

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

Entrelaçamento de Autovalores em Grafos

por

Guilherme Porto

Dissertação submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de
Mestre em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Luiz Emilio Allem
Orientador

Prof. Dr. Vilmar Trevisan
Co-orientador

Porto Alegre, Agosto de 2015.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Porto, Guilherme

Entrelaçamento de Autovalores em Grafos / Guilherme Porto.—Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2015.

131 p.: il.

Dissertação (mestrado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2015.

Orientador: Allem, Luiz Emilio; Co-orientador: Trevisan, Vilmar

Dissertação: Matemática Aplicada.
Grafos, entrelaçamento, autovalores.

Entrelaçamento de Autovalores em Grafos

por

Guilherme Porto

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Teoria Espectral de Grafos

Orientador: Prof. Dr. Luiz Emilio Allem

Co-orientador: Prof. Dr. Vilmar Trevisan

Banca examinadora:

Prof^a. Dr^a. Claudia Marcela Justel
IME

Prof. Dr. Eliseu Fritscher
COPPE-UFRJ

Prof^a. Dr^a. Juliane Golubinski Capaverde
IME-UFRGS

Prof. Dr. Fabio Souto de Azevedo
PPGMAp-UFRGS

Dissertação apresentada e aprovada em
03 de Agosto de 2015.

Prof. Dr. Carlos Hoppen
Coordenador

AGRADECIMENTOS

Agradeço a toda minha família pela formação ética, moral e intelectual que me foi dada dentro de casa, e que exerceu papel fundamental na constituição do meu ser e de minhas relações com o mundo.

Ao Prof. Dr. Luiz Emilio Allem, por toda sua dedicação, paciência e ótimo desempenho como meu orientador durante a graduação e pós-graduação, pelos momentos de amizade e atenção ao longo desses anos, sem seu apoio eu certamente não teria chegado até este ponto.

Ao Prof. Dr. Vilmar Trevisan, pelas conversas e conselhos que serviram de inspiração e motivação ao longo da minha formação acadêmica, e por todas as oportunidades e todo apoio que recebi.

Às Profas. Dras. Claudia Marcela Justel e Juliane Golubinski Capaverde, e aos Profs. Drs. Eliseu Fritscher e Fábio Souto de Azevedo, componentes da banca examinadora, pela atenção ao terem estudado e criticado este trabalho.

À minha namorada, Lilian Cavalet, por estar sempre ao meu lado me dando todo o apoio necessário, e por tornar cada dia mais especial que o anterior.

Ao colega e amigo Maikon Machado Toledo, por sempre me acompanhar na fuga da realidade acadêmica em direção ao universo das abstrações matemáticas que tanto nos encanta.

À amiga Clarissa Vergara, pelos momentos de companheirismo e amizade, e por me ajudar a compreender um mundo que a matemática não descreve.

Agradeço à UFRGS, ao Instituto de Matemática e ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada pelo excelente ensino público e pelo auxílio financeiro que recebi durante toda minha graduação e pós-graduação.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	vii
LISTA DE TABELAS	ix
LISTA DE SÍMBOLOS	x
RESUMO	xii
ABSTRACT	xiii
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 Uma Introdução à Teoria Matricial	4
1.2 Uma Introdução à Teoria de Grafos	6
1.3 Uma Introdução aos Teoremas de Entrelaçamento	8
2 TEORIA MATRICIAL	10
2.1 Polinômio Característico, Autovalores e Autovetores	10
2.2 Problemas de Otimização	18
3 TEORIA DE GRAFOS	35
3.1 Grafos e Suas Representações	35
3.2 Operações Entre Grafos	41
3.3 Principais Representações Matriciais	47
3.4 Representações Matriciais Auxiliares	53
4 TEOREMAS DE ENTRELAÇAMENTO	62
4.1 Matriz de Adjacência	64
4.2 Matriz Laplaciana	72

4.3	Matriz Laplaciana Normalizada	75
4.4	Matriz Laplaciana Sem Sinal	91
5	OUTROS ENTRELAÇAMENTOS	98
5.1	Subdivisão de Aresta	98
5.2	Contração de Vértices para L e Q	108
6	CONCLUSÃO	122
6.1	Trabalhos Futuros	123
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	125

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1	Exemplo de grafo.	1
Figura 1.2	Operações sobre um grafo.	7
Figura 3.1	Representação gráfica de G_1	36
Figura 3.2	Grafo não simples.	37
Figura 3.3	Subgrafo e subgrafo induzido de G_1	38
Figura 3.4	Grafos K_3 e K_4	40
Figura 3.5	Grafo $K_{2,4}$	41
Figura 3.6	Deleção de uma aresta.	42
Figura 3.7	Deleção de um vértice.	42
Figura 3.8	Subdivisão de uma aresta.	43
Figura 3.9	Contração de vértices.	44
Figura 3.10	Relação entre contração de vértices e subdivisão de aresta. . .	45
Figura 3.11	União de grafos.	46
Figura 3.12	Aplicação do Teorema 3.1.	47
Figura 3.13	Representação gráfica de G	48
Figura 3.14	Orientação do Grafo G	57
Figura 4.1	Deleção de uma aresta do grafo de Petersen.	65
Figura 4.2	Contração de vértices do grafo C_8	71
Figura 4.3	Deleção de um vértice do grafo $K_{4,3}$	74
Figura 4.4	Deleção de uma aresta do grafo P_4	81
Figura 4.5	Deleção de um vértice do grafo K_5	86
Figura 4.6	Deleção de um vértice do grafo $K_{1,8}$	87
Figura 5.1	Subdivisão de uma aresta do grafo C_4	100
Figura 5.2	Subdivisão de aresta do do grafo C_3	107

Figura 5.3	Subdivisão de uma aresta do grafo K_8	107
Figura 5.4	Contração de vértices do grafo C_6	114
Figura 5.5	Contração dos vértices u e v do grafo P_5	120

LISTA DE TABELAS

Tabela 1.1	Teoremas de Entrelaçamento para deleção de aresta e deleção de vértice.	8
Tabela 1.2	Teoremas de Entrelaçamento para subdivisão de aresta e contração de vértice.	9
Tabela 4.1	Teoremas de entrelaçamento que serão apresentados no capítulo 4.	64
Tabela 4.2	Teoremas de entrelaçamento para a matriz de adjacência. . . .	72
Tabela 4.3	Teoremas de entrelaçamento para a matriz laplaciana.	75
Tabela 4.4	Teoremas de entrelaçamento para a matriz laplaciana normalizada.	91
Tabela 4.5	Teoremas de entrelaçamento do capítulo 4.	97
Tabela 5.1	Teoremas de entrelaçamento que serão apresentados no capítulo 5.	98
Tabela 5.2	Comparação para a matriz de adjacência.	101
Tabela 5.3	Comparação para a matriz laplaciana normalizada.	105
Tabela 5.4	Teoremas de entrelaçamento para subdivisão de aresta.	108
Tabela 5.5	Comparação para a matriz laplaciana.	113
Tabela 5.6	Comparação para a matriz laplaciana sem sinal.	119
Tabela 5.7	Teoremas de entrelaçamento dos capítulos 4 e 5.	121

LISTA DE SÍMBOLOS

$ A $	Cardinalidade do conjunto A .
$u \sim v$	Vértices u e v são adjacentes.
$u \not\sim v$	Vértices u e v não são adjacentes.
$d_G(u)$	Grau do vértice u no grafo G .
$N_G(u)$	Vizinhança do vértice u no grafo G .
P_n	Caminho de n vértices.
C_n	Ciclo de n vértices.
K_n	Grafo completo de n vértices.
$K_{r,s}$	Grafo bipartido completo de r por s vértices.
$G \setminus f$	Grafo resultante da deleção da aresta f do grafo G .
$G - v$	Grafo resultante da deleção do vértice v do grafo G .
G_f	Grafo resultante da subdivisão da aresta f do grafo G .
$G \setminus \{u, v\}$	Grafo resultante da contração dos vértices u e v do grafo G .
$G \cup H$	Grafo resultante da união dos grafos G e H .
I_n	Matriz identidade de ordem n .
$0_{n \times m}$	Matriz de ordem $n \times m$ em que todas as entradas são zero.
(u, v)	Produto interno entre os vetores u e v .
$u \perp v$	Vetor u é perpendicular ao vetor v .
$\ u\ $	Norma Euclidiana do vetor u .
δ_{ij}	Delta de Kronecker.
$p_A(x)$	Polinômio característico da matriz A .
$\lambda_i^{(n)}$	i -ésimo maior autovalor com multiplicidade n .
$Spec(A)$	Espectro da matriz A .
v^i	Autovetor associado ao autovalor λ_i .

$A(G)$	Matriz de adjacência do grafo G .
$L(G)$	Matriz laplaciana do grafo G .
$\mathcal{L}(G)$	Matriz laplaciana normalizada do grafo G .
$Q(G)$	Matriz laplaciana sem sinal do grafo G .
$D(G)$	Matriz diagonal dos graus do grafo G .
$S(G)$	Matriz de incidência do grafo G .
$K(G)$	Matriz de incidência orientada do grafo G .
a_{uv}	Entrada da linha u e coluna v da matriz de adjacência.
l_{uv}	Entrada da linha u e coluna v da matriz laplaciana.
ℓ_{uv}	Entrada da linha u e coluna v da matriz laplaciana normalizada.
q_{uv}	Entrada da linha u e coluna v da matriz laplaciana sem sinal.
d_{uv}	Entrada da linha u e coluna v da matriz diagonal dos graus.
s_{us}	Entrada da linha u e coluna s da matriz de incidência.
k_{us}	Entrada da linha u e coluna s da matriz de incidência orientada.

RESUMO

A teoria espectral de grafos visa descobrir propriedades de um grafo G por meio da análise do espectro de uma matriz associada ao grafo. Neste trabalho, estudamos a matriz de adjacência A , a matriz laplaciana L , a matriz laplaciana normalizada \mathcal{L} e a matriz laplaciana sem sinal Q e para essas matrizes apresentamos resultados de entrelaçamento de autovalores associados com as operações de deleção de uma aresta e de deleção de um vértice. Além disso, mostramos resultados de entrelaçamento de autovalores associados com a operação de contração de dois vértices para a matriz de adjacência A e para matriz laplaciana normalizada \mathcal{L} .

Como contribuição original construímos resultados de entrelaçamento de autovalores associados com a operação de subdivisão de uma aresta para as matrizes A , L , \mathcal{L} e Q , e associados com a operação de contração de vértices para L e Q .

ABSTRACT

The spectral graph theory aims to discover properties of a graph G through the analysis of the spectrum of a matrix associated with the graph. In this work, we study the adjacency matrix A , the standard Laplacian matrix L , the normalized Laplacian matrix \mathcal{L} and the signless Laplacian matrix Q and for these matrices we present eigenvalues interlacing results associated with the operations of deleting an edge and deleting a vertex. Moreover, we show eigenvalues interlacing results associated with the vertex contraction operation for the adjacency matrix A and the normalized laplacian matrix \mathcal{L} .

As original contribution, we prove some results about eigenvalues interlacing associated with the operation of subdivision of an edge for the matrices A , L , \mathcal{L} and Q , and associated with the vertex contraction operation for L and Q .

1 INTRODUÇÃO

Muitas situações podem ser descritas por diagramas feitos por conjuntos de pontos e linhas ligando pares desses pontos. A abstração matemática dessas situações originou o conceito de grafo e o desenvolvimento de seu estudo.

Um grafo é constituído por um conjunto não vazio de vértices e um conjunto de arestas, onde as arestas ligam os vértices, como na Figura 1.1, em que os vértices u e v estão ligados pela aresta f .

Grafos recebem esse nome por possuírem uma representação gráfica que auxilia na compreensão de muitas de suas propriedades. Nessa representação, cada vértice é indicado por um ponto, e cada aresta é exibida como uma linha que liga os pontos, como é exibido na Figura 1.1.

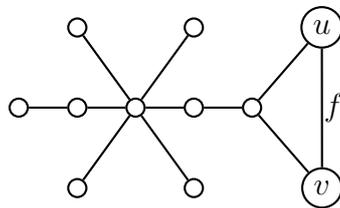


Figura 1.1 Exemplo de grafo.

Por muitos anos o desenvolvimento da teoria de grafos foi inspirada e guiada pela conjectura das quatro cores, que afirma que qualquer mapa em um plano pode ser colorido com quatro cores de modo que as regiões que possuem uma fronteira em comum, que não seja um único ponto, não possuam a mesma cor. A solução da conjectura dada por K. Appel e W. Haken em 1976 [2] foi um marco na história dessa área de estudo. Desde então, o assunto tem apresentado grande crescimento e vem atuando como uma estrutura de sustentação para a matemática aplicada moderna. A ciência da computação e a otimização combinatória, em particular, se apoiam e contribuem para o desenvolvimento da teoria de grafos. Além

disso, em um mundo onde a comunicação é primordial, a versatilidade dos grafos torna-os ferramentas indispensáveis na elaboração e análise de redes de comunicação.

A representação gráfica pode ser útil para o estudo e compreensão de algumas propriedades sobre grafos mas não é adequada para aplicações computacionais ou para aplicações de métodos matemáticos que auxiliem na busca de novos resultados. Para tais propósitos é mais vantajoso representar o grafo por meio de uma matriz que contenha informações sobre sua estrutura. Dentre as representações matriciais de grafos mais importantes estão a Matriz de Adjacência $A(G)$, a Matriz Laplaciana $L(G)$, a Matriz Laplaciana Normalizada $\mathcal{L}(G)$ e a Matriz Laplaciana Sem Sinal $Q(G)$.

Com essas representações podemos tratar grafos como entes algébricos, utilizando recursos da teoria matricial para analisar as propriedades das matrizes associadas. Para cada representação matricial, podemos atribuir um espectro ao grafo. Vamos nos referir ao espectro do grafo para indicar o espectro de qualquer uma de suas representações, e quando necessário vamos especificar qual delas estamos utilizando.

O espectro das representações matriciais esta diretamente ligado as propriedades estruturais do grafo. O ramo da teoria de grafos que se destina ao estudo dessa relação é denominado teoria espectral de grafos.

A teoria espectral de grafos teve sua origem motivada pela química quântica. Em 1931, Hückel [27] estabeleceu as ideias iniciais da teoria ao representar uma molécula de hidrocarboneto por um grafo, onde os átomos de carbono eram indicados como vértices e as ligações químicas entre esses átomos como arestas, e perceber que os autovalores da matriz de adjacência desse grafo podem ser usados para representar os níveis de energia de certos elétrons.

O conhecido teorema da matriz árvore, que determina o número de árvores geradoras de um grafo, pode ser considerado um resultado da teoria espectral de grafos e foi provado por Brooks, Smith, Stone e Tutte [5] em 1940.

Os fundamentos da teoria espectral de grafos foram estabelecidos nas décadas de 1950 e 1960. Com os artigos de Collatz e Sinogowitz [33], em 1957, e de Cvetković [16], em 1971, a teoria espectral de grafos passou a aparecer com frequência na literatura matemática. Em [33], os autores obtêm uma relação entre os graus dos vértices de um grafo e seus autovalores. Antes disso, Cvetković, Rowlinson e Simić [18] afirmam que investigações das relações entre o espectro e as propriedades estruturais de um grafo podem ser encontradas na tese de Wei [35] de 1952. Desde então a teoria espectral de grafos tem sido documentada em várias pesquisas e livros (por exemplo, ver [3, 9, 17]).

A teoria espectral de grafos pode, de certa forma, ser considerada uma tentativa de utilizar a teoria matricial para os fins da teoria de grafos e suas aplicações. No entanto, isso não significa que a teoria espectral de grafos possa ser reduzida a uma aplicação da teoria matricial, pelo contrário, ela tem suas características próprias e métodos específicos de raciocínio que justificam seu estudo. Logo, a teoria matricial, a teoria de grafos e a teoria espectral de grafos estão intimamente ligadas de modo a contribuírem mutuamente para a descoberta de novos resultados.

Neste trabalho vamos estudar as representações matriciais para um grafo citadas anteriormente, como realizar diferentes alterações na estrutura de um grafo por meio de operações e veremos como o espectro do grafo original e o do grafo obtido pela operação se relacionam. Veremos como o espectro de um grafo se relaciona com o do grafo obtido pelas operações de deleção de aresta, deleção de vértice e contração de vértices. Como contribuição original apresentamos essa relação no caso em que o novo grafo é gerado pela operação de subdivisão de aresta.

A organização do trabalho está disposta em seis capítulos. No Capítulo 2, estudamos teoremas da teoria matricial que auxiliam no tratamento de autovalores. No Capítulo 3, apresentamos definições sobre grafos, suas representações matriciais, e operações que alteram sua estrutura. No Capítulo 4, mostramos os resultados de entrelaçamento já conhecidos e, no Capítulo 5, construímos os resultados de entrelaçamento que constituem uma contribuição original do trabalho. No Capítulo 6, tecemos nossas considerações finais sobre o assunto.

1.1 Uma Introdução à Teoria Matricial

No Capítulo 2, nos dedicamos à teoria matricial, que constitui uma ferramenta fundamental para matemática aplicada, além de um campo de pesquisa fértil.

Em 1949 Wassily Leontief [29], professor de Harvard, trabalhou com informações sobre a economia americana que representavam um resumo de mais de 250.000 itens produzidos pelo Departamento de Estatística do Trabalho dos EUA. Leontief dividiu a economia americana em 500 setores, como indústria de carvão, indústria automobilística, comunicações e assim por diante. Para cada setor, ele escreveu uma equação linear que descrevia como o setor distribuía sua produção com respeito aos outros setores da economia.

Como o Mark II, um dos maiores computadores de sua época, não podia lidar com o sistema resultante de 500 equações e 500 incógnitas, Leontief precisou resumir o problema em um sistema de 42 equações e 42 incógnitas. A programação do computador Mark II para resolver as 42 equações levou vários meses de trabalho e após 56 horas de processamento o computador produziu uma solução.

Leontief ganhou o Prêmio Nobel de Economia de 1973 e abriu a porta para uma nova era da modelagem matemática na economia associada à teoria ma-

tricial. Seus esforços de 1949 em Harvard marcaram uma das primeiras aplicações significativas do computador na análise de modelos matemáticos de grande escala. Desde essa época, pesquisadores de muitas áreas têm usado os computadores para analisar modelos matemáticos. Devido à enorme quantidade de dados envolvidos, os modelos são geralmente lineares, isto é, são descritos por sistemas de equações lineares que podem ser representados com o auxílio de matrizes e estão intimamente relacionados com o estudo da teoria matricial.

Durante as últimas sete décadas, ocorreu um avanço sem precedentes nas técnicas para resolução de equações lineares, nos procedimentos para o cálculo de mínimos quadráticos, nas estimativas de soluções de sistemas de desigualdades lineares e nos métodos para obtenção de valores próprios de matrizes. Essa eferescência de ideias veio em resposta à disponibilidade de computadores cada vez mais rápidos e com cada vez mais memória.

A importância da teoria matricial nas aplicações tem crescido de modo diretamente proporcional ao crescimento do poder computacional (ver [19]), onde cada nova geração de hardware e software dispara uma demanda para capacidades ainda maiores. Assim, a ciência da computação está fortemente ligada à teoria matricial por meio do crescimento explosivo de processamento paralelo e da computação em grande escala.

Com isso a teoria matricial foi empurrada para o centro do palco da matemática numérica e, na atualidade, os cientistas e engenheiros trabalham em problemas muito mais complexos do que se sonhava ser possível há algumas décadas.

Utilizamos argumentos da teoria matricial para analisar as representações matriciais e espectros de diferentes grafos e obter as relações entre eles. Para uma matriz qualquer A de ordem n podemos garantir que seus autovalores são caracterizados como sendo as raízes de seu polinômio característico, dado por $p(x) =$

$\det(xI - A)$. Para matrizes hermitianas, no entanto, seus autovalores podem ser caracterizados como as soluções de uma série de problemas de otimização.

Como toda matriz hermitiana A de ordem n possui autovalores reais podemos ordená-los de modo não crescente, denotando-os por $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$.

O menor e o maior autovalor são facilmente caracterizados como as respectivas soluções de um problema de mínimo e de um problema de máximo. Tal caracterização foi estabelecida por John William Strutt, o Lorde Rayleigh, e é conhecida como **Teorema de Rayleigh**. Uma **Generalização do Teorema de Rayleigh** fornece uma caracterização para os outros autovalores.

Infelizmente essa formulação é pouco prática por exigir o conhecimento prévio de algumas informações que geralmente não são conhecidas. Visando desenvolver uma caracterização mais prática, o matemático Richard Courant desenvolveu uma formulação independente para a obtenção de autovalores, conhecida como **Teorema de Courant-Fischer**, e que caracteriza os autovalores de uma matriz hermitiana como a solução de problemas de otimização.

A caracterização dos autovalores por problema de otimização fornece uma manipulação algébrica mais dinâmica desses elementos, permitindo o desenvolvimento de resultados como o **Teorema do Entrelaçamento de Cauchy** e a **Desigualdade de Weyl**, que estabelecem relações entre autovalores de diferentes matrizes.

1.2 Uma Introdução à Teoria de Grafos

Dedicamos o Capítulo 3 deste trabalho ao estudo da teoria de grafos, apresentando algumas definições básicas sobre o assunto que auxiliam na caracterização de certas propriedades estruturais dos grafos. Além disso, mostramos que operações entre grafos constroem novos grafos utilizando as informações provenien-

tes dos originais. Algumas operações apenas alteram a estrutura do grafo original, como a deleção de uma aresta ou de um vértice, enquanto outras geram conjuntos de vértices e arestas diferentes dos originais, como a contração de vértices. A Figura 1.2 apresenta algumas operações.

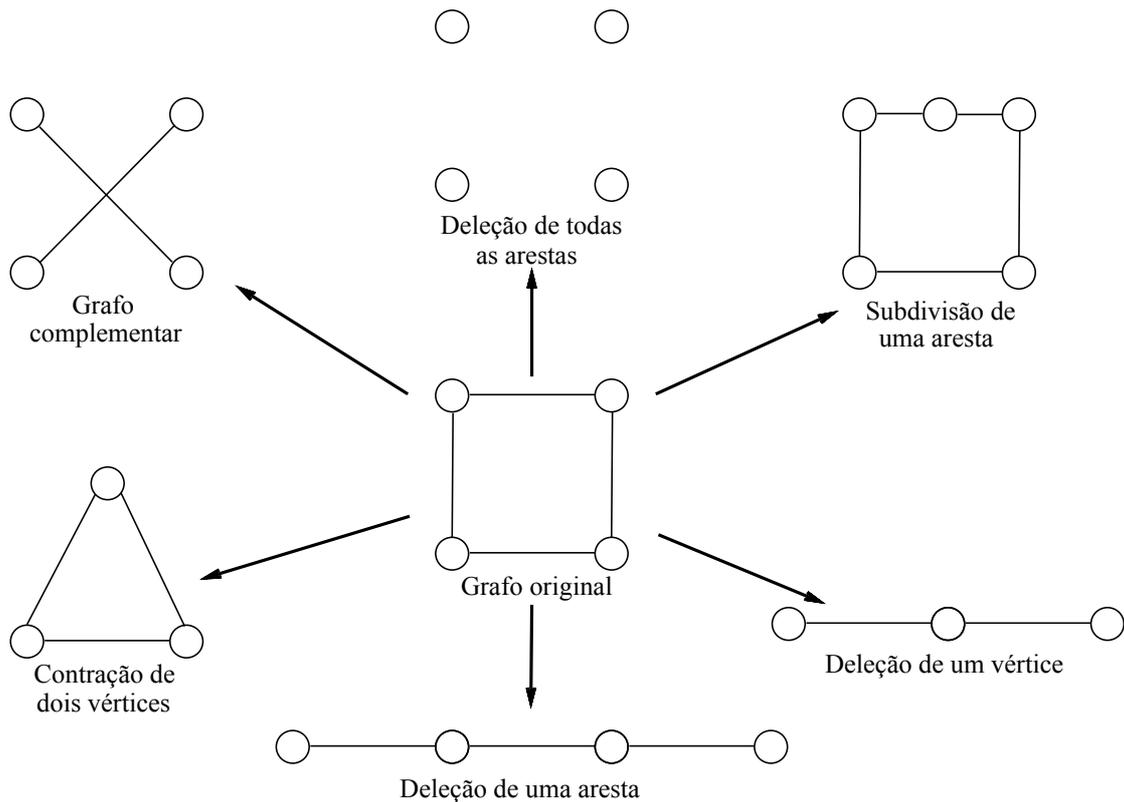


Figura 1.2 Operações sobre um grafo.

Veremos ainda que tanto o grafo original quanto o obtido por qualquer operação possuem um espectro associado a cada uma das representações matriciais citadas anteriormente.

Observe que grafos diferentes são representados por matrizes diferentes, mesmo que submetidos a uma mesma representação matricial, e tais matrizes podem possuir espectros diferentes, ou seja, as alterações que o grafo sofre com a operação implicam alterações em sua representação matricial e, possivelmente, em

seu espectro. Será que existe alguma relação entre os espectros do grafo original e do obtido pela operação?

1.3 Uma Introdução aos Teoremas de Entrelaçamento

O Capítulo 4 é dedicado aos teoremas de entrelaçamento já conhecidos. Com o auxílio de ferramentas da teoria matricial, apresentamos resultados de entrelaçamento de autovalores de grafos que estão associados pela operação de deleção de uma aresta f ($G \setminus f$) ou pela deleção de um vértice v ($G - v$). Mostramos também alguns resultados de entrelaçamento associados à operação de contração de vértices, que serão mais explorados no Capítulo 5.

Seja G um grafo e H o grafo obtido a partir de G por uma das operações citadas acima. Sejam λ_i , $i = 1, \dots, n$, os autovalores associados com $A(G)$, $L(G)$, $\mathcal{L}(G)$, ou $Q(G)$, e sejam θ_i os autovalores associados com $A(H)$, $L(H)$, $\mathcal{L}(H)$, ou $Q(H)$, onde ambos conjuntos de autovalores estão em ordem não crescente. Listamos na Tabela 1.1 os resultados de entrelaçamento que são apresentados no capítulo.

	$H = G \setminus f$	$H = G - v$
A	$\lambda_{i-1} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1}$	$\lambda_i \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1}$
L	$\lambda_i \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1}$	$\lambda_i \geq \theta_i \geq \lambda_{i+r}$
\mathcal{L}	$\lambda_{i-1} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1}$	$\lambda_{i-r+1} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+r}$
Q	$\lambda_i \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1}$	$\lambda_i \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1} - 1$

Obs.: r indica o grau do vértice deletado.

Tabela 1.1 Teoremas de Entrelaçamento para deleção de aresta e deleção de vértice.

No Capítulo 5 apresentamos nossos resultados originais para o entrelaçamento de autovalores de grafos que estão associados pela operação de subdivisão de uma aresta f (G_f) fazendo uso dos resultados apresentados no Capítulo 4. Também exibimos os resultados de entrelaçamento associados à operação de con-

tração de dois vértices u e v ($G \mid \{u, v\}$) para as matrizes laplaciana e laplaciana sem sinal. Listamos na Tabela 1.2 os resultados de entrelaçamento que são construídos no capítulo, juntamente com os demais resultados de entrelaçamento associados à contração de vértices que são mostrados no Capítulo 4.

	G_f	$H = G \mid \{u, v\}$
A	$\theta_{i-1} \geq \lambda_i \geq \theta_{i+2}$	$\lambda_{i-1} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+2}$
L	$\theta_{i-1} \geq \lambda_i \geq \theta_{i+2}$	$\lambda_i + \frac{d + \sqrt{4d + d^2}}{2} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1} + \frac{d - \sqrt{4d + d^2}}{2}$
\mathcal{L}	$\theta_{i-2} \geq \lambda_i \geq \theta_{i+3}$	$\lambda_{i-1} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1}$
Q	$\theta_{i-1} \geq \lambda_i \geq \theta_{i+1} - 1$	$\lambda_i + \frac{d + \sqrt{4d + d^2}}{2} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1} + \frac{d - \sqrt{4d + d^2}}{2}$

Obs.: onde $d = \min \{d_G(u), d_G(v)\}$.

Tabela 1.2 Teoremas de Entrelaçamento para subdivisão de aresta e contração de vértice.

Realizamos um comparativo entre as desigualdades obtidas para as duas operações, uma vez que a contração de vértices adjacentes pode ser compreendida como a operação inversa da subdivisão de aresta.

No Capítulo 6 tecemos nossas considerações finais. O estudo do assunto proporciona o conhecimento de técnicas associadas à teoria de grafos e à teoria matricial que são úteis em outros ramos da teoria espectral de grafos. Apresentamos algumas aplicações dos resultados de entrelaçamento que podem ser utilizadas na resolução de outras questões. Destacamos alguns problemas de entrelaçamento que ainda não possuem solução, bem como resultados que ainda podem ser aperfeiçoados, com o objetivo de motivar futuras investigações sobre o tópico.

2 TEORIA MATRICIAL

Neste capítulo apresentamos algumas definições e resultados iniciais sobre teoria matricial e álgebra linear, baseados nos livros de Horn et al [26] e Franklin [21], que usaremos como ferramentas para o desenvolvimento do Capítulo 4, onde estudamos teoremas de entrelaçamento.

A computação digital de alta velocidade está diretamente relacionada à teoria matricial e tem grande aplicação na engenharia moderna, na matemática e em diversos ramos da ciência. Matrizes podem representar transformações lineares de um conjunto finito de números para outro e seu estudo pode ser proveitoso, uma vez que muitos problemas importantes possuem comportamento linear. Considerando que computadores possuem memória finita, e por isso podem realizar apenas um número finito de operações, temos que a busca de soluções de problemas lineares que realizem um menor número de operações envolve o tratamento adequado de matrizes.

2.1 Polinômio Característico, Autovalores e Autovetores

O estudo de matrizes quadradas está intimamente ligado ao estudo de polinômios característicos, autovalores e autovetores, uma vez que esses podem revelar propriedades das matrizes.

Nesta seção, mostramos que para cada matriz quadrada podemos associar um polinômio característico, um conjunto de autovalores e um conjunto de autovetores e ainda apresentamos como esses itens se relacionam.

Definição 2.1. *Seja A uma matriz quadrada. Um número λ é dito um **autovalor** de A se, e somente se, existe um vetor não nulo v que satisfaz a equação $Av = \lambda v$.*

Tal vetor é dito **autovetor** associado ao autovalor λ . O **polinômio característico** da matriz A , denotado por $p_A(x)$, é dado por $p_A(x) = \det(xI - A)$.

Essas definições mostram como relacionar uma matriz quadrada com seu polinômio característico e com seu conjunto de autovalores e autovetores. Vejamos como relacionar o polinômio característico com os autovalores e autovetores.

Teorema 2.1. [21] *O número λ é um autovalor da matriz quadrada A se, e somente se, $\det(\lambda I - A) = 0$, ou seja, se λ é raiz do polinômio característico $p_A(x) = \det(xI - A)$. Além disso, se A tem ordem n , então o polinômio característico $p_A(x)$ tem grau n .*

Assim temos que a ordem de uma matriz indica seu número de autovalores, mas esses são caracterizados pelas raízes do polinômio característico, logo uma matriz não necessariamente possui todos os autovalores distintos. Indicar adequadamente quantos autovalores se repetem e quantas vezes isso ocorre nos leva a uma definição fundamental para o desenvolvimento da teoria espectral de grafos.

Definição 2.2. A **multiplicidade** do autovalor λ de uma matriz quadrada A é o número de vezes que esse é raiz do polinômio característico $p_A(x) = \det(xI - A)$. O **espectro** da matriz A é dado pelo multiconjunto de seus autovalores repetidos tantas vezes quanto suas multiplicidades. Denotamos por $\text{Spec}(A) = \{\lambda_1^{(n_1)}, \dots, \lambda_k^{(n_k)}\}$ o espectro da matriz A com autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ com respectivas multiplicidades n_1, \dots, n_k .

O **Exemplo 2.1** ilustra as definições e teoremas apresentados até o momento.

Exemplo 2.1. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observe que a ordem da matriz A é 4, logo seu polinômio característico deve ter grau 4. De fato,

$$p_A(x) = x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 16 = (x - 2)^2(x - 2 - 2\sqrt{2})(x - 2 + 2\sqrt{2}).$$

Usando a fatoração de $p_A(x)$ podemos ver que os autovalores de A são 2 , $2 + 2\sqrt{2}$ e $2 - 2\sqrt{2}$, além disso, temos que $\text{Spec}(A) = \{2 + 2\sqrt{2}, 2^{(2)}, 2 - 2\sqrt{2}\}$.

Utilizando a forma $Av = \lambda v$ encontramos os autovetores de A , que são dados por

$$v^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v^2 = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} + 2 \\ 4\sqrt{2} + 4 \\ 8\sqrt{2} + 8 \\ 8 \end{pmatrix} \quad e \quad v^3 = \begin{pmatrix} 2 - 3\sqrt{2} \\ 4 - 4\sqrt{2} \\ 8 - 8\sqrt{2} \\ 8 \end{pmatrix}.$$

A estrutura de algumas matrizes permite estabelecer propriedades sobre seus autovalores e autovetores.

Definição 2.3. Uma matriz A é dita **matriz hermitiana** quando $A = \overline{A}^T$, onde \overline{A} denota a **matriz conjugada** de A , e A^T denota a **matriz transposta** de A .

As matrizes hermitianas constituem uma importante classe da teoria matricial, devido a natureza de seus autovalores e a forma que seus autovetores podem assumir.

Teorema 2.2. [21] *Se A é uma matriz hermitiana de ordem n , então seus autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são reais. Além disso, A possui autovetores unitários v^1, \dots, v^n , dois a dois ortogonais, com $Av^j = \lambda_j v^j$ para $j = 1, \dots, n$. Tais autovetores formam uma base ortonormal do \mathbb{R}^n .*

Como os autovalores de uma matriz hermitiana são reais sempre podemos renomeá-los e ordená-los de forma que tenhamos $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$, tal relação de ordem é de vital importância para o desenvolvimento de resultados de entrelaçamento.

Por sua vez, as matrizes reais simétricas, que são positivas semidefinidas, podem ser escritas como o produto de duas outras matrizes, e possuem apenas autovalores não negativos.

Teorema 2.3. [26] *Se A é uma matriz real simétrica de ordem n , então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) *A é uma **matriz positiva semidefinida**, ou seja, $v^T A v \geq 0$, para todo $v \in \mathbb{R}^n$.*
- (ii) *Todos os autovalores de A são reais não negativos.*
- (iii) *Existe uma matriz B tal que $A = BB^T$.*

O **Exemplo 2.2** mostra como utilizar esses teoremas.

Exemplo 2.2. *Considere a matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Note que A é uma matriz hermitiana, logo seus autovalores são reais. De fato, $\text{Spec}(A) = \{4, 1^{(2)}\}$.

Além disso, temos que seus autovetores

$$v^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v^3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

formam uma base do \mathbb{R}^3 por serem 3 vetores não nulos 2 a 2 ortogonais. Basta notar que

$$(v^1, v^2) = (v^1, v^3) = (v^2, v^3) = 0,$$

onde (u, v) indica o **produto interno** entre os vetores u e v .

Como A é uma matriz real simétrica com autovalores não negativos temos pelo **Teorema 2.3** que A é uma matriz positiva semidefinida.

Seja $v = [a, b, c]^T$ um vetor qualquer do \mathbb{R}^3 . Temos que

$$\begin{aligned} v^T A v &= v^T (aAe_1 + bAe_2 + cAe_3) \\ &= av^T Ae^1 + bv^T Ae^2 + cv^T Ae^3 \\ &= (a+b)^2 + (a+c)^2 + (b+c)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

onde e^1, e^2, e^3 são os vetores da **base canônica** do \mathbb{R}^3 .

$$\text{Tomando } B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \text{ temos que } A = BB^T.$$

Algumas matrizes possuem uma estrutura tão grande e com tamanha regularidade que podem ser caracterizadas por meio da estrutura de suas submatrizes, como é o caso da classe abaixo.

Definição 2.4. Uma matriz A é dita **matriz triangular por blocos** se é da forma

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & \dots & \dots \\ 0_{2,1} & A_2 & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \dots \\ 0_{n,1} & \dots & 0_{n,n-1} & A_n \end{pmatrix},$$

onde cada A_i é uma submatriz de A com ordem $n_i \times m_i$ e $0_{i,j}$ é a matriz $0_{n_i \times m_j}$.

O **Teorema 2.4** mostra que podemos investigar propriedades de matrizes triangulares por blocos por meio da estrutura de seus blocos. Tal ferramenta pode ser útil quando a matriz não possuir a estrutura adequada para aplicação de determinado resultado, mas seus blocos possuírem.

Teorema 2.4. [21] *Se A é uma matriz triangular por blocos com n blocos e todos os blocos são quadrados, então*

$$\text{Spec}(A) = \bigcup_{i=1}^n \text{Spec}(A_i).$$

Vejamos as vantagens da aplicação desse resultado no **Exemplo 2.3**.

Exemplo 2.3. *Considere a matriz*

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 & -10 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Observe que calcular o $\text{Spec}(B)$ não é uma tarefa fácil pois a matriz tem ordem 4, no entanto, perceba que B é uma matriz triangular por blocos com blocos

$$B_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ e } B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tais blocos possuem ordem 2 e são simétricos, logo calcular o $\text{Spec}(B_1)$ e o $\text{Spec}(B_2)$ é mais fácil do que calcular o $\text{Spec}(B)$.

Como $\text{Spec}(B_1) = \{4, 2\}$ e $\text{Spec}(B_2) = \{3, 1\}$ segue pelo **Teorema 2.4** que $\text{Spec}(B) = \{4, 3, 2, 1\}$.

Algumas classes de matrizes são caracterizadas pelas relações entre seus elementos. Na classe apresentada abaixo, as matrizes estão relacionadas por meio de uma operação.

Definição 2.5. Duas matrizes quadradas A e B de mesma ordem são ditas **matrizes similares** se existir uma matriz quadrada T , com T inversível, tal que

$$T^{-1}AT = B.$$

As estruturas de duas matrizes similares estão intimamente ligadas pela operação que as caracterizam, isso permite estabelecer uma relação direta entre seus espectros.

Teorema 2.5. [21] Matrizes similares possuem o mesmo espectro.

Tal resultado permite alterar a estrutura de uma matriz por meio das operações adequadas sem alterar seu espectro, com isso podemos gerar matrizes com estruturas que facilitem o cálculo dos autovalores.

Exemplo 2.4. Dadas as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ e } T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

temos que

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Observe que a matriz $T^{-1}AT$ é triângular por blocos e por isso é mais simples calcular o $\text{Spec}(T^{-1}AT)$ do que o $\text{Spec}(A)$.

Segue pelo **Teorema 2.5** que $\text{Spec}(T^{-1}AT) = \{6, 2, 0\} = \text{Spec}(A)$.

Matrizes podem estar relacionados por diferentes operações. O **Teorema 2.6** estabelece uma relação entre os espectros de duas matrizes que estão relacionadas pela estrutura das operações que as definem.

Teorema 2.6. [22] *Dada uma matriz A , temos que os autovalores não nulos de AA^T e de $A^T A$ são iguais, e possuem mesma multiplicidade.*

Demonstração. Seja v um autovetor de $A^T A$ associado ao autovalor $\lambda \neq 0$. Então

$$\lambda Av = A\lambda v = (AA^T)Av,$$

e assim temos que Av é um autovetor de AA^T associado ao autovalor λ .

Suponhamos agora que u é autovetor de AA^T associado ao autovalor $\lambda \neq 0$. Então

$$\lambda A^T u = A^T \lambda u = (A^T A)A^T u,$$

assim temos que $A^T u$ é um autovetor de $A^T A$ associado ao autovalor λ .

Sejam $U = \text{Ker}(A^T A - \lambda I)$ e $V = \text{Ker}(AA^T - \lambda I)$. Observe que para todo vetor $u \in U$ temos que $Au \in V$, enquanto que para todo vetor $v \in V$ temos que $A^T v \in U$. Como a matriz $A^T A$ leva o conjunto U em si mesmo de maneira sobrejetiva temos que U e V possuem a mesma dimensão. \square

Tal resultado permite conhecer o espectro de uma das matrizes apenas calculando o da outra. Dessa forma, basta descobrir os autovalores da menor matriz e adicionar zeros a seu espectro para obter o espectro da maior.

Exemplo 2.5. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ temos que

$$AA^T = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \text{ e } A^T A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Como AA^T tem ordem menor é mais fácil calcular seu espectro. Temos que $\text{Spec}(AA^T) = \{7 + \sqrt{37}, 7 - \sqrt{37}\}$.

Como $A^T A$ tem ordem 3 basta adicionar um zero ao $\text{Spec}(AA^T)$ para obter o $\text{Spec}(A^T A)$, segue que $\text{Spec}(A^T A) = \{7 + \sqrt{37}, 7 - \sqrt{37}, 0\}$.

2.2 Problemas de Otimização

Dada uma matriz hermitiana A com autovalores reais $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ associados, respectivamente, aos autovetores unitários dois a dois ortogonais v^1, \dots, v^n , sabemos que

$$Av^i = \lambda_i v^i, \quad (v^i, v^j) = \delta_{ij}, \quad (i, j = 1, \dots, n)$$

onde (v^i, v^j) indica o **produto interno** entre os vetores v^i e v^j , e δ_{ij} representa o **delta de Kronecker**, ou seja, $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$, caso contrário $\delta_{ij} = 0$.

Os autovalores de A são valores dados pela forma quadrática (Av, v) definida na esfera unitária $\|v\| = 1$, ou seja

$$\lambda_1 = (Av^1, v^1) \geq \lambda_2 = (Av^2, v^2) \geq \dots \geq \lambda_n = (Av^n, v^n).$$

Note que λ_1 é o maior desses n valores. É natural questionarmos se λ_1 é o maior valor definido pela forma quadrática (Av, v) na esfera unitária $\|v\| = 1$.

Teorema 2.7. Princípio de Rayleigh. [26]

Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz hermitiana de ordem n e $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ os seus autova-

lores. Então

$$\lambda_1 = \max_{\|v\|=1} (Av, v), \quad (2.1)$$

e o máximo é atingido quando v é um autovetor unitário associado ao autovalor λ_1 .

Demonstração. Sejam v^1, \dots, v^n autovetores unitários dois a dois ortogonais da matriz A . Observe que esses vetores formam uma base para um espaço vetorial de dimensão n , dessa forma qualquer vetor unitário v pode ser representado como $v = c_1 v^1 + \dots + c_n v^n$, onde

$$\begin{aligned} 1 = (v, v) &= \left(\sum_{i=1}^n c_i v^i, \sum_{j=1}^n c_j v^j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i c_j (v^i, v^j) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i c_j \delta_{ij} = |c_1|^2 + \dots + |c_n|^2. \end{aligned}$$

Usando que $Av = \sum_i c_i \lambda_i v^i$ temos

$$(Av, v) = \left(\sum_{i=1}^n c_i \lambda_i v^i, \sum_{j=1}^n c_j v^j \right) = \lambda_1 |c_1|^2 + \dots + \lambda_n |c_n|^2 \leq \lambda_1 (|c_1|^2 + \dots + |c_n|^2) = \lambda_1.$$

Se $\lambda_1 = \dots = \lambda_r > \lambda_{r+1} \geq \dots \geq \lambda_n$ a igualdade na expressão anterior é atingida unicamente se

$$|c_1|^2 + \dots + |c_r|^2 = 1, \quad c_j = 0 \quad (j > r).$$

Logo $(Av, v) \leq \lambda_1$ e a igualdade é atingida quando v é um autovetor unitário associado ao autovalor λ_1 . \square

Observe que o máximo na expressão (2.1) é tomado sobre todos os vetores reais unitários.

Analogamente, temos que λ_n é o menor dos n valores. É igualmente natural questionarmos se λ_n é o menor valor definido pela forma quadrática (Av, v) na esfera unitária $\|v\| = 1$.

Teorema 2.8. Outra Versão do Princípio de Rayleigh.[26]

Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz hermitiana de ordem n e $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ os seus autovalores. Então

$$\lambda_n = \min_{\|v\|=1} (Av, v). \quad (2.2)$$

O mínimo é atingido quando v é o autovetor unitário associado ao autovalor λ_n .

Demonstração. Análogo ao teorema anterior. Basta perceber que o problema de minimização enunciado pode ser resolvido de modo similar ao problema de maximização do teorema anterior. \square

O corolário a seguir apresenta uma formulação do Princípio de Rayleigh em que o vetor maximizado não precisa ser unitário, mas também não pode ser o vetor nulo.

Corolário 2.1. [26] *Seja A uma matriz hermitiana de ordem n e $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ os seus autovalores. Então*

$$\lambda_1 = \max_{x \neq 0} \frac{(Ax, x)}{(x, x)}. \quad (2.3)$$

A expressão $\frac{(Ax, x)}{(x, x)}$ é denominada **quociente de Rayleigh**.

Demonstração. Como $x \neq 0$ temos que $\|x\| > 0$, assim obtemos

$$\frac{(Ax, x)}{(x, x)} = \frac{1}{\|x\|^2} (Ax, x) = \left(A \frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|} \right) = (Av, v),$$

onde v é um vetor unitário.

Reciprocamente, se $\|v\| = 1$ então $(Av, v) = \frac{(Av, v)}{(v, v)}$. Assim temos que (2.1) e (2.3) assumem o mesmo valor. \square

Mostremos como aplicar a caracterização de autovalores e autovetores dada pelo Princípio de Rayleigh.

Exemplo 2.6. Considere a matriz hermitiana

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3i \\ -3i & 2 \end{pmatrix},$$

com autovalores $\lambda_1 = 3 + \sqrt{10}$ e $\lambda_2 = 3 - \sqrt{10}$ e autovetores

$$v^1 = \begin{pmatrix} 3i \\ \sqrt{10} - 1 \end{pmatrix} \text{ e } v^2 = \begin{pmatrix} -3i \\ \sqrt{10} + 1 \end{pmatrix}.$$

Segue pelo **Princípio de Rayleigh** que para todo $x_1 \neq 0$ e $x_2 \neq 0$ temos que

$$\frac{4|x_1|^2 + 3i\bar{x}_1x_2 - 3i\bar{x}_2x_1 + 2|x_2|^2}{|x_1|^2 + |x_2|^2} \leq 3 + \sqrt{10}.$$

A igualdade é atingida quando $x_1 = v_1^1$ e $x_2 = v_2^1$.

Uma vez definido o autovalor λ_1 de uma matriz hermitiana A podemos determinar os autovalores $\lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ observando que são valores da forma (Av, v) com $\|v\| = 1$ e v ortogonal aos autovetores associados aos autovalores maiores, ou seja, para $i \geq 2$ temos que $\lambda_i = (Av, v)$ quando $v = v^i$, um vetor unitário ortogonal a v^1, \dots, v^{i-1} .

Teorema 2.9. Princípio de Rayleigh Generalizado.[26]

Seja A uma matriz hermitiana de ordem n e $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ os seus autovalores. Para $i \geq 2$, sejam v^1, \dots, v^{i-1} autovetores unitários dois a dois ortogonais respectivamente associados aos autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}$. Então

$$\lambda_i = \max_{\substack{\|v\|=1 \\ v \perp v^1, \dots, v^{i-1}}} (Av, v) \tag{2.4}$$

onde $v \perp v^1, \dots, v^{i-1}$ indica que $(v, v^1) = (v, v^2) = \dots = (v, v^{i-1}) = 0$. O máximo é atingido quando v é o autovetor associado ao autovalor λ_i .

Demonstração. Sejam v^1, \dots, v^n os autovetores unitários dois a dois ortogonais da matriz A . Observe que esses vetores formam uma base para um espaço de dimensão n , logo v pode ser escrito como

$$v = c_1 v^1 + \dots + c_{i-1} v^{i-1} + c_i v^i + \dots + c_n v^n.$$

Assim temos

$$\|v\|^2 = \sum_{j=1}^n |c_j|^2, \quad c_k = (v, v^k) \quad (k = 1, \dots, n).$$

Pelas condições de maximização da equação (2.4) temos

$$1 = \sum_{j=1}^n |c_j|^2, \quad c_k = 0 \quad (k = 1, \dots, i-1).$$

Então

$$\begin{aligned} (Av, v) &= \left(\sum_{j=1}^n c_j \lambda_j v^j, \sum_{k=1}^n c_k v^k \right) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \lambda_j c_j \overline{c_k} (v^j, v^k) \\ &= \lambda_i |c_i|^2 + \dots + \lambda_n |c_n|^2 \leq \lambda_i (|c_i|^2 + \dots + |c_n|^2) = \lambda_i. \end{aligned} \quad (2.5)$$

A igualdade é atingida se $c_i = 1$ e $c_{i+1} = \dots = c_n = 0$, ou seja, se $v = v^i$.

Se $\lambda_i = \dots = \lambda_r > \lambda_{r+1} \geq \dots \geq \lambda_n$ a igualdade em (2.5) é atingida unicamente se

$$|c_i|^2 + \dots + |c_r|^2 = 1, \quad c_j = 0 \quad (j > r).$$

Então para $r > i$ temos que um vetor adequado para a equação (2.4) é dado por

$$v = c_i v^i + \dots + c_r v^r,$$

e é um autovetor associado ao autovalor λ_i de multiplicidade $r - i + 1$. \square

De maneira similar, podemos enunciar um paralelo do resultado anterior em função do autovalor λ_n cuja demonstração é análoga a do **Teorema 2.9**.

Teorema 2.10. Outra Versão do Princípio de Rayleigh Generalizado.[26]

Seja A uma matriz hermitiana de ordem n e $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ os seus autovalores. Para $i \leq n - 1$, sejam v^{i+1}, \dots, v^n autovetores unitários dois a dois ortogonais respectivamente associados aos autovalores $\lambda_{i+1}, \dots, \lambda_n$. Então

$$\lambda_i = \min_{\substack{\|v\| = 1 \\ v \perp v^{i+1}, \dots, v^n}} (Av, v). \quad (2.6)$$

O mínimo é atingido quando v é o autovetor associado ao autovalor λ_i .

No **Exemplo 2.7** mostramos como aplicar essa generalização.

Exemplo 2.7. Considere a matriz hermitiana

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

com autovalores $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 1$, e correspondentes autovetores

$$v^1 = e^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v^2 = e^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e \quad v^3 = e^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

O Princípio de Rayleigh Generalizado para λ_2 indica que

$$\lambda_2 = \max_{\substack{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1 \\ (u, e^1) = 0}} (Au, u) = \max_{\substack{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1 \\ (u, e^1) = 0}} (3u_1^2 + 2u_2^2 + u_3^2).$$

Como $(u, e^1) = u_1 = 0$ obtemos que

$$\lambda_2 = \max_{u_2^2 + u_3^2 = 1} (2u_2^2 + u_3^2) = 2.$$

Observe que os **Teoremas 2.7 e 2.9** lidam com problemas de maximização, enquanto os **Teoremas 2.8 e 2.10** lidam com os problemas de minimização

análogos. Tais resultados ilustram como problemas de maximização e minimização de uma mesma expressão se relacionam.

O Princípio de Rayleigh para o segundo maior autovalor de uma matriz A , afirma que

$$\lambda_2 = \max_{\substack{\|v\| = 1 \\ v \perp v^1}} (Av, v)$$

onde v^1 é um autovetor associado ao autovalor λ_1 da matriz. Observe que o Princípio de Rayleigh não fornece uma caracterização independente para λ_2 , uma vez que seu problema de máximo é estabelecido em função de um autovetor desconhecido associado ao autovalor λ_1 .

Existe uma caracterização para λ_2 em que a dependência de v^1 não é explícita. Para um vetor arbitrário u^1 definimos

$$\phi(u^1) = \max_{\substack{\|v\| = 1 \\ v \perp u^1}} (Av, v).$$

Note que esse problema de maximização depende de um vetor u^1 que pertence a um espaço de dimensão n , logo $\phi(u^1)$ pode assumir diversos valores reais. O Teorema de Courant-Fischer afirma que λ_2 é o menor desses valores, ou seja

$$\lambda_2 = \min_{u^1} \phi(u^1).$$

Em outras palavras, $\phi(u^1)$ é minimizado quando $u^1 = v^1$.

Teorema 2.11. Teorema de Courant-Fischer.[26]

Seja A uma matriz hermitiana de ordem n e $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ os seus autovalores.

Então, para $i < n$, temos que

$$\lambda_{i+1} = \min_{u^1, \dots, u^i} \left[\max_{\substack{\|v\| = 1 \\ v \perp u^1, \dots, u^i}} (Av, v) \right].$$

Demonstração. Observe que a função

$$\phi(u^1, \dots, u^i) = \max_{\substack{\|v\|=1 \\ v \perp u^1, \dots, u^i}} (Av, v), \quad (2.7)$$

está bem definida por ser o máximo de uma função contínua em um conjunto compacto. Se v^1, \dots, v^n são autovetores unitários dois a dois ortogonais da matriz A associados, respectivamente, aos autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, segue do **Teorema 2.9** que

$$\phi(v^1, \dots, v^i) = \lambda_{i+1}. \quad (2.8)$$

Dados vetores u^1, \dots, u^i , vamos construir um vetor admissível v tal que $(Av, v) \geq \lambda_{i+1}$. Considere todos os vetores v^0 da forma $v^0 = c_1v^1 + \dots + c_iv^i + c_{i+1}v^{i+1}$.

Note que as condições

$$(v^0, u^k) = \sum_{j=1}^{i+1} c_j (v^j, u^k) = 0 \quad (k = 1, \dots, i) \quad (2.9)$$

forneem um sistema de i equações nas variáveis c_1, \dots, c_{i+1} . Como o sistema homogêneo na equação (2.9) possui mais variáveis do que equações, temos que existem $\gamma_1, \dots, \gamma_{i+1}$, com $\gamma_l \neq 0$ para algum l , tal que $c_j = \lambda \gamma_j$, $1 \leq j \leq i+1$, é solução para todo valor de λ . Tomando

$$\lambda = \left(\sum_{j=1}^{i+1} |\gamma_j|^2 \right)^{-1/2}$$

obtemos uma solução do sistema em (2.9) com $\sum |c_j|^2 = 1$, logo o vetor $v^0 = \sum c_j v^j$ satisfaz todas as condições de maximização da equação (2.7). Assim temos que o valor máximo da função ϕ satisfaz a desigualdade $\phi(u^1, \dots, u^i) \geq (Av^0, v^0)$.

Perceba que

$$(Av^0, v^0) = \left(\sum_{j=1}^{i+1} c_j \lambda_j v^j, \sum_{k=1}^{i+1} c_k v^k \right) = \sum_{j=1}^{i+1} |c_j|^2 \lambda_j \geq \lambda_{i+1} \sum_{j=1}^{i+1} |c_j|^2 = \lambda_{i+1}. \quad (2.10)$$

Dessa forma mostramos que $\phi(u^1, \dots, u^i) \geq \lambda_{i+1}$ para qualquer conjunto de vetores u^1, \dots, u^i , e pela equação (2.8) temos que a igualdade é atingida quando

$u^1 = v^1, \dots, u^i = v^i$. Com isso mostramos que λ_{i+1} é exatamente o mínimo de ϕ , como o teorema estabelece. \square

Assim como no Princípio de Rayleigh, também podemos estabelecer um paralelo do Teorema de Courant-Fischer formulado por um problema de otimização complementar ao original.

Teorema 2.12. Outra Versão do Teorema de Courant-Fischer.[26]

Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz hermitiana de ordem n e $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ os seus autovalores. Então para $i > 1$ temos que

$$\lambda_{i-1} = \max_{u^i, \dots, u^n} \left[\begin{array}{c} \min (Av, v) \\ \|v\| = 1 \\ v \perp u^i, \dots, u^n \end{array} \right]. \quad (2.11)$$

Demonstração. Análogo ao teorema anterior. Basta perceber que o problema de maximização seguido do problema de minimização enunciado pode ser resolvido de modo similar ao problema de minimização seguido do problema de maximização do teorema anterior, desde que respeitadas as restrições impostas ao vetor v . \square

Desenvolvendo o **Exemplo 2.7** mostramos uma aplicação prática do Teorema de Courant-Fischer.

Exemplo 2.8. O Teorema de Courant-Fischer para λ_3 implica que

$$1 = \min_{v^1, v^2} \left[\begin{array}{c} \max (3u_1^2 + 2u_2^2 + u_3^2) \\ \|u\| = 1 \\ (u, v^1) = (u, v^2) = 0 \end{array} \right].$$

De fato

$$\phi(e^1, e^2) = \max_{\substack{\|u\| = 1 \\ (u, v^1) = (u, v^2) = 0}} (3u_1^2 + 2u_2^2 + u_3^2) = \max_{u_3^2=1} u_3^2 = 1.$$

O Princípio de Rayleigh e o Teorema de Courant-Fischer caracterizam autovalores de matrizes hermitianas por meio de problemas de maximização e minimização. A continuidade das funções maximizadas e/ou minimizadas fornece um razoável grau de liberdade na manipulação desses problemas, o que nos permite relacionar autovalores de diferentes matrizes em determinadas classes.

O Teorema do Entrelaçamento de Cauchy afirma que os autovalores de uma matriz hermitiana de ordem n podem ser relacionados com os autovalores de qualquer submatriz principal de ordem $n - 1$ dessa.

Definição 2.6. *Uma matriz B , quadrada de ordem m , é uma **submatriz principal** de ordem m de uma matriz A , quadrada de ordem $n > m$, se B é obtida pela deleção de $n - m$ linhas e das mesmas $n - m$ colunas de A .*

Existem diversas demonstrações para o Teorema do Entrelaçamento de Cauchy na literatura (ver [20], [28] e a página 186 de [31]). Procedemos com uma prova que utiliza o Teorema de Courant-Fischer.

Teorema 2.13. Teorema do Entrelaçamento de Cauchy.[26]

Sejam A uma matriz hermitiana de ordem $n > 1$ e B uma submatriz principal de ordem $n - 1$ de A . Se

$$\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \text{ são os autovalores de } A \text{ e}$$

$$\theta_1 \geq \dots \geq \theta_{n-1} \text{ são os autovalores de } B,$$

então

$$\lambda_1 \geq \theta_1 \geq \lambda_2 \geq \theta_2 \geq \dots \geq \lambda_{n-1} \geq \theta_{n-1} \geq \lambda_n.$$

Demonstração. Mostremos inicialmente o caso em que $B = [b_{ij}]$ é a submatriz principal de ordem $n - 1$ de $A = [a_{ij}]$ obtida pela deleção da última linha e coluna.

Considere as expressões (Bu, u) e (Av, v) , e observe que elas serão iguais se $(v, e^n) = v_n = 0$ e $v_i = u_i$, para $1 \leq i \leq n-1$. De fato

$$(Bu, u) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} b_{ij} u_j \bar{u}_i = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} v_j \bar{v}_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j \bar{v}_i = (Av, v).$$

Para quaisquer vetores x^1, \dots, x^{i-1} , com $i < n$, temos que

$$\max_{\substack{\|v\| = 1 \\ v \perp x^1, \dots, x^{i-1}}} (Av, v) \geq \max_{\substack{\|v\| = 1 \\ v \perp x^1, \dots, x^{i-1}, e^n}} (Av, v), \quad (2.12)$$

pois a exigência $(v, e^n) = 0$, no lado direito da expressão (2.12), restringe os possíveis valores de (Av, v) .

Usaremos a notação $v \longrightarrow u$ para indicar que $u = [v_1, \dots, v_{n-1}]^T$, ou seja, u é formado pelos mesmos elementos de v a menos do último.

Se $x^j \longrightarrow w^j$ para $1 \leq j \leq i-1$, temos que

$$\max_{\substack{\|v\| = 1 \\ v \perp x^1, \dots, x^{i-1}, e^n}} (Av, v) = \max_{\substack{\|u\| = 1 \\ u \perp w^1, \dots, w^{i-1}}} (Bu, u). \quad (2.13)$$

De fato,

$$\left\{ \begin{array}{l} \|v\| = 1 \\ (v, x^1) = \dots = (v, x^{i-1}) = (v, e^n) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \|u\| = 1 \\ (u, w^1) = \dots = (u, w^{i-1}) = 0. \end{array} \right.$$

Assim temos que ambos os lados da equação (2.13) são funções dos vetores x^1, \dots, x^{i-1} . Como funções idênticas possuem o mesmo mínimo, temos

$$\min_{x^1, \dots, x^{i-1}} \left[\max_{\substack{\|v\| = 1 \\ v \perp x^1, \dots, x^{i-1}, e^n}} (Av, v) \right] = \min_{w^1, \dots, w^{i-1}} \left[\max_{\substack{\|u\| = 1 \\ u \perp w^1, \dots, w^{i-1}}} (Bu, u) \right] = \theta_i. \quad (2.14)$$

Note que se $i = 1$ nenhum dos vetores x^i ou w^i aparece e podemos substituir a expressão (2.14) por

$$\max_{\substack{\|v\|=1 \\ v \perp e^n}} (Av, v) = \max_{\|u\|=1} (Bu, u) = \theta_1.$$

A desigualdade (2.12) afirma que uma certa função de x^1, \dots, x^{i-1} é sempre maior ou igual que uma outra certa função de x^1, \dots, x^{i-1} , logo o mínimo dessas deve satisfazer a mesma desigualdade. Usando o **Teorema de Courant-Fischer (Teorema 2.11)** e a expressão (2.14) temos que

$$\lambda_i = \min_{x^1, \dots, x^{i-1}} \left[\max_{\substack{\|v\|=1 \\ v \perp x^1, \dots, x^{i-1}}} (Av, v) \right] \geq \min_{w^1, \dots, w^{i-1}} \left[\max_{\substack{\|u\|=1 \\ u \perp w^1, \dots, w^{i-1}}} (Bu, u) \right] = \theta_i.$$

Resta mostrar que $\theta_i \geq \lambda_{i+1}$. Na expressão (2.14) mostramos que

$$\theta_i = \min_{x^1, \dots, x^{i-1}} \phi(x^1, \dots, x^{i-1}, e^n), \quad (2.15)$$

onde definimos

$$\phi(x^1, \dots, x^{i-1}, x^i) = \max_{\substack{\|v\|=1 \\ v \perp x^1, \dots, x^{i-1}, x^i}} (Av, v).$$

Pelo **Teorema 2.11** temos que

$$\min_{x^1, \dots, x^{i-1}, x^i} \phi(x^1, \dots, x^{i-1}, x^i) = \lambda_{i+1} \quad (2.16)$$

No problema de minimização da equação (2.15) fixamos $x^i = e^n$, enquanto que no problema de minimização da equação (2.16) não restringimos o vetor x^i , e isto garante que existam mais candidatos para minimizar ϕ . Assim temos que

$$\theta_i = \min_{x^1, \dots, x^{i-1}} \phi(x^1, \dots, x^{i-1}, e^n) \geq \min_{x^1, \dots, x^{i-1}, x^i} \phi(x^1, \dots, x^{i-1}, x^i) = \lambda_{i+1}.$$

Isso prova o caso em que B é a submatriz principal de ordem $n - 1$ de A obtida pela deleção da última linha e coluna de A .

No caso geral, note que para cada linha e coluna da matriz A existe uma matriz de permutação P que faz com que essas se tornem a última linha e coluna da matriz $P^{-1}AP$. Pelo **Teorema 2.5** temos que o espectro de A é igual ao espectro de $P^{-1}AP$, e com isso o resultado procede de maneira análoga ao caso anterior. \square

O próximo teorema é uma generalização do Teorema do Entrelaçamento de Cauchy obtido por aplicações sucessivas do mesmo. Para uma demonstração direta podemos utilizar o Teorema de Courant-Fischer como na página 190 de [26].

Teorema 2.14. Teorema do Entrelaçamento de Cauchy Generalizado.[26]

Sejam A uma matriz hermitiana de ordem $n > 1$ e B_r uma submatriz principal de ordem r de A com $1 \leq r < n$. Se

$$\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \text{ são os autovalores de } A \text{ e}$$

$$\theta_1 \geq \dots \geq \theta_r \text{ são os autovalores de } B,$$

então

$$\lambda_i \geq \theta_i \geq \lambda_{i+n-r},$$

para $1 \leq i \leq r$.

Demonstração. Procedemos por indução em $n - r$.

Para $n - r = 1$ recaímos no teorema anterior.

Suponhamos que o resultado é válido para $n - r - 1$ e denotamos por $\gamma_1 \geq \dots \geq \gamma_{r+1}$ os autovalores da matriz B_{r+1} . Segue pela hipótese de indução que $\lambda_i \geq \gamma_i \geq \lambda_{i+n-r-1}$.

Mostremos que o resultado é válido para $n - r$. Note que a matriz B_r é submatriz principal da matriz B_{r+1} . Segue pelo **Teorema 2.13** que $\gamma_i \geq \theta_i \geq \gamma_{i+1}$.

Assim temos

$$\lambda_i \geq \gamma_i \geq \theta_i \geq \gamma_{i+1} \geq \lambda_{i+n-r}.$$

Logo temos que

$$\lambda_i \geq \theta_i \geq \lambda_{i+n-r}.$$

□

O **Exemplo 2.9** mostra como identificar submatrizes principais e como aplicar o Teorema do Entrelaçamento de Cauchy.

Exemplo 2.9. *Considere as matrizes*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}.$$

A matriz B é submatriz principal de ordem 2 da matriz A obtida pela deleção da última linha e coluna.

Analogamente, temos que C é submatriz principal de ordem 1 da matriz B obtida pela deleção da segunda linha e coluna. Consequentemente, temos que C é submatriz principal de ordem 1 da matriz A obtida pela deleção das duas últimas linhas e colunas.

Calculando os autovalores dessas matrizes temos:

$\lambda_1 = 3 + \sqrt{2}$, $\lambda_2 = 3 - \sqrt{2}$ e $\lambda_3 = 1$ são os autovalores de A .

$\theta_1 = 3$ e $\theta_2 = 1$ são os autovalores de B .

$\gamma_1 = 2$ é o autovalor de C .

Pelo Teorema do Entrelaçamento de Cauchy temos as seguintes relações.

Entre A e B : $3 + \sqrt{2} \geq 3 \geq 3 - \sqrt{2} \geq 1 \geq 1$.

Entre B e C : $3 \geq 2 \geq 1$.

Entre A e C : $3 + \sqrt{2} \geq 2 \geq 1$.

Com o Princípio de Rayleigh e o Teorema de Courant-Fischer podemos estabelecer relações entre autovalores de matrizes que estejam associadas por operações. Suponha que desejamos conhecer os autovalores de uma matriz hermitiana A cujos elementos não são exatamente conhecidos. Dada uma matriz hermitiana B com elementos próximos dos de A temos que $A = B + E$, onde E é uma matriz hermitiana que representa a diferença entre os elementos de A e B . A Desigualdade de Weyl permite estimar a diferença entre os autovalores de B e os respectivos autovalores de A .

Teorema 2.15. Desigualdade de Weyl.[26]

Seja $A = B + E$, onde A, B e E são matrizes hermitianas, e

$$\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \text{ são os autovalores de } A,$$

$$\theta_1 \geq \dots \geq \theta_n \text{ são os autovalores de } B,$$

$$\gamma_1 \geq \dots \geq \gamma_n \text{ são os autovalores de } E.$$

Então

$$\gamma_1 + \theta_i \geq \lambda_i \geq \gamma_n + \theta_i$$

para $1 \leq i \leq n$.

Demonstração. O Teorema de Courant-Fischer (Teorema 2.11) afirma que

$$\lambda_i = \min_{u^1, \dots, u^{i-1}} \left[\begin{array}{c} \max_{\substack{\|v\|=1 \\ v \perp u^1, \dots, u^{i-1}}} (Av, v) \end{array} \right].$$

O Princípio de Rayleigh (Teorema 2.7) afirma que

$$\gamma_1 = \max_{\|v\|=1} (Ev, v).$$

Para obtermos o $\min(Ev, v)$ observamos que os autovalores de $-E$ são $-\gamma_n \geq \dots \geq -\gamma_1$ e que o mínimo e o máximo de uma função sempre estão

relacionados do seguinte modo

$$\min_{\|v\|=1} (Ev, v) = - \max_{\|v\|=1} [-(Ev, v)] = -(-\gamma_n) = \gamma_n.$$

Logo

$$\gamma_n \leq (Ev, v) \leq \gamma_1, \text{ se } \|v\| = 1. \quad (2.17)$$

Como $A = B + E$ segue que $(Av, v) = (Bv, v) + (Ev, v)$. Usando a desigualdade (2.17) temos que

$$\gamma_n + (Bv, v) \leq (Av, v) \leq \gamma_1 + (Bv, v).$$

Dados vetores u^1, \dots, u^{i-1} obtemos

$$\gamma_n + \max_{\substack{\|v\|=1 \\ v \perp u^1, \dots, u^{i-1}}} (Bv, v) \leq \max_{\substack{\|v\|=1 \\ v \perp u^1, \dots, u^{i-1}}} (Av, v) \leq \gamma_1 + \max_{\substack{\|v\|=1 \\ v \perp u^1, \dots, u^{i-1}}} (Bv, v).$$

Tomando o mínimo com respeito aos vetores u^1, \dots, u^{i-1} na expressão acima, e usando que se a desigualdade anterior é válida para qualquer valor que as funções possam assumir então ela também deve ser válida para o mínimo das mesmas, segue pelo **Teorema de Courant-Fischer** que

$$\gamma_1 + \theta_i \geq \lambda_i \geq \gamma_n + \theta_i$$

□

Vejamos como as relações dadas pela Desigualdade de Weyl são estabelecidas na prática.

Exemplo 2.10. *Considere as matrizes hermitianas*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculando a matriz $E = A - B$ temos

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Dessa forma temos que $A = B + E$. Calculando os autovalores dessas três matrizes temos que

$\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 1$ são os autovalores de A .

$\theta_1 = 1 + \sqrt{2}$, $\theta_2 = 1$ e $\theta_3 = 1 - \sqrt{2}$ são os autovalores de B .

$\gamma_1 = 2 + \sqrt{2}$, $\gamma_2 = 1$ e $\gamma_3 = 2 - \sqrt{2}$ são os autovalores de E .

Pela Desigualdade de Weyl temos as seguintes relações

Para $i = 1$: $(2 + \sqrt{2}) + (1 + \sqrt{2}) \geq 5 \geq (2 - \sqrt{2}) + (1 + \sqrt{2}) \Rightarrow 3 + 2\sqrt{2} \geq 5 \geq 3$.

Para $i = 2$: $(2 + \sqrt{2}) + (1) \geq 2 \geq (2 - \sqrt{2}) + (1) \Rightarrow 3 + \sqrt{2} \geq 2 \geq 3 - \sqrt{2}$.

Para $i = 3$: $(2 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2}) \geq 1 \geq (2 - \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2}) \Rightarrow 3 \geq 1 \geq 3 - 2\sqrt{2}$.

3 TEORIA DE GRAFOS

Muitas situações podem ser descritas por diagramas feitos por conjuntos de pontos e linhas ligando pares desses pontos. A abstração matemática dessas situações originou o conceito de grafo e o desenvolvimento de seu estudo.

Neste capítulo apresentamos algumas definições e resultados sobre Teoria Espectral de Grafos fundamentados nos livros de Abreu et al [1] e de Bondy et al [4].

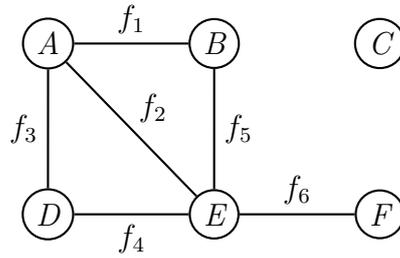
3.1 Grafos e Suas Representações

Definição 3.1. Um **grafo** G é um par ordenado $G = (V(G), E(G))$, constituído por um conjunto finito e não vazio $V(G)$, cujos elementos são denominados **vértices**, e um conjunto $E(G)$ de subconjuntos de dois elementos de $V(G)$, denominados **arestas**. Quando não houver ambiguidade denotaremos o conjunto dos vértices e o conjunto das arestas do grafo G , respectivamente, por V e E .

Grafos recebem esse nome por possuírem uma representação gráfica que ajuda na compreensão de muitas de suas propriedades. Nessa representação cada vértice é indicado por um ponto, e cada aresta é exibida como uma linha que liga os pontos que indicam os vértices que constituem a aresta.

Exemplo 3.1. Considere o grafo G_1 com conjunto de vértices $V(G_1) = \{A, B, C, D, E, F\}$ e de arestas $E(G_1) = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$, onde $f_1 = \{A, B\}$, $f_2 = \{A, E\}$, $f_3 = \{A, D\}$, $f_4 = \{D, E\}$, $f_5 = \{B, E\}$ e $f_6 = \{E, F\}$.

Apresentamos na Figura 3.1 a representação gráfica de G_1 .



Grafo $G_1 = (V(G_1), E(G_1))$.

Figura 3.1 Representação gráfica de G_1 .

Dado um conjunto A , denotamos por $|A|$ a cardinalidade do conjunto. Logo denotamos por $|V|$ o número de vértices de G (ou **ordem** do grafo), e por $|E|$ o número de arestas de G (ou **tamanho** do grafo). Observe que o grafo do **Exemplo 3.1** tem ordem e tamanho 6.

A representação gráfica ilustra as ligações entre vértices e arestas do grafo. O desenvolvimento da teoria espectral de grafos exige que tais ligações sejam adequadamente identificadas.

Definição 3.2. Se $f = \{u, v\} \in E(G)$, dizemos que f é **incidente** aos vértices u e v , que são ditos **pontos finais da aresta** f . Além disso, dizemos que u e v são vértices **vizinhos** ou **adjacentes**, e são denotados por $u \sim v$.

Se $f = \{u, v\} \notin E(G)$ dizemos que os vértices u e v não são adjacentes, e denotamos por $u \not\sim v$.

No **Exemplo 3.1** temos que f_1 é uma aresta incidente aos vértices A e B , que são pontos finais da aresta f_1 , logo são vértices adjacentes.

A análise das relações de incidência e adjacência entre vértices e arestas permite estabelecer características sobre esses elementos.

Definição 3.3. A **vizinhança de um vértice** $u \in V(G)$ é o conjunto $\{v \in V(G) : \{u, v\} \in E(G)\}$, denotado por $N_G(u)$. Quando não houver ambiguidade denotaremos a vizinhança do vértice $u \in G$ por $N(u)$.

O **grau de um vértice** $u \in V(G)$, denotado por $d_G(u)$, é o número de arestas que

incidem em u no grafo $V(G)$. Quando não houver ambiguidade denotaremos o grau do vértice u por $d(u)$.

Considere o grafo do **Exemplo 3.1**. Como as arestas $f_2, f_4, f_5,$ e f_6 são incidentes ao vértice E temos que $d_{G_1}(E) = 4$, e além disso, cada uma dessas arestas torna E adjacente a um vértice, com isso temos $N_{G_1}(E) = \{A, B, D, F\}$.

Como nenhuma aresta incide no vértice C temos que $d_{G_1}(C) = 0$. Um vértice com tal propriedade é dito **vértice isolado**.

Um grafo pode ser caracterizado pela análise de suas arestas. A próxima definição identifica a estrutura das arestas que constituem os grafos que serão estudados nesse trabalho.

Definição 3.4. Um grafo $G = (V, E)$ é dito **grafo simples** quando não possui laços (arestas da forma $\{u, u\}$), não possui arestas múltiplas (repetição de elementos em E) e não possui orientação (os subconjuntos de vértices que formam as arestas não são ordenados).

Observe que o grafo apresentado no **Exemplo 3.1** é simples. No **Exemplo 3.2** apresentamos um grafo que não é.

Exemplo 3.2. Considere o grafo apresentado na Figura 3.2.

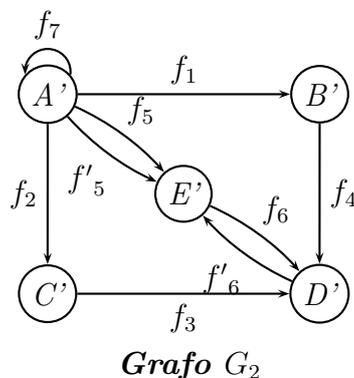


Figura 3.2 Grafo não simples.

Note que G_2 é um **grafo direcionado**, ou seja, suas arestas são ordenadas e são graficamente representadas por setas, que vão do primeiro para o segundo vértice que constitui a aresta. Além disso, observe que as arestas f_5 e f'_5 formam um par de arestas múltiplas e a aresta $f_7 = \{A', A'\}$ é um laço, logo G_2 não é simples devido à estrutura de suas arestas.

Em um grafo podemos identificar estruturas definidas por subconjuntos de vértices e arestas que são utilizadas para a caracterização e para o estudo de propriedades.

Definição 3.5. Seja $G = (V, E)$ um grafo. Se $G' = (V', E')$ é um grafo com $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$ dizemos que G' é um **subgrafo** de G , denotamos por $G' \subseteq G$. Quando $G' \subseteq G$ é tal que dois vértices são adjacentes em G' se e somente se são adjacentes em G , dizemos que G' é um **subgrafo induzido** de G .

Considere os grafos apresentados na Figura 3.3.



Figura 3.3 Subgrafo e subgrafo induzido de G_1 .

Observe que ambos os grafos são compostos por vértices e arestas contidos no grafo G_1 do **Exemplo 3.1**, logo são seus subgrafos. Além disso, note que o grafo H_2 é subgrafo induzido de G_1 por preservar todas as adjacências do grafo original entre seus vértices.

Podemos investigar propriedades de um grafo por meio da análise de seus subgrafos. Tais estruturas são mais simples e, por vezes, mais fáceis de serem estudadas do que o grafo como um todo.

Na próxima definição apresentamos duas classes de grafos que possuem estrutura simples e estão contidas em um grande número de grafos.

Definição 3.6. *Uma sequência finita v_1, v_2, \dots, v_k de vértices de um grafo $G = (V, E)$ é dita uma **cadeia** de v_1 a v_k se $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ para $1 \leq i \leq k - 1$.*

*Se $v_1 = v_k$ a cadeia é dita **fechada**.*

*Um **caminho** é uma cadeia onde todos os vértices são distintos. O caminho com n vértices é denotado por P_n .*

*Um **ciclo** é um caminho fechado. O ciclo com n vértices é denotado por C_n , com $n \geq 3$.*

*O **comprimento** de um caminho ou ciclo é o número de arestas que neles ocorrem.*

Relembrando os subgrafos do grafo G_1 do **Exemplo 3.1**, apresentados na Figura 3.3, temos que $H_1 = C_4$ e $H_2 = P_3$.

Algumas classes de grafos podem ser caracterizadas pela presença, ou ausência, de outras.

Definição 3.7. *Um grafo G é dito **grafo conexo** quando existe um caminho ligando cada par de seus vértices, caso contrário, G é denominado **grafo desconexo**.*

*Dizemos que $G' \subset G$ é uma **componente conexa** de G quando G' é um grafo conexo e não existe um grafo conexo $H \subset G$ tal que $G' \subset H$ e $G' \neq H$.*

Observe que o grafo G_1 no **Exemplo 3.1** possui duas componentes conexas, uma constituída pelo vértice isolado C e a outra é o subgrafo induzido de G_1 que contém os vértices A, B, D, E e F .

As relações de incidência e a caracterização de determinados vértices também permitem definir classes de grafos.

Definição 3.8. Um grafo é dito **grafo k -regular**, ou **grafo regular de grau k** , se todos os seus vértices possuem grau k .

Um grafo de ordem n é dito **grafo completo** se for $(n - 1)$ -regular. Denotamos por K_n o grafo completo de ordem n .

Exemplo 3.3. Apresentamos na Figura 3.4 os grafos completos K_3 e K_4 .



Figura 3.4 Grafos K_3 e K_4 .

Alguns grafos apresentam determinada regularidade em seus conjuntos de vértices e arestas que permitem a caracterização de uma classe.

Definição 3.9. Um grafo $G = (V, E)$ é dito um **grafo k -partido** quando existe uma partição de V em k subconjuntos não vazios e dois a dois disjuntos (isto é, $V = Y_1 \cup Y_2 \cup \dots \cup Y_k$, com $Y_i \cap Y_j = \emptyset$, para todo $i \neq j$) de modo que as arestas de G sejam sempre da forma $\{u, v\}$ com $u \in Y_i$ e $v \in Y_j$, com $i \neq j$, ou seja, não existem vértices adjacentes em um mesmo subconjunto da partição.

Quando $k = 2$ dizemos que o grafo é **bipartido**.

Quando $E = V_1 \times V_2$ com $|V_1| = r$ e $|V_2| = s$, G é dito um **grafo bipartido completo**, e é denotado por $K_{r,s}$.

A regularidade apresentada no conjunto de vértices dos grafos dessa classe permite uma análise individual de cada subconjunto da partição. Tal recurso pode auxiliar na investigação de propriedades do grafo.

Exemplo 3.4. Apresentamos na Figura 3.5 o grafo bipartido completo $K_{2,4}$.

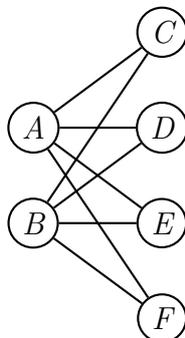


Figura 3.5 Grafo $K_{2,4}$.

Considere a partição dos vértices dada por $Y_1 = \{A, B\}$ e $Y_2 = \{C, D, E, F\}$. Assim temos que $V = Y_1 \cup Y_2$, todos os vértices de Y_1 são ligados a todos os vértices de Y_2 e vice-versa, além disso, vértices de um mesmo subconjunto não são adjacentes.

3.2 Operações Entre Grafos

Por vezes é conveniente alterarmos a estrutura de um grafo para adquirirmos um outro que seja mais útil para o estudo de determinado tópico. Operações entre grafos constroem novos grafos utilizando as informações provenientes dos originais.

Algumas operações apenas alteram a estrutura do grafo original, como a deleção de uma aresta ou de um vértice, enquanto outras geram conjuntos de vértices e arestas diferentes dos originais, como a contração de vértices. Apresentamos algumas das principais operações nesta seção.

Definição 3.10. Dado um grafo $G = (V, E)$, a **deleção de uma aresta** $f \in E$ fornece o grafo $G \setminus f = (V, E - \{f\})$.

Obtemos o novo grafo $G \setminus f$ deletando a aresta f do grafo G e mantendo os outros vértices e arestas.

Vejamos uma aplicação da operação de deleção de uma aresta.

Exemplo 3.5. Considere os grafos da Figura 3.6.



Figura 3.6 Deleção de uma aresta.

Observe que essa operação apenas faz com que a aresta deletada desapareça sem alterar nenhuma outra estrutura do grafo.

Definição 3.11. Dado um grafo $G = (V, E)$, a **deleção de um vértice** $u \in V$ fornece o grafo $G - u = (V_u, E_u)$, onde

$$V_u = V - \{u\} \text{ e}$$

$$E_u = E - \{\{t, u\} : t \in N_u\}.$$

Obtemos o novo grafo $G - u$ deletando o vértice u e todas as arestas incidentes a ele no grafo G .

Vejamos uma aplicação da operação de deleção de um vértice.

Exemplo 3.6. Considere os grafos da Figura 3.7.

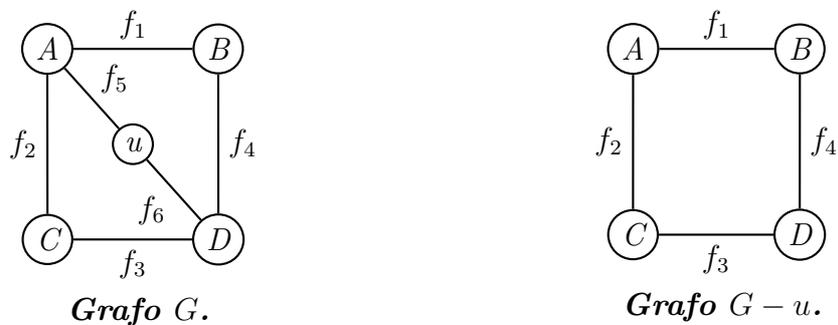


Figura 3.7 Deleção de um vértice.

Observe que essa operação altera mais a estrutura do grafo original do que a operação anterior. Além do vértice deletado desaparecer, também desaparecem todas as arestas que incidem nele.

Definição 3.12. Dado um grafo $G = (V, E)$, a **subdivisão de uma aresta** $f = \{u, v\} \in E$ fornece o grafo $G_f = (V_f, E_f)$, onde

$$V_f = V \cup \{x\},$$

sendo que $x \notin V$, e

$$E_f = (E - \{f\}) \cup \{\{x, u\}, \{x, v\}\}.$$

Subdividir a aresta f do grafo G significa deletar a aresta f e adicionar um novo vértice x com $N_{G_f}(x) = \{u, v\}$, ou seja, o novo vértice x é adjacente aos pontos finais da aresta subdividida.

Vejamos uma aplicação da operação de subdivisão de aresta.

Exemplo 3.7. Considere os grafos da Figura 3.8.



Figura 3.8 Subdivisão de uma aresta.

Nessa operação os elementos do grafo não apenas desaparecem, mas também são criados novos. Observe que a aresta subdividida desaparece e em seu lugar aparecem duas novas arestas e um novo vértice.

Definição 3.13. Dado um grafo $G = (V, E)$ a **contração de vértices** $u, v \in V$ fornece o grafo $G | \{u, v\} = (V_{\{u,v\}}, E_{\{u,v\}})$, onde

$$V_{\{u,v\}} = (V - \{u, v\}) \cup \{x\},$$

sendo x um vértice com $N_{G|\{u,v\}}(x) = [N_G(u) \cup N_G(v)] - \{u, v\}$, e

$$E_{\{u,v\}} = [E - (\{\{z, u\} : z \in N_G(u)\} \cup \{\{z, v\} : z \in N_G(v)\})] \cup \{\{z, x\} : z \in N_{G|\{u,v\}}(x)\}.$$

Contraír os vértices u, v do grafo G significa deletar os vértices u, v e adicionar um novo vértice x cuja vizinhança é a união das vizinhanças de u e v no grafo original.

Vejamos uma aplicação da operação de contração de vértices.

Exemplo 3.8. Considere os grafos da Figura 3.9.

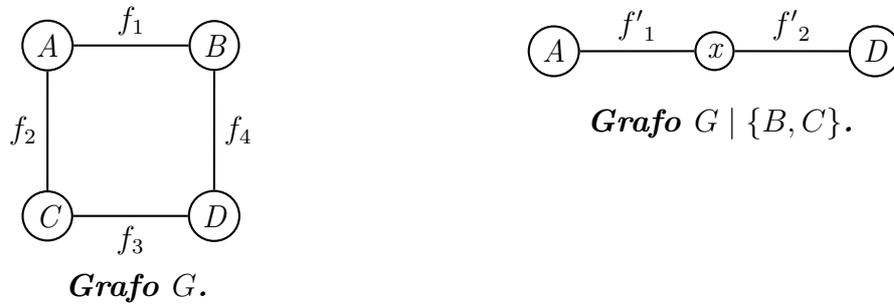


Figura 3.9 Contração de vértices.

Nessa operação os vértices contraídos desaparecem para dar lugar a um novo vértice. O número de arestas que desaparecem e de novas arestas que aparecem dependem das adjacências dos vértices contraídos.

Considere G um grafo e $H = G_f$, onde $f = \{u, v\} \in E$ e x é o vértice obtido na subdivisão da aresta f . Observe que $G = H | \{x, u\} = H | \{x, v\}$, ou seja, toda subdivisão de aresta pode ser revertida por uma certa contração de dois vértices adjacentes. Note que a relação contrária nem sempre é válida.

A contração de vértices adjacentes é dita **contração de aresta**.

Mostremos como essa relação entre as operações ocorre.

Exemplo 3.9. Considere os grafos da Figura 3.10.

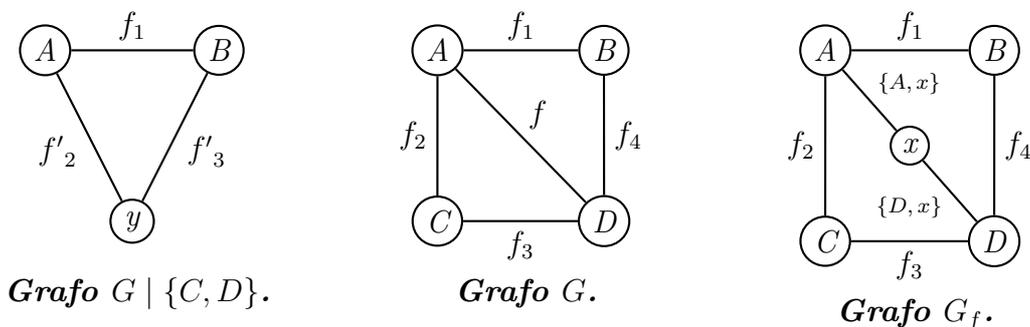


Figura 3.10 Relação entre contração de vértices e subdivisão de aresta.

Observe que $G = G_f \setminus \{A, x\} = G_f \setminus \{x, D\}$, ou seja, a subdivisão da aresta f pode ser desfeita pela contração dos vértices x e C ou x e D . No entanto, perceba que a subdivisão de nenhuma aresta de $G \setminus \{C, D\}$ pode desfazer a contração dos vértices C e D .

Algumas operações utilizam informações de dois ou mais grafos para gerar um novo.

Definição 3.14. Dados dois grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$ com $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, ou seja, sem vértices em comum, sua **união** é o grafo

$$G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2).$$

Para qualquer grafo conexo G , escrevemos kG para denotar o grafo que é a **união de k cópias** de G .

A união de dois grafos representa apenas a união de seus conjuntos de vértices e arestas sem nenhuma deleção, adição ou alteração.

Observe que todo grafo desconexo pode ser considerado a união de suas componentes conexas. Tal interpretação é fundamental para o tratamento adequado de grafos desconexos.

Vejamos uma aplicação da operação de união de grafos.

Exemplo 3.10. Considere os grafos da Figura 3.11.

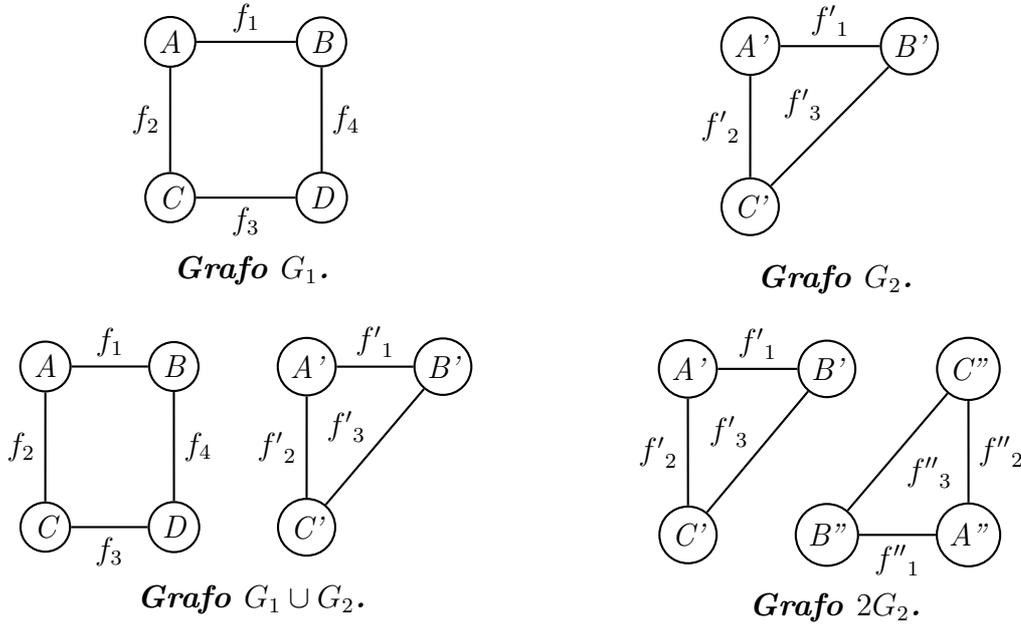


Figura 3.11 União de grafos.

Observe que essa operação apenas junta as informações de dois grafos em um único.

A aplicação de operações sobre um grafo permite alterar sua estrutura gerando um novo grafo. O próximo teorema mostra que grafos distintos, quando submetidos às operações adequadas, podem dar origem a um mesmo grafo.

Teorema 3.1. Dado um grafo G temos que $G \setminus f = G_f - x$, onde x é o vértice adicionado durante a subdivisão da aresta f .

Demonstração. Por definição, $G \setminus f = (V, E - \{f\})$ e $G_f - x = ((V_f)_x, (E_f)_x)$, logo

$$\begin{aligned}
 G_f - x &= ((V_f)_x, (E_f)_x) \\
 &= (V_f - \{x\}, E_f - \{\{t, x\} : t \in N_{G_f}(x)\}) \\
 &= (V \cup \{x\} - \{x\}, (E - \{f\}) \cup \{\{x, u\}, \{x, v\}\} - \{\{x, u\}, \{x, v\}\}) \\
 &= (V, E - \{f\}) \\
 &= G \setminus f.
 \end{aligned}$$

□

Vejamos uma ilustração desse teorema.

Exemplo 3.11. *Considere os grafos da Figura 3.12.*

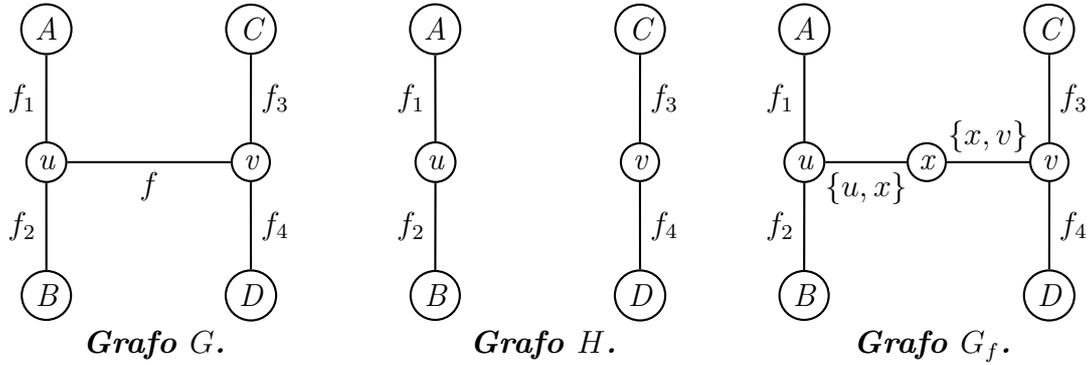


Figura 3.12 Aplicação do Teorema 3.1.

Observe que o grafo H pode ser obtido tanto pela deleção da aresta f do grafo G quanto pela deleção do vértice x do grafo G_f .

3.3 Principais Representações Matriciais

A representação gráfica pode ser útil para o estudo e compreensão de algumas propriedades sobre grafos, mas não é adequada para aplicações computacionais ou para aplicações de métodos matemáticos que auxiliem na busca de novos resultados. Para tais propósitos é mais vantajoso representar o grafo por meio de uma matriz que contenha informações sobre sua estrutura.

Dentre as representações matriciais de grafos mais importantes estão a matriz de adjacência A , a matriz laplaciana L , a matriz laplaciana normalizada \mathcal{L} e a matriz laplaciana sem sinal Q .

Exemplo 3.12. Considere o grafo da Figura 3.13.

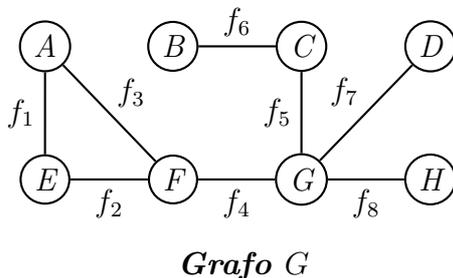


Figura 3.13 Representação gráfica de G .

Nesta seção, vamos apresentar diferentes representações matriciais desse grafo. Tais representações são constituídas extraindo informações da estrutura do grafo.

A matriz de adjacência foi a primeira representação matricial de um grafo a ser estudada. Começamos nossa exposição por ela.

Definição 3.15. A **matriz de adjacência** de um grafo $G = (V, E)$, denotada por $A(G) = [a_{uv}]$, é a matriz cujas linhas e colunas são indexadas pelos vértices de G e tem entradas dadas por

$$a_{uv} = \begin{cases} 1, & \text{se } \{u, v\} \in E, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$A(G)$ é uma matriz real, simétrica, quadrada de ordem $|V|$ e formada por uns e zeros. Pelo **Teorema 2.2** temos que todos os seus autovalores são reais.

Quando não houver ambiguidade, denotaremos a matriz de adjacência de um grafo G por A .

Todos os seus autovalores estão contidos no intervalo $[0, 2]$.

A multiplicidade do autovalor zero em \mathcal{L} indica o número de componentes conexas do grafo. Basta observar que $D^{-1/2}(1\dots 1)^T$ é autovetor de \mathcal{L} associado ao autovalor 0, e que se o grafo possui mais de uma componente conexa, então a matriz \mathcal{L} é uma matriz triangular por blocos.

Quando não houver ambiguidade, denotaremos a matriz laplaciana normalizada de um grafo G por \mathcal{L} .

Exemplo 3.15. *Apresentamos a seguir a matriz laplaciana normalizada do Grafo G do Exemplo 3.12.*

$$\begin{array}{c}
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \end{array}
 \begin{array}{cccccccc}
 & A & B & C & D & E & F & G & H \\
 \begin{array}{l} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \end{array} & \left(\begin{array}{cccccccc}
 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & 0 & 0 \\
 0 & 1 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{2\sqrt{2}} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\
 \frac{-1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{\sqrt{6}} & 0 & 0 \\
 \frac{-1}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{\sqrt{6}} & 1 & \frac{-1}{2\sqrt{3}} & 0 \\
 0 & 0 & \frac{-1}{2\sqrt{2}} & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{-1}{2\sqrt{3}} & 1 & \frac{-1}{2} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} & 1
 \end{array} \right)
 \end{array}$$

Observe que essa representação matricial indica as relações de adjacência entre os vértices e também informa o grau dos vértices que são adjacentes mediante a resolução de um sistema.

A matriz laplaciana sem sinal informa o mesmo que a matriz laplaciana, mas de um modo diferente.

Definição 3.18. A *matriz laplaciana sem sinal* de um grafo $G = (V, E)$, denotada por $Q(G) = [q_{uv}]$, é a matriz cujas linhas e colunas são indexadas pelos vértices de G e tem entradas dadas por

$$q_{uv} = \begin{cases} d(u), & \text{se } u = v, \\ 1, & \text{se } \{u, v\} \in E, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$Q(G)$ é uma matriz real, simétrica e quadrada de ordem $|V|$. Pelo **Teorema 2.2** temos que todos os seus autovalores são reais.

Quando não houver ambiguidade, denotaremos a matriz laplaciana sem sinal de um grafo G por Q .

Exemplo 3.16. Apresentamos a seguir a matriz laplaciana sem sinal do **Grafo G** do **Exemplo 3.12**.

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} & A & B & C & D & E & F & G & H \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Observe que essa representação matricial fornece as mesmas informações que a matriz laplaciana, no entanto, utiliza uma entrada com sinal diferente para indicar a relação de adjacência entre os vértices.

As representações matriciais apresentadas nessa seção são os principais objetos de nosso estudo devido à sua vasta utilização no desenvolvimento da teoria espectral de grafos.

3.4 Representações Matriciais Auxiliares

Outras representações matriciais úteis são a matriz diagonal dos graus, a matriz de incidência e a matriz de incidência orientada. Tais matrizes estão diretamente relacionadas com as vistas anteriormente, e auxiliam na obtenção de resultados.

Nesta seção também vamos apresentar as diferentes representações do grafo G presente no **Exemplo 3.12**.

Definição 3.19. A *matriz diagonal dos graus* de um grafo $G = (V, E)$, denotada por $D(G) = [d_{uv}]$, é a matriz cujas linhas e colunas são indexadas pelos vértices de G e tem entradas dadas por

$$d_{uv} = \begin{cases} d(u), & \text{se } u = v, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$D(G)$ é uma matriz diagonal real de ordem $|V|$. Pelo **Teorema 2.2** temos que todos os seus autovalores são reais, e sabemos que eles são exatamente os elementos da diagonal.

Quando não houver ambiguidade, denotaremos a matriz diagonal dos graus de um grafo G por D .

$$s_{uf} = \begin{cases} 1, & \text{se } f = \{u, v\} \in E, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Quando não houver ambiguidade denotaremos a matriz de incidência de um grafo G por S .

Cada coluna de S admite apenas duas entradas não nulas.

Exemplo 3.18. *Apresentamos a seguir a matriz de incidência do **Grafo** G do Exemplo 3.12.*

$$\begin{array}{cccccccc} & f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 & f_6 & f_7 & f_8 \\ A & \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ B & & & & & & & & \\ C & & & & & & & & \\ D & & & & & & & & \\ E & & & & & & & & \\ F & & & & & & & & \\ G & & & & & & & & \\ H & & & & & & & & \end{array}$$

Essa representação matricial informa relações entre vértices e arestas, ao contrário das outras vistas até o momento. Usando a matriz de incidência conseguimos identificar quais arestas incidem sobre quais vértices no grafo.

O próximo teorema mostra que a matriz laplaciana sem sinal está relacionada com a matriz de incidência.

Teorema 3.2. *Se $S(G)$ e $Q(G)$ são, respectivamente, as matrizes de incidência e laplaciana sem sinal de um grafo G , então $Q = SS^T$. Assim temos que $Q(G)$ é uma matriz positiva semidefinida, e todos os seus autovalores são não negativos.*

Demonstração. Considere $S = [s_{uf}]$ e $S^T = [s_{fu}]$, ou seja, temos que $s_{fu} = s_{uf}$.

Sendo assim

$$SS^T = \left[\sum_{f \in E(G)} s_{uf} s_{fv} \right] = \left[\sum_{f \in E(G)} s_{uf} s_{vf} \right],$$

onde SS^T é uma matriz quadrada de ordem $|V(G)|$, com linhas e colunas indexadas pelos vértices de G .

Se $u = v$, temos que

$$\sum_{f \in E(G)} s_{uf} s_{vf} = \sum_{f \in E(G)} s_{uf}^2,$$

e $s_{uf}^2 = 1$ se a aresta f é incidente ao vértice u . Como existem exatamente $d(u)$ arestas incidentes a u no grafo G temos que

$$\sum_{f \in E(G)} s_{uf}^2 = d(u).$$

Para cada par de vértices $\{u, v\}$ há no máximo uma aresta pois o grafo é simples, então $\sum_{f \in E(G)} s_{uf} s_{vf} \leq 1$.

Se $u \neq v$, observe que $s_{uf} s_{vf} = 1$ se, e somente se, $s_{uf} = 1$ e $s_{vf} = 1$, ou seja, quando a aresta $f = \{u, v\} \in E(G)$. Caso contrário, temos que $s_{uf} s_{vf} = 0$.

Dessa forma,

$$\sum_{f \in E(G)} s_{uf} s_{vf} = \begin{cases} d(u), & \text{se } u = v, \\ 1, & \text{se } \{u, v\} \in E, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e esta é a definição da matriz laplaciana sem sinal.

Segue do **Teorema 2.3** que $Q(G)$ é uma matriz positiva semidefinida e todos os seus autovalores são não negativos. \square

A matriz de incidência orientada só pode ser atribuída a grafos com arestas orientadas. Ela informa as relações de incidência entre os vértices e as arestas orientadas do grafo.

Definição 3.21. A **matriz de incidência orientada** de um grafo $G = (V, E)$, denotada por $K(G) = [k_{uf}]$, é a matriz cujas linhas são indexadas pelos vértices de G , as colunas são indexadas pelas arestas de G e tem entradas dadas por

$$k_{uf} = \begin{cases} 1, & \text{se } f = (u, v) \in E, \\ -1, & \text{se } f = (v, u) \in E, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Quando não houver ambiguidade, denotaremos a matriz de incidência orientada de um grafo G por K .

Exemplo 3.19. Para construir a matriz de incidência orientada do **Grafo** G apresentado no **Exemplo 3.12** devemos atribuir uma orientação às arestas do grafo. Considere a orientação para o **Grafo** G dada na Figura 3.14.

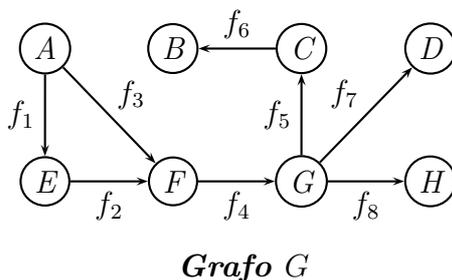


Figura 3.14 Orientação do Grafo G .

Apresentamos abaixo a matriz de incidência orientada do **Grafo** G do **Exemplo 3.12** utilizando a orientação atribuída dada na Figura 3.14.

$$\begin{array}{c}
f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad f_4 \quad f_5 \quad f_6 \quad f_7 \quad f_8 \\
A \left(\begin{array}{cccccccc}
-1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array} \right) \\
B \\
C \\
D \\
E \\
F \\
G \\
H
\end{array}$$

Usando a matriz de incidência orientada conseguimos identificar quais arestas incidem sobre quais vértices no grafo, e além disso, também é possível saber a orientação das arestas.

O próximo teorema mostra que a matriz laplaciana pode ser relacionada com a matriz de incidência orientada.

Teorema 3.3. *Se $K(G)$ e $L(G)$ são, respectivamente, as matrizes de incidência orientada e laplaciana de um grafo G , então $L = KK^T$. Assim temos que $L(G)$ é uma matriz positiva semidefinida e todos os seus autovalores são não negativos.*

Demonstração. Considere $K = [k_{uf}]$ e $K^T = [k_{fu}]$, ou seja, temos que $k_{fu} = k_{uf}$.

Sendo assim

$$KK^T = \left[\sum_{f \in E(G)} k_{uf} k_{fv} \right] = \left[\sum_{f \in E(G)} k_{uf} k_{vf} \right],$$

onde KK^T é uma matriz quadrada de ordem $|V(G)|$, com linhas e colunas indexadas pelos vértices de G .

Se $u = v$, temos que

$$\sum_{f \in E(G)} k_{uf} k_{vf} = \sum_{f \in E(G)} k_{uf}^2,$$

e $k_{uf}^2 = 1$ se a aresta f é incidente ao vértice u . Como existem exatamente $d(u)$ arestas incidentes a u no grafo G temos que

$$\sum_{f \in E(G)} k_{uf}^2 = d(u).$$

Para cada par de vértices $\{u, v\}$ há no máximo uma aresta, então

$$\sum_{f \in E(G)} k_{uf}k_{vf} \leq 1.$$

Se $u \neq v$, observe que $k_{uf}k_{vf} = -1$ se, e somente se, $k_{uf} = 1$ e $k_{vf} = -1$, ou $k_{uf} = -1$ e $k_{vf} = 1$, ou seja, quando a aresta $f = (u, v) \in E(G)$, ou a aresta $f = \{v, u\} \in E(G)$. Caso contrário, temos que $k_{uf}k_{vf} = 0$.

Dessa forma,

$$\sum_{f \in E(G)} k_{uf}k_{vf} = \begin{cases} d(u), & \text{se } u = v, \\ -1, & \text{se } \{u, v\} \in E, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e esta é a definição da matriz laplaciana.

Segue do **Teorema 2.3** que $L(G)$ é uma matriz positiva semidefinida e todos os seus autovalores são não negativos. \square

A representação matricial permite a interação dos grafos com outros entes matemáticos. Com essa liberdade obtemos resultados que relacionam as diferentes estruturas desses elementos.

O **Lema 3.1** estabelece uma relação entre a matriz laplaciana de um grafo e um vetor.

Lema 3.1. *Seja G um grafo de ordem n , $L(G)$ sua matriz laplaciana e $x = (x_1 \dots x_n)^T$ um vetor do \mathbb{R}^n . Então*

$$x^T Lx = \sum_{i \sim j} (x_i - x_j)^2$$

onde $\sum_{i \sim j}$ indica que o somatório transcorre por todos os pares não ordenados $\{i, j\}$ nos quais os vértices v_i e v_j são adjacentes.

Demonstração. Considere $L = [l_{ij}]$, assim temos

$$x^T Lx = x^T \left[\sum_{j=1}^n l_{kj} x_j \right]_{k=1}^n = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n l_{ij} x_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i l_{ij} x_j, \quad (3.1)$$

onde $\left[\sum_{j=1}^n l_{kj} x_j \right]_{k=1}^n$ é um vetor coluna de tamanho n .

Se $i = j$, temos que $l_{ij} = d(v_i)$ e $x_i l_{ij} x_j = d(v_i) x_i^2$.

Se $i \neq j$, temos que $x_i l_{ij} x_j = -x_i x_j$ se os vértices v_i e v_j são adjacentes, caso contrário $x_i l_{ij} x_j = 0$. Observe que o termo $-x_i x_j$ aparece duas vezes na expressão (3.1) devido ao transcorrer dos dois somatórios, ou seja, se o vértice v_i é adjacente ao vértice v_j , então o vértice v_j também deve ser adjacente ao vértice v_i .

Note que quando $v_i \sim v_j$ sempre ocorrem os termos $-2x_i x_j$, x_i^2 e x_j^2 na expressão (3.1). Logo, temos que

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i l_{ij} x_j = \sum_{i \sim j} x_i^2 - 2x_i x_j + x_j^2 = \sum_{i \sim j} (x_i - x_j)^2.$$

□

Observe que essas relações podem ser atribuídas a todas as representações matriciais; no entanto, os resultados obtidos podem ser distintos.

Lema 3.2. *Seja G um grafo de ordem n , $A(G)$ sua matriz de adjacência e $x = (x_1 \dots x_n)^T$ um vetor do \mathbb{R}^n . Então*

$$x^T A x = 2 \sum_{i \sim j} x_i x_j$$

onde $\sum_{i \sim j}$ indica que o somatório transcorre por todos os pares não ordenados $\{i, j\}$ nos quais os vértices v_i e v_j são adjacentes.

Demonstração. Considere $A = [a_{ij}]$, assim temos

$$x^T Ax = x^T \left[\sum_{j=1}^n a_{kj} x_j \right]_{k=1}^n = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i a_{ij} x_j, \quad (3.2)$$

onde $\left[\sum_{j=1}^n a_{kj} x_j \right]_{k=1}^n$ é um vetor coluna de tamanho n .

Se $i = j$, temos que $a_{ij} = 0$ e $x_i a_{ij} x_j = 0$.

Se $i \neq j$, temos que $x_i a_{ij} x_j = x_i x_j$ se os vértices v_i e v_j são adjacentes, caso contrário $x_i a_{ij} x_j = 0$. Observe que o termo $x_i x_j$ aparece duas vezes na expressão (3.2) devido ao transcorrer dos dois somatórios, ou seja, se o vértice v_i é adjacente ao vértice v_j , então o vértice v_j também deve ser adjacente ao vértice v_i . Logo

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i a_{ij} x_j = 2 \sum_{i \sim j} x_i x_j.$$

□

Utilizando as representações matriciais, podemos tratar grafos como entes algébricos e aplicar recursos da teoria matricial para analisar as propriedades das matrizes associadas. No próximo capítulo, vamos investigar como uma alteração no grafo produz resultados distintos no espectro de cada representação matricial.

Observação: A partir desse momento consideramos que o espectro de um grafo se refere ao espectro de qualquer uma de suas representações matriciais. Quando necessário vamos especificar a representação matricial sendo utilizada.

4 TEOREMAS DE ENTRELAÇAMENTO

O entrelaçamento de autovalores é uma ferramenta útil para obtenção de desigualdades e resultados de regularidade sobre a estrutura de um grafo em função de seus autovalores. Muitas pesquisas já foram desenvolvidas na área, para uma revisão da literatura nos referimos a Haemers [24].

Definição 4.1. *Considere duas seqüências de números reais: $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$, e $\theta_1 \geq \dots \geq \theta_m$ com $m \leq n$. Dizemos que a segunda seqüência está **entrelaçada** com a primeira se existem $a, b \in \mathbb{N}$, com $a + b \leq n - 1$ e $m \geq a + 1$, e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, tais que*

$$\lambda_{i-a} + \alpha \geq \theta_i \geq \lambda_{i+b} - \beta, \text{ para } i = a + 1, \dots, \min\{n - b, m\}.$$

A desigualdade acima é dita **desigualdade de entrelaçamento**.

O **entrelaçamento** é dito **justo** se $a = 0$, $b = 1$, $\alpha = 0$, $\beta = 0$ e $m = n - 1$. Nesse caso, a desigualdade do entrelaçamento assume a forma

$$\lambda_1 \geq \theta_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \theta_{n-1} \geq \lambda_n.$$

Dadas desigualdades de entrelaçamento

$$(1) \lambda_{i-a_1} + \alpha_1 \geq \theta_i \geq \lambda_{i+b_1} - \beta_1, \text{ e}$$

$$(2) \lambda_{i-a_2} + \alpha_2 \geq \theta_i \geq \lambda_{i+b_2} - \beta_2.$$

Se $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 0$, dizemos que o entrelaçamento (1) é **melhor entrelaçamento** que o entrelaçamento (2), se $a_1 + b_1 < a_2 + b_2$.

Se $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 0$, dizemos que a desigualdade da direita do entrelaçamento (1) é melhor que a desigualdade da direita do entrelaçamento (2) se $b_1 < b_2$.

Se $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 0$, dizemos que a desigualdade da esquerda do entrelaçamento (1) é melhor que a desigualdade da esquerda do entrelaçamento (2) se $a_1 < a_2$.

Se $a_1 = a_2$ e $b_1 = b_2$, dizemos que o entrelaçamento (1) é **melhor entrelaçamento** que o entrelaçamento (2), se $\alpha_1 + \beta_1 < \alpha_2 + \beta_2$.

Se $a_1 = a_2$ e $b_1 = b_2$, dizemos que a desigualdade da direita do entrelaçamento (1) é melhor que a desigualdade da direita do entrelaçamento (2) se $\beta_1 < \beta_2$.

Se $a_1 = a_2$ e $b_1 = b_2$, dizemos que a desigualdade da esquerda do entrelaçamento (1) é melhor que a desigualdade da esquerda do entrelaçamento (2) se $\alpha_1 < \alpha_2$.

Note que o melhor entrelaçamento possível é o entrelaçamento justo.

Podemos alterar a estrutura de um grafo por meio de operações. Resultados de entrelaçamento de autovalores mostram como o espectro de um grafo se relaciona com o espectro do grafo obtido após a aplicação de uma operação.

Neste capítulo, apresentamos resultados de entrelaçamento de autovalores para as quatro principais representações matriciais associados às operações de deleção de uma aresta e de deleção de um vértice. Além disso, apresentamos resultados de entrelaçamento para as matrizes A e \mathcal{L} associados à operação de contração de vértices de G . Para garantir que os resultados obtidos são os melhores possíveis apresentamos exemplos para cada caso.

A Tabela 4.1, por enquanto vazia, ilustra os resultados de entrelaçamento que serão apresentados.

	$G \setminus f$	$G - v$	$G \{u, v\}$
A			
L			
\mathcal{L}			
Q			

Tabela 4.1 Teoremas de entrelaçamento que serão apresentados no capítulo 4.

Cada entrada em branco dessa tabela representa um dos problemas citados. Por exemplo, na linha da matriz A e na coluna associada à operação de deleção de aresta, $G \setminus f$, vamos colocar o resultado de entrelaçamento dos autovalores da matriz $A(G)$ com os da matriz $A(G \setminus f)$. Nosso objetivo é completar essa tabela.

4.1 Matriz de Adjacência

Nesta seção apresentamos os resultados de entrelaçamento de autovalores para a matriz A associados com a deleção de uma aresta, com a deleção de um vértice e com a contração de dois vértices.

Aplicando o Teorema do Entrelaçamento de Cauchy em duas matrizes obtemos o resultado de entrelaçamento de autovalores para A associado com a deleção de uma aresta. Esse resultado foi originalmente apresentado em [25].

Teorema 4.1. Teorema de Entrelaçamento para $A(G \setminus f)$. [25]

Seja G um grafo e $H = G \setminus f$, onde $f \in E(G)$. Se

$$\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \text{ são os autovalores de } A(G) \text{ e}$$

$$\theta_1 \geq \dots \geq \theta_n \text{ são os autovalores de } A(H),$$

então

$$\lambda_{i-1} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1}, \text{ para } i = 2, \dots, n-1,$$

$$\theta_1 \geq \lambda_2 \text{ e } \theta_n \leq \lambda_{n-1}.$$

Demonstração. Seja v um dos vértice em que f incide. Definimos $P = G - v$ e $\gamma_1 \geq \dots \geq \gamma_{n-1}$ os autovalores de $A(P)$. Observe que $A(P)$ é submatriz principal de $A(G)$ e de $A(H)$, e aplicando o **Teorema do Entrelaçamento de Cauchy** (**Teorema 2.13**) a essas duas matrizes temos

$$\lambda_i \geq \gamma_i \geq \lambda_{i+1} \text{ para } i = 1, \dots, n-1,$$

$$\theta_i \geq \gamma_i \geq \theta_{i+1} \text{ para } i = 1, \dots, n-1.$$

Assim temos que

$$\lambda_{i-1} \geq \gamma_{i-1} \geq \theta_i \geq \gamma_i \geq \lambda_{i+1}.$$

Logo $\lambda_{i-1} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1}$ para $i = 2, \dots, n-1$, como desejado. \square

O **Exemplo 4.1** mostra que as cotas obtidas nesse resultado são as melhores possíveis.

Exemplo 4.1. *Seja G o grafo de Petersen e H o subgrafo de G obtido pela deleção de uma aresta qualquer.*

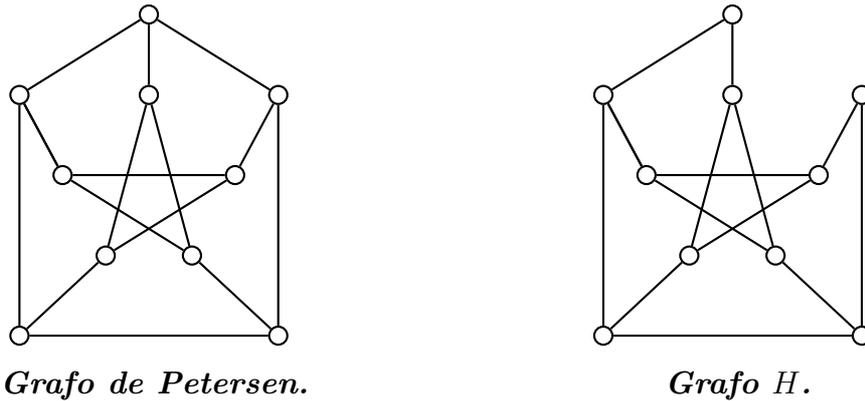


Figura 4.1 Deleção de uma aresta do grafo de Petersen.

Temos que

$$\text{Spec}(A(G)) = \{3, 1^{(5)}, -2^{(4)}\},$$

$$\text{Spec}(A(H)) = \{2.8558, 1.4142, 1^{(3)}, 0.3216, -1.4142, -2^{(2)}, -2.1774\}.$$

Para que o resultado possa ser melhorado devemos ter $\lambda_i \geq \theta_i$ para $i = 1, \dots, n$, no entanto, observe que $\lambda_2 = 1 \not\geq 1.4142 = \theta_2$ e $\lambda_7 = -2 \not\geq 1.4142 = \theta_7$. Logo o resultado de entrelaçamento não pode ser melhorado.

O resultado de entrelaçamento de autovalores para A associado com a deleção de vértice é obtido pela análise da estrutura da matriz antes e depois da realização da operação.

Teorema 4.2. Teorema de Entrelaçamento para $A(G - v)$. [25]

Seja G um grafo de ordem n e $H = G - v$, onde $v \in V(G)$. Se

$$\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \text{ são os autovalores de } A(G) \text{ e}$$

$$\theta_1 \geq \dots \geq \theta_{n-1} \text{ são os autovalores de } A(H),$$

então

$$\lambda_i \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1}, \text{ para } i = 1, \dots, n - 1.$$

Demonstração. Note que a deleção de um vértice no grafo G representa a deleção da linha e coluna da matriz $A(G)$ associada a ele. De fato, ao excluir de $A(G)$ a linha e a coluna associada ao vértice deletado, apenas removemos da matriz os elementos que indicavam as relações de adjacência desse com os outros vértices de G .

Logo, $A(H)$ é a submatriz principal de ordem $n - 1$ de $A(G)$ obtida pela deleção da linha e coluna associada ao vértice deletado. O resultado segue pela aplicação do **Teorema do Entrelaçamento de Cauchy**. \square

O argumento acima não pode ser repetido para outras representações matriciais pois a deleção de um vértice no grafo G não implica a mesma mudança na estrutura da matriz que ocorre em A .

O resultado de entrelaçamento de autovalores para A associado com a contração de dois vértices é obtido por uma alteração do Teorema de Courant-Fischer, e foi originalmente apresentado em [25].

Teorema 4.3. Teorema de Entrelaçamento para $A(G \mid \{u, v\})$. [25]

Seja G um grafo e $H = G \mid \{u, v\}$, onde $u, v \in V(G)$. Se

$$\begin{aligned} \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n \text{ são os autovalores de } A(G) \text{ e} \\ \theta_1 \geq \cdots \geq \theta_{n-1} \text{ são os autovalores de } A(H), \end{aligned}$$

então

$$\lambda_{i-1} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+2}, \text{ para } i = 2, \dots, n-2,$$

$$\theta_1 \geq \lambda_3 \text{ e } \lambda_{n-2} \geq \theta_{n-1}.$$

Supondo que $N(u) \cap (N(v) \cup \{v\}) = \emptyset$, ou seja, que u e v não são adjacentes e nem possuem vizinhos em comum, as desigualdades acima podem ser melhoradas em função do sinal de θ_k . Seja k tal que $\theta_k \geq 0$ e $\theta_{k+1} \leq 0$, então

$$\theta_i \geq \lambda_{i+1} \text{ para } i = 2, \dots, k \text{ e}$$

$$\lambda_i \geq \theta_i \text{ para } i = k+1, \dots, n-1.$$

Demonstração. Seja $A(H')$ a submatriz principal de $A(G)$ obtida pela deleção das linhas e colunas associadas aos vértices u e v . Note que $A(H')$ também é submatriz principal de $A(H)$ obtida pela deleção da linha e coluna associada ao vértice x obtido na contração. Denotando por $\gamma_1 \geq \cdots \geq \gamma_{n-2}$ os autovalores de $A(H')$ obtemos, pelo **Teorema do Entrelaçamento de Cauchy Generalizado (Teorema 2.14)**, que

$$\lambda_i \geq \gamma_i \geq \lambda_{i+2} \text{ para } i = 1, \dots, n-2 \text{ e}$$

$$\theta_i \geq \gamma_i \geq \theta_{i+1} \text{ para } i = 1, \dots, n-2.$$

Assim obtemos a desigualdade

$$\lambda_{i-1} \geq \gamma_{i-1} \geq \theta_i \geq \gamma_i \geq \lambda_{i+2}.$$

Considere agora que $N(u) \cap (N(v) \cup \{v\}) = \emptyset$, e que k é tal que $\theta_k \geq 0$ e $\theta_{k+1} \leq 0$. Suponha, sem perda de generalidade, que u e v ocupam, respectivamente, a primeira e a segunda linha e coluna de $A(G)$, ou seja, $u = v_1$ e $v = v_2$.

Definimos H^* como o grafo obtido pela deleção de todas as arestas incidentes a u e pela adição dessas ao vértice v , ou seja, $H^* = H \cup K_1$. Sejam $\theta_1^* \geq \dots \geq \theta_n^*$ os autovalores da matriz $A(H^*)$.

Observe que

$$\text{Spec}(A(H^*)) = \{\text{Spec}(A(H))\} \cup \{0\},$$

a diferença entre os espectros ocorre pela presença do vértice isolado u no grafo H^* .

Adaptaremos o **Teorema de Courant-Fischer (Teorema 2.11)** para a matriz de adjacência. Para os vetores v, u^1, \dots, u^n definimos os vetores x, y^1, \dots, y^n do seguinte modo

$$v = \frac{x}{\|x\|}, u^1 = \frac{y^1}{\|y^1\|}, \dots, u^n = \frac{y^n}{\|y^n\|}.$$

Note que $v \perp u^1, \dots, u^{i-1}$ se e somente se $x \perp y^1, \dots, y^{i-1}$.

Aplicando o **Teorema de Courant-Fischer**, temos

$$\lambda_i = \min_{y^1, \dots, y^{i-1}} \left[\max_{\substack{x \perp y^1, \dots, y^{i-1} \\ x \neq 0}} \frac{x^T A(G)x}{x^T x} \right].$$

Aplicando o **Lema 3.2** para um vetor $x \in \mathbb{R}^n$ temos que

$$\frac{x^T A(G)x}{x^T x} = 2 \frac{\sum_{j \sim l} x_j x_l}{\sum_j x_j^2}.$$

Seja J o conjunto de índices referente aos vértices adjacentes a u . Ao deletarmos todas as arestas incidentes ao vértice u realizamos a seguinte mudança no termo do lema

$$2 \frac{\sum_{j \sim l} x_j x_l}{\sum_j x_j^2} \longrightarrow 2 \frac{\sum_{j \sim l} x_j x_l - \sum_{j \in J} x_1 x_j}{\sum_j x_j^2},$$

e com a adição destas arestas ao vértice v obtemos

$$2 \frac{\sum_{j \sim l} x_j x_l - \sum_{j \in J} x_1 x_j}{\sum_j x_j^2} \rightarrow 2 \frac{\sum_{j \sim l} x_j x_l + \sum_{j \in J} (x_2 x_j - x_1 x_j)}{\sum_j x_j^2}.$$

Assim obtemos a aplicação do lema para a matriz $A(H^*)$

$$\frac{x^T A(H^*) x}{x^T x} = 2 \frac{\sum_{j \sim l} x_j x_l + \sum_{j \in J} (x_2 x_j - x_1 x_j)}{\sum_j x_j^2}.$$

O **Teorema de Courant-Fischer** fornece

$$\theta_i^* = \min_{y^1, \dots, y^{i-1}} \left[\max_{\substack{x \perp y^1, \dots, y^{i-1} \\ x \neq 0}} 2 \frac{\sum_{j \sim l} x_j x_l + \sum_{j \in J} (x_2 x_j - x_1 x_j)}{\sum_j x_j^2} \right].$$

Exigindo que o vetor x satisfaça a condição $x_1 = x_2$, restringimos os possíveis valores que a expressão pode assumir no problema de maximização do **Teorema de Courant-Fischer**, e obtemos que

$$\begin{aligned} \theta_i^* &\geq \min_{y^1, \dots, y^{i-1}} \left[\max_{\substack{x \perp y^1, \dots, y^{i-1} \\ x \neq 0, x_1 = x_2}} 2 \frac{\sum_{j \sim l} x_j x_l + \sum_{j \in J} (x_2 x_j - x_1 x_j)}{\sum_j x_j^2} \right] \\ &= \min_{y^1, \dots, y^{i-1}} \left[\max_{\substack{x \perp y^1, \dots, y^{i-1}, e_1 - e_2 \\ x \neq 0}} 2 \frac{\sum_{j \sim l} x_j x_l}{\sum_j x_j^2} \right], \end{aligned}$$

pois $x_1 = x_2$, e isso ocorre se, e somente se, $x \perp e_1 - e_2$, onde e_1 e e_2 são vetores da base canônica do \mathbb{R}^n .

Adicionando o vetor y^i como condição do problema de minimização do **Teorema de Courant-Fischer**, e exigindo que o vetor x satisfaça a condição $x \perp y^i$, temos que o mínimo para todas as escolhas de y^1, \dots, y^i (onde y^i pode ser

$e_1 - e_2$) fornece uma cota inferior para a expressão anterior. Logo

$$\begin{aligned} \theta_i^* &\geq \min_{y^1, \dots, y^{i-1}} \left[\max_{\substack{x \perp y^1, \dots, y^{i-1}, e_1 - e_2 \\ x \neq 0}} 2 \frac{\sum_{j \sim l} x_j x_l}{\sum_j x_j^2} \right] \\ &\geq \min_{y^1, \dots, y^i} \left[\max_{\substack{x \perp y^1, \dots, y^i \\ x \neq 0,}} 2 \frac{\sum_{j \sim l} x_j x_l}{\sum_j x_j^2} \right] = \lambda_{i+1}, \end{aligned}$$

para $i = 1, \dots, n - 1$.

Analogamente, a **Outra Versão do Teorema de Courant-Fischer (Teorema 2.12)** fornece

$$\begin{aligned} \theta_i^* &= \max_{y^{i+1}, \dots, y^n} \left[\min_{\substack{x \perp y^{i+1}, \dots, y^n \\ x \neq 0}} 2 \frac{\sum_{j \sim l} x_j x_l + \sum_{j \in J} (x_2 x_j - x_1 x_j)}{\sum_j x_j^2} \right] \\ &\leq \max_{y^{i+1}, \dots, y^n} \left[\min_{\substack{x \perp y^{i+1}, \dots, y^n \\ x \neq 0, x_1 = x_2}} 2 \frac{\sum_{j \sim l} x_j x_l + \sum_{j \in J} (x_2 x_j - x_1 x_j)}{\sum_j x_j^2} \right] \\ &= \max_{y^{i+1}, \dots, y^n} \left[\min_{\substack{x \perp y^{i+1}, \dots, y^n, e_1 - e_2 \\ x \neq 0}} 2 \frac{\sum_{j \sim l} x_j x_l}{\sum_j x_j^2} \right] \\ &\leq \max_{y^i, y^{i+1}, \dots, y^n} \left[\min_{\substack{x \perp y^i, y^{i+1}, \dots, y^n \\ x \neq 0,}} 2 \frac{\sum_{j \sim l} x_j x_l}{\sum_j x_j^2} \right] = \lambda_{i-1}, \end{aligned}$$

para $i = 2, \dots, n$.

Logo, temos $\lambda_{i-1} \geq \theta_i^* \geq \lambda_{i+1}$ para $i = 2, \dots, n - 1$, $\theta_n^* \leq \lambda_{n-1}$ e $\theta_1^* \geq \lambda_2$.

Como os autovalores de $A(H^*)$ e $A(H)$ diferem apenas por um zero temos que $\theta_i = \theta_i^*$ para $i = 1, \dots, k$. Dessa forma, $\theta_i \geq \lambda_{i+1}$ para $i = 1, \dots, k$.

Analogamente, temos que $\theta_i = \theta_{i+1}^*$ para $i = k + 1, \dots, n - 1$, dessa forma $\lambda_i \geq \theta_i$ para $i = k + 1, \dots, n - 1$. \square

O **Exemplo 4.2** mostra que as cotas obtidas nesse resultado são as melhores possíveis.

Exemplo 4.2. Considere $G = C_8$ e H o subgrafo de G obtido pela contração de dois vértices não adjacentes, mas adjacentes a um mesmo vértice ($N(u) \cap N(v) \neq \emptyset$).



Figura 4.2 Contração de vértices do grafo C_8 .

Temos que

$$\text{Spec}(A(G)) = \{2, 1.4142^{(2)}, 0^{(2)}, -1.4142^{(2)}, -2\},$$

$$\text{Spec}(A(H)) = \{2.101, 1.2592, 1, 0, -1, -1.2592, -2.101\}.$$

Como $\lambda_6 = -1.4142 \not\geq -1.2592 = \theta_6$, temos que a desigualdade da esquerda do entrelaçamento não pode ser melhorada, ou seja, não podemos ter $\lambda_i \geq \theta_i$.

Como $\theta_2 = 1.2592 \not\leq 1.4142 = \lambda_3$, temos que a desigualdade da direita do entrelaçamento não pode ser melhorada, ou seja, não podemos ter $\theta_i \geq \lambda_{i+1}$.

Com os resultados dessa seção completamos a primeira linha da Tabela

4.2.

	$G \setminus f$	$G - v$	$G \setminus \{u, v\}$
A	$\lambda_{i-1} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1}$	$\lambda_i \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1}$	$\lambda_{i-1} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+2}$
L			
\mathcal{L}			
Q			

Tabela 4.2 Teoremas de entrelaçamento para a matriz de adjacência.

4.2 Matriz Laplaciana

Nesta seção apresentamos os resultados de entrelaçamento de autovalores para a matriz L associados à deleção de uma aresta e à deleção de um vértice.

O resultado de entrelaçamento de autovalores para L associado a deleção de uma aresta foi apresentado em [32].

Teorema 4.4. Teorema de Entrelaçamento para $L(G \setminus f)$. [32]

Seja G um grafo e $H = G \setminus f$, onde $f \in E(G)$. Se

$$\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n = 0 \text{ são os autovalores de } L(G) \text{ e}$$

$$\theta_1 \geq \dots \geq \theta_n = 0 \text{ são os autovalores de } L(H),$$

então

$$\lambda_i \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1}, \text{ para } i = 1, \dots, n - 1.$$

Demonstração. O **Teorema 3.3** afirma que $L(G) = K(G)K(G)^T$ e que seus autovalores são não negativos.

Pelo **Teorema 2.6** temos que as matrizes $K(G)K(G)^T$ e $K(G)^TK(G)$ possuem o mesmo espectro, exceto pela multiplicidade do autovalor zero. Logo,

os autovalores positivos de $L(G)$ e de $K(G)^T K(G)$ são iguais e possuem mesma multiplicidade. Considerações análogas são válidas para $L(H) = K(H)K(H)^T$ e $K(H)^T K(H)$.

Observe que $K(H)^T K(H)$ é uma submatriz principal de ordem $|E(G)| - 1$ da matriz $K(G)^T K(G)$ obtida pela deleção da linha e coluna associadas à aresta deletada. O resultado segue pelo **Teorema do Entrelaçamento de Cauchy (Teorema 2.13)**. \square

Realizando pequenas modificações na prova do teorema anterior, obtemos o resultado de entrelaçamento de autovalores para a matriz L associado à deleção de um vértice. Esse resultado foi originalmente apresentado em [25].

Teorema 4.5. Teorema de Entrelaçamento para $L(G - v)$.[25]

Seja G um grafo de ordem n e $H = G - v$, onde $v \in V(G)$ e $d(v) = r$. Se

$$\begin{aligned} \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n = 0 \text{ são os autovalores de } L(G) \text{ e} \\ \theta_1 \geq \dots \geq \theta_{n-1} = 0 \text{ são os autovalores de } L(H), \end{aligned}$$

então

$$\lambda_i \geq \theta_i \geq \lambda_{i+r}, \text{ para } i=1, \dots, n,$$

onde $\lambda_i = 0$ para $i \geq n + 1$.

Demonstração. O **Teorema 3.3** afirma que $L(G) = K(G)K(G)^T$ e que seus autovalores são não negativos.

Pelo **Teorema 2.6** temos que as matrizes $K(G)K(G)^T$ e $K(G)^T K(G)$ possuem o mesmo espectro, exceto pela multiplicidade do autovalor zero. Logo, os autovalores positivos de $L(G)$ e de $K(G)^T K(G)$ são iguais e possuem mesma multiplicidade. Considerações análogas são válidas para $L(H) = K(H)K(H)^T$ e $K(H)^T K(H)$.

Observe que $K(H)^T K(H)$ é uma submatriz principal de ordem $|E(G)| - r$ da matriz $K(G)^T K(G)$ obtida pela deleção das r linhas e colunas associadas às arestas incidentes a v . O resultado segue pelo **Teorema do Entrelaçamento de Cauchy Generalizado (Teorema 2.14)**. \square

O **Exemplo 4.3** mostra que as cotas obtidas nesse resultado são as melhores possíveis.

Exemplo 4.3. Considere $G = K_{m,n}$, com $m \geq n$, e $H = K_{m,n-1}$.

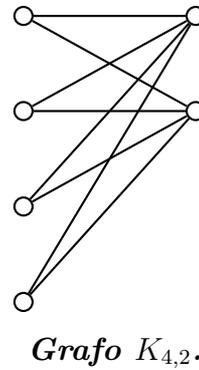
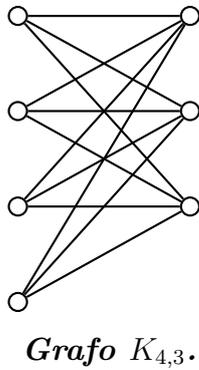


Figura 4.3 Deleção de um vértice do grafo $K_{4,3}$.

Temos que

$$\text{Spec}(L(G)) = \{m + n, m^{(n-1)}, n^{(m-1)}, 0\},$$

$$\text{Spec}(L(H)) = \{m + n - 1, m^{(n-2)}, n - 1^{(m-1)}, 0\}.$$

Para que o resultado possa ser melhorado devemos ter $\theta_i \geq \lambda_{i+r-1}$ para $i = 1, \dots, n$. Como $\theta_n = n - 1$, $\lambda_{n+1} = \dots = \lambda_{m+n-1} = n$ temos que $\theta_n = n - 1 \geq 0 = \lambda_{m+n}$, onde o laço é exatamente m , mesmo grau do vértice deletado de $K_{m,n}$. Logo, o resultado de entrelaçamento não pode ser melhorado.

Com os resultados dessa seção completamos algumas entradas da segunda linha da Tabela 4.3.

	$G \setminus f$	$G - v$	$G \setminus \{u, v\}$
A	$\lambda_{i-1} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1}$	$\lambda_i \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1}$	$\lambda_{i-1} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+2}$
L	$\lambda_i \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1}$	$\lambda_i \geq \theta_i \geq \lambda_{i+r}$	
\mathcal{L}			
Q			

Tabela 4.3 Teoremas de entrelaçamento para a matriz laplaciana.

4.3 Matriz Laplaciana Normalizada

Nesta seção apresentamos os resultados de entrelaçamento de autovalores para a matriz \mathcal{L} associados à deleção de uma aresta, à deleção de um vértice e à contração de dois vértices.

O resultado de entrelaçamento de autovalores para \mathcal{L} associado com a deleção de uma aresta envolve o estudo de autofunções harmônicas e foi apresentado em [10].

O **Lema 4.1** é necessário para demonstração do resultado.

Lema 4.1. *Suponha que, para números reais a , b e γ , temos que*

$$a^2 - 2\gamma^2 \geq 0, \quad b^2 - \gamma^2 > 0 \quad e \quad \frac{a^2}{b^2} \leq 2.$$

Então

$$\frac{a^2 - 2\gamma^2}{b^2 - \gamma^2} \leq \frac{a^2}{b^2}.$$

Demonstração. Se $\gamma = 0$ o resultado é trivial.

Para $\gamma \neq 0$, temos que

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{b^2} \leq 2 &\Rightarrow a^2 \leq 2b^2 \Rightarrow a^2b^2 - 2b^2\gamma^2 \leq a^2b^2 - a^2\gamma^2 \Rightarrow \\ b^2(a^2 - 2\gamma^2) &\leq a^2(b^2 - \gamma^2) \Rightarrow \frac{a^2 - 2\gamma^2}{b^2 - \gamma^2} \leq \frac{a^2}{b^2}. \end{aligned}$$

□

Teorema 4.6. Teorema de Entrelaçamento para $\mathcal{L}(G \setminus f)$. [10]

Seja G um grafo e $H = G \setminus f$, onde $f \in E(G)$. Se

$$\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \text{ são os autovalores de } \mathcal{L}(G) \text{ e}$$

$$\theta_1 \geq \dots \geq \theta_n \text{ são os autovalores de } \mathcal{L}(H),$$

então

$$\lambda_{i-1} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1}, \text{ para } i = 1, \dots, n,$$

onde $\lambda_0 = 2$ e $\lambda_{n+1} = 0$.

Demonstração. Adaptaremos a **Outra Versão do Teorema de Courant-Fischer (Teorema 2.12)** para a matriz laplaciana normalizada de maneira análoga à que foi feito para a matriz de adjacência. Assim temos

$$\lambda_i = \max_{g^{i+1}, \dots, g^n} \left[\min_{\substack{g \perp g^{i+1}, \dots, g^n \\ g \neq 0}} \frac{g^T \mathcal{L}g}{g^T g} \right].$$

Vamos supor que $D^{1\setminus 2}$ é invertível, ou seja, que G não possui vértices isolados. Sabemos que $\mathcal{L} = D^{-1\setminus 2}LD^{-1\setminus 2}$, logo

$$\lambda_i = \max_{g^{i+1}, \dots, g^n} \left[\min_{\substack{g \perp g^{i+1}, \dots, g^n \\ g \neq 0}} \frac{g^T D^{-1\setminus 2}LD^{-1\setminus 2}g}{g^T g} \right].$$

Definimos os vetores

$$x = D^{-1\setminus 2}g, x^1 = D^{1\setminus 2}g^1, \dots, x^n = D^{1\setminus 2}g^n.$$

Note que $g \perp g^{i+1}, \dots, g^n$ se, e somente se, $x \perp x^{i+1}, \dots, x^n$, logo

$$\lambda_i = \max_{g^{i+1}, \dots, g^n} \left[\min_{\substack{x \perp x^{i+1}, \dots, x^n \\ x \neq 0}} \frac{x^T Lx}{x^T Dx} \right] = \max_{x^{i+1}, \dots, x^n} \left[\min_{\substack{x \perp x^{i+1}, \dots, x^n \\ x \neq 0}} \frac{x^T Lx}{x^T Dx} \right].$$

Pelo **Lema 3.1** obtemos

$$\lambda_i = \max_{x^{i+1}, \dots, x^n} \left[\min_{\substack{x \perp x^{i+1}, \dots, x^n \\ x \neq 0}} \frac{\sum_{j \sim l} (x_j - x_l)^2}{\sum_{v_j \in V(G)} x_j^2 d(v_j)} \right]. \quad (4.1)$$

O vetor x pode ser visto como uma função $x(v)$ que relaciona o vértice v_j com o elemento x_j . A função $x(v)$ é dita **autofunção harmônica**.

O **Teorema de Courant-Fischer (Teorema 2.11)** fornece que

$$\lambda_i = \min_{x^1, \dots, x^{i-1}} \left[\max_{\substack{x \perp x^1, \dots, x^{i-1} \\ x \neq 0}} \frac{\sum_{j \sim l} (x_j - x_l)^2}{\sum_{v_j \in V(G)} x_j^2 d(v_j)} \right].$$

Suponhamos sem perda de generalidade que $f = \{v_1, v_2\}$. Observe que a deleção dessa aresta altera os graus dos vértices v_1 e v_2 de forma que $d_H(v_1) = d_G(v_1) - 1$ e $d_H(v_2) = d_G(v_2) - 1$. Isso altera o termo no **Teorema de Courant-Fischer** da seguinte maneira

$$\sum_{v_j \in V(G)} x_j^2 d(v_j) \longrightarrow \sum_{v_j \in V(G)} x_j^2 d(v_j) - x_1^2 - x_2^2.$$

Além disso, os vértices v_1 e v_2 não são mais adjacentes no grafo H , assim temos

$$\sum_{j \sim l} (x_j - x_l)^2 \longrightarrow \sum_{j \sim l} (x_j - x_l)^2 - (x_1 - x_2)^2.$$

O somatório $\sum_{j \sim l}$ percorre os pares de vértices que são adjacentes em G . Ao realizar a aplicação da **Outra Versão do Teorema de Courant-Fischer**

para H , apenas subtraímos o termo $(x_1 - x_2)^2$ visando não alterar o conjunto de índices do somatório. Sendo assim,

$$\theta_i = \max_{x^{i+1}, \dots, x^n} \left[\min_{\substack{x \perp x^{i+1}, \dots, x^n \\ x \neq 0}} \frac{\sum_{j \sim l} (x_j - x_l)^2 - (x_1 - x_2)^2}{\sum_{v_j \in V(G)} x_j^2 d(v_j) - x_1^2 - x_2^2} \right].$$

Exigindo que o vetor x satisfaça a condição $x_1 = -x_2$, restringimos os possíveis valores que a expressão pode assumir no problema de minimização da **Outra Versão do Teorema de Courant-Fischer**, e obtemos que

$$\begin{aligned} \theta_i &\leq \max_{x^{i+1}, \dots, x^n} \left[\min_{\substack{x \perp x^{i+1}, \dots, x^n \\ x \neq 0, x_1 = -x_2}} \frac{\sum_{j \sim l} (x_j - x_l)^2 - (x_1 - x_2)^2}{\sum_{v_j \in V(G)} x_j^2 d(v_j) - x_1^2 - x_2^2} \right] \\ &= \max_{x^{i+1}, \dots, x^n} \left[\min_{\substack{x \perp x^{i+1}, \dots, x^n, e_1 + e_2 \\ x \neq 0}} \frac{\sum_{j \sim l} (x_j - x_l)^2 - 4x_1^2}{\sum_{v_j \in V(G)} x_j^2 d(v_j) - 2x_1^2} \right], \end{aligned}$$

pois $x_1 + x_2 = 0$ se, e somente se, $x \perp e_1 + e_2$.

Perceba que

$$\frac{\sum_{j \sim l} (x_j - x_l)^2}{\sum_{v_j \in V(G)} x_j^2 d(v_j)} \leq \frac{\sum_{j \sim l} 2(x_j^2 + x_l^2)}{\sum_{v_j \in V(G)} x_j^2 d(v_j)}.$$

Como $\sum_{j \sim l}$ percorre todas as arestas do grafo G , temos que em $\sum_{j \sim l} 2(x_j^2 + x_l^2)$ cada termo x_j^2 é contado tantas vezes quanto as arestas que incidem no vértice v_j , ou seja, quanto o grau de v_j . Dessa forma,

$$\sum_{j \sim l} 2(x_j^2 + x_l^2) = 2 \left(\sum_{v_j \in V(G)} x_j^2 d(v_j) \right),$$

assim temos

$$\frac{\sum_{j \sim l} (x_j - x_l)^2}{\sum_{v_j \in V(G)} x_j^2 d(v_j)} \leq \frac{\sum_{j \sim l} 2(x_j^2 + x_l^2)}{\sum_{v_j \in V(G)} x_j^2 d(v_j)} = 2.$$

Aplicando o **Lema 4.1** com $\gamma^2 = 2x_1^2$ temos que

$$\begin{aligned} \theta_i &\leq \max_{x^{i+1}, \dots, x^n} \left[\min_{\substack{x \perp x^{i+1}, \dots, x^n, e_1 + e_2 \\ x \neq 0}} \frac{\sum_{j \sim l} (x_j - x_l)^2 - 4x_1^2}{\sum_{v_j \in V(G)} x_j^2 d(v_j) - 2x_1^2} \right] \\ &\leq \max_{x^{i+1}, \dots, x^n} \left[\min_{\substack{x \perp x^{i+1}, \dots, x^n, e_1 + e_2 \\ x \neq 0}} \frac{\sum_{j \sim l} (x_j - x_l)^2}{\sum_{v_j \in V(G)} x_j^2 d(v_j)} \right]. \end{aligned}$$

Adicionando o vetor x^i como condição do problema de maximização da **Outra Versão do Teorema de Courant-Fischer**, e exigindo que o vetor x satisfaça a condição $x \perp x^i$, o máximo para toda escolha de x^i, \dots, x^n (onde x^i pode ser $e_1 + e_2$) fornece uma cota superior para a expressão anterior. Logo,

$$\begin{aligned} \theta_i &\leq \max_{x^{i+1}, \dots, x^n} \left[\min_{\substack{x \perp x^{i+1}, \dots, x^n, e_1 + e_2 \\ x \neq 0}} \frac{\sum_{j \sim l} (x_j - x_l)^2}{\sum_{v_j \in V(G)} x_j^2 d(v_j)} \right] \\ &\leq \max_{x^i, \dots, x^n} \left[\min_{\substack{x \perp x^i, \dots, x^n \\ x \neq 0}} \frac{\sum_{j \sim l} (x_j - x_l)^2}{\sum_{v_j \in V(G)} x_j^2 d(v_j)} \right] = \lambda_{i-1}. \end{aligned}$$

Procedendo de maneira análoga, mas usando que $x^1 = x^2$ para o **Teorema de Courant-Fischer**, temos que

$$\begin{aligned}
\theta_i &= \min_{x^1, \dots, x^{i-1}} \left[\max_{\substack{x \perp x^1, \dots, x^{i-1} \\ x \neq 0}} \frac{\sum_{j \sim l} (x_j - x_l)^2 - (x_1 - x_2)^2}{\sum_{v_j \in V(G)} x_j^2 d(v_j) - x_1^2 - x_2^2} \right] \\
&\geq \min_{x^1, \dots, x^{i-1}} \left[\max_{\substack{x \perp x^1, \dots, x^{i-1} \\ x \neq 0, x_1 = x_2}} \frac{\sum_{j \sim l} (x_j - x_l)^2}{\sum_{v_j \in V(G)} x_j^2 d(v_j) - 2x_1^2} \right] \\
&\geq \min_{x^1, \dots, x^{i-1}} \left[\max_{\substack{x \perp x^1, \dots, x^{i-1}, e_1 - e_2 \\ x \neq 0}} \frac{\sum_{j \sim l} (x_j - x_l)^2}{\sum_{v_j \in V(G)} x_j^2 d(v_j)} \right] \\
&\geq \min_{x^1, \dots, x^i} \left[\max_{\substack{x \perp x^1, \dots, x^i \\ x \neq 0}} \frac{\sum_{j \sim l} (x_j - x_l)^2}{\sum_{v_j \in V(G)} x_j^2 d(v_j)} \right] = \lambda_{i+1}.
\end{aligned}$$

Assim temos que

$$\lambda_{i-1} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1},$$

com a convenção de que $\lambda_0 = 2$ e $\lambda_{n+1} = 0$.

Note que a demonstração não pode ser aplicada para a cota superior de θ_1 e nem para a cota inferior de θ_n . Os valores de λ_0 e λ_{n+1} são atribuídos para que satisfaçam essas cotas, e baseiam-se no fato de que $0 \leq \theta_i \leq 2$ para $i = 1, \dots, n$.

Inicialmente supomos D invertível, no entanto isso não representa uma restrição para o resultado. Se $d_G(v) = 0$ para m vértices então existe uma matriz de permutação P tal que

$$P\mathcal{L}(G)P^T = \begin{pmatrix} \mathcal{L}(G_1) & 0 \\ 0 & 0_{m \times m} \end{pmatrix},$$

onde G_1 é o maior subgrafo induzido de G que não possui vértices isolados.

Pelos **Teoremas 2.4 e 2.5** temos que

$$\text{Spec}(\mathcal{L}(G)) = \text{Spec}(P\mathcal{L}(G)P^T) = \text{Spec}(\mathcal{L}(G_1)) \cup \{0^{(m)}\},$$

ou seja, $\lambda_{n-m+1} = \dots = \lambda_n = 0$, além de que $\lambda_{n-m} = 0$ é o menor autovalor de $\mathcal{L}(G_1)$.

Assim a deleção de uma aresta afeta apenas $\mathcal{L}(G_1)$, e portanto o resultado anterior pode ser aplicado a essa submatriz

$$\text{Spec}(\mathcal{L}(H)) = \text{Spec}(P\mathcal{L}(H)P^T) = \{\text{Spec}(\mathcal{L}(G_1 \setminus e), 0^{(m)})\},$$

ou seja, $\theta_{n-m+1} = \theta_{n-m+2} = \dots = \theta_n = 0$. Esses autovalores satisfazem trivialmente

$$\lambda_{i-1} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1}$$

para $i = n - m + 1, \dots, n - 1$. As cotas para os outros autovalores θ_i são obtidas aplicando o resultado anterior à matriz $\mathcal{L}(G_1)$. \square

O **Exemplo 4.4** mostra que as cotas obtidas nesse resultado são as melhores possíveis.

Exemplo 4.4. Considere $G = P_4$ e $H = 2P_2$.



Figura 4.4 Deleção de uma aresta do grafo P_4 .

Temos que

$$\text{Spec}(\mathcal{L}(G)) = \{2, 1.5, 0.5, 0\},$$

$$\text{Spec}(\mathcal{L}(H)) = \{2^{(2)}, 0^{(2)}\}.$$

Para que o resultado possa ser melhorado devemos ter $\lambda_i \geq \theta_i$ para $i = 1, \dots, n$, no entanto, observe que $\lambda_2 = 1.5 \not\geq 2 = \theta_2$, logo temos que a desigualdade da esquerda do entrelaçamento não pode ser melhorada.

Apresentamos a seguir como os autovalores de $\mathcal{L}(G)$ e $\mathcal{L}(H)$ se entrelaçam quando o grafo H é obtido pela deleção de r arestas do grafo G . Obtemos o próximo resultado aplicando o teorema anterior r vezes.

Teorema 4.7. [25] *Seja G um grafo e H um subgrafo de G obtido pela deleção de r arestas. Se*

$$\begin{aligned}\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n \text{ são os autovalores de } \mathcal{L}(G) \text{ e} \\ \theta_1 \geq \cdots \geq \theta_n \text{ são os autovalores de } \mathcal{L}(H),\end{aligned}$$

então

$$\lambda_{i-r} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+r}, \text{ para } i = 1, \dots, n,$$

onde $\lambda_i = 2$ para $i \leq 0$ e $\lambda_i = 0$ para $i \geq n + 1$.

Demonstração. Procedemos por indução em r .

Para $r = 1$ recaímos no teorema anterior.

Suponhamos que o resultado é válido para $r - 1$. Seja H_{r-1} o subgrafo de G obtido pela deleção de $r - 1$ arestas e $\gamma_1 \geq \cdots \geq \gamma_n$ os autovalores de $\mathcal{L}(H_{r-1})$. Segue por hipótese de indução que $\lambda_{i-(r-1)} \geq \gamma_i \geq \lambda_{i+(r-1)}$.

O grafo H é obtido pela deleção de uma aresta de H_{r-1} , e segue pelo teorema anterior que $\gamma_{i-1} \geq \theta_i \geq \gamma_{i+1}$. Assim

$$\lambda_{i-r} \geq \gamma_{i-1} \geq \theta_i \geq \gamma_{i+1} \geq \lambda_{i+r}.$$

Logo, temos $\lambda_{i-r} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+r}$, como desejado. \square

No caso em que a aresta removida é incidente a um vértice de grau 1, podemos melhorar o resultado do **Teorema 4.6** mostrando que os autovalores não aumentam quando a aresta é removida.

Teorema 4.8. [25] *Seja G um grafo de ordem n e $H = G \setminus f$, onde $f \in E(G)$ é uma aresta incidente a um vértice de grau 1. Se*

$$\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n = 0 \text{ são os autovalores de } \mathcal{L}(G) \text{ e}$$

$$\theta_1 \geq \cdots \geq \theta_n = 0 \text{ são os autovalores de } \mathcal{L}(H),$$

então

$$\lambda_i \geq \theta_i, \text{ para } i = 1, \dots, n.$$

Demonstração. A demonstração é semelhante à do **Teorema 4.6** considerando $f = \{v_1, v_2\}$ e $d_G(v_1) = 1$. Pela adaptação do **Teorema de Courant-Fischer** temos que

$$\theta_i = \min_{x^1, \dots, x^{i-1}} \left[\max_{\substack{x \perp x^1, \dots, x^{i-1} \\ x \neq 0}} \frac{\sum_{j \sim l} (x_j - x_l)^2 - (x_1 - x_2)^2}{\sum_{v_j \in V(G)} x_j^2 d(v_j) - x_1^2 - x_2^2} \right].$$

Como $d_G(v_1) = 1$, a expressão sendo maximizada não depende de x_1 , pois este termo é cancelado restando apenas uma expressão com parâmetros x^2, \dots, x^n . Assim, podemos escolher um valor arbitrário para x^1 e mantermos a igualdade

$$\theta_i = \min_{x^1, \dots, x^{i-1}} \left[\max_{\substack{x \perp x^1, \dots, x^{i-1} \\ x \neq 0}} \frac{\sum_{j \sim l} (x_j - x_l)^2 - (x_1 - x_2)^2}{\sum_{v_j \in V(G)} x_j^2 d(v_j) - x_1^2 - x_2^2} \right]$$

$$= \min_{x^1, \dots, x^{i-1}} \left[\max_{\substack{x \perp x^1, \dots, x^{i-1} \\ x \neq 0, x_1 = -x_2}} \frac{\sum_{j \sim l} (x_j - x_l)^2 - 4x_2^2}{\sum_{v_j \in V(G)} x_j^2 d(v_j) - 2x_2^2} \right].$$

Aplicando o **Lema 4.1** com $\gamma^2 = 2x_2^2$ temos que

$$\theta_i \leq \min_{x^1, \dots, x^{i-1}} \left[\max_{\substack{x \perp x^1, \dots, x^{i-1} \\ x \neq 0, x_1 = -x_2}} \frac{\sum_{j \sim l} (x_j - x_l)^2}{\sum_{v_j \in V(G)} x_j^2 d(v_j)} \right].$$

Removendo a restrição $x_1 = -x_2$ como condição do problema de maximização do **Teorema de Courant-Fischer**, o máximo para toda escolha de x^1, \dots, x^{i-1} (onde podemos ter $x_1 = -x_2$) fornece uma cota superior para a expressão anterior. Logo

$$\begin{aligned} \theta_i &\leq \min_{x^1, \dots, x^{i-1}} \left[\max_{\substack{x \perp x^1, \dots, x^{i-1} \\ x \neq 0, x_1 = -x_2}} \frac{\sum_{j \sim l} (x_j - x_l)^2}{\sum_{v_j \in V(G)} x_j^2 d(v_j)} \right] \\ &\leq \min_{x^1, \dots, x^{i-1}} \left[\max_{\substack{x \perp x^1, \dots, x^{i-1} \\ x \neq 0}} \frac{\sum_{j \sim l} (x_j - x_l)^2}{\sum_{v_j \in V(G)} x_j^2 d(v_j)} \right] = \lambda_i. \end{aligned}$$

Assim $\lambda_i \geq \theta_i$, para $i = 1, \dots, n$. □

Generalizando o resultado anterior obtemos um resultado de entrelaçamento de autovalores para \mathcal{L} associado com a deleção de r arestas incidentes a um vértice v de grau r , o que melhora em um índice o **Teorema 4.7**.

Teorema 4.9. [25] *Seja G um grafo de ordem n e H um subgrafo de G obtido pela deleção das r arestas incidentes a um vértice v de grau r . Se*

$$\begin{aligned} \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n = 0 \text{ são os autovalores de } \mathcal{L}(G) \text{ e} \\ \theta_1 \geq \dots \geq \theta_n = 0 \text{ são os autovalores de } \mathcal{L}(H), \end{aligned}$$

então

$$\lambda_{i-r+1} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+r}, \text{ para } i=1, \dots, n,$$

onde $\lambda_i = 2$ para $i \leq 0$ e $\lambda_i = 0$ para $i \geq n+1$.

Demonstração. Seja H_{r-k} o subgrafo obtido pela deleção de $r-k$ arestas incidentes ao vértice v no grafo G e $\theta_1^{(r-k)} \geq \dots \geq \theta_n^{(r-k)}$ seus autovalores, para $k = 0, \dots, r$. Aplicando sucessivas vezes o **Teorema 4.6** temos

$$\theta_i^{(r-1)} \leq \theta_{i-1}^{(r-2)} \leq \theta_{i-2}^{(r-3)} \leq \dots \leq \theta_{i-(r-1)}^{(0)} = \lambda_{i-(r-1)}.$$

Pelo **Teorema 4.8** temos que $\theta_i^{(r-1)} \geq \theta_i^{(r)} = \theta_i$, pois $d_{H_1}(v) = 1$.

Usando o **Teorema 4.7** obtemos $\theta_i \geq \lambda_{i+r}$.

Logo

$$\lambda_{i-r+1} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+r}.$$

As condições $\lambda_i = 2$ para $i \leq 0$ e $\lambda_i = 0$ para $i \geq n + 1$ são escolhidas dessa forma pois os autovalores de \mathcal{L} sempre pertencem ao intervalo $[0, 2]$. \square

Utilizando os resultados anteriores, obtemos o entrelaçamento de autovalores para \mathcal{L} associado à deleção de um vértice de grau r . Este teorema foi originalmente apresentado em [25].

Teorema 4.10. Teorema de Entrelaçamento para $\mathcal{L}(G - v)$. [25]

Seja G um grafo de ordem n e $H = G - v$, onde $v \in V(G)$ com $d(v) = r$. Se

$$\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n = 0 \text{ são os autovalores de } \mathcal{L}(G) \text{ e}$$

$$\theta_1 \geq \dots \geq \theta_{n-1} = 0 \text{ são os autovalores de } \mathcal{L}(H),$$

então

$$\lambda_{i-r+1} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+r}, \text{ para } i = 1, \dots, n - 1,$$

onde $\lambda_i = 2$ para $i \leq 0$ e $\lambda_i = 0$ para $i \geq n + 1$.

Demonstração. Seja H' o subgrafo de G obtido pela deleção das r arestas incidentes ao vértice v e $\gamma_1 \geq \dots \geq \gamma_n = 0$ os autovalores de $\mathcal{L}(H')$. Como o número de componentes conexas do grafo indica a multiplicidade do autovalor 0 da matriz \mathcal{L} sabemos que $\gamma_{n-1} = \gamma_n = 0$.

Observe que $\mathcal{L}(H)$ é submatriz principal de $\mathcal{L}(H')$ obtida pela deleção da linha e coluna associada ao vértice v e que nesta linha e coluna todos os elementos são zero. Supondo, sem perda de generalidade, que v ocupa a primeira linha e coluna da matriz $\mathcal{L}(H')$ temos que

$$\mathcal{L}(H') = \begin{pmatrix} 0 & 0_{1 \times n-1} \\ 0_{n-1 \times 1} & \mathcal{L}(H) \end{pmatrix},$$

então $\text{Spec}(\mathcal{L}(H')) = \text{Spec}(\mathcal{L}(H)) \cup \{0\}$ pelo **Teorema 2.4**. Logo temos que

$$\gamma_1 = \theta_1, \dots, \gamma_{n-1} = \theta_{n-1}.$$

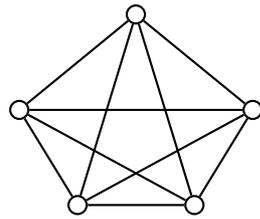
Segue pelo **Teorema 4.9** que

$$\lambda_{i-r+1} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+r}, \text{ para } i = 1, \dots, n-1,$$

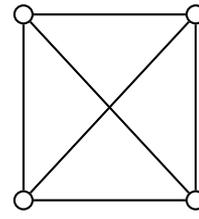
onde $\lambda_i = 2$ para $i \leq 0$ e $\lambda_i = 0$ para $i \geq n+1$. □

O **Exemplo 4.5** mostra que as cotas obtidas nesse resultado são as melhores possíveis.

Exemplo 4.5. Considere $G = K_n$ e $H = K_{n-1}$.



Grafo K_5 .



Grafo K_4 .

Figura 4.5 Deleção de um vértice do grafo K_5 .

Temos que

$$\text{Spec}(\mathcal{L}(G)) = \left\{ \frac{n}{n-1} \binom{n-1}{n-1}, 0 \right\},$$

$$\text{Spec}(\mathcal{L}(H)) = \left\{ \frac{n-1}{n-2}^{(n-2)}, 0 \right\}.$$

Como $\lambda_1 = \frac{n}{n-1} \not\geq \frac{n-1}{n-2} = \theta_{n-2}$, temos que a desigualdade da esquerda do entrelaçamento não pode ser melhorada, ou seja, não podemos ter $\lambda_{i-r+2} \geq \theta_i$.

Considere $G = K_{1,n-1}$ e $H = (n-1)K_1$, o subgrafo de G obtido pela deleção do vértice central.



Figura 4.6 Deleção de um vértice do grafo $K_{1,8}$.

Temos que

$$\text{Spec}(\mathcal{L}(G)) = \{2, 1^{(n-2)}, 0\},$$

$$\text{Spec}(\mathcal{L}(H)) = \{0^{(n-1)}\}.$$

Como $\theta_1 = 0 \not\geq 1 = \lambda_{n-1}$, temos que a desigualdade da direita do entrelaçamento não pode ser melhorada, ou seja, não podemos ter $\theta_i \geq \lambda_{i+r-1}$.

O resultado de entrelaçamento de autovalores para \mathcal{L} associado à contração de dois vértices é obtido de maneira semelhante ao resultado associado à deleção de aresta e foi originalmente exibido em [10].

Teorema 4.11. Teorema de Entrelaçamento para $\mathcal{L}(G \mid \{u, v\})$. [10]

Seja G um grafo e $H = G \mid \{u, v\}$, onde $u, v \in V(G)$ com $N(u) \cap (N(v) \cup \{v\}) = \emptyset$, ou seja, u e v são vértices não adjacentes e sem vizinhos em comum. Se

$$\begin{aligned} \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n \text{ são os autovalores de } \mathcal{L}(G) \text{ e} \\ \theta_1 \geq \cdots \geq \theta_{n-1} \text{ são os autovalores de } \mathcal{L}(H), \end{aligned}$$

então

$$\lambda_{i-1} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1}, \text{ para } i = 1, \dots, n-1,$$

onde $\lambda_0 = 2$.

Demonstração. Usaremos a mesma adaptação do **Teorema de Courant-Fischer** feita no **Teorema 4.6**.

Aplicando a adaptação da **Outra Versão do Teorema de Courant-Fischer** dada pela equação (4.1), onde supomos que G não possui vértices isolados, temos

$$\lambda_i = \max_{x^{i+1}, \dots, x^n} \left[\min_{\substack{x \perp x^{i+1}, \dots, x^n \\ x \neq 0}} \frac{\sum_{j \sim l} (x_j - x_l)^2}{\sum_{v_j \in V(G)} x_j^2 d(v_j)} \right].$$

Suponha, sem perda de generalidade, que u e v ocupam, respectivamente, a primeira e segunda linha e coluna de $\mathcal{L}(G)$, ou seja, $u = v_1$ e $v = v_2$.

Considere o grafo H^* obtido pela deleção de todas as arestas incidentes a u e a adição dessas mesmas ao vértice v e sejam $\theta_1^* \geq \cdots \geq \theta_n^*$ os autovalores da matriz $\mathcal{L}(H^*)$.

Observe que $\text{Spec}(\mathcal{L}(H^*)) = \text{Spec}(\mathcal{L}(H)) \cup \{0\}$, tal diferença entre os espectros ocorre pela presença do vértice isolado u no grafo H^* .

Seja J o conjunto de índices referente aos vértices adjacentes a u . Ao deletarmos todas as arestas incidentes ao vértice u e adicionarmos essas ao

vértice v , alteramos os graus dos vértices v_1 e v_2 de forma que $d_{H^*}(v_1) = 0$ e $d_{H^*}(v_2) = d_G(v_2) + d_G(v_1)$. Isso altera os termos no **Teorema de Courant-Fischer** da seguinte maneira

$$\sum_{v_j \in V(G)} x_j^2 d(v_j) \longrightarrow \sum_{v_j \in V(G)} x_j^2 d(v_j) - d(v_1)x_1^2 + d(v_1)x_2^2,$$

$$\sum_{j \sim l} (x_j - x_l)^2 \longrightarrow \sum_{j \sim l} (x_j - x_l)^2 + \sum_{j \in J} [(x_2 - x_j)^2 - (x_1 - x_j)^2].$$

Assim obtemos que a aplicação da adaptação da **Outra Versão do Teorema de Courant-Fischer** para o grafo H^* é dada por

$$\theta_i^* = \max_{x^{i+1}, \dots, x^n} \left[\min_{\substack{x \perp x^{i+1}, \dots, x^n \\ x \neq 0}} \frac{\sum_{j \sim l} (x_j - x_l)^2 + \sum_{j \in J} (x_2 - x_j)^2 - (x_1 - x_j)^2}{\sum_{v_j \in V(G)} x_j^2 d(v_j) - d(v_1)x_1^2 + d(v_1)x_2^2} \right].$$

Procedendo de maneira análoga ao **Teorema 4.6** temos

$$\begin{aligned} \theta_i^* &\leq \max_{x^{i+1}, \dots, x^n} \left[\min_{\substack{x \perp x^{i+1}, \dots, x^n \\ x \neq 0, x_1 = x_2}} \frac{\sum_{j \sim l} (x_j - x_l)^2 + \sum_{j \in J} (x_2 - x_j)^2 - (x_1 - x_j)^2}{\sum_{v_j \in V(G)} x_j^2 d(v_j) - d(v_1)x_1^2 + d(v_1)x_2^2} \right] \\ &= \max_{x^{i+1}, \dots, x^n} \left[\min_{\substack{x \perp x^{i+1}, \dots, x^n, e_1 - e_2 \\ x \neq 0}} \frac{\sum_{j \sim l} (x_j - x_l)^2}{\sum_{v_j \in V(G)} x_j^2 d(v_j)} \right] \\ &\leq \max_{x^i, x^{i+1}, \dots, x^n} \left[\min_{\substack{x \perp x^i, x^{i+1}, \dots, x^n \\ x \neq 0}} \frac{\sum_{j \sim l} (x_j - x_l)^2}{\sum_{v_j \in V(G)} x_j^2 d(v_j)} \right] = \lambda_{i-1}, \end{aligned}$$

para $i = 2, \dots, n$.

O Teorema de Courant-Fischer fornece que

$$\theta_i^* = \min_{x^1, \dots, x^{i-1}} \left[\max_{\substack{x \perp x^1, \dots, x^{i-1} \\ x \neq 0}} \frac{\sum_{j \sim l} (x_j - x_l)^2 + \sum_{j \in J} (x_2 - x_j)^2 - (x_1 - x_j)^2}{\sum_{v_j \in V(G)} x_j^2 d(v_j) - d(v_1)x_1^2 + d(v_2)x_2^2} \right].$$

Procedendo de maneira análoga ao caso anterior temos

$$\begin{aligned} \theta_i^* &\geq \min_{x^1, \dots, x^{i-1}} \left[\max_{\substack{x \perp x^1, \dots, x^{i-1} \\ x \neq 0, x_1 = x_2}} \frac{\sum_{j \sim l} (x_j - x_l)^2 + \sum_{j \in J} (x_2 - x_j)^2 - (x_1 - x_j)^2}{\sum_{v_j \in V(G)} x_j^2 d(v_j) - d(v_1)x_1^2 + d(v_1)x_2^2} \right] \\ &= \min_{x^1, \dots, x^{i-1}} \left[\max_{\substack{x \perp x^1, \dots, x^{i-1}, e_1 - e_2 \\ x \neq 0}} \frac{\sum_{j \sim l} (x_j - x_l)^2}{\sum_{v_j \in V(G)} x_j^2 d(v_j)} \right] \\ &\geq \max_{x^1, \dots, x^{i-1}, x^i} \left[\min_{\substack{x \perp x^1, \dots, x^{i-1}, x^i \\ x \neq 0}} \frac{\sum_{j \sim l} (x_j - x_l)^2}{\sum_{v_j \in V(G)} x_j^2 d(v_j)} \right] = \lambda_{i+1}, \end{aligned}$$

para $i = 1, \dots, n - 1$.

Assim temos $\lambda_{i-1} \geq \theta_i^* \geq \lambda_{i+1}$ para $i = 2, \dots, n - 1$, $\theta_n^* \leq \lambda_{n-1}$ e $\theta_1^* \geq \lambda_2$.

Como $\text{Spec}(\mathcal{L}(H^*))$ e $\text{Spec}(\mathcal{L}(H))$ diferem apenas por um zero temos que $\theta_i = \theta_i^*$ para $i = 1, \dots, n - 1$.

Logo temos que $\lambda_{i-1} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1}$ para $i = 1, \dots, n - 1$, onde $\lambda_0 = 2$.

O argumento para o caso onde G é um grafo com vértices isolados é análogo ao do **Teorema 4.6**. Assim concluímos a demonstração. \square

Com os resultados dessa seção completamos a terceira linha da Tabela 4.4.

	$G \setminus f$	$G - v$	$G \setminus \{u, v\}$
A	$\lambda_{i-1} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1}$	$\lambda_i \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1}$	$\lambda_{i-1} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+2}$
L	$\lambda_i \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1}$	$\lambda_i \geq \theta_i \geq \lambda_{i+r}$	
\mathcal{L}	$\lambda_{i-1} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1}$	$\lambda_{i-r+1} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+r}$	$\lambda_{i-1} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1}$
Q			

Tabela 4.4 Teoremas de entrelaçamento para a matriz laplaciana normalizada.

4.4 Matriz Laplaciana Sem Sinal

O desenvolvimento da teoria espectral de grafos baseada na matriz laplaciana sem sinal foi inicialmente proposta por Cvetković, Rowlinson e Simić que encontraram muitos indícios de que esta matriz é superior para a caracterização de grafos por meio de seus espectros. Tais resultados são apresentados em [12, 13, 14, 15].

Nesta seção apresentamos os resultados de entrelaçamento de autovalores para a matriz Q associados com a deleção de uma aresta e com a deleção de um vértice.

O resultado de entrelaçamento de autovalores para Q associado à deleção de uma aresta é apresentado em [11] e [32].

Teorema 4.12. Teorema de Entrelaçamento para $Q(G \setminus f)$. [32]

Seja G um grafo e $H = G \setminus f$, onde $f \in E(G)$. Se

$$\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n \text{ são os autovalores de } Q(G) \text{ e}$$

$$\theta_1 \geq \cdots \geq \theta_n \text{ são os autovalores de } Q(H),$$

então

$$\lambda_i \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1}, \text{ para } i = 1, \dots, n - 1.$$

Demonstração. O **Teorema 3.2** afirma que $Q(G) = S(G)S(G)^T$ e que seus autovalores são não negativos.

Pelo **Teorema 2.6** temos que as matrizes $S(G)S(G)^T$ e $S(G)^T S(G)$ possuem o mesmo espectro, exceto pela multiplicidade do autovalor zero. Logo os autovalores positivos de $Q(G)$ e de $S(G)^T S(G)$ são iguais e possuem mesma multiplicidade. Considerações análogas são válidas para $Q(H) = S(H)S(H)^T$ e $S(H)^T S(H)$.

Observe que $S(H)^T S(H)$ é uma submatriz principal de ordem $|E(G)| - 1$ da matriz $S(G)^T S(G)$, obtida pela deleção da linha e coluna associada à aresta deletada. O resultado segue pelo **Teorema do Entrelaçamento de Cauchy (Teorema 2.13)**. \square

Aplicando o teorema anterior r vezes obtemos o resultado de entrelaçamento para Q associado com a deleção de r arestas do grafo.

Teorema 4.13. [32] *Seja G um grafo e H o subgrafo de G obtido pela deleção de r arestas. Se*

$$\begin{aligned} \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \text{ são os autovalores de } Q(G) \text{ e} \\ \theta_1 \geq \dots \geq \theta_n \text{ são os autovalores de } Q(H), \end{aligned}$$

então

$$\lambda_i \geq \theta_i \geq \lambda_{i+r}, \text{ para } i = 1, \dots, n - r.$$

Demonstração. Procedemos por indução em r .

Para $r = 1$ o resultado segue pelo teorema anterior.

Suponhamos que o resultado é válido para $r - 1$. Considere H_{r-1} o subgrafo de G obtido pela deleção de $r - 1$ arestas e $\gamma_1 \geq \dots \geq \gamma_n$ os autovalores de $Q(H_{r-1})$. Segue pela hipótese de indução que

$$\lambda_i \geq \gamma_i \geq \lambda_{i+(r-1)}.$$

O grafo H é um subgrafo de H_{r-1} obtido pela deleção de uma aresta, e segue pelo teorema anterior que $\gamma_i \geq \theta_i \geq \gamma_{i+1}$. Assim

$$\lambda_i \geq \gamma_i \geq \theta_i \geq \gamma_{i+1} \geq \lambda_{i+r}.$$

Logo temos $\lambda_i \geq \theta_i \geq \lambda_{i+r}$, como desejado. \square

Para demonstrarmos o resultado de entrelaçamento de autovalores para Q associado à deleção de um vértice, utilizamos a desigualdade de Weyl e o Teorema do Entrelaçamento de Cauchy. Esse teorema foi originalmente apresentado por Wang e Belardo [34].

Teorema 4.14. Teorema de Entrelaçamento para $Q(G - v)$. [34]

Seja G um grafo de ordem n e $H = G - v$, onde $v \in V(G)$. Se

$$\begin{aligned} \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \text{ são os autovalores de } Q(G) \text{ e} \\ \theta_1 \geq \dots \geq \theta_{n-1} \text{ são os autovalores de } Q(H), \end{aligned}$$

então

$$\lambda_i \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1} - 1, \text{ para } i = 1, \dots, n - 1.$$

Temos que $\lambda_i = \theta_i$, para $i = 1, \dots, n - 1$, se, e somente se, v é vértice isolado.

Se $d(v) = n - 1$, então $\lambda_i - 1 \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1} - 1$, para $i = 1, \dots, n - 1$.

Demonstração. Seja $Q_v(G)$ a submatriz principal de ordem $n-1$ de $Q(G)$ obtida pela deleção da linha e coluna associada ao vértice v e com autovalores $\gamma_1 \geq \dots \geq \gamma_{n-1}$.

Pelo **Teorema do Entrelaçamento de Cauchy** temos

$$\lambda_i \geq \gamma_i \geq \lambda_{i+1}. \quad (4.2)$$

Considere a matriz $E = Q_v(G) - Q(H)$ com autovalores $\rho_1 \geq \dots \geq \rho_{n-1}$. Note que E é uma matriz diagonal cujo (i, i) -ésimo elemento é 1 se o vértice v_i é adjacente a v em G , caso contrário é 0. Logo seu espectro é composto por zeros e uns.

Aplicando a **Desigualdade de Weyl** com $A = Q_v(G)$, $B = Q(H)$ e E dada acima, temos que

$$\rho_1 + \theta_i \geq \gamma_i \geq \rho_{n-1} + \theta_i,$$

como $0 \leq \rho_n$ e $\rho_1 \leq 1$ obtemos

$$1 + \theta_i \geq \gamma_i \geq \theta_i. \quad (4.3)$$

Por (4.2) e (4.3) temos que

$$\lambda_i \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1} - 1,$$

para $i = 1, \dots, n-1$.

Se v é vértice isolado temos que $G = H \cup K_1$. Logo $\text{Spec}(Q(G)) = \text{Spec}(Q(H)) \cup \{0\}$. Assim temos que $\lambda_i = \theta_i$, para $i = 1, \dots, n-1$. Reciprocamente, observe que o vértice isolado v apenas adiciona um autovalor 0 ao $\text{Spec}(Q(G))$.

Se $d(v) = n-1$, então $E = I_{n-1}$ e $\text{Spec}(E) = \{1^{(n-1)}\}$. Segue pela aplicação da **Desigualdade de Weyl** que

$$\theta_i + 1 \geq \gamma_i \geq \theta_i + 1.$$

Portanto $\gamma_i = \theta_i + 1$ e usando a desigualdade (4.2) obtemos

$$\lambda_i - 1 \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1} - 1.$$

□

O **Exemplo 4.6** mostra que as cotas obtidas nesse resultado são as melhores possíveis.

Exemplo 4.6. Considere $G = K_4$ e $H = K_3$. Temos que

$$\text{Spec}(Q(G)) = \{6, 2^{(3)}\},$$

$$\text{Spec}(Q(H)) = \{4, 1^{(2)}\}.$$

Como $\theta_2 = 1 \not\geq 2 - \beta = \lambda_3 - \beta$, com $0 \leq \beta < 1$, temos que a desigualdade da direita do resultado de entrelaçamento não pode ser melhorada, ou seja, não podemos ter $\theta_i \geq \lambda_{i+1} - \beta$.

O próximo resultado é uma aplicação dos últimos teoremas vistos e generaliza os resultados de entrelaçamento para o caso em que H é um subgrafo de G obtido pela deleção de vértices e arestas.

Corolário 4.1. Seja G um grafo de ordem n e H um subgrafo de G de ordem $m \leq n$. Se

$$\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \text{ são os autovalores de } Q(G) \text{ e}$$

$$\theta_1 \geq \dots \geq \theta_m \text{ são os autovalores de } Q(H),$$

então

$$\lambda_i \geq \theta_i, \text{ para } i = 1, \dots, m.$$

Demonstração. Se $m = n$, então H é subgrafo de G obtido pela deleção de arestas e o resultado segue pelo **Teorema 4.13**.

Se $m < n$, então H é subgrafo de G obtido pela deleção de vértices e arestas. Considere H_k o subgrafo de G obtido pela deleção de $n - k$ vértices e que possui H como subgrafo, e sejam $\theta_1^k \geq \dots \geq \theta_k^k$ os autovalores da matriz $Q(H_k)$. Pelo **Teorema 4.14** temos que

$$\lambda_i \geq \theta_i^1 \geq \dots \geq \theta_i^k. \quad (4.4)$$

Se $H = H_m$, o resultado está provado. Caso contrário, temos que H é subgrafo de H_m obtido pela deleção de arestas. Pelo **Teorema 4.13** temos que $\theta_i^m \geq \theta_i$, e segue pela equação (4.4) que $\lambda_i \geq \theta_i$. \square

O próximo corolário permite utilizar a multiplicidade dos autovalores do grafo original para caracterizar a multiplicidade dos autovalores do grafo obtido após a operação de deleção de vértice.

Corolário 4.2. *Seja G um grafo de ordem n e $H = G - v$, onde $v \in V(G)$ e $d(v) = n - 1$. Se*

$$\begin{aligned} \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \text{ são os autovalores de } Q(G), \\ \theta_1 \geq \dots \geq \theta_{n-1} \text{ são os autovalores de } Q(H), \end{aligned}$$

e α é um autovalor de multiplicidade r de $Q(G)$, então $\alpha - 1$ é um autovalor de multiplicidade $r - 1$ de $Q(H)$.

Demonstração. Se α é autovalor de multiplicidade r de $Q(G)$, então existe um índice j tal que $\lambda_{j+1} = \dots = \lambda_{j+r} = \alpha$. Como $d(v) = n - 1$, segue pelo **Teorema 4.14** que $\lambda_i - 1 \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1} - 1$, logo

$$\begin{aligned} \lambda_{j+1} - 1 \geq \theta_{j+1} \geq \lambda_{j+2} - 1 \geq \theta_{j+2} \geq \lambda_{j+3} - 1 \geq \dots \geq \lambda_{j+r-1} - 1 \geq \theta_{j+r-1} \geq \lambda_{j+r} - 1 \\ \alpha - 1 \geq \theta_{j+1} \geq \alpha - 1 \geq \dots \geq \alpha - 1 \geq \theta_{j+r-1} \geq \alpha - 1. \end{aligned}$$

Assim temos que $\theta_{j+1} = \dots = \theta_{j+r-1} = \alpha - 1$, ou seja, $\alpha - 1$ é autovalor de multiplicidade $r - 1$ de $Q(H)$. \square

Com os resultados dessa seção completamos algumas lacunas da quarta linha da Tabela 4.5.

	$G \setminus f$	$G - v$	$G \setminus \{u, v\}$
A	$\lambda_{i-1} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1}$ [25]	$\lambda_i \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1}$ [25]	$\lambda_{i-1} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+2}$ [25]
L	$\lambda_i \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1}$ [32]	$\lambda_i \geq \theta_i \geq \lambda_{i+r}$ [25]	
\mathcal{L}	$\lambda_{i-1} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1}$ [10]	$\lambda_{i-r+1} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+r}$ [25]	$\lambda_{i-1} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1}$ [10]
Q	$\lambda_i \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1}$ [32]	$\lambda_i \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1} - 1$ [34]	

Tabela 4.5 Teoremas de entrelaçamento do capítulo 4.

A Tabela 4.5 apresenta os principais teoremas de entrelaçamento conhecidos. Observe que as lacunas associadas à operação de contração de vértices para as matrizes laplaciana e laplaciana sem sinal não foram preenchidas. Tais resultados serão construídos no próximo capítulo.

No Capítulo 5, também vamos investigar teoremas de entrelaçamento de autovalores associados à operação de subdivisão de uma aresta, e com isso introduzimos uma nova coluna para ser preenchida na matriz que ilustra os resultados.

5 OUTROS ENTRELAÇAMENTOS

Neste capítulo apresentamos teoremas de entrelaçamento de autovalores para as quatro matrizes trabalhadas no capítulo anterior associados à operação de subdivisão de uma aresta. Além disso, apresentamos os teoremas de entrelaçamento de autovalores associados à operação de contração de dois vértices para as matrizes laplaciana e laplaciana sem sinal. Os resultados desse capítulo constituem uma contribuição original de nosso trabalho.

Com a investigação da operação de subdivisão de uma aresta a Tabela 4.5, que ilustra os teoremas de entrelaçamento, ganha mais uma coluna para ser preenchida.

	$G \setminus f$	$G - v$	$G \setminus \{u, v\}$	G_f
A	$\lambda_{i-1} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1}$	$\lambda_i \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1}$	$\lambda_{i-1} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+2}$	
L	$\lambda_i \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1}$	$\lambda_i \geq \theta_i \geq \lambda_{i+r}$		
\mathcal{L}	$\lambda_{i-1} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1}$	$\lambda_{i-r+1} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+r}$	$\lambda_{i-1} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1}$	
Q	$\lambda_i \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1}$	$\lambda_i \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1} - 1$		

Tabela 5.1 Teoremas de entrelaçamento que serão apresentados no capítulo 5.

Neste capítulo pretendemos completar a Tabela 5.1.

5.1 Subdivisão de Aresta

Para obter os resultados desta seção utilizamos os obtidos nas duas primeiras colunas da tabela acima. Usamos ferramentas da teoria matricial e da teoria de grafos para relacionar os resultados já obtidos, visando encontrar novos e poder terminar de preencher a tabela.

Relembramos que toda subdivisão de aresta pode ser revertida pela contração de vértices adjacentes. De fato, seja G um grafo e $H = G \setminus f$, onde $f = \{u, v\} \in E$. Observe que $G = H \setminus \{x_f, u\} = H \setminus \{x_f, v\}$. Logo é plausível supor que os resultados de entrelaçamento de autovalores associados com essas operações estejam relacionados. Vejamos como isso ocorre para cada representação matricial.

Teorema 5.1. Teorema de Entrelaçamento para $A(G_f)$.

Seja G um grafo e $H = G_f$, onde $f \in E(G)$. Se

$$\begin{aligned} \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n \text{ são os autovalores de } A(G) \text{ e} \\ \theta_1 \geq \cdots \geq \theta_{n+1} \text{ são os autovalores de } A(H), \end{aligned}$$

então

$$\theta_{i-1} \geq \lambda_i \geq \theta_{i+2}, \text{ para } i = 2, \dots, n-1,$$

$$\lambda_1 \geq \theta_3, \text{ e } \theta_{n-1} \geq \lambda_n.$$

Analogamente, temos

$$\lambda_{i-2} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1}, \text{ para } i = 3, \dots, n-1,$$

$$\theta_1 \geq \lambda_2, \theta_2 \geq \lambda_3, \lambda_{n-2} \geq \theta_n \text{ e } \lambda_{n-1} \geq \theta_{n+1}.$$

Demonstração. Pelo **Teorema 3.1**, temos que $G \setminus f = G_f - x$, onde x é o vértice adicionado na subdivisão. Sejam $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \cdots \geq \beta_n$ os autovalores de $A(G \setminus f)$.

Pelo **Teorema 4.1**, temos que

$$\lambda_{i-1} \geq \beta_i \geq \lambda_{i+1} \text{ para } i = 2, \dots, n-1, \quad (5.1)$$

$$\beta_1 \geq \lambda_2 \text{ e } \beta_n \leq \lambda_{n-1}.$$

Pelo **Teorema 4.2**, temos que

$$\theta_i \geq \beta_i \geq \theta_{i+1} \text{ para } i = 1, \dots, n. \quad (5.2)$$

Assim temos

$$\theta_{i-1} \geq \beta_{i-1} \text{ pela desigualdade (5.2).}$$

$$\beta_{i-1} \geq \lambda_i \text{ pela desigualdade (5.1).}$$

$$\lambda_i \geq \beta_{i+1} \text{ pela desigualdade (5.1).}$$

$$\beta_{i+1} \geq \theta_{i+2} \text{ pela desigualdade (5.2).}$$

Logo $\theta_{i-1} \geq \lambda_i \geq \theta_{i+2}$ para $i = 2, \dots, n-1$.

Do mesmo modo obtemos

$$\lambda_1 \geq \beta_2 \text{ por (5.1).}$$

$$\theta_{n-1} \geq \beta_{n-1} \text{ por (5.2).}$$

$$\beta_2 \geq \theta_3 \text{ por (5.2).}$$

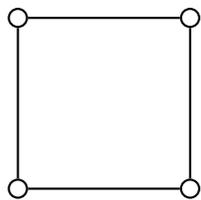
$$\beta_{n-1} \geq \lambda_n \text{ por (5.1).}$$

Logo $\lambda_1 \geq \theta_3$ e $\theta_{n-1} \geq \lambda_n$.

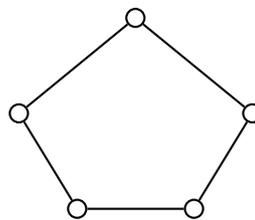
Analogamente, temos que $\lambda_{i-2} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1}$ para $i = 3, \dots, n-1$. Além disso, $\theta_1 \geq \lambda_2$, $\theta_2 \geq \lambda_3$, $\lambda_{n-2} \geq \theta_n$ e $\lambda_{n-1} \geq \theta_{n+1}$. \square

Vejamos que uma das cotas do resultado não pode ser melhorada.

Exemplo 5.1. Se $G = C_4$ então a subdivisão de qualquer aresta fornece o grafo $H = C_5$.



Grafo C_4 .



Grafo C_5 .

Figura 5.1 Subdivisão de uma aresta do grafo C_4 .

Assim temos

$$\text{Spec}(A(G)) = \{2, 0^{(2)}, -2\},$$

$$\text{Spec}(A(H)) = \{2, 0.61^{(2)}, -1.62^{(2)}\}.$$

Como $\lambda_2 = 0 \not\geq 0.61 = \theta_3$, temos que a desigualdade da direita do resultado de entrelaçamento não pode ser melhorada, ou seja, não podemos ter $\lambda_i \geq \theta_{i+1}$.

Considere os resultados da Tabela 5.2.

	$H = G_f$	$H = G \setminus \{u, v\}$
A	$\lambda_{i-2} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1}$	$\lambda_{i-1} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+2}$

Tabela 5.2 Comparação para a matriz de adjacência.

Observe que para a matriz de adjacência os resultados de entrelaçamento de autovalores associados à subdivisão de arestas e a contração de vértices são idênticos.

Apresentamos a seguir o resultado de entrelaçamento para a matriz laplaciana associado com a operação de subdivisão de aresta.

Teorema 5.2. Teorema de Entrelaçamento para $L(G_f)$.

Seja G um grafo e $H = G_f$, onde $f \in E(G)$. Se

$$\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n \text{ são os autovalores de } L(G) \text{ e}$$

$$\theta_1 \geq \cdots \geq \theta_{n+1} \text{ são os autovalores de } L(H),$$

então

$$\theta_{i-1} \geq \lambda_i \geq \theta_{i+2} \text{ para } i = 2, \dots, n,$$

$$\lambda_1 \geq \theta_3 \text{ e } \theta_{n+2} = 0.$$

Analogamente, temos

$$\lambda_{i-2} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1}, \text{ para } i = 3, \dots, n-1,$$

$$\theta_1 \geq \lambda_2, \theta_2 \geq \lambda_3, \lambda_{n-2} \geq \theta_n \text{ e } \lambda_{n-1} \geq \theta_{n+1} = 0.$$

Demonstração. Pelo **Teorema 3.1**, temos que $G \setminus f = G_f - x$, onde x é o vértice adicionado na subdivisão.

Sejam $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_n$ os autovalores de $L(G \setminus f)$.

Pelo **Teorema 4.4**, temos que

$$\lambda_i \geq \beta_i \geq \lambda_{i+1} \text{ para } i = 1, \dots, n-1. \quad (5.3)$$

Pelo **Teorema 4.5**, e como $d_{G_f}(x) = 2$, temos que

$$\theta_i \geq \beta_i \geq \theta_{i+2} \text{ para } i = 1, \dots, n \quad (5.4)$$

e $\theta_{n+2} = 0$.

Assim temos

$$\theta_{i-1} \geq \beta_{i-1} \text{ pela desigualdade (5.4).}$$

$$\beta_{i-1} \geq \lambda_i \text{ pela desigualdade (5.3).}$$

$$\lambda_i \geq \beta_i \text{ pela desigualdade (5.3).}$$

$$\beta_i \geq \theta_{i+2} \text{ pela desigualdade (5.4).}$$

Logo $\theta_{i-1} \geq \lambda_i \geq \theta_{i+2}$ para $i = 2, \dots, n$, assumindo $\theta_{n+2} = 0$.

Do mesmo modo obtemos

$$\lambda_1 \geq \beta_1 \text{ por (5.3).}$$

$$\beta_1 \geq \theta_3 \text{ por (5.4).}$$

Logo $\lambda_1 \geq \theta_3$.

Analogamente, temos que $\lambda_{i-2} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1}$ para $i = 3, \dots, n-1$. Além disso, $\theta_1 \geq \lambda_2$, $\theta_2 \geq \lambda_3$, $\lambda_{n-2} \geq \theta_n$ e $\lambda_{n-1} \geq \theta_{n+1} = 0$. \square

Vejamos que uma das cotas do resultado não pode ser melhorada.

Exemplo 5.2. Se $G = C_4$ então a subdivisão de qualquer aresta fornece o grafo $H = C_5$, assim temos

$$\text{Spec}(L(G)) = \{4, 2^{(2)}, 0\},$$

$$\text{Spec}(L(H)) = \{3.62^{(2)}, 1.38^{(2)}, 0\}.$$

Como $\theta_3 = 1.38 \not\geq 2 = \lambda_3$, temos que a desigualdade da esquerda do resultado de entrelaçamento não pode ser melhorada, ou seja, não podemos ter $\theta_i \geq \lambda_i$.

Na próxima seção vamos apresentar o resultado de entrelaçamento para a matriz laplaciana associado a contração de vértices para então realizar a comparação entre os resultados.

Lembramos que o resultado de entrelaçamento de autovalores associado à contração de dois vértices para a matriz laplaciana normalizada \mathcal{L} (**Teorema 4.11**) exige que os vértices contraídos não sejam adjacentes e que não possuam vizinhos em comum, ou seja, não contempla o caso em que a contração de dois vértices é a operação inversa da subdivisão de uma aresta.

Teorema 5.3. Teorema de Entrelaçamento para $\mathcal{L}(G_f)$.

Seja G um grafo e $H = G_f$, onde $f \in E(G)$. Se

$$\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \text{ são os autovalores de } \mathcal{L}(G) \text{ e}$$

$$\theta_1 \geq \dots \geq \theta_{n+1} \text{ são os autovalores de } \mathcal{L}(H),$$

então

$$\theta_{i-2} \geq \lambda_i \geq \theta_{i+3} \text{ para } i = 1, \dots, n,$$

onde $\theta_i = 2$ para $i \leq 0$ e $\theta_i = 0$ para $i \geq n + 2$.

Analogamente, temos

$$\lambda_{i-3} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+2}, \text{ para } i = 1, \dots, n + 1,$$

onde $\lambda_i = 2$ para $i \leq 0$ e $\lambda_i = 0$ para $i \geq n + 1$.

Demonstração. Pelo **Teorema 3.1**, temos que $G \setminus f = G_f - x$, onde x é o vértice adicionado na subdivisão.

Sejam $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_n$ os autovalores de $\mathcal{L}(G \setminus f)$.

Pelo **Teorema 4.6**, temos que

$$\lambda_{i-1} \geq \beta_i \geq \lambda_{i+1} \text{ para } i = 1, \dots, n, \quad (5.5)$$

onde $\lambda_0 = 2$ e $\lambda_{n+1} = 0$.

Pelo **Teorema 4.10**, e como $d_{G_f}(x) = 2$, temos que

$$\theta_{i-1} \geq \beta_i \geq \theta_{i+2} \text{ para } i = 1, \dots, n, \quad (5.6)$$

$\theta_0 = 2$ e $\theta_{n+2} = 0$.

Assim temos

$$\theta_{i-2} \geq \beta_{i-1} \text{ pela desigualdade (5.6).}$$

$$\beta_{i-1} \geq \lambda_i \text{ pela desigualdade (5.5).}$$

$$\lambda_i \geq \beta_{i+1} \text{ pela desigualdade (5.5).}$$

$$\beta_{i+1} \geq \theta_{i+3} \text{ pela desigualdade (5.6).}$$

Logo $\theta_{i-2} \geq \lambda_i \geq \theta_{i+3}$ para $i = 1, \dots, n$, assumindo $\theta_i = 2$ para $i \leq 0$ e $\theta_i = 0$ para $i \geq n + 2$.

Analogamente, temos que $\lambda_{i-3} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+2}$ para $i = 1, \dots, n$, assumindo $\lambda_i = 2$ para $i \leq 0$ e $\lambda_i = 0$ para $i \geq n + 1$. \square

Considere os resultados da Tabela 5.3.

	$H = G_f$	$H = G \mid \{u, v\}$
\mathcal{L}	$\lambda_{i-3} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+2}$	$\lambda_{i-1} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1}$

Tabela 5.3 Comparação para a matriz laplaciana normalizada.

O resultado associado à subdivisão de aresta é uma complementação para o caso em que os vértices contraídos são adjacentes e um deles possui grau 2, visto que nesse caso a contração de vértices adjacentes é a operação inversa da subdivisão de aresta.

Apresentamos a seguir o resultado de entrelaçamento de autovalores associados à subdivisão de uma aresta para a matriz laplaciana sem sinal. O resultado associado com a contração de vértices será construído na próxima seção.

Teorema 5.4. Teorema de Entrelaçamento para $Q(G_f)$.

Seja G um grafo e $H = G_f$, onde $f \in E(G)$. Se

$$\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \text{ são os autovalores de } Q(G) \text{ e}$$

$$\theta_1 \geq \dots \geq \theta_{n+1} \text{ são os autovalores de } Q(H),$$

então

$$\theta_{i-1} \geq \lambda_i \geq \theta_{i+1} - 1 \text{ para } i = 2, \dots, n,$$

$$\text{e } \lambda_1 \geq \theta_2 - 1.$$

Analogamente, temos

$$\lambda_{i-1} + 1 \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1}, \text{ para } i = 2, \dots, n - 1,$$

$$\theta_1 \geq \lambda_2 \text{ e } \lambda_{n-1} + 1 \geq \theta_n.$$

Demonstração. Pelo **Teorema 3.1**, temos que $G \setminus f = G_f - x$, onde x é o vértice adicionado na subdivisão.

Sejam $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_n$ os autovalores de $Q(G \setminus f)$.

Pelo **Teorema 4.12**, temos que

$$\lambda_i \geq \beta_i \geq \lambda_{i+1} \text{ para } i = 1, \dots, n-1. \quad (5.7)$$

Pelo **Teorema 4.14**, temos que

$$\theta_i \geq \beta_i \geq \theta_{i+1} - 1 \text{ para } i = 1, \dots, n. \quad (5.8)$$

Assim temos

$$\theta_{i-1} \geq \beta_{i-1} \text{ pela desigualdade (5.8).}$$

$$\beta_{i-1} \geq \lambda_i \text{ pela desigualdade (5.7).}$$

$$\lambda_i \geq \beta_i \text{ pela desigualdade (5.7).}$$

$$\beta_i \geq \theta_{i+1} - 1 \text{ pela desigualdade (5.8).}$$

Logo $\theta_{i-1} \geq \lambda_i \geq \theta_{i+1} - 1$ para $i = 2, \dots, n$.

Do mesmo modo obtemos

$$\lambda_1 \geq \beta_1 \text{ por (5.7).}$$

$$\beta_1 \geq \theta_2 - 1 \text{ por (5.8).}$$

Logo $\lambda_1 \geq \theta_2 - 1$.

Analogamente, temos que $\lambda_{i-1} + 1 \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1}$ para $i = 2, \dots, n-1$.

Além disso, $\theta_1 \geq \lambda_2$ e $\lambda_{n-1} + 1 \geq \theta_n$. \square

No **Exemplo 5.3** mostramos que as cotas obtidas não podem ser melhoradas.

Exemplo 5.3. Se $G = C_3$ então a subdivisão de qualquer aresta fornece o grafo $H = C_4$, assim temos



Figura 5.2 Subdivisão de aresta do do grafo C_3 .

$$\text{Spec}(Q(G)) = \{4, 1^{(2)}\},$$

$$\text{Spec}(Q(H)) = \{4, 2^{(2)}, 0\}.$$

Como $\lambda_2 = 1 \not\geq 2 - \beta = \theta_3$, com $0 \leq \beta < 1$, temos que a desigualdade da direita do resultado de entrelaçamento não pode ser melhorada, ou seja, não podemos ter $\lambda_i \geq \theta_{i+1} - \beta$.

Seja $G = K_8$ e H o grafo obtido pela subdivisão de qualquer aresta de G .

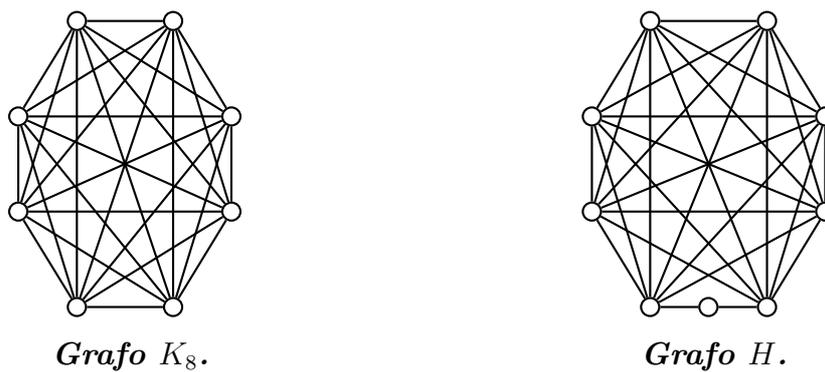


Figura 5.3 Subdivisão de uma aresta do grafo K_8 .

Temos que

$$\text{Spec}(Q(G)) = \{14, 6^{(7)}\},$$

$$\text{Spec}(Q(H)) = \{13.81, 7, 6^{(5)}, 5.65, 1.54\}.$$

Como $\theta_8 = 5.65 \not\geq 6 = \lambda_8$, temos que a desigualdade da esquerda do resultado de entrelaçamento não pode ser melhorada, ou seja, não podemos ter $\theta_i \geq \lambda_i$.

Com os resultados apresentados nessa seção completamos a quarta coluna da Tabela 5.4.

	$G \setminus f$	$G - v$	$G \mid \{u, v\}$	G_f
A	$\lambda_{i-1} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1}$	$\lambda_i \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1}$	$\lambda_{i-1} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+2}$	$\lambda_{i-2} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1}$
L	$\lambda_i \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1}$	$\lambda_i \geq \theta_i \geq \lambda_{i+r}$		$\lambda_{i-2} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1}$
\mathcal{L}	$\lambda_{i-1} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1}$	$\lambda_{i-r+1} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+r}$	$\lambda_{i-1} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1}$	$\lambda_{i-3} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+2}$
Q	$\lambda_i \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1}$	$\lambda_i \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1} - 1$		$\lambda_{i-1} + 1 \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1}$

Tabela 5.4 Teoremas de entrelaçamento para subdivisão de aresta.

Resta investigar a operação de contração de vértices para a matriz laplaciana e para a matriz laplaciana sem sinal.

5.2 Contração de Vértices para L e Q

Nesta seção, apresentamos os resultados de entrelaçamento de autovalores associados à operação de contração de dois vértices para a matriz laplaciana e para matriz laplaciana sem sinal.

Para obtenção desses resultados, utilizamos o Teorema do Entrelaçamento de Cauchy e a Desigualdade de Weyl.

Teorema 5.5. Teorema de Entrelaçamento para $L(G \mid \{u, v\})$.

Seja G um grafo e $H = G \mid \{u, v\}$, onde $u, v \in V(G)$ e $N(u) \cap (N(v) \cup \{v\}) = \emptyset$,

ou seja, u e v não são adjacentes e não possuem vizinhos em comum. Se

$$\begin{aligned}\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n \text{ são os autovalores de } L(G) \text{ e} \\ \theta_1 \geq \cdots \geq \theta_{n-1} \text{ são os autovalores de } L(H),\end{aligned}$$

então

$$\lambda_i + \frac{d + \sqrt{4d + d^2}}{2} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1} + \frac{d - \sqrt{4d + d^2}}{2}, \text{ para } i = 1, \dots, n-1,$$

onde $d = \min \{d_G(u), d_G(v)\}$.

Demonstração. Suponhamos sem perda de generalidade que u indexa a primeira e v a segunda linha e coluna da matriz $L(G) = [l(G)_{i,j}]$, e, além disso, que x indexa a primeira linha e coluna da matriz $L(H) = [l(H)_{i,j}]$, onde x é o vértice obtido na contração. Observe que as entradas das matrizes $L(G)$ e $L(H)$ estão indexadas, respectivamente, por $1 \leq i, j \leq n$ e $1 \leq i, j \leq n-1$, onde cada número é associado a um dos vértices do grafo.

Seja $L(G)_u = [l^u_{i,j}]$ a submatriz principal obtida pela deleção da primeira linha e coluna de $L(G)$. Denotamos por $\beta_1 \geq \cdots \geq \beta_{n-1}$ os autovalores de $L(G)_u$.

Pelo **Teorema do Entrelaçamento de Cauchy** temos que

$$\lambda_i \geq \beta_i \geq \lambda_{i+1}, \text{ para } i = 1, \dots, n-1. \quad (5.9)$$

Para $i, j \geq 2$, considere os seguintes itens:

(1) Se $l(H)_{i,i} = d_H(v_i)$ então $l(G)_{i+1,i+1} = d_H(v_i)$. De fato,

se $v_{i+1} \approx u$ e $v_{i+1} \approx v$ em G então $v_i \approx x$ em H ,
se $v_{i+1} \sim u$ e $v_{i+1} \approx v$ em G então $v_i \sim x$ em H ,
se $v_{i+1} \approx u$ e $v_{i+1} \sim v$ em G então $v_i \sim x$ em H .

Note que, como $N(u) \cap N(v) = \emptyset$, temos que $N(x)$ é a união disjunta de $N(u)$ e de $N(v)$, logo nenhum vértice em $N(u)$ ou em $N(v)$ tem seu grau alterado. O restante dos vértices não possuem suas adjacências e graus alterados.

- (2) Se $l(H)_{i,j} = -1$, então $v_i \sim v_j$ em H , logo $v_{i+1} \sim v_{j+1}$ em G e portanto $l(G)_{i+1,j+1} = -1$.
- (3) Se $l(H)_{i,j} = 0$, então $v_i \not\sim v_j$ em H , logo $v_{i+1} \not\sim v_{j+1}$ em G e portanto $l(G)_{i+1,j+1} = 0$.

A contração dos vértices u e v afeta apenas as duas primeiras linhas e colunas da matriz $L(G)$ produzindo a primeira linha e coluna da matriz $L(H)$. Como estamos considerando apenas os elementos a partir da terceira linha e coluna de $L(G)$ e a partir da segunda linha e coluna de $L(H)$, temos que esses não são afetados pela contração, visto que a operação não afeta suas adjacências. Logo $l(H)_{i,j} = l(G)_{i+1,j+1}$ para $i, j \geq 2$.

Por definição temos $l(G)_{i+1,j+1} = l^u_{i,j}$ para $i, j \geq 2$. Segue que

$$l^u_{i,j} = l(H)_{i,j} \text{ para } i, j \geq 2. \quad (5.10)$$

Seja $L(G)_u - L(H) = E = [e_{i,j}]$. Pela definição de L e por (5.10) temos

$$e_{i,j} = \begin{cases} -d_G(u), & \text{se } i = j = 1, \\ 1, & \text{se } v \not\sim v_j \text{ e } u \sim v_j \text{ em } G, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

ou seja, E tem a seguinte forma

$$\left(\begin{array}{c|cccccccc} -d_G(u) & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots \\ \hline 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & & & & \vdots \\ 1 & \vdots & & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & \vdots & & & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & & \ddots & & \vdots \\ 1 & \vdots & & & & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{array} \right).$$

Existe uma matriz de permutação P tal que $P^{-1}EP = C = [c_{i,j}]$, onde

$$c_{i,j} = \begin{cases} -d_G(u), & \text{se } i = j = 1, \\ 1, & \text{se } i = 1 \text{ e } j = 2, \dots, d_G(u) + 1 \text{ ou se } i = 2, \dots, d_G(u) + 1 \text{ e } j = 1, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

logo C assume a forma

$$C = \left(\begin{array}{cccc|cccc} -d_G(u) & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right).$$

Pelo **Teorema 2.5** temos que

$$\text{Spec}(E) = \text{Spec}(C).$$

Considere a matriz

$$F = \begin{pmatrix} -d_G(u) & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Note que as matrizes F e $0_{n-d_G(u)-2}$ são blocos da matriz C , segue pelo **Teorema 2.4** que

$$\text{Spec}(C) = \text{Spec}(F) \cup \text{Spec}(0_{n-d_G(u)-2}) = \text{Spec}(F) \cup \{0^{(n-d_G(u)-2)}\}.$$

Observe que os autovetores de F são dados por $e_2 - e_i$, para $i = 3, \dots, d_G(u)$, e $\left(\frac{-d_G(u) + \sqrt{d_G(u)^2 + 4d_G(u)}}{2}, 1, \dots, 1\right)$ e $\left(\frac{-d_G(u) - \sqrt{d_G(u)^2 + 4d_G(u)}}{2}, 1, \dots, 1\right)$.

Utilizando os autovetores obtemos

$$\text{Spec}(F) = \left\{ \frac{-d_G(u) + \sqrt{d_G(u)^2 + 4d_G(u)}}{2}, 0^{(d_G(u)-1)}, \frac{-d_G(u) - \sqrt{d_G(u)^2 + 4d_G(u)}}{2} \right\}.$$

Denotando por $\gamma_1 \geq \dots \geq \gamma_{n-1}$ os autovalores de E temos que

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{-d_G(u) + \sqrt{d_G(u)^2 + 4d_G(u)}}{2} \\ \gamma_{n-1} &= \frac{-d_G(u) - \sqrt{d_G(u)^2 + 4d_G(u)}}{2} \\ \gamma_i &= 0 \text{ para } i = 2, \dots, n-2. \end{aligned}$$

Observe que $L(G)_u = L(H) + E$. Aplicando a **Desigualdade de Weyl (Teorema 2.15)** com $A = L(G)_u$ e $B = L(H)$ obtemos

$$\theta_i + \gamma_1 \geq \beta_i \geq \theta_i + \gamma_{n-1}. \quad (5.11)$$

Por (5.9) e (5.11) temos

$$\theta_i + \gamma_{n-1} \leq \beta_i \leq \lambda_i \quad (5.12)$$

$$\lambda_{i+1} \leq \beta_i \leq \theta_i + \gamma_1 \quad (5.13)$$

Substituindo γ_{n-1} em (5.12)

$$\theta_i - \frac{d_G(u)}{2} - \frac{\sqrt{4d_G(u) + d_G(u)^2}}{2} \leq \lambda_i \Rightarrow \theta_i \leq \lambda_i + \frac{d_G(u) + \sqrt{4d_G(u) + d_G(u)^2}}{2}.$$

Substituindo γ_1 em (5.13)

$$\lambda_{i+1} \leq \theta_i - \frac{d_G(u)}{2} + \frac{\sqrt{4d_G(u) + d_G(u)^2}}{2} \Rightarrow \lambda_{i+1} \leq \theta_i + \frac{\sqrt{4d_G(u) + d_G(u)^2} - d_G(u)}{2}.$$

Logo

$$\lambda_i + \frac{d_G(u) + \sqrt{4d_G(u) + d_G(u)^2}}{2} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1} + \frac{d_G(u) - \sqrt{4d_G(u) + d_G(u)^2}}{2}.$$

Supondo que v indexa a primeira e u a segunda linha e coluna de $L(G)$, por um argumento análogo ao anterior obtemos

$$\lambda_i + \frac{d_G(v) + \sqrt{4d_G(v) + d_G(v)^2}}{2} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1} + \frac{d_G(v) - \sqrt{4d_G(v) + d_G(v)^2}}{2}.$$

Assim o melhor resultado de entrelaçamento ocorre quando escolhemos o mínimo entre $d_G(u)$ e $d_G(v)$. \square

Destacamos que a cota inferior obtida no resultado é razoavelmente boa, no entanto, a cota superior produz um intervalo muito grande, impossibilitando uma estimativa precisa dos autovalores de $L(G | \{u, v\})$.

Considere os resultados da Tabela 5.5.

	$H = G_f$	$H = G \{u, v\}$
L	$\lambda_{i-2} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1}$	$\lambda_i + \frac{d + \sqrt{4d + d^2}}{2} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1} + \frac{d - \sqrt{4d + d^2}}{2}$

Tabela 5.5 Comparação para a matriz laplaciana.

Observe que o resultado associado à contração de dois vértices depende do grau dos vértices contraídos, enquanto que o resultado associado à subdivisão

de uma aresta não apresenta essa peculiaridade. Logo os resultados apresentam estruturas muito distintas para serem devidamente relacionados.

O **Exemplo 5.4** mostra que o resultado associado à contração de dois vértices é válido.

Exemplo 5.4. Se $G = C_6$ então a contração de quaisquer dois vértices não adjacentes e sem vizinhos em comum fornece o grafo H apresentado abaixo.

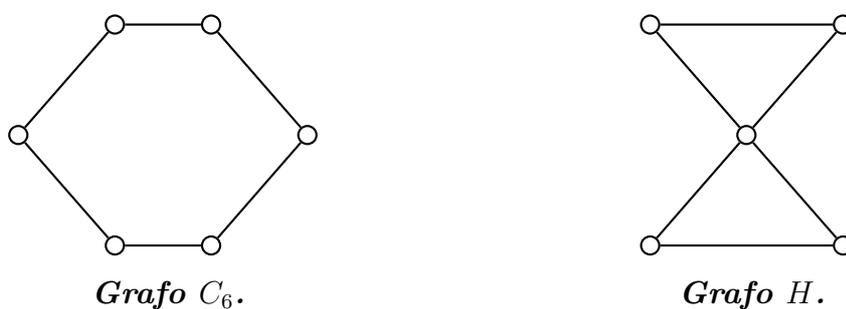


Figura 5.4 Contração de vértices do grafo C_6 .

Assim temos

$$\text{Spec}(L(G)) = \{4, 3^{(2)}, 1^{(2)}, 0\},$$

$$\text{Spec}(L(H)) = \{5, 3^{(2)}, 1, 0\}.$$

Aplicando o resultado para $i = 1$ obtemos

$$4 + \frac{2 + \sqrt{4 \cdot 2 + (2)^2}}{2} \geq 5 \geq 3 + \frac{2 - \sqrt{4 \cdot 2 + (2)^2}}{2}$$

$$5 + \sqrt{3} \geq 5 \geq 4 - \sqrt{3}.$$

Observe que no intervalo dado pela aplicação do resultado para $i = 1$ estão contidos os autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \theta_1, \theta_2$ e θ_3 , logo não conseguimos estabelecer uma relação precisa entre esses autovalores. Uma possível melhora para este resultado seria estabelecer para cada autovalor de $L(H)$ quais os autovalores de $L(G)$ que formam o menor intervalo que os contém.

O resultado de entrelaçamento para a matriz laplaciana sem sinal segue de maneira análoga ao anterior.

Teorema 5.6. Teorema de Entrelaçamento para $Q(G \mid \{u, v\})$.

Seja G um grafo e $H = G \mid \{u, v\}$, onde $u, v \in V(G)$ e $N(u) \cap (N(v) \cup \{v\}) = \emptyset$, ou seja, u e v não são adjacentes e não possuem vizinhos em comum. Se

$$\begin{aligned} \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n \text{ são os autovalores de } Q(G) \text{ e} \\ \theta_1 \geq \cdots \geq \theta_{n-1} \text{ são os autovalores de } Q(H), \end{aligned}$$

então

$$\lambda_i + \frac{d + \sqrt{4d + d^2}}{2} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1} + \frac{d - \sqrt{4d + d^2}}{2}, \text{ para } i = 1, \dots, n - 1,$$

onde $d = \min \{d_G(u), d_G(v)\}$.

Demonstração. Suponhamos sem perda de generalidade que u indexa a primeira e v a segunda linha e coluna da matriz $Q(G) = [q(G)_{i,j}]$, e além disso, que x indexa a primeira linha e coluna da matriz $Q(H) = [q(H)_{i,j}]$, onde x é o vértice obtido na contração. Observe que as entradas das matrizes $Q(G)$ e $Q(H)$ estão indexadas, respectivamente, por $1 \leq i, j \leq n$ e $1 \leq i, j \leq n - 1$, onde cada número é associado a um dos vértices do grafo.

Seja $Q(G)_u = [q^u_{i,j}]$ a submatriz principal obtida pela deleção da primeira linha e coluna de $Q(G)$. Denotamos por $\beta_1 \geq \cdots \geq \beta_{n-1}$ os autovalores de $Q(G)_u$.

Pelo **Teorema do Entrelaçamento de Cauchy** temos que

$$\lambda_i \geq \beta_i \geq \lambda_{i+1}, \text{ para } i = 1, \dots, n - 1. \quad (5.14)$$

Para $i, j \geq 2$ considere os seguintes itens:

- (1) Se $q(H)_{i,i} = d_H(v_i)$ então $q(G)_{i+1,i+1} = d_H(v_i)$. De fato,

se $v_{i+1} \approx u$ e $v_{i+1} \approx v$ em G então $v_i \approx x$ em H ,
se $v_{i+1} \sim u$ e $v_{i+1} \approx v$ em G então $v_i \sim x$ em H ,
se $v_{i+1} \approx u$ e $v_{i+1} \sim v$ em G então $v_i \sim x$ em H .

Note que, como $N(u) \cap N(v) = \emptyset$, temos que $N(x)$ é a união disjunta de $N(u)$ e de $N(v)$, logo nenhum vértice em $N(u)$ ou em $N(v)$ tem seu grau alterado. O restante dos vértices não tem suas adjacências nem seus graus alterados.

- (2) Se $q(H)_{i,j} = 1$ então $v_i \sim v_j$ em H , logo $v_{i+1} \sim v_{j+1}$ em G e portanto $q(G)_{i+1,j+1} = 1$.
- (3) Se $q(H)_{i,j} = 0$ então $v_i \approx v_j$ em H , logo $v_{i+1} \approx v_{j+1}$ em G e portanto $q(G)_{i+1,j+1} = 0$.

A contração dos vértices u e v afeta apenas as duas primeiras linhas e colunas da matriz $Q(G)$ produzindo a primeira linha e coluna da matriz $Q(H)$. Como estamos considerando apenas os elementos a partir da terceira linha e coluna de $Q(G)$ e a partir da segunda linha e coluna de $Q(H)$, temos que esses não são afetados pela contração, visto que a operação não afeta suas adjacências.

Logo $q(H)_{i,j} = q(G)_{i+1,j+1}$ para $i, j \geq 2$.

Por definição, temos $q(G)_{i+1,j+1} = q^u_{i,j}$ para $i, j \geq 2$. Segue que

$$q^u_{i,j} = q(H)_{i,j} \text{ para } i, j \geq 2. \quad (5.15)$$

Seja $Q(G)_u - Q(H) = E = [e_{i,j}]$. Pela definição de Q e por (5.15),

temos

$$e_{i,j} = \begin{cases} -d_G(u), & \text{se } i = j = 1, \\ -1, & \text{se } v \approx v_j \text{ e } u \sim v_j \text{ em } G, \\ , & \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

ou seja, E tem a seguinte forma

$$\left(\begin{array}{c|cccccccc} -d_G(u) & 0 & \dots & -1 & \dots & 0 & \dots & -1 & \dots \\ \hline 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & & & & \vdots \\ -1 & \vdots & & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & \vdots & & & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & & \ddots & & \vdots \\ -1 & \vdots & & & & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{array} \right).$$

Existe uma matriz de permutação P tal que $P^{-1}EP = C = [c_{i,j}]$, onde

$$c_{i,j} = \begin{cases} -d_G(u), & \text{se } i = j = 1, \\ -1, & \text{se } i = 1 \text{ e } j = 2, \dots, d_G(u) + 1 \text{ ou se } i = 2, \dots, d_G(u) + 1 \text{ e } j = 1, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

logo C assume a forma

$$C = \left(\begin{array}{cccc|cccc} -d_G(u) & -1 & \dots & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right).$$

Pelo **Teorema 2.5** temos que

$$\text{Spec}(E) = \text{Spec}(C).$$

Considere a matriz

$$F = \begin{pmatrix} -d_G(u) & -1 & \dots & -1 \\ -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Note que as matrizes F e $0_{n-d_G(u)-2}$ são blocos da matriz C , segue pelo **Teorema 2.4** que

$$\text{Spec}(C) = \text{Spec}(F) \cup \text{Spec}(0_{n-d_G(u)-2}) = \text{Spec}(F) \cup \{0^{(n-d_G(u)-2)}\}.$$

Observe que os autovetores de F são dados por $e_2 - e_i$, para $i = 3, \dots, d_G(u)$, e $\left(\frac{-d_G(u) + \sqrt{d_G(u)^2 + 4d_G(u)}}{2}, 1, \dots, 1\right)$ e $\left(\frac{-d_G(u) - \sqrt{d_G(u)^2 + 4d_G(u)}}{2}, 1, \dots, 1\right)$.

Denotando por $\gamma_1 \geq \dots \geq \gamma_{n-1}$ os autovalores de E temos que

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{-d_G(u) + \sqrt{d_G(u)^2 + 4d_G(u)}}{2} \\ \gamma_{n-1} &= \frac{-d_G(u) - \sqrt{d_G(u)^2 + 4d_G(u)}}{2} \\ \gamma_i &= 0 \text{ para } i = 2, \dots, n-2. \end{aligned}$$

Observe que $Q(G)_u = Q(H) + E$. Aplicando a **Desigualdade de Weyl** (**Teorema 2.15**) com $A = Q(G)_u$ e $B = Q(H)$ obtemos

$$\theta_i + \gamma_1 \geq \beta_i \geq \theta_i + \gamma_{n-1}. \quad (5.16)$$

Por (5.14) e (5.16) temos

$$\theta_i + \gamma_{n-1} \leq \beta_i \leq \lambda_i \quad (5.17)$$

$$\lambda_{i+1} \leq \beta_i \leq \theta_i + \gamma_1 \quad (5.18)$$

Substituindo γ_{n-1} em (5.17)

$$\theta_i - \frac{d_G(u)}{2} - \frac{\sqrt{4d_G(u) + d_G(u)^2}}{2} \leq \lambda_i \Rightarrow \theta_i \leq \lambda_i + \frac{d_G(u) + \sqrt{4d_G(u) + d_G(u)^2}}{2}.$$

Substituindo γ_1 em (5.18)

$$\lambda_{i+1} \leq \theta_i - \frac{d_G(u)}{2} + \frac{\sqrt{4d_G(u) + d_G(u)^2}}{2} \Rightarrow \lambda_{i+1} \leq \theta_i + \frac{\sqrt{4d_G(u) + d_G(u)^2} - d_G(u)}{2}.$$

Logo

$$\lambda_i + \frac{d_G(u) + \sqrt{4d_G(u) + d_G(u)^2}}{2} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1} + \frac{d_G(u) - \sqrt{4d_G(u) + d_G(u)^2}}{2}.$$

Supondo que v indexa a primeira e u a segunda linha e coluna de $Q(G)$, por um argumento análogo ao anterior obtemos

$$\lambda_i + \frac{d_G(v) + \sqrt{4d_G(v) + d_G(v)^2}}{2} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1} + \frac{d_G(v) - \sqrt{4d_G(v) + d_G(v)^2}}{2}.$$

Assim o melhor resultado de entrelaçamento ocorre quando escolhemos o mínimo entre $d_G(u)$ e $d_G(v)$. \square

Considere os resultados da Tabela 5.6.

	$H = G_f$	$H = G \setminus \{u, v\}$
Q	$\lambda_{i-1} + 1 \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1}$	$\lambda_i + \frac{d + \sqrt{4d + d^2}}{2} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1} + \frac{d - \sqrt{4d + d^2}}{2}$

Tabela 5.6 Comparação para a matriz laplaciana sem sinal.

Observe que o resultado associado à contração de dois vértices depende do grau dos vértices contraídos, enquanto que o resultado associado à subdivisão de uma aresta não apresenta essa peculiaridade. Logo os resultados apresentam estruturas muito distintas para serem devidamente relacionados.

O Exemplo 5.5 mostra que o resultado associado à contração de dois vértices é válido.

Exemplo 5.5. Se $G = P_5$ então a contração dos vértices de grau 1 fornece o grafo $H = C_4$.

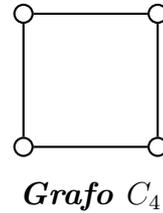
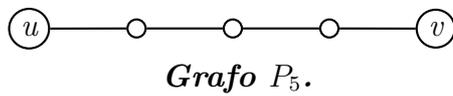


Figura 5.5 Contração dos vértices u e v do grafo P_5 .

Assim temos

$$\text{Spec}(Q(G)) = \{3.618, 2.618, 1.382, 0.382, 0\},$$

$$\text{Spec}(Q(H)) = \{4, 2^{(2)}, 0\}.$$

Aplicando o resultado para $i = 1$ obtemos

$$3.618 + \frac{1 + \sqrt{4.1 + (1)^2}}{2} \geq 4 \geq 2.618 + 1 - \sqrt{4.1 + (1)^2}.$$

$$3.618 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \geq 4 \geq 2.618 + \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

$$5.236 \geq 4 \geq 1.999$$

Observe que no intervalo dado pela aplicação do resultado para $i = 1$ estão contidos os autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \theta_1, \theta_2$ e θ_3 logo não conseguimos estabelecer uma relação precisa entre esses autovalores. Uma possível melhora para este resultado seria estabelecer para cada autovalor de $Q(H)$ quais os autovalores de $Q(G)$ que formam o menor intervalo que os contém.

Com esses resultados completamos a Tabela 5.7.

	$G \setminus f$	$G - v$	$G \{u, v\}$	G_f
A	$\lambda_{i-1} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1}$	$\lambda_i \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1}$	$\lambda_{i-1} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+2}$	$\theta_{i-1} \geq \lambda_i \geq \theta_{i+1}$
L	$\lambda_i \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1}$	$\lambda_i \geq \theta_i \geq \lambda_{i+r}$	$\lambda_i + \frac{d + \sqrt{4d + d^2}}{2} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1} + \frac{d - \sqrt{4d + d^2}}{2}$	$\theta_{i-1} \geq \lambda_i \geq \theta_{i+2}$
\mathcal{L}	$\lambda_{i-1} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1}$	$\lambda_{i-r+1} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+r}$	$\lambda_{i-1} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1}$	$\theta_{i-2} \geq \lambda_i \geq \theta_{i+3}$
Q	$\lambda_i \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1}$	$\lambda_i \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1} - 1$	$\lambda_i + \frac{d + \sqrt{4d + d^2}}{2} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1} + \frac{d - \sqrt{4d + d^2}}{2}$	$\theta_{i-1} \geq \lambda_i \geq \theta_{i+1} - 1$

Tabela 5.7 Teoremas de entrelaçamento dos capítulos 4 e 5.

Sabemos que um grafo está intimamente ligado ao seu espectro. Os teoremas de entrelaçamento mostram que as relações estabelecidas por uma operação entre dois grafos são transmitidas para seus espectros, de modo que estes também se relacionam. O estabelecimento dessas relações pode ser útil na investigação de propriedades estruturais de um grafo e de propriedades de regularidade de autovalores.

6 CONCLUSÃO

Nessa dissertação, estudamos técnicas para definir autovalores como soluções de problemas de otimização, como realizar diferentes adaptações do Teorema de Courant-Fischer e como relacionar o espectro de diferentes matrizes por meio de alguns teoremas da teoria matricial. Também vimos as principais representações matriciais de um grafo e como alterar sua estrutura por meio de diferentes operações.

Utilizando essas ferramentas, estudamos os resultados de entrelaçamento de autovalores associados com as operações de deleção de vértice e de deleção de aresta para as principais representações matriciais. Além disso, apresentamos os resultados de entrelaçamento de autovalores associados com a operação de contração de dois vértices para as matrizes de adjacência e laplaciana normalizada.

Usando esses resultados construímos os entrelaçamentos associados à operação de subdivisão de aresta para as principais representações matriciais. Também apresentamos os resultados de entrelaçamento de autovalores associados à operação de contração de vértices para as matrizes laplaciana e laplaciana sem sinal. Tais teoremas constituem uma contribuição original desse trabalho.

Os teoremas de entrelaçamento mostram que, se dois grafos estão relacionados por uma operação, então essa relação é transmitida para seus espectros. Sendo assim, dado um grafo cujas propriedades são bem conhecidas, podemos aplicar diferentes operações sobre ele para obtermos um grafo que desejamos investigar, e saber como as relações estabelecidas pelas operações são transmitidas para os espectros fornece uma valiosa ferramenta para área.

Resultados de entrelaçamento de autovalores são frequentemente aplicados para obtenção de resultados na teoria espectral de grafos. Brouwer e Mesner

em [7] usam entrelaçamento para provar que a conectividade de vértices de um grafo fortemente regular é igual ao seu grau. Brouwer e Haemers em [8] utilizam o entrelaçamento de autovalores como uma ferramenta para provar a unicidade do grafo Gewirtz. Brouwer [6] utiliza para encontrar cotas para a rigidez de um grafo, Van den Heuvel [32] aplica o entrelaçamento em sua generalização da condição de hamiltonicidade de Mohar, Haemers [24] usa para estabelecer cotas para o tamanho do maior coclique de um grafo e para seu número cromático.

Resultados de entrelaçamento também podem ser aplicados a outros campos de conhecimento como, por exemplo, a estatística. Em Grone, Hoffman e Salamon [23] o entrelaçamento de autovalores é utilizado para estabelecer um entrelaçamento entre cadeias reversíveis de Markov, que são ferramentas que auxiliam na modelagem de problemas na física, química e biologia.

6.1 Trabalhos Futuros

Muitos resultados importantes de entrelaçamento já foram obtidos e são apresentados em [10, 25, 32, 34], no entanto, existem questões relevantes que ainda não foram devidamente investigadas e respondidas.

Com relação ao que foi apresentado neste trabalho, destacamos que melhorar os resultados de entrelaçamento associados à operação de contração de vértices para a matriz laplaciana e para a matriz laplaciana sem sinal são exemplos de problemas que podem ser abordados. Além disso, apresentamos resultados de entrelaçamento de autovalores associados à operação de subdivisão de uma aresta para as principais representações matriciais de um grafo. No entanto, não conseguimos obter todos os exemplos necessários para justificar que as cotas obtidas são as melhores possíveis. Investigar como garantir essas cotas ou como obter cotas melhores é um problema que exige o estudo dos resultados de entrelaçamento já desenvolvidos e da teoria matricial.

Como generalização para o que foi apresentado no trabalho, podemos considerar que existem muitas operações para as quais podemos investigar como desenvolver resultados de entrelaçamento associados às diferentes representações matriciais de um grafo. Destacamos que quanto mais uma operação alterar as propriedades estruturais de um grafo, mais distintas serão as matrizes associadas aos grafos, e mais difícil será estabelecer uma relação entre seus espectros. Como exemplo, observe que operações que aumentam muito o número de vértices do grafo também aumentam o número de autovalores e isso dificulta a obtenção de cotas mais justas na relação de entrelaçamento.

Alguns artigos apresentam problemas em aberto cujo estudo envolve a aplicação de teoremas de entrelaçamento. Lotker [30] estuda cotas para o número médio de folhas que uma árvore geradora aleatória possui utilizando teoremas de entrelaçamento associados à matriz laplaciana e ao final do artigo cita problemas relacionados que podem ser investigados.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ABREU, N., DEL-VECCHIO, R., VINAGRE, C., AND STEVANOVIC, D. Introdução à teoria espectral de grafos com aplicações. *Notas em Matemática Aplicada* 27 (2007).
- [2] APPEL, K. I., AND HAKEN, W. *Every planar map is four colorable*, vol. 98. American mathematical society Providence, 1989.
- [3] BIGGS, N. *Algebraic graph theory*. Cambridge university press, 1993.
- [4] BONDY, J. A., AND MURTY, U. Graph theory, volume 244 of. *Graduate texts in mathematics* (2008).
- [5] BROOKS, R., SMITH, A., STONE, A., AND TUTTE, W. T. The dissection of rectangles into squares. *Duke Math Journal* 7 (1940), 312–340.
- [6] BROUWER, A. Toughness and spectrum of a graph. *Linear algebra and its applications* 226 (1995), 267–271.
- [7] BROUWER, A., AND MESNER, D. The connectivity of strongly regular graphs. *European Journal of Combinatorics* 6, 3 (1985), 215–216.
- [8] BROUWER, A. E., AND HAEMERS, W. H. The gewirtz graph: An exercise in the theory of graph spectra. *European journal of combinatorics* 14, 5 (1993), 397–407.
- [9] BROUWER, A. E., AND HAEMERS, W. H. *Spectra of graphs*. Springer Science & Business Media, 2011.
- [10] CHEN, G., DAVIS, G., HALL, F., LI, Z., PATEL, K., AND STEWART, M. An interlacing result on normalized Laplacians. *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 18, 2 (2004), 353–361.

- [11] CVETKOVIĆ, D., ROWLINSON, P., AND SIMIC, S. K. Eigenvalue bounds for the signless Laplacian. *Publ. Inst. Math.(Beograd)* 81, 95 (2007), 11–27.
- [12] CVETKOVIĆ, D., ROWLINSON, P., AND SIMIĆ, S. K. Signless Laplacians of finite graphs. *Linear Algebra and its applications* 423, 1 (2007), 155–171.
- [13] CVETKOVIĆ, D., AND SIMIĆ, S. K. Towards a spectral theory of graphs based on the signless Laplacian, i. *Publ. Inst. Math.(Beograd)* 85, 99 (2009), 19–33.
- [14] CVETKOVIĆ, D., AND SIMIĆ, S. K. Towards a spectral theory of graphs based on the signless Laplacian, ii. *Linear Algebra and its Applications* 432, 9 (2010), 2257–2272.
- [15] CVETKOVIĆ, D., AND SIMIĆ, S. K. Towards a spectral theory of graphs based on the signless Laplacian, iii. *Applicable Analysis and Discrete Mathematics* 4, 1 (2010), 156–166.
- [16] CVETKOVIĆ, D. M. *Grafovi i Njihovi Spektri... Graphs and Their Spectra*. 1971.
- [17] CVETKOVIĆ, D. M., DOOB, M., AND SACHS, H. *Spectra of graphs: theory and application*, vol. 87. Academic Pr, 1980.
- [18] CVETKOVIĆ, D. M., ROWLINSON, P., AND SIMIC, S. *Eigenspaces of graphs*. No. 66. Cambridge University Press, 1997.
- [19] DAVIS, M. *Engines of Logic: Mathematicians and the Origin of the Computer*. WW Norton & Co., Inc., 2001.
- [20] FISK, S. A very short proof of cauchy’s interlace theorem for eigenvalues of hermitian matrices. *arXiv preprint math/0502408* (2005).
- [21] FRANKLIN, J. N. *Matrix theory*. Courier Corporation, 2012.

- [22] GODSIL, C. *Algebraic combinatorics*, vol. 6. CRC Press, 1993.
- [23] GRONE, R., HOFFMANN, K. H., AND SALAMON, P. An interlacing theorem for reversible markov chains. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 41, 21 (2008), 212002.
- [24] HAEMERS, W. H. Interlacing eigenvalues and graphs. *Linear Algebra and its applications* 226 (1995), 593–616.
- [25] HALL, F., PATEL, K., AND STEWART, M. Interlacing results on matrices associated with graphs. *J. Combin. Math. Combin. Comput* 68 (2009), 113–127.
- [26] HORN, R. A., AND JOHNSON, C. R. *Matrix analysis*. Cambridge university press, 2012.
- [27] HÜCKEL, E. Quantentheoretische beiträge zum benzolproblem. *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei* 70, 3 (1931), 204–286.
- [28] HWANG, S.-G. Cauchy’s interlace theorem for eigenvalues of hermitian matrices. *American Mathematical Monthly* (2004), 157–159.
- [29] LEONTIEF, W., ET AL. *Studies in the Structure of the American Economy*. Oxford University Press New York, 1953.
- [30] LOTKER, Z. Note on deleting a vertex and weak interlacing of the Laplacian spectrum. *Electron. J. Linear Algebra* 16 (2007), 68–72.
- [31] PARLETT, B. N. *The symmetric eigenvalue problem*, vol. 7. SIAM, 1980.
- [32] VAN DEN HEUVEL, J. Hamilton cycles and eigenvalues of graphs. *Linear algebra and its applications* 226 (1995), 723–730.
- [33] VON COLLATZ, L., AND SINOLOWITZ, U. Spektren endlicher grafen. In *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg* (1957), vol. 21, Springer, pp. 63–77.

- [34] WANG, J., AND BELARDO, F. A note on the signless Laplacian eigenvalues of graphs. *Linear Algebra and its Applications* 435, 10 (2011), 2585–2590.
- [35] WEI, T. *The algebraic foundations of ranking theory*. PhD thesis, University of Cambridge, 1952.

ÍNDICE

A

Aresta, 35

contração, 44

deleção, 41

incidente, 36

múltipla, 37

pontos finais, 36

subdivisão, 43

Autofunção harmônica, 75, 77

Autovalor, 10

multiplicidade, 11

Autovetor, 11

B

Base canônica, 14

C

Cadeia, 39

fechada, 39

Caminho, 39

comprimento, 39

Ciclo, 39

comprimento, 39

Componente conexa, 39

Contração de aresta, 44

Contração de vértices, 43

D

Deleção

de um vértice, 42

de uma aresta, 41

Delta de Kronecker, 18

Desigualdade de Weyl, 32

E

Entrelaçamento, 62

de autovalores, 63

desigualdade, 62

justo, 62

melhor, 62, 63

Espectro, 11

G

Grafo, 35

k-partido, 40

k-regular, 40

bipartido, 40

bipartido completo, 40

completo, 40

conexo, 39

desconexo, 39

direcionado, 38

ordem, 36

orientação, 37

simples, 37

tamanho, 36

Grau do vértice, 36

L

Laço, 37

M

Matriz

- conjugada, 12
- de adjacência, 48
- de incidência, 54
- de incidência orientada, 57
- diagonal dos graus, 53
- hermitiana, 12
- laplaciana, 49
- laplaciana normalizada, 50
- laplaciana sem sinal, 52
- positiva semidefinida, 13
- similar, 16
- transposta, 12
- triangular por blocos, 15

O

Operação entre grafos, 41

Ordem do grafo, 36

Orientação do grafo, 37

P

Polinômio característico, 11

Pontos finais da aresta, 36

Princípio de Rayleigh, 18, 20

generalizado, 21, 23

Produto interno, 14, 18

Q

Quociente de Rayleigh, 20

R

Representação gráfica, 35

Representação matricial

auxiliares, 53

principais, 47

S

Subdivisão de aresta, 43

Subgrafo, 38

induzido, 38

Submatriz principal, 27

T

Tamanho do grafo, 36

Teorema

de Courant-Fischer, 24, 26

do entrelaçamento de Cauchy, 27

do entrelaçamento de Cauchy gene-
ralizado, 30

Teoria

de grafos, 35

matricial, 10

U

União de grafos, 45

V

Vértice, 35

adjacentes, 36

contração, 43
deleção, 42
grau, 36
isolado, 37
vizinhança, 36
vizinhos, 36