

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

ESTUDO EXPLORATÓRIO DE ESCOAMENTOS TRANSVERSAIS SOBRE CORPOS  
SUBMERSOS  
GERAÇÃO DE SOLUÇÕES PRELIMINARES PARA AS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES  
BIDIMENSIONAIS EM REGIME TRANSIENTE

por

Tomás Mallmann Paganin

Monografia apresentada ao Departamento de Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Engenheiro Mecânico.

Porto Alegre, novembro de 2015



Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Escola de Engenharia  
Departamento de Engenharia Mecânica

ESTUDO EXPLORATÓRIO DE ESCOAMENTOS TRANSVERSAIS SOBRE CORPOS  
SUBMERSOS  
GERAÇÃO DE SOLUÇÕES PRELIMINARES EXATAS PARA AS EQUAÇÕES DE NAVIER-  
STOKES BIDIMENSIONAIS EM REGIME TRANSIENTE

por

Tomás Mallmann Paganin

ESTA MONOGRAFIA FOI JULGADA ADEQUADA COMO PARTE DOS  
REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE  
**ENGENHEIRO MECÂNICO**  
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELA BANCA EXAMINADORA DO  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Prof. Alcy Rodolfo dos Santos Carrara  
Coordenador do Curso de Engenharia Mecânica

Área de Concentração: **Ciências Térmicas**

Orientador: Prof. Jorge Rodolfo Silva Zabadal

Comissão de Avaliação:

Prof. Horácio Antonio Vielmo

Prof. Volnei Borges

Prof. Thamy Cristina Hayashi

Porto Alegre, 17 de novembro de 2015.

PAGANIN, T. M. **Simulação de Escoamentos Transversais em Corpos Submersos. Soluções Exatas para a Equação de Helmholtz Bidimensional em Regime Transiente.** 2015. 20 folhas. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015.

## **RESUMO**

O trabalho proposto apresenta uma nova abordagem para a resolução das equações de Navier-Stokes bidimensionais em regime estacionário para escoamentos incompressíveis. O método é baseado em um processo de redução de ordem que se assemelha às Transformações de Bäcklund em sua forma clássica. Esse esquema é indiretamente empregado para transformar as equações de Navier-Stokes em uma nova equação diferencial parcial não-linear, expressa em termos da função corrente. Embora a solução correspondente não seja capaz de reproduzir o comportamento típico de uma esteira de vórtices, constitui um ponto de partida adequado para produzir soluções mais realistas, utilizando as simetrias de Lie que estão disponíveis na literatura.

**PALAVRAS-CHAVE:** Escoamentos Transversal; Equação de Navier-Stokes Bidimensionais Transientes; Simetrias de Lie; Transformações de Bäcklund.

PAGANIN, T. M. **Cross Flow Simulation in Submerged Bodies. Exact Solutions to the Two Dimensional Unsteady Helmholtz Equation.** 2015. 20 folhas. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015.

## **ABSTRACT**

This work presents a new analytical approach for solving the unsteady two dimensional Navier-Stokes equations for incompressible flows. The method is based on a process involving reduction of order which resembles the classical Bäcklund transformations. This procedure is indirectly employed to map the Navier-Stokes equations into a second order nonlinear partial differential one for the stream function. Although the corresponding solution do not reproduces the behavior of a typical turbulent wake, it constitutes a suitable starting point to generate more realistic solutions by means of the Lie symmetries yet available in literature.

**KEYWORDS:** Cross Flows; Two Dimensional unsteady Navier-Stokes Equations; Lie Symmetries; Bäcklund Transformations.

## ÍNDICE

1.	INTRODUÇÃO .....	1
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....	1
3	OBJETIVOS .....	2
4	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA .....	2
4.1	Equação de Helmholtz bidimensional .....	2
4.2	Transformações de Bäcklund .....	3
4.3	Interpretação física das transformações de Bäcklund .....	4
5	METODOLOGIA .....	6
5.1	Introdução.....	6
5.2	Modelo difusivo para a pressão .....	7
5.3	Soluções da equação difusiva associada .....	8
5.4	Linhas de corrente .....	8
5.5	Exponenciais de operadores .....	9
5.6	Singularidade e corpos submersos .....	10
6	RESULTADOS E DISCUSSÃO.....	10
6.1	Mapa das linhas de fluxo .....	10
6.2	Solução da equação (5.17) para a função corrente.....	11
7.	CONCLUSÕES .....	12
8.	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	14
	Apêndice A .....	16

## 1. INTRODUÇÃO

O estudo de escoamentos sobre corpos submersos tem grande aplicabilidade na área da engenharia mecânica, desde eficiência em trocadores de calor até o estudo aerodinâmico de um veículo terrestre ou aeroespacial, contudo, a natureza complexa do comportamento físico que explica estes fenômenos dificulta a resolução analítica direta. Com surgimento de softwares de processamento simbólico, tornou-se viável a implementação de alguns métodos analíticos e híbridos para a resolução de problemas físicos. Este progresso no âmbito computacional permitiu utilizar métodos baseados em simetrias de Lie para a resolução de problemas de contorno contendo equações diferenciais parciais não lineares [Olver, 2000; Bluman e Kumei, 1989].

As simetrias de Lie consistem em mudanças de variáveis sobre uma solução exata de uma equação diferencial para gerar novas soluções, adicionando também elementos arbitrários em sua composição. Tais elementos arbitrários e troca de variáveis permitem a solução satisfazer uma classe mais ampla de condições de contorno, resultando em um conjunto mais amplo de aplicações. Contudo este método parte do pressuposto de haver uma solução inicial na qual pode ser aplicada as simetrias, sendo necessário então já haver uma solução exata desenvolvida previamente.

O presente trabalho contribui para este tema buscando uma solução exata preliminar para as equações de Navier-Stokes bidimensionais transientes para escoamentos viscosos incompressíveis sobre um corpo submerso de geometria específica. Esse processo utiliza as transformações de Bäcklund para fatorar as equações de Navier-Stokes em um sistema de equações diferenciais parciais de primeira ordem, levando à obtenção de uma única equação diferencial parcial expressa em termos da função corrente.

## 2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A teoria de grupos elucida vários métodos e resultados de integrações de equações que são amplamente utilizados na prática. Isto permite compreender as conexões entre diferentes métodos e unifica-los. Métodos de integração mais gerais de teorias de grupos de equações diferenciais parciais podem ser encontrados em Lie, 1881, disponível também em anexo em Ibragimov, 1995. O trabalho de Lie era focado em métodos gerais de integração através de teoria de grupos, a partir do método de Monge e do método das características. Essa é a razão pela qual muitos de seus trabalhos lidavam com equações diferenciais ordinárias ou equações diferenciais parciais de primeira ordem.

Com o falecimento prematuro de Sophus Lie, em 1899, o método caiu em desuso, sendo resgatado no final da década de 1940 e no início da década de 1950 por Lev Ovssianikov. Duas décadas mais tarde seu seguidor Nail Ibragimov popularizou o método na escola russa através da publicação de uma série de artigos e livros originais com aplicações em engenharia. Com o surgimento de sistemas de computação simbólica os métodos baseados em simetrias passaram a ser facilmente implementáveis em computadores pessoais, a partir de então o método começou a ser difundido de forma mais ampla com os trabalhos de Olver, 2000, Bluman e Kumei, 1989, e Polyanin, 2004.

Como resultado de um esforço conjunto de muitos pesquisadores, essas soluções especiais são hoje identificadas como soluções invariantes no sentido de Lie. Em particular, a aplicação do método de Lie na mecânica dos fluidos resultou na obtenção de dois extensos grupos de simetrias para as equações de Navier-Stokes [Ibragimov, 1995].

Beck, 2005, desenvolveu soluções para escoamentos bidimensionais sobre corpos submersos utilizando estas simetrias de Lie junto do método de Split, encontrando os componentes da velocidade e linhas de corrente, podendo também simular os efeitos da turbulência e gerar a esteira de vórtices do escoamento. Em uma publicação mais recente do mesmo autor [Beck, 2009], a metodologia foi expandida para casos tridimensionais.

Hopf, 1950, e Cole, 1951, utilizaram uma metodologia analítica diferente para a resolução da equação de Burgers, relacionando a equação advectivo-difusiva com a equação de condução do calor. Tal metodologia ficou conhecida como transformações de Cole-Hopf, sendo posteriormente generalizada para mais casos unidimensionais em Miskinis, 2013.

Zabada *et alii*, 2014, descrevem um método analítico para resolver equações diferenciais advectivo-difusivas bidimensionais. Aplicando as transformações de Bäcklund na equação de Helmholtz, que consiste em um método de split junto de reduções de ordem, conseguem obter uma relação entre modelos de difusão pura e equações hidrodinâmicas. O trabalho também ressalta a utilização de uma hipótese simplificativa específica: do campo de pressão ser um campo de pressão de Bernoulli, tendo a pressão produzida próxima a parede do sólido e transferida para o resto do escoamento apenas por difusão. A condição de contorno utilizada neste método foi de não penetração na superfície do sólido.

### 3.OBJETIVOS

Este trabalho apresenta um estudo exploratório que visa a obtenção de uma solução preliminar capaz de dar início a um processo de generalização, empregando simetrias de Lie, afim de gerar novas soluções que reproduzam cenários físicos realistas. A solução preliminar, por sua vez, é obtida através de processos de redução de ordem denominados transformações de Bäcklund. As equações auxiliares obtidas através desta técnica podem ser resolvidas utilizando métodos convencionais de resolução de equações diferenciais parciais, tais como método das características e separação de variáveis.

### 4.FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

#### 4.1 Equação de Helmholtz bidimensional

O escoamento incompressível de um fluido pode ser descrito a partir das equações de Navier-Stokes bidimensionais transientes, que são apresentadas abaixo (4.1) e (4.2):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (4.2)$$

sendo  $u(x, y, t)$  e  $v(x, y, t)$  as componentes da velocidade na direção  $x$  e  $y$  em coordenadas cartesianas,  $\nu$  a viscosidade cinemática do fluido,  $p$  o campo de pressão e  $\rho$  a densidade do fluido.

Derivando a equação (4.1) em  $y$  e a equação (4.2) em  $x$  e subtraindo a segunda pela primeira, o que seria o mesmo que aplicar o operador rotacional sobre as equações de Navier-Stokes bidimensionais, obtém-se (4.3):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x \partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x \partial y} + \nu \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \quad (4.3)$$

tendo como a vorticidade  $\omega = \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$ , encontra-se a equação de Helmholtz :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (4.4)$$

Ressalta-se a vantagem de trabalhar com a equação de Helmholtz por ser não apresentar explicitamente o termo do campo de pressão.

## 4.2 Transformações de Bäcklund

O princípio das transformações de Bäcklund consiste na fatoração de uma equação diferencial em um sistema de mais equações de ordem reduzida. Segundo Polyanin e Zaitsev, 2004, busca-se encontrar duas equações, que combinadas possam gerar a original via derivação. Pressupõem-se então que existem equações diferenciais dadas por  $a(u, v, u_t, v_t, \omega, \omega_x, \omega_y) = 0$  e  $b(u, v, u_t, v_t, \omega, \omega_x, \omega_y) = 0$ . Os subíndices representam as derivadas parciais dos termos pela variável indicada.

Procura-se então a estrutura das funções  $a$  e  $b$  para a função  $F$  de tal modo que:

$$F(u, v, u_t, v_t, \omega, \omega_x, \omega_y) - D_x a - D_y b = 0 \quad (4.5)$$

sendo  $D_x$  e  $D_y$  os operadores de derivadas materiais em relação à variável referente ao subíndice e  $F(u, v, u_t, v_t, \omega, \omega_x, \omega_y)$  uma função a determinar, neste caso, a equação de Helmholtz.

Aplicando separadamente a derivação material em  $x$  e  $y$  sobre as funções  $a$  e  $b$  respectivamente, resultaram nas equações (4.6) e (4.7) apresentadas a seguir:

$$\frac{\partial a}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial u_t} \frac{\partial u_t}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial v_t} \frac{\partial v_t}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial \omega_x} \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial \omega_y} \frac{\partial \omega_y}{\partial x} = 0 \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial b}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial b}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial b}{\partial u_t} \frac{\partial u_t}{\partial y} + \frac{\partial b}{\partial v_t} \frac{\partial v_t}{\partial y} + \frac{\partial b}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial b}{\partial \omega_x} \frac{\partial \omega_x}{\partial y} + \frac{\partial b}{\partial \omega_y} \frac{\partial \omega_y}{\partial y} = 0 \quad (4.7)$$

De tal forma que a equação (4.5) só pode ser satisfeita caso os termos de  $-(D_x a + D_y b)$  se cancelem com os da equação alvo, resultando num sistema de equações diferenciais de baixa ordem, que definem a estrutura das equações  $a$  e  $b$ . A resolução deste sistema é apresentada no Apêndice A, conferindo os seguintes resultados às equações  $a$  e  $b$ :

$$a = u\omega - \nu \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial q}{\partial y} \quad (4.8)$$

$$b = v\omega - v \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} \quad (4.9)$$

onde  $q$  é uma fonte arbitrária adicionada para recuperar qualquer função que esteja no espaço nulo do operador divergente, o que inclui o campo de pressão. Pode-se verificar que a equação alvo é imediatamente obtida ao derivar  $a$  em  $x$  e  $b$  em  $y$  e somando as duas equações, obtém-se a equação alvo.

### 4.3 Interpretação física das transformações de Bäcklund

Toda equação diferencial de segunda ordem, seja ela linear ou não, pode ser reduzida a um sistema de equações auxiliares de primeira ordem que possuem estruturas análogas as da lei de Fick, como por exemplo a equação:

$$u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = D \left( \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) \quad (4.10)$$

onde  $C$  corresponde a concentração de uma substância dissolvida em um fluido e  $D$  o coeficiente de difusão desta substância. A equação (4.10) pode sofrer redução de ordem, produzindo as seguintes equações auxiliares:

$$uC = D \frac{\partial C}{\partial x} \quad (4.11)$$

$$vC = D \frac{\partial C}{\partial y} \quad (4.12)$$

Estas equações auxiliares definem o fluxo de massa na lei de Fick. De forma análoga a equação de energia em regime estacionário, dada por :

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (4.13)$$

onde  $T$  é a temperatura e  $\alpha$  a difusividade térmica. A equação (4.13) também admite uma forma fatorada idêntica:

$$uT = \alpha \frac{\partial T}{\partial x} \quad (4.14)$$

$$vT = \alpha \frac{\partial T}{\partial y} \quad (4.15)$$

Analogamente a equação de Helmholtz, modelo hidrodinâmico que descreve a propagação de vorticidade, dada por:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (4.16)$$

também admite uma forma fatorada, cuja estrutura é idêntica as anteriores.

$$u\omega = \nu \frac{\partial \omega}{\partial x} \quad (4.17)$$

$$v\omega = v \frac{\partial \omega}{\partial y} \quad (4.18)$$

Assim qualquer equação diferencial advectivo-difusiva admite reduções de ordem que produzem estruturas análogas a lei de Fick. Isto significa que existem leis de conservação associadas às equações dinâmicas e que, além disso, essas equações são correlacionadas através de um balanço em volume de controle infinitesimal.

De fato derivando a equação (4.17) em relação a  $x$  e a equação (4.18) em relação a  $y$  e somando os resultados, obtém-se:

$$u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} + \omega \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = v \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (4.19)$$

uma vez que a terceira parcela do membro esquerdo na equação (4.19) é nula devido a equação da continuidade para escoamentos incompressíveis, o modelo se reduz à equação de transporte em sua forma original. Como essa operação equivale a aplicação do operador divergente sobre o sistema de equações auxiliares, esse procedimento é totalmente equivalente a um balanço em um volume de controle. Em suma, toda a equação válida para macro escala pode ser decomposta em um sistema auxiliar de equações de menor ordem que podem ser interpretadas com leis de Fick generalizadas.

## 5. METODOLOGIA

### 5.1 Introdução

Neste capítulo será abordado a metodologia utilizada no trabalho, exposta inicialmente através do fluxograma disponível na Figura 5.1:

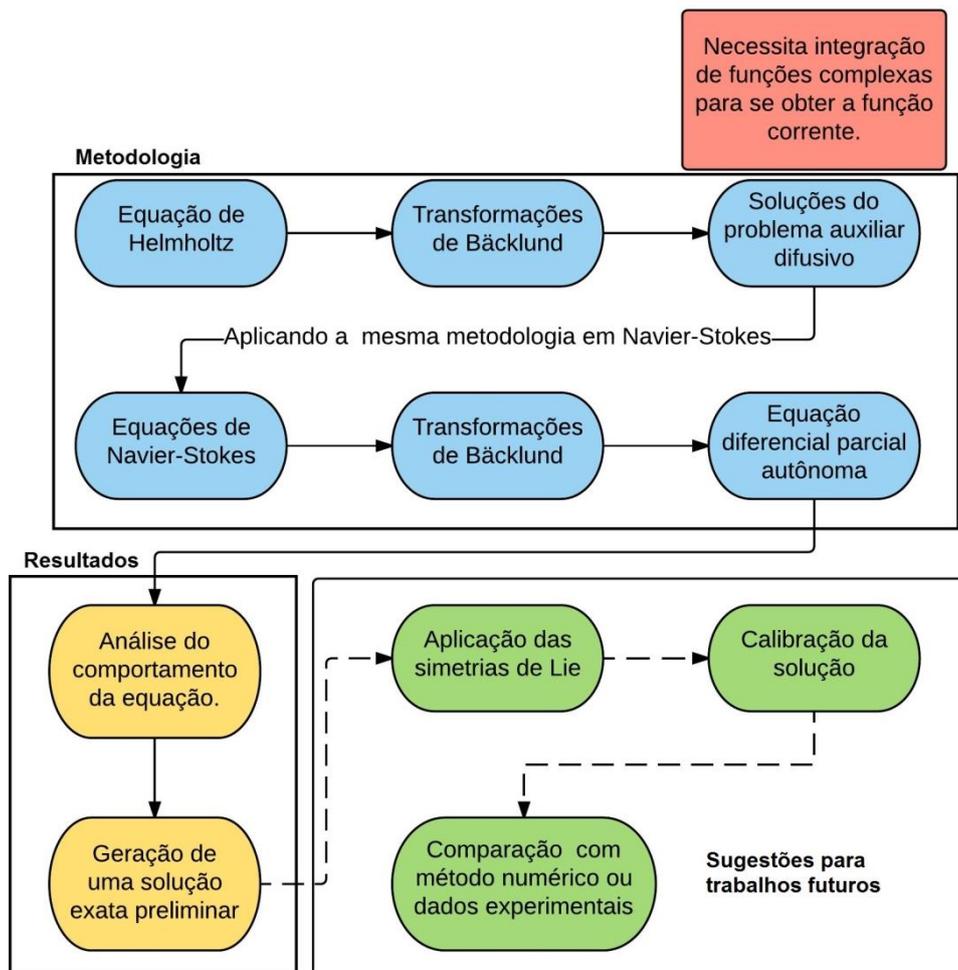


Figura 5.1 – Fluxograma das etapas do trabalho.

Como pode-se ver no fluxograma disposto no Figura (5.1), o trabalho consiste inicialmente na aplicação da metodologia apresentada por Zabadal *et alli*, 2014, para a equação de Helmholtz, gerando uma solução inicial para a equação, mas não em termos da função corrente. Tais resultados comprovam a capacidade do método de fornecer soluções, contudo pouco práticas quando aplicadas na equação de Helmholtz. Segue-se a metodologia aplicando as transformações de Bäcklund nas equações de Navier-Stokes, resultando por fim em uma equação diferencial parcial autônoma em termos da função corrente.

A análise do comportamento da função autônoma é exposta nos resultados assim como a geração de uma solução exata inicial. Ao final da Figura (5.1) têm-se as

sugestões para trabalhos futuros, as quais consistem na aplicação das simetrias de Lie dispostas na literatura [Ibragimov, 1995 e 1996], a calibração desta solução final e um teste de validação comparando os escoamentos gerados pelo método apresentado e ensaios experimentais ou modelos numéricos.

## 5.2 Modelo difusivo para a pressão

Seguindo a metodologia apresentada por Zabadal *et alli*, 2014, demonstrou-se uma relação entre as equações fatoradas e um modelo puramente difusivo. Derivando a (4.8) e (4.9) por  $y$  e  $x$  respectivamente e subtraindo a primeira pela segunda obtém-se uma restrição diferencial:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \omega - u \frac{\partial \omega}{\partial y} + v \frac{\partial \omega}{\partial x} = -\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} \quad (5.1)$$

escrevendo os termos desta restrição diferencial em forma da função corrente, encontra-se a equação (5.2):

$$q = -\frac{1}{2} \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi + h(x, y, t) \quad (5.2)$$

onde  $\varphi$  corresponde às linhas de corrente do escoamento, por consequência  $u = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$  e  $v = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ , e  $h(x, y, t)$  é qualquer função harmônica arbitrária, solução da equação de Laplace bidimensional, que pode ser interpretada como o efeito do corpo submerso sobre a pressão desde que ela possua uma singularidade. Na equação (5.2) pode-se também interpretar o primeiro termo do lado direito como a energia cinética por unidade de massa.

Para uma função solução da equação de Laplace, a equação generalizada para  $h(x, y, t)$  corresponde a (5.3):

$$h(x, y, t) = n(x + iy, t) + m(x - iy, t) \quad (5.3)$$

onde  $n$  e  $m$  são funções arbitrárias. Caso a função harmônica (5.3) seja desconsiderada, a equação (5.2) pode ser interpretada como um modelo de difusão de energia cinética por unidade de massa.

Realizando uma troca de variáveis de modo que cria-se uma variável independente  $f$ , sendo esta:

$$f = -\frac{1}{2} \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi = -\frac{1}{2} (u^2 + v^2) \quad (5.4)$$

também conhecida como campo de pressão de Bernoulli. Seguindo a mesma metodologia apresentada, encontra-se um sistema puramente difusivo escrito na forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} g(f) = v \nabla^2 g(f) \quad (5.5)$$

onde  $g$  é uma função de  $f$  da forma  $g = c_0 + c_1 f^{\frac{3}{2}}$  e solução de um problema puramente difusivo, onde  $c_0$  e  $c_1$  são constantes arbitrárias. Os componentes da velocidade foram também deduzidos em função da variável  $f$ :

$$u = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\frac{1}{2f} \nabla f \cdot \nabla f}} \quad (5.6)$$

$$v = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\frac{1}{2f} \nabla f \cdot \nabla f}} \quad (5.7)$$

### 5.3 Soluções da equação difusiva associada

Existe atualmente disponíveis na literatura algumas soluções exatas para equações puramente difusivas. Em Polyanin, 2002, é tabelado diversas soluções nas quais podem ser utilizadas para resolver o modelo difusivo encontrado. Neste caso, optou-se por uma função com comportamento exponencial de forma:

$$g(f) = g(x, y, t) = \frac{1}{4\pi vt} e^{\left(-\frac{x^2+y^2}{4vt}\right)} \quad (5.8)$$

resultando na função  $f$  ser:

$$f(x, y, t) = \left( \frac{\frac{1}{4\pi vt} e^{\left(-\frac{x^2+y^2}{4vt}\right)} - c_0}{c_1} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (5.9)$$

### 5.4 Obtenção de uma equação dinâmica para a função corrente

Segundo as definições das linhas de corrente [Fox 1985], pode-se obtê-las a partir da integração de uma das componentes da velocidade, contudo muitas vezes este processo torna-se muito complexo dependendo de que tipo de função que se deve integrar. Entretanto é evidente que a metodologia utilizada para resolver a equação de Helmholtz também deve valer para as equações de Navier-Stokes, visto que as soluções de Navier-Stokes estão no conjunto de soluções de Helmholtz, sendo possível fatorar suas equações, utilizando as transformações de Bäcklund, e obtendo:

$$u^2 = v \left( \frac{\partial}{\partial x} u + \frac{\partial}{\partial y} v \right) - \frac{P}{\rho} + \frac{\partial \delta}{\partial y} \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi + uv = v \left( \frac{\partial}{\partial y} u - \frac{\partial}{\partial x} v \right) - \frac{\partial \delta}{\partial x} \quad (5.11)$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} \varphi + uv = v \left( -\frac{\partial}{\partial y} u + \frac{\partial}{\partial x} v \right) + \frac{\partial \tau}{\partial y} \quad (5.12)$$

$$v^2 = v \left( \frac{\partial}{\partial x} u + \frac{\partial}{\partial y} v \right) - \frac{P}{\rho} - \frac{\partial \tau}{\partial x} \quad (5.13)$$

onde, neste caso,  $\delta$  e  $\tau$  são funções que pertencem ao espaço nulo do divergente.

Somando as equações (5.11) e (5.12), obtém-se:

$$2vu = \frac{\partial \tau}{\partial y} - \frac{\partial \delta}{\partial x} \quad (5.14)$$

e realizando também a subtração da equação (5.11) pela equação (5.12), obtém-se:

$$2 \frac{\partial}{\partial t} \varphi = 2v \left( \frac{\partial}{\partial y} u - \frac{\partial}{\partial x} v \right) - \frac{\partial \delta}{\partial x} - \frac{\partial \tau}{\partial y} \quad (5.15)$$

Substituindo-se então o resultado obtido pela equação (5.14) na equação (5.15), resulta a equação (5.16):

$$2 \frac{\partial}{\partial t} \varphi = 2v \left( \frac{\partial}{\partial y} u - \frac{\partial}{\partial x} v \right) + 2vu \quad (5.16)$$

que pode ser escrita somente em termos da linha de corrente  $\varphi$ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + v \nabla^2 \varphi \quad (5.17)$$

Dessa forma, foi obtida uma equação de ordem reduzida para a determinação da linha de corrente em regime transiente, cuja solução pode ser obtida usando exponenciais de operadores, sem a necessidade de integrar funções complexas.

### 5.5 Exponenciais de operadores

Segundo Dattoli *et alli*, 1998, a equação resultante (5.17) pode ser resolvida para a função corrente utilizando soluções formais baseadas em exponenciais de operadores de forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi = A \varphi \quad (5.18)$$

A fim de obter a solução formal da equação (5.18), considerou-se inicialmente que A é uma constante. Separando a variável e integrando, obtém-se:

$$\varphi = e^{At} \varphi_0 \quad (5.19)$$

Esta estrutura permanece válida quando A é um operador diferencial que contém apenas derivadas em relação as variáveis espaciais. Nesta caso, a exponencial de  $At$  é também um operador cuja ação sobre a função  $\varphi_0$  pode ser avaliado ao expandir em série de Taylor a solução formal obtida:

$$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{t^k A^k}{k!} \right) \varphi_0 \quad (5.20)$$

Desta forma a solução explicita é obtida ao aplicar recursivamente o operador A sobre a função  $\varphi_0$ , que descreve o estado inicial do campo de escoamento. Considerou-se neste trabalho séries de quatro termos. Observa-se também que a utilização de uma série de Taylor truncada gera soluções não exatas, entretanto permitem uma avaliação do comportamento da equação diferencial. Tal comportamento será analisado para avaliar se esta equação diferencial apresenta um comportamento semelhante aos efeitos esperados das equações de Navier-Stokes, como efeito da geração de micro vórtices a partir de vórtices maiores.

## 5.6 Singularidade e corpos submersos

Um corpo submerso em um escoamento transversal pode ser considerado uma singularidade no campo, desviando as linhas de corrente para fora da região onde deve haver um sólido, visto a impossibilidade de penetração do campo através da superfície sólida. Pode-se gerar esta singularidade com séries de Laurent [Pires, 1998]:

$$\varepsilon = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \quad (5.21)$$

onde cada  $a_n$ , é geralmente, um número complexo. Neste trabalho utilizou-se a série na forma:

$$\varepsilon = \frac{1}{x+iy} \quad (5.22)$$

onde  $i = \sqrt{-1}$  e  $\varepsilon$  é a série de Laurent com apenas um termo.

## 6. RESULTADOS E DISCUSSÃO

### 6.1 Mapa das linhas de fluxo

Afim de estudar a configuração das linhas de corrente de um escoamento sobre um corpo submerso, foram utilizadas soluções geradas através da aplicação de exponenciais de operadores sobre um campo de escoamento inicial descrito como segue. Tomando-se um escoamento transversal sobre um cilindro de raio 2,8m, correspondente ao número de Reynolds 3500 e escolhendo uma condição inicial de duplo vórtice predominantemente laminar da forma  $\varphi_0 = -ye^{(-x^2-y^2)}$ , obteve-se a Figura (6.1) e (6.2).

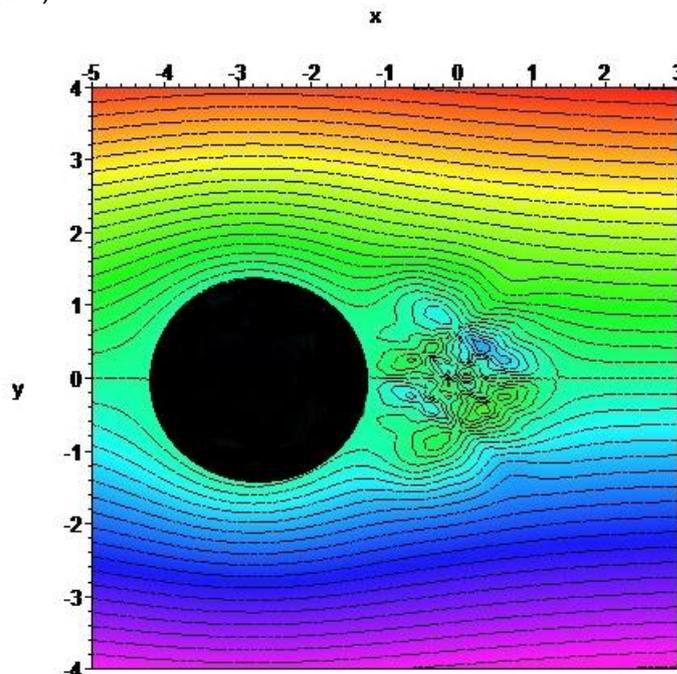


Figura 6.1. - Linhas de corrente do escoamento em  $t = 2$  s com  $Re = 3500$ .

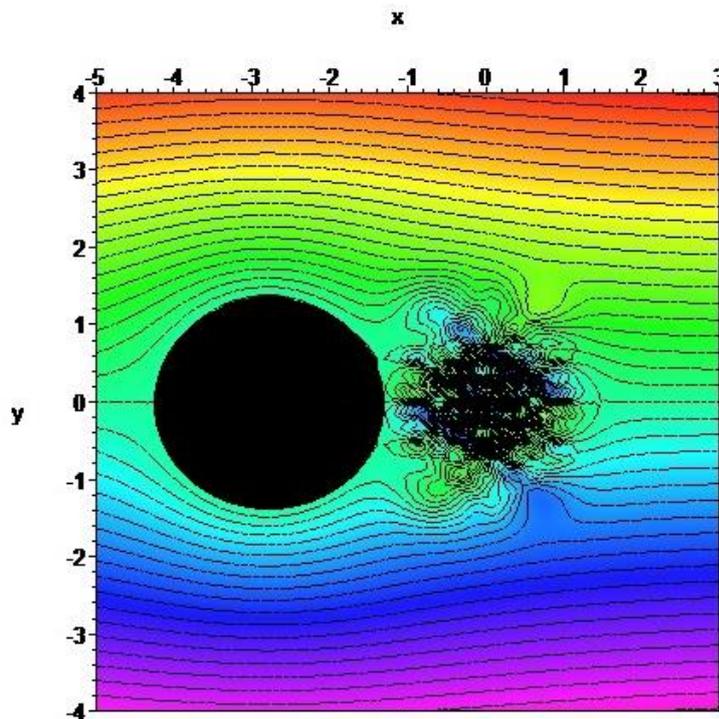


Figura 6.2. - Linhas de corrente do escoamento em  $t = 5 s$  com  $Re = 3500$ .

Nas Figuras (6.1) e (6.2) tem-se os quadros de uma animação gerada em Maple 13 em 2,5s e 5s a partir do método de exponenciais de operadores. Tal animação mostra um estudo preliminar da evolução das linhas de corrente ao longo do tempo sobre um corpo submerso, demonstrando o comportamento da equação diferencial (5.17). Nesta animação, apesar de não representar um caso físico realista, percebe-se um efeito característico das equação de Navier-Stokes, que consiste na geração de oscilações de frequência superior da perturbação introduzida no  $t = 0s$ . Embora este resultado constitui uma aproximação grosseira para a respectiva solução exata, o fato de terem sido produzidas oscilações de maior frequência encoraja a obtenção de soluções exatas para a equação (5.17).

## 6.2 Solução da equação (5.17) para a função corrente

Tendo a equação diferencial (5.17) apresentado um comportamento qualitativamente semelhante ao das equações de Navier-Stokes, pode-se também gerar uma solução relativamente simples, contudo exata, para a equação (5.17). Sendo esta uma equação autônoma, pode ser convertida em uma equação diferencial ordinária através da definição de uma nova variável independente na forma:

$$\sigma = c_0 + c_1x + c_2y + c_3t \quad (6.1)$$

nesta equação,  $c_0$ ,  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$  são constantes arbitrárias. Redefinindo a equação (5.17) em termos de argumento  $\sigma$ , resulta:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 \psi}{\partial \sigma^2} \left( \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \sigma}{\partial y} \right)^2 \right) \quad (6.2)$$

Substituindo as expressões correspondentes às derivadas de  $\sigma$  em relação aos argumentos originais, obtém-se:

$$c_3 \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} = (c_1 c_2) \left( \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \right)^2 + \nu (c_1^2 + c_2^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \sigma^2} \quad (6.3)$$

a qual pode ser resolvida por métodos analíticos conhecidos. Neste caso, a equação diferencial resultante pode ser resolvida por sucessivas reduções de ordens, resultando:

$$\varphi = \ln \left( \frac{c_1 c_2 \left( \varepsilon_1 \nu e^{\left( \frac{c_3 \sigma}{\nu(c_1^2 + c_2^2)} \right)} c_1^2 + \varepsilon_1 \nu e^{\left( \frac{c_3 \sigma}{\nu(c_1^2 + c_2^2)} \right)} c_2^2 + \varepsilon_2 c_3 \right)}{\nu c_3 (c_1^2 + c_2^2)} \right) \frac{\nu (c_1^2 + c_2^2)}{c_1 c_2} \quad (6.4)$$

onde  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  são funções arbitrárias.

A equação (6.4) é então uma solução exata admitida pela equação (5.17) e portanto pelas equações de Navier-Stokes (4.1) e (4.2). Ainda que esta solução não consiga representar situações realísticas, é possível aplicar sobre esta solução as simetrias de Lie, disponíveis em Ibragimov, 1995. Uma vez que esta etapa foge ao escopo do trabalho por demandarem um tempo relativamente longo para um trabalho de conclusão de curso, deixa-se como recomendações para trabalhos futuros a médio e longo prazo.

## 7. CONCLUSÃO

A partir do estudo exploratório que resultou em uma solução preliminar para a forma fatorada das equações de Navier-Stokes bidimensionais em regime transiente, duas conclusões fundamentais foram obtidas no que diz respeito ao desempenho computacional da aproximação em série truncada e da possibilidade de expansão do respectivo espaço de soluções.

- i) Embora a série truncada não reproduza de forma realista o comportamento de uma esteira de vórtices, é possível utilizar a solução exata por (6.4) para dar início a um processo de generalização que eventualmente poderá, a longo prazo, produzir novas soluções capazes de emular cenários progressivamente mais realistas.
- ii) O desempenho computacional da solução truncada permite obter uma estimativa da ordem de grandeza do tempo de processamento requerido pela solução mencionada no item "i", o que permite inferir que o tempo de processamento demandado para a obtenção da solução final seja da ordem de poucos minutos.

Isso ocorre porque existem aproximadamente dez mudanças de variáveis a implementar sobre a solução definida pela equação (6.4) acompanhadas da inclusão de oito parâmetros arbitrários. Após a inclusão dos novos termos estima-se que o número total de caracteres da solução final triplique em relação a expressão em sua

forma original. A inclusão destes novos termos é deixada como recomendação para o desenvolvimento de futuras dissertações de mestrado e teses de doutorado.

## 8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Beck, D., 2005. **Soluções Exatas para a Equação de Helmholtz Bidimensional em Regime Transiente.** pp 79. Dissertação de mestrado – Programa de Pós-Graduação da Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

Beck, D., 2009. **Soluções Particulares para as Equações de Navier-Stokes Tridimensionais Transientes.** pp 100. Tese de doutorado – Programa de Pós-Graduação da Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

Bluman, G., Kumei, S., 1989. **Symmetries and differential equations.** Springer Verlag, New York.

Cole J.D., **On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics,** Quart. Appl. Math. 9. 225-236. 1951.

Dattoli, G., Giannessi, L., Quattromini, M., & Torre, A., 1998. **Exponential operators, operational rules and evolution problems.** *Nuovo Cimento B*, 113B(6), 699-710.

Fox, R. W., McDonald, A. T., **Introduction to Fluid Mechanics.** John Wiley & Sons, Inc. 5 ed. 1998.

Hopf E., **The partial differential equation  $ut+uux=\mu u_{xx}$ .** 1950. Comm. Pure Appl. Math. 3. pp 201-230. 1950.

Ibragimov, N. **CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations.** Vol. 2. CRC Press, Boca Raton. 1995.

Ibragimov, N. **CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations.** Vol. 3. CRC Press, Boca Raton. 1996.

Miškinis, P., **A Generalization of the Hopf-Cole Transformation.** Pp 19. Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications (SIGMA) 9. 2013.

Olver, P., 2000. **Applications of Lie Groups to differential equations.** Springer Verlag, New York.

Ovsiannikov, L. V. 1962. **Group Properties of Differential Equations.** Izdat. Sibirsk Otdel. Akad. Nauk S.S.S.R., Novosibirsk. (English translation by G. Bluman, 1967)

Pires, G. E. **Notas em Análise Complexa.** Notas de aula. Instituto Superior Técnico de Lisboa. 1998.

Polyanin A. D., **Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists.** Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton–London, 2002.

Polyanin, A. D., Zaitsev, V. F.; **Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations.** CRC Press: Boca Raton, pp. 703-706, 2004.

Zabadal, J. R., Bodmann, B., Ribeiro, V. G., Silveira, A., Silveira, A.; **Bäcklund Transformations: a Link Between Diffusion Models and Hydrodynamic Equations.** Computer Modeling in Engineering & Sciences, Vol. 103, No. 4, pp. 215-227, 2014.

## APÊNDICE A

## RESOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS GERADOS PELAS TRANSFORMAÇÕES DE BÄCKLUND.

Retomando-se as equações (4.4), (4.5), (4.6) e (4.7), agora identificadas como (A.1), (A.2), (A.3), (A.4), respectivamente:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = v \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (\text{A.1})$$

$$F(u, v, u_t, v_t, \omega, \omega_x, \omega_y) - D_x a - D_y b = 0 \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\partial a}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial u_t} \frac{\partial u_t}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial v_t} \frac{\partial v_t}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial \omega_x} \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial \omega_y} \frac{\partial \omega_y}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\partial b}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial b}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial b}{\partial u_t} \frac{\partial u_t}{\partial y} + \frac{\partial b}{\partial v_t} \frac{\partial v_t}{\partial y} + \frac{\partial b}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial b}{\partial \omega_x} \frac{\partial \omega_x}{\partial y} + \frac{\partial b}{\partial \omega_y} \frac{\partial \omega_y}{\partial y} = 0 \quad (\text{A.4})$$

Para a equação (A.2) ser satisfeita, o resultado das subtrações da equação (A.1) pelas equações (A.3) e (A.4) deve ser zero, logo seus termos se cancelam. Gerou-se então um sistema de equações diferenciais de ordens reduzidas para serem resolvidas, podendo identificar a estrutura das equações a e b. Obtém-se inicialmente:

$$\frac{\partial a}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial x} = u \frac{\partial \omega}{\partial x} \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{\partial b}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial y} = v \frac{\partial \omega}{\partial y} \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{\partial b}{\partial \omega_y} \frac{\partial \omega_y}{\partial y} = -v \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{\partial a}{\partial \omega_x} \frac{\partial \omega_x}{\partial x} = -v \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \quad (\text{A.8})$$

Pelas equações apresentadas, obtêm-se facilmente os resultados  $\frac{\partial a}{\partial \omega_x} = u$ ,  $\frac{\partial b}{\partial \omega_y} = v$ ,  $\frac{\partial b}{\partial \omega_y} = -v$  e  $\frac{\partial a}{\partial \omega_x} = -v$ . Resolvendo primeiramente a equação a, integrando-a em função de  $\omega$ , obtem-se:

$$a = u\omega + h(u, v, u_t, v_t, \omega_x, \omega_y) \quad (\text{A.9})$$

Nesta equação,  $h$  é uma função, que depende das outras variáveis diferentes da integrada, a ser determinada pelo resto do sistema de equações diferenciais. Integra-se então em função de  $\omega_x$ , resultando:

$$a = u\omega - v\omega_x + g(u, v, u_t, v_t, \omega_y) \quad (\text{A.10})$$

sendo  $g$  uma função que dependa de  $(u, v, u_t, v_t, \omega_y)$ . O mesmo procedimento para obter a estrutura de  $b$  foi utilizado, resultando em :

$$b = v\omega - u\omega_y + p(u, v, u_t, v_t, \omega_x) \quad (\text{A.11})$$

onde  $p$  é uma função que dependa de  $(u, v, u_t, v_t, \omega_x)$ .

Percebe-se que certos termos até então aparecem nas equações (A.3) e (A.4), contudo não em (A.1). Aponta-se ao fato de que vários destes termos anulam-se entre si ou são nulos individualmente, como:

$$\frac{\partial a}{\partial u} - \frac{\partial b}{\partial v} = 0 \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{\partial a}{\partial v} = 0 \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{\partial b}{\partial u} = 0 \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{\partial a}{\partial u_t} = 0 \quad (\text{A.15})$$

$$\frac{\partial b}{\partial v_t} = 0 \quad (\text{A.16})$$

A equação (A.12) é oriunda da equação da continuidade, as demais são resultantes da ausência dos termos na equação (A.1). Para a equação (A.12) ser satisfeita, tanto  $\frac{\partial a}{\partial u}$  como  $\frac{\partial b}{\partial v}$  devem ser iguais a uma constante, entretanto como não há tais termos em evidência em (A.1), pode-se concluir que essa constante deve ser igual a zero. Resultando então em:

$$a = u\omega - v\frac{\partial\omega}{\partial x} + g(v_t) \quad (\text{A.17})$$

$$b = v\omega - u\frac{\partial\omega}{\partial y} + p(u_t) \quad (\text{A.18})$$

Os últimos termos a serem considerados,  $v_t$  e  $u_t$ , são relacionados a partir da definição da vorticidade  $\omega = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$ . Como as derivadas temporais e espaciais são comutativas, pode-se escrever  $\frac{\partial\omega}{\partial t}$  da seguinte forma:

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) \quad (\text{A.19})$$

Logo se pode concluir que  $\frac{\partial a}{\partial v_t} = 1$  e  $\frac{\partial b}{\partial u_t} = -1$ . Resultando finalmente nas equações (A.20) e (A.21):

$$a = u\omega - v \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} \quad (\text{A.20})$$

$$b = v\omega - v \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial t} \quad (\text{A.21})$$

Por fim, adiciona-se um termo fonte arbitrário  $q$  para recuperar qualquer função que esteja no espaço nulo do operador divergente. Obtém-se por fim as equações (A.22) e (A.23):

$$a = u\omega - v \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial q}{\partial y} \quad (\text{A.22})$$

$$b = v\omega - v \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} \quad (\text{A.23})$$

Pode-se então comprovar que este sistema gera a equação de Helmholtz aplicando as equações (A.22) e (A.23) na equação (A.2).