

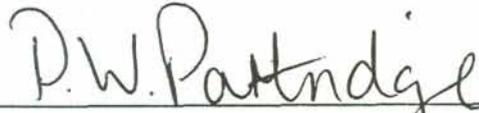
UM ESTUDO DE PERCOLAÇÃO EM BARRAGENS DE TERRA,
EM REGIMES PERMANENTE E TRANSIENTE, COM A
APLICAÇÃO DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

MAURO EDSON ALBERTI

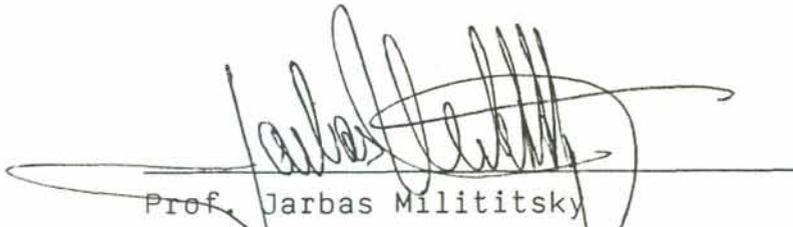
Dissertação apresentada ao corpo docente do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia.

Porto Alegre
Janeiro de 1988

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pelo Curso de Pós-Graduação.



Prof. Paul William Partridge
Orientador



Prof. Jarbas Milititsky
Coordenador do Curso de Pós-Graduação em Eng.Civil

BANCA EXAMINADORA

- Paul W.Partridge (Orientador)
Ph.D. pela Southampton University
- Armando M.Awruch
D.Sc. pela COPPE/UFRJ
- Nilo C.Consoli
M.Sc. pela PUC/RJ

A meus pais e
minha irmã.

AGRADECIMENTOS

Ao professor Paul William Partridge pela orientação e apoio recebidos no transcorrer do trabalho.

Aos professores e funcionários do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul que de alguma maneira contribuíram para a realização deste.

À Comissão Nacional de Energia Nuclear, CNEN, pela concessão da bolsa de estudos.

Ao Centro de Estudos de Engenharia Civil da Universidade Federal do Paraná pela cessão de suas instalações e pelo incentivo recebido.

SUMÁRIO

LISTA DE SÍMBOLOS.....	viii
RESUMO.....	x
ABSTRACT.....	xi
CAPÍTULO 1	
INTRODUÇÃO.....	1
CAPÍTULO 2	
REVISÃO DA LITERATURA.....	3
CAPÍTULO 3	
EQUAÇÕES GOVERNANTES.....	7
3.1) Introdução.....	7
3.2) Equação para fluxo transiente em domínio saturado-não saturado.....	8
3.3) Equação para fluxo transiente em domínio saturado.....	16
3.4) Condições de contorno.....	20
3.5) Descrição dos coeficientes característicos dos solos.....	23
3.5.1) Condutibilidade hidráulica (K).....	23
3.5.2) Teor de umidade volumétrico (θ).....	32
3.5.3) Capacidade de umidade específica (C_s).....	35
3.5.4) Coeficiente de armazenamento específico (S_s).....	37
CAPÍTULO 4	
FLUXO EM REGIME PERMANENTE.....	41
4.1) Introdução.....	41
4.2) Formulação em Elementos Finitos.....	41

4.3) Análise considerando apenas o domínio saturado (malha ajustável).....	44
4.3.1) Aplicação da formulação em Elementos Finitos.....	44
4.3.2) Matriz dos coeficientes do elemento (triângulo linear).....	46
4.3.3) Determinação da posição da linha freática (malha ajustável).....	48
4.4) Análise considerando todo o domínio saturado-não saturado malha fixa).....	55
4.4.1) Aplicação da formulação em Elementos Finitos.....	55
4.4.2) Matriz dos coeficientes do elemento (quadrilátero isoparamétrico).....	57
4.4.3) Determinação da posição da linha freática (malha fixa).....	62
4.5) Exemplos.....	69
4.5.1) Exemplos com malha ajustável.....	69
4.5.2) Exemplos com malha fixa.....	71

CAPÍTULO 5

FLUXO EM REGIME TRANSIENTE.....	96
5.1) Introdução.....	96
5.2) Formulação em Elementos Finitos.....	96
5.3) Matriz dos coeficientes do elemento e matriz de massa (quadrilátero isoparamétrico).....	101
5.4) Procedimento de integração no tempo.....	102
5.5) Solução do sistema não linear de equações.....	106
5.6) Exemplos.....	110

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES.....	114
-----------------	-----

APÊNDICE I

AVALIAÇÃO DO GRADIENTE DE VELOCIDADE DE GRÃOS
DE SOLO (∇v_s).....117

APÊNDICE II

RELAÇÃO ENTRE α E C_b121

APÊNDICE III

ELEMENTO TRIANGULAR LINEAR.....123

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....128

LISTA DE SÍMBOLOS

- a : índice do solo
A : área
 C_b : coeficiente de compressibilidade de formação vertical do solo
 C_s : capacidade de umidade específica
e : índice de vazios
E : módulo de Young
F : formação geológica
g : aceleração da gravidade
H : potencial total prescrito
 $H(x_1, t)$: posição da linha freática
 k_{ii} : coeficiente de permeabilidade do meio
K : coeficiente de condutibilidade hidráulica
 K_{ij} : tensor que representa a condutibilidade hidráulica na saturação
 K_r : condutibilidade hidráulica relativa
 K_s : condutibilidade hidráulica saturada
 K_{x_i} : condutibilidade hidráulica na direção x_i
m, n : número de pontos de integração
n : porosidade
 n^e : número de nós do elemento finito
 N_i : funções de forma ou de interpolação
S : grau de saturação
 S_s : coeficiente de armazenamento específico
t : tempo
 v_a : velocidade da água
 v_d : velocidade de Darcy
 v_i : componentes de velocidade do fluido

- v_s : velocidade dos grãos de solo
 V : volume total
 V_a : volume de água
 V_v : volume de vazios
 w : parâmetro que varia entre 0 e 1
 w_i, w_j : fatores de peso da Quadratura Gaussiana
 x_1, x_2, x_3 : coordenadas cartesianas globais
 x_i^n : coordenadas nodais do elemento finito
 α : coeficiente de compressibilidade de formação vertical do solo (L^{-1})
 α' : coeficiente de compressibilidade de formação vertical do solo (L^2/F)
 β : coeficiente de compressibilidade da água (L^{-1})
 β' : coeficiente de compressibilidade da água (L^2/F)
 ϵ : Norma Euclidiana
 ϕ : potencial total
 ϕ^e : potencial total no interior do elemento finito
 ϕ^n : potencial total nos nós do elemento finito
 γ : peso específico
 η, ξ : coordenadas cartesianas locais do elemento finito
 ψ : potencial de pressão
 ψ_c : potencial de pressão crítico
 μ : viscosidade
 ν : módulo de Poisson
 θ : teor de umidade volumétrico
 ρ : massa específica da água
 ρ_0 : massa específica inicial da água
 ρ_s : massa específica do solo
 σ_{x_3} : tensão efetiva na direção x_3

RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo de fluxo de água em barragens de terra, em regimes permanente e transiente, com a utilização do Método de Elementos Finitos.

No estudo de fluxo em regime permanente duas formas de abordar o problema são apresentadas e comparadas.

A primeira considera, para a discretização da malha de elementos finitos, somente a região saturada, de maneira que a linha freática é obtida através de ajustes desta malha de elementos finitos.

A segunda considera toda a região saturada-insaturada, sendo discretizado todo o domínio físico da barragem. A malha de elementos finitos não é modificada ao longo das iterações e a linha freática é obtida por interpolação dentro dos elementos, em função dos valores nodais do potencial de pressões.

O desenvolvimento teórico das equações utilizadas para as duas formas de abordagem é apresentado, mostrando onde elas diferem entre si.

No estudo de fluxo em regime transiente é utilizado apenas o esquema de malha fixa de elementos finitos.

ABSTRACT

This work presents a steady-state and transient fluid flow study in earth dams using the Finite Element Method.

In the steady-state fluid flow study, two approaches are presented and compared.

The first one considers a finite element mesh discretization of only the saturated zone, so that the free surface is obtained by means of adjusting the finite element mesh.

The second one considers all the saturated-unsaturated zone, where all the earth dam physical domain is discretized. The finite element mesh is not modified throughout the iterations and the free surface is obtained by interpolation inside the finite element mesh, based on the pressure head nodal values.

The development of the equations used in the two approaches is presented, showing where they differ.

In the transient fluid flow study, only the fixed mesh finite element scheme is used.

1) INTRODUÇÃO

O fluxo através de meios porosos tem grande importância em muitos campos da engenharia, particularmente no projeto de barragens de terra ou de núcleo de terra, onde o fluxo se dá em regime não confinado, caracterizando-se uma região completamente saturada e outra parcialmente saturada ou não saturada, delimitadas por uma superfície chamada superfície livre ou superfície freática. O estudo deste fenômeno nestas estruturas de terra consiste em determinar a posição da superfície livre e conhecer o campo de pressões que é desenvolvido dentro da barragem e assim prevenir possíveis problemas de erosão interna oriundos do campo de velocidades e também problemas de estabilidade que podem ser ocasionados por elevadas poro pressões positivas ou grandes gradientes hidráulicos, como os que ocorrem no paramento de montante quando o nível do reservatório varia com o tempo. Os problemas de erosão dos grãos de solo no corpo da barragem e as poro pressões são os maiores causadores de danos nestas obras.

Durante muito tempo as soluções apresentadas para o problema de fluxo não confinado, sejam gráficas, analíticas e até numéricas como os métodos de Diferenças Finitas e de Elementos Finitos, restringiram o estudo ao domínio saturado, considerando a superfície livre como uma linha de corrente através da qual não ocorre fluxo. Desta forma, no caso de soluções com o Método de Elementos Finitos, apenas a região saturada era discretizada e a posição da linha freática encontrada por meio de ajustes na malha de elementos finitos.

Somente após FREEZE³⁵, em 1971, alertar para a importância de também se levar em conta a contribuição da região não saturada, mostrando que existe fluxo através da superfície livre e que esta é uma linha de potencial de

pressões constante e igual à pressão atmosférica, surgiram soluções que consideram todo o domínio saturado-não saturado. Sob esta ótica, o Método de Elementos Finitos passou a ser aplicado discretizando-se todo o domínio saturado e não saturado, com uma malha fixa de elementos finitos, em cujos nós são obtidos os valores do potencial de pressões e, com base neles, determinada a posição da linha freática (ref. 18 47 48).

Este trabalho apresenta um estudo de fluxo em barragens de terra com esta abordagem, que considera todo o domínio saturado e não saturado, e objetiva mostrar suas vantagens. O Método de Elementos Finitos é aplicado, utilizando-se o elemento finito quadrilátero linear isoparamétrico, e analisa-se tanto o fluxo em regime permanente quanto em regime transiente. No caso de fluxo permanente é feita uma comparação entre a abordagem considerando todo o domínio saturado-não saturado (malha fixa de elementos finitos) e a abordagem considerando somente o domínio saturado (malha ajustável de elementos finitos).

Exemplos ilustrativos são incluídos ao final do estudo de fluxo em regime permanente, bem como ao final do estudo em regime transiente.

O desenvolvimento das equações utilizadas neste trabalho também é apresentado em detalhes, juntamente com a análise dos coeficientes envolvidos nas mesmas, mostrando onde as equações para fluxo saturado e para fluxo saturado-não saturado diferem.

2) REVISÃO DA LITERATURA

Para solucionar o problema de fluxo em meios porosos muitas técnicas foram desenvolvidas, principalmente ao longo dos últimos cinquenta anos, as quais podem ser classificadas como métodos gráficos, analíticos, analógicos e numéricos.

Os métodos gráficos consistem basicamente em representar o fluxo por intermédio de uma malha de linhas equipotenciais e de fluxo, ortogonais entre si em qualquer ponto do domínio. São simples e efetivos no estudo de fluxo em meio homogêneo e de geometria relativamente simples. Pode-se citar os trabalhos apresentados por CASAGRANDE¹, CEDERGREEN²³, entre outros.

Da mesma forma, as soluções analíticas são normalmente possíveis somente para casos de fluxo em meios uniformes e com geometria e condições de contorno pouco complexas, limitando também suas aplicações em muitos casos. Dentre as soluções analíticas podem ser citados os tratamentos dados por GARDNER³⁷, HARR⁴¹, POLUBARINOVA-KOCHINA¹⁰, ZASLAVSKY¹⁴.

Na tentativa de superar deficiências de uma abordagem puramente matemática ou gráfica, surgiram soluções analógicas através de modelos em escala e modelos físicos completamente diferentes mas que têm comportamento matematicamente equivalente ao do fluxo em meios porosos homogêneos, como por exemplo o modelo de fluxo de fluido viscoso, no caso a glicerina, ao passar entre duas placas de vidro paralelas e muito próximas. Os trabalhos apresentados por GROVER⁴, DE WIEST³ e DESAI² são exemplos desta abordagem. Dentro desta classificação há ainda a técnica de modelos analógicos elétricos que baseiam-se no fato do fluxo de corrente elétrica ser descrito pelas mesmas equações diferenciais que regem o fluxo em meios

porosos e com condições de contorno semelhantes. Novamente aqui a aplicação de modelos elétricos se restringem a domínios homogêneos. Uma observação importante nesta técnica é que a superfície freática não é simulada exatamente, pois o fenômeno de superfície livre não existe na teoria elétrica. Neste campo pode-se citar os trabalhos de HERBERT^{5,6} que inclusive estendeu o método para problemas de fluxo variável no tempo, com bons resultados. Em adição a tudo isto, a pobre adaptabilidade dos métodos analógicos, com o uso de modelos, tornam difíceis e demoradas as modificações na configuração de um protótipo proposto, correspondente a uma otimização de projeto.

Com o advento dos computadores digitais, os métodos numéricos, especialmente o Método de Diferenças Finitas e o Método de Elementos Finitos, tiveram um grande impulso, ganhando grande importância na solução de problemas em muitas áreas da engenharia e, logicamente, também no estudo de fluxo em meios porosos.

O Método de Diferenças Finitas foi aplicado por muitos pesquisadores neste campo, podendo-se citar os trabalhos de: JEPPSON⁸ que deteve-se a problemas com geometria simples e domínios anisotrópicos com eixos de anisotropia paralelos em todos os pontos do domínio; TAYLOR e LUTHIN¹² que efetuaram análise transiente de aquífero em sistema de coordenadas cilíndricas axissimétrico; VERMA e BRUTSAERT¹³ que estudaram aquífero inconfinado com teoria de fluxo capilar; FREEZE³⁶ que apresentou um modelo tridimensional, e outros. A abordagem de Diferenças Finitas, por sua vez, também apresenta algumas limitações decorrentes de dificuldades no tratamento de sistemas não-lineares, de geometria complexa e anisotropia arbitrária, e no tratamento de contornos atmosféricos inclinados onde ocorre superfície de percolação e de evaporação, ou seja, com fluxo prescrito.

Com sua origem de aplicação na mecânica estrutural e no estudo de transmissão de calor, o Método de Elementos Finitos foi inicialmente aplicado no estudo de

fluxo em meios porosos por MAUERSBERGER⁹ e por ZIENKIEWICZ e CHEUNG¹⁵, e posteriormente por TAYLOR e BROWN⁵⁶ e por FINN³³. Com esta técnica, passou a ser possível analisar regiões de fluxo com contornos geométricos complexos e graus arbitrários de heterogeneidade e anisotropia, bem como com condições de contorno mais complexas. TAYLOR e BROWN⁵⁶ apresentaram soluções para fluxo permanente bidimensional com superfície livre, usando malha ajustável de elementos finitos triangulares lineares, soluções estas que foram melhoradas por NEWMAN e WITHERSPOON⁵⁰ no que se refere ao ajuste da malha. JAVANDEL e WITHERSPOON⁷ adaptaram a análise de condução de calor transiente para resolver o problema de fluxo transiente em meio poroso rígido, e SANDHU¹¹ estudou o fluxo transiente em meio poroso elástico. FRANCE e PARECK³⁴, por sua vez, estudaram problemas de fluxo transiente em domínio tridimensional com malha ajustável de elementos finitos isoparamétricos tridimensionais. VOLKER⁵⁸ estendeu a abordagem de FINN³³ para incluir fluxo não linear.

O Método de Elementos Finitos com a formulação de Galerkin foi aplicado por ZIENKIEWICZ e PARECK⁶¹, também utilizando elementos finitos isoparamétricos bi e tridimensionais. PINDER e FRIND⁵², da mesma forma, realizaram trabalho semelhante.

Após 1971, quando FREEZE³⁵ mostrou a importância da análise considerando a zona não saturada no estudo de fluxo em meios porosos, surgiram trabalhos que passaram a tratar de todo o domínio saturado-não saturado, o qual é totalmente discretizado por uma malha de elementos finitos que não sofre ajustes. A posição da linha freática, neste esquema chamado de fluxo residual, é encontrada por interpolação do potencial de pressões dentro dos elementos finitos por onde ela passa. Pode-se citar, neste campo, os estudos de: NEWMAN^{47,48} que inclusive tratou de problemas de percolação transiente em solos ligeiramente compressíveis; BATHE e KHOSHGOFTAAR¹⁸ que usaram uma

descrição não-linear para o coeficiente de condutibilidade hidráulica; LI e DESAI^{43,44} que adicionaram à análise de fluxo transiente em domínio saturado-insaturado a análise de tensões e estabilidade do meio poroso; entre outros.

3) EQUAÇÕES GOVERNANTES

3.1) INTRODUÇÃO

A formulação matemática do problema de fluxo em meios porosos tem sido alvo da dedicação de hidrologistas há várias décadas.

A primeira formulação, surgida no início da década de quarenta, tratava apenas do fluxo em regime permanente, bidimensional, em meio homogêneo e isotrópico. Ou seja, a clássica equação elíptica bidimensional.

Com a evolução das pesquisas, as formulações matemáticas foram sendo aprimoradas de modo a melhor traduzir o fenômeno físico. Estendeu-se a análise para o domínio tridimensional, incluiu-se a dependência entre a condutibilidade hidráulica e o peso específico do fluido, levou-se em consideração a deformabilidade do solo, inseriu-se a análise transiente. Contudo, neste estágio analisava-se apenas o fenômeno no domínio saturado, desconsiderando as contribuições do fluxo na região não saturada.

É o caso dos trabalhos de GAMBOLATI^{38,39} que apresenta um desenvolvimento teórico mais rigoroso da equação para o fluxo transiente unidimensional, mas no domínio saturado apenas. Sua grande contribuição está no minucioso desenvolvimento das equações, mostrando a equivalência entre as formulações partindo da consideração de elemento fixo em coordenadas fixas e elemento deformável em coordenadas fixas. Ele também alerta para a existência de um termo não linear na equação, até então não apresentada por formulações anteriores, e faz um estudo de validade da equação concluindo que alguns termos podem ser desprezados, respeitadas algumas condições.

A inclusão da contribuição do fluxo na região não saturada se deve a FREEZE^{35,36} que, trabalhando quase que simultaneamente a GAMBOLATI, estendeu o estudo para o espaço tridimensional e analisou todo o domínio saturado-não saturado. Sua equação é considerada a mais geral e, conseqüentemente, vem sendo utilizada para descrever o problema físico em muitos trabalhos recentes.

Nos itens a seguir desenvolvem-se as equações para fluxo transiente tanto para o meio saturado quanto para o saturado-não saturado, sendo que, para facilitar a apresentação das formulações matemáticas, a equação para o meio saturado-não saturado é desenvolvida primeiro.

3.2) EQUAÇÃO PARA FLUXO TRANSIENTE EM DOMÍNIO SATURADO-NÃO SATURADO

A seguir desenvolve-se uma equação para fluxo transiente que funcione tanto para fluxo saturado em aquíferos confinados e não confinados, quanto para fluxo em zona não saturada.

Este estudo aborda apenas o fluxo de água. Considera-se que a fase ar é contínua e está sob pressão atmosférica, o que exclue da análise os casos de existência de bolsões de ar compressível no sistema do fluxo. Esta condição poderia ser uma limitação em algumas aplicações, mas ela tem sido universalmente aplicada na solução de problemas de drenagem com aparente sucesso (ref. 36).

Gradientes de temperatura, de concentrações químicas e gradientes osmóticos são todos negligenciados (ref. 36).

A equação será escrita em termos de potencial de pressão $\psi = \psi(x_1, x_2, x_3)$, onde $\psi > 0$ implica região saturada e $\psi < 0$ região não saturada.

O potencial total ϕ é dado por:

$$\phi = \psi + x_3 \quad (3.2.1)$$

onde:

- ϕ : potencial total
 ψ : potencial de pressões
 x_3 : coordenada vertical

A equação será desenvolvida em coordenadas fixas, considerando-se um volume elementar fixo de solo linearmente elástico.

Em função das baixas velocidades do fluxo no meio poroso, o potencial de velocidade é negligenciado. Considera-se que o fluxo é laminar e admite-se a validade da lei de Darcy (ref. 38). As forças de inércia são também negligenciadas (número de Reynolds baixo).

A velocidade de Darcy é formulada em termos de velocidade relativa entre água e grãos de solo:

$$v_d = Sn(v_a - v_s) = -K(\nabla\psi + \nabla x_3) \quad (3.2.2)$$

onde:

- v_d : velocidade de Darcy ($v_{dx_1}, v_{dx_2}, v_{dx_3}$)
 v_a : velocidade da água ($v_{ax_1}, v_{ax_2}, v_{ax_3}$)
 v_s : velocidade dos grãos de solo ($0, 0, v_{sx_3}$)
 S : grau de saturação fracionário

$$S = \frac{V_a}{V_v}$$

- V_a : volume de água
 V_v : volume de vazios

- n : porosidade
 K : condutibilidade hidráulica $K = K_r K_{ii}$
 K_r : condutibilidade hidráulica relativa
 $(0 \leq K_r \leq 1)$
 K_{ii} : componentes principais do tensor K_{ij} que
representa a condutibilidade hidráulica
na saturação

$$K_{ii} = \frac{\rho g}{\mu} k_{ii} \quad (3.2.3)$$

- ρ : massa específica da água
 k_{ii} : permeabilidade do meio
 μ : viscosidade

Note-se que:

$$S_n = \frac{V_a}{V} = \theta \quad (3.2.4)$$

- θ : teor de umidade volumétrico
 V_a : volume de água
 V : volume total

Tanto S quanto n , K e θ são funções da posição devido à não homogeneidade da formação geológica $F = F(x_1, x_2, x_3, t)$ e do potencial de pressão ψ .

$$S = S(F, \psi) \quad (3.2.5.a)$$

$$n = n(F, \psi) \quad (3.2.5.b)$$

$$K = K(F, \psi) \quad (3.2.5.c)$$

$$\theta = \theta(F, \psi) \quad (3.2.5.d)$$

Admite-se que a velocidade dos grãos de solo só tenha componente no sentido de x_3 (coordenada vertical).

A equação de continuidade para a água é (ref. 36):

$$\nabla(Sn\rho v_a) = -\frac{\partial}{\partial t}(Sn\rho) \quad (3.2.6)$$

onde:

ρ : massa específica da água

$$\rho = \rho_0 e^{(\beta\psi)} \quad (3.2.7)$$

$$\beta = \beta' \rho g \quad (3.2.8)$$

β' : coeficiente de compressibilidade usual da água

A equação de continuidade para o solo é (ref. 36):

$$\nabla[(1-n)v_s] = -\frac{\partial}{\partial t}(1-n)$$

ou seja:

$$\nabla[(1-n)v_s] = \frac{\partial n}{\partial t} \quad (3.2.9)$$

Observe-se que a massa específica do solo ρ_s não está presente em (3.2.9) pois $\rho_s = \text{constante}$ (grão de solo incompressível).

Tomando a equação (3.2.2), multiplicando-se ambos os lados da igualdade por ρ e aplicando-se o operador nabla ∇ , tem-se:

$$\nabla(Sn\rho v_a) - \nabla(Sn\rho v_s) = -\nabla[\rho K(\nabla\psi + \nabla x_g)] \quad (3.2.10)$$

Substituindo (3.2.6) em (3.2.10) e desenvolvendo-se a derivada parcial em relação a t :

$$-\frac{\partial}{\partial t}(Sn\rho) - \nabla(Sn\rho v_s) = -\nabla[\rho K(\nabla\psi + \nabla x_g)]$$

$$S\rho\frac{\partial n}{\partial t} + n\frac{\partial(S\rho)}{\partial t} + \nabla(Sn\rho v_s) = \nabla[\rho K(\nabla\psi + \nabla x_g)] \quad (3.2.11)$$

Substituindo (3.2.9) em (3.2.11) e desenvolvendo-se alguns termos chega-se a:

$$\nabla[\rho K(\nabla\psi + \nabla x_g)] = v_s n \nabla(S\rho) + n \frac{\partial(S\rho)}{\partial t} + S\rho \nabla v_s \quad (3.2.12)$$

Analisando cada termo do lado direito da equação (3.2.12) observa-se que:

$$a) v_s n \nabla(S\rho) = v_s n \frac{\partial(S\rho)}{\partial \psi} \nabla\psi = v_s n \left[S \frac{\partial \rho}{\partial \psi} + \rho \frac{\partial S}{\partial \psi} \right] \nabla\psi \quad (3.2.13)$$

de (3.2.7) tem-se que:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \psi} = \rho \beta \quad (3.2.14)$$

Chamando

$$C_s = n \frac{\partial S}{\partial \psi} \quad (3.2.15)$$

onde C_s é denominado capacidade de umidade específica.

Desta forma, (3.2.13) ficará sendo :

$$v_s n \nabla(S\rho) = v_s \rho (Sn\beta + C_s) \nabla\psi \quad (3.2.16)$$

$$b) \quad n \frac{\partial(S\rho)}{\partial t} = n \frac{\partial(S\rho)}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \rho(Sn\beta + C_s) \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (3.2.17)$$

$$c) \quad S\rho \nabla v_s = S\rho \left[\frac{\alpha}{1+\alpha\psi} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + v_s \frac{\partial \psi}{\partial x_s} \right) \right] \quad (3.2.18)$$

chamando (vide apêndice II):

$$C_b = \frac{\alpha}{1+\alpha\psi} \quad (3.2.19)$$

$$S\rho \nabla v_s = S\rho C_b \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} + v_s \frac{\partial \psi}{\partial x_s} \right] \quad (3.2.20)$$

onde:

$$\alpha = \alpha' \rho g \quad (3.2.21)$$

α' : coeficiente de compressibilidade clássico de formação vertical do solo, que representa a compressibilidade vertical de uma amostra submetida a uma pressão ψ ao longo de seu eixo e impedida de expandir lateralmente.

C_b : outro coeficiente de compressibilidade de formação do solo dado por

$$C_b = \frac{1}{1+e} \frac{de}{d\psi} \quad (3.2.22)$$

e obtido de ensaio de amostras que fornecem a variação do índice de vazios "e" com o potencial de pressão ψ .

O gradiente de velocidade de grãos de solo ∇v_s , dado pela relação (3.2.20), é desenvolvido detalhadamente no apêndice I.

Substituindo (3.2.16), (3.2.17) e (3.2.20) em (3.2.12) tem-se:

$$\begin{aligned} \nabla \left[\rho K (\nabla \psi + \nabla x_3) \right] &= v_s \rho (S n \beta + C_s) \nabla \psi + \rho (S n \beta + C_s) \frac{\partial \psi}{\partial t} + \\ &+ S \rho C_b \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} + v_s \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \right] \\ \nabla \left[\rho K (\nabla \psi + \nabla x_3) \right] &= \rho \left[S C_b + n \beta + C_s \right] \frac{\partial \psi}{\partial t} + \\ &+ \rho v_s \left[(S n \beta + C_s) \nabla \psi + S C_b \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \right] \quad (3.2.23) \end{aligned}$$

A equação (3.2.23) fornece a expressão mais genérica para fluxo transiente em domínio saturado-não saturado.

Operando o termo do lado esquerdo de (3.2.23), obtém-se:

$$\begin{aligned} \rho \nabla \left[K (\nabla \psi + \nabla x_3) \right] &= \rho \left[S C_b + n \beta + C_s \right] \frac{\partial \psi}{\partial t} + \\ &+ \rho v_s \left[(S n \beta + C_s) \nabla \psi + S C_b \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \right] - \rho \beta K (\nabla \psi + \nabla x_3) \nabla \psi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla [K(\nabla\psi + \nabla x_3)] &= [SCC_b + n\beta + C_s] \frac{\partial\psi}{\partial t} + \\ &+ v_s \left[(Sn\beta + C_s) \nabla\psi + SC_b \frac{\partial\psi}{\partial x_3} \right] - \beta K(\nabla\psi + \nabla x_3) \nabla\psi \end{aligned} \quad (3.2.24)$$

GAMBOLATI³⁸ em seus estudos sobre a validade desta equação conclue que o último termo de (3.2.24) pode ser desconsiderado desde que a dimensão vertical do modelo a ser estudado seja inferior a 10^4 metros e que a variação das condições de pressão total no contorno, $|\Delta\phi_0|$, seja inferior a 5×10^3 metros. Ainda nestes mesmos estudos, GAMBOLATI analisa a influência dos termos do lado direito da igualdade nos quais a velocidade dos grãos de solo, v_s , é multiplicada pelo gradiente do potencial de pressões, e conclue que eles também têm uma influência pequena nos resultados, desde que se verifique a condição $\alpha |\Delta\phi_0| \leq 0,05$. Em vista da condição anterior, supondo que no limite $|\Delta\phi_0|$ seja igual a 5×10^3 metros, o coeficiente "α" deve ser igual ou inferior a 10^{-5} m^{-1} , o que ainda se enquadra na ordem de grandeza deste coeficiente. Em resumo, estes termos podem ser desprezados quando a formação estudada sofre uma compactação menor que 5% da dimensão vertical inicial. FREEZE³⁶ também desconsidera estes termos nos seus estudos.

Assim, a equação (3.2.24) fica reduzida a:

$$\nabla [K(\nabla\psi + \nabla x_3)] = [SCC_b + n\beta + C_s] \frac{\partial\psi}{\partial t} \quad (3.2.25)$$

ou, o que é o mesmo, em virtude da equação (3.2.1) :

$$\nabla(K\nabla\phi) = \left[\frac{\theta}{n} (C_b + n\beta) + C_s \right] \frac{\partial\phi}{\partial t} \quad (3.2.26)$$

Chamando $S_s = C_b + n\beta$ (3.2.27)

onde S_s é denominado coeficiente de armazenamento específico, obtém-se finalmente :

$$\nabla(K\nabla\phi) = \left[\frac{\theta}{n} S_s + C_s \right] \frac{\partial\phi}{\partial t} \quad (3.2.28)$$

que é a equação que será utilizada no presente trabalho.

3.3) EQUAÇÃO PARA FLUXO TRANSIENTE EM DOMÍNIO SATURADO

Nesta formulação considera-se o fluxo apenas na zona saturada e assume-se que a linha freática ou superfície livre é uma linha de corrente.

Para um aquífero saturado, uma "queda" no potencial piezométrico, $\delta\psi$, resulta numa redução de pressão. O volume de água perdida por unidade de volume do aquífero devido a um decréscimo unitário no potencial é denominado "armazenamento específico".

Numa análise detida do balanço de massa para um elemento de volume saturado em um aquífero, nota-se que tanto a compressibilidade da água quanto a mudança no volume de poros devido à compressão vertical do aquífero contribuem

para o armazenamento específico. Chamando de S_s o coeficiente de armazenamento específico, tem-se que S_s é função da porosidade, da compressibilidade da água e da compressibilidade de formação vertical do solo.

Como os efeitos de mudança de compressibilidade são incluídos no coeficiente S_s , é possível trabalhar em termos de conservação de massa no espaço e tempo (ref.57).

Seja um elemento de volume $\delta V = \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3$

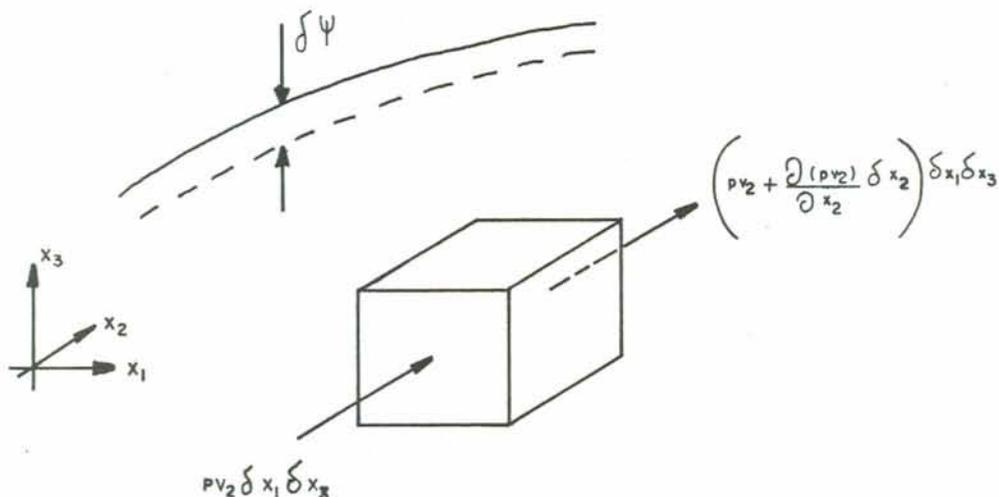


FIGURA 3.3.1

ρ : massa específica do fluido
(fluido compressível)

v_i : componentes de velocidade do fluido

A razão de fluxo de massa que passa por uma face do elemento paralelepédico durante o intervalo de tempo δt é igual à massa por unidade de volume, ρ , multiplicada pela velocidade, v , perpendicular à face e multiplicada pela área da face e pelo intervalo de tempo δt .

Fazendo, então, o equilíbrio da taxa de fluxo de massa do fluido que entra, sai e fica no elemento de volume δV durante o tempo δt tem-se:

$$\begin{aligned}
[\rho v_1 \delta x_2 \delta x_3 + \rho v_2 \delta x_1 \delta x_3 + \rho v_3 \delta x_1 \delta x_2] \delta t &= \left[\left(\rho v_1 + \frac{\partial(\rho v_1)}{\partial x_1} \delta x_1 \right) \delta x_2 \delta x_3 + \right. \\
&+ \left. \left(\rho v_2 + \frac{\partial(\rho v_2)}{\partial x_2} \delta x_2 \right) \delta x_1 \delta x_3 + \left(\rho v_3 + \frac{\partial(\rho v_3)}{\partial x_3} \delta x_3 \right) \delta x_1 \delta x_2 \right] \delta t + \\
&+ \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3 \rho S_s \delta \psi \quad (3.3.1)
\end{aligned}$$

Durante o tempo δt o potencial de pressão cresce (ou decresce) de uma quantidade $\delta \psi$. Então, a variação de massa de fluido que fica armazenada a mais (ou a menos) devido a este acréscimo (ou decréscimo) de potencial é $\delta x_1 \delta x_2 \delta x_3 \rho S_s \delta \psi$.

Voltando à equação de continuidade anterior e fazendo $\delta t \rightarrow 0$, tem-se:

$$\frac{\partial(\rho v_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\rho v_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(\rho v_3)}{\partial x_3} = -\rho S_s \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (3.3.2)$$

ou

$$\nabla(\rho v) = -\rho S_s \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (3.3.3)$$

Aplicando a lei de Darcy, onde:

$$v_i = -K_{ii} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = -K_{ii} \nabla \phi \quad (3.3.4)$$

K_{ii} : componentes principais do tensor K_{ij} que representa a condutibilidade hidráulica na saturação.

e como $\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial t}$

tem-se , então:

$$\nabla(\rho K \nabla \phi) = \rho S_s \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (3.3.5)$$

Levando em conta as mesmas considerações devidas a GAMBOLATI³⁸ citadas no item (3.2) pode-se escrever:

$$\nabla(K \nabla \phi) = S_s \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (3.3.6)$$

Observe-se que (3.3.6) é uma forma particular de (3.2.28) pois, na zona saturada $C_s=0$ e $\theta=n$.

Note-se que, como visto no início, S_s é função de C_b , β e n .

$$S_s = (C_b + n\beta) \quad (3.3.7)$$

Outra maneira de se chegar a este mesmo resultado, seguindo porém a apresentação dada na formulação do item (3.2), é substituir, naquela formulação, a equação de Darcy (3.2.2) por:

$$n(v_a - v_s) = -K(\nabla \psi + \nabla x_g) \quad (3.3.8)$$

e a equação da continuidade da água (3.2.6) por:

$$\nabla(n\rho v_a) = -\frac{\partial}{\partial t}(n\rho) \quad (3.3.9)$$

É justamente neste ponto que reside a diferença entre os trabalhos de FREEZE³⁶ e GAMBOLATI^{38,39}. O primeiro estendeu a análise para todo o domínio saturado-não saturado incluindo na equação da velocidade de Darcy (3.2.2) e na equação da continuidade da água (3.2.6) o grau de saturação S que, multiplicado pela porosidade n , dá a relação entre o volume de água e o volume total. O segundo coloca nestas equações, como se observa em (3.3.8) e

(3.3.9) , apenas a porosidade n que é a relação entre o volume de vazios e o volume total, considerando, desta forma, que todo o volume de vazios está ocupado por água (elemento de volume saturado).

Fazendo as substituições citadas acima, chega-se à equação:

$$\nabla \left[\rho K (\nabla \psi + \nabla x_3) \right] = \rho (C_b + n\beta) \frac{\partial \psi}{\partial t} + \rho v_s \left[n\beta \nabla \psi + C_b \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \right] \quad (3.3.10)$$

Admitindo as mesmas considerações citadas no item (3.2), a equação (3.3.10) se reduz a:

$$\nabla (K \nabla \phi) = (C_b + n\beta) \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (3.3.11)$$

ou, então :

$$\nabla (K \nabla \phi) = S_s \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (3.3.12)$$

que é idêntica à equação (3.3.6).

3.4) CONDIÇÕES DE CONTORNO

Apesar das equações apresentadas nos itens anteriores e do próprio método de solução serem gerais e aplicáveis a problemas tridimensionais, para exemplificar os tipos de condições de contorno considere-se o modelo bidimensional da figura (3.4.1), o qual representa um problema idealizado de fluxo em barragem de terra. Este problema não deixa de ser tridimensional mas, por suas características, pode ser reduzido seu estudo a duas dimensões, o que será adotado daqui por diante em consonância com o objetivo deste trabalho.

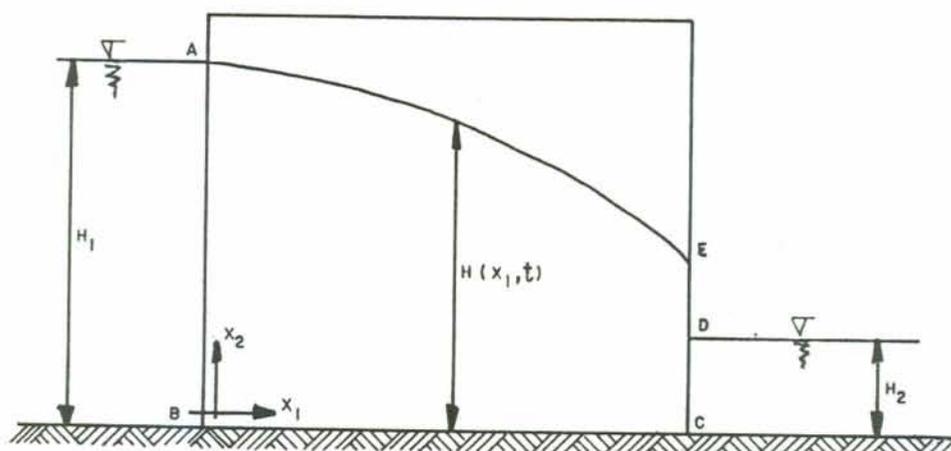


FIGURA 3.4.1) PROBLEMA DE FLUXO EM BARRAGEM DE TERRA

No instante $t=t_0$, a localização da linha freática é dada por $x_2=H(x_1, t_0)$ e a distribuição do potencial total ϕ na região do fluxo é dada pela equação (3.2.28) ou equação (3.3.6), conforme o modelo adotado. A pressão ao longo da linha freática é igual à pressão atmosférica e, portanto, não se perde a generalidade se ela for considerada nula. Assim, existem as seguintes condições de contorno:

a) Contorno em contato com o meio líquido:

Ou seja, na face a montante \overline{AB} e a jusante \overline{CD} , o potencial total ϕ em qualquer ponto da face é igual à altura do nível líquido.

$$\phi(x_1, x_2, t_0) = H_1(t_0) = \overline{\phi}_1(t_0) \quad \text{em } \overline{AB} \quad (3.4.1)$$

$$\phi(x_1, x_2, t_0) = H_2(t_0) = \overline{\phi}_2(t_0) \quad \text{em } \overline{CD} \quad (3.4.2)$$

onde a barra superscrita denota um valor conhecido "a priori".

Existe fluxo através deste contorno.

b) Contorno impermeável:

Onde não existe fluxo normal à face considerada. O fluxo se dá tangencialmente ao contorno e, portanto, esta face é uma linha de corrente. A condição que retrata esta situação é expressa por:

$$\frac{\partial \phi(x_1, x_2, t_0)}{\partial n} = 0 \quad \text{em } \overline{BC} \quad (3.4.3)$$

onde "n" é a normal à superfície.

c) Contorno de percolação ou face de percolação:

Caracterizada pela região não submersa da face da barragem, à jusante do fluxo, na qual ocorre o afloramento do fluido. Na figura (3.4.1) o contorno \overline{DE} representa esta situação. Ao longo deste contorno, o potencial total ϕ de um ponto é igual à coordenada vertical x_2 deste mesmo ponto, ou seja:

$$\phi(x_1, x_2, t_0) = x_2 \quad \text{em } \overline{DE} \quad (3.4.4)$$

Como há fluxo através deste contorno, ele não se constitui em uma linha de corrente. A face de percolação é uma situação a ser evitada em toda e qualquer barragem pois com o fluxo aflorante, ocorre o carreamento de grãos de solo, caracterizando-se o problema denominado "piping".

d) Contorno de superfície freática:

Também denominada linha de saturação, delimita a região de potencial de pressões ψ positivo da região de ψ negativo ou, o que é o mesmo, delimita a região saturada da não saturada. No instante $t=t_0$, a posição da linha freática é dada por $x_2 = H(x_1, t_0)$. Portanto, ao longo da linha \overline{AE} , o potencial total ϕ de um ponto é igual à sua coordenada vertical H , isto é:

$$\phi(x_1, H, t_0) = H(x_1, t_0) \quad \text{em } \overline{AE} \quad (3.4.5)$$

Outra condição existente neste contorno \overline{AE} , para o

caso da análise do fluxo no domínio saturado apenas, é que não há fluxo normal à superfície, ou seja:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n}(x_1, x_2, t_0) = 0 \quad \text{em } \overline{AE} \quad (3.4.6)$$

onde "n" é a normal à superfície.

Assim, nesta análise regida pela equação (3.3.6) desenvolvida no item (3.3), a linha de saturação é uma linha de corrente.

Contudo, na análise do fluxo no domínio saturado-não saturado, regida pela equação (3.2.28), esta condição não é aplicável tendo em vista que a linha de saturação não é considerada como linha de corrente, podendo haver fluxo através deste contorno.

3.5) DESCRIÇÃO DOS COEFICIENTES CARACTERÍSTICOS DOS SOLOS

Para uma compreensão melhor do modelo matemático apresentado, serão apresentadas com mais detalhes as propriedades do solo constantes nas equações (3.2.28) e (3.3.6).

3.5.1) CONDUTIBILIDADE HIDRÁULICA (K)

$$K = k \frac{\gamma}{\mu} = k \frac{\rho g}{\mu} \quad (3.5.1.1)$$

K : condutibilidade hidráulica

k : permeabilidade do meio

γ : peso específico

ρ : massa específica

g : aceleração da gravidade

μ : viscosidade

A condutibilidade hidráulica é um parâmetro que varia conforme a variação do potencial de pressões, e a relação funcional entre eles é mostrada na figura (3.5.1.1).

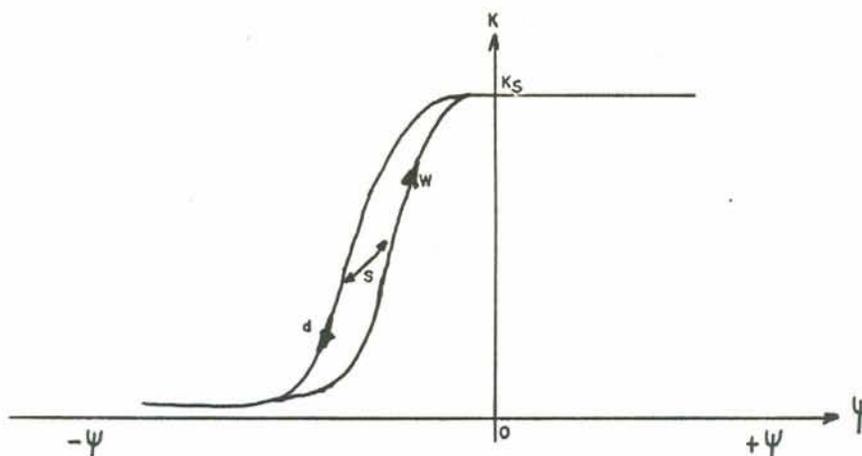


FIGURA 3.5.1.1) RELAÇÃO ENTRE K E ψ

Como pode-se ver, é uma relação histerética com um número infinito de curvas de transição "s" entre a curva de drenagem "d" e a de umedecimento "w". Contudo, apenas uma curva "s" é mostrada na figura. Para $\psi > 0$ a condutibilidade hidráulica K é tomada como constante e igual à condutibilidade hidráulica de saturação K_s . Na região não saturada, onde $\psi < 0$, à medida que ψ decresce para valores suficientemente pequenos, a condutibilidade hidráulica K sofre uma redução mais ou menos abrupta até um valor que, comparado com a condutibilidade hidráulica saturada K_s , é muito pequeno.

Analisando várias relações entre K e ψ de vários tipos de solo, BOUWER¹⁹ observou que, de uma forma geral, quanto mais uniforme o tamanho dos poros do solo, mais abrupta é a redução em K com o decrescimento de ψ . E quanto mais finos os poros do solo, mais baixos são os valores de ψ nos quais a redução de K ocorre.

Devido à complexidade e grande diversidade nas relações entre K e ψ apresentada de solo para solo, a

determinação do comportamento real da condutibilidade hidráulica, para um dado solo, exige testes específicos. Como alternativa, pode-se obter estas relações através de pesquisa de literatura, baseando-se em tipos de solos similares, ou usar relações empíricas, as quais devem ser válidas para uma classe de tipos de solos, a exemplo da fórmula empírica apresentada por GARDNER^{19,37} o qual observou que o comportamento da relação entre K e ψ parece seguir a equação (ref. 16,37,45):

$$K_r = \frac{1}{\left[\frac{\psi}{\psi_c} \right]^a + 1} \quad (3.5.1.2)$$

onde:

- K_r : condutibilidade hidráulica relativa local
- K_s : condutibilidade hidráulica saturada
- K : condutibilidade hidráulica ($K = K_r K_s$)
- ψ : potencial de pressão negativo local
- ψ_c : potencial de pressão crítico
- a : índice do solo

O índice do solo "a" é obtido ajustando-se um polinômio aos dados reunidos por BOUWER¹⁹ para três tipos de solo, os quais são mostrados na tabela (3.5.1.1).

Tabela 3.5.1.1) Valores de " K_s " e "a" para 3 tipos de solo

tipo de solo	K_s (m/dia)	a
"loam*" sem estrutura, e argila	0,01	2
areia fina, e "loam*" com predominância de areia	0,05	3
areia média	0,5	5

* "loam" : solo heterogêneo formado por argila, silte e areia, com matéria orgânica.

O polinômio obtido desta forma é:

$$K_s = 58,66667(a^2) - 244,33333 a + 255 \quad (3.5.1.3)$$

Assim procedendo, é possível estimar o índice "a" do solo, dada a condutibilidade hidráulica saturada K_s . Esta é uma forma empírica mas que permite uma aplicação generalizada do esquema numérico.

O potencial de pressões crítico ψ_c é determinado para vários tipos de solo, usando a definição dada por BOUWER¹⁹:

$$\psi_c = \frac{1}{K_s} \int_0^{\psi_w} K d\psi \quad (3.5.1.4)$$

na qual ψ_w é igual à distância x_{3w} entre a superfície da estrutura de solo e a superfície freática (vide fig. 3.5.1.2).

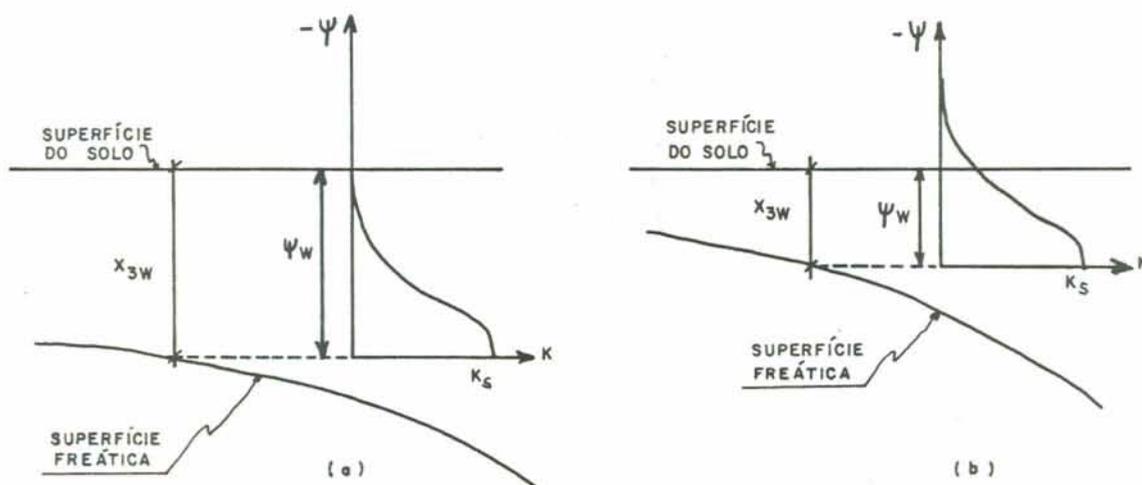


FIGURA 3.5.1.2

Se a distância ψ_w é suficientemente grande, a condutibilidade hidráulica não saturada K em ψ_w é negligenciavelmente pequena em relação a K_s e o potencial crítico ψ_c , segundo BOUWER, passa a ser o centro

integrado de todo o campo de potencial de pressão negativa ψ sobre o qual têm lugar as reduções da condutibilidade hidráulica não saturada K (fig. 3.5.1.3). BOUWER mostrou ainda, em outro trabalho seu, que o potencial de pressões crítico ψ_c é essencialmente igual à espessura da camada de capilaridade.

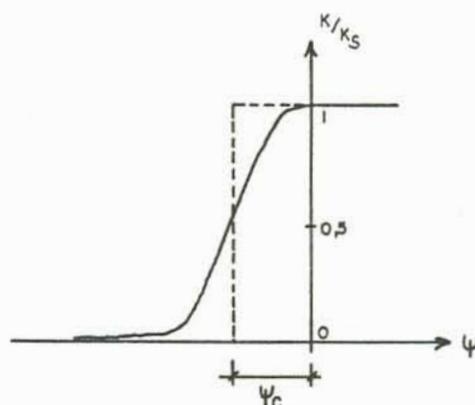


FIGURA 3.5.1.3

Procedendo como o disposto até agora, MASLIA⁴⁵ determinou valores típicos de ψ_c para cinco tipos de solo, com as integrais da fórmula (3.5.1.4) sendo determinadas com o auxílio de planímetro. Estes valores são listados na tabela (3.5.1.2).

Tabela 3.5.1.2) Valores de " K_s ", " a " e " ψ_c " para cinco tipos de solo

n ^o	tipo de solo	K_s (m/dia)	a	ψ_c (m)
1	"loam*" sem estrutura, e argila	0,01	2	-1,10
2	areia fina, e "loam*" com predominância de areia	0,05	3	-0,60
3	areia média	0,5	5	-0,27
4	areia grossa	5,0	11,31	-0,064
5	cascalho, brita	50,0	31,28	-0,022

* "loam" : solo heterogêneo formado por argila, silte e areia, com matéria orgânica.

Desta forma, com base nos valores constantes na tabela (3.5.1.2) aplicados na equação (3.5.1.2), tem-se nas figuras (3.5.1.4) e (3.5.1.5) a variação da condutibilidade hidráulica não saturada K em relação a ψ , para os cinco tipos de solo em questão.

Uma outra forma de expressar a relação $K_x\psi$ é através de uma variação linear conforme as apresentadas nas figuras (3.5.1.6.a,b) para o solo tipo 2 da tabela (3.5.1.2). Primeiramente, pelas características da curva $K_x\psi$ pode-se aproximá-la com uma reta inclinada partindo do ponto cujas coordenadas são ($K_r=1$, $\psi=0$) e passando pelo ponto onde $K_r=0,5$ e $\psi=\psi_c$, sendo ψ_c o potencial de pressões crítico pela formulação de GARDNER (vide tabela 3.5.1.2). Ou então, de uma segunda maneira, pode-se aproximá-la com uma reta com as características seguintes. Como pode-se observar na figura (3.5.1.4), a curva $K_x\psi$ para o solo tipo 2 por exemplo, apresenta um pequeno trecho onde a condutibilidade hidráulica K_r permanece constante e igual a 1 (um), mesmo para ψ negativo entre 0 e $-0,1m$. Na figura (3.5.1.5) com escala logarítmica isto torna-se mais visível. Fisicamente isto significa que uma pequena camada acima da superfície de potencial de pressões nulo é completamente saturada, mesmo com ψ negativo. Esta pequena camada saturada também pode ser incluída na abordagem com variação linear para $K_x\psi$, fazendo a reta partir do ponto ($K_r=1$, $\psi=-0,1$) como ilustra a figura (3.5.1.6.b).

Há ainda uma maneira mais simplificada para representar a relação $K_x\psi$ que é através de uma variação abrupta do valor de K quando ψ passa a ser negativo (figura 3.5.1.7.a). Ou quando ψ passa a ser menor que $-0,1m$ no caso do solo tipo 2 (figura 3.5.1.7.b).

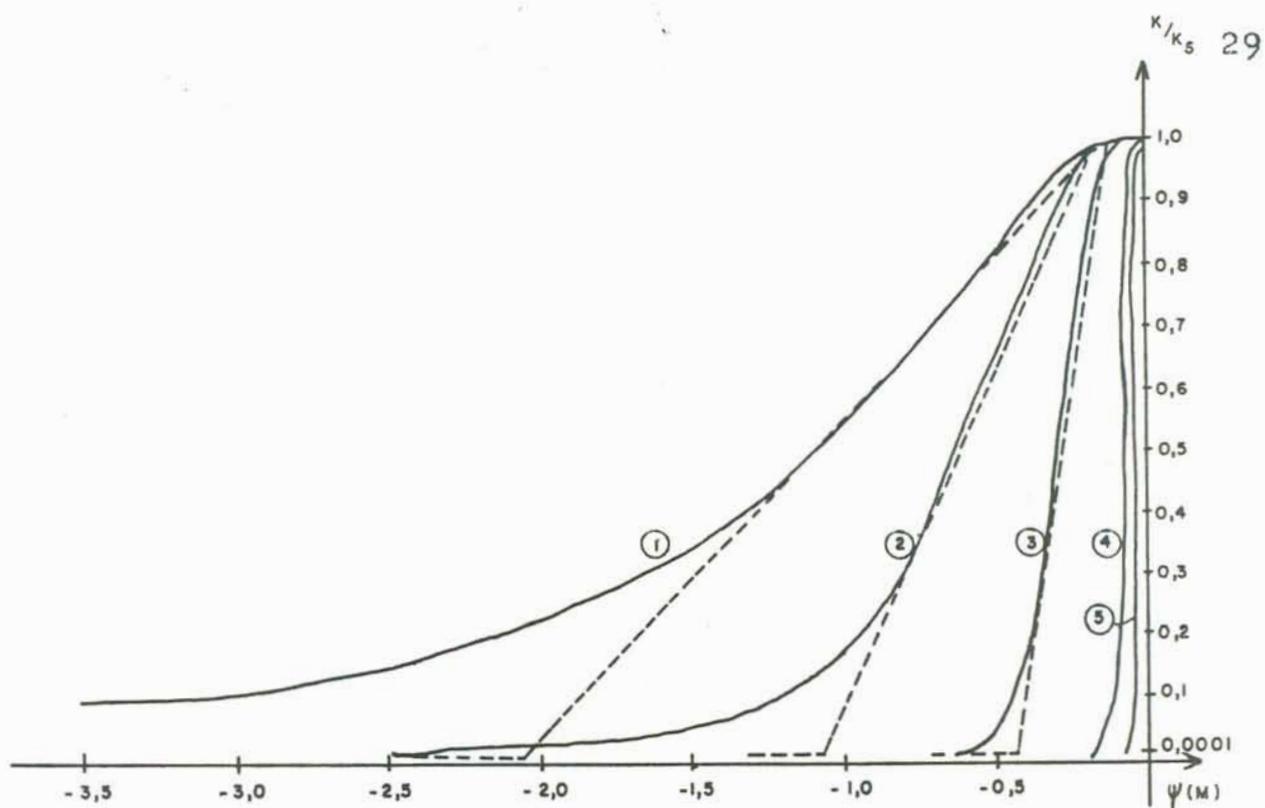


FIGURA 3.5.1.4) RELAÇÕES ENTRE K E Ψ .

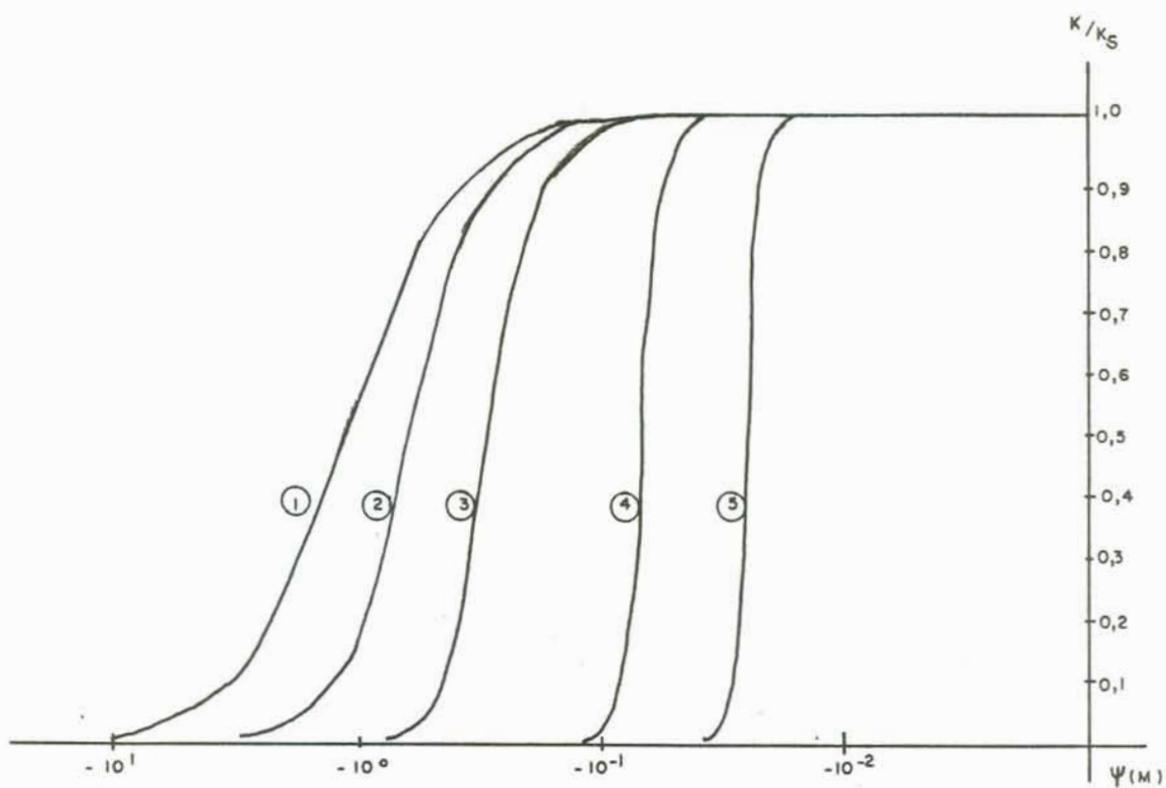


FIGURA 3.5.1.5) RELAÇÕES ENTRE K E Ψ (ESCALA LOGARÍTMICA)

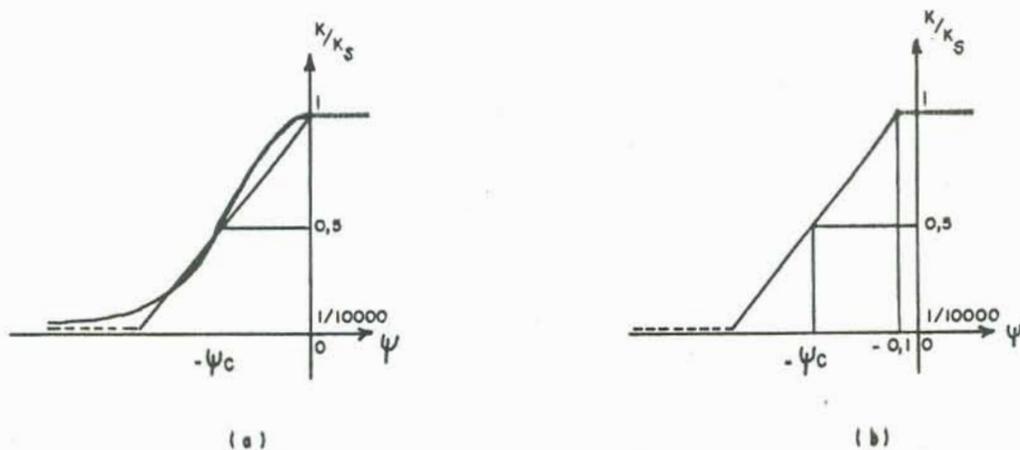


FIGURA 3.5.1.6

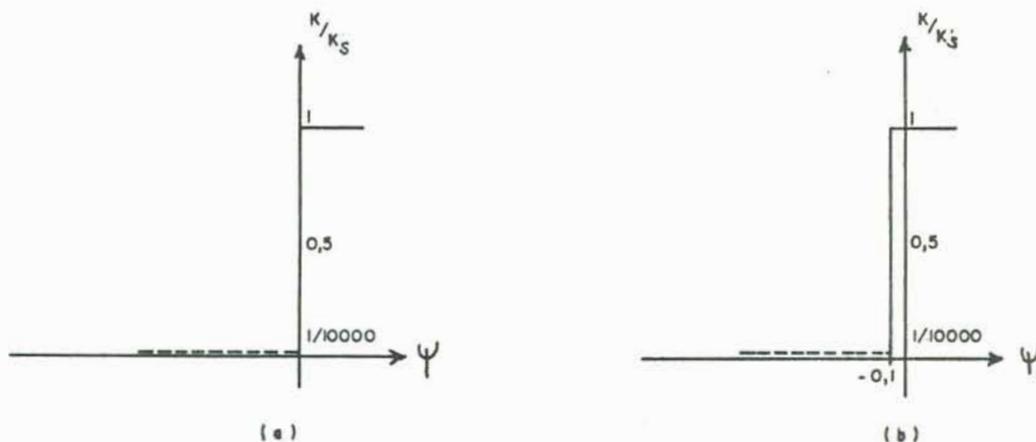


FIGURA 3.5.1.7

Para efeito comparativo entre as várias formas de variação da relação $K \times \psi$, ou seja, entre a pura aplicação da fórmula de GARDNER (equação 3.5.1.2), as variações lineares das figuras (3.5.1.6.a,b) e as variações abruptas representadas nas figuras (3.5.1.7.a,b), foi feito um estudo cujos resultados estão apresentados graficamente na figura (4.5.2.4). A razão de convergência do programa para as cinco abordagens diferentes foi praticamente a mesma como mostra o

quadro resumo a seguir (tabela 3.5.1.3) com os valores da Norma Euclidiana a cada iteração.

Tabela 3.5.1.3) Valores da Norma Euclidiana " ϵ " a cada iteração, para as cinco formas de representação da relação $K \times \psi$

iter	GARDNER	fig.(3.5.1.6)		fig.(3.5.1.7)	
		(a)	(b)	(a)	(b)
1 ^a	0,2527055	0,2528632	0,2528632	0,2528458	0,2453974
2 ^a	0,1464753	0,1467944	0,1467743	0,1471531	0,1425524
3 ^a	0,0870988	0,0875456	0,0875367	0,0876796	0,0847159
4 ^a	0,0514713	0,0513912	0,0513629	0,0520047	0,0511892
5 ^a	0,0259272	0,0252793	0,0253748	0,0237413	0,0270804
6 ^a	0,0118515	0,0110799	0,0111482	0,0090349	0,0136451
7 ^a	0,0080981	0,0076145	0,0076767	0,0074649	0,0070491

Pode-se observar que todos os tipos de variação para a função $K=f(\psi)$ deram resultados praticamente semelhantes para o mesmo problema, o que significa que a relação mais simplificada representada pela figura (3.5.1.7.a) fornece resultados compatíveis e com menos esforço computacional. BAIHE e KHOSTAFGAAR¹⁸ também utilizaram esta relação simplificada e obtiveram bons resultados. Face a isto, a variação abrupta para a relação $K \times \psi$ apresentada na figura (3.5.1.7.a) será utilizada neste trabalho para todos os demais exemplos.

3.5.2) TEOR DE UMIDADE VOLUMÉTRICO (θ)

O teor de umidade volumétrica é a relação entre o volume de líquido e o volume total da amostra de solo considerada. Na região saturada onde todos os vazios são preenchidos com líquido ($V_a = V_v$), o teor de umidade se iguala à porosidade:

$$n = \frac{V_v}{V} \quad (3.5.2.1)$$

Na região não saturada o teor de umidade varia em função do potencial de pressão. A figura (3.5.2.1) mostra como varia esta relação entre θ e ψ .

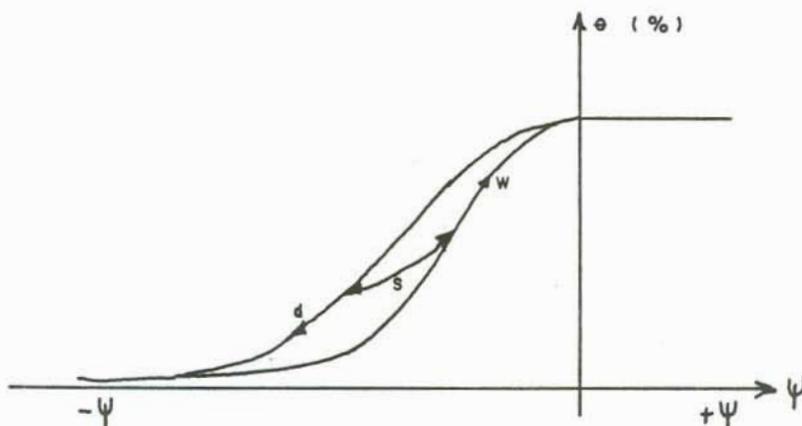


FIGURA 3.5.2.1) RELAÇÃO ENTRE θ E ψ

Como pode-se notar, também é uma relação histerética.

MASLIA⁴⁵ obteve relações $\theta \times \psi$ reunindo dados de diferentes pesquisadores, plotando os resultados em escala semilogarítmica, e ajustando curvas aos dados obtidos, objetivando ter funções simples, entre θ e ψ para os cinco tipos de solo apresentados na tabela (3.5.1.2). Estas mesmas curvas são usadas no trabalho de

ARAL¹⁶. As figuras (3.5.2.2), (3.5.2.3) e (3.5.2.4) mostram estas curvas, as quais também são usadas no presente trabalho.

Observe-se, por exemplo, a curva 2 na figura (3.5.2.3) que corresponde ao segundo tipo de solo na classificação apresentada na tabela (3.5.1.2). Ela apresenta um valor de θ praticamente constante e igual à porosidade entre $\psi = -0,0001$ m e $\psi = -0,1$ m. Isto significa que até um potencial de pressão ligeiramente negativo, de até $-0,1$ m, o solo se encontra ainda completamente saturado, ou seja, com um teor de umidade igual ao do solo saturado, o que caracteriza bem a existência da camada de capilaridade acima da superfície freática.

Para implementar estas relações $\theta \times \psi$ no programa computacional, foram ajustados polinômios às curvas das figuras (3.5.2.2), (3.5.2.3) e (3.5.2.4), obtendo-se as relações funcionais entre θ e ψ que apresentam um desvio máximo de 6% em relação às curvas gráficas. Os coeficientes das relações $\theta \times \psi$ em questão estão listados na tabela (3.5.2.1).

$$\text{curva } i \text{) } \quad \theta = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E \quad (3.5.2.2)$$

$$x = \log |\psi| \quad (3.5.2.3)$$

Tabela 3.5.2.1) Valores dos coeficientes A,B,C,D e E para os cinco tipos de solo

solo	A	B	C	D	E
1	0,00333333	0,0250000	0,0216666	-0,1700000	0,3000000
2	0,5064233	0,6928924	-0,0682762	-0,4506262	0,3041191
3	-0,0999650	-0,0170192	0,2057456	-0,1127477	0,1539863
4	-0,0261639	-0,0274593	0,0929406	-0,0593173	0,0600000
5	-0,0021288	0,0057423	0,0249017	-0,2229694	0,4344541

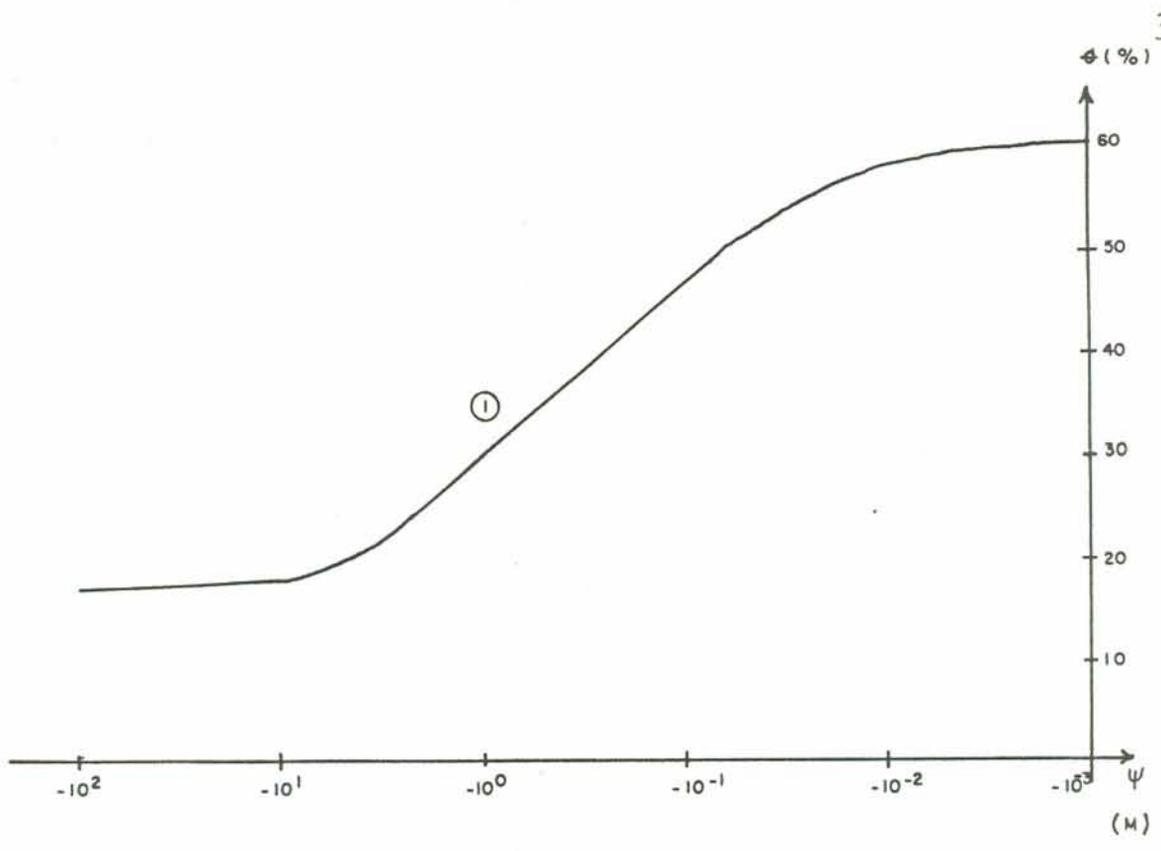


FIGURA 3.5.2.2) RELAÇÃO $\phi \times \psi$ PARA SOLO TIPO 1

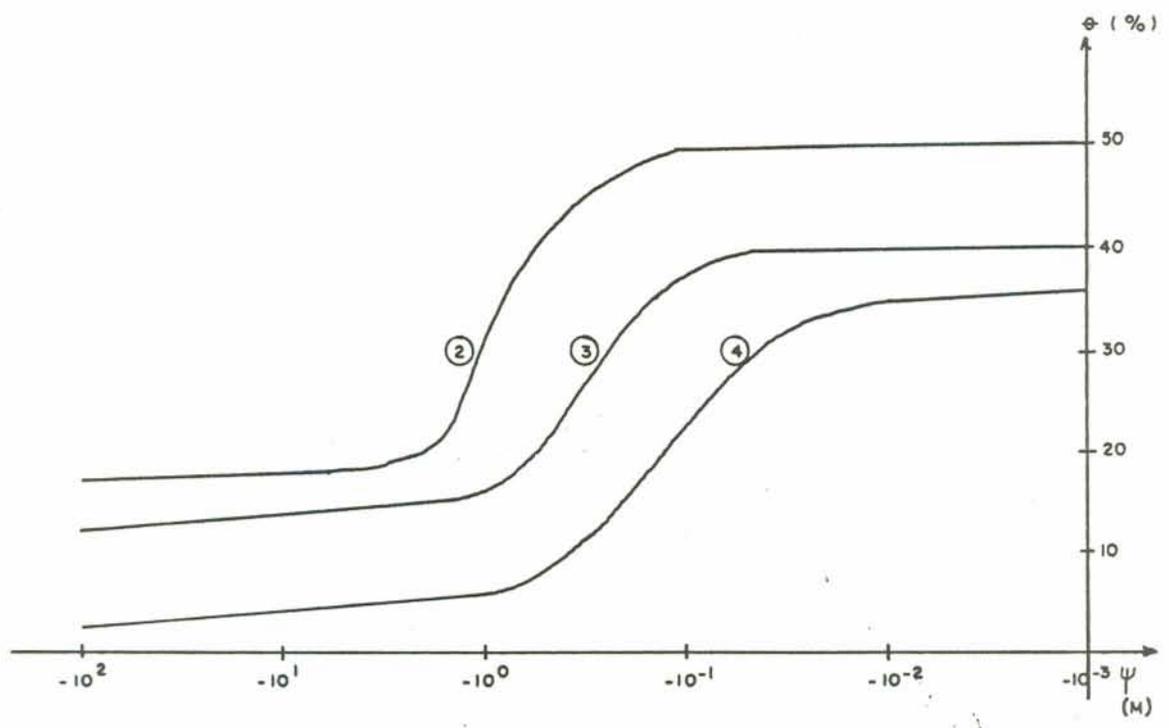


FIGURA 3.5.2.3) RELAÇÃO $\phi \times \psi$ PARA SOLOS TIPO 2, 3, 4

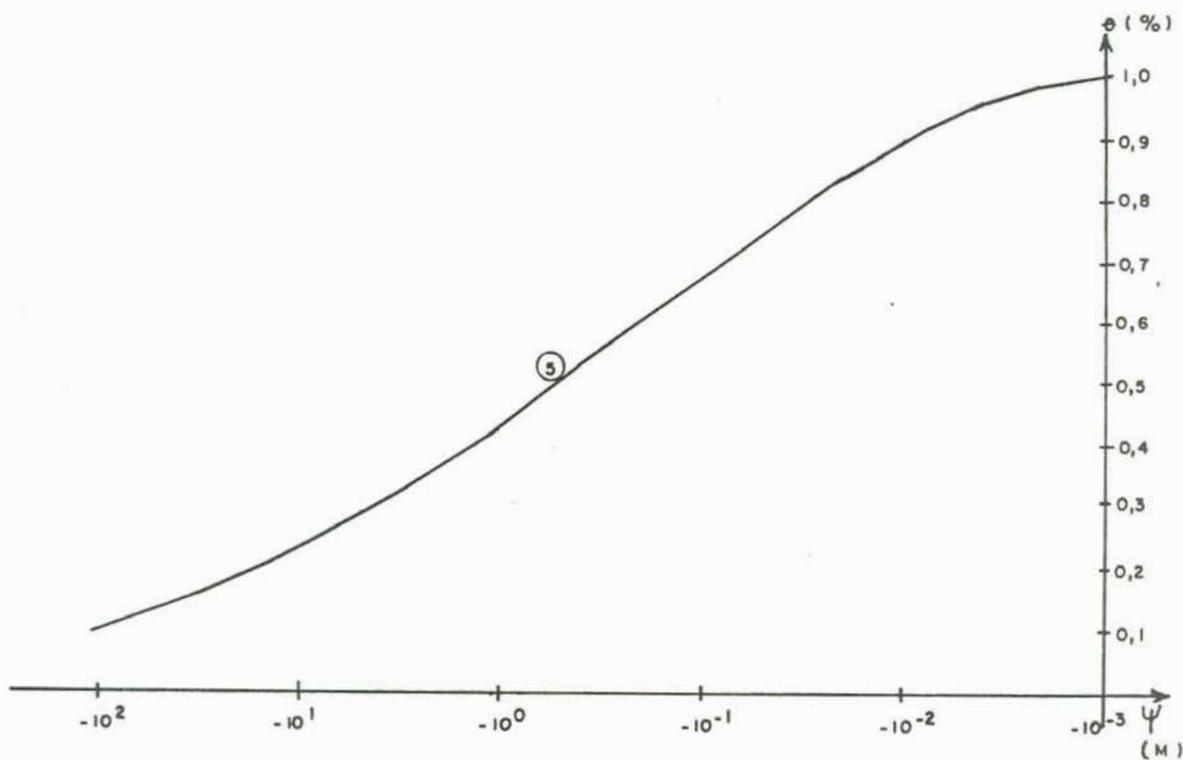


FIGURA 3.5.2.4) RELAÇÃO $\theta \times \psi$ PARA SOLO TIPO 5

3.5.3) CAPACIDADE DE UMIDADE ESPECÍFICA (C_s)

A capacidade de umidade específica C_s é definida como a derivada do teor de umidade θ em relação ao potencial de pressão ψ (ref. 36):

$$C_s = \frac{\partial \theta}{\partial \psi} = n \frac{\partial S}{\partial \psi} \quad (3.5.3.1)$$

ou seja, a função tangente à curva $\theta \times \psi$. A natureza desta função é mostrada na figura (3.5.3.1).

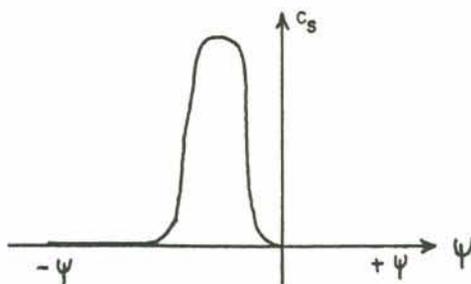
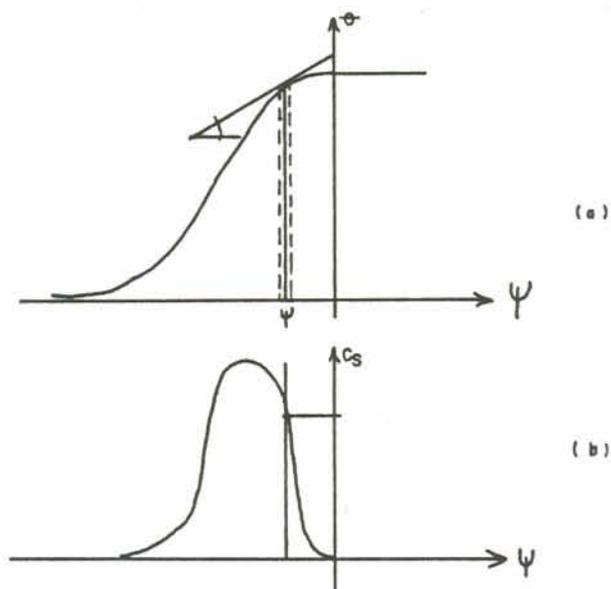


FIGURA 3.5.3.1

O valor de C_s , para um dado valor de ψ , é determinado obtendo-se a tangente à curva $\theta \times \psi$, utilizando-se para tanto um ponto ligeiramente acima e outro ligeiramente abaixo do valor do potencial de pressão ψ considerado (fig 3.5.3.2.a,b).

FIGURA 3.5.3.2) VARIAÇÃO DE C_s

3.5.4) COEFICIENTE DE ARMAZENAMENTO ESPECÍFICO (S_s)

O coeficiente de armazenamento específico S_s reflete as propriedades elásticas combinadas do meio solo-água considerando-se que as deformações são elásticas e verticais, e que a tensão total em cada ponto permanece fixa no tempo (ref. 38,39).

$$S_s = C_b + n\beta \quad (3.5.4.1)$$

C_b : coeficiente de compressibilidade de formação vertical do solo

n : porosidade

β : coeficiente de compressibilidade da água

Fisicamente S_s representa o volume de água instantaneamente liberada do armazenamento por unidade de volume total, quando o potencial de pressão ψ é abaixado de uma unidade.

$$S_s = \frac{\left[\frac{\Delta V}{V} \right]}{\Delta \psi} \quad (3.5.4.2)$$

O coeficiente de compressibilidade de formação vertical do solo C_b , é dado pela seguinte definição particular:

$$C_b = \frac{1}{1+e} \frac{de}{d\psi} \quad (3.5.4.3)$$

a qual difere do coeficiente de compressibilidade do solo usada em Mecânica dos Solos pelo fator $1/(1+e)$ (ref. 42).

C_b é obtido da curva do índice de vazios "e" ver-

sus tensão efetiva σ_{x_3} ou, equivalentemente, versus o potencial de pressões ψ , desde que se considere que uma mudança em ψ produza imediatamente uma mudança igual e contrária em σ_{x_3} .

$$\Delta\sigma_{x_3} = -\Delta\psi \quad (3.5.4.4)$$

Esta relação é válida para aquífero elástico confinado, assumindo que o peso por unidade de área da coluna de sólidos e água acima do ponto considerado seja constante.

É importante observar que na região não saturada não mais parece razoável assumir a constância do peso sobrejacente, o que determina uma variação no valor de C_b .

Outra expressão para o coeficiente C_b é dada por (vide apêndice II):

$$C_b = \frac{\alpha}{1+\alpha\psi} \quad (3.5.4.5)$$

onde α é o coeficiente de compressibilidade de formação vertical do solo, dado por:

$$\alpha = \alpha' \rho g \quad (3.5.4.6)$$

$$\alpha' = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E(1-\nu)} \quad (3.5.4.7)$$

ν : módulo de Poisson

E : módulo de Young

ρ : massa específica do solo

g : aceleração da gravidade

α : coeficiente de compressibilidade expresso em unidade L^{-1}

α' : coeficiente de compressibilidade expresso em unidade L^2/F

O coeficiente α' é conhecido, também, como coeficiente de mudança de volume m_v (ref. 42).

A definição de compressibilidade em termos de pressão de fluido (L^{-1}) ao invés de tensão efetiva (L^2/F), é prática normal no estudo de águas subterrâneas e elimina a necessidade de especificar uma relação separada entre tensão efetiva e pressão de fluido. Qualquer mudança na tensão total em um ponto, acompanhando mudanças em ψ , é incorporada, assim, ao coeficiente de compressibilidade (ref. 24).

O coeficiente α é constante na região saturada e na zona de capilaridade onde o solo está sob condições praticamente saturadas. Contudo, sob condições não saturadas, onde a relação entre σ_{x_3} e ψ é uma função da saturação, α muda consideravelmente de seu valor de saturação e, seguramente, pode ser negligenciado neste estudo (figura 3.5.4.1).



FIGURA 3.5.4.1) RELAÇÃO ENTRE α E ψ .

Voltando à expressão (3.5.4.5), para valores do potencial de pressões ψ variando, por exemplo, de 0 a 100 metros, a diferença entre α e C_b fica em torno de no máximo 5%, levando em consideração um valor médio de $0,5 \times 10^{-5} \text{ m}^{-1}$ para o coeficiente α . Isto mostra que α e C_b podem ser intercambiáveis no caso do estudo de fluxo onde o potencial ψ assuma valores até 100 metros.

O coeficiente de compressibilidade da água β é expresso por:

$$\beta = \beta' \rho g \quad (3.5.4.8)$$

$$\rho = \rho_0 e^{(\beta\psi)} \quad (3.5.4.9)$$

ρ : massa específica da água

ρ_0 : massa específica inicial da água

g : aceleração da gravidade

β : coeficiente de compressibilidade da água
expresso em unidade L^{-1}

β' : coeficiente de compressibilidade da água
expresso em unidade L^2/F

Como pode-se observar, β também é função de ψ , mas é desprezível o erro ao se definir $\beta = \beta' \rho_0 g$. Não há descontinuidade no valor de β quando o potencial ψ muda de condições saturadas para não saturadas (figura 3.5.4.2). (ref. 36)

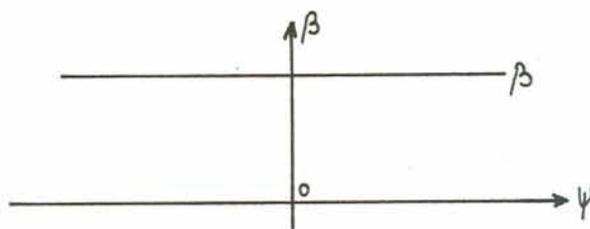


FIGURA 3.5.4.2) RELAÇÃO ENTRE β E ψ .

Analisando o comportamento de cada membro da expressão (3.5.4.1), vale ainda dizer que o uso de S_s como uma constante para meios completamente saturados é justificado desde que as deformações verticais não excedam 5% (ref. 47).

4) FLUXO EM REGIME PERMANENTE

4.1) INTRODUÇÃO

Este capítulo apresenta o estudo de fluxo em meios porosos em regime permanente usando a formulação de Elementos Finitos. A abordagem do estudo de fluxo não confinado é feita de duas formas. A primeira considerando apenas o domínio saturado e utilizando o esquema de malha de elementos finitos ajustável para determinar a posição da linha freática. A segunda, considerando todo o domínio saturado-não saturado e utilizando o esquema de malha fixa, com elemento finito isoparamétrico. A determinação da posição da linha freática é através de processo iterativo, aplicando o método de Newton Raphson. Cada abordagem é ilustrada através de exemplos no final do capítulo.

4.2) FORMULAÇÃO EM ELEMENTOS FINITOS

A equação governante do problema de fluxo em meios porosos, em regime permanente, ou seja, sem variações no tempo, é obtida tanto da equação (3.2.28) quanto da (3.3.6) suprimindo-se o termo da direita da igualdade, já que o potencial total ϕ não varia com o tempo. Assim, tem-se:

$$L(\phi) = \nabla(K\nabla\phi) = 0 \quad (4.2.1)$$

Usando-se outra notação e restringindo-se o estudo a modelos bi-dimensionais, tem-se:

$$L(\phi) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left[K_{x_1} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[K_{x_2} \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right] = 0 \quad (4.2.2)$$

onde:

$$K_{x_1} = K_{ii} \text{ (para estudo somente no domínio saturado)}$$

$$K_{x_1} = K_r K_{ii} \text{ (para estudo em todo o domínio saturado-não saturado)}$$

K_r : condutibilidade hidráulica relativa ($0 \leq K_r \leq 1$)

K_{ii} : componentes principais do tensor K_{ij} , que representa a condutibilidade hidráulica na saturação

Esta equação é válida para a região de área A e contorno S , ao longo do qual deve ser especificado ou o valor do potencial total ou o valor do fluxo normal.

Se S_1 é o segmento do contorno S ao longo do qual o potencial total é prescrito e S_2 o segmento ao longo do qual o fluxo normal é prescrito, então as condições de contorno são:

$$\phi(x_1, x_2) = \bar{\phi} \quad \text{em } S_1 \quad (4.2.3)$$

$$K_n \frac{\partial \phi}{\partial n} = \bar{q} \quad \text{em } S_2 \quad (4.2.4)$$

ou, o que é o mesmo :

$$K_{x_1} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} l_{x_1} + K_{x_2} \frac{\partial \phi}{\partial x_2} l_{x_2} = \bar{q} \quad \text{em } S_2 \quad (4.2.5)$$

onde $\bar{\phi}$ e \bar{q} são valores conhecidos do potencial total e do fluxo normal no contorno, e "n" é a normal a S_2 dirigida para o exterior. Neste trabalho considerar-se-á que \bar{q} é nulo, ou seja, que não há fluxo normal a S_2 , em consonância com os tipos de condições de contorno descritos no item (3.4), isto é, contornos impermeáveis e superfícies livres.

Aplicando-se o método dos resíduos ponderados de

Galerkin para obter uma forma integral correspondente à equação (4.2.2), tem-se:

$$\begin{aligned}
 W(\phi) = & \int_A \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(K_{x_1} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(K_{x_2} \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right) \right] \delta \phi dA - \\
 & - \int_{S_2} \left[K_{x_1} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} l_{x_1} + K_{x_2} \frac{\partial \phi}{\partial x_2} l_{x_2} \right] \delta \phi dS = 0 \quad (4.2.6)
 \end{aligned}$$

onde $\delta \phi$ é a função de peso, A é a área da região de fluxo e S o seu contorno.

Integrando-se por partes a equação (4.2.6), utilizando-se para tanto o teorema de Green, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 W(\phi) = & - \int_A \left[K_{x_1} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \frac{\partial \delta \phi}{\partial x_1} + K_{x_2} \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \frac{\partial \delta \phi}{\partial x_2} \right] dA + \\
 & + \int_{S_2} \left[K_{x_1} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} l_{x_1} + K_{x_2} \frac{\partial \phi}{\partial x_2} l_{x_2} \right] \delta \phi dS - \\
 & - \int_{S_2} \left[K_{x_1} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} l_{x_1} + K_{x_2} \frac{\partial \phi}{\partial x_2} l_{x_2} \right] \delta \phi dS = 0 \quad (4.2.7)
 \end{aligned}$$

Em outra notação, na qual $\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \phi_{,x_i}$ tem-se

finalmente:

$$W(\phi) = \int_A \left[K_{x_1} \phi, x_1 \delta\phi, x_1 + K_{x_2} \phi, x_2 \delta\phi, x_2 \right] dA = 0 \quad (4.2.8)$$

que é a equação base para a aplicação do Método dos Elementos Finitos.

Admite-se que as condições de contorno essenciais, ou seja, do tipo $\phi = \bar{\phi}$ são satisfeitas diretamente e que as condições de contorno naturais do tipo $K_n \frac{\partial \phi}{\partial n}$ em S_2 também são satisfeitas num sentido integrado, especificando-se fluxo nulo através do contorno S_2 .

4.3) ANÁLISE CONSIDERANDO APENAS O DOMÍNIO SATURADO (MALHA AJUSTÁVEL)

4.3.1) APLICAÇÃO DA FORMULAÇÃO EM ELEMENTOS FINITOS

O Método dos Elementos Finitos é aplicado subdividindo-se a região saturada a ser estudada em um conjunto de elementos de dimensões finitas, interligados por meio de pontos nodais, nos quais são determinados os valores nodais das incógnitas do problema estudado.

Em um elemento individual, a aproximação do potencial total ϕ^e em qualquer ponto em seu interior é descrito em termos das funções de forma N_i e dos valores ϕ_i^n do potencial nos pontos nodais do elemento.

$$\phi^e = \sum_{i=1}^{n^e} N_i \phi_i^n = \underset{\sim}{N}^T \underset{\sim}{\phi}^n = \underset{\sim}{\phi}^{n,T} \underset{\sim}{N} \quad (4.3.1.1)$$

onde n^e é o número de nós do elemento e "n" o índice que indica ser valor nodal.

Assim, para um elemento "e", levando (4.3.1.1) em (4.2.8), obtém-se a expressão:

$$\int_{A^e} \delta \phi_{\sim}^{n,T} \left(K_{x_1} N_{\sim, x_1}^T + K_{x_2} N_{\sim, x_2}^T \right) \phi_{\sim}^n dA^e = 0 \quad (4.3.1.2)$$

ou, de outra forma:

$$\delta \phi_{\sim}^{n,T} \int_{A^e} \left(N_{\sim, x_1}^T K_{x_1} N_{\sim, x_1} + N_{\sim, x_2}^T K_{x_2} N_{\sim, x_2} \right) dA^e \phi_{\sim}^n = 0 \quad (4.3.1.3)$$

A integral da equação (4.3.1.3), calculada sobre toda a região A^e do elemento, fornece a matriz dos coeficientes do elemento finito, que será chamada de $[K_{\sim}^e]$:

$$[K_{\sim}^e] = \int_{A^e} \left(N_{\sim, x_1}^T K_{x_1} N_{\sim, x_1} + N_{\sim, x_2}^T K_{x_2} N_{\sim, x_2} \right) dA^e \quad (4.3.1.4)$$

A nível de elemento, tem-se a expressão:

$$\{ \delta \phi_{\sim}^n \}^T [K_{\sim}^e] \{ \phi_{\sim}^n \} = 0 \quad (4.3.1.5)$$

Somadas as contribuições de todos os elementos, chega-se à seguinte expressão global para todo o domínio:

$$\{ \delta \phi_{\sim} \}^T [K_{\sim}] \{ \phi_{\sim} \} = 0 \quad (4.3.1.6)$$

Como $\delta \phi_{\sim}$ é a primeira variação de ϕ_{\sim} , da sua arbitrariedade segue-se que o problema fica retratado, então, pelo sistema de equações lineares:

$$[K_{\sim}] \{ \phi_{\sim} \} = 0 \quad (4.3.1.7)$$

onde $[K_{\sim}]$ é a matriz global de equilíbrio e $\{ \phi_{\sim} \}$ o vetor das variáveis nodais.

4.3.2) MATRIZ DOS COEFICIENTES DO ELEMENTO (TRIÂNGULO LINEAR)

Será usada nesta análise restrita ao domínio saturado, o elemento triangular linear. DIAS³¹ em seu trabalho também o utiliza e conclue que ele dá resultados quase tão precisos quanto o triangular com variação quadrática, podendo dispensar sofisticação maior.

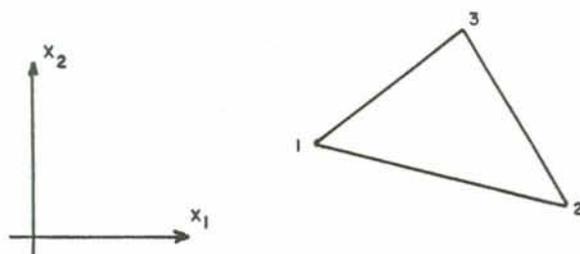


FIGURA 4.3.2.1) ELEMENTO TRIANGULAR LINEAR.

No apêndice III encontra-se detalhada a descrição das funções de forma deste elemento, em termos de coordenadas de área. De lá obtém-se:

$$\tilde{N}_{,x_1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & \frac{\partial N_3}{\partial x_1} \end{bmatrix} = [C_{21} \ C_{22} \ C_{23}] \quad (4.3.2.1)$$

$$\tilde{N}_{,x_2} = [C_{31} \ C_{32} \ C_{33}] \quad (4.3.2.2)$$

$$C_{21} = \frac{(x_2)_2 - (x_2)_3}{2A} \quad (4.3.2.3.a)$$

$$C_{22} = \frac{(x_2)_9 - (x_2)_1}{2A} \quad (4.3.2.3.b)$$

$$C_{23} = \frac{(x_2)_1 - (x_2)_2}{2A} \quad (4.3.2.3.c)$$

$$C_{31} = \frac{(x_1)_9 - (x_1)_2}{2A} \quad (4.3.2.4.a)$$

$$C_{32} = \frac{(x_1)_1 - (x_1)_9}{2A} \quad (4.3.2.4.b)$$

$$C_{33} = \frac{(x_1)_2 - (x_1)_1}{2A} \quad (4.3.2.4.c)$$

onde "A" é a área do elemento.

Assim, na forma de matriz, tem-se:

$$[K_{\sim}^e] = A \left\{ \begin{aligned} & \begin{bmatrix} C_{21} \\ C_{22} \\ C_{23} \end{bmatrix} K_{x_1} [C_{21} \ C_{22} \ C_{23}] + \\ & \begin{bmatrix} C_{31} \\ C_{32} \\ C_{33} \end{bmatrix} K_{x_2} [C_{31} \ C_{32} \ C_{33}] \end{aligned} \right\} \quad (4.3.2.5)$$

$$\begin{aligned}
 [\underset{\sim}{K}^e] = \Lambda \left\{ \begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc} C_{21}^2 & C_{21} C_{22} & C_{21} C_{23} \\ & C_{22}^2 & C_{22} C_{23} \\ & & C_{23}^2 \end{array} \right] K_{x_1} + \\ & + \left[\begin{array}{ccc} C_{31}^2 & C_{31} C_{32} & C_{31} C_{33} \\ & C_{32}^2 & C_{32} C_{33} \\ & & C_{33}^2 \end{array} \right] K_{x_2} \end{aligned} \right\} \quad (4.3.2.6)
 \end{aligned}$$

Observe-se que $[\underset{\sim}{K}^e]$ e, por conseguinte $[\underset{\sim}{K}]$, são simétricas.

4.3.3) DETERMINAÇÃO DA POSIÇÃO DA LINHA FREÁTICA (MALHA AJUSTÁVEL)

A solução do problema de fluxo não confinado em regime permanente consiste na determinação da posição da linha freática, ou linha de potencial de pressões ψ nulo. Isto determinado, todas as outras características do fluxo podem ser obtidas como: linhas equipotenciais, linhas de corrente, distribuição de velocidades,...

Como a priori não se conhece a posição da linha freática e, conseqüentemente, não se satisfaz uma das condições de contorno, é feita uma estimativa de sua posição, como uma primeira aproximação.

A equação (4.2.2) com $K_{x_i} = K_{ii}$, sendo válida somente na região saturada, limita a análise neste domínio. Assim, é feita a discretização apenas da região abaixo da linha estimada.

Montado o sistema de equações lineares

$$[\underset{\sim}{K}]^{(1)} \{ \underset{\sim}{\phi} \} = 0$$

correspondente a esta primeira malha de elementos finitos, e aplicadas as condições de contorno, obtém-se o vetor solução $\{\phi\}^{(1)}$ como primeiro resultado.

Lembrando que na superfície freática existe a condição de que o potencial total ϕ deve ser igual à altura x_2 , é feita a verificação desta condição para cada ponto da malha, pertencente à linha estimada.

Se um ou mais pontos não a satisfizerem, efetua-se uma correção nas coordenadas deste(s) ponto(s) de maneira descrita adiante. Com a nova posição da malha de elementos finitos, monta-se novamente o sistema de equações, agora

$$[\tilde{K}]^{(2)} \{\tilde{\phi}\} = 0$$

e obtém-se nova solução $\{\tilde{\phi}\}^{(2)}$.

Repete-se iterativamente este procedimento até que todos os pontos da linha freática, ou de saturação, satisfaçam a condição $\phi = x_2$, dentro do critério de precisão. A solução do problema será dada pela última malha encontrada e pelo vetor solução $\{\tilde{\phi}\}^{(i)}$ correspondente.

Vide figura 4.3.3.1 .

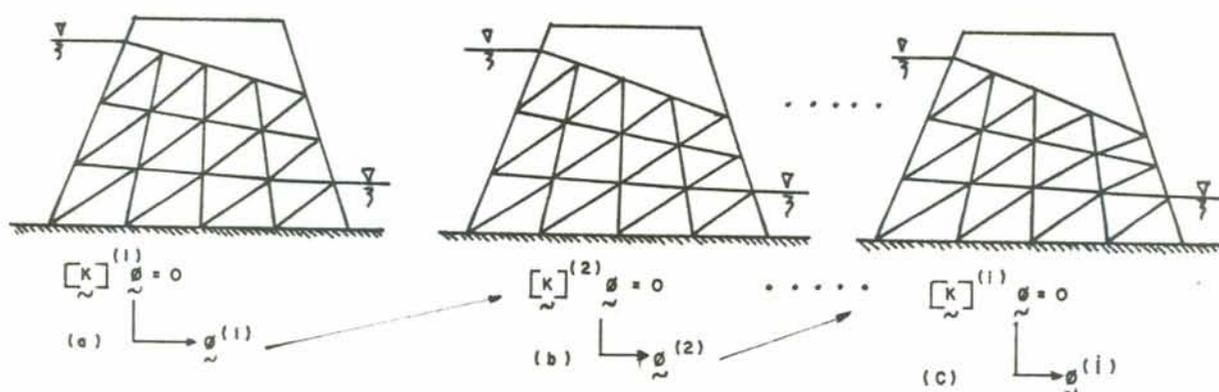
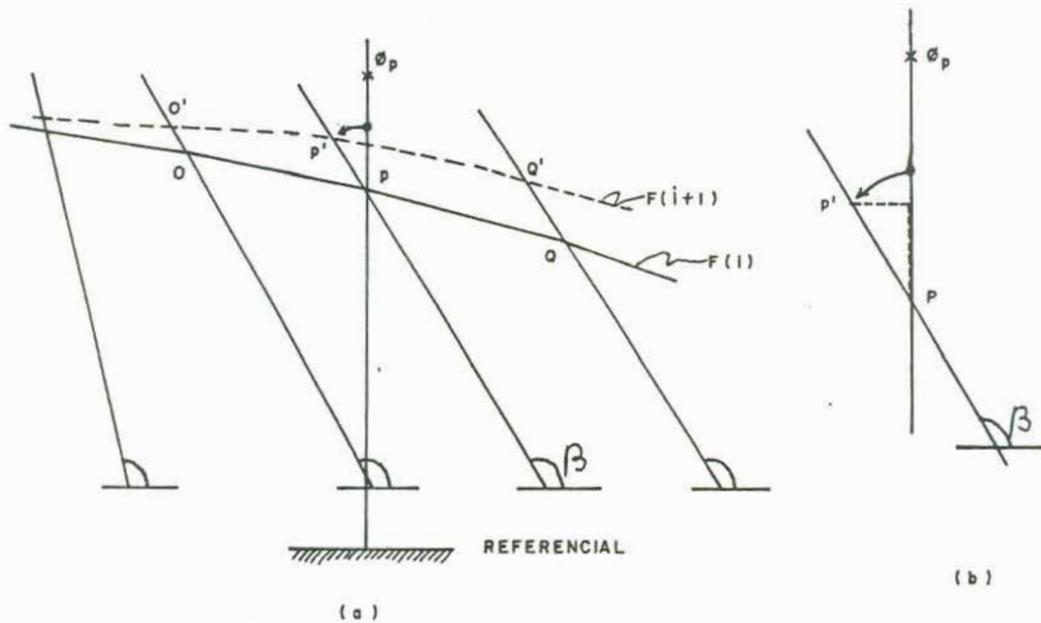


FIGURA 4.3.3.1) ESQUEMA ITERATIVO DE AJUSTE DE MALHA

O ajuste das coordenadas dos pontos pertencentes à linha freática, caso não satisfaçam a condição $\phi = x_2$, é feito em função da diferença entre ϕ_P e $(x_2)_P$ destes pontos.



(a)
 FIGURA 4.3.3.2) AJUSTE DAS COORDENADAS DOS PONTOS DA LINHA FREÁTICA.

Seja a linha de saturação $F^{(i)}$ na i -ésima iteração, conforme a figura (4.3.3.2), com o ponto P de coordenadas $[(x_1)_P, (x_2)_P]$ cujo potencial encontrado é $\phi_P^{(i)}$. A nova localização de P pode ser estabelecida numa posição intermediária entre $(x_2)_P^{(i)}$ e $\phi_P^{(i)}$, na direção vertical. Contudo, é conveniente generalizar a variação da localização de P segundo uma direção inclinada que pode ser uma linha de pontos nodais ou uma linha de inclinação conveniente ao estudo do modelo considerado. Assim, a nova posição de P é dada por:

$$(x_1)_P^{(i+1)} = (x_1)_P^{(i)} + w \left[\phi_P^{(i)} - (x_2)_P^{(i)} \right] \cos \beta \quad (4.3.3.1)$$

$$(x_2)_P^{(i+1)} = (x_2)_P^{(i)} + w \left[\phi_P^{(i)} - (x_2)_P^{(i)} \right] \sin \beta \quad (4.3.3.2)$$

β : ângulo de inclinação da linha sobre a qual o ponto P desliza

w : parâmetro que pode variar entre 0 e 1

A figura (4.3.3.2.a) mostra a mudança das coordenadas de P com mais detalhe. O critério consiste em rebater a parcela $w[\phi - x_2]$ sobre a linha de inclinação, achando a nova posição de P. Neste estudo será usado $w = 0,5$, seguindo a orientação de DIAS³¹.

Este tipo de solução com ajuste da malha de elementos finitos onde somente os pontos da linha de saturação são ajustados pode, dependendo da diferença entre a linha arbitrada inicialmente e a linha freática solução, criar efeitos de distorção consideráveis nos elementos situados junto a esta linha, como o elemento finito mostrado na figura (4.3.3.3) que tornou-se muito alongado.

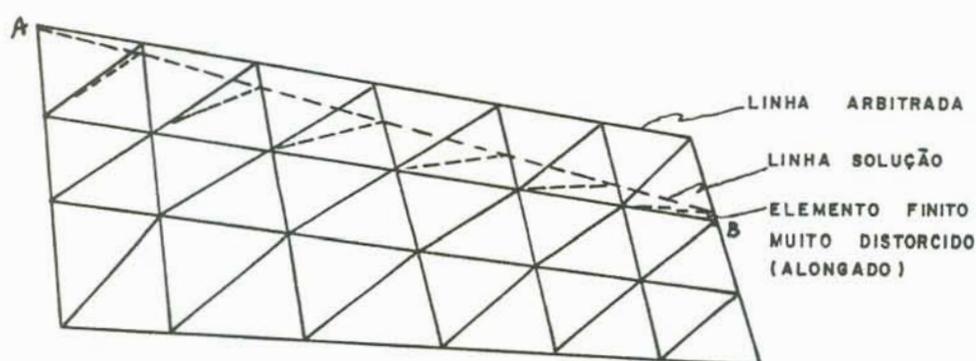


FIGURA 4.3.3.3) AJUSTE SOMENTE DOS PONTOS DA LINHA FREÁTICA.

As situações críticas são quando a linha freática se encontra muito longe ou muito perto da linha \overline{AB} em (4.3.3.3).

Para minimizar este fenômeno, ajusta-se também a posição dos pontos situados abaixo da linha de saturação. Isto é feito considerando-se que os pontos nodais, situados na mesma linha de "deslizamento" do ponto P da superfície freática a ser ajustado, também são ajustados segundo esta mesma linha, mas de forma proporcional ao ajuste de P (figura 4.3.3.4). Assim, um ponto T de coordenadas $[(x_1)_T, (x_2)_T]$, situado sob a área de influência de P é ajustado, proporcionalmente à sua posição vertical relativa, da seguinte maneira:

$$(x_1)_T^{(i+1)} = (x_1)_T^{(i)} + w \left[\phi_P^{(i)} - (x_2)_P^{(i)} \right] \frac{(x_2)_T^{(i)}}{(x_2)_P^{(i)}} \cos \beta \quad (4.3.3.3)$$

$$(x_2)_T^{(i+1)} = (x_2)_T^{(i)} + w \left[\phi_P^{(i)} - (x_2)_P^{(i)} \right] \frac{(x_2)_T^{(i)}}{(x_2)_P^{(i)}} \sin \beta \quad (4.3.3.4)$$

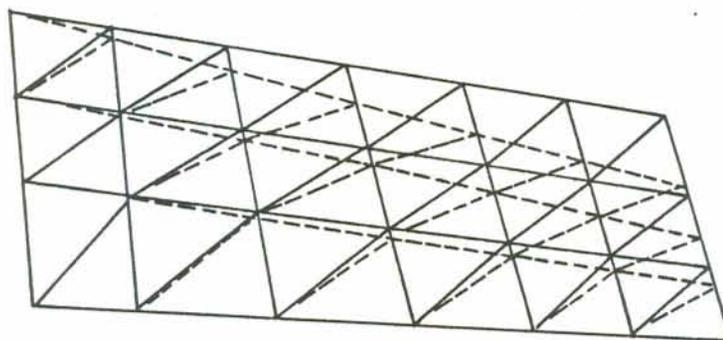


FIGURA 4.3.3.4) AJUSTE DA MALHA ABAIXO DA LINHA FREÁTICA.

Isto diminui os efeitos de uma distorção excessiva de elementos, distribuindo à toda malha abaixo da linha de saturação a responsabilidade de absorver os ajustes de coordenadas. Certamente isto significará mais tempo de computação pois, a cada iteração, nova matriz de coeficientes deve ser calculada, mas diminui-se consideravelmente a possibilidade de erros inerentes a elementos muito distorcidos. Para diminuir um pouco este problema de tempo computacional pode-se limitar o ajuste da malha até algumas fileiras de elementos abaixo da superfície freática, mantendo-se daí para baixo a malha original, com os coeficientes da matriz, já calculados, armazenados.

No ajuste dos pontos da linha freática há ainda um aspecto particular. Em problemas onde há face de percolação, ou seja, onde ocorre a condição de contorno tipo "c" apresentada no item (3.4) do capítulo 3, o ponto de intersecção entre a linha de saturação e a face externa do modelo estudado, chamado ponto de afloramento, bem como os

pontos situados nesta face, são ajustados, cada qual exatamente como no critério de ajuste de pontos pertencentes à linha freática, sem a necessidade de ajuste proporcional. Assim, para os pontos da face de percolação o ajuste é dado por (figura 4.3.3.5):

$$(x_1)_{FP}^{(i+1)} = (x_1)_{FP}^{(i)} + w \left[\phi_{FP}^{(i)} - (x_2)_{FP}^{(i)} \right] \cos \beta \quad (4.3.3.5)$$

$$(x_2)_{FP}^{(i+1)} = (x_2)_{FP}^{(i)} + w \left[\phi_{FP}^{(i)} - (x_2)_{FP}^{(i)} \right] \sin \beta \quad (4.3.3.6)$$

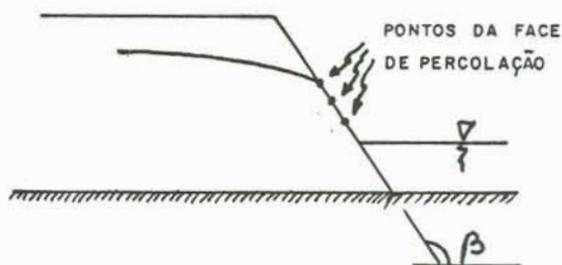


FIGURA 4.3.3.5) PONTOS DA MALHA SITUADOS NA FACE DE PERCOLAÇÃO

Em problemas onde a linha freática termina em um dreno de pé, como indicado nas figuras (4.3.3.6) e (4.3.3.7), a solução é obtida discretizando-se a malha de elementos finitos de maneira que as linhas inclinadas, segundo as quais as coordenadas dos pontos são ajustadas, acompanhem a inclinação da face do dreno. Os exemplos das figuras (4.5.1.4) e (4.5.1.6) apresentados no final deste capítulo ilustram bem esta situação.

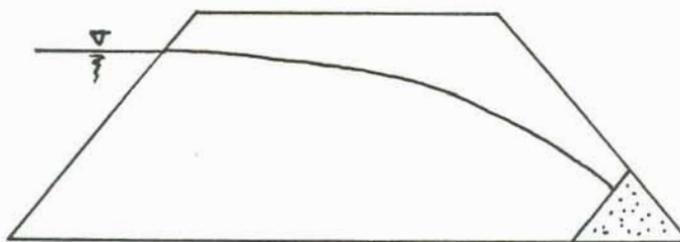


FIGURA 4.3.3.6) BARRAGEM COM DRENO DE PÉ (INCLINADO).

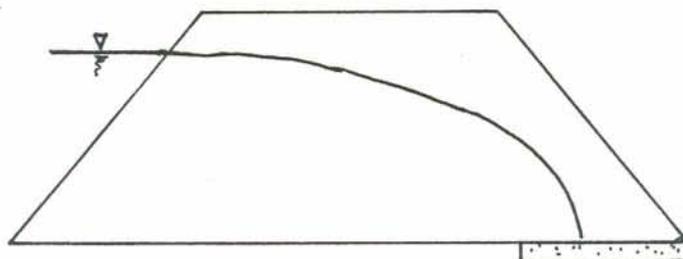


FIGURA 4.3.3.7) BARRAGEM COM DRENO DE PÉ (HORIZONTAL).

Seja qual for o problema a analisar com a abordagem de malha ajustável, a convergência será tanto mais rápida quanto mais próxima a linha arbitrada estiver da posição solução da linha freática.

Contudo, uma limitação deste esquema é quando o problema a ser resolvido é composto por camadas de materiais com propriedades diferentes. Um exemplo típico é o de barragem com dreno tipo chaminé no seu interior, como ilustrado na figura (4.3.3.8).

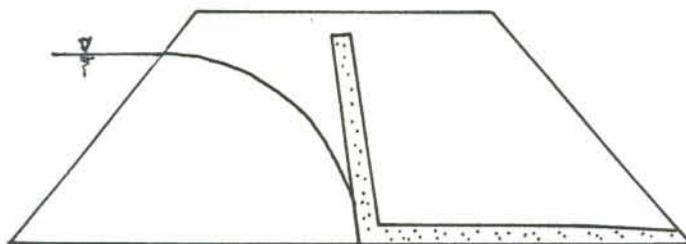


FIGURA 4.3.3.8) BARRAGEM COM DRENO TIPO CHAMINÉ

Este tipo de situação requer alguma prática para discretizar a malha de elementos finitos com uma linha freática inicial arbitrada adequadamente.

4.4) ANÁLISE CONSIDERANDO TODO O DOMÍNIO SATURADO-NÃO SATURADO (MALHA FIXA)

4.4.1) APLICAÇÃO DA FORMULAÇÃO EM ELEMENTOS FINITOS

A mesma expressão (4.2.8) para elementos finitos é usada aqui:

$$W(\phi) = \int_A \left[K_{x_1} \phi,_{x_1} \delta\phi,_{x_1} + K_{x_2} \phi,_{x_2} \delta\phi,_{x_2} \right] dA = 0 \quad (4.4.1.1)$$

lembrando, agora, que $K_{x_i} = K_r K_{ii}$ e que, desta forma, a equação é válida para todo o domínio saturado e também não saturado.

Portanto, todo o domínio físico do modelo estudado deve ser discretizado em elementos finitos, interligados pelos pontos nodais nos quais serão determinados os valores nodais das incógnitas procuradas.

O algoritmo de solução aqui utilizado tem a particularidade de não necessitar de ajustes da malha de elementos finitos. Para a localização da posição da superfície freática em problemas não confinados é lançado mão das características de elementos finitos isoparamétricos e usado um esquema iterativo tipo Newton Raphson para solucionar o sistema de equações.

No elemento isoparamétrico não só o potencial total ϕ^e no seu interior, como também as coordenadas x_1 e x_2 , são descritos em termos das funções de forma correspondentes N_i e dos valores do potencial ϕ^n nos nós, e das coordenadas x_1^n e x_2^n também nos nós.

$$\phi^e = \sum_{i=1}^{n^e} N_i \phi_i^n \quad (4.4.1.2)$$

$$x_1 = \sum_{i=1}^{n^e} N_i (x_1^n)_i \quad (4.4.1.3)$$

$$x_2 = \sum_{i=1}^{n^e} N_i (x_2^n)_i \quad (4.4.1.4)$$

- N_i : funções de forma ou de interpolação
 ϕ_i^n : potencial total nos nós do elemento
 x_1^n, x_2^n : coordenadas dos pontos nodais do elemento finito
 n^e : número de nós do elemento

Lançando-se mão, como será visto adiante, das peculiaridades da integração numérica da matriz dos coeficientes de um elemento isoparamétrico, é possível descrever qualquer parâmetro P^e do seu interior avaliando-o nos pontos de integração. Assim, P^e pode ser descrito pelas funções de forma N_i avaliadas nos pontos de integração, e pelos valores nodais P_i^n do parâmetro (ref. 18).

$$P^e = \sum_{i=1}^{n^e} N_i P_i^n \quad (4.4.1.5)$$

É isto que efetivamente é feito com a condutibilidade hidráulica $K_{x_1} = f(\psi)$, descrevendo-a em termos das funções de forma e dos seus valores nodais no elemento:

$$K_{x_1}^e = \sum_{i=1}^{n^e} N_i (K_{x_1}^n)_i \quad (4.4.1.6.a)$$

$$K_{x_2}^e = \sum_{i=1}^{n^e} N_i (K_{x_2}^n)_i \quad (4.4.1.6.b)$$

Sendo que os valores nodais da condutibilidade hidráulica $K_{x_1} = f(\psi)$ são obtidos em função do potencial

de pressões no referido nó, conforme a relação $K_{\kappa\psi}$ apresentada no item (3.5.1) do capítulo 3.

Levando, então, (4.4.1.2) em (4.4.1.1), consideradas as relações (4.4.1.3), (4.4.1.4) e (4.4.1.6.a,b) obtém-se:

$$\delta\phi_{\sim}^{n,T} \int_{A^e} \left[\begin{matrix} N_{\sim,x_1}^T & K_{x_1}^* & N_{\sim,x_1} \\ N_{\sim,x_2}^T & K_{x_2}^* & N_{\sim,x_2} \end{matrix} \right] dA^e \phi_{\sim}^n = 0 \quad (4.4.1.7)$$

onde $K_{x_1}^*$ e $K_{x_2}^*$ estão assinalados com asterisco (*) para lembrar que são parâmetros avaliados nos pontos de integração segundo (4.4.1.6.a,b).

À semelhança do descrito no item (4.3) (análise no domínio saturado), a matriz do elemento é expressa por:

$$[K_{\sim}^e] = \int_{A^e} \left[\begin{matrix} N_{\sim,x_1}^T & K_{x_1}^* & N_{\sim,x_1} \\ N_{\sim,x_2}^T & K_{x_2}^* & N_{\sim,x_2} \end{matrix} \right] dA^e \quad (4.4.1.8)$$

Somadas as contribuições de todos os elementos, chega-se a um sistema de equações do tipo $[K_{\sim}] \{\phi_{\sim}\} = 0$, não linear, a ser solucionado. Ele é não linear devido à relação de dependência entre a condutibilidade hidráulica e o potencial de pressões $K_{x_1} = f(\psi)$.

4.4.2) MATRIZ DOS COEFICIENTES DO ELEMENTO (QUADRILÁTERO ISOPARAMÉTRICO)

Como pode-se observar pelas equações (4.4.1.2), (4.4.1.3), (4.4.1.4) e (4.4.1.6.a,b), o elemento isoparamétrico caracteriza-se pelo fato das funções de forma serem as mesmas para definir geometria e função no elemento.

Nesta análise de todo o domínio saturado-não

saturado será usado o quadrilátero linear isoparamétrico como elemento finito para discretizar o domínio do problema.

Seja o elemento da figura (4.4.2.1) com quatro nós $i=1,2,3,4$ com seus respectivos valores das coordenadas globais $(x_1)_i$, $(x_2)_i$ e valores nodais das funções $(\phi)_i$, $(K_{x_1})_i$, $(K_{x_2})_i$. O elemento é descrito também em termos de coordenadas locais ξ , η que variam entre -1 e $+1$.

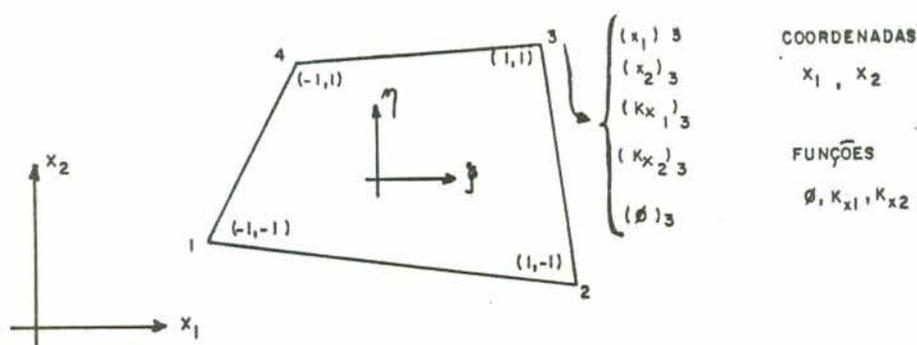


FIGURA 4.4.2.1) QUADRILÁTERO LINEAR ISOPARAMÉTRICO

As funções de forma para este elemento são dadas, em termos de coordenadas locais, por:

$$N_i = \frac{1}{4} [1 + \xi\xi_i] [1 + \eta\eta_i] \quad (4.4.2.1)$$

Para o cálculo da matriz do elemento é necessário derivar as funções de forma N_i em relação a x_1 e x_2 , coordenadas globais. Como as funções N_i são dadas em termos de coordenadas locais, é necessário expressar as derivadas globais em termos de derivadas locais. Pela regra da cadeia, de diferenciação parcial, tem-se:

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \quad (4.4.2.2)$$

Fazendo o mesmo em relação a η e escrevendo em forma matricial obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \eta} & \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x_2} \end{Bmatrix} = [J_{\sim}] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x_2} \end{Bmatrix} \quad (4.4.2.3)$$

onde $[J_{\sim}]$ é chamada matriz Jacobiana.

Para obter-se as derivadas globais, inverte-se a matriz $[J_{\sim}]$.

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x_2} \end{Bmatrix} = [J_{\sim}]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (4.4.2.4)$$

e chega-se às expressões para N_{i,x_1} e N_{i,x_2} a serem usadas na matriz do elemento:

$$\frac{\partial N_i}{\partial x_1} = \frac{1}{|J_{\sim}|} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} - \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (4.4.2.5.a)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial x_2} = \frac{1}{|J_{\sim}|} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} - \frac{\partial x_1}{\partial \eta} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (4.4.2.5.b)$$

onde $|J_{\sim}|$ é o determinante da matriz Jacobiana, ou simplesmente "Jacobiano":

$$\left| \underset{\sim}{J} \right| = \frac{\partial x_1}{\partial \xi} \frac{\partial x_2}{\partial \eta} - \frac{\partial x_1}{\partial \eta} \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \quad (4.4.2.6)$$

Vale lembrar que, em (4.4.2.4) e (4.4.2.5.a,b), as derivadas das coordenadas globais em relação às locais são expressas por:

$$\frac{\partial x_1}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^{n^e} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} (x_1)_i \quad (4.4.2.7.a)$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^{n^e} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} (x_2)_i \quad (4.4.2.7.b)$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^{n^e} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} (x_1)_i \quad (4.4.2.7.c)$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^{n^e} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} (x_2)_i \quad (4.4.2.7.d)$$

e que:

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{1}{4} \xi_i (1 + \eta \eta_i) \quad (4.4.2.8.a)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{1}{4} \eta_i (1 + \xi \xi_i) \quad (4.4.2.8.b)$$

Complementando, é necessário ainda expressar o elemento de área sobre o qual a integral da expressão (4.4.1.8) é calculada, em termos de coordenadas locais, com a adequada mudança nos limites de integração. Desta forma:

$$dA^e = dx_1 dx_2 = \left| \underset{\sim}{J} \right| d\xi d\eta \quad (4.4.2.9)$$

Assim, pode-se reescrever a expressão da matriz do elemento:

$$\left[\underset{\sim}{K}^e \right] = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \left[\underset{\sim}{N}_{i,x_1}^T K_{x_1}^* \underset{\sim}{N}_{i,x_1} + \underset{\sim}{N}_{i,x_2}^T K_{x_2}^* \underset{\sim}{N}_{i,x_2} \right] \left| \underset{\sim}{J} \right| d\xi d\eta \quad (4.4.2.10)$$

onde $\underset{\sim}{N}_{i,x_1}$ e $\underset{\sim}{N}_{i,x_2}$ são calculados segundo (4.4.2.5.a,b) e, $K_{x_1}^*$ e $K_{x_2}^*$ são calculados segundo (4.4.1.6).

A expressão (4.4.2.10) é integrada numericamente utilizando-se a Quadratura Gaussiana, cuja fórmula genérica para duas dimensões é (ref. 59):

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} G(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m G(\xi_i, \eta_j) w_i w_j \quad (4.4.2.11)$$

w_i, w_j : fatores de peso

G : função das variáveis ξ e η

ξ_i, η_j : abcissas dos pontos de integração

$G(\xi_i, \eta_j)$: valor puntual de G para coordenadas ξ_i e η_j

n, m : número de pontos de integração em cada direção

Para o elemento finito quadrilátero linear isoparamétrico, com matriz de elemento expressa por (4.4.2.10) e com funções de forma expressas por (4.4.2.1), o número de pontos de integração é dois em cada direção ($n=m=2$), com coordenadas ξ_i e η_i assumindo valores $\pm\sqrt{3}$ e fator de peso $w_i = w_j = 1$. (ref. 22,59)

Com o objetivo de tornar mais versátil a operação de discretizar a região a ser estudada, incluiu-se no programa o elemento finito triangular linear. Este elemento, compatível com o quadrilátero linear isoparamétrico, facilita a discretização de cantos do contorno geométrico da região estudada e também facilita a execução de transição de trechos de malha mais fina para trechos de malha mais espaçada, e vice versa, conforme pode ser observado nos exemplos no final do capítulo.

O detalhamento do elemento triangular linear é apresentado no item (4.3.2) e no apêndice III. Devido às características deste elemento, o coeficiente de condutibilidade K_{x_1} é tomado como constante em qualquer ponto do seu interior, diferenciando-se do elemento isoparamétrico no qual é calculado nos pontos de integração.

A existência de elementos triangulares em alguns pontos da malha não interfere no esquema ora apresentado, como pode-se observar nos resultados dos exemplos no final do capítulo.

4.4.3) DETERMINAÇÃO DA POSIÇÃO DA LINHA FREÁTICA (MALHA FIXA)

Para obter-se o resultado final do problema estudado é preciso antes aplicar as condições de contorno ao sistema de equações dado por (4.3.1.7). As condições de contorno naturais, do tipo $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$, são sempre satisfeitas, num sentido integrado, não se prescrevendo qualquer fluxo normal à superfície. As condições de contorno geométricas, do tipo $\phi = x_2$, são impostas através de valores prescritos nos nós pertencentes às superfícies onde se tem tais condições de contorno.

Em problemas de fluxo não confinado, como não se conhece a priori a posição da superfície freática, não se

pode impor as condições de contorno a ela correspondentes, e o sistema não pode ser solucionado diretamente.

Para contornar esta situação, é prática usual assumir uma superfície livre, resolver a equação (4.3.1.7) e checar os resultados, verificando se as condições de contorno geométricas da superfície livre são satisfeitas, visto que as condições de contorno naturais são satisfeitas automaticamente como foi visto acima. Caso isto não ocorra, itera-se com a superfície livre até encontrar a solução final.

Como todo o domínio físico do problema não confinado estudado é representado usando-se uma discretização de elementos finitos, e face ao fato de não poder haver fluxo na região não saturada, utiliza-se o artifício de não se representar o material acima da superfície livre. Este artifício é mais facilmente efetuado computacionalmente transformando-se o problema numa forma não linear, onde na região saturada considera-se K_{x_1} igual à condutibilidade saturada e na região não saturada considera-se uma redução no valor de K_{x_1} . Ou seja, incorporam-se as condições de superfície livre através da consideração da variação da condutibilidade hidráulica do material versus potencial de pressões.

No final do item (3.5.1) do capítulo 3 é apresentada uma análise sobre as diferentes maneiras de se representar a relação $Kx\psi$, tendo-se optado pela mais simples. A figura (4.4.3.1) reintroduz a relação de $Kx\psi$ escolhida para este trabalho, a qual também é traduzida pela expressão (4.4.3.1).

$$K_{x_1} = \begin{cases} K_S & \text{para } \phi \geq x_2 \\ 0,0001 K_S & \text{para } \phi < x_2 \end{cases} \quad (4.4.3.1)$$

O valor de K_{x_1} diminui abruptamente à medida que ψ decresce e passa a valores negativos. Para evitar instabilidade numérica devido à possível presença de elementos nulos na diagonal da matriz do sistema de equações,

adota-se um valor constante muito pequeno para K_{x_i} , por exemplo 0,0001, na região de ψ negativo. Em outras palavras isto significa não representar o material acima da linha freática, ou seja, efetivamente "remover" os elementos não saturados e deixar ativos apenas os saturados.

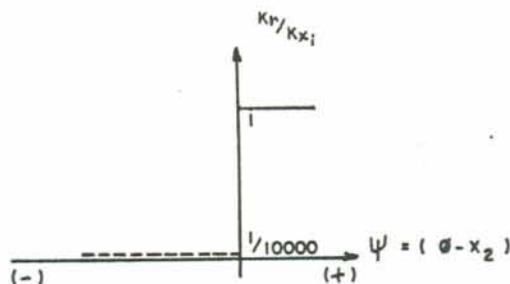


FIGURA 4.4.3.1) VARIACÃO DE $K \times \psi$.

Feitas estas considerações, para impor computacionalmente as condições de contorno à equação (4.3.1.7), adicionam-se altos coeficientes de condutibilidade hidráulica aos elementos da diagonal da matriz $[\underset{\sim}{K}]$ correspondentes aos nós de contorno prescritos e especificam-se condições de fluxo que resultam nos potenciais totais dados (ref. 18).

A equação (4.3.1.7) fica:

$$\left([\underset{\sim}{K}]^k + [\underset{\sim}{K}]^b \right) \{ \underset{\sim}{\phi} \} = \{ \underset{\sim}{Q} \}^b \quad (4.4.3.2)$$

$[\underset{\sim}{K}]^k$: matriz global dos coeficientes, sem as condições de contorno.

$[\underset{\sim}{K}]^b$: matriz diagonal onde o i -ésimo elemento da diagonal é igual a zero se ϕ_i não é prescrito, ou então é igual a k , onde $k \gg k_{ii}$, se ϕ_i é prescrito.

$\{ \underset{\sim}{Q} \}^b$: vetor cujo i -ésimo elemento nulo se ϕ_i não é prescrito, ou então é igual a $k\phi_i$ se ϕ_i é prescrito.

Observe-se que este procedimento de especificar potenciais totais prescritos não introduz nenhuma dificuldade numérica na solução de $\{\phi\}$, independentemente da magnitude de "k" empregada, porque "k" é apenas adicionado aos elementos da diagonal de $[K]$.

Cabe aqui um parêntesis. Com a utilização do procedimento acima descrito, pode ocorrer durante a solução do sistema de equações pelo método de eliminação de Gauss, o surgimento de mensagens de "floating underflow", emitidas pelo computador. Isto se deve ao fato de, pelas características do problema, haver valores muito próximos de zero em algumas posições fora da diagonal principal da matriz dos coeficientes, os quais são divididos pelo pivô cujo valor é "k", muito maior comparativamente. Ocorrências deste tipo, contudo, não distorcem os resultados. Para checar isto, foi testado outro procedimento de aplicação das condições de contorno ao sistema de equações, o qual consiste em zerar a linha e a coluna correspondente ao nó prescrito, colocar o valor 1 (um) na posição da diagonal principal e o valor prescrito na posição correspondente do vetor dos termos independentes e, ainda, efetuar algumas operações neste vetor pois ele se modifica ao ser feita a operação ora descrita na matriz dos coeficientes. Os resultados obtidos com os dois procedimentos distintos não apresentaram diferenças significativas, razão porque é aplicado neste trabalho o primeiro, que envolve menos operações computacionais.

À continuação, tendo em vista, ainda, as relações (4.4.3.1), a solução do problema é obtida utilizando um esquema iterativo tipo Newton Raphson. Assim, operar-se-á sobre:

$$\{\tilde{F}\}^k + \{\tilde{F}\}^b - \{\tilde{Q}\}^b = 0 \quad (4.4.3.3)$$

onde :

$$\{\tilde{F}\}^b = [K]^b \{\tilde{\phi}\} \quad (4.4.3.4)$$

$$\{F\}_{\sim}^k = \sum_{i=1}^{n^e} \int_{A^e} B^{(e)}{}^T \left[\underset{\sim}{K}_X^{(e)} \underset{\sim}{B}^{(e)} \underset{\sim}{\phi} \right] dA^e \quad (4.4.3.5)$$

$$\underset{\sim}{B}^{(e)} = \begin{bmatrix} N_{\sim} X_1 \\ \vdots \\ N_{\sim} X_2 \end{bmatrix} \quad (4.4.3.6)$$

$$\underset{\sim}{K}_X^{(e)} = \begin{bmatrix} K_{X_1}^* & 0 \\ 0 & K_{X_2}^* \end{bmatrix} \quad (4.4.3.7)$$

A iteração de Newton Raphson é executada da maneira usual (Ref. 10):

$$\left(\left[\underset{\sim}{K} \right]^{k(i-1)} + \left[\underset{\sim}{K} \right]^b \right) \{ \Delta \phi \}_{\sim}^{(i)} = \{ Q \}_{\sim}^b - \{ F \}_{\sim}^{k(i-1)} - \{ F \}_{\sim}^{b(i-1)} \quad (4.4.3.8)$$

$$\left[\underset{\sim}{K} \right]^{k(i-1)} = \sum_{i=1}^{n^e} \int_{A^e} B^{(e)}{}^T \underset{\sim}{K}_X^{(e)(i-1)} \underset{\sim}{B}^{(e)} dA^e \quad (4.4.3.9)$$

$$\{ F \}_{\sim}^{k(i-1)} = \sum_{i=1}^{n^e} \int_{A^e} B^{(e)}{}^T \left[\underset{\sim}{K}_X^{(e)(i-1)} \underset{\sim}{B}^{(e)} \underset{\sim}{\phi}^{(i-1)} \right] dA^e \quad (4.4.3.10)$$

$$\{ F \}_{\sim}^{b(i-1)} = \left[\underset{\sim}{K} \right]^b \{ \phi \}_{\sim}^{(i-1)} \quad (4.4.3.11)$$

e, finalmente:

$$\{ \phi \}_{\sim}^{(i)} = \{ \phi \}_{\sim}^{(i-1)} + w \{ \Delta \phi \}_{\sim}^{(i)} \quad (4.4.3.12)$$

O coeficiente "w" pode assumir valor entre 0,5 e 1,0 e é aplicado para melhorar a convergência. Neste trabalho adota-se $w = 0,5$, à semelhana do esquema de malha

ajustável. O uso de $w = 1,0$ mostrou que a convergência é mais lenta, ocorrendo instabilidade em alguns casos.

Repete-se iterativamente o algoritmo acima até obter-se convergência, dentro do critério da Norma Euclidiana:

$$\frac{\|\Delta\phi^{(i)}\|_2}{\|\phi^{(i)}\|_2} \leq \varepsilon \quad (4.4.3.13)$$

Os exemplos ilustrados pelas figuras (4.5.2.2) e (4.5.2.5) mostram os resultados obtidos com este esquema, comparados com os resultados obtidos com o esquema de malha ajustável e com os apresentados por MASLIA⁴⁵, respectivamente.

Este esquema, entretanto, não mostrou ser eficiente no trato de problemas onde o meio poroso é constituído de faixas verticais, ou próximas da direção vertical, com solos de diferentes coeficientes de condutibilidade hidráulica, principalmente quando ocorre o caso de uma faixa de solo com coeficiente de condutibilidade hidráulica maior que os das faixas adjacentes, determinando um maior gradiente hidráulico e, conseqüentemente, uma inclinação mais acentuada da linha freática.

A figura (4.5.2.6) apresenta um exemplo com as características acima descritas e ilustra, para cada iteração, a posição da linha freática que vai sendo determinada segundo (4.3.3.12). Nota-se claramente a não convergência na região próxima à linha \overline{EI} que delimita as duas faixas de solo com propriedades diferentes.

Para superar este problema foi aplicado o algoritmo de Newton Raphson modificado, no qual a matriz dos coeficientes $[K]_k$ é estabelecida somente no início das iterações e não é mais modificada. Assim, no lugar da equação (4.4.3.8) utiliza-se a equação seguinte, permanecendo inalterado o restante do procedimento.

$$\left(\left[\underset{\sim}{K} \right]^{k(0)} + \left[\underset{\sim}{K} \right]^b \right) \left\{ \underset{\sim}{\Delta\phi} \right\}^{(i)} = \left\{ \underset{\sim}{Q} \right\}^b - \left\{ \underset{\sim}{F} \right\}^{k(i-1)} - \left\{ \underset{\sim}{F} \right\}^{b(i-1)} \quad (4.4.3.14)$$

Os resultados obtidos com este algoritmo, no estudo do exemplo em questão, são apresentados na figura (4.5.2.7), a qual ilustra a posição da linha freática a cada iteração para que se possa observar a convergência.

A equação (4.4.3.14) apresenta, também, outra vantagem que consiste em montar a matriz dos coeficientes do sistema apenas uma vez, já que ela permanece constante para cada nova iteração. Isto diminui o tempo de computação pois o sistema é triangularizado uma única vez. A desvantagem reside no fato de poder afetar a precisão.

No presente trabalho a matriz $\left[\underset{\sim}{K} \right]^{k(0)}$ é calculada considerando saturada toda a região da barragem abaixo do nível d'água a montante.

Tendo convergido o sistema não linear e encontrado o vetor solução $\left\{ \underset{\sim}{\phi} \right\}$, a posição final da superfície freática é determinada pesquisando-se os elementos cujos nós apresentam valores nodais positivos e negativos para o potencial de pressões $\psi = \phi - x_2$. A linha freática está, assim, passando por estes elementos e, através de uma interpolação efetuada nos lados do elemento onde os nós extremos apresentam valores nodais de ψ positivo e negativo, encontra-se o ponto onde $\psi = 0$ ou, o que é o mesmo, $\phi = x_2$ pertencente à superfície freática (figura 4.4.3.2).

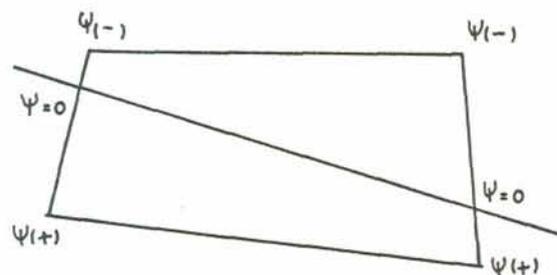


FIGURA 4.4.3.2) LINHA FREÁTICA ATRAVÉS DO ELEMENTO QUADRILÁTERO ISOPARAMÉTRICO.

4.5) EXEMPLOS

4.5.1) EXEMPLOS COM MALHA AJUSTÁVEL

Para ilustrar a aplicação do esquema de malha ajustável são apresentadas soluções para barragens homogêneas com três tipos de condições de contorno a jusante, ou seja, uma situação de face de percolação, uma situação com dreno de pé inclinado e outra com dreno de pé horizontal.

A figura (4.5.1.1) apresenta um caso hipotético de uma barragem homogênea cujas características estão listadas na tabela (4.5.1.1). Observa-se nitidamente o ajuste proporcional de toda a malha de elementos finitos. Como a malha inicialmente estimada estava próxima da posição solução, não há elementos finitos deformados.

Tabela 4.5.1.1) Características do exemplo da figura (4.5.1.1)

propriedades	$K_{x_1} = K_{x_2} = 0,01 \text{ m/dia}$	todos os elementos
condições de contorno	$\bar{\phi} = 7 \text{ m}$	em \overline{AB}
	$\bar{\phi} = 1 \text{ m}$	em \overline{FG}
	$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$	em $\overline{BE}, \overline{AG}$
	$\phi = x_2$	em \overline{EF}

A solução para barragem com dreno de pé inclinado é descrita nas figuras (4.5.1.2), (4.5.1.3) e (4.5.1.4), as quais mostram diferentes malhas e condições de contorno, e como isto interfere na solução. As características correspondentes a cada figura estão descritas na tabela (4.5.1.2).

Tabela 4.5.1.2) Características dos exemplos das figuras (4.5.1.2), (4.5.1.3) e (4.5.1.4)

		figura (4.5.1.2)	figura (4.5.1.3)	figura (4.5.1.4)
propriedades	$K_{x_1} = 1,0 \text{ m/dia}$	-	-	elemento "a"
	$K_{x_1} = 0,01 \text{ m/dia}$	todos os elementos	todos os elementos	demais elementos
condições de contorno	$\bar{\phi} = 100 \text{ m}$	em \overline{AB}	em \overline{AB}	em \overline{AB}
	$\bar{\phi} = 0 \text{ m}$	em G	em G, H	em G, I
	$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$	em $\overline{BE}, \overline{AG}$	em $\overline{BE}, \overline{AG}$	em $\overline{BE}, \overline{AI}$
	$\phi = x_2$	em \overline{EG}	em \overline{EG}	em \overline{EI}

Na primeira figura (4.5.1.2) a condição de contorno $\bar{\phi} = 0$ imposta apenas no nó G não forneceu a solução correta. Impondo-se esta mesma condição aos nós G e H, como mostra a figura (4.5.1.3), obteve-se uma melhor aproximação à solução encontrada por ARAL (ref.45). Mas é incorreto impor $\phi = 0$ em H pois no trecho \overline{GH} não existe dreno.

Uma outra solução é apresentada na figura (4.5.1.4) na qual modificou-se um pouco a malha e incluiu-se um novo elemento "a" na região do dreno, com coeficiente de condutibilidade hidráulica superior ao do corpo da barragem, e impôs-se $\bar{\phi} = 0$ em G e I. A solução obtida assim foi bem mais próxima da obtida por HARR, e também por ARAL (ref.45).

Nota-se, desta forma, a necessidade do usuário discretizar a malha inicial adequadamente para obter bons resultados.

Para barragem com dreno de pé horizontal, apresentam-se, a seguir, dois exemplos com malhas

diferentes. A tabela (4.5.1.3) fornece as características de ambos. Os resultados são comparados com os obtidos por ARAL e MASLIA (ref. 45). No item seguinte (4.5.2) também é feita uma comparação com resultados obtidos com o esquema de malha fixa, para este mesmo problema. Mais uma vez observa-se a importância de uma malha bem discretizada ao se comparar as figuras (4.5.1.5) e (4.5.1.6).

Na figura (4.5.1.5) há uma deformação grande nos elementos próximos ao dreno. O caso de barragem com dreno horizontal, analisada com o esquema de malha ajustável, é o mais crítico devido às condições de ajuste dos nós junto ao dreno os quais, ajustados segundo direções muito próximas da horizontal, podem deformar demais a malha. A figura (4.5.1.6) apresenta uma malha melhor para estudar este problema.

Tabela 4.5.1.3) Características dos exemplos das figuras (4.5.1.5) e (4.5.1.6)

propriedades	$K_{x_1} = K_{x_2} = 0,01 \text{ m/dia}$	todos os elementos
condições de contorno	$\bar{\phi} = 100 \text{ m}$	em \overline{AB}
	$\bar{\phi} = 0 \text{ m}$	em \overline{FG}
	$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$	em $\overline{BF}, \overline{AG}$

4.5.2) EXEMPLOS COM MALHA FIXA

Para ilustrar a aplicação do esquema de malha fixa, onde se discretiza todo o domínio saturado-não-saturado, são apresentadas as soluções de vários exemplos de barragens, tanto homogêneas quanto heterogêneas, com diferentes condições de contorno.

Com exceção dos dois primeiros exemplos, todos

os demais são semelhantes aos apresentados por MASLIA⁴⁵ e, conseqüentemente, são comparados aos resultados obtidos por este.

No primeiro exemplo, ilustrado pela figura (4.5.2.1), nota-se a boa aproximação do resultado obtido com esta técnica, comparado com o resultado obtido com a solução gráfica de Casagrande.

No exemplo da figura (4.5.2.2), que é comparado com o exemplo (4.5.1.1), observa-se que o esquema com malha fixa fornece uma linha freática pouco acima da do esquema com malha ajustável, o que é de se esperar visto que nesta segunda solução não se leva em conta a contribuição da zona não saturada.

As características dos exemplos das figuras (4.5.2.1) e (4.5.2.2) são apresentadas na tabela (4.5.2.1).

Tabela 4.5.2.1) Características das barragens das figuras (4.5.2.1) e (4.5.2.2)

figuras		(4.5.2.1)	(4.5.2.2)
propriedades	$K_{x_1} = 0,01 \text{ m/dia}$	todos os elementos	todos os elementos
condições de contorno	$\bar{\phi} = 7 \text{ m}$	em \overline{AB}	em \overline{AB}
	$\bar{\phi} = 0 \text{ m}$	em \overline{EF}	-
	$\phi = 1 \text{ m}$	-	em \overline{FG}
	$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$	em $\overline{AF}, \overline{BCDE}$	em $\overline{AG}, \overline{BCDE}$
	$\phi = x_2$	-	em \overline{EF}

Para todos os exemplos seguintes é utilizada a mesma malha de elementos finitos apresentada na figura (4.5.2.3), mas com propriedades diferentes para cada exemplo, conforme as tabelas correspondentes.

Analisando primeiramente barragens com dreno de pé

horizontal, apresenta-se um caso de barragem heterogênea, conforme as características listadas na tabela (4.5.2.2).

As figuras (4.5.2.4) e (4.5.2.5) dão a posição da linha freática para a barragem homogênea. Na figura (4.5.2.4) estão plotados os resultados obtidos com os cinco tipos de representação da relação $K \times \psi$, conforme as considerações feitas no item (3.5.1) do capítulo 3, e na figura (4.5.2.5) é feita a comparação com os resultados obtidos por MASLIA⁴⁴, mostrando boa aproximação entre as duas soluções.

Para a barragem heterogênea, com dois tipos de solo, apresentam-se na figura (4.5.2.6), a título ilustrativo, o resultado não convergente obtido com o esquema de Newton Raphson e na figura (4.5.2.7) o resultado convergente obtido com o esquema de Newton Raphson Modificado (vide item 4.4.3 do capítulo 4). A figura (4.5.2.8), para melhor clareza, mostra apenas a posição da linha freática na última iteração da figura (4.5.2.7), comparada com a solução obtida por MASLIA. Nota-se uma diferença entre as duas soluções na região central da barragem. Isto talvez se deva ao fato de MASLIA considerar o coeficiente de condutibilidade hidráulica como constante dentro do elemento finito ao invés de calculá-lo nos pontos de integração como é efetuado neste trabalho.

Para ilustrar a versatilidade do presente esquema de malha fixa no trato de barragens heterogêneas, a figura (4.5.2.9) apresenta a posição da linha freática em barragem heterogênea com quatro tipos de solo, conforme propriedades descritas na tabela (4.5.2.2).

A fim de analisar a convergência destes exemplos, todos foram calculados com 7 iterações sendo encontrados os seguintes valores para a Norma Euclidiana: $\varepsilon_1 = 0,0074$, $\varepsilon_2 = 0,0168$ e $\varepsilon_3 = 0,0142$ correspondentes respectivamente às figuras (4.5.2.5), (4.5.2.8) e (4.5.2.9).

Tabela 4.5.2.2) Características dos exemplos
das figuras (4.5.2.4) a (4.5.2.9)

figuras		(4.5.2.4) (4.5.2.5)	(4.5.2.6) (4.5.2.7) (4.5.2.8)	(4.5.2.9)
propriedades	$K_{x_i} = 0,01 \text{ m/dia}$	todos os elementos	em \overline{DEIJ}	em \overline{DEMN} , \overline{FGJL}
	$K_{x_i} = 0,5 \text{ m/dia}$	-	em $\overline{ACDJ}, \overline{EFGI}$	em \overline{GHIJ}
	$K_{x_i} = 5,0 \text{ m/dia}$	-	-	em \overline{EFLM}
	$K_{x_i} = 50 \text{ m/dia}$	-	-	em \overline{ACDN}
cond. de contorno	$\bar{\phi} = 100 \text{ m}$	em \overline{AB}	em \overline{AB}	em \overline{AB}
	$\bar{\phi} = 0 \text{ m}$	em \overline{EF}	em \overline{GH}	em \overline{HI}
	$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$	$\overline{BCDE}, \overline{AF}$	$\overline{BCDEFG}, \overline{AJIH}$	$\overline{BCDEFGH},$ \overline{IJLMNA}

Para analisar o caso de barragem com ocorrência de face de percolação, as figuras (4.5.2.10) e (4.5.2.11) apresentam o estudo de barragem homogênea e heterogênea respectivamente, cada qual com quatro composições diferentes de condição de contorno, isto é, $(\bar{\phi}_1=100, \bar{\phi}_2=40)$, $(\bar{\phi}_1=100, \bar{\phi}_2=30)$, $(\bar{\phi}_1=80, \bar{\phi}_2=40)$ e $(\bar{\phi}_1=80, \bar{\phi}_2=30)$ onde $\bar{\phi}_1$ representa o nível a montante e $\bar{\phi}_2$ representa o nível a jusante da barragem. Observando-se os vários resultados conclue-se que o nível a montante é o principal determinante da posição da linha freática no caso de barragem homogênea, visto que a variação do nível a jusante, mantido constante o nível a montante, pouco afeta a linha freática. Já na barragem heterogênea ambos os níveis são importantes para a linha freática. Novamente observam-se diferenças entre os resultados deste trabalho e os de MASLIA, na região central da barragem A tabela (4.5.2.3) fornece as características dos exemplos das figuras

Tabela 4.5.2.3) Características dos exemplos das figuras (4.5.2.10) e (4.5.2.11)

		figuras				
		(4.5.2.10)	(4.5.2.11)			
propriedades	I	$K_{x_1} = 0,01 \text{ m/dia}$	todos os elem.	$\overline{ABCDEM}, \overline{FGHIJL}$		
	II					
	III				-	em \overline{EFLM}
	IV					
cond. de contorno	I	$\bar{\phi} = 100 \text{ m}$	em \overline{AC}	em \overline{AC}		
		$\bar{\phi} = 40 \text{ m}$	em \overline{FH}	em \overline{HJ}		
		$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$	em $\overline{CDEF}, \overline{AH}$	$\overline{CDEFGH}, \overline{AMLJ}$		
		$\frac{\partial \phi}{\partial n}$				
	II	$\bar{\phi} = 100 \text{ m}$	em \overline{AC}	em \overline{AC}		
		$\bar{\phi} = 30 \text{ m}$	em \overline{GH}	em \overline{IJ}		
		$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$	em $\overline{CDEFG}, \overline{AH}$	$\overline{CDEFGHI}, \overline{AMLJ}$		
		$\frac{\partial \phi}{\partial n}$				
	III	$\bar{\phi} = 80 \text{ m}$	em \overline{AB}	em \overline{AB}		
		$\bar{\phi} = 40 \text{ m}$	em \overline{FH}	em \overline{HJ}		
		$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$	em $\overline{BCDEF}, \overline{AH}$	$\overline{BCDEFGH}, \overline{AMLJ}$		
		$\frac{\partial \phi}{\partial n}$				
	IV	$\bar{\phi} = 80 \text{ m}$	em \overline{AB}	em \overline{AB}		
		$\bar{\phi} = 30 \text{ m}$	em \overline{GH}	em \overline{IJ}		
		$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$	em $\overline{BCDEFG}, \overline{AH}$	$\overline{BCDEFGHI}, \overline{AMLJ}$		
		$\frac{\partial \phi}{\partial n}$				

(4.5.2.10) e (4.5.2.11). Todos os exemplos foram calculados com 7 iterações para poder comparar os valores da Norma Euclidiana que estão apresentados nas próprias figuras.

O caso de barragem com dreno de pé inclinado é apresentado nas figuras (4.5.2.12) e (4.5.2.13) que ilustram a solução para barragem homogênea e para barragem heterogênea respectivamente. A tabela (4.5.2.4) fornece as características de ambas as figuras. Os resultados são comparados com os obtidos por MASLIA e ARAL (ref. 45), notando-se boa aproximação no caso da barragem homogênea e uma diferença na região central, no caso da barragem heterogênea. Os valores da Norma Euclidiana, para 7 iterações, são $\varepsilon = 0,0053$ e $\varepsilon = 0,0142$ respectivamente.

Tabela 4.5.2.4) Características dos exemplos das figuras (4.5.2.12) e (4.5.2.13)

figuras		(4.5.2.12)	(4.5.2.13)
propriedades	$K_{x_i} = 0,01$ m/dia	em \overline{ABCDEH}	em \overline{MLED}
	$K_{x_i} = 0,5$ m/dia	-	em $\overline{ABCDM}, \overline{EFGJL}$
	$K_{x_i} = 5,0$ m/dia	em \overline{EFGH}	em \overline{GHIJ}
condições de contorno	$\bar{\phi} = 100$ m	em \overline{AB}	em \overline{AB}
	$\bar{\phi} = 0$ m	em \overline{FG}	em \overline{HI}
	$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$	em $\overline{BCDEF},$	em $\overline{BCDEFGH},$
		\overline{AHG}	\overline{AMLJI}

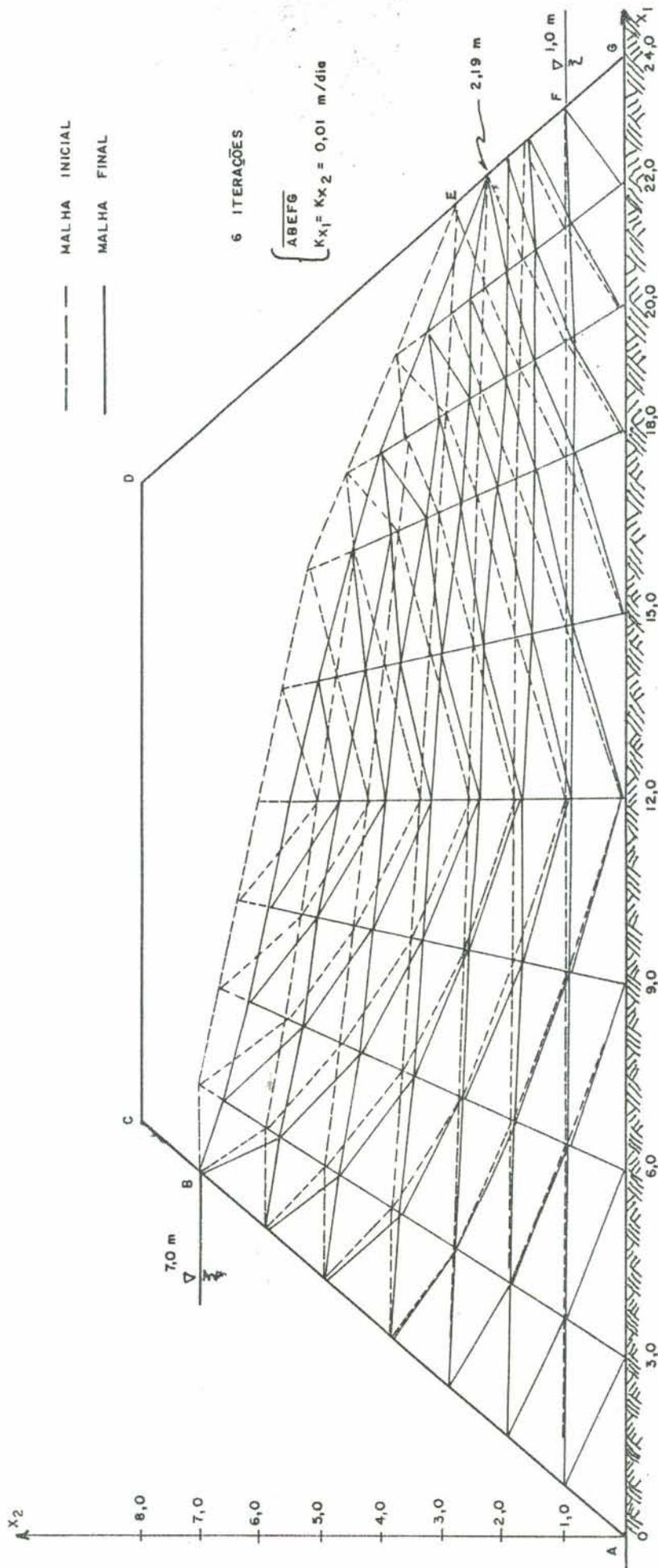


FIGURA 4.3.1.1) BARRAGEM HOMOGÊNEA, COM FACE DE PERCOLAÇÃO (MALHA AJUSTÁVEL)

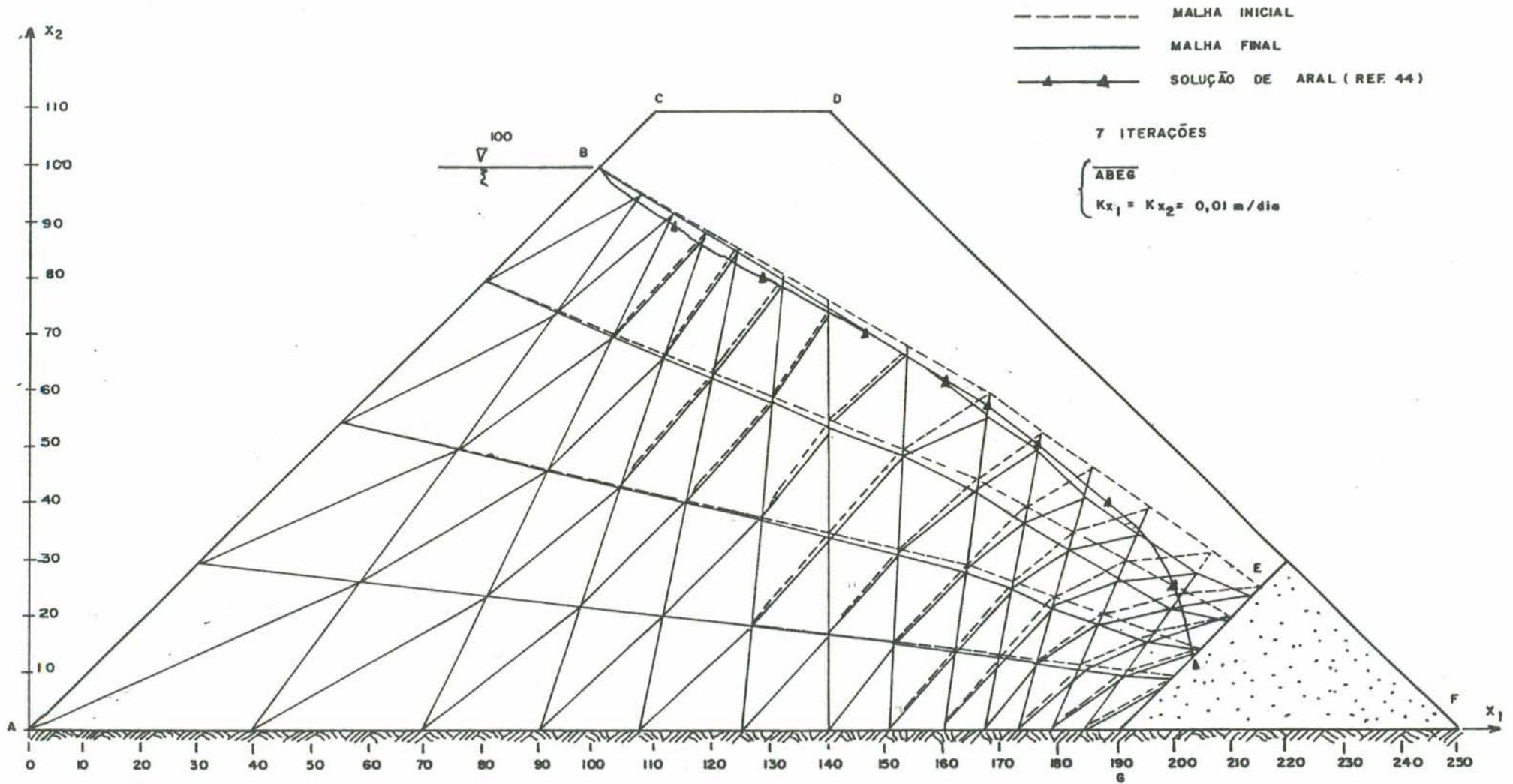


FIGURA 4.5.1.2) BARRAGEM HOMOGÊNEA, COM DRENO DE PÉ (INCLINADO).

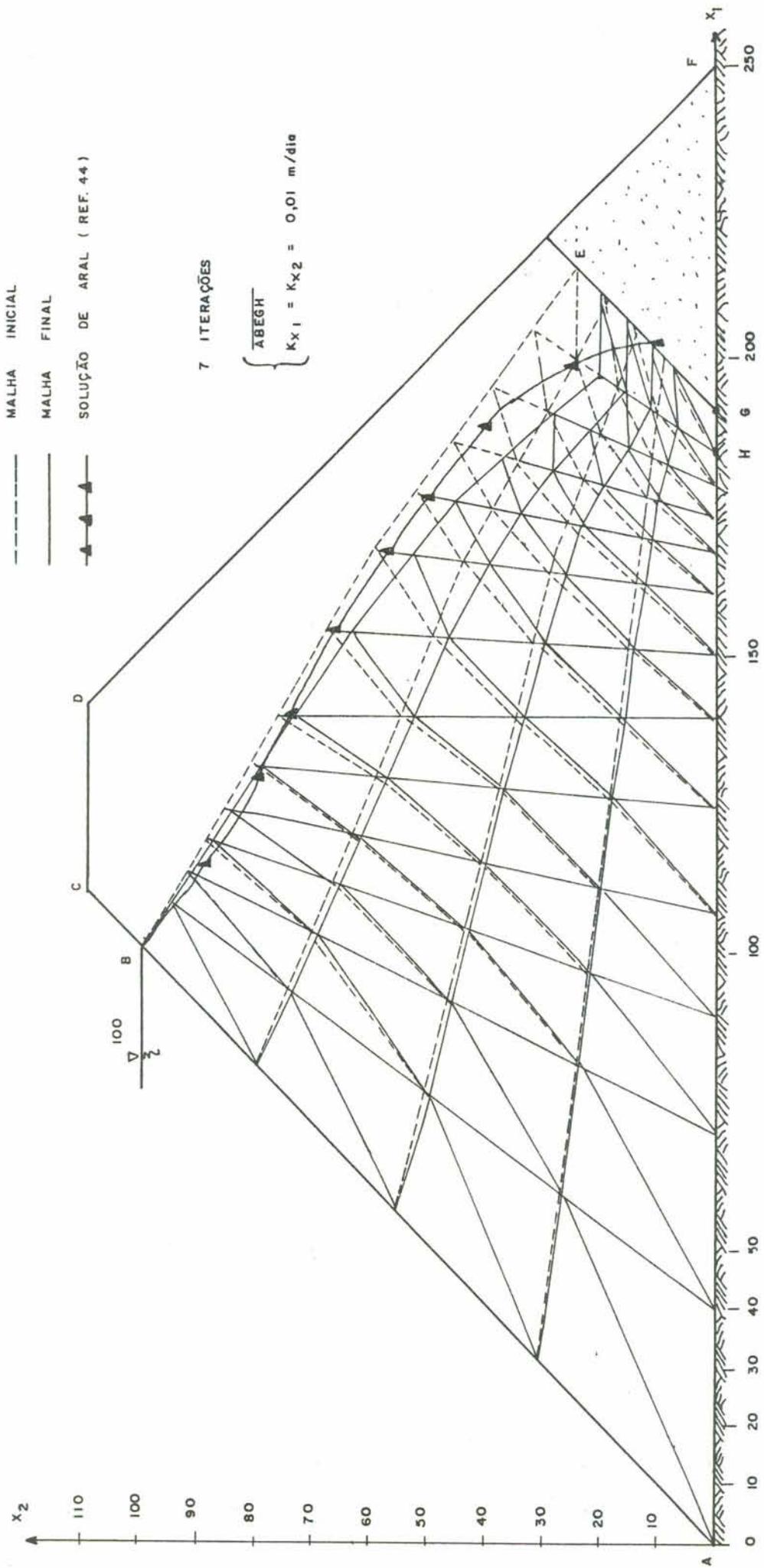


FIGURA 4.5.1.3) BARRAGEM HOMOGÊNEA, COM DRENO DE PÉ (INCLINADO).

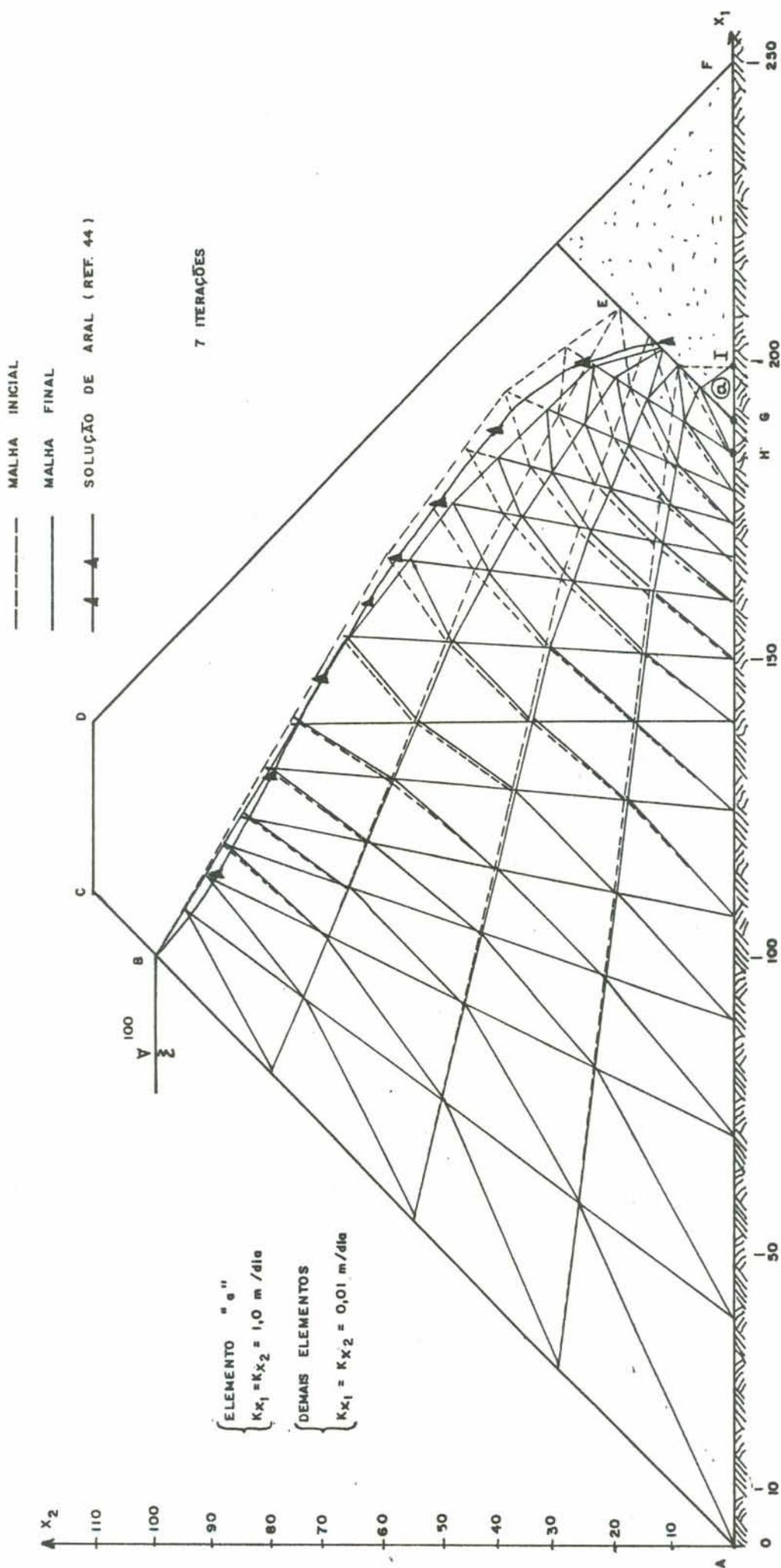


FIGURA 4.5.1.4) BARRAGEM HOMOGÊNEA, COM DRENO DE PÉ (INCLINADO).

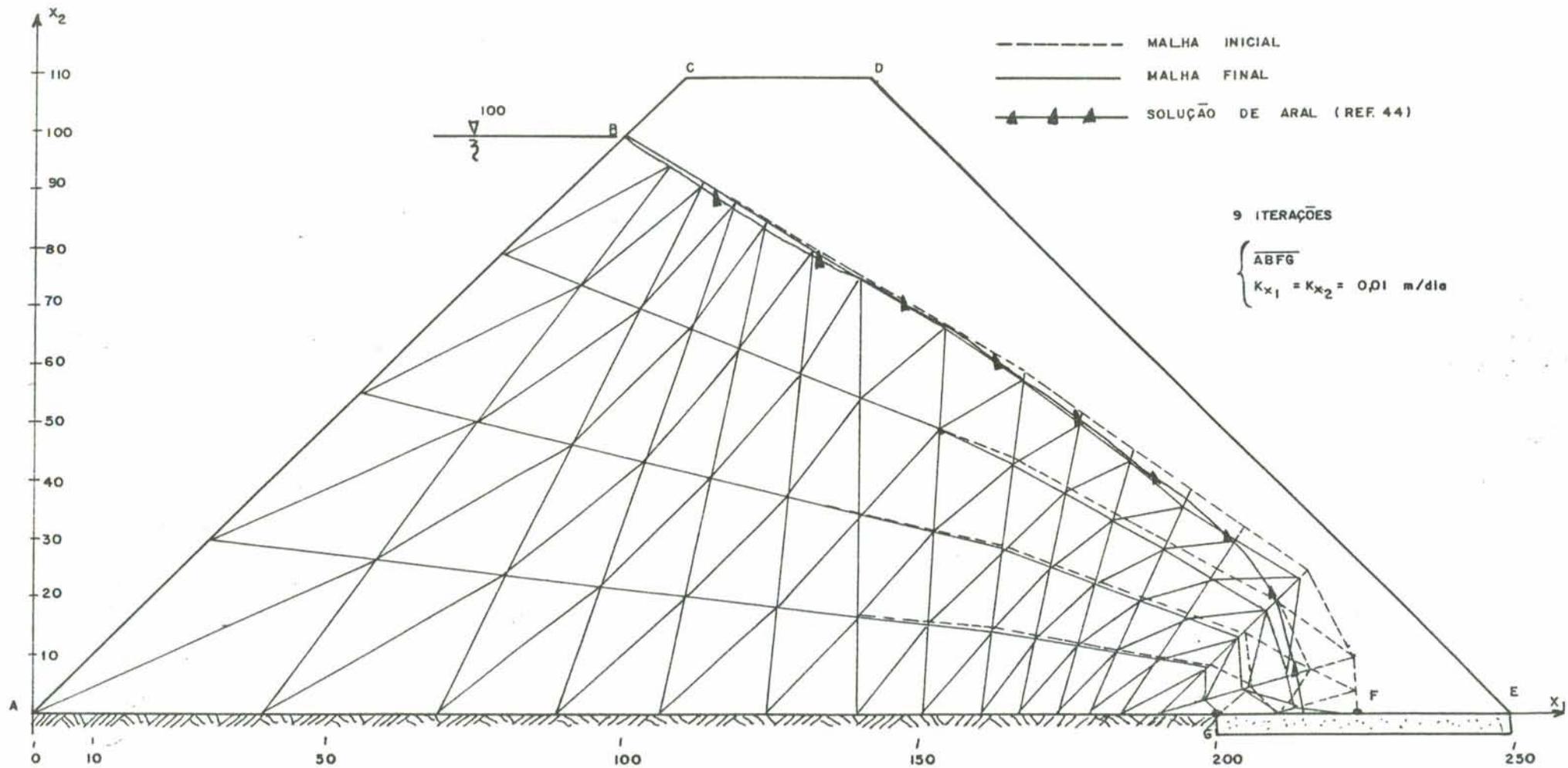


FIGURA 4.5.15) BARRAGEM HOMOGÊNEA, COM DRENO DE PÉ (HORIZONTAL).

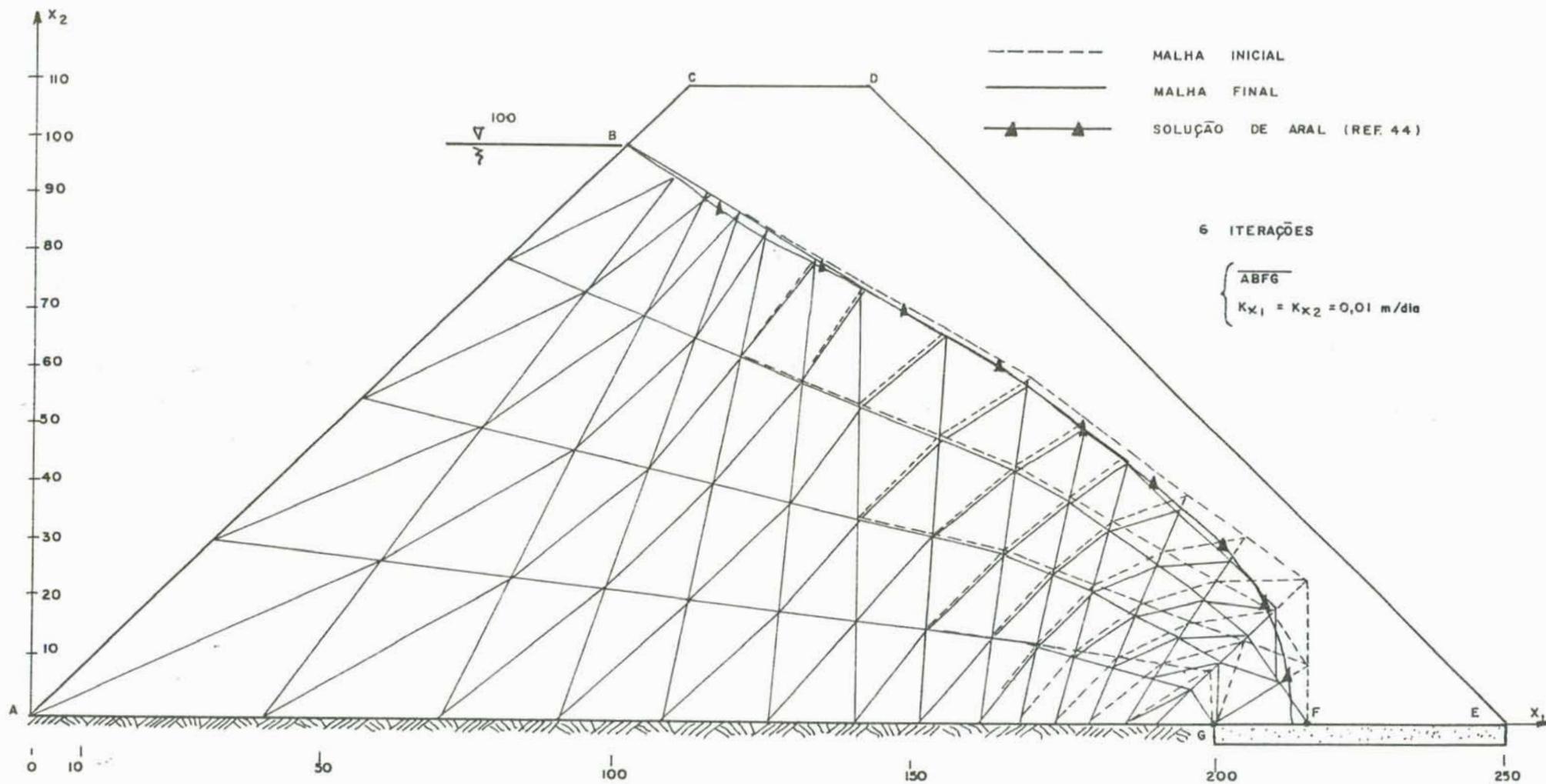


FIGURA 4.5.1.6) BARRAGEM HOMOGÊNEA, COM DRENO DE PÉ (HORIZONTAL)

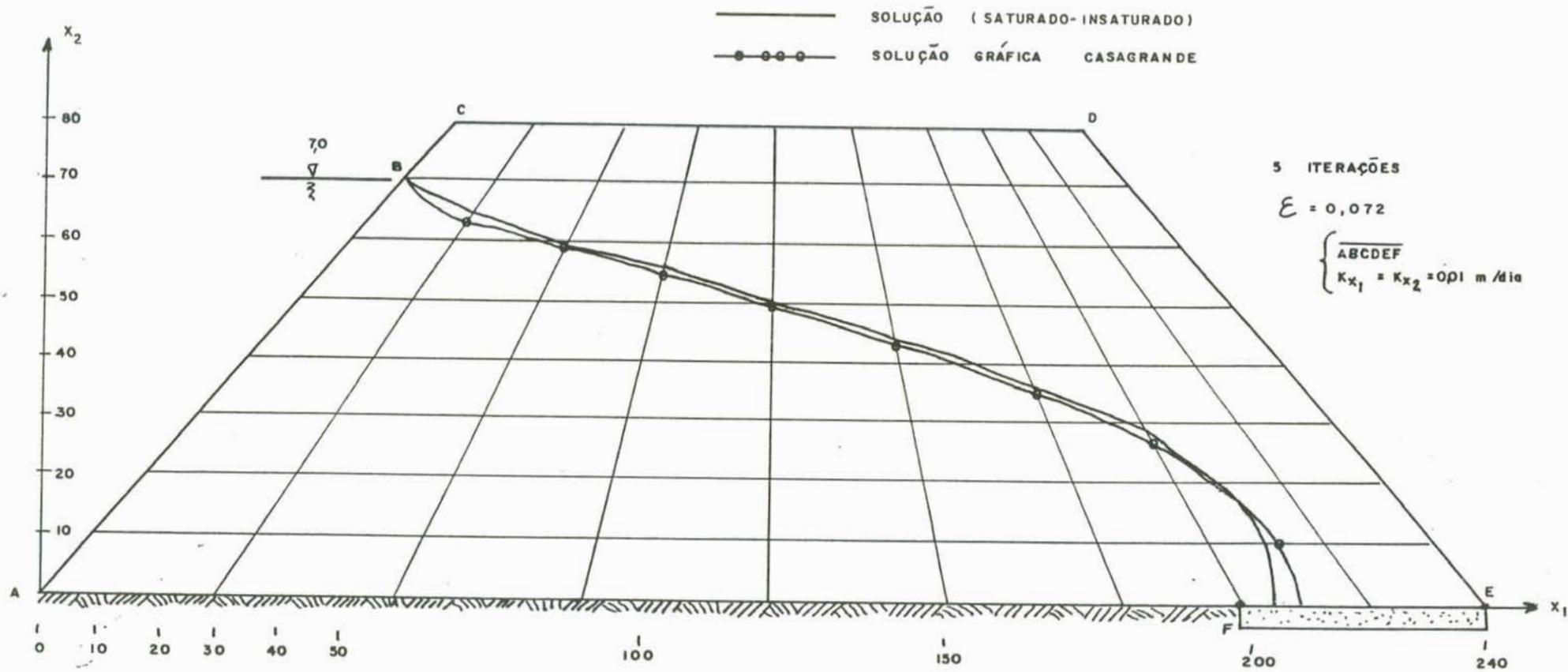


FIGURA 4.5.2.1) BARRAGEM HOMOGÊNEA, COM DRENO DE PÉ (HORIZONTAL).
 (SOLUÇÃO COM MALHA FIXA).

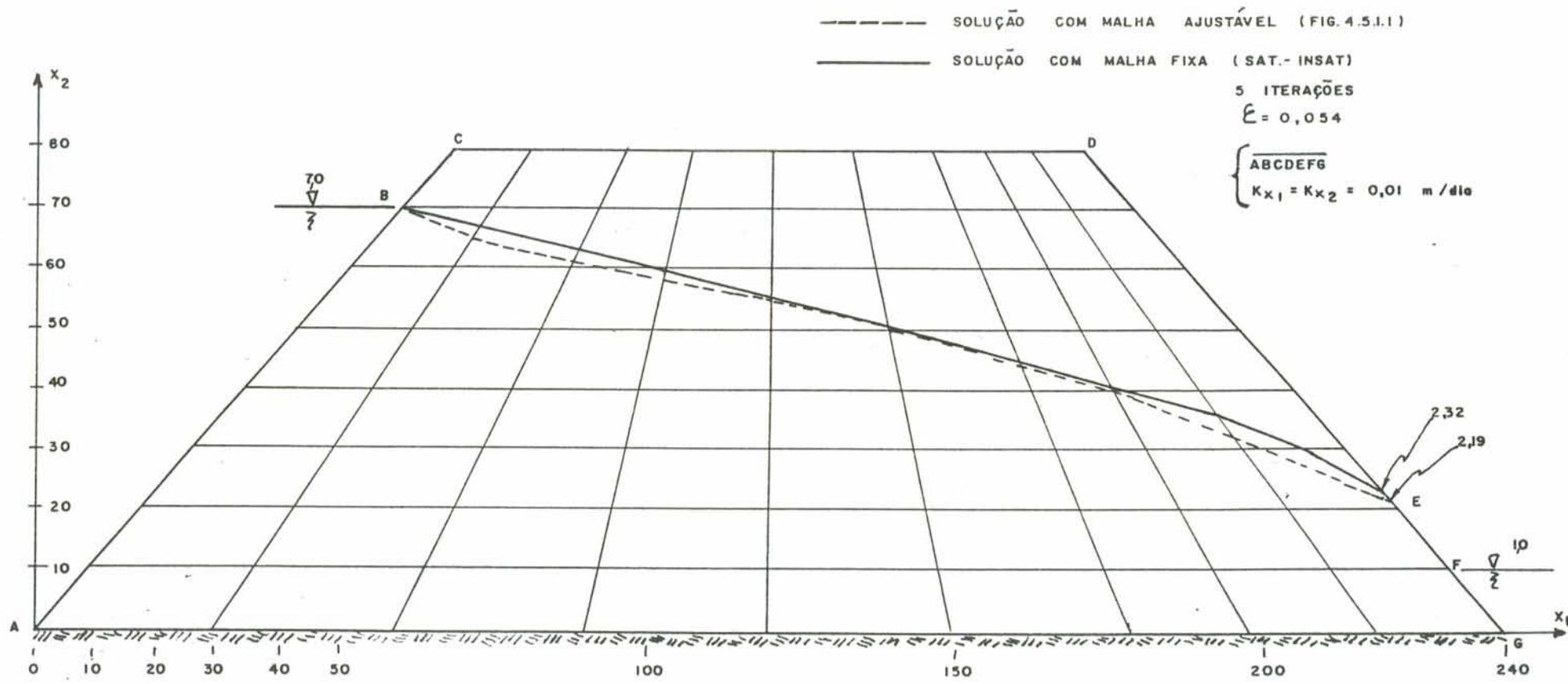


FIGURA 4.5.2.2) BARRAGEM HOMOGÊNEA COM FACE DE PERCOLAÇÃO

(SOLUÇÃO COM MALHA FIXA).

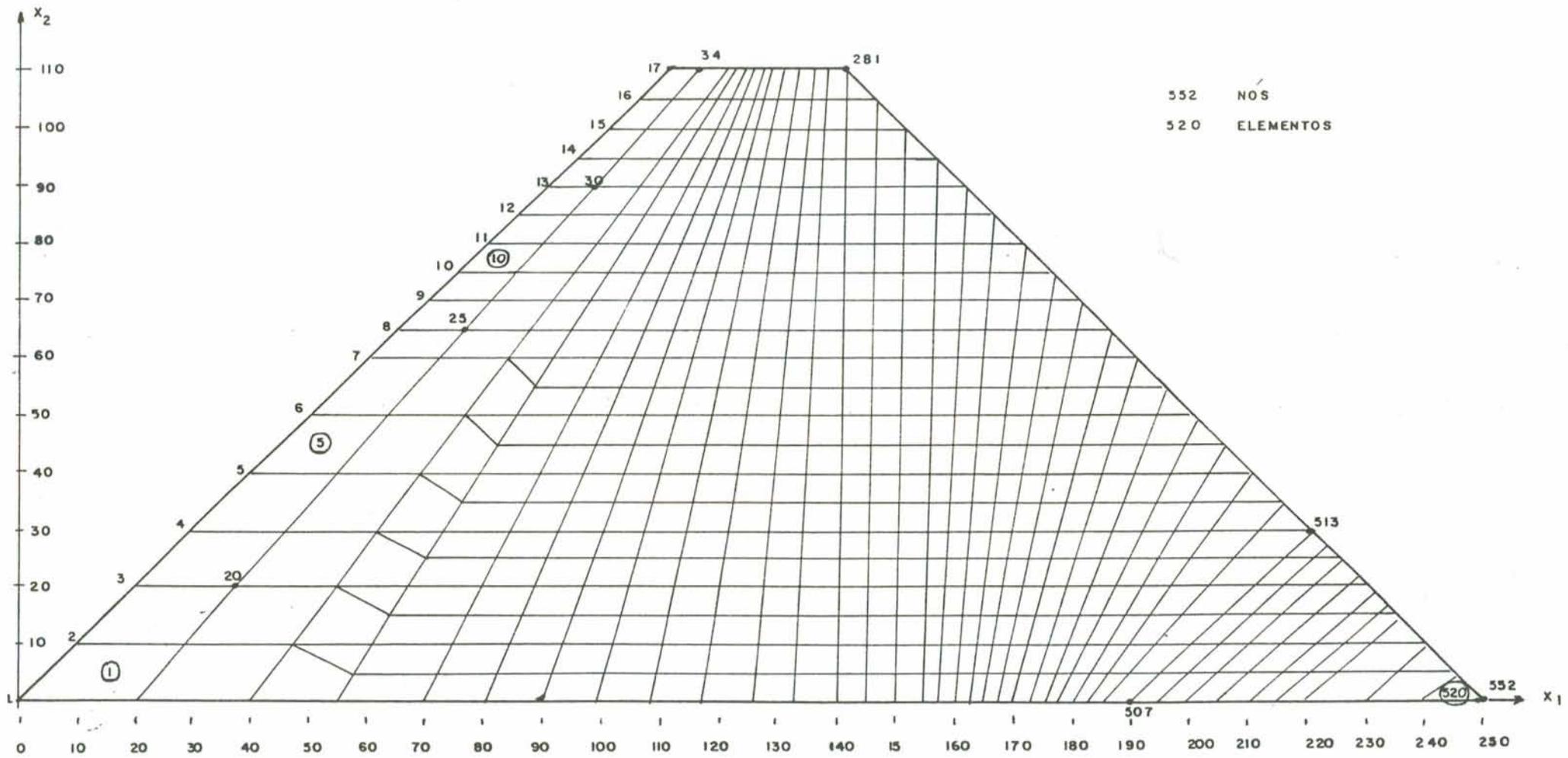


FIGURA 4.5.2.3) MALHA DE ELEMENTOS FINITOS.

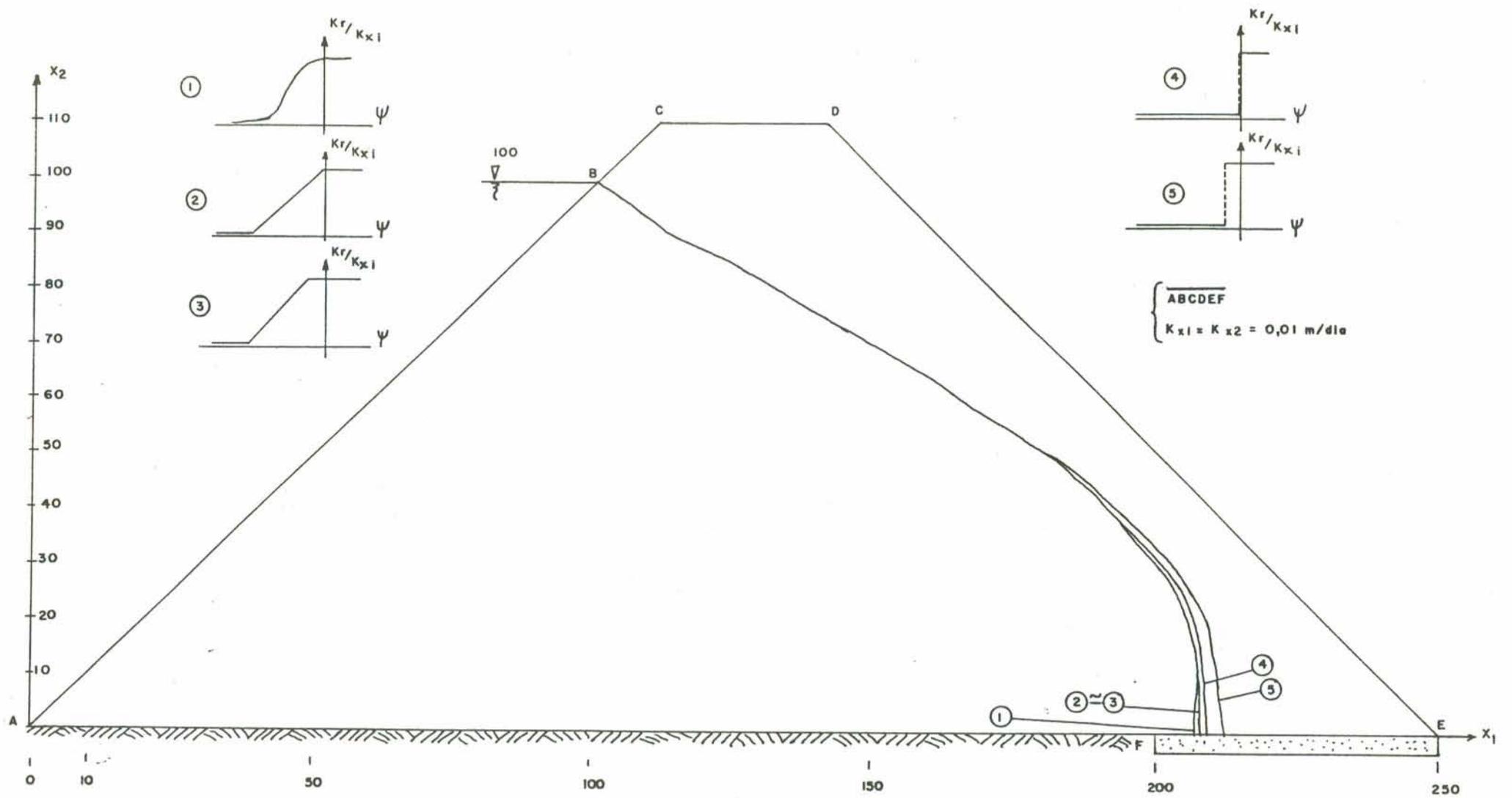


FIGURA 4.3.2.4) COMPARAÇÃO DE RESULTADOS OBTIDOS COM CINCO ESQUEMAS DE REPRESENTAÇÃO DA RELAÇÃO ENTRE K_r E ψ .

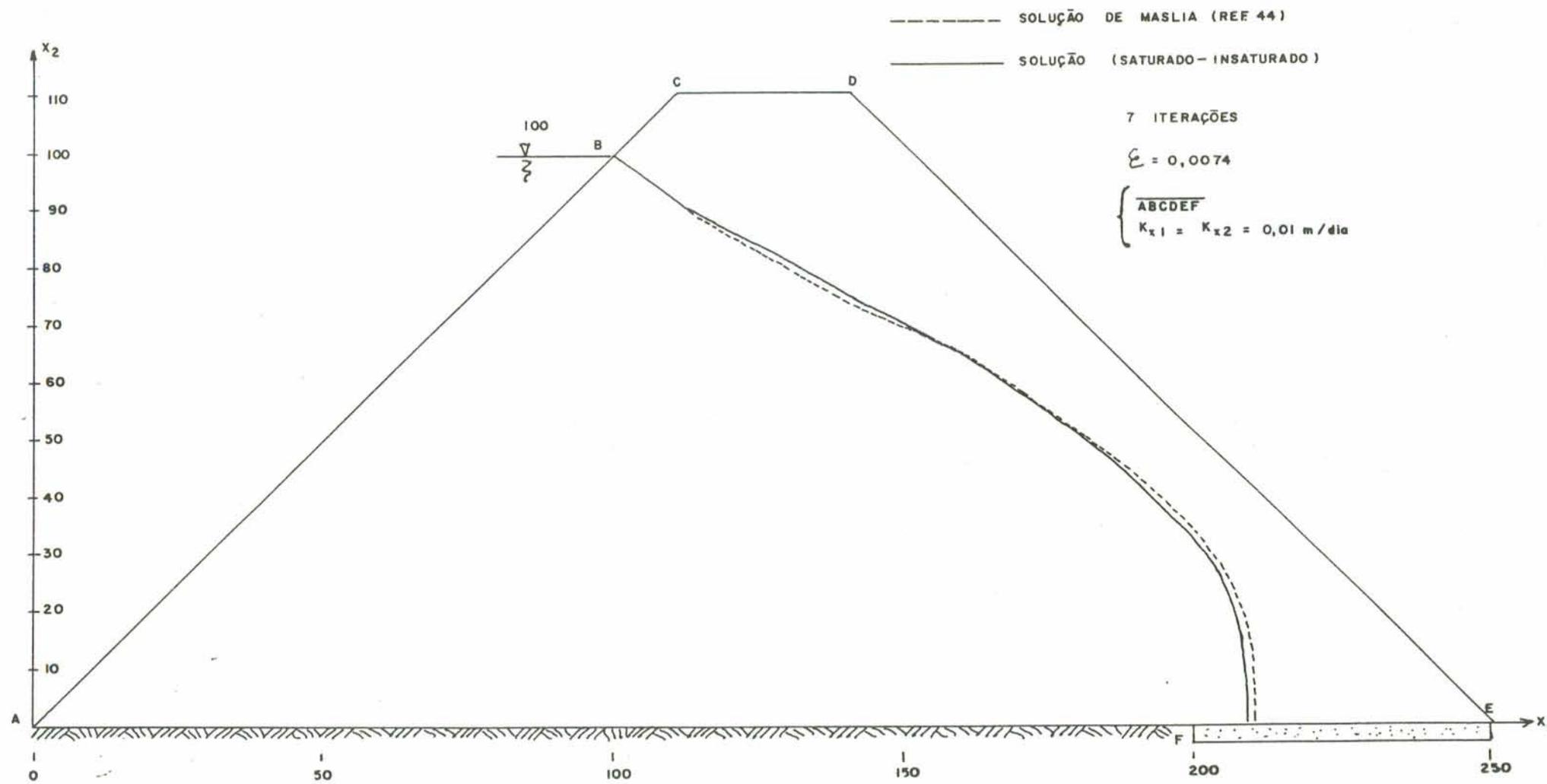


FIGURA 4.5.2.5) BARRAGEM HOMOGÊNEA, COM DRENO DE PÉ (HORIZONTAL)
 (SOLUÇÃO COM MALHA FIXA)

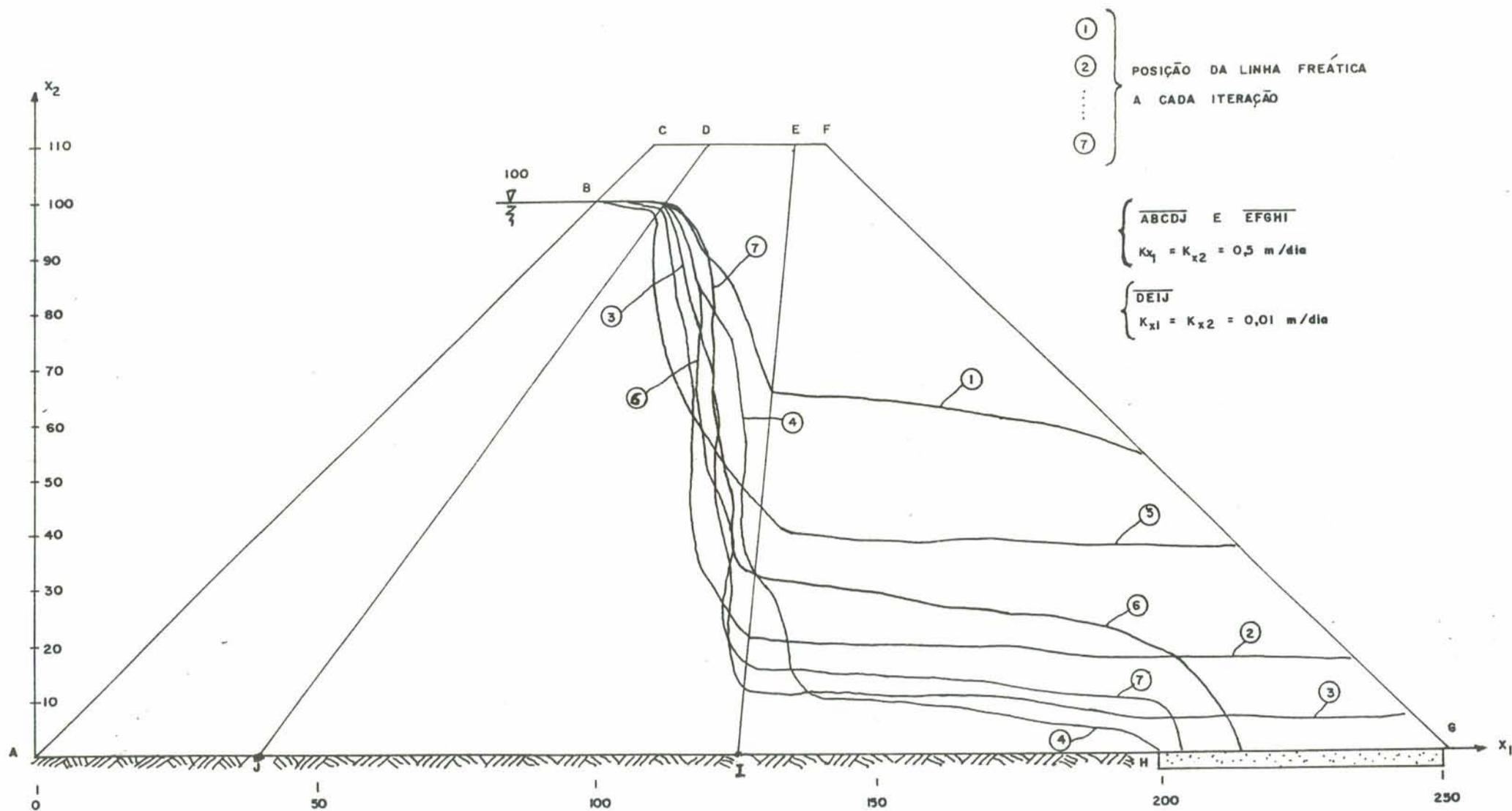


FIGURA 4.5.2.6) BARRAGEM HETEROGÊNEA: POSIÇÃO DA LINHA FREÁTICA A CADA ITERAÇÃO COM O MÉTODO DE NEWTON RAPHSON.

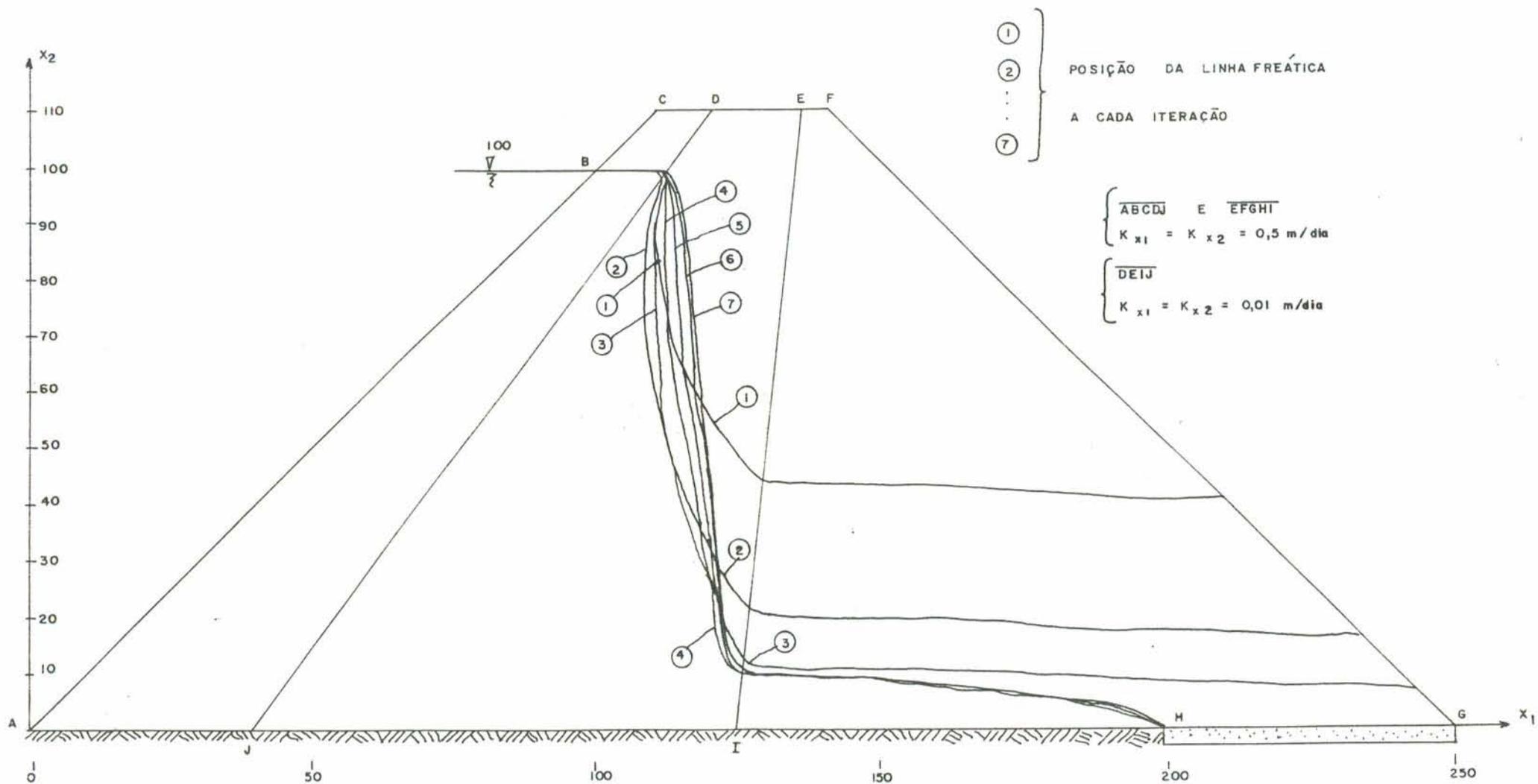


FIGURA 4.5.2.7) BARRAGEM HETEROGÊNEA - POSIÇÃO DA LINHA FREÁTICA A CADA ITERAÇÃO COM O MÉTODO DE NEWTON RAPHSON MODIFICADO

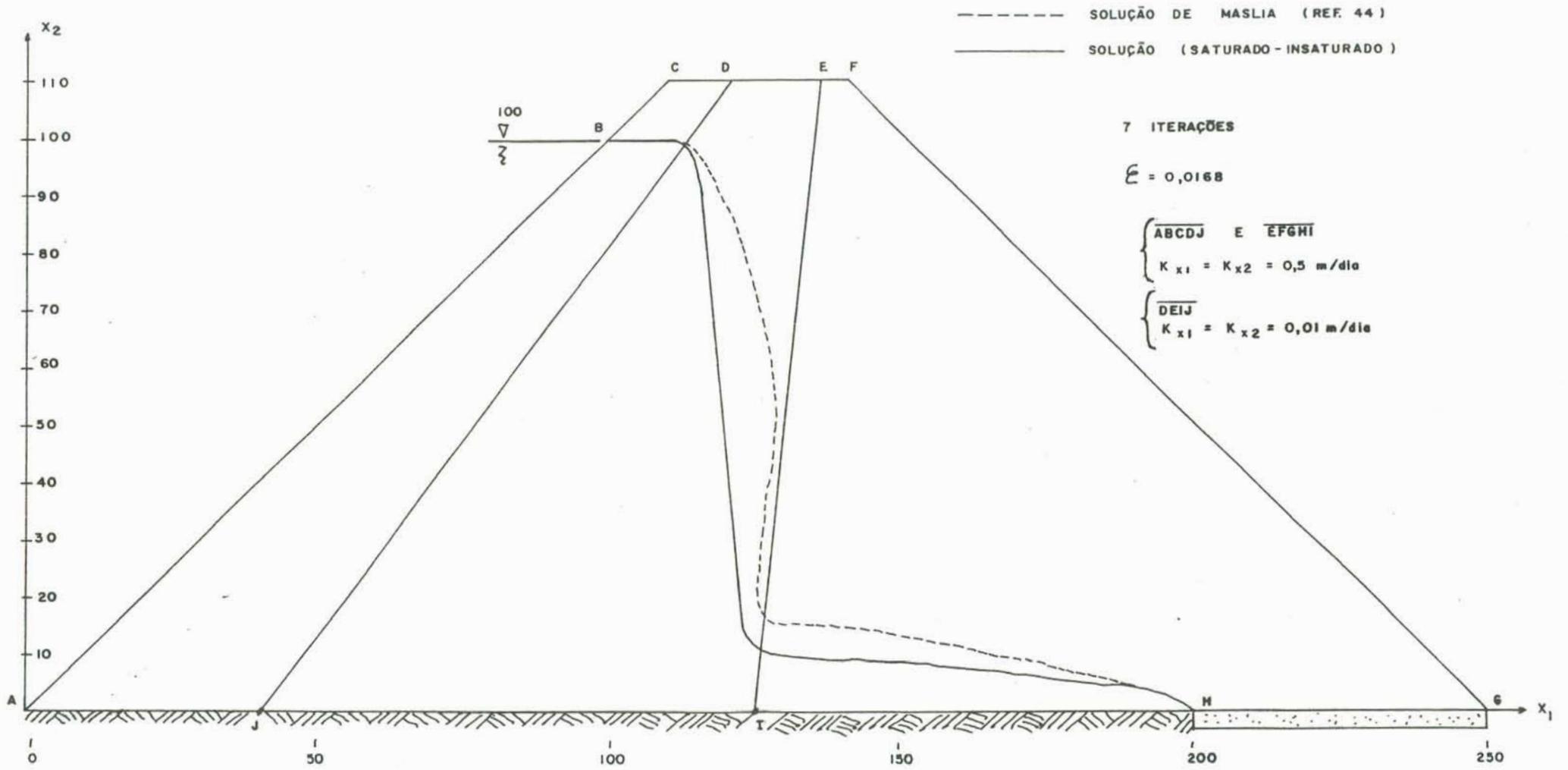


FIGURA 4.5.2.8) BARRAGEM HETEROGÊNEA, COM DRENO DE PÉ (HORIZONTAL)

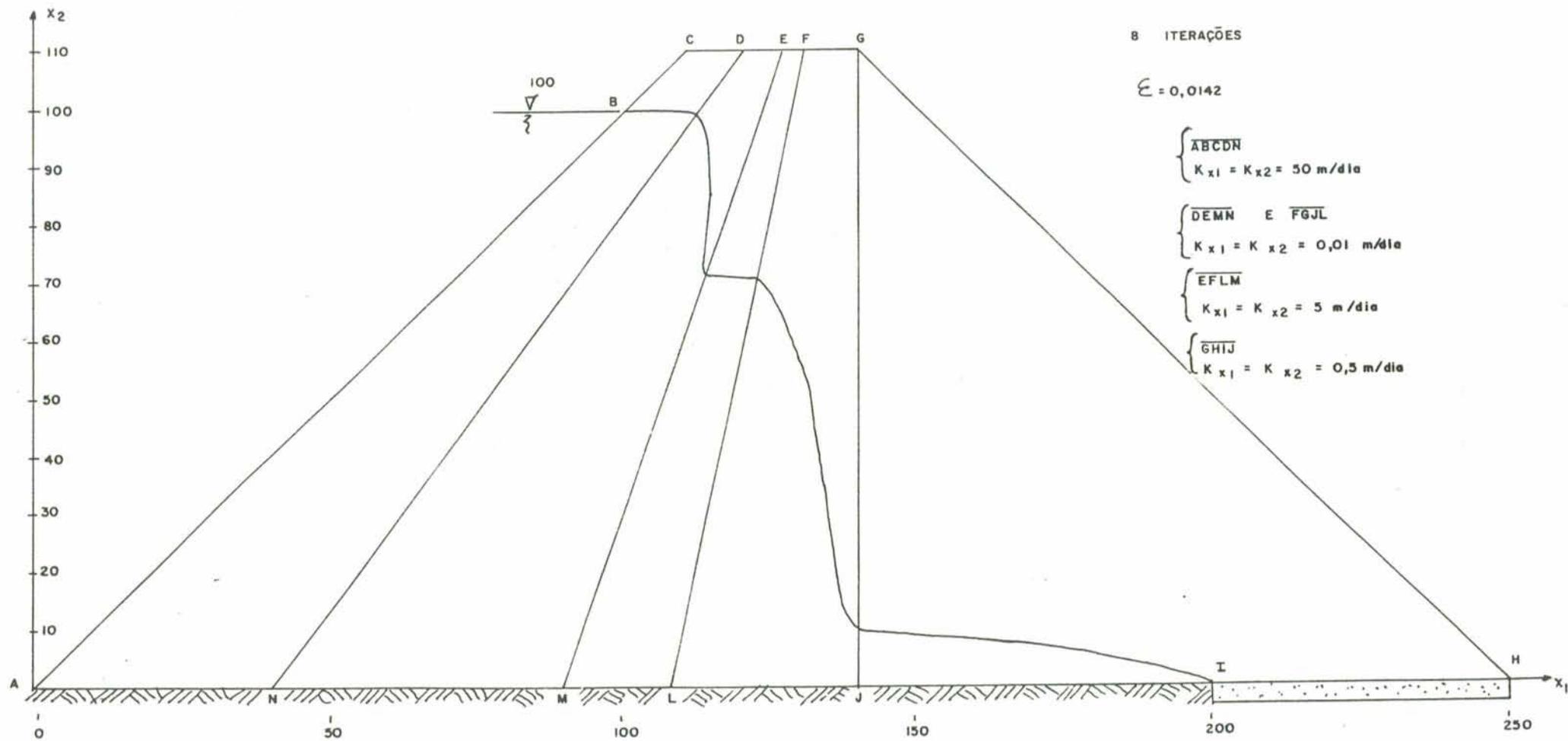


FIGURA 4.5.2.9) BARRAGEM HETEROGÊNEA COM DRENO DE PÉ (HORIZONTAL).

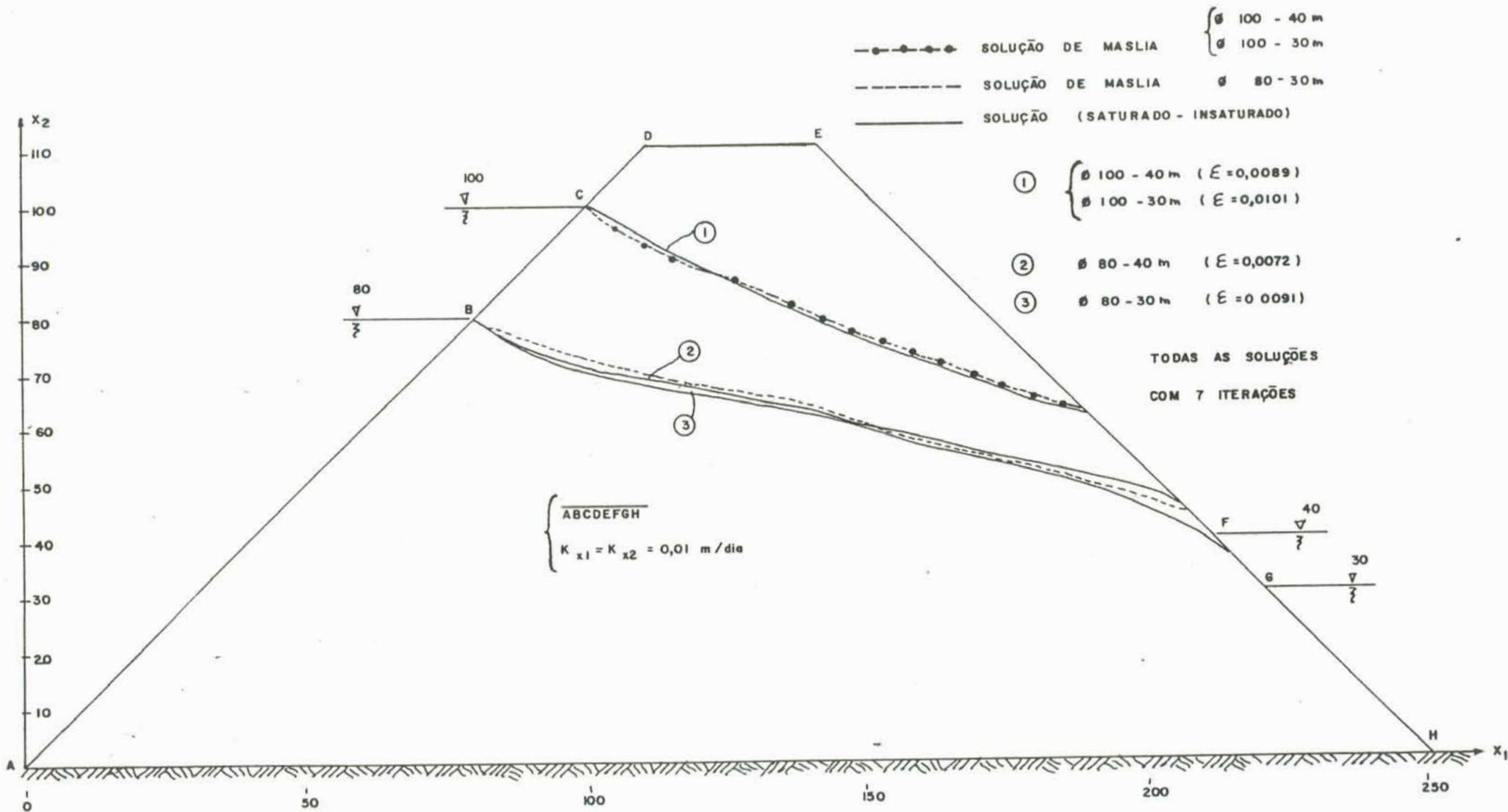


FIGURA 4.5.2.JO) BARRAGEM HOMOGÊNEA, COM FACE DE PERCOLAÇÃO - COMPARAÇÃO DA POSIÇÃO DA LINHA FREÁTICA PARA DIFERENTES NÍVEIS DE RESERVATÓRIO A MONTANTE E A JUSANTE.

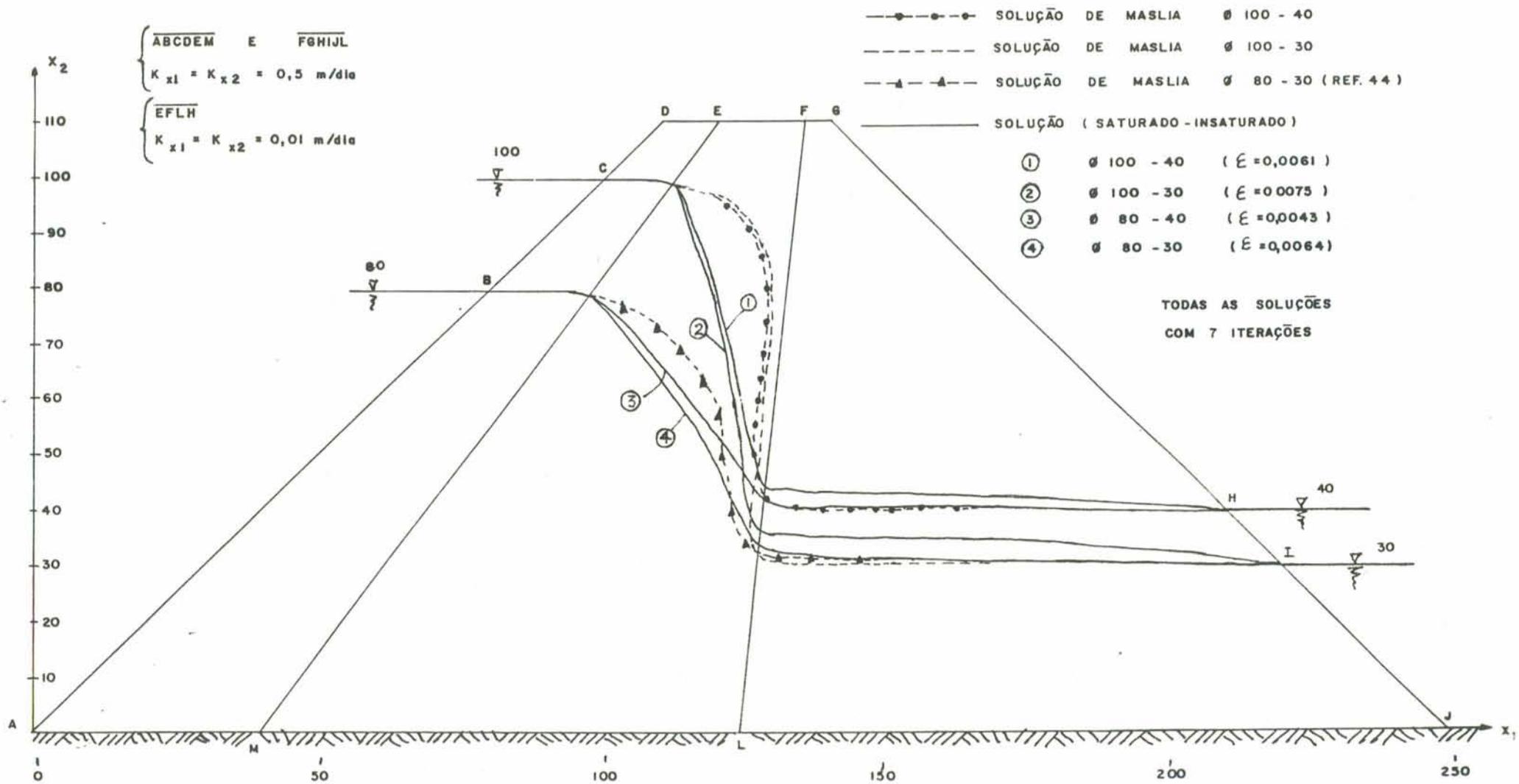


FIGURA 4.5.2.11) BARRAGEM HETEROGÊNEA, COM FACE DE PERCOLAÇÃO - COMPARAÇÃO DA POSIÇÃO DA LINHA FREÁTICA PARA DIFERENTES NÍVEIS DE RESERVATÓRIO A MONTANTE E A JUSANTE.

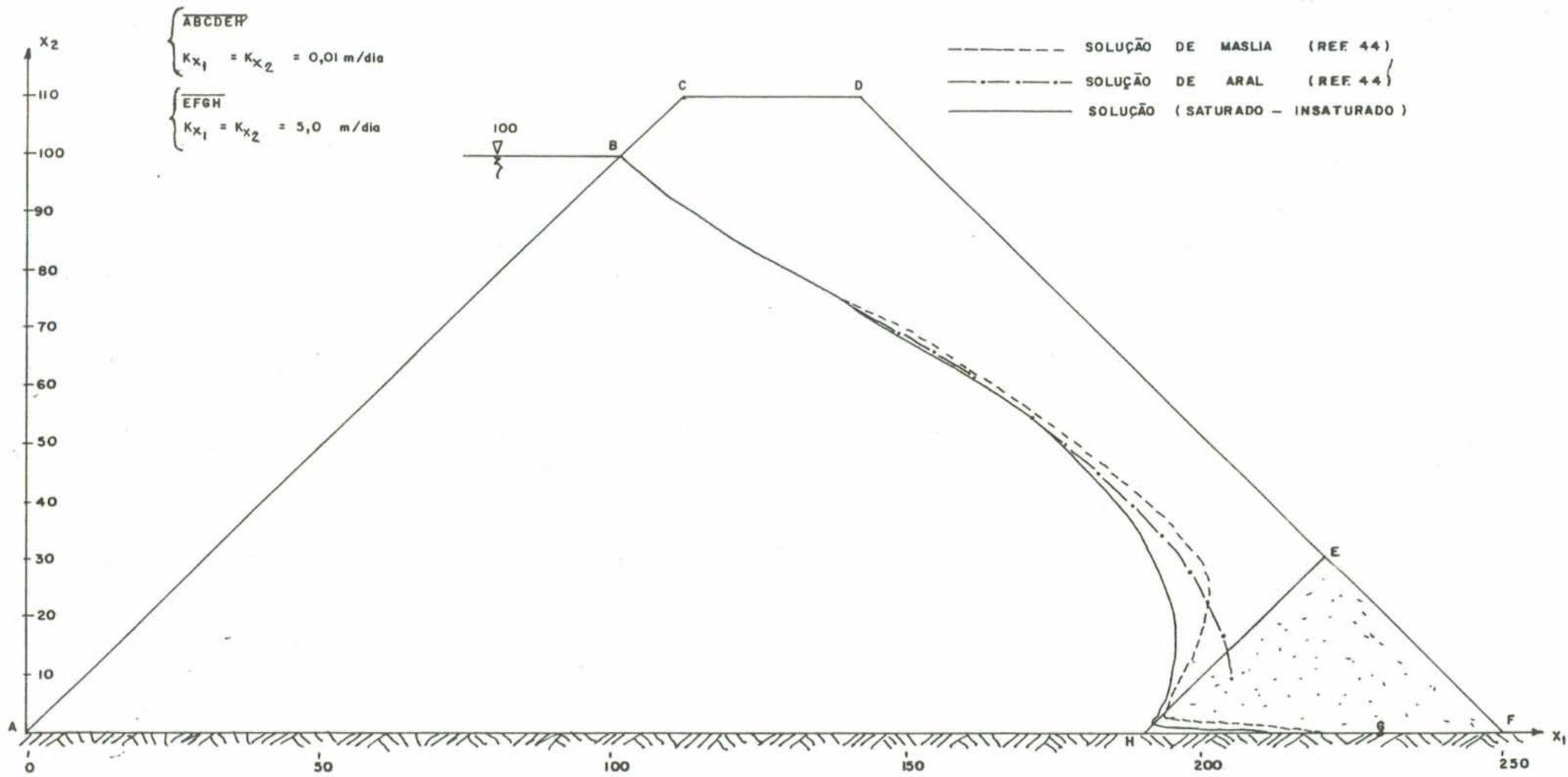


FIGURA 4.5.2.12) BARRAGEM HOMOGÊNEA, COM DRENO DE PÉ (INCLINADO).

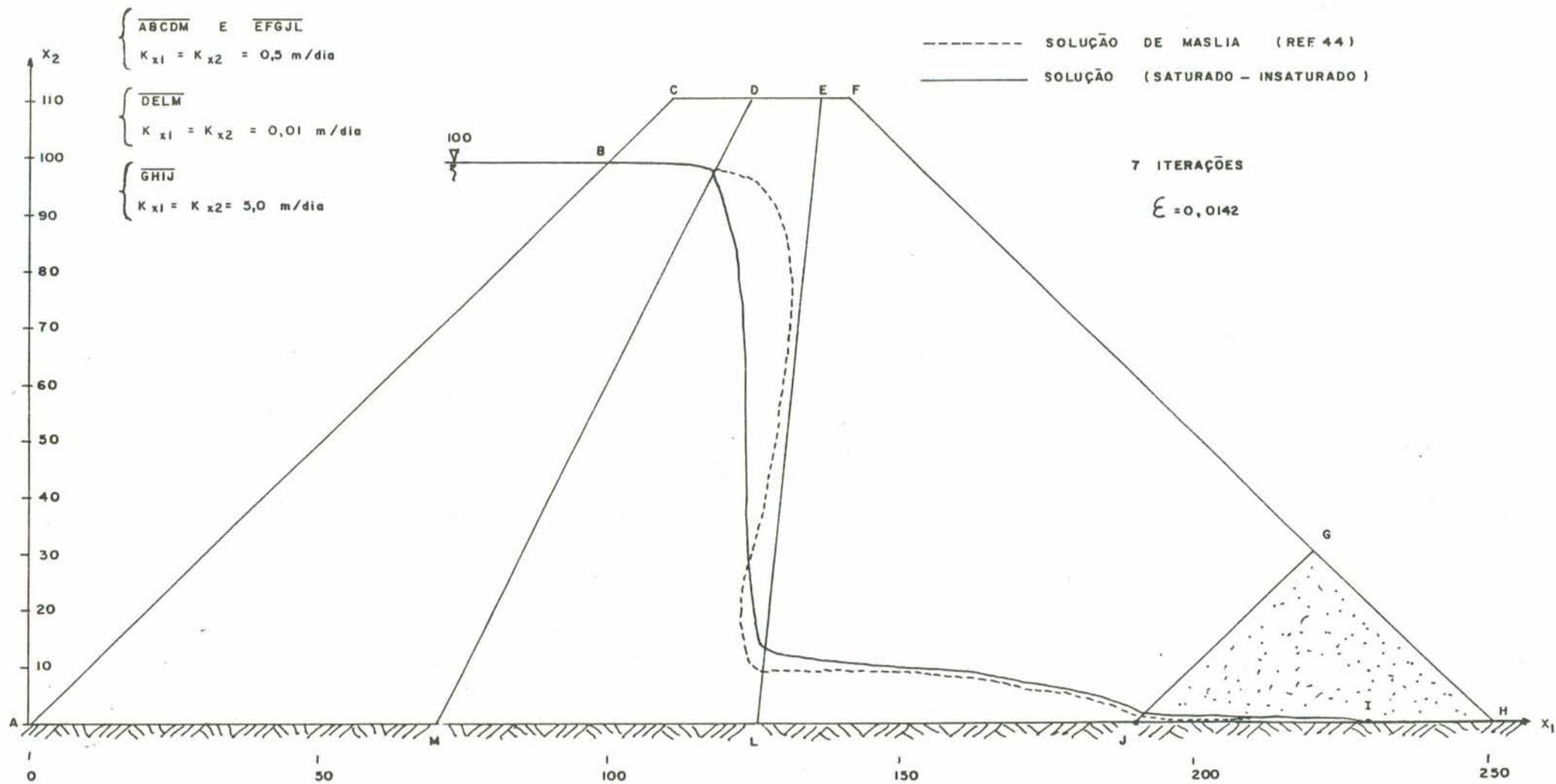


FIGURA 4.5.2.13) BARRAGEM HETEROGÊNEA, COM DRENO DE PÉ (INCLINADO).

5) FLUXO EM REGIME TRANSIENTE

5.1) INTRODUÇÃO

Este capítulo apresenta o estudo de fluxo em meios porosos em regime transiente, usando o Método dos Elementos Finitos. A abordagem é feita considerando todo o domínio saturado-não saturado, utilizando-se o esquema de malha de elementos finitos fixa. O esquema de integração no tempo é o trapezoidal e para a solução do sistema não linear de equações que traduz o problema em estudo é utilizado o método de Newton-Raphson.

5.2) FORMULAÇÃO EM ELEMENTOS FINITOS

A equação (3.3.28) rege o problema de fluxo em meios porosos, em regime transiente. Usando uma notação diferente e reduzindo o estudo a modelos bi-dimensionais, obtém-se:

$$L(\phi) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(K_{x_1} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(K_{x_2} \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right) - \left(\frac{\theta}{n} S_s + C_s \right) \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (5.2.1)$$

onde:

$$K_{x_i} = K_r K_{ii}$$

- K_r : condutibilidade hidráulica relativa ($0 \leq K_r \leq 1$)
 K_{ii} : componentes principais do tensor K_{ij} que representa a condutibilidade hidráulica na saturação

- θ : teor de unidade volumétrico
 n : porosidade
 S_s : coeficiente de armazenamento específico
 C_s : capacidade de unidade específica

Tendo em vista as vantagens apresentadas pelo esquema de malha fixa no estudo de fluxo em regime permanente, abordar-se-á o estudo de fluxo em regime transiente apenas com o método de malha fixa. A utilização do esquema de malha ajustável também seria possível apresentando, contudo, nitidas desvantagens frente ao presente esquema face aos problemas discutidos no capítulo 4.

Assim sendo, a equação (5.2.1) é válida para toda a região saturada-não saturada de área A e contorno S .

As condições de contorno para este problema de fluxo transiente são semelhantes às do problema permanente, incluindo agora a variável tempo. Desta forma, se S_1 é o segmento do contorno S ao longo do qual o potencial total ϕ é prescrito segundo uma função do tempo, a condição de contorno dita geométrica (essencial) é dada por:

$$\phi(x_1, x_2, t_0) = H(t_0) = \bar{\phi}(t_0) \quad \text{em } S_1 \quad (5.2.2)$$

onde $\bar{\phi}(t_0)$ expressa os valores do potencial total conhecidos no contorno ao longo do tempo.

Em S_2 , segmento de S ao longo do qual o fluxo normal é conhecido, a condição de contorno natural é dada por:

$$\frac{\partial \phi(x_1, x_2, t_0)}{\partial n} = \bar{q}(t_0) = 0 \quad \text{em } S_2 \quad (5.2.3)$$

ou, com outra notação:

$$K_{x_1} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \Big|_{x_1} + K_{x_2} \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \Big|_{x_2} = \bar{q}(t_0) \quad \text{em } S_2 \quad (5.2.4)$$

Toma-se $\bar{q}(t_0)=0$, a exemplo do problema de fluxo permanente, por não se considerar fontes nem sumidouros neste estudo.

Aplicando-se o método de Galerkin, analogamente ao que foi feito no capítulo 4 para fluxo permanente, obtém-se a seguinte expressão base para a aplicação do Método dos Elementos Finitos:

$$W(\phi) = \int_A \left[K_{x_1} \phi_{,x_1} \delta\phi_{,x_1} + K_{x_2} \phi_{,x_2} \delta\phi_{,x_2} + \left(\frac{\theta}{n} S_s + C_s \right) \phi_{,t} \delta\phi \right] dA = 0 \quad (5.2.5)$$

Utilizando-se o elemento finito isoparamétrico onde:

$$\phi^e = \sum_{i=1}^{n^e} N_i \phi_i^n \quad (5.2.6)$$

$$x_1^e = \sum_{i=1}^{n^e} N_i \left(x_1^n \right)_i \quad (5.2.7)$$

$$x_2^e = \sum_{i=1}^{n^e} N_i \left(x_2^n \right)_i \quad (5.2.8)$$

e descrevendo-se os seguintes coeficientes em termos das funções de forma:

$$K_{x_1}^e = \sum_{j=1}^{n^e} N_j \left[K_{x_1}^n \right]_j \quad (5.2.9)$$

$$\theta^e = \sum_{i=1}^{n^e} N_i \theta_i^n \quad (5.2.10)$$

$$C_s^e = \sum_{i=1}^{n^e} N_i \left(C_s^n \right)_i \quad (5.2.11)$$

chega-se à expressão abaixo, após levar (5.2.6), (5.2.9), (5.2.10) e (5.2.11) em (5.2.5):

$$\begin{aligned} \delta \phi_{\sim}^{n,T} & \left[\int_{A^e} \left(N_{\sim, x_1}^T K_{x_1}^* N_{\sim, x_1} + N_{\sim, x_2}^T K_{x_2}^* N_{\sim, x_2} \right) dA^e \phi_{\sim}^n + \right. \\ & \left. + \int_{A^e} N^T \left(\frac{\theta^*}{n} S_s + C_s^* \right) N dA^e \phi_{\sim}^n \right] = 0 \quad (5.2.12) \end{aligned}$$

Sendo $\delta \phi_{\sim}$ a primeira variação de ϕ_{\sim} , da sua arbitrariedade segue-se que a equação de elemento fica:

$$\left[A_{\sim}^e \right] \{ \phi_{\sim}^n \} + \left[M_{\sim}^e \right] \{ \phi_{\sim}^n \} = 0 \quad (5.2.13)$$

onde:

$$\left[A_{\sim}^e \right] = \int_{A^e} \left(N_{\sim, x_1}^T K_{x_1}^* N_{\sim, x_1} + N_{\sim, x_2}^T K_{x_2}^* N_{\sim, x_2} \right) dA^e \quad (5.2.14)$$

é a matriz dos coeficientes do elemento finito, e

$$\left[\underset{\sim}{M}^e \right] = \int_{A^e} \underset{\sim}{N}^T \left(\frac{\theta^*}{n} S_s + C_s^* \right) \underset{\sim}{N} dA^e \quad (5.2.15)$$

é a matriz de massa do elemento.

Note-se que $K_{x_1}^*$, $K_{x_2}^*$, θ^* e C_s^* estão assinalados com asterisco (*) para lembrar que são parâmetros avaliados nos pontos de integração do elemento isoparamétrico, segundo as expressões (5.2.9), (5.2.10) e (5.2.11).

Somadas as contribuições de todos os elementos, obtém-se a seguinte expressão para o sistema não linear de equações que retrata o problema em estudo:

$$\left[\underset{\sim}{A} \right] \left\{ \underset{\sim}{\phi} \right\} + \left[\underset{\sim}{M} \right] \left\{ \underset{\sim}{\dot{\phi}} \right\} = 0 \quad (5.2.16)$$

onde:

$$\left[\underset{\sim}{A} \right] = \Sigma \int_{A^e} \left(\underset{\sim}{N}_{x_1}^T K_{x_1}^* \underset{\sim}{N}_{x_1} + \underset{\sim}{N}_{x_2}^T K_{x_2}^* \underset{\sim}{N}_{x_2} \right) dA^e \quad (5.2.17)$$

é a matriz global dos coeficientes, que depende apenas da geometria e do coeficiente de condutibilidade hidráulica, e

$$\left[\underset{\sim}{M} \right] = \Sigma \int_{A^e} \underset{\sim}{N}^T \left(\frac{\theta^*}{n} S_s + C_s^* \right) \underset{\sim}{N} dA^e \quad (5.2.18)$$

é a matriz global de massa, dependente da geometria e dos coeficientes θ , n , S_s e C_s .

5.3) MATRIZ DOS COEFICIENTES DO ELEMENTO E MATRIZ DE MASSA (QUADRILÁTERO ISOPARAMÉTRICO)

À semelhana do disposto no item (4.4.2), a matriz do elemento quadrilátero isoparamétrico é calculada através de integração numérica. Sua expressão em termos de coordenadas locais é dada por:

$$\left[\underset{\sim}{A}^e \right] = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \left(\underset{\sim}{N}_{i,x_1}^T K_{x_1}^* \underset{\sim}{N}_{i,x_1} + \underset{\sim}{N}_{i,x_2}^T K_{x_2}^* \underset{\sim}{N}_{i,x_2} \right) \underset{\sim}{|J|} d\xi d\eta \quad (5.3.1)$$

onde $\underset{\sim}{N}_{i,x_1}$ e $\underset{\sim}{N}_{i,x_2}$ são calculadas segundo (4.4.2.5) e $K_{x_i}^*$ segundo (4.4.1.6).

A matriz de massa também é calculada por integração numérica e sua expressão em termos de coordenadas locais é dada por:

$$\left[\underset{\sim}{M}^e \right] = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \underset{\sim}{N}_i^T \left(\frac{\theta^*}{n} S_s + C_s^* \right) \underset{\sim}{N}_i \underset{\sim}{|J|} d\xi d\eta \quad (5.3.2)$$

onde $\underset{\sim}{N}_i$, θ^* , C_s^* e $\underset{\sim}{|J|}$ são calculados segundo (4.4.2.1), (5.2.10), (5.2.11) e (4.4.2.6) respectivamente.

Tanto (5.3.1) quanto (5.3.2) são integradas utilizando-se a Quadratura Gaussiana que, genericamente, é dada pela expressão (4.4.2.11) que aqui é transcrita:

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} G(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m G(\xi_i, \eta_j) w_i w_j$$

Para as expressões (5.3.1) e (5.3.2) no caso do elemento finito quadrilátero isoparamétrico com funções de forma dadas por (4.4.2.1), o número de pontos de integração é dois em cada direção ($n=m=2$), com coordenadas ξ_1 e η_1 assumindo valores $\pm\sqrt{3}$ e fator de peso $w_1 = w_j = 1$ (ref. 22,59).

5.4) PROCEDIMENTO DE INTEGRAÇÃO NO TEMPO

Para resolver o sistema não linear de equações expresso por (5.2.16) que está transcrita abaixo,

$$\begin{bmatrix} A \\ \sim \end{bmatrix} \{\phi\} + \begin{bmatrix} M \\ \sim \end{bmatrix} \dot{\{\phi\}} = 0 \quad (5.4.1)$$

utiliza-se o esquema numérico, para integração no tempo, do tipo trapezoidal (ref. 17).

Assume-se, assim, as seguintes condições para deduzir a fórmula de recorrência:

$$\phi_{t+\Delta t/2} = \frac{\phi_t + \phi_{t+\Delta t}}{2} \quad (5.4.2)$$

$$\dot{\phi} = \frac{\phi_{t+\Delta t} - \phi_t}{\Delta t} \quad (5.4.3)$$

Ou seja, adota-se uma variação linear para $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ dentro de cada intervalo de tempo Δt e admite-se que a integração se dá no meio do intervalo de tempo Δt (ref. 61).

Substituindo (5.4.2) e (5.4.3) em (5.4.1) obtém-se, após algumas operações, a seguinte expressão:

$$\left[\begin{bmatrix} A \\ \sim \end{bmatrix} + \frac{2 \begin{bmatrix} M \\ \sim \end{bmatrix}}{\Delta t} \right]_{t+\Delta t/2} \{\phi\}_{t+\Delta t} = \left[\frac{2 \begin{bmatrix} M \\ \sim \end{bmatrix}}{\Delta t} - \begin{bmatrix} A \\ \sim \end{bmatrix} \right]_{t+\Delta t/2} \{\phi\}_t \quad (5.4.4)$$

Os coeficientes de $\begin{bmatrix} A \\ \sim \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} M \\ \sim \end{bmatrix}$ são calculados com base em $\phi_{t+\Delta t/2}$ que é inicialmente estimado através de uma extrapolação linear em função de ϕ_t e $\phi_{t-\Delta t}$, conforme a equação (5.4.7) (ref. 47).

$$\phi_{t+\Delta t} = w \phi_t + (1-w) \phi_{t-\Delta t} \quad (5.4.5)$$

$$\phi_{t+\Delta t/2} = \frac{\phi_{t+\Delta t} + \phi_t}{2} \quad (5.4.6)$$

$$\phi_{t+\Delta t/2} = \frac{(1+w) \phi_t + (1-w) \phi_{t-\Delta t}}{2} \quad (5.4.7)$$

Na expressão (5.4.7) "w" é o coeficiente de relaxação e para ele é adotado o valor 0,5 neste trabalho.

Solucionada a equação (5.4.4) através do Método de Newton Raphson Modificado, seus resultados para $\phi_{t+\Delta t}$ podem ser usados para obter uma nova aproximação para $\phi_{t+\Delta t/2}$ conforme (5.4.8), e assim realimentar o processo até atingir convergência dentro do passo de tempo.

$$\phi_{t+\Delta t/2} = \frac{\phi_t + \phi_{t+\Delta t}}{2} \quad (5.4.8)$$

Observou-se, entretanto, que a expressão (5.4.4) não produziu bons resultados. NEWMAN^{47,48} também verificou problema semelhante em seus estudos. Segundo ele, isto provavelmente se deve à sensibilidade do método de Newton Raphson à estimativa inicial de $\phi_{t+\Delta t/2}$, e principalmente

ao fato de que, na região saturada, qualquer mudança repentina nas condições de contorno ao seu redor provoca efeitos instantâneos no potencial de pressões ϕ em todos os pontos dentro desta zona, afetando o cálculo principalmente dos coeficientes da matriz $\left[\underset{\sim}{A} \right]$ que tem grande peso no lado direito da equação (5.4.4), haja visto que a matriz $\left[\underset{\sim}{M} \right]$, na região saturada, tem valores bem menores comparativamente aos seus.

Para contornar esta dificuldade, pode-se adotar um outro esquema para deduzir a fórmula de recorrência.

MASLIA⁴⁵, em seu trabalho, procedeu a seguinte alteração em (5.4.4):

$$\left[\left[\underset{\sim}{A} \right] + \frac{2 \left[\underset{\sim}{M} \right]}{\Delta t} \right]_{t+\Delta t/2} \{ \underset{\sim}{\phi} \}_{t+\Delta t} = \left[\frac{2 \left[\underset{\sim}{M} \right]}{\Delta t} - \left[\underset{\sim}{A} \right] \right]_{t+\Delta t/2} \{ \underset{\sim}{\phi} \}_t + \frac{2 \left[\underset{\sim}{M} \right]_{t+\Delta t/2}}{\Delta t} \{ \underset{\sim}{\phi} \}_t - \frac{2 \left[\underset{\sim}{M} \right]_{t+\Delta t/2}}{\Delta t} \{ \underset{\sim}{\phi} \}_t$$

$$\left[\left[\underset{\sim}{A} \right] + \frac{2 \left[\underset{\sim}{M} \right]}{\Delta t} \right]_{t+\Delta t/2} \frac{\{ \underset{\sim}{\phi} \}_{t+\Delta t} + \{ \underset{\sim}{\phi} \}_t}{2} = \frac{2 \left[\underset{\sim}{M} \right]_{t+\Delta t/2}}{\Delta t} \{ \underset{\sim}{\phi} \}_t$$

$$\left[\left[\underset{\sim}{A} \right] + \frac{2 \left[\underset{\sim}{M} \right]}{\Delta t} \right]_{t+\Delta t/2} \{ \underset{\sim}{\phi} \}_{t+\Delta t/2} = \frac{2 \left[\underset{\sim}{M} \right]_{t+\Delta t/2}}{\Delta t} \{ \underset{\sim}{\phi} \}_t \quad (5.4.9)$$

A equação (5.4.9) é resolvida iterativamente até convergência, após o que, obtém-se o valor de $\phi_{t+\Delta t}$ conforme (5.4.10) e passa-se ao intervalo de tempo seguinte.

$$\phi_{t+\Delta t} = 2 \phi_{t+\Delta t/2} - \phi_t \quad (5.4.10)$$

NEWMAN⁴⁷, por sua vez, sugere um esquema de diferenças ré totalmente implícito em termos de ϕ , de modo que $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ é calculado conforme (5.4.3) dentro de cada intervalo de tempo Δt . Admite-se que a integração se dá no final do intervalo de tempo, isto é, no tempo $t + \Delta t$.

$$\left[\underset{\sim}{A} \right]_{t+\Delta t/2} \{ \underset{\sim}{\phi} \}_{t+\Delta t} + \left[\underset{\sim}{M} \right]_{t+\Delta t/2} \left(\frac{\{ \underset{\sim}{\phi} \}_{t+\Delta t} - \{ \underset{\sim}{\phi} \}_t}{\Delta t} \right) = 0$$

$$\left[\left[\underset{\sim}{A} \right] + \frac{\left[\underset{\sim}{M} \right]}{\Delta t} \right]_{t+\Delta t/2} \{ \underset{\sim}{\phi} \}_{t+\Delta t} = \frac{\left[\underset{\sim}{M} \right]_{t+\Delta t/2}}{\Delta t} \{ \underset{\sim}{\phi} \}_t \quad (5.4.11)$$

Aqui os coeficientes de $\left[\underset{\sim}{A} \right]$ e $\left[\underset{\sim}{M} \right]$ ainda são calculados no meio do intervalo, $t+\Delta t/2$, com o objetivo de amortecer a tendência de ϕ oscilar ao redor de seu limite, ou seja, emprega-se uma técnica de sub-relaxação para superar o problema de oscilação frequentemente encontrado em sistemas não-lineares como o em estudo (ref. 47,48).

Note-se que tanto (5.4.9) como (5.4.11) não apresentam a matriz $\left[\underset{\sim}{A} \right]$ no lado direito de suas expressões, contornando assim as dificuldades encontradas com (5.4.4).

Neste trabalho adota-se a expressão (5.4.11) para a fórmula de recorrência.

5.5) SOLUÇÃO DO SISTEMA NÃO LINEAR DE EQUAÇÕES

Para solucionar o sistema não linear de equações expresso pela fórmula (5.4.11) transcrita abaixo, é aplicado, a semelhança do estudo de fluxo permanente com malha fixa, o método de Newton-Raphson Modificado.

$$\left[\begin{matrix} A \\ \sim \end{matrix} \right]_{t+\Delta t/2} + \frac{\begin{bmatrix} M \\ \sim \end{bmatrix}}{\Delta t} \left\{ \phi \right\}_{t+\Delta t} = \frac{\begin{bmatrix} M \\ \sim \end{bmatrix}_{t+\Delta t/2}}{\Delta t} \left\{ \phi \right\}_t \quad (5.5.1)$$

Contudo, dificuldades são encontradas no tocante à convergência do sistema, partindo da fórmula de recorrência da maneira como está expressa em (5.5.1).

NEWMAN⁴⁷ salienta que desde que o método de Galerkin aplica-se somente a um dado instante de tempo, se a derivada de ϕ em relação ao tempo, $\dot{\phi}$, for substituída por $\bar{\dot{\phi}}$ (valor médio de $\dot{\phi}$), o potencial de pressões calculado ϕ tende a apresentar oscilações que podem, face às relações entre ϕ , θ , K e C_s , afetar os coeficientes de $\begin{bmatrix} M \\ \sim \end{bmatrix}$ e prejudicar a convergência.

Para superar este problema de convergência, optou-se por modificar a expressão (5.5.1) da seguinte maneira:

$$\left[\begin{matrix} A \\ \sim \end{matrix} \right]_{t+\Delta t/2} \left\{ \phi \right\}_{t+\Delta t} = \frac{\begin{bmatrix} M \\ \sim \end{bmatrix}_{t+\Delta t/2}}{\Delta t} \left(\left\{ \phi \right\}_t - \left\{ \phi \right\}_{t+\Delta t} \right) \quad (5.5.2)$$

Esta fórmula base forneceu bons resultados e sobre ela foi aplicado o esquema de Newton Raphson Modificado, detalhado adiante.

Alterando inicialmente a forma de apresentação da expressão (5.5.2) para tornar a notação mais semelhante à do item (4.4.3), obtém-se:

$$\left[\underset{\sim}{K} \right]^k = \left[\underset{\sim}{A} \right]_{t+\Delta t/2} \quad (5.5.3)$$

$$\left[\underset{\sim}{H} \right] = \frac{\left[\underset{\sim}{M} \right]_{t+\Delta t/2}}{\Delta t} \quad (5.5.4)$$

tem-se então:

$$\left[\underset{\sim}{K} \right]^k \left\{ \underset{\sim}{\phi} \right\}_{t+\Delta t} = \left[\underset{\sim}{H} \right] \left(\left\{ \underset{\sim}{\phi} \right\}_t - \left\{ \underset{\sim}{\phi} \right\}_{t+\Delta t} \right) \quad (5.5.5)$$

Aplicando as condições de contorno expressas por (5.2.2) de forma idêntica ao que foi realizado no item (4.4.3), ou seja, adicionando coeficientes muito grandes aos elementos da diagonal principal de $\left[\underset{\sim}{K} \right]^k$ correspondentes aos nós prescritos e especificando a prescrição no vetor dos termos independentes através da colocação, na posição correspondente, do valor da prescrição multiplicado pelo coeficiente grande adicionado à diagonal, tem-se:

$$\left(\left[\underset{\sim}{K} \right]^k + \left[\underset{\sim}{K} \right]^b \right) \left\{ \underset{\sim}{\phi} \right\}_{t+\Delta t} = \left[\underset{\sim}{H} \right] \left(\left\{ \underset{\sim}{\phi} \right\}_t - \left\{ \underset{\sim}{\phi} \right\}_{t+\Delta t} \right) + \left\{ \underset{\sim}{Q} \right\}^b \quad (5.5.6)$$

onde:

$\left[\underset{\sim}{K} \right]^k$: é uma matriz diagonal cujo i-ésimo elemento da diagonal principal é igual a zero se ϕ_i no tempo $t+\Delta t/2$ não for prescrito, e é igual a k^* $\left[k^* \gg k_{ii}^k \right]$ se ϕ_i for prescrito.

$\left\{ \underset{\sim}{Q} \right\}^b$: é um vetor cujo i-ésimo elemento é igual a zero se ϕ_i não for prescrito e é igual a $k^* \phi_i$ se ϕ_i for prescrito.

Feito isto, aplica-se o método de Newton-Raphson, operando da seguinte forma:

$$\left\{ \underset{\sim}{F} \right\}^k + \left\{ \underset{\sim}{F} \right\}^b - \left[\underset{\sim}{H} \right] \left(\left\{ \underset{\sim}{\phi} \right\}_t - \left\{ \underset{\sim}{\phi} \right\}_{t+\Delta t} \right) - \left\{ \underset{\sim}{Q} \right\}^b = 0 \quad (5.5.7)$$

onde:

$$\left\{ \underset{\sim}{F} \right\}^k = \left[\underset{\sim}{K} \right]^k \left\{ \underset{\sim}{\phi} \right\}_{t+\Delta t} \quad (5.5.8)$$

$$\left\{ \underset{\sim}{F} \right\}^b = \left[\underset{\sim}{K} \right]^b \left\{ \underset{\sim}{\phi} \right\}_{t+\Delta t} \quad (5.5.9)$$

A iteração de Newton-Raphson modificado é executada da seguinte maneira dentro do passo de tempo Δt :

$$\begin{aligned} \left(\left[\underset{\sim}{K} \right]^{k^{(0)}} + \left[\underset{\sim}{K} \right]^b \right) \left\{ \underset{\sim}{\Delta\phi} \right\}^{(1)} &= \left[\underset{\sim}{H} \right]^{(i-1)} \left(\left\{ \underset{\sim}{\phi} \right\}_t - \left\{ \underset{\sim}{\phi} \right\}_{t+\Delta t} \right) + \\ &+ \left\{ \underset{\sim}{Q} \right\}^b - \left\{ \underset{\sim}{F} \right\}^{k^{(i-1)}} - \left\{ \underset{\sim}{F} \right\}^{b^{(i-1)}} \end{aligned} \quad (5.5.10)$$

$$\left[\underset{\sim}{K} \right]^{k^{(0)}} = \left[\underset{\sim}{A} \right]_{t+\Delta t/2}^{(0)} \quad (5.5.11)$$

$$\left[\underset{\sim}{H} \right]^{(i-1)} = \frac{\left[\underset{\sim}{M} \right]_{t+\Delta t/2}^{(i-1)}}{\Delta t} \quad (5.5.12)$$

$$\left[\underset{\sim}{K} \right]^{k(i-1)} = \left[\underset{\sim}{A} \right]_{t+\Delta t/2}^{(i-1)} \quad (5.5.13)$$

$$\left\{ \underset{\sim}{F} \right\}_{t+\Delta t/2}^{k(i-1)} = \left[\underset{\sim}{K} \right]^{k(i-1)} \left\{ \underset{\sim}{\phi} \right\}_{t+\Delta t}^{(i-1)} \quad (5.5.14)$$

$$\left\{ \underset{\sim}{F} \right\}^{b(i-1)} = \left[\underset{\sim}{K} \right]^b \left\{ \underset{\sim}{\phi} \right\}_{t+\Delta t}^{(i-1)} \quad (5.5.15)$$

Lembrando sempre que, para o cálculo das matrizes $\left[\underset{\sim}{A} \right]$ e $\left[\underset{\sim}{M} \right]$, são levadas em consideração as expressões que regem a variação dos coeficientes K_{x_1} , θ e C_s descritos no capítulo 3, itens (3.5.1), (3.5.2) e (3.5.3).

Calculado $\left\{ \Delta \phi \right\}^{(i)}$ conforme a expressão (5.5.10) obtém-se o valor de $\left\{ \underset{\sim}{\phi} \right\}_{t+\Delta t}^{(i)}$ conforme a expressão abaixo:

$$\left\{ \underset{\sim}{\phi} \right\}_{t+\Delta t}^{(i)} = \left\{ \underset{\sim}{\phi} \right\}_{t+\Delta t}^{(i-1)} + w \left\{ \Delta \phi \right\}_{\sim}^{(i)} \quad (5.5.16)$$

Este algoritmo é repetido iterativamente até atingir-se convergência no valor de $\left\{ \underset{\sim}{\phi} \right\}_{t+\Delta t}^{(i)}$ segundo o critério de convergência expresso pela Norma Euclidiana.

$$\frac{\|\Delta\phi^{(i)}\|_2}{\|\phi^{(i)}\|_2} \leq \epsilon \quad (5.5.17)$$

Vale assinalar que para cada passo de tempo Δt as matrizes $\left[\tilde{A} \right]$ e $\left[\tilde{M} \right]$, que devem ser avaliadas no tempo $t=t+\Delta t/2$, para a primeira iteração são avaliadas no tempo $t=t$, como uma aproximação. Nas iterações seguintes é que elas são avaliadas no meio do intervalo $(t+\Delta t/2)$, tendo como base a aproximação fornecida pelos primeiros resultados para $\phi_{t+\Delta t}$ obtidos das iterações.

Encerradas estas operações, efetua-se um novo incremento de tempo Δt , repetindo-se as etapas iterativas e assim sucessivamente.

A cada intervalo de tempo Δt pode-se obter a posição da linha freática através da interpolação do potencial piezométrico nos lados dos elementos isoparamétricos localizados na transição da zona saturada para a não saturada. Assim, pode-se conhecer a evolução da linha freática dentro do maciço permeável, em função da variação das condições de contorno ao longo do tempo.

O Método de Newton Raphson modificado foi utilizado aqui pelas mesmas razões expostas no item (4.4.3) do capítulo anterior.

5.6) EXEMPLOS

Para ilustrar a solução de problemas de análise transiente dois exemplos são apresentados a seguir, ambos tratando de barragem heterogênea com dreno de pé horizontal. No primeiro exemplo considera-se que o nível do reservatório sobe de 80 para 100 metros num espaço de tempo muito pequeno, isto é, menor que o passo de tempo usado na solução do problema, e no segundo exemplo considera-se o contrário, ou

seja, que ocorre um rebaixamento súbito no nível a montante, de 100 para 80 metros.

As características dos dois exemplos ilustrados pelas figuras (5.6.1) e (5.6.2) estão listadas na tabela (5.6.1).

A convergência dentro de cada passo de tempo, medida pela Norma Euclidiana (ε), é rápida. No primeiro passo de tempo, para se atingir $\varepsilon \cong 0,01$, 5 iterações mostraram-se suficientes. Daí para diante, para se atingir valores de ε em torno de 0,01 dentro do passo de tempo, 2 a 3 iterações apresentaram-se suficientes.

Tabela 5.6.1) Características dos exemplos das figuras (5.6.1) e (5.6.2)

figuras		(5.6.1)	(5.6.2)
propriedades	$K_{x_i} = 0,01 \text{ m/dia}$ $n = 0,30$ $S_s = 10^{-4} \text{ m}^{-1}$ $\theta = 0,17 \Rightarrow 0,60$ (solo tipo 1)	em \overline{EFJL}	idem
	$K_{x_i} = 0,5 \text{ m/dia}$ $n = 0,40$ $S_s = 10^{-4} \text{ m}^{-1}$ $\theta = 0,22 \Rightarrow 0,50$ (solo tipo 3)	em $\overline{ABCDEFL}$, \overline{FGHIJ}	idem
cond. de contorno	$\bar{\phi}_{\text{inicial}} = 100 \text{ m}$ $\bar{\phi}_{\text{inicial}} = 80 \text{ m}$ $\bar{\phi}_{\text{final}} = 100 \text{ m}$ $\bar{\phi}_{\text{final}} = 80 \text{ m}$ $\bar{\phi} = 0$ $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$	- em \overline{AB} em \overline{ABC} - em \overline{HI} $\overline{CDEFGH}, \overline{ALJI}$	em \overline{ABC} - - em \overline{AB} em \overline{HI} $\overline{CDEFGH}, \overline{ALJI}$

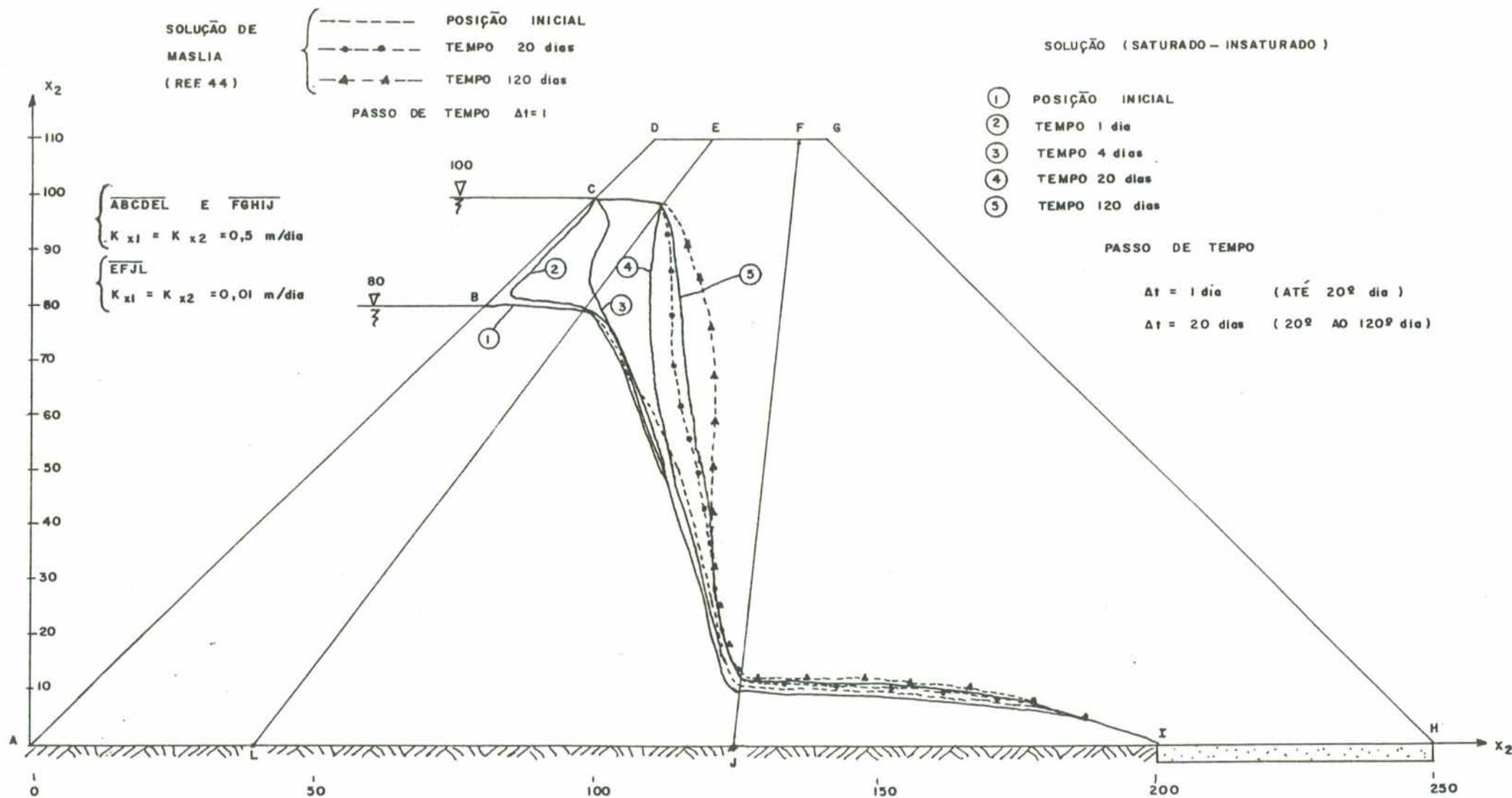


FIGURA 56.1) BARRAGEM HETEROGÊNEA, COM DRENO DE PÉ (HORIZONTAL)

ANÁLISE TRANSIENTE $\theta_{MON} 80 \rightarrow 100$ m

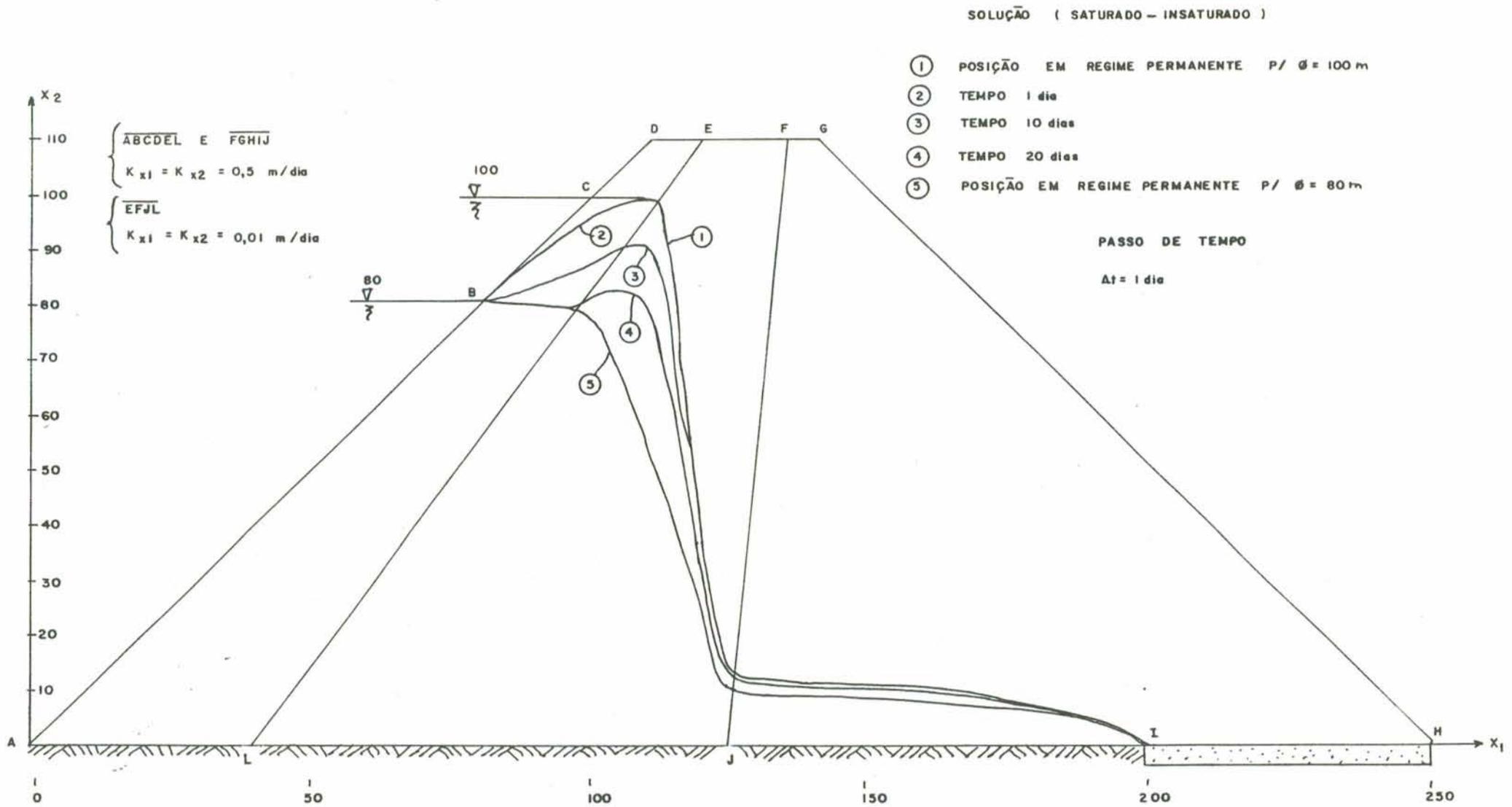


FIGURA 5.6.2) BARRAGEM HETEROGÊNEA, COM DRENO DE PÉ (HORIZONTAL),

ANÁLISE TRANSIENTE $\phi_{MON} 100 \rightarrow 80 \text{ m}$

6) CONCLUSÕES

O desenvolvimento detalhado das equações governantes do problema de fluxo transiente em meios porosos apresentado neste estudo, elucida bem a diferença existente entre a abordagem que considera apenas o domínio saturado e a que considera o domínio saturado-não saturado, mostrando os limites de validade das mesmas e as simplificações assumidas.

Todos os coeficientes envolvidos nas equações foram estudados, conseguindo-se estabelecer uma maneira de implementar computacionalmente as formas de variação destes, para solos abrangidos em cinco categorias.

No tocante ao coeficiente de condutibilidade hidráulica, o estudo comparativo entre as várias formas de representar a variação deste coeficiente em relação ao potencial de pressões mostrou que não há problemas em se adotar a forma mais simplificada, confirmando-se as afirmativas de BATHE e KHOSTAFGAAR¹⁸.

O estudo de fluxo em regime permanente, através da comparação entre o esquema de malha ajustável de elementos finitos, no qual se analisa apenas o domínio saturado, e o esquema de malha fixa, no qual se analisa todo o domínio saturado-não saturado, bem demonstrou as particularidades de cada abordagem, evidenciando as vantagens do segundo esquema.

O esquema com malha ajustável pode apresentar problemas caso a malha inicialmente discretizada for mal estimada, ou seja, com a superfície livre locada muito distante de sua posição final correta. Decorre disto, a necessidade do usuário ter uma certa habilidade ao lançar a malha de elementos finitos, para evitar a ocorrência de elementos finitos muito deformados com o transcorrer dos ajustes. Outra dificuldade é no trato de barragens com faixas, na direção vertical, de materiais com propriedades

diferentes ou com dreno de pé horizontal.

O esquema com malha fixa é mais versátil no estudo de barragens com faixas verticais de materiais com propriedades diferentes entre si (ex.: dreno tipo chaminé), visto não haver dificuldades no tratamento das faces entre as camadas. Por não exigir uma estimativa prévia da posição da linha freática, no esquema de malha fixa não existe necessidade do usuário ter muita prática ao discretizar a malha.

Uma vantagem importante a salientar é que no caso de se acoplar uma análise de tensões e deformações ao estudo de percolação na barragem, a malha fixa de elementos finitos usada na análise de percolação pode ser usada nesta outra análise, sem a necessidade de se complementar a malha, como seria o caso se só o domínio saturado tivesse sido discretizado.

A convergência do modelo de malha fixa é boa, com uma média de 6 iterações necessárias para se obter resultados razoáveis, dentro de um critério de convergência, neste caso a Norma Euclidiana, com $\epsilon \leq 0,03$.

Os resultados obtidos com o elemento finito quadrilátero isoparamétrico são praticamente iguais aos obtidos por MASLIA⁴⁵ com o elemento triangular isoparamétrico de variação quadrática.

Comparando os resultados obtidos com os esquemas de malha ajustável e de malha fixa, para um mesmo problema, observa-se que a posição da superfície livre apresentada pelo segundo esquema é ligeiramente acima da posição apresentada pelo esquema de malha ajustável, o que é de se esperar visto que está sendo considerada a contribuição da região não saturada no fluxo.

No tocante ao método de solução do sistema não linear de equações, pode-se afirmar que o esquema iterativo tipo Newton Raphson Modificado mostrou-se mais adequado que o tradicional Newton Raphson, devido à melhor convergência. Observou-se que a matriz dos coeficientes do sistema é

afetada pela não linearidade, provocando oscilações consideráveis a cada iteração, e a maneira de superar este problema foi mantê-la constante a cada passo, apesar do erro de aproximação inerente a esta operação. Os exemplos apresentados no final do capítulo 4 atestam que os resultados não são prejudicados ao se adotar este procedimento.

Para o estudo de fluxo em regime transiente foi utilizado somente o esquema de malha fixa, devido às suas vantagens sobre o esquema de malha ajustável, observadas no estudo de fluxo em regime permanente. Novamente foram encontradas dificuldades de convergência relacionadas com a sensibilidade dos coeficientes das matrizes do sistema. Uma descrição das tentativas efetuadas é apresentada no final do capítulo 5, bem como, uma solução encontrada para superar estas dificuldades.

O fenômeno de fluxo em meios porosos apresenta um campo vasto para investigações, com muitos estudos que podem ser aprofundados.

Assim, como continuidade do presente trabalho pode-se sugerir: a implantação de elemento finito axissimétrico para estudo de poços; o acoplamento de análise de tensões e deformações à análise de percolação; o estudo de fluxo turbulento em meios permeáveis e, também, uma análise mais profunda do problema de instabilidade numérica observada na análise em regime transiente.

No aspecto puramente computacional, a inclusão de procedimentos de condensação de malha, geração automática de malhas e saída gráfica de resultados, entre outras técnicas, podem em muito melhorar a performance de programa computacional desenvolvido para estudo de percolação em barragens de terra, tornando-o mais prático para o usuário.

APÊNDICE I) AVALIAÇÃO DO GRADIENTE DE VELOCIDADE
DE GRÃOS DE SOLO (∇v_s)

No presente estudo admite-se que os grãos de solo só se deslocem na direção vertical x_g , ou seja, que há apenas movimento de consolidação vertical.

Desta forma, seja $u(x_g, t)$ o vetor deslocamento definido na forma lagrangeana. Ele fornece, no tempo t , o deslocamento de um ponto localizado na altura x_g , distante da origem em $t=0$. A velocidade $v_s = \frac{\partial u}{\partial t}$ representa a velocidade de uma partícula ao longo de sua trajetória e não a velocidade no ponto x_g .

Necessita-se ter a velocidade em um ponto fixo, isto é, a distribuição euleriana de v_s .

Para avaliar corretamente a velocidade em x_g , num instante t , introduz-se a nova variável definida como:

$$x_g = \xi + u(\xi, t) \quad (I.1)$$

onde ξ é a altura correspondente à posição inicial do ponto considerado, o qual moveu-se até x_g durante o tempo t . A equação (I.1) é uma função implícita de ξ .

Assim, supondo que seja possível determinar a função explícita $\xi = \xi(x_g, t)$, a velocidade v_s em um ponto específico x_g , no instante t , é dada por (ref. 38):

$$v_s = v_s[\xi(x_g, t), t] = \frac{\partial u[\xi(x_g, t), t]}{\partial t} \quad (I.2)$$

A derivada espacial em relação a x_g é dada por:

$$\frac{\partial v_s}{\partial x_3} = \frac{\partial v_s}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_3} \quad (I.3)$$

Diferenciando ambos os lados de (I.1) em relação a x_3 , tem-se:

$$1 = \frac{\partial \xi}{\partial x_3} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_3} \quad (I.4)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x_3} = \frac{1}{1 + \frac{\partial u}{\partial \xi}} = \frac{1}{1 + \varepsilon} \quad (I.5)$$

Assim, (I.3) pode ser reescrita:

$$\frac{\partial v_s}{\partial x_3} = \frac{\partial v_s}{\partial \xi} \left(\frac{1}{1 + \varepsilon} \right) = \frac{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)}{\partial t} \frac{1}{1 + \varepsilon} = \frac{\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}}{1 + \varepsilon} \quad (I.6)$$

Assumindo que, para um meio elástico, uma mudança na poro pressão deve produzir imediatamente uma mudança igual e oposta na tensão efetiva, pode-se escrever que a deformação volumétrica ε é igual a :

$$\varepsilon = \lim_{\Delta \xi \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta \xi} = \frac{\partial u}{\partial \xi} = -\alpha' \sigma_{x_3} = \alpha \psi \quad (I.7)$$

ou melhor:

$$\varepsilon [\xi(x_3, t), t] = \alpha \psi(x_3, t) \quad (I.8)$$

Sendo que:

$$\alpha = \alpha' \rho g \quad (I.9)$$

- α_{x_3} : tensão efetiva, expresso em unidade (F/L²)
 ψ : potencial de pressão, expresso em unidade (L)
 α : coeficiente de compressibilidade de formação vertical do solo, expresso em unidade (L⁻¹)
 α' : coeficiente de compressibilidade clássico de formação vertical do solo, que representa a compressibilidade vertical de uma amostra sujeita a uma pressão ao longo de seu eixo e impedida de se expandir lateralmente.
 É também conhecido como coeficiente de mudança de volume, m_v (ref.42).

$$\alpha' = (1-2\nu)(1+\nu)/E(1-\nu) \quad (I.10)$$

Diferenciando (I.8) em relação a t :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \alpha \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (I.11)$$

De (I.1) tem-se :

$$x_3 = \xi(x_3, t) + u[\xi(x_3, t), t] \quad (I.12)$$

que diferenciado em relação a t , fornece :

$$0 = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t} \quad (I.13)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = - \frac{\frac{\partial u}{\partial t}}{1 + \varepsilon} = - \frac{v_s}{1 + \varepsilon} \quad (I.14)$$

Diferenciando (I.8) em relação a x_3 , obtém-se :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_3} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_3} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} \frac{1}{1+\varepsilon} = \alpha \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \quad (I.15)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} = \alpha(1+\varepsilon) \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \quad (I.16)$$

Substituindo-se (I.14) e (I.16) em (I.11), tem-se:

$$\alpha(1+\varepsilon) \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \left[-\frac{v_s}{1+\varepsilon} \right] + \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \alpha \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (I.17)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \alpha \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} + v_s \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \right] \quad (I.18)$$

E, finalmente :

$$\frac{\partial v_s}{\partial x_3} = \frac{1}{1+\varepsilon} \alpha \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} + v_s \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \right] = \frac{\alpha}{1+\alpha\psi} \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} + v_s \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \right] \quad (I.19)$$

Ou, o que é o mesmo, já que $v_{s,x_1} = v_{s,x_2} = 0$

$$\nabla v_s = \frac{\alpha}{1+\alpha\psi} \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} + v_s \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \right] \quad (I.20)$$

APENDICE II) RELAÇÃO ENTRE α E C_b

Inicialmente, expressando a deformação volumétrica ε como função do índice de vazios, obtém-se (ref. 38) :

$$\delta(A \Delta x_g) = \frac{e}{1+e} \left[A \Delta x_g + \delta(A \Delta x_g) \right] - \frac{e_0}{1+e_0} A \Delta x_g \quad (\text{II.1})$$

A : seção horizontal da amostra considerada

Δx_g : espessura da amostra considerada

e : índice de vazios

e_0 : índice de vazios inicial

Assume-se que os grãos de solo são incompressíveis e que, conseqüentemente, a mudança de volume é igual à variação do volume de vazios.

Dividindo ambos os lados de (II.1) por $A \Delta x_g$ e reordenando os termos, obtém-se:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta x_g \rightarrow 0} \frac{\delta(A \Delta x_g)}{A \Delta x_g} = \frac{e - e_0}{1 + e_0} \quad (\text{II.2})$$

De (I.8) tem-se:

$$\alpha = \frac{\varepsilon}{\psi} = \frac{e - e_0}{(1 + e_0)\psi} \quad (\text{II.3})$$

Se α não depende de ψ pode-se escrever :

$$\frac{de}{d\psi} = \alpha(1+e_o) \quad (\text{II.4})$$

ou seja, o índice de vazios é proporcional a ψ , qualquer que seja o índice de vazios inicial e_o .

Substituindo (II.4) em (3.5.4.3) :

$$C_b = \alpha \frac{(1+e_o)}{1+e} = \frac{\alpha(1+e_o)}{1+[e_o + \alpha\psi(1+e_o)]} \quad (\text{II.5})$$

assim, finalmente :

$$C_b = \frac{\alpha}{1+\alpha\psi} \quad (\text{II.6})$$

A expressão de C_b em função de ε é :

$$C_b = \frac{1}{1+e} \frac{de}{d\psi} = \frac{1}{1+e} \frac{de}{d\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{d\psi}$$

$$C_b = \frac{1+e_o}{1+[e_o + \varepsilon(1+e_o)]} \frac{d\varepsilon}{d\psi} \quad (\text{II.7})$$

logo:

$$C_b = \frac{1}{1+\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{d\psi} \quad (\text{II.8})$$

APÊNDICE III) ELEMENTO TRIANGULAR LINEAR

Na descrição de elementos triangulares é conveniente defini-los em termos de coordenadas de área, ou coordenadas triangulares (ref. 22).

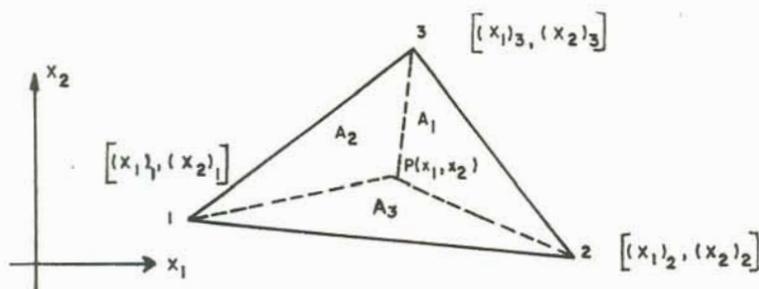


FIGURA III.1) COORDENADAS CARTESIANAS.

Considere-se o triângulo da figura (III.1). Um ponto P de coordenadas (x_1, x_2) define, juntamente com os vértices do triângulo, três sub-triângulos de áreas A_1 , A_2 e A_3 de modo que:

$$A_1 + A_2 + A_3 = A \quad \text{(III.1)}$$

onde A é a área total do triângulo.

As coordenadas triangulares são, então, definidas como:

$$L_1 = \frac{A_1}{A} \quad L_2 = \frac{A_2}{A} \quad L_3 = \frac{A_3}{A} \quad \text{(III.2)}$$

De (III.1) e (III.2) obtém-se:

$$1 = L_1 + L_2 + L_3 \quad \text{(III.3)}$$

o que significa que nem todas as três coordenadas são independentes. Pode-se expressar uma delas em função das outras duas num espaço bi-dimensional. Contudo, é conveniente trabalhar com as três coordenadas triangulares quando se lida com pontos definidos dentro de um triângulo. A figura (III.2) mostra as coordenadas triangulares de alguns pontos de um triângulo.

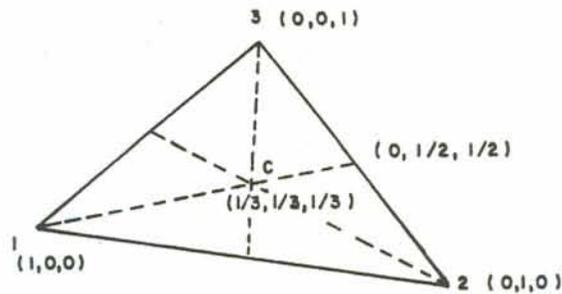


FIGURA III.2) COORDENADAS TRIANGULARES

As áreas A , A_1 , A_2 e A_3 são dadas pelos determinantes:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & (x_1)_1 & (x_2)_1 \\ 1 & (x_1)_2 & (x_2)_2 \\ 1 & (x_1)_3 & (x_2)_3 \end{vmatrix} \quad (\text{III.4.a})$$

$$A_1 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & (x_1)_2 & (x_2)_2 \\ 1 & (x_1)_3 & (x_2)_3 \end{vmatrix} \quad (\text{III.4.b})$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} 1 & (x_1)_1 & (x_2)_1 \\ 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & (x_1)_3 & (x_2)_3 \end{vmatrix} \quad (\text{III.4.c})$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} 1 & (x_1)_1 & (x_2)_1 \\ 1 & (x_1)_2 & (x_2)_2 \\ 1 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} \quad (\text{III.4.d})$$

o que permite estabelecer a relação entre as coordenadas

cartesianas e triangulares que, de uma forma generalizada, é dada por:

$$L_i = C_{1i} + C_{2i} x_1 + C_{3i} x_2 \quad (\text{III.5})$$

onde :

$$C_{1i} = [(x_1)_j (x_2)_k - (x_2)_j (x_1)_k] / 2A \quad (\text{III.6.a})$$

$$C_{2i} = [(x_2)_j - (x_2)_k] / 2A \quad (\text{III.6.b})$$

$$C_{3i} = [(x_1)_k - (x_1)_j] / 2A \quad (\text{III.6.c})$$

$$2A = [(x_1)_1 (x_2)_2 + (x_1)_2 (x_2)_3 + (x_1)_3 (x_2)_1] - \\ - [(x_1)_2 (x_2)_1 + (x_1)_1 (x_2)_3 + (x_1)_3 (x_2)_2] \quad (\text{III.7})$$

Os índices i, j, k assumem os valores 1, 2, 3 e devem ser permutados ciclicamente.

A relação inversa é dada por:

$$x_1 = \sum_{i=1}^3 L_i (x_1)_i \quad (\text{III.8.a})$$

$$x_2 = \sum_{i=1}^3 L_i (x_2)_i \quad (\text{III.8.b})$$

As derivadas em relação a x_1 e x_2 de uma função definida em termos de coordenadas triangulares, usando-se a regra da cadeia, são dadas por:

$$\frac{\partial f(L_1, L_2, L_3)}{\partial x_1} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial L_i} \frac{\partial L_i}{\partial x_1} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial L_i} C_{2i} \quad (\text{III.9.a})$$

$$\frac{\partial f(L_1, L_2, L_3)}{\partial x_2} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial L_i} \frac{\partial L_i}{\partial x_2} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial L_i} C_{3i} \quad (\text{III.9.b})$$

A integração de funções polinomiais definidas em termos de coordenadas triangulares é dada por:

$$\iint L_1^i L_2^j L_3^k dA = \frac{i! j! k!}{(i+j+k+2)!} 2A \quad (\text{III.10})$$

E a integração em uma dimensão, por exemplo ao longo do lado 1-2 de comprimento l_{12} , é dada por:

$$\int L_1^i L_2^j dS = \frac{i! j!}{(i+j+1)!} l_{12} \quad (\text{III.11})$$

No triângulo linear as coordenadas triangulares coincidem com as funções de forma.

$$N_i = L_i \quad (\text{III.12})$$

Assim, uma função ϕ , pode ser expandida linearmente no triângulo em termos de coordenadas triangulares da seguinte maneira:

$$\phi = L_1 \phi_1 + L_2 \phi_2 + L_3 \phi_3 = \sum_{i=1}^3 L_i \phi_i \quad (\text{III.13})$$

ϕ_i : valores nodais de ϕ

$L_i = N_i$: funções de forma

As derivadas da função ϕ , de acordo com (III.9) são:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_1} = \phi_1 C_{21} + \phi_2 C_{22} + \phi_3 C_{23} \quad (\text{III.14. a})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_2} = \phi_1 C_{31} + \phi_2 C_{32} + \phi_3 C_{33} \quad (\text{III.14. b})$$

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BIBLIOGRAFIA CITADA

- [1] CASAGRANDE, A. Seepage through dams, Contributions to soil mechanics: 1925-1940. Boston, Society of Civil Engineers, 1940.
- [2] DESAI, C. S. Seepage in Mississippi River Banks. Report I: Analysis of transient seepage using a viscous-flow model and the Finite Difference and Finite Element Methods. Vicksburg, U.S. Army Engineer Waterways Experiment Station, 1973.
- [3] DE WIEST, R. J. M. Geohydrology, New York, John Wiley, 1965.
- [4] GROVER, B. L. & KIRHAM, D. A glassbead-glycerol model for nonsteady state tile drainage, Proceedings. Soil Science Society of America, 25:91-4, 1961.
- [5] HERBERT, R. & RUSHTON, K. R. Groundwater flow studies by resistance networks, Geotechnique, 16(1):53-75, Mar., 1966.
- [6] HERBERT, R. & RUSHTON, K. R. Time variant groundwater flow by resistance network analogues, Journal of Hydrology, 6:237-64, June, 1968.
- [7] JAVANDEL, I. & WITHERSPOON, P. A. Application of the Finite Element Method to transient flow in porous media. Society of Petroleum Engineers Journal, 8(3): 241-52, Sept., 1968.
- [8] JEPPSON, R. W. Seepage through dams in the complex potential plane, Journal of the Irrigation and Drainage Division, ASCE, 94(1):23-9, Mar., 1968.
- [9] MAUERSBERGER, P. A. A variational principle for steady state groundwater flow with a free surface, Pure and Applied Geophysics, 60, 1965.

- [10] POLUBARINOVA-KOCHINA, P. Y. The theory of groundwater movement. Princeton, N. J., Princeton University Press, 1962, 613p.
- [11] SANDHU, R. S. Fluid flow in saturated porous elastic media. Berkeley, University of California, 1968, Tese dout.
- [12] TAYLOR, G. S. & LUTHIN, J. N. Computer methods for transient analysis of water-table aquifers, Water Resources Research, 5(1):144-52, 1969.
- [13] VERMA, R. D. & BRUTSAERT, W. Unconfined aquifer seepage by capillary flow theory, Journal of the Hydraulic Division, ASCE, 96(6):1331-44, June, 1970.
- [14] ZASLAVSKY, D. Saturated and unsaturated flow equation in an unstable porous medium, Soil Science, 98: 317-21, 1964.
- [15] ZIENKIEWICZ, O. C. & CHEUNG, Y. K. Finite elements in the solution of field problems, Engineer, 220(5722): 507-10, Sept., 1965.

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

- [16] ARAL, M. M. & MASLIA, M. L. Unsteady seepage analysis of Wallace Dam, Journal of the Hydraulic Division, ASCE, 109(6):809-26, June, 1983.
- [17] AWRUCH, A. M. & PARTRIDGE, P. W. Comparação de esquemas numéricos para o estudo de circulação em águas rasas, In: SIMPÓSIO SOBRE SISTEMAS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA CIVIL, 2., São Paulo, 5-7 dez, 1978. Anais..., São Paulo, CESP, 1978, v.2, p.111-25.
- [18] BATHE, K. J. & KHOSHGOFTAAR, M. R. Finite element free surface seepage analysis without mesh iteration, International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 3:13-22, 1979.

- [19] BOUWER, H. Unsaturated flow in groundwater hydraulics, Journal of the Hydraulics Division, ASCE, 90(5):121-44, Sept., 1964.
- [20] BREBBIA, C. A. Introduction to finite element techniques for fluid flow, London, Newnes-Butterworths, 1976.
- [21] BREBBIA, C. A. & FERRANIE, A. J. Computational methods for the solution of engineering problems, London, Pentech Press, 1978, 354p.
- [22] BREBBIA, C. A. & FERRANIE, A. J. The finite element technique, Porto Alegre, Ed. da UFRGS, 1975, 410p.
- [23] CEDERGREEN, H. R. Seepage, drainage and flow nets, New York, John Wiley, 1967, 489p.
- [24] COOLEY, R. L. A Finite Difference Method for unsteady flow in variably saturated porous media: application to a single pumping well, Water Resource Research, 7(6):1607-25, 1971.
- [25] DESAI, C. S. Approximate solution for unconfined seepage, Journal of the Irrigation and Drainage Division, ASCE, 99(1):71-87, Mar., 1973.
- [26] DESAI, C. S. Finite element procedures for seepage analysis using an isoparametric element, In: SYMPOSIUM ON APPLICATIONS OF THE FINITE ELEMENT METHOD IN GEOTECHNICAL ENGINEERING, Vicksburg, Miss, May 1-4, 1972. Proceedings ..., Vicksburg, Soil Mechanics Information Analysis Center of U. S. Army Engineer Waterways Experiment Station, 1972, v.2, p.799-87.
- [27] DESAI, C. S. Finite element residual schemes for unconfined flow, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 10(6):1415-8, 1976.
- [28] DESAI, C. S. Seepage analysis of earth banks under drawdown, Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, 98(11):1143-62, Nov., 1972.

- [29] DESAI, C. S. & ABEL, J. F. Introduction to the Finite Element Method, New York, Van Nostrand Reinhold, 1972, 447p.
- [30] DESAI, C. S. & SHERMAN JR., W. C. Unconfined transient seepage in sloping banks, Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE, 97(2): 357-73, Feb., 1971.
- [31] DIAS, R. D. Aplicação do método dos elementos finitos ao problema do fluxo permanente nos meios anisotrópicos, Porto Alegre, Curso de Pós Graduação em Engenharia Civil/UFRGS, 1973, 94p., Diss. maestr.
- [32] DVINOFF, A. H. & HARR, M. E. Phreatic surface location after drawdown, Journal of Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, 97(1):47-58, Jan., 1971.
- [33] FINN, W. D. L. Finite element analysis of seepage through dams, Journal of Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, 93(6):41-8, Nov., 1967.
- [34] FRANCE, P. W. et alii. Numerical analysis of free surface seepage problems, Journal of Irrigation and Drainage Division, ASCE, 97(1):165-79, Mar., 1971.
- [35] FREEZE, R. A. Influence of the unsaturated flow domain on seepage through earth dams, Water Resources Research, 7(4):929-41, Aug., 1971.
- [36] FREEZE, R. A. Three-dimensional, transient, saturated-unsaturated flow in a groundwater basin, Water Resources Research, 7(2):347-66, Apr., 1971.
- [37] GARDNER, W. R. Some steady-state solutions of the unsaturated moisture flow equation with application to evaporation from a water table, Soil Science, 85:228-32, 1958.
- [38] GAMBOLATI, G. Equation for one-dimensional vertical flow of groundwater - 1. The rigorous theory, Water Resources Research, 9(4):1022-8, Aug., 1973.

- [39] GAMBOLATI, G. Equation for one-dimensional vertical flow of groundwater - 2. Validity range of the diffusion equation, Water Resources Research, 9(5):1385-95, Oct., 1973.
- [40] GUVANASEN, V. & VOLKER, R. E. Numerical solutions for unsteady flow in unconfined aquifers, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 15(11):1643-57, Nov., 1980.
- [41] HARR, M. E. Groundwater and seepage, New York, McGraw-Hill, 1962, 315p.
- [42] LAMBE, T. W. & WHITMAN, R. V. Soil mechanics: SI version, New York, John Wiley, 1979, 553p.
- [43] LI, G. C. Free surface flow and stress analysis of earth dams, Blacksburg, Va., Virginia Polytechnic Institute, 1981, 217p, Tese dout.
- [44] LI, G. C. & DESAI, C. S. Stress and seepage analysis of earth dams, Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, 109(7):946-60, July, 1983.
- [45] MASLIA; M. L. Numerical modelling of saturated-unsaturated fluid flow trough porous media, Atlanta, Ga., Georgia Institute of Technology, 1980, 132p., Diss. mistr.
- [46] NAYAK, G. C. & ZIENKIEWICZ, O. C. Note on the "Alpha"-constant stiffness method for the analysis of non-linear problems, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 4(4):579-82, July/Aug., 1972.
- [47] NEWMAN, S. P. Galerkin approach to saturated-unsaturated flow in porous media, in: INTERNATIONAL CONFERENCE ON THE FINITE ELEMENT METHOD IN FLOW ANALYSIS, Swansea, Jan. 7-11, 1974, Finite elements in fluids, London, John Wiley, 1975, v.1, p.201-17.
- [48] NEWMAN, S. P. Saturated-unsaturated seepage by finite elements, Journal of the Hydraulics Division, ASCE, 99(12):2233-50, Dec., 1973.

- [49] NEWMAN, S. P. & WITHERSPOON, P. A. Analysis of nonsteady flow with a free surface using the Finite Element Method, Water Resources Research, 7(3):611-23, 1971.
- [50] NEWMAN, S. P. & WITHERSPOON, P. A. Finite Element Method of analysing steady seepage with a free surface, Water Resources Research, 6:889-97, June, 1970.
- [51] NEWMAN, S. P. & WITHERSPOON, P. A. Variational principles for confined and unconfined flow of groundwater, Water Resources Research, 6(5): 1376-84, 1970.
- [52] PINDER, G. F. & FRIND, E. O. Application of Galerkin's procedure to aquifer analysis, Water Resources Research, 8(1):108-20, Feb., 1972.
- [53] PINTO, N. L. S. et alii. Evolução das pressões intersticiais na barragem do aproveitamento Capivari Cachoeira, Curitiba, COPEL, 1973.
- [54] ROA, F. R. & PARDO, J. F. M. Modelo de elementos finitos para la resolución de problemas de flujo en medios permeables, Boletín de Información del Laboratorio de Carreteras y Geotecnia, (148):3-13, nov./dic., 1981.
- [55] SANDHU, R. S. & WILSON, E. L. Finite element analysis of seepage in elastic media, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, 95(3):641-52, June, 1969.
- [56] TAYLOR, R. L. & BROWN, C. B. Darcy flow solutions with a free surface, Journal of the Hydraulics Division, ASCE, 93(2):25-33, Mar., 1967.
- [57] VALLENTINE, H. R. Applied hydrodynamics, 2.ed., London, Butterworths, 1969, 296p.
- [58] VOLKER, R. E. Nonlinear flow in porous media by finite elements, Journal of the Hydraulics Division, ASCE, 95(6):2093-114, Nov., 1969.

- [59] ZIENKIEWICZ, O. C. The Finite Element Method in engineering science, 2.ed., New York, McGraw-Hill, 1971, 521p.
- [60] ZIENKIEWICZ, O. C.; MAYER, P.; CHEUNG, Y. K. Solution of anisotropic seepage by finite elements, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, 92(1): 111-20, Feb., 1966.
- [61] ZIENKIEWICZ, O. C. & PAREKH, C. J. Transient field problems: two-dimensional and three-dimensional analysis by isoparametric finite elements, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2(1):61-71, Jan./Mar., 1970.