

UM MODELO MATEMÁTICO  
PARA O CONTROLE  
DE POLUIÇÃO DAS ÁGUAS

Francisco das Chagas de Oliveira Cardoso

UM MODELO MATEMÁTICO  
PARA O CONTROLE  
DE POLUIÇÃO DAS ÁGUAS

Francisco das Chagas de Oliveira Cardoso

Tese apresentada ao Corpo Docente do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para a obtenção do título de "MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL".

Porto Alegre  
Estado do Rio Grande do Sul - Brasil  
Novembro/1980

Esta tese foi julgada adequada para a obtenção do título de "MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL" e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pelo Curso de Pós-Graduação.



---

Prof. Armando Miguel Awruch  
Orientador



---

Prof. José S. Gomes Franco  
Coordenador do Curso

## AGRADECIMENTOS

Ao Professor Armando Miguel Awruch pela dedicação e apoio na orientação deste trabalho.

Ao Professor Paul William Partridge por seu interesse e incentivo.

Ao Conselho de Implantação do Polo Petroquímico do Estado do Rio Grande do Sul (CONPETRO) pela colaboração prestada.

Aos Órgãos que proporcionaram o apoio financeiro.

Ao Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, na pessoa do seu coordenador Professor José S. Gomes Franco, pelo incentivo e apoio dados no transcorrer do curso.

A todos os professores e funcionários que, direta ou indiretamente, colaboraram na efetivação deste trabalho.

Aos inesquecíveis colegas e amigos que de alguma forma colaboraram para a elaboração deste trabalho.

Ao colega Hélio Elarrat pela amizade e companheirismo.

À Sra. Carmen Rodrigues pelo cuidadoso trabalho de datilografia.

Este trabalho é dedicado  
a meus pais e irmãos.

## SINOPSE

Neste trabalho, apresenta-se um modelo matemático para problemas de dispersão em regime estacionário, cuja finalidade é estudar o controle de qualidade da água, isto é, determinar as concentrações de um poluente derivado de efluentes sujeitos ou não a restrições, de tal forma que estas concentrações sejam ou não limitadas por um valor previamente estabelecido, e que o custo de tratamento dos efluentes seja mínimo.

Para resolver o problema, utiliza-se a técnica dos elementos finitos para discretizar o modelo no espaço, podendo-se usar elementos quadráticos unidimensionais, elementos triangulares lineares e quadráticos, e elementos quadriláteros isoparamétricos lineares e quadráticos. A otimização do problema (minimização do custo de tratamento dos efluentes) é resolvida através da programação linear.

No final, são apresentados exemplos de aplicação do modelo e comentários sobre os resultados.

## SYNOPSIS

A mathematical model for steady state dispersion problems is presented.

The objective is to study the control of water quality, i.e. to determine the pollutente concentrations due to effluents. These concentrations may or may not be subject to restrictions in such a way that they may be limited by a previously established value, and that the cost of effluent treatment should be minimised.

The finite element technique is used for space discretization; one dimensional quadratic, two dimensional linear and quadratic triangular or linear isoparametric quadilateral elements may be employed. Problem optimization (minimization of the cost of effluent treatment) is solved by linear programming.

Finally practical examples and comments about the results are presented.

## SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	1
CAPÍTULO I	
ASPECTOS GERAIS SOBRE POLUIÇÃO HÍDRICA.....	3
1.1. Conceito.....	3
1.2. Origem.....	3
1.2.1. Poluição por fonte natural.....	3
1.2.2. Poluição por fonte térmica.....	4
1.2.3. Poluição através de esgotos domésticos.....	4
1.2.4. Poluição de resíduos industriais.....	5
1.3. A poluição hídrica.....	5
CAPÍTULO II	
DESENVOLVIMENTO DO MODELO MATEMÁTICO.....	8
2.1. Definição de modelo matemático de qualidade.....	8
2.2. Equação geral.....	8
2.2.1. Dispersão.....	9
2.2.2. Considerações sobre cargas.....	9
2.2.3. Coeficiente de decaimento.....	10
2.3. Resolução da equação geral.....	10
CAPÍTULO III	
APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS AOS PROBLEMAS DE CONTROLE DE QUALIDADE DE ÁGUA.....	23
3.1. O método dos elementos finitos.....	23
3.1.1. Introdução.....	23
3.1.2. Esquema computacional do método.....	23
3.2. Formulação de elementos finitos para o modelo matemático.....	25

## CAPÍTULO IV

APLICAÇÃO DA PROGRAMAÇÃO LINEAR AOS PROBLEMAS DE CONTROLE DE QUALIDADE DE ÁGUA.....	28
4.1. Considerações sobre programação linear.....	28
4.2. Resolução do problema através da formulação de elementos finitos e programação linear...	29
4.3. Montagem do modelo linear.....	31

## CAPÍTULO V

ASPECTOS COMPUTACIONAIS DO PROBLEMA.....	34
5.1. Características gerais do programa.....	34
5.1.1. Primeira etapa de programação.....	34
5.1.1.1. Definição da malha de elementos finitos.....	34
5.1.1.2. Descrição das caracterís <u>t</u> ticas do problema.....	34
5.1.2. Segunda etapa de programação.....	36

## CAPÍTULO VI

EXEMPLOS E COMENTÁRIOS.....	39
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	73
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	74

## INTRODUÇÃO

A poluição é um fenômeno conhecido de muito tempo. Contudo, os perigos que ela traz agravaram-se com o início da era industrial, visto que a solução encontrada para afastar os resíduos das indústrias foi despejá-los nos cursos d'água mais próximos, sem que houvesse qualquer preocupação quanto à preservação do meio ambiente. O resultado de tudo isto reflete até hoje, pois somente nesta última década é que o homem passou a se conscientizar dos problemas que ele mesmo provocou.

A poluição pode ser encarada de várias formas e o especialista, ao enfrentá-la, vê somente uma delas.

Para o homem comum, o fator preponderante é o aspecto estético, isto é, água poluída é aquela que se apresenta suja, principalmente pela presença de substâncias putrefeitas e mal cheirosas. Já entre os sanitaristas, o aspecto estético é deixado em segundo plano, e o fator prioritário passa a ser os problemas que a poluição pode causar à vida, ou sejam, a transmissão de doenças, principalmente pela presença de coliformes fecais, compostos ou elementos químicos tóxicos e outros tipos de substâncias que também se encontram nos meios hídricos e são prejudiciais à vida.

Uma ferramenta útil e indispensável ao correto manejo dos recursos hídricos são os modelos matemáticos, que com o surgimento dos computadores passaram a ser largamente utilizados, visto que as decisões após o uso do modelo têm uma boa probabilidade de acerto.

Neste trabalho, apresenta-se um modelo matemático para problemas de dispersão em regime estacionário, e que é resolvido através do uso de computador, uma vez que

as equações representadas pelo modelo são de difícil solução analítica.

O programa computacional desenvolvido é baseado na técnica dos elementos finitos e na programação linear, sendo que o controle de qualidade que este realiza é válido para concentrações de coliformes fecais, demanda bioquímica de oxigênio, oxigênio dissolvido, salinidade e temperatura.

No primeiro capítulo, mostram-se alguns aspectos sobre poluição hídrica, isto é, conceito, origem e rápida noção sobre certos tipos de poluentes.

No segundo capítulo, realiza-se o desenvolvimento do modelo matemático para o cálculo de concentração de coliformes. Para os outros tipos de concentrações, este desenvolvimento é omitido, uma vez que é feito de maneira análoga ao realizado para coliformes.

O terceiro capítulo consiste na formulação de elementos finitos para o modelo matemático obtido no capítulo 2. Neste capítulo, mostra-se ainda um pequeno resumo a respeito do método dos elementos finitos.

No quarto capítulo, mostra-se como é introduzida a programação linear para problemas de controle de qualidade de água.

No quinto capítulo, apresenta-se o desenvolvimento do programa computacional, isto é, linguagem de codificação, comentários sobre os sistemas HYDRO e TEMPO, além de algumas orientações a respeito do uso do programa.

O sexto capítulo constitui-se de exemplos de aplicação do modelo e comentários a respeito dos resultados obtidos.

## CAPÍTULO I

### ASPECTOS GERAIS SOBRE POLUIÇÃO HÍDRICA

Serão mostrados, aqui, alguns aspectos sobre poluição hídrica [15] tais como, conceito, origem e tipos de poluentes.

#### 1.1. CONCEITO

De acordo com a concepção moderna, poluir não é apenas sujar ou manchar. Este conceito tornou-se mais geral, abrangendo os sentidos de contaminar, infectar, enfim provocar qualquer tipo de alteração nas propriedades físicas, químicas ou biológicas da água, de maneira que cause certos tipos de problema como:

- a) condições prejudiciais à saúde;
- b) prejuízo à flora e fauna aquática;
- c) prejuízo à água em sua utilização, quer seja doméstica, industrial ou recreacional.

#### 1.2. ORIGEM

A poluição hídrica pode ser originada dos seguintes tipos de fonte:

- Natural
- Térmica
- Esgotos Domésticos
- Resíduos Industriais

##### 1.2.1. POLUIÇÃO POR FONTE NATURAL

Este tipo de poluição se faz presente desde que

animais e plantas apareceram na terra, visto que todo meio hídrico sempre apresentou detritos de origem orgânica e mineral.

Neste tipo de poluição, o homem tem certa parcela de contribuição, pois agindo de maneira inadvertida, como no caso da derrubada em demasia de florestas, provoca um aumento do volume d'água de rolamento, e consequentemente um maior arraste de elementos poluidores para os meios hídricos.

### 1.2.2. POLUIÇÃO POR FONTE TÉRMICA

Ocorre geralmente em locais onde indústrias contribuem com efluentes em altas temperaturas.

Este aumento de temperatura pode provocar a morte de várias espécies de peixes, destruir o alimento natural da fauna aquática, e também pode contribuir para o desenvolvimento de seres termófilos que consumam todo o oxigênio disponível, destruindo então as outras espécies.

O grande problema causado pela poluição térmica é que o meio líquido aquecido possui menos oxigênio do que o líquido frio. Logo, a fuga dos gases aquecidos para a atmosfera provoca uma queda no teor de oxigênio dissolvido existente, fato que é suficiente para matar boa parcela da fauna e flora aquáticas. A quantidade de oxigênio que foge para a atmosfera é denominada demanda térmica de oxigênio (DTO).

### 1.2.3. POLUIÇÃO ATRAVÉS DE ESGOTOS DOMÉSTICOS

É a poluição que mais chama a atenção, visto que está mais diretamente ligada ao leigo.

Este tipo de poluição constitui-se de matéria orgânica

gânica, sais minerais, sabões, detergentes e contaminantes de origem biológica denominados de coli-bacilos, que se encontram nos esgotos sob forma de detritos humanos e águas servidas.

Um dos grandes prejuízos causados pela presença de matéria orgânica em um meio hídrico é que esta possui a capacidade de reduzir bastante o teor de oxigênio dissolvido existente, e às vezes até eliminá-lo, causando então os mesmos males já mostrados no item (1.2.2).

#### 1.2.4. POLUIÇÃO DE RESÍDUOS INDUSTRIAIS

Nos meios hídricos, os resíduos industriais apresentam-se tanto sob a forma de matéria orgânica como de matéria mineral.

A matéria orgânica causa os mesmos problemas gerados pela poluição de esgotos domésticos, enquanto que a matéria mineral, além de causar estes problemas, pode também transformar-se em substâncias tóxicas bastante maléficas à vida.

#### 1.3. A POLUIÇÃO HÍDRICA

É a poluição encontrada com maior frequência no globo terrestre, uma vez que é muito difícil ser encontrado um meio hídrico que não contenha pelo menos um pequeno número de agentes poluidores.

Nos meios hídricos, a quantidade de oxigênio dissolvido é muito pequena, sendo da ordem de oito partes por milhão (8 ppm). Como o oxigênio é o elemento fundamental para que haja vida, torna-se necessário que para uma certa quantidade de água, seja admitida apenas uma certa quantidade de habitantes, de maneira que o teor de oxigênio dissolvido ali existente, satisfaça as necessidades mínimas.

Vários são os motivos que contribuem para a diminuição do teor de oxigênio dissolvido. Esta diminuição, com o passar do tempo, pode chegar a um valor mínimo denominado ponto crítico e, em seguida, crescer até atingir novamente o seu estado natural.

Se num meio hídrico ocorrer o despejo de esgotos que contenham somente matéria orgânica morta, não implica que a partir deste fato o meio tornou-se poluído, pois foi apenas introduzido alimento a diversas formas primitivas de vida. O grande problema que este despejo pode causar, é que existem certos tipos de microorganismos que, através de sua alimentação, transformam a matéria orgânica morta em novos seres de sua espécie, os quais dependem do oxigênio para respirar, razão pela qual são denominados aeróbios.

A relação entre o volume de oxigênio necessário para a respiração dos aeróbios e a quantidade de oxigênio dissolvido permite afirmar se há ou não poluição orgânica em uma certa área. Se o consumo por parte dos aeróbios for de tal modo que haja sobra de oxigênio dissolvido, e que esta sobra seja suficiente à vida dos seres aquáticos, então não há poluição orgânica. Caso contrário, tem-se a poluição declarada.

Denomina-se demanda bioquímica de oxigênio (DBO) a quantidade de oxigênio que é transformado em gás carbônico pelos aeróbios. Esta quantidade é medida em partes por milhão (ppm), ou miligramas por litro (mg/l), e é proporcional à matéria orgânica despejada em um meio hídrico. Assim sendo, com o consumo extra de oxigênio dissolvido, ocorre uma depressão em seu teor, e dependendo do grau desta depressão e do uso que se fará da água, poderá o ambiente ser considerado poluído ou não. Esta verificação é feita através da relação entre o teor de oxigênio dissolvido

e a quantidade de DBO introduzida em um meio hídrico. Quando a DBO é superior ao oxigênio dissolvido, ocorre a extinção do oxigênio do meio, causando a morte de toda a fauna aquática, inclusive dos próprios aeróbios.

de coliformes;

$V_x, V_y$  = velocidades da água nas direções x e y respectivamente;

$K_{xx}, K_{yy}, K_{xy}, K_{yx}$  = coeficientes de dispersão;

Q = cargas atuantes no meio hídrico, isto é, fontes descarregadas ou sumidouros que atuam no meio hídrico;

$\beta$  = coeficiente de decaimento;

x, y = eixos coordenados.

### 2.2.1. DISPERSÃO

Dispersão é o deslocamento de um poluente caracterizado pela tendência de uniformização da concentração entre dois compartimentos adjacentes.

Os coeficientes  $K_{xx}$ ,  $K_{yy}$ ,  $K_{xy}$  e  $K_{yx}$  são calculados através das seguintes expressões:

$$K_{xx} = DL \cos^2 \alpha + DT \sin^2 \alpha \quad (2.2.1a)$$

$$K_{yy} = KL \sin^2 \alpha + DT \cos^2 \alpha \quad (2.2.1b)$$

$$K_{xy} = K_{yx} = (DL - DT) \sin \alpha \cos \alpha \quad (2.2.1c)$$

$$\alpha = \text{ARC TAN } V_y / V_x \quad (2.2.1d)$$

onde

DL = coeficiente de dispersão no sentido do fluxo;  
DT = coeficiente de dispersão no sentido normal ao fluxo;

$\alpha$  = ângulo que a direção do fluxo forma com o sentido positivo do eixo x.

### 2.2.2. CONSIDERAÇÕES SOBRE CARGAS

Todas as contribuições para um corpo d'água capazes de conter certa concentração são consideradas cargas,

desde que a vazão introduzida seja muito pequena em relação à vazão do corpo receptor.

### 2.2.3. COEFICIENTE DE DECAIMENTO

Coeficiente de decaimento  $\tilde{e}$  é a taxa de redução bacteriana calculada a partir da determinação do  $T_{90}$ , isto é, do tempo necessário para o desaparecimento de 90% da população bacteriana inicial.

### 2.3. RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO GERAL

As velocidades  $V_x$  e  $V_y$  que aparecem na equação (2.2.1), podem ser expressas em função das derivadas de seus campos de deslocamentos ( $U_x$  e  $U_y$ ) em relação ao tempo, isto é:

$$V_x = \frac{\partial U_x}{\partial t} \quad (2.3.1a)$$

$$V_y = \frac{\partial U_y}{\partial t} \quad (2.3.1b)$$

Analisando-se a expressão  $\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y}$ , obtém-se:

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial U_x}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial U_y}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (2e_v) \quad (2.3.2)$$

onde

$e_v$  = deformação volumétrica do meio. Como o meio em estudo é a água, que é incompressível,

tem-se:

$$e_v = 0 \quad (2.3.3)$$

Assim sendo, pode-se afirmar que:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (2.3.4)$$

A expressão (2.3.4) é denominada Equação da Continuidade para Fluidos.

De posse da expressão (2.3.4), pode-se escrever a equação (2.2.1) na forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (v_x C) + \frac{\partial}{\partial y} (v_y C) - \frac{\partial}{\partial x} (K_{xx} \frac{\partial C}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial y} (K_{yy} \frac{\partial C}{\partial y}) - \frac{\partial}{\partial x} (K_{yx} \frac{\partial C}{\partial y}) - \\ - \frac{\partial}{\partial y} (K_{xy} \frac{\partial C}{\partial x}) - Q + \beta C = 0 \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

Aplicando-se o teorema de Leibnitz e as condições cinemáticas de contorno para integrar (2.3.5) com respeito à profundidade total (H), resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (H v_x C) + \frac{\partial}{\partial y} (H v_y C) - \frac{\partial}{\partial x} (H K_{xx} \frac{\partial C}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial y} (H K_{yy} \frac{\partial C}{\partial y}) - \frac{\partial}{\partial x} (H K_{yx} \frac{\partial C}{\partial y}) - \\ - \frac{\partial}{\partial y} (H K_{xy} \frac{\partial C}{\partial x}) - H Q + H \beta C = 0 \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

A solução da equação (2.3.6) será encontrada em

forma numérica. Para levá-la a uma forma integral, aplica-se o método de Galerkin, ou seja:

$$\int_A \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (H V_x C) + \frac{\partial}{\partial y} (H V_y C) - \frac{\partial}{\partial x} (H K_{xx} \frac{\partial C}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial y} (H K_{yy} \frac{\partial C}{\partial y}) - \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial x} (H K_{yx} \frac{\partial C}{\partial y}) - \frac{\partial}{\partial y} (H K_{xy} \frac{\partial C}{\partial x}) - H Q + H \beta C \right\} \delta C \, dA + \\ + \int_{S_q} H (\bar{q} - q_n) \delta C \, dS_q + \int_{S_C} H (\bar{C} - C) \delta C \, dS_C = 0 \quad (2.3.7)$$

onde

a parcela referente à integral ao longo de  $S_q$  equivale à condição natural de contorno, sendo que  $S_q$  é a parte do contorno com fluxo conhecido;

a parcela referente à integral ao longo de  $S_C$  equivale à condição essencial de contorno, sendo que  $S_C$  é a parte do contorno com concentração conhecida;

$\bar{C}$  = valor da concentração em  $S_C$ ;

$\bar{q}$  = valor do fluxo em  $S_q$ ;

$q_n$  = fluxo normal à superfície do contorno;

$A$  = domínio de integração da equação diferencial;

$\delta C$  = incremento de concentração.

Desenvolvendo-se os dois primeiros termos do integrando da expressão (2.3.7), obtêm-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (HV_x C) + \frac{\partial}{\partial y} (HV_y C) = C \left[ \frac{\partial}{\partial x} (HV_x) + \frac{\partial}{\partial y} (HV_y) \right] + \\ + (HV_x) \frac{\partial C}{\partial x} + (HV_y) \frac{\partial C}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

A parcela que está entre colchetes em (2.3.8) é a equação da continuidade integrada com respeito à profundidade total. Conseqüentemente, a expressão (2.3.7) toma a forma:

$$\begin{aligned} \int_A \left\{ HV_x \frac{\partial C}{\partial x} + HV_y \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} (HK_{xx} \frac{\partial C}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial y} (HK_{yy} \frac{\partial C}{\partial y}) - \frac{\partial}{\partial x} (HK_{yx} \frac{\partial C}{\partial y}) - \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial y} (HK_{xy} \frac{\partial C}{\partial x}) - HQ + H\beta C \right\} \delta C \, dA + \int_{Sq} H (\bar{q} - q_n) \delta C \, dSq + \\ + \int_{SC} H (\bar{C} - C) \delta C \, dSC = 0 \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

ou ainda:

$$\begin{aligned} \int_A \left\{ v_x \frac{\partial C}{\partial x} + v_y \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{1}{H} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (HK_{xx} \frac{\partial C}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (HK_{yy} \frac{\partial C}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial x} (HK_{yx} \frac{\partial C}{\partial y}) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial}{\partial y} (HK_{xy} \frac{\partial C}{\partial x}) \right] - Q + \beta C \right\} \delta C \, dA + \int_{Sq} (\bar{q} - q_n) \delta C \, dSq + \\ + \int_{SC} (\bar{C} - C) \delta C \, dSC = 0 \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

Aplicando-se o teorema de Gauss a cada uma das parcelas que estão entre colchetes na expressão (2.3.10), resulta:

$$\begin{aligned} \int_A \left[ \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial x} (HK_{xx} \frac{\partial C}{\partial x}) \delta C \right] dA &= \int_A \left[ \frac{\partial}{\partial x} (HK_{xx} \frac{\partial C}{\partial x}) \frac{\delta C}{H} \right] dA = \\ &= \int_{Sq} (K_{xx} \frac{\partial C}{\partial x} \delta C \alpha_{nx}) dSq - \int_A \left( \frac{\partial \delta C}{\partial x} K_{xx} \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x} \delta C \frac{K_{xx}}{H} \frac{\partial C}{\partial x} \right) dA \end{aligned} \quad (2.3.11a)$$

$$\begin{aligned} \int_A \left[ \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial y} (HK_{yy} \frac{\partial C}{\partial y}) \delta C \right] dA &= \int_{Sq} (K_{yy} \frac{\partial C}{\partial y} \delta C \alpha_{ny}) dSq - \\ &- \int_A \left( \frac{\partial \delta C}{\partial y} K_{yy} \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y} \delta C \frac{K_{yy}}{H} \frac{\partial C}{\partial y} \right) dA \end{aligned} \quad (2.3.11b)$$

$$\begin{aligned} \int_A \left[ \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial x} (HK_{yx} \frac{\partial C}{\partial y}) \delta C \right] dA &= \int_{Sq} (K_{yx} \frac{\partial C}{\partial y} \delta C \alpha_{nx}) dSq - \\ &- \int_A \left( \frac{\partial \delta C}{\partial x} K_{yx} \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial x} \delta C \frac{K_{yx}}{H} \frac{\partial C}{\partial y} \right) dA \end{aligned} \quad (2.3.11c)$$

$$\begin{aligned} \int_A \left[ \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial y} (HK_{xy} \frac{\partial C}{\partial x}) \delta C \right] dA &= \int_{Sq} (K_{xy} \frac{\partial C}{\partial x} \delta C \alpha_{ny}) dSq - \\ &- \int_A \left( \frac{\partial \delta C}{\partial y} K_{xy} \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial y} \delta C \frac{K_{xy}}{H} \frac{\partial C}{\partial x} \right) dA \end{aligned} \quad (2.3.11d)$$

onde

$\alpha_{nx}$ ,  $\alpha_{ny}$  = cossenos diretores das componentes das velocidades com respeito à normal ao contorno.

Substituindo-se as expressões (2.3.11) em (2.3.10), resulta:

$$\begin{aligned}
 & \int_A \left\{ v_x \frac{\partial C}{\partial x} \delta C + v_y \frac{\partial C}{\partial y} \delta C + K_{xx} \frac{\partial C}{\partial x} \frac{\partial \delta C}{\partial x} + K_{yy} \frac{\partial C}{\partial y} \frac{\partial \delta C}{\partial y} + \right. \\
 & + K_{xy} \frac{\partial C}{\partial x} \frac{\partial \delta C}{\partial y} + K_{yx} \frac{\partial C}{\partial y} \frac{\partial \delta C}{\partial x} - \frac{1}{H} \left( K_{xx} \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial C}{\partial x} \delta C + K_{yy} \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial C}{\partial y} \delta C + \right. \\
 & + K_{xy} \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial C}{\partial x} \delta C + K_{yx} \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial C}{\partial y} \delta C \left. \right\} - Q \delta C + \beta C \delta C \} dA - \\
 & - \int_{S_q} \left( K_{xx} \frac{\partial C}{\partial x} \alpha_{nx} + K_{yy} \frac{\partial C}{\partial y} \alpha_{ny} + K_{xy} \frac{\partial C}{\partial x} \alpha_{ny} + K_{yx} \frac{\partial C}{\partial y} \alpha_{nx} - \right. \\
 & \left. - \bar{q} + q_n \right) \delta C dS_q + \int_{S_C} (\bar{C} - C) \delta C dS_C = 0 \quad (2.3.12)
 \end{aligned}$$

Analisando-se a parcela referente à integral ao longo de  $S_q$  na expressão (2.3.12), e aplicando-se a lei de Ficks, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 & - \int_{S_q} \left( K_{xx} \frac{\partial C}{\partial x} \alpha_{nx} + K_{yy} \frac{\partial C}{\partial y} \alpha_{ny} + K_{xy} \frac{\partial C}{\partial x} \alpha_{ny} + K_{yx} \frac{\partial C}{\partial y} \alpha_{nx} - \bar{q} + q_n \right) \delta C dS_q = \\
 & = \int_{S_q} \left( -K_{nn} \frac{\partial C}{\partial n} + \bar{q} - q_n \right) \delta C dS_q = \int_{S_q} (q_n + \bar{q} - q_n) \delta C dS_q = \\
 & = \int_{S_q} \bar{q} \delta C dS_q \quad (2.3.13)
 \end{aligned}$$

Substituindo-se (2.3.13) em (2.3.12), chega-se à expressão de Galerkin a ser resolvida numericamente, que tem a forma:

$$\begin{aligned}
 & \int_A \left\{ v_x \frac{\partial C}{\partial x} \delta C + v_y \frac{\partial C}{\partial y} \delta C + K_{xx} \frac{\partial C}{\partial x} \frac{\partial \delta C}{\partial x} + K_{yy} \frac{\partial C}{\partial y} \frac{\partial \delta C}{\partial y} + \right. \\
 & + K_{xy} \frac{\partial C}{\partial x} \frac{\partial \delta C}{\partial y} + K_{yx} \frac{\partial C}{\partial y} \frac{\partial \delta C}{\partial x} - \frac{1}{H} \left[ K_{xx} \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial C}{\partial x} \delta C + \right. \\
 & \left. \left. + K_{yy} \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial C}{\partial y} \delta C + K_{xy} \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial C}{\partial x} \delta C + K_{yx} \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial C}{\partial y} \delta C \right] - \right. \\
 & \left. - Q \delta C + \beta C \delta C \right\} dA + \int_{S_q} \bar{q} \delta C dS_q + \int_{S_C} (\bar{C} - C) \delta C dS_C = 0
 \end{aligned}
 \tag{2.3.14}$$

A seguir, serão mostradas as expressões de Galerkin para outros tipos de poluentes.

#### a) TEMPERATURA

Para o cálculo de temperatura, deve-se levar em conta a influência das condições meteorológicas no contorno [18], isto é:

$$\begin{aligned}
 F(T, M) = & - F_s(M) + F_{sr}(M) - F_a(M) + F_{ar}(M) + F_w(T) \\
 & + F_1(T, M) + F_c(T, M)
 \end{aligned}
 \tag{2.3.15}$$

onde

- $F$  = fluxo de calor por unidade de comprimento em um sistema hídrico e atmosférico;
- $M$  = conjunto de condições meteorológicas que determinam o intercâmbio de calor entre água e atmosfera;
- $F_s$  = efeito da radiação solar que chega ao sistema;
- $F_{sr}$  = efeito da radiação solar refletida;
- $F_a$  = radiação atmosférica de ondas longas;
- $F_{ar}$  = radiação atmosférica de ondas longas refletidas;
- $F_w$  = radiação da água (ondas longas);
- $F_l$  = fluxo de calor latente;
- $F_c$  = fluxo de calor sensível.

Os valores dos parâmetros acima mencionados podem ser calculados através das seguintes fórmulas [18]:

$$F_s = (1 - 0,65 b^2) F_{so} \quad (2.3.15a)$$

$$F_{sr} = 0,06 F_s \quad (2.3.15b)$$

$$F_a = \varepsilon_a \sigma T_a^4 \quad (2.3.15c)$$

$$F_{ar} = 0,06 F_a \quad (2.3.15d)$$

$$F_w = 0,95 \sigma T^4 \quad (2.3.15e)$$

$$F_1 = \eta(w) [e_s(T) - e_a] \quad (2.3.15f)$$

$$F_c = \xi(w) [T - T_a] \quad (2.3.15g)$$

onde

$F_{s0}$  = radiação solar com céu limpo;

$b$  = proporção do céu coberto por nuvens;

$\epsilon_a$  = emissividade do ar ( $\epsilon_a = [0,74 + 0,0065 e_a] [1 + 0,17 b^2]$ ),  
sendo que  $e_a$  é o valor da umidade do ar;

$\sigma$  = constante de Stefan Boltzmann;

$\eta(w)$  = função que descreve a influência da velocidade do vento ( $w$ ) durante a evaporação. Em geral, " $\eta$ " é uma função linear de " $w$ ", do tipo  $\eta = a_1 + a_2 W$ , sendo  $a_1$  e  $a_2$  constantes conhecidas;

$e_s(T)$  = pressão de vapor de água à temperatura " $T$ ", podendo ser definida através da expressão exponencial:

$$e_s(T) = 0,75 e^{(54,721 - 6788,6 T^{-1} - 5,0016 \ln T)} \quad (2.3.16)$$

$T_a$  = temperatura na superfície do contorno;

$\xi(w)$  = função do vento, similar a  $\eta(w)$ .

Denominando-se  $\bar{F}(T, M)$  para o segundo membro da equação (2.3.15) tem-se, então, que para o cálculo de temperatura, a condição natural de contorno é dada por:

$$\int_{S_q} [\bar{F}(T, M) - F(T, M)] \delta T dS_q = 0 \quad (2.3.17)$$

A expressão de Galerkin para este caso tem a forma [7]:

$$\begin{aligned}
 & \int_A \left\{ v_x \frac{\partial T}{\partial x} \delta T + v_y \frac{\partial T}{\partial y} \delta T + K_{xx} \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial \delta T}{\partial x} + K_{yy} \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial \delta T}{\partial y} + K_{xy} \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial \delta T}{\partial y} + \right. \\
 & + K_{yx} \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial \delta T}{\partial x} - \frac{1}{H} \left[ K_{xx} \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} \delta T + K_{yy} \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} \delta T + K_{xy} \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} \delta T + \right. \\
 & \left. \left. + K_{yx} \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} \delta T \right] - Q \delta T + \beta T \delta T \right\} dA + \int_{S_q} \bar{F}(T, M) \delta T dS_q + \\
 & + \int_{S_T} (\bar{T} - T) \delta T dS_T = 0 \quad (2.3.18)
 \end{aligned}$$

## b) MODELO BIOQUÍMICO

Devido o processo de consumo de oxigênio ser bastante complexo, torna-se difícil a introdução de uma variável de estado para cada espécie de poluente.

O critério mais direto é postular a existência de reações químicas entre o oxigênio e a matéria orgânica oxidável, de modo que a grande variedade de componentes responsáveis pela degradação se reduza a um ou poucos tipos de substâncias oxidáveis, as quais passarão a ser tratadas como reativos fictícios. A quantidade destes reativos é melhor caracterizada pela quantidade de oxigênio necessário para sua completa oxidação bioquímica, sendo medida através da demanda bioquímica de oxigênio (DBO).

Como o processo de degradação é muito lento, torna-se conveniente observar o consumo de oxigênio em um período razoável (2 a 5 dias), e em seguida extrapolar estes valores para que seja estimada a DBO.

O modelo bioquímico mais usado é o de Streeter-Phelps [7] [18], que descreve o processo por meio de duas variáveis (demanda bioquímica de oxigênio e oxigênio dissolvido), cuja expressão de Galerkin tem a forma:

$$\begin{aligned}
 & \int_A \left\{ v_x \frac{\partial OD}{\partial x} \delta OD + v_y \frac{\partial OD}{\partial y} \delta OD + K_{xx} \frac{\partial OD}{\partial x} \frac{\partial \delta OD}{\partial x} + K_{yy} \frac{\partial OD}{\partial y} \frac{\partial \delta OD}{\partial y} + \right. \\
 & + K_{xy} \frac{\partial OD}{\partial x} \frac{\partial \delta OD}{\partial y} + K_{yx} \frac{\partial OD}{\partial y} \frac{\partial \delta OD}{\partial x} - \frac{1}{H} \left[ K_{xx} \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial OD}{\partial x} \delta OD + \right. \\
 & \left. \left. + K_{yy} \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial OD}{\partial y} \delta OD + K_{xy} \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial OD}{\partial x} \delta OD + K_{yx} \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial OD}{\partial y} \delta OD \right] - \right. \\
 & \left. - Q \delta OD - \beta_2 (OD_{sat} - OD) \delta OD + \beta_1 DBO \delta OD \right\} dA + \\
 & + \int_{S_q} \bar{q} \delta OD dS_q + \int_{S_{OD}} (\bar{OD} - OD) \delta OD dS_{OD} = 0 \quad (2.3.19)
 \end{aligned}$$

onde

$\beta_1$  = coeficiente de degradação ou desoxigenação;

$\beta_2$  = coeficiente de rearação ou reoxigenação;

OD = concentração de oxigênio dissolvido;

$OD_{sat}$  = concentração de saturação;

DBO = concentração de demanda bioquímica de oxigênio;

$(OD_{sat} - OD)$  = déficit de oxigênio.

Os parâmetros  $\beta_1$  e  $OD_{sat}$  podem ser calculados em função da temperatura, ( $^{\circ}C$ ) através das seguintes expressões [18]:

$$OD_{sat}(T) = 14.54 - 0.39 T + 0.01 T^2 \quad (2.3.20)$$

$$\beta_1(T) = \beta_1(20^{\circ}) (1.07)^{(T - 20^{\circ})} \quad (2.3.21)$$

Se as medidas de DBO são tomadas em um tempo razoável, pode-se assumir uma relação matemática de modo que extrapole estes valores, por exemplo [18]:

$$DBO_{\theta} = (1 - e^{-\beta_L \theta}) DBO \quad (2.3.22)$$

onde

$DBO_{\theta}$  = concentração de demanda bioquímica de oxigênio no período  $\theta$ ;

$\beta_L$  = coeficiente de decaimento da DBO, determinada por meio de testes de laboratório.

Assim sendo, o termo  $(\beta_1 DBO \delta OD dA)$  que aparece na expressão (2.3.19) é substituído por  $(\frac{\beta_1 DBO_{\theta}}{1 - e^{-\beta_L \theta}} \delta OD dA)$ .

A expressão de Galerkin para o cálculo de  $DBO_{\theta}$  tem a forma [7]:

$$\int_A \left\{ v_x \frac{\partial DBO_{\theta}}{\partial x} \delta DBO_{\theta} + v_y \frac{\partial DBO_{\theta}}{\partial y} \delta DBO_{\theta} + K_{xx} \frac{\partial DBO_{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta DBO_{\theta}}{\partial x} + \right. \\ \left. + K_{yy} \frac{\partial DBO_{\theta}}{\partial y} \frac{\partial \delta DBO_{\theta}}{\partial y} + K_{xy} \frac{\partial DBO_{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta DBO_{\theta}}{\partial y} + K_{yx} \frac{\partial DBO_{\theta}}{\partial y} \frac{\partial \delta DBO_{\theta}}{\partial x} - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{H} \left[ K_{xx} \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial DBO_{\theta}}{\partial x} \delta DBO_{\theta} + K_{yy} \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial DBO_{\theta}}{\partial y} \delta DBO_{\theta} + \right. \\
& \left. + K_{xy} \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial DBO_{\theta}}{\partial x} \delta DBO_{\theta} + K_{yx} \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial DBO_{\theta}}{\partial y} \delta DBO_{\theta} \right] - Q \delta DBO_{\theta} + \\
& + \beta_1 \overline{DBO_{\theta}} \delta DBO_{\theta} \} dA + \int_{Sq} \bar{q} \delta DBO_{\theta} dSq + \int_{SDBO_{\theta}} (\overline{DBO_{\theta}} - DBO_{\theta}) \delta DBO_{\theta} dSDBO_{\theta} = 0
\end{aligned}$$

(2.3.23)

c) SALINIDADE

Para o cálculo de concentrações de salinidade, a expressão de Galerkin é a mesma que é utilizada para coliformes [7], só que o valor do coeficiente de decaimento ( $\beta$ ) é nulo.

## CAPÍTULO III

### APLICAÇÃO DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS AOS PROBLEMAS DE CONTROLE DE QUALIDADE DE ÁGUA

#### 3.1. O MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

##### 3.1.1. INTRODUÇÃO

O método dos elementos finitos consiste em substituir o contínuo por uma malha de elementos com forma geométrica conhecida, interligados através de um número finito de pontos nodais.

Para cada elemento, a concentração em qualquer ponto é dada em função das concentrações dos pontos nodais, e o fluxo atuante é substituído pelo fluxo nodal equivalente, aplicado somente nos nós.

##### 3.1.2. ESQUEMA COMPUTACIONAL DO MÉTODO

Os passos básicos que devem ser executados para resolver um problema através do método dos elementos finitos são:

- a) determinação do modelo discreto de análise;
- b) montagem das matrizes de cada elemento;
- c) montagem das equações a serem resolvidas;
- d) introdução das condições de contorno;
- e) solução do sistema de equações;
- f) cálculo de resultados secundários;

Na determinação do modelo discreto de análise, deve-se tomar muito cuidado, uma vez que se for feita uma má discretização, os outros passos se tornarão computacionalmente ineficientes.

Este passo consiste na substituição do contínuo por uma malha de elementos finitos, a qual se caracteriza pelo tipo de elemento utilizado, pela quantidade de elementos e pontos nodais existentes, e também por sua distribuição.

A maior dificuldade encontrada neste passo é a determinação da quantidade de elementos e pontos nodais a serem utilizados na malha. Apesar de não existirem regras fixas para sua idealização, deve-se optar por uma malha que se aproxime ao máximo do modelo real do contínuo, levando-se ainda em consideração as seguintes recomendações:

- 1) Devem-se utilizar elementos de forma regular pois, através de experiências, constatou-se que na solução de problemas em que foram utilizadas malhas ora com elementos de forma regular, ora com elementos de forma irregular, obtiveram-se resultados que, comparados ao resultado exato, indicaram a solução com elementos regulares como a que melhor se aproximava.
- 2) Devem-se concentrar os pontos nodais da malha em zonas nas quais possam ocorrer variações das variáveis.
- 3) É aconselhável resolver o problema com malhas diferentes e comparar os resultados. Se for observada uma grande divergência, tal fato será devido à falta de aproximação da solução exata, devendo-se, pois, utilizar malhas mais refinadas.

Uma vez definida a malha a ser utilizada, enumeram-se os nós e os elementos, tomando-se cuidado para que a diferença entre a numeração de dois nós vizinhos seja a menor possível.

### 3.2. FORMULAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS PARA O MODELO MATEMÁTICO

No capítulo 2, foi determinada a expressão de Galerkin a ser resolvida. A seguir, será feita uma formulação de elementos finitos para que seja encontrada a sua solução em forma numérica.

A expressão a ser resolvida tem a forma:

$$\begin{aligned}
 \int_A \left\{ v_x \frac{\partial C}{\partial x} \delta C + v_y \frac{\partial C}{\partial y} \delta C + K_{xx} \frac{\partial C}{\partial x} \frac{\partial \delta C}{\partial x} + K_{yy} \frac{\partial C}{\partial y} \frac{\partial \delta C}{\partial y} + K_{xy} \frac{\partial C}{\partial x} \frac{\partial \delta C}{\partial y} + \right. \\
 \left. + K_{yx} \frac{\partial C}{\partial y} \frac{\partial \delta C}{\partial x} - \frac{1}{H} (K_{xx} \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial C}{\partial x} \delta C + K_{yy} \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial C}{\partial y} \delta C + K_{yy} \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial C}{\partial x} \delta C + \right. \\
 \left. + K_{yx} \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial C}{\partial y} \delta C) - Q \delta C + \beta C \delta C \right\} dA + \int_{S_q} \bar{q} \delta C dS_q + \int_{SC} (\bar{C} - C) \delta C dSC = 0
 \end{aligned}
 \tag{3.2.1}$$

Uma vez que o contínuo é discretizado em elementos com número finito de nós, pode-se escrever a expressão (3.2.1) em forma matricial, utilizando-se a função de interpolação do elemento usado na malha. Assim sendo, os parâmetros da expressão (3.2.1) são expandidos na seguinte forma:

$$v_x = \underline{\phi}^T v_x^n \quad ; \quad v_y = \underline{\phi}^T v_y^n \tag{3.2.2a}$$

$$K_{xx} = \underline{\phi}^T K_{xx}^n \quad ; \quad K_{yy} = \underline{\phi}^T K_{yy}^n \quad ; \quad K_{xy} = \underline{\phi}^T K_{xy}^n \quad ; \quad K_{yx} = \underline{\phi}^T K_{yx}^n$$

(3.2.2b)

$$\underline{H} = \underline{\phi}^T \underline{H}^n \quad ; \quad \underline{\beta} = \underline{\phi}^T \underline{\beta}^n \quad (3.2.2c)$$

$$\delta C = \underline{\phi}^T \delta \underline{C}^n = \delta \underline{C}^{n,T} \underline{\phi} \quad ; \quad C = \underline{\phi}^T \underline{C}^n \quad (3.2.2d)$$

onde

$n$  = número de nós do elemento;

$\underline{\phi}^T$  = transposto do vetor função de interpolação do elemento.

Com estas considerações tem-se para um elemento qualquer, a seguinte expressão matricial:

$$\begin{aligned} \delta \underline{C}^{n,T} \left[ \int_A \left\{ \underline{\phi} \left( \underline{\phi}^T \underline{v}_x^n \right) \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial x} + \underline{\phi} \left( \underline{\phi}^T \underline{v}_y^n \right) \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial y} + \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial x} \left( \underline{\phi}^T \underline{K}_{xx}^n \right) \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial x} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial y} \left( \underline{\phi}^T \underline{K}_{yy}^n \right) \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial y} + \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial y} \left( \underline{\phi}^T \underline{K}_{xy}^n \right) \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial x} + \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial x} \left( \underline{\phi}^T \underline{K}_{yx}^n \right) \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial y} + \right. \right. \\ \left. \left. + \underline{\phi} \left( \frac{\underline{\phi}^T \underline{K}_{xx}^n}{\underline{\phi}^T \underline{H}^n} \right) \left( \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial x} \underline{H}^n \right) \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial x} + \underline{\phi} \left( \frac{\underline{\phi}^T \underline{K}_{yy}^n}{\underline{\phi}^T \underline{H}^n} \right) \left( \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial y} \underline{H}^n \right) \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial y} + \right. \right. \\ \left. \left. + \underline{\phi} \left( \frac{\underline{\phi}^T \underline{K}_{xy}^n}{\underline{\phi}^T \underline{H}^n} \right) \left( \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial y} \underline{H}^n \right) \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial x} + \underline{\phi} \left( \frac{\underline{\phi}^T \underline{K}_{yx}^n}{\underline{\phi}^T \underline{H}^n} \right) \left( \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial x} \underline{H}^n \right) \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial y} + \right. \right. \\ \left. \left. + \underline{\phi} \left( \underline{\phi}^T \underline{\beta}^n \right) \underline{\phi}^T \right\} dA \right] \underline{C}^n = \delta \underline{C}^{n,T} \left[ \int_A \underline{\phi} dA Q - \int_{S_q} \underline{\phi} dS q \bar{q} \right] \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Como no método utilizado a condição essencial de contorno é automaticamente satisfeita, a parcela  $\int_{S_C} (\bar{C} - C) \delta C dS_C$  é anulada.

Denominando-se  $\underline{K}$  e  $\underline{P}$  para as parcelas que estão entre colchetes na expressão (3.2.3), resulta:

$$\delta \underline{C}^{n,T} \underline{K} \underline{C}^n = \delta \underline{C}^{n,T} \underline{P} \quad (3.2.4)$$

Como os incrementos de concentração ( $\delta C$ ) são arbitrários, a equação final para cada elemento do contínuo tem a forma:

$$\tilde{K} \tilde{C}^n = \tilde{P} \quad (3.2.5)$$

onde

- $\tilde{K}$  = matriz de cada elemento, derivada do método dos elementos finitos;
- $\tilde{C}^n$  = vetor que contém os valores das concentrações nodais para cada elemento;
- $\tilde{P}$  = vetor que contém os valores das cargas nodais equivalentes para cada elemento.

A formulação de elementos finitos para os outros tipos de concentração será omitida, uma vez que é feita de maneira análoga à que foi desenvolvida para concentrações de coliformes.

## CAPÍTULO IV

APLICAÇÃO DA PROGRAMAÇÃO LINEAR AOS PROBLEMAS DE  
CONTROLE DE QUALIDADE DE ÁGUA

## 4.1. CONSIDERAÇÕES SOBRE PROGRAMAÇÃO LINEAR

Todo problema que tem como objetivo otimizar uma função numérica de uma ou mais variáveis, e que tenha estas variáveis independentes ou relacionadas de alguma maneira, é considerado um problema de otimização, também conhecido como problema de programação.

A programação linear consiste em determinar os valores das variáveis  $X_j$  ( $j = 1, 2, 3, \dots, n$ ), de maneira que otimize (maximize ou minimize) uma função (Função Objetiva) expressa através de uma combinação linear das variáveis  $X_j$ , respeitando que, simultaneamente, outras funções lineares das mesmas variáveis não ultrapassem certos limites previamente estabelecidos.

A formulação clássica é:

$$\text{otimizar} \quad Z = \sum_{j=1}^n d_j X_j \quad (4.1.1)$$

$$\text{satisfazendo} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j \leq b_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, m) \quad (4.1.2)$$

$$\text{e que} \quad X_j \geq 0 \quad (4.1.3)$$

onde

$a_{ij}$ ,  $b_i$  e  $d_j$  são constantes conhecidas.

De posse do modelo linear, o qual é constituído

pelas restrições lineares (4.1.2) e pela função objetiva linear (4.1.1), a programação linear incumbe-se de encontrar a solução ótima.

O método utilizado na solução do problema de programação linear em estudo foi o Simplex Revisado [8], pois este é muito eficiente para modelos que contenham grande quantidade de zeros, fato que ocorre neste problema.

O programa de computador utilizado para resolver o problema foi o MPS/ALL, programa que é baseado no método Simplex Revisado, e que está embutido no sistema TEMPO B-7700/B-6700 [4].

A técnica para o uso do programa será mostrada no capítulo 5.

#### 4.2. RESOLUÇÃO DO PROBLEMA ATRAVÉS DA FORMULAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS E PROGRAMAÇÃO LINEAR

No Capítulo 3, foi determinada a equação matricial a ser resolvida para cada elemento do contínuo, e que é dada por:

$$\underline{K} \underline{C}^n = \underline{P} \quad (4.2.1)$$

Para a análise total do contínuo, são montadas as matrizes globais, isto é, montagem das matrizes levando-se em consideração todos os elementos da malha, resultando então no sistema global de equações a ser resolvido, que tem a forma:

$$\underline{K}_g(N \times N) \underline{C}_g(N \times 1) = \underline{P}_g(N \times 1) \quad (4.2.2)$$

onde

$\tilde{K}_g$  = matriz global do contínuo, derivada do método dos elementos finitos;

$\tilde{C}_g$  = vetor que contém os valores das concentrações nodais para todo o contínuo;

$\tilde{P}_g$  = vetor que contém os valores das cargas nodais equivalentes para todo o contínuo;

$N$  = número de nós da malha.

Para que o problema de controle de qualidade seja analisado através do método dos elementos finitos juntamente com a programação linear, são levados em consideração dois fatores:

- a) A parte do contínuo onde as concentrações são limitadas, pois este fato implica o aumento do conjunto de restrições. Este aumento é da ordem de "NNCL" restrições, onde "NNCL" é o número de nós com concentração limitada.

Para o problema em estudo, tem-se por objetivo tornar o valor das concentrações nodais o menor possível. Assim sendo, este novo conjunto de restrições surgido tem como prefixado o limite superior, ou seja,  $C \leq C_s$  em  $S_g$ , onde

$C_s$  = limite superior para concentração na parte  $S_g$  do contorno.

- b) As cargas atuantes no contínuo são consideradas em dois tipos:

b1) Cargas controláveis, isto é, fontes sujeitas a um certo tratamento antes de serem descarregadas no meio hídrico.

b2) Cargas incontroláveis, isto é, fontes inevitáveis ou naturalmente geradas, que são descarregadas no meio hídrico.

Como as cargas controláveis podem ser limitadas, surge então um novo aumento no conjunto de restrições, um aumento da ordem de "NNCC" restrições, onde "NNCC" é o número de nós nos quais são aplicadas cargas controláveis.

Este novo conjunto de restrições tem como prefixado o limite superior, ou seja,  $Q_c \leq \bar{Q}_c$  em  $S_g$  e, conseqüentemente, o vetor de cargas  $\underline{P}_g$  é dividido em duas parcelas, isto é:

$$\underline{P}_g = \underline{Q}_c + \underline{Q}_u \quad (4.2.3)$$

e a equação (4.2.2) é reescrita na forma:

$$\underline{K}_g \underline{C}_g - \underline{Q}_c = \underline{Q}_u \quad (4.2.4)$$

onde

$\underline{Q}_c$  = vetor que contém as cargas controláveis aplicadas nos nós da malha;

$\underline{Q}_u$  = vetor que contém as cargas incontroláveis aplicadas nos nós da malha.

#### 4.3. MONTAGEM DO MODELO LINEAR

O modelo linear é constituído pelo conjunto de restrições do problema e pela função objetiva que se quer otimizar.

O conjunto de restrições é dado pela matriz formada pelas equações e inequações do problema, ou seja:

a) Equações:

$$\tilde{K}_g \tilde{C}_g - T_j \tilde{Q}_c^i = \tilde{Q}_u \quad (4.3.1)$$

onde

$\tilde{Q}_c^i$  = i-ésima carga controlável, aplicada ao nó j;

T = matriz associada às cargas controláveis de ordem (N x NNCC), cujos elementos são nulos, exceto os T (j, N + i) que são unitários.

b) Inequações:

$$\tilde{G}_N \tilde{C}_g \leq \tilde{C}_s^i \quad (4.3.2)$$

$$\tilde{G}_I \tilde{Q}_c^i \leq \tilde{Q}_c^i$$

onde

$\tilde{G}_N$  = matriz associada às concentrações limitadas, de ordem (NNCL x N), cujos elementos são nulos, exceto os  $\tilde{G}_N$  (N + i, j) que são unitários;

$\tilde{C}_s^i$  = limite superior da i-ésima concentração limitada, referente ao nó j;

$\tilde{G}_I$  = matriz unitária, associada às cargas controláveis, e de ordem (NNCC x NNCC);

$\tilde{Q}_c^i$  = limite superior da i-ésima carga controlável, aplicada ao nó j.

Para compor o modelo linear, resta estabelecer a

função objetiva a ser otimizada.

O problema em estudo consiste em determinar as concentrações de um poluente derivado de efluentes sujeitos ou não a um certo tratamento, de tal forma que estas concentrações sejam ou não limitadas por um valor previamente estabelecido, e que o custo de tratamento dos efluentes seja mínimo. Logo, a função a ser otimizada tem a forma:

$$Z = \text{MAX} \sum_{i=1}^{\text{NNCC}} j Q_c^i \quad (4.3.3)$$

Obtido o modelo linear, o próximo passo consiste em resolver o problema de programação linear através do computador.

O conjunto de restrições obtido para o caso em estudo, é dado por:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline K_{\sim g} & T_{\sim} \\ \hline \text{GN}_{\sim} & \text{MATRIZ} \\ & \text{NULA} \\ \hline \text{MATRIZ} & \\ \text{NULA} & \text{GI}_{\sim} \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{c} C_{\sim g} \\ \hline \\ \hline \\ Q_c^i \end{array} \right] \\ < \\ < \end{array} = \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{c} Q_u \\ \hline \\ \hline \\ Q_c^i \end{array} \right] \\ < \\ < \end{array} \quad (4.3.4)$$

## CAPÍTULO V

## ASPECTOS COMPUTACIONAIS DO PROBLEMA

## 5.1. CARACTERÍSTICAS GERAIS DO PROGRAMA

O programa computacional desenvolvido neste trabalho possibilita resolver os modelos matemáticos de dispersão em regime estacionário, sendo que, na sua confecção, utilizaram-se as técnicas de Elementos Finitos e Programação Linear.

Este programa, cuja linguagem de codificação utilizada é "EXTENDED ALGOL" para computadores BURROUGHS B-6700, é dividido em duas etapas que a seguir serão comentadas.

## 5.1.1. PRIMEIRA ETAPA DE PROGRAMAÇÃO

Esta etapa consiste na determinação da matriz  $\tilde{K}_g$  e do vetor  $\tilde{P}_g$  da equação (4.2.2). Para entrada e controle de dados, utilizam-se os comandos do sistema HYDRO [1] [5], adiante descritos.

## 5.1.1.1. DEFINIÇÃO DA MALHA DE ELEMENTOS FINITOS

Para ser feita a descrição da malha de elementos finitos, é necessário que seja informado o tipo de elemento que está sendo utilizado, as coordenadas dos nós em um certo sistema de referência e as conectividades dos elementos.

## 5.1.1.2. DESCRIÇÃO DAS CARACTERÍSTICAS DO PROBLEMA

Os dados para a descrição do problema podem ser

divididos em parâmetros ou constantes, dados nodais e dados de elementos. Os dados nodais incluem atributos, ações e condições de contorno dos nós.

Para o problema em estudo, as características a serem informadas são:

1. coeficientes de dispersão longitudinal e transversal em cada nó;
2. coeficiente de decaimento em cada nó;
3. profundidades nodais;
4. velocidades nodais nas direções X e Y;
5. lista de nós e valores das incógnitas neles prescritas;
6. lista de nós e valores das cargas concentradas neles aplicadas;
7. elemento, lado e valor da carga distribuída aplicada;
8. lista de nós e valores das cargas controláveis neles aplicadas;
9. lista de nós e limite de concentração neles previsto.

De posse destas informações, o programa realiza a análise do problema. Nesta análise, são executados os seguintes passos:

- a) montagem da matriz  $\underline{K}$  e do vetor  $\underline{P}$  da equação (4.2.1), para cada elemento;
- b) montagem da matriz  $\underline{K}_g$  e do vetor  $\underline{P}_g$  da equação (4.2.2);
- c) aplicação das condições de contorno em  $\underline{K}_g$  e  $\underline{P}_g$ ;
- d) montagem do modelo linear, isto é:

$$\text{otimizar} \quad Z = \text{Max} \quad \sum_{i=1}^{\text{NNCC}} j^i Q_c^i \quad (5.1.1)$$

de maneira que satisfaça o conjunto de restrições dado por:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \tilde{K}_g & \tilde{T} \\ \hline \tilde{GN} & \tilde{O} \\ \hline \tilde{O} & \tilde{GI} \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} \tilde{C}_g \\ \hline \tilde{Q}_c^i \end{array} \right\} \\ \leq \\ \leq \end{array} = \begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} \tilde{Q}_u \\ \hline \tilde{C}_s^i \\ \hline \tilde{Q}_c^i \end{array} \right\} \quad (5.1.2)
 \end{array}$$

e) montagem do modelo linear em disco, sendo que para esta montagem, utiliza-se o formato de entrada de dados correspondente à segunda etapa de programação, fato que será justificado mais adiante.

#### 5.1.2. SEGUNDA ETAPA DE PROGRAMAÇÃO

Esta etapa consiste na solução do modelo linear. Para entrada e controle de dados, utilizam-se os comandos do sistema TEMPO [4], sistema que está embutido nos computadores B-7700/B-6700.

Para que um problema de programação linear seja resolvido através do sistema TEMPO, são necessários três grupos de cartões.

O primeiro grupo é constituído pelos cartões que chamam a fita que contém o programa MPS/ALL, e são colocados logo após os dados de entrada da primeira etapa de programação.

O segundo grupo (CARD), contém os cartões de controle do sistema. Nestes cartões são indicados o nome do conjunto de dados do problema, nome do programa, nome da função objetiva, nome do vetor que está do lado direito de (5.1.2) e a seqüência de operações a serem realizadas.

Na utilização do programa, utilizaram-se os se-

guintes cartões do controle:

```
ZDATA = "HYDRO"
ZNAME = "HYDRO"
INPUT
BCDOUT
SETUP(MAX)
ZOBJ = "FOBJE"
ZRHS = "RHS1"
PRIMAL
OUTPUT
RANGE
```

onde

ZDATA = cartão no qual é indicado o nome do conjunto de dados do problema. Este nome deve ser o mesmo que será indicado no arquivo CARDIN;

ZNAME = cartão em que se informa o nome dado ao programa;

INPUT = sub-rotina que executa a leitura dos dados do problema, isto é, do terceiro grupo de cartões;

BCDOUT = sub-rotina que imprime os dados do problema;

SETUP = cartão em que se indica o tipo da otimização (Máximo ou Mínimo);

ZOBJ = cartão no qual é indicado o nome dado à função objetiva;

ZRHS = cartão em que se indica o nome dado aos elementos do vetor que está do lado direito de (5.1.2);

PRIMAL = sub-rotina que encontra a solução ótima do problema;

OUTPUT = sub-rotina que imprime os resultados do problema;

RANGE = sub-rotina que faz uma análise de pós-otimização, isto é, dá o campo de variação tanto dos coeficientes da função objetiva, como dos elementos do vetor que está à direita de (5.1.2), de maneira que a solução continue sendo ótima.

O terceiro grupo de cartões (CARDIN) deveria ser constituído pelos dados do problema, ou seja, a informação da matriz de restrições, dos coeficientes da função objetiva e do vetor que está à direita de (5.1.2). Para entrada destes dados, é necessário que se obedeça às instruções do manual da BURROUGHS para uso do sistema TEMPO, pois esta é feita em um formato especial.

Acontece que para grandes problemas, isto é, problemas em que a matriz de restrições é muito grande, resultaria um grande número de cartões a perfurar, o que seria bastante trabalhoso. Assim sendo, optou-se pela leitura de dados em disco ao invés de cartões, sendo então justificado o motivo da passagem do modelo linear para disco durante a realização da primeira etapa de programação.

## CAPÍTULO VI

## EXEMPLOS E COMENTÁRIOS

Com o objetivo de mostrar a utilização do programa computacional esquematizado no capítulo 5, serão mostrados alguns exemplos de aplicação.

## Exemplo 1

Trata-se do cálculo de concentrações de uma substância em um meio hídrico quadrangular, conforme é mostrado na figura 6.1.

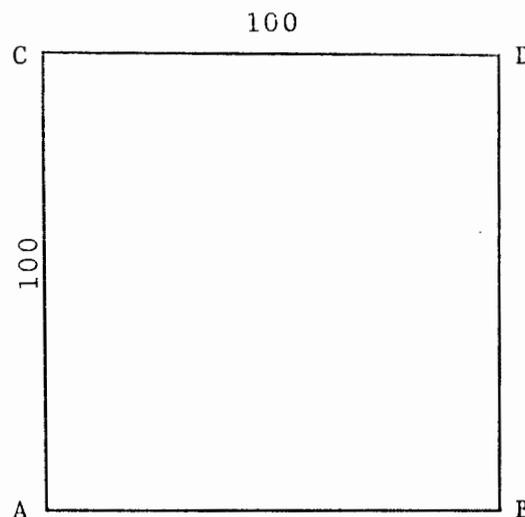


FIG. 6.1

Na descrição da malha de elementos finitos, utilizaram-se 8 elementos triangulares de 3 nós, e para o sistema de coordenadas, adotou-se origem em A.

Na figura 6.2, mostram-se a malha de elementos finitos e a configuração de cargas para este exemplo.

As características a serem informadas são:

1. coeficientes de dispersão:  $DL = DT = 1.0$
2. coeficiente de decaimento:  $\beta = 0.001$
3. profundidades:  $H = 1.0$
4. velocidades:  $\bar{V}_x = \bar{V}_y = 0$
5. cargas incontrolláveis que estão atuando:

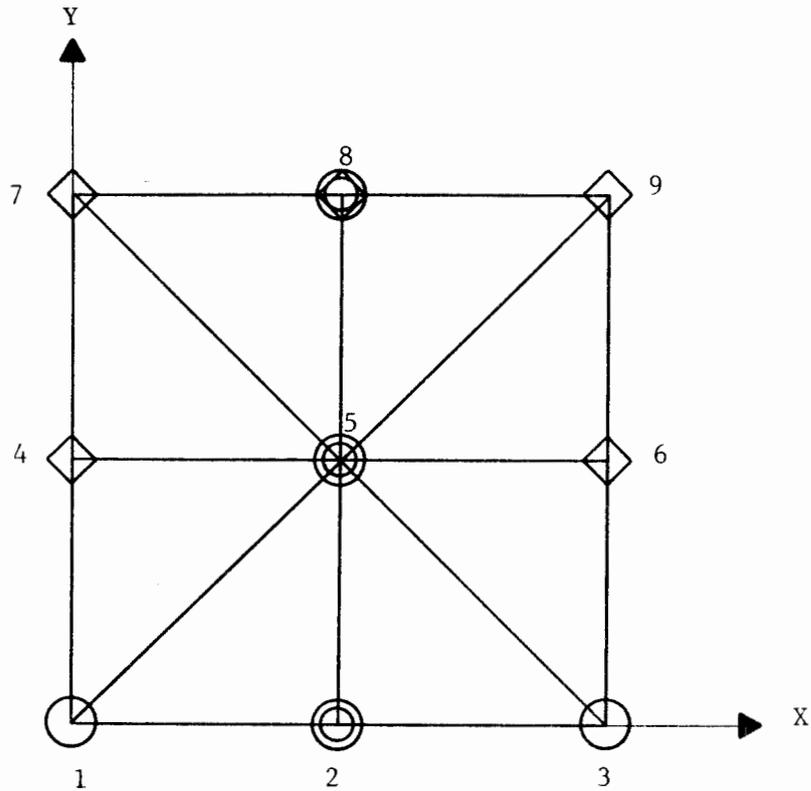
Nó (j)	Valor da carga ( $Q_u$ )
1	3.00
3	3.00

6. cargas controláveis que estão atuando:

Número da carga (i)	Nó (j)	Limite superior da carga ( ${}_j\bar{Q}_c^i$ )
1	2	30.00
2	5	30.00
3	8	30.00

7. nós com concentração limitada:

Número da concentração (i)	Nó (j)	Limite superior da concentração ( ${}_j\bar{C}_s^i$ )
1	4	3.00
2	6	3.00
3	7	3.00
4	8	3.00
5	9	3.00



- ⊙ : Pontos Nodais com Cargas Controláveis  
 ○ : Pontos Nodais com Cargas Incontroláveis  
 ◇ : Pontos Nodais com Concentração Limitada.

FIG. 6.2. Malha de Elementos Finitos e Configuração de Cargas para o Exemplo 1.

De posse de todas estas informações, realiza-se a primeira etapa do programa.

O modelo linear para este exemplo tem a seguinte forma:

otimizar a função objetiva

$$Z = \text{MAX} ({}_2Q_c^1 + {}_5Q_c^2 + {}_8Q_c^3)$$

de maneira que satisfaça o conjunto de restrições

		N									NNCC				
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3		
N	1													=	3.0
	2										-1			=	0
	3													=	3.0
	4													=	0
	5					$K_g$						-1		=	0
	6													=	0
	7													=	0
	8												-1	=	0
	9													=	0
NNCL	1			1									<	3.0	
	2					1							<	3.0	
	3						1				0		<	3.0	
	4							1					<	3.0	
	5								1				<	3.0	
NNCC	1									1			<	30.0	
	2					0					1		<	30.0	
	3											1	<	30.0	

A seguir, o modelo linear é montado em disco como foi especificado no capítulo 5, e dá-se início a segunda etapa do programa, que consiste na solução do modelo.

Os resultados obtidos foram:

Número da carga (i)	Nó (j)	Valor da carga controlável ( $jQ_c^i$ )
1	2	30.00
2	5	13.35
3	8	2.31

valor da função objetiva otimizada:

$$Z = 45.66$$

Os valores das concentrações nodais obtidas são mostradas na figura 6.3.

0.89	3.0	0.89
3.0	5.34	3.0
6.74	16.37	6.74

FIG. 6.3. Concentrações obtidas para o Exemplo 1.

#### Exemplo 2

Trata-se também do cálculo de concentrações de uma substância em um meio hídrico retangular, conforme é mostrado na figura 6.4.

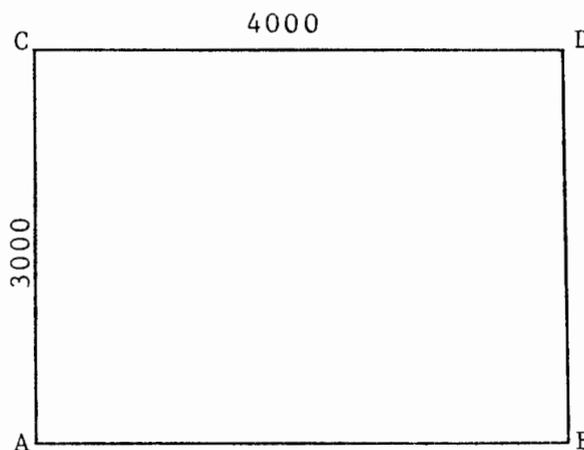


FIG. 6.4.

O meio hídrico foi dividido em 96 elementos triangulares de 6 nós, e para o sistema de coordenadas, tomou-se como origem A.

Na figura 6.5, mostram-se a malha de elementos finitos e a configuração de cargas para este exemplo.

As características a serem informadas são:

1. coeficientes de dispersão:  $DL = DT = 10$ ;
2. coeficiente de decaimento:  $\beta = 0.00001$ ;
3. profundidades:  $H = 1.0$ ;
4. velocidades:  $V_x = V_y = 0$ ;
5. cargas incontroláveis que estão atuando: todas com valor  $Q_u = 30$ ;
6. cargas controláveis que estão atuando: todas com limite superior  $\bar{Q}_c^i = 30$ ;
7. limites para concentração: todos os nós que são limitados têm limite superior  $\bar{C}_s^i = 3$ .

Após a análise do problema, foram obtidos os seguintes resultados:

Número da carga (i)	Nó (j)	Valor da carga controlável ( $\bar{Q}_c^i$ )
1	42	0.00
2	59	0.00
3	76	8.15
4	93	30.00
5	110	30.00
6	127	30.00

Os valores obtidos para as concentrações são mostrados na figura 6.6.

## Exemplo 3

É o mesmo problema mostrado no Exemplo 2, porém, com as seguintes modificações:

1.  $V_x = 0.03$ ;
2. deve cumprir as condições  $C = \bar{C} = 0.1$  no lado  $\bar{AC}$   
 $C = \bar{C} = 1.5$  no lado  $\bar{BD}$

Os resultados obtidos foram:

Número da carga (i)	Nó (j)	Valor da carga controlável ( ${}_j Q_c^i$ )
1	42	30.00
2	59	7.48
3	76	0.00
4	93	30.00
5	110	30.00
6	127	30.00

Os valores obtidos para as concentrações são mostrados na figura 6.7.

## Exemplo 4

É o mesmo problema mostrado no Exemplo 2, só que na elaboração da malha de elementos finitos foram utilizados 202 elementos triangulares de 3 nós. A malha de elementos finitos e a configuração de cargas para este exemplo são mostradas na figura 6.8.

Para este exemplo, foram obtidos os seguintes re

sultado:

Número da carga (i)	Nó (j)	Valor da carga controlável ( ${}_j Q_c^i$ )
1	26	0.00
2	36	0.00
3	46	1.71
4	56	30.00
5	66	30.00
6	76	30.00

Os valores obtidos para as concentrações são mostrados na figura 6.9.

Comparando-se os resultados dos exemplos 2 e 4, observa-se uma grande semelhança entre os mesmos. Logo, de acordo com as recomendações feitas no capítulo 3 (Idealização da malha), pode-se concluir que os valores obtidos nestes dois exemplos aproximam-se do resultado exato.

#### Exemplo 5

É o mesmo problema encontrado no Exemplo 4, porém, com as modificações feitas no Exemplo 3.

Para este exemplo, foram obtidos os seguintes resultados:

Número da carga (i)	Nó (j)	Valor da carga controlável ( ${}_j Q_c^i$ )
1	26	30.00
2	36	5.46
3	46	0.00
4	56	30.00
5	66	30.00
6	76	30.00

Os valores obtidos para as concentrações são mostrados na figura 6.10.

As observações feitas a respeito dos exemplos 2 e 4 também são válidas para os exemplos 3 e 5.

#### Exemplo 6 - APLICAÇÕES AO RIO GUAÍBA

A seguir, serão mostradas algumas aplicações do modelo no rio Guaíba.

O rio Guaíba situa-se na região sul do Brasil, tendo à sua margem esquerda, a cidade de Porto Alegre, Capital do Estado do Rio Grande do Sul.

Ocupa uma área de  $496 \text{ Km}^2$ , acumulando um volume d'água de  $1.440.200.000 \text{ m}^3$ , com profundidade variando de zero a 30 m, atingindo no canal de navegação, valores médios que variam de 5 a 7 m.

Constitui-se de um estuário formado por quatro rios (Jacuí, Caí, Sinos e Gravataí), os quais percorrem diversas zonas do Estado do Rio Grande do Sul e, ao se lançarem em frente à cidade de Porto Alegre, formam um lago de 50Km de extensão, cuja maior largura, 20 Km no sentido leste-oeste, situa-se entre o Saco da Lami e do Pinho.

É utilizado por Porto Alegre como fonte de abastecimento para a população, como via de navegação, como meio de recreação através das praias situadas na zona sul, como fonte de diluição de águas servidas e para o embelezamento da cidade com seu efeito paisagístico.

Os dados para aplicação do modelo foram obtidos junto ao Departamento Municipal de Águas e Esgotos de Porto Alegre (DMAE) [13] e Conselho de Implantação do Polo Petroquímico do Estado do Rio Grande do Sul (CONPETRO), sendo que o campo de velocidades foi obtido através de um modelo estacionário do sistema HYDRO [1] [12].

Na figura 6.12 e Tabela 6.1, mostram-se a malha de ele

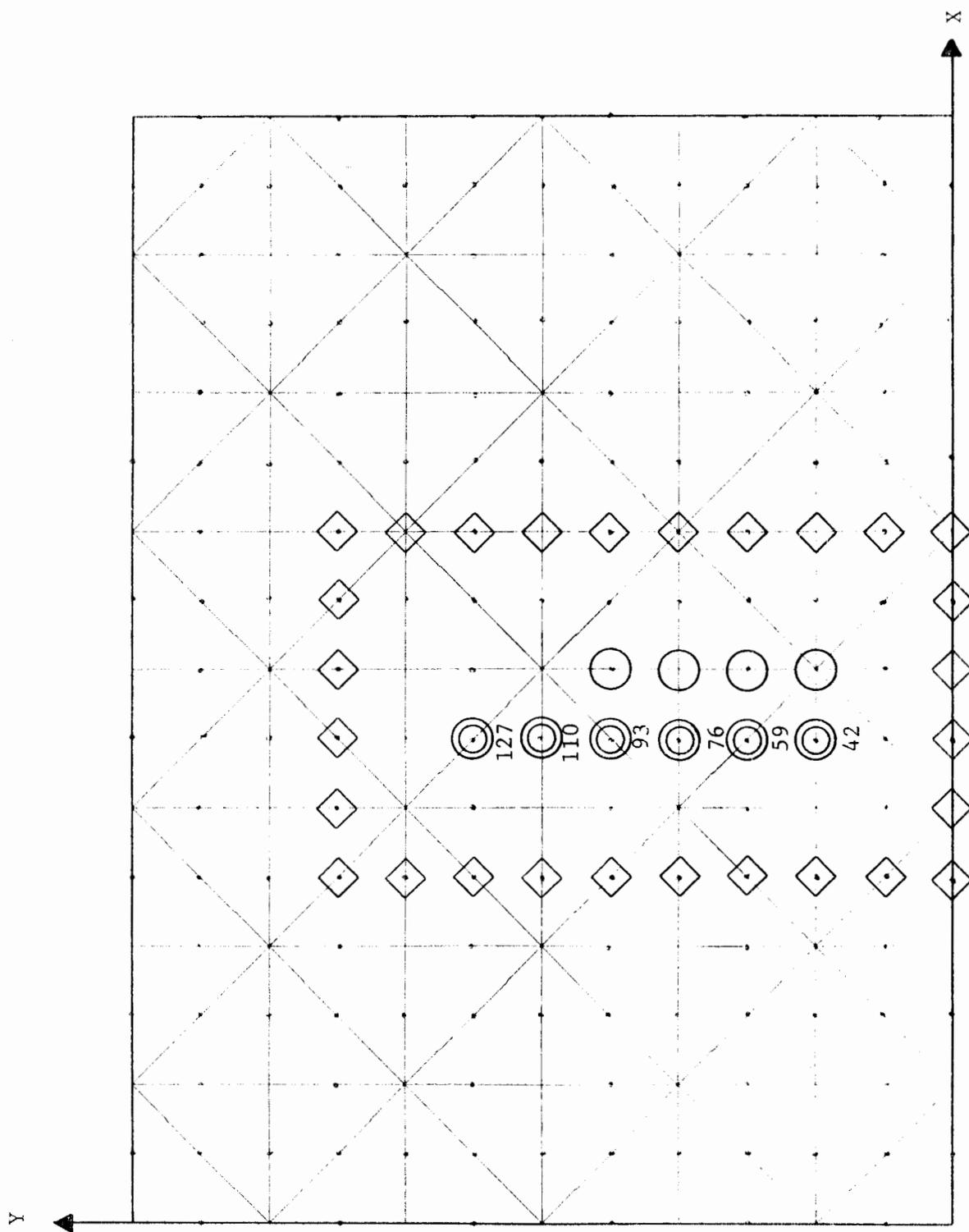


FIG 6.5. Malha de Elementos Finitos e Configuração de Cargas para os Exemplos 2 e 3.

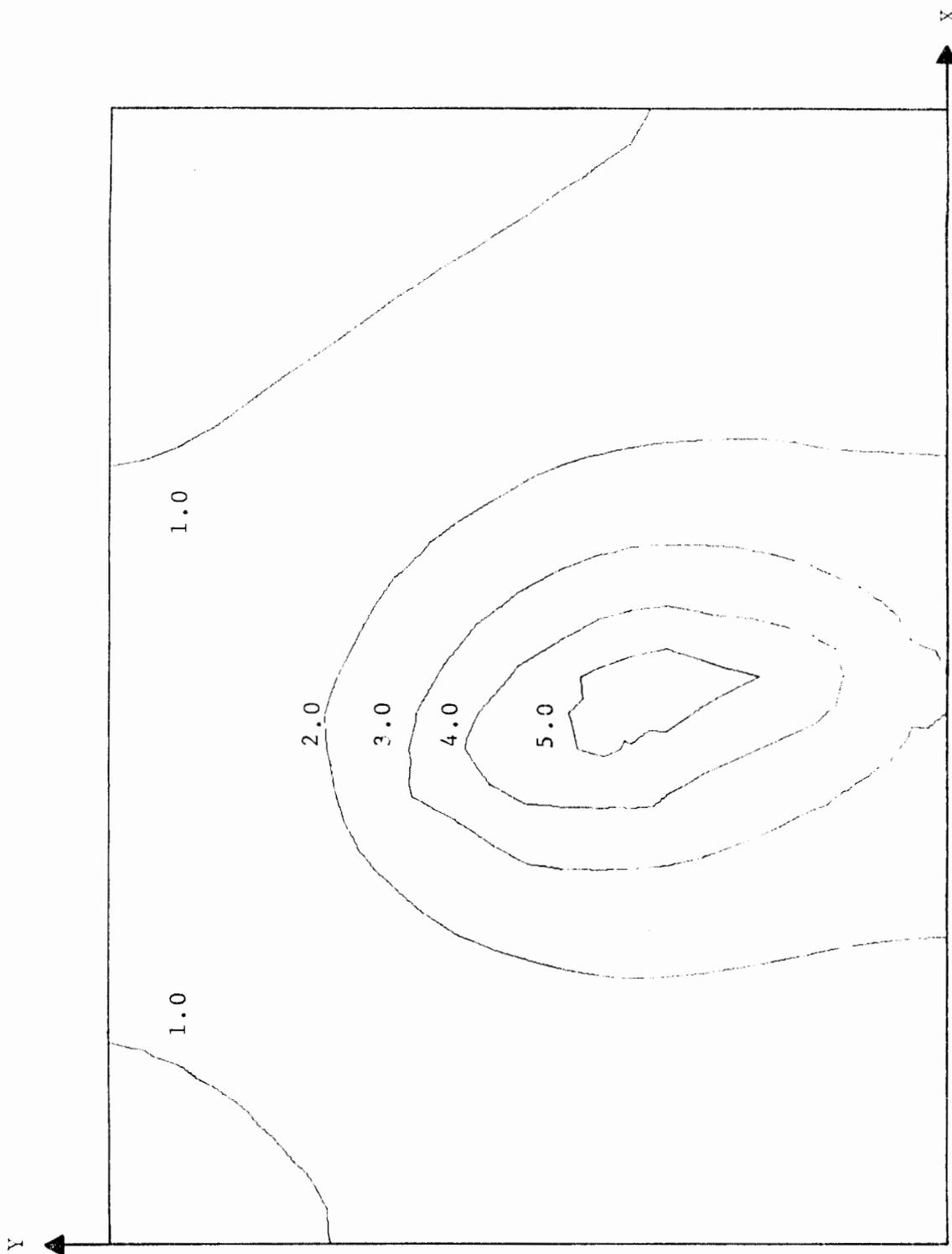


FIG. 6.6. Concentrações obtidas para o Exemplo 2.

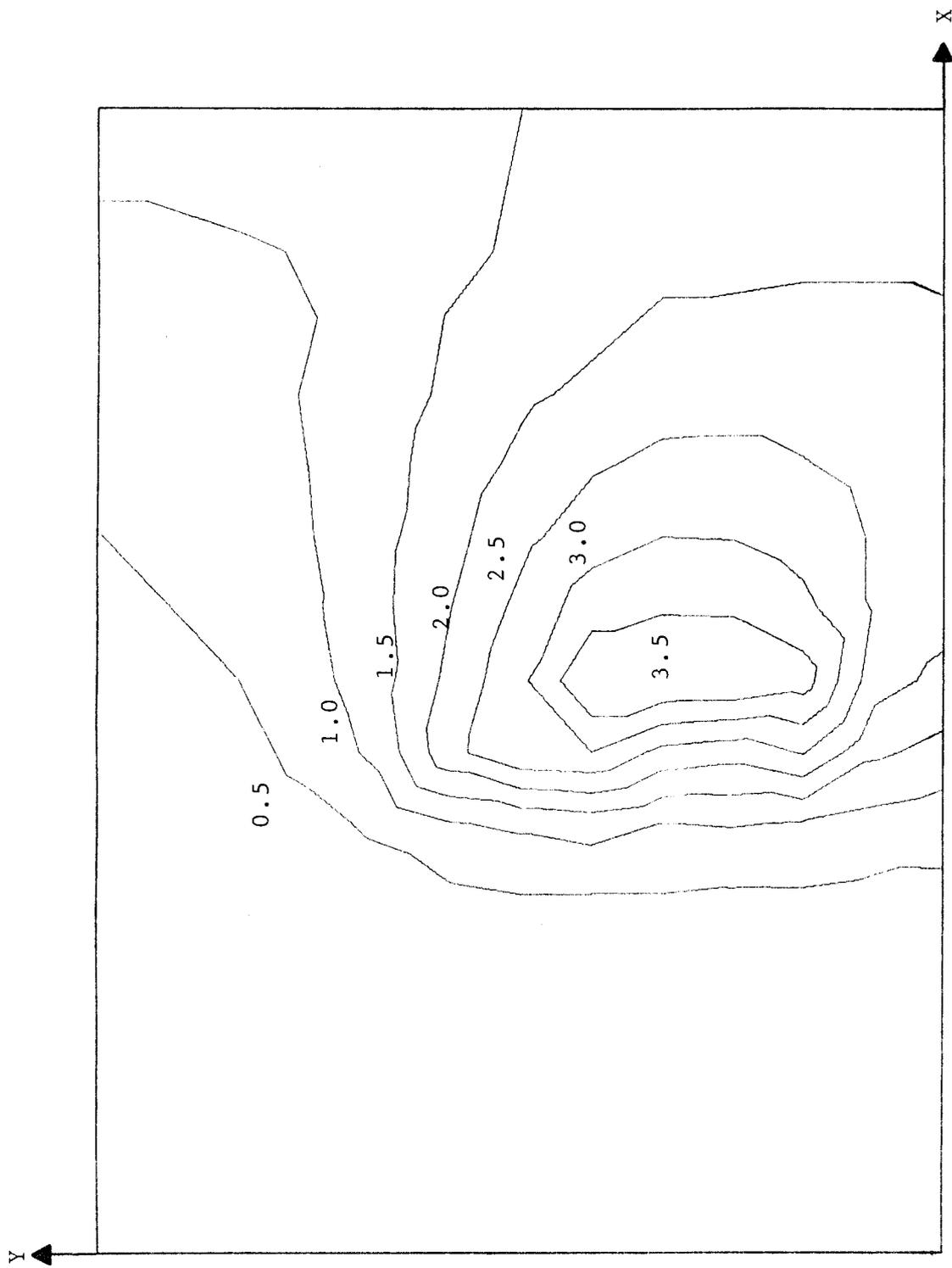


FIG. 6.7. Concentrações obtidas para o Exemplo 3.

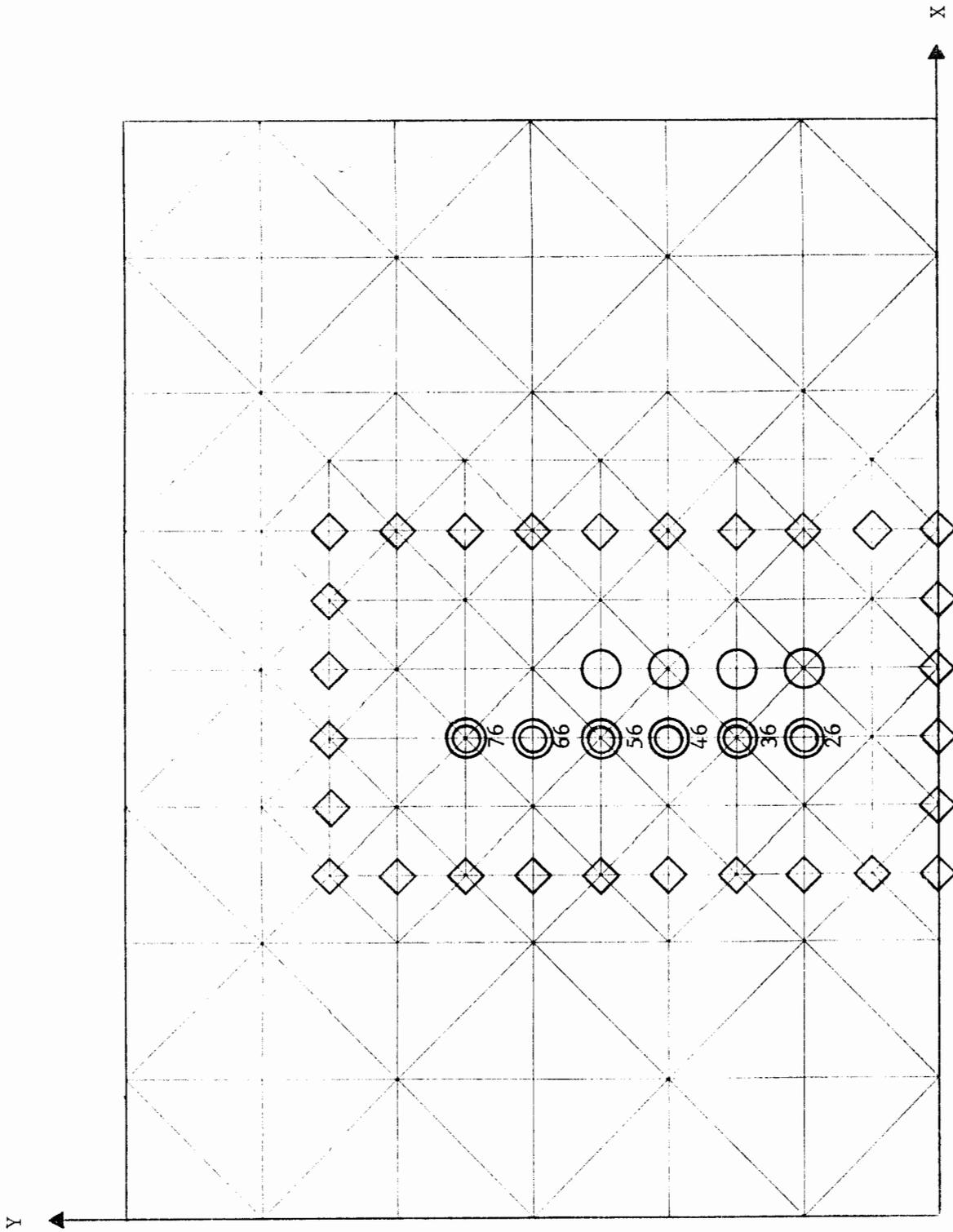


FIG. 6.8. Malha de Elementos Finitos e Configuração de Cargas para os Exemplos 4 e 5.

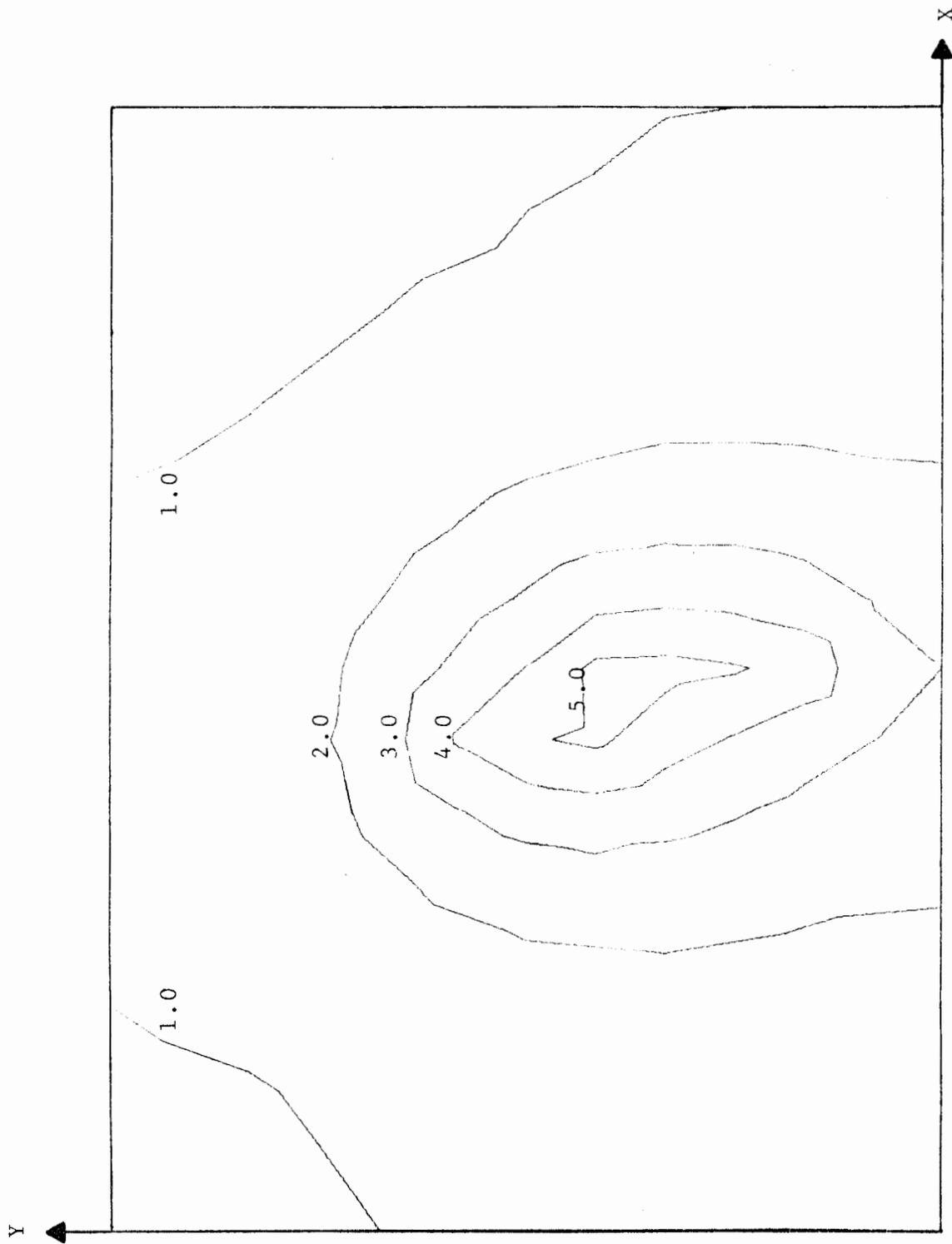


FIG. 6.9. Concentrações obtidas para o Exemplo 4.

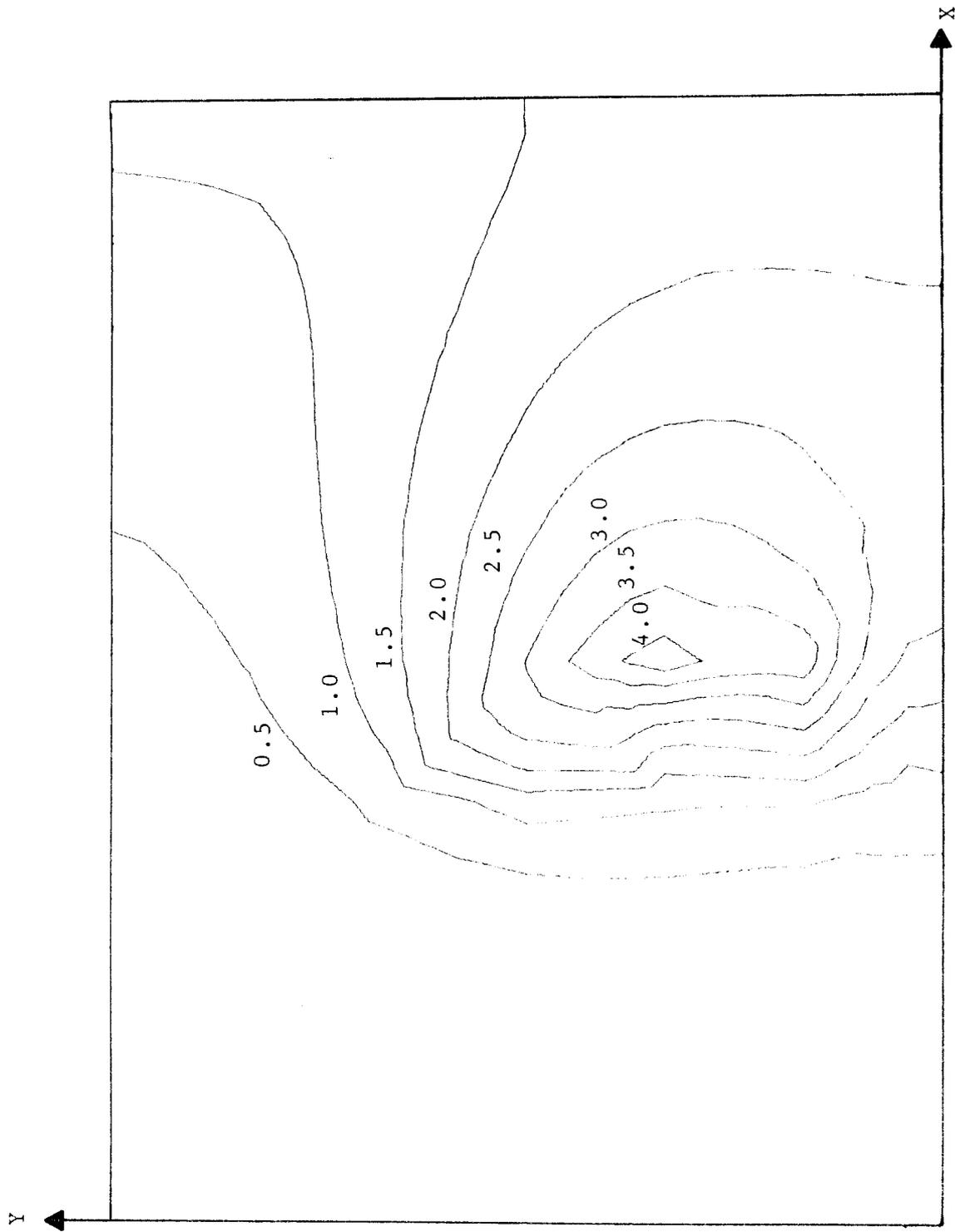


FIG. 6.10. Concentrações obtidas para o Exemplo 5.

mentos finitos (224 elementos triangulares lineares, interligados através de 148 nós), configuração, origem e valores das cargas de coliformes fecais para o rio Guaíba.

Foram analisadas nove situações, sendo obtidos os seguintes resultados:

#### 1º CASO

- todas as cargas são incontroláveis
- água baixas (vazão variando de zero a  $700 \text{ m}^3/\text{seg}$ )
- condição de contorno:  $C = \bar{C} = 10000 \text{ NMP}/100 \text{ ML}$  (número máximo provável de coliformes fecais em cada cem mililitros), na Ponta da Cadeia

Os resultados obtidos são mostrados na figura 6.13.

#### 2º CASO

- todas as cargas são incontroláveis
- águas baixas
- condição de contorno:  $C = \bar{C} = 10000 \text{ NMP}/100 \text{ ML}$ , na Ponta da Cadeia
- vento atuando no sentido NE-SO, com velocidade de  $8 \text{ m}/\text{seg}$

Os resultados obtidos são mostrados na figura 6.14.

#### 3º CASO

- todas as cargas são incontroláveis
- água médias (vazão variando de zero a  $1000 \text{ m}^3/\text{seg}$ )
- condição de contorno:  $C = \bar{C} = 4500 \text{ NMP}/100 \text{ ML}$ , na Ponta da Cadeia

Os resultados obtidos são mostrados na figura 6.15.

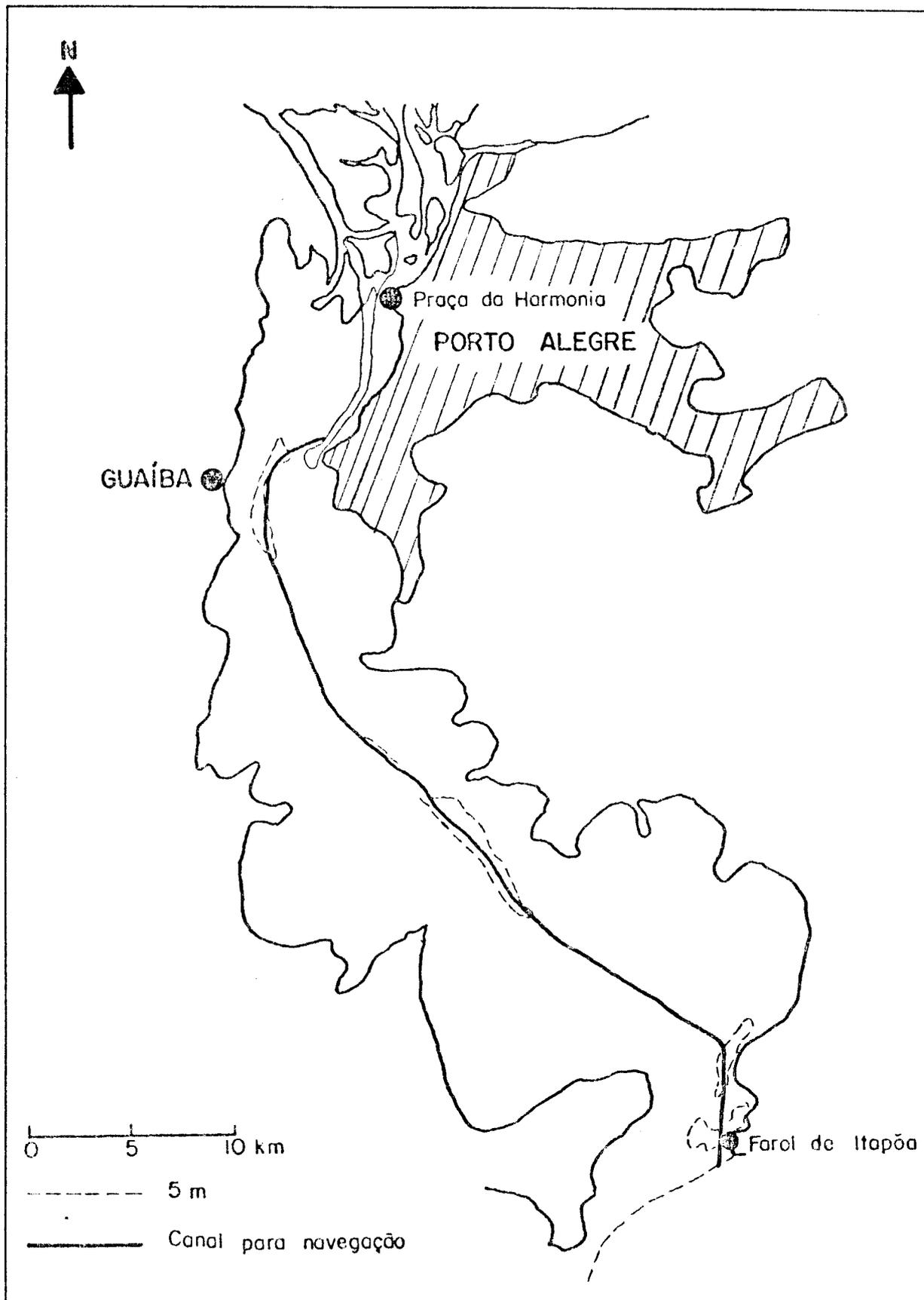


FIG. 6.11. O Rio Guaíba.

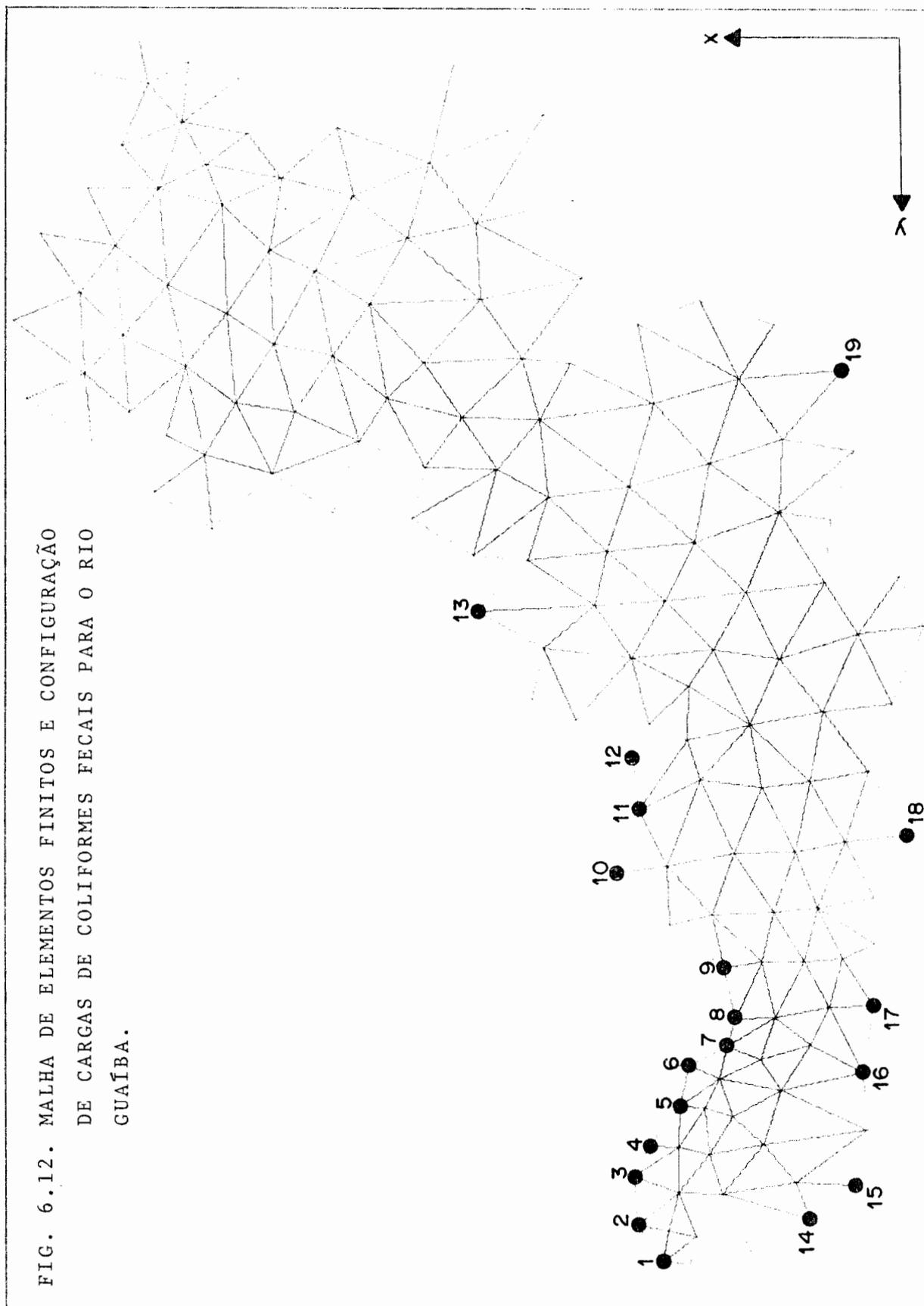


Tabela 6.1

Origem das Cargas	Valores em $10^8$ NMP/seg
1. Ponta da Cadeia	2751.14
2. Arroio do Dilúvio	302.08
3. DNOS EBA nº 12	1.04
4. DNOS EBA nº 12	1.04
5. Arroio da Divisa	91.32
6. Arroio Cavalhada	2.89
7. Canal de Assunção Arroio Cavalhada	4.51
8. Canal de Assunção Canal O. Nemeyer	2.59
9. Canal O. Nemeyer	1.97
10. Arroio Capivara	9.14
11. Arroio E. Santo	2.55
12. Arroio do Salso	15.30
13. Arroio Arado Velho	1.39
14. Arroio do Conde	1.27
15. Arroio do Conde	1.27
16. Conduto CELUPA	5.15
17. Conduto CELUPA	5.15
18. Vila Elsa	1.74
19. Barra do Ribeiro	1.04

CONCENTRAÇÕES DE COLIFORMES FECAIS  
PARA O RIO GUAÍBA EM NMP/100 ML.

Vazão:  $700 \text{ m}^3/\text{seg}$

Vento: Não considerado

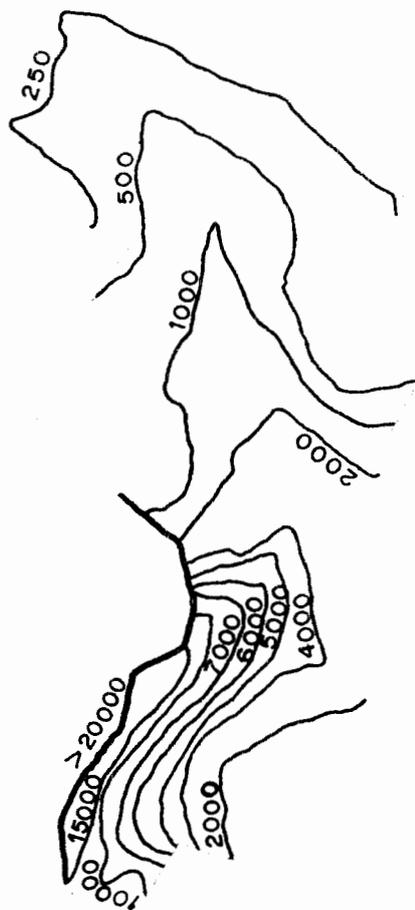


FIG. 6.13

CONCENTRAÇÕES DE COLIFORMES FECALIS  
PARA O RIO GUAÍBA EM NMP/100 ML.

Vazão:  $700 \text{ m}^3/\text{seg}$

Vento:  $8 \text{ m}/\text{seg}$ ; sentido: NE-SO

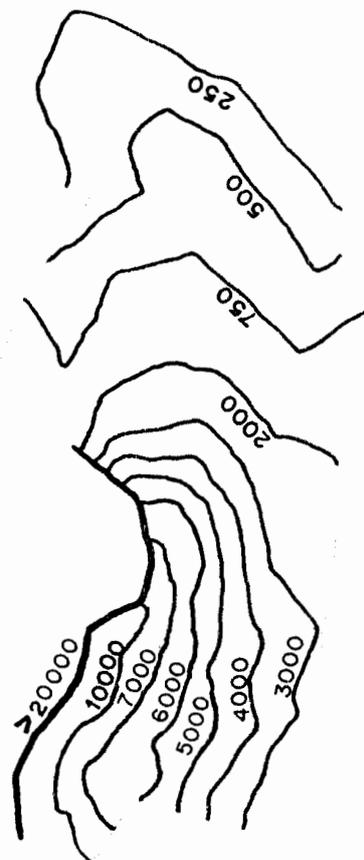


FIG. 6.14

CONCENTRAÇÕES DE COLIFORMES FECALIS  
PARA O RIO GUAÍBA EM NMP/100 ML.

Vazão:  $1000 \text{ m}^3/\text{scg}$

Vento: Não considerado

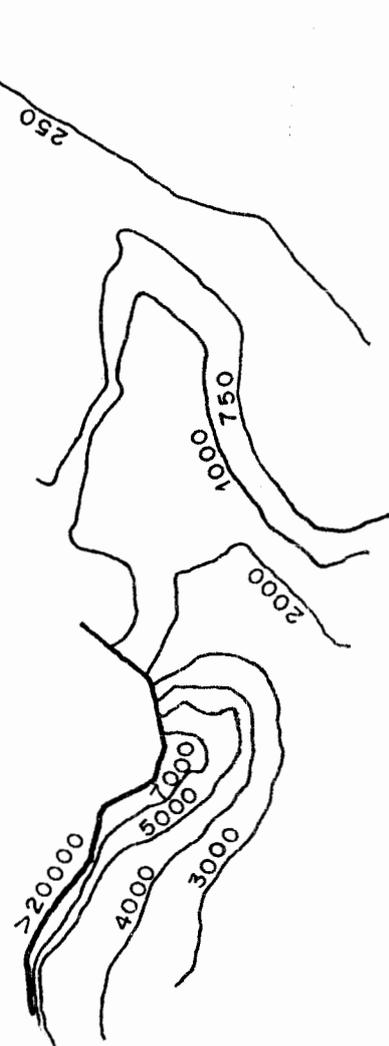


FIG. 6.15

## 4º CASO

- todas as cargas são incontrolláveis
- águas médias
- condição de contorno:  $C = \bar{C} = 4500$  NMP/100 ML, na Ponta da Cadeia
- vento atuando no sentido NE-SO, com velocidade de 12 m/seg

Os resultados obtidos são mostrados na figura 6.16.

## 5º CASO

- todas as cargas são incontrolláveis
- águas altas (vazão variando de zero a  $1500 \text{ m}^3/\text{seg}$ )
- condição de contorno:  $C = \bar{C} = 10000$  NMP/100 ML, na Ponta da Cadeia

Os resultados obtidos são mostrados na figura 6.17.

## 6º CASO

- todas as cargas são incontrolláveis
- águas altas
- condição de contorno:  $C = \bar{C} = 10000$  NMP/100 ML, na Ponta da Cadeia
- vento atuando no sentido SO-NE, com velocidade de 10 m/seg

Os resultados obtidos são mostrados na figura 6.18.

De acordo com a Portaria GM/Nº 0013 de 15-01-76 [2], as águas interiores do Território Nacional são enquadrados em quatro classes:

CLASSE 1 - águas destinadas:

ao abastecimento doméstico, sem prévia ou com

CONCENTRAÇÕES DE COLIFORMES FECAIS  
PARA O RIO GUAÍBA EM NMP/100 ML.

Vazão:  $1000 \text{ m}^3/\text{seg}$

Vento:  $12 \text{ m}/\text{seg}$ ; sentido: NE-SO

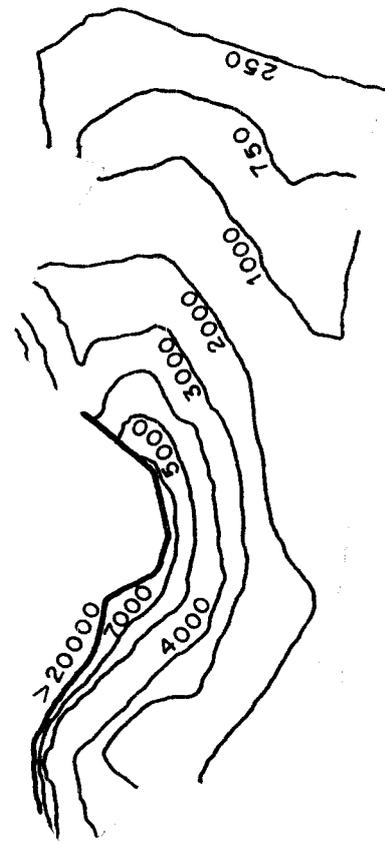


FIG. 6.16

CONCENTRAÇÕES DE COLIFORMES FECAIS  
PARA O RIO GUAÍBA EM NMP/100 ML.

Vazão:  $1500 \text{ m}^3/\text{seg}$

Vento: Não considerado



FIG. 6.17

CONCENTRAÇÕES DE COLIFORMES FECALIS  
PARA O RIO GUAÍBA EM NMP/100 ML.

Vazão:  $1500 \text{ m}^3/\text{seg}$

Vento:  $10 \text{ m}/\text{seg}$ ; sentido: SO-NE

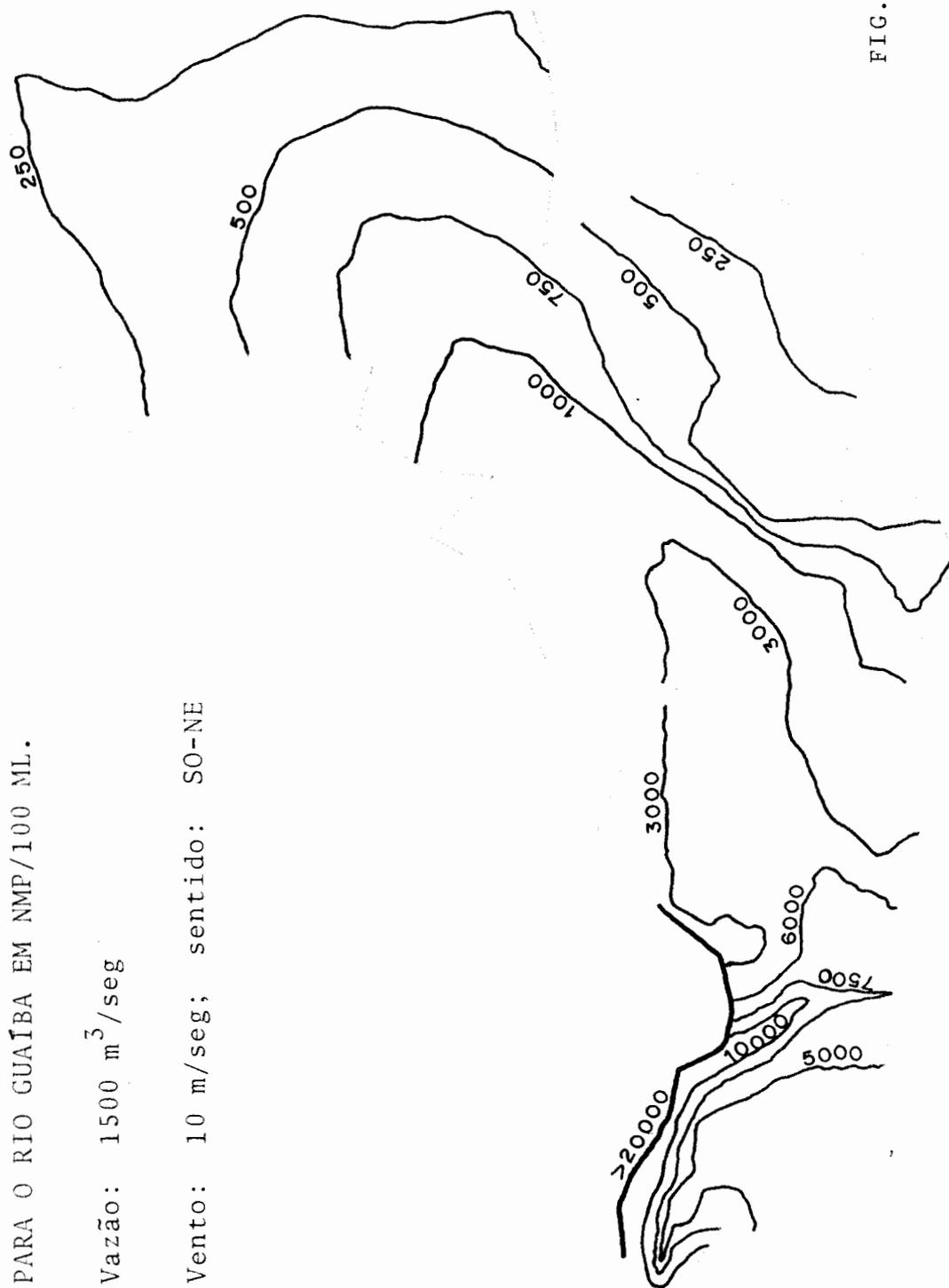


FIG. 6.18

simples desinfecção.

CLASSE 2 - águas destinadas:

- a) ao abastecimento doméstico, após tratamento convencional;
- b) à irrigação de hortaliças ou plantas frutíferas;
- c) à recreação de contato primário (natação, esqui aquático e mergulho).

CLASSE 3 - águas destinadas:

- a) ao abastecimento doméstico, após tratamento convencional;
- b) à preservação de peixes em geral e de outros elementos da fauna e da flora;
- c) à dessedentação de animais.

CLASSE 4 - águas destinadas:

- a) ao abastecimento doméstico, após tratamento avançado;
- b) à navegação;
- c) à harmonia paisagística;
- d) ao abastecimento industrial, irrigação e a usos menos exigentes.

sendo que:

- 1) nas águas de classe 1, não serão tolerados lançamentos de efluentes mesmo tratados;
- 2) para águas de classe 2, é estabelecido o limite máximo de 5000 coliformes fecais por 100 mililitros, em 80% ou mais de pelo menos 5 amostras mensais colhidas em qual-

quer mês;

- 3) para águas de classe 3, é estabelecido o limite máximo de 20000 coliformes fecais por 100 mililitros, em 80% ou mais de pelo menos 5 amostras mensais colhidas em qualquer mês;
- 4) as águas de classe 4 possuem índices de coliformes superior ao valor máximo estabelecido para classe 3. Para o abastecimento público, torna-se necessário que métodos especiais de tratamento sejam utilizados a fim de garantir sua potabilização.

Com relação aos resultados obtidos nos seis primeiros casos de aplicação do modelo, são válidas as seguintes observações:

#### 1) Qualidade das águas

Pode-se afirmar que, com respeito à concentrações de coliformes fecais, a qualidade das águas do rio Guaíba varia entre as classes dois e quatro, sendo que a zona mais crítica é a de Porto Alegre, fato comprovado por pesquisas realizadas através do DMAE [13].

#### 2) Influência da vazão

À medida que as vazões vão diminuindo, concentrações maiores são produzidas nas zonas próximas às cargas, o que implica afirmar que a situação mais desfavorável ocorre na época de águas baixas.

#### 3) Influência do vento

Para os casos de águas baixas e médias, a situação calma (sem vento) é a mais crítica, uma vez que se considera o vento atuando no sentido NE-SO, provocando então

uma maior dispersão. Contudo, o vento pode ter uma influência negativa se atuar no sentido SO-NE, fato observado no caso de águas altas.

Nas três próximas aplicações do modelo, realizam-se controles em diversas cargas, dando às águas do rio Guaíba uma melhor qualidade.

#### 7º CASO

- todas as cargas sujeitas a controle
- época de águas baixas e situação calma

Os resultados obtidos são mostrados na figura 6.19.

#### 8º CASO

- todas as cargas sujeitas a controle
- época de águas médias e situação calma

Os resultados obtidos são mostrados na figura 6.20.

#### 9º CASO

- todas as cargas sujeitas a controle
- época de águas altas e situação calma

Os resultados obtidos são mostrados na figura 6.21.

Na tabela 6.2, são mostradas as cargas antes e após o controle, para as três situações acima.

Tabela 6.2

ORIGEM DAS CARGAS	Cargas Brutas em $10^8$ NMP/seg	Cargas em $10^8$ NMP/seg após o controle		
		$Q=700\text{ m}^3/\text{seg}$	$Q=1000\text{ m}^3/\text{seg}$	$Q=1500\text{ m}^3/\text{seg}$
1. Ponta da Cadeia	2751.14	*12.70	*2.75	*3.73
2. Arroio do Dilúvio	302.08	*72.17	*20.28	*39.75
3. DNOS EBA nº 12	1.04	1.04	1.04	1.04
4. DNOS EBA nº 12	1.04	1.04	1.04	1.04
5. Arroio da Divisa	91.32	*73.64	*17.85	*20.53
6. Arroio Cavalhada	2.89	2.89	*2.00	*2.37
7. Canal de Assunção Arroio Cavalhada	4.51	4.51	4.51	4.51
8. Canal de Assunção Canal O. Nemeyer	2.59	2.59	2.59	2.59
9. Canal O. Nemeyer	1.97	*0.00	*0.00	1.97
10. Arroio Capivara	9.14	*7.58	*7.80	9.14
11. Arroio E. Santo	2.55	2.55	2.55	2.55
12. Arroio do Salso	15.30	*0.00	*13.67	15.30
13. Arroio Arado Velho	1.39	*0.00	*0.00	1.39
14. Arroio do Conde	1.27	1.27	1.27	1.27
15. Arroio do Conde	1.27	1.27	1.27	1.27
16. Conduto CELUPA	5.15	*0.00	5.15	5.15
17. Conduto CELUPA	5.15	5.15	5.15	5.15
18. Vila Elsa	1.74	*0.28	1.74	1.74
19. Barra do Ribeiro	1.04	1.04	1.04	1.04
T O T A L	3202.58	189.72	91.70	121.53

\* Cargas a serem tratadas

CONCENTRAÇÕES DE COLIFORMES FECAIS  
PARA O RIO GUAÍBA EM NMP/100 ML.

Vazão:  $700 \text{ m}^3/\text{seg}$

Limite superior das cargas: Valores brutos

Limite de concentrações: 8000

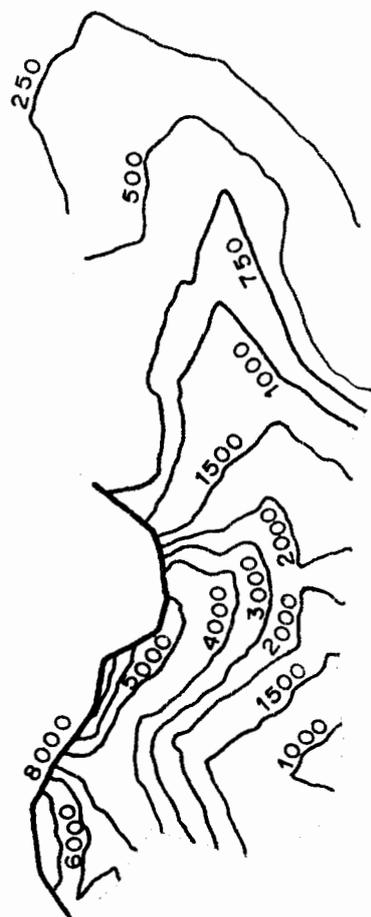


FIG. 6.19

CONCENTRAÇÕES DE COLIFORMES FECAIS PARA  
O RIO GUAÍBA EM NMP/100 ML.

Vazão: 1000 m<sup>3</sup>/seg

Limite superior de cargas: Valores brutos

Limite de concentrações: 5000



FIG. 6.20

CONCENTRAÇÕES DE COLIFORMES FECAIS  
PARA O RIO GUAÍBA EM NMP/100 ML.

Vazão:  $1500 \text{ m}^3/\text{seg}$

Limite superior das cargas: Valores brutos

Limite de concentrações: 5000



FIG. 6.21

Com relação às soluções ótimas encontradas para as três situações acima, são válidas as seguintes observações:

1. Para as situações de águas médias e altas, a qualidade das águas do rio Guaíba fica enquadrada na classe dois, sendo que para o caso de águas altas, o tratamento realizado nas cargas é menor.
2. Para a situação de águas baixas, a qualidade das águas do rio Guaíba fica na maioria dos pontos enquadrada na classe dois, sendo que na zona próxima a Porto Alegre, estas enquadram-se na classe três.
3. (1) e (2) servem para comprovar o que foi observado nos seis primeiros casos, isto é, quanto menor for a vazão mais crítica é a situação.

### CONSIDERAÇÕES FINAIS

Mediante os exemplos apresentados, pode-se concluir que o modelo desenvolvido neste trabalho cumpre seu objetivo, visto que para os exemplos teóricos foram obtidos os resultados esperados, e para os exemplos práticos (APLICAÇÕES AO RIO GUAÍBA), a solução encontrada é perfeitamente compatível com pesquisas realizadas pelo DMAE [13].

Quanto ao programa computacional desenvolvido, destacam-se a facilidade de comunicação do usuário com o computador através do emprego dos sistemas HYDRO [1] [5] e TEMPO [4], e a potencialidade do programa, pois vale ressaltar que apesar de ter sido feito apenas um estudo com respeito a concentrações de coliformes fecais para o rio Guaíba, pode-se também estudar outros tipos de concentrações tais como oxigênio dissolvido, demanda bioquímica de oxigênio, temperatura e salinidade.

Como o objetivo do trabalho é apresentar e testar o modelo proposto, é aconselhável fazer um estudo mais completo do rio Guaíba em relação a concentrações de coliformes fecais, e também aplicar o modelo bioquímico, o que não foi feito devido à dificuldade de obtenção de dados.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. AWRUCH, A.M. HYDRO: uma linguagem orientada para hidrodinâmica computacional. Porto Alegre, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFRGS, 1980. (Tese de Doutorado em andamento).
2. BRASIL. Ministério do Interior. Secretaria Especial do Meio Ambiente. Legislação básica. Brasília, 1976.
3. BREBBIA, C.A. & FERRANTE, A.J. The finite element technique. Porto Alegre, UFRGS, 1975.
4. BURROUGHS CORPORATION. B-7700/B-6700 TEMPO Mathematical Programming System, 1971.
5. FERRANTE, A.J. & AWRUCH, A.M. HYDRO: uma linguagem orientada para hidrodinâmica computacional. In: SIMPÓSIO SOBRE SISTEMAS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA CIVIL, 19., Rio de Janeiro, out. 1977. Anais. Rio de Janeiro, COPPE, 1977. v.2, p.587-600.
6. FUTAGAMI, T. Finite element & linear programming method and water pollution control. Proceedings of the 16th Congress of the International Association for Hydraulic Research, 16., São Paulo, 1975. v.3. p.54-61.
7. FUTAGAMI, T.; TAMAI, N.; YATSUZUKA, M. FEM coupled with LP for water pollution control. Journal of the Hydraulics Division, New York, ASCE, 102(7):881-97, July 1976.
8. GASS, Saul I. Linear programming; methods and applications. 2.ed. New York, McGraw-Hill, 1964.
9. GUYMON, G.L.; SCOTT, V.H.; HERRMANN, L.R. A general numerical solution of the two-dimensional diffusion-

- convection equation by the finite element method.  
Water Resources Research, Washington, 6(6):1611-7,  
Dec. 1970.
10. HOLLEY, E.R. Unified view of diffusion and dispersion.  
Journal of the Hydraulics Division, New York, ASCE,  
95(2):621-31, Mar. 1969.
  11. O'CONNOR, D.M. The temporal and spatial distribution  
of DO in streams. Water Resources Research,  
Washington, 3:65-79, 1967.
  12. PARTRIDGE, P.W. & FERRANTE, A.J. Finite elements in  
hydraulics. In: SIMPÓSIO SOBRE SISTEMAS COMPUTACIO-  
NAIS PARA ENGENHARIA CIVIL, 19., Rio de Janeiro, Out.  
1977. Anais. Rio de Janeiro, COPPE, 1977. v.2,  
p.556-586.
  13. PORTO ALEGRE. Departamento Municipal de Águas e Esgo-  
tos. Modelo matemático de qualidade de água aplica-  
do ao rio Guaíba. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGE-  
NHARIA SANITÁRIA E AMBIENTAL, 10., Manaus, Jan.  
1979. v.3, p.13-120.
  14. PUCCINI, A.L. Introdução à programação linear. Rio  
de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos, 1978.
  15. RIO GRANDE DO SUL. Assembléia Legislativa. Comissão Par-  
lamentar para o Estudo da Poluição e Defesa do Meio  
Ambiente. Poluição & desenvolvimento. Porto Ale-  
gre, 1972.
  16. SÃO PAULO. Centro Tecnológico de Saneamento Básico.  
Água: qualidade, padrões de potabilidade e poluição.  
São Paulo, 1969.
  17. THOMAS, H.A. Pollution load capacity of streams.  
Watered Sewage Works, 95:405, 1948.

18. TAMURA, H.; STEHFEST, H.; SONCINI-SESSA, R.; RINALDI, S. Modeling and Control of River Quality. Great Britain, McGraw-Hill, 1979.
19. ZIENKIEWICZ, O.C. The finite element method in engineering science. 2.ed. New York, McGraw-Hill, 1971.