{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{w\rho c^2}{c^2}\right) = -3\frac{\dot{a}}{a}(1+w)\rho. \quad (2.33)$$

Como $\dot{\rho} = d\rho/dt$ e $\dot{a} = da/dt$, podemos reescrever como a equação diferencial:

$$\frac{d\rho}{\rho} = -3(1+w)\frac{da}{a}. \quad (2.34)$$

Escolhendo as condições do tempo atual t_0 , temos $\rho(t_0) = \rho_0$ e $a(t_0) = a_0$. Então temos a integral

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho'}{\rho'} = -3(1+w) \int_{a_0}^a \frac{da'}{a'}, \quad (2.35)$$

logo

$$\ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) = -3(1+w)\ln\left(\frac{a}{a_0}\right), \quad (2.36)$$

de modo que

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(1+w)}. \quad (2.37)$$

Vamos analisar o caso das três principais componentes.

A) Matéria não-relativística (poeira)

Como $w = 0$, temos

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^3. \quad (2.38)$$

Assim, como a densidade de energia é proporcional à densidade de matéria e a matéria não desaparece, a densidade diminui de forma inversamente proporcional ao volume, que é proporcional a a^3 .

B) Radiação

Como $w = 1/3$, temos

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^4. \quad (2.39)$$

Ou seja, além do fator $1/a^3$ devido à diminuição da energia com o volume, há um fator adicional de $1/a$ porque a energia de partículas relativísticas é inversamente proporcional aos seus comprimentos de onda, os quais aumentam com a .

C) Constante cosmológica

Como $w = -1$, inserindo na Equação (2.13), temos:

$$\dot{\rho}_\Lambda = -3 \frac{\dot{a}}{a} (\rho_\Lambda - \rho_\Lambda) = 0, \quad (2.40)$$

de modo que $\rho_\Lambda = \text{constante} = \Lambda/8\pi G$ (ver Equação (2.30)). Ou seja, a densidade de energia do vácuo permanece constante, apesar da expansão (ver Figura 2.1).

2.4 Modelos Cosmológicos Clássicos

Para revisar alguns modelos cosmológicos simples, colocamos a equação de Friedmann (2.4) na forma

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho \quad (2.41)$$

Como essa equação é válida para qualquer tempo, utilizamos o tempo presente t_0 , para o qual $H_0 = \dot{a}(t_0)/a(t_0)$ é o valor atual do parâmetro de Hubble. Então temos

$$1 + \frac{kc^2}{a_0^2 H_0^2} = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_0. \quad (2.42)$$

Vemos que a quantidade $3H_0^2/8\pi G$ possui unidades de densidade. Ela corresponde ao valor atual da *densidade crítica* ρ_c . Com $H_0 = 100h$, ela vale:

$$\rho_{c,0} = 1.879h^2 \times 10^{-29} \text{ gcm}^{-3}. \quad (2.43)$$

Vemos que para um Universo plano ($k = 0$), temos

$$1 = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_0 = \frac{\rho_0}{\rho_{c,0}}. \quad (2.44)$$

De fato, ela é definida como a densidade de energia para a qual o Universo é plano:

$$\rho_c(t) \equiv \frac{3}{8\pi G} H(t)^2. \quad (2.45)$$

É comum expressar a abundância das componentes (matéria, radiação, energia do vácuo) em termos de ρ_c definindo parâmetros de densidade adimensionais Ω . Assim, para uma substância i com densidade ρ_i temos o parâmetro de densidade

$$\Omega_i \equiv \frac{\rho_i}{\rho_c}. \quad (2.46)$$

Também temos

$$\Omega = \sum_i \Omega_i. \quad (2.47)$$

Então a equação de Friedmann (2.4) pode ser reescrita como

$$1 - \Omega = -\frac{kc^2}{H^2 a^2}. \quad (2.48)$$

Como o sinal do termo no lado direito é constante, a curvatura do Universo depende de o valor de Ω ser maior, igual ou menor do que 1 (ver a classificação na Tabela 2.1).

$\rho < \rho_c$	$\Omega < 1$	$k = -1$	Aberto
$\rho = \rho_c$	$\Omega = 1$	$k = 0$	Plano
$\rho > \rho_c$	$\Omega > 1$	$k = +1$	Fechado

Tabela 2.1: Classificação de modelos cosmológicos.

Vários modelos cosmológicos podem ser elaborados dependendo dos valores de k e das componentes incluídas (matéria, radiação, constante cosmológica). A seguir apresentaremos os exemplos mais relevantes para a nossa discussão.

2.4.1 Modelos planos com uma componente

Esta parte da discussão está resumida na Tabela 2.2. Aqui vamos considerar Universos planos ($k = 0$) e sem constante cosmológica ($\Lambda = 0$). Então as equações de Friedmann ficam

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) = -\frac{8\pi G}{3}\rho_0\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3(1+w)}, \quad (2.49)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(1+3w)\rho_0\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3(1+w)}. \quad (2.50)$$

O termo ao quadrado na primeira equação permite que \dot{a} seja positivo ou negativo, mas vamos assumir $\dot{a}/a > 0$ porque sabemos que o Universo está em expansão. A segunda equação implica que $\ddot{a} < 0$ para $w > -1/3$, o que vamos assumir nessa discussão. Ou seja, fator de escala estava diminuindo. É útil sabermos quando ele desaparece para podermos normalizar a solução.

Então primeiro reescrevemos a primeira equação:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= H_0^2 \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_0 \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3(1+w)} = H_0^2 \frac{1}{\rho_{c,0}} \rho_0 \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3(1+w)} \\ &= -H_0^2 \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3(1+w)}, \end{aligned} \quad (2.51)$$

onde usamos o fato de que $\rho_0/\rho_{c,0} = 1$, já que $k = 0$. Extraíndo a raiz quadrada, temos

$$\frac{\dot{a}}{a} = H_0^2 \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3(1+w)/2}. \quad (2.52)$$

Rearranjando,

$$a_0^{-3(1+w)/2} a^{(1+3w)/2} da = H_0 dt. \quad (2.53)$$

Então a integral fica

$$a_0^{-3(1+w)/2} \int_{a_0}^a a'^{(1+3w)/2} da' = \int_{t_0}^t H_0 dt', \quad (2.54)$$

logo

$$\frac{2}{3(1+w)} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{3(1+w)/2} - \frac{2}{3(1+w)} = H_0(t - t_0). \quad (2.55)$$

Como comentamos antes, o fator de escala deve ter sido zero em algum momento $t < t_0$ e a solução para a vai depender apenas de $t - t_0$. Então podemos escolher $a = 0$ quando $t = 0$. Com essas condições, temos

$$\frac{2}{3(1+w)} = H_0 t_0. \quad (2.56)$$

Então podemos escrever

$$H_0 t_0 \left(\frac{a}{a_0} \right)^{3(1+w)/2} = H_0 t. \quad (2.57)$$

Assim, temos

$$a(t) = a_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2/3(1+w)}, \quad (2.58)$$

e logo

$$t_0 = \frac{2}{3(1+w)H_0}. \quad (2.59)$$

Como começamos com $t = 0$, t_0 corresponde ao tempo de expansão (ou idade do Universo). Mas para $t = 0$, quando $a = 0$, a densidade é infinita e o tamanho é zero. Ou seja, o modelo não é uma descrição razoável nesse momento, de modo que $t = 0$ é apenas uma extensão matemática. Na medida em que a densidade aumenta novos efeitos físicos precisam ser incluídos, como talvez a gravitação quântica.

A) Somente matéria

Nesse caso temos o modelo de *Einstein-de Sitter*. Como $w = 0$,

$$a(t) = a_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2/3}, \quad (2.60)$$

$$t_0 = \frac{2}{3H_0}. \quad (2.61)$$

Se utilizarmos $H_0 = 100h \text{ kms}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$, onde h aqui é o "parâmetro de Hubble"(cujo valor atual é $h \approx 0.7$), temos

$$t_0 = 9.3 \times 10^9 \text{ anos.} \quad (2.62)$$

No entanto, a idade das estrelas em aglomerados globulares velhos indicam que o Universo tem pelo menos 12 bilhões de anos. Por outro lado, parece que o Universo foi dominado por poeira até 'recentemente', de modo que o modelo é uma descrição útil de boa parte da história do Universo, além de sua simplicidade permitir o cálculo de várias quantidades analiticamente.

B) Somente radiação

Sabemos que atualmente o Universo não é dominado pela radiação, mas esse foi o caso nas suas primeiras épocas (Figura 2.1), de modo que o modelo é útil. Como nesse caso $w = 1/3$, temos

$$a(t) = a_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{1/2}, \quad (2.63)$$

$$t_0 = \frac{1}{2H_0}. \quad (2.64)$$

Utilizando H_0 e h como antes, temos:

$$t_0 = 7.0 \times 10^9 \text{ anos.} \quad (2.65)$$

	w	$\rho(a)$	$a(t)$
Radiação	$\frac{1}{3}$	a^{-4}	$t^{1/2}$
Matéria	0	a^{-3}	$t^{2/3}$
Λ	-1	a^0	e^{Ht}

Tabela 2.2: Soluções para Universos planos com uma componente.

2.4.2 Modelos com mais de uma componente

Na situação geral em que temos várias contribuições para a densidade de energia ρ_i e para a pressão $P_i = P_i(\rho_i)$, a primeira equação de Friedmann fica

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho = \frac{8\pi G}{3} \sum_i \rho_i. \quad (2.66)$$

A evolução de ρ é dada pela Equação (2.13), que reescrevemos:

$$\dot{\rho} = -3H \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right), \quad (2.67)$$

a qual nesse caso pode ser escrita como

$$\sum_i \left[\dot{\rho}_i + 3H \left(\rho_i + \frac{P_i}{c^2} \right) \right] = 0. \quad (2.68)$$

Se $P_i = P_i(\rho_i)$ e não depende de outras contribuições para a densidade de energia, os termos do somatório serão geralmente independentes, de modo que a soma será zero somente se os termos individuais forem nulos:

$$\dot{\rho}_i + 3H \left(\rho_i + \frac{P_i}{c^2} \right) = 0. \quad (2.69)$$

Assim, em modelos com mais de uma componente podemos solucionar a evolução da densidade de energia para cada componente separadamente e depois utilizar o resultado nas equações de Friedmann.

Matéria e radiação

Matéria e radiação são duas componentes que sabemos que existem no nosso Universo. Respectivamente, os parâmetros de densidade atuais para essas componentes valem [7] $\Omega_{m0} \approx 0.3$ e $\Omega_{r,0} \approx 8.4 \times 10^{-5}$ e suas densidades, como visto, variam como:

$$\rho_m = \rho_{c,0} \Omega_{m0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^3, \quad (2.70)$$

$$\rho_r = \rho_{c,0} \Omega_{r,0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^4. \quad (2.71)$$

Vemos que há um valor de a para o qual as densidades de energia são iguais, como se pode ver na Figura 2.1). Temos:

$$\rho_{c,0} \Omega_{m0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^3 = \rho_{c,0} \Omega_{r,0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^4. \quad (2.72)$$

Logo temos o valor a_{eq} :

$$a_{eq} = a_0 \frac{\Omega_{r,0}}{\Omega_{m0}}, \quad (2.73)$$

ou, em termos do *redshift*,

$$1 + z_{eq} = \frac{a_0}{a_{eq}} = \frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{r,0}} \approx 3570, \quad (2.74)$$

que define o momento da *igualdade matéria-radiação*.

Vemos que $a_{eq} \ll a_0$, ou seja, corresponde a uma época muito jovem do Universo. Para $a < a_{eq}$ a radiação dominava a densidade de energia, enquanto para $a > a_{eq}$ a matéria dominou. Assim, o *Universo primordial era dominado pela radiação* (Figura 2.1).

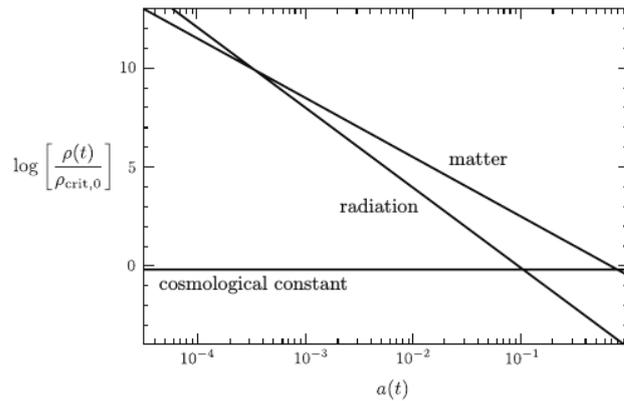


Figura 2.1: Evolução das densidades de energia no Universo.

Assim, esses modelos simplificados fornecem descrições razoáveis de épocas específicas do Universo. No Capítulo seguinte revisaremos alguns aspectos básicos da história termal do Universo, com foco no Universo Primordial.

3 História Termal do Universo

Neste capítulo descreveremos as partes relevantes dos primeiros minutos da história do Universo, quando ele estava num estado muito denso e quente, após a inflação, seguindo a exposição feita por Kolb e Turner [1], Dodelson [6] e Bauman [17]. As propriedades termodinâmicas nessas épocas eram determinadas por equilíbrio local, porém nem sempre. Veremos que a dinâmica de não-equilíbrio permite que partículas massivas adquiram abundâncias cosmológicas. A partir daqui utilizaremos as unidades $\hbar = k_B = c = 1$.

3.1 Revisão de Termodinâmica e Mecânica Estatística

Para um gás de partículas fracamente interagentes, é conveniente descrever o sistema no *espaço de fase*, onde o gás é descrito pelas posições e momentos de todas as partículas. Em mecânica quântica, os autoestados de momentum de uma partícula num volume $V = L^3$ possuem espectro discreto:

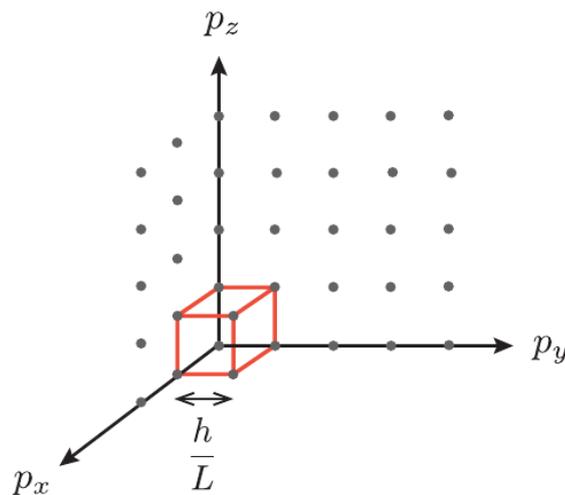


Figura 3.1: Autoestados de momentum de uma partícula (ilustração) [17].

A densidade de estados no espaço de momentum $\{p\}$ é então $L^3/h^3 = V/h^3$ e a densidade de estados no espaço de fase $\{x, p\}$ é $1/h^3$. Se a partícula possui g graus internos de liberdade (e.g. spin), a densidade de estados fica:

$$\frac{g}{h^3} = \frac{g}{(2\pi)^3}. \quad (3.1)$$

Para obter propriedades do gás (como as densidades numérica e de energia) precisamos saber como as partículas estão distribuídas nos autoestados

de momentum, ou seja, precisamos da função de distribuição $f(x, p, t)$. A homogeneidade implica que f não depende de x e a isotropia exige $p \equiv |p|$, enquanto deixaremos o tempo implícito. Então a densidade de partículas no espaço de fase é:

$$\frac{g}{(2\pi)^3} \times f(p). \quad (3.2)$$

A densidade numérica de partículas no espaço real é encontrada integrando (3.2) sobre o momentum:

$$n = \frac{g}{(2\pi)^3} \int f(p) d^3 p. \quad (3.3)$$

No Universo primordial a energia de uma partícula de massa m e momentum p pode ser escrita como:

$$E(p) = \sqrt{p^2 + m^2}. \quad (3.4)$$

Integrando o produto de (3.2) e (3.4) sobre o momentum obtemos a densidade de energia:

$$\rho = \frac{g}{(2\pi)^3} \int E(p) f(p) d^3 p, \quad (3.5)$$

e analogamente para a pressão:

$$P = \frac{g}{(2\pi)^3} \int \frac{p^2}{3E(p)} f(p) d^3 p. \quad (3.6)$$

Um sistema de partículas está em *equilíbrio cinético* se as partículas trocam energia e momentum de forma eficiente [17]. Isso leva a um estado de máxima entropia em que as funções de distribuição são dadas pelas distribuições de Fermi-Dirac e Bose-Einstein:

$$f(p) = \frac{1}{e^{(E(p)-\mu)/T} \pm 1}, \quad (3.7)$$

onde o sinal positivo (negativo) se refere à férmions (bósons) e μ_i é o potencial químico. Para baixas temperaturas, $T < (E - \mu)$ e as duas distribuições se reduzem para a distribuição de Maxwell-Boltzmann:

$$f(p) \approx e^{-(E(p)-\mu)/T}. \quad (3.8)$$

É útil reescrever as integrais acima com a energia E_i no lugar do momentum p . Da Equação (3.4) obtemos

$$p = \sqrt{E_i^2 - m_i^2}. \quad (3.9)$$

Nos tempos primordiais os potenciais químicos de todas as partículas eram muito pequenos e podem ser desprezados. Então a partir de agora assumiremos $\mu = 0$, de modo que as Equações (3.3) e (3.5) podem ser reescritas como:

$$n = \frac{g}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{p^2}{e^{\sqrt{p^2+m^2}/T} \pm 1} dp, \quad (3.10)$$

$$\rho = \frac{g}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{p^2 \sqrt{p^2+m^2}}{e^{\sqrt{p^2+m^2}/T} \pm 1} dp. \quad (3.11)$$

$$(3.12)$$

Definindo $x \equiv m/T$ e $\xi \equiv p/T$, isso pode ser reescrito como:

$$n = \frac{g}{2\pi^2} T^3 I_\pm(x) \quad I_\pm(x) \equiv \int_0^\infty \frac{\xi^2}{e^{\sqrt{\xi^2+x^2}} \pm 1} d\xi, \quad (3.13)$$

$$\rho = \frac{g}{2\pi^2} T^4 J_\pm(x) \quad J_\pm(x) \equiv \int_0^\infty \frac{\xi^2 \sqrt{\xi^2+x^2}}{e^{\sqrt{\xi^2+x^2}} \pm 1} d\xi. \quad (3.14)$$

Geralmente as funções $I_\pm(x)$ e $J_\pm(x)$ precisam ser calculadas numericamente. Contudo, estamos interessados nos limites relativístico e não-relativístico, de modo que podemos obter resultados analíticos utilizando as integrais padronizadas [18]:

$$\int_0^\infty \frac{\xi^n}{e^\xi - 1} d\xi = \zeta(n+1)\Gamma(n+1), \quad (3.15)$$

$$\int_0^\infty \xi^n e^{-\xi^2} d\xi = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}(n+1)\right), \quad (3.16)$$

onde $\zeta(z)$ é a função zeta de Riemann.

Limite Relativístico ($T \gg m$)

No limite $x \rightarrow 0$ ($T \gg m$), a integral em (3.13) se reduz para:

$$I_\pm(0) = \int_0^\infty \frac{\xi^2}{e^\xi \pm 1} d\xi. \quad (3.17)$$

Para bósons, temos $n = 2$ na integral (3.15):

$$I_-(0) = 2\zeta(3), \quad (3.18)$$

onde $\zeta(3) \approx 1.202$. Para férmions, primeiro lembramos que:

$$\frac{1}{e^\xi + 1} = \frac{1}{e^\xi - 1} - \frac{2}{e^{2\xi} - 1}, \quad (3.19)$$

de modo que:

$$I_+(0) = I_-(0) - 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 I_-(0) = \frac{3}{4} I_-(0). \quad (3.20)$$

Então temos:

$$n = \frac{\zeta(3)}{\pi^2} g T^3 \begin{cases} 1 & \text{bósons,} \\ \frac{3}{4} & \text{férmions.} \end{cases} \quad (3.21)$$

Analogamente, a densidade de energia fica:

$$\rho = \frac{\pi^2}{30} g T^4 \begin{cases} 1 & \text{bósons,} \\ \frac{7}{8} & \text{férmions.} \end{cases} \quad (3.22)$$

Finalmente, é fácil recuperar da Equação (3.6) a relação pressão-densidade para um gás relativístico:

$$P = \frac{1}{3} \rho. \quad (3.23)$$

Limite Não-Relativístico ($T \ll m$)

No limite $x \gg 1$ ($T \ll m$), a integral (3.13) é a mesma para bósons e férmions:

$$I_{\pm}(x) \approx \int_0^{\infty} \frac{\xi^2 d\xi}{e^{\sqrt{\xi^2 + x^2}}}. \quad (3.24)$$

A maior parte da contribuição para a integral vem de $\xi \ll x$. Podemos então expandir em série de Taylor a raiz quadrada para a menor ordem em ξ :

$$\begin{aligned} I_{\pm}(x) &\approx \int_0^{\infty} \frac{\xi^2 d\xi}{e^{x + \xi^2/(2x)}} = e^{-x} \int_0^{\infty} \xi^2 e^{-\xi^2/(2x)} d\xi \\ &= (2x)^{3/2} e^{-x} \int_0^{\infty} \xi^2 e^{-\xi^2} d\xi. \end{aligned} \quad (3.25)$$

A última integral é da forma de (3.16) com $n = 2$. Utilizando $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$, temos:

$$n_i = g \left(\frac{mT}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-m/T}. \quad (3.26)$$

Assim, partículas massivas são exponencialmente raras para temperaturas baixas ($T \ll m$). Na menor ordem nesse limite, temos $E(p) \approx m$, de modo que a densidade de energia fica igual a densidade de massa:

$$\rho \approx mn. \quad (3.27)$$

Finalmente, vemos a partir de (3.6) que um gás de partículas relativísticas age como poeira (matéria) sem pressão:

$$P = nT \ll \rho = mn. \quad (3.28)$$

Comparando os dois limites vemos que n , ρ e P para uma espécie de partícula diminui exponencialmente (pelo fator de Boltzmann $e^{-m/T}$) na medida em que a temperatura fica abaixo da massa da partícula. Podemos interpretar isso como a aniquilação de partículas e antipartículas. Para altas energias essas aniquilações ocorrem, mas são balanceadas pela produção de pares, enquanto que para baixas temperaturas as energias das partículas não são suficientes para que isso ocorra.

Número Efetivo de Espécies Relativísticas

Se T é a temperatura de um gás de fótons, então a densidade de radiação total é a soma sobre as densidades de energia de todas as partículas relativísticas [16]:

$$\rho_R = \sum_i \rho_i = \frac{\pi^2}{30} g_*(T) T^4, \quad (3.29)$$

onde $g_*(T)$ é o *número efetivo de graus de liberdade relativísticos* à temperatura T . Temos dois tipos de contribuições para a soma:

- Espécies relativísticas em equilíbrio térmico com os fótons, $T_i \gg T$:

$$g_*(T) = \sum_B g_i + \frac{7}{8} \sum_F g_i, \quad (3.30)$$

onde utilizamos, respectivamente, B para bósons e F para férmions. Quando a temperatura da partícula fica abaixo da massa m_i de uma espécie de partícula, ela se torna não-relativística e deixa de contribuir para a soma.

- Espécies relativísticas que não estão em equilíbrio térmico com os fótons, $T_i \neq T \gg m_i$:

$$g_*(T) = \sum_B g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^4 + \frac{7}{8} \sum_F g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^4. \quad (3.31)$$

Vemos que para a pressão (3.23), temos:

$$P_R = \frac{1}{3}\rho_R = \frac{\pi^2}{90}g_*T^4. \quad (3.32)$$

Na Figura 3.3 temos a massa, o spin e os graus de liberdade g para o conteúdo de partículas do Modelo Padrão, enquanto que a Figura 3.2 mostra a evolução de $g_*(T)$.

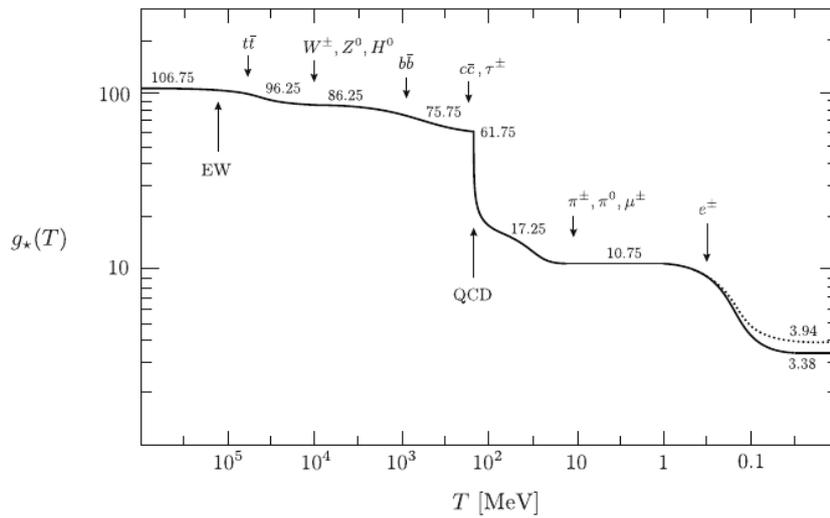


Figura 3.2: Evolução dos graus de liberdade relativísticos $g_*(T)$ para o conteúdo de partículas do Modelo Padrão. A linha pontilhada representa o número de graus efetivos de liberdade na entropia $h_*(T)$ [17].

type		mass	spin	g
quarks	t, \bar{t}	173 GeV	$\frac{1}{2}$	$2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$
	b, \bar{b}	4 GeV		
	c, \bar{c}	1 GeV		
	s, \bar{s}	100 MeV		
	d, \bar{d}	5 MeV		
	u, \bar{u}	2 MeV		
gluons	g_i	0	1	$8 \cdot 2 = 16$
leptons	τ^\pm	1777 MeV	$\frac{1}{2}$	$2 \cdot 2 = 4$
	μ^\pm	106 MeV		
	e^\pm	511 keV		
	$\nu_\tau, \bar{\nu}_\tau$	< 0.6 eV	$\frac{1}{2}$	$2 \cdot 1 = 2$
	$\nu_\mu, \bar{\nu}_\mu$	< 0.6 eV		
	$\nu_e, \bar{\nu}_e$	< 0.6 eV		
gauge bosons	W^+	80 GeV	1	3
	W^-	80 GeV		
	Z^0	91 GeV		
	γ	0		2
Higgs boson	H^0	125 GeV	0	1

Figura 3.3: Conteúdo de partículas do Modelo Padrão [17].

3.2 Entropia

Quando a escala de tempo da expansão do Universo é longa comparada com as escalas de tempo para reações que mantêm equilíbrio térmico, podemos considerar que o gás cosmológico está em equilíbrio, mas sofrendo mudanças adiabáticas com a expansão lenta. Nessas condições, veremos que a entropia por volume comóvel será constante.

Pela Segunda Lei da Termodinâmica, temos:

$$dS = \frac{1}{T} [d(\rho V) + P dV] = \frac{1}{T} \left[(\rho + P) dV + V \frac{d\rho}{dT} dT \right]. \quad (3.33)$$

A entropia S é uma função do volume V e da temperatura T , com diferencial total

$$dS = \frac{\partial S}{\partial V} dV + \frac{\partial S}{\partial T} dT. \quad (3.34)$$

Comparando ambas, vemos que

$$\frac{\partial S}{\partial V} = \frac{1}{T}(\rho + P), \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial S}{\partial T} = \frac{V}{T} \frac{d\rho}{dT}. \quad (3.36)$$

Mas sabemos, pela igualdade das derivadas parciais mistas, que

$$\frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T} = \frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V}. \quad (3.37)$$

Logo

$$\frac{\partial}{\partial T} \left[\frac{1}{T}(\rho + P) \right] = \frac{\partial}{\partial V} \frac{V}{T} \frac{d\rho}{dT}, \quad (3.38)$$

da qual obtemos

$$dP = \frac{\rho + P}{T} dT. \quad (3.39)$$

Assim, podemos reescrever a Segunda Lei como:

$$T dS = d[(\rho + P)V] - V dP = d[(\rho + P)V] - V \frac{\rho + P}{T} dT \quad (3.40)$$

e então

$$dS = \frac{1}{T} d[(\rho + P)V] - V \frac{(\rho + P)}{T^2} dT. \quad (3.41)$$

onde C é uma constante. Assim, temos, a menos de uma constante aditiva e utilizando $V = \alpha^3$:

$$S = \frac{\alpha^3(\rho + P)}{T}. \quad (3.42)$$

Mas se a expansão é adiabática, $dQ = 0$ na Primeira Lei, e como $E = \rho V$, temos

$$d[(\rho + P)V] = V dP, \quad (3.43)$$

logo $dS = 0$. Então a *densidade de entropia* é dada por:

$$s \equiv \frac{S}{V} = \frac{\rho + P}{T} \quad (3.44)$$

desde que o equilíbrio termodinâmico local seja mantido.

Assim como anteriormente para a densidade de energia e a pressão, se a densidade de entropia é dominada pela radiação ($s \propto a^{-3}$) e utilizando (3.22) e (3.28), temos:

$$s = \sum_i \frac{\rho_i + P_i}{T_i} \equiv \frac{2\pi^2}{45} h_*(T) T^3, \quad (3.45)$$

onde h_* é um *número efetivo de graus de liberdade na entropia*,

$$h_*(T) = h_{*,1}(T) + h_{*,2}(T). \quad (3.46)$$

Para todas as espécies em equilíbrio térmico, temos $h_{*,1}(T) = h_{*,2}(T)$. Mas como $s_i \propto T^3$, para espécies desacopladas temos:

$$h_{*,2} \equiv \sum_B g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^3 + \frac{7}{8} \sum_F g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^3 \neq g_{*,2}, \quad (3.47)$$

onde B e F correspondem a bósons e férmions, respectivamente. Como antes, a soma é realizada somente sobre as espécies relativísticas ($T \gg m_i$). Vemos que h_* é quase sempre igual a g_* e difere apenas se alguma espécie se torna desacoplada termicamente do resto do plasma (ver Figura 3.2).

Assim na época dominada da pela radiação utilizamos $\rho \simeq \rho_R$ e $P \simeq \rho_R/3$ e, pelo capítulo anterior, o fator de escala é $a(t) \propto t^{1/2}$ (2.63). Então podemos reescrever a equação de Friedmann (2.4) na forma:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_R = \frac{8\pi G}{3} g_* \frac{\pi^2}{30} T^4 = g_* \frac{\pi^2}{90} \frac{T^4}{M_{Pl}^2} \quad (3.48)$$

$$H = \frac{\pi}{\sqrt{90}} \sqrt{g_*} \frac{T^2}{M_{Pl}}, \quad (3.49)$$

onde $M_{Pl} = 1/\sqrt{8\pi G} \approx 2.4 \times 10^{18}$ GeV é a massa de Planck *reduzida*.

3.3 Interações

O equilíbrio térmico de espécies de partícula no Universo primordial é mantido por espalhamento, ou seja, ele é mantido desde que a taxa de interação Γ seja maior do que a taxa de expansão H , onde, como vimos, $H \sim T^2/M_{Pl}$.

A taxa de reação por partícula Γ é dada por

$$\Gamma = n\sigma v, \quad (3.50)$$

onde n é a densidade numérica das outras partículas com as quais a partícula em questão pode espalhar, σ é a seção de choque para o processo de espalhamento em questão e v é a velocidade relativa entre as partículas reagentes.

Por exemplo, suponha que uma taxa de interação Γ ocorre de modo que $\Gamma \propto T^n$. Então o número de interações que a partícula irá participar depois de um tempo t é

$$N_{int} = \int_t^\infty \Gamma(t') dt' = \frac{\Gamma(T)}{2H(T)} \int_0^T \left(\frac{T'}{T}\right)^n \frac{dT'}{T'^3} T^2 = \left(\frac{\Gamma}{H}\right) \frac{1}{n-2}. \quad (3.51)$$

Assim, para $n > 2$ as partículas interagem menos do que uma vez depois do tempo em que $\Gamma \approx H$. Isso ocorre porque na época da radiação $H \propto T^2$, então se $n > 2$, então a taxa Γ diminui para um valor inferior a H depois que $\Gamma = H$ e as interações das partículas aproximadamente param (*congelam*).

3.4 Fora do Equilíbrio

A evolução fora do equilíbrio é formalmente descrita pela equação de Boltzmann. Ela é aplicada, entre outros, na produção de matéria escura, na formação de elementos simples durante a Nucleossíntese do Big Bang, entre outros. Neste trabalho focaremos no primeiro caso.

3.4.1 Equação de Boltzmann

Na ausência de interações, a densidade numérica de uma partícula de espécie i evolui como

$$\frac{dn_i}{dt} + 3\frac{\dot{a}}{a}n_i = 0. \quad (3.52)$$

Como vimos no capítulo anterior, isso é um reflexo do fato de que o número de partículas num volume fixo ($V \propto a^3$) é conservado, de modo que a densidade se dilui com a expansão do volume, $n_i \propto a^{-3}$. Para incluir os

efeitos de interações adicionamos um termo no lado direito para as colisões. Fazendo isso e rearranjando, temos a *equação de Boltzmann*:

$$\frac{1}{a^3} \frac{d(n_i a^3)}{dt} = C[\{n_j\}], \quad (3.53)$$

onde a forma do termo da colisão depende das interações específicas em consideração. Como interações entre três ou mais partículas são muito improváveis, vamos nos limitar a decaimentos, para uma partícula, e aniquilações e espalhamentos para duas partículas.

Exemplo

Considere o processo $1 + 2 \leftrightarrow 3 + 4$, onde as partículas 1 e 2 podem se aniquilar para produzir as partículas 3 e 4 e vice-versa. Suponha que estamos interessados na densidade numérica n_1 da espécie 1. A taxa de mudança na abundância da espécie 1 é dada pela diferença entre as taxas de produção e eliminação da espécie. Em termos da equação de Boltzmann, isso fica:

$$\frac{1}{a^3} \frac{d(n_1 a^3)}{dt} = -\alpha n_1 n_2 + \beta n_3 n_4. \quad (3.54)$$

onde os termos $-\alpha n_1 n_2$ e $\beta n_3 n_4$ descrevem, respectivamente, a eliminação e a produção de partículas 1. O parâmetro $\alpha = \langle \sigma v \rangle$ é a *média termal da seção de choque* (os brackets denotam uma média sobre v). No equilíbrio químico o termo envolvendo a colisão precisa desaparecer, então o parâmetro β pode ser relacionado a α por

$$\beta = \left(\frac{n_1 n_2}{n_3 n_4} \right)_{eq} \alpha, \quad (3.55)$$

onde $n_{i,eq}$ são as densidades numéricas de equilíbrio calculadas anteriormente. Então temos

$$\frac{1}{a^3} \frac{d(n_1 a^3)}{dt} = -\langle \sigma v \rangle \left[n_1 n_2 - \left(\frac{n_1 n_2}{n_3 n_4} \right)_{eq} n_3 n_4 \right]. \quad (3.56)$$

É útil reescrevermos em termos do número de partículas num volume comóvel, $Y_i \equiv n_i/s$. Então temos

$$\frac{d \ln Y_1}{d \ln a} = -\frac{\Gamma_1}{H} \left[1 - \left(\frac{Y_1 Y_2}{Y_3 Y_4} \right)_{eq} \frac{Y_3 Y_4}{Y_1 Y_2} \right], \quad (3.57)$$

onde $\Gamma_1 \equiv n_2 \langle \sigma v \rangle$. O fator Γ_1/H descreve a eficiência da interação e o outro fator descreve o desvio do equilíbrio. Para $\Gamma \gg H$, o sistema está em equilíbrio químico.

Suponha que começamos com $Y_1 \gg Y_{1,eq}$ e $Y_i \sim Y_{i,eq}$ para $i = 2, 3, 4$. Então o lado direito é negativo, as partículas do tipo 1 são eliminadas e Y_1 se reduz para o valor de equilíbrio $Y_{1,eq}$. Por outro lado, se começarmos com $Y_1 \ll Y_{1,eq}$, o lado direito é positivo e Y_1 aumenta para o valor de equilíbrio $Y_{1,eq}$.

O mesmo comportamento é válido se temos várias partículas desviadas dos seus valores de equilíbrio. Enquanto as taxas de interação forem grandes, o sistema irá rapidamente relaxar para um estado estável no qual o lado direito desaparece e as partículas assumem suas abundâncias de equilíbrio.

Quando a taxa de reação diminui ao ponto de ficar abaixo da escala de Hubble ($\Gamma_1 < H$), o lado direito é suprimido e a densidade comóvel de partículas se aproxima de uma *densidade de relíquia* constante, $Y_1 = cte$ (ver Figura 3.4). Veremos que para o congelamento de partículas de matéria escura no Universo primordial a evolução é similar.

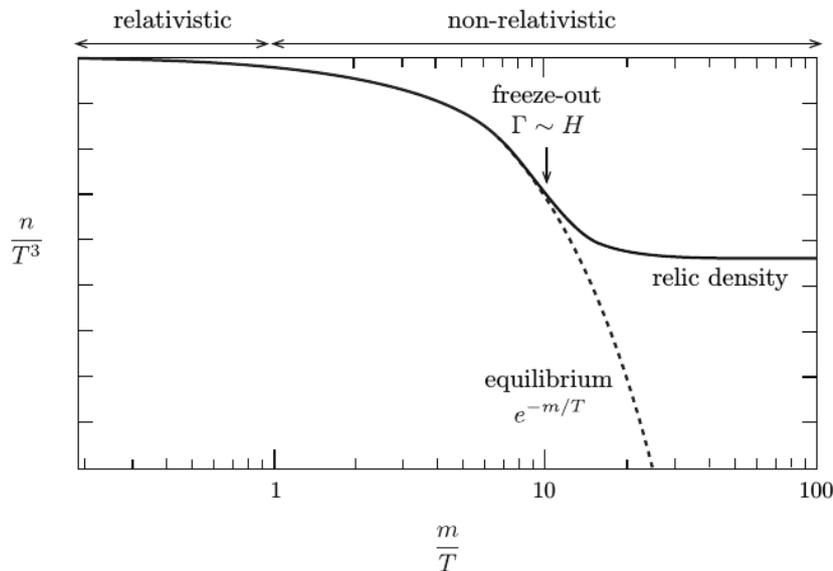


Figura 3.4: Ilustração do congelamento de partículas [17]. Para temperaturas altas ($T \gg m$), as abundâncias acompanham os valores de equilíbrio. Para temperaturas baixas ($T \ll m$), as partículas congelam e mantêm uma densidade muito maior do que a abundância de equilíbrio.

4 WIMPs

Neste capítulo revisaremos o cálculo padrão da densidade de relíquia de WIMPs, utilizando como base os trabalhos de Jungman et al. [4], Bertone et al. [9] e Yimingniyazi [11]. Primeiro realizaremos uma aproximação simples, para o caso em que a seção de choque não depende da energia e em seguida apresentaremos o cálculo mais geral, assim como algumas de suas limitações.

4.1 Estimativa Simples

Suponha que além das partículas conhecidas do modelo padrão há uma nova, χ , com massa m_χ e estável. No equilíbrio térmico a densidade numérica $n_{\chi,eq}$ é dada pela Equação (3.3).

Para temperaturas altas ($T \gg m_\chi$), temos $n_{\chi,eq} \propto T^{3/2}$ (3.21), ou seja, há tantos fótons quanto partículas χ . As partículas χ são abundantes e a reação da Equação (1.1), $\chi\bar{\chi} \leftrightarrow l\bar{l}$, ocorre rapidamente.

Para temperaturas baixas ($T \ll m_\chi$), temos $n_{\chi,eq} \propto T^{3/2} e^{-m_\chi/T}$ (3.26), ou seja, a densidade é suprimida exponencialmente. Se a expansão do Universo fosse tão lenta de modo que equilíbrio químico fosse sempre mantido, o número atual de WIMPs seria essencialmente nulo devido à diminuição exponencial.

Lembramos que a taxa de aniquilação de χ é dada por:

$$\Gamma = \langle \sigma v \rangle n_\chi, \quad (4.1)$$

onde $\langle \sigma v \rangle$ é a média termal da seção de choque total para a aniquilação de $\chi\bar{\chi}$ em partículas mais leves vezes a velocidade relativa v . Nessa fase Γ diminui para baixo da taxa de expansão, $\Gamma \lesssim H$. Como mencionamos antes, as aniquilações de χ param, saem do equilíbrio e uma abundância de relíquia permanece. Obs.: utilizaremos $n_\chi = n$ daqui para frente.

A equação de Boltzmann para esse cenário, que descreve a evolução de $n(t)$ com o tempo, pode ser escrita na forma ([1], [2]):

$$\frac{dn}{dt} + 3Hn = -\langle \sigma v \rangle (n^2 - n_{eq}^2), \quad (4.2)$$

onde $H = \dot{a}/a$ é a taxa de expansão e a é o fator de escala. O segundo termo do lado esquerdo descreve a expansão do Universo. Na ausência de interações com número variável, o lado direito seria zero, e teríamos $n \propto a^{-3}$, como esperado. O primeiro termo entre parênteses no lado direito descreve a perda de partículas por aniquilação e o segundo termo descreve a criação pela reação inversa.

Embora não haja solução analítica para a equação de Boltzmann, há uma aproximação analítica simples, que será revisada na seção seguinte. Como ilustração, vamos tratar nesta seção caso em que $\langle\sigma v\rangle$ não depende da energia.

No Universo primordial, $H \propto T^2$ (3.49), enquanto $n \propto T^3$, ou seja, a taxa de expansão diminui mais lentamente do que a densidade numérica de partículas. Logo, nessa época o termo da expansão $3Hn$ em (4.2) é desprezível quando comparado ao lado direito e a n acompanha o valor de equilíbrio. Em tempos posteriores, o lado direito se torna desprezível comparado à taxa de expansão, e a abundância comóvel de χ se estabiliza.

A temperatura T_f na qual as partículas congelam é dada por $\Gamma(T_f) = H(T_f)$. Utilizando números da escala fraca, verifica-se que a temperatura de congelamento é $T_f \simeq m/22$, como veremos na seção seguinte. Supondo que não há fenômenos que produzam entropia, a entropia por volume comóvel no Universo permanece constante, de modo que n/s permanece constante. Assim, com (3.49) e a condição de congelamento $\Gamma = n\langle\sigma v\rangle = H$, temos:

$$\left(\frac{n}{s}\right)_0 = \left(\frac{n}{s}\right)_f \simeq \frac{100}{g_*^{1/2} M_{Pl} m \langle\sigma v\rangle} \simeq \frac{10^{-8} 10^{-27} \text{cm}^3 \text{s}^{-1}}{m/\text{GeV} \langle\sigma v\rangle}, \quad (4.3)$$

onde utilizamos os subscritos f e 0 para denotar, respectivamente o valor no congelamento e o atual. Utilizando $s_0 \simeq 4000 \text{cm}^{-3}$ para a densidade de entropia [4] e $\rho_c \simeq 10^{-5} h^2 \text{GeV cm}^{-3}$ para a densidade crítica, onde h é a constante de Hubble em unidades de $100 \text{km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$, a atual densidade de massa em unidades de ρ_c fica:

$$\Omega h^2 = \frac{mn}{\rho_c} \simeq \frac{3 \times 10^{-27} \text{cm}^3 \text{s}^{-1}}{\langle\sigma v\rangle}. \quad (4.4)$$

A Figura 4.1 mostra soluções numéricas para a equação de Boltzmann. As abundâncias de equilíbrio (curva sólida) e real (curvas tracejadas) por volume comóvel foram representadas como função de $x \equiv m/T$, que aumenta com o tempo. Na medida em que a seção de choque de aniquilação *aumenta* as WIMPS permanecem em equilíbrio por mais tempo e sua abundância de relíquia é *menor*.

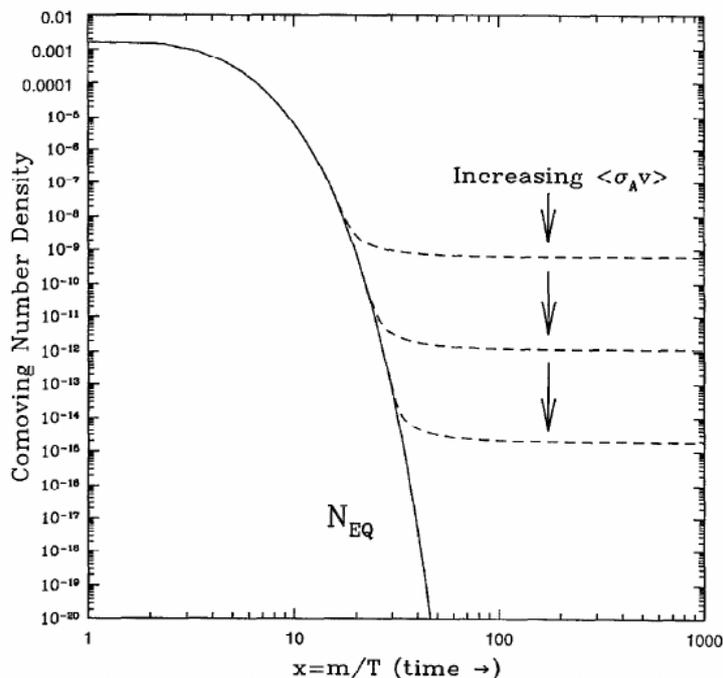


Figura 4.1: Densidade numérica comóvel de uma WIMP no Universo primordial. As curvas tracejadas correspondem à abundância real, enquanto a curva sólida à abundância de equilíbrio [1].

4.2 Cálculo Padrão

Nesta seção vamos supor que as partículas χ são produzidas termalmente e que χ é auto-conjugada, ou seja, $\chi = \bar{\chi}$ (o caso em que $\chi \neq \bar{\chi}$ difere de forma não-trivial apenas quando há assimetria $\chi - \bar{\chi}$, ou seja, $n_\chi \neq n_{\bar{\chi}}$) e que alguma simetria (e.g. paridade R) proíbe o decaimento de χ em partículas do Modelo Padrão. A mesma assimetria também proíbe a produção única de χ pelo fundo térmico, mas a criação e a aniquilação de pares χ continua permitida.

A evolução temporal da densidade numérica n é descrita pela já mencionada equação de Boltzman (4.2):

$$\frac{dn}{dt} + 3Hn = -\langle\sigma v\rangle(n^2 - n_{eq}^2), \quad (4.5)$$

onde n_{eq} é a densidade numérica de equilíbrio. A equação de Boltzmann assume que χ está em equilíbrio cinético com as partículas do modelo padrão.

A densidade numérica de equilíbrio n_{eq} em (4.5) para baixas temperaturas ($T \ll m$) (3.3) é dada pela (3.26):

$$n_{eq} = g \left(\frac{mT}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-m/T}, \quad (4.6)$$

para a qual lembramos que f_{eq} é dada pela aproximação de Maxwell-Boltzmann $f_{eq} = e^{-E/T}$.

É útil reescrevermos (4.5) em termos de $x = m/T$, assim como das quantidades adimensionais $Y = n/s$ e $Y_{eq} = n_{eq}/s$. A densidade de entropia é dada por (3.45), onde o número efetivo de graus de liberdade h_* é (4.7):

$$h_* = \sum_B g_i \left(\frac{T_i}{T} \right)^3 + \frac{7}{8} \sum_F g_i \left(\frac{T_i}{T} \right)^3, \quad (4.7)$$

onde T_i é a temperatura da espécie i . Assumindo que o Universo se expande adiabaticamente, sa^3 é constante, o que implica que $ds/dt + 3Hs = 0$, de modo que podemos escrever a dependência temporal da temperatura como:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{Hx}{1 - \frac{x}{3h_*} \frac{dh_*}{dx}}. \quad (4.8)$$

Assim, a equação de Boltzmann (4.5) pode ser reescrita como:

$$\frac{dY}{dx} = -\frac{\langle \sigma v \rangle s}{Hx} \left(1 - \frac{x}{3h_*} \frac{dh_*}{dx} \right) (Y^2 - Y_{eq}^2). \quad (4.9)$$

Para $T \ll m$ a seção de choque de aniquilação pode ser aproximada pela expansão não-relativística em termos de v^2 [3] e sua média termal é:

$$\langle \sigma v \rangle = a + b \langle v^2 \rangle + O(\langle v^4 \rangle) = a + 6b/x + O(1/x^2). \quad (4.10)$$

Aqui a é o limite $v \rightarrow 0$ da contribuição para σv onde as duas partículas χ que se aniquilam estão numa onda S . Se aniquilação por onda S é suprimida, então b descreve a contribuição da onda P para σv . Os parâmetros a e b são em princípio calculáveis quando especificamos o modelo. Neste trabalho trataremos a e b como parâmetro livres, independentes de modelo.

Como não há solução analítica para a Equação (4.9), precisamos resolvê-la numericamente. Essa equação diferencial pode ser solucionada aproximadamente com boa precisão ($< 5\%$) [3]. Introduzindo a variável $\Delta \equiv Y - Y_{eq}$, a equação de Boltzmann pode ser reescrita como:

$$\frac{d\Delta}{dx} \simeq -\frac{dY_{eq}}{dx} - f(x)\Delta(2Y_{eq} + \Delta), \quad (4.11)$$

$$f(x) = \frac{4\pi}{\sqrt{90}} m M_{Pl} \frac{G(x) \langle \sigma v \rangle}{x^2}, \quad (4.12)$$

onde $G(x)$ é:

$$G(x) = \frac{h_*}{\sqrt{g_*}} \left(1 - \frac{x}{3h_*} \frac{dh_*}{dx} \right) \simeq g_*^{1/2}. \quad (4.13)$$

A solução pode ser determinada em dois regimes extremos. Muito antes do congelamento ($x \ll x_f$) Y acompanha o seu valor de equilíbrio Y_{eq} , de modo que Δ e $d\Delta/dx$ são pequenos. Desprezando Δ^2 e $d\Delta/dx$, obtemos:

$$\Delta = \frac{1}{2f(x)} = \frac{\sqrt{90}}{8\pi} \frac{x^2}{g_*^{1/2} m M_{Pl} \langle \sigma v \rangle}, \quad (4.14)$$

onde utilizamos $dY_{eq}/dx \simeq -Y_{eq}$ para $x \gg 1$. Muito depois do congelamento ($x \gg x_f$) o termo de produção de partículas na equação de Boltzmann pode ser ignorado e temos:

$$\frac{d\Delta}{dx} = -\frac{4\pi}{\sqrt{90}} \frac{m M_{Pl} g_*^{1/2} \langle \sigma v \rangle}{x^2} \Delta^2. \quad (4.15)$$

Então integramos essa equação entre x_f e infinito. Assumindo $\Delta(x_f) \gg \Delta(\infty)$, temos:

$$\frac{1}{Y_\infty} = \frac{4\pi}{\sqrt{90}} g_*^{1/2} m M_{Pl} \frac{a + 3b/x_f}{x_f}, \quad (4.16)$$

onde utilizamos a expansão não-relativística para $\langle \sigma v \rangle$ (4.10) e assumimos $g_* \simeq h_*$ e $dh_*/dx = 0$.

A densidade de energia é normalmente expressa como $\Omega = \rho/\rho_c$ (2.46). A densidade atual de uma partícula de relíquia então fica:

$$\rho_\chi = m_\chi n_{\chi,\infty} = m_\chi s_0 Y_{\chi,\infty}, \quad (4.17)$$

onde $s_0 \simeq 2900 \text{cm}^{-3}$ é a densidade atual de entropia. Assim, obtemos a aproximação padrão para a densidade de relíquia:

$$\begin{aligned} \Omega_\chi h^2 &= \frac{\rho_\chi}{\rho_c} h^2 = \frac{m_\chi s_0 Y_{\chi,\infty}}{3M_{Pl}^2 (100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1})^2} \\ &= 2.7 \times 10^{10} Y_{\chi,\infty} \left(\frac{m}{100 \text{ GeV}} \right). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Utilizando a Equação (4.16), temos:

$$\begin{aligned} \Omega_\chi h^2 &\simeq \frac{8.5 \times 10^{-11} x_f \text{ GeV}^{-2}}{\sqrt{g_*(x_f)} (a + 3b/x_f)} \\ &\simeq 0.2 \left(\frac{a + 3b/x_f}{1 \times 10^{-9} \text{ GeV}^{-2}} \right)^{-1} \left(\frac{x_f}{22} \right) \left(\frac{g_*(x_f)}{90} \right)^{-1/2} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Como na estimativa da seção anterior, a densidade de relíquia da partícula é inversamente proporcional à seção de choque de aniquilação e não há dependência explícita na massa da partícula. Assim, calcular as seções de choque e a temperatura de congelamento é suficiente para prever a densidade de relíquia.

O congelamento ocorre quando o desvito Δ é da mesma ordem que o valor de equilíbrio:

$$\Delta(x_f) = CY_{\chi,eq}(x_f), \quad (4.20)$$

onde C é uma constante numérica. Substituindo a solução para $x \ll x_f$ (4.14), x_f é obtido resolvendo iterativamente a expressão:

$$x_f = \ln \frac{0.382CmM_{Pl}g_\chi(a + 6b/x_f)}{\sqrt{x_f g_*(x_f)}}. \quad (4.21)$$

Sabe-se que se escolhermos $C = \sqrt{2} - 1$ [11], a fórmula padrão (4.19) fornece uma boa aproximação de resultados numéricos exatos para a densidade de relíquia. A temperatura de desacomplamento depende logarithmicamente da seção de choque e normalmente $x_f \simeq 22$. A Figura 4.2 mostra uma solução numérica para $m = 100$ GeV, $g_\chi = 2$, $g_* = 90$ (constante), $a = 1 \times 10^{-8} \text{GeV}^{-2}$ e $b = 0$. Vemos que o congelamento ocorreu em torno de $x_f = 22$ e após esse ponto a abundância de relíquia permanece aproximadamente constante, como discutido anteriormente.

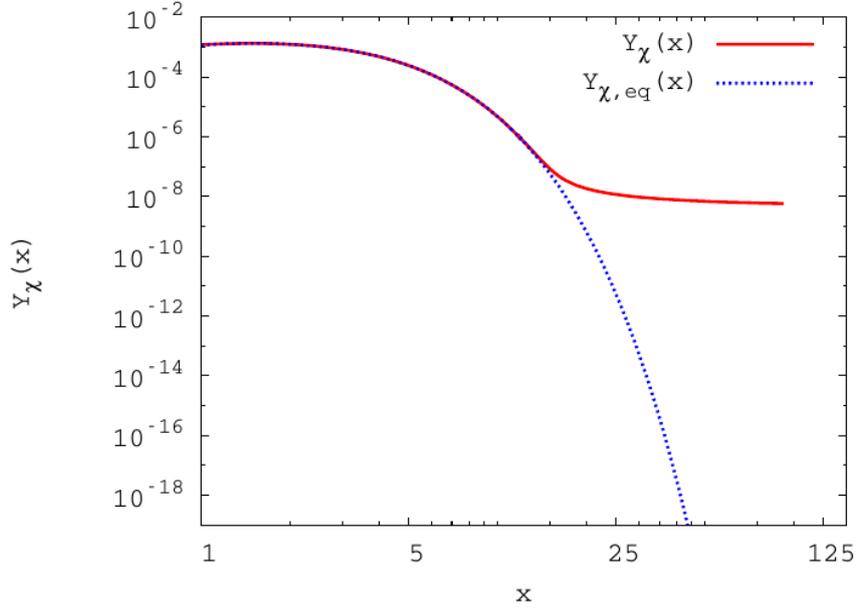


Figura 4.2: Evolução de Y_χ (curva sólida vermelha) e $Y_{\chi,eq}$ (curva pontilhada azul) como função de x para $m = 100$ GeV, $g_\chi = 2$, $g_* = 90$ (constante), $a = 1 \times 10^{-8} \text{GeV}^{-2}$ e $b = 0$ [11].

Como normalmente a escala de massa das WIMPs está em torno da escala fraca ($m_\chi \sim 100$ GeV), a seção de choque de aniquilação é $\langle\sigma v\rangle = \pi\alpha^2/m_\chi \sim 10^{-19} \text{GeV}^{-2}$. Pela Equação (4.19) vemos que a densidade de relíquia prevista Ωh^2 é consistente com a densidade de energia observada da matéria escura fria $\Omega_{DM} h^2$ [19]

$$\Omega_{DM} h^2 = 0.1188 \pm 0.0010. \quad (4.22)$$

4.2.1 Discussão

A solução aproximada dada pela Equação (4.19) não se aplica em pelo menos três casos [3].

O primeiro caso ocorre quando a aniquilação acontece perto de um pólo na seção de choque. Nesse caso a expansão não-relativística (4.10) não é válida.

O segundo caso ocorre quando a partícula está perto de um limiar de massa. A aniquilação em partículas mais pesadas do que as partículas de relíquia foi considerada proibida cinematicamente, mas se a diferença é $\sim 5-15\%$, esses canais "proibidos" podem dominar a seção de choque e determinar a abundância de relíquia.

O terceiro caso, chamado de *coaniquilação*, ocorre quando outra partícula é levemente mais pesada do que a WIMP e compartilha um número quântico com ela. Nesse caso, a conversão da WIMP na partícula mais pesada pode ocorrer através de espalhamento de partículas do modelo padrão. Se a seção de choque para aniquilação da partícula mais pesada for maior do que a da WIMP, então a abundância de ambas as espécies vai ser controlada pela aniquilação da partícula mais pesada e mais fortemente interagente e a abundância de relíquia pode ser reduzida.

Outros fatores também merecem atenção. Por exemplo, a WIMP poderia aniquilar com a partícula mais pesada, caso em que essa reação poderia determinar a abundância de relíquia. Em modelos supersimétricos, por exemplo, se a WIMP é um neutralino e há um *squark* com uma massa que excede apenas ligeiramente a massa do neutralino, então irá ocorrer coaniquilação. A abundância vai ser controlada pela aniquilação de squarks e vai ser menor do que o sugerido nesta seção. Geralmente, se há partículas adicionais com massas dentro de 10% da massa da WIMP ocorrerá coaniquilação e outro cálculo precisa ser feito, o qual apresentamos no Apêndice A.

Esses efeitos ocasionados por coaniquilações, ressonâncias e massas próximas de limiares são dependentes do modelo, de modo que não há maneira simples de generalizar os nossos resultados. Uma análise numérica mais detalhada para modelos específicos é necessária nesses cenários [16]. Além disso, no caso de uma expansão cosmológica diferente da padrão ou uma relíquia não-termal é necessário um tratamento separado [13].

Além disso, usamos na nossa análise que a WIMP é um férmion de Majorana, de modo que χ e $\bar{\chi}$ são indistinguíveis. Contudo, se χ é um férmion de Dirac, $\chi \neq \bar{\chi}$ e g_χ é duplicado. Nesse caso e com simetria partícula-antipartícula, a abundância de relíquia é a metade da anterior. Isso apenas aumenta por um fator de 2 o valor exigido de $\langle\sigma v\rangle$ [steigSteigman:2012nb].

Outra suposição importante da nossa análise é a de que a entropia é conservada no período relevante da evolução do Universo. Para isso, precisamos supor que a transição eletrofraca é no máximo uma transição de fase de segunda ordem, ou seja, não gera entropia. Contudo, se ela for de primeira ordem e acompanhada por um período inflacionário, então o cálculo da abundância irá depender da temperatura de "reaquecimento" (T_R) e as relíquias termais serão ausentes ou suprimidas se $T_R < m_\chi$ [16].

5 Conclusões

A presença de uma grande proporção de matéria escura atualmente pode ser explicada pela existência de uma nova partícula, estável em escalas cosmológicas e que interage fracamente com partículas do modelo padrão. A termodinâmica nos permite modelar condições no Universo primordial e fazer previsões sobre abundâncias de relíquia de partículas de matéria escura. Os modelos para essas partículas são interessantes porque, apesar da sua simplicidade, produzem abundâncias de matéria escura consistentes com o intervalo fornecido por medidas cosmológicas.

Com mais dados, como aqueles provenientes de raios gama de Via Láctea, galáxias anãs e aglomerados, além dos resultados do Fermi-LAT, podemos esperar restrições maiores nos modelos para matéria escura, assim como mais informações sobre a região de pequenas massas.

Nas últimas décadas a Cosmologia teve um período de grande crescimento, gerando uma rede de testes que estabelecem persuasivamente a matéria escura no cânone da Física [20]. Esses avanços nos deixaram muitas oportunidades para explorar o setor escuro, de modo que outros períodos de grande crescimento ocorrerão, assim como um cenário mais claro para a matéria escura.

A Equação de Boltzmann com Coaniquilações

Revisaremos aqui a derivação de Griest e Seckel [3] para o caso em que há coaniquilações. Nesse caso, que vale para partículas supersimétricas (e.g. neutralino), quatro processos precisam ser incluídos na formulação da equação de Boltzmann: 1) a expansão do Universo; 2) coaniquilações (quando duas partículas supersimétricas se aniquilam para criar partículas do modelo padrão); 3) decaimento da partícula em questão; 4) espalhamento com o fundo térmico.

Considere a aniquilação de N partículas supersimétricas χ_i ($i = 1, \dots, N$) com massas m_i e graus internos de liberdade (pesos estatísticos) g_i . Assumimos que $m_1 \leq m_2 \leq m_3 \leq \dots \leq m_{N-1} \leq m_N$ e que a partícula mais leve está protegida contra decaimentos devido a alguma simetria (como conservação da paridade-R ou paridade-KK para neutralinos). Utilizando m_χ para a massa do neutralino mais leve e n_i para a densidade numérica da partícula i , a equação de Boltzmann fica:

$$\begin{aligned} \frac{dn_i}{dt} = & -3Hn_i - \sum_{j=1}^N \langle \sigma_{ij} v_{ij} \rangle (n_i n_j - n_{i,eq} n_{j,eq}) \\ & - \sum_{j \neq i} [\langle \sigma'_{Xij} v_{ij} \rangle (n_i n_X - n_{i,eq} n_{X,eq}) - \langle \sigma'_{Xij} v_{ij} \rangle (n_j n_X - n_{j,eq} n_{X,eq})] \\ & - \sum_{j \neq i} [\Gamma_{ij}(n_i - n_{i,eq}) - \Gamma_{ji}(n_j - n_{j,eq})]. \end{aligned} \tag{A.1}$$

O primeiro termo no lado direito corresponde à diluição devido à expansão do Universo e H é o parâmetro de Hubble. O segundo termo descreve aniquilações $\chi_i \chi_j$, cuja seção de choque total de aniquilação é

$$\sigma_{ij} = \sum_X \sigma(\chi_i \chi_j \rightarrow X). \tag{A.2}$$

O terceiro termo descreve as conversões $\chi_i \rightarrow \chi_j$ pelo espalhamento com o fundo térmico:

$$\sigma_{Xij} = \sum_Y \sigma(\chi_i X \rightarrow \chi_j Y). \tag{A.3}$$

O quarto termo descreve decaimentos χ_i , com taxas de decaimento:

$$\Gamma_{ij} = \sum_X \Gamma(\chi_i \rightarrow \chi_j X). \tag{A.4}$$

Nas expressões anteriores X e Y denotam grupos de partículas do modelo padrão envolvidas nas interações. A velocidade relativa é definida por:

$$v_{ij} = \frac{\sqrt{(\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j)^2 - m_i^2 m_j^2}}{E_i E_j} \quad (\text{A.5})$$

onde \mathbf{p}_i é o quadrimomento e E_i é a energia. Lembrando a densidade numérica no equilíbrio (3.3),

$$n_{i,eq} = \frac{g_i}{(2\pi)^3} \int f_i d^3 \mathbf{p}_i, \quad (\text{A.6})$$

onde \mathbf{p}_i é o trimomento e f_i é a já mencionada função de distribuição, que pode ser aproximada por $f_i = e^{-E_i/T}$ (Maxwell-Boltzmann).

A média termal $\langle \sigma_{ij} v_{ij} \rangle$ é definida com as distribuições de equilíbrio:

$$\langle \sigma_{ij} v_{ij} \rangle = \frac{\int f_i f_j \sigma_{ij} v_{ij} d^3 \mathbf{p}_i d^3 \mathbf{p}_j}{\int f_i f_j d^3 \mathbf{p}_i d^3 \mathbf{p}_j}. \quad (\text{A.7})$$

A taxa de decaimento das partículas supersimétricas χ_i (com exceção da mais leve, que é estável) é muito mais rápida que a idade do Universo. Como supomos conservação de paridade- R , todas essas partículas decaem para a mais leve (neutralino). Então a abundância final é descrita pela soma das densidades de todas as partículas supersimétricas:

$$n = \sum_{i=1}^N n_i, \quad (\text{A.8})$$

de modo que a equação de Boltzmann fica:

$$\frac{dn}{dt} = -3Hn - \sum_{i,j=1}^N \langle \sigma_{ij} v_{ij} \rangle (n_i n_j - n_{i,eq} n_{j,eq}), \quad (\text{A.9})$$

onde o terceiro e o quarto termos em (A.1) são anulados. Isso faz sentido porque as conversões e decaimentos de partículas supersimétricas não afetam a abundância geral de partículas e portanto não contribuem para dn/dt .

A taxa de espalhamento de partículas supersimétricas com as partículas do fundo térmico é muito mais rápida do que a sua taxa de aniquilação porque as seções de choque de espalhamento σ'_{Xij} são da mesma ordem de magnitude que as seções de choque de aniquilação σ_{ij} . Mas a densidade n_X das partículas de fundo é muito maior do que cada uma das densidades n_i das partículas supersimétricas quando aquelas são relativísticas e estas são não-relativísticas e logo são suprimidas pelo fator de Boltzmann. Nesse caso,

as distribuições de χ_i permanecem em equilíbrio térmico e as razões entre elas são iguais aos valores no equilíbrio:

$$\frac{n_i}{n} \approx \frac{n_{i,eq}}{n_{eq}}. \quad (\text{A.10})$$

Então temos:

$$\frac{dn}{dt} = -3Hn - \langle \sigma_{efv} \rangle (n^2 - n_{eq}^2), \quad (\text{A.11})$$

onde $\langle \sigma_{efv} \rangle$ é média termal da seção de choque efetiva de aniquilação:

$$\langle \sigma_{efv} \rangle = \sum_{ij} \langle \sigma_{ij} v_{ij} \rangle \frac{n_{i,eq}}{n_{eq}} \frac{n_{j,eq}}{n_{eq}}. \quad (\text{A.12})$$

A Equação (A.11) está agora na forma da equação padrão (4.2) e pode ser resolvida utilizando técnicas similares. A solução completa depende da definição de um modelo supersimétrico e do cálculo da média termal efetiva $\langle \sigma_{efv} \rangle$, o que está além do escopo deste trabalho. Um tratamento detalhado é dado em [5] e [8].

Referências

- ¹E. Kolb e M. Turner, *The early universe* (Addison-Wesley, 1990).
- ²P. Gondolo e G. Gelmini, “Cosmic abundances of stable particles: Improved analysis”, Nucl. Phys. **B360**, 145–179 (1991).
- ³K. Griest e D. Seckel, “Three exceptions in the calculation of relic abundances”, Phys. Rev. **D43**, 3191–3203 (1991).
- ⁴G. Jungman, M. Kamionkowski e K. Griest, “Supersymmetric dark matter”, Phys. Rept. **267**, 195–373 (1996).
- ⁵J. Edsjo e P. Gondolo, “Neutralino relic density including coannihilations”, Phys. Rev. **D56**, 1879–1894 (1997).
- ⁶S. Dodelson, *Modern cosmology* (Elsevier Science, 2003).
- ⁷B. Ryden, *Introduction to cosmology* (Addison-Wesley, 2003).
- ⁸M. Schelke, “Supersymmetric dark matter : aspects of sfermion coannihilations”, tese de doutorado (Stockholm University, Department of Physics, 2004), p. 157.
- ⁹G. Bertone, D. Hooper e J. Silk, “Particle dark matter: Evidence, candidates and constraints”, Phys. Rept. **405**, 279–390 (2005).
- ¹⁰G. B. Gelmini e P. Gondolo, “Neutralino with the right cold dark matter abundance in (almost) any supersymmetric model”, Phys. Rev. **D74**, 023510 (2006).
- ¹¹W. Yimingniyazi, *Relic abundance of wimps in non-standard cosmological scenarios* (Physikalisches Inst., 2007).
- ¹²O. Elgaroy, *Ast4220: cosmology i*, Lectures, 2009.
- ¹³J. L. Feng, “Non-WIMP Candidates”, (2010).
- ¹⁴G. B. Gelmini, “Theory of Dark Matter”, em In *Hamburg 2010, Physics at the LHC 2010* 261-266 (2010), pp. 261–266.
- ¹⁵E. Komatsu et al., “Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Interpretation”, *Astrophys. J. Suppl.* **192**, 18 (2011).
- ¹⁶G. Steigman, B. Dasgupta e J. F. Beacom, “Precise Relic WIMP Abundance and its Impact on Searches for Dark Matter Annihilation”, Phys. Rev. **D86**, 023506 (2012).
- ¹⁷D. Bauman, *Cosmology*, Lectures, 2013.

- ¹⁸I. Gradshteyn e I. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products* (Elsevier Science, 2014).
- ¹⁹P. A. R. Ade et al., “Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters”, (2015).
- ²⁰P. J. E. Peebles, “Dark matter”, *Proceedings of the National Academy of Sciences* **112**, 12246–12248 (2015).
- ²¹M. Roos, *Introduction to cosmology* (Wiley, 2015).