

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE FÍSICA

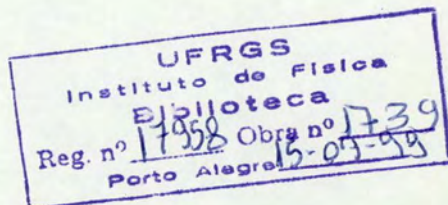
A DISTRIBUIÇÃO DE VELOCIDADE E FENÔMENOS DE  
TRANSPORTE ASSOCIADOS A PARTÍCULAS ALFA EM  
PLASMAS TERMONUCLEARES

Ruth de Souza Schneider

Tese realizada sob a orientação do  
Dr. John D. Gaffey, Jr. e apresenta  
da ao Instituto de Física da UFRGS  
em preenchimento final dos requisi  
tos para a obtenção do grau de Dou  
tor em Ciências

\* Trabalho parcialmente financiado pelas seguintes instituições:  
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico  
(CNPq), Financiadora de Estudos e Projetos (FINEP).

Porto Alegre  
1979



A meus pais

A meu esposo e aos meus filhos



## AGRADECIMENTOS

A meu orientador, Dr. John D. Gaffey Jr., meus sinceros agradecimentos pelos ensinamentos recebidos, pelo incentivo constante durante a realização desta Tese e pelo inestimável apoio e dedicação.

Ao Dr. Darcy Dillenburg, meus agradecimentos pelas sugestões feitas na leitura desta Tese e pelo apoio dedicado ao grupo de Física de Plasma deste Instituto.

A Dra. Eda Homrich da Jornada, minha especial gratidão pelo apoio com que sempre pude contar.

A Dra. Maria Ribeiro Teodoro e a Eliane Angela Veit, meus sinceros agradecimentos pela colaboração e amizade.

Agradeço,

a Maria Cecilia do Amaral, pela dedicação e cuidadoso trabalho de datilografia;

a Zuleika Berto, pelo auxílio na classificação das referências bibliográficas;

a todos os colegas e amigos que, de um modo ou de outro contribuíram para que este trabalho pudesse ser realizado.

## RESUMO

A distribuição de velocidade das partículas alfa produzidas a uma razão constante em reações termonucleares, em um plasma Maxwelliano, é obtida analiticamente a partir da equação de Fokker-Planck. A distribuição assintótica no tempo pode ser dividida em três regiões: uma região termalizada com uma distribuição quase Maxwelliana, uma região de freamento com distribuição segundo uma lei de potência e uma região de alta energia com uma distribuição exponencial rapidamente decrescente. Um tratamento mais detalhado, que inclui a evolução temporal, um termo de perda e um campo elétrico paralelo fraco é realizado para a região de freamento, que contém a maioria das partículas alfa, e a evolução temporal é dada também para a cauda de alta energia. A evolução temporal das densidades de partículas, de momentum, de energia cinética e de fluxo de calor é calculada. As contribuições dos elétrons e íons de fundo são dadas separadamente para mostrar os efeitos de cada espécie. Em particular, obtém-se que os elétrons são aquecidos mais rapidamente pelas partículas alfa do que os íons de fundo.



## ABSTRACT

The velocity distribution of alpha particles produced at a constant rate by thermonuclear reactions in a Maxwellian plasma is obtained analytically from the Fokker-Planck equation. The time-asymptotic distribution can be divided into three regions: a thermalized region with a nearly Maxwellian distribution, a slowing-down region with a power law distribution, and a high-energy region with a rapidly decreasing exponential distribution. A more detailed treatment, including the time evolution, a loss term and a weak parallel electric field is given for the slowing-down region, which contains the majority of the alpha particles. The time evolution is also found for the high-energy tail. The time evolution of the density of particles, momentum density, kinetic energy density and heat flux density is calculated. The electron and background ion contributions are given separately to show the effects of each species. In particular it is found that the electrons are more rapidly heated by the alpha particles than are the background ions.

## I N D I C E

I - INTRODUÇÃO	1
II - A EQUAÇÃO DE FOKKER-PLANCK PARA PARTÍCULAS ALFA	
II.1 - Introdução	12
II.2 - Forma Geral do Operador Colisão para o Problema das Partículas Alfa	14
II.3 - Algumas Formas Especiais do Termo de Colisão para o Problema das Partículas Alfa e os Parâmetros Característicos	19
III - DISTRIBUIÇÃO TERMALIZADA DAS PARTÍCULAS ALFA	
III.1 - Introdução	26
III.2 - Forma Geral da Distribuição Termalizada	29
III.3 - Distribuição nas Regiões de Termalização, Freamento e Alta Energia	34
III.4 - Características Gerais da Distribuição	39
IV - DISTRIBUIÇÃO DE FREAMENTO DAS PARTÍCULAS ALFA	
IV.1 - Introdução	48
IV.2 - Distribuição Estacionária	49
IV.3 - Evolução Temporal da Distribuição	50
IV.4 - Distribuição Incluindo um Termo de Perda	55
IV.5 - Efeito do Campo Elétrico	61
V - DISTRIBUIÇÃO DE ALTA ENERGIA DAS PARTÍCULAS ALFA	
V.1 - Introdução	70
V.2 - Distribuição Estacionária	71
V.3 - Evolução Temporal da Distribuição	77



VI - TRANSPORTE DEVIDO ÀS COLISÕES DE PARTÍCULAS	
VI.1 - Introdução	84
VI.2 - Evolução Temporal da Densidade de Partículas	86
VI.3 - Evolução Temporal da Densidade de Momentum	89
VI.4 - Evolução Temporal da Densidade de Energia Cinética	93
VI.5 - Evolução Temporal da Densidade de Fluxo de Calor	98
VI.6 - Colisões entre Elétrons e Íons	101
VI.7 - Balanço de Potência	107
VII - SUMÁRIO E DISCUSSÃO	115
APÊNDICES	
A - OBTENÇÃO DA RAZÃO DE PRODUÇÃO DAS PARTÍCULAS ALFA	124
B - DISTRIBUIÇÃO OBTIDA DE FONTE NÃO DELTIFORME	130
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	140

## I - INTRODUÇÃO

As reações de fusão termonuclear são a fonte de energia que produz tanto a energia do sol e das estrelas como a potência explosiva da bomba de hidrogênio. No primeiro caso estas reações são lentas ao passo que no segundo caso elas são extremamente rápidas. Atualmente um grande esforço é desenvolvido no sentido de realizar reações termonucleares sob condições tais que a energia seja liberada de uma forma controlável. Em princípio é possível obter-se reações termonucleares controladas em que haja um ganho líquido de energia.

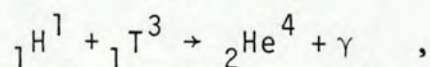
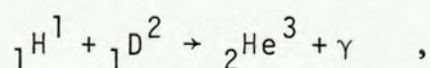
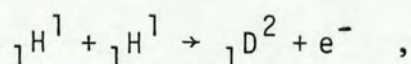
As reações de fusão e de fissão nucleares são consequência do fato de que a energia de ligação média por núcleon nos núcleos leves e nos núcleos pesados, respectivamente, é menor do que esta energia nos núcleos com número de massa intermediário. Então, em princípio, é possível obter energia nuclear da fissão de núcleos pesados e também da fusão de núcleos leves, através de reações nucleares que tenham como produtos núcleos com número de massa intermediário.

Existem muitas reações de fusão de núcleos com baixo número atômico que são acompanhadas de liberação de energia. Entretanto, como os núcleos atômicos são positivamente carregados, para que ocorra uma reação de fusão é necessário que tais núcleos tenham energia suficiente para que possam vencer a barreira de repulsão coulombiana que se estabelece entre eles e cuja altura cresce com o aumento do número atômico do núcleo. Tal fato restringe, do ponto de vista prático, as reações de fusão de interes



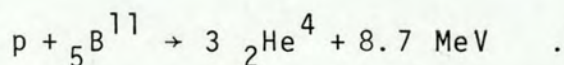
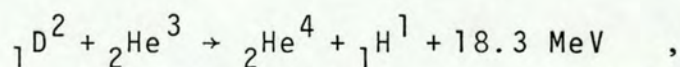
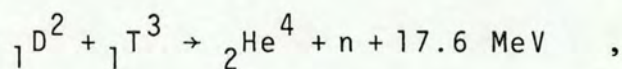
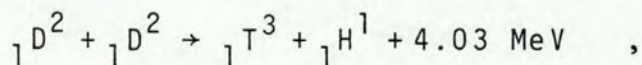
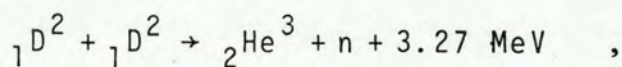
se a reações que envolvam os núcleos de número atômico extremamente baixo.

As reações que envolvem o isótopo mais leve do hidrogênio,  ${}_1\text{H}^1$ , com ele mesmo ou com os outros isótopos, deutério,  ${}_1\text{D}^2$ , ou o trítio,  ${}_1\text{T}^3$ ,



tem secções de choque muito pequenas, de tal forma que não permitiriam um ganho apreciável de energia para as temperaturas que se espera conseguir.

As reações de fusão mais promissoras do ponto de vista de liberação de energia são:



Destas reações a que parece, atualmente, mais provável



de conduzir à obtenção da fusão controlada é a que tem como interagentes o deutério e o trítio, por apresentar uma potência de fusão, ou seja, energia liberada por evento de fusão, maior, e também por exigir condições mais simples para sua realização [St75], como veremos mais adiante. Entretanto, a maior parte desta energia é transportada pelos neutrons (14.1 MeV) e deverá aparecer em forma de calor no reator, devendo então ser convertida em energia elétrica. As partículas carregadas, por sua vez, podem ter sua energia cinética diretamente convertida em energia elétrica [Po69] e, deste ponto de vista, a reação que envolve o deutério e o trítio oferece menos possibilidades de conversão direta do que as reações deutério-deutério.

Como já foi dito, para que as reações de fusão nuclear ocorram é necessário que os núcleos colidam com energia suficiente para que a barreira de repulsão coulombiana entre eles seja vencida. Tal energia pode ser cedida aos núcleos interagentes ou por um acelerador de partículas carregadas ou eles podem adquiri-la pelo fato de serem parte de um sistema com alta temperatura. No primeiro caso todas as partículas adquirem aproximadamente a mesma energia e movem-se na mesma direção, ao passo que no segundo caso as partículas apresentam um movimento aleatório e uma distribuição ampla de energias. Reações de fusão nuclear em que as partículas interagentes adquirem a energia necessária para que a reação de fusão ocorra, através da elevação da temperatura do sistema, são chamadas de reações de fusão termonucleares. As reações de fusão termonucleares ocorrem, devido as altas temperaturas envolvidas, em sistemas no estado de plasma. Para obter-se uma quantidade apreciável de energia a partir da fusão nu



clear é necessário que sejam preenchidas certas condições de densidade, confinamento e temperatura do plasma.

No caso de um evento de fusão que envolva a reação de deutério com trítio, a energia mínima para que a reação possa ocorrer é da ordem de 10 keV por evento, ao passo que a energia liberada em cada evento de fusão é 17.6 MeV. Como aproximadamente vinte por cento desta energia liberada é carregada pelas partículas alfa criadas na reação, estas partículas, se permanecerem no plasma, ao serem freadas, fornecerão sua energia aos componentes do plasma, aumentando assim a potência de entrada do sistema.

Para que se obtenham reações de fusão termonucleares controladas é necessário aquecer uma pequena quantidade do combustível de fusão acima da temperatura de ignição e então confinar, mantendo o aquecimento, este combustível, por um tempo suficientemente longo, de tal forma que a energia liberada por fusão seja maior do que a energia necessária para aquece-lo até atingir a ignição. O conceito de ignição para um sistema de fusão refere-se ao balanço instantâneo entre a energia cedida ao plasma pelas reações de fusão e a perda de energia pelo plasma através de todos os mecanismos possíveis de perda.

De forma objetiva o conceito de ignição está relacionado ao de fator de multiplicação de energia, chamado de fator Q e definido como sendo a razão entre a potência obtida a partir das reações de fusão e a potência cedida ao plasma para aquecê-lo. Quando Q for infinito, diz-se que há ignição do combustível do reator, isto significando que as reações de fusão são capazes de manter sozinhas o aquecimento do plasma do reator.

Lawson [La55] mostrou que o produto  $n\tau$ , onde  $n$  é a den



sidade do plasma e  $\tau$  é o tempo de confinamento da energia, deve ser da ordem de  $10^{14} \text{ cm}^{-3} \cdot \text{s}$ , para reatores de fusão com combustível de deutério e trítio, para que se tenha um balanço entre a potência liberada na fusão e a potência fornecida ao plasma para atingir as temperaturas necessárias à fusão.

A reação de deutério e trítio apresenta a menor temperatura de ignição e as mais brandas condições de confinamento dentre as reações possíveis e, deste ponto de vista, ela é mais promissora, embora os inconvenientes apontados anteriormente.

Então, para que se obtenha fusão controlada é necessário que sejam resolvidos os problemas de aquecimento e de confinamento do plasma termonuclear.

O problema do confinamento tem sido tratado experimentalmente de duas formas: confinamento magnético ou confinamento inercial. No caso de confinamento magnético o objetivo é obter uma pressão magnética que contrabalance a pressão cinética do plasma. Reatores que usem confinamento magnético operarão com densidades da ordem de  $10^{14}$  a  $10^{16} \text{ cm}^{-3}$  e com tempos de confinamento da ordem de 10 a 0.1 s. No caso de confinamento inercial o objetivo é aquecer um grânulo de combustível a temperatura de fusão, em uma escala de tempo tal que uma porção significativa queime antes que o grânulo se rompa termicamente, terminando a reação. Reatores que usem tal tipo de confinamento terão densidades da ordem de  $10^{26} \text{ cm}^{-3}$  e tempos de confinamento da ordem de  $10^{-9}$  s.

O aquecimento do plasma por sua vez, além de ser realizado por aquecimento ôhmico, tem sido implementado, por exemplo, em tokamaks, por injeção de feixes neutros no plasma, compres



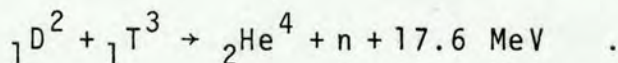
são magnética do plasma e microondas na frequência de cíclotron dos elétrons, dos íons e do híbrido inferior.

Dentre os sistemas experimentais atualmente existentes, devido aos recentes resultados obtidos [EGA+79], [CSUC79], os tokamaks são os mais promissores modelos para os futuros reatores de fusão. Um tokamak é um sistema toroidal com simetria axial no qual um plasma convenientemente denso e quente é confinado em um campo magnético, campo poloidal com intensidade de 1 a 4 kG, criado por uma corrente que flui por ele. A coluna de plasma permanece estável frente a instabilidades magneto-hidrodinâmicas desde que exista no interior do plasma um intenso campo magnético toroidal, de algumas dezenas de kG. Este campo toroidal é produzido por espiras externas que circundam a coluna de plasma, ao passo que a corrente no plasma é produzida por um acoplamento indutivo com espiras que tem o mesmo eixo que o torus. As linhas de campo magnético formadas pela superposição dos campos poloidal e toroidal são hélices que circundam o eixo toroidal.

Se consideramos um plasma de deutério e trítio magneticamente confinado, a energia cedida ao plasma pelas reações de fusão só pode provir das partículas alfa, com 3.52 MeV de energia, criadas nestas reações, já que os neutrons, com 14.1 MeV de energia, que também são produzidos nestas reações, não serão confinados nos futuros reatores de fusão. As experiências existentes atualmente não são capazes ainda de manter as partículas alfa confinadas. Portanto, é de interesse analisar-se o comportamento destas partículas alfa e predizer qual o comportamento físico de sistemas experimentais que contenham partículas alfa.



Consideraremos, neste trabalho, a reação de fusão:



As partículas alfa criadas nesta reação, se mantidas no plasma, o que é possível para uma corrente toroidal da ordem de 4 milhões de amperes [Mc74], colidirão com os íons e os elétrons do plasma e cederão sua energia a estes na medida em que forem freadas. Este fornecimento de energia das partículas alfa às partículas do plasma provocará um aumento da temperatura deste, essencial para que as reações de fusão sejam energeticamente promissoras. Para que ocorra ignição, toda a energia para o aquecimento do plasma do reator deverá provir das partículas alfa. Além disto, a presença de partículas alfa no plasma pode conduzir ao surgimento de instabilidades que tanto podem contribuir favorável como desfavorável ao aquecimento esperado. Assim é importante que se conheça o comportamento destas partículas alfa no plasma, já que ele pode ser essencial tanto para o confinamento como para o aquecimento em futuros reatores de fusão.

A equação de Fokker-Planck é a equação cinética que descreve um plasma com colisões binárias. Em um plasma termonuclear em que a reação seja a de deutério-trítio, teremos como componentes do plasma elétrons, partículas alfa, íons de deutério e de trítio e íons de impurezas. Para estudarmos o comportamento das partículas alfa criadas em tais plasmas termonucleares, inicialmente deveríamos resolver um sistema fortemente acoplado de, no mínimo, quatro equações de Fokker-Planck, uma para partículas al



fa, uma para elétrons e pelo menos duas para íons. Entretanto, dada a sua complexidade, tal sistema não permite solução analítica e diversas formas aproximadas, tanto numéricas como analíticas, de tratamento do problema tem sido tentadas.

Os trabalhos existentes, utilizando a equação de Fokker-Planck, que analisam o comportamento das partículas alfa a serem criadas em uma reação de fusão, do ponto de vista da sua distribuição e do aquecimento do plasma, em geral são trabalhos numéricos e, quando analíticos, restringem-se a situações muito particulares.

Düchs e Pfirsch [DP74] obtêm soluções numéricas para a distribuição de partículas alfa em um plasma finito espacialmente homogêneo, em função da energia das partículas alfa e, também, as distribuições, em função da energia, para valores fixos da posição espacial. Além disto estudam a evolução dos perfis de densidade radial e de temperatura das partículas alfa.

Kolesnichenko [Ko75] obtêm a distribuição de partículas alfa no espaço de velocidade, em forma analítica, para uma situação estacionária de funcionamento do reator de fusão, admitindo que a energia dos produtos da reação seja cedida ao plasma. Em um segundo trabalho, Kolesnichenko e Fursa [KF75] obtêm a distribuição de partículas alfa através de uma solução numérica para a equação cinética da distribuição. Também encontram uma expressão analítica para a distribuição estacionária destas partículas alfa, válida para plasmas isotérmicos e não isotérmicos e, usando a função distribuição obtida, calculam a pressão exercida pelas partículas alfa. Estes autores estão fundamentalmente in-



interessados na obtenção da distribuição de partículas alfa tendo em vista estudar as instabilidades associadas a estas partículas.

Tsuji et alii [TKSN76], usando a equação de Fokker-Planck, através de análise numérica, estudam a distribuição temporal, em função da energia, das partículas alfa, sob condições fixas do plasma de deutério e trítio; a quantidade total de energia transferida a este plasma; a eficiência do aquecimento por partículas alfa; a partição da energia transferida entre os elétrons e os íons de deutério e trítio e a variação da quantidade total de energia transferida ao plasma, se houver uma variação nos parâmetros que caracterizam este plasma de fundo.

Saito et alii [SSKM77] obtêm a distribuição de energia das partículas alfa, em forma analítica, através da solução de uma equação de Fokker-Planck aproximada, supondo que o tempo de confinamento das partículas alfa é proporcional a  $E^{-\lambda}$ , sendo  $E$  a energia das partículas e  $\lambda$  um número inteiro positivo. Propõe também uma nova teoria de retardamento e a aplicam aos problemas dinâmicos de um reator de deutério e trítio aquecido por partículas alfa, através da introdução da função ou matriz resposta dinâmica.

No presente trabalho estudamos o efeito, das colisões entre as partículas alfa e as partículas do plasma de fundo, sobre a distribuição destas partículas alfa e sobre o transporte das grandezas macroscópicas de interesse, usando a equação de Fokker-Planck.

Usando modelos físicos apropriados, a distribuição de partículas alfa no espaço de velocidade é obtida de forma analí-



tica. O conhecimento da função distribuição em forma analítica é importante para o estudo das instabilidades provocadas pela presença das partículas alfa. Estudam-se também as variações temporais das grandezas macroscópicas tais como a densidade de partículas, a densidade de momentum, a densidade de energia cinética e a densidade de fluxo de calor. Tais variações mostram a relação entre a distribuição de partículas alfa e as grandezas macroscópicas e, conhecida a distribuição de forma analítica, permite calculá-las. O conhecimento da evolução temporal das grandezas macroscópicas é de importância pois permite analisar o transporte destas grandezas pelo plasma de fundo e, principalmente, a partição da energia carregada pelas partículas alfa entre os elétrons e os íons deste plasma.

No Capítulo II a equação de Fokker-Planck para partículas alfa é analisada, sendo então obtidas formas especiais desta equação, válidas em determinadas regiões do espaço de velocidade, e introduzidos alguns parâmetros característicos do problema, que se relacionam diretamente com o operador colisão da equação de Fokker-Planck.

O Capítulo III trata da distribuição termalizada de partículas alfa que é essencialmente uma distribuição na situação estacionária do sistema, obtendo, a partir de um ansatz, a forma geral desta distribuição e do tempo de termalização, que é o tempo mínimo necessário para que partículas alfa, freadas por colisões, atinjam velocidades tais que sua distribuição se torne uma distribuição de Maxwell. A partir desta solução geral, são obtidas distribuições aproximadas para as regiões de termalização, de



freamento e de alta energia, no espaço de velocidade.

No Capítulo IV obtêm-se a distribuição de freamento das partículas alfa começando pela solução estacionária do problema. Analisa-se então a evolução temporal de tal distribuição, os efeitos da inclusão de um termo de perda sobre a distribuição e os efeitos ocasionados pela presença de um campo elétrico.

No Capítulo V é obtida a distribuição de alta energia das partículas alfa, tanto na forma estacionária como dependente do tempo, sem incluir, entretanto, os efeitos de perda de partículas alfa e de campo elétrico.

O Capítulo VI analisa o transporte por colisões de partículas alfa. A partir da equação de Fokker-Planck são estudadas as evoluções temporais da densidade de partículas, da densidade de momentum, da densidade de energia cinética e da densidade de fluxo de calor. É feito um modelo para as colisões entre elétrons e íons e também um balanço da potência envolvida no processo em consideração, mostrando a partição da densidade de potência entre os componentes do plasma de fundo.

No Capítulo VII é apresentado um sumário do trabalho e discutidos os resultados obtidos.

No Apêndice A é obtida a razão de produção das partículas alfa e no Apêndice B são analisados os efeitos que uma fonte não deltiforme tem sobre os resultados obtidos.



## II - A EQUAÇÃO DE FOKKER-PLANCK PARA PARTÍCULAS ALFA

### II.1 - Introdução

A distribuição de partículas alfa em plasmas termonucleares pode ser obtida da equação de Fokker-Planck,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f_\alpha + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \left( \vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right) \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{v}} = \\ = \sum_i \theta(f_\alpha, f_i) + \theta(f_\alpha, f_e) + \theta(f_\alpha, f_\alpha) + S - L, \end{aligned} \quad (\text{II.1})$$

onde  $f_\alpha \equiv f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)$  é a função distribuição das partículas alfa,  $e_\alpha$  e  $m_\alpha$  são, respectivamente, a carga e a massa de uma partícula alfa,  $c$  é a velocidade da luz no vácuo,  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  são os campos elétrico e magnético, respectivamente,  $\theta(f_\alpha, f_j)$  é o operador colisão de Fokker-Planck,  $S$  é o termo de fonte e  $L$  o termo de perda. Os índices  $e, i, \alpha$  indicam que as grandezas a que estão apostos referem-se, respectivamente, a elétrons, íons e partículas alfa. O somatório sobre o índice  $i$  indica soma sobre os diferentes tipos de íons presentes no plasma em consideração.

O operador colisão de Fokker-Planck,  $\theta(f_k, f_j)$ , expressa o efeito, sobre as partículas da espécie  $k$ , das colisões binárias destas com as partículas da espécie  $j$ . O termo de fonte  $S$  leva em conta a criação de partículas alfa, a uma energia de 3.52 MeV, no plasma inicialmente constituído apenas por elétrons e íons. Embora muitas das soluções básicas sejam obtidas, neste trabalho, para um termo de fonte arbitrário, em geral supomos uma função fon



te do tipo delta em energia, de modo a obter uma solução particularmente simples, que ilustre a parte física fundamental. Uma solução para uma função fonte de forma arbitrária pode ser obtida a partir destas, como se mostra no Apêndice B. O termo de perda  $L$  expressa a possível perda de partículas alfa do recipiente magnético que contém o plasma termonuclear.

Como o operador colisão de Fokker-Planck é, em geral, um operador diferencial parcial de quarta ordem, a equação de Fokker-Planck é uma equação diferencial parcial, não linear, de quarta ordem, de solução analítica, em geral, difícil ou impossível. Tendo em vista obter uma solução analítica para a equação (II.1) vamos introduzir hipóteses simplificadoras. Supomos:

- a) a distribuição  $f_\alpha$  é espacialmente homogênea;
- b) a distribuição  $f_\alpha$  tem simetria axial em relação ao campo magnético;
- c) a densidade de partículas alfa,  $n_\alpha$ , é muito menor do que a densidade de elétrons,  $n_e$ , e do que a densidade de íons,  $n_i$ .

Tais hipóteses simplificadoras são razoavelmente verificadas na parte central dos tokamaks atualmente existentes, por exemplo, e, espera-se que também o sejam, nos futuros reatores de fusão.

Neste caso a equação (II.1) assume a forma,

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \vec{E} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \Big|_c + S - L, \quad (\text{II.2})$$

sendo

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \Big|_c = \sum_i \theta(f_\alpha, f_i) + \theta(f_\alpha, f_e). \quad (\text{II.3})$$



A equação (II.2) será a equação básica no estudo da distribuição de velocidade das partículas alfa, assim como também no estudo do transporte devido às colisões entre partículas alfa e elétrons e íons.

Na secção II.2 apresentaremos a forma geral do operador colisão a ser usado neste problema. Na secção II.3, formas especiais da equação de Fokker-Planck, válidas em certas regiões do espaço de velocidades, serão obtidas e, serão introduzidos alguns parâmetros característicos do problema, diretamente relacionados à forma do operador colisão.

## II.2 - Forma Geral do Operador Colisão para o Problema das Partículas Alfa

O operador colisão de Fokker-Planck pode ser obtido a partir da equação de Boltzmann e colocado na chamada forma de Landau [Te67], [Th64] para o operador de Fokker-Planck [MT64]. Nesta forma ele é dado por,

$$\Theta(f_k, f_j) = \int_{k_j} \frac{m_k}{m_j} \frac{\partial}{\partial \vec{v}_k} \cdot \left( d^3 v_j \vec{w} \cdot \left( \frac{1}{m_k} \frac{\partial}{\partial \vec{v}_k} - \frac{1}{m_j} \frac{\partial}{\partial \vec{v}_j} \right) f_k f_j \right), \quad (\text{II.4})$$

onde  $f_k$  e  $f_j$  indicam as funções distribuição das partículas de espécies  $k$  e  $j$ , respectivamente,  $m_k$  e  $m_j$ , as suas massas e  $\vec{v}_k$  e  $\vec{v}_j$ , suas velocidades. Além disto,  $\Gamma_{kj} = \frac{2\pi e_k^2 e_j^2 n_j \ln \Lambda}{m_k^2}$ , onde  $e_k$  e  $e_j$  representam as cargas das partículas de espécies  $k$  e  $j$ , respec

tivamente,  $n_j$  representa a densidade de partículas da espécie  $j$  e  $\ln \Lambda$  é o fator de corte Coulombiano,  $g = |\vec{g}| = |\vec{v}_k - \vec{v}_j|$  é a velocidade relativa e,  $\vec{\omega} = \frac{\partial^2 g}{\partial \vec{v}_k \partial \vec{v}_k}$ .

Observemos que o operador colisão  $\theta(f_k, f_j)$  envolve as funções distribuição  $f_k$  e  $f_j$ . Isto implica em que  $\theta(f_\alpha, f_i)$  e  $\theta(f_\alpha, f_e)$ , que ocorrem na equação (II.2), envolvem as funções distribuição de elétrons,  $f_e$ , e de íons,  $f_i$ . Então, em princípio, deveríamos considerar como descrição completa do nosso problema de um plasma composto de elétrons, íons e partículas alfa com colisões coulombianas, um sistema de pelo menos quatro equações do tipo da equação (II.1), cada uma delas permitindo obter a distribuição de uma das espécies presentes e levando em conta as colisões desta espécie com as outras. Tal sistema acoplado de equações é de solução difícil ou impossível. Assim, ao afirmarmos na secção II.1 que a distribuição de partículas alfa pode ser obtida da equação (II.1), supomos que as distribuições de elétrons e de íons são conhecidas.

Integrando o segundo termo da equação (II.4) por partes, podemos escrever o operador colisão em termos do potencial  $F(x_{kj})$  [Ga76],

$$\theta(f_k, f_j) = \int_{k_j} \frac{\partial}{\partial \vec{v}_k} \cdot \left[ \frac{\partial f_k}{\partial \vec{v}_k} \cdot \left( \frac{\partial^2 V_k}{\partial \vec{v}_k \partial \vec{v}_k} F'(x_{kj}) + \frac{\vec{v}_k \vec{v}_k}{v_k^3} x_{kj} F''(x_{kj}) \right) + \right. \\ \left. + 2 \frac{m_k}{m_j} f_k \frac{\vec{v}_k}{v_k^3} \left( F'(x_{kj}) - x_{kj} F''(x_{kj}) - \frac{x_{kj}^2}{2} F'''(x_{kj}) \right) \right], \quad (II.5)$$

sendo



$$X_{kj} = \frac{v_k}{v_{thj}},$$

e

$$\bar{F}(x_{kj}) = \frac{1}{m_j v_{thj}} \int d^3v_j f_j |\vec{v}_k - \vec{v}_j|, \quad (\text{II.6})$$

e onde  $v_{thj}$  representa a velocidade t̄rmica da part̄cula da esp̄cie  $j$ .

Usualmente o operador colis̄o de Fokker-Planck ̄ expresso em termos dos potenciais [MT64],

$$G_{kj} = m_j \left( \frac{e_j}{e_k} \right)^2 \int d\vec{v}_j g f_j,$$

$$H_{kj} = m_j \left( \frac{e_j}{e_k} \right)^2 \left( 1 + \frac{m_k}{m_j} \right) \int d\vec{v}_j \frac{f_j}{g},$$

que s̄o id̄nticos aos potenciais de Rosenbluth [RMJ57], quando  $|e_j| = |e_k|$ . Estes potenciais relacionam-se com a fun̄o  $F(x_{kj})$  da seguinte forma:

$$G_{kj} = m_j v_{thj} \frac{e_j^2}{e_k^2} F(x_{kj}),$$

$$H_{kj} = \frac{1}{2} m_j v_{thj} \frac{e_j^2}{e_k^2} \left( 1 + \frac{m_k}{m_j} \right) \frac{\partial}{\partial \vec{v}_k} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}_k} F(x_{kj}).$$

Vamos supor que as distribūes de ̄ons e de el̄trons s̄o distribūes de Maxwell; neste caso o potencial  $F(x)$  pode ser calculado analiticamente [Ch43], [G172], [Ga76], obtendo-se,

$$F(x) = \left(x + \frac{1}{2x}\right) \bar{\Phi}(x) + \frac{1}{2} \bar{\Phi}'(x), \quad (\text{II.7})$$

sendo  $\bar{\Phi}(x)$  a função erro e  $\bar{\Phi}'(x)$  a sua derivada [AS66].

Então o operador colisão dado pela equação (II.5), no caso em que as partículas da espécie  $j$  são descritas por uma distribuição de Maxwell, assume a forma

$$\begin{aligned} \Theta(f_k, f_j) = & \int_{k_j} \frac{\partial}{\partial \vec{v}_k} \cdot \left\{ \left[ \left( \bar{\Phi}(x_{kj}) - \frac{1}{2x_{kj}^2} \Psi(x_{kj}) \right) \frac{\partial^2 v_k}{\partial \vec{v}_k \partial \vec{v}_k} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{x_{kj}^2} \Psi(x_{kj}) \frac{\vec{v}_k \vec{v}_k}{v_k^3} \right] \cdot \frac{\partial f_k}{\partial \vec{v}_k} + 2 \frac{m_k}{m_j} \Psi(x_{kj}) \frac{\vec{v}_k}{v_k^3} f_k \right\}, \end{aligned} \quad (\text{II.8})$$

onde

$$\Psi(x_{kj}) \equiv \bar{\Phi}(x_{kj}) - x_{kj} \bar{\Phi}'(x_{kj}).$$

Esta é a forma geral do operador colisão que expressa o efeito das colisões coulombianas entre partículas de espécies  $k$  e  $j$ , quando as partículas da espécie  $j$  obedecem a uma distribuição de Maxwell.

O operador colisão,  $\Theta(f_k, f_j)$  pode ser decomposto [RMJ57] na soma de dois termos. Um deles dá origem ao freamento das partículas ao longo de sua direção de movimento e é chamado de termo de atrito ou de freamento; o outro termo corresponde a difusão no espaço de velocidades e é chamado de termo de difusão. Então



$$\Theta(f_k, f_j) = \Theta(f_k, f_j)_{fr} + \Theta(f_k, f_j)_{dif},$$

sendo o termo de freamento dado por

$$\Theta(f_k, f_j)_{fr} = -\Gamma_{kj} v_{thj} \left(1 + \frac{m_k}{m_j}\right) \frac{\partial}{\partial \vec{v}_k} \cdot \left[ f_k \frac{\partial}{\partial \vec{v}_k} \left( \frac{\partial}{\partial \vec{v}_k} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}_k} F(x_{kj}) \right) \right], \quad (\text{II.9})$$

e o termo de difusão por

$$\Theta(f_k, f_j)_{dif} = \Gamma_{kj} v_{thj} \frac{\partial^2}{\partial \vec{v}_k \partial \vec{v}_k} : \left( f_k \frac{\partial^2 F(x_{kj})}{\partial \vec{v}_k \partial \vec{v}_k} \right). \quad (\text{II.10})$$

Realizando as derivações indicadas nas equações (II.9) e (II.10), obtemos

$$\Theta(f_k, f_j)_{fr} = -\Gamma_{kj} \frac{\partial}{\partial \vec{v}_k} \cdot \left[ \left(1 + \frac{m_k}{m_j}\right) f_k \frac{\vec{v}_k}{v_k^3} \left( x_{kj}^2 F'''(x_{kj}) + 2x_{kj} F''(x_{kj}) - 2F'(x_{kj}) \right) \right], \quad (\text{II.11})$$

$$\Theta(f_k, f_j)_{dif} = \Gamma_{kj} \frac{\partial}{\partial \vec{v}_k} \cdot \left[ \frac{\partial f_k}{\partial \vec{v}_k} \cdot \left( x_{kj} \frac{\vec{v}_k \vec{v}_k}{v_k^3} F''(x_{kj}) + \frac{1}{v_k^3} \left( v_k^2 \vec{1} - \vec{v}_k \vec{v}_k \right) F'(x_{kj}) \right) + f_k \frac{\vec{v}_k}{v_k^3} \left( x_{kj}^2 F'''(x_{kj}) + 2x_{kj} F''(x_{kj}) - 2F'(x_{kj}) \right) \right]. \quad (\text{II.12})$$

No caso em que as partículas da espécie  $j$  são descritas por uma distribuição de Maxwell, usando o resultado (II.7), as partes de freamento e de difusão do operador colisão assumem a forma

$$\Theta(f_k, f_j)_{fr} = 2 \Gamma_{kj} \frac{\partial}{\partial \vec{v}_k} \cdot \left[ \left( 1 + \frac{m_k}{m_j} \right) \Psi(x_{kj}) \frac{\vec{v}_k}{v_k^3} f_k \right], \quad (\text{II.13})$$

$$\begin{aligned} \Theta(f_k, f_j)_{dif} = & \Gamma_{kj} \frac{\partial}{\partial \vec{v}_k} \cdot \left\{ \left[ \frac{\Psi(x_{kj})}{x_{kj}^2} \frac{\vec{v}_k \vec{v}_k}{v_k^3} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left( \Phi(x_{kj}) - \frac{\Psi(x_{kj})}{2 x_{kj}^2} \right) \frac{(v_k^2 \vec{1} - \vec{v}_k \vec{v}_k)}{v_k^3} \right] \cdot \frac{\partial f_k}{\partial \vec{v}_k} - \right. \\ & \left. - 2 \Psi(x_{kj}) \frac{\vec{v}_k}{v_k^3} f_k \right\}. \end{aligned} \quad (\text{II.14})$$

### II.3 - Algumas Formas Especiais do Termo de Colisão para o Problema das Partículas Alfa e os Parâmetros Característicos

A equação de Fokker-Planck (II.2) tem sua solução analítica dificultada, essencialmente devido a forma do termo de colisão  $\left. \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right|_c = \sum_{j=e,i} \Theta(f_\alpha, f_j)$ , embora sua solubilidade dependa também da forma dos termos de fonte e de perda, assim como do tipo de campo elétrico  $\vec{E}$ .

Entretanto, existem situações específicas de interesse físico, que serão analisadas no decorrer deste trabalho, em que



o termo de colisão apresenta-se em uma forma que permite manipulação analítica. Nesta secção analisaremos os casos de interesse para o presente trabalho.

A função distribuição,  $f_\alpha \equiv f_\alpha(\vec{v}, t)$ , é suposta axialmente simétrica em relação ao campo magnético. Assim, ela dependerá da velocidade apenas através do seu módulo,  $v = |\vec{v}|$ , e de  $\xi = \cos\theta$ , onde  $\theta$  é o ângulo polar. Ao analisarmos situações em que o campo elétrico não esteja presente, a distribuição  $f_\alpha(v, \xi, t)$  será esfericamente simétrica, ou seja,  $f_\alpha \equiv f_\alpha(v, t)$ . Neste caso o termo de colisão na equação de Fokker-Planck tem a forma

$$\left. \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right|_c = \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \sum_{j=e,i} \int_{-1}^1 \Psi(x_j) \left( \frac{1}{x_j} \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_j} + 2 \frac{m_\alpha}{m_j} f_\alpha \right), \quad (\text{II.15})$$

onde, por conveniência, suprimimos o índice  $\alpha$  em  $\Gamma_{\alpha j}$  e em  $x_{\alpha j} = \frac{v}{v_{thj}}$ .

Os atuais resultados experimentais [Mu78], [Eu78], para o tokamak PLT, "Princeton Large Torus", por exemplo, indicam que  $T_e \approx 3.5$  keV e  $T_i \approx 6.5$  keV, sendo  $T_i$  e  $T_e$  as temperaturas de íons e de elétrons, respectivamente. Lembrando que as partículas alfa são criadas com energia de 3.52 MeV, teremos  $v_{thi} \ll v_{\alpha 0} < v_{the}$ , onde  $v_{\alpha 0}$  é a velocidade inicial das partículas alfa. Assim, pelo menos na parte inicial de seu movimento, as partículas alfa estarão em uma região do espaço de velocidades em que  $x_e < 1$  e  $x_i \gg 1$ . Neste caso, ao tratarmos as colisões de partículas alfa com elétrons, usaremos para a função erro a forma aproximada, válida para pequenos argumentos [AS66],

$$\bar{\Phi}(x) \cong \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} \right),$$

que nos fornecerá o potencial

$$\bar{F}(x) \cong \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( 1 + \frac{1}{3} x^2 - \frac{1}{30} x^4 \right),$$

válido para  $x \ll 1$ . Então, o operador colisão partículas alfa-elêtrons, incluindo a dependência em  $\xi$ , e, portanto, apropriado também ao caso em que temos campo elétrico presente, é dado por

$$\Theta(f_\alpha, f_e) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{n_e}{v^3} \left[ \rho_1(x_e) v^2 \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial v^2} + 2 \frac{m_\alpha}{m_e} \left( \rho_2(x_e) v \frac{\partial f_\alpha}{\partial v} + \rho_3(x_e) f_\alpha \right) + \rho_4(x_e) \frac{\partial}{\partial \beta} (1 - \beta^2) \frac{\partial f_\alpha}{\partial \beta} \right], \quad (\text{II.16})$$

onde

$$\rho_1(x) = \frac{2}{3} x - \frac{2}{5} x^3 + \frac{1}{7} x^5,$$

$$\rho_2(x) = \frac{2}{3} x^3 - \frac{2}{5} x^5,$$

$$\rho_3(x) = 2x^3 - 2x^5,$$

$$\rho_4(x) = \frac{2}{3} x - \frac{2}{15} x^3 + \frac{1}{35} x^5.$$

Ao tratarmos as colisões de partículas alfa com íons, usaremos, neste caso, a expansão para grandes argumentos da função erro [AS66],

$$\bar{\Phi}(x) \cong 1 - \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi} x},$$



que nos permite escrever o potencial como

$$\bar{F}(x) \cong x + \frac{1}{2x} - \frac{e^{-x^2}}{2\sqrt{\pi} x^4},$$

válido para  $x \gg 1$ . O operador colisão partículas alfa-íons, incluindo a dependência em  $\xi$ , é dado por

$$\Theta(f_\alpha, f_i) = \Gamma_i \left[ \frac{1}{x_i^2 v} \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial v^2} + 2 \frac{m_\alpha}{m_i} \frac{1}{v^2} \frac{\partial f_\alpha}{\partial v} + \frac{1}{v^3} \frac{\partial}{\partial \gamma} (1 - \gamma^2) \frac{\partial f_\alpha}{\partial \gamma} \right]. \quad (\text{II.17})$$

Então, o termo de colisão da equação de Fokker-Planck assume a forma,

$$\left. \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right|_c = \frac{1}{Z_{\alpha 0}} \left[ \frac{v_c^3 Z_2}{2 v^3} \frac{\partial}{\partial \gamma} (1 - \gamma^2) \frac{\partial f_\alpha}{\partial \gamma} + A(v) \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial v^2} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} (h(v) f_\alpha) \right], \quad (\text{II.18})$$

onde

$$A(v) = \frac{v_c^3 v_{\alpha 0}^2}{2 v^3} Z_3 + \frac{1}{2} \frac{m_e}{m_\alpha} \frac{v_c^2}{v^2} \left( 1 - \frac{3}{5} \frac{v^2}{v_c^2} + \frac{3}{14} \frac{v^4}{v_c^4} \right),$$

$$h(v) = v_c^3 + v^3 - \frac{3}{5} \frac{v^2}{v_c^2} v^5,$$

as cargas efetivas são definidas por,

$$I_1 = \sum_i \frac{n_i e_i^2 m_d}{m_e e^2 m_i},$$

$$I_2 = \sum_i \frac{n_i e_i^2}{m_e e^2 Z_1},$$

$$I_3 = \sum_i \frac{n_i e_i^2 v_{thi}^2}{m_e e^2 v_{d0}^2 Z_1},$$

e

$$\alpha = \left( \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \frac{m_e}{m_d} Z_1 \right)^{1/3},$$

$$V_c = \alpha V_{the}, \quad (\text{II.19})$$

$$\tilde{c}_{\alpha 0} = \frac{V_c^3}{2 \pi_e Z_1}. \quad (\text{II.20})$$

O primeiro termo da equação (II.18) leva em conta o desvio angular, no ângulo polar  $\theta$ , provocado sobre as trajetórias das partículas alfa pelas colisões e que origina a difusão angular polar. O segundo termo desta equação é o responsável pela difusão de partículas alfa no espaço de velocidade; neste processo elas tem sua velocidade aumentada ou diminuída devido as colisões que sofrem com elétrons e íons, difundindo-se então para regiões de maior ou menor velocidade. O terceiro termo da equação representa o efeito de freamento que as colisões com elétrons e íons exercem sobre as partículas alfa, fazendo com que estas percam energia. Essencialmente as colisões coulombianas ocasionam per



da de energia e difusão no espaço de velocidade.

O termo de freamento por colisões é composto de duas partes: uma delas expressa o freamento exercido pelos elétrons sobre as partículas alfa e a outra o freamento exercido pelos íons. Existe uma velocidade,  $v_c$ , definida na equação (II.19) e chamada de velocidade crítica, na qual o freamento exercido pelos elétrons é igual ao freamento exercido pelos íons. Portanto, quando as partículas alfa atingem a velocidade crítica, a razão de transferência de energia das partículas alfa para os elétrons é igual a razão de transferência para os íons, ou seja, partículas alfa com velocidade  $v_c$  fornecem iguais quantidades de energia a elétrons e íons. Para partículas alfa com velocidade maior do que a velocidade crítica  $v_c$ , o freamento por elétrons é dominante, ao passo que, para partículas alfa com velocidade menor do que a velocidade crítica, o freamento por íons é dominante.

O tempo de freamento de Spitzer [Sp62], [MT64] para partículas alfa,  $\tau_\alpha$ , se desprezarmos termos menores do que  $\frac{m_e}{m_\alpha}$  e termos da ordem de  $x_e^2$ , é dado por  $\tau_{\alpha 0}$ , definido na equação (II.20), sendo que

$$\tilde{\tau}_\alpha = \frac{\tilde{\tau}_{\alpha 0}}{1 - \frac{3}{5} x_e^2}, \quad (\text{II.21})$$

mantendo apenas termos até  $x_e^2$ .

Se considerarmos que os íons de deutério, D, e trítio, T, que compõe o plasma principal, tem mesma densidade, a carga efetiva  $Z_1$  é igual a  $\frac{5}{3}$  e  $Z_2$  a  $\frac{3}{5}$ . Além disto, se  $\sqrt{2}v_d = \sqrt{3}v_t$ , temos  $Z_3 \cong 3.41 \times 10^{-4}$ . Para  $Z_1 = \frac{5}{3}$ , a constante  $\alpha = 0.0672$ .

Usando os recentes resultados experimentais para PLT, [Mu78], [Eu78], [Fu79], onde  $T_e \cong 3.5$  keV,  $T_i \cong 6.5$  keV,  $n_e = 4.5 \times 10^{13}$  cm<sup>-3</sup> obtemos  $v_c = 2.36 \times 10^6$  m/s,  $\tau_{\alpha 0} = 0.18$  s e  $\tau_\alpha = 0.20$  s, usando a equação (II.21), o que implica em uma correção de 8,24% em relação ao valor de  $\tau_{\alpha 0}$ .



### III - DISTRIBUIÇÃO TERMALIZADA DAS PARTÍCULAS ALFA

#### III.1 - Introdução

Vamos considerar neste capítulo a equação de Fokker-Planck que nos permite obter a distribuição de partículas alfa no caso em que não há perdas e nem campo elétrico presente. A ausência de campo elétrico faz com que a distribuição seja esfericamente simétrica, e, neste caso, o termo de colisão é dado, de forma exata, pela equação (II.15). Para esta situação a equação de Fokker-Planck assume a forma,

$$\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \sum_j \int d^3x_j \Psi(x_j) \left( \frac{1}{x_j} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x_j} + 2 \frac{m_{\alpha}}{m_j} f_{\alpha} \right) + S, \quad (\text{III.1})$$

onde a soma sobre  $j$  inclui os elétrons e os diferentes tipos de íons presentes no plasma de fundo.

Após o início da reação termonuclear responsável pela criação das partículas alfa, podemos distinguir, qualitativamente, três regiões no espaço de velocidades, regiões estas onde a distribuição de partículas alfa apresenta características bem definidas.

Na primeira destas regiões, que chamamos de região de termalização, ocorre a termalização das partículas alfa, ou seja, sua distribuição passa a ser uma distribuição de Maxwell. Esta região estende-se desde a velocidade nula até uma velocidade  $\bar{v}_{thi} \ll v_{\alpha 0}$ , ou,  $0 \leq v \leq \bar{v}_{thi}$ , sendo que a velocidade  $\bar{v}_{thi}$  será convenientemente fixada na secção III.3. Como não estamos levando



em conta eventuais perdas de partículas alfa ou mesmo mecanismos que permitam a saída das partículas alfa do plasma, a distribuição na região de termalização deve crescer a medida que o tempo passa, indicando que há um acúmulo de partículas alfa nesta região. O termo dominante na equação de Fokker-Planck, nesta região, é o termo de difusão. Neste caso temos difusão das partículas alfa no espaço de velocidades com perda de energia.

Na segunda região, que chamamos de região de freamento e em que  $\bar{v}_{thi} \leq v \leq v_{\alpha 0}$ , as partículas alfa são freadas como consequência das suas colisões com os elétrons e os íons do plasma; elas perdem gradativamente velocidade até atingir a região onde o processo de termalização é dominante. O termo de freamento na equação de Fokker-Planck é o termo preponderante nesta região.

Na terceira região, que chamamos de região de alta energia caracterizada por velocidades  $v_{\alpha 0} \leq v < v_{the}$ , o número de partículas alfa presentes é pequeno, e estas partículas são capazes de difundir-se para regiões de maior energia no espaço de velocidades, ou seja, devido as colisões elas ganham energia. Novamente o termo dominante na equação de Fokker-Planck é o termo de difusão. Estas partículas constituem a cauda de alta energia da distribuição, e esta decresce rapidamente com o aumento de velocidade.

Evidentemente, é necessário que passe um certo período de tempo, após o início do processo termonuclear de criação das partículas alfa, para que o processo de termalização comece a ocorrer, ou seja, para que as primeiras partículas atinjam a região de termalização. Chamamos a este tempo mínimo de tempo de termalização e o representamos por  $t_M$ , ou seja, o tempo de termala



lização é o tempo mínimo necessário para que partículas alfa, freadas pelas colisões, atinjam velocidades tais que sua distribuição se torne uma distribuição de Maxwell.

Para tempos posteriores ao tempo de termalização,  $t > t_M$ , estas três regiões mantêm suas características e podemos dizer que as distribuições nas regiões de alta energia e de freamento atingiram seus valores assintóticos no tempo. Isto significa que os fatos relevantes, em relação à evolução temporal da distribuição, ocorrem em uma escala de tempo em que os tempos significativos são menores ou iguais ao tempo de termalização. Estas afirmativas serão confirmadas nos capítulos subsequentes. Chamamos de distribuição termalizada das partículas alfa a uma distribuição, válida somente para tempos  $t > t_M$ , que descreva corretamente a distribuição na região de termalização e que descreva a distribuição nas regiões de freamento e de alta energia em seu limite assintótico no tempo.

Na secção III.2, a partir de um ansatz, coerente com os argumentos apresentados acima, obtemos, formalmente, a expressão geral da distribuição e do tempo de termalização. Na secção III.3, obtemos a distribuição nas regiões de termalização, de freamento e de alta energia, respectivamente, fazendo aproximações apropriadas na forma geral obtida na secção III.2. Na secção III.4 as características gerais da distribuição termalizada são discutidas, analisando-se também os gráficos de tais distribuições.



### III.2 - Forma Geral da Distribuição Termalizada

Com a finalidade de obtermos a distribuição termalizada para as partículas alfa, propomos como solução da equação de Fokker-Planck (III.1),

$$f_{\alpha}(v,t) = A(t-t_M) f_{\max}(v) + g_{\alpha}(v), \quad (\text{III.2})$$

sendo  $f_{\max}(v) = e^{-m_{\alpha} v^2 / 2T}$  uma distribuição de Maxwell não normalizada, onde  $T = T_e = T_i$ ,  $g_{\alpha}(v)$  uma função somente da velocidade a ser determinada, e  $A$  uma constante a ser determinada juntamente com  $t_M$ . Ao propormos esta solução estamos fazendo a hipótese de que, para tempos  $t > t_M$ , as temperaturas de íons e de elétrons são iguais entre si e iguais à temperatura que caracteriza a distribuição de partículas alfa na região de termalização. Esta hipótese é válida, pois, mostraremos no Capítulo VI, que, para tempos  $t > t_M$ , a troca de energia entre elétrons, íons e partículas alfa tende a igualar as temperaturas de todas as espécies de partículas presentes, ou seja, as trocas significativas de energia entre elétrons, íons e partículas alfa ocorrem em tempos menores ou da ordem do tempo de termalização. Por outro lado, tal hipótese é uma consequência do teorema H de Boltzmann [CC52], que assegura que um sistema isolado, que não está inicialmente em equilíbrio térmico, sob a ação de colisões binárias, tende a relaxar para uma distribuição de Maxwell de velocidades, em que todas as componentes do sistema são caracterizadas pela mesma temperatura. Esta é a única forma possível de equilíbrio e, neste caso, a en



tropia é máxima.

Substituindo a solução proposta, dada pela equação (III.2), na equação (III.1), obtemos para a função incôgnita  $g_\alpha(v)$  a equação

$$Af_{\max}(v) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \sum_j \Gamma_j \Psi(x_j) \left( \frac{1}{x_j} \frac{dg_\alpha}{dx_j} + 2 \frac{m_\alpha}{m_j} g_\alpha \right) + S. \quad (\text{III.3})$$

Realizamos uma mudança de variável independente, de  $v$  para  $x_\alpha$ , sendo  $x_\alpha$  definida por  $x_\alpha^2 = \frac{m_\alpha v^2}{2T}$  e, portanto, adimensional. Observamos que  $x_\alpha$  e  $x_j$  relacionam-se da seguinte forma:  $x_\alpha^2 = \frac{m_\alpha}{m_j} x_j^2$ . Em termos da nova variável, a equação (III.3), impondo as condições de que  $g_\alpha(0)$  e  $\left. \frac{dg_\alpha}{dx_\alpha} \right|_{x_\alpha=0}$  devem ser finitas, torna-se, após integração,

$$\frac{dg_\alpha}{dx_\alpha^2} + g_\alpha = \frac{A\sqrt{\pi}}{8} \frac{v_\alpha^3 \Psi(x_\alpha)}{\sum_j \Gamma_j \frac{m_\alpha}{m_j} \Psi(x_j)} - \frac{v_\alpha^3}{2} \frac{\int_0^{x_\alpha} x_\alpha'^2 S dx_\alpha'}{\sum_j \Gamma_j \frac{m_\alpha}{m_j} \Psi(x_j)}, \quad (\text{III.4})$$

onde  $v_\alpha = \left( \frac{2T}{m_\alpha} \right)^{1/2}$  é a velocidade térmica das partículas alfa.

O termo de fonte  $S$ , que leva em conta a criação de partículas alfa no plasma, foi tomado da forma

$$S(v) = \frac{S^0}{4\pi v_{\alpha 0}^2} \delta(v - v_{\alpha 0}), \quad (\text{III.5})$$

para simplificação dos cálculos. Liskien [Li79] determinou o espectro das partículas alfa e dos neutrons criados em um plasma de deutério e trítio, mostrando ser a largura do espectro de alfas de até 2 MeV para temperaturas do plasma de 30 keV. As impli

cações decorrentes dessa distribuição inicial em velocidade são tratadas no Apêndice B. Na equação (III.5),  $S^0$  é a razão de produção das partículas alfa, e é dada por

$$S^0 = 3.68 \times 10^{-12} \frac{n_d n_t}{T^{2/3}} \exp(-19.94 T^{-1/3}) \text{ (cm}^{-3} \cdot \text{s}^{-1}) \quad (\text{III.6})$$

sendo  $T$ , a temperatura dos íons do plasma principal, suposta igual para os íons de deutério e de trítio, dada em keV, e,  $n_d$  e  $n_t$ , as densidades de íons de deutério e de trítio, respectivamente, dadas em  $\text{cm}^{-3}$ . A expressão (III.6) é obtida no Apêndice A, e válida para temperaturas  $T \leq 25$  keV.

Para a fonte dada pela equação (III.5), a equação (III.4) assume a forma

$$\frac{dg_\alpha}{dx_\alpha^2} + g_\alpha = \frac{A\sqrt{\pi}}{8} \frac{v_\alpha^3 \Psi(x_\alpha)}{\sum_d \Gamma_d \frac{m_d}{m_\alpha} \Psi(x_d)} - \frac{S^0}{8\pi} \frac{U(x_\alpha - x_{\alpha 0})}{\sum_d \Gamma_d \frac{m_d}{m_\alpha} \Psi(x_d)}, \quad (\text{III.7})$$

onde  $x_{\alpha 0} = \sqrt{\frac{m_\alpha}{2T}} v_{\alpha 0}$  e  $U(x_\alpha - x_{\alpha 0})$  é a função de Heaviside ou função salto unitário.

A solução geral da equação (III.7) é dada por

$$g_\alpha(x_\alpha) = g_\alpha(0) e^{-x_\alpha^2} + A \frac{\sqrt{\pi}}{4} v_\alpha^3 e^{-x_\alpha^2} \int_0^{x_\alpha} \frac{e^{x_\alpha'^2} \Psi(x_\alpha') x_\alpha' dx_\alpha'}{\sum_d \Gamma_d \frac{m_d}{m_\alpha} \Psi(x_d')} - \frac{S^0 e^{-x_\alpha^2}}{4\pi} \int_0^{x_\alpha} \frac{e^{x_\alpha'^2} U(x_\alpha' - x_{\alpha 0}) x_\alpha' dx_\alpha'}{\sum_d \Gamma_d \frac{m_d}{m_\alpha} \Psi(x_d')}. \quad (\text{III.8})$$

Podemos, então, escrever a função distribuição  $f_\alpha(x_\alpha, t)$



como,

$$f_{\alpha}(x_{\alpha}, t) = A \left[ (t - t_M) e^{-x_{\alpha}^2} + \frac{\sqrt{\pi}}{4} v_{\alpha}^3 e^{-x_{\alpha}^2} \int_0^{x_{\alpha}} \frac{e^{x_{\alpha}'^2} \Psi(x_{\alpha}') x_{\alpha}' dx_{\alpha}'}{\sum_j \prod_j \frac{m_{\alpha}}{m_j} \Psi(x_j')} \right] - \frac{S^0}{4\pi} e^{-x_{\alpha}^2} \int_0^{x_{\alpha}} \frac{e^{x_{\alpha}'^2} U(x_{\alpha}' - x_{\alpha 0}) x_{\alpha}' dx_{\alpha}'}{\sum_j \prod_j \frac{m_{\alpha}}{m_j} \Psi(x_j')} , \quad (\text{III.9})$$

onde o termo  $g_{\alpha}(0)$  e  $e^{-x_{\alpha}^2}$  de  $g_{\alpha}(x_{\alpha})$  foi incluído no termo que contém  $A$  e  $t_M$ . Observamos que a equação (III.9) foi obtida impondo a condição de que  $\left. \frac{1}{x_{\alpha}} \frac{dg}{dx_{\alpha}} \right|_{x_{\alpha}=0}$  seja finita. A distribuição de partículas alfa, válida para  $t > t_M$ , dada pela equação (III.9), não está plenamente determinada, pois ainda não conhecemos as constantes  $A$  e  $t_M$ .

No Capítulo VI mostraremos, a partir da equação de Fokker-Planck mais geral que descreve o problema, equação (II.2), que a variação temporal da densidade de partículas alfa,  $n_{\alpha}(t) \equiv \int f_{\alpha}(\vec{v}, t) d\vec{v}$ , é dada por

$$\frac{dn_{\alpha}}{dt} = \int S d\vec{v},$$

que é a equação que expressa a conservação do número de partículas alfa, quando não ocorrem perdas destas partículas.

Usando, então, a definição de densidade e, para uma fonte do tipo delta, descrita pela equação (III.5), a condição que expressa a conservação do número de partículas alfa, pode ser escrita como

$$S^0 t = 4\pi V_{\alpha}^3 \int_0^{\infty} f_{\alpha}(x_{\alpha}, t) x_{\alpha}^2 dx_{\alpha}.$$

Usando esta condição obtemos as constantes  $A$  e  $t_M$ , que são dadas por

$$A = \frac{1}{\pi^{3/2}} \frac{S^0}{v_\alpha^3},$$

$$t_M = v_\alpha^3 \int_0^\infty e^{-x_\alpha'^2} x_\alpha'^2 dx_\alpha' \int_0^{x_\alpha'} \frac{e^{x_\alpha'^2} (\Psi(x_\alpha') - U(x_\alpha' - x_{\alpha 0})) x_\alpha' dx_\alpha'}{\sum_j \prod_j \frac{m_\alpha}{m_j} \Psi(x_j')}. \quad (\text{III.10})$$

Formalmente, a distribuição termalizada  $\bar{e}$ , então, expressa por

$$f_\alpha(x_\alpha, t) = \frac{1}{\pi^{3/2}} \frac{S^0}{v_\alpha^3} (t - t_M) e^{-x_\alpha^2} + \frac{S^0}{4\pi} e^{-x_\alpha^2} \int_0^{x_\alpha} \frac{e^{x_\alpha'^2} (\Psi(x_\alpha') - U(x_\alpha' - x_{\alpha 0})) x_\alpha' dx_\alpha'}{\sum_j \prod_j \frac{m_\alpha}{m_j} \Psi(x_j')}, \quad (\text{III.11})$$

sendo  $t_M$  dado pela equação (III.10). A distribuição dada pela equação (III.11), válida somente para tempos  $t \geq t_M$ , tem em seu segundo termo, que é igual a  $f_\alpha(x_\alpha, t_M)$ , toda a informação sobre as distribuições assintóticas no tempo nas regiões de freamento e de alta energia.

Observamos que a integral que ocorre na equação (III.11) não pode ser calculada analiticamente. Entretanto, dependendo da região em que estamos interessados no espaço de velocidades, podemos realizar aproximações na função  $\psi(x)$  que ocorre nesta equação, e obter soluções analíticas. Tal procedimento será o adotado na próxima seção.



### III.3 - Distribuição nas Regiões de Termalização, Freamento e Alta Energia

Tendo em vista obter formas analíticas explícitas para a distribuição, vamos aproximar a função  $\psi(x)$ , que ocorre na equação (III.11), através de aproximações na função erro e em sua derivada, já que  $\psi(x)$  é uma combinação destas funções. Se  $x \ll 1$  e se  $\psi(x)$  aparece no numerador da expressão, usaremos

$$\Psi(x) \cong \frac{4}{3\sqrt{\pi}} x^3 e^{-x^2} \left( 1 + \frac{2}{5} x^2 + \dots \right), \quad (\text{III.12})$$

e, se ocorrer no denominador da expressão,

$$\Psi(x) \cong \frac{4}{3\sqrt{\pi}} x^3 \left( 1 - \frac{3}{5} x^2 + \dots \right). \quad (\text{III.13})$$

Se  $x \gg 1$ , e para  $\psi(x)$  em numerador,

$$\Psi(x) \cong 1 - \frac{2x}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} + \dots, \quad (\text{III.14})$$

ao passo que, para  $\psi(x)$  em denominador,

$$\Psi(x) \cong 1. \quad (\text{III.15})$$

A região de termalização é caracterizada por velocidades  $v$  tais que  $0 \leq v < \bar{v}_{thi}$ , sendo  $\bar{v}_{thi}$  a média das velocidades térmicas dos diferentes tipos de íons presentes no plasma de fundo. A escolha de  $\bar{v}_{thi}$  como um limite superior de velocidade para a

região de termalização, baseia-se no fato de que nesta região as temperaturas de elétrons, íons e partículas alfa se equalizam e de que no estágio inicial da distribuição, a temperatura dos íons é a menor das temperaturas envolvidas no processo. Assim, na região de termalização, temos  $0 \leq x_e < \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}$ ,  $0 \leq x_i < 1$ , e  $0 \leq x_\alpha < \sqrt{\frac{m_\alpha}{m_i}}$ . Neste caso, a distribuição, obtida da equação (III.11), é dada por

$$f_\alpha^{(1)}(x_\alpha, t) = \frac{1}{\pi^{3/2}} \frac{S^0}{v_\alpha^3} e^{-x_\alpha^2} \left( t - t_M + \frac{\tau_{\alpha 0}}{3} \frac{x_\alpha^2}{(Z_0 + 1)} \right), \quad (\text{III.16})$$

sendo a carga efetiva  $Z_0$  dada por

$$Z_0 = \sum_i \frac{e_i^2 m_i}{e^2 m_e} \left( \frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2}.$$

Para um plasma com igual número de íons de deutério e de trítio  $Z_0$  é da ordem de 70.

Observamos que a distribuição  $f_\alpha^{(1)}(x_\alpha, t)$  é válida para  $0 \leq x_\alpha < \bar{x}_{\alpha i}$ , sendo  $\bar{x}_{\alpha i} = \frac{\bar{v}_{thi}}{v_\alpha}$ . Esta distribuição apresenta um ponto de máximo para  $x_\alpha^2 = 1 - \frac{3(Z_0 + 1)}{\tau_{\alpha 0}} (t - t_M)$ . Portanto, para  $t = t_M$ , instante inicial de validade desta distribuição, este máximo ocorre em  $x_\alpha = 1$ , ou seja, para  $v = v_\alpha$ , e em um tempo  $\frac{\tau_{\alpha 0}}{3(Z_0 + 1)}$ , o máximo é deslocado para  $x_\alpha = 0$ , ou seja,  $v = 0$ .

A região de freamento é caracterizada por velocidades  $v$  tais que  $\bar{v}_{thi} < v \leq v_{\alpha 0}$  e, nesta região, temos  $\sqrt{\frac{m_e}{m_i}} < x_e \leq \sqrt{\frac{m_e \epsilon_{\alpha 0}}{m_i T}}$ ,  $1 < x_i \leq \sqrt{\frac{m_i \epsilon_{\alpha 0}}{m_e T}}$ ,  $\sqrt{\frac{m_\alpha}{m_i}} < x_\alpha \leq \sqrt{\frac{\epsilon_{\alpha 0}}{T}}$ , sendo  $\epsilon_{\alpha 0} = \frac{1}{2} m_\alpha v_{\alpha 0}^2$ . Usando as aproximações expressas nas equações (III.12) e (III.15) obtemos,



a partir da equação (III.11), a seguinte distribuição para a região de freamento:

$$f_{\alpha}^{(2)}(x_{\alpha}, t) = \frac{S^0 \tilde{\zeta}_{\alpha 0}}{4\pi V_{\alpha}^3} \frac{1}{(x_{\alpha}^3 + x_{\alpha c}^3)} + \frac{S^0 \tilde{\zeta}_{\alpha 0} e^{-x_{\alpha}^2}}{V_{\alpha}^3} \left( \frac{1}{\pi^{3/2}} \frac{(t-t_M)}{\tilde{\zeta}_{\alpha 0}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{3\pi^{3/2}} \frac{\bar{x}_{\alpha i}}{\tilde{\zeta}_{\alpha 0} + 1} - \frac{1}{4\pi} \frac{e^{\bar{x}_{\alpha i}^2}}{\bar{x}_{\alpha i}^3 + x_{\alpha c}^3} + \frac{3}{4\pi} \int_{\bar{x}_{\alpha i}}^{x_{\alpha}} \frac{e^{x_{\alpha}'^2} x_{\alpha}'^2 dx_{\alpha}'}{(x_{\alpha}'^3 + x_{\alpha c}^3)^2} \right), \quad (\text{III.17})$$

onde  $x_{\alpha c} = \frac{v}{v_{\alpha}}$ . Esta distribuição é válida para  $\bar{x}_{\alpha i} < x_{\alpha} \leq x_{\alpha 0}$ , sendo  $x_{\alpha 0} = \frac{v_{\alpha 0}}{v_{\alpha}}$ . Observamos que  $f_{\alpha}^{(1)}(\bar{x}_{\alpha i}, t) = f_{\alpha}^{(2)}(\bar{x}_{\alpha i}, t)$ , o que mostra que as aproximações realizadas nas regiões de termalização e de freamento são consistentes. Uma análise numérica dos termos desta distribuição para  $t = t_M$  mostra que o termo dominante é o primeiro termo da equação (III.17). A integral que ocorre nesta equação, estimada numericamente, é aproximadamente 100 vezes menor do que o termo dominante. A região de alta energia é caracterizada por velocidades  $v$  tais que  $v_{\alpha 0} \leq v \ll v_{\text{the}}$  e, nesta região, temos  $\sqrt{\frac{m_e \epsilon_{\alpha 0}}{m_{\alpha} T}} \leq x_e \ll 1$ ,  $\sqrt{\frac{m_i \epsilon_{\alpha 0}}{m_{\alpha} T}} \leq x_i \ll \sqrt{\frac{m_i}{m_e}}$ ,  $\sqrt{\frac{\epsilon_{\alpha 0}}{T}} \leq x_{\alpha} \ll \sqrt{\frac{m_{\alpha}}{m_e}}$ . Neste caso a distribuição, obtida a partir da equação (III.11), assume a forma,

$$f_{\alpha}^{(3)}(x_{\alpha}, t) = \frac{S^0 \tilde{\zeta}_{\alpha 0} e^{-x_{\alpha}^2}}{4\pi V_{\alpha}^3} \left\{ \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{(t-t_M)}{\tilde{\zeta}_{\alpha 0}} + \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{\bar{x}_{\alpha i}^2}{\tilde{\zeta}_{\alpha 0} + 1} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{e^{x_{d0}^2}}{x_{d0}^3 + x_{dc}^3} - \frac{e^{\bar{x}_{di}^2}}{\bar{x}_{di}^3 + x_{dc}^3} + 3 \int_{\frac{x_{di}}{\bar{x}_{di}}}^{x_{d0}} \frac{e^{x_d'^2} x_d'^2 dx_d'}{(x_d'^3 + x_{dc}^3)^2} - \\
& - \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \ln \left( \frac{x_d^3 + x_{dc}^3}{x_{d0}^3 + x_{dc}^3} \right) \Bigg\}, \tag{III.18}
\end{aligned}$$

e é válida para  $x_{\alpha 0} \lesssim x_{\alpha} \ll x_{\alpha e}$ , sendo  $x_{\alpha e} = \frac{v_{the}}{v_{\alpha}}$ . Observamos que confirmando a consistência das aproximações realizadas nas regiões de freamento e de alta energia, temos  $f_{\alpha}^{(2)}(x_{\alpha 0}, t) = f_{\alpha}^{(3)}(x_{\alpha 0}, t)$ . Uma análise numérica dos termos que compõe a distribuição na região de alta energia,  $f_{\alpha}^{(3)}(x_{\alpha}, t)$ , para  $t = t_M$  mostra que o terceiro termo da equação (III.18) é o termo dominante. O termo que contém a integral nesta equação, estimado numericamente, mostrou ser aproximadamente 1000 vezes menor do que o termo dominante. Se usamos as mesmas aproximações que foram empregadas para obter a distribuição nas regiões de termalização, freamento e alta energia, ou seja, as equações (III.12) a (III.15), obtemos que o tempo de termalização é dado, considerando apenas os termos dominantes, por

$$t_M \approx \frac{\tilde{t}_{d0}}{3} \ln \left( \frac{x_{d0}^3 + x_{dc}^3}{\bar{x}_{di}^3 + x_{dc}^3} \right) + 3 \tilde{t}_{d0} \int_{\frac{x_{di}}{\bar{x}_{di}}}^{x_{d0}} dx_d x_d^2 e^{-x_d^2} \int_{\frac{x_{di}}{\bar{x}_{di}}}^{x_d} \frac{e^{x_d'^2} x_d'^2 dx_d'}{(x_d'^3 + x_{dc}^3)^2}. \tag{III.19}$$

Uma análise numérica da integral que ocorre nesta equação mostra que ela é aproximadamente 100 vezes menor do que o pri



meiro termo da equação. Por exemplo, sendo  $T=11$  keV,  $n_e=1.6 \times 10^{14}$   $\text{cm}^{-3}$  e  $n_d = n_t = \frac{1}{2} n_e$ , calculando-se a integral por regra de Simpson, com precisão de 10%, obtem-se o valor de  $0.46 \times 10^{-2}$  s ao passo que o primeiro termo desta equação, neste caso, vale 0.33 s. Desprezando o segundo termo, podemos escrever  $t_M$  como,

$$t_M \cong \tau_0(v_{d0}) - \tau_0(\bar{v}_{thi}), \quad (\text{III.20})$$

sendo  $\tau_0(v) = \frac{\tau_{\alpha 0}}{3} \ln \left( \frac{v^3 + v_c^3}{v_c^3} \right)$ , o tempo necessário para uma partícula criada com velocidade  $v$  ser freada até atingir a velocidade de  $v = 0$ , como mostraremos no Capítulo IV.

Podemos, também, expressar a densidade das partículas alfa como

$$n_d(t) = S^0(t - t_M) + n_d^{(1)} + n_d^{(2)} + n_d^{(3)},$$

onde  $n_\alpha^{(1)}$ ,  $n_\alpha^{(2)}$  e  $n_\alpha^{(3)}$  indicam as densidades, independentes do tempo, nas três regiões do espaço de velocidades que estamos considerando: termalização, freamento e alta energia, respectivamente. Estimativas numéricas mostram que

$$\frac{n_d^{(1)}}{S^0 \tilde{\tau}_{d0}} \approx 0.25 \times 10^{-2}, \quad \frac{n_d^{(2)}}{S^0 \tilde{\tau}_{d0}} < 1.9, \quad \frac{n_d^{(3)}}{S^0 \tilde{\tau}_{d0}} \approx 0,$$

o que mostra que a região de freamento concentra o maior número de partículas.

### III.4 - Características Gerais da Distribuição

Os resultados obtidos nas secções precedentes nos fornecem tanto as distribuições aproximadas específicas para as regiões de termalização, freamento e alta energia, dadas pelas equações (III.16), (III.17) e (III.18) respectivamente, evidentemente sem validade na fronteira entre estas regiões, como também a distribuição termalizada geral, dada pela equação (III.11), a partir da qual, por aproximações convenientes, as primeiras soluções foram obtidas.

A distribuição termalizada, expressa pela equação (III.11), envolve, em seu segundo termo, uma integral que não pode ser calculada analiticamente de forma exata. Calculamos tal integral, numericamente, utilizando o método de Simpson, tendo em vista compará-la com as distribuições aproximadas.

A Figura III.1 mostra a distribuição  $f_{\alpha}(x_{\alpha}, t)$  calculada para o tempo  $t = t_M$ , expressa em unidades de  $10^{-15} \text{ cm}^{-6} \cdot \text{s}^3$ , para  $0 \leq x_{\alpha} \leq 5$ , no caso em que  $T = 11 \text{ keV}$ ,  $n_e = 1.6 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ ,  $n_d = n_t = 0.8 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ . A curva (a) apresenta a distribuição termalizada calculada numericamente a partir da equação (III.11), a curva (b) a forma analítica aproximada da distribuição dada pelas equações (III.16) e (III.17) e a curva (c) o termo dominante da forma aproximada da distribuição termalizada na região de freamento. Neste caso  $x_{\alpha 0} = 17.94$  e esta figura apresenta apenas a parte inicial da distribuição, sendo que as distribuições termalizadas em toda a região de variação de  $x_{\alpha}$ , calculadas numericamente usando a equação (III.11) e utilizando as formas analíti



cas aproximadas para as diferentes regiões, dadas pelas equações (III.16), (III.17) e (III.18), são mostradas na Figura III.2, pelas curvas (a) e (b) respectivamente.

As curvas apresentadas tanto na Figura III.1 como na Figura III.2 mostram que nas porções das regiões de termalização e de freamento distantes do ponto de transição entre as duas regiões, a aproximação analítica concorda bem com o resultado numérico. Entretanto, na região de transição entre tais regiões, há uma clara discordância entre as curvas (a) e (b). Tal discrepância provém do fato de que, ao obtermos as formas aproximadas nas diferentes regiões, o procedimento básico consistindo em uma expansão conveniente da função erro, o número de termos considerado nas expansões foi limitado. Aumentando o número de termos em tais expansões faríamos com que as porções da curva (b) mais próximas a região de transição se aproximassem mais da curva (a).

A Figura III.3 apresenta  $f_{\alpha}(x_{\alpha}, t_M)$ , em unidades de  $10^{15} \text{ cm}^{-6} \cdot \text{s}^3$ , calculada numericamente a partir da equação (III.11), mantendo as densidades de elétrons e de íons constantes,  $n_e = 1.6 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ ,  $n_d = n_t = 0.8 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ , para diversas temperaturas: 5, 7.5, 11, 15 e 20 keV. Tais curvas mostram que a posição do máximo da distribuição independe da temperatura.

A Figura III.4 mostra a distribuição  $f_{\alpha}(x_{\alpha}, t_M)$ , em unidades de  $10^{-15} \text{ cm}^{-6} \cdot \text{s}^3$ , calculada numericamente usando a equação (III.11), para  $T = 11 \text{ keV}$  e para diferentes densidades: a)  $n_e = 1.6 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ , b)  $n_e = 0.8 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ , sendo  $n_d = n_t = \frac{1}{2} n_e$ . Observa-se novamente que a posição do máximo da distribuição permanece fixo, ou seja, independe da densidade. Quanto a distribuição esta varia linearmente com a densidade como se pode observar da expressão (III.11).



A Figura III.5 mostra a região de alta energia da distribuição termalizada,  $f_{\alpha}(x_{\alpha}, t_M)$ , calculada a partir da equação (III.11), em unidades de  $10^{-17} \text{ cm}^{-6} \cdot \text{s}^3$ , para  $T = 11 \text{ keV}$ ,  $n_e = 1.6 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ ,  $n_d = n_t = 0.8 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ . Tal curva mostra o decréscimo acentuado apresentado pela distribuição nesta região, ou seja, a distribuição cai a zero para  $x > x_{\alpha 0}$  em um intervalo de variação de  $x$  menor do que 1.

Finalmente, a Figura III.6 apresenta a distribuição termalizada  $f_{\alpha}(x_{\alpha}, t)$ , calculada numericamente a partir da equação (III.11), em unidades de  $10^{-15} \text{ cm}^{-6} \cdot \text{s}^3$ , para  $0 \leq x_{\alpha} \leq 5$ , sendo  $T = 11 \text{ keV}$ ,  $n_e = 1.6 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ ,  $n_d = n_t = 0.8 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ . São apresentadas curvas para tempos  $t = t_M, 1.001 t_M, 1.002 t_M, 1.003 t_M, 1.004 t_M, 1.005 t_M$ , sendo neste caso  $t_M = 0.32 \text{ s}$ . Estas curvas mostram que para  $x > 2$  as distribuições se comportam como  $f_{\alpha}(x_{\alpha}, t_M)$ , ou seja, independem do tempo. Para  $x < 2$  há acentuadas diferenças a medida que  $t$  cresce, ou seja, a altura da maxwelliana que domina esta região cresce, mostrando que há um acúmulo de partículas alfa termalizadas, já que os mecanismos de perda foram excluídos no modelo adotado.



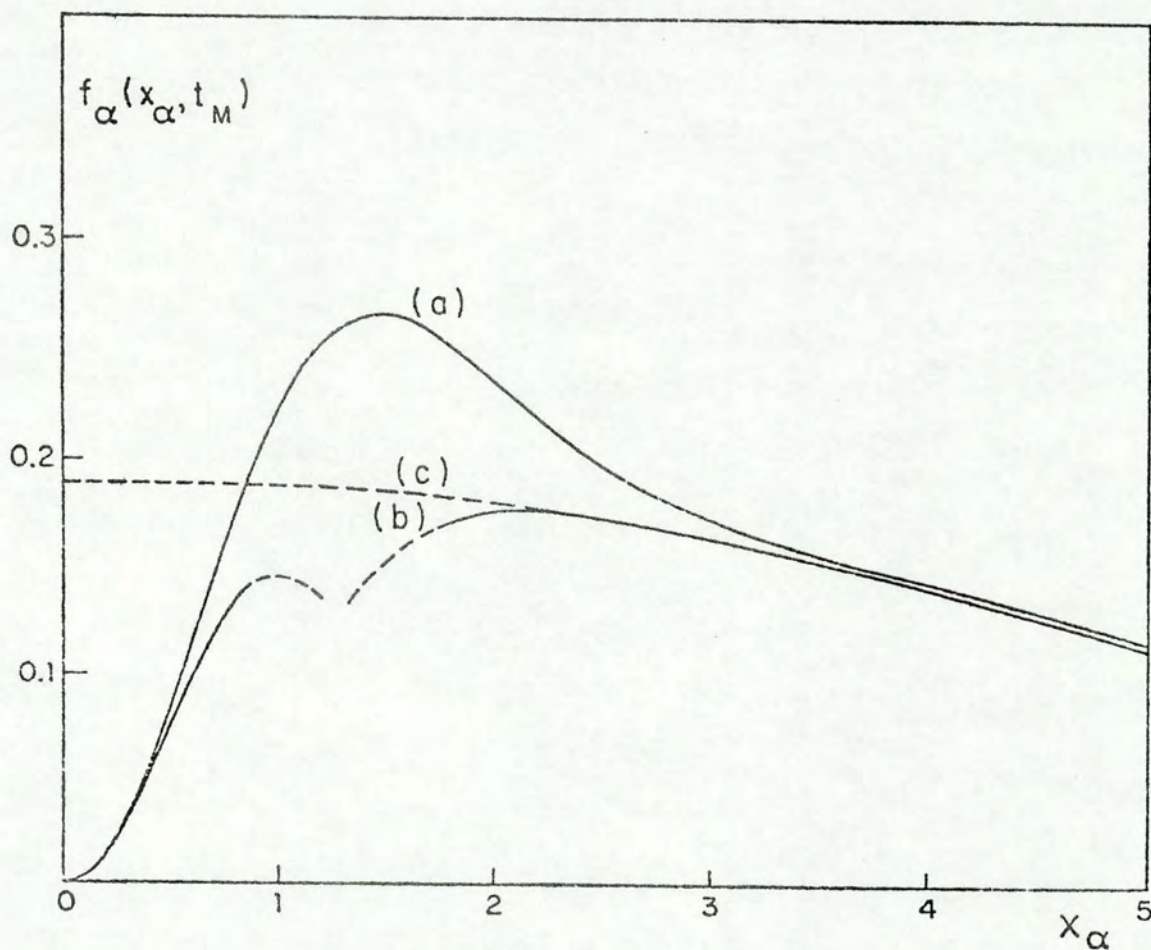


Figura III.1 -  $f_{\alpha}(x_{\alpha}, t_M)$ , em unidades de  $10^{-15} \text{ cm}^{-6} \cdot \text{s}^3$ , para  $0 < x_{\alpha} \leq 5$ , sendo  $T = 11 \text{ keV}$ ,  $n_e = 1.6 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ ,  $n_d = n_t = 0.8 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}$  ( $x_{\alpha 0} = 17.94$ ,  $x_{\alpha i} = 1.2844$ ,  $x_{\alpha c} = 5.7576$ ): a) distribuição calculada numericamente; b) distribuição termalizada nas regiões de termalização e de freamento; c) termo dominante da distribuição termalizada na região de freamento.

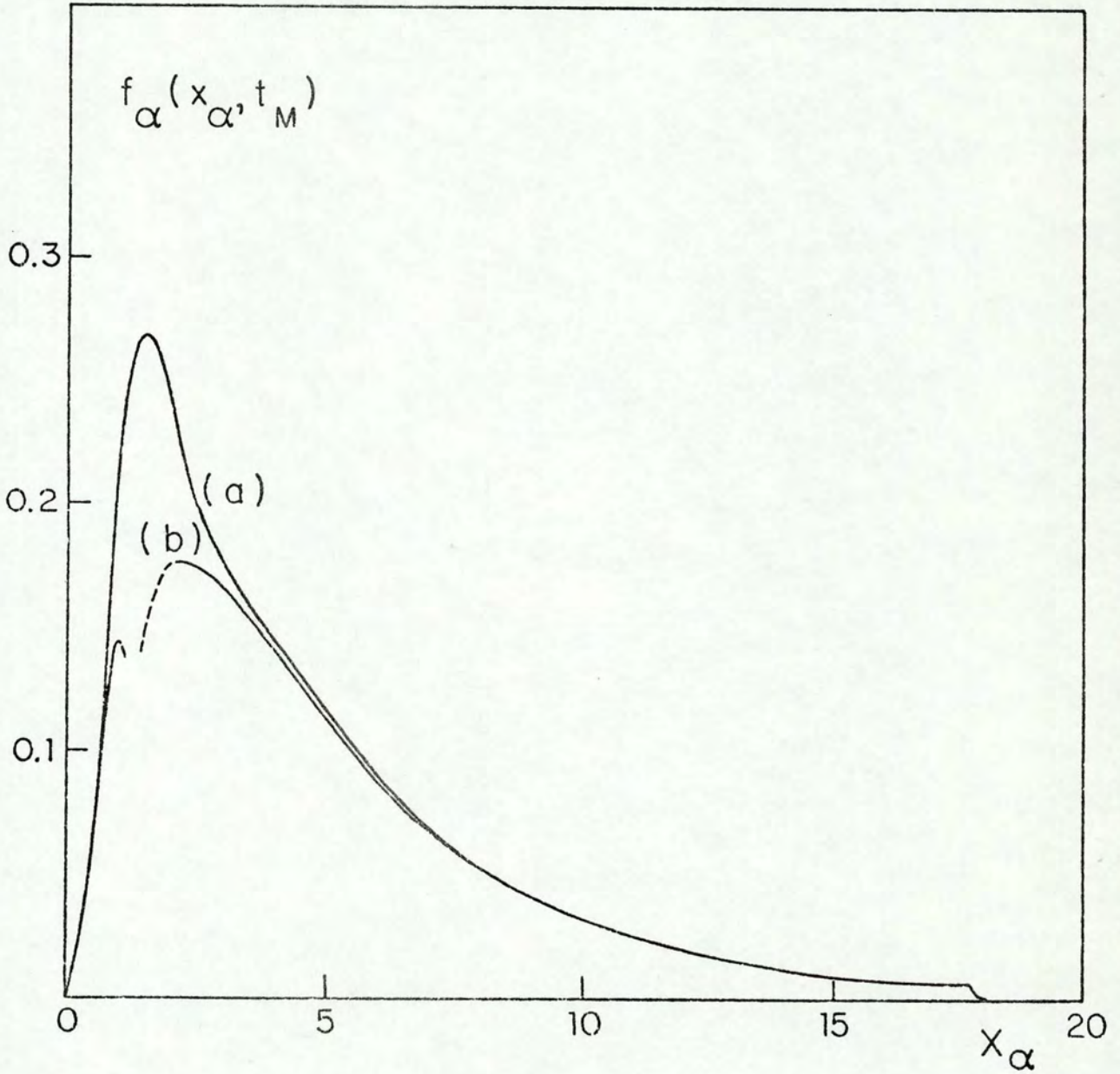


Figura III.2 -  $f_{\alpha}(x_{\alpha}, t_M)$ , em unidades de  $10^{-15} \text{ cm}^{-6} \cdot \text{s}^3$ , sendo  $T = 11 \text{ keV}$ ,  $n_e = 1.6 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ ,  $n_d = n_t = 0.8 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}$  ( $x_{\alpha 0} = 17.94$ ,  $\bar{x}_{\alpha i} = 1.2844$ ,  $x_{\alpha c} = 5.7476$ ): a) distribuição calculada numericamente; b) distribuição termalizada nas regiões de termalização, freamento e alta energia.



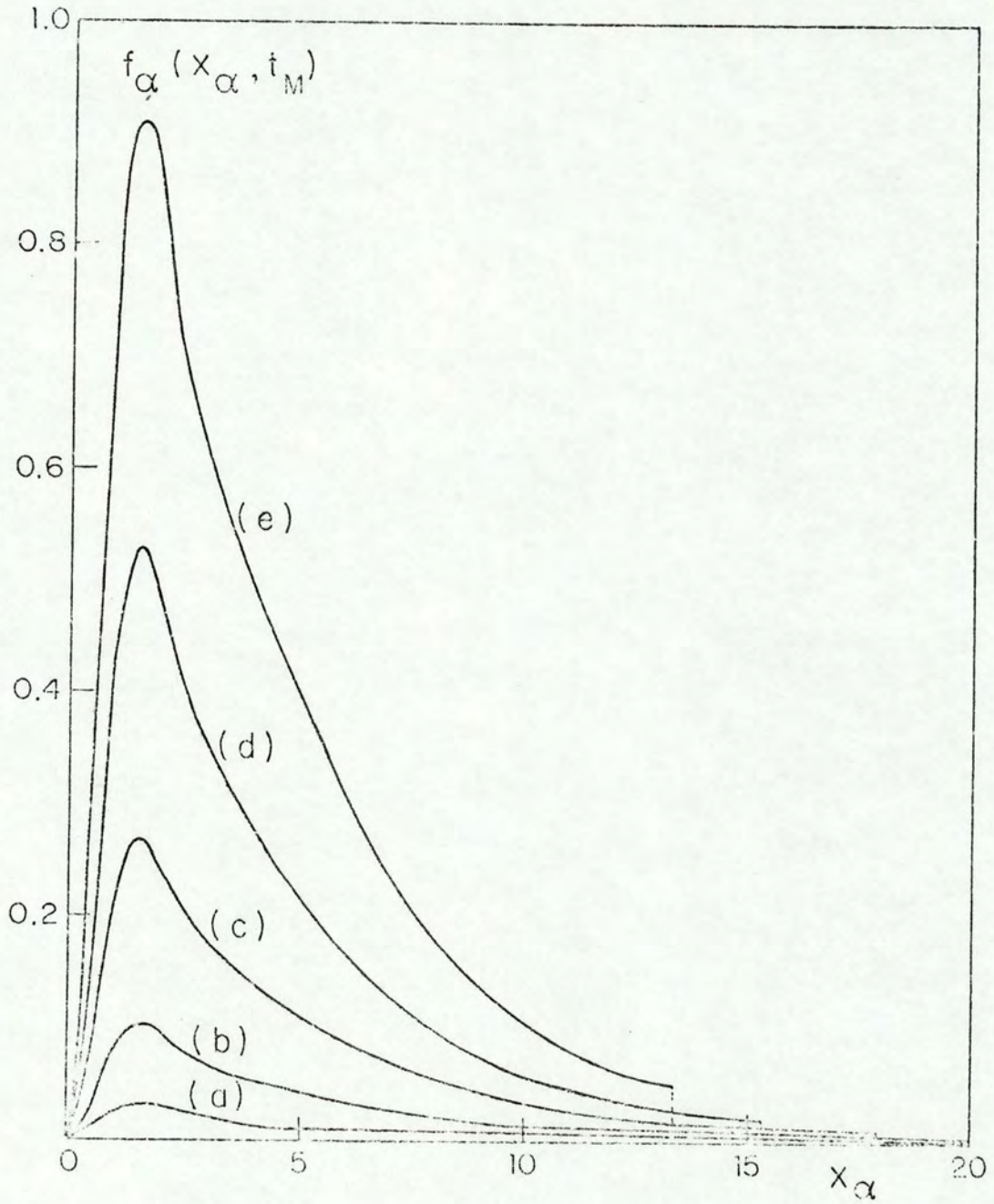


Figura III.3 -  $f_\alpha(x_\alpha, t_M)$ , em unidades de  $10^{-15} \text{ cm}^{-6} \cdot \text{s}^3$ , calculada numericamente, para  $n_e = 1.6 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ ,  $n_d = n_t = 0.8 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ :  
 a)  $T = 5 \text{ keV}$ ; b)  $T = 7.5 \text{ keV}$ ; c)  $T = 11 \text{ keV}$ ; d)  $T = 15 \text{ keV}$ ;  
 e)  $T = 20 \text{ keV}$ .

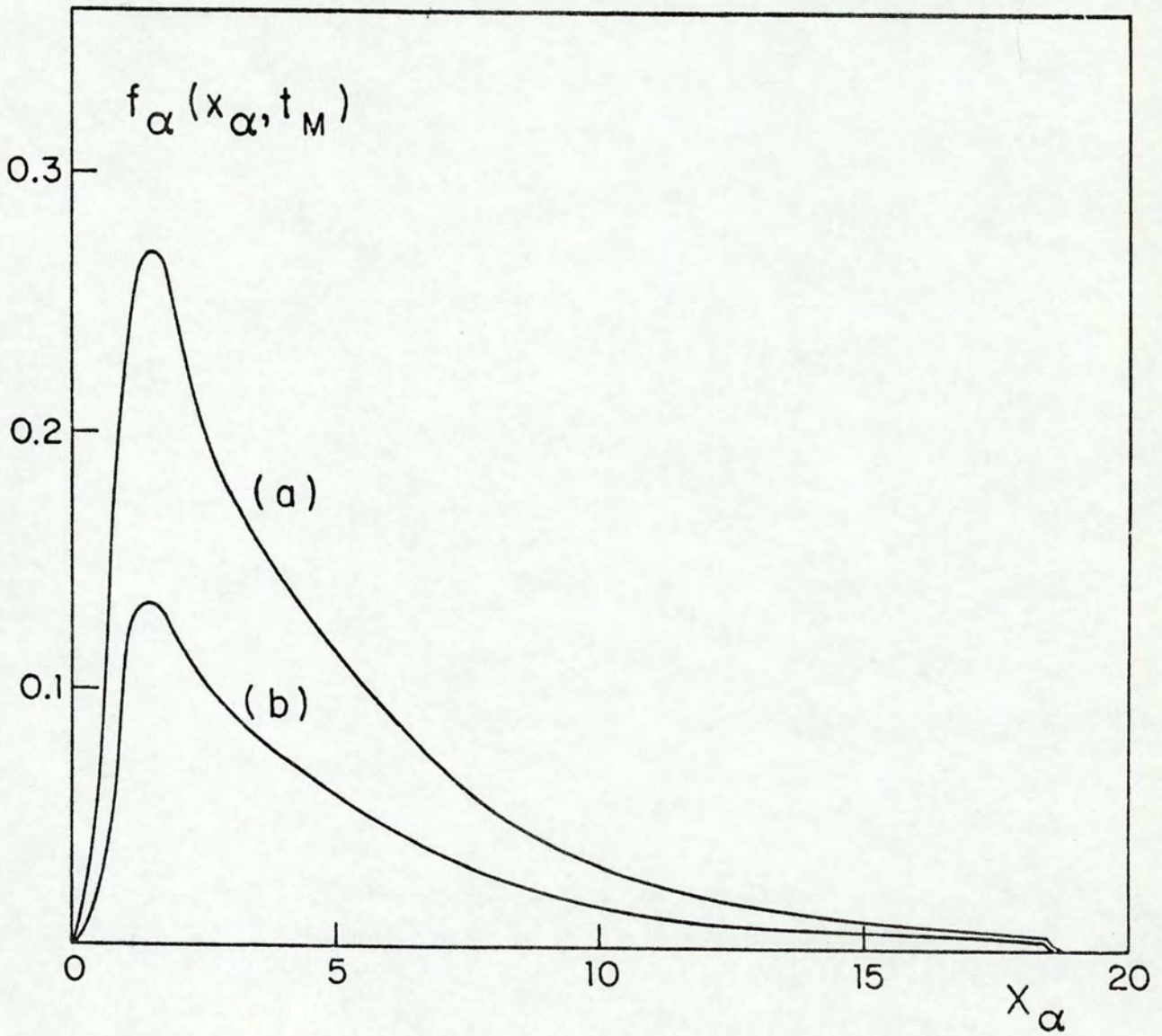


Figura III.4 -  $f_\alpha(x_\alpha, t_M)$ , em unidades de  $10^{-15} \text{ cm}^{-6} \cdot \text{s}^3$ , calculada numericamente, para  $T = 11 \text{ keV}$ : a)  $n_e = 1.6 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}$  ( $S^0 = 0.6080 \times 10^{12} \text{ cm}^{-3} \cdot \text{s}^{-1}$ ); b)  $n_e = 0.8 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}$  ( $S^0 = 0.1520 \times 10^{12} \text{ cm}^{-3} \cdot \text{s}^{-1}$ ).



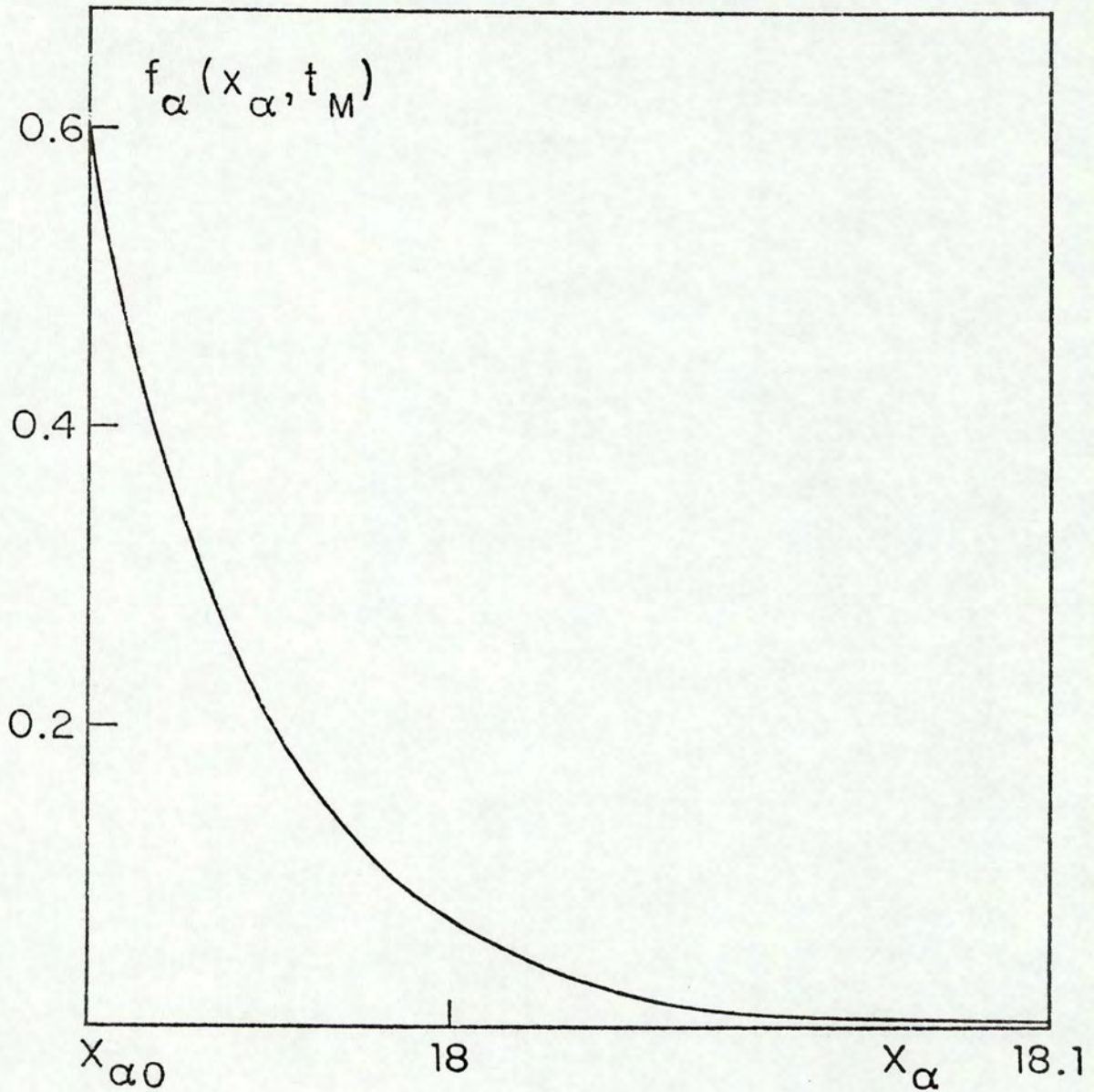


Figura III.5 - Região de alta energia da distribuição  $f_\alpha(x_\alpha, t_M)$ , em unidades de  $10^{-17} \text{ cm}^{-6} \cdot \text{s}^3$ , para  $T = 11 \text{ keV}$ ,  $n_e = 1.6 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ ,  $n_d = n_t = 0.8 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ ,  $x_{\alpha 0} = 17.94$ .

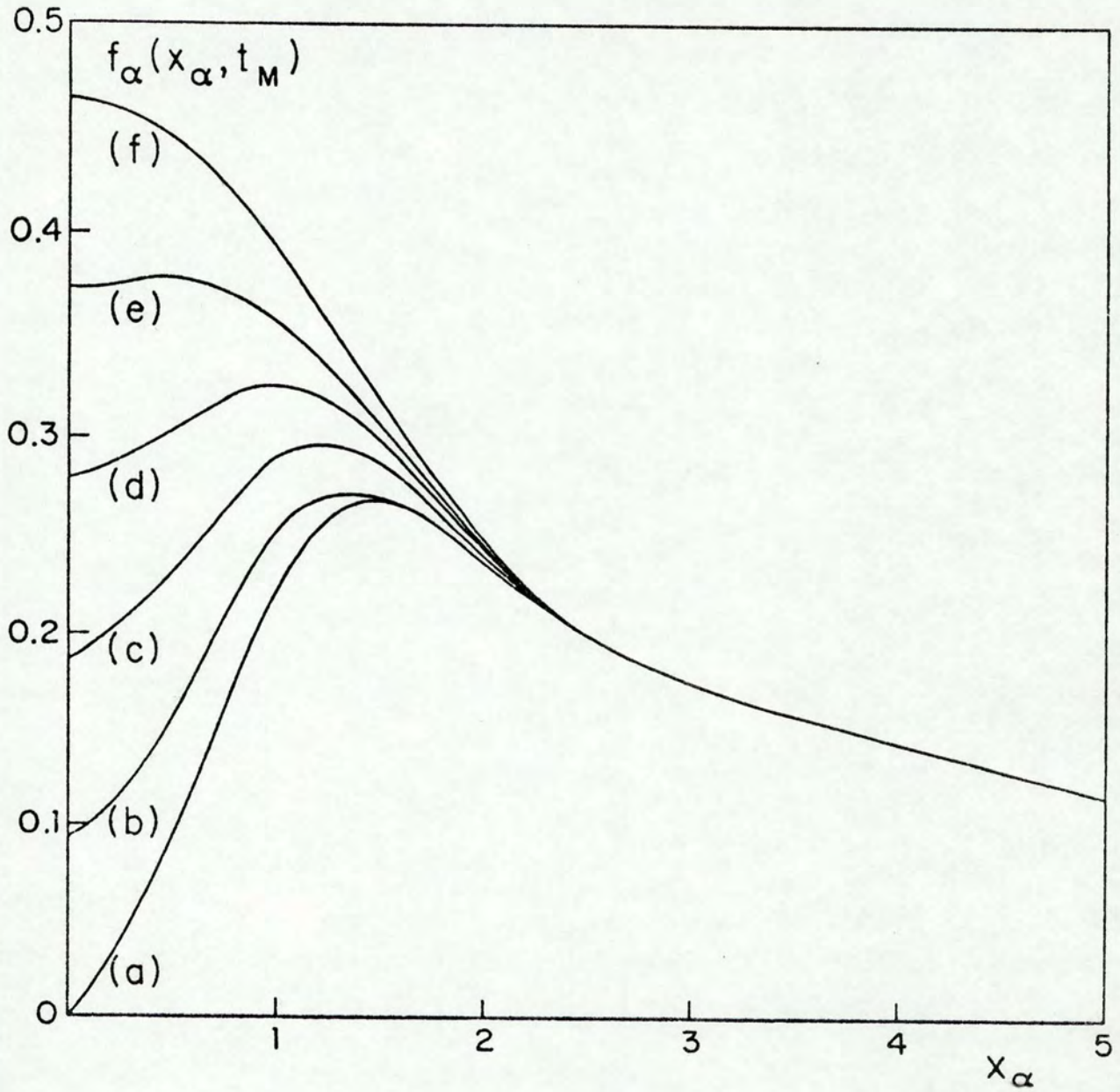


Figura III.6 -  $f_\alpha(x_\alpha, t)$ , em unidades de  $10^{-15} \text{ cm}^{-6} \cdot \text{s}^3$ , para  $0 \leq x_\alpha \leq 5$ , sendo  $T = 11 \text{ keV}$ ,  $n_e = 1.6 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ ,  $n_d = n_t = 0.8 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ ,  $t_M = 0.3261 \text{ s}$ : a)  $t = t_M$ ; b)  $t = 1.001 t_M$ ; c)  $t = 1.002 t_M$ ; d)  $t = 1.003 t_M$ ; e)  $t = 1.004 t_M$ ; f)  $t = 1.005 t_M$ .



## IV - DISTRIBUIÇÃO DE FREAMENTO DAS PARTÍCULAS ALFA

### IV.1 - Introdução

Neste capítulo estudamos, especificamente, a distribuição de partículas alfa correspondente à região de freamento no espaço de velocidades, a que chamamos de distribuição de freamento das partículas alfa. Na região de freamento as partículas alfa perdem energia devido às colisões com os elétrons e os íons do plasma; nesta região a velocidade das partículas alfa reduz-se substancialmente até atingir uma velocidade comparável com a velocidade média térmica dos íons, onde se inicia o processo de termalização.

No Capítulo III, ao estudarmos a distribuição termalizada de partículas alfa, tínhamos obtido o limite assintótico no tempo da distribuição de freamento, no caso em que tanto o termo de perda como a presença de um campo elétrico eram desconsiderados. Tendo em vista que nos propunhamos apenas a obter a distribuição termalizada das partículas alfa, não foi obtida nenhuma informação sobre a evolução temporal da distribuição de freamento, já que o método utilizado não o permitia.

Neste capítulo vamos nos restringir à região de freamento, ou seja, vamos estudar a equação de Fokker-Planck, que nos permite obter a distribuição de partículas alfa, apenas na região do espaço de velocidades correspondente à região de freamento, e assim, vamos desconsiderar termos que ocasionam difusão. Tal colocação nos permite simplificações na equação de Fokker-



-Planck de tal forma que um tratamento analítico da mesma será possível. Realizamos tal estudo de forma sistemática, a partir do caso mais simples, ou seja, aquele em que os termos de perda e de campo elétrico são omitidos e os termos de colisão que não conduzem a freamento, são desprezados. Na secção IV.2 obtemos a distribuição estacionária correspondente a tal situação e, na secção IV.3, analisamos a evolução temporal da distribuição, na mesma situação. Na secção IV.4 um termo de perda é incluído e seus efeitos sobre a distribuição, são analisados detalhadamente. Os efeitos sobre a distribuição provenientes da presença de um campo elétrico, são estudados na secção IV.5.

#### IV.2 - Distribuição Estacionária

Nesta secção obtemos a distribuição de freamento estacionária das partículas alfa, sem levar em conta os termos de perda e de campo elétrico. Para obter tal distribuição, resolvemos a equação de Fokker-Planck (II.2), com  $L = 0$ ,  $\vec{E} = 0$ , quando  $\frac{df_{\alpha}}{dt} = 0$ . Considerando que estamos interessados em obter a distribuição apenas na região de freamento, vamos, no termo de colisão, dada pela equação (II.18), desprezar os termos que ocasionam difusão, pois  $\frac{m_{\alpha}}{m_e} \gg 1 \gg \frac{1}{x_i^2}$ . Como o campo elétrico está sendo excluído, a função distribuição será, necessariamente, isotrópica na velocidade, e a equação que a distribuição estacionária  $f_{\alpha} \equiv f_{\alpha}(v)$  satisfaz, é

$$\frac{1}{\tau_{\alpha 0} v^2} \frac{d}{dv} (f_{\alpha}^p) + S(v) = 0. \quad (\text{IV.1})$$



A solução desta equação, sujeita a condição de contorno  $v^3 f_\alpha(v) \xrightarrow{v \rightarrow \infty} 0$ , é dada por

$$f_\alpha = \frac{\tilde{\zeta}_{\alpha 0}}{h(v)} \int_v^\infty S(v') v'^2 dv', \quad (\text{IV.2})$$

e nos fornece a distribuição estacionária de partículas alfa na região de freamento, em função do termo de fonte  $S$ . Supondo que a forma do termo de fonte é do tipo função delta, dada pela equação (III.5), a distribuição de partículas alfa é descrita por

$$f_\alpha = \frac{\tilde{\zeta}_{\alpha 0} S^0}{4\pi h(v)} U(v_{\alpha 0} - v). \quad (\text{IV.3})$$

Esta distribuição mostra que não temos partículas alfa com velocidades maiores do que  $v_{\alpha 0}$ . Tal resultado é esperado já que os termos responsáveis pela difusão no espaço de velocidade foram desprezados, ao estabelecermos a equação (IV.1). Além disso, tendo em vista as aproximações feitas, a distribuição dada pela equação (IV.3) não é uma boa distribuição para velocidades menores do que  $\bar{v}_{thi}$ . Na região de freamento,  $v_{thi} < v \lesssim v_{\alpha 0}$ , onde esta distribuição é válida, notamos que se aproximamos  $h(v) \cong v_c^3 + v^3$ , a distribuição, dada pela equação (IV.3), coincide com o termo dominante da distribuição termalizada na região de freamento, dada pela equação (III.17).

### IV.3 - Evolução Temporal da Distribuição

A evolução temporal da distribuição de freamento das

partículas alfa, desprezando a difusão no espaço de velocidade e sem levar em conta a presença de um campo elétrico e de perdas de partículas alfa, é obtida da equação,

$$\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} = \frac{1}{\tilde{\tau}_{\alpha 0} v^2} \frac{\partial}{\partial v} (f_{\alpha} h) + S, \quad (\text{IV.4})$$

onde a distribuição  $f_{\alpha}$  é agora uma função de  $v$  e  $t$ :  $f_{\alpha} \equiv f_{\alpha}(v, t)$ .

Tomando a transformada de Laplace desta equação em relação a variável  $t$ , obtemos,

$$\frac{\partial \tilde{f}_{\alpha}(v, p)}{\partial v} + \frac{1}{h(v)} \left( \frac{dh(v)}{dv} - \tilde{\tau}_{\alpha 0} p v^2 \right) \tilde{f}_{\alpha}(v, p) = - \frac{\tilde{\tau}_{\alpha 0} v^2}{h(v)} \tilde{S}(v, p), \quad (\text{IV.5})$$

onde  $\tilde{f}_{\alpha}(v, p)$  e  $\tilde{S}(v, p)$  são as transformadas de Laplace em relação ao tempo de  $f_{\alpha}(v, t)$  e  $S(v, t)$ , respectivamente, e onde a condição inicial  $f_{\alpha}(v, t=0) = 0$  foi utilizada.

Impondo a condição de contorno  $\tilde{f}_{\alpha}(v \rightarrow \infty, p) \rightarrow 0$ , e aproximando  $h(v) \approx v_c^3 + v^3$ , a solução da equação (IV.5) é

$$\tilde{f}_{\alpha}(v, p) = \tilde{\tau}_{\alpha 0} \frac{(v^3 + v_c^3)^{\tilde{\tau}_{\alpha 0} p / 3}}{v^3 + v_c^3} \int_v^{\infty} \frac{\tilde{S}(v', p) v'^2 dv'}{(v'^3 + v_c^3)^{\tilde{\tau}_{\alpha 0} p / 3}}. \quad (\text{IV.6})$$

Invertendo a transformada de Laplace e trocando a ordem de integração, entre a integração em velocidade e a integração de Laplace, obtemos

$$f_{\alpha}(v, t) = \frac{\tilde{\tau}_{\alpha 0}}{v^3 + v_c^3} \int_v^{\infty} dv' v'^2 \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp \left\{ p \left[ t - \frac{\tilde{\tau}_{\alpha 0}}{3} \ln \left( \frac{v'^3 + v_c^3}{v^3 + v_c^3} \right) \right] \right\} \tilde{S}(v', p),$$



que, usando a propriedade das transformadas de Laplace,

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp \left\{ p \left[ t - \frac{\tilde{\tau}_{\alpha 0}}{3} \ln \left( \frac{v'^3 + v_c^3}{v^3 + v_c^3} \right) \right] \right\} \tilde{S}(v', p) =$$

$$= S \left[ v', t - \frac{\tilde{\tau}_{\alpha 0}}{3} \ln \left( \frac{v'^3 + v_c^3}{v^3 + v_c^3} \right) \right],$$

pode ser escrita como,

$$f_{\alpha}(v, t) = \frac{\tilde{\tau}_{\alpha 0}}{v^3 + v_c^3} \int_v^{\infty} S \left[ v', t - \frac{\tilde{\tau}_{\alpha 0}}{3} \ln \left( \frac{v'^3 + v_c^3}{v^3 + v_c^3} \right) \right] v'^2 dv'. \quad (\text{IV.7})$$

Esta equação, que nos dá a distribuição de freamento das partículas alfa em termos da velocidade e do tempo, mostra que partículas que tem velocidade  $v$  no tempo  $t$ , foram criadas com velocidade  $v'$  em um tempo anterior  $\frac{\tau_{\alpha 0}}{3} \ln \left( \frac{v'^3 + v_c^3}{v^3 + v_c^3} \right)$ . O tempo  $\tau_0(v) = \frac{\tau_{\alpha 0}}{3} \ln \left( \frac{v^3 + v_c^3}{v_c^3} \right)$  é o tempo necessário para que uma partícula, criada com velocidade  $v$ , seja freada até atingir a velocidade  $v = 0$ . Entretanto, devemos ressaltar que, como o modelo adotado para descrever a região de freamento é tal que negligencia os efeitos de difusão nesta região, os resultados obtidos não são válidos para velocidades  $v < \bar{v}_{thi}$ , já que, para estas velocidades, o termo de difusão é dominante. Assim, o tempo  $\tau_0(v)$  seria o tempo necessário para que uma partícula, criada com velocidade  $v$ , atingisse a velocidade  $v = 0$ , caso não ocorressem efeitos de difusão.

O tempo de termalização, dado pela equação (III.20), po

de ser entendido como o tempo necessário para que partículas alfa, criadas com velocidade  $v_{\alpha 0}$ , atinjam a velocidade  $\bar{v}_{thi}$ , onde inicia a região de termalização, sendo este decréscimo de velocidade ocasionado, exclusivamente, pelo freamento originado nas colisões das partículas alfa com as partículas do plasma.

Se consideramos uma fonte do tipo delta em energia, como temos feito até aqui, e que dependa do tempo apenas no fato de ter sido ligada no tempo  $t = 0$  e, então, mantida constante, ou seja,

$$S(v, t) = \frac{S^0}{4\pi v_{\alpha 0}^2} \delta(v - v_{\alpha 0}) U(t), \quad (IV.8)$$

a distribuição de partículas alfa, dada pela equação (IV.7), assume a forma,

$$f_{\alpha}(v, t) = \frac{\tilde{\tau}_{\alpha 0} S^0}{4\pi (v^3 + v_c^3)} U \left[ t - \frac{\tilde{\tau}_{\alpha 0}}{3} \ln \left( \frac{v_{\alpha 0}^3 + v_c^3}{v^3 + v_c^3} \right) \right] U(v_{\alpha 0} - v). \quad (IV.9)$$

Esta distribuição mostra que, como no caso estacionário, não há partículas alfa com  $v > v_{\alpha 0}$ . Também, devido ao fato de termos desconsiderado os termos que originavam difusão de energia, todas as partículas alfa são freadas ao longo da mesma trajetória característica, dada por

$$V_m(t) = \left[ (v_{\alpha 0}^3 + v_c^3) e^{-3t/\tilde{\tau}_{\alpha 0}} - v_c^3 \right]^{1/3}. \quad (IV.10)$$

Para cada instante de tempo  $t$  fixo, existe uma veloci-



dade, que representamos por  $v_m(t)$  e que pode ser obtida da equação (IV.10), que é a mínima velocidade para a qual a distribuição, dada pela equação (IV.9), é não nula. Assim, a distribuição, expressa pela equação (IV.9), apresenta dois cortes verticais em velocidade: um, fixo, em  $v_{\alpha 0}$  e, o outro, dependente do tempo, e dado por  $v_m(t)$ . Em termos de  $v_m(t)$  a distribuição, dada pela equação (IV.9), pode ser escrita como,

$$f_{\alpha}(v, t) = \frac{\tilde{I}_{\alpha 0} S^0}{4\pi (v^3 + v_{\alpha 0}^3)} U(v - v_m(t)) U(v_{d0} - v). \quad (\text{IV.11})$$

A Figura IV.1 mostra a distribuição de freamento,  $f_{\alpha}(v, t)$ , dada pela equação (IV.11), no caso em que o plasma de deutério e trítio tem  $T_i = 6.5 \text{ keV}$ ,  $T_e = 3.5 \text{ keV}$ ,  $n_e = 4.5 \times 10^{13} \text{ cm}^{-3}$ ,  $n_d = n_t = \frac{1}{2} n_e$ , para diversos valores do tempo  $t$ . Observamos que a parte temporal da distribuição manifesta-se através de cortes verticais, ou seja, uma partícula alfa criada com velocidade de  $1.3 \times 10^9 \text{ cm.s}^{-1}$ , perde sua velocidade, por colisões, gradativamente, mas de tal forma que para um certo instante de tempo  $t$  fixo, existe um mínimo de velocidade que ela pode atingir. A curva que fornece a distribuição para  $t = \tau_0(v_{\alpha 0})$  coincide com a curva da distribuição estacionária, embora ambas não sejam válidas para  $v \leq \bar{v}_{thi}$ .

A Figura IV.2 também apresenta a distribuição de freamento no espaço de velocidade,  $f_{\alpha}(v, t)$  dada pela equação (IV.11), mas para um plasma de deutério e trítio tendo  $T_i = T_e = 11 \text{ keV}$ ,  $n_e = 1.6 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ ,  $n_d = n_t = \frac{1}{2} n_e$ . Comparando esta figura com a Figura IV.1, observamos que há um relativo acréscimo na distribuição, devido ao aumento da temperatura dos íons do plasma de



fundo.

A Figura IV.3 por sua vez apresenta a distribuição de freamento em função da energia,  $\tilde{f}_\alpha(E, t)$ , obtida a partir da equação (IV.11), para um plasma de deutério e trítio com  $T_i = T_e = 15$  keV,  $n_e = 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ ,  $n_d = n_t = \frac{1}{2} n_e$ .

As distribuições apresentadas nestas figuras mostram que é necessário um tempo relativamente longo para que elas atinjam a sua forma assintótica, que é aquela em que  $t = \tau_0(v_{\alpha 0})$ .

#### IV.4 - Distribuição Incluindo um Termo de Perda

Nesta secção analisamos o efeito, sobre a distribuição de freamento das partículas alfa, de um termo que leve em conta as perdas de partículas alfa pelo plasma, e que chamamos de termo de perda.

Em um plasma termonuclear confinado em um recipiente magnético as perdas de partículas alfa dependerão primordialmente das órbitas descritas por estas partículas [Mc74]. Em um modelo de plasma termonuclear do tipo que estamos considerando, de extensão infinita, os tipos de perdas a serem considerados são, por exemplo, os que expressam os efeitos de troca de carga e de recombinação. Efeitos de perda anômalos também devem ser considerados.

Levando em conta os efeitos de perda que dependam da velocidade das partículas, obtemos a distribuição de freamento das partículas alfa, neste caso, a partir da equação de Fokker-



-Planck (II.2), desconsiderando os efeitos de difusão e os efeitos devidos a presença de um campo elétrico. A distribuição  $\bar{f}$ , então, obtida da equação

$$\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} = \frac{1}{\tilde{\tau}_{\alpha 0} v^2} \frac{\partial}{\partial v} (f_{\alpha} h) + S - \nu_L(v) f_{\alpha}, \quad (\text{IV.12})$$

onde  $\nu_L(v) f_{\alpha}$  representa o termo de perda, sendo  $\nu_L(v)$  a frequência média de perda, e  $f_{\alpha} \equiv f_{\alpha}(v, t)$ .

Tomando a transformada de Laplace da equação (IV.12) em relação ao tempo, com a condição inicial  $f_{\alpha}(v, t=0) = 0$ , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}_{\alpha}(v, p)}{\partial v} + \left[ \frac{d h(v)}{d v} - p \tilde{\tau}_{\alpha 0} v^2 - \nu_L(v) \tilde{\tau}_{\alpha 0} v^2 \right] \frac{\tilde{f}_{\alpha}(v, p)}{h(v)} = \\ = - \frac{\tilde{\tau}_{\alpha 0} v^2}{h(v)} \tilde{S}(v, p). \end{aligned} \quad (\text{IV.13})$$

Resolvendo esta equação, com a condição de contorno  $\tilde{f}_{\alpha}(v \rightarrow \infty, p) \rightarrow 0$  e  $h(v) \cong v^3 + v_c^3$ , temos,

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{\alpha}(v, p) = \tilde{\tau}_{\alpha 0} \frac{(v^3 + v_c^3)^{\tilde{\tau}_{\alpha 0} p/3}}{v^3 + v_c^3} \int_v^{\infty} \frac{d v' v'^2 \tilde{S}(v', p)}{(v'^3 + v_c^3)^{\tilde{\tau}_{\alpha 0} p/3}} \times \\ \times \exp \left( - \tilde{\tau}_{\alpha 0} \int_v^{v'} \frac{\nu_L(v'') v''^2 dv''}{v''^3 + v_c^3} \right), \end{aligned} \quad (\text{IV.14})$$

que, após a inversão da transformada de Laplace, nos fornece, pa

ra a distribuição de freamento das partículas alfa em termos da fonte, a seguinte expressão,

$$f_{\alpha}(v, t) = \frac{\tilde{\tau}_{\alpha 0}}{v^3 + v_c^3} \int_v^{\infty} \exp\left(-\tilde{\tau}_{\alpha 0} \int_v^{v'} \frac{\nu_L(v'') v''^2 dv''}{v''^3 + v_c^3}\right) \times \\ \times S\left[v', t - \frac{\tilde{\tau}_{\alpha 0}}{3} \ln\left(\frac{v'^3 + v_c^3}{v^3 + v_c^3}\right)\right] v'^2 dv' \quad (\text{IV.15})$$

Comparando este resultado com o resultado correspondente obtido no caso em que o termo de perda não era considerado, dado pela equação (IV.7), notamos que o efeito da presença do termo de perda está localizado no fator

$$\exp\left(-\tilde{\tau}_{\alpha 0} \int_v^{v'} \frac{\nu_L(v'') v''^2 dv''}{v''^3 + v_c^3}\right),$$

que ocorre no integrando da equação (IV.15). A evolução temporal da distribuição não é, evidentemente, afetada pela presença do termo de perda, no modelo adotado, pois supomos  $\nu_L(v)$  independente do tempo.

Se supomos que a frequência média de perda,  $\nu_L(v)$ , independe de  $v$ , temos, a partir da equação (IV.15),

$$f_{\alpha}(v, t) = \tilde{\tau}_{\alpha 0} \frac{(v^3 + v_c^3)^{\nu_L \tilde{\tau}_{\alpha 0} / 3}}{v^3 + v_c^3} \times \\ \times \int_v^{\infty} S\left[v', t - \frac{\tilde{\tau}_{\alpha 0}}{3} \ln\left(\frac{v'^3 + v_c^3}{v^3 + v_c^3}\right)\right] \frac{v'^2 dv'}{(v'^3 + v_c^3)^{\nu_L \tilde{\tau}_{\alpha 0} / 3}}, \quad (\text{IV.16})$$



que, para o termo de fonte dado pela equação (IV.8), assume a forma

$$f_{\alpha}(V, t) = \frac{\tilde{L}_{\alpha 0} S^0}{4\pi(V^3 + V_c^3)} \left( \frac{V^3 + V_c^3}{V_{\alpha 0}^3 + V_c^3} \right)^{\nu_L \tilde{L}_{\alpha 0} / 3} U(V - V_m(t)) U(V_{\alpha 0} - V). \quad (\text{IV.17})$$

Comparando com a distribuição dada pela equação (IV.9), que descreve a mesma situação que a descrita pela equação (IV.17), exceto pela presença do termo de perda nesta última, vemos que o efeito do termo de perda está contido no fator  $\left( \frac{v^3 + v_c^3}{v_{\alpha 0}^3 + v_c^3} \right)^{\nu_L \tau_{\alpha 0} / 3}$ , que é importante, no sentido de alterar substancialmente a distribuição dada pela equação (IV.7), quando  $\nu_L \tau_{\alpha 0} > 3$ .

As Figuras IV.4 e IV.5 mostram os efeitos sobre a distribuição estacionária de um termo de perda em que  $\nu_L = \text{constante}$ , em função da velocidade e da energia, respectivamente. As distribuições dependentes do tempo diferem destas apenas pelos cortes verticais para os diferentes tempos. Ambos os gráficos foram realizados para um plasma de deutério e trítio em que  $T_i = T_e = 15 \text{ keV}$ ,  $n_e = 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ ,  $n_d = n_t = \frac{1}{2} n_e$ . Para  $\nu_L = 0$  as distribuições são as distribuições estacionárias sem termo de perda. Observamos que há uma acentuada diminuição da distribuição a medida que  $\nu_L$  aumenta, como se espera.

Considerando efeitos de perda predominantemente do tipo de troca de carga, podemos supor que a frequência média de perda é dada por

$$\nu_{L, m}(V) = \nu_{L, 0} \left( \frac{V_c}{V} \right)^m, \quad (\text{IV.18})$$

sendo  $v_{L,0}$  e  $v_c$  constantes e  $n$  um índice.

De forma geral, a distribuição de partículas alfa, incluindo um termo de perda, para uma fonte de forma qualquer  $S(v, t)$  pode ser escrita como,

$$f_{\alpha}(v, t) = \frac{\tilde{\tau}_{\alpha 0}}{v^3 + v_c^3} M(v, v_c) \int_v^{\infty} M(v_c, v') S \left[ v', t - \frac{\tilde{\tau}_{\alpha 0}}{3} \ln \left( \frac{v'^3 + v_c^3}{v^3 + v_c^3} \right) \right] v'^2 dv', \quad (\text{IV.19})$$

onde

$$M(v_1, v_2) = \exp \left( - \tilde{\tau}_{\alpha 0} \int_{v_1}^{v_2} \frac{v_L(v) v^2 dv}{v^3 + v_c^3} \right).$$

Tendo a fonte a forma dada pela equação (IV.8), a equação (IV.19) pode ser escrita como,

$$f_{\alpha}(v, t) = \frac{\tilde{\tau}_{\alpha 0} S^0}{4\pi(v^3 + v_c^3)} M(v, v_{\alpha 0}) U(v - v_m(t)) U(v_{\alpha 0} - v). \quad (\text{IV.20})$$

O fator que expressa o efeito do termo de perda sobre a distribuição,  $M(v, v_{\alpha 0})$ , foi calculado para  $v_L(v)$  dado pela equação (IV.18), para alguns valores de  $n$  inteiro. Estes diferentes valores de  $M(v, v_{\alpha 0})$ , que representamos  $M_n(v, v_{\alpha 0})$ , são dados a seguir.

$$M_0(v, v_{\alpha 0}) = \left( \frac{v^3 + v_c^3}{v_{\alpha 0}^3 + v_c^3} \right)^{\tilde{\tau}_{\alpha 0} v_{L,0}/3}$$



$$M_1(V, V_{d0}) = \left[ \frac{(V^3 + V_c^3)^{1/2}}{(V_{d0}^3 + V_c^3)^{1/2}} \frac{(V_{d0} + V_c)^{3/2}}{(V + V_c)^{3/2}} \right]^{\tilde{\gamma}_{d0} \gamma_{L10} / 3} \times$$

$$\times \exp \left\{ \frac{\tilde{\gamma}_{d0} \gamma_{L10}}{\sqrt{3}} \left[ \tan^{-1} \frac{2V - V_c}{V_c \sqrt{3}} - \tan^{-1} \frac{2V_{d0} - V_c}{V_c \sqrt{3}} \right] \right\}$$

$$M_2(V, V_{d0}) = \left[ \frac{(V_{d0}^3 + V_c^3)}{(V^3 + V_c^3)} \frac{(V + V_c)^3}{(V_{d0} + V_c)^3} \right] M_1(V, V_{d0})$$

$$M_3(V, V_{d0}) = \left( \frac{V}{V_{d0}} \right)^{\tilde{\gamma}_{d0} \gamma_{L10}} M_0(V_{d0}, V)$$

$$M_4(V, V_{d0}) = \exp \left[ \tilde{\gamma}_{d0} \gamma_{L10} V_c \left( \frac{1}{V_{d0}} - \frac{1}{V} \right) \right] M_1(V_{d0}, V)$$

$$M_5(V, V_{d0}) = \exp \left[ \frac{\tilde{\gamma}_{d0} \gamma_{L10} V_c^2}{2} \left( \frac{1}{V_{d0}^2} - \frac{1}{V^2} \right) \right] \times$$

$$\times \left[ \frac{(V^3 + V_c^3)}{(V_{d0}^3 + V_c^3)} \frac{(V_{d0} + V_c)^3}{(V + V_c)^3} \right]^{\tilde{\gamma}_{d0} \gamma_{L10} / 3} M_1(V_{d0}, V)$$

$$M_6(V, V_{d0}) = \exp \left[ \frac{\tilde{\gamma}_{d0} \gamma_{L10} V_c^3}{3} \left( \frac{1}{V_{d0}^3} - \frac{1}{V^3} \right) \right] \left( \frac{V_{d0}}{V} \right)^{\tilde{\gamma}_{d0} \gamma_{L10}} M_0(V, V_{d0}).$$

#### IV.5 - Efeito do Campo Elétrico

Nesta seção incluímos o efeito produzido pela aceleração, originada pela presença de um campo elétrico, sobre a distribuição de freamento das partículas alfa. Os efeitos de difusão de energia novamente não são considerados. A distribuição é, então, obtida a partir da equação de Fokker-Planck,

$$\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} + \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \vec{E} \cdot \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} \Big|_c + S - \nu_{\alpha}(v) f_{\alpha}. \quad (\text{IV.21})$$

A presença de um campo elétrico perpendicular ao campo magnético,  $\vec{E}_{\perp}$ , originaria uma deriva do tipo  $\vec{E}_{\perp} \times \vec{B}_0$ , transversal aos campos, de elétrons e de íons. Tal efeito pode ser desconsiderado se o sistema de referência utilizado for um sistema de referência de deriva.

Consideramos um campo elétrico paralelo ao campo magnético. A presença de um campo elétrico tem como consequência imediata que a função distribuição não permanece esfericamente simétrica, mas mantém apenas simetria axial em relação à direção do campo magnético, como já foi apontado no Capítulo II. A distribuição, neste caso, é  $f_{\alpha} \equiv f_{\alpha}(v, \xi, t)$ , onde  $\xi = \cos\theta$  e  $\theta$  é o ângulo polar.

Usando o operador colisão dado pela equação (II.18), desprezando os termos correspondentes à difusão que ocorrem neste, e, tomando um campo elétrico paralelo ao campo magnético, a equação (IV.21) assume a forma,



$$\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} + \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} E_{\text{ef}\parallel} \left( \gamma \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial v} + \frac{(1-\gamma^2)}{v} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \gamma} \right) =$$

$$= \frac{1}{\tau_{\alpha 0}} \left( \frac{v_c^3 Z_2}{2 v^3} \frac{\partial}{\partial \gamma} (1-\gamma^2) \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \gamma} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} (h(v) f_{\alpha}) \right) + S - \nu_L(v) f_{\alpha}, \quad (\text{IV.22})$$

onde  $E_{\text{ef}\parallel}$  é a magnitude do campo elétrico efetivo, incluindo correções neoclássicas [FR72], dado por,

$$\bar{E}_{\text{ef}\parallel} = E_{\parallel} \left( 1 - \frac{2}{Z_1 Z_2} \right).$$

Para obtermos a distribuição de freamento das partículas alfa que inclui também o efeito da presença de um campo elétrico, resolvemos a equação (IV.22), expandindo sua solução em uma série de potências na magnitude do campo elétrico,

$$f_{\alpha}(v, \gamma, t) = f_{\alpha}^0(v, t) + \delta \gamma f_{\alpha}^1(v, t) + \dots, \quad (\text{IV.23})$$

onde  $\delta = \frac{E_{\text{ef}\parallel}}{E_D} \frac{v}{v_{\alpha 0}}$  e  $E_D$  é o campo elétrico de Dreicer [Dr60], dado por

$$E_D = \frac{4\pi}{3} \frac{m_e c^2 e_{\alpha}^2 \ln \Lambda}{m_e v_{\text{the}}^2}.$$

A expansão proposta na equação (IV.23) para a função distribuição pode ser justificada se lembrarmos que, ao obtermos a distribuição de freamento, estamos considerando apenas a região do espaço de velocidade em que  $\bar{v}_{\text{th}\alpha} < v \leq v_{\alpha 0}$ , e que, para tokamaks, temos  $\frac{E_{\text{ef}\parallel}}{E_D} \sim 10^{-2}$  e, portanto,  $\delta \ll 1$ .

Usando  $h(v) \equiv v^3 + v_c^3$ , a expansão (IV.23) substituída na equação (IV.22), nos fornece, em ordem zero no parâmetro de expansão, a equação,

$$\tilde{\tau}_{\alpha 0} \frac{\partial f_{\alpha}^0}{\partial t} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[ (v^3 + v_c^3) f_{\alpha}^0 \right] + \tilde{\tau}_{\alpha 0} S - \tilde{\tau}_{\alpha 0} v_L(v) f_{\alpha}^0, \quad (\text{IV.24})$$

e, em primeira ordem no parâmetro de expansão, a equação,

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_{\alpha 0} \frac{\partial f_{\alpha}^1}{\partial t} + v_{\alpha 0} \frac{\partial f_{\alpha}^0}{\partial v} = & - \frac{v_c^3}{v^3} Z_2 f_{\alpha}^1 + \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[ (v_c^3 + v^3) f_{\alpha}^1 \right] - \\ & - v_L(v) \tilde{\tau}_{\alpha 0} f_{\alpha}^1. \end{aligned} \quad (\text{IV.25})$$

A equação (IV.24) mostra que  $f_{\alpha}^0$  é a distribuição de frequência na ausência de campo elétrico, e esta foi obtida na secção IV.4 deste capítulo.

Para obtermos a correção em primeira ordem em  $\delta \tilde{a}$  distribuição, tomamos a transformada de Laplace da equação (IV.25) em relação a variável  $t$ , com a condição inicial  $f_{\alpha}^0(v, t=0) = 0$ , e obtemos,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}_{\alpha}^1}{\partial v} + \left( 3v^2 - \frac{v_c^3 Z_2}{v} - v_L(v) \tilde{\tau}_{\alpha 0} v^2 - \tilde{\tau}_{\alpha 0} p v^2 \right) \frac{\tilde{f}_{\alpha}^1}{v^3 + v_c^3} = \\ = \frac{v_{\alpha 0} v^2}{v^3 + v_c^3} \frac{\partial \tilde{f}_{\alpha}^0}{\partial v}, \end{aligned}$$

onde  $\tilde{f}_{\alpha}^1$  é a transformada de Laplace em relação a  $t$  de  $f_{\alpha}^1(v, t)$ .

Resolvendo esta equação para  $v_L(v) = v_L = \text{constante}$  e



$Z_2 = 3$ , obtemos, após a inversão da transformada de Laplace, a seguinte distribuição de freamento, válida apenas até primeira ordem no campo elétrico,

$$f_{\alpha}(v, z, t) = f_0(v) \left[ 1 + \delta z \mu(v) (1 + (3 - \nu_L \tilde{\tau}_{\alpha 0}) w(v)) \right] \times \\ \times U(t - t_0(v) - t_1(v, z)) U(v_{\alpha 0} - v), \quad (\text{IV.26})$$

onde

$$f_0(v) = \frac{\tilde{\tau}_{\alpha 0} S^0}{4\pi(v^3 + v_c^3)} \left( \frac{v^3 + v_c^3}{v_{\alpha 0}^3 + v_c^3} \right)^{\nu_L \tilde{\tau}_{\alpha 0} / 3},$$

$$\mu(v) = \frac{v^3}{v^3 + v_c^3},$$

$$w(v) = v_{\alpha 0} \int_v^{v_{\alpha 0}} \frac{v' dv'}{v'^3 + v_c^3},$$

$$t_0(v) = \frac{\tilde{\tau}_{\alpha 0}}{3} \ln \left( \frac{v_{\alpha 0}^3 + v_c^3}{v^3 + v_c^3} \right),$$

$$t_1(v, z) = \delta z \tilde{\tau}_{\alpha 0} \mu(v) w(v).$$

A distribuição estacionária neste caso é dada por

$$f_{\alpha}(v, z) = f_0(v) \left[ 1 + \delta z \mu(v) (1 + (3 - \nu_L \tilde{\tau}_{\alpha 0}) w(v)) \right] U(v_{\alpha 0} - v), \quad (\text{IV.27})$$

e coincide com a distribuição estacionária, obtida a partir da equação (IV.17), quando a correção em primeira ordem, devida ao campo elétrico, for excluída.

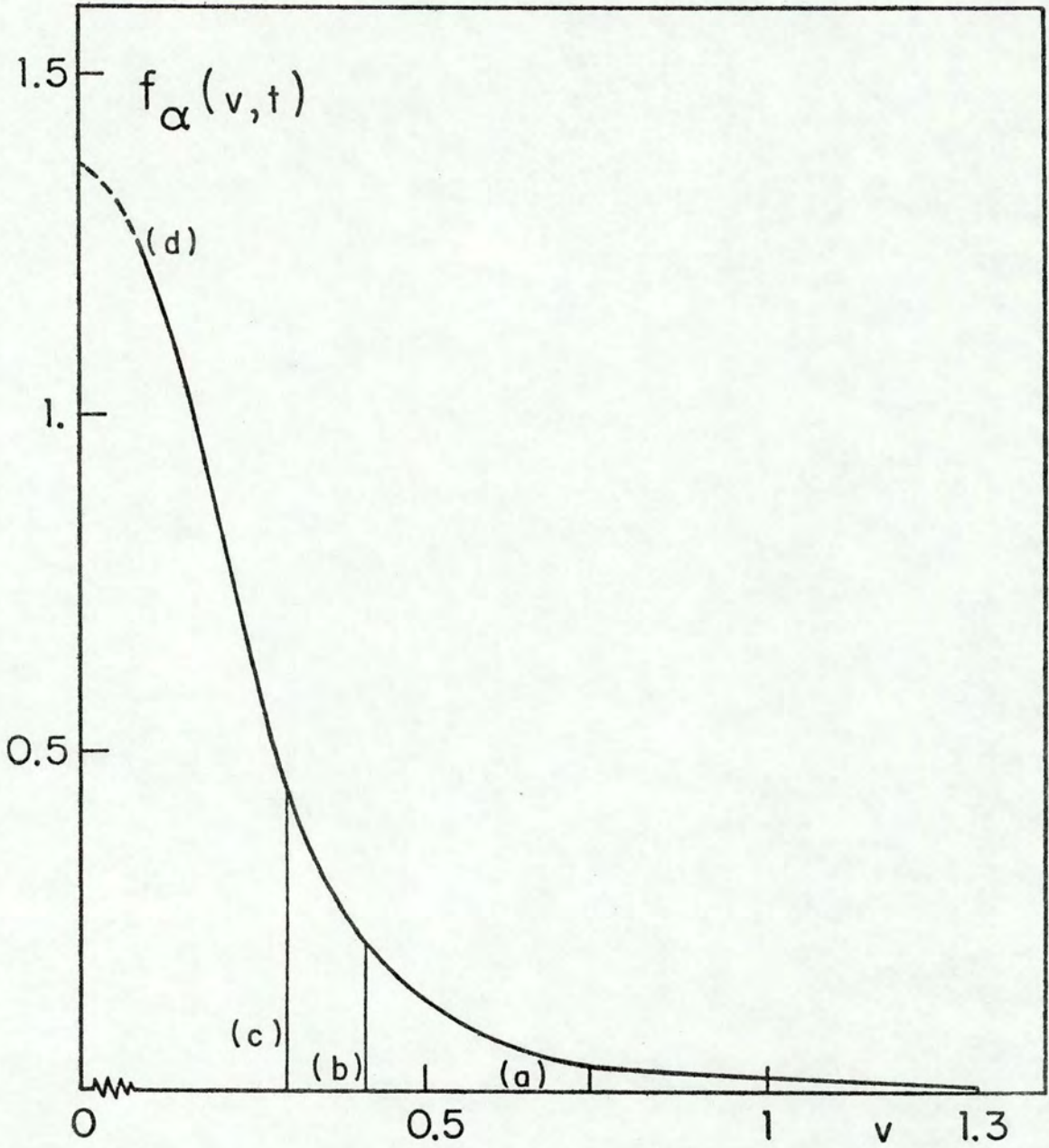


Figura IV.1 - Distribuição de freamento  $f_{\alpha}(v, t)$ , em unidades de  $10^{-17} \text{ cm}^{-6} \cdot \text{s}^3$ , em função de  $v$  dado em unidades de  $10^9 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ , para  $T_i = 6.5 \text{ keV}$ ,  $T_e = 3.5 \text{ keV}$ ,  $n_e = 4.5 \times 10^{13} \text{ cm}^{-3}$ ,  $n_d = n_t = \frac{1}{2} n_e$ , sendo a)  $t = 0.1 \text{ s}$ ; b)  $t = 0.2 \text{ s}$ ; c)  $t = 0.25 \text{ s}$ ; d)  $t = \tau_0(v_{\alpha 0}) = 0.31 \text{ s}$ .



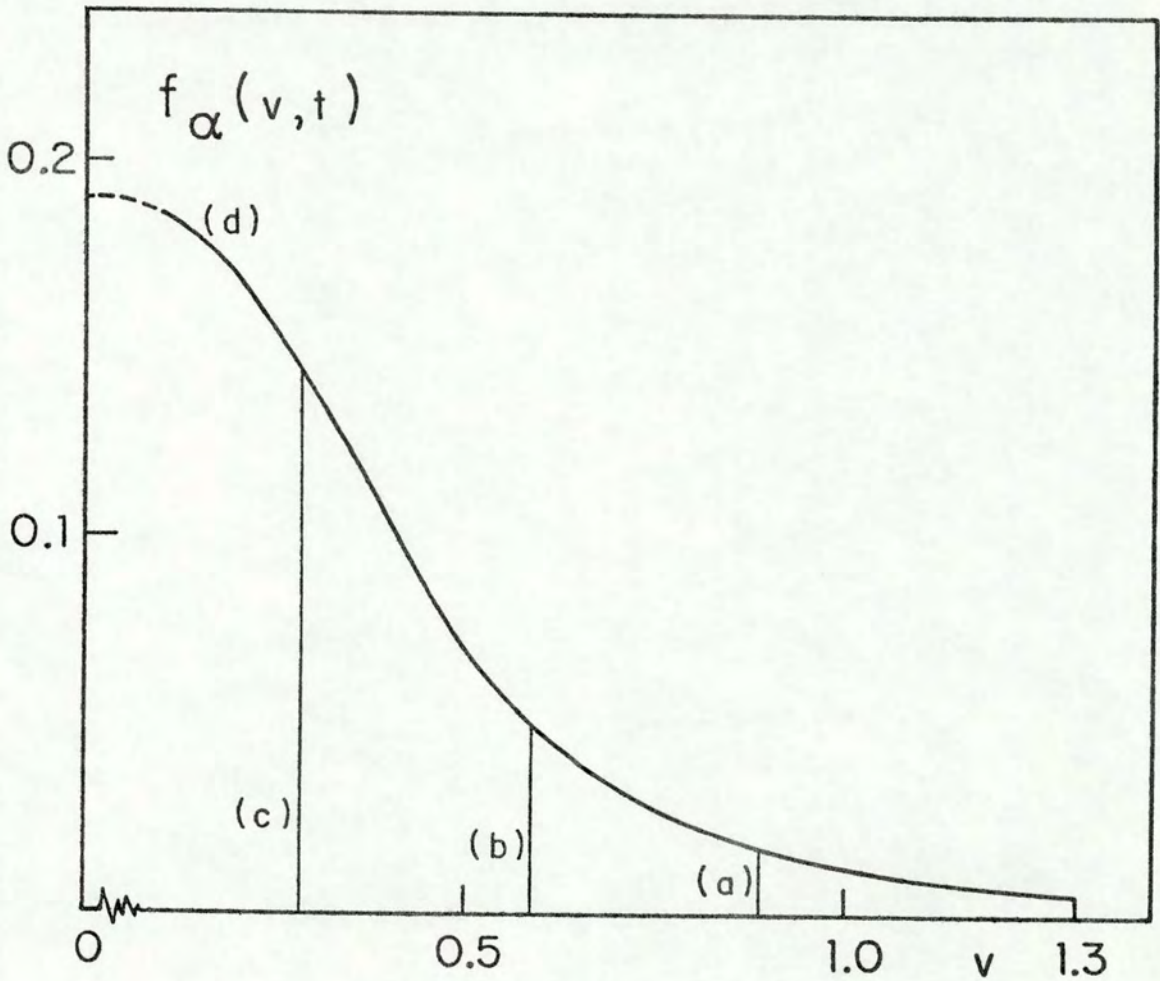


Figura IV.2 - Distribuição de freamento  $f_{\alpha}(v,t)$ , em unidades de  $10^{-15} \text{ cm}^{-6} \cdot \text{s}^3$ , em função de  $v$  dado em unidades de  $10^9 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ , para  $T_i = T_e = 11 \text{ keV}$ ,  $n_e = 1.6 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ ,  $n_d = n_t = \frac{1}{2} n_e$ , sendo: a)  $t = 0.1 \text{ s}$ ; b)  $t = 0.2 \text{ s}$ ; c)  $t = 0.3 \text{ s}$ ; d)  $t = \tau_o(v_{\alpha o}) = 0.33 \text{ s}$ .

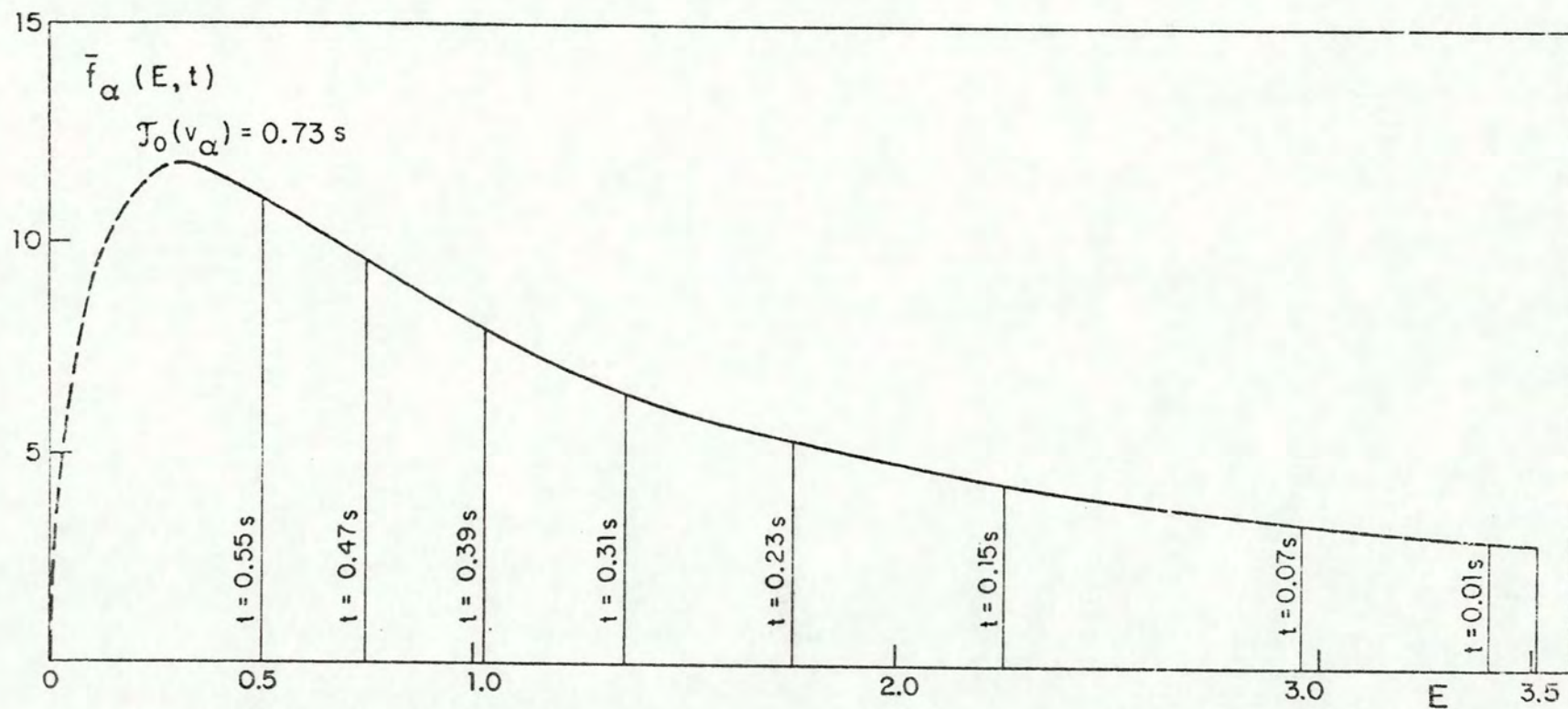


Figura IV.3 Distribuição de freamento  $\bar{f}_\alpha(E, t) = \frac{E_c^{3/2}}{2\pi\tau_{\alpha 0} S^0} f_\alpha(E, t)$ , dada em  $(\text{keV})^{1/2}$ , em função da energia  $E$  dada em MeV, para  $T_i = T_e = 15 \text{ keV}$ ,  $n_e = 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ ,  $n_d = n_t = \frac{1}{2} n_e$ , para os diversos tempos mostrados na figura.



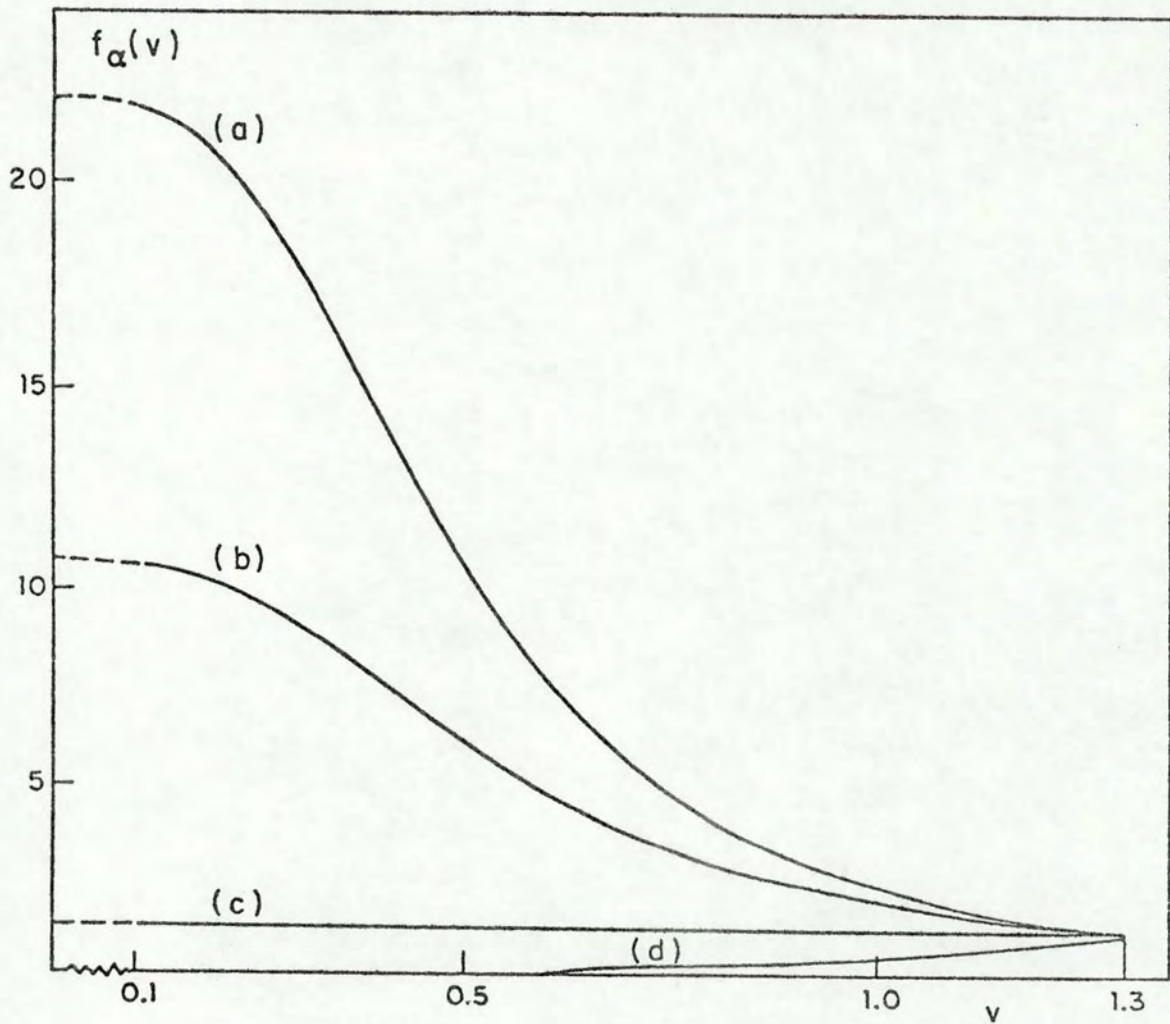


Figura IV.4 - Distribuição estacionária de freamento  $f_\alpha(v)$ , em unidades de  $10^{-16} \text{ cm}^{-6} \cdot \text{s}^3$ , em função de  $v$  dado em unidades de  $10^9 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ , incluindo um termo de perda em que  $\nu_L = \text{constante}$ , sendo  $T_e = T_i = 15 \text{ keV}$ ,  $n_e = 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ ,  $n_d = n_t = \frac{1}{2} n_e$ , para: a)  $\nu_L = 0$ ; b)  $\nu_L = 1$ ; c)  $\nu_L = 4$ ; d)  $\nu_L = 10$  ( $\nu_L$  em  $\text{s}^{-1}$ ).

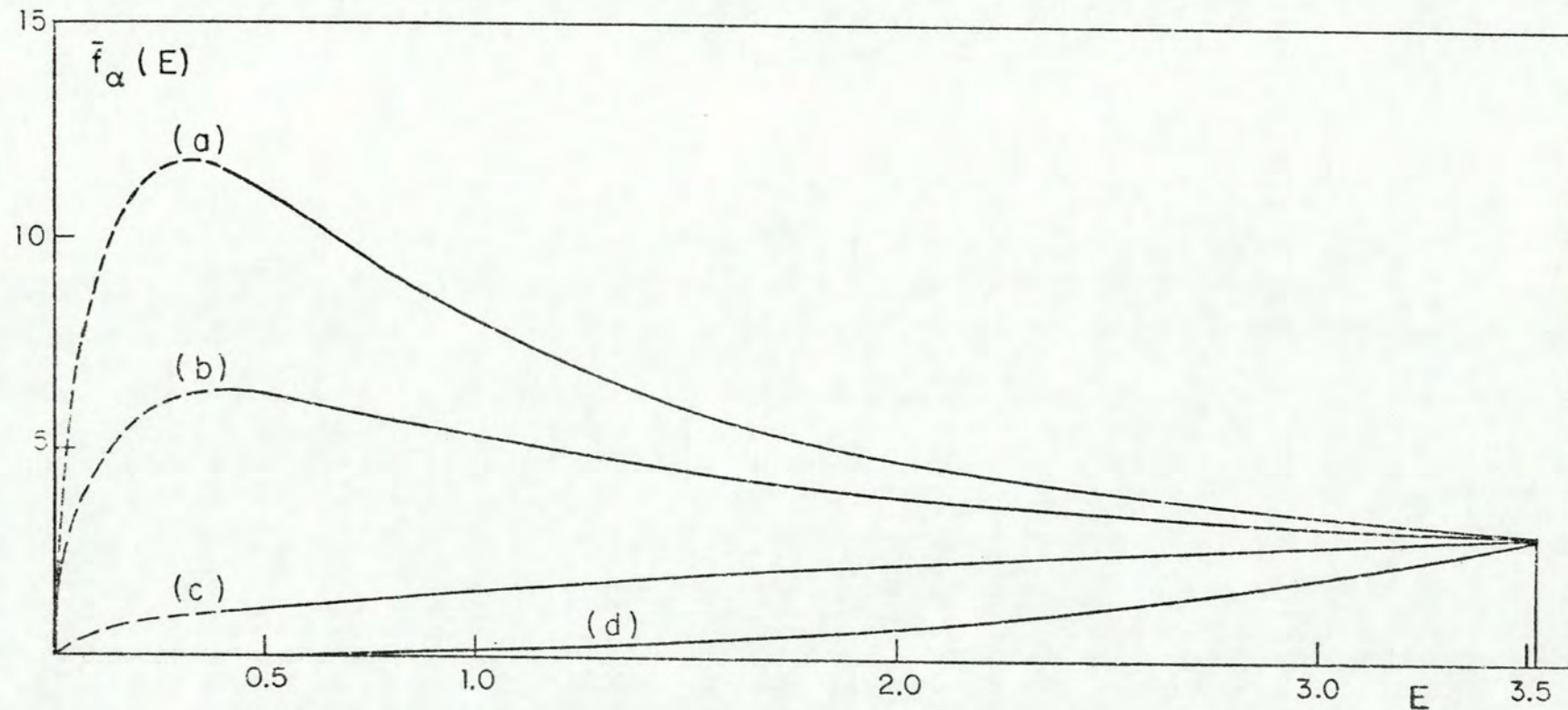


Figura IV.5 - Distribuição estacionária de freamento  $\bar{f}_\alpha(E) = \frac{E_c^{3/2}}{2\pi\tau_{\alpha 0} S^0} f_\alpha(E)$ ,  
 dada em  $(\text{keV})^{1/2}$ , em função da energia  $E$  dada em MeV, para  
 $T_i = T_e = 15 \text{ keV}$ ,  $n_e = 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ ,  $n_d = n_t = \frac{1}{2} n_e$ , incluindo um ter-  
 mo de perda em que  $v_L = \text{constante}$ , para: a)  $v_L = 0$ ; b)  $v_L = 1$ ;  
 c)  $v_L = 4$ ; d)  $v_L = 10$  ( $v_L$  em  $\text{s}^{-1}$ ).



## V - DISTRIBUIÇÃO DE ALTA ENERGIA DAS PARTÍCULAS ALFA

### V.1 - Introdução

Neste capítulo estudamos especificamente a distribuição de partículas alfa na região de alta energia do espaço de velocidades, onde  $\epsilon_{\alpha} \geq \epsilon_{\alpha 0} = 3.52 \text{ MeV}$ , a que chamamos de distribuição de alta energia das partículas alfa. Na região de alta energia, caracterizada por velocidades que vão desde a velocidade de criação das partículas alfa,  $v_{\alpha 0}$ , até velocidades muito menores do que a velocidade térmica dos elétrons,  $v_{the}$ , as partículas alfa ganham energia em consequência das colisões que sofrem com as partículas componentes do plasma de fundo, predominantemente com os elétrons. Como a massa das partículas alfa é muito maior do que a massa dos elétrons e maior do que a dos íons, é de se esperar que o número de partículas alfa com possibilidade de difusão seja pequeno, ou seja, que a distribuição de alta energia se constitua em uma cauda da distribuição total, rapidamente decrescente com o aumento de velocidade.

No Capítulo III, ao estudarmos a distribuição termalizada de partículas alfa, obtivemos o limite assintótico no tempo da distribuição de alta energia, no caso em que tanto o termo de perda como o campo elétrico foram excluídos. Não foi obtida nenhuma informação sobre a evolução temporal da distribuição de alta energia, já que o procedimento adotado naquele capítulo não o permitia.

Neste capítulo nos restringimos à região de alta ener

gia, excluindo os efeitos de perda e os efeitos decorrentes da presença de um campo elétrico. Estas restrições possibilitam simplificações drásticas na equação de Fokker-Planck (II.2), em particular na forma do termo de colisão, que tornam viável uma solução analítica aproximada para a equação que nos fornece a distribuição. Na secção V.2 é obtida a distribuição estacionária e na secção V.3 sua evolução temporal é analisada.

## V.2 - Distribuição Estacionária

A distribuição estacionária de partículas alfa na região de alta energia, não levando em conta o termo de perda e a presença de um campo elétrico, pode ser obtida da equação

$$\frac{T_e}{m_\alpha} \frac{d^2 f_\alpha}{dV^2} + V \frac{df_\alpha}{dV} + 3f_\alpha = -\tilde{\zeta}_{\alpha 0} S(V), \quad (V.1)$$

que, para o caso de um termo de fonte dado pela equação (III.5), assume a forma

$$\frac{T_e}{m_\alpha} \frac{d^2 f_\alpha}{dV^2} + V \frac{df_\alpha}{dV} + 3f_\alpha = -\frac{S^0 \tilde{\zeta}_{\alpha 0}}{4\pi v_{\alpha 0}^2} \delta(V - v_{\alpha 0}). \quad (V.2)$$

Estas equações são válidas somente para velocidades  $v$  próximas a  $v_{\alpha 0}$ .

A equação diferencial homogênea associada à equação (V.2) é

$$\frac{T_e}{m_\alpha} \frac{d^2 f_\alpha}{dV^2} + V \frac{df_\alpha}{dV} + 3f_\alpha = 0. \quad (V.3)$$



Notamos que, quando  $\frac{T_e}{m_\alpha v_{\alpha 0}^2} \rightarrow 0$ , que é o caso que estamos considerando, temos uma perturbação singular [Dy64]; portanto, esperamos que a solução desta equação seja uma solução quase singular.

São duas soluções linearmente independentes da equação homogênea (V.3), as funções

$$f_1(v) = \left( \frac{m_\alpha v^2}{T_e} - 1 \right) \exp\left(-\frac{m_\alpha v^2}{2 T_e}\right) \int_0^{\sqrt{\frac{m_\alpha}{T_e}} v} e^{\frac{1}{2} t^2} dt - \sqrt{\frac{m_\alpha}{T_e}} v \quad (V.4)$$

e

$$f_2(v) = \left( \frac{m_\alpha v^2}{T_e} - 1 \right) \exp\left(-\frac{m_\alpha v^2}{2 T_e}\right). \quad (V.5)$$

Podemos expressar a função

$$\exp\left(-\frac{m_\alpha v^2}{2 T_e}\right) \int_0^{\sqrt{\frac{m_\alpha}{T_e}} v} e^{\frac{1}{2} t^2} dt,$$

que ocorre na expressão da solução  $f_1(v)$ , em termos da função dispersão do plasma [FC61], a função  $Z$ , para argumento real,

$$\exp\left(-\frac{m_\alpha v^2}{2 T_e}\right) \int_0^{\sqrt{\frac{m_\alpha}{T_e}} v} e^{\frac{1}{2} t^2} dt = -\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Re} \left\{ Z \left( \sqrt{\frac{m_\alpha}{2 T_e}} v \right) \right\}.$$

Como estamos considerando velocidades maiores do que a velocidade de criação das partículas alfa,  $\frac{m_\alpha v^2}{2 T_e} \gg 1$ , podemos usar,

então, a expansão assintótica para grande argumento da parte real da função dispersão do plasma [FC61], obtendo

$$\exp\left(-\frac{m_d v^2}{2 T_e}\right) \int_0^{\sqrt{\frac{m_d}{T_e}} v} e^{\frac{1}{2} t^2} dt \approx \left(\frac{T_e}{m_d v^2}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{T_e}{m_d v^2} + \frac{3 T_e^2}{m_d^2 v^4} + \frac{15 T_e^3}{m_d^3 v^6}\right),$$

que nos permite escrever a solução  $f_1(v)$ , de forma aproximada, como,

$$f_1(v) \approx 2 \left(\frac{T_e}{m_d v^2}\right)^{3/2} \left(1 + \frac{6 T_e}{m_d v^2}\right), \quad (V.6)$$

que é uma solução da equação homogênea associada à equação (V.2), válida até ordem  $\left(\frac{T_e}{m_d v^2}\right)^{5/2}$ .

Construímos uma solução para a equação diferencial não homogênea (V.2) da seguinte forma,

$$f(v) = C_1 f_1(v) U(v_{\alpha 0} - v) + C_2 f_2(v) U(v - v_{\alpha 0}), \quad (V.7)$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são constantes a determinar.

A função  $f_1(v)$  foi escolhida como solução para  $v \leq v_{\alpha 0}$  pois tal solução, em mais baixa ordem em  $\frac{T_e}{m_d v^2}$ , varia com  $v^{-3}$ , o que está em concordância com a solução na região de freamento, dada pela equação (IV.3), desprezando termos em  $v_c^3$ , já que na região que agora estamos considerando  $v_c^3 \ll v^3 \leq v_{\alpha 0}^3$ . A função  $f_2(v)$  foi escolhida como solução para  $v \geq v_{\alpha 0}$  pois, quando  $\frac{T_e}{m_d v^2} \rightarrow 0$ ,  $f_2 \rightarrow 0$  e também por  $f_2$  tender a zero suficientemente rápido quando  $v \rightarrow \infty$ .



Impondo a condição de continuidade da solução  $f_\alpha$  em  $v = v_{\alpha 0}$ , podemos expressar a distribuição  $f_\alpha$  em termos de apenas uma constante C, da seguinte forma,

$$f_\alpha(v) = C \left( f_1(v) f_2(v_{\alpha 0}) U(v_{\alpha 0} - v) + f_1(v_{\alpha 0}) f_2(v) U(v - v_{\alpha 0}) \right). \quad (V.8)$$

A constante C, por sua vez, é obtida impondo que  $f_\alpha(v)$ , dada pela equação (V.8), seja solução da equação (V.2). Obtemos,

$$C = \frac{S^0 \tilde{\tau}_{\alpha 0} m_\alpha}{4\pi v_{\alpha 0}^2 T_e} \left( \frac{df_1}{dv} f_2 - f_1 \frac{df_2}{dv} \right)_{v=v_{\alpha 0}}^{-1}.$$

Usando a função  $f_1$  dada pela equação (V.6) e a função  $f_2$  dada pela equação (V.5), e mantendo apenas o termo dominante no wronskiano de  $f_1$  e  $f_2$ , que ocorre no denominador de C, temos

$$C = \frac{S^0 \tilde{\tau}_{\alpha 0}}{8\pi v_{\alpha 0}^2} \left( \frac{m_\alpha}{T_e} \right)^{1/2} e^{m_\alpha v_{\alpha 0}^2 / 2T_e}.$$

Com esta constante C, obtemos para a distribuição  $f_\alpha$ , se consideramos que a distribuição é válida para  $v \approx v_{\alpha 0}$  e desprezamos termos da ordem de  $\frac{T_e^2}{m_\alpha v_{\alpha 0}^4}$ , a seguinte expressão

$$f_\alpha(v) = \frac{S^0 \tilde{\tau}_{\alpha 0}}{4\pi v^3} \left( 1 - \frac{T_e}{m_\alpha v_{\alpha 0}^2} + \frac{6T_e}{m_\alpha v^2} \right) U(v_{\alpha 0} - v) + \frac{S^0 \tilde{\tau}_{\alpha 0}}{4\pi v_{\alpha 0}^3} \frac{v^2}{v_{\alpha 0}^2} \left( 1 + \frac{6T_e}{m_\alpha v_{\alpha 0}^2} - \frac{T_e}{m_\alpha v^2} \right) \exp\left(-\frac{m_\alpha(v^2 - v_{\alpha 0}^2)}{2T_e}\right) U(v - v_{\alpha 0}), \quad (V.9)$$

válida até ordem  $\xi \equiv \frac{T_e}{m_\alpha v_{\alpha 0}^2} \approx 10^{-3}$ , ou seja, esta solução satisfaz a equação (V.2) até ordem  $\xi$ .

A equação (V.9) mostra que, para  $v > v_{\alpha 0}$ , a distribuição decai rapidamente, com meia largura dada por  $\Delta v_{1/2} \approx \frac{T_e \ln 2}{m_\alpha v_{\alpha 0}}$ , ao passo que, para  $v < v_{\alpha 0}$ , a distribuição é alargada de uma quantidade  $\frac{T_e}{m_\alpha v^2}$ .

Desprezando termos da ordem de  $\xi$ , a solução (V.9) assume a forma,

$$f_\alpha(v) = \frac{S^0 \tilde{\tau}_{\alpha 0}}{4\pi v^3} U(v_{\alpha 0} - v) + \frac{S^0 \tilde{\tau}_{\alpha 0} v^2}{4\pi v_{\alpha 0}^5} \exp\left(\frac{-m_\alpha (v^2 - v_{\alpha 0}^2)}{2T_e}\right) U(v - v_{\alpha 0}), \quad (\text{V.10})$$

válida em ordem  $\xi^0$ .

Obtivemos no Capítulo III, a partir da distribuição termalizada das partículas alfa, as distribuições assintóticas no tempo, válidas nas regiões de termalização, freamento e alta energia.

A partir da equação (III.17), a distribuição assintótica na região de freamento, considerando apenas o termo dominante da expressão, e desprezando termos em  $v_C^3$ , já que  $v_C^3 \ll v^3$ , é dada por

$$f_\alpha(v, t_M) = \frac{S^0 \tilde{\tau}_{\alpha 0}}{4\pi v^3}, \quad (\text{V.11})$$

e é válida para  $\bar{v}_{thi} < v < v_{\alpha 0}$ .

Da mesma forma, a partir da equação (III.18), a distri



buição assintótica na região de alta energia, considerando os termos dominantes da expressão, desprezando termos em  $v_c^3$  e termos que contenham e  $-(x_\alpha^2 - \bar{x}_{\alpha i}^2)$  já que  $\bar{v}_{thi} \ll v$ , é dada por

$$f_{\alpha+}(v, t_M) = \frac{S^0 \tilde{L}_{\alpha 0}}{4\pi v_{\alpha 0}^3} \exp\left(-\frac{m_\alpha (v^2 - v_{\alpha 0}^2)}{2T_e}\right), \quad (V.12)$$

sendo esta distribuição válida para  $v > v_{\alpha 0}$ .

Usando as distribuições dadas pelas equações (V.11) e (V.12), podemos construir uma distribuição ou solução de camada limite (boundary layer solution), dada por,

$$f_\alpha(v) = \frac{S^0 \tilde{L}_{\alpha 0}}{4\pi v^3} U(v_{\alpha 0} - v) + \frac{S^0 \tilde{L}_{\alpha 0}}{4\pi v_{\alpha 0}^3} \exp\left(-\frac{m_\alpha (v^2 - v_{\alpha 0}^2)}{2T_e}\right) U(v - v_{\alpha 0}). \quad (V.13)$$

Se compararmos as distribuições dadas pelas equações (V.10) e (V.13), verificamos que há concordância para velocidades  $v < v_{\alpha 0}$ , ao passo que, para velocidades  $v > v_{\alpha 0}$ , elas diferem pelo fator  $\frac{v^2}{v_{\alpha 0}^2}$ .

A diferença entre estas distribuições pode ser expressa como

$$\Delta f_\alpha(v) = \frac{S^0 \tilde{L}_{\alpha 0}}{4\pi v_{\alpha 0}^3} \left( \frac{v^2}{v_{\alpha 0}^2} - 1 \right) \exp\left(-\frac{m_\alpha (v^2 - v_{\alpha 0}^2)}{2T_e}\right).$$

Se consideramos  $v = v_{\alpha 0} + \Delta v$  e desprezamos termos da ordem de  $\Delta v^2$ , obtemos,  $\Delta f_\alpha(v_{\alpha 0} + \Delta v) = \left(2 \frac{\Delta v}{v_{\alpha 0}}\right) \frac{S^0 \tilde{L}_{\alpha 0}}{4\pi v_{\alpha 0}^3} \exp\left(-\frac{m_\alpha v_{\alpha 0} \Delta v}{T_e}\right)$ ,

e, se escolhermos  $\Delta v = \Delta v_{1/2}$ , que é uma variação de velocidade típica, notamos que a diferença entre as duas distribuições,  $\Delta f_\alpha$ , é, pelo menos, da ordem de  $\epsilon$ . Isto mostra que, em ordem  $\epsilon^0$ , na qual as distribuições (V.10) e (V.13) são válidas, elas podem ser consideradas iguais.

A Figura V.1 mostra um gráfico da distribuição dada pela equação (V.13), em unidades de  $10^{-17} \text{ cm}^{-6} \cdot \text{s}^3$ , em função de  $x_\alpha = \frac{v}{v_\alpha}$ , para  $T_e = T_i = 11 \text{ keV}$ ,  $n_e = 1.6 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ ,  $n_d = n_t = 0.8 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ . A curva apresentada mostra o comportamento da distribuição na região em torno do ponto  $x_{\alpha 0} = 17.94$ , evidenciando o pronunciado decaimento apresentado pela cauda de alta energia,  $x_\alpha > x_{\alpha 0}$ , em relação ao comportamento da distribuição para  $x < x_{\alpha 0}$ .

### V.3 - Evolução Temporal da Distribuição

A distribuição dependente do tempo das partículas alfa na região de alta energia, considerando as mesmas restrições que foram impostas na secção (V.2), ao obtermos a distribuição estacionária, pode ser obtida da equação

$$\tilde{\tau}_{\alpha 0} \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = \frac{T_e}{m_\alpha} \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial v^2} + v \frac{\partial f_\alpha}{\partial v} + 3f_\alpha + \tilde{\tau}_{\alpha 0} S(v, t), \quad (\text{V.14})$$

que, para o termo de fonte,  $S(v, t)$ , tomado da forma dada pela equação (IV.18), assume a forma

$$\tilde{\tau}_{\alpha 0} \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = \frac{T_e}{m_\alpha} \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial v^2} + v \frac{\partial f_\alpha}{\partial v} + 3f_\alpha + \frac{5^0 \tilde{\tau}_{\alpha 0}}{4\pi v_{\alpha 0}^2} \delta(v - v_{\alpha 0}) U(t). \quad (\text{V.15})$$



As equações (V.14) e (V.15) somente são válidas para velocidades  $v$  próximas a  $v_{\alpha 0}$ . Tomando a transformada de Laplace desta equação em relação a variável temporal, sujeita a condição inicial  $f_{\alpha}(v, t=0) = 0$ , obtemos a seguinte equação,

$$\frac{T_e}{m_{\alpha}} \frac{\partial^2 \tilde{f}_{\alpha}}{\partial v^2} + v \frac{\partial \tilde{f}_{\alpha}}{\partial v} + (3 - \tilde{\tau}_{\alpha 0} p) \tilde{f}_{\alpha} = - \frac{S^0 \tilde{\tau}_{\alpha 0}}{4\pi v_{\alpha 0}^2} \frac{1}{p} \delta(v - v_{\alpha 0}), \quad (V.16)$$

onde  $\tilde{f}_{\alpha} \equiv \tilde{f}_{\alpha}(v, p)$  representa a transformada de Laplace de  $f_{\alpha}(v, t)$  em relação a  $t$ .

A equação (V.16) pode ser escrita como

$$\epsilon \frac{\partial^2 \tilde{f}_{\alpha}}{\partial u^2} + u \frac{\partial \tilde{f}_{\alpha}}{\partial u} + (3 - \tilde{\tau}_{\alpha 0} p) \tilde{f}_{\alpha} = - f_0 \frac{1}{p} \delta(u-1), \quad (V.17)$$

onde introduzimos os parâmetros  $\epsilon = \frac{T_e}{m_{\alpha} v_{\alpha 0}^2}$ ,  $f_0 = \frac{S^0 \tau_{\alpha 0}}{4\pi v_{\alpha 0}^3}$  e a variável adimensional  $u = \frac{v}{v_{\alpha 0}}$ .

A equação homogênea associada à equação (V.17) tem como soluções linearmente independentes,

$$\tilde{f}_1(u, p) = \left(\frac{u^2}{2\epsilon}\right)^{1/2} e^{-u^2/2\epsilon} {}_1F_1\left(\frac{p \tilde{\tau}_{\alpha 0}}{2} - \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{u^2}{2\epsilon}\right) \quad (V.18)$$

e

$$\tilde{f}_2(u, p) = e^{-u^2/2\epsilon} {}_1F_1\left(\frac{p \tilde{\tau}_{\alpha 0}}{2} - 1; \frac{1}{2}; \frac{u^2}{2\epsilon}\right), \quad (V.19)$$

onde  ${}_1F_1(a; b; x)$  é a função hipergeométrica confluyente [AS66].

Como  $\epsilon = \frac{T_e}{m_\alpha v_{\alpha 0}^2} \sim 10^{-3}$  e  $u = \frac{v}{v_{\alpha 0}} \sim 1$ , temos  $\frac{u^2}{2} \sim 10^3$  e podemos expandir as funções hipergeométricas confluentes, que ocorrem nas equações (V.18) e (V.19), usando a expansão para grandes argumentos destas funções. Obtemos, mantendo apenas os termos do minantes nas expansões,

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1(u, p) = & \frac{\sqrt{\pi}/2}{\Gamma\left(\frac{p\tilde{L}_{20}}{2} - \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{u^2}{2\epsilon}\right)^{-\left(\frac{3}{2} - \frac{p\tilde{L}_{20}}{2}\right)} - \\ & - \frac{i\sqrt{\pi}/2 e^{i\frac{\pi}{2} p\tilde{L}_{20}}}{\Gamma\left(2 - \frac{p\tilde{L}_{20}}{2}\right)} \left(\frac{u^2}{2\epsilon}\right)^{1 - \frac{p\tilde{L}_{20}}{2}} e^{-\frac{u^2}{2\epsilon}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_2(u, p) = & \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{p\tilde{L}_{20}}{2} - 1\right)} \left(\frac{u^2}{2\epsilon}\right)^{-\left(\frac{3}{2} - \frac{p\tilde{L}_{20}}{2}\right)} - \\ & - \frac{\sqrt{\pi} \exp\left(i\frac{\pi}{2} p\tilde{L}_{20}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} - \frac{p\tilde{L}_{20}}{2}\right)} \left(\frac{u^2}{2\epsilon}\right)^{1 - \frac{p\tilde{L}_{20}}{2}} e^{-\frac{u^2}{2\epsilon}}. \end{aligned}$$

Notamos, nas expressões acima, que tanto  $\tilde{f}_1(u, p)$  como  $\tilde{f}_2(u, p)$  são compostas dos mesmos fatores em relação a sua dependência em  $u$ . Toda a dependência em  $u$  está contida nas funções

$$\tilde{f}_1(u) = \left(\frac{u^2}{2\epsilon}\right)^{-\frac{3}{2} + \frac{p\tilde{L}_{20}}{2}} \quad (\text{V.20})$$

$$\tilde{f}_2(u) = \left(\frac{u^2}{2\epsilon}\right)^{1 - \frac{p\tilde{L}_{20}}{2}} e^{-\frac{u^2}{2\epsilon}}. \quad (\text{V.21})$$

A função  $\tilde{f}_1(u)$  é uma solução da equação homogênea associada à equação (V.17) precisa até ordem  $\epsilon^{3/2}$ , ao passo que,  $\tilde{f}_2(u)$  é solução da mesma equação com precisão até ordem  $\epsilon^{-1}$ .



Construímos uma particular solução da equação não homogênea (V.17) a partir das funções  $\tilde{f}_<(u)$  e  $\tilde{f}_>(u)$ , baseados no comportamento destas funções para  $u < 1$  e para  $u \rightarrow \infty$ , quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , e usando como referência a solução estacionária, obtida na secção V.2, que, evidentemente, é um caso particular da distribuição a ser obtida nesta secção. Propomos como solução da equação (V.17)

$$\tilde{f}_\alpha(u, p) = C_< \tilde{f}_<(u) U(1-u) + C_> \tilde{f}_>(u) U(u-1), \quad (V.22)$$

onde  $C_<$  e  $C_>$  são constantes a determinar.

Impondo a condição de que  $\tilde{f}_\alpha(u, p)$  deve ser contínua em  $u = 1$ , a transformada de Laplace da distribuição,  $\tilde{f}_\alpha(u, p)$ , pode ser expressa em termos de apenas uma constante,

$$\tilde{f}_\alpha(u, p) = C \left( \tilde{f}_>(1) \tilde{f}_<(u) U(1-u) + \tilde{f}_<(1) \tilde{f}_>(u) U(u-1) \right). \quad (V.23)$$

Determinamos a constante  $C$  impondo que  $\tilde{f}_\alpha(u, p)$ , dada pela equação (V.23), seja uma solução particular da equação (V.17). Obtemos,

$$C = \frac{f_0}{\epsilon p} \left( \tilde{f}_> \frac{\partial \tilde{f}_<}{\partial u} - \tilde{f}_< \frac{\partial \tilde{f}_>}{\partial u} \right)_{u=1}^{-1},$$

que, usando as expressões dadas nas equações (V.20) e (V.21), assume a forma,

$$C = \frac{f_0 e^{\frac{1}{2\epsilon}}}{p(2\epsilon)^{1/2}}. \quad (V.24)$$

Portanto, a transformada de Laplace da distribuição  $p_0$  de ser escrita como

$$\tilde{f}_2(u, p) = \frac{f_0}{p} \left( u^{-3+p\tilde{\tau}_{20}} U(1-u) + u^{2-p\tilde{\tau}_{20}} e^{-\frac{1}{2\epsilon}(u^2-1)} U(u-1) \right), \quad (V.25)$$

que é solução da equação (V.17) precisa até ordem  $\epsilon^0$ .

Desprezando termos de ordem de  $\epsilon$  e invertendo a transformada de Laplace, obtemos para a distribuição de alta energia dependente do tempo,

$$f_\alpha(u, t) = f_0 \left( \frac{1}{u^3} U(u-u_m) U(1-u) + u^2 e^{-\frac{1}{2\epsilon}(u^2-1)} U(u_M-u) U(u-1) \right), \quad (V.26)$$

onde  $u_m = e^{-\frac{t}{\tau_{\alpha 0}}}$  e  $u_M = e^{\frac{t}{\tau_{\alpha 0}}}$ . Em termos das variáveis originais do problema, a distribuição assume a forma,

$$f_\alpha(v, t) = \frac{5^0 \tilde{\tau}_{20}}{4\pi} \left\{ \frac{1}{v^3} U\left(t + \tilde{\tau}_{20} \ln \frac{v}{v_{20}}\right) U(v_{20} - v) + \frac{v^2}{v_{20}^5} \exp\left(-\frac{m_\alpha}{2T_e}(v^2 - v_{20}^2)\right) U\left(t - \tilde{\tau}_{20} \ln \frac{v}{v_{20}}\right) U(v - v_{20}) \right\}. \quad (V.27)$$

O primeiro termo da equação (V.27) fornece a distribuição de alta energia para velocidades  $v$  tais que  $v_m(t) \leq v \leq v_{\alpha 0}$ , sendo  $v_m(t) = v_{\alpha 0} e^{-t/\tau_{\alpha 0}}$ . A distribuição nesta região coincide



com a distribuição de freamento, dada pela equação (IV.9), se lembrarmos que para  $v \approx v_{\alpha 0}$ ,  $v_c^3 \ll v^3$ . O segundo termo desta equação fornece a distribuição de alta energia para velocidades  $v$  tais que  $v_{\alpha 0} \leq v \leq v_M(t)$ , sendo  $v_M(t) = v_{\alpha 0} e^{t/\tau_{\alpha 0}}$ . Tal parte da distribuição mostra que, para termos um acréscimo na velocidade das partículas alfa de  $\Delta v_{1/2} = \frac{T_e \ln 2}{m_{\alpha} v_{\alpha 0}}$ , é necessário um tempo da or-

$$\text{dem de } \Delta t_{1/2} = \tau_{\alpha 0} \left( \frac{T_e \ln 2}{m_{\alpha} v_{\alpha 0}^2} \right).$$

Se tivéssemos mantido termos da ordem de  $\epsilon$  na equação (V.23), a distribuição seria dada por

$$f_{\alpha}(u, t) = f_0 \left\{ \frac{1}{u^3} \left[ 1 - \left( \frac{u_m}{u} \right)^{1/2\epsilon} \right] U(u - u_m) U(1 - u) + \right. \\ \left. + u^2 e^{-\frac{1}{2\epsilon}(u^2 - 1)} \left[ 1 - \left( \frac{u}{u_M} \right)^{1/2\epsilon} \right] U(u_M - u) U(u - 1) \right\}. \quad (V.28)$$

Notamos que a distribuição dada pela equação (V.26) apresenta cortes verticais em  $u = u_m$  e em  $u = u_M$ . Os termos adicionais em relação à equação (V.26), que ocorrem na equação (V.28), tem como efeito arredondar os vértices que ocorrem nestes cortes verticais da distribuição dada pela equação (V.26).

Devemos observar também que, se a fonte de partículas alfa não é do tipo função delta, mas apresenta uma certa largura em velocidade, teremos como consequência que o corte vertical apresentado pela distribuição de freamento será suavizado e, além disso, a largura da cauda de alta energia será determinada por esta largura, se  $\Delta \epsilon_0 > T_e$ . Estes efeitos são discutidos em detalhe no Apêndice B.

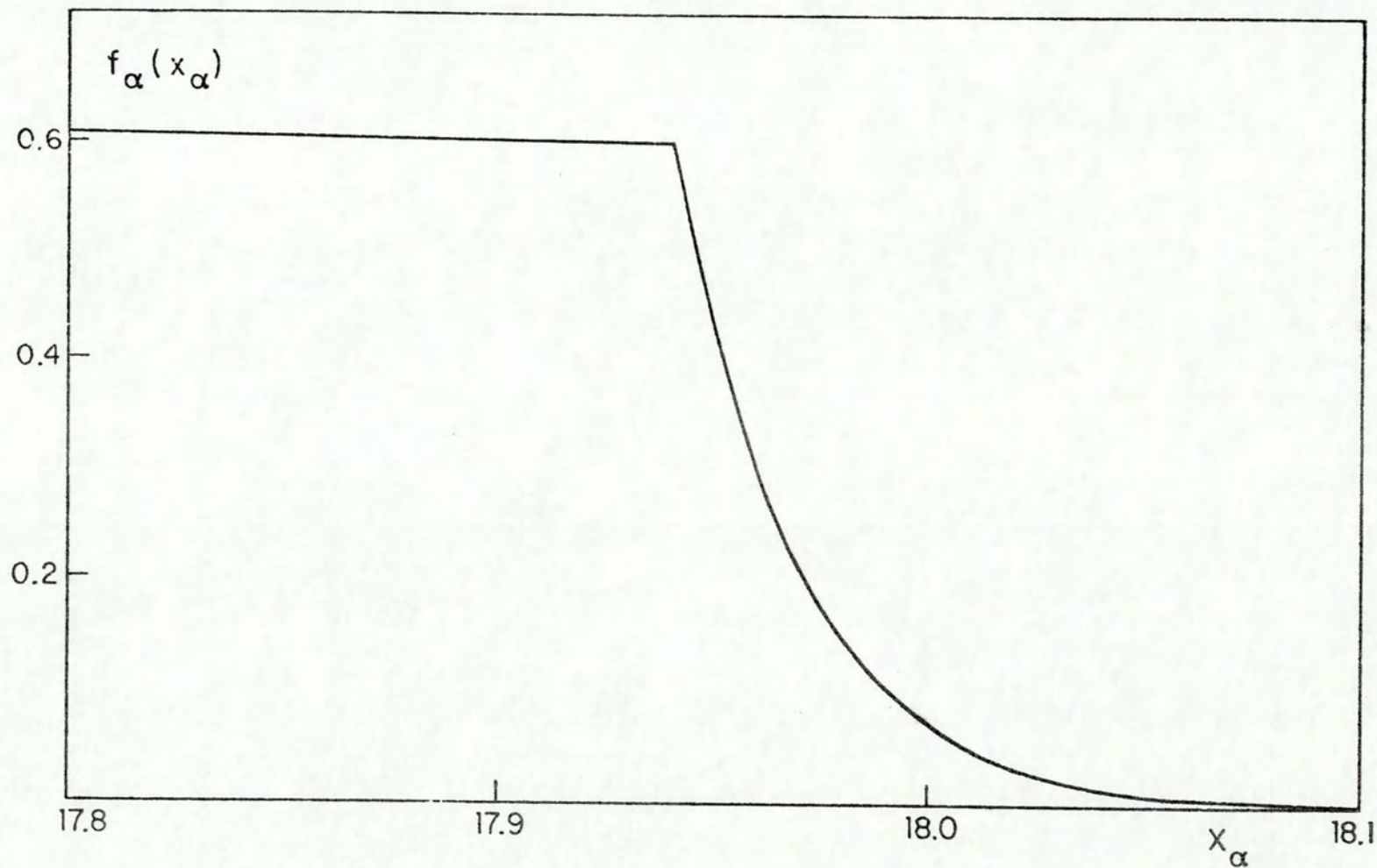


Figura V.1 - Distribuição de alta energia, em unidades de  $10^{-17} \text{ cm}^{-6} \cdot \text{s}^3$ , em função de  $x_\alpha = \frac{v}{v_\alpha}$ , para  $T_e = T_i = 11 \text{ keV}$ ,  $n_e = 1.6 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ ,  $n_d = n_t = 0.8 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ .



## VI - TRANSPORTE DEVIDO ÀS COLISÕES DE PARTÍCULAS

### VI.1 - Introdução

Neste capítulo vamos analisar os efeitos, provocados pela criação de partículas alfa em um plasma, sobre o transporte neste plasma, a partir de um tipo de teoria de transporte clássica. Estudamos, então, a evolução temporal da densidade de partículas, da densidade de momentum, da densidade de energia cinética e da densidade de fluxo de calor das partículas alfa. A evolução temporal destas grandezas é obtida a partir dos momentos da equação de Fokker-Planck, e as contribuições a estas quantidades, provenientes das colisões com os elétrons e com os íons do plasma, são calculadas explicitamente. Usando as equações assim obtidas, que descrevem a evolução temporal das grandezas de interesse, alguns coeficientes de transporte são obtidos.

As seguintes definições são usadas:

a) densidade de partículas:

$$n_{\alpha} = \int f_{\alpha} d\vec{v}, \quad (\text{VI.1})$$

b) velocidade média:

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{1}{n_{\alpha}} \int \vec{v} f_{\alpha} d\vec{v}, \quad (\text{VI.2})$$

c) densidade de momentum:

$$n_{\alpha} m_{\alpha} \langle \vec{v} \rangle = m_{\alpha} \int \vec{v} f_{\alpha} d\vec{v}, \quad (\text{VI.3})$$

d) tensor pressão:

$$\vec{\vec{P}}_{\alpha} = m_{\alpha} \int (\vec{v} - \langle \vec{v} \rangle) (\vec{v} - \langle \vec{v} \rangle) f_{\alpha} d\vec{v}, \quad (\text{VI.4})$$

e) densidade de energia cinética:

$$\epsilon_{\alpha} = \frac{1}{2} m_{\alpha} \int \vec{v}^2 f_{\alpha} d\vec{v}, \quad (\text{VI.5})$$

f) vetor fluxo de calor:

$$\vec{Q}_{\alpha} = \frac{1}{2} m_{\alpha} \int (\vec{v} - \langle \vec{v} \rangle) (\vec{v} - \langle \vec{v} \rangle)^2 f_{\alpha} d\vec{v}. \quad (\text{VI.6})$$

A partir destas definições obtemos,

$$\vec{\vec{P}}_{\alpha} = \vec{\vec{p}}_{\alpha} - m_{\alpha} n_{\alpha} \langle \vec{v} \rangle \langle \vec{v} \rangle, \quad (\text{VI.7})$$

$$\vec{Q}_{\alpha} = \vec{q}_{\alpha} - \vec{p}_{\alpha} \cdot \langle \vec{v} \rangle - \epsilon_{\alpha} \langle \vec{v} \rangle + m_{\alpha} n_{\alpha} \langle \vec{v} \rangle^2 \langle \vec{v} \rangle, \quad (\text{VI.8})$$

onde definimos as grandezas auxiliares,

$$\vec{\vec{p}}_{\alpha} = m_{\alpha} \int \vec{v} \vec{v} f_{\alpha} d\vec{v}, \quad (\text{VI.9})$$

$$\vec{q}_{\alpha} = \frac{1}{2} m_{\alpha} \int \vec{v}^2 \vec{v} f_{\alpha} d\vec{v}. \quad (\text{VI.10})$$



Na secção VI.2 estudamos a evolução temporal da densidade de partículas alfa. Na secção VI.3 estudamos a evolução temporal da densidade de momentum e, usando expressões analíticas, obtidas em capítulos anteriores, para a distribuição de partículas alfa, é feita uma estimativa da transferência de momentum que ocorre devido as colisões, assim como da frequência média de colisões e da resistividade elétrica. Nas secções VI.4 e VI.5 estudamos a evolução temporal da densidade de energia cinética e da densidade de fluxo de calor e, novamente, usando as distribuições específicas das partículas alfa, são feitas estimativas da troca de energia entre partículas alfa e as partículas do plasma de fundo e do fluxo de calor devido as colisões. Nas secções VI.2 a VI.5 o efeito da presença de um campo elétrico é considerado e os resultados para o caso em que este campo é nulo são apontados. Na secção VI.6 as colisões entre os elétrons e os íons são tratadas através de um modelo conveniente e, na secção VI.7, faz-se um balanço da potência envolvida no processo em consideração.

## VI.2 - Evolução Temporal da Densidade de Partículas

Nesta secção estudamos a evolução temporal da densidade de partículas alfa, levando em conta os efeitos das colisões destas partículas com os elétrons e os íons do plasma, a partir da equação de Fokker-Planck.

Tomando o momento de ordem zero da equação de Fokker-Planck, equação (II.2), onde excluimos o termo de perda, ou seja, integrando esta equação sobre todo o espaço de velocidade e

usando a equação (VI.1), obtemos a seguinte equação,

$$\frac{dn_\alpha}{dt} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \vec{E} \cdot \int \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{v}} d\vec{v} = \left. \frac{dn_\alpha}{dt} \right|_c + \int S d\vec{v}, \quad (\text{VI.11})$$

onde

$$\left. \frac{dn_\alpha}{dt} \right|_c = \int \left. \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right|_c d\vec{v}, \quad (\text{VI.12})$$

sendo  $\left. \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right|_c$  definido na equação (II.2).

A equação (VI.11) nos dá a evolução temporal da densidade de partículas alfa, criadas em um plasma composto de elétrons e de íons, na presença de um campo elétrico  $\vec{E}$  e de uma fonte  $S$ , quando as colisões entre as partículas alfa e os componentes do plasma são consideradas.

O termo  $\left. \frac{dn_\alpha}{dt} \right|_c$  contém a variação temporal da densidade de partículas alfa devida as colisões. Usando o operador colisão escrito na forma de Landau, dado neste caso pela equação (II.8), e, observando que tal operador, escrito nesta forma, é claramente o divergente de um vetor no espaço de velocidade, obtemos

$$\left. \frac{dn_\alpha}{dt} \right|_c = 0, \quad (\text{VI.13})$$

onde usamos o fato de que tanto a função distribuição  $f_\alpha$  como  $\frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{v}}$  se anulam em uma superfície no infinito, no espaço de velocidade. Portanto, o operador colisão conserva o número de partícu-



las alfa presentes no plasma; seu efeito é de apenas deslocá-las no espaço de velocidade.

Poderíamos ter adotado um procedimento alternativo e separado o operador colisão em suas partes de freamento e de difusão, dadas pelas equações (II.13) e (II.14), que também são divergentes de vetores no espaço de velocidade. Então, as contribuições à variação temporal da densidade de partículas alfa, devidas as colisões que produzem freamento e difusão, são nulas, tanto quando são consideramos colisões com uma espécie de partícula (ou elétrons ou íons), como quando consideramos todas as colisões.

A equação (VI.11), que descreve a evolução temporal da densidade de partículas alfa, pode então ser escrita como,

$$\frac{dn_{\alpha}}{dt} = \int S d\vec{v}. \quad (\text{VI.14})$$

Observamos que o termo que contém o campo elétrico  $\vec{E}$ , na equação (VI.11), é nulo sempre, pois, no espaço de velocidade, a função distribuição  $f_{\alpha}$  e  $\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \vec{v}}$  se anulam em uma superfície no infinito. Portanto, a equação (VI.14) é válida tanto no caso em que  $\vec{E} = 0$  como quando  $\vec{E} \neq 0$ .

Para qualquer tipo de fonte de partículas alfa, obtemos

$$\frac{dn_{\alpha}}{dt} = \left( \frac{dn_{\alpha}}{dt} \right)_n, \quad (\text{VI.15})$$

que mostra que a densidade de partículas alfa cresce com o tempo

a uma razão que é igual a razão de produção das partículas alfa,  $\left(\frac{dn_\alpha}{dt}\right)_r$ . Notamos que, como não estamos incluindo o termo de perda na equação de Fokker-Planck, a densidade de partículas alfa tenderá a crescer com o decorrer do tempo, dentro do modelo por nós adotado.

### VI.3 - Evolução Temporal da Densidade de Momentum

Nesta secção estudamos a evolução temporal da densidade de momentum das partículas alfa a partir da equação de Fokker-Planck, e consideramos detalhadamente o efeito das colisões, entre as partículas alfa e os elétrons e os íons do plasma, sobre o transporte da densidade de momentum que ocorre no plasma em consideração.

Tomando o momento de ordem um da equação de Fokker-Planck, ou seja, multiplicando a equação (II.2), excluído o termo de perda, por  $m_\alpha \vec{v}$  e integrando sobre todo o espaço de velocidade, obtemos a equação que governa a evolução temporal da densidade de momentum transportada pelas partículas alfa. Esta equação tem a forma,

$$\frac{d}{dt} (n_\alpha m_\alpha \langle \vec{v} \rangle) + e_\alpha \vec{E} \cdot \int \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{v}} \vec{v} d\vec{v} = \frac{d}{dt} (n_\alpha m_\alpha \langle \vec{v} \rangle) \Big|_c + m_\alpha \int S \vec{v} d\vec{v}, \quad (\text{VI.16})$$

onde

$$\frac{d}{dt} (n_\alpha m_\alpha \langle \vec{v} \rangle) \Big|_c = m_\alpha \int \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \Big|_c \vec{v} d\vec{v} \quad (\text{VI.17})$$



nos dá a variação temporal da densidade de momentum das partículas alfa devida as colisões.

Usando o operador colisão, dado pela equação (II.8), integrando por partes e usando o teorema da divergência, obtemos

$$\left. \frac{d}{dt} (n_\alpha m_\alpha \langle \vec{v} \rangle) \right|_c = -2 m_\alpha \sum_{j=e,i} \left[ \Gamma_j \left( \frac{m_\alpha}{m_j} + 1 \right) \right] \Psi(x_j) f_\alpha \frac{\vec{v}}{v^3} d\vec{v}. \quad (\text{VI.18})$$

Notamos que apenas a parte de freamento do operador colisão contribui à equação (VI.18); a parte de difusão deste operador não altera a densidade de momentum média das partículas alfa. A parte de freamento das colisões que ocasiona uma diminuição apreciável da velocidade das partículas alfa, pode propiciar uma diminuição da densidade de momentum média destas partículas.

No caso em que não há campo elétrico presente,  $\vec{E} = 0$ , lembrando que a distribuição de partículas alfa é então esfericamente simétrica em velocidade, vemos que a contribuição à variação temporal da densidade de momentum devida as colisões é nula,  $\left. \frac{d}{dt} (n_\alpha m_\alpha \langle \vec{v} \rangle) \right|_c = 0$ . Tal resultado é esperado já que, não havendo campo elétrico presente, não há uma direção preferencial para a perda de momentum, ou seja, todas as direções de velocidade tem uma perda igual, para uma dada velocidade; na média tal perda de momentum é nula. Então, neste caso, a equação (VI.16) assume a forma,

$$\frac{d}{dt} (n_\alpha m_\alpha \langle \vec{v} \rangle) = m_\alpha \int S \vec{v} d\vec{v}, \quad (\text{VI.19})$$



que, no caso de fontes esfericamente simétricas no espaço de velocidade, reduz-se a

$$\frac{d}{dt} (n_{\alpha} m_{\alpha} \langle \vec{v} \rangle) = 0, \quad (\text{VI.20})$$

ou seja, a densidade de momentum média das partículas alfa se mantém constante no tempo. Observamos, a partir da definição de velocidade média, introduzida na secção VI.1; que neste caso, temos  $\langle \vec{v} \rangle = 0$ , ou seja, o momentum médio das partículas alfa é nulo.

A presença de um campo elétrico,  $\vec{E} = E\vec{e}_3$ , altera esta situação, no sentido de que passa a existir uma direção preferencial para a perda de momentum, ou seja, há uma dependência angular originada pela presença do campo elétrico que se reflete no fato da distribuição que descreve as partículas alfa apresentar simetria axial em relação a direção do campo magnético, que coincide com a direção do campo elétrico. Neste caso, usando para a distribuição de partículas alfa a expansão dada pela equação (IV.23), válida em primeira ordem na magnitude do campo elétrico, obtemos para a variação temporal, devida as colisões, da densidade de momentum das partículas alfa, na presença de um campo elétrico,

$$\left. \frac{d}{dt} (n_{\alpha} m_{\alpha} \langle \vec{v} \rangle) \right|_c = -2\pi^{3/2} \frac{\vec{E}}{E_D} \frac{V_{the} m_{\alpha}}{V_{d0}} \sum_{j=ei} \Gamma_j \left( \frac{m_{\alpha}}{m_j} + 1 \right) \int_0^{\infty} \Psi(x_j) f_{\alpha}^i(v, t) dV.$$

(VI.21)

Neste caso a equação (VI.16) pode ser escrita como



$$\frac{d}{dt} (n_\alpha m_\alpha \langle \vec{v} \rangle) = n_\alpha e_\alpha \vec{E} - 2\pi^{3/2} \frac{\vec{E}}{E_D} \frac{v_{the}}{v_{\alpha 0}} m_\alpha \sum_{j=p,i} \Gamma_j \left( \frac{m_\alpha}{m_j} + 1 \right) \int_0^\infty \Psi(x_j) f_\alpha^1(v, t) dV, \quad (\text{VI.22})$$

que mostra que as colisões se opõe, em termos de transporte de momentum, ao campo elétrico aplicado.

A frequência média de colisões para transferência de momentum às partículas alfa pelas partículas do plasma,  $\nu_\alpha$ , pode ser obtida [KT73] da relação

$$\frac{d}{dt} (n_\alpha m_\alpha \langle \vec{v} \rangle) \Big|_c = -\nu_\alpha n_\alpha m_\alpha \langle \vec{v} \rangle. \quad (\text{VI.23})$$

Usando a expansão, dada pela equação (IV.23), para a distribuição  $f_\alpha$  e, considerando somente termos lineares em  $\delta = \frac{E_{ef\parallel}}{E_D} \frac{v_{the}}{v_{\alpha 0}}$ , obtemos para o valor médio da velocidade das partículas alfa

$$\langle \vec{v} \rangle = \pi^{3/2} \frac{\delta \vec{e}_3}{n_\alpha} \int_0^\infty f_\alpha^1(v, t) v^3 dV, \quad (\text{VI.24})$$

que, substituindo na equação (VI.23) e usando a equação (VI.21), nos permite expressar  $\nu_\alpha$  como

$$\nu_\alpha = \frac{2 \sum_j \Gamma_j \left( \frac{m_\alpha}{m_j} + 1 \right) \int_0^\infty \Psi(x_j) f_\alpha^1(v, t) dV}{\int_0^\infty f_\alpha^1(v, t) v^3 dV}. \quad (\text{VI.25})$$

A resistividade elétrica,  $\eta$ , pode ser obtida a partir de  $\nu_\alpha$  [KT73], através da relação

$$\eta = \frac{v_\alpha m_e}{m_e e^2}. \quad (\text{VI.26})$$

#### VI.4 - Evolução Temporal da Densidade de Energia Cinética

Nesta seção analisamos a evolução temporal da densidade de energia cinética das partículas alfa,  $\epsilon_\alpha$ , usando o mesmo procedimento utilizado na análise das evoluções temporais da densidade de partículas e da densidade de momentum.

Tomando o momento de ordem dois da equação de Fokker-Planck, ou seja, multiplicando a equação (II.2), excluindo o termo de perda, por  $\frac{m_\alpha}{2} v^2$  e integrando sobre todo o espaço de velocidade, obtemos,

$$\frac{d\epsilon_\alpha}{dt} + \frac{e_\alpha}{2} \vec{E} \cdot \left( \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{v}} v^2 d\vec{v} \right) = \frac{d\epsilon_\alpha}{dt} \Big|_c + \frac{m_\alpha}{2} \int S v^2 d\vec{v}, \quad (\text{VI.27})$$

que é a equação que governa a evolução temporal da densidade de energia cinética transportada pelas partículas alfa, e onde,

$$\frac{d\epsilon_\alpha}{dt} \Big|_c = \frac{m_\alpha}{2} \int \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \Big|_c v^2 d\vec{v}, \quad (\text{VI.28})$$

nos fornece a variação temporal, devida as colisões, da densidade de energia cinética das partículas alfa.

Usando a equação (II.8), integrando por partes e usando o teorema da divergência, obtemos,

$$\frac{d\epsilon_\alpha}{dt} \Big|_c = 2m_\alpha \sum_{j=e,i} \int_{\mathcal{V}_j} \left( x_j \Phi'(x_j) - \frac{m_\alpha}{m_j} \Psi(x_j) \right) f_\alpha \frac{1}{v} d\vec{v}. \quad (\text{VI.29})$$



Neste caso, a equação (VI.29) contém tanto contribuições provenientes da parte de freamento como da parte de difusão do operador colisão. Usando as equações (II.13) e (II.14), podemos expressar  $\left. \frac{d\varepsilon_\alpha}{dt} \right|_c$  como

$$\left. \frac{d\varepsilon_\alpha}{dt} \right|_c = \left. \frac{d\varepsilon_\alpha}{dt} \right|_{fr} + \left. \frac{d\varepsilon_\alpha}{dt} \right|_{dif}$$

onde  $\left. \frac{d\varepsilon_\alpha}{dt} \right|_{fr}$  e  $\left. \frac{d\varepsilon_\alpha}{dt} \right|_{dif}$  são as variações temporais da densidade de energia cinética das partículas alfa devidas as contribuições de freamento e de difusão, respectivamente, e que são dadas por,

$$\left. \frac{d\varepsilon_\alpha}{dt} \right|_{fr} = -2m_\alpha \sum_{j=e,i} \Gamma_j \left( \frac{m_\alpha}{m_j} + 1 \right) \int \Psi(x_j) f_\alpha \frac{1}{v} d\vec{v}, \quad (VI.30)$$

$$\left. \frac{d\varepsilon_\alpha}{dt} \right|_{dif} = 2m_\alpha \sum_{j=e,i} \Gamma_j \int \Phi(x_j) f_\alpha \frac{1}{v} d\vec{v}. \quad (VI.31)$$

Estes resultados mostram que a evolução temporal da densidade de energia cinética, em sua parte proveniente de colisões, apresenta contribuições não nulas da parte de freamento e da parte de difusão, de sinais opostos.

Usando para a distribuição de partículas alfa e expansão dada pela equação (IV.23), linear no campo elétrico, a equação (VI.29) assume a forma,

$$\left. \frac{d\varepsilon_\alpha}{dt} \right|_c = 8\pi m_\alpha \sum_{j=e,i} \Gamma_j \int_0^\infty \left( x_j \Phi'(x_j) - \frac{m_\alpha}{m_j} \Psi(x_j) \right) f_\alpha^0(v, t) v dv. \quad (VI.32)$$

Este resultado também é válido na ausência de campo elétrico, já que a distribuição, incluindo os efeitos de um campo elétrico em ordem  $\delta^0$ , coincide com a distribuição no caso em que  $\vec{E} = 0$ .

Usando para  $f_\alpha^0(v, t)$  a distribuição de freamento para as partículas alfa, dada pela equação (IV.11), obtemos

$$\left. \frac{d\mathcal{E}_\alpha}{dt} \right|_c = 2m_\alpha \tilde{L}_{\alpha 0} \frac{dn_\alpha}{dt} \sum_{j=1}^N \prod_{i=1}^j \int_{V_m(t)}^{V_{\alpha 0}} (x_j \Phi'(x_j) - \frac{m_\alpha}{m_j} \Psi(x_j)) \frac{V dV}{V^3 + V_c^3} . \quad (\text{VI.33})$$

Notamos que a equação (VI.33) e todas as equações decorrentes desta, devido ao fato de termos usado em sua obtenção a distribuição de freamento, são válidas para termos  $t$  menores do que o tempo de termalização  $t_M$ , e são constantes no tempo para  $t > t_M$ .

A partir da equação (VI.33) podemos obter as contribuições à variação temporal da densidade de energia cinética das partículas alfa, devida as colisões com cada espécie de partícula presente no plasma.

Para a contribuição devida aos íons,  $\sum_i \left. \frac{d\mathcal{E}_\alpha}{dt} \right|_i$ , de acordo com a região de integração considerada na equação (VI.33), lembrando que neste caso  $x_i \gg 1$ , aproximamos a função erro e sua derivada, de modo que obtemos

$$\sum_i \left. \frac{d\mathcal{E}_\alpha}{dt} \right|_i = -m_\alpha V_c^3 \frac{dn_\alpha}{dt} \int_{V_m(t)}^{V_{\alpha 0}} \frac{V dV}{V^3 + V_c^3} , \quad (\text{VI.34})$$

onde o somatório sobre  $i$  abrange todos os tipos de íons presentes



tes no plasma de fundo.

A equação (VI.34) expressa a perda de energia na unidade de tempo sofrida pelas partículas alfa em suas colisões com os íons do plasma; esta quantidade de energia é cedida aos íons na unidade de tempo.

Para a contribuição devida aos elétrons,  $\left. \frac{d\mathcal{E}_\alpha}{dt} \right|_e$ , lembrando que  $x_e \lesssim 1$ , obtemos

$$\left. \frac{d\mathcal{E}_\alpha}{dt} \right|_e = \frac{1}{2} m_\alpha (V_{\alpha 0}^2 - V_m^2(t)) \frac{dn_\alpha}{dt} + m_\alpha V_c^3 \frac{dn_\alpha}{dt} \int_{V_m(t)}^{V_{\alpha 0}} \frac{V dV}{V^3 + V_c^3}, \quad (\text{VI.35})$$

que expressa a quantidade perdida de energia, na unidade de tempo, pelas partículas alfa, em suas colisões com os elétrons. Observamos que a quantidade de energia trocada pelas partículas alfa com os íons é compensada por parte da energia trocada pelas partículas alfa com os elétrons.

A equação (VI.33), que nos dá a densidade de energia total cedida pelas partículas alfa ao plasma de fundo na unidade de tempo, proveniente das colisões destas partículas com as partículas que constituem o plasma de fundo, neste caso, é dada por

$$\left. \frac{d\mathcal{E}_\alpha}{dt} \right|_c = -\frac{1}{2} m_\alpha (V_{\alpha 0}^2 - V_m^2(t)) \frac{dn_\alpha}{dt}. \quad (\text{VI.36})$$

Usando uma fonte do tipo delta, como a que foi utilizada na obtenção da distribuição  $f_\alpha^0$ , a entrada de energia na unidade de tempo, proveniente da fonte é dada por  $\frac{1}{2} m_\alpha v_{\alpha 0}^2 \frac{dn_\alpha}{dt}$  e usando a equação (VI.36) para a contribuição proveniente das colisões,

a variação temporal da densidade de energia cinética das partículas alfa, dada pela equação (VI.27), assume a forma,

$$\frac{d\mathcal{E}_\alpha}{dt} = n_\alpha e_\alpha \vec{E} \cdot \langle \vec{v} \rangle + \frac{1}{2} m_\alpha v_m^2(t) \frac{dn_\alpha}{dt}, \quad (\text{VI.37})$$

onde o primeiro termo do lado direito da equação acima representa o aquecimento Joule devido ao campo elétrico.

A equação (VI.37), usando a equação (VI.24), pode ser escrita como

$$\frac{d\mathcal{E}_\alpha}{dt} = \pi^{3/2} e_\alpha E S \int_0^\infty f_\alpha^1(v, t) v^3 dv + \frac{1}{2} m_\alpha v_m^2(t) \frac{dn_\alpha}{dt}, \quad (\text{VI.38})$$

que é uma expressão válida até ordem  $\delta$ .

Usando as definições de  $\vec{p}_\alpha$  e  $\epsilon_\alpha$ , dadas pelas equações (VI.9) e (VI.5), respectivamente, e para a distribuição de partículas alfa a expressão dada pela equação (IV.23), mantendo apenas termos de primeira ordem no campo elétrico, obtemos,

$$\vec{p}_\alpha = p_\alpha \vec{1}, \quad (\text{VI.39})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\alpha = & \frac{1}{2} m_\alpha \tilde{v}_{\alpha 0} \frac{dn_\alpha}{dt} \left\{ \frac{1}{2} (v_{\alpha 0}^2 - v_m^2(t)) - \right. \\ & - \frac{V_c^2}{6} \ln \left[ \frac{(V_c^2 - V_c v_{\alpha 0} + v_{\alpha 0}^2)}{(V_c^2 - V_c v_m(t) + v_m^2(t))} \frac{(V_c + v_m(t))^2}{(V_c + v_{\alpha 0})^2} \right] - \\ & \left. - \frac{V_c^2}{\sqrt{3}} \left[ \tan^{-1} \left( \frac{2v_{\alpha 0} - V_c}{V_c \sqrt{3}} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{2v_m(t) - V_c}{V_c \sqrt{3}} \right) \right] \right\}, \quad (\text{VI.40}) \end{aligned}$$



sendo,

$$p_{\alpha} = \frac{2}{3} \epsilon_{\alpha}.$$

(VI.41)

Da equação (VI.7) concluímos, lembrando a equação (VI.24), que, em primeira ordem no campo elétrico,  $\dot{p}_{\alpha} = \dot{p}_{\alpha}$ , e que a evolução temporal de  $p_{\alpha}$  pode ser obtida trivialmente da equação (VI.38).

### VI.5 - A Evolução Temporal da Densidade de Fluxo de Calor

Nesta secção analisamos a evolução temporal do fluxo de calor transportado pelas partículas alfa.

Tomando o momento de ordem três da equação de Fokker-Planck, ou seja, multiplicando a equação (II.2), excluindo o termo de perda, por  $\frac{m_{\alpha}}{2} v^2 \vec{v}$  e integrando sobre todo o espaço de velocidade, obtemos a seguinte equação para a evolução temporal da densidade de fluxo de calor transportada pelas partículas alfa,

$$\frac{d\vec{q}_{\alpha}}{dt} + \frac{e_{\alpha}}{2} \vec{E} \cdot \left( \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \vec{v}} v^2 \vec{v} d\vec{v} \right) = \frac{d\vec{q}_{\alpha}}{dt} \Big|_c + \frac{m_{\alpha}}{2} \int S v^2 \vec{v} d\vec{v}, \quad (\text{VI.42})$$

onde

$$\frac{d\vec{q}_{\alpha}}{dt} \Big|_c = \frac{m_{\alpha}}{2} \int \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} \Big|_c v^2 \vec{v} d\vec{v} \quad (\text{VI.43})$$

nos dá a variação temporal da densidade de fluxo de calor transportada pelas partículas alfa, devida as colisões.

Usando o operador colisão dado pela equação (II.8), integrando por partes e usando o teorema da divergência, obtemos,

$$\left. \frac{d\vec{q}_\alpha}{dt} \right|_c = m_\alpha \sum_{j=1}^n \int_{\mathcal{D}} \left\{ 2\Phi(x_j) - \left[ 3\left(\frac{m_\alpha}{m_j} + 1\right) - \frac{2}{x_j^2} \right] \Psi(x_j) \right\} f_\alpha \frac{\vec{v}}{v} d\vec{v}, \quad (\text{VI.44})$$

sendo que as partes provenientes do freamento e da difusão por colisões, podem, neste caso, ser expressas como,

$$\left. \frac{d\vec{q}_\alpha}{dt} \right|_{f_n} = -3 m_\alpha \sum_{j=1}^n \int_{\mathcal{D}} \left(\frac{m_\alpha}{m_j} + 1\right) \Psi(x_j) f_\alpha \frac{\vec{v}}{v} d\vec{v}, \quad (\text{VI.45})$$

$$\left. \frac{d\vec{q}_\alpha}{dt} \right|_{dif} = 2 m_\alpha \sum_{j=1}^n \int_{\mathcal{D}} \left( \Phi(x_j) + \frac{1}{x_j^2} \Psi(x_j) \right) f_\alpha \frac{\vec{v}}{v} d\vec{v}. \quad (\text{VI.46})$$

Observamos que na situação em que não há campo elétrico presente,  $\vec{E} = 0$ , como a distribuição de partículas alfa é esfericamente simétrica, temos  $\left. \frac{d\vec{q}_\alpha}{dt} \right|_c = 0$ , ou seja, as colisões não afetam o fluxo de calor transportado pelas partículas alfa. Como  $\langle \vec{v} \rangle = 0$ , obtemos a partir da equação (VI.42),

$$\frac{d\vec{Q}_\alpha}{dt} = \frac{d\vec{q}_\alpha}{dt} = \frac{m_\alpha}{2} \int \mathcal{S} v^2 \vec{v} d\vec{v} = 0 \quad (\text{VI.47})$$

para fontes esfericamente simétricas. Em particular, a partir das definições de  $\vec{Q}_\alpha$  e  $\vec{q}_\alpha$ , como a distribuição é esfericamente simétrica,  $\vec{Q}_\alpha = \vec{q}_\alpha = 0$ , ou seja, não há transporte de calor na ausência de campo elétrico.

No caso em que temos presente um campo elétrico, usa



mos para a distribuição de partículas alfa novamente a expansão, linear no campo elétrico, dada pela equação (IV.23) e, obtemos, a partir da equação (VI.44), a seguinte equação para a variação da densidade de fluxo de calor transportada pelas partículas alfa, proveniente das colisões

$$\frac{d\vec{q}_{\alpha}}{dt}\bigg|_c = \pi^{3/2} m_{\alpha} \frac{\vec{E}}{E_D} \frac{V_{the}}{V_{\alpha 0}} \sum_{j=1}^{\Gamma} \int_0^{V_{\alpha 0}} \left\{ 2\Phi(x_j) - \left[ 3\left(\frac{m_{\alpha}}{m_j} + 1\right) - \frac{2}{x_j^2} \right] \Psi(x_j) \right\} f_{\alpha}^1(v, t) v^2 dv. \quad (VI.48)$$

Levando em conta a equação (IV.26) e considerando apenas termos lineares no campo elétrico, a equação (VI.48) pode ser escrita como

$$\frac{d\vec{q}_{\alpha}}{dt}\bigg|_c = \pi^{3/2} m_{\alpha} \frac{\vec{E}}{E_D} \frac{V_{the}}{V_{\alpha 0}} \sum_{j=1}^{\Gamma} \int_{V_{m}(t)}^{V_{\alpha 0}} \left\{ 2\Phi(x_j) - \left[ 3\left(\frac{m_{\alpha}}{m_j} + 1\right) - \frac{2}{x_j^2} \right] \Psi(x_j) \right\} f_{\alpha 1}(v) v^2 dv, \quad (VI.49)$$

sendo  $f_{\alpha 1}(v) = \frac{\tau_{\alpha 0}}{4\pi} \frac{dn_{\alpha}}{dt} \frac{u(v)}{v^3 + v_c^3} (1 + 3w(v))$ , onde a contribuição do termo de perda à distribuição não foi considerada e as funções  $u(v)$  e  $w(v)$  são as mesmas definidas no Capítulo IV, seção IV.5.

A evolução temporal da densidade de fluxo de calor transportada pelas partículas alfa, no caso de fontes esfericamente simétricas, fica então determinada pelas equações,

$$\frac{d\vec{q}_{\alpha}}{dt} = \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \vec{E} \cdot (\epsilon_{\alpha} \vec{1} + \vec{p}_{\alpha}) + \pi^{3/2} m_{\alpha} \frac{\vec{E}}{E_D} \frac{V_{the}}{V_{\alpha 0}} \sum_{j=1}^{\Gamma} \int_{V_{m}(t)}^{V_{\alpha 0}} \left\{ 2\Phi(x_j) - \left[ 3\left(\frac{m_{\alpha}}{m_j} + 1\right) - \frac{2}{x_j^2} \right] \Psi(x_j) \right\} f_{\alpha 1}(v) v^2 dv, \quad (VI.50)$$

e

$$\frac{d\vec{Q}_\alpha}{dt} = \frac{d\vec{F}_\alpha}{dt} - \frac{d}{dt} \cdot [(\vec{p}_\alpha + \epsilon_\alpha \vec{1}) \cdot \langle \vec{v} \rangle], \quad (\text{VI.51})$$

onde usamos a equação (VI.8) e desprezamos termos de terceira ordem em  $\delta$ ; o fator  $(\epsilon_\alpha + p_\alpha)$ , que ocorre na equação (VI.51), é dado por

$$\epsilon_\alpha + p_\alpha = \frac{5}{3} \epsilon_\alpha, \quad (\text{VI.52})$$

sendo  $\epsilon_\alpha$  dado pela equação (VI.40), e válida somente até primeira ordem no campo elétrico.

Estas equações mostram que há transporte de calor pelas partículas alfa na mesma direção do campo elétrico aplicado.

## VI.6 - Colisões entre Elétrons e Ions

No tratamento até aqui apresentado do problema que nos propusemos a estudar, a ênfase tem sido dada a descobrir o comportamento das partículas alfa, criadas por reatores nucleares, em um plasma termonuclear. Estudamos até agora características deste comportamento tais como a distribuição de velocidade que estas partículas alfa apresentam em diversas situações e as propriedades do transporte devido às colisões, realizado por estas partículas, das grandezas físicas de interesse. Em todo o tratamento até aqui apresentado, as espécies componentes do plasma de



fundo, quais sejam, elétrons e íons de deutério, de trítio e de impurezas, foram tratadas como tendo distribuição conhecida, do tipo distribuição de Maxwell, independente do tempo.

Sabemos que, em princípio, para resolver o problema de forma completa, deveríamos resolver simultaneamente um sistema de, pelo menos, quatro equações de Fokker-Planck, fortemente acoplado, uma para partículas alfa, uma para elétrons e, no mínimo duas para íons, que incluíssem também os campos autoconsistentes  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ . Da solução de tal sistema obteríamos as distribuições de partículas alfa, de elétrons e de íons, e, a partir destas distribuições e das equações de Fokker-Planck correspondentes, poderíamos analisar o transporte de grandezas físicas tais como a densidade de energia cinética e a densidade de fluxo de calor, por cada tipo de partícula. Entretanto, tal problema não permite solução analítica e, assim, reduzimos o sistema acoplado de equações de Fokker-Planck a uma única equação, a equação de Fokker-Planck para as partículas alfa, supondo distribuições de Maxwell para os elétrons e os íons componentes do plasma de fundo, e considerando apenas os campos elétrico e magnético externos.

Mas, sabemos que os elétrons e os íons do plasma de fundo colidem entre si e também que o efeito de tais colisões é importante quando consideramos as trocas de energia entre partículas alfa, elétrons e íons, por ser a energia trocada entre elétrons e íons, por colisões, significativa, se comparada com as energias cedidas pelas partículas alfa aos elétrons e aos íons.

Consideramos que a equação de Fokker-Planck que descreve as partículas do plasma principal é

$$\frac{df_k}{dt} = \frac{\partial f_k}{\partial t} \Big|_c = \sum_j \Theta(f_k, f_j), \quad (\text{VI.53})$$



onde os índices  $k$  e  $j$  referem-se ou a elétrons ( $e$ ) ou a íons ( $i$ ),  $f_k$  é a distribuição que descreve as partículas da espécie  $k$  e  $\left. \frac{\partial f_k}{\partial t} \right|_c$  é o termo de colisão do problema, dado de forma geral pela equação (II.9). Observar que estamos supondo que a distribuição  $f_k$  depende do tempo, em geral.

Vamos tratar o termo de colisão da equação (VI.53) levando em conta apenas as colisões entre partículas do plasma de fundo de espécies diferentes, ou seja, as colisões entre elétrons e íons. Não consideraremos colisões entre elétrons, ou entre íons de mesma espécie, pois estes tipos de colisões não propiciam troca de momentum, mas apenas tem o efeito de manter a distribuição de cada espécie uma distribuição de Maxwell. Colisões entre íons de espécies distintas não serão consideradas, tendo em vista simplificar o problema.

Considerando os resultados obtidos nas seções anteriores, estamos interessados em analisar mais detalhadamente o transporte da densidade de energia cedida pelas partículas alfa às partículas do plasma de fundo.

Usando a definição de densidade de energia cinética, dada pela equação (VI.5), para partículas da espécie  $k$ , podemos escrever a variação temporal desta densidade de energia como

$$\frac{d\mathcal{E}_k}{dt} = \frac{m_k}{2} \int \frac{\partial f_k}{\partial t} v_k^2 d\vec{v}_k, \quad (\text{VI.54})$$

ou como

$$\frac{d\mathcal{E}_k}{dt} = \frac{m_k}{2} \int \left. \frac{\partial f_k}{\partial t} \right|_c v_k^2 d\vec{v}_k, \quad (\text{VI.55})$$



onde a equação (VI.53) foi utilizada. O termo de colisão,  $\left. \frac{\partial f_k}{\partial t} \right|_c$ , que ocorre na equação (VI.55), pode ser escrito, de forma geral, como

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f_k}{\partial t} \right|_c = & \sum_j \int \Gamma_{kj} v_{thj} \left\{ - \left( 1 + \frac{m_k}{m_j} \right) \frac{\partial}{\partial \vec{v}_k} \cdot \left[ f_k \frac{\partial}{\partial \vec{v}_k} \left( \frac{\partial}{\partial \vec{v}_k} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}_k} F(x_{kj}) \right) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2}{\partial \vec{v}_k \partial \vec{v}_k} : \left( f_k \frac{\partial^2 F(x_{kj})}{\partial \vec{v}_k \partial \vec{v}_k} \right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{VI.56})$$

onde usamos as equações (II.9) e (II.10) e onde  $j = e$  se  $k = i$  e  $j = i$  se  $k = e$ . Observamos que a equação (VI.56) é válida para quaisquer duas espécies de partículas.

Supondo a distribuição  $f_k$  esfericamente simétrica e as distribuições das partículas da espécie  $j$  distribuições de Maxwell, podemos escrever o termo de colisão, equação (VI.56), na forma dada pela equação (II.15), ou seja,

$$\left. \frac{\partial f_k}{\partial t} \right|_c = \frac{1}{v_k^2} \frac{\partial}{\partial v_k} \sum_j \int \Gamma_{kj} \Psi(x_{kj}) \left( \frac{1}{x_{kj}} \frac{\partial f_k}{\partial x_{kj}} + 2 \frac{m_k}{m_j} f_k \right). \quad (\text{VI.57})$$

Usando a equação (VI.57) na equação (VI.55) e integrando por partes, obtemos

$$\frac{d\bar{\epsilon}_k}{dt} = -4\pi m_k \sum_j \int \Gamma_{kj} \int_0^\infty dv_k v_k \Psi(x_{kj}) \left( \frac{v_{thj}^2}{v_k} \frac{\partial f_k}{\partial v_k} + 2 \frac{m_k}{m_j} f_k \right). \quad (\text{VI.58})$$

Usando para a distribuição que descreve as partículas da espécie  $k$  uma distribuição de Maxwell, dada por

$$f_k = \frac{n_k}{\pi^{3/2} v_{thk}^3} e^{-v_k^2/v_{thk}^2},$$

onde a temperatura das partículas da espécie  $k$ ,  $T_k = \frac{1}{2} m_k v_{thk}^2$ , em geral, depende do tempo, a equação (VI.58) assume a forma

$$\frac{d\mathcal{E}_k}{dt} = \frac{8 m_k n_k}{\pi^{3/2} v_{thk}^3} \sum_j \int_{k_j} \left( \frac{v_{thj}^2}{v_{thk}^2} - \frac{m_k}{m_j} \right) \int_0^\infty \psi(x_{kj}) e^{-v_k^2/v_{thk}^2} v_k dv_k. \quad (\text{VI.59})$$

Realizando a integração indicada na equação acima, obtemos, de forma exata,

$$\frac{d\mathcal{E}_k}{dt} = \frac{4 n_k}{\sqrt{\pi} v_{thk}} \sum_j \frac{2\pi e_k^2 e_j^2 n_j \omega \Lambda}{m_j} \left( \frac{T_j - T_k}{T_k} \right) \frac{1}{\left( 1 + \frac{m_k}{m_j} \frac{T_j}{T_k} \right)^{3/2}}, \quad (\text{VI.60})$$

onde as temperaturas  $T_\ell$  foram definidas como  $T_\ell = \frac{1}{2} m_\ell v_{th\ell}^2$ ,  $\ell = j$  ou  $k$ . Esta equação mostra que a variação temporal da densidade de energia cinética das partículas da espécie  $k$  depende essencialmente da diferença de temperaturas ( $T_j - T_k$ ). Observar que, para tempos em que a distribuição termalizada das partículas alfa é válida, como temos  $T_e = T_i$ , já não há mais troca de energia entre elétrons e íons, por colisões entre eles.

A partir da equação (VI.60) obtemos para a variação temporal da densidade de energia cinética dos elétrons, devida a suas colisões com os íons,



$$\left. \frac{d\mathcal{E}_e}{dt} \right|_i = 16\sqrt{\pi} \sum_i \frac{e^2 e_i^2 n_i n_e \ln \Lambda}{m_i m_e v_{the}^3} (T_i - T_e), \quad (\text{VI.61})$$

e, para a variação temporal da densidade de energia cinética dos íons, devida as colisões com os elétrons,

$$\left. \frac{d\mathcal{E}_i}{dt} \right|_e = 16\sqrt{\pi} \frac{e^2 e_i^2 n_i n_e \ln \Lambda}{m_i m_e v_{the}^3} (T_e - T_i), \quad (\text{VI.62})$$

onde usamos o fato de que  $\frac{m_i}{m_e} \frac{T_e}{T_i} \gg 1$ , para aproximarmos o fator  $\left(1 + \frac{m_k}{m_j} \frac{T_j}{T_k}\right)^{-3/2}$  que ocorre na equação (VI.60).

Como era de esperar, devido ao modelo adotado, temos

$$\left. \frac{d\mathcal{E}_e}{dt} \right|_i = - \sum \left. \frac{d\mathcal{E}_i}{dt} \right|_e .$$

Definindo a frequência de colisões elétron-íon por

$$\nu_{ei} = \frac{16\sqrt{\pi}}{3} \frac{e^2 e_i^2 n_i \ln \Lambda}{m_i m_e v_{the}^3}, \quad (\text{VI.63})$$

obtemos,

$$\left. \frac{d\mathcal{E}_e}{dt} \right|_i = 3 n_e \sum_i \nu_{ei} (T_i - T_e),$$

$$\left. \frac{d\mathcal{E}_i}{dt} \right|_e = 3 n_i \nu_{ei} (T_e - T_i),$$

onde supomos  $n_e = \sum_i n_i$ .

Se em um plasma as temperaturas dos íons e dos elétrons são diferentes, a medida que o tempo passa, atuam mecanismos de troca de energia de tal modo que, para tempos maiores do que o tempo de colisão, as temperaturas dos íons e dos elétrons tornam-se iguais, no modelo simples que estamos considerando e que exclui outros mecanismos de perda de energia térmica. Assim, as colísões entre íons e elétrons, para as quais fizemos um modelo simplificado, baseado na equação de Fokker-Planck, que nos conduziu às equações (VI.61) e (VI.62), é um dos mecanismos que atuam no sentido de igualar as temperaturas dos íons e dos elétrons. Entretanto, existem outros mecanismos que também favorecem a homogeneização de temperatura de elétrons e íons. Resultados experimentais para o tokamak TFR mostram [Ma77] que nesta máquina o balanço de energia dos íons pode ser descrito, de forma razoável, através de uma teoria neoclássica, ao passo que as perdas de energia dos elétrons, por serem anormalmente grandes, maiores do que as predições neoclássicas por um fator que varia entre 10 a 500 [ME79], implicariam na inclusão de processos anômalos que incluíssem a existência de instabilidades de partículas prisioneiras.

### VI.7 - Balanço de Potência

Podemos, com os resultados obtidos, realizar um balanço da distribuição de potência entre as partículas alfa, os elétrons e os íons, no caso em que não temos campo elétrico presente, porque o efeito do campo elétrico sobre a potência é pequeno.



A equação (VI.38) mostra que a potência total transportada pelas partículas alfa é dada por

$$\frac{d\mathcal{E}_\alpha}{dt} = \frac{1}{2} m_\alpha v_m^2(t) \frac{dn_\alpha}{dt}. \quad (\text{VI.64})$$

Notamos que tal equação, devido a forma como foi obtida, só é válida para tempos menores do que o tempo de termalização, embora este resultado não se modifique consideravelmente para tempos maiores do que o tempo de termalização, e, em particular,  $v_m(t)$  tenda a  $v_\alpha$  para  $t > t_M$ .

A potência transportada pelos elétrons é dada por

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}_e}{dt} = & 3n_e \sum_i v_{ei} (T_i - T_e) + \frac{1}{2} m_\alpha (v_{\alpha 0}^2 - v_m^2(t)) \frac{dn_\alpha}{dt} - \\ & - m_\alpha v_c^3 \frac{dn_\alpha}{dt} \int_{v_m(t)}^{v_{\alpha 0}} \frac{v dv}{v^3 + v_c^3}, \end{aligned} \quad (\text{VI.65})$$

onde o primeiro termo do membro direito provém das colisões elétron-íon, e é dado pela equação (VI.61), e os dois restantes das colisões dos elétrons com as partículas alfa, e são dados pela equação (VI.35).

A potência transportada pelos íons é dada por

$$\frac{d\mathcal{E}_i}{dt} = 3n_i \sum_e v_{ei} (T_e - T_i) + m_\alpha v_c^3 \frac{dn_\alpha}{dt} \int_{v_m(t)}^{v_{\alpha 0}} \frac{v dv}{v^3 + v_c^3}, \quad (\text{VI.66})$$

onde o primeiro termo do lado direito da equação é originado pelas colisões entre elétrons e íons, e é dado pela equação (VI.62),

e o segundo pelas colisões dos íons com as partículas alfa, tendo sido obtido da equação (VI.34).

Então,

$$\frac{d\epsilon_\alpha}{dt} + \frac{d\epsilon_e}{dt} + \sum_i \frac{d\epsilon_i}{dt} = \frac{1}{2} m_\alpha v_{\alpha 0}^2 \frac{dn_\alpha}{dt}, \quad (\text{VI.67})$$

onde  $\frac{1}{2} m_\alpha v_{\alpha 0}^2 \frac{dn_\alpha}{dt}$  é a potência de entrada da fonte.

As Figuras VI.1 e VI.2 mostram a variação com o tempo de  $\frac{d\epsilon_\alpha}{dt}$ ,  $\frac{d\epsilon_e}{dt}$  e  $\frac{d\epsilon_i}{dt}$ , dados pelas equações (VI.64), (VI.65) e (VI.66), para  $T_e = T_i = 11$  keV,  $n_e = 1.6 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}$  e  $T_i = T_e = 15$  keV,  $n_e = 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ , respectivamente, sendo em ambos os casos  $n_d = n_t = \frac{1}{2} n_e$ . Estas figuras mostram uma acentuada diferença entre a densidade de potência cedida aos elétrons,  $\frac{d\epsilon_e}{dt}$ , e a densidade de potência cedida aos íons,  $\frac{d\epsilon_i}{dt}$ , pelas partículas alfa. Em ambos os casos  $\frac{d\epsilon_e}{dt}$  é maior do que  $\frac{d\epsilon_i}{dt}$ , ou seja, os elétrons absorvem mais rapidamente energia das partículas alfa do que os íons. Entretanto, comparando as figuras VI.1 e VI.2 observamos que a diferença entre  $\frac{d\epsilon_e}{dt}$  e  $\frac{d\epsilon_i}{dt}$  diminui a medida que a temperatura de elétrons e íons aumenta. Observamos que nestes dois casos considerados, como as temperaturas de elétrons e íons são iguais, não há contribuição às densidades de potência de elétrons e íons proveniente das colisões entre estas partículas, pois no modelo por nós adotado a contribuição tanto a  $\frac{d\epsilon_e}{dt}$  como a  $\frac{d\epsilon_i}{dt}$ , devida a este tipo de colisão, depende essencialmente da diferença de temperaturas ( $T_e - T_i$ ).

A Figura VI.3 mostra a variação com o tempo de  $\frac{d\epsilon_\alpha}{dt}$ ,  $\frac{d\epsilon_e}{dt}$  e  $\frac{d\epsilon_i}{dt}$ , dados pelas equações (VI.64), (VI.65) e (VI.66),



respectivamente, para  $T_i = 15$  keV,  $T_e = 25$  keV,  $n_e = 9 \times 10^{13}$  cm<sup>-3</sup>,  $n_d = n_t = \frac{1}{2} n_e$ . Como nas figuras anteriores, observamos que o de crêscimo da densidade de potência das partículas alfa,  $\frac{d\epsilon_\alpha}{dt}$ , é acompanhado por um acrêscimo das densidades de potência dos elêtrons,  $\frac{d\epsilon_e}{dt}$ , e dos íons,  $\frac{d\epsilon_i}{dt}$ . Como as temperaturas de elêtrons e íons são distintas, o efeito das colisões entre estas partículas, sobre as densidades de potência de elêtrons e íons, é levado em conta pelo modelo por nós adotado. Observa-se que o efeito destas colisões sobre as densidades de potência é de diminuir a diferença entre a densidade de potência absorvida por elêtrons e por íons, das partículas alfa.

Estes resultados permitem concluir que os elêtrons são mais aquecidos pelas partículas alfa do que os íons. Entretanto, podemos dizer que a tendência é de que as colisões entre os elêtrons e os íons equalizem as temperaturas de todas as partículas do plasma.

A Figura VI.4 mostra a densidade de energia cinética  $\epsilon_\alpha$ , dada pela equação (VI.40), em função do tempo, para um plasma com  $T_e = T_i = 15$  keV,  $n_i = 9 \times 10^{13}$  cm<sup>-3</sup>. A densidade de energia cinética cresce com o tempo, já que não são levados em consideração mecanismos que permitam a perda de partículas alfa pelo plasma e, conseqüentemente, estas se acumularão no plasma, no modelo por nós adotado.

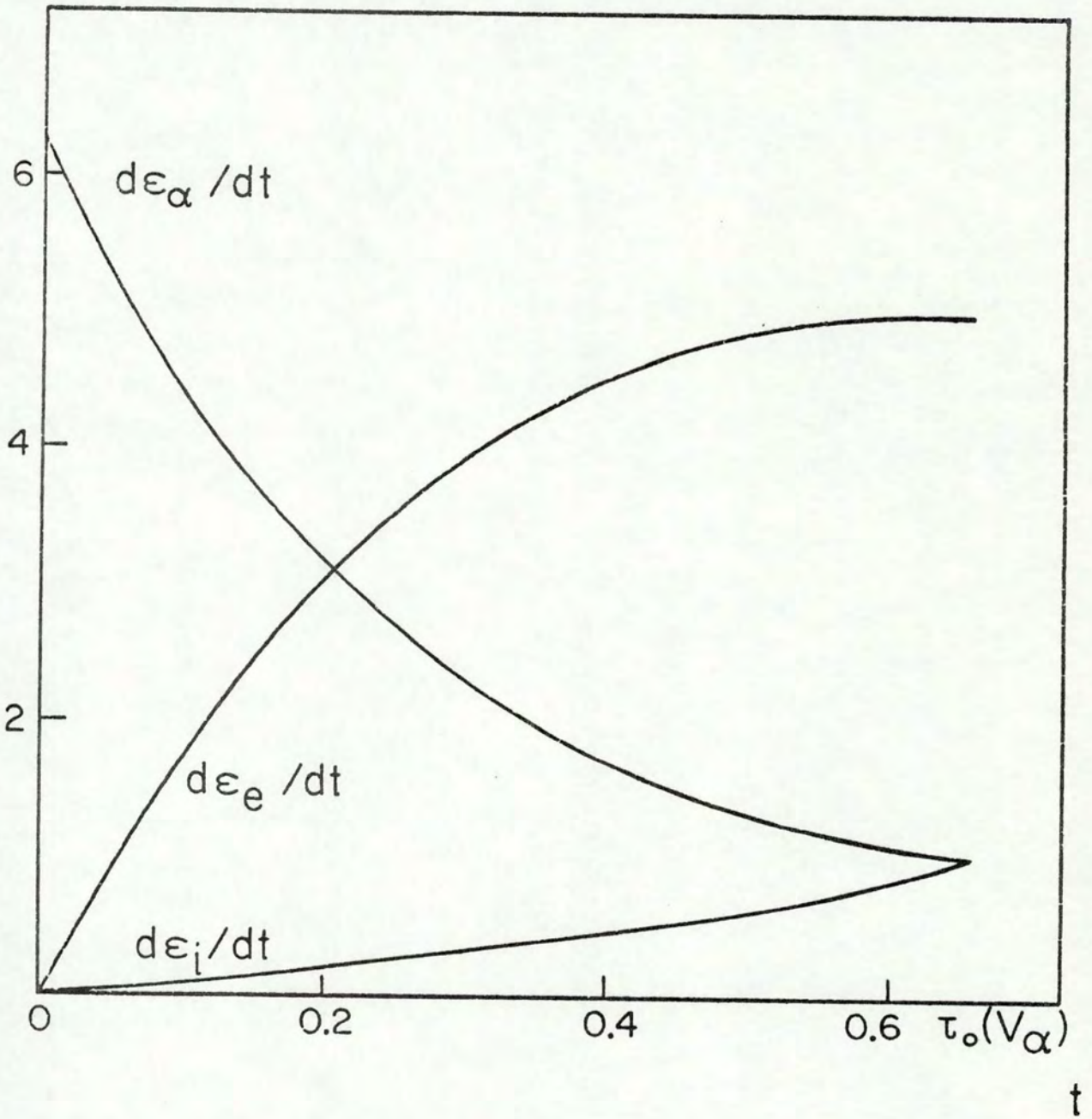


Figura VI.1 -  $\frac{d\epsilon_\alpha}{dt}$ ,  $\frac{d\epsilon_e}{dt}$ ,  $\frac{d\epsilon_i}{dt}$ , em unidades de  $10^{-2} \text{ W.cm}^{-3}$ , em função de  $t$ , dado em s, para  $T_i = T_e = 11 \text{ keV}$ ,  $n_e = 1.6 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ ,  $n_d = n_t = \frac{1}{2} n_e$ .



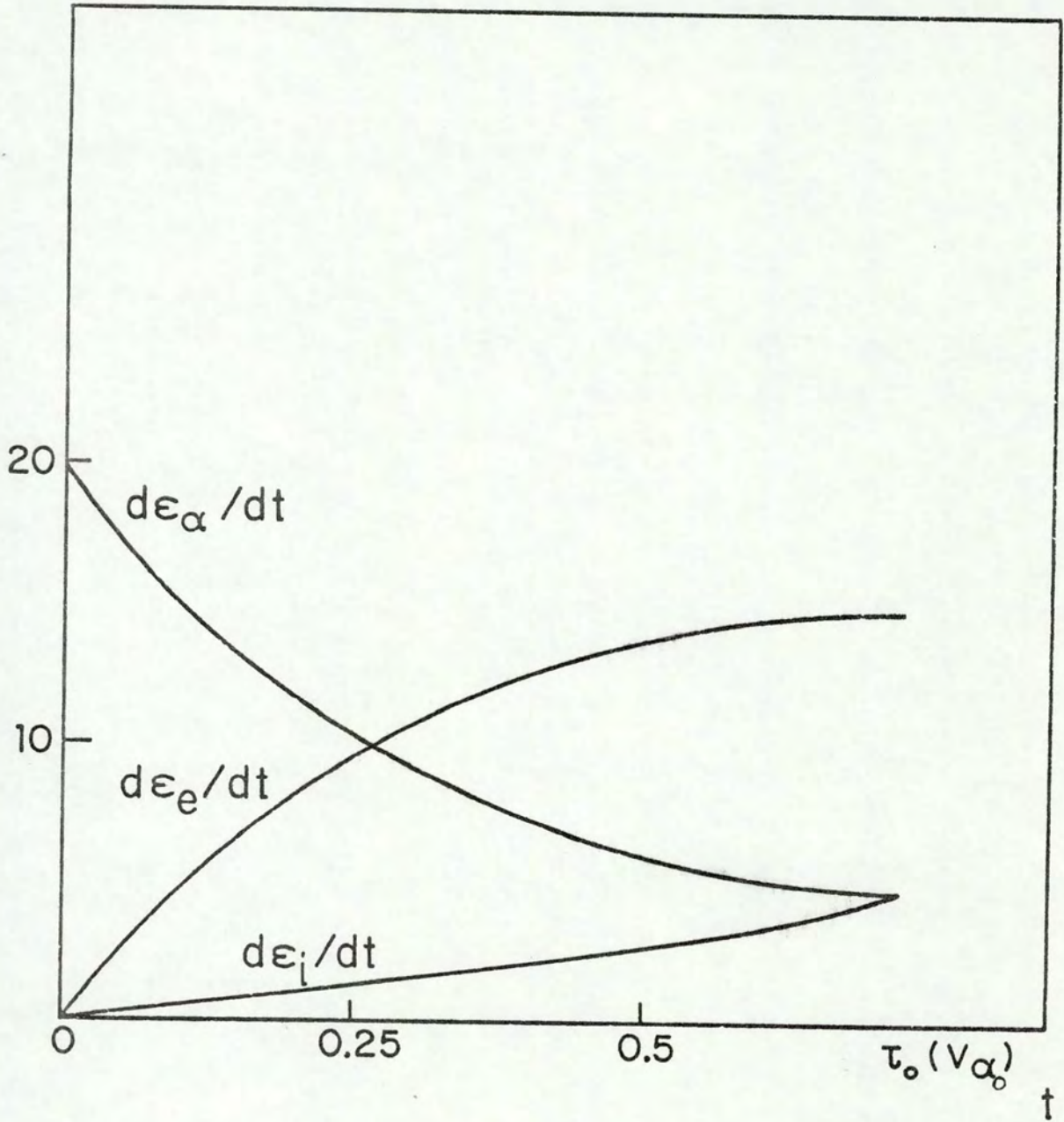


Figura VI.2 -  $\frac{d\epsilon_\alpha}{dt}$ ,  $\frac{d\epsilon_e}{dt}$ ,  $\frac{d\epsilon_i}{dt}$ , em unidades de  $10^{-2} \text{ W.cm}^{-3}$ , em função de  $t$ , dado em s, para  $T_i = T_e = 15 \text{ keV}$ ,  $n_e = 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ ,  $n_d = n_t = \frac{1}{2} n_e$ .

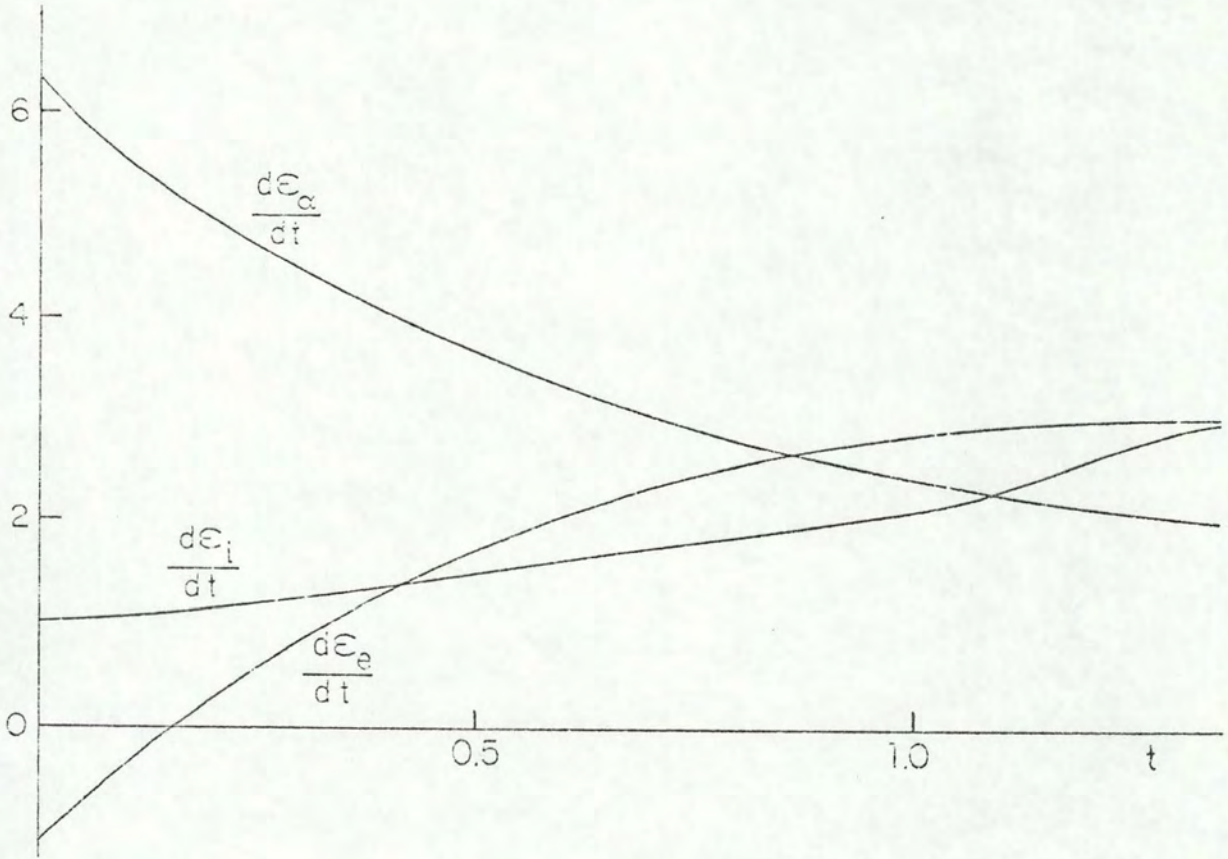


Figura VI.3 -  $\frac{dE_\alpha}{dt}$ ,  $\frac{dE_e}{dt}$ ,  $\frac{dE_i}{dt}$ , em unidades de  $10^{-1} \text{ W.cm}^{-3}$ , em função de  $t$ , dado em s, para  $T_i = 15 \text{ keV}$ ,  $T_e = 25 \text{ keV}$ ,  $n_e = 9 \times 10^{13} \text{ cm}^{-3}$ ,  $n_d = n_t = \frac{1}{2} n_e$ .



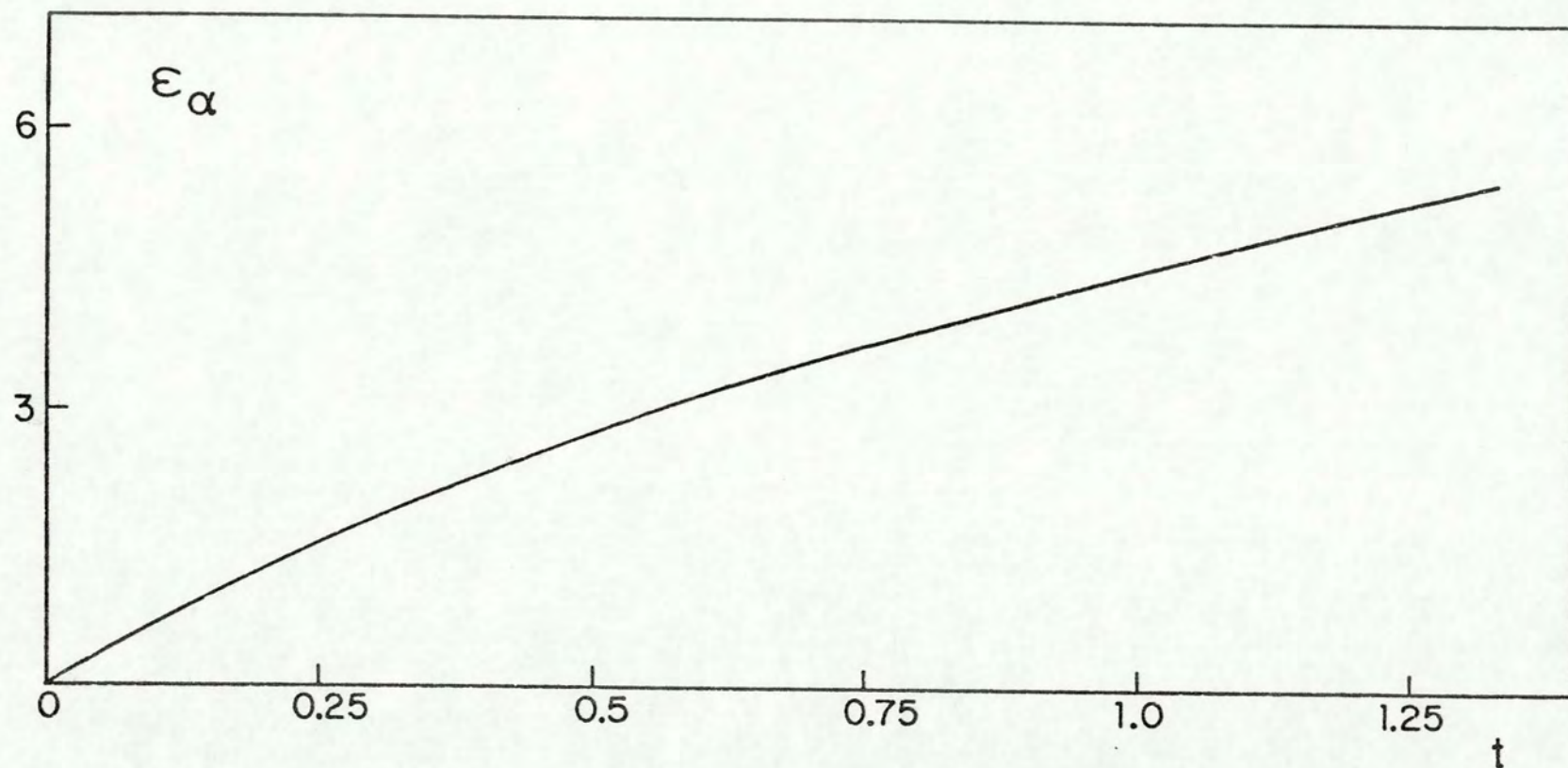


Figura VI.4 -  $\epsilon_\alpha$ , em unidades de  $10^{-1} \text{ J.cm}^{-3}$ , em função de  $t$ , dado em s, para  $T_e = T_i = 15 \text{ keV}$ ,  $n_i = 9 \times 10^{13} \text{ cm}^{-3}$ .

## VII - SUMÁRIO E DISCUSSÃO

No presente trabalho tratamos de dois assuntos de importância para a compreensão do funcionamento dos futuros reatores de fusão: a distribuição de velocidade apresentada pelas partículas alfa criadas nas reações termonucleares e o efeito, devido às colisões destas partículas alfa com as partículas do plasma de fundo, sobre o transporte das grandezas macroscópicas.

O conhecimento da distribuição de velocidade das partículas alfa, além do interesse intrínseco que apresenta, é importante para a análise das instabilidades em plasmas termonucleares com combustível de deutério e trítio, ocasionadas pela presença das partículas alfa criadas nas reações termonucleares. O estudo do efeito das colisões sobre o transporte das grandezas macroscópicas mostra como se dá a partição de tais grandezas; é de especial interesse a partição da densidade de energia cinética das partículas alfa para as partículas componentes do plasma de fundo, já que, para que um reator atinja a ignição, é necessário que as partículas alfa sozinhas mantenham o plasma aquecido, cobrindo todas as perdas de energia possíveis.

Desconsiderando a presença de impurezas no plasma, podemos dizer que o plasma termonuclear mais simples, com combustível de deutério e trítio, terá como componentes elétrons, íons de deutério, íons de trítio e partículas alfa, já que os neutrons gerados na reação, com 14.1 MeV de energia, seguramente não permanecerão no plasma.

Para levar em conta as colisões entre estas quatro es



pêcies de partículas componentes do plasma termonuclear de forma completa, deveríamos ter analisado um sistema de quatro equações de Fokker-Planck fortemente acoplado, que forneceria a distribuição de cada uma das espécies presentes, levando em conta suas colisões com todas as outras espécies de partículas do plasma, e inclusive com elas mesmas. A fim de abordar esse problema complexo de forma analítica procuramos simplificá-lo mediante modelos físicos apropriados.

Estudamos somente a distribuição de partículas alfa levando em conta os efeitos ocasionados pelas colisões destas partículas com os elétrons e os íons de deutério e trítio do plasma termonuclear, que supomos descritos por distribuições de Maxwell independentes do tempo.

No Capítulo II deste trabalho apresentamos a equação de Fokker-Planck para a função distribuição das partículas alfa em sua forma mais geral, obtendo também formas particulares desta equação, válidas somente para regiões restritas no espaço de velocidade e que foram utilizadas em capítulos posteriores. Também introduzimos alguns parâmetros característicos do problema, como, por exemplo, as cargas efetivas, a velocidade crítica e o tempo de freamento de Spitzer, que se relacionam diretamente com o operador colisão de Fokker-Planck.

No Capítulo III obtivemos a distribuição termalizada das partículas alfa. Esta distribuição que foi obtida excluindo termos de perda e de campo elétrico da equação de Fokker-Planck, se caracteriza por ser uma solução estacionária, em termos de funcionamento do reator, e não especificar a situação transiente da distribuição. Esta distribuição apresenta dois termos: um termo



independente do tempo e um termo Maxwelliano dependente do tempo.

O espaço de velocidade pode ser dividido de forma geral em três regiões, tendo em vista os efeitos dominantes das colisões sobre a distribuição de partículas alfa: região de termalização, região de freamento e região de alta energia. Na região de alta energia um número muito pequeno de partículas alfa ganham energia devido as colisões. A região de freamento se caracteriza por ser a região em que as partículas alfa perdem velocidade substancialmente, devido as colisões. A região de termalização é aquela região, de menor velocidade, na qual chegam as partículas que foram freadas e onde as temperaturas dos diversos componentes do plasma termonuclear se tornam iguais. Há, com o passar do tempo, um acúmulo de partículas alfa nesta região, já que foram excluídos termos, na equação de Fokker-Planck, que levam em conta a possível saída de partículas alfa do plasma. Existe um tempo mínimo, tempo de termalização, para que uma situação estacionária se estabeleça em todas estas três regiões.

Obtivemos as distribuições nas regiões de termalização, de freamento e de alta energia, a partir de um ansatz em que essencialmente impõe-se a equalização das temperaturas de elétrons, íons e partículas alfa na região de termalização. Os resultados obtidos mostram a formação de uma Maxwelliana progressivamente crescente na região de termalização e, para as regiões de freamento e alta energia, fornecem as distribuições estacionárias de freamento e alta energia, respectivamente, como confirmamos nos Capítulos IV e V deste trabalho. As Figuras III.1 a III.6 mostram os resultados obtidos. Tais resultados concordam satisfatoriamente com os obtidos por Kolesnichenko e Fursa [KF75].



No Capítulo IV, onde sō consideramos os termos de freamento no operador colisão de Fokker-Planck, tratamos da distribuição de freamento das partículas alfa, obtendo a partir de conveniente forma aproximada da equação, a distribuição estacionária, que coincide com o termo dominante da solução termalizada na região de freamento. Obtemos também a distribuição dependente do tempo e os efeitos produzidos sobre a distribuição pela inclusão, na equação de Fokker-Planck, de um termo de perda e de um termo de campo elétrico. Em geral tais resultados foram obtidos para um termo de fonte arbitrário e, então, particularizados para uma fonte deltoforme. A distribuição dependente do tempo mostra que não há partículas alfa com velocidade maior do que a velocidade inicial e que todas as partículas alfa são freadas ao longo da mesma trajetória característica no tempo, pois os termos de difusão foram desprezados. Tais resultados são ilustrados pelas figuras IV.1, IV.2 e IV.3.

A inclusão de um termo que leva em conta as possíveis perdas de partículas alfa pelo plasma foi feita supondo que a frequência média de perda,  $\nu_L$ , é uma função arbitrária somente da velocidade. Em um modelo que leva em conta a perda de partículas alfa por recombinação, troca de carga e também por perdas anômalas,  $\nu_L$  foi suposta depender de  $v$  através de uma lei de potência do tipo  $v^{-n}$  sendo  $n$  um número real. A inclusão do termo de perda modifica a distribuição de partículas alfa através de um fator multiplicativo que depende da frequência  $\nu_L$ . Se  $\nu_L$  é constante estes efeitos são importantes para  $\nu_L \tau_{\alpha 0} > 3$ , como mostram as Figuras IV.4 e IV.5.

A presença de um campo elétrico paralelo fraco é leva



da em conta ,através da expansão da distribuição de partículas alfa na presença do campo elétrico, em uma série de potências, cujo parâmetro de expansão depende essencialmente da magnitude do campo elétrico. A solução em ordem zero, evidentemente, reproduz a distribuição na ausência de campo elétrico e, em primeira ordem, depende do ângulo polar na forma  $\cos\theta$ .

Os resultados por nós obtidos apresentam boa concordância com os resultados de Düchs e Pfirsch [DP74], Tsuji et alii [TKSN76] e Saito et alii [SSKM77]. Tal concordância é mais pronunciada em relação aos trabalhos de Tsuji et alii e Saito et alii, pois as aproximações por eles realizadas na equação de Fokker-Planck que descreve as partículas alfa são análogas as que realizamos e, inclusive, Saito et alii apresentam soluções analíticas que correspondem as nossas distribuições de freamento estacionárias sem termo de perda e incluindo um termo de perda. Quanto aos resultados de Düchs e Pfirsch, embora sejam mais gerais do que os nossos, no sentido de que consideram um plasma finito e também estudam a dependência espacial da distribuição, não apresentam a distribuição em forma analítica. Entretanto, as formas da distribuição nas regiões de freamento e de termalização são coincidentes. Há, porém, uma sensível discrepância na evolução temporal da distribuição, que no nosso caso manifesta-se através de cortes verticais limitadores da distribuição, ao passo que, nos trabalhos citados, tais cortes verticais são abrandados. Tal efeito provém da inclusão por estes autores, em estudos numéricos da equação de Fokker-Planck para partículas alfa, dos termos de difusão no operador colisão de Fokker-Planck, que foram por nós totalmente desconsiderados ao obtermos a distribuição de frea



mento.

No Capítulo V estudamos a distribuição de partículas alfa em sua cauda de alta energia, sem entretanto incluímos termos de perda e os efeitos de campo elétrico. Obtivemos tanto a distribuição estacionária como a evolução temporal desta cauda. Os resultados obtidos mostram que há uma boa concordância da distribuição obtida com o termo dominante da distribuição termalizada na região de alta energia, pelo menos em ordem  $\epsilon = \frac{T_e}{\epsilon_{\alpha 0}} \approx 10^{-3}$ , que é o parâmetro significativo das expansões utilizadas para obter a distribuição de alta energia. Além disto vemos que esta distribuição decai rapidamente com o aumento de velocidade das partículas alfa como mostra a Figura V.1, ou seja, o número de partículas alfa que atinge tal região é desprezável se comparado com o número de partículas alfa freadas e que chegam a região de termalização.

No Capítulo VI estudamos o transporte originado pelas colisões das partículas alfa com os elétrons e os íons de deutério e trítio do plasma termonuclear, através dos sucessivos momentos da equação de Fokker-Planck para partículas alfa. Foram analisadas as evoluções temporais das densidades de partículas, momentum, energia cinética e fluxo de calor.

Mostramos que a densidade de partículas alfa cresce com o tempo a uma razão igual a razão de produção destas partículas alfa, se não incluímos termos de perda na equação de Fokker-Planck. Quanto a densidade de momentum, assim como a densidade de fluxo de calor, elas são conservadas na ausência de campo elétrico. Na presença de um campo elétrico, que impõe uma direção preferencial tanto para a variação do momentum como para a varia



ção do fluxo de calor, calculamos as contribuições à variação temporal destas grandezas devidas as colisões, tanto das partículas alfa com elétrons como com os íons de deutério e trítio. Mostramos que as colisões se opõe, em termos de transporte de momentum, ao campo elétrico aplicado, ao passo que se somam no caso de transporte de calor. Mostramos também como é possível obter-se a partir destes resultados a frequência média de colisões para transferência de momentum às partículas alfa pelas partículas do plasma de fundo e a resistividade elétrica.

O transporte da densidade de energia cinética foi estudado detalhadamente. Calculamos tanto a perda de energia na unidade de tempo sofrida pelas partículas alfa em suas colisões com os íons do plasma de fundo, como a perda sofrida por estas partículas em suas colisões com os elétrons. Como usamos em tais cálculos formas aproximadas para a distribuição, que somente são válidas para tempos  $t < t_M$ , os resultados obtidos, ou seja, as energias adquiridas por elétrons e íons das partículas alfa, o foram em tempos menores do que este. Ao estudarmos o transporte da densidade de energia cinética foi necessário considerar as trocas de energia entre elétrons e íons que compõe o plasma de fundo, por serem estas trocas significativas, para  $T_e \neq T_i$ , ao realizarmos um balanço da potência envolvida no processo. Escolhemos um modelo simples, utilizando a equação de Fokker-Planck, que considerou apenas as colisões entre elétrons e íons. O efeito das colisões dos elétrons e dos íons com as partículas alfa foi calculado a partir da equação de Fokker-Planck para partículas alfa. O efeito das colisões entre partículas da mesma espécie foi considerado ao supormos que as distribuições dos elétrons e dos íons



eram distribuições de Maxwell. Estas colisões não ocasionam troca de momentum nem de energia cinética. Os resultados obtidos para as variações temporais da densidade de energia cinética de elétrons e íons devido a suas colisões com íons e elétrons, respectivamente, mostraram que há uma tendência a equalização das temperaturas de elétrons e íons.

O balanço de potência realizado mostrou que a potência cedida aos elétrons pelas partículas alfa é maior do que a potência transferida aos íons, embora esta diferença diminua a medida que as temperaturas de elétrons e íons aumentam, como mostram as figuras VI.1, VI.2 e VI.3, o que deverá ocorrer nos futuros reatores de fusão.

O presente trabalho poderia ser aprofundado em diversos pontos. A solução termalizada obtida de forma analítica aproximada para as regiões de termalização, freamento e alta energia no Capítulo III, poderia ser facilmente melhorada se mantivessemos um maior número de termos nas expansões da função erro e sua derivada, que ocorrem na solução termalizada exata. Mantendo um maior número de termos nestas expansões faremos com que as aproximações analíticas obtidas no Capítulo III concordem melhor com a solução obtida numericamente, na região em torno de  $\bar{v}_{thi}$ , onde a distribuição apresenta seu ponto de máximo. Também poderíamos melhorar a solução termalizada através da introdução de uma superposição de distribuições Maxwellianas com diferentes temperaturas, cujo peso relativo deveria ser obtido, e através da introdução dos efeitos de um termo de perda sobre esta distribuição. Também poderíamos tentar estudar, de forma analítica, a contribuição dos termos de difusão do operador colisão de Fokker-Planck

ã distribuição de freamento das partículas alfa.

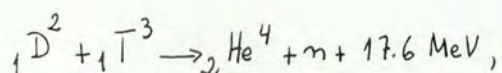
Utilizando as distribuições analíticas obtidas pode-se também estudar aspectos da estabilidade de um plasma termonuclear de deutério e trítio. Tal assunto poderá ser de importância em relação ao confinamento das partículas alfa em futuros reatores de fusão, e tem sido a motivação de diversos trabalhos [BK074], [KM75], [LM75], [KLMP76], [SC78].



## APÊNDICE A

### OBTENÇÃO DA RAZÃO DE PRODUÇÃO DAS PARTÍCULAS ALFA

As partículas alfa são criadas pela reação nuclear



que ocorre no plasma composto de elétrons, íons de deutério (D) e íons de trítio (T). A razão de produção destas partículas é dada por

$$S^0 = \int d^3V_d \int d^3V_t f_d f_t \sigma_{dt}(|\vec{V}_d - \vec{V}_t|) |\vec{V}_d - \vec{V}_t|, \quad (\text{A.1})$$

onde  $\vec{v}_d$  e  $\vec{v}_t$  são as velocidades dos íons de deutério e de trítio, respectivamente,  $\sigma_{dt}(|\vec{v}_d - \vec{v}_t|)$  é a secção de choque da reação que combina estes íons e  $f_d$  e  $f_t$  são as distribuições de velocidade que os descrevem. Se supusermos que as distribuições dos íons de deutério e trítio são distribuições de Maxwell,

$$f_i = n_i \left( \frac{m_i}{2\pi T_i} \right)^{3/2} \exp\left( - \frac{m_i v_i^2}{2 T_i} \right),$$

onde o índice  $i$  refere-se tanto os íons de deutério como de trítio, e onde  $n_i$  é a densidade,  $m_i$  a massa e  $T_i$  a temperatura do íon do tipo  $i$ , a expressão (A.1) assume a forma

$$S^0 = m_d m_t \left( \frac{m_d}{2\pi T_d} \right)^{3/2} \left( \frac{m_t}{2\pi T_t} \right)^{3/2} \int d^3 v_d \exp\left(-\frac{m_d v_d^2}{2 T_d}\right) \times$$

$$\times \int d^3 v_t \exp\left(-\frac{m_t v_t^2}{2 T_t}\right) \sigma_{dt}(|\vec{v}_d - \vec{v}_t|) |\vec{v}_d - \vec{v}_t|.$$

(A.2)

Fazemos uma mudança das variáveis  $\vec{v}_d$  e  $\vec{v}_t$  para coordenadas relativa,  $\vec{v}$ , e centro de massa,  $\vec{V}$ , definidas por

$$\vec{V} = \vec{v}_d - \vec{v}_t,$$

$$\vec{V} = \frac{m_d \vec{v}_d + m_t \vec{v}_t}{m_d + m_t}.$$

Como o módulo do Jacobiano desta transformação é um, e definindo a massa reduzida do sistema de dois íons,  $m_r$ , por

$$m_r = \frac{m_d m_t}{m_d + m_t},$$

e a massa do centro de massa por

$$M = m_d + m_t,$$

$S^0$ , dado pela equação (A.2), pode ser expresso como,

$$S^0 = m_d m_t \frac{1}{8 \pi^3} \left( \frac{m_d m_t}{T_d T_t} \right)^{3/2} \int d^3 V \int d^3 v \exp\left(-\left(\frac{m_d}{2 T_d} + \frac{m_t}{2 T_t}\right) V^2\right) \times$$

$$\times \exp\left(-\left(\frac{m_d}{T_d} - \frac{m_t}{T_t}\right) \vec{V} \cdot \vec{v}\right) \exp\left(-\left(\frac{m_d^2}{2 T_d m_d} + \frac{m_t^2}{2 T_t m_t}\right) v^2\right) \sigma_{dt}(v) v.$$

(A.3)



Supomos que as temperaturas dos íons de deutério e trítio são iguais,  $T_d = T_t = T$ . Neste caso a equação (A.3) reduz-se a

$$S^0 = n_d n_t \left( \frac{M}{2\pi T} \right)^{3/2} \left( \frac{m_n}{2\pi T} \right)^{3/2} \int d^3V \exp\left(-\frac{MV^2}{2T}\right) \times \\ \times \int d^3v \exp\left(-\frac{m_n v^2}{2T}\right) v \sigma_{dt}(v),$$

que, realizada a integração em  $\vec{V}$  e na parte angular de  $\vec{v}$ , assume a forma

$$S^0 = n_d n_t \left( \frac{2 m_n^3}{\pi T^3} \right)^{1/2} \int_0^\infty dv v^3 \exp\left(-\frac{m_n v^2}{2T}\right) \sigma_{dt}(v). \quad (\text{A.4})$$

Define-se a razão de reação média por partícula,  $\langle \sigma_{dt} v \rangle$  como,

$$\langle \sigma_{dt} v \rangle = \frac{S^0}{n_d n_t}, \quad (\text{A.5})$$

ou seja, como a média sobre distribuições Maxwellianas da razão de reação.

Observamos que se  $v \sigma_{dt}(v) = v_0 \sigma_0$ , sendo  $v_0$  e  $\sigma_0$  constantes,  $\langle \sigma_{dt} v \rangle = \sigma_0 v_0$ .

Escrevemos a integral que ocorre na equação (A.4) em termos da energia associada ao movimento relativo,  $E_r = \frac{1}{2} m_r v^2$ . Em termos desta nova variável, a razão de reação média por partícula, dada pela equação (A.5), assume a forma

$$\langle \sigma_{dt}^v \rangle = 2 \left( \frac{2}{\pi m_n T^3} \right)^{1/2} \int_0^{\infty} dE_n E_n e^{-E_n/T} \sigma_{dt}(E_n). \quad (\text{A.6})$$

Gamow [Ga38], obteve a secção de choque, no sistema centro de massa, para reações termonucleares entre partículas com cargas  $Z_1$  e  $Z_2$ . Esta secção de choque é dada por

$$\sigma(E_n) = \frac{C}{E_n} \exp\left(-\frac{2\pi m_n^{1/2} e^2 Z_1 Z_2}{h (2E_n)^{1/2}}\right),$$

onde  $m_r$  é a massa reduzida das partículas com cargas  $Z_1$  e  $Z_2$ ,  $E_r$  a energia associada ao movimento relativo,  $C$  é uma constante que expressa a secção de choque quantum-mecânica usual e o fator exponencial expressa a penetração da barreira coulombiana, calculada usando a aproximação WKB.

Glasstone e Lovberg [GL60], usando os resultados de Gamow, mostraram que para as reações de deutério e trítio,  $\sigma_{dt}$  pode ser aproximado por

$$\sigma_{dt}(E_D) = \frac{A_1}{E_D} \exp\left(-\frac{A_2}{E_D^{1/2}}\right), \quad (\text{A.7})$$

sendo  $A_1 = 2.19 \times 10^4$ ,  $A_2 = 44.24$ ,  $E_D$  dado em keV e  $\sigma_{dt}$  em barns. A expressão (A.7) é válida no sistema laboratório, em que se considera que um íon de deutério energético atinge um íon de trítio em repouso, e para valores baixos de  $E_D$ .

A energia  $E_D$  do íon de deutério relaciona-se com a energia do movimento relativo por  $E_D = \frac{m_d + m_t}{m_t} E_r$ , ou  $E_D = \frac{5}{3} E_r$ . Subs-



tituindo a equação (A.7) na equação (A.6) e introduzindo a variável adimensional  $\epsilon = \frac{E_r}{T}$ , obtemos

$$\langle \sigma_{dt}^v \rangle = \frac{2^{3/2}}{(\pi m_n T)^{1/2}} A_1' \int_0^\infty d\epsilon e^{-\left(\epsilon + \frac{\alpha}{\sqrt{\epsilon}}\right)}, \quad (\text{A.8})$$

onde  $A_1' = \frac{3}{5} A_1$ ,  $\alpha = \sqrt{\frac{3}{5}} \frac{A_2}{\sqrt{T}}$ .

Em forma mais compacta a equação (A.8) pode ser escrita como

$$\langle \sigma_{dt}^v \rangle = \frac{2^{3/2}}{(\pi m_n T)^{1/2}} A_1' \bar{I}(\alpha), \quad (\text{A.9})$$

onde

$$\bar{I}(\alpha) = \int_0^\infty d\epsilon e^{-\left(\epsilon + \frac{\alpha}{\sqrt{\epsilon}}\right)}.$$

Em  $\bar{I}(\alpha)$ , a função  $f(\epsilon) = \epsilon + \frac{\alpha}{\sqrt{\epsilon}}$ , que ocorre na exponencial do integrando, apresenta um ponto de mínimo em  $\epsilon = \epsilon_m = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2/3}$ . Expandindo  $f(\epsilon)$  em série de Taylor em torno do ponto  $\epsilon_m$  e, reterdo termos até ordem dois em  $\epsilon$ , obtemos

$$\bar{I}(\alpha) \approx e^{-3\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2/3}} \int_0^\infty d\epsilon e^{-\frac{3}{4}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2/3}\left(\epsilon - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2/3}\right)^2},$$

que, fazendo a mudança de variável

$$t = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{1/3} \left(\epsilon - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2/3}\right),$$

nos fornece

$$\bar{I}(\alpha) \cong 2 \sqrt{\frac{\pi}{3}} \left( \frac{\alpha}{2} \right)^{1/3} e^{-3(\alpha/2)^{2/3}}.$$

Usando este resultado a razão de reação média por partícula assume a forma

$$\langle \sigma_{dt} v \rangle = 3.68 \times 10^{-12} T^{-2/3} \exp(-19.94 T^{-1/3}), \quad (\text{cm}^3 \cdot \text{s}^{-1}) \quad (\text{A.10})$$

sendo  $T$  dado em keV. Esta fórmula aproximada é válida para valores baixos de  $T$ ,  $T \lesssim 25$  keV [GL60], pois neste caso  $\langle \sigma_{dt} v \rangle$  ainda é menor do que seu valor máximo, ao passo que para valores maiores de  $T$ ,  $\langle \sigma_{dt} v \rangle$  é grande e aproximadamente constante. A expressão para a razão de produção das partículas alfa,  $S^0$ , obtida trivialmente das equações (A.10) e (A.5), é

$$S^0 = n_d n_t \langle \sigma_{dt} v \rangle = 3.68 \times 10^{-12} n_d n_t T^{-2/3} \exp(-19.94 T^{-1/3}), \quad (\text{cm}^{-3} \cdot \text{s}^{-1}) \quad (\text{A.11})$$

onde  $n_d$  e  $n_t$  são dados em  $\text{cm}^{-3}$  e  $T$  em keV. O resultado dado pela equação (A.11) é a expressão introduzida na equação (III.6).



## APÊNDICE B

### DISTRIBUIÇÃO OBTIDA DE FONTE NÃO DELTIFORME

Embora muitas das distribuições de partículas alfa neste trabalho tenham sido obtidas para um termo de fonte arbitrário, em geral supusemos uma função deltiforme em velocidade. Desse modo obtivemos soluções mais simples, que ilustravam a parte física fundamental.

Os trabalhos de Kolesnichenko e Oraevskii [K067] e Liskien [Li79] mostram que fontes não deltiformes devem ser consideradas.

Neste apêndice inicialmente vamos obter uma expressão mais precisa para o termo de fonte das partículas alfa, do que a que foi introduzida pela equação (III.5),

$$S(v) = \frac{S^0}{4\pi v_{\alpha 0}^2} \delta(v - v_{\alpha 0}), \quad (\text{B.1})$$

onde  $S^0 = n_d n_t \langle \sigma_{dt} v \rangle$ , sendo  $\langle \sigma_{dt} v \rangle$  dado pela equação (A.10), e sendo  $n_d$  e  $n_t$  as densidades de íons de deutério e trítio, respectivamente, e  $v_{\alpha 0}$  a velocidade inicial das partículas alfa.

No Apêndice A obtivemos

$$S^0 = n_d n_t \left( \frac{M}{2\pi T} \right)^{3/2} \left( \frac{m_n}{2\pi T} \right)^{3/2} \int d^3V \int d^3v e^{-\left( \frac{MV^2}{2T} + \frac{m_n v^2}{2T} \right)} \sigma_{dt}(v) v, \quad (\text{B.2})$$

onde  $M = m_d + m_t$  é a massa total do sistema de íons deutério-trítio,  $m_r = \frac{m_d m_t}{M}$  é a massa reduzida do sistema,  $\vec{V} = \frac{m_d \vec{v}_d + m_t \vec{v}_t}{M}$  é a velocidade do centro de massa e  $\vec{v} = \vec{v}_d - \vec{v}_t$  é a velocidade relativa.

Observamos que, por definição,

$$S^0 = \int S d\vec{v}, \quad (\text{B.3})$$

para qualquer forma da função fonte  $S$ .

Usando o mesmo tipo de procedimento que o utilizado por Kolesnichenko e Oraevskii [K067], realizamos uma mudança de variáveis das velocidades de centro de massa e relativa,  $\vec{V}$  e  $\vec{v}$ , para as velocidades das partículas alfa nos sistemas laboratório e centro de massa,  $\vec{v}_\alpha$  e  $\vec{u}_\alpha$ .

No sistema centro de massa, a conservação de energia pode ser expressa como

$$\frac{1}{2} m_n v^2 + Q = \frac{1}{2} m_\alpha u_\alpha^2 + \frac{1}{2} m_n u_n^2, \quad (\text{B.4})$$

onde  $Q$  é a quantidade de energia cedida a partícula alfa e ao neutron na reação,  $m_n$  é a massa do neutron e  $\vec{u}_n$  sua velocidade e  $\vec{u}_\alpha$  é a velocidade da partícula alfa no sistema centro de massa. Neste mesmo sistema, a conservação de momentum assume a forma,

$$m_d \vec{u}_d + m_t \vec{u}_t = 0 = m_\alpha \vec{u}_\alpha + m_n \vec{u}_n, \quad (\text{B.5})$$

onde  $\vec{u}_d$  e  $\vec{u}_t$ , são as velocidades dos íons de deutério e trítio,



respectivamente, no sistema centro de massa.

Da equação (B.5) obtemos  $\vec{u}_n = -\frac{m_\alpha}{m_n} \vec{u}_\alpha$ , que substituída na equação (B.4), fornece

$$\frac{1}{2} m_n v^2 + Q = \frac{M m_\alpha}{2 m_n} u_\alpha^2, \quad (\text{B.6})$$

onde usamos  $M \cong m_\alpha + m_n$ , pois a variação em massa é muito pequena.

As velocidades das partículas alfa nos sistemas laboratório e centro de massa relacionam-se por

$$\vec{v}_\alpha = \vec{V} + \vec{u}_\alpha. \quad (\text{B.7})$$

Em termos das velocidades  $\vec{v}_\alpha$  e  $\vec{u}_\alpha$  das partículas alfa, dadas pelas equações (B.6) e (B.7), a razão de reação  $S^0$ , dada pela equação (B.2), pode ser expressa como

$$S^0 = n_d n_t \left( \frac{m_n}{2\pi T} \right)^{3/2} \left( \frac{M}{2\pi T} \right)^{3/2} \frac{2 M m_\alpha}{m_n^2 m_n} \int d^3 v_\alpha \int_{\sqrt{2 m_n Q / M m_\alpha}}^{\infty} du_\alpha u_\alpha \int_0^\pi d\theta_\alpha \sin \theta_\alpha \times$$

$$\times \int_0^{2\pi} d\phi_\alpha \left( \frac{M m_\alpha}{2 m_n} u_\alpha^2 - Q \right) \sigma_{dt} \left( \frac{M m_\alpha}{2 m_n} u_\alpha^2 - Q \right) \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{M}{2T} (\vec{V}_\alpha - \vec{u}_\alpha)^2\right) \exp\left(-\left(\frac{M m_\alpha}{2 m_n T} u_\alpha^2 - \frac{Q}{T}\right)\right). \quad (\text{B.8})$$

Escolhendo no sistema de coordenadas centro de massa o eixo Z ao longo da direção de  $\vec{v}_\alpha$ , e realizando as integrais angulares que ocorrem na equação (B.8), obtemos

$$S^0 = \frac{n_d n_t M^{3/2} m_d e^{Q/T}}{2 \pi^2 m_n^{1/2} m_m T^2} \int d^3 v_d \frac{1}{v_d} \exp\left(-\frac{M v_d^2}{2T}\right) \int_{\sqrt{\frac{2 m_m Q}{M m_d}}}^{\infty} du_d \left(\frac{M m_d}{2 m_m} u_d^2 - Q\right) \times$$

$$\times \sigma_{dt} \left(\frac{M m_d}{2 m_m} u_d^2 - Q\right) \left(\exp\left(\frac{M v_d u_d}{T}\right) - \exp\left(-\frac{M v_d u_d}{T}\right)\right) \exp\left(-\frac{M^2 u_d^2}{2 m_m T}\right). \quad (\text{B.9})$$

Se desprezarmos a variação com a energia do fator  $E_r \sigma_{dt}(E_r)$  para altas temperaturas, a razão de reação  $S^0$ , dada pela equação (B.9) assume a forma

$$S^0 = \frac{n_d n_t M^{3/2} m_d \sigma_{dt} \bar{E}_r e^{Q/T}}{2 \pi^2 m_n^{1/2} m_m T^2} \int d^3 v_d \frac{1}{v_d} \exp\left(-\frac{M v_d^2}{2T}\right) \int_{\sqrt{\frac{2 m_m Q}{M m_d}}}^{\infty} du_d \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{M^2 u_d^2}{2 m_m T}\right) \left[\exp\left(\frac{M v_d u_d}{T}\right) - \exp\left(-\frac{M v_d u_d}{T}\right)\right],$$

que realizando a integral em  $u_d$ , pode ser escrita como

$$S^0 = \frac{n_d n_t M^{1/2} m_d \sigma_{dt} \bar{E}_r e^{Q/T}}{2^{3/2} \pi^{3/2} m_n^{1/2} m_m^{1/2} T^{3/2}} \int d^3 v_d \frac{1}{v_d} \exp\left(-\frac{(M-m_m) v_d^2}{2T}\right) \times$$

$$\times \left[ \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{M Q}{m_d T}} - \sqrt{\frac{m_m}{2T}} v_d\right) - \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{M Q}{m_d T}} + \sqrt{\frac{m_m}{2T}} v_d\right) \right]. \quad (\text{B.10})$$



Para  $x \gg 1$ , podemos aproximar  $\operatorname{erfc}(x) \cong \frac{1}{\sqrt{\pi}x} e^{-x^2}$  [AS66].

Neste caso a equação (B.10) pode ser escrita como,

$$S_0 = \frac{n_d n_t \sigma_{dt} E_n m_d^{3/2}}{2^{3/2} \pi^2 T Q^{1/2} m_n^{1/2} m_m^{1/2}} \int d^3 v_d \frac{1}{v_d} \left[ \frac{\exp\left(-\frac{M}{2T} \left(v_d - \sqrt{\frac{2m_n Q}{m_d M}}\right)^2\right)}{1 - \sqrt{\frac{m_n m_d}{2MQ}} v_d} - \frac{\exp\left(-\frac{M}{2T} \left(v_d + \sqrt{\frac{2m_n Q}{m_d M}}\right)^2\right)}{1 + \sqrt{\frac{m_n m_d}{2MQ}} v_d} \right] \quad (\text{B.11})$$

Se desprezamos os fatores  $\sqrt{\frac{m_n m_d v_d^2}{2MQ}}$  frente a 1, nos denominadores que ocorrem na equação (B.11), e comparamos a expressão resultante com a equação (B.3), a função fonte  $S$  é, então, dada por

$$S = \frac{n_d n_t \sigma_{dt} E_n m_d^{3/2}}{2^{3/2} \pi^2 T Q^{1/2} m_n^{1/2} m_m^{1/2}} \frac{1}{v} \left[ e^{-\frac{M}{2T} \left(v - \sqrt{\frac{2m_n Q}{m_d M}}\right)^2} - e^{-\frac{M}{2T} \left(v + \sqrt{\frac{2m_n Q}{m_d M}}\right)^2} \right] \quad (\text{B.12})$$

A função fonte dada por esta equação torna-se uma função delta em energia, quando a temperatura torna-se pequena.

O resultado obtido, equação (B.12), coincide com o resultado de Kolesnichenko e Oraevskii [K067], exceto pelo fator

de normalização. Observamos que a função fonte  $S$ , por nós obtida, é normalizada a

$$S^0 = \int S d\vec{v}$$

$$= \frac{2^{3/2} n_d n_t \sigma_{dt} E_n m_\alpha}{T^{1/2} M m_n^{1/2}},$$

e que o primeiro termo da expressão de  $S(v)$  é o termo dominante.

Liskien [Li79], usando o método de Monte Carlo, determinou numericamente o espectro de partículas alfa e de neutrons produzidos em um plasma de deutério e trítio a temperaturas de 10, 20 e 30 keV. Ele mostrou que para temperatura do plasma de 30 keV o espectro das partículas alfa apresenta uma largura de até 2 MeV. Segundo Liskien o resultado obtido por Kolesnichenko e Oraevskii [K067] concorda bem com o resultado para o espectro de partículas alfa por ele obtido.

Os resultados do presente trabalho ou são dados diretamente em termos de uma fonte arbitrária, como na maior parte dos capítulos IV e VI, ou foram calculados especificamente para uma fonte deltoforme, como nos capítulos III e V. Escolhida uma fonte não deltoforme conveniente, no primeiro caso, seu efeito sobre a distribuição de freamento ou sobre o transporte das grandezas macroscópicas pode ser calculado diretamente. No segundo caso, ou seja, para as distribuições termalizada e de alta energia, podemos obter os efeitos de uma fonte não deltoforme sobre a distribuição, usando o método da função de Green, já que a distribuição obtida para uma fonte deltoforme, nos fornece a função de Green do problema.

Tendo em vista ilustrar os efeitos sobre a distribui-



ção ocasionados por uma fonte não deltiforme, consideramos algumas das distribuições por nós obtidas para o caso de fonte deltiforme, e as calculamos para uma função fonte de forma triangular dada por

$$S(v) = \frac{S^0}{4\pi(v_{d0}^2 \Delta v^2 + \frac{1}{6} \Delta v^4)} \begin{cases} (v + \Delta v - v_{d0}) & , v_{d0} - \Delta v \leq v \leq v_{d0} \\ (-v + \Delta v + v_{d0}) & , v_{d0} \leq v \leq v_{d0} + \Delta v \end{cases} \quad (\text{B.13})$$

e normalizada de acordo com a equação (B.3).

A distribuição termalizada e o tempo de termalização, dados no Capítulo III pelas equações (III.11) e (III.10) para uma fonte deltiforme, no caso de uma função fonte de forma arbitrária,  $S(v) = S^0 R(v)$ , sendo  $\int R(v) d^3v = 1$ , são dados por

$$f_{\alpha}(x_{\alpha}, t) = \frac{S^0}{4\pi} e^{-x_{\alpha}^2} \left[ \frac{4(t-t_M)}{\sqrt{\pi} v_{\alpha}^3} + \frac{\int_0^{x_{\alpha}} (\Psi(x_{\alpha}') - v_{\alpha}^3 \int_0^{x_{\alpha}'} R(x_{\alpha}'') x_{\alpha}''^2 dx_{\alpha}'') e^{-x_{\alpha}'^2} dx_{\alpha}'}{\sum_j \prod_j \frac{m_{\alpha}}{m_j} \Psi(x_j')} \right] \quad (\text{B.14})$$

e

$$t_M = v_{\alpha}^3 \int_0^{\infty} dx_{\alpha} x_{\alpha}^2 e^{-x_{\alpha}^2} \frac{\int_0^{x_{\alpha}} dx_{\alpha}' x_{\alpha}'^2 e^{-x_{\alpha}'^2} (\Psi(x_{\alpha}') - v_{\alpha}^3 \int_0^{x_{\alpha}'} dx_{\alpha}'' x_{\alpha}''^2 R(x_{\alpha}''))}{\sum_j \prod_j \frac{m_{\alpha}}{m_j} \Psi(x_j')} \quad (\text{B.15})$$

Usando a função fonte dada pela equação (B.13) obtemos a partir da equação (B.14) a distribuição termalizada nas dife-

rentes regiões do espaço de velocidades, usando as mesmas aproximações que foram utilizadas no Capítulo III para a função erro e sua derivada. Para a região de termalização,  $0 \leq v < \bar{v}_{thi}$ , obtemos

$$f_{\alpha}(v, t) = \frac{S^0(t-t_m)}{\pi^{3/2} v_{\alpha}^3} e^{-v^2/v_{\alpha}^2} + \frac{S^0 \tilde{\tau}_{\alpha 0} v^2}{3 \pi^{3/2} Z_0 v_{\alpha}^5} e^{-v^2/v_{\alpha}^2}. \quad (\text{B.16})$$

Na região de freamento,  $\bar{v}_{thi} < v \leq v_{\alpha 0} - \Delta v$ , a distribuição independente do tempo é dada por

$$f_{\alpha}(v) = \frac{S^0 \tilde{\tau}_{\alpha 0}}{4\pi} \frac{1}{v^3 + v_{\alpha 0}^3}, \quad (\text{B.17})$$

na parte inferior da região de transição, onde se localiza a fonte,  $v_{\alpha 0} - \Delta v \leq v \leq v_{\alpha 0}$ , por

$$f_{\alpha}(v) = \frac{S^0 \tilde{\tau}_{\alpha 0}}{4\pi v^3} \left[ 1 - \frac{\frac{1}{4} x_{\alpha}^4 - \frac{1}{3} x_{\alpha}^3 (x_{\alpha 0} - \Delta x) + \frac{1}{12} (x_{\alpha 0} - \Delta x)^4}{x_{\alpha 0}^2 (\Delta x)^2 + \frac{1}{6} (\Delta x)^4} \right], \quad (\text{B.18})$$

na parte superior da região de transição,  $v_{\alpha 0} \leq v \leq v_{\alpha 0} + \Delta v$ , por

$$f_{\alpha}(v) = \frac{S^0 \tilde{\tau}_{\alpha 0}}{4\pi v^3} \left\{ 1 + \frac{1}{x_{\alpha 0}^2 (\Delta x)^2 + \frac{1}{6} (\Delta x)^4} \left[ \frac{1}{4} x_{\alpha}^4 - \frac{1}{3} x_{\alpha}^3 (x_{\alpha 0} + \Delta x) + \frac{2}{3} x_{\alpha 0}^3 \Delta x - \frac{1}{12} (x_{\alpha 0} - \Delta x)^3 \Delta x \right] - \frac{1}{6} x_{\alpha}^3 x_{\alpha 0} e^{-(x_{\alpha}^2 - x_{\alpha 0}^2)} \right\}, \quad (\text{B.19})$$



e finalmente na região de alta energia,  $v_{\alpha 0} + \Delta v \leq v < v_{the}$ , por

$$f_{\alpha}^{\prime}(v) = \frac{S^0 \tilde{\tau}_{\alpha 0}}{4\pi (v_{\alpha 0} + \Delta v)^3} e^{-\left(x_{\alpha}^2 - (x_{\alpha 0} + \Delta x)^2\right)} \quad (B.20)$$

Estas expressões mostram que a diferença mais importante introduzida pela consideração de uma fonte não deltiforme, consiste no surgimento de uma região, que chamamos de região de transição, onde a distribuição é modificada de forma apreciável e fortemente dependente da forma da fonte.

A distribuição de freamento dependente do tempo para uma fonte arbitraria dada no Capítulo IV, pela equação (IV.7), se supomos que  $S(v,t) = S(v) U(t)$ , sendo  $S(v)$  dado pela equação (B.13), é dada por

$$f_{\alpha}^{\prime}(v,t) = \frac{\tilde{\tau}_{\alpha 0}}{v^3 + v_c^3} U(v - v_M(t)) U(v_M(t) - (v_{\alpha 0} - \Delta v)) \int_{v_{\alpha 0} - \Delta v}^{v_M(t)} S(v') v'^2 dv', \quad (B.21)$$

onde

$$v_M(t) = \left\{ \left[ (v_{\alpha 0} - \Delta v)^3 + v_c^3 \right] e^{-3t/\tilde{\tau}_{\alpha 0}} - v_c^3 \right\}^{1/3}$$

e

$$v_M(t) = \left[ (v^3 + v_c^3) e^{3t/\tilde{\tau}_{\alpha 0}} - v_c^3 \right]^{1/3}.$$

Obtemos, a partir da equação (B.21),

$$f_{\alpha}(v, t) = \frac{\tilde{\tau}_{\alpha 0} S^0}{4\pi(v^3 + v_c^3)} \frac{1}{(v_{\alpha 0}^2 \Delta v^2 + \frac{1}{6} \Delta v^4)} \left\{ \frac{1}{4} v_M^4(t) + \frac{(\Delta v - v_{\alpha 0})}{3} v_M^3(t) + \right. \\ \left. + \frac{1}{12} (v_{\alpha 0} - \Delta v)^4 \right\}, \text{ para } v_{\alpha 0} - \Delta v \leq v_M(t) \leq v_{\alpha 0},$$

$$f_{\alpha}(v, t) = \frac{\tilde{\tau}_{\alpha 0} S^0}{4\pi(v^3 + v_c^3)} \frac{1}{(v_{\alpha 0}^2 \Delta v^2 + \frac{1}{6} \Delta v^4)} \left\{ -\frac{1}{4} v_M^4(t) + \frac{(\Delta v + v_{\alpha 0})}{3} v_M^3(t) + \right. \\ \left. + \frac{1}{12} (v_{\alpha 0} - \Delta v)^4 - \frac{1}{6} v_{\alpha 0}^4 \right\}, \text{ para } v_{\alpha 0} \leq v_M(t) \leq v_{\alpha 0} + \Delta v.$$

Observamos que os resultados obtidos no Capítulo VI para o transporte das grandezas macroscópicas, não são praticamente alterados pela introdução de fontes não deltiformes, já que os resultados obtidos dependem essencialmente da distribuição de freamento.



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AS66 ABRAMOWITZ, M. & STEGUN, I. Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables. Washington, D.C., National Bureau of Standards, 1966. (Applied mathematical series, 55)
- BK074 BELIKOV, V.S.; KOLESNICHENKO, I.; ORAEVSKII, V.N. Nonlinear theory of thermonuclear Alfvén instability in plasma. Soviet Physics JEPT, New York, 39(5):828-31, Nov. 1974.
- CC52 CHAPMAN, S. & COWLING, T.G. The mathematical theory of non-uniform gases. London, Cambridge University Press, 1952.
- Ch43 CHRANDRASEKHAR, S. Dynamical friction I and II. Astrophysical Journal, Chicago, 97(2):255, 1943.
- CSUC79 COLESTOCK, P.; STRACHAN, J.D.; UBRICKSON, M.; CHRIEU, R. Confinement of fusion-produced tritium in the Princeton large torus. Physical Review Letters, New York, 43(11):768-72, Sept. 1979.
- DP74 DÜCHS, D.F. & PFIRSCH, D. Neoclassical diffusion and the influence of  $\alpha$ -particles on the energy balance in large tokamaks and fusion reactor plasmas. In: IAEA. Plasma physics and controlled nuclear fusion. Vienna, 1974. V.1, p.669-80.
- Dr60 DREICER, H. Electron and ion runaway in a fully ionized gas. II. Physical Review, New York, 117(2):329-42, Jan. 1960.



- Dy64 DYKE, M. van. Perturbation methods in fluid mechanics.  
New York, Academic Press, 1964.
- EGA+79 EUBANK, H.; GOLDSTON, R.; ARUNASALAM, V. et alii. Neutral-  
-beam-heating results from the Princeton large torus.  
Physical Review Letters, New York, 43(4):270-4, July  
1979.
- Eu78 EUBANK, H.P. Neutral beam injection into the PLT tokamak.  
Bulletin of the American Physical Society, New York,  
23(7):745, Sept. 1978.
- FC61 FRIED, B.D. & CONTE, S.D. The plasma dispersion function.  
New York, Academic Press, 1961.
- FR72 FURTH, H.P. & RUTHERFORD, P.H. Ion runaway in tokamak  
discharges. Physical Review Letters, New York,  
28(9):545-8, Feb. 1972.
- Fu79 FURTH, H.P. Progress toward a tokamak fusion reactor.  
Scientific American, New York, 241(2):38-49, Aug. 1979.
- Ga38 GAMOW, G. Nuclear energy sources and stellar evolution.  
Physical Review, New York, 53(7):595-604, Apr. 1938.
- Ga76 GAFFEY Jr., J.D. Energetic ion distribution resulting  
from neutral beam injection in tokamaks. Journal of  
Plasma Physics, London, 16(2):149-69, Oct. 1975.
- GL60 GLASSTONE, S. & LOVBERG, R.H. Controlled thermonuclear  
reactions. New Jersey, D. Van Nostrand Company, 1960.
- G172 GLASSER, A.H. Neoclassical plasma transport in nearly  
axisymmetric toroidal systems. Tese de doutorado,  
Universidade da California, San Diego, 1972.



- KF75 KOLESNICHENKO, Ya.I. & FURSA, A.D. Evolution of the distribution function of ions produced in a steady-state thermonuclear reaction. Soviet Journal of Plasma Physics, New York, 1(5):442-5, Sept./Oct. 1975.
- KLMP76 KALADZE, T.D.; LOMINADZE, J.G.; MIKHAILOVSKII, A.B.; POKHOTELOV, O.A. Cyclotron instability of trapped  $\alpha$ -particles in a tokamak with elliptic cross-section. Nuclear Fusion, Vienna, 16(3):465-72, July 1976.
- KM75 KALADZE, T.D. & MIKHAILOVSKII, A.B. "Thermonuclear" cyclotron instability in a tokamak reactor. Soviet Journal of Plasma Physics, New York, 1(2):128-38, Mar./Apr. 1975.
- K067 KOLESNICHENKO, I. & ORAEVSKII, V.N. Instability of an inhomogeneous plasma due to thermonuclear reaction products. Soviet Atomic Energy, New York, 23(4):1028-30, Oct. 1967.
- Ko75 KOLESNICHENKO, Ya.I. Distribution function for nuclear fusion reaction products in a stationary thermonuclear reactor. Nuclear Fusion, Vienna, 15(1):35-7, Feb. 1975.
- KT73 KRALL, N.A. & TRIVELPIECE, A.W. Principles of plasma physics. New York, McGraw-Hill, 1973.
- La55 LAWSON, J.D. Some criteria for a useful thermonuclear reactor. Harwell, Atomic Energy Research Establishment, 1955. (AERE-GP/R - 1807).
- Li79 LISKIEN, H. The particle spectrum to be expected from a D-T plasma. Nuclear Science and Engineering, La Grange Park, 71(1):57-9, July 1979.



- LM75 LOMINADZE, D.G. & MIKHAILOVSKII, A.B. Effect of the thermal spread of trapped  $\alpha$ -particles on the cyclotron instability in tokamak reactor. Soviet Journal of Plasma Physics, New York, 1(3):291, May/June 1975.
- Ma77 MANHEIMER, W.M. An introduction to trapped-particle instability in tokamaks. Springfield, Technical Information Center, 1977 (ERDA critical review series: advances in fusion science and engineering, TID-27157).
- Mc74 McALEES, D.G. Alpha particle energetics and neutral beam heating in tokamak plasmas. Oak Ridge, Oak Ridge National Laboratory, 1974. (ORNL - TM - 4661).
- ME79 MURAKAMI, M. & EUBANK, H.P. Recent progress in tokamak experiments. Physics Today, New York, 32(5):25-32, May, 1979.
- MT64 MONTGOMERY, D.C. & TIDMAN, D.A. Plasma kinetic theory. New York, McGraw-Hill, 1964.
- Mu78 MURAKAMI, M. Review of confinement studies in tokamaks. Bulletin of the American Physical Society, New York, 23(7):745, Sept. 1978.
- Po69 POST, R.F. Mirror systems: fuel cycles, loss reduction and energy recovery in nuclear fusion reactors. In: INTERNATIONAL conference on nuclear fusion reactors. Abingdon, British Nuclear Energy Society, 1969. (UCRL-71753, CONF-690901-7).
- RMJ57 ROSENBLUTH, M.N.; MacDONALD, W.M.; JUDD, D.L. Fokker-Planck equation for an inverse-square force. Physical Review, New York, 107(1):1-6, July, 1957.



- SC78 SIGMAR, D.J. & CHAN, H.C. Anomalous alpha-particle transport in thermonuclear tokamak plasma. Nuclear Fusion, Vienna, 18(11):1569-81, Nov. 1978.
- Sp62 SPITZER, L. The physics of fully ionized gases. New York, Interscience, 1962.
- SSKM77 SAITO, H.; SEKIGUCHI, T.; KATSURAI, M.; MAEKAWA, S. An approximate theory of steady-state and dynamic characteristics of alpha-particle-heated DT-fusion reactors. Nuclear Fusion, Vienna, 17(5):919-28, Oct. 1977.
- St75 STEINER, D. The technological requirements for power by fusion. Proceedings of the IEEE, New York, 63(11):1568-608, Nov. 1975.
- Te67 LANDAU, L.D. The transport equation in the case of coulomb interactions. In: TER HAAR, D. ed. Collected papers of L.D.Landau. New York, Gordon and Breach, 1967. p.163-70.
- Th64 THOMPSON, W.B. An introduction to plasma physics. Reading, Addison-Wesley, 1964.
- TKSN76 TSUJI, H.; KATSURAI, M.; SEKIGUCHI, T.; NAKANO, N. Time-dependent solution of Fokker-Planck equation for alpha-particles and its effect on alpha-particle heating characteristics in a D-T fusion reactor. Nuclear Fusion, Vienna, 16(2):287-93, Apr. 1976.