UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
CENTRO INTERDISCIPLINAR DE NOVAS TECNOLOGIAS NA EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO

RODRIGO SYCHOCKI DA SILVA

CADEIAS DE MARKOV E MODELAGEM MATEMÁTICA: DA ABSTRAÇÃO PSEUDO-EMPÍRICA À ABSTRAÇÃO REFLETIDA COM USO DE OBJETOS VIRTUAIS

PORTO ALEGRE
2015

RODRIGO SYCHOCKI DA SILVA

CADEIAS DE MARKOV E MODELAGEM MATEMÁTICA: DA ABSTRAÇÃO PSEUDO-EMPÍRICA À ABSTRAÇÃO REFLETIDA COM USO DE OBJETOS VIRTUAIS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação do Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias na Educação da Universidade Federal do Rio Grande Sul como requisito para a obtenção do título de Doutor em Informática na Educação.

Orientador:
prof. Dr. Dante Augusto Couto Barone

Coorientador:
prof. Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso

Linha de Pesquisa: Paradigmas para a Pesquisa sobre o Ensino Científico e Tecnológico.

PORTO ALEGRE

2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
Reitor: prof. Dr. Carlos Alexandre Netto
Vice-Reitor: prof. Dr. Rui Vicente Oppermann
Pró-Reitor de Pós-Graduação: prof. Dr. Vladimir Pinheiro do Nascimento
Diretor do CINTED: prof. Dr. José Valdeni de Lima
Coordenador do PPGIE: prof. Dr. Eliseo Berni Reategui

CIP - Catalogação na Publicação

Sychocki da Silva, Rodrigo
Cadeias de Markov e Modelagem Matemática: da abstração pseudo-empírica à abstração refletida com uso de objetos virtuais / Rodrigo Sychocki da Silva. -- 2015.
191 f.

Orientador: Dante Augusto Couto Barone.
Coorientador: Marcus Vinicius de Azevedo Basso.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Centro de Estudos Interdisciplinares em Novas Tecnologias na Educação, Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação, Porto Alegre, BR-RS, 2015.

1. Abstração. 2. Modelagem Matemática. 3. Tecnologias Digitais. 4. Tomada de Consciência. 5. Objetos Virtuais. I. Augusto Couto Barone, Dante, orient. II. Vinicius de Azevedo Basso, Marcus, coorient. III. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da UFRGS com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

RODRIGO SYCHOCKI DA SILVA

CADEIAS DE MARKOV E MODELAGEM MATEMÁTICA: DA ABSTRAÇÃO PSEUDO-EMPÍRICA À ABSTRAÇÃO REFLETIDA COM USO DE OBJETOS VIRTUAIS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação do Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias na Educação da Universidade Federal do Rio Grande Sul, como requisito para a obtenção do título de Doutor em Informática na Educação, na linha de pesquisa: **Paradigmas para a Pesquisa sobre o Ensino Científico e Tecnológico**.

Aprovada em 07 dezembro de 2015.

____

Prof. Dr. Dante Augusto Couto Barone (orientador). Instituto de Informática, UFRGS.

____

Prof. Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso (coorientador). Instituto de Matemática, UFRGS.

____

Prof. Dr. Victor Augusto Giraldo (UFRJ – Universidade Federal do Rio de Janeiro)

____

Profa. Dra. Débora da Silva Soares (UFRGS – Universidade Federal do Rio Grande do Sul)

____

Prof. Dr. Fernando Becker (UFRGS – Universidade Federal do Rio Grande do Sul)

Para meus pais, Neri e Lurdes,

& Denise Porto, meu amor...

"A persistência é o caminho do êxito."

Charles Chaplin

RESUMO[1]

Esta tese procura apresentar as contribuições da informática na construção de conceitos matemáticos. A partir de situações-problema e através de sequências de atividades, a proposta consistiu em desafiar os sujeitos envolvidos na concepção, criação e validação/reformulação de hipóteses sobre possíveis modelos matemáticos que pudessem representar e explicar diferentes fenômenos. O uso da modelagem matemática como método para a abordagem de conceitos matemáticos, segundo Rodney Bassanezi, é explorado neste trabalho, no sentido de possibilitar aos sujeitos envolvidos o estudo de fenômenos que possam ser investigados, assimilados e melhor compreendidos com o uso de ferramentas matemáticas. A metodologia de pesquisa utilizada é a engenharia didática de Michèle Artigue, a qual propõe a elaboração e aplicação de sequências de atividades para a abordagem de conteúdos matemáticos, que oportunizam também o exercício de reflexão sobre a prática docente do professor pesquisador envolvido. Ao longo da tese ocorreram três momentos de experimentação didática, contemplando diferentes sujeitos inseridos nas modalidades de ensino básico e superior, como também professores de matemática. Os registros dos participantes em todas as etapas dos experimentos foram produzidos de forma escrita e constituíram um importante material para análise e reflexão sobre a proposta. A teoria da abstração reflexionante, juntamente com a teoria da tomada de consciência, ambas de Jean Piaget, é utilizada como fundamentação teórica para analisar como os sujeitos envolvidos com as atividades propostas avançam na direção do conhecimento, seja por meio de suas ações sobre os objetos virtuais utilizados nas atividades como também na evolução das suas coordenações de ações ao longo do processo. O uso das tecnologias digitais por meio de objetos virtuais construídos no software GeoGebra tem um importante destaque na execução da pesquisa, uma vez que pelo seu uso foi oportunizado aos sujeitos para que, através de micro-avanços construíssem gradual e significativamente os conceitos matemáticos necessários para a compreensão do fenômeno por eles investigado. Ao final da tese mostramos que a partir do uso das tecnologias digitais na investigação de situações-problema ocorreu a criação e manutenção de uma nova forma de pensamento por parte dos sujeitos envolvidos: o pensamento hipotético-contínuo. Notou-se que a cada modificação na tela do computador via mudança de parâmetros, houve uma reorganização dos esquemas, estabelecimento de novas abstrações que agiram na direção da formação de novas hipóteses, as quais avançaram de modo dinâmico e iterativo, promovendo a reorganização ou reestruturação das estruturas do sujeito. Portanto, a partir dos resultados obtidos com a pesquisa mostra-se que há relação intrínseca entre a continuidade no processo de abstração reflexionante (aperfeiçoamento dos esquemas assimiladores, modificação das estruturas anteriores) com o aperfeiçoamento e construção das hipóteses por parte do sujeito.

Palavras-chave: Abstração. Modelagem Matemática. Tecnologias Digitais. Tomada de Consciência. Objetos Virtuais.

[1] SILVA, R. S. **Cadeias de Markov e Modelagem Matemática: da abstração pseudo-empírica à abstração refletida com uso de objetos virtuais**. Porto Alegre, 2015. 191f. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação (PPGIE). Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre. 2015.

ABSTRACT

This thesis seeks to present the computer's contributions in the construction of mathematical concepts. From problem situations and through activities sequences, the proposal was to challenge those involved in the design, creation and validation/reformulation of hypotheses about possible mathematical models that could represent and explain different phenomena. The use of mathematical modeling as a method for addressing mathematical concepts, according to Rodney Bassanezi, is explored in this work, to enable individuals involved the study of phenomena that can be investigated, assimilated and better understood using mathematical tools. The research methodology used is the didactic engineering Michèle Artigue, which proposes the development and implementation of activities sequences for the approach of mathematical content, which also nurture the exercise of reflection on the teaching practice of teacher researcher involved. Along the thesis occurred three times in a didactic experimentation, covering different subjects entered in the categories of basic and higher education, as well as math teachers. Records of participants at all stages of the experiments were produced in written form and were an important material for analysis and reflection on the proposal. The theory of reflective abstraction, along with the theory of awareness, both of Jean Piaget, is used as a theoretical basis for how to analyze the subjects involved in the activities proposed advance towards the knowledge, either through their actions on objects virtual used in the activities as well as the evolution of its actions coordination throughout the process. The use of digital technologies through virtual objects constructed in GeoGebra software has an important emphasis in the implementation of research, since for its use was oportunizado the subject so that, through micro-progress build gradually and significantly the mathematical concepts needed to understanding the phenomenon they investigated. At the end of the thesis we show that from the use of digital technologies in the research problem situations occurred the creation and maintenance of a new way of thinking on the part of those involved: the hypothetical-continuous thought. It was noted that every change on the computer screen via changing parameters, there was a reorganization of schemes, establishment of new abstractions that acted towards the formation of new hypotheses, which have advanced dynamic and iterative way, by fostering reorganization or restructuring of subject structures. Therefore, from the results obtained from the research it is shown that there is an intrinsic relationship between continuity of reflective abstraction process (improvement of assimilators schemes, modifying the previous structures) with the improvement and construction of hypotheses by the subject.

Keywords: Abstraction. Mathematical Modeling. Digital technologies. Consciousness-making. Virtual objects.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Segundo D'Ambrosio (1996), a matemática é uma ciência complexa e requer tempo para que os estudantes logrem a compreensão de seus conceitos. Destaca-se que além das aplicações inerentes à própria matemática, seja também plausível que os conceitos abordados nesta disciplina sejam compreendidos pelos estudantes como aplicáveis à sua vida, seja ela cotidiana ou profissional. As chamadas Cadeias de Markov[2] são usadas em diversas aplicações na ciência tais como: geografia, biologia, administração, economia, química e na própria matemática. Em todas essas disciplinas, as Cadeias de Markov podem descrever um modelo matemático que é realizado muitas vezes da mesma maneira, através de uma seqüência de etapas as quais estão relacionadas através de sucessivas iterações. Geralmente, o estudo desse assunto é realizado apenas no ensino superior, em algumas disciplinas específicas nos cursos de graduação em ciências exatas[3].

A escolha e adaptação dos fenômenos matemáticos envolvidos e o uso da tecnologia digital foram fundamentais para o desenvolvimento desta pesquisa, uma vez que a tecnologia emergiu como recurso essencial na exploração das situações-problema. Percebe-se que as diretrizes oficiais para o ensino médio propõem que a organização curricular seja de caráter interdisciplinar, porém o que se observa é o ensino de alguns conteúdos de matemática ocorrendo de forma fragmentada; o estudante não consegue talvez perceber a importância que tais conteúdos têm para a modelagem e resolução de situações-problema que ocorrem em diversos fenômenos da ciência. Nas palavras de Brasil (2013, p.244):

> "A organização curricular deve fundamentar-se em metodologia interdisciplinar, que rompa com a fragmentação do conhecimento e a segmentação presentes na organização disciplinar tradicionalmente adotada de forma linear. Esse tradicional modelo educacional foi criticado por Paulo Freire, na obra "Pedagogia do Oprimido", como sendo "educação bancária". Criticou como os conteúdos culturais que formavam o currículo escolar eram frequentemente descontextualizados, distantes do mundo experiencial de seus estudantes. As

---

[2] Nome dado em homenagem ao matemático russo Andrei Andreyevich Markov que as criou inicialmente em 1907.

[3] Podem ser encontradas disciplinas de Ensino Superior que tratam das Cadeias de Markov nas seguintes instituições: Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG, disciplina: Pesquisa Operacional 2, link: http://homepages.dcc.ufmg.br/~gomide/cefetmg/20122/po2/); Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP, disciplina: Processos Estocásticos, link: http://www.iceb.ufop.br/deest/p3f1l_d3p4rt4m3nt03st/arquivos/0.172712001381487420.pdf); Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul (PUCRS, disciplina: Avaliação de Desempenho de Sistemas, link: https://www.inf.pucrs.br/~fldotti/ads/); Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS, disciplina: Processos Estocásticos, link: http://www1.ufrgs.br/graduacao/xInformacoesAcademicas /curriculo.php?CodHabilitacao=40&CodCurriculo=123&sem=2014022); Universidade Estadual do Ceará (UECE, disciplina: Processos Estocásticos, link: http://www.uece.br/macc/index.php/disciplinas); Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP, disciplina: Processos Estocásticos para Engenharia, link: http://www0.fee.unicamp.br/cpg/Catalogo1S2013.html) e Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Santa Catarina (IFSC, disciplina: Comunicação Digital, link: http://www.sj.ifsc.edu.br/~mdoniak/CDI_20705/PlanoEnsino_Doniak_CDI_2013_2.pdf). Todos os links anteriores foram acessados em dezembro de 2014.

> disciplinas escolares eram trabalhadas de forma isolada, não propiciavam a construção e a compreensão de nexos que permitissem sua estruturação com base na realidade. No procedimento interdisciplinar, os componentes curriculares são compostos de forma integrada e estão voltados para a participação ativa do aluno no seu processo de aprendizagem. O desafio maior para o professor, ao atuar segundo este modelo, reside na sistematização da atuação do estudante e na orientação do mesmo nas trilhas da aprendizagem de forma permanente. A interdisciplinaridade, portanto, deve ir além da justaposição de componentes curriculares, abrindo-se para a possibilidade de relacioná-los em atividades ou projetos de estudos, pesquisa e ação, para dar conta do desenvolvimento de saberes que os conduzem ao desenvolvimento do perfil profissional de conclusão planejado para o curso."

A ideia de interdisciplinaridade também é manifestada no parecer[4] das Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação Inicial e Continuada dos Profissionais do Magistério da Educação Básica. No documento é possível perceber a intencionalidade quanto às formas de elaboração e construção do conhecimento, sugerindo-se para que as mesmas não ocorram de forma isolada e fragmentada. Na matemática, em especial, durante a formação inicial do professor é importante que a interdisciplinaridade seja valorizada e assim oportunize a construção dos mais diversos conhecimentos matemáticos, implicando em futuras contribuições na matemática desenvolvida na sua sala de aula.

Durante minha experiência como docente das diversas modalidades de ensino me deparei (e deparo-me ainda...) com estudantes inseridos em um sistema de ensino da matemática até então predominantemente clássico, em que as aulas de matemática poderiam ser caracterizadas por se constituir apenas em atividade de efetuar cálculos sem a possibilidade de investigar situações-problema que envolvam simultaneamente diversos conteúdos de matemática. Quando proponho a discussão de problemas ou situações mais elaboradas com raciocínios que envolvem argumentação, geralmente os estudantes manifestam algumas dificuldades em assimilar a situação e mobilizar as ideias necessárias no processo para a construção de conceitos e compreensão sobre situação.

Ao fazer o estudante, independente da modalidade de ensino a qual ele está inserido, compreender a importância da matemática para modelar fenômenos da realidade e ao destacar a importância da informática como ferramenta para representar e manipular diferentes situações, propõe-se o uso de ferramentas digitais na intenção de oportunizar uma melhor compreensão sobre determinados conteúdos matemáticos. Na abordagem dos conceitos da geometria, por exemplo, tenho a possibilidade de utilizar nas minhas aulas *softwares* de geometria dinâmica[5], e com isso oportunizar aos estudantes que um novo olhar seja dado sobre os elementos matemáticos que

---

[4]Parecer disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=17625-parecer-cne-cp-2-2015-aprovado-9-junho-2015&category_slug=junho-2015-pdf&Itemid=30192 (acesso em setembro de 2015)

[5]Exemplos de softwares que possibilitam explorar geometria dinâmica: *Cabri-Geometry, Geospace, Poly, Régua e Compasso, Super Logo* e *Geogebra*. Para mais informações há indicações e detalhes sobre os softwares no site da profa. Dra. Maria Alice Gravina (UFRGS). Disponível em: http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/softwares /soft_geometria.php

pretendo abordar. Através do uso de *softwares* específicos sobre geometria acredita-se que a visualização e capacidade de argumentação dos estudantes sobre as propriedades geométricas das figuras investigadas sejam potencializadas, e consequentemente, a aprendizagem dos conceitos seja qualitativamente valorizada.

Logo, acredita-se que o conhecimento matemático apresentado aos estudantes de forma isolada e sem relação com os demais, acaba por tornar a matemática uma ciência isolada e muitas vezes desvinculada e não relacionada com os aspectos da realidade; uma anti-ciência. Diante disso, a possibilidade de explorar matematicamente alguns fenômenos da realidade, por meio da modelagem matemática, constitui um cenário em potencial para o desenvolvimento e aprimoramento do pensamento hipotético e abstrato, caracterizado pela criação, validação ou refutação e reformulação de hipóteses pelo sujeito envolvido na proposta. Entende-se neste caso que serão necessários e suficientes a ação e o trabalho cognitivo dos sujeitos sobre os objetos do conhecimento em estudo, os quais possibilitam aos estudantes a evolução, compreensão e construção dos conceitos matemáticos envolvidos.

Nesse sentido, através de sequências de atividades que fazem uso de recursos tecnológicos, utilizam-se objetos virtuais para acompanhar a evolução dos sujeitos durante a investigação de situações-problema envolvendo Cadeias de Markov. Ao longo da proposta buscou-se refletir e compreender como é possível que o sujeito construa um modelo matemático capaz de explicar o fenômeno investigado, a partir de suas ações e coordenações de ações sobre os objetos envolvidos, sejam materiais, virtuais ou mentais. Vê-se no uso da tecnologia uma possibilidade/meio/recurso de o sujeito agir sobre o objeto de conhecimento, tornando possível o estabelecimento de relações que permitam a construção de conceitos matemáticos. A teoria da abstração reflexionante proposta por Piaget (1977) constituiu uma ferramenta importante na presente tese para analisar a evolução dos sujeitos envolvidos com a proposta. Com essa teoria, espera-se ser possível analisar se a construção de um possível modelo matemático ocorre como o resultado de sucessivos e graduais micro-avanços cognitivos do sujeito durante a sua ação sobre o objeto em estudo.

A intenção do presente texto é refletir e argumentar sobre a construção do conhecimento matemático seja resultado da possível combinação dos fatores: (1) da evolução da atividade cognitiva do sujeito, manifestada pelo aperfeiçoamento no processo da abstração; (2) do aperfeiçoamento da ação e coordenação das ações dos sujeitos sobre os objetos em estudo; (3) do uso da tecnologia digital como parceira no estabelecimento de relações entre o sujeito e o objeto de conhecimento, potencializando a análise, interpretação e construção de modelos matemáticos provenientes do uso do computador.

Considera-se que a partir da possível combinação dos três fatores apresentados anteriormente seja oportunizado ao sujeito desenvolver e aperfeiçoar uma qualidade de pensamento denominada *hipotético-contínuo*. Ou seja, acredita-se que há relação entre a *continuidade* no processo de abstração (aperfeiçoamento dos esquemas assimiladores, modificação das estruturas interiores) com o processo de *aperfeiçoamento e construção das hipóteses*. A cada modificação na tela do computador (via mudança de parâmetros, por exemplo) há uma reorganização dos esquemas, estabelecimento de novas abstrações que agem na direção da formação de novas hipóteses, as quais avançam de modo dinâmico e iterativo, promovendo a reorganização ou reestruturação das estruturas no sujeito.

Portanto, na construção do presente trabalho de tese visamos responder a seguinte questão de pesquisa: *Como evolui a abstração refletida (abstração reflexionante com tomada de consciência), na construção de conceitos matemáticos durante a exploração de situações-problemas de modelagem matemática com Cadeias de Markov em uma sequência didática usando objetos virtuais?* Considera-se que a partir dessa questão norteadora seja possível construir uma argumentação que possa explicar de modo satisfatório o processo de construção do pensamento hipotético-contínuo por parte dos sujeitos investigados ao longo dos experimentos didáticos. Os sujeitos envolvidos nas experimentações foram: estudantes do ensino médio, estudantes do ensino superior e professores de matemática.

A estrutura da presente tese está disposta em capítulos, organizados da maneira explicada conseguinte. No capítulo 2, dividido em duas partes, apresenta-se a fundamentação teórica necessária para o trabalho: modelagem matemática e tecnologias digitais; e conceitos de epistemologia genética (abstração reflexionante e tomada de consciência). O capítulo 3 apresenta a matemática envolvida nas Cadeias de Markov e contribuições observadas em pesquisas já realizadas e que versem sobre o seu ensino. No capítulo 4, destinado à metodologia, constrói-se o problema de pesquisa, caracteriza-se o cenário de pesquisa descrevendo-se também os materiais e métodos utilizados ao longo dos experimentos didáticos. O capítulo 5 é destinado às análises e reflexões sobre os dados obtidos a partir da realização dos experimentos didáticos. A análise está construída à luz dos conceitos de epistemologia genética apresentados no capítulo dois. O capítulo 6 trata de apresentar uma análise global dos experimentos didáticos realizados e também discutir sobre a inspiração no uso de conceitos da engenharia didática durante a construção da proposta metodológica da pesquisa. No capítulo 7, apresentam-se reflexões finais a partir da pesquisa, como também se realiza um exercício de *brainstorming*, identificando possíveis contribuições e avanços para pesquisas futuras. Finalmente, no capítulo 8 está apresentada construção de um possível produto virtual, elaborado a partir das sequências de atividades e objetos virtuais utilizados ao longo da pesquisa.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 MODELAGEM MATEMÁTICA & TECNOLOGIAS DIGITAIS

2.1.1 – Sobre Modelagem Matemática

Nesta seção discutem-se ideias sobre modelagem matemática e suas contribuições para o ensino de matemática. Faz-se na presente seção uma reflexão sobre como a modelagem matemática contribui para a formação dos sujeitos inseridos nos mais diversos níveis e ambientes escolares, contribuindo na elaboração e construção de conceitos matemáticos.

Inicialmente, Meyer *et al* (2011) afirmam que:

> "A Matemática é considerada estigma, ou seja, ao mesmo tempo em que boa parte da sociedade tem medo da Matemática que nós criamos, também acontece o contrário. Da mesma maneira que ouvimos dizer que, se alguém é bom em Matemática, é bom em tudo, também existem muitas pessoas que consideram a Matemática inútil. A Matemática é verdadeira e inútil. A maioria das pessoas não consegue relacionar a Matemática nem com as outras ciências e muito menos com situações de seus cotidianos, porque foi criado um universo à parte, ou seja, para elas, a Matemática não está presente em outros contextos. Na Modelagem, esse sistema tem de ser mudado. Não se deve mais assistir aos objetos matemáticos, mas manipulá-los, porque rompemos com a concepção de que o professor ensina e passamos a acreditar na ideia de que o conhecimento não está somente nem no sujeito nem no objeto, mas na sua interação. Passamos de objetos que o professor ensina para objetos que o aluno aprende." (MEYER *et al*, 2011, p.24)

Nota-se na citação uma necessidade de compreensão das relações entre objetos e sujeitos. Ao mesmo tempo em que a matemática é desenvolvida por diversos sujeitos, inseridos em determinado contexto de sociedade e realidade, verifica-se certo desconhecimento sobre a importância que a ciência matemática tem para o avanço e desenvolvimento da sociedade. Refletir sobre como a matemática e a realidade são conceitos distintos e estão correlacionados é fundamental para que os mais diversos fenômenos observados na realidade possam ser compreendidos fazendo-se uso das ideias e conceitos matemáticos.

A realidade e seus complexos fenômenos que nos cercam fazem com que a matemática seja uma ferramenta, ou ainda, um recurso para que seja possível aproximar-se cada vez mais dos objetos da realidade. Um dos modos de realizar uma aproximação é encarar uma possível representação da realidade através da modelagem matemática. Sobre a possibilidade de a modelagem ser uma das possíveis representações da complexa realidade, Skovsmose (2011) disserta:

> "A concepção de *modelagem matemática como representação* (grifo do autor) da realidade está relacionada a um dualismo, a uma perspectiva de dois-mundos. Por um lado, podemos operar com conceitos matemáticos como sendo parte do mundo das estruturas, como sugerido pelo formalismo. Por outro, podemos operar com a realidade do mundo empírico. Um modelo matemático se torna uma representação de parte dessa realidade. Decerto, tal representação não pode ser completa. Como poderíamos sonhar em fazer uma representação completa da realidade? Mas a linguagem matemática pode representar diferentes aspectos da realidade. As noções da teoria matemática selecionada podem se referir aos objetos empíricos, e as relações entre esses objetos podem ser descritos em termos de equações." (SKOVSMOSE, 2007, p.107)

Ao mesmo tempo em que avança o desenvolvimento da matemática, a modelagem matemática busca, através do estabelecimento e manutenção de relações estabelecidas entre os sujeitos e os objetos do conhecimento, empenhar-se na compreensão da realidade. A tentativa de criar relações e expressar em termos de equações os mais diversos fenômenos faz da modelagem matemática uma proposta investigativa, baseada principalmente na elaboração, verificação e validação de possíveis hipóteses por parte do sujeito. Neste contexto Skovsmose (2007) afirma que é possível com isso estabelecer a criação de dois mundos. Acrescentamos que esses dois mundos são disjuntos e complementares, constituindo através das relações entre eles um aspecto importante no processo de investigação sobre os fenômenos da realidade.

Sobre a manifestação dos dois mundos, o autor considera que o primeiro seja o da realidade. Tal mundo caracteriza-se por ser o habitat dos fenômenos e suas inúmeras complexidades. Trata-se do que é possível constatar ou visualizar, seja por manifestação espontânea ou desafiada pelos sujeitos. Já o segundo mundo, derivado do primeiro, para o autor constitui-se na idealização. É o mundo criado e mantido pelos sujeitos; o qual através de relações os sujeitos tentam aproximar-se da realidade que habita o primeiro mundo. A compreensão da realidade constitui um processo gradual, no qual uma representação da realidade exerce papel fundamental no avanço e determinação de novos e melhores modelos matemáticos. A cada etapa do processo, *a priori* é possível afirmar que há uma reestruturação e possível reorganização do sujeito em busca da máxima compreensão da realidade.

Skovsmose (2007, p.122, 123) apresenta o termo "matemática em ação". Trata-se de uma tentativa de entendimentos sobre como as ideias matemáticas são projetadas na realidade. A construção de uma possível matemática em ação nas palavras do autor ocorre:

> "Ao falar em matemática em ação, estou me concentrando em ver como as concepções matemáticas são projetadas na realidade. Quando usamos a matemática como uma base para projeto tecnológico criamos uma ferramenta tecnológica que tem, de algum modo, sido conceitualizada por meio da matemática. Em algum sentido, foi antecipado no mundo da matemática e depois foi trazido à realidade por uma construção real. Um processo de elaborar projetos inclui a identificação e

a análise de situações hipotéticas, e a matemática ajuda fornecendo material para construir tais situações. Por meio da matemática podemos representar algo ainda não compreendido e, portanto, identificar alternativas tecnológicas para uma dada situação. A matemática dá uma forma de liberdade tecnológica, abrindo um espaço para situações hipotéticas." (SKOVSMOSE, 2007, p.122, 123)

Neste sentido, o autor apresenta três aspectos que, interligados, tem grande importância na compreensão da realidade por meio da matemática. Mais especificamente, como a matemática em ação contribui para o melhoramento dos modelos matemáticos e assim, possa colaborar para o aumento da compreensão sobre os fenômenos da realidade. Sobre os três aspectos, Skovsmose apresenta:

"A matemática fornece a possibilidade para *raciocínio hipotético* (grifo do autor), pelo que eu me refiro à análise de conseqüências de um cenário imaginário. Por meio da matemática parecemos aptos a investigar detalhes particulares de um projeto ainda não realizado. Assim a matemática constitui um instrumento importante para levar adiante o experimento mental detalhado." (SKOVSMOSE, 2007, p.124)
"Por meio da matemática é possível investigar detalhes particulares de uma situação hipotética, embora a matemática também cause severas limitações para tal raciocínio hipotético (grifo do autor). Qualquer projeto tecnológico tem implicações não identificadas pelo raciocínio hipotético. Esse é um problema básico relacionado a qualquer tipo de investigação de contrafatos baseada matematicamente." (SKOVSMOSE, 2007, p.125)
"(...) Isso nos leva a um terceiro aspecto da matemática em ação. Este aspecto concerne à compreensão: *a matemática embasa a modulação e constituição de uma ampla variedade de fenômenos sociais e, desse modo, ela se torna parte da realidade* (grifo do autor). Vivemos em um ambiente que integra uma realidade virtual fundamentada no modelo a uma realidade já construída em uma mistura formidável." (SKOVSMOSE, 2007, p.127)

Percebe-se que os argumentos apresentados anteriormente sobre matemática em ação reforçam nossa concepção sobre a importância e contribuição que os sujeitos têm no desenvolvimento dos conceitos. Nota-se que a ciência matemática destaca-se na compreensão e modelagem dos fenômenos, uma vez que por meio dela é possível aumentar nosso entendimento sobre os objetos do conhecimento e fenômenos da realidade. Juntando-se os três aspectos propostos, o autor conclui que:

"Postos juntos, os três aspectos transmitem a seguinte mensagem: (a) Por meio da matemática é possível estabelecer um espaço de situações hipotéticas na forma de alternativas (tecnológicas) possíveis para uma situação presente. Entretanto, pode ter sérias limitações. (b) por meio da matemática, na forma de raciocínio hipotético, é possível investigar detalhes particulares de uma situação hipotética, mas esse raciocínio também pode incluir limitações e, portanto, incertezas para justificar as escolhas tecnológicas. (c) Como parte da compreensão das tecnologias, a própria matemática se torna parte da realidade e inseparável de outros aspectos da sociedade. O racional se torna real, ainda que nada indique que o real se torne racional." (SKOVSMOSE, 2007, p.128)

Ou seja, o autor considera que a matemática constitui um aspecto importante e necessário na compreensão dos fenômenos, destacando que há possíveis limitações durante o processo. A possibilidade de desenvolvimento do raciocínio hipotético é reforçada constantemente pelo autor, destacando inúmeras vezes a importância que tal forma de raciocínio tem para o avanço dos sujeitos na compreensão dos objetos. Como aspecto central de sua proposta, o autor sugere que a matemática surge então como parte inseparável da realidade, cabendo ao sujeito uma postura crítica e reflexiva sobre sua evolução na ação sobre os objetos investigados. Constata-se que Skovsmose propõe que um trabalho envolvendo a modelagem de determinado aspecto da realidade atravessa etapas; e que essas etapas estão interligadas através da ação dos sujeitos que a executam.

Skovsmose (2007, p.130) expõe que compreender a realidade trata-se de um processo gradual e que envolve um complexo jogo de linguagens. Caso a matemática seja considerada uma linguagem[6], duas questões emergem do pensamento *Skovsmosiano*: (1) Qual visão de mundo pode ser construída através da matemática? (2) O que é "mundo" de acordo com a matemática? O autor considera que a matemática constitui algo mais que uma simples linguagem. Através das três noções de matemática em ação, expostas anteriormente, pode-se construir uma resposta talvez parcialmente satisfatória para essas duas questões. A noção do que vem a ser jogo de linguagem[7] foi amplamente explorada por Ludwig Wittgenstein[8] em sua obra. Não é intenção de o presente texto fazer um estudo teórico aprofundado da importância e presença dos jogos de linguagem na matemática. Destaca-se, porém que tais jogos de linguagem existem e constituem uma variável importante na tentativa de compreender os fenômenos da realidade por meio da modelagem matemática. Logo, ao refletir sobre as ideias expostas anteriormente, nota-se que os conceitos apresentados por Skovsmose amparados nas ideias sobre "jogos de linguagem" propostos por Wittgenstein indicam que a modelagem matemática tem uma importante influência na constituição dos sujeitos enquanto investigadores dos objetos do conhecimento.

---

[6] É importante mencionar que Jean Piaget faz uma crítica da concepção de que a matemática se reduz a uma linguagem. A matemática expressa as coordenações das ações humanas, através da linguagem matemática, mas não se reduz a essa linguagem. Sugestão de leitura: *La enseñanza de las matemáticas* (Madrid: Aguilar, 1968) e *Introduction à l'épistémologie génétique: la pensée mathématique* (v. 1), ambos de Jean Piaget. O segundo encontra-se disponível em: http://www.fondationjeanpiaget.ch/fjp/site/textes/index_extraits_chrono3.php

[7] "Com o conceito de "jogo de linguagem" Wittgenstein esclarece como atribuímos significado às nossas palavras. Segundo ele, estas só adquirem significados quando operamos com elas, portanto, dentro de um jogo de linguagem, que seria para Wittgenstein, a totalidade formada pela linguagem e pelas atividades com as quais vem entrelaçada. A palavra jogo vem ressaltar as diversas atividades com as quais a linguagem se vincula. A expressão "jogo de linguagem" é essencial na filosofia de Wittgenstein, pois ele também a emprega como um método para mostrar os diferentes usos dos conceitos em nossas formas de vida." (GOTTSCHALK, 2004, p.318)

[8] Ludwig Joseph Johann Wittgenstein (26 de Abril de 1889 – 29 de Abril de 1951) foi um filósofo austríaco que contribuiu com numerosas colocações inovadoras na filosofia moderna, mais especificamente nos campos da lógica, filosofia da linguagem, e filosofia da mente. Ele é largamente considerado um dos mais influentes filósofos do século XX. Disponível em: http://pensador.uol.com.br/autor/ludwig_wittgenstein/

Tratando-se da influência que a modelagem matemática possa exercer sobre os sujeitos, Almeida *et al* (2012), Biembengut & Hein (2011) discutem importantes contribuições para o ensino da matemática, especialmente no debate que envolve o uso da modelagem matemática na investigação de situações-problema.

Biembengut & Hein (2011) consideram que:

> "O modelo é uma imagem que se forma na mente, no momento em que o espírito racional busca compreender e expressar de forma intuitiva uma sensação, procurando relacioná-la com algo já conhecido, efetuando deduções. Tanto que a noção de modelo está presente em quase todas as áreas: Arte, Moda, Arquitetura, História, Economia, Literatura, Matemática. Aliás, a história da ciência é testemunha disso! O objetivo de um modelo pode ser explicativo, pedagógico, heurístico, diretivo, de previsão, dentre outros." (BIEMBENGUT & HEIN, 2011, p.11)

Logo, através da percepção, é possível constatarmos que o sujeito baseia-se na construção de modelos para aumentar a sua compreensão sobre determinado tema. É importante destacar que as limitações de cada sujeito fazem com que os modelos construídos também sejam de complexidade gradual. Dependendo da complexidade dos fenômenos investigados, a abordagem pode não ser de fácil assimilação pelos sujeitos, tornando a investigação e previsões do fenômeno investigado incapaz de ser realizado. Sobre essa percepção, envolvendo a complexidade do fenômeno, Biembengut & Hein (2011) dissertam e conceituam a modelagem matemática como:

> "(...) o processo que envolve a obtenção de um modelo. Este, sob certa óptica, pode ser considerado um processo artístico, visto que, para se elaborar um modelo, além de conhecimentos de matemática, o modelador precisa ter uma dose significativa de intuição e criatividade para interpretar o contexto, saber discernir que conteúdo matemático melhor se adapta e também ter senso lúdico para jogar com as variáveis envolvidas. A elaboração de um modelo depende do conhecimento matemático que se tem. Se o conhecimento matemático restringe-se a uma matemática elementar, como aritmética e/ou medidas, o modelo pode ficar delimitado a esses conceitos. Tanto maior o conhecimento matemático, maiores serão as possibilidades de resolver questões que exijam, uma matemática mais sofisticada. Porém o valor do modelo não está restrito à sofisticação matemática. A modelagem matemática é, assim, uma arte, ao formular, resolver e elaborar expressões que valham não apenas para uma solução particular, mas que também sirvam, posteriormente, como suporte para outras aplicações e teorias." (BIEMBENGUT & HEIN, 2011, p.12)

Com base nas ideias discutidas anteriormente pode-se verificar que a modelagem matemática possa apresentar níveis e complexidades graduais. Ao abordar situações-problema no ensino fundamental, por exemplo, o docente pode se deparar com a dificuldade apresentada pelos estudantes em elaborar e desenvolver formulações algébricas para as situações investigadas. Isto não qualifica o trabalho desenvolvido nas aulas de matemática como incorreto ou insatisfatório, pelo contrário, deve-se desafiar o docente, envolvido com a proposta, para que estruture e organize os seus objetivos para que sejam mais bem assimilados e compreendidos pelos estudantes. Neste sentido, Almeida *et al* (2012) dissertam:

> “Ao fazer uso da Matemática, considerando tanto a utilização de algoritmos quanto os conceitos matemáticos em si, os alunos podem aplicar conhecimentos já construídos durante as aulas ou construir novos conhecimentos. Em muitas situações, ao se envolver com atividades de modelagem, os alunos se deparam com um obstáculo para o qual não possuem, provisoriamente, conhecimentos suficientes para superá-lo, emergindo assim a necessidade de construir esse conhecimento por meio dessa atividade. Logo, em atividades de modelagem, aos alunos tanto podem ressignificar conceitos já construídos quanto construir outros diante da necessidade de seu uso.” (ALMEIDA *et al*, 2012, p.23)

Portanto, uma prática envolvendo o uso da modelagem matemática constitui uma potencial fonte de construção de conceitos matemáticos pelos sujeitos. Sobre uma possível adoção e uso de modelos matemáticos e suas contribuições na formação dos estudantes, Biembengut & Hein (2011) contribuem:

> “A adoção de modelos matemáticos no ensino, seja na forma de apresentação, seja no processo de criação, dimensionados de forma adequada à realidade das comunidades escolares, incorporando novas tecnologias, sem deixar de preservar identidades culturais, é um meio que propicia ao aluno atingir melhor desempenho, tornando-o um dos principais agentes da mudança. Ao participar de um trabalho com modelagem ou modelação, no qual o conteúdo não é dissociado da realidade, pois há conexão entre o que se aprendeu e o que se executou, acreditamos que alunos e professores tornar-se-ão mais entusiastas com a possibilidade de transformar a escola, ainda que de forma lenta e gradual, para que ela venha a exercer o papel que lhe cabe na preparação do indivíduo para atuar no meio circundante.” (BIEMBENGUT & HEIN, 2011, p.125)

As reflexões referidas anteriormente, destacando a transformação da “escola”, podem ser encaradas neste texto como uma possível transformação em qualquer instituição de ensino. De modo análogo à escola, as instituições de ensino superior também devem preparar os sujeitos para atuar nos meios circundantes. Portanto, a modelagem matemática apresenta-se como uma possibilidade de transformação nas relações entre os sujeitos e a realidade, que pode ser iniciada desde muito cedo na vida escolar. Logo, observa-se que durante o estudo de determinado problema, seja possível que os sujeitos envolvidos mobilizem diferentes esquemas e estratégias, com o objetivo de formular e investigar determinadas hipóteses. Trata-se, portanto, de um processo pelo qual são elaborados e estruturados de maneira progressiva os conceitos matemáticos envolvidos no estudo de determinada proposta. Logo, a modelagem matemática propõe que por meio da ação e investigação de situações-problema seja oportunizado ao sujeito aprender matemática por diferentes meios.

Sobre isso, Brasil (2006) expõe:

> “Ante uma situação-problema ligada ao “mundo real”, com sua inerente complexidade, o aluno precisa mobilizar um leque variado de competências: selecionar variáveis que serão relevantes para o modelo a construir; problematizar, ou seja, formular o problema teórico na linguagem do campo matemático envolvido; formular hipóteses explicativas do fenômeno em causa; recorrer ao conhecimento matemático acumulado para a resolução do problema formulado, o que, muitas vezes, requer um trabalho de simplificação quando o modelo originalmente pensado é matematicamente muito complexo; validar, isto é, confrontar as conclusões teóricas com os dados empíricos existentes; e eventualmente ainda, quando surge a necessidade, modificar o modelo para que esse melhor corresponda à situação real, aqui se revelando o aspecto dinâmico da construção do conhecimento.” (BRASIL, 2006, p.85)

Com o exposto na citação anterior, verifica-se que a modelagem matemática possa contribuir significativamente na investigação de problemas que envolvam criação e desenvolvimento de diversas formas de pensamento matemático. Nesse sentido, as pesquisas e ideias de Rodney Bassanezi contribuem para a discussão sobre a importância que a modelagem matemática tem no estudo da matemática. Segundo o autor:

> “A modelagem no ensino é apenas uma estratégia de aprendizagem, onde o mais importante não é chegar imediatamente a um modelo bem sucedido mas, caminhar seguindo etapas onde o conteúdo matemático vai sendo sistematizado e aplicado.” (BASSANEZI, 2002, p.38)

Ao manifestar a importância no processo de construção através de etapas durante a investigação de determinado conhecimento matemático, o autor defende que ao mesmo tempo em que as ideias são construídas elas também estão sendo reorganizadas e reconstruídas, constituindo uma tentativa de melhorar a compreensão da realidade. A elaboração de um modelo matemático constitui uma etapa importante durante a investigação, pois possibilita que o sujeito envolvido desenvolva e aja sobre diferentes representações para o fenômeno presente na realidade. Sobre esse trabalho de agir sobre a realidade, Bassanezi (2002) apresenta:

> “Modelagem Matemática é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual. A modelagem é eficiente a partir do momento que nos conscientizamos que estamos trabalhando com aproximações da realidade, ou seja, que estamos elaborando sobre representações de um sistema ou parte dele.” (BASSANEZI, 2002, p.24)

Logo, a modelagem matemática consiste em um gradual processo, no qual o sujeito desenvolve suas estratégias e formas de ações para analisar e investigar determinada situação-problema. Consiste em um importante método para a aprendizagem da matemática, pois envolve o desenvolvimento de um comportamento investigativo e reflexivo durante sua ação no estudo de um problema matemático. Pode-se dizer que este processo não se restringe apenas à apropriação dos conceitos e ideias limitados pela situação-problema investigada. Em determinada investigação surge também a possibilidade de abordar outros conceitos e ideias que estão na periferia do problema, complementando o estudo central da investigação. Sobre as contribuições da modelagem matemática para o desenvolvimento dos estudantes, Bassanezi (2002) expõe:

> "Com a modelagem o processo de ensino-aprendizagem não se dá mais no sentido único do professor para o aluno, mas como resultado de interação do aluno com seu ambiente natural. Na modelação, a validação de um modelo pode não ser uma etapa prioritária. Mais importante do que os modelos obtidos é o processo utilizado, a análise crítica e sua inserção no contexto sociocultural. O fenômeno modelado deve servir de plano de fundo ou motivação para o aprendizado das técnicas e conteúdos da própria matemática. As discussões sobre esse tema escolhido favorecem a preparação do estudante como elemento participativo na sociedade em que vive." (BASSANEZI, 2002, p.38)

Ao encarar a modelagem matemática como uma possibilidade para desenvolver possíveis conteúdos matemáticos com os estudantes o professor oportuniza que eles desenvolvam suas técnicas, elaborem hipóteses, investiguem a validade de seus argumentos e assim percebam que a matemática é uma ciência fundamentada em um processo de investigação baseado na ação do sujeito que tenta compreender os fenômenos da realidade. Com isso, se estabelece um processo que avança na tentativa de desenvolver junto aos estudantes a validação e generalização de ideias, possibilitando a construção e manutenção dos conceitos envolvidos durante a investigação. Sobre essa construção, Bassanezi (2002) disserta:

> "No entanto, boa parte da gênese das ideias matemáticas é fruto de abstrações de situações empíricas[9], que seguem posteriormente, a busca da alternativa estética e, quanto mais as ideias são aprofundadas e/ou generalizadas, mais se afastam da situação de origem, acumulando detalhes cada vez mais complexos e menos significativos para aqueles que estão fora deste campo de estudo. Na verdade, a matemática dita pura constrói ou descobre objetos de estudos próprios, tratando-os como entes ideais, abstratos/interpretados, existentes/criados apenas na mente humana, isto é, construídos de modo conceitual." (BASSANEZI, 2002, p.172)

Portanto, acredita-se que a investigação de situações nas quais a matemática contribui na formação e construção das ideias e conceitos tenha um caráter de excepcional importância. De acordo com Bassanezi, a modelagem matemática, ou a investigação das mais diversas situações-problemas constitui um processo que passa por diferentes fases ou etapas. Durante o processo de

---

[9] Embora Bassanezi afirme "...boa parte da gênese das ideias matemáticas é fruto de abstrações de situações empíricas...". Mais adiante no texto vê-se que Piaget diz que a matemática nasce por abstração reflexionante, da qual a abstração pseudo-empírica faz parte; isto é, o conhecimento matemático provém das coordenações das ações e não de situações empíricas.

investigação das situações-problema por meio da modelagem matemática as fases sugeridas por Bassanezi (2002, p.26) são:

1) *Experimentação*: Consiste em uma etapa inicial, caracterizada pelo contato inicial com o problema a ser estudado. O sujeito analisa e organiza os dados e informações que possam ser úteis nas etapas seguintes. Pode-se dizer que consiste de uma etapa, na qual prevalece a extração de características por parte do sujeito.
2) *Abstração*: Nas palavras de Bassanezi é esta etapa[10] que deve conduzir à formulação do modelo matemático. Trata-se de um processo que envolve o sujeito e sua ação sobre o problema investigado.
3) *Resolução*: Nessa etapa da modelagem matemática, obtém-se o modelo matemático através da substituição da linguagem natural das hipóteses por uma linguagem matemática. O autor afirma que neste nível a linguagem matemática seria capaz de traduzir diferentes níveis de sofisticação da linguagem natural;
4) *Validação*: Consiste no processo de aceitação ou não do modelo elaborado. É nesta etapa que ocorre a análise dos modelos, juntamente com as hipóteses sobre eles atribuídas, confrontando com os dados empíricos iniciais, comparando suas soluções. O autor explica que o grau de aproximação entre as previsões é um fator preponderante nessa etapa de validação.
5) *Modificação*: Quando os modelos são obtidos considerando simplificações e idealizações da realidade, e suas soluções não conduzem para previsões corretas, surge a necessidade de uma reformulação do modelo proposto. Bassanezi considera que nenhum modelo deva ser considerado definitivo ou acabado, podendo sempre ser melhorado, ou ainda que um bom modelo consista naquele que propicie a formulação de novos modelos, sendo que esta reformulação constitui uma das partes essenciais do processo de modelagem. Pode-se dizer que o grau de simplificação está relacionado ao grau de precisão das previsões, sendo isto parte do processo que ocorre e não um defeito do modelo construído.

Por meio das etapas presentes na modelagem matemática e apresentadas anteriormente, Bassanezi (2002) propõe um esquema que as organiza e relaciona. No esquema, o autor ainda propõe a existência de uma sexta etapa, caracterizada por ser de *aplicação* na modelagem matemática. Após ter ocorrido a validação ou modificação do modelo matemático construído, volta-se novamente para a etapa da resolução, na qual possa ser possível traduzir para a linguagem matemática o fenômeno observado.

[10] Segundo Piaget, a abstração trata-se de um *processo contínuo* e não meramente de uma etapa.

Ao ultrapassar as barreiras impostas pelo estudo do fenômeno é possível que o sujeito construa elementos teóricos que possam ser aplicados ou reaplicados em outras situações envolvendo a modelagem matemática, caracterizando assim a sexta etapa do processo de modelagem. Trata-se por parte do sujeito, de organizar e estruturar um método que possa ser usado novamente, da mesma forma, porém de modo reconstruído, para que ele possa interpretar e modelar outros problemas diante de novas situações. A figura 1 mostra o esquema sobre as etapas da modelagem matemática proposto por Bassanezi.

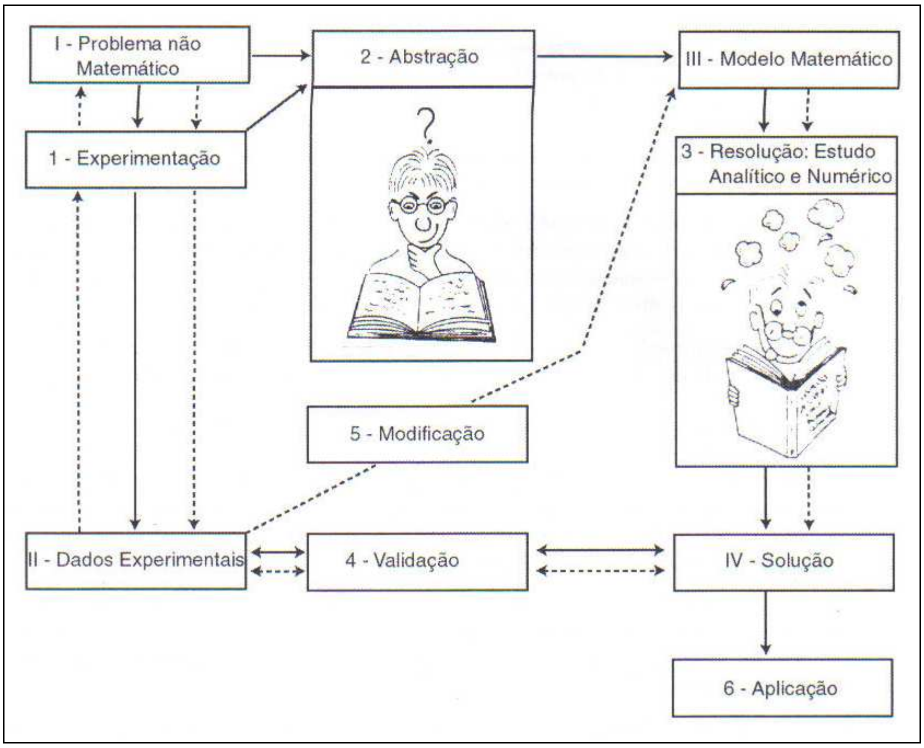


Figura 1 – Esquema das etapas da modelagem matemática (Fonte: Bassanezi, 2002, p.27)

Portanto, percebe-se que a modelagem matemática segundo Bassanezi constitui-se uma *metodologia de trabalho essencialmente centrada na ação do sujeito sobre as situações-problema que se impõe*. Até que determinado fenômeno possa ser traduzido de alguma forma para a linguagem matemática, a passagem por níveis graduais e sucessivos anteriores é essencial, pois isso caracteriza atividades essenciais do pensamento matemático, seja desde a coleta e observação dos dados de forma empírica até a formulação, análise e confronto das hipóteses. Nas palavras de Rosa (2012), a investigação por meio da modelagem matemática proporciona:

> "(...) um espaço educacional que favorece a deflagração da intervenção pedagógica do processo de ensino-aprendizagem em matemática, pois, nesse ambiente, os professores, como mediadores do processo educacional, auxiliam os alunos a externalizarem o conhecimento matemático tácito através de atividades pedagógicas contextualizadas, como por exemplo, a elaboração de modelos matemáticos. Isso significa que as atividades matemáticas desenvolvidas e os conceitos aprendidos através do ambiente de aprendizagem da modelagem

> introduzem novos modos de operação intelectual; por exemplo, abstrações e generalizações mais amplas acerca da realidade, que visam transformar os modos de utilização dos conhecimentos matemáticos tácitos e explícitos no ambiente acadêmico.” (ROSA, 2012, p.284)

Portanto, ao oportunizar aos estudantes o contato com situações-problema que potencializam o seu esforço intelectual fazendo com que a sua evolução na tentativa da compreensão ocorra gradual e progressivamente, os professores utilizam a modelagem matemática como um recurso para propiciar a construção e aprendizagem de conceitos da matemática. Consiste em processo que visa desenvolver junto aos estudantes a capacidade de se posicionar diante de um problema matemático, ou ainda, de desenvolver diferentes estratégias que possam ser utilizadas na elaboração, verificação e compreensão dos conceitos abordados. Ao incorporar o uso da modelagem matemática em sua prática, o professor torna a investigação de problemas matemáticos fonte para a construção de inúmeros conceitos, dos quais alguns se manifestam como centrais para a compreensão do problema e também outros conceitos que surgem da avaliação e investigação dos primeiros. Também é oportunizado que a partir de uma situação inicial sejam elaborados outros problemas que podem ser analisados e refletidos, cuja construção da solução auxilia na resolução da situação inicial. Sobre isso, diz Veleda (2010):

> “A investigação de fundamentos teóricos subjacentes a diferentes definições é essencial para consolidar aspectos e características importantes de cada definição e levam a reflexão de como a Modelagem Matemática pode ser caracterizada e utilizada pelo professor em sua prática pedagógica. Identificar como a realidade é tratada em Modelagem Matemática tem influência sobre as práticas – especialmente se considerarmos que nem sempre o modelo auxilia na resolução do problema inicial, mas sim de um problema criado para substituir aquele que de fato existe.” (VELEDA, 2010, p.82)

Por fim, as ideias apresentadas nessa seção sobre modelagem matemática constituem um aspecto essencial para o desenvolvimento e análise da proposta de estudo apresentada nesta tese. Anteriormente no texto afirmou-se que a modelagem matemática, segundo Bassanezi, consiste numa *metodologia de trabalho essencialmente centrada na ação do sujeito sobre as situações-problema que se impõe.* É de suma importância que a modelagem matemática desempenha um papel central na evolução do processo de construção de conhecimento matemático, uma vez que avalia por parte dos estudantes sua capacidade de mobilização na tentativa de compreensão sobre os fenômenos; e por parte do professor, considerado o mediador do processo, avalia a sua tentativa de mobilizar e desafiar os estudantes na criação, desenvolvimento e validação de ideias e hipóteses.

A seguir, por meio de um mapa conceitual, busca-se organizar e apresentar essa subseção do presente texto. Consiste em estabelecer através de um mapa conceitual as possíveis relações da modelagem matemática para o desenvolvimento da presente pesquisa. O mapa está apresentado na figura 2 a seguir.

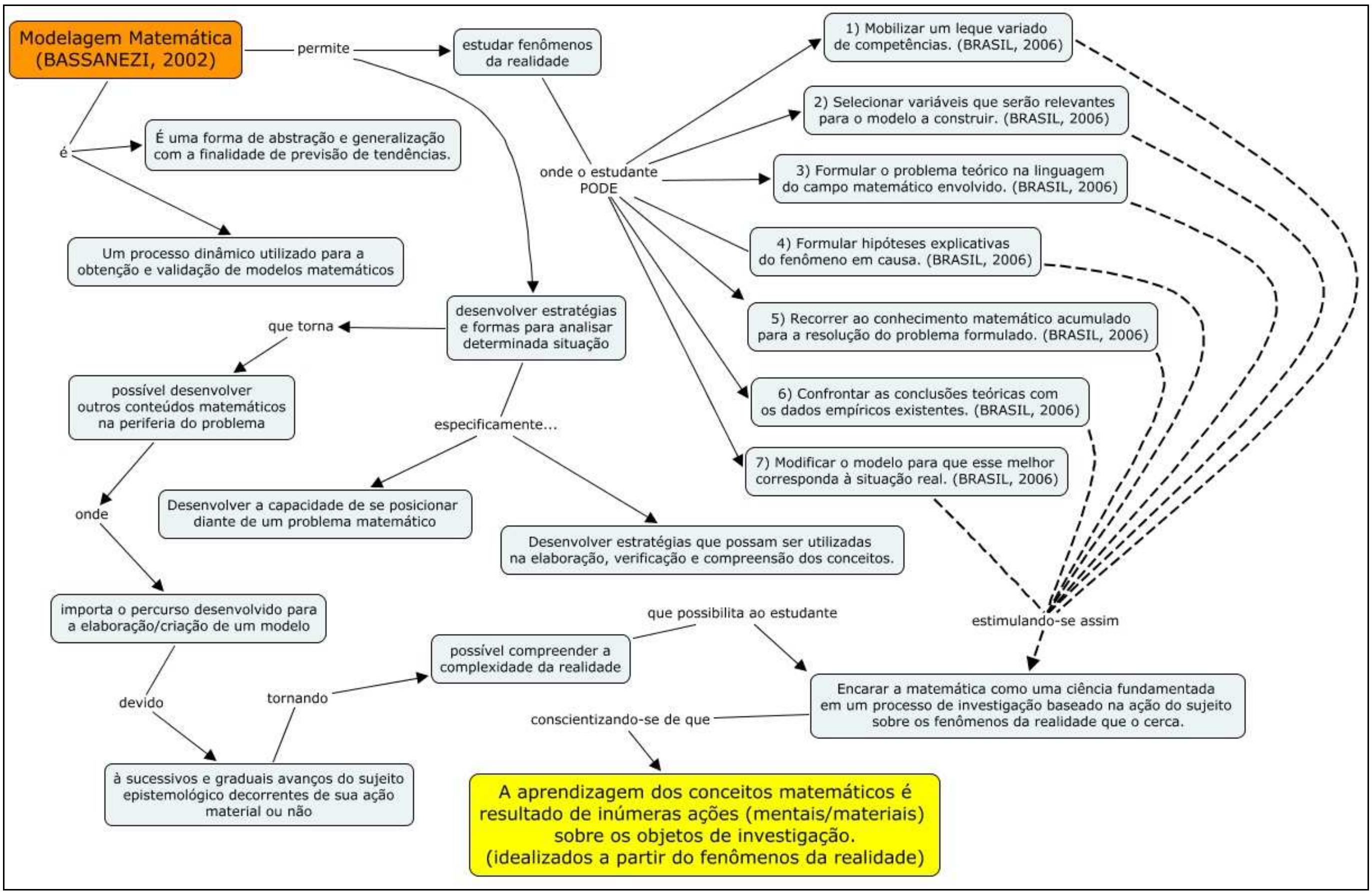


Figura 2 – Mapa Conceitual sobre a importância da modelagem matemática na pesquisa.

2.1.2 – Sobre Modelagem Matemática & Tecnologias Digitais

Tratando-se da influência que a modelagem matemática possa exercer sobre os sujeitos, debruçamo-nos agora na tentativa de justificar que uma proposta de trabalho envolvendo o estudo de fenômenos da realidade fazendo uso da matemática e de recursos tecnológicos constitui um aspecto importante na formação de todos os sujeitos envolvidos com a proposta. Para tal, fundamentamos nossas ideias em Almeida *et al* (2012), Powell (2014), Tall & Dubinsky (1991), Tall (1986, 1999), Allevato (2005), Borssoi (2013), Malheiros (2004), Soares (2012), Araújo (2002) e Soistak (2010). Os autores discutem importantes contribuições para o ensino da matemática, especialmente no debate que envolve o uso das tecnologias e da modelagem matemática na investigação de situações-problema.

Tratamos de apresentar e refletir sobre estudos realizados e que contribuam para a discussão que envolve o uso das tecnologias digitais durante a execução da presente proposta. Argumenta-se que o processo envolve uma aprendizagem múltipla, na qual o professor e os estudantes envolvidos aprendem por meio do estabelecimento e manutenção de relações com os objetos de conhecimento e estudos envolvidos.

Neste contexto, a tecnologia digital surge como uma variável em potencial para colaborar no processo de transformação dos sujeitos. Almeida *et al* (2012) defende o uso das mídias digitais, em especial nas investigações envolvendo modelagem matemática. Como justificativas plausíveis, os autores consideram que o uso da tecnologia:

> “a) possibilita lidar com situações-problema mais complexas e fazer uso de dados reais, ainda que estes sejam em grandes quantidade ou assumam valores muito grandes; b) permite que a maior parte dos esforços se concentre nas ações cognitivas associadas ao desenvolvimento da atividade de modelagem, considerando que a realização de cálculos, aproximações e representações gráficas é mediada pelo uso do computador; c) possibilita lidar com situações-problema por meio de simulações numéricas ou gráficas, variando a parâmetros nas representações gráficas e (ou) algébricas.” (ALMEIDA *et al*, 2012, p.32)

Sobre o uso das tecnologias, pesquisas científicas publicadas foram consultadas e serviram para sustentar nosso argumento da importância no uso das tecnologias digitais no ensino da matemática. A seguir procura-se refletir e apresentar os estudos consultados, a fim de enriquecer a discussão no presente trabalho. Inicialmente, constata-se na fala de Powell (2014) uma observação que relaciona a velocidade com que a tecnologia e as inovações ocorrem, e destaca possíveis relações no desenvolvimento e aperfeiçoamento dos novos produtos tecnológicos:

> “O primeiro desafio trata da velocidade das mudanças tecnológicas e a necessidade de que pesquisadores e educadores investiguem como aproveitar as novas tecnologias. (...) Associado à rapidez dos avanços das tecnologias de informação e comunicação, o segundo desafio está relacionado com a necessidade de colaboração para encontrar soluções relativas ao design de projetos e desenvolvimento de novos produtos, mídias e serviços para melhorar a vida do planeta e de seus habitantes. Argumentamos que há três aspectos relativos à produção de conhecimentos que o mundo atual privilegia: (1) a interação interpessoal e social, (2) a resolução de problemas e (3) a comunicação.” (POWELL, 2014, p.14)

Em contraste com a velocidade na evolução da tecnologia, Tall (1999) propõe através de um questionamento, uma reflexão sobre quais os impactos no raciocínio dos novatos ao fazer uso da tecnologia.

> “Antes do advento do computador o indivíduo tinha que realizar todos os cálculos de aritmética e manipulações em álgebra com a mão (ou, mais apropriadamente, por cérebro). Agora cálculos e manipulações podem ser realizados sem esforço pelo computador. Isso é maravilhoso para o especialista, mas o que ele faz para o raciocínio matemático do novato?” (Tradução nossa[11]) (TALL, 1999, p.4)

[11]Citação original: “Before the advent of the computer the individual had to perform all the computations of arithmetic and manipulations in algebra by hand (or, more appropriately, by brain). Now calculations and manipulations can be carried out effortlessly by the computer. This is wonderful for the expert, but what does it do for the mathematical thinking of the novice?” (TALL, 1999, p.4)

O autor expõe anteriormente dois aspectos que são pertinentes para nossa discussão. O primeiro, sobre o uso das tecnologias por sujeitos especialistas. Neste caso, a tecnologia seria o catalisador de um trabalho que antes era desenvolvido manualmente. Naturalmente, os sujeitos (especialistas) previamente conhecem a teoria matemática envolvida no contexto em estudo, e possivelmente usarão a tecnologia como uma ferramenta na construção de novos conhecimentos. O segundo aspecto manifestado pelo autor é sobre como o uso das tecnologias impacta as formas de raciocínio matemático desenvolvidas pelos "novatos".

Considera-se que a expressão "novato" esteja sendo utilizada pelo autor para designar o sujeito em processo aprendiz, onde em caráter inicial o mesmo não necessariamente conheça os conteúdos e construções conceituais matemáticas para resolver determinado desafio imposto pelos problemas. Logo, a partir da questão proposta pelo autor poderíamos nos questionar se o uso do computador por tipos diferentes de sujeitos oportuniza de fato momentos de aprendizagens deferentes. Nas pesquisas consultadas verificou-se que a tecnologia oportuniza e potencializa em inúmeros sentidos todos os sujeitos envolvidos a construção de relações e conseqüentemente a aprendizagem.

Quanto ao uso de computadores, Tall (1986) afirma que em aspectos de aprendizagem há a inserção de uma nova dimensão. Considerando-se o tripé constituído pelas dimensões professor – matemática – estudante, o computador passaria a constituir um quarto elemento que se relaciona com os outros três já existentes. Tall (1986) define então uma estrutura chamada de tetraedro pedagógico, onde a partir das quatro dimensões (professor – matemática – estudante – computador) pode-se, inserir em determinado contexto, oportunizar que novas relações e caminhos sejam construídos durante o processo de aprendizagem. A figura 3 apresenta a estrutura do tetraedro pedagógico proposto por Tall (1986, p.26):

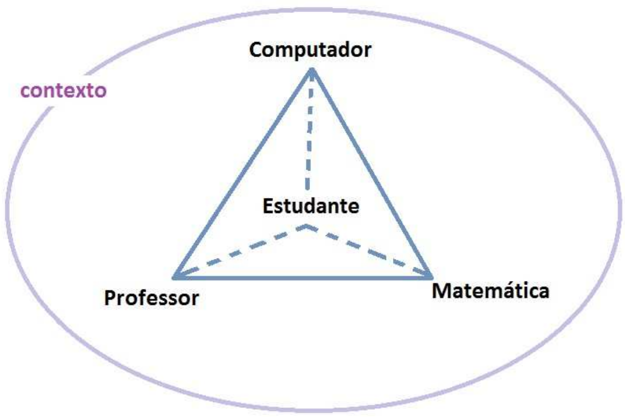


Figura 3 – Tetraedro pedagógico segundo Tall.

Tall & Dubinsky (1991) afirmam que a partir de um determinado contexto a aprendizagem dos estudantes é influenciada pela sua atividade mental desempenhada sobre os objetos em estudo.

Tais atividades são potencializadas no uso adequado do computador, onde o professor pode estimular e desafiar os estudantes na construção de seu próprio conhecimento. Segundo os autores, ao fornecer um *software* “ricamente dotado que incorpora ideias matemáticas poderosas para que o aluno possa manipular e refletir sobre elas” (TALL & DUBINSKY, 1991, p.235) oportuniza-se que através das diversas situações seja possível do estudante construir conceitos de matemática. Neste sentido, Tall (1999) contribui que ao fazer uso das tecnologias o professor deva observar e perceber como os estudantes desenvolvem e constroem ideias matemáticas. Segundo o autor, a elaboração de imagens mentais contribui no processo de construção de conceitos matemáticos e deve ser considerado pelo professor ao propor desafios e situações que façam a utilização da tecnologia durante sua exploração.

> “Embora possamos utilizar as novas tecnologias de maneiras criativas para realizar processos que antes eram impossíveis, se quisermos usá-lo no ensino de conceitos matemáticos, precisamos observar o que é que os alunos realmente aprendem. A evidência é que eles aprendem através da construção de imagens mentais que opera de maneiras que são um pouco diferentes das ideais matemáticas realizadas por especialistas. Em particular, há um espectro de diferentes maneiras em que os estudantes conceitualizam a matemática e que devem ser levados em conta.” (Tradução nossa[12]) (TALL[13], 1999, p, 11)

Sobre o espectro considerado pelo autor anteriormente, as pesquisas consultadas procuram refletir e discutir o contraste no uso das tecnologias digitais em relação aos métodos e materiais usados em sala de aula. Nota-se que os autores consultados convergem para a ideia de que ao fazer uso das tecnologias digitais oportuniza-se que sejam elaborados pelos sujeitos diversos experimentos de pensamento, os quais qualificam e os direcionam para uma aprendizagem singular e propriamente individual, resultado da ação de cada sujeito sobre os objetos em estudo.

Em sua pesquisa de doutorado, Allevato (2005) buscou compreender como os estudantes estabeleciam possíveis relações a partir das ações praticadas em sala de aula tradicional, usando lápis e papel, em relação à ação desenvolvida por estes no laboratório de informática, durante a resolução de problemas que envolviam o assunto funções. A autora afirma que a forma de construir conhecimento em um ambiente em que se faça uso do computador seja qualitativamente diferente de um ambiente que apenas faça uso de lápis e papel. É oportunizado aos estudantes desenvolver

---

[12] Citação original: “Although we can use new technologies in imaginative ways to carry out processes that were previously impossible, if we are to use it in teaching mathematical concepts, we need to observe what it is that students actually learn. The evidence is that they learn by building up mental imagery that operates in ways that are somewhat different from the mathematical ideals held by experts. In particular there is a spectrum of different ways in which the students conceptualise mathematics that must be taken into account.”

[13] É importante considerar que os trabalhos deste autor consultado foram desenvolvidos entre as décadas de 1980 e 1990. Muito aconteceu no panorama da pesquisa científica desde então, especialmente no caso da pesquisa em tecnologias digitais, que tem se desenvolvido de forma particularmente rápida. Portanto, entenda-se que as pesquisas de Tall, Tall & Dubinsky constituem um eixo teórico importante para o presente trabalho, porém suas ideias devem ser assimiladas na forma mais atual.

novas formas de pensamento, baseado em ações que envolvam simulação, experimentação e visualização. Nas palavras da autora:

> "Com a difusão da escrita, particularmente com o surgimento da mídia impressa, ocorre uma ênfase na linearidade do raciocínio; seqüências lógicas e narrativas ganham destaque com as mudanças técnicas que tornaram acessíveis o livro, o papel e instrumentos afins. Assim, associada à oralidade, a escrita promove formas de produção do conhecimento qualitativamente diferentes daquela. Da mesma forma, a informática traz formas de pensar qualitativamente diferentes das anteriores. A construção do conhecimento se faz, agora, com a forte presença de processos como, por exemplo, a simulação, a experimentação e a visualização." (ALLEVATO, 2005, p. 75)

Durante a investigação, a autora constatou que apesar dos problemas propostos não serem muito distintos dos usados em aulas que valorizavam apenas o uso de lápis e papel, a importância de seu estudo foi em verificar as estratégias e caminhos escolhidos pelos estudantes para superar os desafios impostos pelos problemas em estudo. Isto, nas palavras da autora, influenciou todos os envolvidos no processo: o professor e os estudantes. Ao direcionar o olhar para as contribuições que o uso das tecnologias proporcionou para a execução da pesquisa, a autora afirma que o professor que faz uso deste tipo de recuso deve refletir sobre a qualidade da produção matemática dos estudantes, o qual deve valorizar as formas e estratégia utilizadas pelos sujeitos na elaboração das soluções. Sobre esse novo olhar, a partir do uso das tecnologias, a autora disserta:

> "A introdução de aulas com a utilização do computador, muito embora os alunos já estivessem familiarizados com a metodologia de ensino de Matemática via resolução de problemas, mudou totalmente a **dinâmica das aulas**. **Os efeitos** (grifo da autora) dessas mudanças foram sentidos tanto pelo professor como pelos alunos, uma vez que desafiaram antigos padrões de procedimentos adotados, até então, para a condução das aulas e para a resolução de problemas, naquela turma. Embora os problemas propostos no laboratório fossem fechados e muito parecidos com os que os alunos estavam acostumados a resolver na sala de aula, a mediação do *software* gráfico *Winplot* e a configuração de um trabalho mais individualizado no laboratório trouxeram novos desafios no tocante aos processos de resolução e aos procedimentos e conhecimentos aos quais os alunos tiveram que recorrer para resolver os problemas." (ALLEVATO, 2005, p.319)

Na tentativa de identificar e compreender possíveis relações entre o uso das tecnologias digitais e a aprendizagem dos sujeitos envolvidos, Borssoi (2013) em sua pesquisa de doutorado investigou como a partir do uso de atividades que fazem uso da modelagem matemática e recursos tecnológicos os estudantes podem desenvolver uma aprendizagem significativa[14] sobre o assunto que está sendo proposto. Borssoi (2013, p.172) apresenta na forma de itens algumas contribuições

[14] A autora constrói o problema de pesquisa a partir das ideias de Moreira (2011), o qual define UEPS – Unidade de Ensino Potencialmente Significativa. Uma UEPS é uma sequência didática fundamentadas em teorias de aprendizagem, mais precisamente na teoria da aprendizagem significativa de Ausubel. A hipótese, nesta teoria é que não há ensino sem aprendizagem e de que o ensino é o meio e a aprendizagem é o fim.

sobre o uso das tecnologias digitais no desenvolvimento de atividades que envolvam os estudantes no estudo de situações envolvendo modelagem matemática:

- As atividades são pensadas de modo a avançar gradativamente em grau de dificuldade, permitindo ao aluno que novos conhecimentos sejam integrados à estrutura cognitiva a partir de conhecimentos prévios identificados, à medida do possível, pelo professor;
- Oferecem a possibilidade de que os alunos se envolvam em atividades autênticas, e de modo autêntico, podendo definir temas interesse para desenvolver modelagem matemática;
- Muitas vezes despertam a intencionalidade do aluno, provocando-o a tomar uma atividade de ensino como atividade de aprendizagem.
- Atribuem maior responsabilidade ao aluno, em relação a ambientes convencionais de ensino;
- Permitem aprendizagem de conceitos não essencialmente matemáticos;
- Promovem o trabalho colaborativo, quando os alunos passam a *pensar juntos* (grifo da autora) com os pares, com o professor, com a tecnologia;
- Motivam o aluno a mobilizar a tecnologia como parceira intelectual;
- Estabelecem aproximações com a prática profissional, mesmo quando relacionada com expectativas futuras;
- Proporcionam a avaliação formativa do aluno ao longo da unidade de ensino;
- Permitem ao professor mais oportunidade para buscar evidências de aprendizagem significativa.

Por meio dos itens apresentados anteriormente, contata-se que na pesquisa de Borssoi (2013) o uso das tecnologias digitais fez-se presente ao longo de um processo envolvendo ensino e aprendizagem. Tal processo implicou na transformação de todos os sujeitos envolvidos, tanto professor quanto estudante, sendo a tecnologia um meio de ligação entre o ensino e consequentemente a aprendizagem.

A autora ainda contribui com algumas reflexões sobre a eficácia no uso das tecnologias em sala de aula, constatando que não seja apenas fazendo o *uso* e sim a *forma* de encaminhamento metodológico proposta pelo professor é que pode resultar em benefícios no processo de construção e aprendizagem dos conceitos. Tal constatação pode ser observada na fala da autora:

> “As tecnologias de informação e comunicação são importantes aliadas na promoção da educação que visa desenvolver nos estudantes habilidades para a construção do conhecimento, colaboração e pensamento crítico. Contribuem, tanto para aumentar o acesso às informações, quanto como meio de promover a aprendizagem dos estudantes. Assim, elaborar e implementar tarefas de aprendizagem que permitam experiências significativas, bem como avaliar o progresso dos alunos sobre elas é um importante desafio que se coloca ao professor.

> A eficácia de cada tecnologia tem sido determinada pela forma como ela efetivamente comunica ideias para os alunos. No entanto, os educadores quase sempre usam tecnologias para substituir ações que eles realizariam, apresentando informações aos estudantes, seja por meio de um filme, ou de slides, ou ainda por imagens de gráficos gerados por determinado software. Assim, o papel dos alunos se limita a aprender informações apresentadas pela tecnologia, assim como eles aprendiam as informações apresentadas pelo professor. Não é apenas o potencial do recurso tecnológico que regula como este pode contribuir com a aprendizagem dos alunos, mas antes é a forma como eles são explorados nas atividades de ensino." (BORSSOI, 2013, p. 41, 42)

A partir de um olhar sobre o uso das tecnologias em sala de aula e seus benefícios, convergindo sobre o potencial da aprendizagem mediado através do uso das tecnologias digitais no ensino, as pesquisas de Malheiros (2004), Soares (2012) e Araújo (2002) contribuem na presente discussão. As três pesquisas mostram que o uso das tecnologias digitais durante o encaminhamento pedagógico do professor permitiu que os estudantes fossem desafiados das mais diversificadas formas ao longo do processo de trabalho com modelagem matemática, contribuindo para uma aprendizagem qualitativamente melhor. Nas palavras de Malheiros (2004):

> "As atividades de experimentação com tecnologias também se mostraram extremamente importantes para o desenvolvimento dos trabalhos de Modelagem, pois, ao estimular a investigação e discussão matemática em sala de aula, através de atividades investigativas com a utilização de recursos tecnológicos, o professor instigava os alunos a realizarem investigações nos problemas que surgiam durante o desenvolvimento dos trabalhos de Modelagem." (MALHEIROS, 2004, p. 165)

Quanto ao uso de software para a investigação e análise de modelos por estudantes de biologia na disciplina de cálculo, a proposta de Soares (2012) em sua pesquisa de doutorado, propõe um olhar sobre como a tecnologia interliga e possibilita aos sujeitos estabelecer relações com o mundo externo, com os aspectos inerentes à realidade. Em sua pesquisa, a autora infere que ao utilizar as tecnologias na forma de oportunizar aos estudantes uma aproximação com situações da realidade através da análise de modelos está-se oportunizando também uma aproximação positiva em relação à matemática.

Soares (2012) afirma que o software desempenhou função essencial no processo de desenvolvimento da proposta pedagógica elaborada pela autora, a qual trabalha com a análise de modelos. Em sua pesquisa, a partir da análise do modelo matemático envolvendo a transmissão da malária, o propósito era que os estudantes aprendessem conceitos de matemática, e que durante o processo o uso da tecnologia potencializasse a construção e desenvolvimento das ideias. Além disso, o uso das tecnologias permitiu, segundo a autora, oportunizar ao estudante a reorganização do processo de produção de conhecimento, onde os esforços estão concentrados na análise de hipóteses e argumentação, presentes nas etapas de estudo. Com isso, ocorre a valorização do pensamento matemático, onde o foco não está em apenas resolver o modelo, mas sim interpretar as possíveis soluções a partir de variações de parâmetros e construções de hipóteses, implicando uma reorganização no aprender matemática. Nas palavras da autora:

> "Este papel central está estreitamente relacionado à ideia de que o software reorganiza a atividade de analisar um modelo matemático. De fato, quando o foco do pensamento migra do desenvolvimento das técnicas qualitativas de resolução de um sistema para o teste de hipóteses e a análise da repercussão destas hipóteses no comportamento das soluções do modelo, é que se abre a oportunidade para que estudantes que ainda não estudaram formalmente todos os conceitos matemáticos relacionados ao modelo tenham acesso ao mesmo." (SOARES, 2012, p.240)

Na mesma linha de pensamento da citação anterior, Araújo (2002) em sua investigação no doutorado, ao tratar da modelagem em um curso de cálculo fazendo uso das tecnologias, a autora acredita que a tecnologia possibilita que o indivíduo se preocupe com a interpretação e compreensão da situação e dos resultados obtidos. O computador surge como uma alternativa na execução dos cálculos e tarefas que manualmente poderiam demandar muito tempo. Ainda há um aspecto da imprevisibilidade considerado pela autora, ao se fazer o uso de ambientes informatizados em sala de aula. De acordo com Araújo (2012):

> "A imprevisibilidade dos acontecimentos, quando se trabalha em ambientes informatizados, abre possibilidades para que investigações aconteçam. Mas a simples presença dos computadores não garante a existência de investigações: é importante que os alunos aceitem o convite às investigações, seja ele feito pelo professor ou pelos próprios alunos diante das possibilidades abertas pelo computador." (ARAÚJO, 2002, p.161)

Portanto, a intencionalidade no uso das tecnologias digitais consiste no fato de que as mesmas oportunizam aos sujeitos envolvidos uma reorganização e um ganho qualitativo durante o processo de aprendizagem. Ao incorporar as tecnologias digitais em ambientes que proponham a investigação de situações que envolvam modelagem matemática significa que há uma oportunidade para valorizar o trabalho cognitivo dos sujeitos envolvidos na construção de conceitos matemáticos. Neste aspecto, Blum & Niss (1991), citado por Araújo (2002, p. 45) destacam na forma de itens a valorização de um trabalho que envolva a modelagem matemática e correlativamente faça uso das tecnologias ao longo do processo:

1) A possibilidade de lidar com problemas mais complexos e dados mais realísticos;
2) A possibilidade de melhor se concentrar nos processos de modelagem devido ao alívio que as tecnologias proporcionam aos cálculos de rotina;
3) A possibilidade de melhor compreender os problemas por meio de variação de parâmetros, estudos numéricos, algébricos e gráficos;
4) A possibilidade de lidar com problemas que podem ser inacessíveis do ponto de vista teórico para uma dada idade, por meio de simulações numéricas ou gráficas;

5) A desvalorização de habilidades ligadas a rotinas computacionais e a valorização de habilidades relacionadas com modelagem como, por exemplo, a construção, aplicação e interpretação de modelos;
6) A possibilidade de tratar com mais facilidade certos conteúdos matemáticos que são mais próximos de modelagem, tais como equações diferenciais e de diferenças no ensino médio, sistemas dinâmicos e teoria do caos no ensino superior etc.;
7) Uma maior abertura para a modelagem e aplicações nos currículos;
8) A possibilidade e necessidade de lidar com problemas que precisam dos computadores para serem tratados.

No âmbito da educação matemática, uma abordagem envolvendo modelagem matemática na sala de aula constitui-se em um desafio, uma vez que se opõe a uma prática comumente observada em sala de aula, conforme afirma Soistak (2010):

> "Especificamente no ensino da matemática, esses problemas educacionais são vivenciados no dia a dia da sala de aula, refletindo na aprendizagem dos alunos. Quando da indagação sobre a importância da matemática aos alunos, eles concordam que a disciplina deve ser ensinada na escola. No entanto, confessam que encontram dificuldades de aprendizagem e não conseguem relacionar a matemática presenciada na escola com a matemática encontrada em situações do cotidiano." (SOISTAK, 2010, p.39)

Tais desafios constituem um ponto que converge com os aspectos apresentados por Mayer *et al* (2011) no início desta seção, apontando a matemática como um estigma. Ao considerar a modelagem matemática como uma possibilidade para atenuar esse estigma, Soistak (2010) afirma que essa inserção poderia desafiar e desenvolver o interesse do estudante pelo estudo da matemática, uma vez que a modelagem propõe o estudo e investigação de diversos fenômenos que ocorrem no cotidiano. Construir-se-ia um cenário que Soistak (2010) caracteriza do seguinte modo:

> "Nesse processo o aluno procura ativamente compreender o mundo que o rodeia, por meio da sua ação com o objeto (...). O professor assume o papel de mediador na construção do conhecimento, orientador nas ações a serem realizadas, problematizador ao levantar novas hipóteses e desafiar os estudantes às situações novas e desconhecidas, fazendo com que haja reflexão sobre o que se está tentando fazer." (SOISTAK, 2010, p.41)

Para encerrar a presente seção sobre modelagem matemática, ensino de matemática e tecnologias digitais, observa-se a importância do papel da mediação presente durante o processo. A mediação constitui papel importante para a construção dos conceitos, conforme apresenta Almeida *et al* (2012):

> “Em atividades de modelagem, o professor e, por que não dizer, os próprios alunos agem como mediadores uns dos outros em relação à dinâmica do desenvolvimento da atividade e à construção de conhecimentos. Nessa perspectiva, a mediação pode ser entendida como uma cocriação de contextos, a partir dos quais, pela imposição de conflitos e pela diversidade existente, possibilita a construção de conhecimentos, matemáticos ou não, e experiências de ordem social, cognitiva e metacognitiva. Tal mediação contribui, ainda, para minimizar o desafio que é mover-se de um paradigma em que há exposição de conteúdos e prática de exercícios repetitivos, para um paradigma de enfrentamento de situações, de modo geral, não idealizadas. As práticas de sala de aula baseadas na realização de atividades investigativas, como é o caso das atividades de Modelagem Matemática, ao mesmo tempo em que requerem um novo comportamento diante dos problemas, envolvem professor e alunos com a própria definição de um problema.” (ALMEIDA *et al*, 2012, p.153)

Portanto, consideramos que ao inserir uma proposta de trabalho envolvendo o uso da modelagem matemática na investigação e construção de conceitos matemáticos, estabelece-se entre todos os sujeitos envolvidos uma reconstrução de saberes e conceitos prévios. Ou seja, a cada passo que avança a investigação matemática no sentido da compreensão do objeto de conhecimento ou fenômeno em estudo, professor e estudantes (re)constroem e (re)significam diversos conceitos, potencializando qualitativamente o momento de aprendizagem e construção de novos conceitos matemáticos. Neste caso, o uso da tecnologia informática surge como uma possibilidade que auxilia os sujeitos durante a criação, verificação e validação dos possíveis modelos propostos, como também desafiar o desenvolvimento das ferramentas matemáticas necessárias para a compreensão máxima do contexto investigado.

Busca-se agora organizar e reapresentar essa subseção do texto na forma de um mapa conceitual. Consiste na tentativa de esboçar através de um mapa conceitual algumas possíveis relações e implicações sobre modelagem matemática, ensino de matemática e tecnologias digitais, apresentadas nessa subseção. As pesquisas mencionadas anteriormente mostram que a forma de planejamento e condução para o trabalho metodológico por parte do professor, ao fazer uso das tecnologias digitais, resultou em benefícios no processo de aprendizagem da matemática, valorizando assim o papel do sujeito, enquanto ator no processo. Logo, é de suma importância no presente trabalho de tese considerar o impacto no qual as tecnologias digitais contribuam no desenvolvimento de temas que envolvam modelagem matemática durante o estudo de determinado assunto. O mapa está apresentado na figura 4 a seguir.

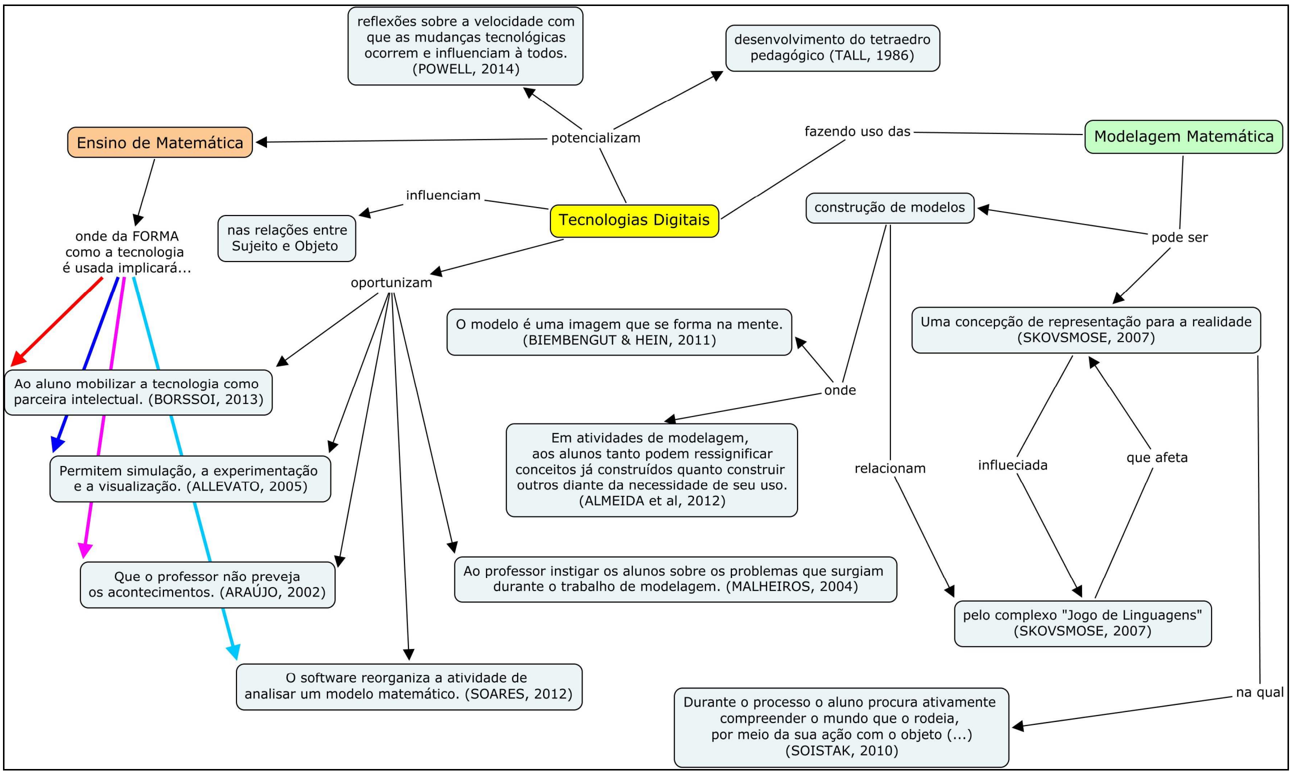


Figura 4 – Mapa conceitual sobre Modelagem, Ensino de Matemática & Tecnologias Digitais.

2.1.3 – Escritos sobre o uso do *software* GeoGebra

São inúmeras as pesquisas que tem o *software* GeoGebra como ferramenta para auxiliar a construção do conhecimento matemático. Essas pesquisas estão publicadas na forma de artigos, dissertações e teses, e nessa seção destacaremos algumas dessas pesquisas e suas contribuições para o estado da arte da educação matemática, em especial para a discussão que envolve o uso das tecnologias informáticas no estudo de conceitos matemáticos. Nesse sentido, Vaz (2012) propõe quanto ao uso do GeoGebra:

> "No Geogebra podemos contemplar geometria e álgebra dinamicamente, interagindo entre si na mesma tela, possibilitando ao usuário relacionar as várias faces de um mesmo objeto matemático. Permite trabalhar conceitos do ensino fundamental, médio e superior e realizar construções matemáticas diversificadas a alterá-las após a construção ser finalizada. Esse dinamismo possibilita que o aluno perceba diversas relações entre os objetos matemáticos, faça conjecturas e até mesmo formalize os resultados, de forma visual, no próprio software." (VAZ, 2012, p.40)

A passagem anterior manifesta que o uso do *software* GeoGebra intensifica o fazer matemático dos sujeitos envolvidos, uma vez que a elaboração de hipóteses e conjecturas pode ser verificada de modo dinâmico na tela do computador. Nesse sentido, a pesquisa de Vaz (2012) consistiu em desenvolver junto aos estudantes a investigação matemática baseada na ação sobre problemas, verificando se eles conseguiam elaborar e desenvolver o pensamento matemático durante a compreensão das situações apresentadas. Ao final, o autor conclui:

> "Visualizamos a versatilidade do software que permite um aprendizado significativo de suas principais ferramentas e que apresenta uma possibilidade importante que é a de permitir o usuário motivado ser autodidata. Outro fator importante é a possibilidade de consolidar práticas de ensino articuladas com a participação do aluno e com a investigação matemática, mostrando o viés do raciocínio matemático, fator que ficou evidenciado em todo o processo." (VAZ, 2012, p.50)

Há importantes contribuições com a investigação de Vaz (2012), principalmente a que indica que o estudante envolvido com a produção do conhecimento matemático se torna autodidata. Isso possibilita que o sujeito vá além dos seus limites, alcançando patamares mais complexos na sua forma de pensamento. A forma de uso do *software* nesse aspecto vem para contribuir no processo, possibilitando que o sujeito envolvido na sua ação sobre os objetos progrida na direção da compreensão do fenômeno investigado.

Ribeiro (2013) evidencia em sua pesquisa que a abordagem de assuntos da geometria não-euclidiana fazendo uso do *software* GeoGebra contribuiu para a construção dos conceitos matemáticos. A importância que o *software* desempenhou durante a sua investigação permitiu ao autor concluir que a atividade mental dos estudantes foi potencializada com o uso do *software* ao longo das atividades, pois ele enriqueceu as possibilidades de seu pensamento, em decorrência da ação dos estudantes sobre os elementos que estavam disponibilizados na tela do computador. Nas palavras do próprio autor:

> "Acreditamos que o conhecimento e a compreensão das geometrias não euclidianas podem ajudar os alunos na construção do pensamento geométrico, e de uma forma desafiadora, pois as impressões visuais precisam ser colocadas sob controle racional. E nessa formação os softwares de geometria dinâmica são importantes aliados. Isto porque, neles, os alunos têm a oportunidade de fazer muitos experimentos de pensamento. Através da manipulação direta nas figuras que estão na tela do computador, os alunos vão reconstruindo as imagens mentais que dão suporte as novas ideias." (RIBEIRO, 2013, p.120)

O papel das tecnologias na compreensão e construção de conceitos desempenha atualmente grande importância no cenário das pesquisas em educação matemática. As pesquisas convergem para o pensamento de que o professor ao utilizar o GeoGebra como ferramenta para a abordagem de determinados conceitos possa alcançar objetivos maiores do que os inicialmente propostos. Acreditamos que através da forma como o professor faz uso dessa tecnologia é oportunizado atravessar por um processo de reconstrução de saberes e conceitos, reconstruindo os significados e modos de conceber o conhecimento matemático.

Silva (2014) em sua investigação de mestrado, a qual consistia em avaliar a evolução dos estudantes no estudo de sistemas lineares do primeiro grau com duas equações e duas incógnitas, propõe que o uso do GeoGebra contribuiu para além da construção do conhecimento, possibilitou também uma reflexão sobre sua prática enquanto professor. E ainda, o autor acredita que para os demais professores e pesquisadores interessados no tema de investigação, a ideia de utilizar o *software* pode romper com algumas concepções consideradas tradicionais, contribuindo na formação dos estudantes inseridos no contexto de sociedade predominantemente tecnológico. Sobre o uso do *software* GeoGebra e o convite à reflexão sobre a prática docente, Silva (2014) defende:

> "As tecnologias apresentam hoje um papel no desenvolvimento da sociedade, em particular, da educação. Utilizar o software Geogebra no desenvolvimento de nossa pesquisa foi, sem dúvida, primordial para o sucesso de sua aplicação. Pensemos que o uso da mesma como ferramenta auxilia, e muito, o professor. Pensamos ser importante fazer uma reflexão de nossa prática diária enquanto professores. Centrar nossa visão para o espaço da sala como docentes, significa, muitas vezes, direcionar nosso trabalho para um ensino voltado ao uso apenas dos livros didáticos e de resumos de aula, que em sua maioria apresentam uma matemática limitada e desconectada com a realidade, que não aborda o conteúdo como um todo e não promove as transformações necessárias para garantir a aprendizagem dos alunos. Precisamos investigar, criar, experimentar novas propostas de trabalho. Sabemos que nossa sociedade está em constante transformação e necessitamos promover mudanças significativas no ensino da matemática, de forma que acompanhe a sociedade." (SILVA, 2014 p.132)

Na intenção de contribuir na formação do sujeito, o uso do *software* GeoGebra em atividades que desafiem o pensamento matemático contribui na formação de hipóteses, escolha dos procedimentos e posturas a serem adotadas diante do problema. Pedroso (2012) ao investigar a aprendizagem de conceitos de trigonometria pelos estudantes observou que o uso dessa tecnologia potencializa a aproximação entre os sujeitos e os objetos investigados, onde através de sucessivas e aperfeiçoadas relações é possível que o sujeito avance mais e qualitativamente na busca do conhecimento. Nas palavras da autora:

> "O uso do Geogebra mostrou-se um programa eficaz como auxílio na elaboração de simulações de aprendizagem escolar ricas em possibilidades e construção de conhecimentos. As manipulações das figuras apresentadas para os alunos, bem como as construções realizadas por eles, promoveram dinamismo nas atividades, possibilidades de realização de tentativas, confirmação de hipóteses, observação de relações entre objetos variáveis e fixos. No Geogebra, várias informações foram apresentadas aos alunos e eles precisavam desenvolver a capacidade de selecionar aquelas que eram pertinentes ao exercício ou problema que estavam resolvendo." (PEDROSO, 2012, p.229)

Nota-se com a passagem anterior a importância dada ao uso do *software* no que se refere aos seus aspectos dinâmicos. A possibilidade de investigar determinado conteúdo matemático podendo utilizar recursos dinâmicos, nas pesquisas apresentadas tem unânime posição favorável ao desenvolvimento do pensamento matemático. O fato é que o sujeito ao investigar através do *software* determinado comportamento ou fenômeno, faz com que relações sejam estabelecidas mais rapidamente, oportunizando-se construir ou reconstruir conceitos de uma nova forma. Ao investigar a aprendizagem das funções de primeiro e segundo grau pelos estudantes, Ferreira (2013) dá-se conta que o caráter dinâmico proporcionado no uso do GeoGebra contribuiu na criação de relações, ou ainda, da observação de situações na tela do computador foi possível construir progressivamente conceitos que talvez em uma aula expositiva com o uso quadro apenas não fossem possíveis. Sobre isso, o autor expõe:

> “Podemos ressaltar que o *software* foi um aliado muito forte para a realização das atividades. A opção do arrastar de um objeto na Janela de Visualização permitiu ao aluno visualizar os conteúdos por meio dos aspectos dinâmicos proporcionados pelo *software*, tecer conjecturas e argumentar sobre a validade das respostas das questões. Isso permitiu constatarmos que o uso desse *software* possibilitou aos alunos desenvolverem as questões com mais rapidez, observarem o comportamento dos gráficos plotados na Janela de Visualização e compreenderem o conteúdo estudado.” (FERREIRA, 2013, p.175)

Tratando-se de um processo no qual o sujeito investiga e procura estabelecer estratégias na construção do seu conhecimento é notório destacar que através da forma que se propõe o uso do *software* GeoGebra, o mesmo contribui ao longo desse progresso. A análise de diferentes situações-problema juntamente com o uso da tecnologia possibilita ao sujeito organizar e estruturar os elementos que serão necessários para a compreensão de determinado conteúdo. Para justificar que a aprendizagem não ocorre de modo isolado e sim como resultado de um processo de constate ação do estudante sobre a situação investigada, Araújo (2010) expõe:

> “A inserção de uma estratégia pedagógica mediada pelo software Geogebra foi muito importante para a consolidação de algumas aprendizagens sobre a circunferência e a mediatriz como lugares geométricos. Os estudantes puderam experimentar suas hipóteses, conjecturar sobre distintas possibilidades de resolução, abandonando aquelas que não representavam caminhos vistos como válidos. Interessante observar, neste aspecto, que na maioria das vezes, os aprendizes recorriam às tarefas anteriores ou à teoria aprendida nos momentos de institucionalização, para dar continuidade na solução de uma atividade nova na qual se envolviam. Esse aspecto é importante para denotar a possibilidade de que os alunos não desenvolvam dependência tecnológica para a construção de elementos matemáticos, mas que a utilizem como parceira e mediadora, na direção da resolução de um problema.” (ARAUJO, 2010, p.100)

A investigação de Araújo (2010) sobre como os estudantes construíam conhecimento sobre lugares geométricos com o auxílio do GeoGebra conduz para reflexões importantes; dentre elas, quanto ao momento no qual o estudante se dá conta da importância na continuidade do processo de aprendizagem, sendo que essa não ocorrerá de modo isolado, ou seja, para o estudante o processo de aprendizagem será o resultado de um progresso onde supõe-se continuidade dos fatos e ações para que ocorra de modo qualitativamente satisfatório. Ao utilizar a tecnologia como parceira na tentativa de resolver determinados problemas, a construção de soluções fundamentadas nas ações feitas anteriormente e nas teorias anteriores mobiliza o sujeito na tentativa de organizar os seus esquemas para que seja possível vencer os obstáculos impostos pelo objeto.

Vê-se que a forma de uso do *software* GeoGebra contribuiu significativamente nas pesquisas apresentadas nessa seção. As pesquisas que o utilizaram como recurso para a investigação de determinado assunto matemático sugerem que progressivamente todos os envolvidos, sejam professores ou estudantes, evoluem qualitativamente em suas concepções sobre determinado conhecimento.

Finalmente, busca-se organizar e reapresentar essa subseção do texto na forma de um mapa conceitual. Consiste em esboçar através de um mapa conceitual algumas possíveis relações e implicações sobre a relevante importância na forma de utilização do *software* GeoGebra no decorrer da presente pesquisa. Todas as pesquisas apresentadas anteriormente mostram que a forma de planejamento e condução para o trabalho metodológico por parte do professor, ao fazer uso dessa tecnologia, resultou em conseqüências positivas quanto à aprendizagem dos sujeitos envolvidos. O mapa está apresentado na figura 16 a seguir.

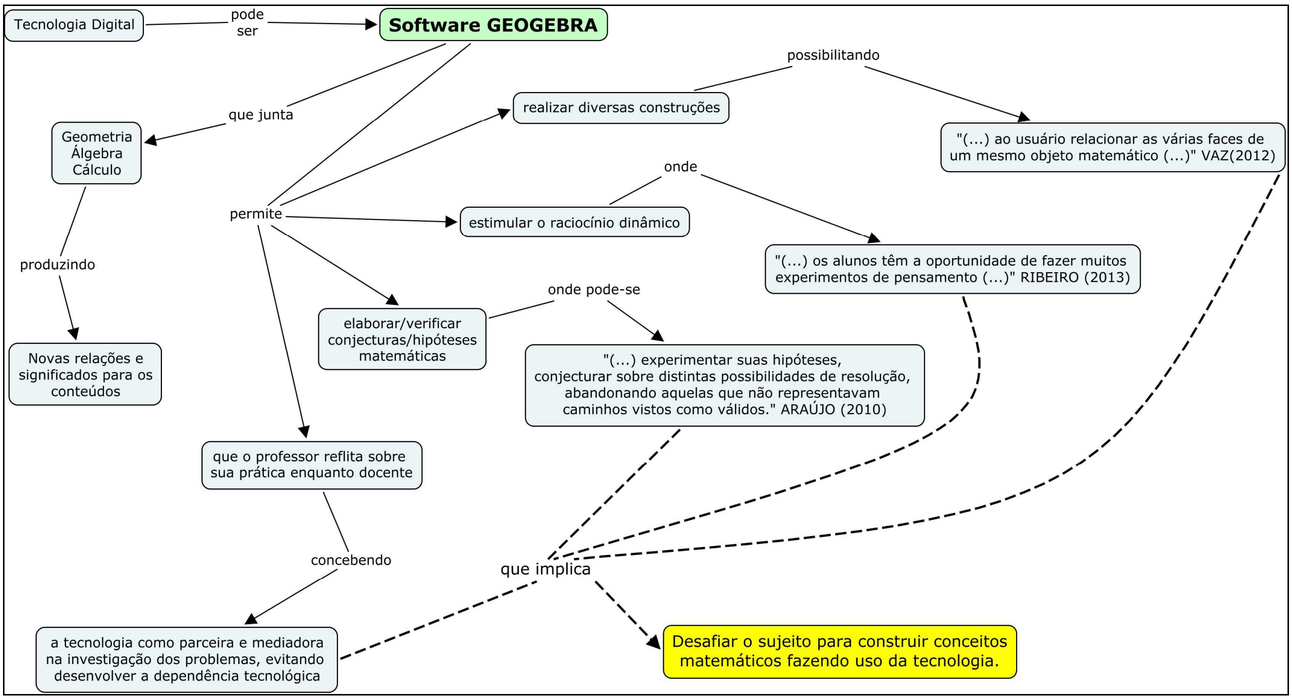


Figura 5 – Mapa Conceitual sobre a importância no uso do software GeoGebra na pesquisa.

2.2 EPISTEMOLOGIA GENÉTICA

2.2.1 – Tomada de consciência

Antes de discutir os conceitos, envolvendo tópicos da epistemologia genética, em especial a tomada de consciência e a abstração reflexionante, é importante destacar que as tentativas de compreensão sobre como funciona a organização e elaboração do conhecimento matemático pelos sujeitos foi inicialmente proposta pelos gregos. Em um processo amplamente reflexivo, através do esforço intelectual com a tentativa de explicar a organização da matemática, através de relações entre números e os fenômenos observados, os gregos basearam-se em construções do pensamento que envolvia um conjunto de hipóteses e um processo argumentativo para organizar o conhecimento. Nesse sentido, Silva & Rosa (2014) argumentam:

> "Como o pensamento grego estava relacionado com a existência e compreensão dos diferentes tipos de números conhecidos, as situações matemáticas visualizadas por eles deveriam possuir uma explicação coerente para o seu funcionamento. Com isso, começou a surgir a necessidade de uma fundamentação consistente, que fosse capaz de por um processo "lógico" tentar justificar a matemática, baseando-se em um conjunto de hipóteses e um processo de argumentação válido." (SILVA & ROSA, 2014, p. 95)

Portanto, observa-se através da história da matemática que na tentativa de explicar a organização do conhecimento, com o estabelecimento de relações entre os fenômenos observados, os gregos foram os pioneiros na construção de um conhecimento organizado e estruturado logicamente. Iniciava-se com os gregos uma nova percepção das ideias matemáticas, pelas quais através de um processo reflexivo, com o exercício da abstração, buscava-se desenvolver qualitativamente a compreensão das causas observadas nos fenômenos. Esse processo, iniciado pelos gregos, inaugura novas possibilidades e trajetórias para a evolução do pensamento humano, na qual a teoria moderna da epistemologia genética procura fundamentar e desenvolver seus conceitos. Os conceitos apresentados a seguir serão fundamentais para o desenvolvimento do presente trabalho.

O estudo da tomada de consciência proposta por Jean Piaget concentra-se nas obras *A Tomada de Consciência* (1977b), *Fazer e Compreender* (1978) e *Abstração Reflexionante* (1977) nas quais o autor apresenta e discute os principais conceitos e os aspectos teóricos envolvendo os assuntos apresentados nesta seção.

Inicialmente, Piaget (1977b) considera:

> "Quase que se pode chegar a dizer que a "tomada" de consciência representa algo de diferente e que vai além de uma "tomada", isto é, de uma incorporação a um campo dado de antemão com todos os seus caracteres e que seria a "consciência": trata-se, na realidade, de uma verdadeira construção, que consiste em elaborar, não "a" consciência considerada como um todo, mas seus diferentes níveis enquanto sistemas mais ou menos integrados." (PIAGET, 1977b, p. 9)

Os estudos apresentados por Piaget propõem como uma condição necessária e suficiente para a construção do conhecimento a ação do sujeito sobre os objetos. A ação necessariamente parte do sujeito epistêmico, e o objeto, externo ao sujeito contribui para o processo de constituição do indivíduo. Pode-se ter ainda como objeto as ideias, pensamentos e teorias elaboradas pelo sujeito epistêmico, neste caso o objeto de investigação do sujeito será interno.

Concebendo a ação como elemento central no processo de evolução das sucessivas tomadas de consciência pelo sujeito, Piaget propõe uma diferenciação do termo "insight" de "tomada de consciência". Para o autor, o primeiro trata de uma espécie de iluminação pela qual não se acrescentam qualitativamente características ao pensamento do sujeito, diferentemente do segundo processo, que considera que existe uma evolução das formas de pensamento, fundamentado essencialmente nas ações do sujeito sobre os objetos e também nas coordenações de suas ações.

Como sujeito e objeto são disjuntos, Piaget considera que no processo de tomada de consciência existe uma região denominada periferia. É uma região limítrofe entre objeto e sujeito, na qual o conjunto das ações do sujeito sobre o objeto inicia-se com o nascimento, pelo menos. Pelo fato de Piaget centralizar o processo na ação, essa por sua vez estabelece uma ponte entre o real e a razão. Trata-se de um processo de mútua determinação entre sujeito e objeto partindo-se de uma região periférica, que é pouco conhecida sua localização e também qual o instante que marca o início de sua influência, porém através dela é possível que se comece atividade de mobilização e organização das mais diversas formas de pensamento em busca do objetivo. A figura 5 mostra um possível esquema para ilustrar as ideias aqui apresentadas.

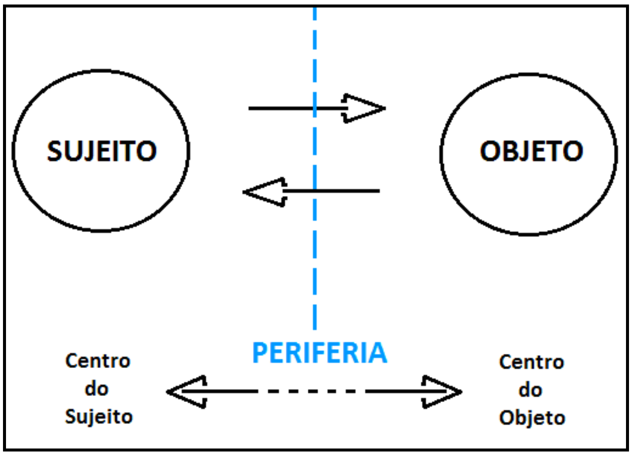


Figura 5 – Relação sujeito-objeto. Fonte: Piaget (1977b, p.199)

Sobre a busca de um objetivo, Piaget (1977b) disserta:

> “Procuraremos continuar a análise das razões funcionais da tomada de consciência da ação própria. Esta parte, portanto, da busca de um objetivo, donde a constatação (consciente) de um êxito ou de um fracasso. Em caso de fracasso, trata-se de estabelecer por que ele ocorreu e isso leva à tomada de consciência de regiões mais centrais da ação: a partir do dado de observação relativo ao objeto (resultado falho), o sujeito vai, portanto, procurar os pontos onde houve falha da adaptação do esquema ao objeto; e, a partir do dado de observação relativo à ação (sua finalidade ou direção global), ele vai concentrar a atenção nos meios empregados e nas suas correções ou eventuais substituições. Assim, por meio de um vaivém entre o objeto e a ação, a tomada de consciência aproxima-se por etapas do mecanismo interno do ato e estende-se, portanto da periferia ao centro.” (PIAGET, 1977b, p.199)

Esse “vaivém”, produzido pela ação e coordenação de ações do sujeito, implica a realização de ações assimiladoras e acomodadoras, pelas quais há a possibilidade de ocorrer a interiorização e exteriorização dos mecanismos referentes à ação do sujeito sobre os objetos. Piaget define como essencial para a compreensão do mecanismo de tomada de consciência a compreensão sobre o que ele considera como centro do sujeito e centro do objeto. O primeiro refere-se ao sujeito que, do ponto de vista epistemológico, está em busca do êxito, da conquista. O segundo centro refere-se ao que está para ser conquistado, o mundo do objeto. Piaget expõe que é possível avançar muito na direção desses centros, embora seja muito improvável que se consiga chegar plenamente a eles.

Em se tratando da ação, a primeira é considerada assimiladora e parte do sujeito em relação ao objeto. Essa ação é essencial e pode apresentar determinadas variações de intensidades, uma vez que no processo de exteriorização é onde o sujeito conhece e trata com o objeto. De forma seqüencial, a ação acomodadora é a ação em que o objeto age sobre o sujeito, possivelmente modificando no sujeito os seus esquemas assimiladores. Durante esse processo, a acomodação possibilita ao sujeito modificar e qualificar a sua ação perante os objetos, e isso ocorre uma vez que as ações sendo intercaladas e os esquemas sendo modificados possibilitam que a cada nova etapa entre assimilação e acomodação aconteça um micro avanço na direção dos centros do sujeito e do objeto. A figura 6, inspirada em Piaget (1977b, p.199), apresenta um esquema organizando as ideias e conceitos anteriormente discutidos.

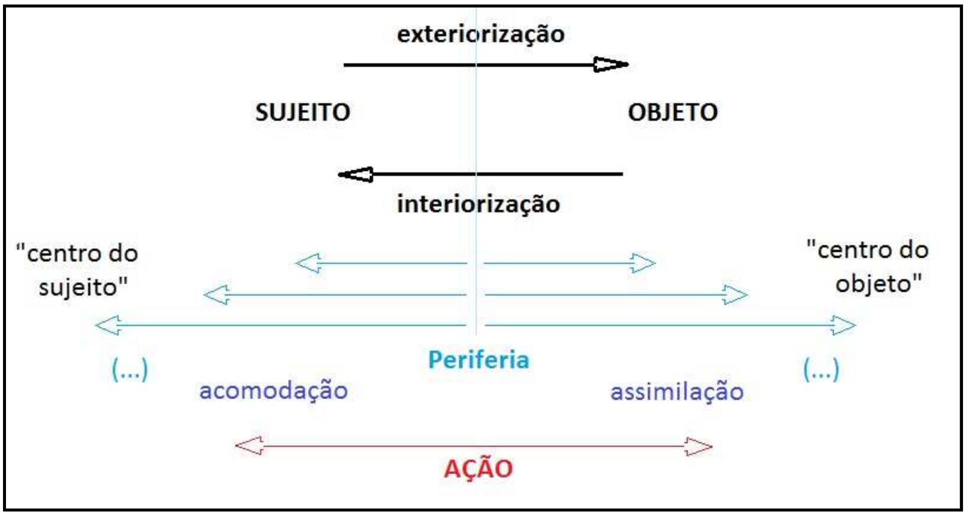


Figura 7 – Esquema sobre a ação do sujeito sobre o objeto. Fonte: Piaget (1977, p.199)

Quanto à ação assimiladora, Piaget (1977b) considera:

> "Se se passa do "porquê" ou razões funcionais da tomada de consciência a seu como, portanto ao mecanismo efetivo que torna conscientes os elementos que permaneciam até aquele momento inconscientes, é claro, então, que esse processo não se reduz de forma alguma a uma simples iluminação que os torna perceptíveis sem com isso modificá-los, mas consiste, e isso desde o início, numa conceituação propriamente dita, em outras palavras numa passagem a assimilação prática (assimilação do objeto a um esquema) a uma assimilação por meio de conceitos." (PIAGET, 1977b, p.200)

Com isso, é de considerável importância compreender que o sujeito ao investigar o objeto qualifica a sua ação assimiladora conforme os conceitos são progressivamente construídos. A qualificação dos esquemas assimiladores está intimamente relacionada com a constante ou progressiva atividade do sujeito sobre os objetos. Isso implica por parte do sujeito que ao agir cada vez mais qualificadamente sobre o objeto que se deseja alcançar, ou melhor, compreender, o processo da tomada de consciência difere totalmente de uma iluminação, pois:

> "Se a tomada de consciência pudesse reduzir-se a uma simples iluminação, essas coordenações não teriam necessidade de nenhuma construção nova, uma vez que elas já são realizadas no plano da própria ação material, isto é, do *savoir faire*[15] por oposição ao "conceber": à consciência, então, se ela fosse apenas um espelho, bastaria refletir objetivamente o que são os movimentos da ação própria,

[15] Expressão francesa freqüentemente utilizada na obra de Piaget que tem como tradução mais adequada a noção de "saber fazer" determinada ação. Trata-se de uma ação aprendida que é aprimorada com o passar do tempo. Como exemplo, pode-se dizer que o ato de dirigir um automóvel ou uma motocicleta é um exemplo de saber fazer prático do cotidiano do indivíduo.

> inconscientes até aquele momento, para obter uma "representação" (no sentido mais direto) das coordenações que eles já realizam." (PIAGET, 1977b, p.201)

Quando observamos novamente a figura 5, percebemos que a região definida como periferia exerce um papel fundamental na compreensão do processo de tomada de consciência. Como as ações de assimilação e acomodação ocorrem simultaneamente nas direções dos centros do objeto e do sujeito respectivamente, nota-se que é preciso destacar a importância da noção de periferia proposta por Piaget. A compreensão das noções de exteriorização e interiorização durante o processo de tomada de consciência é de grande valia para melhor a compreensão de como ocorre o processo, uma vez que essas noções estão intimamente relacionadas à atividade recíproca entre sujeito e objeto. Quando nosso olhar dirige-se sobre a tomada de consciência do ponto de vista das relações entre ação e conceituação percebe-se que os processos de assimilação e acomodação estão intimamente ligados e relacionados, pois cada um deles é influenciado pelo outro durante a caminhada do sujeito em sua construção e compreensão do objeto. Sobre isso, o autor propõe:

> "Está claro que a ultrapassagem da ação pela conceituação, não modifica em nada as relações entre a periferia e os dois centros, nem as relações de equilíbrio entre os progressos em direção à interiorização lógico-matemática e em direção à exteriorização de explicação causal. Duas espécies de observações se impõem a esse respeito. A primeira é que, se pode explicar a ultrapassagem da ação pela conceituação, invocando a capacidade adquirida pelo indivíduo de construir indefinidamente novas operações sobre as precedentes, isto não significa que haja aí construções puras e sem referência a um movimento retrospectivo que leve novamente da periferia para os centros das estruturações operacionais. A segunda observação refere-se ao processo de explicação causal, portanto ao que se constata na direção da exteriorização. A esse propósito é claro que, partindo dos fenômenos mais aparentes para procurar sua razão, a explicação, mesmo nos níveis superiores do pensamento científico, apenas fará deslocar o problema, ou, antes, levantá-lo novamente a propósito da explicação encontrada; partindo de um modelo A, que explica o fenômeno periférico P, isolando a razão, tratar-se-á em seguida, de encontrar o porquê ou o como de tal transformação invocada no modelo A, donde a necessidade de um novo modelo B relacionado a um dos aspectos de A. Não é mais necessário insistir, então, para compreender que essa sequência de "razões" atinge, por aproximações sucessivas as regiões centrais, o objeto." (PIAGET, 1978, p.179, 180)

Ou seja, ao analisar o movimento na direção dos centros do objeto e do sujeito, de forma simultânea, constata-se que é necessário coordenar e organizar as ações durante o processo. Sobre as coordenações das ações, Piaget considera que somente é possível coordenar as ações quando existe o que ele chama de diferenciação. Com isso ele apresenta dois tipos de coordenações: as coordenações inferenciais e as coordenações causais. A primeira refere um processo relativo ao sujeito e a sua objetividade e a segunda trata-se de um processo relativo ao objeto e sua objetividade. Em outras palavras, para que haja compreensão é necessário agir e apropriar-se das ações, de seus mecanismos íntimos. Logo, é através das coordenações inferenciais que somos capazes de produzir conceitos, que por sua vez permitem organizar e qualificar os nossos pensamentos. Pode-se dizer então com as próprias palavras de Piaget (1977b):

> "Se a tomada de consciência procede da periferia para as regiões centrais da ação e se, por outro lado, seu mecanismo é semelhante ao do conhecimento dos objetos, então, que esse conhecimento do real só pode partir do fenômeno, isto é, das aparências periféricas que ele apresenta ao sujeito, para empenhar-se a seguir na direção da natureza intrínseca das coisas, e de suas conexões causais, ambas ultrapassando o campo dos dados de observação em direção às regiões centrais." (PIAGET, 1977b, p.204)

Piaget considera que o processo da tomada de consciência através das ações pode ser caracterizado por níveis correlativos e sequenciais. Cada um dos níveis por sua vez pode apresentar diferentes subníveis, nos quais os sujeitos podem ser caracterizados de acordo com os seus êxitos e justificativas dados em cada ação diante do objeto. Com isso, o sujeito através de suas ações caracteriza-se por estar em determinado nível, no qual ele se aproxima mais do centro do objeto e a apropriação das suas ações torna o processo em busca do objetivo mais eficiente. Sobre os avanços na direção dos centros, o que se dispõe como ferramenta de análise para o sujeito é: o objetivo buscado pela ação e o resultado obtido pela sua ação.

Conforme se avança qualitativamente e os resultados obtidos pela ação são organizados e interpretados adequadamente através de coordenações inferenciais realizadas pelo sujeito, desencadeia-se um processo no qual o sujeito organiza seus esquemas assimiladores, compondo uma estrutura capaz de construir e mobilizar novos esquemas na busca de compreensão do objeto. Na tentativa de compreender a influência dos esquemas assimiladores durante o processo de tomada de consciência, no desenrolar da ação sobre o objeto, Piaget (1977b) apresenta:

> "O que é mais interessante é que os meios empregados permanecem primeiro despercebidos, sobretudo se são desencadeados automaticamente pelo esquema que determina o objetivo, e que sua tomada de consciência realiza-se a partir de dados de observação relativos ao objeto, portanto da análise dos resultados. Reciprocamente, será a análise dos meios, portanto dos dados de observação relativos à ação, que vai fornecer o essencial das informações sobre o objeto e pouco a pouco a explicação causal de seu comportamento. Dessas observações dois processos gerais, portanto, devem ser retidos: primeiro uma ação recíproca, mas alternada, dos dados de observação do objeto sobre os da ação, e inversamente; em seguida, desde que é estabelecido relacionamento entre eles, seguem-se coordenações inferenciais, que ultrapassam o campo dos dados de observação e permitem ao sujeito compreender causalmente os efeitos observados, embora conduzindo a uma análise ulterior mais fina dos dados de observação, o que entretém e renova o ritmo precedente de idas e vindas." (PIAGET, 1977b, p.205)

Com o exposto até aqui, verifica-se que a tomada de consciência apresenta níveis graduais que se desenvolvem conforme a ação do sujeito. Pode-se dizer que a partir de tomadas de consciência elementares, por ocasião da união dos objetivos e resultados das ações, o sujeito pode desenvolver conceituações e chegar até níveis superiores de tomada de consciência, sem deixar de passar pelos níveis intermediários. Ao reunir diferentes significações e formas de conexões tem-se que a evolução das formas de pensamento ocorre devido à tomada de consciência das coordenações de suas próprias ações, enquanto sujeito epistemológico. Ou ainda, o núcleo das coordenações operacionais pode transformar as diferentes formas de pensamento assim como a ação modifica os objetos materiais, possibilitando ao sujeito evoluir do plano da ação para o plano do pensamento e conseqüentemente através de coordenações mais complexas chegar a níveis superiores de tomada de consciência. O diagrama da figura 7 ilustra as diferentes formas de tomada de consciência e sua progressiva evolução através de níveis.

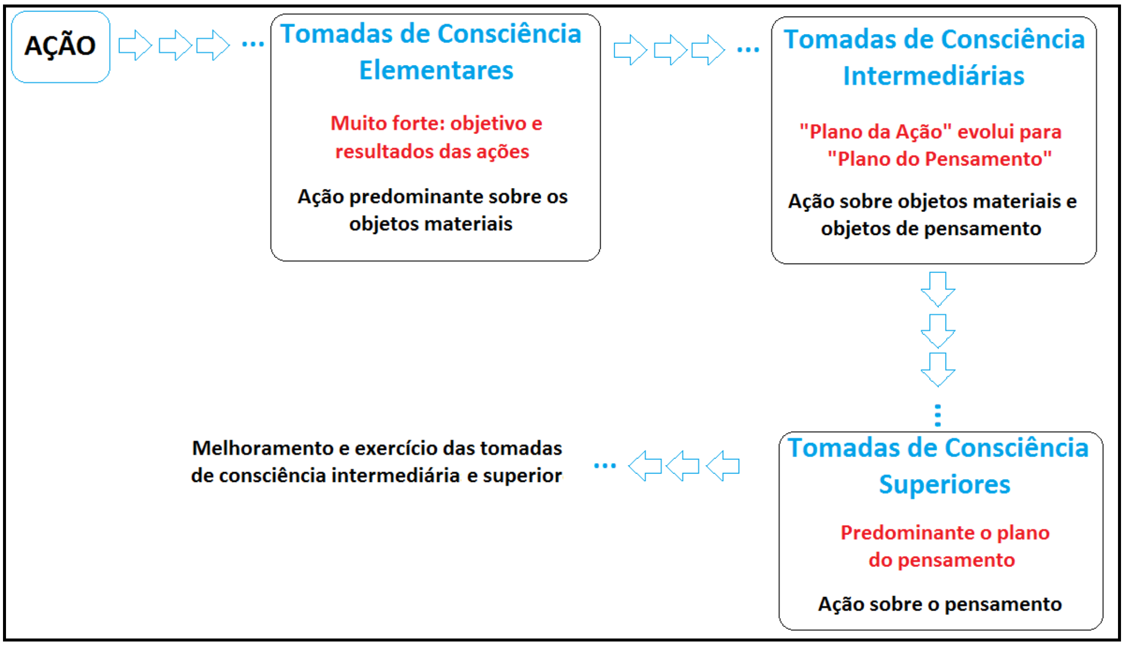


Figura 8 – Esquema sobre a evolução em níveis de tomada de consciência.

Visto que a tomada de consciência apresenta diferentes níveis, exploraremos no presente texto aspectos referentes à evolução das ações, partindo de sua manifestação mais elementar, ocorrida sobre os objetos, até sua expressão máxima de formalidade: ação sobre as formas de pensamento. Procura-se defender a ideia que a evolução da ação está intimamente relacionada com a evolução dos níveis da tomada de consciência. Sobre isso, diz Piaget (1977b):

> "Consiste em mostrar-nos que a ação em si mesma constitui um saber, autônomo e de uma eficácia já considerável, porque embora se trate apenas de um *savoir faire* e não de um conhecimento consciente no sentido de uma compreensão conceituada, ele constitui, no entanto, a fonte desta última, uma vez que a tomada de consciência se encontra em quase todos os pontos em atraso, e com freqüência de forma muito sensível, em relação a esse saber inicial que é, portanto, de uma eficiência notável, conquanto ele mesmo não se conheça." (PIAGET, 1977b, p.207)

Portanto, a evolução da ação, do plano material para o plano do pensamento, possibilita que a consciência seja gradualmente modificada também. As modificações da tomada de consciência produzem mudanças na ação, correspondendo assim a uma mútua e recíproca troca durante o processo. Não se pode considerar que a evolução qualitativa da ação por parte do sujeito esteja desvinculada da evolução qualitativa das formas de tomada de consciência, pois além da ação constituir um saber, ela é potencializada e favorecida pelo avanço para níveis superiores da tomada de consciência. E quando a ação atinge patamares superiores em relação às ações iniciais, ocorre uma contribuição para as novas tomadas de consciência, que são reorganizadas e reestruturadas também em um patamar superior.

No momento que os sujeitos se deparam com situações novas e conflitantes, eles podem, por meio da organização de seus esquemas assimiladores, mobilizar a ação na tentativa de criar regulações ativas capazes de ultrapassar as barreiras impostas pelo objeto. Para Piaget, a criação da novidade, ou regulação ativa, ocorre em decorrência da ação e está relacionada com a capacidade do sujeito em elaborar por meio de um processo cognitivo a busca pela superação da contradição ou tentativa de equilibrar-se parcialmente durante a ação. Como a tomada de consciência apresenta níveis, conforme discutido anteriormente, as regulações ativas e as coordenações das ações tornam-se melhores e mais eficientes possibilitando ao sujeito interiorizar suas ações e com isso se aproximar mais do centro do objeto em estudo.

Porém, não separado da internalização, ocorre ao mesmo tempo, na forma de binômio, a exteriorização, contribuindo para o processo de conceituação. O primeiro contribui na construção das estruturas lógico-matemáticas e o segundo para as explicações causais. O progresso e evolução dos sucessíveis níveis de tomada de consciência estão intimamente relacionados com os processos de internalização e exteriorização, possibilitando a evolução da ação assimiladora e acomodadora. Assim, quando o sujeito está envolvido na tentativa de ultrapassar as barreiras impostas pelo objeto, o progresso dessas ações combinadas permite que as regulações ativas sejam mobilizadas no sentido de superar a contradição e chegar a uma explicação de causalidade para os fenômenos.

A figura 8, a seguir, ilustra a tomada de consciência como um processo não apenas decorrente da simples ação do sujeito sobre o objeto, mas sim de uma complexa reorganização de suas estruturas de pensamento, criação de novos esquemas assimiladores, aperfeiçoamento da regulação ativa, retirada de informações sobre a ação, organização das informações obtidas na ação e de equilíbrios/desequilíbrios parciais ocorridos ao longo do processo. Pode-se representar, através do esboço de um gráfico cartesiano, como a evolução da ação e das coordenações elaboradas pelo sujeito conduz à reorganização das estruturas de pensamento e conseqüentemente à evolução dos níveis da tomada de consciência, uma vez que o desenvolvimento de novos esquemas assimiladores e regulações ativas contribuem no processo.

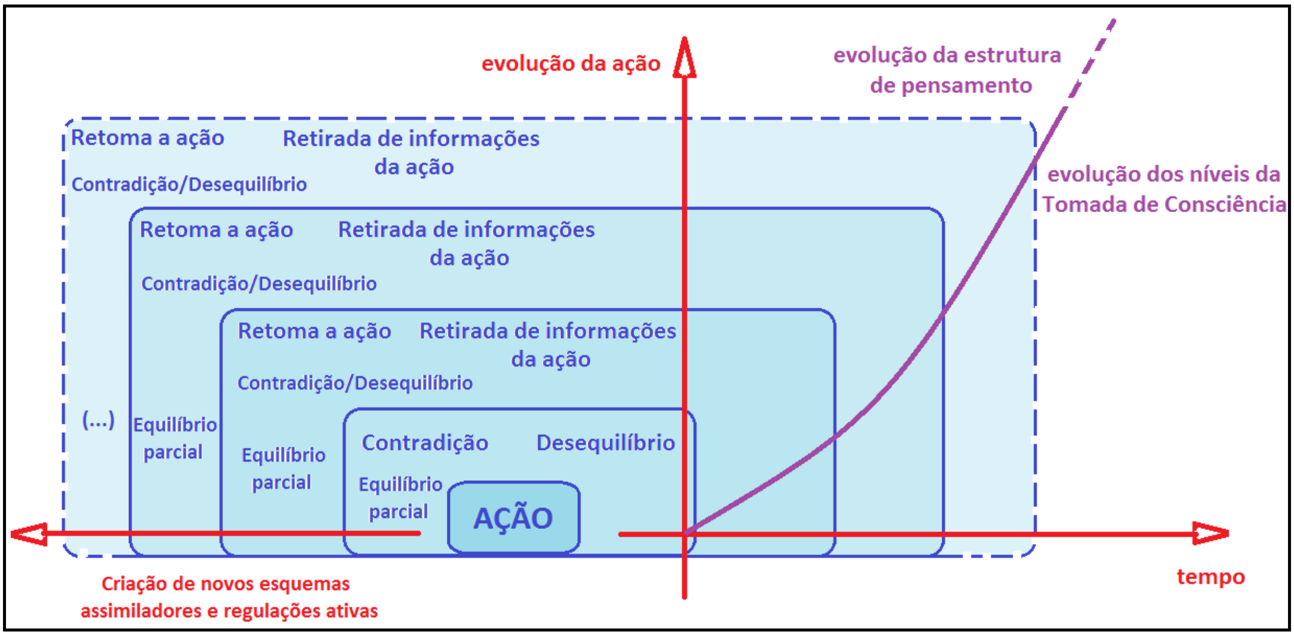


Figura 9 – Evolução da tomada de consciência e estrutura do pensamento, aliada à criação de novos esquemas assimiladores e regulação ativa.

Para encerrar, a tomada de consciência, apoiada nos movimentos de internalização e exteriorização, apresentada e discutida nessa seção, têm relação intrínseca com o fenômeno da abstração, que será apresentado e discutido na próxima seção. Sobre essas relações, Piaget (1977b) disserta:

> "A solidariedade dos dois movimentos de interiorização ou lógico-matemático e de exteriorização ou físico e causal torna-se ainda mais estreita do que nos níveis precedentes, em consequência dos progressos da abstração, e em virtude desse paradoxo bem conhecido segundo o qual a adaptação aos dados concretos da experiência depende do caráter abstrato dos quadros noéticos que permitem analisá-la e compreendê-la. Em suma, o estudo da tomada de consciência levou-nos assim a recolocá-la na perspectiva geral da relação circular entre os sujeitos e os objetos, o primeiro só aprendendo a conhecer-se mediante a ação sobre estes e os segundos só se tornando cognoscíveis em função do progresso das ações exercidas sobre eles." (PIAGET, 1977b, p.211)

2.2.2 – Abstração reflexionante

As obras *Abstração Reflexionante* (1977a) de Piaget e *Educação e Construção do Conhecimento* (2012) de Becker serão a inspiração para a apresentação teórica desta seção. Ao final da seção anterior foi mencionado que a evolução dos níveis da tomada de consciência ocorre junto com o progresso da abstração. Há relações mútuas entre abstração e tomada de consciência. A melhora qualitativa de um aspecto implica a melhora qualitativa do outro, ou seja, quanto mais elaborados se tornam os níveis de abstrações melhores são os níveis de tomada de consciência.

Nesta seção discutiremos os principais conceitos referentes à abstração, em especial a abstração reflexionante, que contribui na compreensão de como o conhecimento lógico-matemático é construído, organizado e estruturado pelo sujeito durante sua ação sobre o objeto.

Conforme apresentado anteriormente, a epistemologia genética de Jean Piaget é a teoria que apresenta como hipótese para explicar a gênese do desenvolvimento cognitivo humano a ação do sujeito sobre os objetos e os seus sucessivos avanços, devido à organização das *coordenações das ações* realizadas pelo sujeito. Na epistemologia genética considera-se "objeto" tudo o que não é o sujeito. É importante destacar que o pensamento e as ideias do próprio sujeito também podem ser constituídos objetos, desde que o sujeito aja sobre eles e assim avance na direção da tomada de consciência.

O termo "coordenações de ações" apresentado no parágrafo anterior é a fonte dos dados no processo de abstração proposto por Piaget (1977a). O verbo abstrair significa retirar, extrair, puxar, neste caso temos que a abstração consiste no processo de retirada de qualidades dos objetos (abstração empírica) ou também de retirada de qualidades das coordenações de ações (abstração reflexionante). Nesse sentido, a abstração divide-se em duas categorias gerais: abstração empírica e abstração reflexionante. Inicialmente vamos expor o ponto de vista do autor sobre essas categorias:

> "Recordemos inicialmente nossas definições. A abstração "empírica" (*empirique*) tira suas informações dos objetos como tais, ou das ações dos sujeitos sobre suas características materiais; de modo geral, pois, dos observáveis, ao passo que a abstração "reflexionante" (*refléchissante*) apóia-se sobre as coordenações de ações do sujeito, podem estas coordenações, e o próprio processo reflexionante, permanecer inconscientes, ou dar lugar a tomadas de consciência e conceituações variadas." (PIAGET, 1977a, p.274)

Logo, pode-se afirmar que a abstração empírica consiste em extrair dos objetos qualidades que eles tem, as quais o sujeito terá a possibilidade de fazer relações e elaborar novas características ou qualidades para os objetos. Portanto, a abstração empírica é uma etapa inicial e necessária para a evolução cognitiva do sujeito, uma vez que sem ela não é possível desenvolver qualitativamente o pensamento através dos níveis da abstração reflexionante.

No processo de retirada das características dos objetos não se pode confundir isso com a retirada de qualidades que atribuímos aos objetos, caracterizando o segundo procedimento segundo Piaget (1977) por abstração pseudo-empírica. A abstração chamada pseudo-empírica é um tipo de abstração reflexionante na qual o sujeito exerce a coordenação de suas ações para que ela ocorra. Sobre este tipo de abstração, Becker (2014) esclarece:

> "A abstração pseudo-empírica consiste em retirar dos observáveis não suas características, mas aquilo que o sujeito colocou neles. Por ela, o sujeito projeta no mundo dos observáveis suas coordenações de ações. Ao retirar características dos observáveis, não retira o que pertence aos observáveis – como na abstração

> empírica, mas o que ele, sujeito, colocou neles. A enumerabilidade de um conjunto de objetos, como as contas de uma fileira do ábaco, não está no ábaco; se o sujeito a retira do ábaco é porque ele a colocou lá. A bicicleta é um meio de transporte ecológico; a característica “ecológico” não pertence ao objeto-bicicleta; se o sujeito a retirou desse objeto foi porque ele a colocou lá, previamente. Se ele olha para uma estrela e diz que ela é mais nova porque emite cor azulada ou mais velha porque emite cor avermelhada, as cores são captadas por abstração empírica, mas, “mais nova” ou “mais velha” por abstração pseudo-empírica; se o sujeito retira essas características das estrelas é por ele as colocou nelas. A flor do flamboyant é vermelha; retira-se a cor “vermelha” por abstração empírica. Mas, quando se afirma que essa flor é a mais vermelha do parque, “mais vermelha do parque” foi colocada lá pelo sujeito; se ele retira essa característica da flor, foi porque ele a colocou lá; ele a retira por abstração pseudo-empírica (que é reflexionante).” (BECKER, 2014, p.114)

Tal como exemplifica a passagem anterior, no contexto da presente tese, não se pode desvincular do processo de construção do conhecimento pelo sujeito o papel desempenhado pelas abstrações pseudo-empíricas. Trata-se de um complexo jogo de relações predominantemente mentais estabelecidas entre as abstrações empíricas e abstrações reflexionantes, as quais a partir da ação e do melhoramento destas pelo sujeito evocam-se simultaneamente qualidades inerentes aos dois tipos de abstrações mencionados anteriormente. O exercício da abstração de qualidade pseudo-empírica quando desempenhado pelo sujeito oportuniza que uma articulação entre estes dois tipos de abstração seja feita, valorizando e aperfeiçoando o processo de ação e coordenação de ações sobre os objetos. Este exercício de articulação, na forma de um binômio, ocorre conforme mostra Becker (2014):

> “A abstração pseudo-empírica articula a passagem entre a abstração empírica e a reflexionante. Como reflexionante, ela reconhece a legitimidade da abstração empírica mas, ao mesmo tempo, mostra que é a reflexionante que organiza, dá sentido aos dados obtidos pela empírica. A condição de possibilidade da abstração empírica reside nos instrumentos que a abstração reflexionante vai construindo e pondo a sua disposição.” (BECKER, 2014, p.119)

No estudo da matemática a pseudo-empiria se faz presente, ao passo que a extração das características impostas pelos sujeitos é necessária e contribui para elaborações mais complexas e que generalizam as qualidades, enriquecendo assim o objeto de estudo. À medida que se aumenta o número de abstrações do sujeito durante o processo interativo sujeito-objeto, a qualidade de seu pensamento evolui devido ao progresso da abstração reflexionante e as sucessivas tomadas de consciência que daí decorrem. O conhecimento matemático é construído por abstração reflexionante, sobretudo da pseudo-empírica. Destaca-se que a abstração empírica sozinha não constrói conhecimento (capacidade) matemático.

A abstração reflexionante tem duas características essenciais para a compreensão sobre como os níveis de abstração e tomada de consciência progridem no decorrer da ação do sujeito.

Trata-se dos processos de reflexionamento e reflexão. Sobre isso, Piaget (1977a) afirma:

> "Lembremo-nos, igualmente, de que a abstração reflexionante comporta sempre, dois aspectos inseparáveis: de um lado, "reflexionamento" (*réfléchissement*), ou seja, a projeção (como através de um refletor) sobre um patamar superior daquilo que foi tirado do patamar inferior e, de outro lado, uma "reflexão" (*réflexion*), entendida esta como ato mental de reconstrução e reorganização sobre o patamar superior daquilo que foi assim transferido do inferior." (PIAGET, 1977a, p.274)

A união da reflexão e do reflexionamento constitui uma estrutura capaz de não apenas passar de um nível para o seguinte, mas juntas tem o caráter de uma estrutura capaz de desenvolver características qualitativas superiores no decorrer das passagens, ou projeções. Isso significa que os patamares superiores alcançados pelo sujeito através da ação e coordenação de suas ações tem relação intrínseca com os patamares inferiores ou iniciais desenvolvidos através da ação. O autor manifesta o seu ponto de vista em duas passagens:

> "Com efeito, a formação de cada um desses patamares acarreta, por sua vez, novas "reflexões", porquanto se trata de reconstruir sobre o novo plano o que foi deslocado ou projetado a partir de precedente: por exemplo, a coordenação de duas ações não é da mesma natureza que a de suas representações conceitualizadas, o que exige uma reconstrução." (PIAGET, 1977a, p.276)
> "Disto resulta que, nos níveis superiores, é a reflexão que conduz cada vez mais o jogo em relação aos reflexionamentos, reduzindo-se, então, a tematizações (operações que se tornam objetos de pensamento), ao passo que, nos níveis inferiores, eram os reflexionamentos que constituíam o motor essencial." (PIAGET, 1977a, p.277)

Portanto, é através de sucessivas operações de reflexão e reflexionamento que é possível ao sujeito avançar na direção dos patamares superiores de abstração e tomadas de consciência de maior qualidade. A reorganização e coordenação de suas ações permitem qualificar cada vez mais a sua ação na busca pela compreensão do objeto, ou seja, a evolução da abstração reflexionante é um processo pelo qual o sujeito constrói, reconstrói, organiza e reorganiza os seus esquemas e estruturas de pensamento a todo o momento. A figura 9 apresenta um esquema inicial das características apresentadas anteriormente envolvendo a abstração.

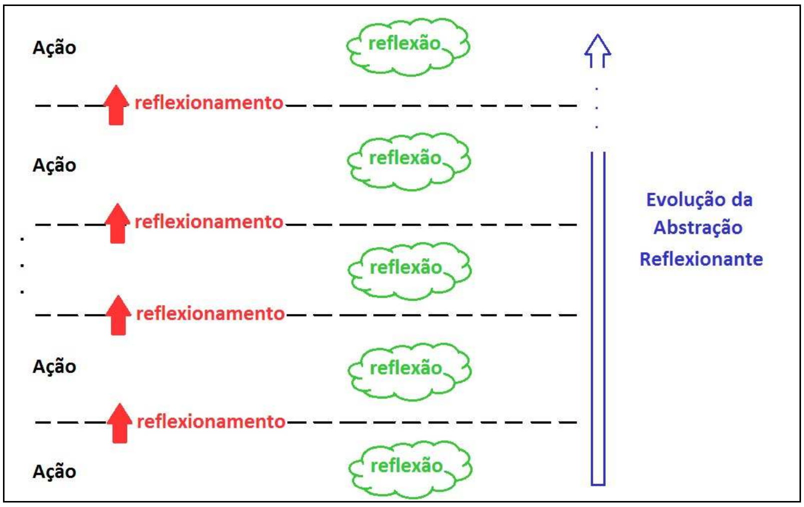


Figura 10 – Esquema sobre reflexão, reflexionamento e suas contribuições para a evolução da abstração.

No estudo da tomada de consciência, falamos que a mesma apresenta níveis que progressivamente evoluem conforme aumenta a intensidade da interação entre sujeito e objeto. Pode-se afirmar que esses níveis estão em correspondência biunívoca com o processo de abstração, ao passo que a abstração, caracterizada pela tomada de consciência, independente do nível que o sujeito está cognitivamente é chamada de abstração refletida. Essa última é o produto de uma abstração reflexionante que se tornou consciente. As pesquisas apresentadas por Piaget (1977a) mostram que para atingir esse patamar de abstração o sujeito deve passar por etapas que são necessárias e graduais, nas quais, a cada novo desafio, o sujeito é desequilibrado e deve se reorganizar de tal forma a superar as contradições e dificuldades que surgem na interação. A maneira de promover por parte do sujeito o avanço através dos diferentes níveis é desenvolver a regulação ativa, ou seja, desafiar a criação e desenvolvimento de novidades frente às diversas situações. Sobre a abstração refletida, Montangero (1998) afirma:

> "O processo de abstração reflexionante prossegue no plano de pensamento adulto, científico ou pré-científico. Sabe-se, por exemplo, que a geometria nasceu da medida dos terrenos. A álgebra pode ser vista como o resultado de uma abstração a partir do cálculo aritmético. Abstraíram-se do cálculo – saber prévio da álgebra – as operações e as relações (adição e subtração, multiplicação e divisão, equivalência, etc) sem se ocupar com os números sobre os quais se apóiam. A reflexão sobre as operações deu nascimento à álgebra. Trata-se, nesses níveis de pensamento, de uma forma particular de abstração reflexionante que Piaget chama de abstração refletida." (MONTANGERO,1998 , p. 91)

Deve-se então discutir sobre a influência da criação de novidades nesse processo, ou ainda, quais as contribuições das regulações ativas para o processo da abstração reflexionante e conseqüentemente para a tomada de consciência. Sobre essa influência Piaget afirma que há relação direta entre os reflexionamentos e as construções das novidades, de forma que o enriquecimento de um implica o enriquecimento do outro. Ou seja, uma melhora qualitativa nas regulações ativas diante das situações de desequilíbrio está condicionada a melhores reflexionamentos e reflexões (reconstrução sobre um patamar superior daqui que fora dado no precedente = reflexão) elaborados pelo sujeito. Nas palavras do autor:

> "(...) todo novo reflexionamento exige uma reconstrução sobre um patamar superior daquilo que fora dado no precedente. Essa reconstrução é, com efeito, *necessária* pois que as ligações entre as mesmas ações A, B, C, etc., não são idênticas; trata-se de ações materiais, sucedendo-se de espaço a espaço, com esquecimentos dos precedentes, bem como de uma representação que as acompanha, mas ligando-as ainda mais umas às outras, além de uma narração que as reconstitua, etc." (PIAGET, 1977a, p.278).

Sobre a reconstrução em patamares superiores, Piaget afirma que durante o processo é de grande relevância considerar o binômio diferenciação/integração para compreendermos melhor a evolução da abstração reflexionante, visto que essas são suas características mais importantes. Diante de uma situação nova, provinda da ação sobre os objetos, o cerne para a criação das novidades está na tentativa de equilíbrio entre diferenciações e integrações. Segundo o próprio autor:

> "A abstração consiste, por si mesma, numa diferenciação, porquanto separa uma característica para transferi-la, e uma nova diferenciação acarreta a necessidade de integração em novas totalidades, sem as quais a assimilação deixa de funcionar, daí o princípio comum da formação de novidades: a abstração reflexionante conduz a generalizações, por isso mesmo, construtivas, e não simplesmente indutivas ou extensivas como a abstração empírica" (PIAGET, 1977a, p.284)

Ou seja, para o sujeito envolvido em um constante e aperfeiçoado trabalho de ação sobre os objetos materiais ou mentais, há um progressivo avanço na direção da abstração reflexionante. Esse avanço consiste de micro progressos, graduais e que estão intrinsecamente inter-relacionados através de dez passos evolutivos. Becker (2012, p. 102) expõe quais são as dez etapas ou níveis evolutivos galgadas pelo sujeito durante o processo de criação de novidades. A proposta agora é trazer até a presente discussão quais são esses dez níveis:

1) Inicialmente há diferenciação dos esquemas de assimilação do sujeito, com o objetivo que eles possam ser aplicados em uma situação nova. Ou seja, um esquema anterior é reaplicado de forma nova, constituindo-se como um esquema diferenciado em relação ao anterior.

2) Consiste na etapa de elaboração das relações entre as coordenações conceitualizadas e as situações práticas as quais essa ação coordenada se repete. Ou seja, como o sujeito pode relacionar as suas ações com as coordenações conceituais previamente construídas por ele.

3) A construção da noção de ordem, por uma implicação significante consegue tornar-se uma coordenação necessária para relacionar esquemas de ordem distintos. Ou seja, para que se estabeleça alguma noção de ordem é essencial que o sujeito relacione suas ações com os seus esquemas previamente elaborados, tornando possível construir uma implicação significante.

4) A partir de coordenações anteriores é necessário que o sujeito faça comparações entre as

coordenações, com o objetivo de produzir novas coordenações, diferentes das anteriores. Ou seja, não se trata de uma simples cópia dos significados produzidos pelas coordenações anteriores, e sim de um avanço qualitativo e significativo na direção de novas coordenações.

5) Emerge a construção de estruturas qualitativas comuns capazes de solucionar situações que as estruturas antigas não conseguiam dar conta. Ou seja, há em nível de estrutura uma melhora qualitativa na solução de conflitos e desequilíbrios decorrentes da ação do sujeito sobre o objeto.

6) Progressivamente ocorre a generalização das negações ou inversões, uma vez que predominaram no decorrer da ação as qualidades positivas sobre as negativas. Ou seja, a construção de uma estrutura nova, a negação, é o resultado de abstrações reflexionantes sobre as relações estabelecidas através de diferenças.

7) A etapa anterior conduz à quantificação das extensões. Ou seja, baseada em composições de relações de operatividade direta e inversa, o sujeito vai aos poucos construindo quantificações capazes de aumentar sua compreensão, qualificando cada vez mais suas estruturas sobre as diferenças e assimetrias decorrentes na ação.

8) A quantificação e inversão fazem emergir estruturas capazes de mobilizar o sujeito na direção do pensamento lógico-matemático e concreto em conjunto. Ou seja, continuidade com mais intensidade o processo de abstrações refletidas a partir dos processos reflexionantes.

9) Começam a se destacar as chamadas reflexões sobre reflexões. Ou seja, através de metarreflexão o sujeito começa a trabalhar com hipóteses e suas conseqüências.

10) A busca pela razão das coisas. Ou seja, a tentativa de atividade criadora se manifesta quando das coordenações das ações o sujeito consegue teorizar ou estabelecer os motivos pelos quais tal fenômeno ocorre decorrente da ação. As explicações causais são construídas a partir de um processo que envolve implicitamente as nove etapas anteriores e que são fruto das coordenações do sujeito, em especial das coordenações de suas ações, sendo que nesse nível elas são predominantemente mentais.

A figura 10 ilustra as dez etapas apresentadas acima. Nota-se que há através dos níveis uma espécie de incorporação das etapas anteriores, ou seja, a criação das novidades constitui um processo fundamental e próprio da abstração reflexionante, capaz de possibilitar ao sujeito alcançar patamares cada vez mais elevados e complexos. Portanto, convergimos com o pensamento de Becker (2012) que afirma que o motor da abstração reflexionante está na evolução e criação de novidades, uma vez que ela rompe com a posição passiva do sujeito e impõe que ele através de sua ação possa qualificar suas formas de pensamento.

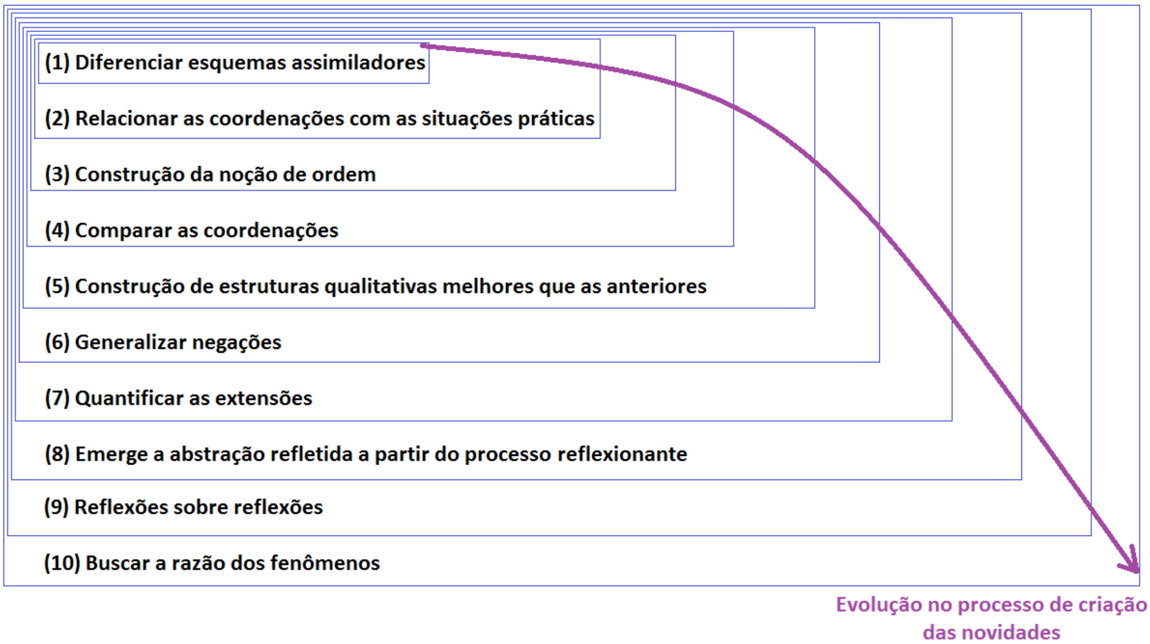


Figura 11 – Esquema sobre a criação das novidades, motor da abstração reflexionante.

Nossa exposição caracterizou até agora o processo da abstração reflexionante. Considera-se fundamental expor também as contribuições da abstração empírica para o processo de construção do conhecimento. Inicialmente, constata-se que:

> "(...) a evolução da abstração empírica, pois, em todos os níveis, e isso sem exceção, seu funcionamento exige o emprego de esquemas assimiladores cuja formação emerge, ao menos em parte, da abstração reflexionante. Mas é claro que, proporcionalmente, nos estágios iniciais, os atos da abstração empírica são muito mais numerosos que as intervenções da abstração reflexionante. O fato essencial que domina o desenvolvimento da mais simples destas duas formas é, então, que, nos estágios ulteriores, a proporção se inverte cada vez mais, portanto, às suas expensas, em número relativo, mas que sua subordinação crescente às abstrações reflexionantes reforça seus poderes e atinge progressos consideráveis, tanto em número absoluto quanto qualidade, ou, em outras palavras, em adequação ao real." (PIAGET, 1977a, p.288)

Pela passagem anterior, tem-se que a abstração empírica constitui uma importante peça durante o processo de ação pelo sujeito. Na medida em que o sujeito avança progressivamente na direção das abstrações reflexionantes, que serão predominantes, as abstrações empíricas tornam-se menos intensas. Trata-se de uma espécie de jogo entre esses dois tipos de abstração, onde a empírica perde espaço para as ações fundamentadas na elaboração de explicações das causas e porquês dos fenômenos. Quando o sujeito tem esquemas assimiladores capazes de retirar qualidades pertencentes aos objetos, temos um caso típico de abstração empírica. Porém se da retirada das qualidades não acarretar uma evolução, no sentido de desafiar as coordenações de ações, o sujeito não terá progresso em seu processo de ação e investigação, uma vez que as estruturas nele existentes não se modificarão na direção e tentativa de compreensão. Sobre o fenômeno da abstração empírica, Becker (2012) disserta:

> “As comparações entre abstração empírica e reflexionante nos levam a concluir que, quanto mais se sobe nas faixas etárias, tanto mais o sujeito torna-se capaz de atividades reflexivas, próprias do processo da abstração reflexionante, chegando a abstrações refletidas, e quanto mais se desce nas faixas etárias, tanto mais o sujeito limita-se a atividades que levam a abstrações empíricas ou, no máximo pseudoempíricas. Por isso, no trânsito que vai da predominância da abstração empírica até a consolidação da reflexionante deve-se, no que concerne a aprendizagem, intensificar ações que desafiam o sujeito a realizar abstrações pseudoempíricas.” (BECKER, 2012, p.108)

Portanto, além do processo empírico e pseudo-empírico estar presente no fenômeno da abstração é importante destacar que eles são essenciais para o progresso dos níveis seguintes, uma vez que sua ausência pode significar a falta de subsídios necessários e capazes de fazer os esquemas assimiladores evoluir e assim modificar e reestruturar as estruturas de pensamento do sujeito. Conforme as abstrações empíricas se tornam menos intensas, possibilitam ao sujeito estabelecer formas concretas de operações com o pensamento, potencializando o progresso da abstração reflexionante. Quando o autor anteriormente destaca a importância de possibilitar ao sujeito a realização de abstrações pseudoempíricas, nota-se que ele destaca que essas últimas se combinam de certo modo com as empíricas, tornando progressiva a evolução do sujeito na direção das abstrações reflexionantes.

As teorias da abstração reflexionante e da tomada de consciência apresentadas anteriormente são de grande importância para a análise dos registros produzidos pelos sujeitos ao longo da sequência didática proposta. Constituem uma fundamentação teórica consistente e capaz de auxiliar na interpretação dos registros escritos, fornecendo os subsídios necessários para verificar o gradual e processual micro-avanço dos sujeitos na direção do aumento do conhecimento ou capacidade cognitiva.

Consideramos que o estudo e apropriação dos conceitos da epistemologia genética auxiliam o professor no melhor entendimento e compreensão no modo como os sujeitos podem aprender os conceitos matemáticos. Torna-se fundamental nessa presente pesquisa estabelecer relações entre os conceitos propostos por Piaget e a caminhada do sujeito no processo de construção dos conceitos. Portanto, o mapa conceitual apresentado na figura 11, ao final desta seção, busca estabelecer relações entre os conceitos apresentados anteriormente sobre abstração reflexionante e tomada de consciência, destacando suas principais características.

Ao estudar essas teorias, durante o curso de doutorado, pude perceber mais notadamente que a matemática é uma ciência que resulta de um processo temporal combinado com o esforço e tentativa do ser humano em tentar compreender ao máximo os objetos do conhecimento. Ao partir da zona periférica o movimento oscilatório entre os centros (do sujeito e do objeto) conduz para sucessivos e graduais avanços em tomada de consciência devidos ao processo de abstração reflexionante. Através da ação ou coordenação de ações é possível que o sujeito evolua e desenvolva qualitativamente suas formas de pensamento, possivelmente alcançando níveis de tomada de consciência superiores e, consequentemente, de abstrações refletidas. Com isso é possível que em níveis mais elevados de tomadas de consciência e abstrações reflexionantes, o pensamento se torne o próprio objeto investigado pelo sujeito, tornado-se possível fazer o exercício das reflexões sobre reflexões, atingindo metareflexões.

Almejou-se com o desenvolvimento dessa seção apresentar as principais características do processo de abstração, caracterizando a abstração empírica e a abstração reflexionante. Apresentamos os elementos necessários para a compreensão do seu funcionamento, que consiste de um complexo mecanismo capaz de explicar o desenvolvimento do sujeito a partir de sua ação sobre os objetos, sejam materiais ou mentais. Nesse aspecto, Becker (2012) expõe:

> “Ao descrever e explicar o mecanismo da abstração reflexionante, Piaget constrói uma ponte entre as ações sensório-motoras do bebê e a atividade do cientista no laboratório, do matemático em suas atividades dedutivas ou do filósofo em suas reflexões sistêmicas. Mostra que há entre aquelas e estas, uma rigorosa continuidade. Continuidade entre as percepções do bebê que se esgotam na manipulação dos objetos do entorno e o conhecimento universal e necessário do cientista cujos limites são as fronteiras do universo, do micro e do macrocosmos, do espaço e do tempo. A universalidade e a necessidade, que fornece alcance inestimável ao conhecimento, foram arrancadas das inúmeras ações práticas no desenrolar da existência do sujeito psicológico, possibilitado pelo organismo biológico com seu cérebro. O que a abstração reflexionante realiza, abstração empírica nenhuma consegue fazê-lo. É esse processo que abre à aprendizagem sucessivas e infinitas possibilidades.” (BECKER, 2012, p. 110)

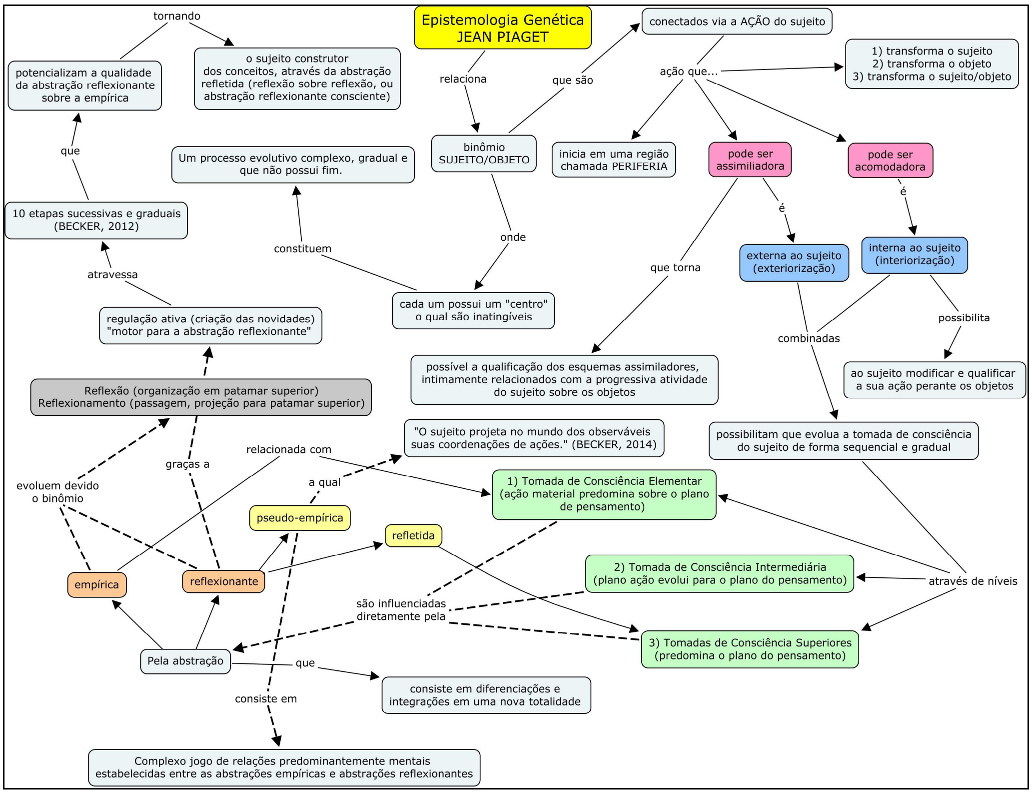


Figura 12 – Mapa Conceitual sobre abstração e tomada de consciência.

3. SOBRE CADEIAS DE MARKOV

3.1 – Sistemas dinâmicos e Cadeias de Markov

A presente seção objetiva apresentar características da teoria matemática das Cadeias de Markov, destacando-se os resultados matemáticos que foram de considerável utilidade durante a construção das sequências de atividades. Os resultados serão apresentados e discutidos na forma de teoremas, cujas demonstrações serão omitidas do presente texto, pois ultrapassam os propósitos e objetivos da presente tese. Porém, a título de contribuição indicam-se ao leitor obras para que eventuais consultas sejam realizadas.

Antes de tratar especificamente das Cadeias de Markov, precisa-se conhecer o que vem a ser um sistema dinâmico. Em uma página *web*[16] do IMPA (Instituto de Matemática Pura e Aplicada – Rio de Janeiro) é possível encontrar a seguinte noção:

> "O tema geral de estudo da Dinâmica são os sistemas cujo estado evolui no tempo, tais como são encontrados nas mais diversas áreas da Ciência e da atividade humana: Física, Ecologia, Metereologia, Biologia, Economia, e tantas outras disciplinas. A área tem portanto uma vocação plenamente multi-disciplinar.
> A lei de evolução pode assumir diversas formas: iterações, equações diferenciais, equações diferenciais parciais, transformações ou fluxos estocásticos. O objetivo é construir uma teoria matemática desses processos dinâmicos, que permita compreender e prever a sua evolução, sobretudo a longo prazo (...)"

Soares (2012, p.50) afirma que um sistema dinâmico é "composto por uma lei de evolução que descreve seu estado ao longo do tempo. Esta lei pode ser elaborada de diversas formas e pode ser utilizada para modelar fenômenos de diferentes áreas científicas". Katok & Hasselblatt (1995, p.1) traduzido e citado em Soares (2012) apresentam outra definição, na forma de itens, que possa contribuir na presente discussão:

> "A noção mais geral e um pouco vaga de um sistema dinâmico inclui os seguintes ingredientes:
> **(i).** Um "espaço de fase *X*", cujos elementos ou "pontos" representam possíveis estados do sistema.
> **(ii).** "Tempo", que pode ser discreto ou contínuo. Ele pode se estender apenas para o futuro (processos irreversíveis ou não inversíveis) ou tanto para o passado como para o futuro (processos reversíveis ou inversíveis). A sequência de momentos de tempo para o processo de tempo discreto reversível está em uma correspondência natural com o conjunto de todos os inteiros; irreversibilidade corresponde à considerar apenas os inteiros não negativos. De forma similar, para um processo de tempo contínuo, o tempo é representado pelo conjunto de todos os números reais no caso reversível e pelo conjunto dos números reais não-negativos para o caso irreversível.

---
[16] Disponível em http://milenio.impa.br/novo/portugues/areas_dinamicos.htm. Acesso em setembro de 2015.

> **(iii).** A lei de evolução no tempo. No contexto mais geral esta é uma regra que nos permite determinar o estado do sistema em cada momento de tempo *t* a partir de seus estados em todos os momentos anteriores. Assim, a lei de evolução no tempo mais geral é dependente do tempo e tem memória infinita." (SOARES, 2012, p.50)

Portanto, diante das ideias apresentadas anteriormente percebe-se que as Cadeias de Markov são um tipo de sistema dinâmico. Historicamente estes objetos foram construídos pela primeira vez pelo matemático russo Andrei Andreyevich Markov[17] (1856–1922). Em linhas gerais os primeiros trabalhos matemáticos desenvolvidos por Markov ocorreram nas áreas de teoria dos números e análise, influenciado diretamente por seu professor e orientador, o matemático russo Pafnuty Lvovich Chebyshev[18] (1821–1894). Chebyshev desenvolveu inúmeros teoremas e resultados matemáticos envolvendo frações contínuas[19], porém foi Markov que conseguiu estabelecer relações entre frações contínuas e a teoria das probabilidades.

Silva (2013, p.20) afirma que as noções iniciais envolvendo as cadeias surgiram inicialmente em um trabalho no qual Markov estudava a probabilidade de uma letra consoante ocorrer em uma determinada posição de uma palavra qualquer. A hipótese de Markov era que tal probabilidade dependeria apenas se a letra anterior à consoante fosse uma vogal ou outra consoante. Logo, com a proposta teórica de Markov seria possível relacionar a teoria das probabilidades com as "cadeias" por ele desenvolvidas, por meio de variáveis cujos valores mudam com a passagem do tempo. Com isso, no decorrer da evolução de um sistema em um determinado instante de tempo específico, deve-se, portanto considerar o estado da respectiva variável observada, caracterizando o estado do sistema através de uma probabilidade. Nas palavras de Anton & Rorres (2012):

> "Suponha que um sistema físico ou matemático está sofrendo mudanças tais que a cada momento ele possa ocupar algum entre um número finito de estados. Por exemplo, o tempo numa certa cidade poderia estar em um dentre os três estados possíveis: ensolarado, nublado ou chuvoso; ou então, um indivíduo poderia estar num dentre quatro estados emocionais possíveis: feliz, triste, irritado ou apreensivo. Suponha que um tal sistema mude com o tempo de um estado para outro e que, em instantes predeterminados, observemos o estado do sistema. Se o estado do sistema em qualquer observação não puder ser predito com certeza, mas se a probabilidade de um certo estado ocorrer puder ser predita unicamente a partir do conhecimento do estado do sistema na observação imediatamente anterior, então o processo de mudança de um estado para outro é denominado uma Cadeia de Markov ou um processo de Markov." (ANTON & RORRES, 2012, p.553)

A passagem anterior apresenta e menciona a ocorrência das Cadeias de Markov na forma de situações-problema. Entretanto, Anton & Busby (2003) apresentam a definição formal do que seja este objeto matemático:

---

[17] Biografia pode ser acessada em http://www.ugr.es/~eaznar/markov.htm. Acesso em out. de 2015.
[18] Biografia disponível em http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Chebyshev.html. Acesso em out. de 2015.
[19] Indica-se o seguinte material sobre o assunto: http://www.sbm.org.br/docs/coloquios/SE-1.06.pdf Acesso em out. de 2015.

> "Uma Cadeia de Markov é um sistema dinâmico no qual os vetores de estado em uma sucessão de intervalos de tempo são vetores de probabilidade e cada um dos vetores de estado na sucessão dos intervalos de tempo é obtido por uma equação da forma $\vec{u}(k+1) = P.\vec{u}(k)$ onde $P = \left[p_{ij} \right]$ é uma matriz estocástica e p_{ij} é a probabilidade do sistema estar no estado i no tempo $t = k+1$ e no estado j no tempo $t = k$. A matriz P é chamada de matriz de transição para o sistema." (ANTON & BUSBY, 2003, p.228, tradução nossa)

A partir do conceito apresentado anteriormente têm-se que três ideias essenciais devam ser consideradas:

(I) *Vetor de estado*: Conceitua-se vetor de estado em uma Cadeia de Markov todo vetor $\vec{v} = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix}$ cuja *i*-ésima coordenada ($x_{i1}; 1 \leq i \leq n$) seja a probabilidade do sistema estar no *i*-ésimo estado naquela determinada observação.

(II) *Vetor de probabilidade*: Conceitua-se vetor de probabilidade como todo o vetor cuja soma das suas coordenadas resulta um. Em linguagem matemática, se um vetor $\vec{v}$ for representado através de suas *n*-coordenadas $x_{11}, x_{21}, x_{31}, \cdots, x_{n1}$, então $x_{11} + x_{21} + x_{31} + \cdots + x_{n1} = 1$.

(III) *Matriz estocástica*: Conceitua-se matriz estocástica como toda matriz quadrada construída a partir de vetores de probabilidade. Se considerarmos um conjunto com *n* vetores de probabilidade $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \cdots, \vec{v}_n$ então segundo Anton & Busby (2003), as colunas da matriz *P* são construídas usando-se os vetores do conjunto $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \cdots, \vec{v}_n$.

Com os conceitos vetor de estado, vetor de probabilidade e matriz[20] estocástica apresentados anteriormente, supondo que seja conhecido um vetor de estado $\vec{u}_0$ de uma Cadeia de Markov em alguma observação inicial, pode-se a partir do resultado proposto no teorema (1) determinar sucessivos vetores de estado para a cadeia, a saber, $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \cdots, \vec{u}_n, \vec{u}_{n+1}, \cdots$.

<u>Teorema 1</u>: Se *P* for uma matriz estocástica de transição e $\vec{u}_n$ o vetor estado da enésima observação, então $\vec{u}_{n+1} = P.\vec{u}_n$.

Através do teorema 1 pode-se perceber que a construção da sequência de igualdades de modo indutivo a seguir seja um procedimento verdadeiro. Nota-se ainda que caso se conheça o estado inicial de uma Cadeia de Markov é possível a partir deste fazer inferências e projeções para estimativas de estados futuros da cadeia.

[20]Caso o leitor deseje conhecer mais sobre a matemática envolvida com *matrizes*, sugere-se a leitura de "*Fundamentos de Matemática Elementar*, *volume 4*" (oitava edição) dos autores Gelson Iezzi e Samuel Hazzan (2013).

$$\begin{cases} \vec{u}_1 = P.\vec{u}_0 \\ \vec{u}_2 = P.\vec{u}_1 = P.P.\vec{u}_0 = P^2.\vec{u}_0 \\ \vec{u}_3 = P.\vec{u}_2 = P.P^2.\vec{u}_0 = P^3.\vec{u}_0 \\ \vdots \\ \vec{u}_n = P.\vec{u}_{n-1} = P.P^{n-1}.\vec{u}_0 = P^n.\vec{u}_0 \end{cases} \tag{1}$$

Antes de enunciar os próximos dois teoremas necessitamos da seguinte definição:

Definição: Uma matriz de transição é chamada regular se uma potência positiva da matriz tem todas as entradas positivas.

Em outras palavras, se P for uma matriz de transição regular, então existe necessariamente algum número inteiro positivo c tal que P^c tenha todas as entradas positivas. No caso de uma Cadeia de Markov ser controlada por uma matriz regular, ela é denominada Cadeia de Markov regular. Os próximos dois teoremas fornecem importantes informações as quais são necessárias para compreender o comportamento do sistema em longo prazo.

Teorema 2 (*Comportamento de* P^c *quando* $c \to \infty$): Se P for uma matriz de transição regular, com $c \to \infty$ (leia-se "*c tende ao infinito*"), tem-se:

$$P^c \to \begin{bmatrix} q_1 & q_1 & \cdots & q_1 \\ q_2 & q_2 & \cdots & q_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_n & q_n & \cdots & q_n \end{bmatrix} \tag{2}$$

Onde cada um dos "q's" são números positivos tais que $q_1 + q_2 + q_3 + \cdots + q_n = 1$.

Teorema 3 (*Comportamento de* $P^c.\vec{u}$ *quando* $c \to \infty$): Se P for uma matriz de transição regular e $\vec{v}$ um vetor de probabilidade qualquer então, com $c \to \infty$ (leia-se "*c tende ao infinito*"), tem-se:

$$P^c.\vec{v} \to \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = \vec{q} \tag{3}$$

Onde $\vec{q}$ é um vetor de probabilidade fixo, independente do número inteiro "c" e com as entradas todas positivas.

Juntando-se os resultados dos dois últimos teoremas percebe-se que uma Cadeia de Markov regular sempre converge para *um único* resultado fixo ($\vec{q}$). Tal resultado chama-se vetor de estado estacionário ou vetor de equilíbrio. A unicidade do resultado da convergência é garantida pelo seguinte teorema:

<u>*Teorema 4*</u> (*vetor estacionário*): O vetor de estado estacionário $\vec{q}$ de uma matriz de transição regular P é o único vetor de probabilidade que satisfaz a equação $P\vec{q} = \vec{q}$.

Nota-se que o teorema 4 pode ser reescrito da forma $(P - M_{Id})\vec{q} = \vec{0}$, ou seja, através de um sistema de equações lineares homogêneo (pois resulta o vetor nulo $\vec{0}$). Na escrita anterior, a notação M_{Id} é para denotar a matriz identidade. Ainda, através dos conceitos de autovetor (auto-espaço) e autovalor da álgebra linear, com base no resultado do teorema 4 pode-se verificar que para matrizes de transição regular, a unidade será um autovalor. As definições e teoremas apresentados nessa seção desempenharam papel importante durante a pesquisa de doutorado, pois forneceram os subsídios matemáticos necessários para a elaboração e construção das sequências de atividades utilizadas ao longo dos experimentos. O leitor interessado em consultar mais detalhes sobre os conteúdos matemáticos apresentados na seção pode consultar Anton & Rorres (2012), Anton & Busby (2003), Kemeny & Snell (1976), Behrends (2000).

3.2 – Escritos sobre o ensino de Cadeias de Markov

Concentra-se na presente seção o esforço de apresentar materiais e pesquisas já produzidas no âmbito educacional que objetivaram oportunizar o estudo de matemática através da apresentação e análise de situações-problema envolvendo modelagem matemática com Cadeias de Markov. O repositório virtual do GeoGebra, conhecido como *GeoGebratube*[21] tem em sua base de dados dois objetos virtuais que apresentam o estudo de situações-problema envolvendo a modelagem matemática fazendo uso de Cadeias de Markov, conforme mostrado nas figuras 12 e 13. Os objetos virtuais, respectivamente, consistem na modelagem do comportamento de um jogo de dados e de um fluxo de caixa em determinado investimento, ambos analisados conforme varia o tempo no decorrer do experimento. Ambos os objetos estão disponíveis e podem ser acessados através de qualquer dispositivo com conexão à *internet.*

Ao manipular os objetos citados anteriormente, verifica-se que ambos são limitados em termos de uma possível interatividade com o sujeito. O primeiro objeto virtual (figura 12) não apresenta atividades ou indicação de estudo que possa ser produzido a partir do seu uso, deixando a cargo do professor optar por usá-lo ou pela elaboração de atividades que possam ser usadas com esses dois objetos. No segundo objeto virtual (figura 13) se fornece ao visitante a indicação de um

[21] Repositório de objetos virtuais construídos no software Geogebra. Disponível em: http://www.geogebratube.org/

endereço eletrônico[22] que tem explicações técnicas sobre o problema do "*Cash Management*" e um roteiro com três atividades que envolvem os conceitos apresentados na própria página web.

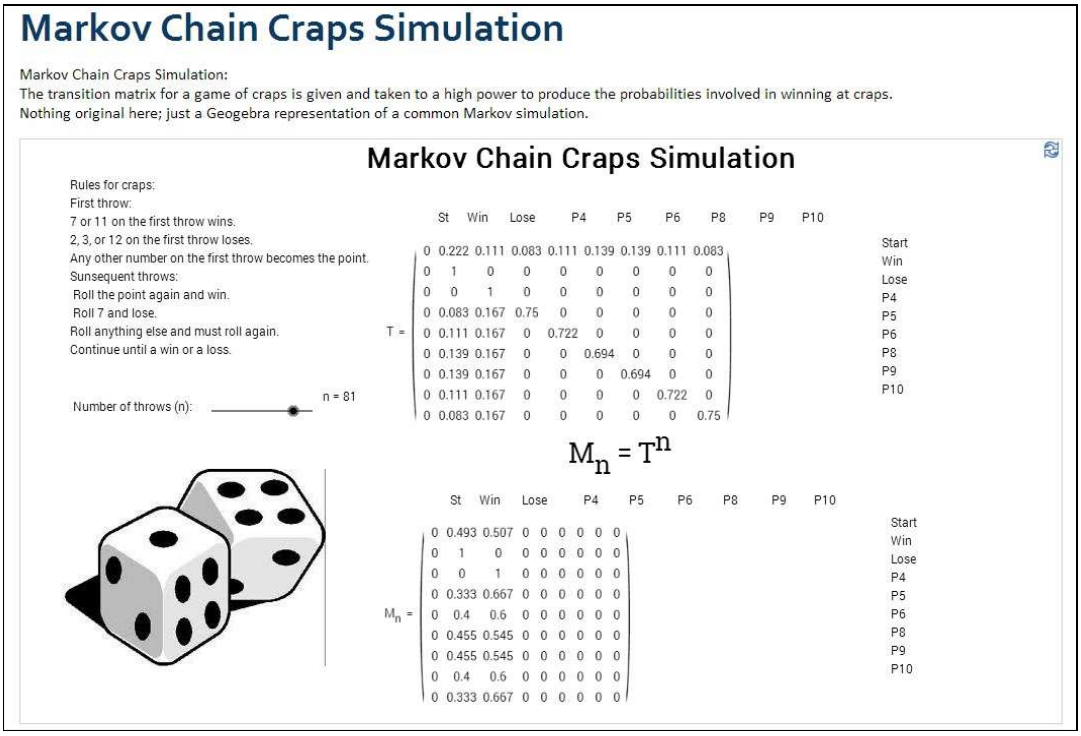


Figura 13 – Modelagem matemática envolvendo jogo de dados.
Disponível em: http://www.geogebratube.org/student/m14803

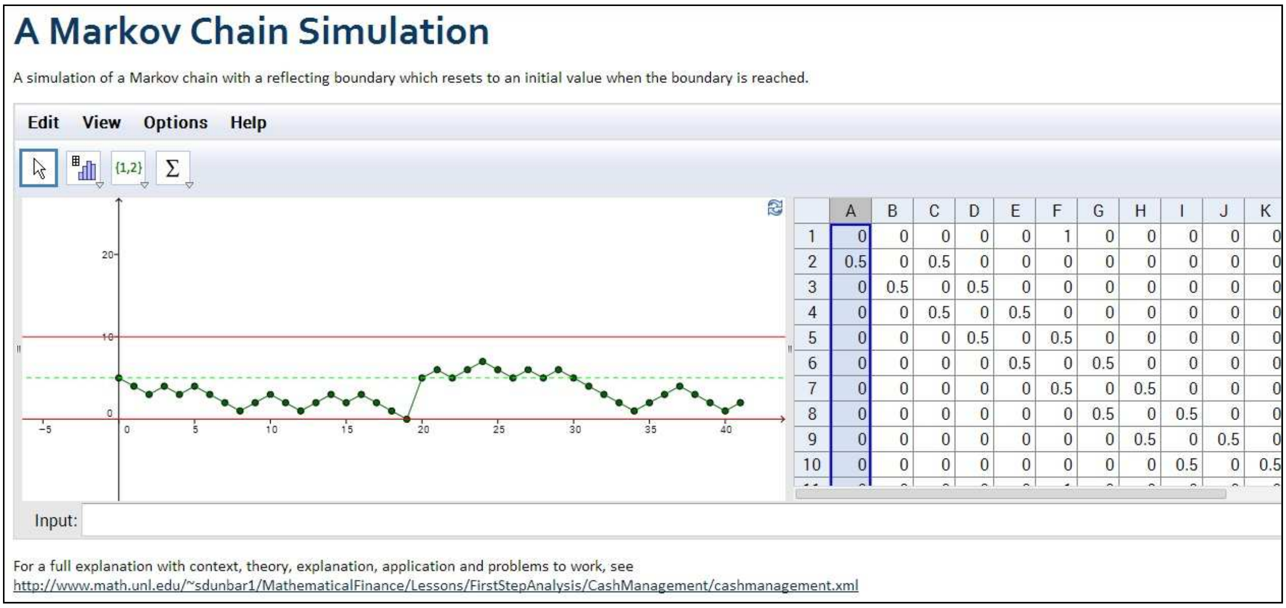


Figura 14 – Modelagem matemática envolvendo *Cash Management* ou gestão do fluxo de caixa.
Disponível em: http://www.geogebratube.org/student/m25027

Consideramos que os objetos virtuais mencionados anteriormente não forneçam os subsídios necessários em termos de interatividade e possibilidades para a ação do sujeito. Acreditamos que a manipulação dos poucos recursos disponíveis nos objetos não oportunize ao sujeito construir

---

[22] http://www.math.unl.edu/~sdunbar1/MathematicalFinance/Lessons/FirstStepAnalysis/CashManagement/cashmanagement.xml

conhecimento[23], ou seja, com o uso dos objetos virtuais há apenas a possibilidade de conhecer duas situações-problema envolvendo modelagem matemática e também modificar poucos (quase que em quantidade ínfima) parâmetros na tela do computador. Isso possivelmente limita as possíveis relações que possam ser estabelecidas pelo sujeito no momento de sua exploração sobre os objetos virtuais. Adiante no texto faz-se a exposição dos objetos virtuais construídos para a presente tese, e também se mostra quais as possibilidades e diferentes usos que os mesmos oportunizam em atividades planejadas. Diante dos objetos pesquisados no *GeoGebratube* destaca-se que a partir dos dois objetos construídos para este trabalho de tese, pode-se por meio de alterações nos objetos, obter como produto final os objetos virtuais pesquisados.

Durante a presente pesquisa de doutorado foram encontrados trabalhos acadêmicos envolvendo possíveis metodologias de ensino das Cadeias de Markov já foram produzidos no Brasil. Silva (2013, p.41), em sua pesquisa de mestrado, nota que “uma pergunta freqüente dos alunos do ensino básico numa sala de aula de matemática, é onde se aplica o assunto estudado”. Nesse sentido, sua pesquisa procurou apresentar possibilidades para o ensino de matrizes e sistemas lineares, com aplicação das Cadeias de Markov na modelagem de problemas nas áreas de genética, psicologia e transporte de massa. Em sua pesquisa, o autor apresenta apenas possibilidades de problemas sobre este conteúdo matemático, não desenvolve atividades e experimentos que possam ser utilizados em sala de aula.

Sobre os aspectos e caráter da aplicabilidade da matemática, Ferreira (2013) apresenta em sua dissertação aplicações da matemática que envolvem matrizes, com o objetivo de qualificar o trabalho do professor que atua na sala de aula. Segundo a autora:

> “O professor de matemática tem encontrado grande dificuldade ao trabalhar com alguns conceitos dentro da sala de aula, no que diz respeito a utilidade de tais assuntos. E muitas vezes o aluno é desestimulado, pois desenvolve a matemática de maneira mecânica, sem saber sua real função no cotidiano. A proposta é fazer o aluno perceber que a multiplicação de matrizes pode ser útil para resolver problemas comuns do dia-a-dia” (Ferreira, 2013, p.55)

Nesse sentido, a partir da discussão sobre modelagem matemática apresentada na seção anterior, constatamos que a autora visa à possibilidade ao professor expandir as suas alternativas didático-pedagógicas durante a execução do trabalho. Ao propor a análise de situações-problema que envolvem Cadeias de Markov e fazem uso de objetos virtuais, potencializa-se a ação do sujeito sobre os objetos em estudo e também se abre possibilidade para a construção de novos conhecimentos. Nesse sentido, Biasi & Domenech (2012) em sua pesquisa afirmam que:

[23] Para verificar se tais objetos virtuais cumprem a função de oportunizar a construção do conhecimento deve-se fazer uma pesquisa com a aplicação dos mesmos e analisar os resultados obtidos. Para a presente pesquisa tais conclusões foram inferidas a partir do uso e percepção do autor da tese sobre os objetos virtuais mencionados.

> “(...) o desenvolvimento de uma ferramenta de software que auxiliasse no processo de ensino-aprendizagem de métodos estocásticos, mostrando e complementando, de forma visual, prática e passo-a-passo (estudo dirigido) os conceitos discutidos em sala de aula. Essa complementação é relevante, pois muitas vezes os conceitos que não são satisfatoriamente entendidos, podem ser retomados ou reforçados em um laboratório com o auxílio de uma ferramenta especializada, que além de exemplificar conceitos da teoria, pode proporcionar ao aluno que ele pratique o que foi discutido em sala de aula.” (BIASI & DOMENECH, 2012, p.37)

Com isso, a proposta apresentada anteriormente pelos autores vem ao encontro de nossa concepção sobre a importância do recurso computacional como fonte para contribuir na construção de conhecimento. Os estudantes envolvidos em um ambiente computacional no qual a modelagem é realizada simultaneamente e os resultados obtidos podem ser analisados e interpretados fornecem evidências para uma aprendizagem, supostamente de qualidade. As pesquisas apresentadas na presente seção consideram que a construção de hipóteses e validação das mesmas em um ambiente informatizado é potencializada pelo uso da tecnologia. Ao mudar na tela do computador os parâmetros e condições do problema, os estudantes têm a possibilidade de elaborar, testar e confrontar suas hipóteses, através da construção e manutenção de argumentos matemáticos.

Portanto são de grande valia as contribuições que as pesquisas apresentadas têm para o estado da arte envolvendo o ensino de Cadeias de Markov, uma vez que os argumentos dos pesquisadores convergem quando consideram que a ação dos estudantes é fundamental para a construção do conhecimento. A tecnologia e seu uso aparecem como fonte catalisadora capaz de possibilitar ao sujeito avançar na direção do conhecimento proposto por meio da investigação de situações-problema.

4. METODOLOGIA

4.1 PROBLEMA DE PESQUISA

Considerando-se como hipótese que a tecnologia informática influencia os processos de tomada de consciência e abstração reflexionante dos sujeitos envolvidos ao longo do progresso de sua ação sobre os objetos de conhecimento explorados, contribuindo assim para a elaboração e desenvolvimento da forma de pensamento hipotético-contínuo na investigação de fenômenos que envolvam modelagem matemática com Cadeias de Markov, a presente pesquisa tem como problema central a ser explorado: *Como evolui a abstração refletida (abstração reflexionante com tomada de consciência), na construção de conceitos matemáticos durante a exploração de situações-problemas de modelagem matemática com Cadeias de Markov em uma sequência didática usando objetos virtuais?*

4.2 OBJETIVOS

4.2.1 – Objetivo Principal

Pesquisar sobre a evolução da abstração refletida e sua influência na construção de conhecimento matemático por sujeitos que utilizam objetos virtuais na investigação de situações-problema que envolvem modelagem matemática com Cadeias de Markov.

4.2.2 – Objetivos Específicos

Os objetivos específicos desta pesquisa são:

i) Analisar do ponto de vista cognitivo a evolução dos sujeitos envolvidos nas atividades propostas à luz do referencial teórico piagetiano.

ii) Verificar como ocorre a elaboração e desenvolvimento do pensamento hipotético-contínuo dos sujeitos ao utilizar objetos virtuais na investigação de situações-problema propostas.

iii) Elaborar, justificar, implementar e validar uma sequência de atividades na forma de um material didático que envolva modelagem matemática com Cadeias de Markov.

iv) Fazer uso dos recursos tecnológicos digitais, na forma de objetos virtuais de ensino, com o propósito de desafiar a aprendizagem dos conceitos matemáticos envolvendo situações-problema com Cadeias de Markov.

v) Enriquecer a discussão no campo do Ensino da Matemática referente à importância no desenvolvimento de propostas de trabalho que envolva alguma discussão entre modelagem matemática e Cadeias de Markov.

vi) Disponibilizar os materiais produzidos, objetos virtuais e sequência de atividades, na pesquisa de tese de doutorado na forma de um produto didático, com o objetivo de proporcionar a outros professores, pesquisadores ou interessados no assunto a futura utilização em novos experimentos didáticos.

Espera-se, também, que o material produzido na presente tese sirva como inspiração para a elaboração de novas propostas de trabalho, as quais visem qualificar o ensino deste tema.

4.3 ENGENHARIA DIDÁTICA

Antecipadamente, afirmamos que a engenharia didática na presente pesquisa de doutorado não assumirá o estatuto de referencial metodológico. Servirá como uma *inspiração* para a construção do *desenho metodológico* no qual a pesquisa se desenvolveu. Suas características foram importantes na concepção e construção do plano de ação e no desenvolvimento das sequências de atividades propostas ao longo dos experimentos didáticos. No capítulo seis será exposto e discutido mais detalhadamente sobre as quatro fases da engenharia didática ocorridas durante a execução do projeto. A seguir faz-se uma apresentação teórica da engenharia didática com o objetivo de expor ao leitor quais as características desta metodologia de trabalho e sua relação com a presente pesquisa.

4.3.1 – Características teóricas da Engenharia Didática

O termo "*Engenharia Didática*" emerge no cenário científico no início da década de 1980 e tem grande importância na investigação de situações nas quais o professor de matemática constitui-se como sujeito reflexivo e consciente de sua prática docente. Segundo SILVA *et al* (2014b):

> "Acreditamos que a engenharia didática possibilita ao professor repensar a sua prática docente enquanto atua em sala de aula e também nota-se que a realidade escolar torna-se cenário para reflexão, criação e encaminhamento de propostas inovadoras de ensino. Ao trabalhar utilizando esse método de ensino o professor pode se questionar se é possível que os alunos aprendam determinado conteúdo

> através de uma sequência de atividades que pode ser repensada e readequada durante a execução da proposta.” (SILVA *et al*, 2014b, p. 5)

Uma metodologia de trabalho fundamentada nos princípios da engenharia didática foi apresentada inicialmente por Michèle Artigue. A autora destaca dois aspectos essenciais:

> “1 – A engenharia didática, vista como metodologia de investigação, caracteriza-se antes de mais por um esquema experimental baseado em “realizações didáticas” na sala de aula, isto é, na concepção, na realização, na observação e na análise de sequências de ensino. (…)
> “2 – A metodologia de engenharia didática caracteriza-se ainda, relativamente a outros tipos de investigação baseados nas experimentações na sala de aula, pelo registro no qual se situa e pelos modos de validação que lhe estão associados.” (ARTIGUE, 1996, p.196)

Sobre a importância que a metodologia de investigação proposta pela engenharia didática desempenha para o professor, durante seu trabalho, Artigue (1996, p.197) expõe que “não é, pois, nos objetivos das investigações levadas a cabo sob o seu estandarte, mas nas características do seu funcionamento metodológico, que a engenharia didática apresenta a sua singularidade”. Ou seja, o professor ao investigar o processo de aprendizagem por parte de seus alunos, tem através dessa metodologia de trabalho a oportunidade de avaliar e refletir sobre a sua própria atuação e participação como colaborador na criação e desenvolvimento do conhecimento.

A metodologia de trabalho, fundamentada nos princípios da engenharia didática, atravessa um processo constituído de determinados níveis. A cada nível alcançado, o objeto do conhecimento investigado atinge determinado patamar e os objetivos e propósitos do professor são repensados e reavaliados. Artigue (1996) propõe que a engenharia didática durante o seu desenvolvimento atravesse diferentes níveis, formas e graus de complexidade. A passagem de um nível para o seguinte constitui uma importante fonte de informações e conhecimento para o professor. Os níveis, ou fases, propostos por Artigue como forma de organização da engenharia didática são: *análises prévias* (nível 1); *concepção do experimento, análise a priori e elaboração das hipóteses* (nível 2); *experimentação* (nível 3) e *análise a posteriori* juntamente com a *validação e avaliação da proposta* (nível 4). A partir de agora caracterizaremos os quatro níveis da engenharia didática, segundo Artigue (1996), esboçando as principais características de cada um, e também suas contribuições para o presente estudo.

As análises prévias no nível um constituem importante fonte de conhecimento para o professor. Apoiando-se em análises preliminares, é necessário, segundo Artigue (1996), que exista:

> “- a análise epistemológica dos conteúdos visados pelo ensino;
> - a análise do ensino habitual e dos seus efeitos;
> - a análise das concepções dos alunos, das dificuldades e obstáculos que marcam a sua evolução;
> - a análise do campo de constrangimentos no qual virá a situa-se a realização

> didáctica efectiva;
> - e, naturalmente, tendo em conta os objectivos específicos da investigação." (ARTIGUE, 1996, p.198)

Um olhar mais detalhado sobre a primeira fase da engenharia didática possibilita refletir sobre a forma na qual a estrutura do trabalho a ser desenvolvido pelo professor futuramente deva ocorrer. Ou seja, o primeiro nível da engenharia didática tem enorme relevância para a compreensão e reflexão sobre os reais motivos que estão levando o professor a desenvolver esta metodologia de trabalho. Nas palavras de Artigue (1996):

> "A primeira fase está estruturada à volta da análise do funcionamento do ensino habitual, considerado como o estado de equilíbrio do funcionamento de um sistema, um equilíbrio que, durante muito tempo, foi estável, mas cuja obsolescência começa a fazer-se sentir. O extracto seguinte põe claramente em evidência as escolhas efectuadas a este nível e a forma como estas escolhas estão ligadas à perspectiva sistémica que constitui o fundamento teórico da análise. A investigação aqui documentada situa-se numa perspectiva de engenharia didáctica clássica: considera-se um ponto do sistema didáctico, cujo funcionamento parece, por razões que podem ser de natureza diversa, pouco satisfatório. Analisa-se esse ponto do funcionamento e os constrangimentos que tendem a fazer dele um ponto de equilíbrio do sistema e depois, jogando com estes constrangimentos, procura-se determinar as condições de existência de um ponto de funcionamento mais satisfatório." (ARTIGUE, 1996, p.199)

Percebe-se na citação uma tentativa de busca de reflexão sobre quais aspectos geram, por parte do professor, uma reflexão sobre a construção de determinado conhecimento pelos alunos. Percebe-se que uma análise sobre o funcionamento do processo didático desencadeia, por parte do professor, reflexões sobre algumas questões envolvendo o desenvolvimento de determinado conhecimento pelos sujeitos envolvidos. Ou seja, na busca por motivos ou razões que expressam a necessidade de compreender a complexa organização e estruturação de determinado conhecimento, o professor organiza os principais pontos que buscam analisar e refletir sob quais aspectos o sistema didático vigente deve passar por uma transformação, ou seja, ao promover a organização do primeiro nível é possível avançar para o nível seguinte da engenharia didática, caracterizado pela concepção do experimento, análise *a priori* e elaboração de hipóteses.

No nível consecutivo ao primeiro, o professor busca organizar sua ação sobre um determinado número de variáveis, consideradas por ele como pertinentes para o estudo. Portanto pode-se conceber a análise *a priori* como:

> "(...) uma *análise do controlo do sentido*; muito esquematicamente, se a teoria construtivista coloca o princípio do compromisso do aluno na construção dos seus conhecimentos por intermédio de interacções com determinado meio, a teoria das situações didácticas, que serve de referência à metodologia da engenharia, teve, desde a sua origem, a ambição de se constituir como uma teoria do controlo das relações entre sentidos e situações." (ARTIGUE, 1996, p. 204)

Ou seja, como objetivo da análise *a priori* pode-se dizer que há a necessidade de fundamentar de que forma as escolhas efetuadas podem contribuir no comportamento e nos sentidos estabelecidos pelos alunos durante sua ação sobre os objetos. Tal fundamentação será baseada na construção de hipóteses, estabelecidas inicialmente pelo professor, que serão analisadas e posteriormente validadas nas fases seguintes da engenharia didática.

Ainda sobre a análise *a priori*, pode-se dizer que a construção de hipóteses e conjecturas por parte do professor consiste em uma árdua tarefa, envolvendo aspectos que vão além do planejamento didático. Ao prever como será o desenvolvimento e o comportamento dos sujeitos diante do objeto de conhecimento, o professor deposita expectativas e formulações sobre como talvez o sujeito aja em relação a determinado objeto. A criação das atividades envolvendo o conhecimento sobre determinado conteúdo passa por diversas etapas nesse nível da engenharia didática, sendo que as relações entre situações didáticas[24] e a-didáticas[25] constituem uma importante questão, pois estão diretamente envolvidas na validação da metodologia. Nos níveis seguintes da engenharia didática, além da fase da experimentação, ocorre também o confronto das hipóteses e conjecturas com os dados observados durante a aplicação da proposta.

O terceiro nível da engenharia didática, caracterizado pela experimentação, consiste em aplicar as atividades construídas com base nas hipóteses e análises *a priori* já produzidas. Nesse momento, além da experimentação, todos os sujeitos envolvidos passam por momentos de reflexão e reconstrução. Pela observação empírica, o professor pode certificar-se se o planejamento prévio e a sua organização das tarefas está conduzindo os estudantes através de um fio condutor pelas atividades, ou seja, se há mobilização dos estudantes na construção da compreensão do objeto que se está investigando. Os estudantes, por outro lado, podem manifestar-se através da sua ação sobre o objeto de conhecimento, mobilizando seus diferentes esquemas e estruturas na tentativa de conhecer o conhecimento proposto pelo objeto em estudo. A ação que deriva e ocorre ao longo do experimento, na terceira fase da engenharia didática, constitui uma importante ferramenta para análise e interpretação por parte do professor, pois é substancial a contribuição da análise decorrente da produção dos estudantes no momento de validar a proposta metodológica de trabalho.

[24] Para Brousseau (1996, p. 50) quando “o professor procura transmitir ao aluno uma situação a-didáctica que provoque nele a interacção mais independente e fecunda possível. Para isso, comunica ou abstém-se de comunicar, conforme os casos, informações, questões, métodos de aprendizagem, heurísticas, etc. O professor está, pois, envolvido num jogo com o sistema das interacções do aluno e com os problemas que ele lhe coloca. Este jogo ou esta situação mais vasta é a situação didáctica.”

[25] Sobre as situações *a-didáticas* pode-se dizer que “o aluno sabe perfeitamente que o problema foi escolhido para o levar a adquirir um conhecimento novo, mas tem de saber igualmente que esse conhecimento é inteiramente justificado pela lógica interna da situação e que pode construí-lo sem fazer apelo a razões didácticas. Não somente pode, como deve fazê-lo, por que só terá verdadeiramente adquirido esse conhecimento quando for capaz de aplicá-lo por si próprio às situações com que depara fora do contexto do ensino, e na ausência de qualquer indicação intencional. Uma tal situação é chamada situação a-didáctica.” (BROUSSEAU, 1996, p. 49)

Durante o processo de investigação, é de suma importância conectar através de relações os níveis três e quatro da engenharia didática. A quarta fase, ou nível quatro, consiste em realizar as análises *a posteriori* juntamente com a validação (ou refutação) das hipóteses elaboradas na segunda fase da metodologia de trabalho. Sobre isso, Artigue (1996) afirma que:

> “a análise *a posteriori*, que se apoia no conjunto dos dados recolhidos quando da experimentação: observações realizadas nas sessões de ensino, mas também produções dos alunos na sala de aula ou fora dela. Estes dados são frequentemente completados por dados obtidos através da utilização de metodologias externas: questionários, testes individuais ou em pequenos grupos, realizados em diversos momentos do ensino ou no final. E, como já indicámos, é no confronto das duas análises, a priori e a posteriori, que se funda essencialmente a validação das hipóteses envolvidas na investigação.” (ARTIGUE, 1996, p. 208)

Portanto, a quarta fase da engenharia didática corresponde a uma análise complexa por parte do professor, partindo desde as concepções iniciais de sua proposta metodológica envolvendo até o confronto com a validação ou não da metodologia. Ainda no quarto nível da engenharia didática é possível considerar relações que possam ser estabelecidas com o nível inicial da proposta de trabalho. Isso constitui um momento importante durante o processo, pois o professor pode através da validação interpretar e reavaliar suas concepções elaboradas nas análises prévias.

Com isso, ao considerar as ideias da engenharia didática, oportuniza-se que o professor repense sobre a prática docente enquanto atua em sala de aula e assim, a realidade escolar torna-se um possível cenário para reflexão, criação e encaminhamento de propostas inovadoras de ensino. Ao trabalhar através dessa proposta metodológica o professor pode se questionar se é possível que os alunos aprendam determinado conteúdo através de uma sequência de atividades que possa ser repensada e readequada durante a execução da proposta.

Quanto às possíveis relações da engenharia didática com a presente proposta de trabalho, acredita-se que uma abordagem de situações-problema envolvendo modelagem matemática através das Cadeias de Markov, a engenharia didática se desenvolverá através de quatro etapas ou fases, segundo Silva *et al* (2014a, p.6):

1) *Análise prévia* – Nessa fase nos questionamos sobre como ocorre o ensino dos conteúdos propostos e o processo de aprendizagem dos alunos. O pesquisador observa também quais são as dificuldades apresentadas pelos alunos perante esses conteúdos.

2) *Concepção do experimento, análise a priori e criação das hipóteses* – Criação da sequência de atividades que constituem o experimento. Formulação, por parte do professor, das hipóteses que serão possivelmente validadas durante a execução das atividades.

3) *Experimento* – Execução das atividades planejadas na anterior.

4) *Análise a posteriori* – Com base nas observações produzidas durante a fase da

experimentação, o professor tenta validar ou não as hipóteses conjecturadas e assim validar o seu experimento didático.

Instaura-se assim um movimento cíclico na proposta de trabalho, na qual a validação do experimento e confronto com as hipóteses possa contribuir significativamente para uma análise sobre as concepções e definições estabelecidas nas análises prévias, de acordo com a figura 14. Ou ainda, nas palavras de Silva *et al* (2014a):

> "Observamos que a engenharia didática constitui uma metodologia cíclica, ou seja, o professor pode durante a execução do seu roteiro de atividades (fase 3) se deparar com novas dificuldades apresentadas pelos alunos e que não foram detectadas anteriormente (fase 1). Neste momento o professor pode redefinir também a sua concepção do experimento e criar hipóteses adicionais, ou ainda refutar alguma das hipóteses anteriores. Assim, uma readequação da proposta metodológica visa a contribuir na construção e aprendizagem dos conceitos de matemática pelos alunos." (SILVA, 2014a, p. 6)

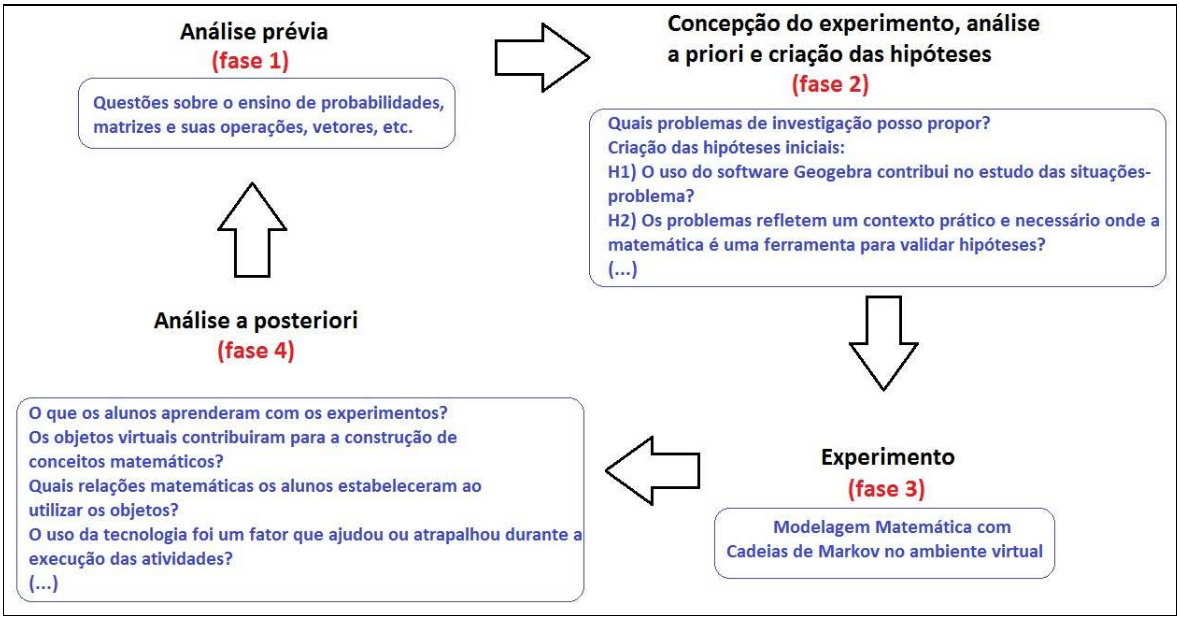


Figura 15 – Esquema sobre a engenharia didática. Fonte: Silva *et al* (2014a, p.7).

Ao utilizar as ideias e conceitos da engenharia didática, na concepção de Artigue (1996), como inspiração para metodologia de investigação no presente trabalho, nota-se que os conceitos apresentados são de considerável importância para a concepção desta pesquisa. Tentou-se demonstrar ao longo da presente seção que os conceitos apresentados por Artigue constituem uma maneira progressiva e continuada que o professor tem de investigar sobre a aprendizagem dos sujeitos, a partir da ação dos estudantes mediante suas interações com os objetos de conhecimento propostos em uma determinada sequência de atividades. Ao explorar os níveis ou fases da engenharia didática, constata-se a construção de um cenário de investigação complexo, no qual as ações e relações estabelecidas entre seus atores constituem importantes variáveis na compreensão pela construção do conhecimento em questão.

4.4 OS SUJEITOS INVESTIGADOS, MATERIAIS E MÉTODOS

4.4.1 – Caracterização do cenário da pesquisa: os experimentos didáticos

Desde o início do curso de doutorado a ideia de um projeto de pesquisa que envolvesse a construção de conceitos de matemática por meio da modelagem matemática de situações-problema com Cadeias de Markov e fizesse o uso das tecnologias digitais através de sequências de atividades foi amplamente discutida junto dos professores orientadores.

Durante a presente pesquisa de doutorado ocorreram três momentos distintos de experimentação da proposta didática. As justificativas para a escolha de três públicos alvos distintos (professores de matemática que atuam profissionalmente; estudantes no final do ensino médio; estudantes de licenciatura em matemática) para participar dos experimentos didáticos podem ser caracterizadas como:

1) Pôde-se verificar como os diferentes sujeitos com níveis de formação distintos encaravam os desafios impostos pelas situações-problema e superavam as dificuldades, ao mesmo tempo que construíam conceitos de matemática.

2) O primeiro experimento didático serviria como um “termômetro” para o início de aplicação do projeto de pesquisa construído no curso de doutorado. Com a proposta da primeira sequência de atividades (Apêndice D) e do objeto virtual podia-se observar o nível de aceitação, engajamento e participação dos sujeitos, bem como verificar se havia condições do projeto continuar.

3) A escolha dos públicos-alvo no segundo e terceiro experimentos didáticos ocorreu pelo fato do autor da presente tese estar ministrando aulas regulares de matemática para as turmas analisadas e este ter o desejo de realizar as experimentações em salas de aula regulares, independente de qual fosse o projeto desenvolvido no curso de doutorado[26]. Depois de ter ocorrido o primeiro experimento e os resultados obtidos terem sido considerados satisfatórios, considerou-se a possibilidade de realizar as demais experimentações em salas de aulas regulares com o motivo de tornar o ambiente da pesquisa o mais próximo da realidade profissional vivida pelos professores de matemática. Ao usar a sala de aula “regular” para realizar a experimentação com todos os estudantes da turma se objetivava mostrar como na “vida real e diária” do professor de matemática

[26] Na dissertação de mestrado, o autor da presente tese também fez experimentações didáticas que envolveram uma turma regular de estudantes do ensino médio. Para mais detalhes consulte: SILVA, R. S. **O uso de problemas no ensino e aprendizagem de funções exponenciais e logarítmicas na escola básica**. Porto Alegre: UFRGS, 2012 (Dissertação de Mestrado em Ensino de Matemática). Disponível em: http://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/49422.

tais momentos ocorreriam, como também, mostrar que em uma sala de aula regular há a manifestação das mais variadas formas de construção dos conceitos matemáticos pelos estudantes.

Em momento algum a justificativa (3) objetivou construir um cenário de investigação que pudesse ser considerado como uma “sala de aula ideal”. Almejou-se com a terceira justificativa que ao apresentar experimentações que envolvesse e oportunizasse que TODOS os estudantes regulares da turma participassem das atividades, independente dos níveis cognitivos e conhecimentos matemáticos previamente construídos poderiam caracterizar melhor o cenário de investigação da pesquisa, bem como obter resultados mais próximos da realidade escolar vivenciada pelos professores de matemática. A seguir procuramos relatar, em termos de materiais e métodos utilizados, o desenvolvimento dos três experimentos didáticos.

Observou-se, para a realização do experimento piloto, um conjunto de 20 participantes, constituídos por alunos de graduação em licenciatura em matemática e professores de matemática da região de Passo Fundo (RS). Esses docentes haviam participado de uma oficina pedagógica intitulada “**Cadeias de Markov e Geogebra: modelagem matemática e possibilidades para a construção de conceitos através do uso de objetos virtuais**”, que ocorreu em um congresso[27] na Universidade de Passo Fundo (UPF). Inicialmente, a proposta do minicurso consistiu em apresentar uma situação-problema na qual se buscou, através de sucessivos questionamentos, verificar se o objeto de aprendizagem poderia contribuir na construção de uma solução para a questão central. No Apêndice D apresentamos a sequência completa de atividades desenvolvidas.

O objeto construído no *software* GeoGebra cuja interface é apresentada na figura 15 foi utilizado pelos alunos da oficina durante a execução das atividades e permitiu que a modelagem da situação-problema proposta fosse possível de ser realizada. Em nenhum dos três experimentos didáticos realizados durante a pesquisa aplicou-se alguma atividade que não fizesse uso do recurso digital, logo a análise das produções dos sujeitos é feita com base nas interações e relações estabelecidas pelos sujeitos participantes ao usar os objetos virtuais.

Com o auxílio do *software* GeoGebra, desenvolvemos um objeto virtual que procurava desafiar e auxiliar o sujeito na investigação da situação-problema. Na interface do objeto é possível identificar uma região sinalizada por [1], que consiste nas ferramentas disponibilizadas para o usuário. O sujeito pode através de alguns comandos fazer modificações em diversos parâmetros, com o objetivo de ajustar o software de acordo com sua necessidade. Após realizar os ajustes é possível visualizar na região sinalizada por [2] o que ocorre ao longo do experimento. Ao realizar modificações nos parâmetros é possível que o usuário verifique simultaneamente o que ocorre na

[27] Eventos intitulados *V Jornada Nacional de Educação Matemática* e *XVIII Jornada Regional de Educação Matemática* que ocorreram em 2014, na cidade de Passo Fundo (RS). Disponível em: http://www.upf.br/jem/

área indicada em [2], podendo assim testar e validar suas hipóteses, conjecturas e argumentos construídos no decorrer da proposta.

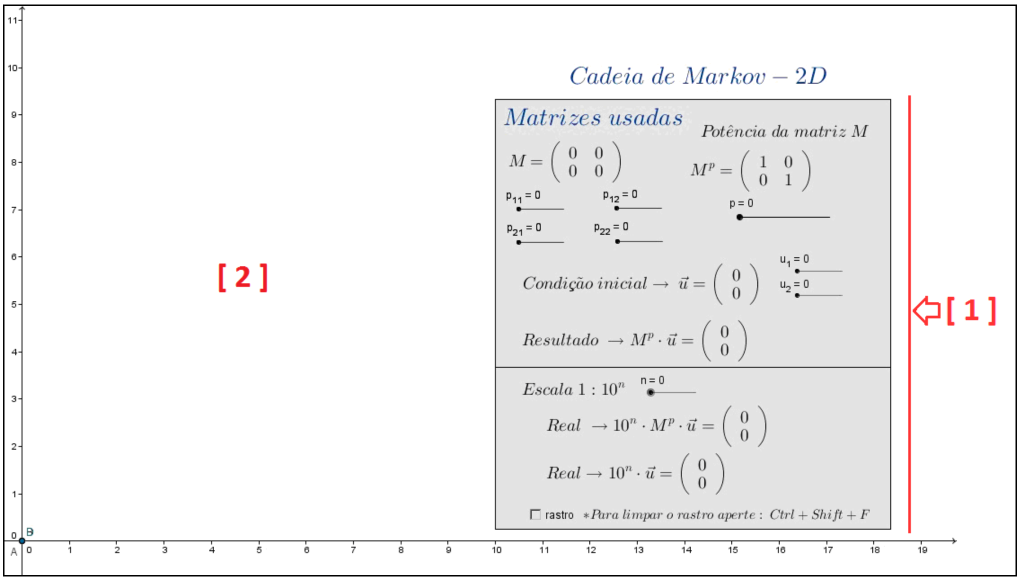


Figura 16 – Interface do objeto virtual construído no GeoGebra e usado na oficina pedagógica.

A oficina pedagógica, que ocorreu no laboratório de informática da instituição sede do evento, foi organizada ao longo de três momentos: (Parte 1) Motivação: problema inicial; (Parte 2) Explorando o objeto virtual e (Parte 3) Explorando a cadeia de Markov. Em cada uma das etapas os sujeitos se deparavam com questionamentos que colocavam em prova as suas hipóteses e conjecturas elaboradas. Verifica-se que o conjunto de atividades aplicadas constituiu uma fonte inicial para a compreensão de como é possível por meio de uma situação-problema construir um cenário que possibilite a elaboração e construção de conceitos matemáticos e também para verificar o nível de aceitação dos sujeitos envolvidos diante da proposta então apresentada. A tecnologia, presente no recurso utilizado pelos alunos, possibilitou que através do exercício de sucessivas e progressivas abstrações fosse possível aprender matemática (isto será discutido no capítulo 5), uma vez que as atividades exigiam do sujeito a constante ação sobre o objeto de investigação.

Após a realização do primeiro experimento, a partir das observações realizadas pelo professor-pesquisador envolvido e pelos apontamentos sugeridos pelos participantes da oficina pedagógica, foram feitas algumas alterações nas atividades e no objeto virtual. Tais alterações tinham como objetivo tornar o objeto virtual e a sequência de atividades mais qualificadas em termos de forma e conteúdo, para futura aplicação nos próximos experimentos.

Para as etapas seguintes da presente pesquisa considerou-se para serem investigadas duas turmas de estudantes regularmente matriculados nos cursos de Licenciatura em Matemática e Técnico em Plásticos Integrado ao Ensino Médio do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul, campus Caxias do Sul. A seguir, apresenta-se uma breve caracterização dos sujeitos investigados, bem como os motivos que conduziram para a escolha desses sujeitos.

A aplicação da sequência de atividades (Anexo F), para a turma de estudantes da Licenciatura em Matemática, ocorreu durante a execução da disciplina de Modelagem Matemática sendo que a mesma é ofertada no segundo semestre de 2015. Ao todo foram realizados cinco encontros com atividades presenciais de 3h20min, todos ocorridos em um dos laboratórios de informática da instituição. Ocorreu também uma atividade em um momento não presencial na instituição, onde os estudantes acessaram o objeto virtual através da internet e assim puderam construir suas produções. A turma da disciplina de Modelagem Matemática consistia em um grupo com 6 estudantes, regularmente matriculados no curso de Licenciatura em Matemática sendo que metade da turma ao final do semestre (2015/2) seria egressa do curso.

Os estudantes foram alocados de forma individual nos computadores, porém em diversos momentos realizaram discussões e reflexões entre si, acompanhadas pelo professor. O uso dos objetos virtuais "Cadeia de Markov – 2D" e "Cadeia de Markov – 3D" ocorreu através do acesso pela internet e os registros escritos foram produzidos pelos estudantes de forma individual em papel, no material fornecido pelo professor.

Após cada encontro o material produzido por cada um dos seis estudantes da turma foi digitalizado e armazenado pelo professor, para futura análise da produção. Sendo assim, o manuscrito individual de cada participante foi entregue de volta a um dos estudantes da turma. Também foi informado antecipadamente aos estudantes que o material constituiria um dos instrumentos de avaliação para a disciplina de Modelagem Matemática que se desenvolve em 2015/2.

A disciplina de Modelagem Matemática atualmente está alocada no oitavo semestre do curso de Licenciatura em Matemática, e tem como objetivo principal, apresentado no Projeto Pedagógico de Curso (PPC), conforme Anexo G, "discutir a filosofia científica da modelagem matemática através de problemas que se apresentam em situações concretas" (PPCa, 2011, p.61).

Neste sentido, considera-se como relevante a aplicação e reflexão sobre o conhecimento matemático produzido através de uma sequência didática envolvendo Cadeias de Markov. Tal relevância justifica-se pelo fato da ementa da disciplina caracterizar como importante e essencial o desenvolvimento de propostas de ensino que possam contribuir para a reflexão sobre a importância do estudo e interpretação de situações envolvendo aspectos de modelagem matemática. A ementa da disciplina propõe que:

> "Este componente curricular busca a caracterização da Modelagem Matemática como método de pesquisa científico e como metodologia de ensino. Elaboração de projetos de modelagem matemática dirigidos para o ensino fundamental e médio. Construção de modelos matemáticos de diversos fenômenos incluindo a implementação de simulação numérica e análise de resultados." (PPCa, 2001, p.61)

Na passagem anterior nota-se que a disciplina de Modelagem Matemática no curso de graduação em Licenciatura em Matemática deva ter um caráter investigativo e que sirva para desafiar os estudantes a contextualizar e problematizar os mais diversos fenômenos que os cercam, através de técnicas matemáticas.

Destaca-se como essencial que tais estudantes elaborem e desenvolvam métodos de ensino que visem o aperfeiçoamento e a qualidade do ensino básico, enquanto estiverem atuando como professores de matemática. Com base nessas ideias, escolheu-se a disciplina de Modelagem Matemática para realizar a investigação, discussão e construção de possíveis modelos matemáticos que envolvam Cadeias de Markov através do uso de recursos tecnológicos. Tais modelos envolvem a aplicação de diversos conceitos matemáticos, como também a construção de novos conceitos, originados da elaboração, criação, validação/reformulação de hipóteses.

Para o nível básico de ensino a aplicação e investigação envolvendo a sequência de atividades ocorreram com uma turma do quarto ano do curso técnico em plásticos integrado ao ensino médio da mesma instituição. A turma era composta por um grupo de 14 estudantes regularmente matriculados no curso Técnico em Plásticos Integrado ao Ensino Médio. No projeto pedagógico do curso, um dos objetivos na formação dos estudantes é:

> “O Curso Técnico em Plásticos visa formar profissionais capazes de contribuir com o desenvolvimento local e regional na sua totalidade, tanto nos aspectos sociais, políticos e econômicos. A formação do técnico deste novo século é concebida como um ***agente da construção e aplicação do conhecimento, tendo a função de organizar, coordenar, criar situações e tomar decisões*** (grifo nosso). Nesse sentido, sua formação observará os princípios norteadores das Diretrizes Curriculares Nacionais para formação de profissionais técnicos de nível médio.” (PPCb, 2010, p.10)

Consideramos essencial a discussão sobre os objetos de conhecimento investigados do ponto de vista da modelagem matemática. Desejamos que ela fosse feita também com estudantes do nível básico de ensino. O projeto pedagógico do curso propõe contemplar uma formação que possa desafiar os sujeitos envolvidos na construção e aplicação do conhecimento convergente com a proposta do presente trabalho de tese. Buscou-se através da aplicação de uma sequência de atividades, envolvendo modelagem matemática com Cadeias de Markov, proporcionar aos estudantes do ensino médio a investigação e construção de alguns modelos matemáticos que tem, de forma relacionada, os seguintes conteúdos: matrizes e suas operações, vetores, probabilidade e estatística.

No projeto pedagógico do curso (PPCb, 2010, p.41), conforme Anexo D, propõe-se que o ensino da matemática seja capaz de envolver os estudantes no desenvolvimento de capacidades para desenvolver cálculos como também colaborar na interpretação de problemas interdisciplinares e do seu cotidiano. Com isso, é notório que através da nossa proposta de trabalho que envolvesse uma abordagem de situações-problema sobre modelagem matemática com Cadeias de Markov no ensino médio visamos qualificar a formação dos estudantes, como também verificar como a tecnologia influencia na construção dos conceitos matemáticos envolvidos.

Nossa intenção foi, através do uso da tecnologia informática, desafiar o estudante para que se envolvesse na concepção, formulação, validação/reformulação, construção de um possível modelo matemático para as situações investigadas. A tecnologia surgiu como uma possibilidade de colaborar para que os sujeitos se envolvam na direção da investigação sobre o conhecimento. Sendo assim nota-se que a tecnologia com suas ferramentas e recursos fosse uma facilitadora para os cálculos aritméticos, e também que fosse possível que os estudantes do ensino médio participassem da presente proposta, propondo e desenvolvendo estratégias para as eventuais tomadas de decisão e construção, validação/reformulação de suas hipóteses.

Do mesmo modo que a investigação contemplou os estudantes no ensino superior buscou-se verificar juntamente com os estudantes do quarto ano do ensino médio o desenvolvimento das formas de pensamento que valorizam a qualidade hipotético-contínua. Buscou-se verificar como a tecnologia utilizada na investigação, na forma de objetos virtuais, contribuiu durante a construção e manutenção das formas de pensamento que ocorreram no processo de construção do conhecimento. Para os estudantes do quarto ano do ensino médio a aplicação da sequência de atividades (Anexo E) ocorreu a partir de maio de 2015, nas aulas regulares da disciplina de matemática, ao longo de cinco encontros presenciais de 1h40min cada, em um dos laboratórios de informática disponíveis na instituição. Os estudantes foram alocados de forma individual nos computadores, porém em diversos momentos realizaram discussões e reflexões entre si, acompanhadas pelo professor. O uso do objeto virtual “Cadeias de Markov – 2D” ocorreu com acesso pela internet e os registros escritos foram produzidos pelos estudantes de forma individual em papel, no material fornecido pelo professor ao longo das aulas.

Após cada encontro o material produzido por cada estudante foi digitalizado e armazenado pelo professor, para futura análise da produção. Sendo assim, o manuscrito individual de cada participante foi entregue de volta para cada um dos quatorze estudantes da turma. Também foi informado antecipadamente aos estudantes que o material constituiria um dos instrumentos de avaliação para o segundo trimestre do ano letivo de 2015.

4.4.2 – Materiais e métodos: o *software* Geogebra e os objetos utilizados

O *software* GeoGebra, nas palavras de seus idealizadores, “é um *software* de matemática dinâmica que junta geometria, álgebra e cálculo. É desenvolvido para a aprendizagem e o ensino da matemática nas escolas por Markus Hohenwarter e uma equipe internacional de programadores”[28]. Sua interface está apresentada na figura 17.

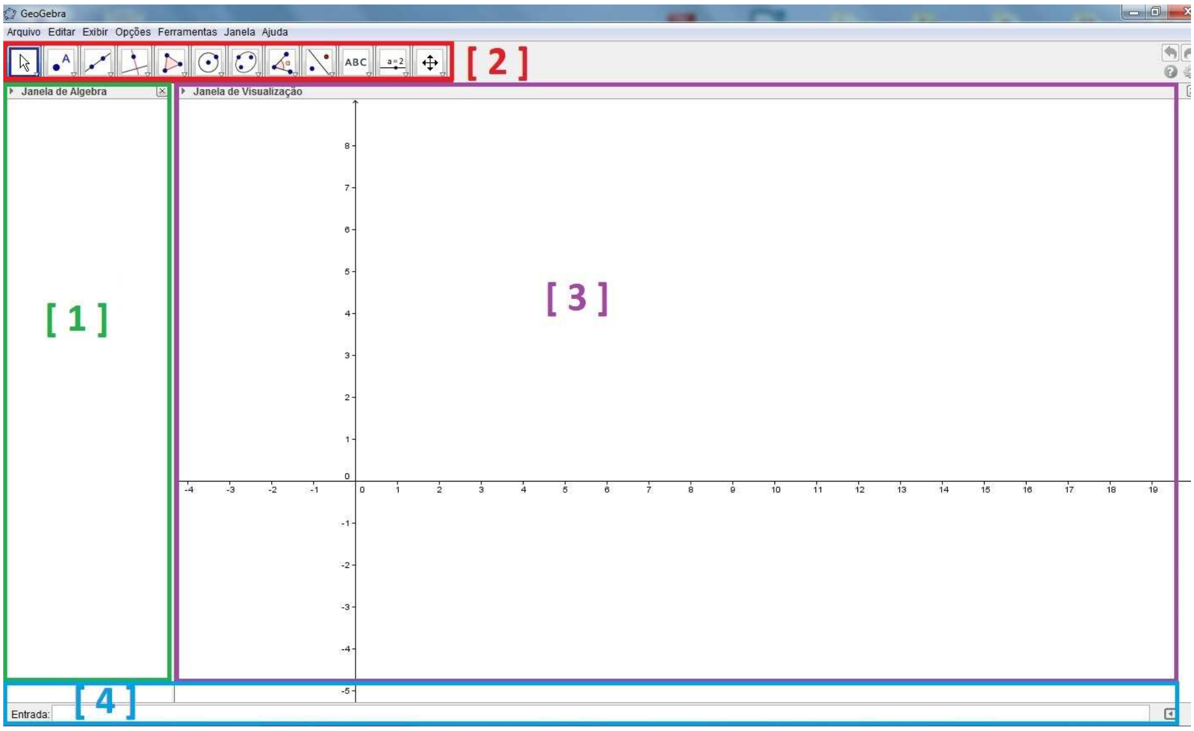


Figura 17 – Interface do *software* GeoGebra (versão 4.4.45.0)

A janela principal do software tem quatro divisões ou partes que podem ser exploradas pelo usuário. A primeira parte, identificada por [1] consiste na chamada *janela de álgebra*, onde o usuário pode visualizar todas as relações matemáticas construídas. As relações ficam expostas através de uma lista que organiza os itens através de categorias: pontos, segmentos, retas, polígonos, funções, matrizes, entre outros possíveis objetos matemáticos. A segunda parte, indicada por [2] corresponde aos comandos de construção através dos botões de atalhos. O usuário pode optar em usar esse comando para evitar fazer uma construção matemática na qual o resultado é semelhante ao produzido pela utilização desses comandos. Por exemplo, na construção geométrica rigorosa da reta mediatriz de um segmento $\overline{AB}$, parte-se inicialmente construindo uma circunferência de centro *A* passando pelo ponto *B*. Analogamente, faz-se uma circunferência de centro *B* passando pelo ponto *A*. Os dois pontos obtidos da interseção das duas circunferências definem uma reta, que é a

[28] De acordo com http://wiki.geogebra.org/pt/P%C3%A1gina_Principal

mediatriz do segmento $\overline{AB}$, ou ainda, a reta que passa pelo ponto médio do segmento $\overline{AB}$ e é perpendicular ao segmento $\overline{AB}$. A figura 18 ilustra a construção explicada anteriormente.

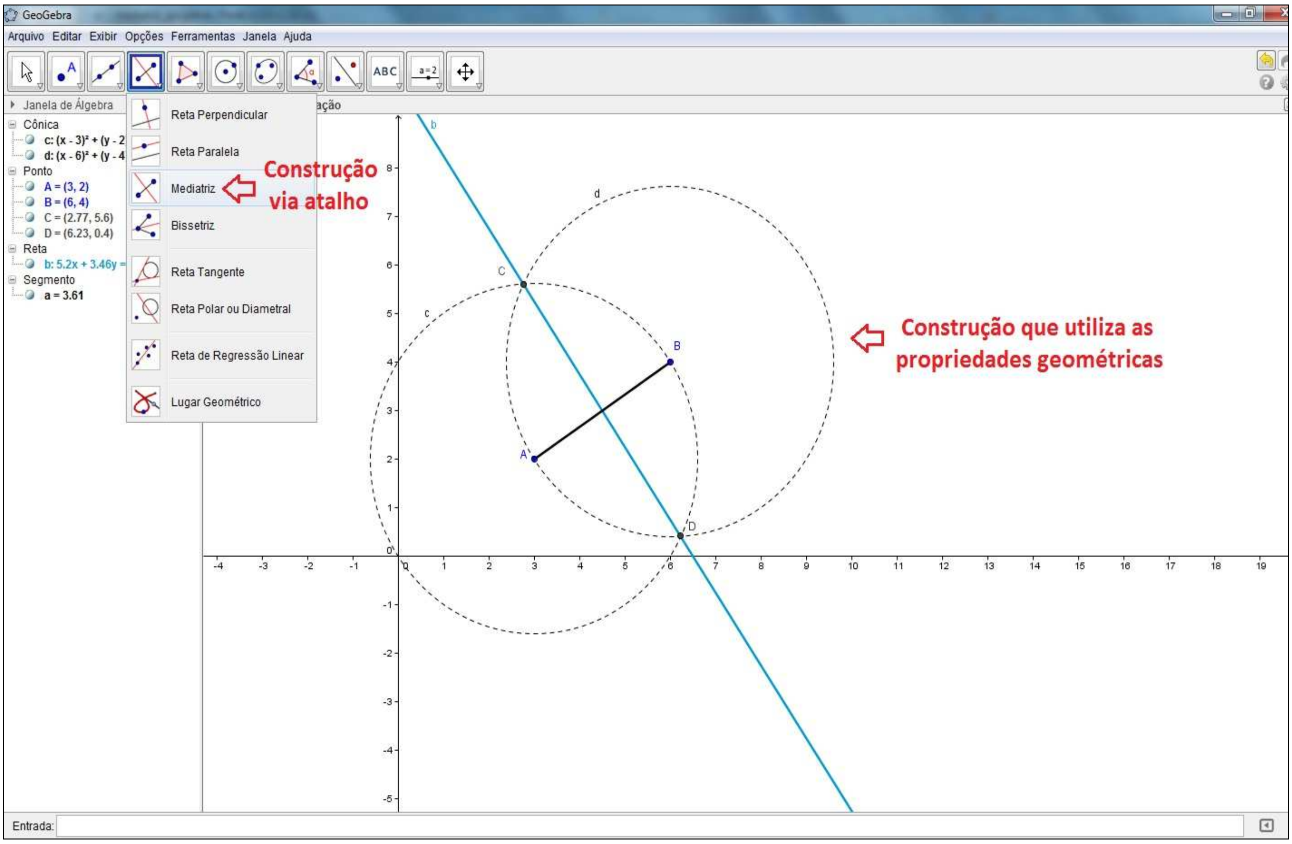


Figura 18 – Construção da reta mediatriz no *software* GeoGebra (versão 4.4.37.0)

A terceira parte indicada por [3] na figura 16 corresponde à *janela de visualização*. É o lugar onde se visualiza a construção ou esboço dos objetos matemáticos. Nessa parte é possível visualizar o esboço das construções definidas através de relações matemáticas geométricas ou algébricas. É possível movimentar e relacionar as construções que se expõem através dessa janela. O usuário pode através dessa janela desenvolver o pensamento hipotético-dedutivo, por exemplo, ao explorar situações que envolvam aspectos da geometria dinâmica[29].

A parte indicada na Figura 1 por [4] corresponde à janela de *entradas*, ou seja, é através dela que o usuário pode definir os objetos matematicamente. Podem ser usadas relações implícitas ou explícitas para definir os objetos que ficarão listados na janela de álgebra. O uso da janela de entrada permite ao usuário definir objetos tais como: pontos, matrizes, vetores, funções, dentre outros objetos matemáticos. A figura 19 ilustra alguns exemplos de comandos que aparecem como possibilidade para o usuário utilizar.

[29]Gravina (2001) em sua pesquisa de doutorado explora a construção do pensamento hipotético-dedutivo pelos estudantes envolvidos na investigação de problemas da geometria plana, através do progresso de sua ação em situações que envolvam a geometria dinâmica.

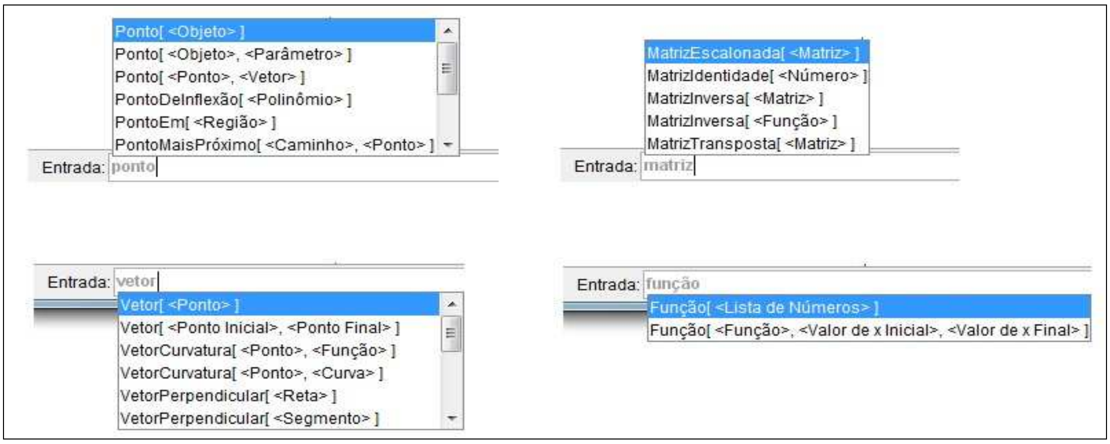


Figura 19 – Exemplos de comandos na caixa de entrada no *software* GeoGebra (versão 4.4.37.0)

Desta forma, procuramos com a presente seção apresentar algumas características do *software* que foi utilizado na construção dos objetos virtuais usados na investigação de doutorado. Destaca-se que além das características apresentadas aqui, há muitas outras que podem ser encontradas no *software*, cuja extensão do texto não permite apresentar, porém como convite sugere-se a leitura do manual de instruções[30].

A partir do uso do software GeoGebra foram construídos e disponibilizados no repositório virtual do GeoGebra dois objetos virtuais, “Cadeia de Markov – 2D” e “Cadeia de Markov – 3D”, ambos apresentados nas figuras 20 e 21 a seguir. Cada um deles tem dois ambientes de trabalho que, nas figuras abaixo, foram indicados por [A] e [B].

No espaço [A] é oportunizado ao sujeito que está manipulando os objetos virtuais visualizar geometricamente o que ocorre com a representação do vetor envolvido nos cálculos. O espaço da parte [B] consiste em uma janela predominantemente algébrica, onde há parâmetros que podem ser modificados e, consequentemente, alteram os resultados visualizados em [A]. Em [B] é possível que o sujeito explore a operação de potenciação envolvendo matrizes quadradas de ordem dois e três. Ainda é possível explorar o conceito de escala, e suas consequências no estudo de situações-problema, motivadas a partir da diversidade dos fenômenos observados na realidade.

Ambos os objetos foram construídos e disponibilizados na internet, para que qualquer pessoa interessada no assunto possa acessar e conhecer. Vale ressaltar que durante os experimentos didáticos dois e três realizados com os estudantes do ensino médio e ensino superior, todas as atividades propostas foram realizadas fazendo uso os objetos virtuais pela internet. Em nenhum momento o site onde eles estão hospedados teve problema técnico, ou falha detectada, mostrando assim estabilidade no uso deste material pela web.

Durante a aplicação das atividades, os registros produzidos pelos estudantes foram feitos em

[30] Disponível em http://static.geogebra.org/book/intro-en.pdf

papel, para que posteriormente fossem realizadas as análises. As sequências de atividades utilizadas ao longo dos dias nos experimentos estão disponíveis integralmente nos anexos E e F.

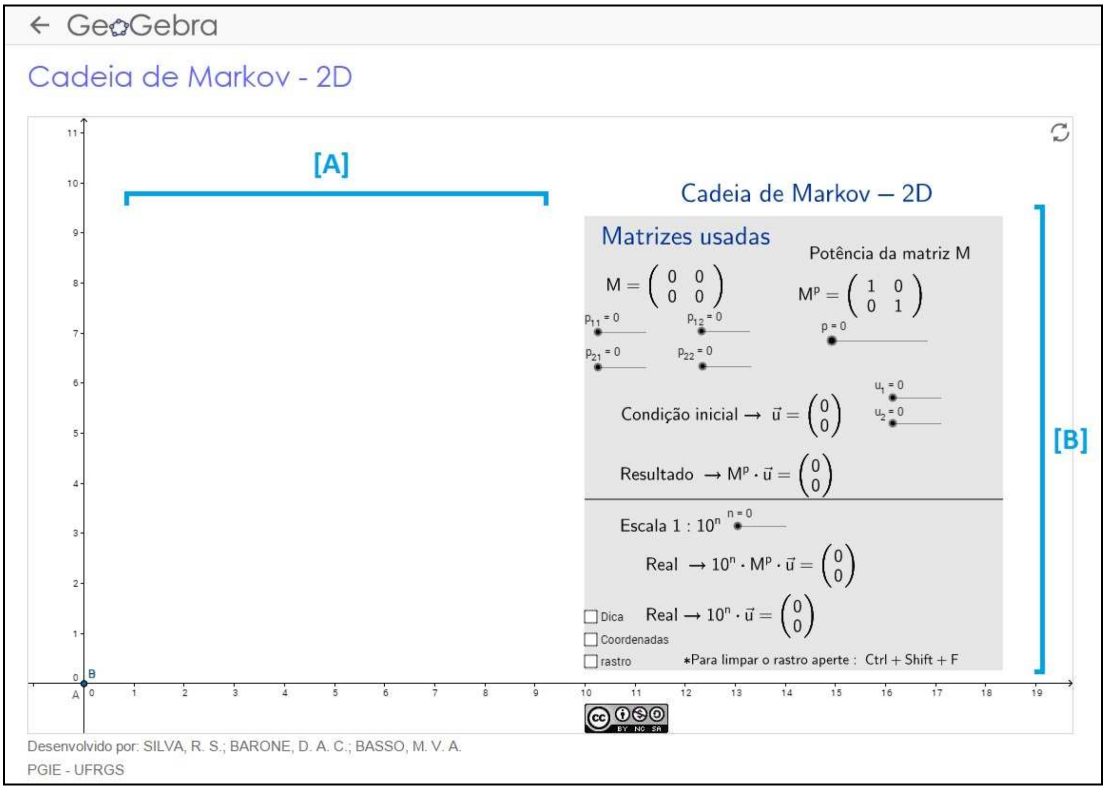


Figura 20 – Layout do objeto virtual Cadeia de Markov – 2D. Disponível em: http://tube-beta.geogebra.org/material/simple/id/860625

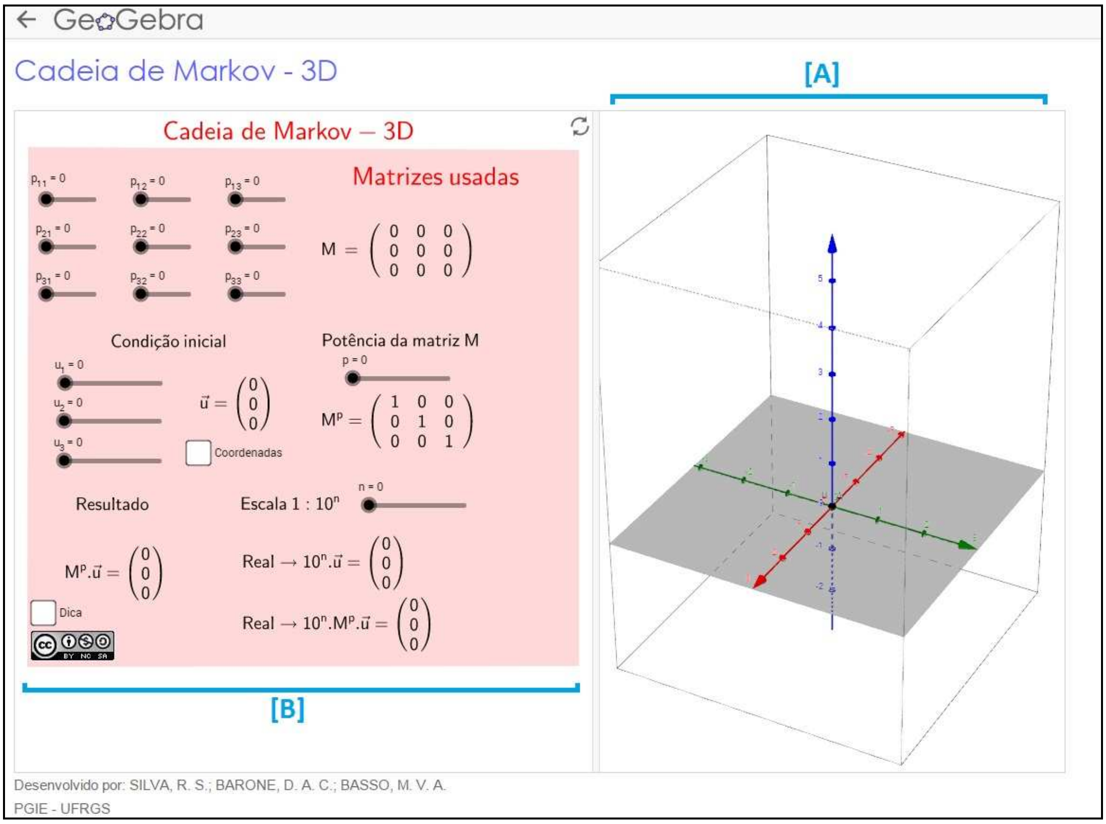


Figura 21 – Layout do objeto virtual Cadeia de Markov – 3D. Disponível em: http://tube-beta.geogebra.org/material/simple/id/1519869

5. ANÁLISE DOS EXPERIMENTOS À LUZ DA EPISTEMOLOGIA GENÉTICA

O presente capítulo propõe-se a apresentar, refletir e discutir a produção dos sujeitos envolvidos durante a realização dos três experimentos da pesquisa. Apresentam-se os resultados das produções fazendo possíveis relações com a fundamentação teórica discutida anteriormente: a epistemologia genética de J. Piaget. Pretende-se argumentar que por meio da modelagem matemática e fazendo uso das tecnologias digitais a construção do conhecimento matemático pelos sujeitos consistiu em um processo gradual, acompanhado do aperfeiçoamento das suas próprias ações, sejam materiais ou mentais, sobre os objetos em estudo.

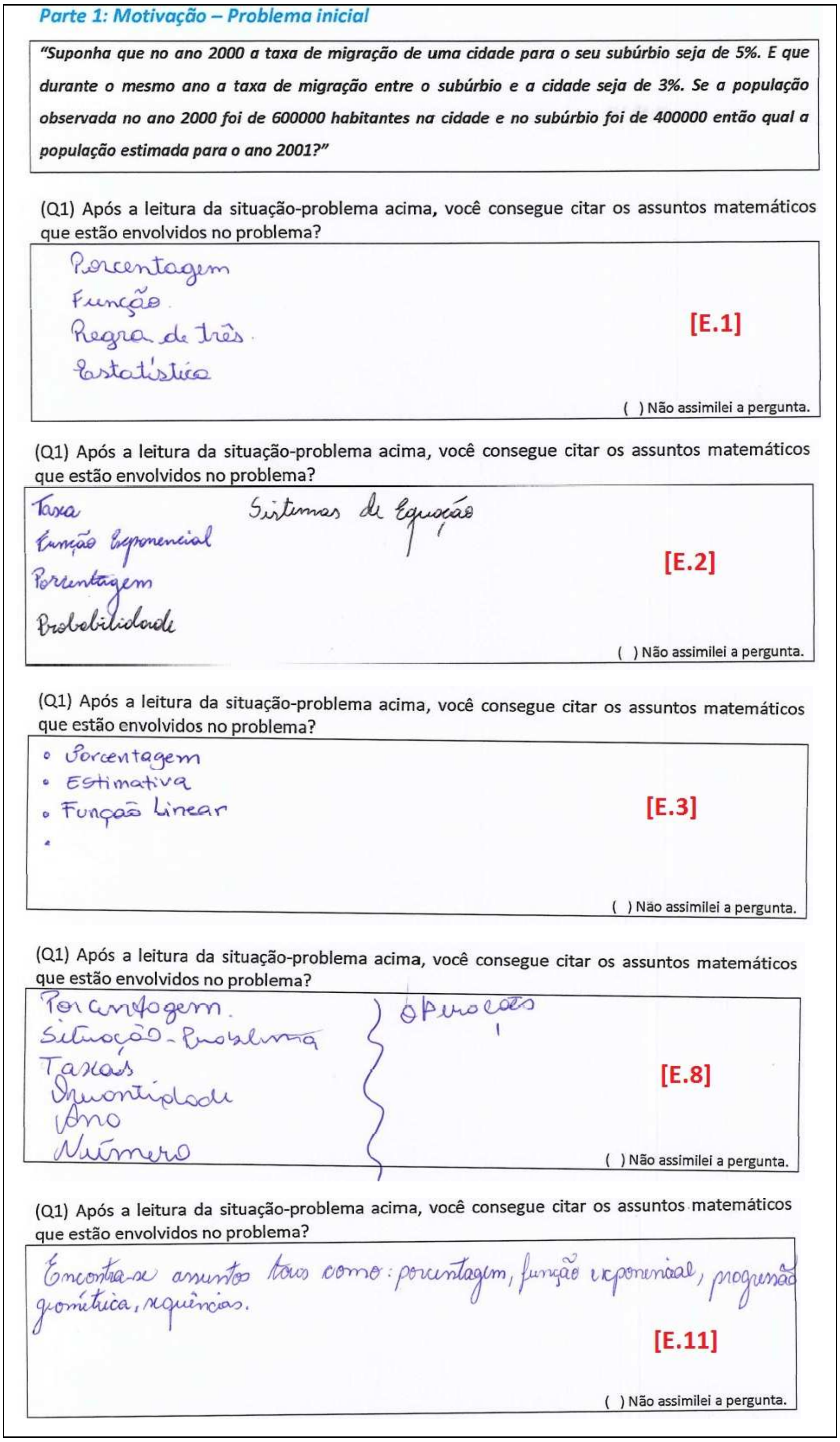
5.1 O EXPERIMENTO PILOTO

5.1.1 – Um primeiro experimento usando o objeto virtual

O experimento piloto, realizado com o uso do objeto virtual (figura 14), possibilitou verificar que o desenvolvimento das mais diversas formas de pensamento dos sujeitos passa por níveis sucessivos e graduais de abstrações e tomadas de consciência. SILVA *et al* (2014b) apresenta e discute alguns resultados obtidos com a realização de um experimento inicial, destacando que:

> "Ao longo da sequência de atividades, nota-se que a maioria dos alunos foi gradualmente construindo e elaborando os métodos para a resolução do problema proposto, caracterizando um pleno exercício de abstração. Notou-se que a abstração reflexionante ocorreu em diversos casos, seguida de tomada de consciência produzindo a construção do conceito através da abstração refletida, uma vez que o sujeito estava coordenando as suas ações em pensamento para comunicar o resultado matemático." (SILVA *et al,* 2014b, p. 9)

Nos questionamentos iniciais do experimento buscou-se verificar se os sujeitos eram capazes de, através de uma leitura inicial sobre a situação-problema apresentada, extrair e citar informações matemáticas que pudessem ser percebidas no enunciado da questão. Notou-se que os sujeitos citaram diversos e diferentes assuntos matemáticos, entre eles: porcentagem, taxas, regra de três, probabilidade, sistemas lineares, estatística, função exponencial. As estruturas de pensamento já presentes nos sujeitos mobilizam os esquemas assimiladores que, por sua vez, agem na direção da expressão dos resultados, tratando-se de uma manifestação da abstração pseudo-empírica manifestada pela ação do sujeito sobre o objeto. A figura 22 mostra exemplos disso:



Parte 1: Motivação – Problema inicial

"Suponha que no ano 2000 a taxa de migração de uma cidade para o seu subúrbio seja de 5%. E que durante o mesmo ano a taxa de migração entre o subúrbio e a cidade seja de 3%. Se a população observada no ano 2000 foi de 600000 habitantes na cidade e no subúrbio foi de 400000 então qual a população estimada para o ano 2001?"

(Q1) Após a leitura da situação-problema acima, você consegue citar os assuntos matemáticos que estão envolvidos no problema?

Porcentagem
Função.
Regra de três.
Estatística

[E.1]

( ) Não assimilei a pergunta.

(Q1) Após a leitura da situação-problema acima, você consegue citar os assuntos matemáticos que estão envolvidos no problema?

Taxa
Função Exponencial
Porcentagem
Probabilidade
Sistemas de Equação

[E.2]

( ) Não assimilei a pergunta.

(Q1) Após a leitura da situação-problema acima, você consegue citar os assuntos matemáticos que estão envolvidos no problema?

- Porcentagem
- Estimativa
- Função Linear

[E.3]

( ) Não assimilei a pergunta.

(Q1) Após a leitura da situação-problema acima, você consegue citar os assuntos matemáticos que estão envolvidos no problema?

Porcentagem.
Situação-Problema
Taxas
Quantidade
Ano
Número
Operações

[E.8]

( ) Não assimilei a pergunta.

(Q1) Após a leitura da situação-problema acima, você consegue citar os assuntos matemáticos que estão envolvidos no problema?

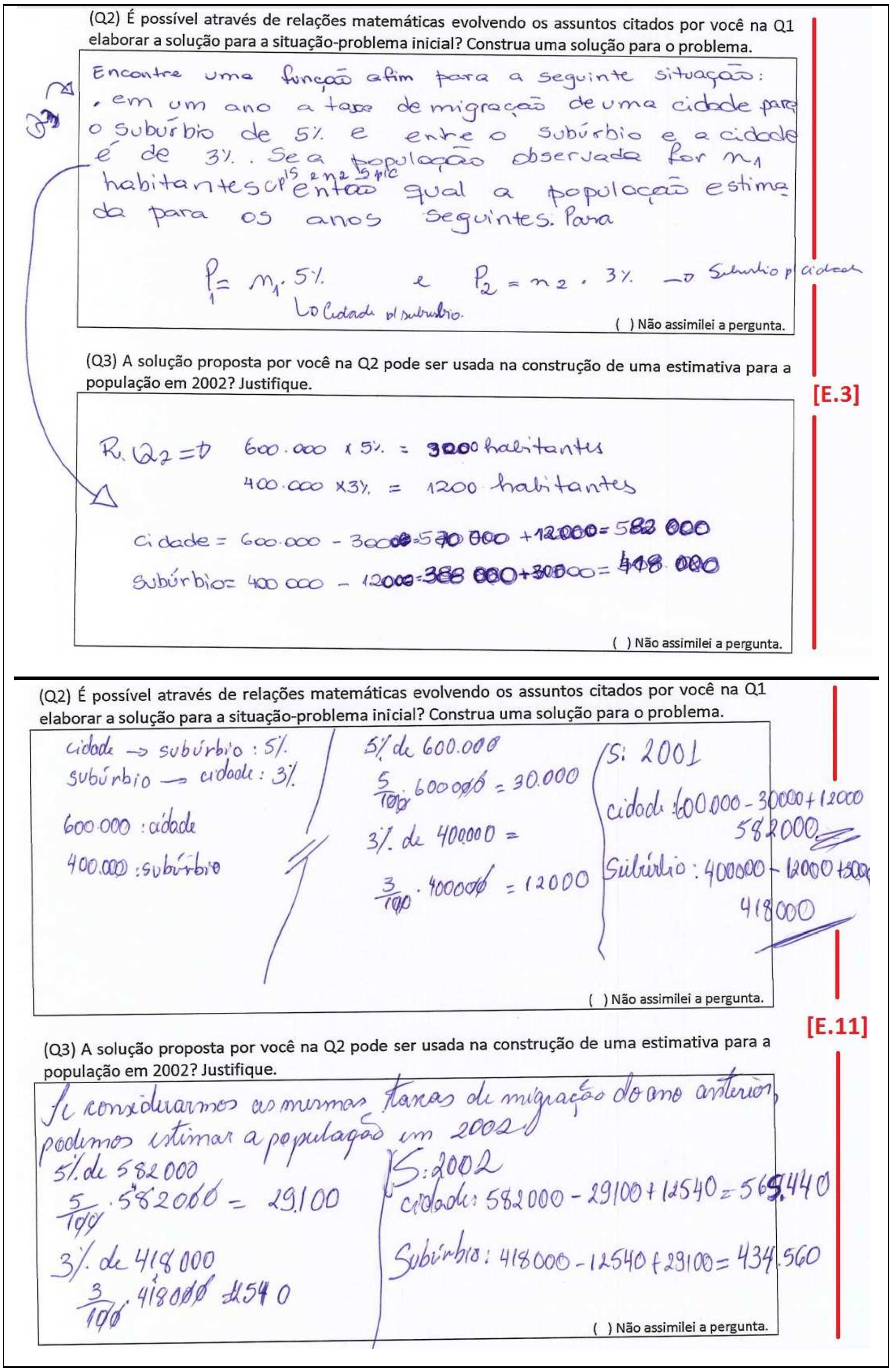
Encontra-se assuntos tais como: porcentagem, função exponencial, progressão geométrica, sequências.

[E.11]

( ) Não assimilei a pergunta.

Figura 22 – Assuntos citados por estudantes em Q1. Fonte: arquivo pessoal.

As estratégias desenvolvidas pelos participantes além de diferenciadas entre si sugerem que diante de uma determinada situação-problema apresentada na qual o sujeito não conheça previamente informações ou saiba qual é a resolução para o problema, oportuniza o exercício da criatividade e a mobilização por parte dos sujeitos das regulações ativas. Conforme dito anteriormente no capítulo sobre epistemologia genética, as regulações ativas são o motor da tomada de consciência uma vez que através delas seja possível ao sujeito (re)construir conhecimentos por meio de sucessivos e graduais aperfeiçoamentos na tomada de consciência. Depois de possivelmente assimilada a situação inicial, os participantes esboçaram algumas estratégias para resolver o problema e obter as estimativas solicitadas em Q2 conforme mostra o exemplo da figura 23. Após, em Q3, os participantes fizeram a aplicação do método possivelmente desenvolvido no questionamento anterior, mostrando já aplicação de alguns conhecimentos mobilizados.


(Q2) É possível através de relações matemáticas evolvendo os assuntos citados por você na Q1 elaborar a solução para a situação-problema inicial? Construa uma solução para o problema.

Encontre uma função afim para a seguinte situação: em um ano a taxa de migração de uma cidade para o subúrbio de 5% e entre o subúrbio e a cidade é de 3%. Se a população observada for n_1 habitantes então qual a população estimada para os anos seguintes. Para

$P_1 = n_1 \cdot 5\%$ e $P_2 = n_2 \cdot 3\%$ → Subúrbio p/ cidade

↳ Cidade p/ subúrbio.

( ) Não assimilei a pergunta.

(Q3) A solução proposta por você na Q2 pode ser usada na construção de uma estimativa para a população em 2002? Justifique.

R. Q2 ⇒ 600.000 x 5% = 30000 habitantes

400.000 x 3% = 12000 habitantes

Cidade = 600.000 − 30000 = 570 000 + 12000 = 582 000

Subúrbio = 400 000 − 12000 = 388 000 + 30000 = 418 000

( ) Não assimilei a pergunta.

[E.3]

(Q2) É possível através de relações matemáticas evolvendo os assuntos citados por você na Q1 elaborar a solução para a situação-problema inicial? Construa uma solução para o problema.

cidade → subúrbio : 5%

subúrbio → cidade : 3%

600.000 : cidade

400.000 : subúrbio

5% de 600.000

$\frac{5}{100} \cdot 600000 = 30.000$

3% de 400000 =

$\frac{3}{100} \cdot 400000 = 12000$

S: 2001

cidade: 600.000 − 30000 + 12000 = 582000

Subúrbio: 400000 − 12000 + 30000 = 418000

( ) Não assimilei a pergunta.

[E.11]

(Q3) A solução proposta por você na Q2 pode ser usada na construção de uma estimativa para a população em 2002? Justifique.

Se considerarmos as mesmas taxas de migração do ano anterior, podemos estimar a população em 2002

5% de 582 000

$\frac{5}{100} \cdot 582000 = 29100$

3% de 418 000

$\frac{3}{100} \cdot 418000 = 12540$

S: 2002

cidade: 582000 − 29100 + 12540 = 565.440

Subúrbio: 418000 − 12540 + 29100 = 434.560

( ) Não assimilei a pergunta.

Figura 23 – Estratégia de dois estudantes para resolver a Q2 e Q3. Fonte: arquivo pessoal.

Ao longo de todo o experimento pôde ser percebido durante a execução das atividades o envolvimento dos participantes, no sentido de que através da elaboração de alguma estratégia fosse possível mobilizar-se na criação de uma solução para a questão proposta. As atividades iniciais valorizavam a experimentação por parte dos sujeitos da situação-problema proposta, através da manipulação de informações predominantemente obtidas por eles por meio de abstrações pseudo-empíricas.

No momento que os sujeitos foram questionados sobre uma possível generalização dos procedimentos ditos por eles em itens anteriores, perceberam-se as mais variadas formas e estratégias para elaborar a solução. Tratou-se de um exercício de abstração reflexionante realizado por parte de cada sujeito, no qual cada tentativa esboçada de resolução significava o resultado de inúmeras operações de pensamento e estabelecimento de relações mentais, de graus de complexidade e intensidades variados. Na escrita de uma possível solução foi possível notar que apesar da constituição do público ser heterogênea, formada por professores de matemática e estudantes de graduação, as respostas produzidas por alguns apresentavam limitações em termos de generalidade.

As limitações mencionadas no parágrafo anterior se referem ao fato de que por vezes se acredita que sujeitos adultos sejam cognitivamente desenvolvidos de forma plena e que os mesmos são capazes de fazer exercícios de generalização, sempre que questionados. Contudo, essa tese é falha, conforme mostra a obra de J. Piaget. O autor propõe que toda elaboração e construção de conhecimento é resultado de um gradual *processo,* constituído de sucessivos micro avanços. O autor propõe que tal micro avanço depende das ações e das coordenações de ações por parte dos sujeitos. Ao explorar diferentes formas e abordagens na tentativa de compreensão sobre os objetos é que de fato através de relações estabelecidas seja possível existir efetivamente a construção de conhecimento.

Logo, ao questionar os sujeitos sobre uma possível generalização a partir do que havia sido feito nas questões anteriores, as mais diferentes formas de expressão e argumentos surgiram. Alguns participantes assinalaram que não haviam assimilado a questão. Nesse caso, as questões a seguir surgem: (A) Como é entendido pelo sujeito a ideia de generalização? Isto remete provavelmente a uma reflexão a ser feita sobre os níveis de desenvolvimento cognitivo e suas implicações no desenvolvimento das formas de pensamento. (B) Resolver casos específicos ao longo de uma tabela de valores, através da enumeração dos casos, corresponderia a um tipo de generalização para o sujeito? (C) Quais os motivos que levaram alguns dos participantes a considerar a hipótese de que se tratava de um problema de resolução exponencial? Esta última questão remete possivelmente a outros momentos anteriores da vida escolar destes sujeitos, onde pode ter sido discutido alguma situação que envolvia dinâmica de crescimento populacional que faziam uso de modelos exponenciais. Certamente as três questões anunciadas antes são de considerável importância e merecem nossa atenção.

Quando a teoria de Piaget nos apresenta alguns conceitos aos pares tais como: sujeito/objeto, assimilação/acomodação, exteriorização/interiorização; integração/diferenciação, centro do sujeito/centro do objeto, abstração pseudo-empírica/abstração reflexionante, a intenção do autor é provocar uma discussão e reflexão sobre como os sujeitos evoluem em termos de sua ação e coordenação de ação sobre os objetos materiais e de pensamento. Ao longo do processo de construção conceitual, há níveis ou intensidades que o sujeito alcança devido a seu próprio trabalho cognitivo. Logo, o processo de abstração somente poderá evoluir de acordo com a intensidade e profundidade das ações praticadas pelo sujeito.

Ao mesmo tempo em que a abstração evolui também evolui a tomada de consciência. A importância da tomada de consciência no processo de construção conceitual é que a mesma permite ao sujeito desenvolver significativamente suas formas de pensamento. Quando a tomada de consciência atinge cada vez patamares superiores, o plano de ação predominante é o do pensamento, e por sua vez, as ações são ações e coordenações que agem nas formas mentais elaboradas pelo sujeito. Isso possivelmente terá implicações nas formas de compreensão do processo de generalidade, por parte do sujeito.

Considerando-se a ideia que o sujeito a partir da mobilização, integração/diferenciação e relações entre diferentes esquemas possa evoluir e aperfeiçoar suas estruturas cognitivas é aceitável considerar que existam entre os sujeitos diferentes formas de expressões para representar possíveis generalizações. As diferentes formas de expressão do pensamento podem ser traduzidas como um produto, individual e singular, específico de cada sujeito e que possibilita compreender como a trajetória percorrida por cada um é elemento importante na constituição do sujeito epistêmico. Logo, a expressão manifestada através de uma tabela é uma forma de raciocínio que tenta explicitar alguma generalidade, a qual consiste para o sujeito que o faz por alguma ação uma espécie de generalidade. Através desse tipo de recurso possivelmente seria possível os sujeitos obterem qualquer estimativa solicitada, bastando replicar o raciocínio etapa por etapa dentro de um processo mais geral. Até agora se procurou refletir sobre as questões (A) e (B) apresentadas anteriormente.

Quanto à questão (C), entende-se que seja necessário recorrer novamente às ideias de Becker (2012, p. 102), mais especificamente nos tópicos 1) e 2) debatidos no capítulo sobre abstração reflexionante. Becker (2012, p. 102) expõe quais são as etapas ou níveis evolutivos perpassados pelo sujeito durante o processo de criação de novidades. Recordemos os dois primeiros itens: 1) Inicialmente é necessário que haja diferenciação dos esquemas de assimilação do sujeito, com o objetivo que eles possam ser aplicados em uma situação nova. Ou seja, um esquema anterior é reaplicado de forma nova, constituindo-se como um esquema diferenciado em relação a antes. 2) Consiste na elaboração de relações entre as coordenações conceitualizadas e as situações práticas as quais essa ação coordenada se refere. Ou seja, como o sujeito pode relacionar as suas ações com as coordenações conceituais previamente construídas por ele.

À luz das ponderações 1) e 2) apresentadas anteriormente foi possível perceber o quanto esses itens se correlacionam e se aplicam ao que foi observado pelo pesquisador e manifestado pelos sujeitos diante da atividade. O fato é que somente será possível do sujeito mencionar algo que envolva a *função exponencial* se ele tiver algum conceito organizado e estruturado *sobre função exponencial*. Notou-se que a partir do conceito e diante de uma nova situação-problema, a estratégia considerada pelos sujeitos foi tentar reorganizar e reaplicar a noção de função exponencial diante do problema que estava sendo proposto. Isso implicou por sua vez, que fossem necessárias adaptações e readequações do conceito previamente construído sobre o objeto matemático. Logo, isso se manifestou nas respostas de alguns participantes para o questionamento Q5. Na figura 24 apresentamos algumas respostas fornecidas para a questão Q5.

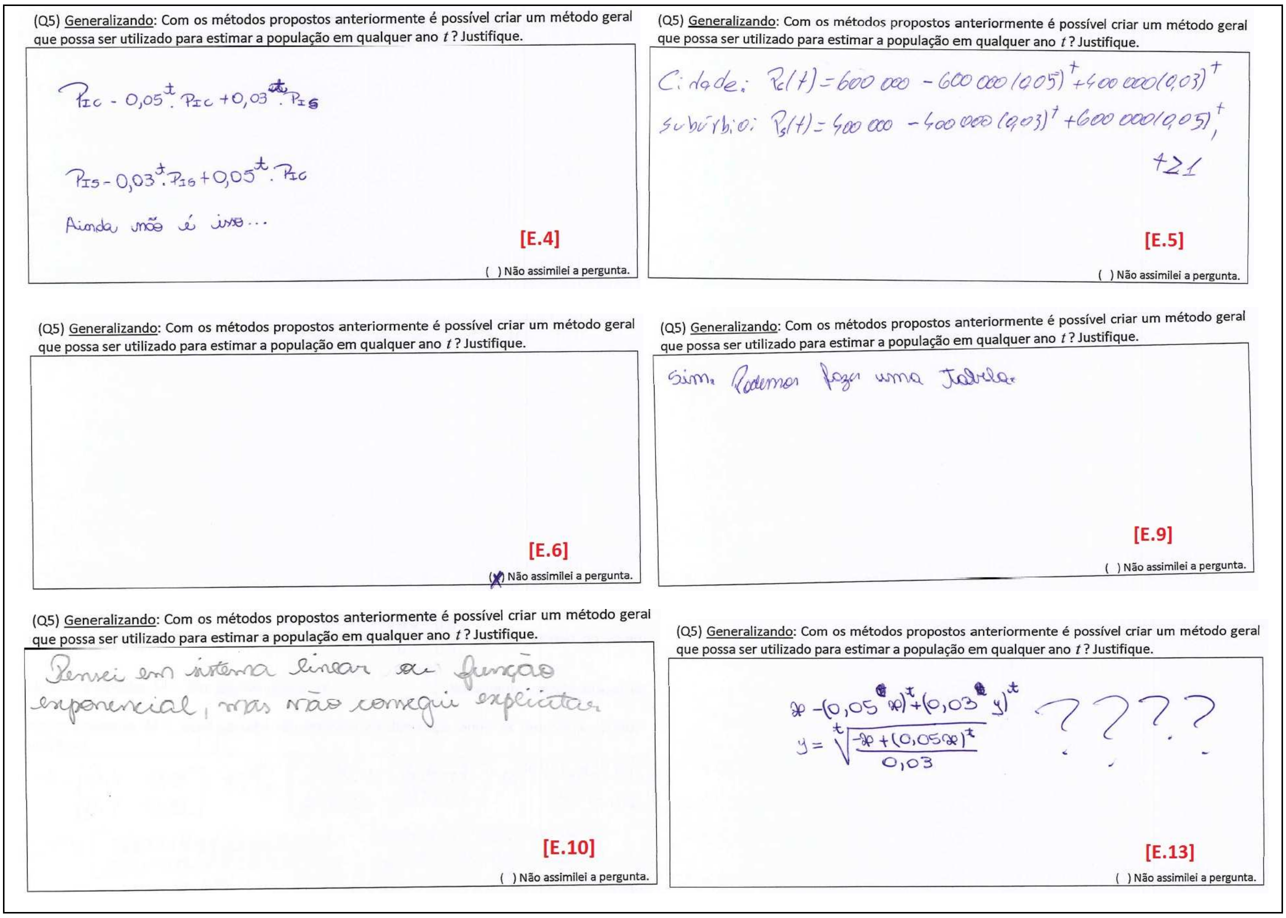


Figura 24 – As tentativas de generalização em Q5. Fonte: arquivo pessoal.

Após o questionamento Q5 os sujeitos começaram a utilizar o objeto virtual. O uso ocorreu sem o acesso da *internet*, sendo necessário que o *software* GeoGebra estivesse instalado no laboratório de informática. As questões Q6, Q7, Q8, Q9 e Q10 da sequência de atividades experimental tinham por objetivo fazer os participantes conhecer, manipular e argumentar sobre matrizes e suas operações. Do questionamento Q11 em diante retornávamos ao objetivo do qual se havia iniciado o experimento didático: elaborar um modelo matemático que pudesse ser utilizado para explicar a situação-problema proposta inicialmente. Os questionamentos Q11, Q12 e Q13 procuravam desafiar os participantes no sentido da experimentação e consideração de novas possibilidades para situação-problema inicial. Foi feita uma breve discussão envolvendo sistemas lineares onde se sugeriu que talvez esse conteúdo pudesse ser usado para obter estimativas dentro da situação-problema. Com isso, os participantes refinaram e qualificaram suas possíveis hipóteses, as quais poderiam ser verificadas através do objeto virtual. A figura 25 ilustra com dois exemplos, o que foi dito nesse parágrafo.

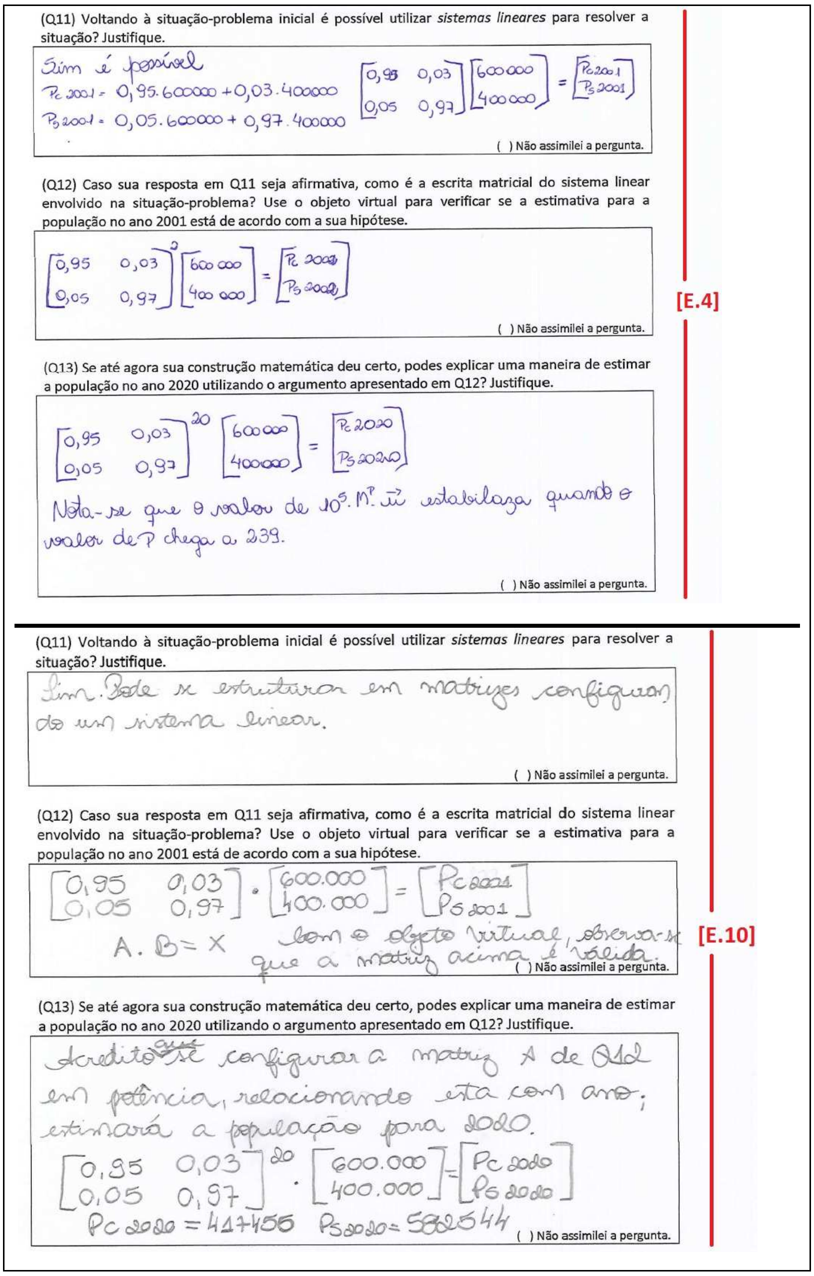


Figura 25 – Sistemas lineares, o objeto virtual e novas estimativas. Fonte: arquivo pessoal.

Sobre o primeiro experimento didático realizado, de um modo geral, ao longo da realização das atividades verificou-se que gradualmente os participantes envolvidos desenvolveram o pensamento matemático na direção da construção dos conceitos necessários para a compreensão da situação-problema. Notou-se também uma evolução progressiva referente aos aspectos cognitivos por ocasião das atividades. Ou seja, a proposta procurava desafiar o sujeito no desenvolvimento de formas de pensamento capazes de construir um possível modelo matemático.

Notou-se que a construção de um possível modelo matemático ocorreu, mas não de forma satisfatória, para todos os participantes das atividades. Esse fato nos leva a concluir que ao partir da manipulação de dados e informações, alguns estudantes, apesar de estar no ensino superior não conseguiram por meio do exercício gradual da abstração reflexionante e da tomada de consciência, compreender o fenômeno na sua totalidade. Ou seja, não conseguiram expressar matematicamente alguma relação genérica capaz de explicar o problema idealizado e proposto através das variáveis observadas. Ainda no mesmo experimento, parte dos participantes observados não conseguiu, através de possíveis relações, ou, das coordenações de suas ações e formas de pensamento, atribuir características reflexivas capazes de permitir a construção de um modelo matemático que pudesse explicar a situação-problema proposta.

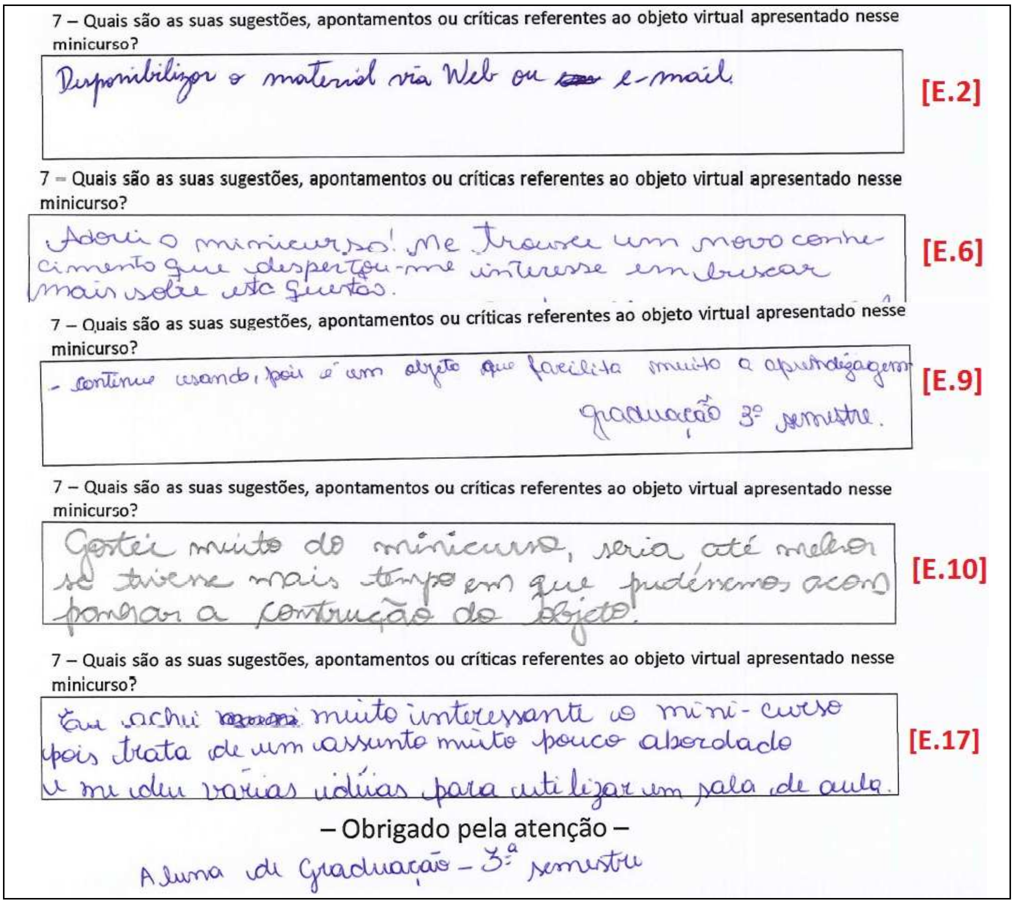
Após a realização do primeiro experimento didático, algumas constatações decorrentes da sua realização foram possíveis de inferir:

1) Os sujeitos envolvidos com a proposta não “pensavam” matematicamente de maneiras ou modos iguais. Ou seja, sujeitos diferentes pensam de formas e desenvolvem estratégias diferentes diante de uma mesma situação-problema;
2) A construção do modelo matemático investigado passou por sucessivos e graduais micro-avanços na direção do conhecimento envolvendo o objeto de estudo;
3) O uso da tecnologia digital contribuiu positivamente para o desenvolvimento das atividades pelos sujeitos, pois permitiu que eles se concentrassem exclusivamente na investigação e deduções envolvendo a situação-problema;
4) A passagem pelos níveis iniciais da abstração e tomadas de consciência elementares são necessárias. Verificou-se que não é possível elaborar uma lei matemática de forma direta, sem antes ter experimentado e relacionado algumas características empíricas envolvendo o problema;
5) Foi possível perceber que a elaboração de um possível modelo matemático é fruto da evolução de tomadas de consciência superiores derivadas de abstrações refletidas. O sujeito que conseguiu expressar o modelo matemático na sua totalidade, mesmo que essa totalidade não representasse a realidade em sua integridade, foi capaz de compreender que o seu

modelo construído se aplicava para todos os casos iniciais investigados empiricamente.

Analisou-se, neste primeiro experimento, a produção sob o aspecto da elaboração e construção de conhecimento pelos sujeitos, buscando refletir sobre a possível manifestação do processo de abstração reflexionante e de tomada de consciência. Verificamos que a construção do conhecimento matemático proposta na discussão das atividades realizadas com o experimento foi influenciada diretamente por: ações do sujeito sobre o objeto virtual utilizado e também pela ação derivada das coordenações de ações do sujeito, constituindo um processo de construção ou reconstrução de ideias, criação ou validação de hipóteses e manutenção de um processo argumentativo capaz de produzir e expressar possíveis explicações para as situações-problema.

Através de um questionário final foram coletadas contribuições pessoais dos participantes sobre o experimento. Diante das respostas, conforme figura 26, destacamos alguns pontos: disponibilização do material via web **(a)**, a aprendizagem decorrente do uso do objeto virtual **(b)**, a exploração de situações pouco usuais em sala de aula **(c)**, estímulo para buscar mais informações a respeito do assunto **(d)**.



7 – Quais são as suas sugestões, apontamentos ou críticas referentes ao objeto virtual apresentado nesse minicurso?

Disponibilizar o material via Web ou ~~[illegible]~~ e-mail.

[E.2]

7 – Quais são as suas sugestões, apontamentos ou críticas referentes ao objeto virtual apresentado nesse minicurso?

Adorei o minicurso! Me trouxe um novo conhecimento que despertou-me interesse em buscar mais sobre este assunto.

[E.6]

7 – Quais são as suas sugestões, apontamentos ou críticas referentes ao objeto virtual apresentado nesse minicurso?

- continue usando, pois é um objeto que facilita muito a aprendizagem
graduação 3º semestre.

[E.9]

7 – Quais são as suas sugestões, apontamentos ou críticas referentes ao objeto virtual apresentado nesse minicurso?

Gostei muito do minicurso, seria até melhor se tivesse mais tempo em que pudéssemos acompanhar a construção do objeto.

[E.10]

7 – Quais são as suas sugestões, apontamentos ou críticas referentes ao objeto virtual apresentado nesse minicurso?

Eu achei ~~[illegible]~~ muito interessante o mini-curso pois trata de um assunto muito pouco abordado e me deu várias idéias para utilizar em sala de aula.

[E.17]

– Obrigado pela atenção –

Aluna de Graduação – 3º semestre

Figura 26 – Considerações dos participantes. Fonte: arquivo pessoal.

Após verificar uma aceitação do público quanto à proposta da oficina pedagógica ofertada e diante das considerações manifestadas pelos participantes iniciou-se um trabalho de reflexão por parte do autor, buscando-se primeiramente aperfeiçoar o objeto virtual antes da realização dos demais experimentos. Algumas questões sobre qual seria a forma do produto final da sequência de atividades e como ela seria disponibilizada começaram a fazer parte dos pensamentos do autor, em consonância com **(a)**. As questões relativas à aprendizagem da matemática em correlação com a abordagem de um assunto pouco usual em sala de aula começavam a fazer mais sentido na pesquisa: uma proposta de ensino, através de uma sequência de atividades que desafiasse e envolvesse a modelagem matemática com Cadeias de Markov fazendo uso de objetos virtuais seria uma possibilidade de realizar um estudo contextualizado da matemática. Portanto os conceitos e definições, próprios da ciência matemática, seriam conseqüência do processo de trabalho cognitivo resultante de ação ou das coordenação de ações na exploração de situações–problema pelos sujeitos. Nesses aspectos, a proposta de tese estava sendo reforçada e convergia com aderência aos apontamentos **(b)** e **(c)**.

Depois de realizado o primeiro experimento didático, sob a forma de um artigo, sendo o mesmo citado no início desta seção, Silva *et al* (2014b) refletiram sobre o uso de uma sequência de atividades inspirada nos princípios metodológicos da engenharia didática e que envolvem a modelagem matemática de situações-problema com Cadeias de Markov:

> “(...) o encaminhamento de uma proposta de ensino envolvendo Cadeias de Markov através de uma metodologia envolvendo os princípios da engenharia didática permite ao professor relacionar e abordar diversos assuntos matemáticos e também suas aplicações em outras áreas do conhecimento. O uso da tecnologia para a realização da proposta considera-se essencial, pois percebemos que essa possa ser uma ferramenta catalisadora do processo de aprendizagem. Ao longo do processo, espera-se que o sujeito envolvido com as atividades propostas perceba além da relevância do estudo desse tema, dando-se conta que é possível relacionar a matemática envolvida nas Cadeias de Markov com diversas outras aplicações da ciência, tornando a matemática uma disciplina aplicada e necessária para a modelagem e interpretação dos diversos fenômenos que o cerca.” (SILVA *et al*, 2014b, p. 11)

A reflexão apresentada anteriormente consistiu em uma importante etapa para o prosseguimento do trabalho de pesquisa, uma vez que oportunizou refletir tanto sobre a sequência de atividades que seria usada nos próximos dois experimentos quanto sobre os objetos virtuais que seriam utilizados. Buscou-se a partir de então nas etapas seguintes da pesquisa consolidar ainda mais o tripé: aprendizagem matemática – tecnologias digitais – modelagem matemática.

Com o intuito de apresentar uma nova e reformulada sequência de atividades, que desafiasse e valorizasse o envolvimento do sujeito, e também oportunizasse o seu desenvolvimento partiu-se então para a criação/aplicação e possível validação dos segundo e terceiro experimentos didáticos.

5.2 O EXPERIMENTO NO ENSINO MÉDIO

5.2.1 – Um olhar sobre a produção dos estudantes

As aulas nas quais ocorreu a aplicação do segundo experimento didático com os estudantes do ensino médio aconteceram em um dos laboratórios de informática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul (IFRS), Campus Caxias do Sul, durante cinco semanas nas aulas regulares da disciplina de matemática. Cada um dos encontros ocorreu de forma presencial e teve a duração de uma hora e quarenta minutos. Os estudantes foram alocados de forma individual nos computadores, porém em diversos momentos realizaram discussões e reflexões entre si, acompanhadas pelo professor. O uso do objeto virtual “Cadeias de Markov – 2D” ocorreu com acesso pela internet e os registros escritos foram produzidos pelos estudantes de forma individual em papel, no material fornecido pelo professor ao longo das aulas.

Após cada encontro o material produzido por cada estudante foi digitalizado e armazenado pelo professor, para futura análise da produção. Sendo assim, o manuscrito individual de cada participante foi entregue de volta para cada um dos quatorze estudantes da turma. Também foi informado antecipadamente aos estudantes que o material constituiria um dos instrumentos de avaliação para o segundo trimestre[31] do ano letivo de 2015. A sequência de atividades realizada com os estudantes do ensino médio pode ser visualizada de modo completo no Apêndice E.

A presente seção busca apresentar, refletir e discutir, à luz do referencial teórico utilizado, a construção de conhecimentos matemáticos pelos estudantes ao longo da sequência de atividades. Busca-se também refletir sobre a importância do uso das tecnologias digitais ao longo do processo de aprendizagem, a qual oportunizou que os sujeitos envolvidos pudessem a partir de suas ações e coordenações de ações sobre os objetos em estudo construir diversos conceitos matemáticos envolvendo a modelagem matemática em situações-problema com Cadeias de Markov.

Inicialmente mencionamos que as atividades ocorreram ao longo de cinco encontros presenciais nas aulas regulares de matemática. Dois aspectos podem ser mencionados e merecem nossa atenção neste momento: (1) Ao executar uma proposta de trabalho organizada durante determinado período de tempo, ocorreu uma valorização da aprendizagem em termos de *desenvolvimento*. Reforça-se assim que *aprendizagem* seja um conceito aderente e correlacionado ao conceito de *desenvolvimento*[32], considerando-se algo diferente de pontual, específico e próprio

[31] A organização do calendário escolar do ensino médio integrado do IFRS – Caxias do Sul para o ano de 2015 ocorre de modo *trimestral*, sendo que em 2015 está prevista a realização e integralização de três trimestres.

[32] Para uma melhor compreensão sobre *desenvolvimento* e *aprendizagem* sugere-se a leitura de “PIAGET, J. Development and learning. In LAVATTELLY, C. S. e STENDLER, F. **Reading in child behavior and development**. New York: Hartcourt Brace Janovich, 1972.”

de determinado momento. Portanto, considera-se que isto tenha sido um primeiro diferencial em relação ao primeiro experimento didático realizado em 2014, que ocorreu durante uma oficina pedagógica e com duração de algumas horas. (2) Ao propor um trabalho envolvendo *todos* os estudantes de uma turma regular de ensino médio oportunizou-se que o cenário de realização da pesquisa fosse mais fiel ao que inicialmente se propõe: verificar e analisar sobre a construção de conhecimento matemático por estudantes que, inseridos na escola, estivessem cursando a componente curricular de matemática. Mais detalhadamente, no item (2), considera-se que as ações provenientes de pesquisas que tenham um olhar sobre as salas de aula *regulares* como fontes para a produção de diversos conhecimentos, matemáticos ou não, tenham uma profícua intencionalidade e contribuam qualitativamente nas discussões quem envolvam o ensino de determinada área do conhecimento. Logo, ao inserir nossa proposta metodológica de trabalho nas aulas regulares da disciplina de matemática buscou-se reafirmar a importância que o tripé aprendizagem matemática – tecnologias digitais – modelagem matemática tenha ao longo do desenvolvimento escolar.

A sequência de atividades realizada no ensino médio foi organizada do seguinte modo: “Conhecendo o contexto” (1º dia), “Conhecendo o objeto virtual” (2º dia), “Retomando a problemática inicial” (3º dia), “Avançando no estudo da Cadeia de Markov” (4º dia) e “Exercitando” (5º dia). A partir de agora se fará uma exposição sobre a produção dos estudantes ao longo dos cinco dias do experimento e também se procura relacionar esta produção com a fundamentação teórica utilizada na tese.

5.2.1.1 – Conhecendo o contexto – 1º Dia

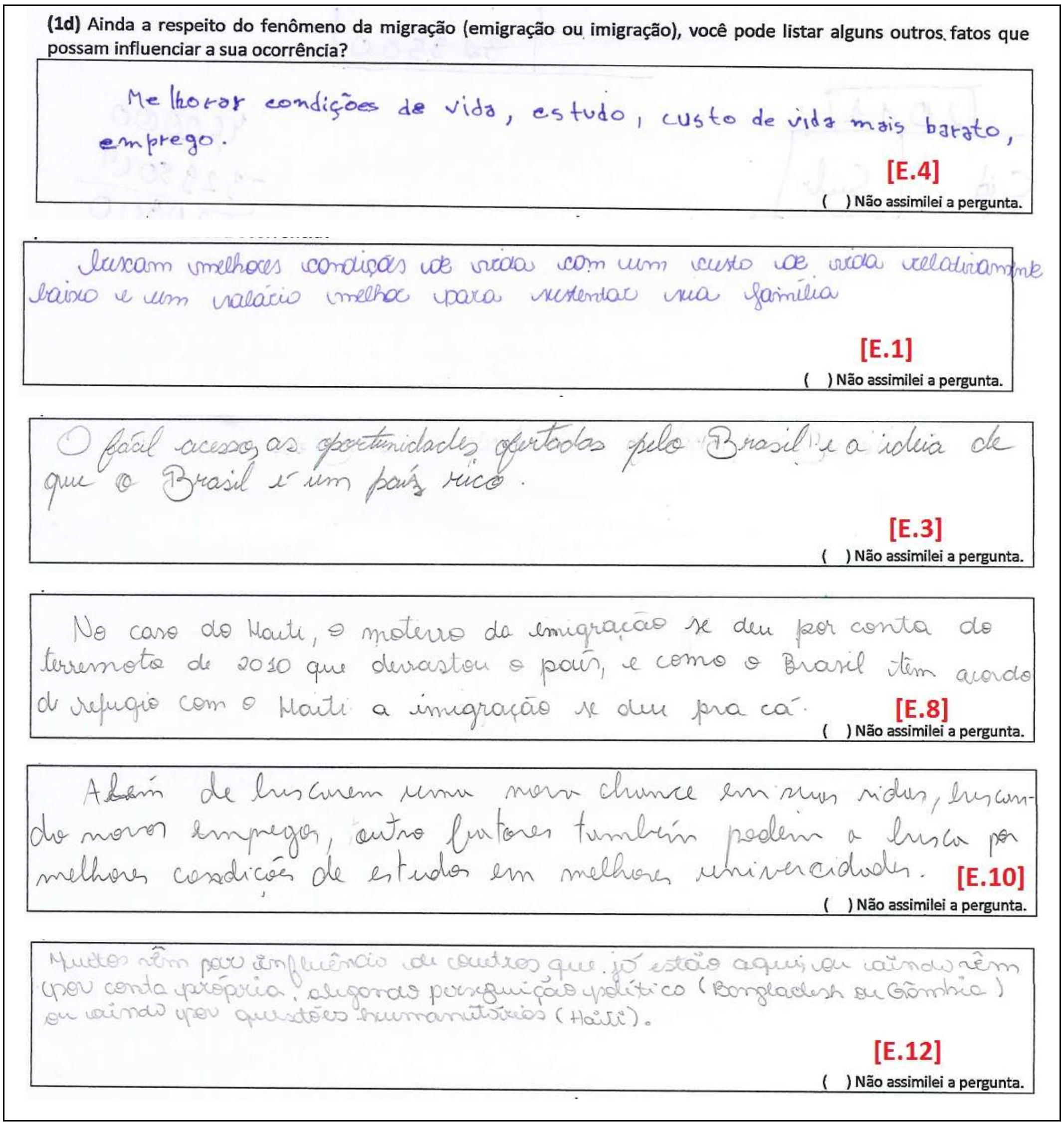
A atividade neste dia foi organizada em dois momentos: o primeiro consistiu em fazer a leitura e discussão de uma notícia veiculada em um jornal, e o segundo momento consistiu em apresentar uma situação-problema inicial envolvendo o fluxo migratório entre dois lugares. A notícia sugerida foi acessada via internet; já na primeira leitura os estudantes puderam perceber a ocorrência do fenômeno da migração.

Em linhas gerais, o texto[33] tratava de um novo movimento de migratório percebido nos dias atuais, de origem africana e caribenha. Eram feitas algumas considerações sobre como este movimento migratório estava influenciando o estado do Rio Grande no Sul (Brasil), principalmente nas áreas econômica, étnica e cultural.

Após a leitura do texto pelos estudantes, alguns questionamentos foram feitos com o objetivo de provocar uma reflexão sobre as causas da migração apresentadas no texto, bem como

[33] Disponível integralmente em: http://zh.clicrbs.com.br/rs/noticias/noticia/2014/08/novos-imigrantes-mudam-o-cenario-do-rio-grande-do-sul-4576728.html

fazer os estudantes contribuírem com outras causas que poderiam influenciar no processo. O que se percebeu durante a atividade é que os estudantes se envolveram com a proposta e refletiram sobre o objeto em estudo. Exemplos de contribuições são mostrados na figura 27, a seguir.


(1d) Ainda a respeito do fenômeno da migração (emigração ou imigração), você pode listar alguns outros fatos que possam influenciar a sua ocorrência?

Melhorar condições de vida, estudo, custo de vida mais barato, emprego.

[E.4]

( ) Não assimilei a pergunta.

buscam melhores condições de vida com um custo de vida relativamente baixo e um salário melhor para sustentar sua família

[E.1]

( ) Não assimilei a pergunta.

O fácil acesso as oportunidades ofertadas pelo Brasil e a ideia de que o Brasil é um país rico.

[E.3]

( ) Não assimilei a pergunta.

No caso do Haiti, o motivo da imigração se deu por conta do terremoto de 2010 que devastou o país, e como o Brasil tem acordo de refúgio com o Haiti a imigração se deu pra cá.

[E.8]

( ) Não assimilei a pergunta.

Além de buscarem uma nova chance em suas vidas, buscando novos empregos, outros fatores também podem a busca por melhores condições de estudos em melhores universidades.

[E.10]

( ) Não assimilei a pergunta.

Muitos vêm por influência de outros que já estão aqui ou ainda vêm por conta própria, algumas perseguição político (Bangladesh ou Gâmbia) ou ainda por questões humanitárias (Haiti).

[E.12]

( ) Não assimilei a pergunta.

Figura 27 – Algumas hipóteses criadas pelos estudantes sobre a migração. Fonte: arquivo pessoal.

Logo após a discussão sobre a notícia, durante o segundo momento, ocorreu a apresentação de uma situação-problema envolvendo o fluxo migratório, conforme mostrado na figura 28. O problema tratava de um possível movimento migratório na localidade de Caxias do Sul (RS), onde empiricamente foram assumidas como hipóteses as taxas de migração.

No contexto da migração, quando as pessoas chegam a Caxias do Sul, por exemplo, se deparam com uma realidade muitas vezes diferente da que estavam habituadas em seu lugar de origem. Na tentativa de buscar o seu "lugar ao sol" para se alocar, os imigrantes deslocam-se da cidade para os subúrbios. Observa-se que o contrário também ocorre, ou seja, pessoas partem do subúrbio para a cidade. Certa vez foi considerada a seguinte situação-problema:

"Suponha que no ano 2010 a taxa de migração de Caxias do Sul para o seu subúrbio seja de 7%. E que durante o mesmo ano a taxa de migração do subúrbio para a cidade seja de 4%. Se a população observada no ano 2010 foi de 350000 habitantes na cidade e no subúrbio foi de 100000 habitantes então qual a população estimada para o ano 2011 para cada um dos lugares?"

Figura 28 – A situação-problema inicial. Fonte: arquivo pessoal.

Da mesma forma como proposto no primeiro experimento foi solicitado que os estudantes elencassem possíveis assuntos matemáticos que pudessem ser utilizados na resolução da questão. Os assuntos elencados pela turma e suas respectivas freqüências foram: porcentagem (13 citações), lógica (1 citação), função (5 citações), probabilidade (6 citações), estimativa (2 citações), “soma em cima da quantidade que se tem” (2 citações), estatística (2 citações), regra de três (4 citações), sistemas lineares (3 citações), progressão aritmética (1 citação). Percebeu-se que para esse item os estudantes citaram mais de um assunto que poderia ser utilizado na resolução, evidenciando que possíveis conteúdos matemáticos diferentes e as relações estabelecidas entre eles foram considerados uma ferramenta na construção da solução para o problema.

No cálculo de estimativas para as populações nos anos seguintes (2011, 2012 e 2013) após início da observação do fenômeno, as estratégias usadas pelos estudantes para resolver os questionamentos envolveu predominantemente cálculos com porcentagens, somas e subtrações. Isto ocorreu de forma satisfatória para todos os integrantes da turma. Ao se deparar com a pergunta sobre uma possível generalização do processo envolvido na situação-problema, diferentes respostas foram fornecidas. Algumas considerações sobre essas respostas são importantes e merecem nossa atenção neste momento.

Durante o primeiro experimento didático o público alvo observado era constituído essencialmente de: (1) estudantes de graduação alocados em diferentes etapas no curso de licenciatura em matemática e (2) professores de matemática. Foi tratado no capítulo (ver 5.1) referente à análise das produções na oficina pedagógica sobre as diferentes formas manifestadas envolvendo generalidades. Ao se deparar com diferentes expressões e tentativas de generalização propostas pelos estudantes no ensino médio percebeu-se o quanto é relevante observar; enquanto professor, as diferenças e semelhanças cognitivas existentes entre os diferentes sujeitos, todos os quais fazem parte do mesmo ambiente de sala de aula.

Cada sujeito epistêmico é o resultado de uma quantidade inestimável de reflexões/reflexionamentos, abstrações/tomadas de consciência que são realizadas ao longo da vida biológica. Todas as atividades praticadas pelos sujeitos, por meio de suas ações, são influenciadas pelo grau de envolvimento e profundidade com que o sujeito explora os objetos em estudo. Ou seja, através das ações e coordenações de ações pode aperfeiçoar a qualidade de seu pensamento. Tal aperfeiçoamento permite que diante de uma situação nova ou desafio proposto, o sujeito desenvolva estratégias que convergem para a solução dos impasses. Neste caso, a mobilização de diferentes esquemas assimiladores combina-se com as estruturas já organizadas pelo sujeito, na criação de novidades; ou regulações ativas; que são capazes de atribuir ao pensamento uma qualidade específica dos seres humanos: a criatividade.

Ao longo da escolarização cada sujeito organiza o processo de construção de conhecimento, derivando-se assim inúmeras formas e processos de aprendizagem. Acredita-se que a criatividade mencionada no parágrafo anterior cumpra uma função essencial no desenvolvimento das habilidades cognitivas. A função é que através dela seja possível o sujeito estruturar (reestruturar) e organizar (reorganizar) formas de pensamento. Aliado ao processo criativo está a evolução da tomada de consciência e da abstração, enquanto reflexionante, que são dois elementos que influenciam diretamente na capacidade de resolver impasses e desafios impostos pelos objetos. Na figura 29 expomos exemplos de possíveis enunciados para um princípio geral que pudesse explicar a situação proposta.

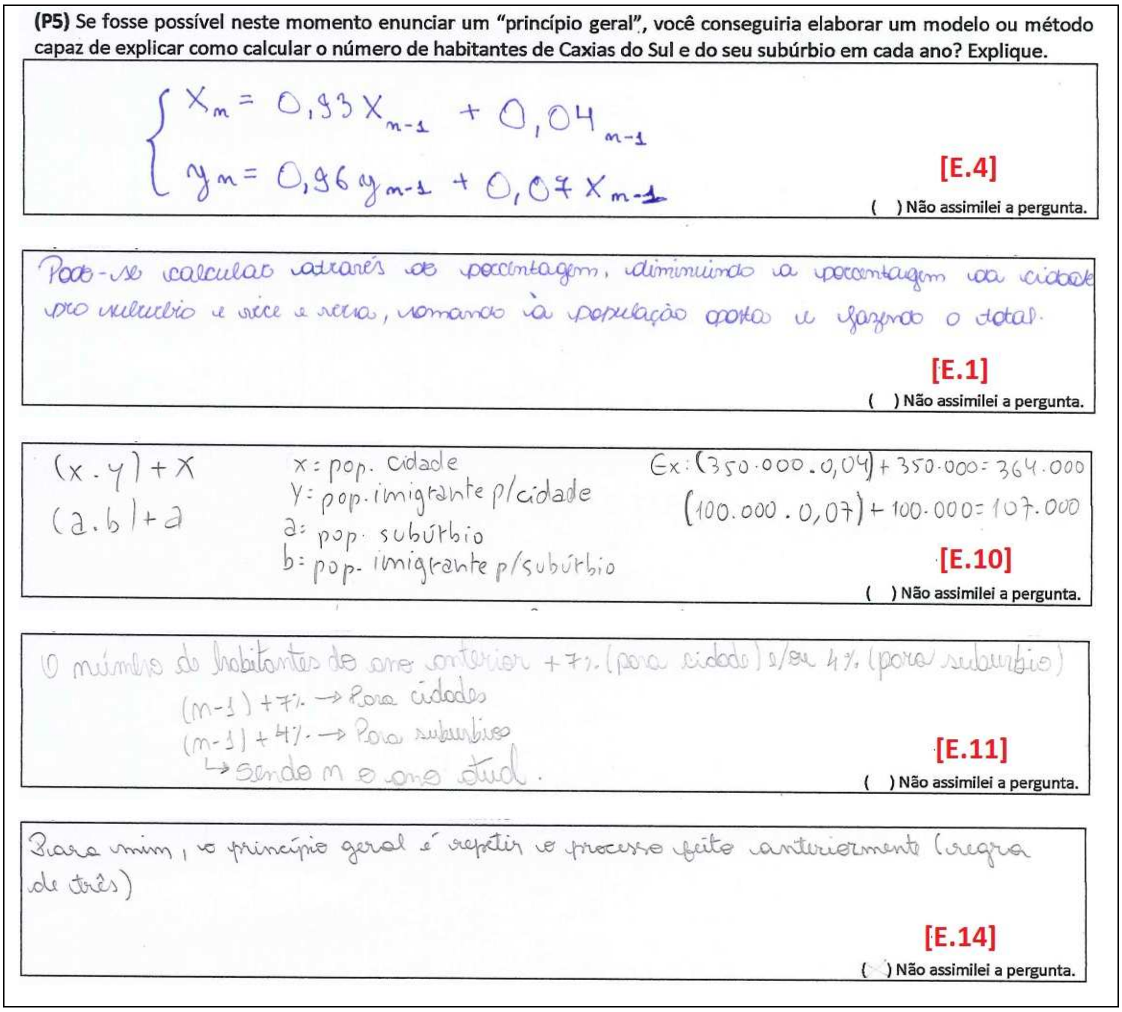


Figura 29 – Exemplos de enunciado para o "princípio geral". Fonte: arquivo pessoal.

Logo, através do resultado manifestado pelos estudantes foi possível perceber diferentes caminhadas percorridas por estes ao longo de um processo individual de aprendizagem. Tal como mencionado nas análises do experimento anterior, diferentes noções e percepções sobre generalidades surgiram nas respostas dos estudantes, reafirmando nossa discussão feita até agora, a qual atribui qualidade na expressão do pensamento, como sendo o produto de uma construção gradual e sucessiva, própria da atividade cognitiva do sujeito.

5.2.1.2 – Conhecendo o objeto virtual – 2º Dia

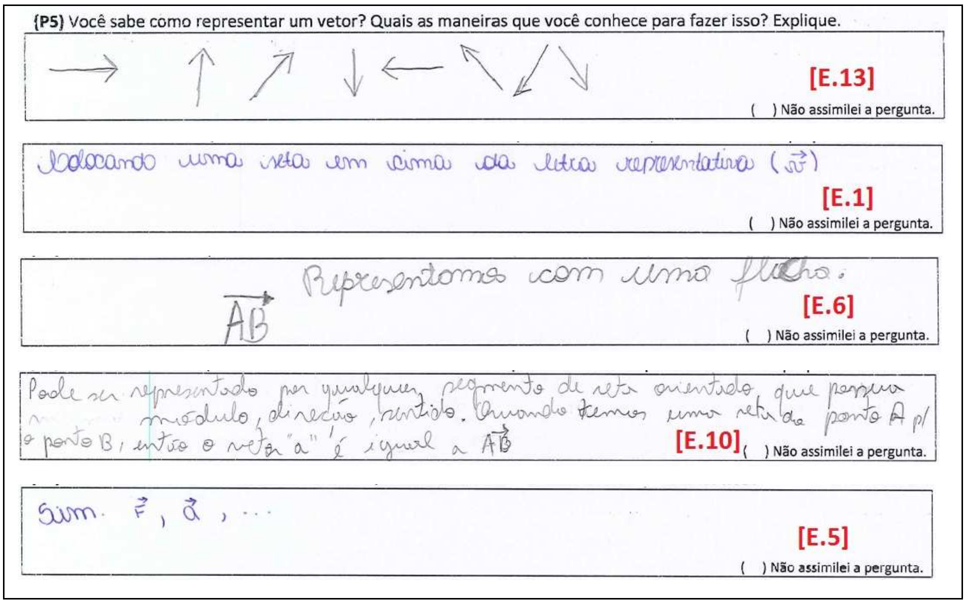
A organização das atividades neste dia ocorreu de forma que os estudantes acessaram e desenvolveram as atividades usando o objeto virtual publicado no repositório GeoGebratube. Não ocorreram falhas no serviço e disponibilidade da internet, tornando possível o acesso ao objeto virtual durante praticamente todo o período de uma hora e quarenta minutos em que os estudantes estavam no laboratório de informática.

As atividades propostas no segundo dia retomavam algumas questões envolvendo o estudo de matrizes e suas operações, vetor e escala. O uso do objeto virtual ocorreu de duas formas caracterizadas como distintas. Em um momento inicial os estudantes exploraram as funcionalidades do objeto e aprenderam como ocorreria o seu funcionamento. Exploraram ainda como a mudança dos parâmetros disponíveis era possível de ser feita e quais as implicações das mudanças na visualização geométrica do resultado. O segundo momento de exploração do objeto virtual foi orientado pelos questionamentos propostos, onde foi possível verificar a construção ou reconstrução de alguns conceitos matemáticos, tais como: matrizes e suas operações, vetor e escala. Dois aspectos observados nas atividades deste segundo dia serão explorados a partir de agora no texto.

Um primeiro aspecto a ser destacado das atividades realizadas neste dia foi quanto às respostas da turma ao questionamento sobre a possível "representação" do vetor. Foi unânime o testemunho dos estudantes de que nas aulas de física o assunto havia sido tratado. O que merece destaque é a *diversidade nas formas de representação* que fazem algum sentido e contribuem na consolidação desse conceito para cada sujeito. Se fôssemos iniciar qualquer discussão sobre vetores, provavelmente devêssemos iniciar com uma abordagem envolvendo *grandezas*. E mais adiante na discussão chegaria o ponto de dizer que vetor é uma classe de equipolência[34] de segmentos de retas orientados todos os quais devem ter uma intensidade, uma direção e um sentido.

Em primeiro lugar, a representação de um conceito não é o próprio conceito; além disso, ela é própria de cada indivíduo. Segundo, é possível que a diferenciação ocorra devido ao trabalho cognitivo de cada indivíduo na direção da construção de determinado conceito. Logo, quanto a uma possível representação para o conceito de vetor explicitado pelos estudantes os resultados manifestados foram: flechas com direção e sentido definidos; flecha escrita sobre determinada letra e segmento de reta orientado entre dois pontos. Exemplos de representações podem ser vistos na figura 30 a seguir.

[34] Segundo o dicionário Michaelis (online) *eqüipolência* é um substantivo feminino e significa "qualidade daquilo que é eqüipolente; equivalência". Disponível em: http://michaelis.uol.com.br/moderno/portugues/index.php?lingua=portugues-portugues&palavra=equipol%EAncia


(P5) Você sabe como representar um vetor? Quais as maneiras que você conhece para fazer isso? Explique.

[E.13] ( ) Não assimilei a pergunta.

Colocando uma seta em cima da letra representativa ($\vec{u}$)

[E.1] ( ) Não assimilei a pergunta.

Representamos com uma flecha. $\overrightarrow{AB}$

[E.6] ( ) Não assimilei a pergunta.

Pode ser representado por qualquer segmento de reta orientado que possua módulo, direção, sentido. Quando temos uma reta do ponto A p/ o ponto B, então o vetor "a" é igual a $\overrightarrow{AB}$

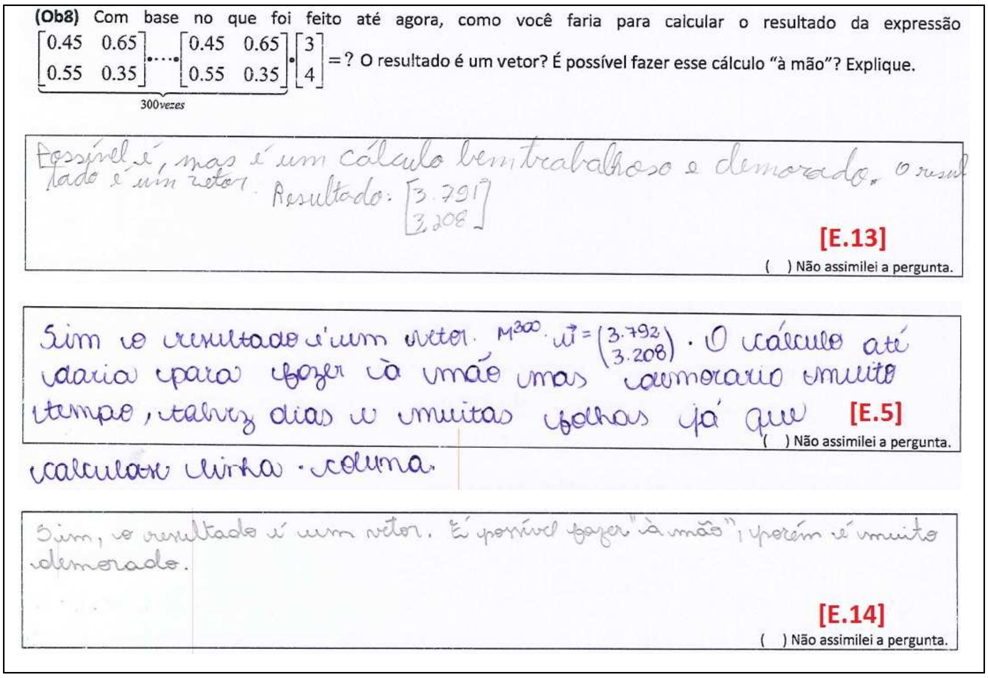
[E.10] ( ) Não assimilei a pergunta.

Sim. $\vec{F}$, $\vec{a}$, ...

[E.5] ( ) Não assimilei a pergunta.

Figura 30 – Representações para vetor, segundo os estudantes. Fonte: arquivo pessoal.

O segundo aspecto observado neste dia foi sobre a realização da operação envolvendo o produto de matrizes fazendo uso do objeto virtual. Contatou-se que os estudantes, em sua maioria, indicaram a possibilidade de fazer o cálculo à mão, sendo apenas “muito demorado”. Infere-se que para tal afirmação ser construída, previamente tenha ocorrido um exercício reflexivo por parte do sujeito, uma vez que ao arquitetar e projetar o cálculo que deveria ser feito, o mesmo observa que o objeto virtual facilita e viabiliza a operação aritmética. A figura 31 ilustra com exemplos o dito neste parágrafo.


(Ob8) Com base no que foi feito até agora, como você faria para calcular o resultado da expressão $\underbrace{\begin{bmatrix} 0.45 & 0.65 \\ 0.55 & 0.35 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 0.45 & 0.65 \\ 0.55 & 0.35 \end{bmatrix}}_{300\,vezes} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = ?$ O resultado é um vetor? É possível fazer esse cálculo “à mão”? Explique.

Possível é, mas é um cálculo bem trabalhoso e demorado. O resultado é um vetor. Resultado: $\begin{bmatrix} 3,791 \\ 3,208 \end{bmatrix}$

[E.13] ( ) Não assimilei a pergunta.

Sim o resultado é um vetor. $M^{300} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 3.792 \\ 3.208 \end{pmatrix}$. O cálculo até daria para fazer à mão mas demoraria muito tempo, talvez dias e muitas folhas já que calcular linha · coluna.

[E.5] ( ) Não assimilei a pergunta.

Sim, o resultado é um vetor. É possível fazer "à mão", porém é muito demorado.

[E.14] ( ) Não assimilei a pergunta.

Figura 31 – Cálculos de potência envolvendo matrizes. Fonte: arquivo pessoal.

5.2.1.3 – Retomando a problemática inicial – 3º Dia

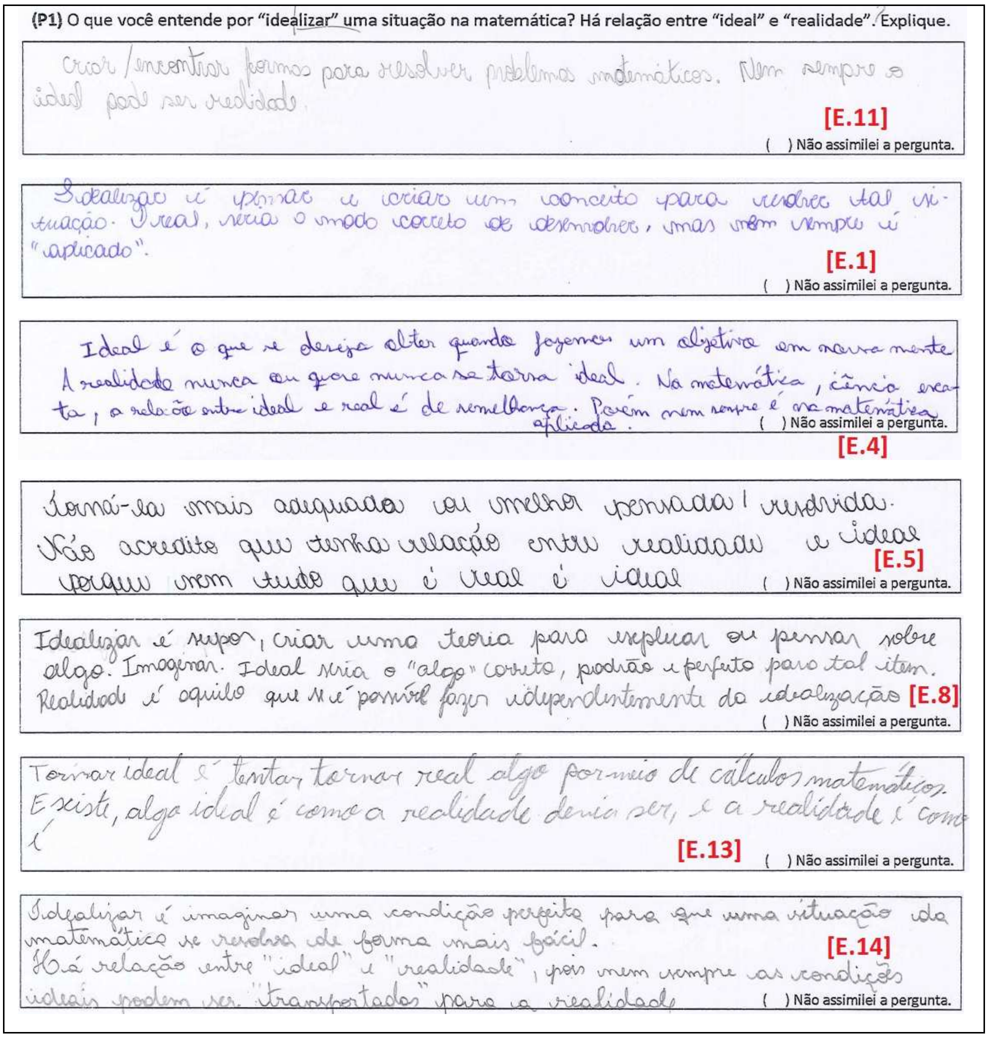
A aula deste dia ocorreu no laboratório de informática da instituição e as atividades propostas foram organizadas em três momentos distintos. Primeiramente, fez-se uma reflexão sobre o que seria "idealizar" em matemática. Os estudantes foram questionados se existia alguma relação entre ideal e realidade, sendo necessário que eles explicassem de forma argumentativa sobre isto. No segundo momento, ocorreu a retomada do problema apresentado no primeiro dia, sendo agora analisado utilizando possivelmente sistemas de equações lineares. Usou-se o objeto virtual para produzir algumas novas estimativas, para que pudessem ser comparadas com as estimativas produzidas no primeiro dia. Ainda neste segundo momento foi oportunizada a discussão sobre a construção de um possível modelo matemático que pudesse fornecer as estimativas em qualquer ano. E por fim, o terceiro momento do encontro foi destinado à discussão dos conceitos presentes até então no estudo: Cadeias de Markov, probabilidade, vetor de probabilidade e matriz estocástica.

Destaca-se que a organização metodológica das atividades destinadas para este encontro não permitiu que de forma satisfatória fosse realizado o terceiro momento, sendo assim, foi necessário que este tivesse que ser retomado no início do quarto dia de atividades. Nossa análise para este dia concentra-se então sobre os dois momentos iniciais do planejamento.

O questionamento envolvendo *ideal* e *realidade* possibilitou que inúmeras argumentações fossem produzidas pelos estudantes. No capítulo sobre modelagem matemática, fez-se uma discussão sobre possíveis relações entre matemática e realidade. Retomaremos alguns destes aspectos antes de avançar a discussão. Skovsmose (2007) apresenta três ideias que se interligam na tentativa de compreensão da realidade através da matemática:

> A matemática fornece a possibilidade para *raciocínio hipotético* (grifo do autor), pelo que eu me refiro à análise de conseqüências de um cenário imaginário. Por meio da matemática parecemos aptos a investigar detalhes particulares de um projeto ainda não realizado. Assim a matemática constitui um instrumento importante para levar adiante o experimento mental detalhado. (SKOVSMOSE, 2007, p.124)
> *Por meio da matemática é possível investigar detalhes particulares de uma situação hipotética, embora a matemática também cause severas limitações para tal raciocínio hipotético* (grifo do autor). Qualquer projeto tecnológico tem implicações não identificadas pelo raciocínio hipotético. Esse é um problema básico relacionado a qualquer tipo de investigação de contrafatos baseada matematicamente. (SKOVSMOSE, 2007, p.125)
> (...) Isso nos leva a um terceiro aspecto da matemática em ação. Este aspecto concerne à compreensão: *a matemática embasa a modulação e constituição de uma ampla variedade de fenômenos sociais e, desse modo, ela se torna parte da realidade* (grifo do autor). Vivemos em um ambiente que integra uma realidade virtual fundamentada no modelo a uma realidade já construída em uma mistura formidável. (SKOVSMOSE, 2007, p.127)

A intencionalidade do autor nas passagens anteriores é delinear a ação do sujeito diante de uma realidade complexa para compreendê-la. O autor reflete que apesar das limitações impostas pela grande quantidade de variáveis presentes na realidade, não permitindo que seja possível uma compreensão total máxima, pode ser através da matemática que se torna possível construir modelos que de alguma forma permitem compreender parte da realidade.


(P1) O que você entende por "idealizar" uma situação na matemática? Há relação entre "ideal" e "realidade". Explique.

Criar/encontrar formas para resolver problemas matemáticos. Nem sempre o ideal pode ser realidade.
[E.11]
( ) Não assimilei a pergunta.

Idealizar é tomar e criar um conceito para resolver tal situação. O real, seria o modo correto de desenvolver, mas nem sempre é "aplicado".
[E.1]
( ) Não assimilei a pergunta.

Ideal é o que se deseja obter quando fazemos um objetivo em nossa mente. A realidade nunca ou quase nunca se torna ideal. Na matemática, ciência exata, a relação entre ideal e real é de semelhança. Porém nem sempre é na matemática aplicada.
( ) Não assimilei a pergunta.
[E.4]

Torná-la mais adequada ou melhor pensada/resolvida. Não acredito que tenha relação entre realidade e ideal porque nem tudo que é real é ideal
[E.5]
( ) Não assimilei a pergunta.

Idealizar é supor, criar uma teoria para explicar ou pensar sobre algo. Imaginar. Ideal seria o "algo" correto, padrão e perfeito para tal item. Realidade é aquilo que se é possível fazer independentemente da idealização
[E.8]
( ) Não assimilei a pergunta.

Tornar ideal é tentar tornar real algo por meio de cálculos matemáticos. Existe, algo ideal é como a realidade deveria ser, e a realidade é como é
[E.13]
( ) Não assimilei a pergunta.

Idealizar é imaginar uma condição perfeita para que uma situação da matemática se resolva de forma mais fácil. Há relação entre "ideal" e "realidade", pois nem sempre as condições ideais podem ser "transportados" para a realidade
[E.14]
( ) Não assimilei a pergunta.

Figura 32 – Exemplos do que é "idealizar" segundo os estudantes. Fonte: arquivo pessoal.

Logo, ao pensar em uma possível diferenciação entre ideal e realidade nos embasamos nas ideias de Skovsmose (2007), as quais afirmam que diante de uma quantidade indefinida de variáveis presentes nos fenômenos da realidade, na construção de possíveis modelos, através da matemática, faz-se um recorte sobre o que realmente esteja acontecendo. Tal construção de modelos permite que o fenômeno não seja compreendido em sua totalidade e complexidade, mas apenas de maneira parcial. Isso influencia, ainda segundo o autor, o desenvolvimento do raciocínio hipotético nas suas análises sobre as possíveis consequências do modelo construído e constitui um importante exercício de experimentação mental. Com o questionamento presente na nossa atividade, a proposta era que os estudantes refletissem e argumentassem sobre o seu entendimento de ideal e também sobre possíveis convergências ou divergências entre ideal e realidade. Exemplos das manifestações dos estudantes foram mostradas anteriormente na figura 32.

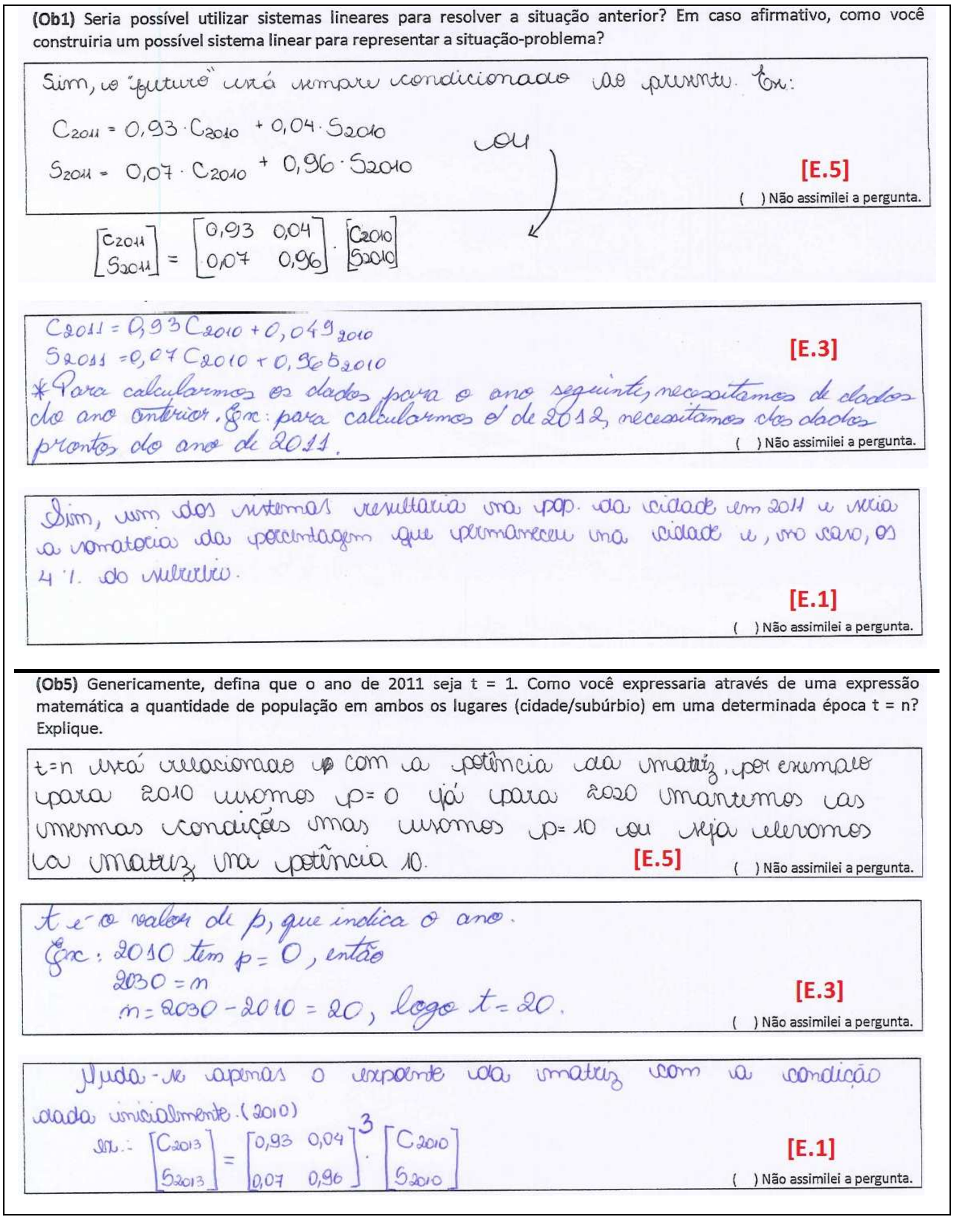
O segundo ponto a ser analisado agora é referente à retomada na discussão da situação-problema apresentada no primeiro dia de atividades, com um olhar utilizando possivelmente sistemas de equações lineares. Neste momento usou-se o objeto virtual para produzir novas estimativas que pudessem ser comparadas com as estimativas produzidas no primeiro dia de atividades. Ainda se observou a construção pelos estudantes de um possível modelo matemático que pudesse fornecer as estimativas em qualquer ano.

Sobre o uso de sistemas de equações lineares para a construção de uma possível solução da situação-problema, alguns aspectos observados devem ser ponderados: (1) a percepção dos estudantes que a situação-problema idealizada consistia uma iteração, mesmo que inicialmente não fosse possível descrever matematicamente uma solução; (2) ao descrever os passos da iteração foi evidenciado por parte dos estudantes que o conteúdo de sistemas lineares poderia ser utilizado na construção da possível solução; (3) da discussão coletiva com a turma sobre possíveis relações entre duas iterações sucessivas, os estudantes inferiram que o produto de matrizes seria uma operação utilizada para alcançar tal objetivo; (4) pelo uso do objeto virtual foi possível depois de compreendido o mecanismo de funcionamento das iterações, fossem produzidas novas estimativas que pudessem ser comparadas com as construídas na primeira aula.

Na fundamentação teórica afirmamos que a tomada de consciência não deva ser considerada um processo apenas em conseqüência da ação do sujeito sobre o objeto, mas sim como uma complexa reorganização de suas estruturas de pensamento provinda da criação de novos esquemas assimiladores e do aperfeiçoamento da regulação ativa. Ao longo do processo é fundamental observar também que a retirada de informações da ação, a organização das informações obtidas na ação e os equilíbrios/desequilíbrios parciais ocorridos contribuem para a tomada de consciência. Na ocasião, através do esboço de um gráfico cartesiano não linear (figura 10), ilustramos como a evolução da ação e das coordenações elaboradas pelo sujeito conduz à reorganização das estruturas de pensamento e consequentemente à evolução dos níveis da tomada de consciência.

Diante disso, constatou-se pela produção dos estudantes que a construção/reconstrução das ideias envolvendo a compreensão da situação-problema foi gradual e consequência de um trabalho cognitivo por parte de cada sujeito envolvido. Da discussão sobre as possíveis relações entre duas iterações sucessivas surgiu uma conclusão plausível da turma: o fato que relaciona duas iterações consecutivas, se mantidas as condições iniciais e ideias, então relacionará sempre duas etapas do processo, independente de qual o tempo que for olhado. O que foi feito, em termos de organização do pensamento, foi considerar que se o sistema mantivesse as condições inalteradas, a partir da construção de hipóteses poderiam ser estimados números populacionais independentes do tempo que fossem observados.

Por fim, merece destaque a discussão coletiva mencionada em (3). A discussão oportunizou que os estudantes refletissem sobre a influência e importância da operação potência de matriz na construção de uma solução para a situação-problema. A partir de uma discussão feita de modo breve sobre sistemas lineares e suas implicações entre duas iterações sucessivas os estudantes inferiram que se "olhassem de volta para trás" no processo poderiam talvez construir um modelo matemático que dependesse das condições iniciais fornecidas no problema. Afirma-se que esta organização/reorganização do pensamento tenha ocorrido devido a um esforço cognitivo individual proveniente da capacidade reflexiva do sujeito, a qual em virtude da evolução nos níveis de abstração; enquanto reflexionante; interfere positivamente e melhora qualitativamente as formas de pensamento do sujeito. Na figura 33 mostram-se exemplos de construções por parte dos estudantes.



(Ob1) Seria possível utilizar sistemas lineares para resolver a situação anterior? Em caso afirmativo, como você construiria um possível sistema linear para representar a situação-problema?

Sim, o "futuro" será sempre condicionado ao presente. Ex:

$C_{2011} = 0{,}93 \cdot C_{2010} + 0{,}04 \cdot S_{2010}$

$S_{2011} = 0{,}07 \cdot C_{2010} + 0{,}96 \cdot S_{2010}$ ou

$\begin{bmatrix} C_{2011} \\ S_{2011} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}93 & 0{,}04 \\ 0{,}07 & 0{,}96 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_{2010} \\ S_{2010} \end{bmatrix}$

[E.5]

( ) Não assimilei a pergunta.

$C_{2011} = 0{,}93 C_{2010} + 0{,}04 S_{2010}$

$S_{2011} = 0{,}07 C_{2010} + 0{,}96 S_{2010}$

* Para calcularmos os dados para o ano seguinte, necessitamos de dados do ano anterior. Ex: para calcularmos o de 2012, necessitamos dos dados prontos do ano de 2011.

[E.3]

( ) Não assimilei a pergunta.

Sim, um dos sistemas resultaria na pop. da cidade em 2011 e seria a somatória da porcentagem que permaneceu na cidade e, no caso, os 4 %. do subúrbio.

[E.1]

( ) Não assimilei a pergunta.

(Ob5) Genericamente, defina que o ano de 2011 seja t = 1. Como você expressaria através de uma expressão matemática a quantidade de população em ambos os lugares (cidade/subúrbio) em uma determinada época t = n? Explique.

t=n está relacionado com a potência da matriz, por exemplo para 2010 usamos p= 0 já para 2020 mantemos as mesmas condições mas usamos p= 10 ou seja elevamos a matriz na potência 10.

[E.5]

( ) Não assimilei a pergunta.

t é o valor de p, que indica o ano.

Ex: 2010 tem p = 0, então

2030 = n

n = 2030 − 2010 = 20, logo t = 20.

[E.3]

( ) Não assimilei a pergunta.

Muda-se apenas o expoente da matriz com a condição dada inicialmente. (2010)

ex.: $\begin{bmatrix} C_{2013} \\ S_{2013} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}93 & 0{,}04 \\ 0{,}07 & 0{,}96 \end{bmatrix}^3 \cdot \begin{bmatrix} C_{2010} \\ S_{2010} \end{bmatrix}$

[E.1]

( ) Não assimilei a pergunta.

Figura 33 – Construções de modelos por estudantes. Fonte: arquivo pessoal.

5.2.1.4 – Avançando no estudo da Cadeia de Markov – 2D – 4º Dia

Após um estudo mais detalhado envolvendo a situação-problema inicial sobre fluxo de migração entre dois lugares, a discussão prevista para o terceiro momento do dia anterior ocorreu no início do quarto dia de atividades. O momento inicial do encontro foi destinado à discussão dos seguintes conceitos inerentes ao estudo: Cadeias de Markov, probabilidade, vetor de probabilidade e matriz estocástica. Acredita-se que as atividades realizadas nas três aulas anteriores convergiram para a construção da ideia seguinte, mostrada na figura 34.

> *"Uma **Cadeia de Markov** é um **sistema dinâmico** no qual os **vetores** de estado em uma sucessão de intervalos de tempo são **vetores de probabilidade** e cada um dos vetores de estado na sucessão dos intervalos de tempo é obtido por uma equação da forma $\vec{u}(k+1)=P.\vec{u}(k)$ onde $P=\left[p_{ij}\right]$ é uma **matriz estocástica** e p_{ij} é a **probabilidade** do sistema estar no estado i no tempo $t=k+1$ e no estado j no tempo $t=k$. A matriz P é chamada de matriz de transição para o sistema." (Anton e Busby, 2003, p.228, tradução nossa)*

Figura 34 – O conceito de Cadeia de Markov. Fonte: arquivo pessoal.

A presença de um conceito apenas na quarta aula sobre o que estávamos abordando desde o primeiro encontro causou surpresa por parte dos estudantes. Do ponto de vista dos estudantes pareceu que toda a construção conceitual tinha sido produzida gradualmente ao longo das três primeiras aulas, porém sem fazer a referência propriamente dita aos conceitos do que se estava tratando, ou ainda, ter iniciado uma possível discussão sobre a situação-problema a partir da apresentação do conceito. O reconhecimento, por parte dos estudantes, de que "chegar" ao conceito invertendo-se os papéis em sala de aula tenha sido mais benéfico do que através de um encaminhamento contrário, em que no primeiro se apresenta a definição e o conceito, e somente depois estes são aplicados em algumas situações, me fez acreditar enquanto pesquisador, que minha intervenção estava fazendo sentido e contribuindo para a construção de inúmeros significados para cada estudante.

A partir da definição discutida (figura 34), os estudantes puderam identificar e rotular os elementos que já faziam parte de seu estudo, tais como: probabilidade, vetores de probabilidade e matriz estocástica. Foi oportunizado também que por meio do conceito discutido, os estudantes compreendessem o significado de cada entrada da matriz estocástica como sendo a probabilidade (ou chance de ocorrência) de uma possível mudança (ou não) de estado do sistema entre dois instantes de tempo sucessivos.

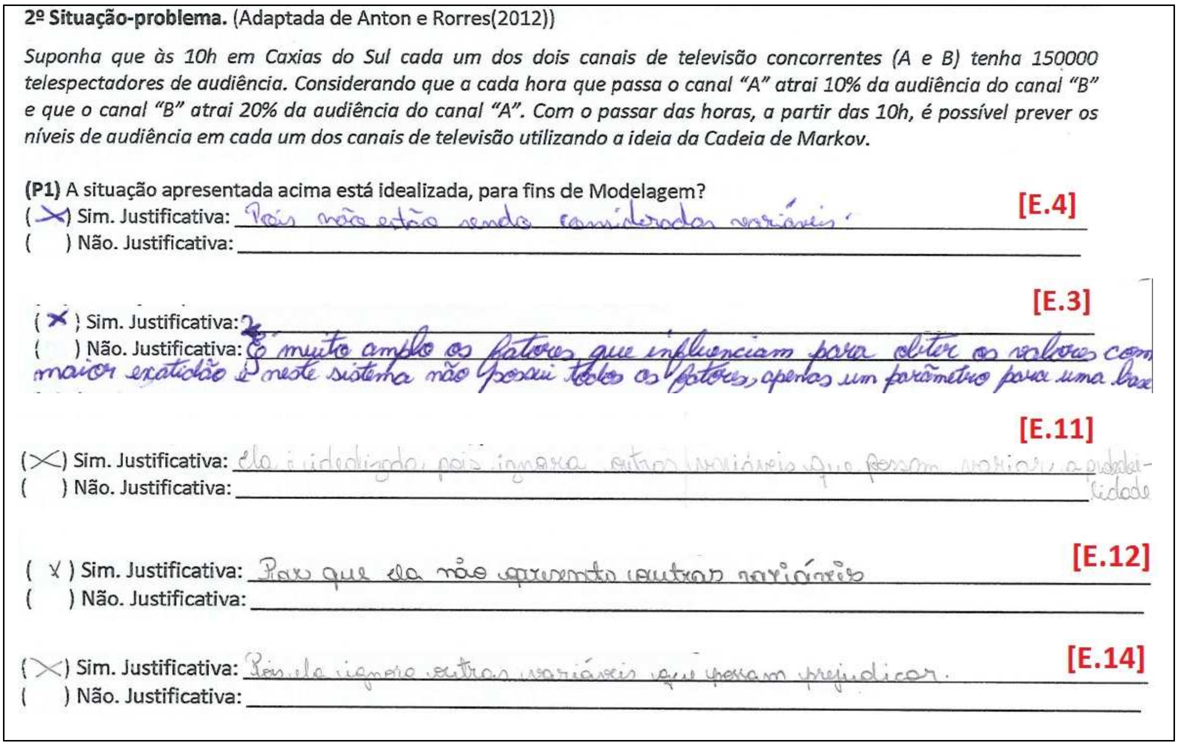
Após a identificação na situação-problema inicial dos elementos apresentados através do conceito discutido, fazendo uso do objeto virtual os estudantes puderam inferir sobre uma possível estabilidade da situação-problema. Tratava-se da verificação e construção de uma possível solução estacionária, ou de equilíbrio para o fenômeno. Apesar dos estudantes não terem o conhecimento de álgebra linear, o qual possibilitaria que eles de fato obtivessem matematicamente o vetor estacionário para a situação-problema, fazendo uso do objeto virtual eles puderam construir hipóteses satisfatórias sobre qual poderia ser o vetor estacionário.

Na elaboração da hipótese do vetor estacionário algumas considerações envolvendo o seu processo de construção são necessárias. Primeiramente, os estudantes do ensino médio envolvidos no segundo experimento didático não realizaram anteriormente algum curso de álgebra linear onde tivessem sido discutidos conceitos necessários para a construção do vetor estacionário, tais como: autovalor, autovetor e autoespaço. Portanto, acredita-se que seja válido, a partir da experimentação via mudança de parâmetros no objeto virtual, que eles construíssem alguma hipótese sobre o possível vetor estacionário. Segundo, ao construir a hipótese sobre um possível vetor estacionário, uma estratégia utilizada pelo grupo foi observar a evolução dos resultados por meio da representação geométrica. Quando a representação geométrica do vetor ficava praticamente "parada", não se movimentando mais, os estudantes inferiram que aquele seria um possível vetor estacionário. Tratou-se, portanto de um processo de construção envolvendo a noção intuitiva de limite, assunto também não conhecido pelos sujeitos analisados no segundo experimento.

A construção do vetor estacionário através da noção intuitiva de limite nos remete à discussão que fizemos antes sobre a capacidade do sujeito que diante de um desafio imposto pelo objeto, seja capaz de se mobilizar na direção da criatividade. Conforme já discutido, as regulações ativas desempenham uma função essencial no processo da abstração e da tomada de consciência, uma vez que elas constituem uma atividade genuína de criação do sujeito e contribuem na construção dos conceitos. Logo, inferimos que estes estudantes do ensino médio envolvidos nas atividades ao se depararem com uma imposição do objeto, vislumbraram na noção intuitiva de limite uma possibilidade de construir o vetor estacionário.

Após o encerramento da discussão envolvendo o fluxo migratório entre Caxias do Sul (RS) e seu subúrbio apresentamos uma segunda situação-problema, que envolvia o estudo dos níveis de audiência dos canais de televisão concorrentes (A e B). Nesta segunda situação apresentada, além dos questionamentos iniciais envolvendo algumas estimativas seguidas de suas análises e a construção do possível modelo matemático que pudesse ser usado para estimativas em unidades de tempo arbitrárias os estudantes também foram questionados sobre uma possível "idealização" da situação.

As respostas informadas convergiram para o "sim" e as justificativas foram fundamentadas essencialmente na ideia de que uma situação real deva ter uma quantidade enumerável e indefinida de variáveis que não estão sendo consideradas no problema apresentado. Considera-se que essa percepção da complexidade que envolve a realidade seja proveniente do exercício reflexivo realizado pelo sujeito ao organizar o pensamento. Muito possivelmente a "descoberta" disso, própria de cada sujeito, seja consequência de uma evolução progressiva da abstração acompanhada da tomada de consciência. Ao dar-se conta que a construção de possíveis modelos matemáticos está relacionada com a construção de um número finito de hipóteses sobre o fenômeno e também com uma quantidade de variáveis enumerável, o sujeito "descobre"[35] para si o quanto é complexa a realidade. Na figura 35 mostramos alguns exemplos sobre o que se discutiu nos últimos parágrafos.


2º Situação-problema. (Adaptada de Anton e Rorres(2012))

Suponha que às 10h em Caxias do Sul cada um dos dois canais de televisão concorrentes (A e B) tenha 150000 telespectadores de audiência. Considerando que a cada hora que passa o canal "A" atrai 10% da audiência do canal "B" e que o canal "B" atrai 20% da audiência do canal "A". Com o passar das horas, a partir das 10h, é possível prever os níveis de audiência em cada um dos canais de televisão utilizando a ideia da Cadeia de Markov.

(P1) A situação apresentada acima está idealizada, para fins de Modelagem?

[E.4]
(X) Sim. Justificativa: Pois não estão sendo consideradas variáveis.
(   ) Não. Justificativa:

[E.3]
(X) Sim. Justificativa:
(   ) Não. Justificativa: É muito amplo os fatores que influenciam para obter os valores com maior exatidão e neste sistema não possui todos os fatores, apenas um parâmetro para uma base

[E.11]
(X) Sim. Justificativa: ela é idealizada, pois ignora outras variáveis que possam variar a probabilidade
(   ) Não. Justificativa:

[E.12]
(X) Sim. Justificativa: Pois que ela não apresenta outras variáveis
(   ) Não. Justificativa:

[E.14]
(X) Sim. Justificativa: Pois ela ignora outras variáveis que possam prejudicar.
(   ) Não. Justificativa:

Figura 35 – Segunda situação-problema e sua possível idealização. Fonte: arquivo pessoal.

5.2.1.5 – Exercitando – 5º Dia

No último dia de atividades com os estudantes do ensino médio foi realizada uma proposta que também seria usada como um dos instrumentos de avaliação para o segundo trimestre da instituição. A proposta consistia em analisar uma terceira situação-problema (figura 36), à luz dos conceitos construídos ao longo das quatro primeiras aulas e também fazendo uso do objeto virtual Cadeias de Markov – 2D. A atividade explorava e retomava as ideias e conceitos desenvolvidos ao longo dos dias anteriores, tais como: vetores de probabilidade, matrizes estocásticas e vetor estacionário. Os conceitos de escala, matriz e probabilidade também foram usados de modo implícito durante a exploração da situação problema proposta.

[35] Usam-se aspas nessa palavra para designar uma descoberta que não tenha sido porque retirou "a cobertura sobre algo que existia antes" e sim para designar uma "organização/reorganização, reconstrução" característica do sujeito pela sua própria atividade cognitiva.

(Adaptada de Anton e Rorres (2012))

Observe a seguinte situação-problema.

Em estações de medições da qualidade do ar nas cidades é possível através de medições e suas análises inferirmos sobre a qualidade do ar "respirado" pelos habitantes da cidade. Em Caxias do Sul verificou-se através da observação e análise de alguns registros empíricos que se em determinado dia a qualidade do ar é boa, então existe uma chance de 90% de que venha a ser boa a qualidade do ar no próximo dia. No estudo verificou-se também que se a qualidade do ar é ruim em determinado dia então existe uma chance de 45% de que a qualidade do ar venha ser ruim também no próximo dia. Nota-se que a qualidade do ar respirado hoje (17/06/2015) é boa, então qual a probabilidade do ar respirado também ser boa daqui 8 dias?

Figura 36 – Terceira situação-problema. Fonte: arquivo pessoal.

O que se percebeu no quinto dia é que a construção de um possível modelo matemático pelos estudantes esteve relacionada com o desenvolvimento das atividades realizadas nos quatro dias anteriores do experimento. Ou seja, os conceitos e ideias construídos e desenvolvidos anteriormente foram mobilizados e utilizados no quinto dia de atividades na tentativa de solucionar a situação problema. O potencial evidenciado na aplicação de uma sequência de atividades com estudantes do ensino médio que envolvia a modelagem matemática de situações fazendo uso das Cadeias de Markov é reforçado nas palavras de Silva *et al* (2015), o qual os autores dissertam:

> "(...) considera-se que uma abordagem interdisciplinar de conteúdos potencializa o desenvolvimento cognitivo dos sujeitos envolvidos. Ao propor o estudo de conceitos matemáticos que são necessários na compreensão de fenômenos em outras áreas do conhecimento, os estudantes estabelecem relações, constroem e reconstroem conceitos, formulam e reformulam hipóteses, enfim, aumentam a sua capacidade reflexiva sobre determinado assunto, proporcionando assim a construção de diversos conceitos de matemática de forma à melhor compreender o mundo que os cerca." (SILVA *et al*, 2015, p.10)

Ao fazer uso do objeto virtual, os estudantes por meio de suas ações e coordenações de ações puderam construir/reconstruir, validar/revalidar as próprias hipóteses e assim argumentar sobre a situação. Como já abordamos no capítulo de fundamentação teórica, a tecnologia digital surge neste caso como uma aliada para os cálculos exaustivos e extensos, cabendo ao sujeito dedicar-se a compreensão dos conceitos e ideias que estão em discussão. Exemplos da construção de modelos pelos estudantes podem ser vistos nas figuras a seguir.

(Q4) Mantidas as condições *ideiais* para a situação-problema e supondo que seja usada como condição inicial $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ para representar o dia (17/06/2015), no qual a qualidade do ar que se está respirando é **boa**, você consegue expressar através de um modelo matemático, ou regra genérica uma maneira que possa ser usada para estimar da qualidade do ar na cidade de Caxias do Sul ao longo dos demais dias? Explique.

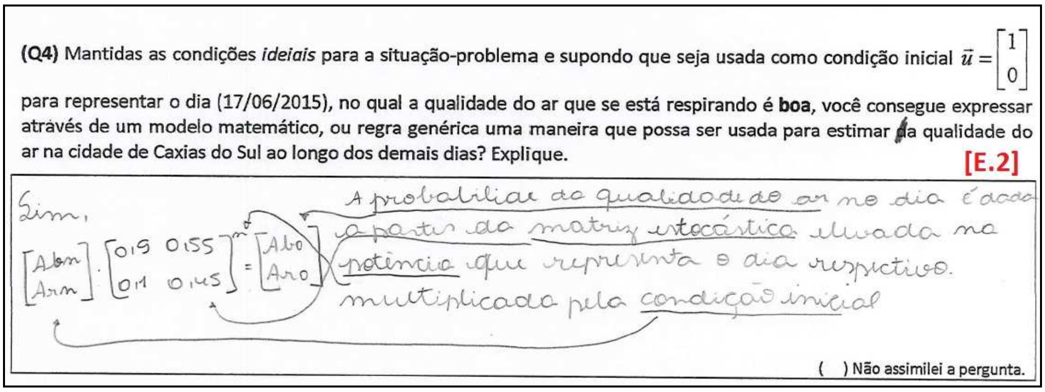
[E.3]

Sim, se usa a matriz que foi encontrada pelos valores informados no início do exercício, assim a matriz foi multiplicada pelo o expoente que foi encontrado a partir da informação da data 17/06 sendo $p=0$ e multiplicada pela condição inicial que foi dada no exercício. Assim,

$M = \begin{bmatrix} 0{,}9 & 0{,}55 \\ 0{,}1 & 0{,}45 \end{bmatrix}$ • M^p, que é $17/06 = p = 0$, para outras datas $x - 17 = $ valor p • $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ para ruim (dia) ou $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ para bom (dia)

( ) Não assimilei a pergunta.

Figura 37 – Modelo produzido pelo estudante [E.3]. Fonte: arquivo pessoal.


(Q4) Mantidas as condições *ideiais* para a situação-problema e supondo que seja usada como condição inicial $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ para representar o dia (17/06/2015), no qual a qualidade do ar que se está respirando é **boa**, você consegue expressar através de um modelo matemático, ou regra genérica uma maneira que possa ser usada para estimar da qualidade do ar na cidade de Caxias do Sul ao longo dos demais dias? Explique.

[E.2]

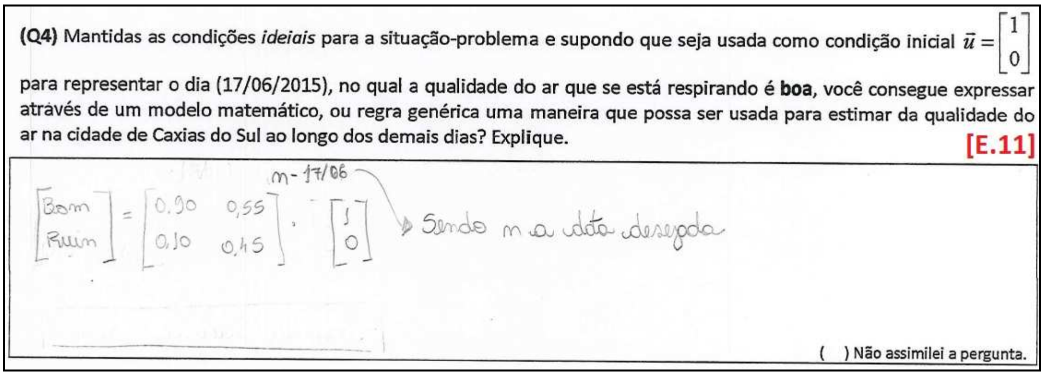
Sim,

$$\begin{bmatrix} Abm \\ Arm \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,9 & 0,55 \\ 0,1 & 0,45 \end{bmatrix}^m = \begin{bmatrix} Abo \\ Aro \end{bmatrix}$$

A probabilidade da qualidade do ar no dia é dada a partir da matriz estocástica elevada na potência que representa o dia respectivo. multiplicada pela condição inicial

( ) Não assimilei a pergunta.

Figura 38 – Modelo produzido pelo estudante [E.2]. Fonte: arquivo pessoal.


(Q4) Mantidas as condições *ideiais* para a situação-problema e supondo que seja usada como condição inicial $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ para representar o dia (17/06/2015), no qual a qualidade do ar que se está respirando é **boa**, você consegue expressar através de um modelo matemático, ou regra genérica uma maneira que possa ser usada para estimar da qualidade do ar na cidade de Caxias do Sul ao longo dos demais dias? Explique.

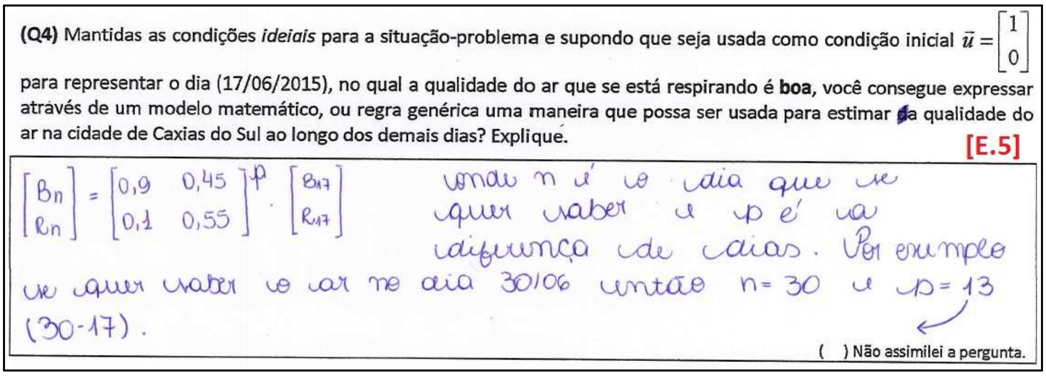
[E.11]

$$\begin{bmatrix} Bom \\ Ruim \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,90 & 0,55 \\ 0,10 & 0,45 \end{bmatrix}^{m-17/06} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sendo m a data desejada

( ) Não assimilei a pergunta.

Figura 39 – Modelo produzido pelo estudante [E.11]. Fonte: arquivo pessoal.


(Q4) Mantidas as condições *ideiais* para a situação-problema e supondo que seja usada como condição inicial $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ para representar o dia (17/06/2015), no qual a qualidade do ar que se está respirando é **boa**, você consegue expressar através de um modelo matemático, ou regra genérica uma maneira que possa ser usada para estimar da qualidade do ar na cidade de Caxias do Sul ao longo dos demais dias? Explique.

[E.5]

$$\begin{bmatrix} B_n \\ R_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,45 \\ 0,1 & 0,55 \end{bmatrix}^p \cdot \begin{bmatrix} B_{17} \\ R_{17} \end{bmatrix}$$

onde n é o dia que se quer saber e p é a diferença de dias. Por exemplo se quer saber o ar no dia 30/06 então n = 30 e p = 13 (30-17).

( ) Não assimilei a pergunta.

Figura 40 – Modelo produzido pelo estudante [E.5]. Fonte: arquivo pessoal.

Ao encerrar a aplicação do segundo experimento didático com estudantes do ensino médio, algumas reflexões por parte do pesquisador foram produzidas. Observaram-se essencialmente alguns aspectos referentes: (1) ao objeto virtual quanto às possíveis melhorias de design e funcionalidade, bem como a construção de outro objeto virtual (Cadeias de Markov – 3D) que pudesse ser usado em situações envolvendo mais variáveis; (2) possível reformulação e readequação de pontos na sequência de atividades, para que assim pudesse ser utilizada no terceiro experimento didático, com os estudantes da disciplina de modelagem matemática no curso de licenciatura em matemática.

5.3 O EXPERIMENTO NO ENSINO SUPERIOR

5.3.1 – Um olhar sobre a produção dos estudantes

A aplicação do terceiro experimento didático ocorreu com estudantes do ensino superior e aconteceu em um dos laboratórios de informática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul (IFRS), Campus Caxias do Sul durante cinco semanas nas aulas regulares da disciplina de Modelagem Matemática no curso de Licenciatura em Matemática. Cada um dos encontros ocorreu de forma presencial e teve a duração de três horas e vinte minutos. Ocorreu também uma parte da sequência de atividades na forma semipresencial, na forma de um trabalho envolvendo o assunto. Da mesma maneira que no experimento anterior, os estudantes foram alocados de forma individual nos computadores, porém em diversos momentos realizaram discussões e reflexões entre si, acompanhadas pelo professor. O uso dos objetos virtuais “Cadeia de Markov – 2D” e “Cadeia de Markov – 3D” ocorreu através do acesso pela internet e os registros escritos foram produzidos pelos estudantes de forma individual em papel, no material fornecido pelo professor.

Após cada encontro o material produzido por cada um dos seis estudantes da turma foi digitalizado e armazenado pelo professor, para futura análise da produção. Sendo assim, o manuscrito individual de cada participante foi entregue de volta a um dos estudantes da turma. Também foi informado antecipadamente aos estudantes que o material constituiria um dos instrumentos de avaliação para a disciplina de Modelagem Matemática que se desenvolve em 2015/2. A sequência de atividades realizada com os estudantes do ensino superior pode ser visualizada de modo completo no Apêndice F.

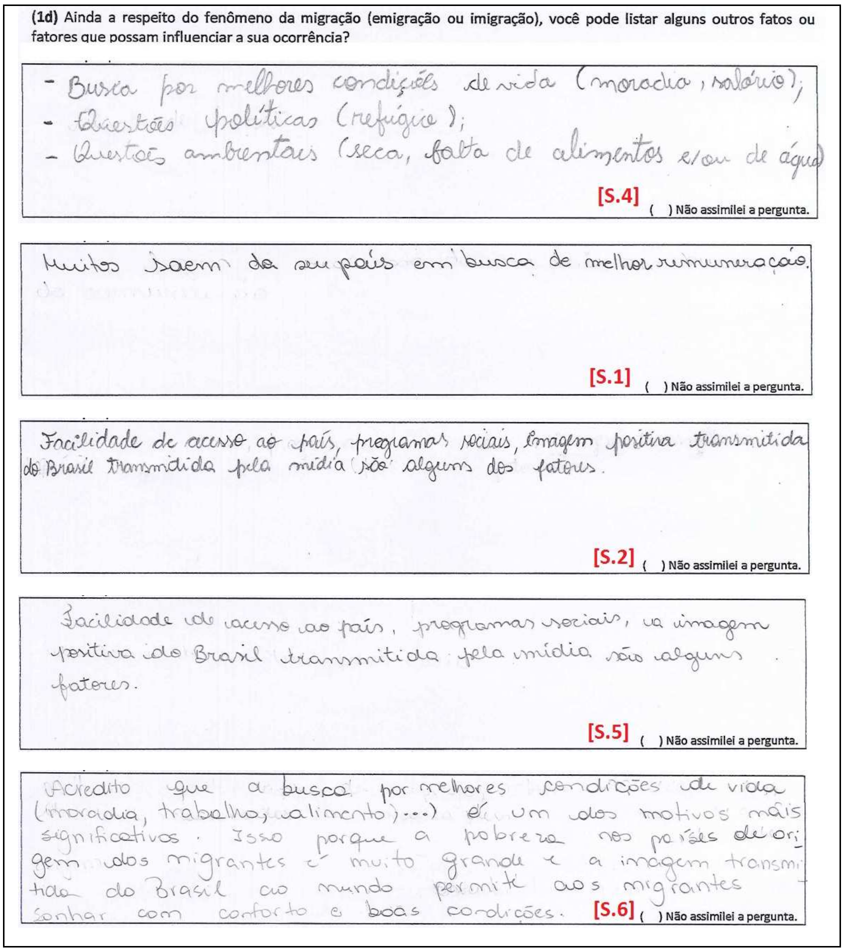
Em aderência e convergência com o exposto e discutido no capítulo 5.2, a presente seção objetiva apresentar, refletir e discutir à luz do referencial teórico utilizado, a construção de conhecimentos matemáticos pelos estudantes ao longo da sequência de atividades. Almeja-se também refletir sobre a importância do uso das tecnologias digitais ao longo do processo de aprendizagem, a qual oportunizou que os sujeitos envolvidos pudessem através de suas ações e coordenações de ações sobre os objetos em estudo construir diversos conceitos matemáticos envolvendo a modelagem matemática em situações-problema com Cadeias de Markov.

A sequência de atividades realizada no ensino superior foi organizada do seguinte modo: “Conhecendo o contexto” (1º dia), “Conhecendo o objeto virtual” (2º dia), “Retomando a problemática inicial” (3º dia), “Avançando no estudo da Cadeia de Markov – 2D” (4º dia) e “Trabalho sobre Cadeias de Markov” (5º dia – modo semipresencial) e “Um pouco sobre Cadeias de Markov – 3D” (6º dia). Sendo algumas das atividades semelhantes às utilizadas no ensino médio (segundo experimento) isto permitiu que em alguns momentos fossem estabelecidas relações entre as produções originadas a partir dos dois tipos de público participante. A partir de agora se faz uma exposição sobre a produção dos estudantes ao longo dos dias de experimento e também se procura relacionar esta produção com a fundamentação teórica utilizada na tese.

5.3.1.1 – Conhecendo o contexto – 1º Dia

A atividade neste dia foi a mesma do experimento dois, sendo organizada em dois momentos: o primeiro consistiu em fazer a leitura e discussão de uma notícia veiculada em um canal de comunicação pela internet (jornal) e o segundo momento consistiu em apresentar uma situação-problema.

Após a leitura do texto pelos estudantes alguns questionamentos foram feitos, com o objetivo de provocar uma reflexão sobre as causas apresentadas no texto, bem como também fazer os estudantes contribuirem com outras causas que poderiam influenciar no processo. O que se percebeu neste momento da atividade é que os estudantes se envolveram com a proposta e realizaram um exercício de reflexão sobre o objeto em estudo. As contribuições dos estudantes estão expostas na figura 41, a seguir.


(1d) Ainda a respeito do fenômeno da migração (emigração ou imigração), você pode listar alguns outros fatos ou fatores que possam influenciar a sua ocorrência?

- Busca por melhores condições de vida (moradia, salário);
- Questões políticas (refúgio);
- Questões ambientais (seca, falta de alimentos e/ou de água)

[S.4] ( ) Não assimilei a pergunta.

Muitos saem do seu país em busca de melhor remuneração.

[S.1] ( ) Não assimilei a pergunta.

Facilidade de acesso ao país, programas sociais, imagem positiva transmitida do Brasil transmitida pela mídia são alguns dos fatores.

[S.2] ( ) Não assimilei a pergunta.

Facilidade de acesso ao país, programas sociais, a imagem positiva do Brasil transmitida pela mídia são alguns fatores.

[S.5] ( ) Não assimilei a pergunta.

Acredito que a busca por melhores condições de vida (moradia, trabalho, alimento)...) é um dos motivos mais significativos. Isso porque a pobreza nos países de origem dos migrantes é muito grande e a imagem transmitida do Brasil ao mundo permite aos migrantes sonhar com conforto e boas condições.

[S.6] ( ) Não assimilei a pergunta.

Figura 41 – Reflexões dos estudantes sobre a migração. Fonte: arquivo pessoal.

Da mesma forma que destacamos a importância de ter realizado esta atividade com os estudantes do ensino médio, igualmente consideramos que ela foi profícua e importante também de ser realizada com os estudantes do ensino superior. Possibilitou que em uma sala de aula regular de matemática fosse discutido um assunto que faz parte de um fenômeno que ocorre e é observado na realidade: a migração populacional.

> **"Suponha que no ano 2010 a taxa de migração de Caxias do Sul para o seu subúrbio seja de 7%. E que durante o mesmo ano a taxa de migração do subúrbio para a cidade seja de 4%. Se a população observada no ano 2010 foi de 350000 habitantes na cidade e no subúrbio foi de 100000 habitantes então qual a população estimada para o ano 2011 para cada um dos lugares?"**

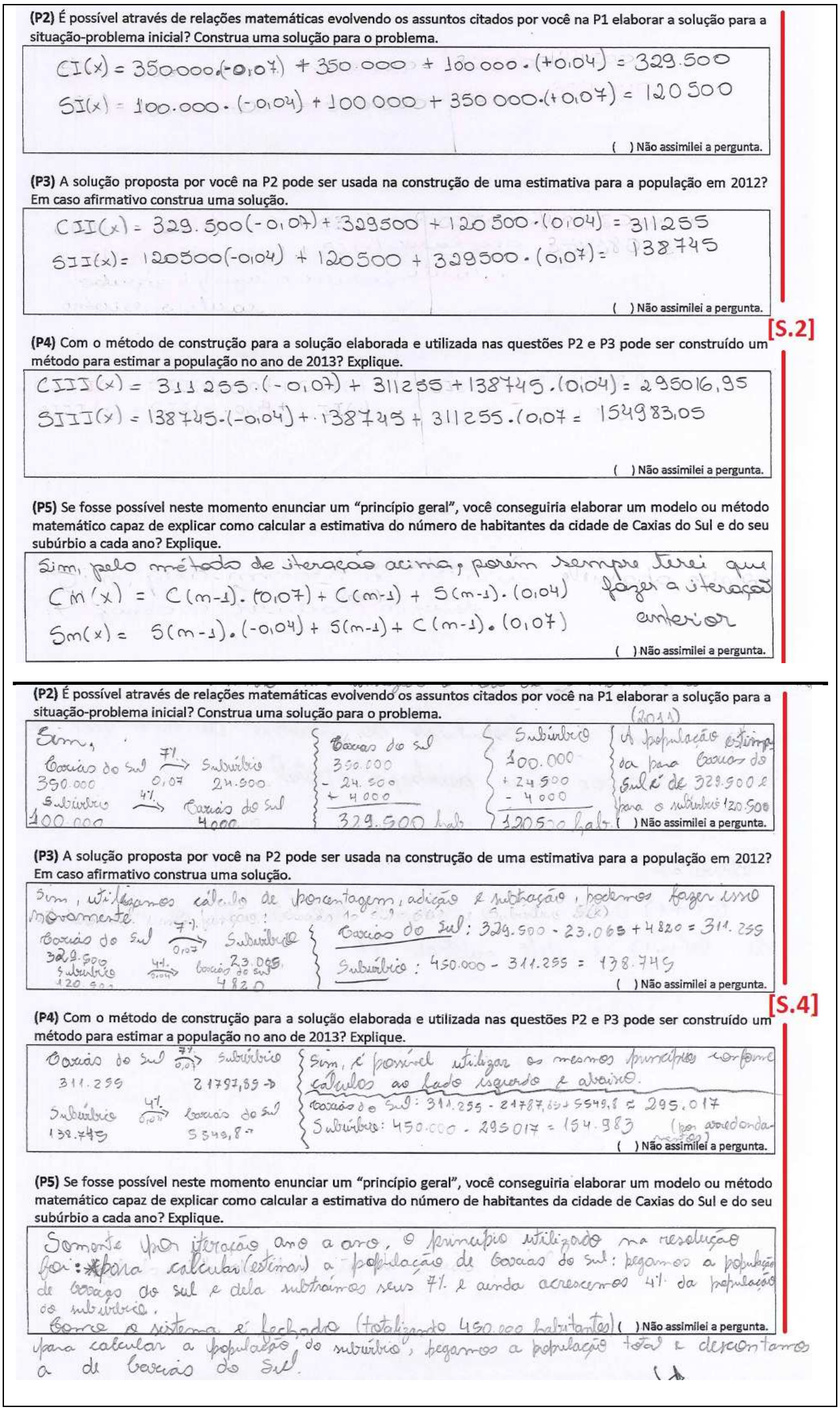
Figura 42 – Situação-problema do primeiro dia. Fonte: arquivo pessoal.

Na apresentação da situação-problema (figura 42) os estudantes citaram vários assuntos que na concepção deles seriam os conteúdos matemáticos possivelmente utilizados na construção de uma solução para o problema. Os assuntos citados pela turma foram: porcentagem (4 citações), adição (3 citações), subtração (3 citações), regra de 3 (2 citações), proporção (2 citações), razão (2 citações), equação (2 citações), multiplicação (2 citações), álgebra (matrizes) (1 citação), função afim (1 citação) e taxa de variação (1 citação).

Sobre a enumeração de possíveis assuntos matemáticos anterior é possível perceber algumas semelhanças e diferenças com o ocorrido no experimento dois. Duas semelhanças possíveis de citar são: (1) os dois públicos alvos distintos em momentos diferentes fizeram citações idênticas sobre qual conteúdo matemático seria possivelmente utilizado; (2) a citação de algum conteúdo matemático passa por um processo de organização conceitual do sujeito; onde seja necessário mobilizar diferentes estruturas previamente organizadas e que agem na direção de tentar assimilar o objeto em estudo. Isto significa que para ter mencionado o conteúdo *porcentagem*, por exemplo, o sujeito deva ter se deparado com situações anteriores a esta e que o fizeram elaborar e desenvolver um conjunto de ações que objetivasse auxiliar nesta construção conceitual. O fato é que diante de uma nova situação que se impõe ao sujeito, o mesmo mobiliza diferentes esquemas assimiladores que agem na direção da diferenciação/integração das formas e conteúdos.

Duas possíveis diferenças em relação ao experimento anterior foram observadas: (1) não houve alguma identificação da situação-problema com funções exponenciais, as quais são usualmente usadas para analisar variações em crescimento/decrescimentos populacionais, (2) presença e destaque de quais *operações* deveriam ser feitas, em oposição à citação apenas de *conteúdo*. Enquanto que os estudantes do ensino médio citaram mais conteúdos específicos de matemática, os estudantes do ensino superior citaram operações matemáticas a serem realizadas.

Na obtenção das estimativas populacionais os pensamentos da turma como um todo convergiram e tiveram o encaminhamento adequado. Todos os envolvidos conseguiram através de algumas operações realizadas obter resultados satisfatórios para os questionamentos. Merece destaque que ao fazer o processo de elaboração das estimativas, os sujeitos perceberam que o processo tratava-se de iterações sucessivas, na qual a *n*-ésima estimativa dependia da (*n*-*1*)-ésima. Com isso, a elaboração de um possível princípio geral foi norteada por este pensamento. A seguir na figura 43 mostramos a construção de dois estudantes para um possível “princípio geral”.


(P2) É possível através de relações matemáticas evolvendo os assuntos citados por você na P1 elaborar a solução para a situação-problema inicial? Construa uma solução para o problema.

CI(x) = 350.000.(-0,07) + 350.000 + 100 000.(+0,04) = 329.500
SI(x) = 100.000.(-0,04) + 100 000 + 350 000.(+0,07) = 120 500

( ) Não assimilei a pergunta.

(P3) A solução proposta por você na P2 pode ser usada na construção de uma estimativa para a população em 2012? Em caso afirmativo construa uma solução.

CII(x) = 329.500(-0,07) + 329500 + 120 500.(0,04) = 311255
SII(x) = 120500(-0,04) + 120500 + 329500.(0,07) = 138745

( ) Não assimilei a pergunta.

(P4) Com o método de construção para a solução elaborada e utilizada nas questões P2 e P3 pode ser construído um método para estimar a população no ano de 2013? Explique.

CIII(x) = 311 255.(-0,07) + 311255 + 138745.(0,04) = 295016,95
SIII(x) = 138745.(-0,04) + 138745 + 311255.(0,07 = 154983,05

( ) Não assimilei a pergunta.

(P5) Se fosse possível neste momento enunciar um “princípio geral”, você conseguiria elaborar um modelo ou método matemático capaz de explicar como calcular a estimativa do número de habitantes da cidade de Caxias do Sul e do seu subúrbio a cada ano? Explique.

Sim, pelo método de iteração acima, porém sempre terei que fazer a iteração anterior
Cm(x) = C(m-1).(0,07) + C(m-1) + S(m-1).(0,04)
Sm(x) = S(m-1).(-0,04) + S(m-1) + C(m-1).(0,07)

( ) Não assimilei a pergunta.

[S.2]

(P2) É possível através de relações matemáticas evolvendo os assuntos citados por você na P1 elaborar a solução para a situação-problema inicial? Construa uma solução para o problema.

Sim,
Caxias do Sul $\xrightarrow{7\%}$ Subúrbio
350.000 0,07 24.500
Subúrbio $\xrightarrow{4\%}$ Caxias do Sul
100.000 4000

Caxias do Sul
350.000
- 24.500
+ 4 000
329.500 hab

Subúrbio
100.000
+ 24 500
- 4 000
120500 hab.

(2011) A população estimada para Caxias do Sul é de 329.500 e para o subúrbio 120.500

( ) Não assimilei a pergunta.

(P3) A solução proposta por você na P2 pode ser usada na construção de uma estimativa para a população em 2012? Em caso afirmativo construa uma solução.

Sim, utilizamos cálculo de porcentagem, adição e subtração, podemos fazer isso novamente.
Caxias do Sul $\xrightarrow[0,07]{7\%}$ Subúrbio
329.500 23.065
Subúrbio $\xrightarrow[0,04]{4\%}$ Caxias do Sul
120 500 4820

Caxias do Sul: 329.500 - 23.065 + 4 820 = 311.255
Subúrbio: 450.000 - 311.255 = 138.745

( ) Não assimilei a pergunta.

(P4) Com o método de construção para a solução elaborada e utilizada nas questões P2 e P3 pode ser construído um método para estimar a população no ano de 2013? Explique.

Caxias do Sul $\xrightarrow[0,07]{7\%}$ Subúrbio
311.255 21797,55
Subúrbio $\xrightarrow[0,04]{4\%}$ Caxias do Sul
138.745 5549,8

Sim, é possível utilizar os mesmos princípios conforme cálculos ao lado esquerdo e abaixo.
Caxias do Sul: 311.255 - 21787,65 + 5549,8 ≅ 295.017
Subúrbio: 450.000 - 295017 = 154.983 (por arredondamento)

( ) Não assimilei a pergunta.

(P5) Se fosse possível neste momento enunciar um “princípio geral”, você conseguiria elaborar um modelo ou método matemático capaz de explicar como calcular a estimativa do número de habitantes da cidade de Caxias do Sul e do seu subúrbio a cada ano? Explique.

Somente por iteração ano a ano, o princípio utilizado na resolução foi: *para calcular (estimar) a população de Caxias do Sul: pegamos a população de Caxias do Sul e dela subtraímos seus 7% e ainda acrescemos 4% da população do subúrbio.
Como o sistema é fechado (totalizando 450.000 habitantes)
( ) Não assimilei a pergunta.
para calcular a população do subúrbio, pegamos a população total e descontamos a de Caxias do Sul.

[S.4]

Figura 43 – Estimativas e anúncio de um princípio geral por [S.2] e [S.4].
Fonte: arquivo pessoal.

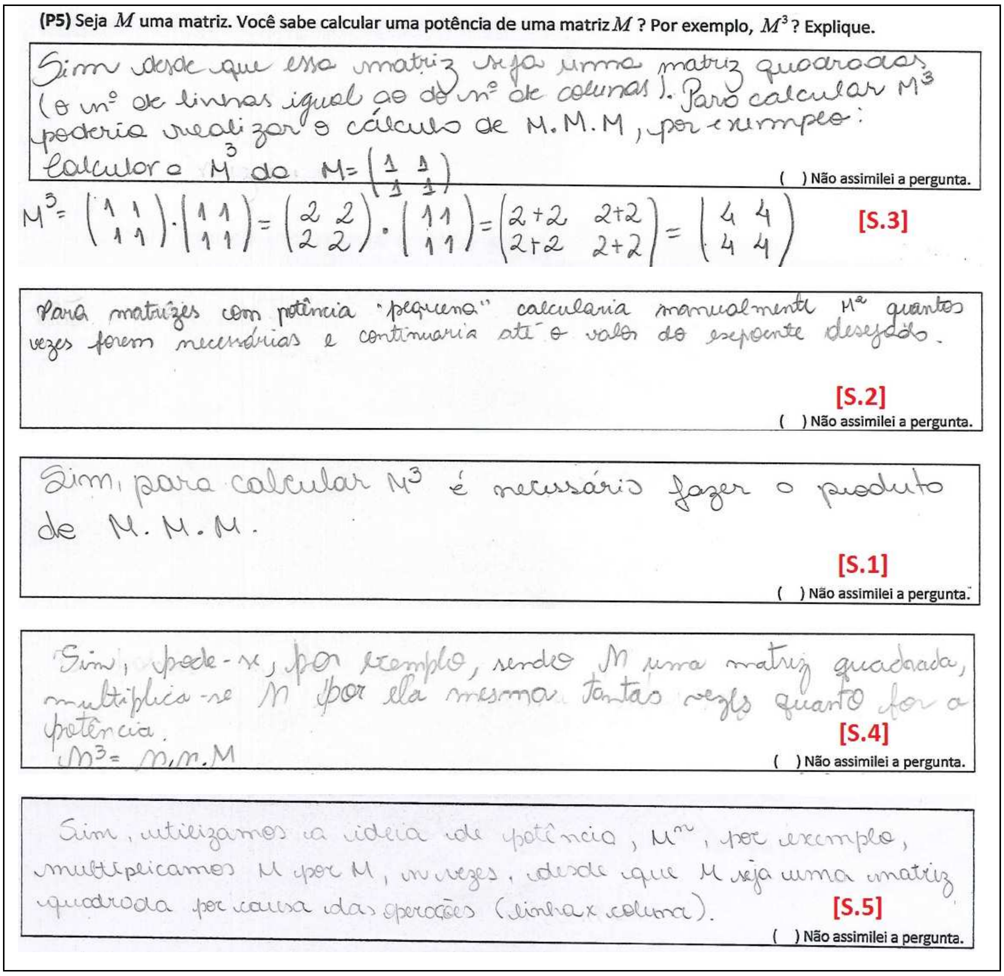
Sobre as soluções expostas pelos dois grupos (ensino médio e ensino superior) para a mesma situação-problema proposta, considerações envolvendo abstração e tomada de consciência devem ser feitas. Primeiramente, diante de uma situação nova que se impõe ao sujeito, é necessário mobilizar diferentes esquemas e estruturas de pensamento que possam agir na elaboração de regulações ativas, as quais são ferramentas necessárias para o aperfeiçoamento de estruturas e construção de novos esquemas, já melhorados em relação aos pré-existentes. Isso nos permite afirmar que as respostas para um possível princípio geral enunciadas pelos sujeitos no momento do terceiro experimento demonstram que, ao "experimentar" o problema através dos cálculos de algumas estimativas, os sujeitos puderam inferir uma possível nova relação entre etapas distintas do fenômeno migratório observado. A capacidade de relacionar ações ou ideias aparentemente isoladas é uma atividade cognitiva essencial do sujeito, e possível devido à evolução da abstração e da tomada de consciência ao longo de um determinado processo.

Em segundo lugar, a evolução da abstração e da tomada de consciência por parte do sujeito está fortemente relacionada com a ação e com a coordenação das ações sobre os objetos, sejam materiais ou mentais, em estudo. Isto significa que para nós uma hipótese aceitável é que ao estar freqüentando a disciplina de Modelagem Matemática, alocada no oitavo semestre do curso de licenciatura em matemática da instituição pesquisada, já tenha sido oportunizado aos estudantes vivenciar inúmeras situações e encarar (superando ou não) inúmeros desafios ao longo do curso de graduação. Essas oportunidades ao serem convertidas em trabalho cognitivo possibilitam que a tomada de consciência e a abstração se aperfeiçoem em níveis cada vez mais elaborados e complexos, possibilitando ao sujeito evoluir qualitativamente suas formas e estruturas de pensamento.

5.3.1.2 – Conhecendo o objeto virtual – 2º Dia

Neste dia a sequência de atividades foi realizada junto com a exploração do objeto virtual "Cadeia de Markov – 2D" acessado através da internet. As atividades essencialmente tratavam sobre matrizes, vetores e suas respectivas representações e também algumas operações envolvendo matrizes e vetores. Um aspecto que merece destaque é que a partir desse dia de experimento, em alguns momentos ao longo das atividades propostas, os sujeitos participantes vivenciaram o seguinte dilema: ser estudante *vs* ser professor. Tal dilema consistiu em um conjunto de dúvidas por parte dos sujeitos no momento de escrever sobre sua argumentação em alguns questionamentos, pois os mesmos tinham dúvidas se deveriam agir como *estudantes* da disciplina de Modelagem Matemática os quais estavam participando de um processo de construção de conhecimento envolvendo Cadeias de Markov ou se agiam como *professores* de matemática em formação. A exploração deste dilema será retomada no capítulo de reflexões finais.

Quanto às matrizes e suas operações os sujeitos afirmaram inicialmente que já tinham visto o assunto alguma vez durante a vida escolar. O que merece destaque quanto às operações envolvendo matrizes foi como os sujeitos se expressaram quando questionados sobre a potência de uma matriz. Pelo fato de não ter sido especificado qual o tipo de matriz estava envolvido no cálculo da potência, os estudantes adicionaram a hipótese adicional que a mesma deveria ser quadrada. Além da potência ao cubo, conforme solicitado, alguns estudantes ainda mencionaram como calcular a *n*-ésima potência. Isto é um fato que converge com o exposto anteriormente sobre construção de possíveis generalidades por parte do sujeito, manifestado por diferentes níveis de abstração. A figura 44 mostra as produções dos estudantes.


(P5) Seja M uma matriz. Você sabe calcular uma potência de uma matriz M ? Por exemplo, M^3? Explique.

Sim desde que essa matriz seja uma matriz quadrada (o nº de linhas igual ao do nº de colunas). Para calcular M^3 poderia realizar o cálculo de M.M.M, por exemplo: calcular o M^3 da $M=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$

( ) Não assimilei a pergunta.

$$M^3=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+2&2+2\\2+2&2+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&4\\4&4\end{pmatrix}$$

[S.3]

Para matrizes com potência "pequena" calcularia manualmente M^2 quantas vezes forem necessárias e continuaria até o valor do expoente desejado.

[S.2]

( ) Não assimilei a pergunta.

Sim, para calcular M^3 é necessário fazer o produto de M.M.M.

[S.1]

( ) Não assimilei a pergunta.

Sim, pode-se, por exemplo, sendo M uma matriz quadrada, multiplica-se M por ela mesma tantas vezes quanto for a potência.
$M^3 = M.M.M$

[S.4]

( ) Não assimilei a pergunta.

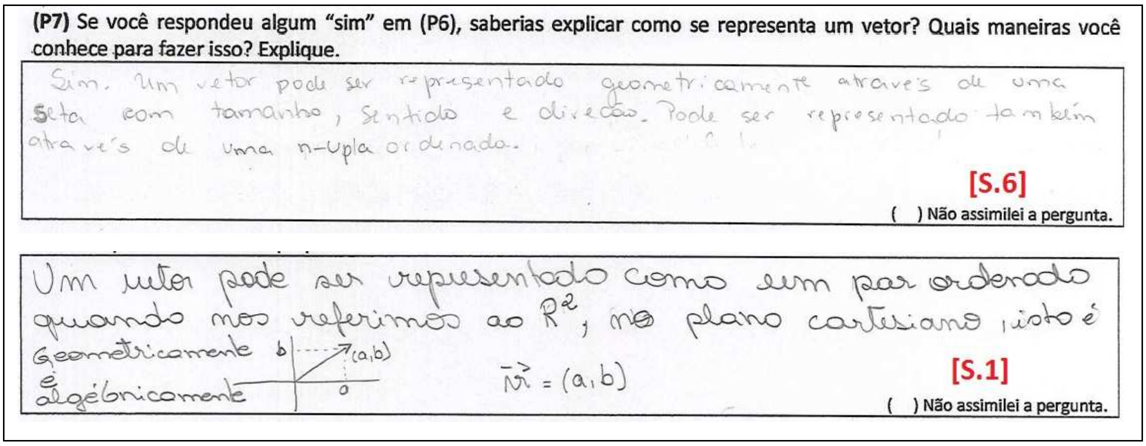
Sim, utilizamos a ideia de potência, M^n, por exemplo, multiplicamos M por M, n vezes, desde que M seja uma matriz quadrada por causa das operações (linha x coluna).

[S.5]

( ) Não assimilei a pergunta.

Figura 44 – Sobre as potências de matrizes: o que os estudantes afirmaram. Fonte: arquivo pessoal.

No que se refere o conceito de vetor e suas representações, as manifestações da turma foram heterogêneas. Vale observar que as noções apresentadas pelos estudantes no terceiro experimento foram distintas das noções apresentadas pelos estudantes do ensino médio no experimento anterior. Isto ilustra o quanto distinto tenha sido o processo de construção sobre o conceito de vetor e suas possíveis representações durante as etapas escolares anteriores. Nenhum dos sujeitos neste terceiro experimento relacionou o vetor com noções envolvendo força e aceleração, tal como os estudantes do ensino médio fizeram. Os sujeitos do terceiro experimento esboçaram um conceito predominantemente matemático para este objeto, e quanto às suas possíveis representações, explicitaram a geométrica e a algébrica (por meio de coordenadas). Dois exemplos do que foi dito anteriormente podem ser visualizados na figura 45.


(P7) Se você respondeu algum "sim" em (P6), saberias explicar como se representa um vetor? Quais maneiras você conhece para fazer isso? Explique.

Sim. Um vetor pode ser representado geometricamente através de uma seta com tamanho, sentido e direção. Pode ser representado também através de uma n-upla ordenada.

[S.6]

( ) Não assimilei a pergunta.

Um vetor pode ser representado como um par ordenado quando nos referimos ao R^2, no plano cartesiano, isto é Geometricamente e algebricamente

$\vec{v} = (a, b)$

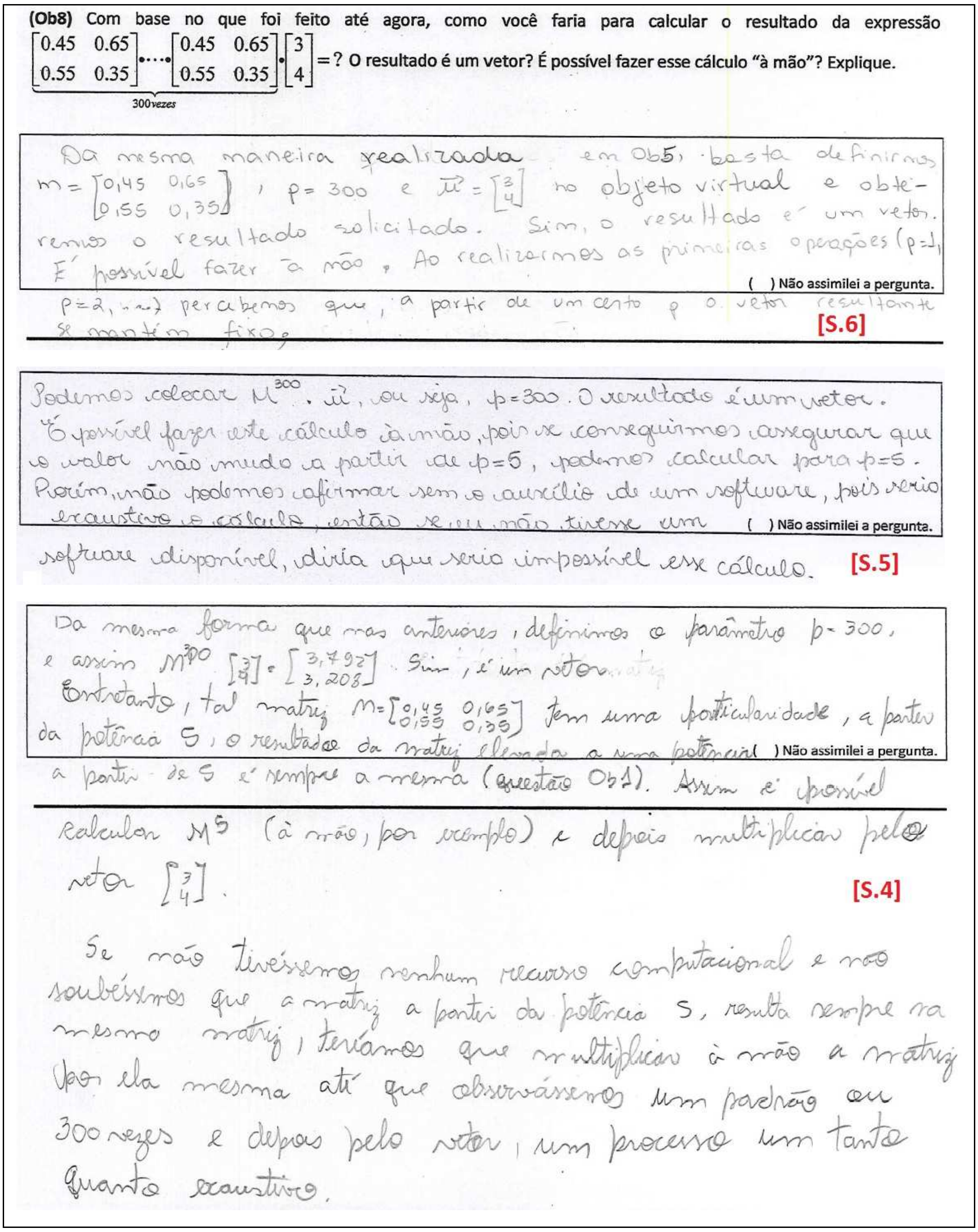
[S.1]

( ) Não assimilei a pergunta.

Figura 45 – Vetor: conceito e representação para [S.1] e [S.6]. Fonte: arquivo pessoal.

Quanto à realização de operações envolvendo o produto de matrizes fazendo uso do objeto virtual verificou-se que os sujeitos sinalizaram a possibilidade de fazer o cálculo à mão, sendo o tempo de execução demorado. Alguns estudantes ao manipular o objeto virtual perceberam que a partir de algumas potências calculadas o resultado de certa forma se estabilizava, ou ainda, tinha esta "certa particularidade", e isto foi mencionando durante a sua resolução. O uso do objeto virtual "Cadeia de Markov – 2D" neste caso oportunizou que fosse valorizada a ação dos sujeitos em realizar testes e construir hipóteses sobre os procedimentos de cálculos os quais eles estavam sendo questionados. A mudança de parâmetros no objeto virtual, bem como a manipulação das condições iniciais e as possíveis alterações nos fatores de escala oportunizaram que o momento de exploração dos estudantes sobre o objeto virtual fosse valorizado durante a execução das atividades propostas neste segundo dia.

Da mesma forma que se verificou sobre como os estudantes do ensino médio (experimento dois) mencionaram o procedimento para a realização de cálculo envolvendo potência de matrizes, sobre os métodos propostos pelos sujeitos neste segundo dia de experimento para realizar tal procedimento, novamente infere-se que para tal afirmação ter sido construída, previamente tenha ocorrido um exercício reflexivo por parte do sujeito, uma vez que ao arquitetar e projetar o cálculo que deveria ser feito, o mesmo observa que o objeto virtual viabiliza de modo mais rápido as operações aritméticas. A figura 46 ilustra as elaborações dos estudantes.



(Ob8) Com base no que foi feito até agora, como você faria para calcular o resultado da expressão $\underbrace{\begin{bmatrix}0.45 & 0.65\\0.55 & 0.35\end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix}0.45 & 0.65\\0.55 & 0.35\end{bmatrix}}_{300 vezes}\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}=?$ O resultado é um vetor? É possível fazer esse cálculo "à mão"? Explique.

Da mesma maneira realizada em Ob5, basta definirmos $m=\begin{bmatrix}0,45 & 0,65\\0,55 & 0,35\end{bmatrix}$, $p=300$ e $\vec{u}=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$ no objeto virtual e obteremos o resultado solicitado. Sim, o resultado é um vetor. É possível fazer à mão, Ao realizarmos as primeiras operações ($p=1$, $p=2$, ...) percebemos que, a partir de um certo p o vetor resultante se mantém fixo.

( ) Não assimilei a pergunta.

[S.6]

Podemos colocar $M^{300}\cdot\vec{u}$, ou seja, $p=300$. O resultado é um vetor. É possível fazer este cálculo à mão, pois se conseguirmos assegurar que o valor não muda a partir de $p=5$, podemos calcular para $p=5$. Porém, não podemos afirmar sem o auxílio de um software, pois seria exaustivo o cálculo, então se eu não tivesse um software disponível, diria que seria impossível esse cálculo.

( ) Não assimilei a pergunta.

[S.5]

Da mesma forma que nas anteriores, definimos o parâmetro $p=300$, e assim $M^{300}\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3,792\\3,208\end{bmatrix}$. Sim, é um vetor. Entretanto, tal matriz $M=\begin{bmatrix}0,45 & 0,65\\0,55 & 0,35\end{bmatrix}$ tem uma particularidade, a partir da potência 5, o resultado da matriz elevada a uma potência a partir de 5 é sempre a mesma (questão Ob1). Assim é possível calcular M^5 (à mão, por exemplo) e depois multiplicar pelo vetor $\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$.

( ) Não assimilei a pergunta.

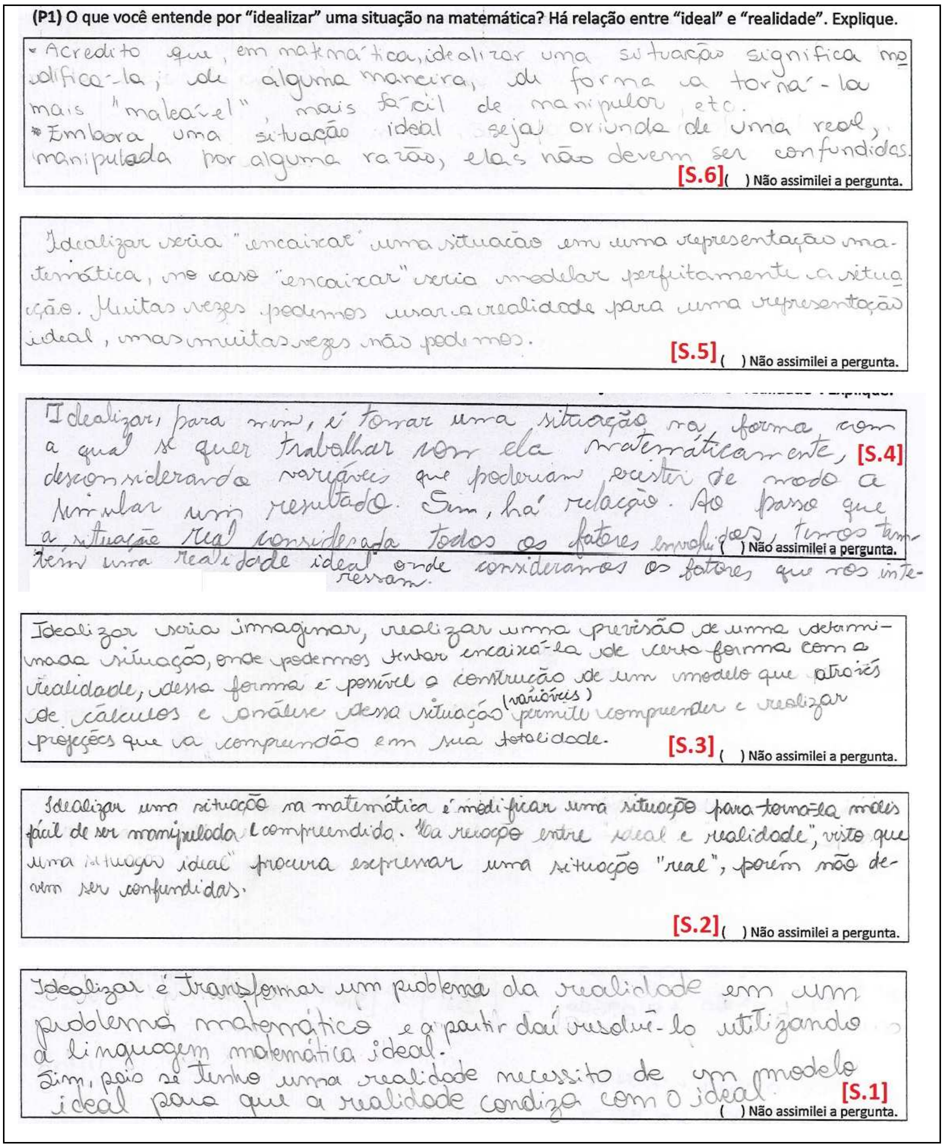
[S.4]

Se não tivéssemos nenhum recurso computacional e não soubéssemos que a matriz a partir da potência 5, resulta sempre na mesma matriz, teríamos que multiplicar à mão a matriz por ela mesma até que observássemos um padrão ou 300 vezes e depois pelo vetor, um processo um tanto quanto exaustivo.

Figura 46 – O cálculo envolvendo 300 matrizes segundo [S.4], [S.5] e [S.6]. Fonte: arquivo pessoal.

5.3.1.3 – Retomando a problemática inicial – 3º Dia

No terceiro dia a proposta de atividades estava organizada em três momentos distintos, contudo relacionados. A primeira parte consistia na discussão sobre como os estudantes percebiam e compreendiam as ideias de realidade e ideal, relacionando ou não esses conceitos com a matemática. Diante do questionamento, todos os estudantes procuraram apresentar possíveis diferenças/semelhanças entre esses dois conceitos, aproximando-se da matemática por meio de relações. O que se percebeu a partir das respostas explicitadas é que os sujeitos reconheceram na idealização uma possível maneira de compreensão, mesmo que parcial sobre aspectos presentes na realidade. Isto mostra um entendimento por parte dos sujeitos de que a realidade, em sua totalidade, não possa ser explicada através de relações matemáticas estabelecidas entre possíveis variáveis. Acredita-se que tal compreensão exija do sujeito previamente alguma construção conceitual a respeito do assunto, seja por experimentações anteriores ou de suas ações e coordenações sobre as mesmas na exploração sobre os objetos do conhecimento. Esta mesma percepção foi observada nas respostas dos sujeitos no experimento dois. A seguir na figura 47 mostramos as respostas dos sujeitos.


(P1) O que você entende por "idealizar" uma situação na matemática? Há relação entre "ideal" e "realidade". Explique.

• Acredito que, em matemática, idealizar uma situação significa modificá-la, de alguma maneira, de forma a torná-la mais "maleável", mais fácil de manipular, etc.
• Embora uma situação ideal seja oriunda de uma real, manipulada por alguma razão, elas não devem ser confundidas.
[S.6] ( ) Não assimilei a pergunta.

Idealizar seria "encaixar" uma situação em uma representação matemática, no caso "encaixar" seria modelar perfeitamente a situação. Muitas vezes podemos usar a realidade para uma representação ideal, mas muitas vezes não podemos.
[S.5] ( ) Não assimilei a pergunta.

Idealizar, para mim, é tornar uma situação na forma com a qual se quer trabalhar com ela matematicamente, desconsiderando variáveis que poderiam existir de modo a simular um resultado. Sim, há relação. Ao passo que a situação real considerada todos os fatores envolvidos, temos também uma realidade ideal onde consideramos os fatores que nos interessam.
[S.4] ( ) Não assimilei a pergunta.

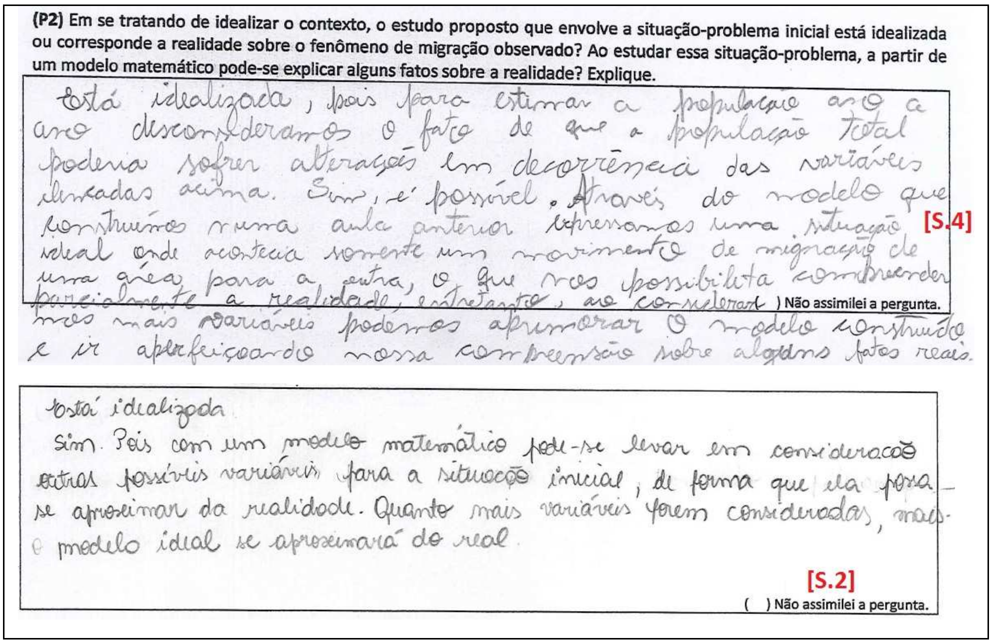
Idealizar seria imaginar, realizar uma previsão de uma determinada situação, onde podemos tentar encaixá-la de certa forma com a realidade, dessa forma é possível a construção de um modelo que através de cálculos e análise dessa situação (variáveis) permite compreender e realizar projeções que a compreendão em sua totalidade.
[S.3] ( ) Não assimilei a pergunta.

Idealizar uma situação na matemática é modificar uma situação para torná-la mais fácil de ser manipulada e compreendida. Há relação entre "ideal e realidade", visto que uma situação ideal" procura expressar uma situação "real", porém não devem ser confundidas.
[S.2] ( ) Não assimilei a pergunta.

Idealizar é transformar um problema da realidade em um problema matemático e a partir daí resolvê-lo utilizando a linguagem matemática ideal.
Sim, pois se tenho uma realidade necessito de um modelo ideal para que a realidade condiza com o ideal.
[S.1] ( ) Não assimilei a pergunta.

Figura 47 – Ideal *vs* realidade segundo os sujeitos. Fonte: arquivo pessoal.

No segundo momento de atividades retomou-se a problemática inicial sobre a situação-problema da migração entre dois lugares. Inicialmente questionou-se sobre se a forma que a situação tinha sido apresentada correspondia ou não a uma possível idealização do fenômeno observado na realidade. O exposto pelos estudantes foi que para efeitos de compreensão sobre o fenômeno da migração a partir de algumas hipóteses adicionais feitas sobre o problema, seria possível modelar a situação de alguma forma. Também foi mencionado que ao considerar mais variáveis diante da situação-problema ocorreria um possível melhoramento e aproximação do problema em relação à realidade observada.



(P2) Em se tratando de idealizar o contexto, o estudo proposto que envolve a situação-problema inicial está idealizada ou corresponde a realidade sobre o fenômeno de migração observado? Ao estudar essa situação-problema, a partir de um modelo matemático pode-se explicar alguns fatos sobre a realidade? Explique.

Está idealizada, pois para estimar a população ano a ano desconsideramos o fato de que a população total poderia sofrer alterações em decorrência das variáveis elencadas acima. Sim, é possível. Através do modelo que construímos numa aula anterior expressamos uma situação ideal onde acontecia somente um movimento de migração de uma área para a outra, o que nos possibilita compreender parcialmente a realidade, entretanto, ao considerarmos mais variáveis podemos aprimorar o modelo construído e ir aperfeiçoando nossa compreensão sobre alguns fatos reais.

[S.4]

( ) Não assimilei a pergunta.

Está idealizada

Sim. Pois com um modelo matemático pode-se levar em consideração extras possíveis variáveis para a situação inicial, de forma que ela possa se aproximar da realidade. Quanto mais variáveis forem consideradas, mais o modelo ideal se aproximará do real

[S.2]

( ) Não assimilei a pergunta.

Figura 48 – Ideal *vs* realidade na situação-problema inicial por [S.4] e [S.2]. Fonte: arquivo pessoal.

Em seguida foi encaminhada a discussão da situação-problema com um olhar utilizando possivelmente sistemas de equações lineares. Neste momento usou-se o objeto virtual “Cadeia de Markov – 2D” para produzir novas estimativas que pudessem ser comparadas com as estimativas produzidas no primeiro dia de atividades.

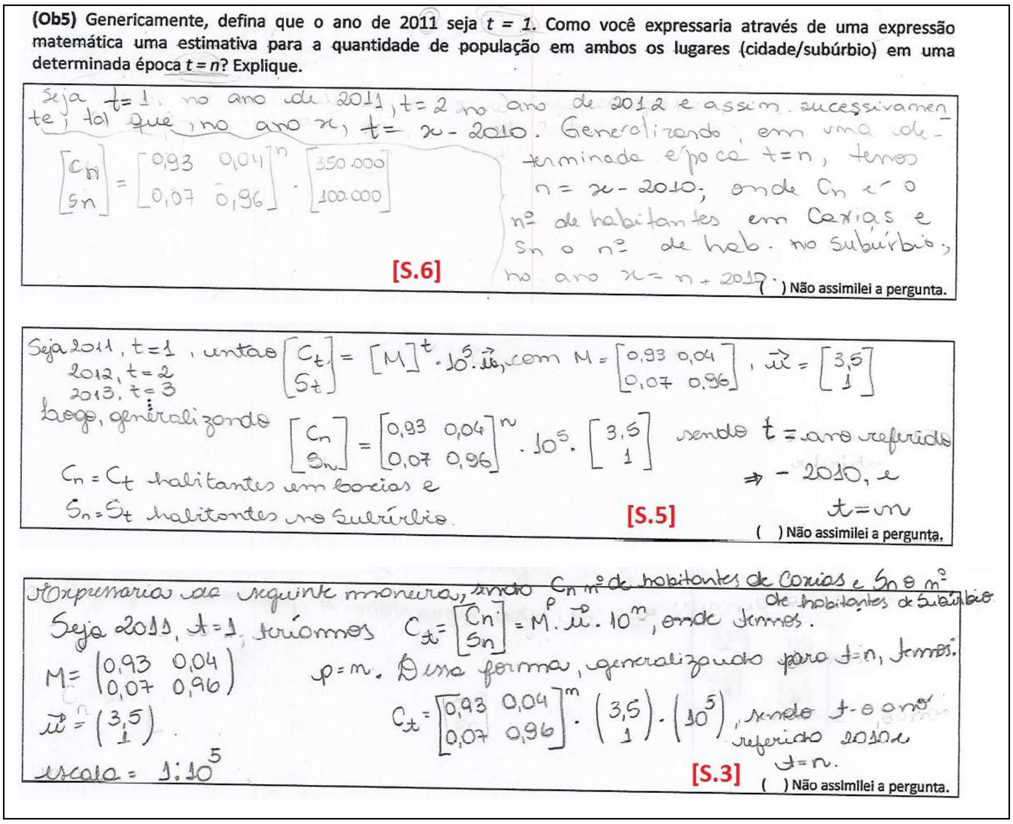
Sobre o uso de sistemas de equações lineares para a construção de uma possível solução da situação-problema, alguns aspectos já mencionados no experimento dois devem ser reconsiderados: (1) a percepção dos estudantes que a situação-problema idealizada consistia uma iteração, mesmo que inicialmente não fosse possível descrever matematicamente uma solução em termos das condições iniciais; (2) ao descrever os passos da iteração foi evidenciado por parte dos estudantes que o conteúdo de sistemas lineares poderia ser utilizado na construção da possível solução; (3) da discussão coletiva com a turma sobre possíveis relações entre duas iterações sucessivas, os estudantes inferiram que o produto de matrizes seria uma operação utilizada para alcançar tal objetivo; (4) pelo uso do objeto virtual foi possível depois de compreendido o mecanismo de funcionamento das iterações, que novas estimativas fossem construídas e ainda pudessem ser comparadas com as construídas na primeira aula.

Na fundamentação teórica afirmamos que a tomada de consciência não deva ser considerada um processo apenas em conseqüência da ação do sujeito sobre o objeto, mas sim como uma complexa reorganização de suas estruturas de pensamento provinda da criação de novos esquemas assimiladores e do aperfeiçoamento da regulação ativa. Ao longo do processo é fundamental observar também que a retirada de informações da ação, a organização das informações obtidas na ação e os equilíbrios/desequilíbrios parciais ocorridos contribuam para a tomada de consciência. Recordamos que na ocasião, através do esboço de um gráfico cartesiano não linear ilustramos como a evolução da ação e das coordenações elaboradas pelo sujeito conduz à reorganização das estruturas de pensamento e conseqüentemente à evolução dos níveis da tomada de consciência.

Da discussão sobre as possíveis relações entre duas iterações sucessivas surgiu como uma conclusão plausível: o fato que relaciona duas iterações consecutivas, se mantidas as condições iniciais e ideais, então relacionará sempre duas etapas do processo, independente de qual seja o tempo considerado. O que foi feito, em termos de organização do pensamento, foi considerar que se o sistema mantivesse as condições inalteradas, a partir da construção de hipóteses poderiam ser estimados números populacionais independentes do tempo observado.

Por fim, a discussão coletiva mencionada em (3) merece algumas considerações. Primeiramente a discussão oportunizou que os estudantes refletissem sobre a influência e importância da operação potência de matriz na construção de uma solução para a situação-problema. Tal como no experimento anterior, a partir de uma discussão feita sobre sistemas lineares e suas implicações entre duas iterações sucessivas os estudantes inferiram que se o processo fosse visto iterativamente para trás, poderia ser talvez construído um modelo matemático que dependesse das condições iniciais fornecidas na situação-problema. Novamente, nota-se que esta organização/reorganização do pensamento tenha ocorrido devido a um esforço cognitivo individual proveniente da capacidade reflexiva do sujeito, a qual em virtude da evolução nos níveis de abstração, enquanto reflexionante, interfere positivamente e melhora qualitativamente as formas de pensamento do sujeito.

A análise anterior foi feita também devido às observações nas produções dos sujeitos no experimento dois, pois algumas vezes percebeu-se considerável aderência e convergência entre as produções dos dois grupos de estudantes envolvidos. Isto possivelmente ocorreu nos dois experimentos em momentos distintos, pois além das atividades provocarem uma reflexão sobre como a modelagem matemática de um fenômeno pode interferir na compreensão do mesmo, desafiou os sujeitos na elaboração de uma regra ou princípio matemático que pudesse ser usado para produzir estimativas. Tais estimativas poderiam ser comparadas e relacionadas com as estimativas feitas na primeira aula. Na figura 49 mostram-se exemplos de construções por parte dos estudantes.



(Ob5) Genericamente, defina que o ano de 2011 seja $t = 1$. Como você expressaria através de uma expressão matemática uma estimativa para a quantidade de população em ambos os lugares (cidade/subúrbio) em uma determinada época $t = n$? Explique.

Seja $t=1$ no ano de 2011, $t=2$ no ano de 2012 e assim sucessivamente; tal que, no ano x, $t = x - 2010$. Generalizando, em uma determinada época $t=n$, temos

$$\begin{bmatrix} C_n \\ S_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}93 & 0{,}04 \\ 0{,}07 & 0{,}96 \end{bmatrix}^n \cdot \begin{bmatrix} 350.000 \\ 100.000 \end{bmatrix}$$

$n = x - 2010$; onde C_n é o nº de habitantes em Caxias e S_n o nº de hab. no subúrbio, no ano $x = n + 2010$.

[S.6] ( ) Não assimilei a pergunta.

Seja 2011, $t=1$, então $\begin{bmatrix} C_t \\ S_t \end{bmatrix} = [M]^t \cdot 10^5 \cdot \vec{u}$, com $M = \begin{bmatrix} 0{,}93 & 0{,}04 \\ 0{,}07 & 0{,}96 \end{bmatrix}$, $\vec{u} = \begin{bmatrix} 3{,}5 \\ 1 \end{bmatrix}$

2012, $t=2$

2013, $t=3$

Logo, generalizando $\begin{bmatrix} C_n \\ S_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}93 & 0{,}04 \\ 0{,}07 & 0{,}96 \end{bmatrix}^n \cdot 10^5 \cdot \begin{bmatrix} 3{,}5 \\ 1 \end{bmatrix}$ sendo t = ano referido $- 2010$, e $t = n$

$C_n = C_t$ habitantes em Caxias e

$S_n = S_t$ habitantes no Subúrbio.

[S.5] ( ) Não assimilei a pergunta.

Expressaria da seguinte maneira, sendo C_n nº de habitantes de Caxias e S_n o nº de habitantes do Subúrbio.

Seja 2011, $t=1$, teríamos $C_t = \begin{bmatrix} C_n \\ S_n \end{bmatrix} = M^p \cdot \vec{u} \cdot 10^m$, onde temos:

$M = \begin{pmatrix} 0{,}93 & 0{,}04 \\ 0{,}07 & 0{,}96 \end{pmatrix}$

$\vec{u} = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$

escala $= 1:10^5$

$p = n$. Dessa forma, generalizando para $t=n$, temos:

$C_t = \begin{bmatrix} 0{,}93 & 0{,}04 \\ 0{,}07 & 0{,}96 \end{bmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (10^5)$, sendo t o ano referido 2010 e $t = n$.

[S.3] ( ) Não assimilei a pergunta.

Figura 49 – Generalizações para a situação-problema. Fonte: arquivo pessoal.

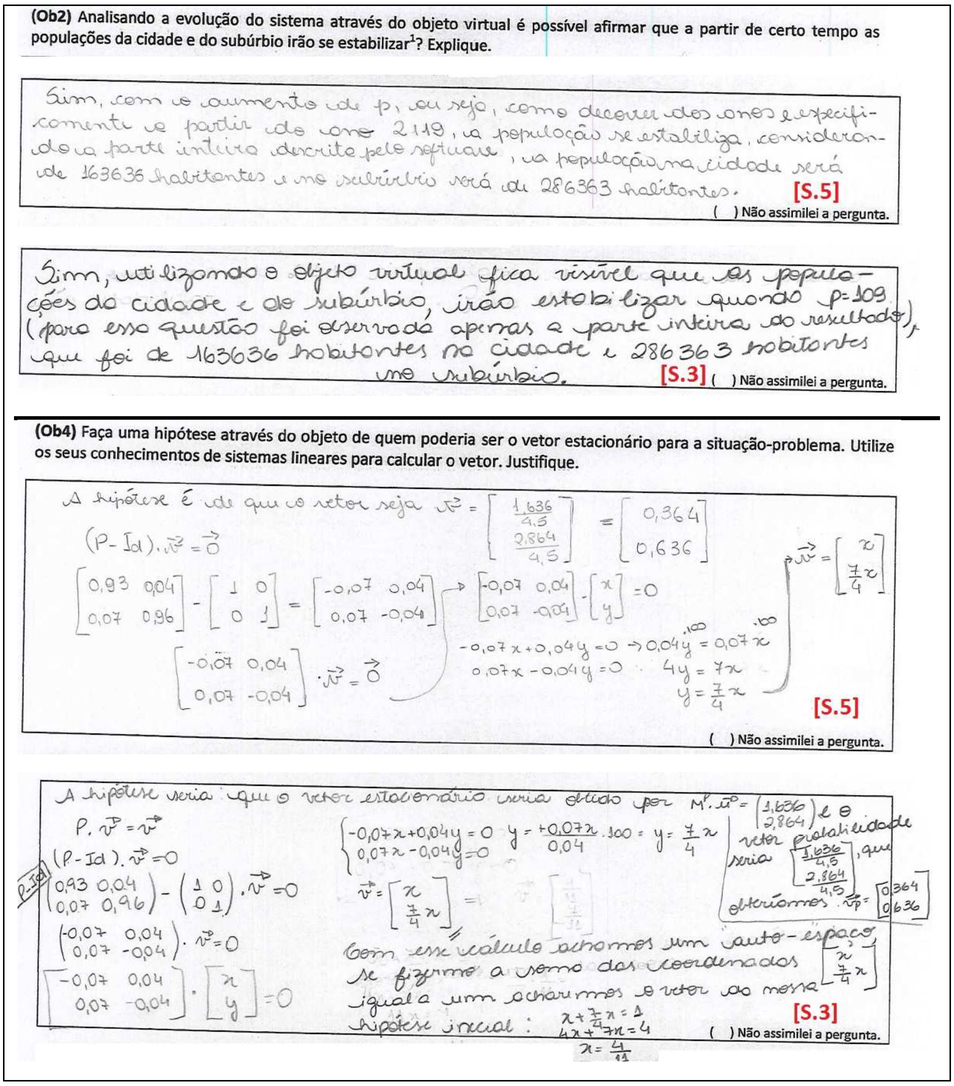
O terceiro e último momento deste dia consistiu na apresentação e discussão sobre o conceito de Cadeia de Markov. A discussão do conceito envolveu os estudantes na tarefa de identificação das probabilidades entre as mudanças de estado do sistema, na construção dos vetores probabilidade a partir das probabilidades identificadas e na construção da matriz estocástica relativa à situação-problema.

Considera-se que a discussão ocorrida tenha sido satisfatória e que também tenha se oportunizado possivelmente uma reorganização das ideias e conceitos explorados desde o primeiro dia de atividades. Escolheu-se este momento da sequência didática para formalizar e evidenciar quais os conceitos matemáticos estavam sendo explorados desde o início das atividades, por acreditar que a partir da exploração e experimentação envolvendo determinados objetos, os sujeitos construíram um significado qualitativamente melhor para os conceitos tratados. Acredita-se que a escolha e encaminhamento de trabalho tenham ocorrido em oposição a uma proposta metodológica onde inicialmente se apresentam os conceitos, para que apenas depois eles sejam aplicados em possíveis situações onde se faça necessário o seu uso.

5.3.1.4 – Avançando no estudo da Cadeia de Markov – 2D – 4º Dia

O quarto dia de atividades foi organizado em dois momentos: no primeiro ocorreu a discussão sobre o vetor estacionário para a situação-problema da migração entre dois lugares. No segundo momento foi apresentada uma segunda situação-problema envolvendo níveis de audiência de dois canais concorrentes A e B.

Quanto à primeira parte da aula, durante a manipulação do objeto virtual “Cadeia de Markov – 2D” os estudantes puderam verificar empiricamente se a sequência de vetores construída no problema convergia para um vetor limite, denominado vetor estacionário ou de equilíbrio. Diferentemente dos estudantes do ensino médio no experimento dois, no terceiro experimento os sujeitos já conheciam técnicas matemáticas para realizar a construção do vetor estacionário. As técnicas matemáticas serviriam para confirmar as hipóteses formuladas antecipadamente. No que se refere à construção da hipótese sobre o vetor estacionário, os estudantes conseguiram pelo uso do objeto virtual determinar um possível candidato. A confirmação foi possível devido o desenvolvimento de algumas técnicas e mobilização de alguns conhecimentos matemáticos sobre sistemas lineares.


(Ob2) Analisando a evolução do sistema através do objeto virtual é possível afirmar que a partir de certo tempo as populações da cidade e do subúrbio irão se estabilizar[1]? Explique.

Sim, com o aumento de p, ou seja, como decorreu dos anos e especificamente a partir do ano 2119, a população se estabiliza, considerando a parte inteira descrita pelo software, a população na cidade será de 163636 habitantes e no subúrbio será de 286363 habitantes. [S.5]

( ) Não assimilei a pergunta.

Sim, utilizando o objeto virtual fica visível que as populações da cidade e do subúrbio, irão estabilizar quando p=109 (para essa questão foi observado apenas a parte inteira do resultado), que foi de 163636 habitantes na cidade e 286363 habitantes no subúrbio. [S.3]

( ) Não assimilei a pergunta.

(Ob4) Faça uma hipótese através do objeto de quem poderia ser o vetor estacionário para a situação-problema. Utilize os seus conhecimentos de sistemas lineares para calcular o vetor. Justifique.

A hipótese é de que o vetor seja $\vec{v} = \begin{bmatrix} \frac{1,636}{4,5} \\ \frac{2,864}{4,5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,364 \\ 0,636 \end{bmatrix}$

$(P - Id).\vec{v} = \vec{0}$

$\begin{bmatrix} 0,93 & 0,04 \\ 0,07 & 0,96 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,07 & 0,04 \\ 0,07 & -0,04 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -0,07 & 0,04 \\ 0,07 & -0,04 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$

$\begin{bmatrix} -0,07 & 0,04 \\ 0,07 & -0,04 \end{bmatrix} . \vec{v} = \vec{0}$

$-0,07x + 0,04y = 0 \to 0,04y = 0,07x$

$0,07x - 0,04y = 0 \quad 4y = 7x$

$y = \frac{7}{4}x$

$\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ \frac{7}{4}x \end{bmatrix}$ [S.5]

( ) Não assimilei a pergunta.

A hipótese seria que o vetor estacionário seria obtido por $M^p.\vec{u}^0 = \begin{pmatrix} 1,636 \\ 2,864 \end{pmatrix}$ e o vetor probabilidade seria $\begin{bmatrix} \frac{1,636}{4,5} \\ \frac{2,864}{4,5} \end{bmatrix}$, que obteríamos $\vec{v}_p = \begin{bmatrix} 0,364 \\ 0,636 \end{bmatrix}$

$P.\vec{v} = \vec{v}$

$(P - Id).\vec{v} = 0$

$\begin{pmatrix} 0,93 & 0,04 \\ 0,07 & 0,96 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \vec{v} = 0$

$\begin{pmatrix} -0,07 & 0,04 \\ 0,07 & -0,04 \end{pmatrix} . \vec{v} = 0$

$\begin{bmatrix} -0,07 & 0,04 \\ 0,07 & -0,04 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$

$\begin{cases} -0,07x + 0,04y = 0 \\ 0,07x - 0,04y = 0 \end{cases} \quad y = \frac{+0,07x}{0,04} . 100 \quad y = \frac{7}{4}x$

$\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ \frac{7}{4}x \end{bmatrix}$

Com esse cálculo achamos um auto-espaço $\begin{bmatrix} x \\ \frac{7}{4}x \end{bmatrix}$ se fizermos a soma das coordenadas igual a um acharemos o vetor da nossa hipótese inicial: $x + \frac{7}{4}x = 1$, $4x + 7x = 4$, $x = \frac{4}{11}$ [S.3]

( ) Não assimilei a pergunta.

Figura 50 – Hipóteses e obtenção do vetor estacionário por [S.3] e [S.5]. Fonte: arquivo pessoal.

Alguns comentários sobre a construção conceitual do vetor estacionário são necessários. Os estudantes do ensino médio ao construir empiricamente uma possibilidade para vetor estacionário não tinham as ferramentas ou recursos necessários para que a sua hipótese fosse de fato verificada. Isso implicou que o conhecimento sobre este conceito tenha sido elaborado através de observações pseudo-empíricas fundamentadas na visualização geométrica dos vetores resultantes. Mesmo sem conhecer o conceito de limite, em especial o de limite para uma sequência de vetores, os estudantes do ensino médio fizeram uso desta, na forma de uma possível regulação ativa para argumentar e compreender os fatos observados na situação imposta. Na medida do possível, devido às estruturas construídas até o momento pelos sujeitos do experimento dois, verificou-se que de fato eles também fizeram construções conceituais de matemática, dentro das possibilidades cognitivas estruturais em que cada um se encontrava.

Ao verificar o encaminhamento dado pelos sujeitos do terceiro experimento para a questão envolvendo o vetor estacionário percebe-se o aperfeiçoamento na qualidade de pensamento, principalmente quanto às formas de superar os impasses e desafios impostos pelo objeto do conhecimento. Notou-se que a construção/validação/reformulação das hipóteses foi potencializada pelo uso do objeto virtual, pois ao modificar os parâmetros no objeto e observar instantaneamente o que as modificações implicavam poderia contribuir em alterações.

O segundo momento do encontro consistiu em apresentar e abordar uma situação-problema (figura 51) envolvendo os níveis de audiência de dois canais concorrentes A e B na cidade de Caxias do Sul (RS). Novamente os estudantes foram questionados sobre a idealização ou não da situação para fins da modelagem. Os argumentos dos estudantes foram os mais diversificados, porém convergentes na ideia do “sim”; a situação-problema apresentava-se ideal para fins de uma possível modelagem. Nas palavras dos estudantes:

[S.1]: “Sim, pois podemos transformá-lo em um problema matemático e resolvê-lo utilizando a linguagem matemática”.

[S.2]: “Sim, pois não está levando todas as possíveis causas da situação”.

[S.3]: “Sim, pois podemos representá-lo através de relações matemáticas”.

[S.4]: “Sim, por desconsiderar-se outras situações que poderiam afetar os cálculos. Por exemplo, o programa que está passando, o horário do mesmo,...”.

[S.5]: “Sim, pois podemos descrevê-lo através de relações matemáticas”.

[S.6]: “Sim, pois não está levando em consideração todas as possíveis variáveis que podem interferir na audiência”.

2º Situação-problema. (Adaptada de Anton e Rorres(2012))

Suponha que às 10h em Caxias do Sul cada um dos dois canais de televisão concorrentes (A e B) tenha 150000 telespectadores de audiência. Considerando que a cada hora que passa o canal "A" atrai 10% da audiência do canal "B" e que o canal "B" atrai 20% da audiência do canal "A". Com o passar das horas, a partir das 10h, é possível prever os níveis de audiência em cada um dos canais de televisão utilizando a ideia da Cadeia de Markov.

Figura 51 – Situação-problema sobre os níveis de audiência. Fonte: arquivo pessoal.

Neste segundo momento o objeto virtual "Cadeia de Markov – 2D" foi utilizado para a construção de um possível modelo matemático, inspirado nas cadeias de Markov. Foram também construídos pelos estudantes os vetores probabilidade e a matriz estocástica relativos ao problema. Os estudantes conseguiram elaborar um princípio ou regra geral para o funcionamento da segunda situação-problema proposta, construindo também uma hipótese sobre um possível vetor estacionário e a partir de conhecimentos envolvendo sistemas lineares puderam por um processo validar sua hipótese.

Pode-se inferir que o processo de construção do conhecimento envolvendo a temática em estudo tenha sido consolidado no quarto dia de atividades, uma vez que se percebeu o envolvimento dos sujeitos em suas ações, materiais ou mentais, sobre os diversos objetos em investigação.

5.3.1.5 Trabalho sobre Cadeias de Markov – 5º Dia (Semipresencial)

Após a realização de quatro encontros presenciais a proposta da quinta atividade consistiu em um trabalho semipresencial sobre Cadeias de Markov. A proposta consistiu em investigar uma terceira situação-problema (figura 52) que se tratava em inferir a qualidade do ar respirado em Caxias do Sul (RS) a partir de algumas medições e mediante a consideração de algumas hipóteses. Nesta proposta o objeto virtual "Cadeia de Markov – 2D" novamente deveria ser acessado pelos estudantes através da internet, para fins de realização das atividades.

(Adaptada de Anton e Rorres (2012))

Observe a seguinte situação-problema.

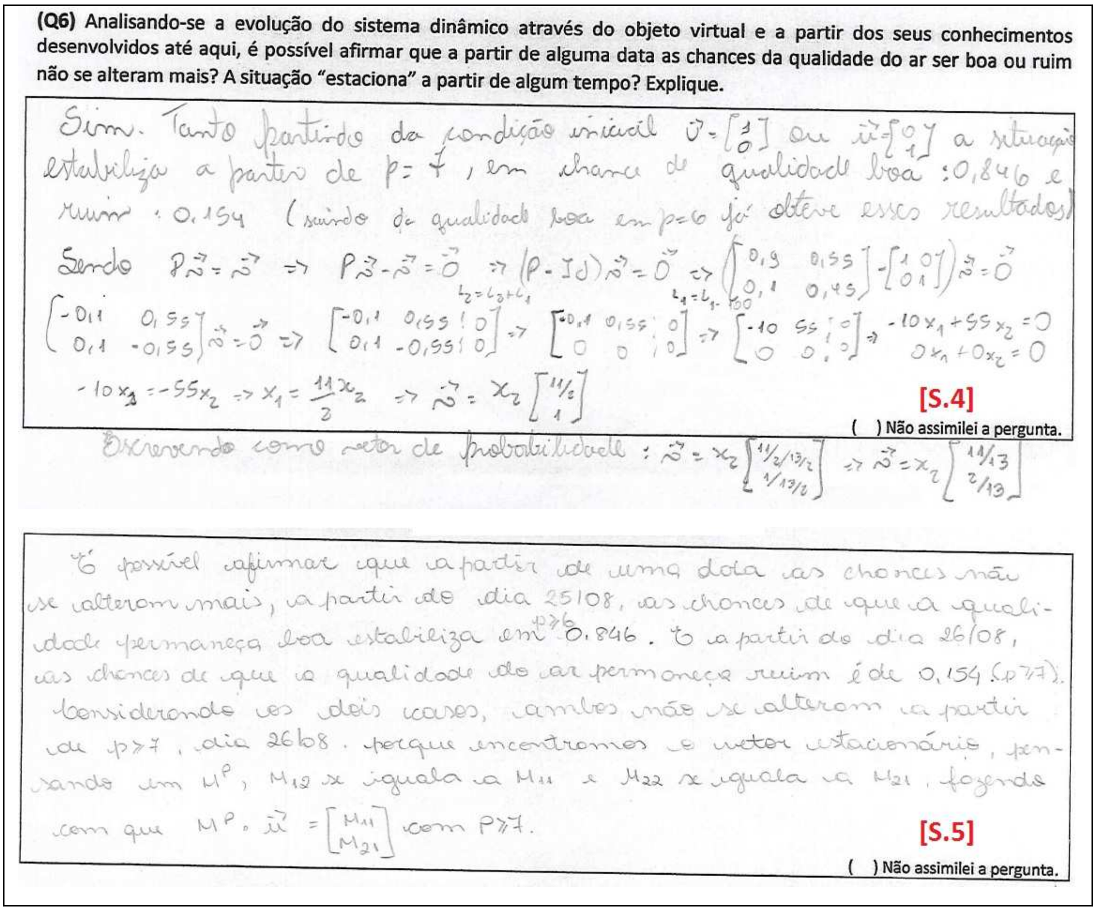
Em estações de medições da qualidade do ar nas cidades é possível através das medições e suas análises inferirmos sobre a qualidade do ar "respirado" pelos habitantes da cidade. Em Caxias do Sul (RS) verificou-se através da observação e análise de alguns registros empíricos que se em determinado dia a qualidade do ar é boa, então existe uma chance de 90% de que venha a ser boa a qualidade do ar no próximo dia. No estudo verificou-se também que se a qualidade do ar é ruim em determinado dia então existe uma chance de 45% de que a qualidade do ar venha ser ruim também no próximo dia. Nota-se que a qualidade do ar respirado hoje (19/08/2015) é boa, então qual a probabilidade do ar respirado também ser boa daqui 8 dias?

Figura 52 – Situação-problema sobre a qualidade do ar. Fonte: arquivo pessoal.

Os questionamentos propostos seguiram a seguinte ordem: (1) Apresentação da situação-problema → (2) Construção dos vetores de probabilidade e da matriz estocástica → (3) Questionamento sobre a idealização ou não da situação-problema para fins de modelagem → (4)

Uso do objeto virtual para obter algumas estimativas sobre a qualidade do ar em algumas datas → (5) Construção de um possível modelo matemático envolvendo Cadeias de Markov → (6) Construção das hipóteses sobre o vetor estacionário fazendo uso do objeto virtual → (7) Confirmação ou reformulação sobre a hipótese do vetor estacionário a partir de técnicas matemáticas envolvendo sistemas lineares.

No desenvolvimento das estimativas e construção de um possível modelo matemático os resultados apresentados pelos estudantes convergiram e se assemelharam com a forma de trabalho que já estava sendo desenvolvida ao longo da sequência de atividades, sendo satisfatórios os resultados por eles apresentados. No entanto, um olhar sobre a construção e verificação de hipóteses referentes ao vetor estacionário será realizado a partir de agora. Sobre a construção do vetor estacionário, no uso do objeto virtual os estudantes elaboraram possíveis hipóteses a partir da visualização geométrica da sequência de vetores. Os sujeitos verificaram que não importava qual fosse a condição inicial colocada, a sequência de vetores convergiria sempre para o mesmo vetor limite. Essa verificação, no entanto é empírica e necessitava de uma confirmação ou refutação dessa hipótese. A partir do conhecimento e técnicas matemáticas envolvendo o assunto sistemas lineares foi oportunizado que os sujeitos de fato obtivessem o vetor estacionário, confirmando suas hipóteses iniciais sobre um possível candidato. Exemplos dessa construção estão na figura 53 a seguir.



(Q6) Analisando-se a evolução do sistema dinâmico através do objeto virtual e a partir dos seus conhecimentos desenvolvidos até aqui, é possível afirmar que a partir de alguma data as chances da qualidade do ar ser boa ou ruim não se alteram mais? A situação "estaciona" a partir de algum tempo? Explique.

Sim. Tanto partindo da condição inicial $\vec{v}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ ou $\vec{u}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ a situação estabiliza a partir de $p=7$, em chance de qualidade boa: 0,846 e ruim: 0,154 (saindo de qualidade boa em $p=6$ já obteve esses resultados)

Sendo $P\vec{s}=\vec{s} \Rightarrow P\vec{s}-\vec{s}=\vec{0} \Rightarrow (P-Id)\vec{s}=\vec{0} \Rightarrow \left(\begin{bmatrix}0,9 & 0,55\\0,1 & 0,45\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right)\vec{s}=\vec{0}$

$\begin{bmatrix}-0,1 & 0,55\\0,1 & -0,55\end{bmatrix}\vec{s}=\vec{0} \Rightarrow \begin{bmatrix}-0,1 & 0,55 & | & 0\\0,1 & -0,55 & | & 0\end{bmatrix} \xrightarrow{L_2=L_2+L_1} \begin{bmatrix}-0,1 & 0,55 & | & 0\\0 & 0 & | & 0\end{bmatrix} \xrightarrow{L_1=L_1\cdot 100} \begin{bmatrix}-10 & 55 & | & 0\\0 & 0 & | & 0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}-10x_1+55x_2=0\\0x_1+0x_2=0\end{matrix}$

$-10x_1=-55x_2 \Rightarrow x_1=\frac{11}{2}x_2 \Rightarrow \vec{s}=x_2\begin{bmatrix}11/2\\1\end{bmatrix}$

[S.4]

( ) Não assimilei a pergunta.

Escrevendo como vetor de probabilidade: $\vec{s}=x_2\begin{bmatrix}\frac{11/2}{13/2}\\\frac{1}{13/2}\end{bmatrix} \Rightarrow \vec{s}=x_2\begin{bmatrix}11/13\\2/13\end{bmatrix}$

É possível afirmar que a partir de uma data as chances não se alteram mais, a partir do dia 25/08, as chances de que a qualidade permaneça boa estabiliza em $\overset{p\geq 6}{0.846}$. E a partir do dia 26/08, as chances de que a qualidade do ar permaneça ruim é de 0,154 ($p\geq 7$). Considerando os dois casos, ambos não se alteram a partir de $p\geq 7$, dia 26/08. Porque encontramos o vetor estacionário, pensando em M^p, M_{12} se iguala a M_{11} e M_{22} se iguala a M_{21}, fazendo com que $M^p \cdot \vec{u}=\begin{bmatrix}M_{11}\\M_{21}\end{bmatrix}$ com $p\geq 7$.

[S.5]

( ) Não assimilei a pergunta.

Figura 53 – Hipóteses e construção do vetor estacionário por [S.4] e [S.5]. Fonte: arquivo pessoal.

Na fundamentação teórica da presente tese se apresentou dez etapas, as quais são necessárias e estão presentes no processo de criação das novidades por parte do sujeito. Duas etapas serão relembradas agora, pois são úteis na presente discussão: “(9) Começam a se destacar as chamadas reflexões sobre reflexões. Ou seja, através de metarreflexão o sujeito começa a trabalhar com hipóteses e suas consequências. (10) A busca pela razão das coisas. Ou seja, a tentativa de atividade criadora se manifesta quando das coordenações das ações o sujeito consegue teorizar ou estabelecer os motivos pelos quais tal fenômeno ocorre decorrente da ação. As explicações causais são construídas a partir de um processo que envolve implicitamente as nove etapas anteriores e que são fruto das coordenações do sujeito, em especial das coordenações de suas ações, sendo que nesse nível elas são predominantemente mentais.”

Neste sentido, nota-se que a produção de conhecimento manifestada pelos sujeitos nesta etapa da sequência de atividades constitui-se em um trabalho genuinamente cognitivo e individual de cada sujeito. A partir da construção de hipóteses, as quais se constituíram um exercício predominantemente mental, foi intensificado e melhorado o exercício da abstração, uma vez que se buscou determinar as explicações causais para o fenômeno observado a partir da coordenação das ações sobre o objeto em estudo. E mais, pelo fato que o aperfeiçoamento da capacidade de abstração ocorra concomitantemente com o processo de melhoramento da tomada de consciência, nota-se que ambos os processos sejam indissociáveis e contribuam para o aumento da capacidade cognitiva do sujeito. Diante disso, o que se observou a partir da produção dos estudantes na atividade semipresencial foi que diante dos desafios impostos pela situação-problema ocorreu a mobilização dos esquemas e estruturas cognitivas agindo em cooperação e colaboração no processo de aperfeiçoamento das sucessivas abstrações e tomadas de consciência.

5.3.1.6 – Um pouco sobre Cadeias de Markov – 3D – 6º Dia

No último dia da sequência de atividades no terceiro experimento didático utilizou-se o objeto virtual “Cadeia de Markov – 3D” e foram abordadas duas situações-problema: a primeira sobre uma campanha eleitoral para o cargo de síndico em um condomínio residencial envolvendo a concorrência de três chapas distintas; e a segunda situação envolvendo a migração de leões entre três reservas na savana africana. O uso do objeto virtual ocorreu pela internet e não foram detectados problemas no acesso e quanto ao uso do mesmo durante a aula em que ocorreram as atividades.

Objetivou-se com esta última parte da sequência de atividades oportunizar aos sujeitos que através de possíveis manipulações sobre os conceitos construídos para a situação 2D estes fossem estendidos, ou ampliados também para o caso 3D. Vale observar que nas cadeias de Markov 2D tinha-se quatro possíveis mudanças de estado para o sistema, sendo que para o caso 3D, o total de possíveis mudanças de estado no sistema observado é de nove. Sobre o aumento quantitativo das mudanças de estado para o sistema, observa-se que durante sua compreensão deverá ocorrer por parte do sujeito um aperfeiçoamento nos seus esquemas assimiladores, os quais deverão ser amplamente mobilizados e utilizados durante o processo. Compreender tais novas situações trata-se, portanto de um desafio que se coloca à frente do sujeito enquanto este tenta conhecer e explorar os novos objetos do conhecimento.

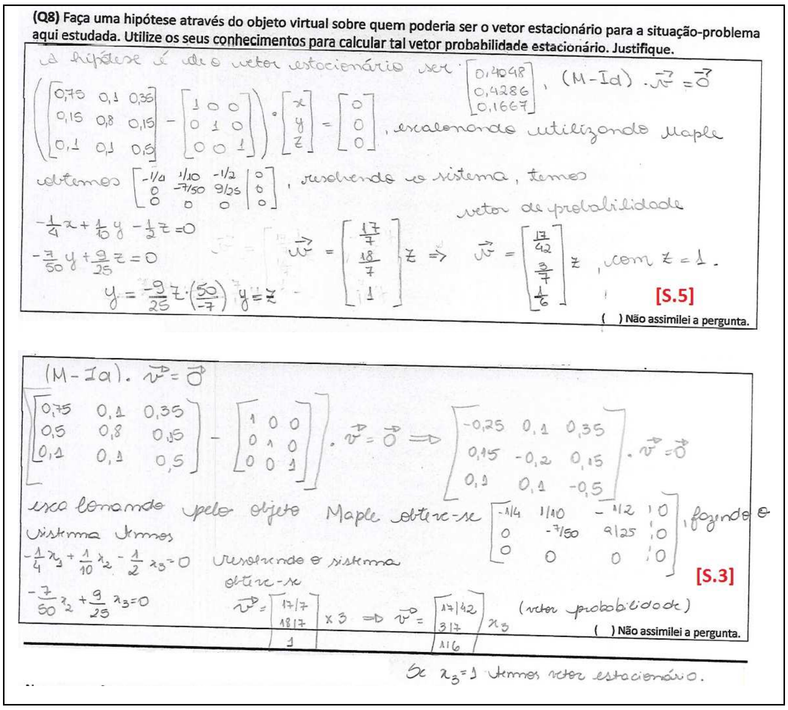
As atividades deste dia oportunizaram que os estudantes através de manipulações no objeto virtual pudessem fazer a construção dos vetores de probabilidade e das matrizes estocásticas das respectivas situações-problema. Observa-se que a partir dos conhecimentos construídos desde as primeiras aulas envolvendo o assunto em estudo, tais construções foram possíveis e ocorreram de forma satisfatória neste último dia da sequência de atividades. As construções propostas pelos sujeitos constavam de possíveis modelos matemáticos que viriam a ser utilizados durante os cálculos de algumas estimativas. A ação sobre o objeto virtual ainda oportunizou que os estudantes construíssem as hipóteses para o vetor estacionário. De modo intuitivo foi possível que os sujeitos visualizassem e verificassem fazendo uso do objeto virtual se as hipóteses prévias sobre o vetor estacionário estavam de acordo com o que previamente tinham pensado.

Sobre a construção dos possíveis modelos matemáticos e a construção/verificação das hipóteses envolvendo o vetor estacionário faz-se algumas reflexões a seguir. Primeiramente sobre a construção dos modelos. Notou-se que a partir da investigação, por parte do sujeito, das situações-problema nas aulas iniciais, o processo de elaboração/construção/aperfeiçoamento do conhecimento envolvendo àquelas retorna agora diante das novas situações, onde os sujeitos fazem a mobilização do conhecimento previamente construído com o objetivo de estendê-lo e adaptá-lo às novas situações, agora em 3D. De acordo com o discutido anteriormente na fundamentação teórica, conforme se avança qualitativamente e os resultados obtidos pela ação são organizados e interpretados adequadamente através de coordenações inferenciais estabelecidas pelo sujeito, desencadeia-se um processo no qual o sujeito organiza seus esquemas assimiladores, compondo uma estrutura capaz de construir e mobilizar novos esquemas na tentativa de compreensão do objeto. Isto possivelmente colaborou para que diante dos novos desafios impostos pelas situações os sujeitos buscassem desenvolver formas para tentar superá-las, e assim compreender os objetos em estudo.

Durante a elaboração do princípio matemático envolvendo as novas situações estudadas possivelmente o aperfeiçoamento da qualidade de pensamento dos sujeitos tenha ocorrido e seja o resultado das sucessivas operações de reflexão e reflexionamento; as quais oportunizaram ao sujeito avançar na direção dos patamares superiores de abstração e tomadas de consciência de maior qualidade. Logo, da união da reflexão e do reflexionamento constitui-se uma estrutura capaz de não apenas passar de um nível para o seguinte, mas que juntas tinham o caráter de uma estrutura capaz de desenvolver características qualitativas superiores no decorrer das passagens, ou também consideradas projeções. Isso significa que o patamar superior alcançado pelo sujeito através da ação e coordenação de ações tem relação intrínseca com os patamares inferiores ou iniciais desenvolvidos através da ação. Neste caso, pode-se afirmar que a reorganização e coordenação das ações, mentais ou materiais, permitiram aperfeiçoar cada vez mais a ação na tentativa de compreender os objetos em estudo, ou seja, durante a elaboração do princípio matemático ocorreu a evolução da abstração reflexionante, a qual foi um processo pelo qual cada sujeito construiu, reconstruiu, organizou e reorganizou os seus esquemas e estruturas de pensamento.

Segundo, sobre a construção/verificação/reformulação da hipótese envolvendo o vetor estacionário. Pode-se afirmar que a partir da ação e coordenação das ações sobre o objeto virtual foi possível que os estudantes elaborassem alguma hipótese sobre o vetor estacionário. Tal hipótese pôde ser verificada através de técnicas matemáticas envolvendo o estudo de sistemas lineares. O ocorrido foi que em oposição às técnicas matemáticas executadas manualmente para a resolução do problema os estudantes desenvolveram uma alternativa que pudesse ser utilizada para resolver o sistema linear em estudo. Para tal construção os estudantes fizeram uso do software Maple[36], pois já tinham algum conhecimento sobre o seu uso. O software Maple não dispõe de comandos específicos para fornecer informações sobre os vetores probabilidade para um sistema linear em estudo, sendo então esta parte de responsabilidade do sujeito construí-los. O que se percebeu é que além dos sujeitos fazerem uso desse software para executar o trabalho aritmético, neste caso tornando a tecnologia uma aliada na qual “aliviou” os procedimentos computacionais, os estudantes ao final ainda fizeram uma interpretação sobre o resultado fornecido pelo software, evidenciando a organização conceitual, características observadas em pensamentos provenientes de abstrações reflexionantes. Na figura 54 dois exemplos disso podem ser visualizados.

[36]O *Maple* é um software de licença paga utilizado para a abordagem de conceitos e conteúdos de matemática. Para obter mais informações pode-se acessar http://www.maplesoft.com/. Um software semelhante ao *Maple*, porém de licença gratuita (não paga) é o *Scilab*. Pode ser acessado e obtido em http://www.scilab.org/. Os links foram acessados em outubro de 2015.



(Q8) Faça uma hipótese através do objeto virtual sobre quem poderia ser o vetor estacionário para a situação-problema aqui estudada. Utilize os seus conhecimentos para calcular tal vetor probabilidade estacionário. Justifique.

A hipótese é de o vetor estacionário ser $\begin{bmatrix} 0,4048 \\ 0,4286 \\ 0,1667 \end{bmatrix}$, $(M - Id) \cdot \vec{v} = \vec{0}$

$$\left(\begin{bmatrix} 0,75 & 0,1 & 0,35 \\ 0,15 & 0,8 & 0,15 \\ 0,1 & 0,1 & 0,5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$, escalonando utilizando Maple

obtemos $\left[\begin{array}{ccc|c} -1/4 & 1/10 & -1/2 & 0 \\ 0 & -7/50 & 9/25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$, resolvendo o sistema, temos

$-\frac{1}{4}x + \frac{1}{10}y - \frac{1}{2}z = 0$

$-\frac{7}{50}y + \frac{9}{25}z = 0$

$y = -\frac{9}{25}z \cdot \left(\frac{50}{-7}\right)$ $y = z$

vetor de probabilidade

$\vec{v} = \begin{bmatrix} \frac{17}{7} \\ \frac{18}{7} \\ 1 \end{bmatrix} z \Rightarrow \vec{v} = \begin{bmatrix} \frac{17}{42} \\ \frac{3}{7} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix} z$, com $z = 1$.

[S.5]

( ) Não assimilei a pergunta.

$(M - Ia) \cdot \vec{v} = \vec{0}$

$$\left[\begin{bmatrix} 0,75 & 0,1 & 0,35 \\ 0,5 & 0,8 & 0,15 \\ 0,1 & 0,1 & 0,5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right] \cdot \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} -0,25 & 0,1 & 0,35 \\ 0,15 & -0,2 & 0,15 \\ 0,1 & 0,1 & -0,5 \end{bmatrix} \cdot \vec{v} = \vec{0}$$

escalonando pelo objeto Maple obtem-se $\left[\begin{array}{ccc|c} -1/4 & 1/10 & -1/2 & 0 \\ 0 & -7/50 & 9/25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$, fazendo o sistema temos

$-\frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{10}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 0$ resolvendo o sistema obtem-se

$-\frac{7}{50}x_2 + \frac{9}{25}x_3 = 0$

$\vec{v} = \begin{bmatrix} 17/7 \\ 18/7 \\ 1 \end{bmatrix} \times 3 \Rightarrow \vec{v} = \begin{bmatrix} 17/42 \\ 3/7 \\ 1/6 \end{bmatrix} x_3$ (vetor probabilidade)

[S.3]

( ) Não assimilei a pergunta.

Se $x_3 = 1$ temos vetor estacionário.

Figura 54 – Hipótese e construção do vetor estacionário (3D) por [S.3] e [S.5]. Fonte: arquivo pessoal.

6. ANÁLISE GLOBAL DOS EXPERIMENTOS E A INSPIRAÇÃO NOS CONCEITOS DA ENGENHARIA DIDÁTICA

Verifica-se que após a realização dos três experimentos didáticos devam ser tecidas reflexões que sejam originadas a partir das relações estabelecidas entre os três momentos de experimentação. Procura-se fazer uma análise de como os conceitos da engenharia didática, enquanto inspiração para um desenho metodológico contribuiu para o andamento e evolução da pesquisa ao longo dos três momentos de experimentação didática. Inicialmente torna-se necessário trazer novamente para a discussão as fases ou momentos organizados para a presente pesquisa. Em uma publicação anterior aos segundo e terceiro experimentos didáticos da presente tese, Silva *et al* (2014a, p.6) propõe que as fases da engenharia didática sejam:

1) *Análise prévia* – Nessa fase nos questionamos sobre como ocorre o ensino dos conteúdos propostos e o processo de aprendizagem dos alunos. O pesquisador observa também quais são as dificuldades apresentadas pelos alunos perante esses conteúdos.

2) *Concepção do experimento, análise a priori e criação das hipóteses* – Criação da sequência de atividades que constituem o experimento. Formulação, por parte do professor, das hipóteses que serão possivelmente validadas durante a execução das atividades.

3) *Experimento* – Execução das atividades planejadas na fase anterior.

4) *Análise a posteriori* – Com base nas observações produzidas durante a fase da experimentação, o professor tenta validar ou não as hipóteses conjecturadas e assim validar o seu experimento didático.

Os autores acreditam que a partir de um movimento cíclico (figura 14) da proposta de trabalho, tal que a validação do experimento e o confronto com as hipóteses iniciais possam contribuir significativamente para a análise das concepções e definições estabelecidas pelo pesquisador em suas análises prévias. Ou ainda, nas palavras de Silva *et al* (2014a):

> "Observamos que a engenharia didática constitui uma metodologia cíclica, ou seja, o professor pode durante a execução do seu roteiro de atividades (fase 3) se deparar com novas dificuldades apresentadas pelos alunos e que não foram detectadas anteriormente (fase 1). Neste momento o professor pode redefinir também a sua concepção do experimento e criar hipóteses adicionais, ou ainda refutar alguma das hipóteses anteriores. Assim, uma readequação da proposta metodológica visa a contribuir na construção e aprendizagem dos conceitos de matemática pelos alunos." (SILVA *et al*, 2014a, p. 6)

A partir da menção às fases da engenharia didática, citadas anteriormente, seguem uma discussão e reflexão sobre como elas ocorreram e estiveram entre si correlacionadas no decorrer dos três experimentos didáticos realizados para a presente tese de doutorado.

***Sobre a fase 1*:** Nas diretrizes curriculares nacionais encontramos como orientação e fundamentação que:

> "A organização curricular deve fundamentar-se em metodologia interdisciplinar, que rompa com a fragmentação do conhecimento e a segmentação presentes na organização disciplinar tradicionalmente adotada de forma linear. Esse tradicional modelo educacional foi criticado por Paulo Freire, na obra "Pedagogia do Oprimido", como sendo "educação bancária". Criticou como os conteúdos culturais que formavam o currículo escolar eram frequentemente descontextualizados, distantes do mundo experiencial de seus estudantes. As disciplinas escolares eram trabalhadas de forma isolada, não propiciavam a construção e a compreensão de nexos que permitissem sua estruturação com base na realidade. No procedimento interdisciplinar, os componentes curriculares são compostos de forma integrada e estão voltados para a participação ativa do aluno no seu processo de aprendizagem. O desafio maior para o professor, ao atuar segundo este modelo, reside na sistematização da atuação do estudante e na orientação do mesmo nas trilhas da aprendizagem de forma permanente. A interdisciplinaridade, portanto, deve ir além da justaposição de componentes curriculares, abrindo-se para a possibilidade de relacioná-los em atividades ou projetos de estudos, pesquisa e ação, para dar conta do desenvolvimento de saberes que os conduzem ao desenvolvimento do perfil profissional de conclusão planejado para o curso." (BRASIL, 2013, p.244)

No que se refere à formação de professores, a ideia de interdisciplinaridade também está manifestada no parecer[37] das Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação Inicial e Continuada dos Profissionais do Magistério da Educação Básica. No documento é possível perceber a intencionalidade quanto às formas de elaboração e construção de conhecimento, sugerindo-se para que as mesmas não ocorram de forma isolada e fragmentada. Na disciplina de matemática, em especial durante a formação inicial do professor, é importante que a interdisciplinaridade seja valorizada e assim oportunize a construção dos mais diversos conhecimentos matemáticos.

Portanto, por parte do pesquisador, as discussões envolvendo interdisciplinaridade e construções de conhecimento oportunizaram que algumas reflexões sobre a aprendizagem dos conteúdos de matemática presentes na sequência de atividades fossem produzidas. Conforme mencionei no capítulo de introdução do presente texto durante minha experiência enquanto docente das diversas modalidades de ensino me deparei (e deparo-me ainda...) com estudantes inseridos em um sistema de ensino da matemática até então predominantemente clássico, onde as aulas de

[37]Parecer disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=17625-parecer-cne-cp-2-2015-aprovado-9-junho-2015&category_slug=junho-2015-pdf&Itemid=30192 (acesso em setembro de 2015)

matemática poderiam ser caracterizadas por se constituir apenas em atividade de efetuar cálculos sem a possibilidade de investigar situações-problema que envolvam simultaneamente diversos conteúdos de matemática. Constato que ao propor a discussão de problemas ou situações mais elaboradas com raciocínios que envolvem argumentação, os estudantes manifestam algumas dificuldades em assimilar a situação e mobilizar as ideias necessárias no processo para a construção de conceitos e compreensão sobre situação.

Acredito que ao oportunizar ao estudante, independente da modalidade de ensino a qual ele está inserido, compreender a importância da matemática para modelar fenômenos da realidade e destacar a importância da informática como ferramenta para representar e manipular diferentes situações há intenção de propiciar uma melhor compreensão e, consequentemente, a aprendizagem de conteúdos matemáticos. Nas análises prévias, anteriores aos experimentos didáticos, buscou-se refletir sobre questões relacionadas ao ensino de determinados conteúdos matemáticos. A análise centrou-se em refletir sobre como as práticas metodológicas no ensino de matemática predominantemente tradicional e sem relação com as demais áreas do conhecimento humano influenciam na construção e aprendizagem dos conceitos matemáticos por todos os sujeitos envolvidos. Constatou-se a partir da análise que as possíveis falhas de aprendizagem e dificuldades apresentadas pelos estudantes ao longo da vida escolar possam ser influenciadas por práticas metodológicas dos professores que se opõem ao discurso apresentado nas diretrizes curriculares, as quais propõem que seja desenvolvido um trabalho metodológico que: (1) oportunize ao estudante conhecer e explorar amplamente as diversidades através da interdisciplinaridade, (2) que faça da matemática uma ciência necessária à compreensão e entendimento de diversos fenômenos, (3) que a matemática seja uma fonte de construção do pensamento, a qual se torna ferramenta para relacionar os conteúdos da disciplina com diversas aplicações e, finalmente, porém não menos importante, (4) que valorize o *processo* de aprendizagem da matemática e seus conceitos pelos sujeitos, ampliando cada vez mais as potencialidades de seu desenvolvimento, em oposição a uma possível e considerada aprendizagem pontual e não efetiva dos conceitos.

***Sobre a fase 2*:** A segunda fase caracterizou-se por ocorrer em duas etapas: criação das sequências de atividades que seriam realizadas e elaboração das hipóteses que seriam testadas e possivelmente validadas durante a execução dos experimentos. Como a pesquisa ocorreu em três momentos temporais distintos (2014/1, 2015/1, 2015/2) desde a elaboração da primeira sequência de atividades e do primeiro objeto virtual, os mesmos passaram por reformulações e aperfeiçoamentos.

Os aperfeiçoamentos ocorreram devido à percepção do professor pesquisador enquanto executava as sequências de atividades, pois se percebeu em alguns momentos que as atividades necessitavam de reformulação, adaptação ou readequação dentro do grupo da sequência. Nos dois primeiros experimentos as elaborações dos sujeitos que participaram do experimento contribuíram para o melhoramento do objeto virtual, tanto nas questões funcionais como também em layout e organização dos elementos na tela.

A partir da ideia de abordar situações-problema que envolvessem e relacionassem o tripé *modelagem matemática – Cadeias de Markov – tecnologias digitais*, delineou-se como objetivo principal a pesquisa: pesquisar sobre como os processos da tomada de consciência e abstração reflexionante influenciam a elaboração e desenvolvimento do pensamento hipotético-contínuo ao utilizar objetos virtuais na investigação de situações-problema que envolvem modelagem matemática com Cadeias de Markov.

Ao construir o objetivo principal apresentado anteriormente se pensou inicialmente *quais* situações-problemas fariam parte da sequência de atividades. A partir da definição dos problemas que fariam parte do conjunto de situações a serem exploradas pelos sujeitos, passou-se então para a etapa de construção das sequências de atividades (anexos D, E, F). Durante o momento de construção duas hipóteses foram elaboradas pelo professor/pesquisador:

H1) O uso do *software* GeoGebra (na forma de objetos virtuais) contribui no estudo das situações-problema propostas aos sujeitos. A hipótese H1 visa qualificar o estudo das situações apresentadas com o uso da tecnologia, em comparação à exposição dos mesmos problemas sem fazer uso dos recursos tecnológicos.

H2) As situações apresentadas nas atividades refletem uma necessidade onde a partir de contextos práticos a matemática torna-se uma ferramenta útil para a tomada de decisão, por parte do sujeito. A hipótese H2 reafirma nossa concepção de que a aprendizagem somente terá sentido se entendida como um *processo* de construção, no qual a participação e atuação do sujeito é o elemento central durante todo o desenvolvimento.

É de considerável importância mencionar que a hipótese H1 foi elaborada sem a realização de uma pesquisa que tentasse responder o seguinte questionamento: Como ocorreria a construção de conhecimento matemático pelos sujeitos ao realizarem atividades que envolvessem modelagem matemática com Cadeias e Markov e não fizessem uso de objetos virtuais? Acredita-se que tal questionamento tenha potencial e possa gerar pesquisas de doutorado/mestrado que tratem de responder ou esboçar construções teóricas sobre o assunto. Nosso propósito em acreditar na hipótese H1 foi de considerar profícua a forma de uso da tecnologia na presente tese e que a mesma contribuísse junto ao processo de construção do conhecimento pelos sujeitos.

***Sobre a fase 3*:** Esta etapa foi caracterizada pela execução das sequências de atividades planejadas. Ao todo ocorreram três experimentos em momentos de tempo e com públicos alvos distintos. Foram eles:

Experimento 1 (2014/1): Ocorreu com um conjunto de 20 participantes, constituídos por alunos de graduação em licenciatura em matemática e professores de matemática da região de Passo Fundo (RS). Através da oficina pedagógica intitulada “Cadeias de Markov e Geogebra: modelagem matemática e possibilidades para a construção de conceitos através do uso de objetos virtuais”, ocorrida em um congresso[38] na Universidade de Passo Fundo (UPF).

Experimento 2 (2015/1): Ocorreu com a turma do quarto ano do ensino médio e técnico integrado no IFRS – Campus Caxias do Sul. O experimento didático ocorreu em um dos laboratórios de informática da instituição nas aulas regulares da disciplina de matemática ao longo de cinco semanas.

Experimento 3 (2015/2): Ocorreu com a turma da disciplina de Modelagem Matemática do curso de Licenciatura em Matemática do IFRS – Campus Caxias do Sul. O experimento didático ocorreu em um dos laboratórios de informática da instituição nas aulas regulares da disciplina de matemática ao longo de cinco semanas e mais uma parte semipresencial.

Nota-se que entre a realização dos experimentos didáticos ocorreu por parte do professor/pesquisador reflexões que visavam o aperfeiçoamento da sequência de atividades e dos objetos virtuais utilizados. Tais aprimoramentos e aperfeiçoamentos foram necessários e importantes para a qualificação do trabalho que estava sendo executado.

Sobre a fase 4**:** Constituiu um importante momento pois a partir das observações produzidas durante as experimentações, tenta-se validar ou não as hipóteses formuladas para validar o experimento didático. Neste momento surgiram questões que merecem ser colocadas: (1) O que os estudantes aprenderam com os experimentos? (2) Os objetos virtuais auxiliaram no processo de construção de conhecimento matemático? (3) Que tipos de relações os estudantes produziram ao utilizar os objetos virtuais? (4) Foi oportunizado ao longo das atividades que os sujeitos construíssem conceitos e tomassem decisões a partir das situações propostas? (5) Os desafios feitos pelos objetos foram assimilados pelos sujeitos, a ponto de contribuir qualitativamente no processo de abstração reflexionante? Esses desafios provocaram desequilíbrios? Os sujeitos responderam a esses desequilíbrios com reequilibrações ou reflexões? Os reflexionamentos e reflexões ou o processo de abstração reflexionante gerou avanços qualitativos? (6) O uso da tecnologia digital funcionou como fator que ajudou na a execução das atividades? (7) As hipóteses formuladas pelo pesquisador são relevantes?

Quanto às questões apresentadas anteriormente, acredita-se que elas não sejam apenas sete.

[38] Eventos intitulados *V Jornada Nacional de Educação Matemática* e *XVIII Jornada Regional de Educação Matemática* que ocorreram em 2014, na cidade de Passo Fundo (RS). Disponível em: http://www.upf.br/jem/

Pode-se enumerar um amplo conjunto de questões que surgiram a partir da aplicação dos experimentos e que visavam ajudar o professor/pesquisador na validação do experimento e das hipóteses formuladas. Tais questões são úteis quando o pesquisador reflete sobre a validação ou não dos experimentos ocorridos na fase anterior. Os questionamentos elaborados na etapa quatro da engenharia didática oportunizam que todas as fases anteriores também sejam repensadas, constituindo-se um movimento metodológico cíclico, no qual conforme o professor perceba que algo está ocorrendo equivocadamente ou fora do planejamento esperado possa alterar o percurso e o caminho da sequência didática em execução.

Em relação às hipóteses H1 e H2 formuladas e mencionadas anteriormente considera-se que ambas tenham sido confirmadas e validadas com a execução dos experimentos didáticos. Conforme se explorou no capítulo de análise das produções dos sujeitos à luz de conceitos da epistemologia genética, a construção de conhecimento matemático ao longo das atividades ocorreu e reforçaram a nossa concepção sobre o tripé *modelagem matemática – Cadeias de Markov – tecnologias digitais.* Se fôssemos elaborar as respostas para as questões apresentadas, com os dados, análises e reflexões produzidas ao longo do trabalho de tese, as possíveis respostas para esta tese poderiam ser:

(1) O que os estudantes aprenderam com os experimentos? Acredita-se que aprenderam que a matemática é uma ciência que resulta do esforço humano em teorizar e explicar muitos fenômenos da realidade, nos mais diversos graus de intensidade e complexidade. Ao discutir o paradigma ideal *vs* realidade e as contribuições que a matemática tem neste processo, os sujeitos passaram por momentos de construção/reconstrução de saberes e conceitos.

(2) Os objetos virtuais auxiliaram no processo de construção de conhecimento matemático? Pensa-se que sim. As mudanças de parâmetros e a “instantaneidade” dos resultados conforme as alterações realizadas oportunizaram aos sujeitos que avançassem na validação de suas próprias hipóteses enquanto investigavam as situações-problema. Neste sentido, pensa-se que os objetos virtuais auxiliaram na construção de conhecimento matemático.

(3) Que tipos de relações os estudantes produziram ao utilizar os objetos virtuais? (4) Foi oportunizado ao longo das atividades que os sujeitos construíssem conceitos e tomassem decisões a partir das situações impostas? (5) Os desafios feitos pelos objetos foram assimilados pelos sujeitos, a ponto de contribuir qualitativamente no processo de abstração reflexionante? Esses desafios provocaram desequilíbrios? Os sujeitos responderam a esses desequilíbrios com reequilibrações ou reflexões? Os reflexionamentos e reflexões ou o processo de abstração reflexionante gerou avanços qualitativos? Acredita-se que a resposta para estas três questões seja possível de elaborar a partir das análises e reflexões apresentadas no capítulo cinco da presente tese.

(6) O uso da tecnologia digital foi um fator que ajudou ou atrapalhou durante a execução das atividades? As tecnologias digitais demonstraram ser muito úteis ao longo dos experimentos

didáticos realizados. Pelo estudo bibliográfico previamente feito, notou-se, a partir do envolvimento dos sujeitos com a execução da proposta, que a tecnologia surgiu como aliada no processo de construção das possíveis soluções e modelos matemáticos envolvendo a modelagem matemática com Cadeias de Markov.

(7) As hipóteses formuladas enquanto pesquisador são de fato válidas? Pensa-se que a resposta para esta questão seja afirmativa, de acordo com a argumentação realizada ao longo das questões anteriores.

Em relação aos resultados obtidos com a realização da engenharia didática; através da construção, aplicação e análise da sequência de atividades verifica-se que nossa proposta converge com o pensamento de Lopes *et al* (2015) que argumenta:

> “Ao tentar encontrar uma maneira de solucionar os problemas, no caso os exercícios propostos, os estudantes sentiram-se desafiados, e isso os motivou durante a atividade. Tal condição, de desafio e uso da criatividade, vem ao encontro do conceito de engenharia didática que compara, guardadas as singularidades, o trabalho da sala de aula com o de um engenheiro.” (LOPES *et al*, 2015, p.570)

Ao considerar a matemática uma ciência construída a partir do esforço humano e em constante evolução e aperfeiçoamento, ao propor a investigação de situações-problema e contextos da realidade é oportunizado ao estudante construir para si sua própria matemática. Ou seja, ao desafiar os estudantes na produção de matemática vai-se além da construção de conceitos; é possível que os estudantes conscientizem-se do seu papel colaborativo enquanto sujeito inserido na vida em sociedade. Logo, acredita-se que nesta tese de doutorado, o uso da engenharia didática enquanto inspiração para uma metodologia de trabalho, a qual exige que as quatro etapas ou fases apresentadas sejam contempladas, tenha cumprido a sua função.

7. REFLEXÕES FINAIS, BRAINSTORMING

O presente capítulo propõe-se a expor algumas reflexões produzidas a partir da presente pesquisa de tese. Este espaço também será utilizado para realizar um exercício de *brainstorming*, ou “tempestade de ideias”, na qual se almeja que, por meio das reflexões produzidas, estas possam motivar pesquisas futuras, as quais visem contribuir para o campo de pesquisa em modelagem matemática e ensino de matemática, cuja interseção seja mediada pelas tecnologias digitais. Inicialmente a reflexão ocorrerá organizada em itens, sendo que ao final procura-se fazer um fechamento relacionando as ideias previamente debatidas.

(A) Sobre a Modelagem Matemática... A modelagem matemática na presente tese surgiu como possibilidade para o desenvolvimento de um trabalho. Desde a concepção inicial da tese, a modelagem matemática fez-se presente, pois se acreditava que suas contribuições seriam de grande valia para o desenvolvimento da proposta. Durante os experimentos dois e três, em sala de aula, a partir das discussões envolvendo a construção de possíveis modelos matemáticos, pode-se argumentar sobre possíveis aproximações/afastamentos dos conceitos sobre “idealização” e “realidade” para determinado fenômeno. A experimentação envolvendo diversas situações-problema e a elaboração de possíveis modelos matemáticos que pudessem explicar mesmo que parcialmente a realidade marcou constante presença ao longo de toda a pesquisa. Com a modelagem foi possível perceber enquanto pesquisador o quanto a teoria e as aplicações da matemática dialogam e se relacionam ao longo do desenvolvimento escolar. Percebeu-se que ambas estão inter-relacionadas e contribuem qualitativamente para a construção e a aprendizagem dos conceitos matemáticos, independente do nível escolar observado. As pesquisas consultadas mostraram que a modelagem matemática apresenta aspectos profícuos se incorporadas à metodologia de ensino por parte do professor, pois valorizam o papel desempenhado pelo estudante durante o processo de investigação. Neste sentido, observa-se no uso da modelagem matemática enquanto método de investigação na sala de aula que o estudante a partir de sua ação sobre os mais diversos objetos do conhecimento possa ser o principal ator durante o processo da própria aprendizagem.

(B) Sobre as Cadeias de Markov... Considera-se que a abordagem deste assunto tenha sido inédita sob a forma que se apresentou neste trabalho de tese. Uma abordagem de sistemas dinâmicos, em especial os que utilizam as Cadeias de Markov, como teoria matemática necessária para o entendimento de alguns fenômenos que ocorrem na realidade mesmo que idealizados, possibilitou a todos os sujeitos envolvidos que se dessem conta sobre a utilidade das teorias matemáticas necessárias para a compreensão da realidade, mesmo que esta fosse parcial. Em consulta às poucas pesquisas existentes envolvendo questões pedagógicas sobre o assunto, as mesmas manifestavam a necessidade de um olhar diferenciado sobre os processos de ensino e aprendizagem envolvendo Cadeias de Markov. Portanto, primeiramente consistiu em um grande desafio enquanto docente da disciplina de matemática oportunizar que alguns conceitos envolvendo o assunto fossem discutidos no ensino básico. Segundo, para o nível superior, acredita-se que a abordagem deste assunto também tenha sido um desafio, pois se refletiu como uma possível organização/reorganização e aplicação de conhecimentos previamente construídos tanto pelos estudantes quanto pelo professor. Também vale ressaltar que enquanto sujeito epistêmico as leituras matemáticas e pedagógicas que realizei sobre o assunto me fizeram aprender de forma multifacetada esta aplicação da Álgebra Linear.

(C) Sobre a Epistemologia Genética... Foi muito desafiador enquanto estudante de doutorado aprofundar-se em textos de intensa densidade teórica, tais como "Abstração Reflexionante", "Tomada de Consciência" e "Fazer e Compreender" de J. Piaget. Foram leituras que oportunizaram um novo entendimento sobre o termo *processo* em contextos que envolvam aprendizagem. As leituras possibilitaram além de uma fundamentação teórica consistente e necessária para o capítulo das análises e reflexões sobre as produções dos estudantes, minha reorganização enquanto professor de matemática. Ao conhecer essas teorias percebi com mais atenção que a matemática é uma ciência que resulta de um processo temporal combinado com o esforço e tentativa do ser humano de compreender ao máximo os objetos do conhecimento. Ao partir da zona periférica o movimento oscilatório entre os centros (do sujeito e do objeto) ocorrem sucessivos e graduais micro-avanços em abstração reflexionante, seguidos de tomadas de consciência, atingindo abstrações refletidas. Pela ação ou coordenação de ações é possível que o sujeito evolua e desenvolva qualitativamente as suas formas de pensamento, possivelmente alcançando níveis de tomada de consciência superiores e, consequentemente, de abstrações refletidas. Cabe observar e destacar que durante a presente pesquisa também foi notável a importância da abstração pseudo-empírica durante o processo de construção conceitual dos sujeitos. Por tratar-se de um tipo de abstração reflexionante e ter uma qualidade inerente da ação do sujeito sobre os objetos, as quais se atribuem características que não fazem parte do objeto por parte do sujeito, a abstração pseudo-empírica desempenhou um papel fundamental no avanço dos sujeitos ao longo das atividades. Nesse processo, ao observar níveis cada vez mais elaborados e elevados de abstrações reflexionantes (predominantemente pseudo-empíricas), inclusive com tomadas de consciência, o pensamento se torna o próprio objeto investigado pelo sujeito, tornando-se possível fazer o exercício das reflexões sobre reflexões, ou ainda metarreflexões; é nessa altura que se produz conhecimento matemático, retirando características das coordenações das ações. Na fundamentação teórica também foi mostrada e discutida a importância das regulações ativas, enquanto agem como uma espécie de motor para a abstração reflexionante. Considera-se que tal característica, inerente ao pensamento humano seja o que de fato possibilita aos sujeitos aperfeiçoar a qualidade de seu pensamento por meio da sucessiva ação e coordenação das mesmas sobre os objetos em investigação, sejam materiais ou mentais. Após a realização dos três experimentos didáticos, durante a análise das produções, foi possível relacionar em diversos momentos a construção do conhecimento matemático dos sujeitos com os conceitos trazidos da Epistemologia Genética. Por fim, constatou-se que tais conceitos constituíram uma fundamentação teórica capaz de auxiliar na interpretação dos registros escritos, fornecendo os subsídios necessários para verificar os graduais e processuais micro-avanços dos sujeitos na direção do aumento do conhecimento ou capacidade cognitiva.

(D) Sobre as Tecnologias Digitais... Considera-se que tecnologias digitais desempenharam importantes funções desde o início da presente pesquisa de doutorado. A seguir procura-se ilustrar algumas destas funções. *Função construtora*: Fez-se uso das tecnologias digitais na concepção e construção dos objetos virtuais (Cadeia de Markov – 2D, Cadeia de Markov – 3D) utilizados nas sequências de atividades como também na organização e publicação de um produto virtual da tese (GeoGebraBook). Sem os recursos tecnológicos não seria possível construir o material virtual utilizado durante a pesquisa. *Função colaborativa*: Diante dos relatos observados na literatura consultada contatou-se aderência e convergência quanto ao agir dos sujeitos enquanto faziam uso da tecnologia. Ao fazer uso de recursos tecnológicos durante a investigação de diversas situações-problema notou-se em todos os experimentos que o foco dos sujeitos estava na criação/validação, aperfeiçoamento e reformulação das hipóteses, sendo destinado ao computador realizar os procedimentos estritamente de execução aritmética. Com isto, a tecnologia surge como uma aliada pela qual o sujeito centra-se predominantemente no processo de atividade cognitiva. *Função inovadora*: Considera-se que por meio da tecnologia foi possível de alguma forma inovar pela criação e desenvolvimento de objetos virtuais que ainda não existiam e serviriam para uma abordagem envolvendo Cadeias de Markov. Acredita-se que tal função representa ou expressa, de alguma forma, o conceito de regulação ativa explanado antes, constituindo-se numa essência individual por parte do sujeito. Quando pensei em pesquisar no doutorado a construção de conhecimento matemático, provenientes da investigação de situações-problema com modelagem matemática fazendo uso das Cadeias de Markov pelos sujeitos e não encontrei alternativas tecnológicas para tal objetivo, procurei conceber e desenvolver os meios para isto. Acredito que as três funções desempenhadas pelas tecnologias digitais, relatadas anteriormente, estiveram fortemente correlacionadas durante o trabalho e oportunizaram o adequado andamento do projeto, uma vez que durante a execução do projeto foram aperfeiçoadas e melhoradas funções dos objetos virtuais.

(E) Sobre a Engenharia Didática... Acredita-se que a construção da sequência de atividades à luz de inspiração metodológica fundamentada nos princípios da Engenharia Didática envolvendo o assunto desta tese e que fizessem uso de objetos virtuais constituiu-se em um produto didático capaz de oportunizar a construção de conhecimento matemático pelos sujeitos. Buscou-se nos conceitos da engenharia didática construir e organizar sequências de atividades que fossem além do momento de sala de aula; que oportunizassem para mim, enquanto professor, realizar um exercício sobre a minha ação prática enquanto proponente das atividades. Tinha-se em mente desde o início da proposta que as atividades deveriam propor um fazer diferente aos sujeitos, e não apenas que fossem um exercício concentrado no *savoir faire* sem a oportunidade de investigação sobre as explicações causais dos fenômenos. Tais sequências de atividades foram pensadas e criadas a partir de sugestões de problemas encontradas na literatura estudada, sendo que ao longo dos três experimentos didáticos as sequências atravessaram um processo de transformação e metamorfose, buscando-se o constante aperfeiçoamento.

Os cinco itens apresentados que acabamos de apresentar expõem algumas reflexões pontuais, as quais contribuíram para nosso entendimento e verificação de uma possível resposta para nossa questão norteadora, bem como para os objetivos propostos. Nossa intenção desde a “Introdução” deste texto era argumentar que a construção do conhecimento matemático é resultado da possível combinação dos seguintes fatores: (1) evolução da atividade cognitiva do sujeito, manifestada pelo aperfeiçoamento do processo da abstração; (2) aperfeiçoamento da ação e coordenação das ações dos sujeitos sobre os objetos em estudo; (3) uso da tecnologia digital como parceira no estabelecimento de relações entre sujeito e objeto de conhecimento, potencializando a análise e interpretação de modelos matemáticos pelo uso do computador.

A questão norteadora da pesquisa consistia em tentar responder à pergunta: *Como evolui a abstração refletida (abstração reflexionante com tomada de consciência), na construção de conceitos matemáticos durante a exploração de situações-problemas de modelagem matemática com Cadeias de Markov em uma sequência didática usando objetos virtuais?* Constatou-se a partir dos três experimentos didáticos que a ação do sujeito, em suas mais diversas evocações e tipos (materiais ou mentais), aliada à coordenação das mesmas, durante a exploração das diversas situações-problema na tentativa de resolver os desafios e impasses que se colocavam pela diversidade dos objetos, fez com que a cada novo avanço uma reorganização parcial por parte do sujeito ocorresse. Notou-se, a partir dos experimentos, que a evolução e aperfeiçoamento dos níveis de abstrações e tomadas de consciência estava diretamente relacionado com a criação/validação ou reformulação de hipóteses previamente elaboradas pelos sujeitos, provenientes da organização/reorganização cognitiva na criação e desenvolvimento dos novos e "mais potentes" esquemas assimiladores. Tais esquemas, por sua vez, colaboraram nas operações de reflexionamento e reflexão, possibilitando ao sujeito aperfeiçoar suas estruturas cognitivas. Neste "fluxo de constante e gradual aperfeiçoamento", quanto mais elaboradas as abstrações e tomadas de consciência melhores foram as projeções para patamares superiores, oportunizando uma possível "reestruturação da estrutura cognitiva" dos sujeitos, quando observados sob termos qualitativos. Por sua vez, a considerada reestruturação da estrutura cognitiva somente ocorreu mediante as coordenações de ações que deviam ser cada vez mais potenciais, a ponto que o sujeito as executasse em nível de metarreflexão, em que o objeto, sobre o qual se pratica as ações estão predominantemente no plano do pensamento.

Considerando-se os fatos apresentados anteriormente, então a partir da possível combinação dos fatores e aperfeiçoamento do processo descrito antes tenha sido oportunizado aos sujeitos desenvolver e aprimorar uma nova qualidade de pensamento denominada por nós na tese de *hipotético-contínuo*. Ou seja, da relação entre a *continuidade* no processo de abstração (aperfeiçoamento dos esquemas assimiladores, modificação/aperfeiçoamento das estruturas cognitivas) e do processo de *aperfeiçoamento e construção de hipóteses* ocorre o desenvolvimento dessa nova forma de pensamento. Verificou-se que a cada modificação na tela do computador (via mudança de parâmetros, por exemplo) houve uma reorganização dos esquemas[39], estabelecimento de novas abstrações que agiram na direção da formação de novas hipóteses, as quais avançaram de modo dinâmico e iterativo, promovendo assim uma reorganização ou reestruturação das estruturas qualitativamente melhores para o sujeito.

Finalmente, acredita-se que em nenhum momento o presente trabalho de tese intencionou ou propôs algum tipo de "salvacionismo" ou solução para possíveis problemas que existem no ensino da matemática. Ao contrário, procurou-se mediante uma construção teórica consistente mostrar de que forma a tecnologia digital pode contribuir na elaboração e construção de conceitos matemáticos envolvendo modelagem matemática com Cadeias de Markov, através do uso de sequências de atividades. Evidenciou-se através do diálogo entre Tecnologias Digitais, Modelagem Matemática, Cadeias de Markov, Engenharia Didática e Epistemologia Genética intensa aderência e

---

[39]Atribui-se à palavra "esquema" na expressão "reorganização dos esquemas" o conceito utilizado em Epistemologia Genética. O prof. Dr. Marcelo Borba (UNESP, SP) utiliza a expressão "reorganização do pensamento" para denotar uma organização própria do sujeito. Para tal, uma indicação de leitura é "**Tecnologias informáticas na Educação Matemática e Reorganização do pensamento**. In: Bicudo, M. A. V.. (Org.). Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas. 1ºed. São Paulo: UNESP, 1999, v. 1, p. 285-295." Disponível em: http://www.rc.unesp.br/gpimem/downloads/artigos/borba/borba_tecinfo_em_rp.pdf

convergência entre as possibilidades para a construção dos conceitos. Tais conceitos em nossa proposta se consolidaram como resultado de um processo complexo, correlacionado e com uma infinidade de possíveis relações entre os cinco elementos antes elencados e discutidos. A figura 55 tenta ilustrar a ideia exposta nesse parágrafo.

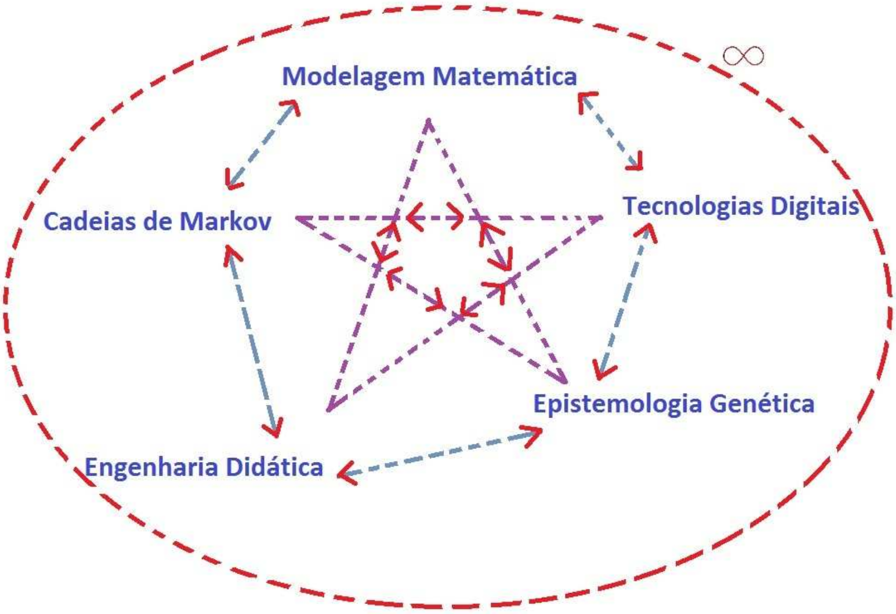


Figura 55 – Possíveis diálogos entre os pilares teórico-metodológicos da tese. Fonte: os autores.

8. CONSTRUÇÃO DE UM PRODUTO VIRTUAL: GEOGEBRABOOK

A proposta do presente capítulo é apresentar a construção de um produto virtual a partir das sequências de atividades, construídas e utilizadas na presente pesquisa de doutorado. Todo o material está disponibilizado na *internet*, no repositório de objetos virtuais do GeoGebra, o GeoGebratube, e pode ser acessado de qualquer dispositivo: notebook, desktop, celulares smartphones, tablets, entre outros.

A motivação para a construção e divulgação deste material está no fato de que, assim, os professores e demais pesquisadores interessados em utilizar o material desta tese, possam optar por fazê-lo de modo totalmente virtual com os estudantes. Não é descartada a possibilidade do material disponibilizado nos apêndices E e F também serem utilizados na forma impressa durante as aulas, e que sejam acessados somente os objetos virtuais mostrados no capítulo quatro. Porém, procura-se mostrar no presente capítulo que a construção de um ambiente virtual que possa integrar objetos virtuais e questionamentos propostos nas nossas sequências de atividades constitui um novo olhar onde se abrem novas possibilidades sobre do uso das sequências de atividades em sala de aula.

Mostra-se como, a partir das atividades da sequência aplicada em sala de aula, foi elaborado e construído um livro virtual com todas as atividades, constituindo-se assim um *GeoGebraBook*. Essa é uma funcionalidade relativamente nova[40] no ambiente do GeoGebratube e oportuniza que sejam produzidos e disponibilizados diversos materiais didáticos que façam uso e relacionem diferentes mídias digitais: texto, imagens, objetos virtuais e vídeos. Todo acesso a este material ocorre de forma livre e irrestrita na *internet*, não sendo necessário ter conta ou cadastro no ambiente. Apenas no caso em que o usuário deseja utilizar o material virtual, vinculando-o ou adaptando-o a outras atividades é que se torna necessário estar cadastrado no ambiente do GeoGebratube.

Com isso, abrem-se novas possibilidades para o uso desta tecnologia digital no ambiente de sala de aula. A partir da criação de um GeoGebraBook oportuniza-se ao professor desenvolver suas atividades de modo totalmente virtual através da noção de "grupo", o qual também corresponde à uma inovação e aperfeiçoamento dentro do ambiente virtual do GeoGebratube. Nesta modalidade de trabalho, via grupos, os estudantes são desafiados a explorar e realizar todas as atividades de forma dinâmica e virtual, pelas quais o professor tem acesso à produção dos estudantes e por meio do próprio grupo poderá promover discussões, retornar pontualmente para cada estudante na forma de *feedbacks* suas sugestões e considerações.

Na figura 56 abaixo está a página principal do GeoGebraBook construído a partir das

[40]Usa-se como referência para fazer tal afirmação o ano de 2015, pois foi neste ano que o autor da presente tese conheceu tal funcionalidade do ambiente virtual.

atividades. Intitulado "**Sequência de Atividades – Cadeias de Markov**" o material pode ser acessado através do endereço eletrônico informado na legenda da figura. Ao acessar o material é permitido que o visitante compartilhe ou faça seu download, através dos botões indicados em [A]. O material foi organizado conforme está disposto em [B], na forma de dois capítulos, a saber; Tomo[41] I – Ensino Médio e Tomo II – Ensino Superior. Na página "Início de conversa" é possibilitado ao visitante conhecer em linhas gerais sobre o tema da proposta. Nas "Referências" são apresentadas todas as obras citadas ao longo das atividades. Em [C] é possível visualizar a organização de todas as atividades. Como durante os experimentos as atividades ocorreram ao longo de alguns dias, tanto no ensino médio como no ensino superior, preferiu-se manter essa organização na disposição das atividades, nos capítulos no GeoGebraBook.

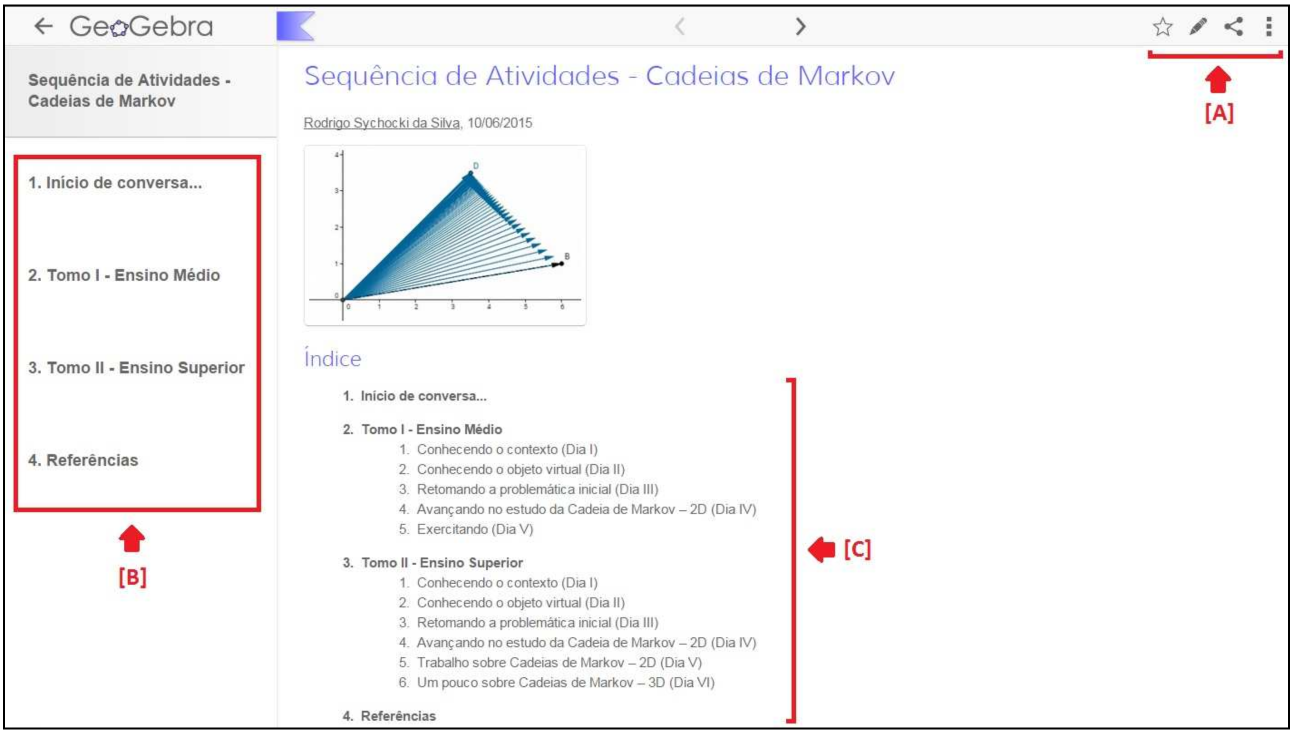


Figura 56 – *GeoGebraBook* das atividades. Disponível em: http://tube-beta.geogebra.org/material/simple/id/1316155

Quando alguma das atividades é acessada em [C] na indicação da figura anterior, o visitante é conduzido para a página específica das atividades do dia escolhido, conforme o exemplo mostrado na figura 56. É possível se localizar em relação ao material observando a indicação em [2] como também avançar para páginas posteriores ou anteriores através das indicações "<" e ">". O botão indicado em [1] permite que usuário esconda a aba dos capítulos, indicada por [B] na figura anterior. É possível ao longo da página fazer indicações de outros materiais disponíveis para acesso

[41] Escolheu-se chamar de "Tomo" em homenagem ao escritor gaúcho *Érico Veríssimo* (1905 – 1975), autor da obra "O Tempo e o Vento", cujas partes, ou tomos são: "O Continente" (I e II), "O Retrato" (I e II) e "O Arquipélago" (I, II e III). Biografia disponível em: http://www.releituras.com/everissimo_bio.asp (acesso em setembro de 2015)

via internet. Neste caso, através da indicação do *link*, conforme [3], é possível acessar o material complementar ao estudo que está sendo desenvolvido. No decorrer de todas as atividades foram colocadas caixas de resposta para que pudesse ser feito o registro por parte dos usuários, de acordo com [4]. Observa-se que é possível do usuário alterar o tamanho da caixa de resposta, a qual dependerá então da resposta fornecida para cada um dos itens questionados.

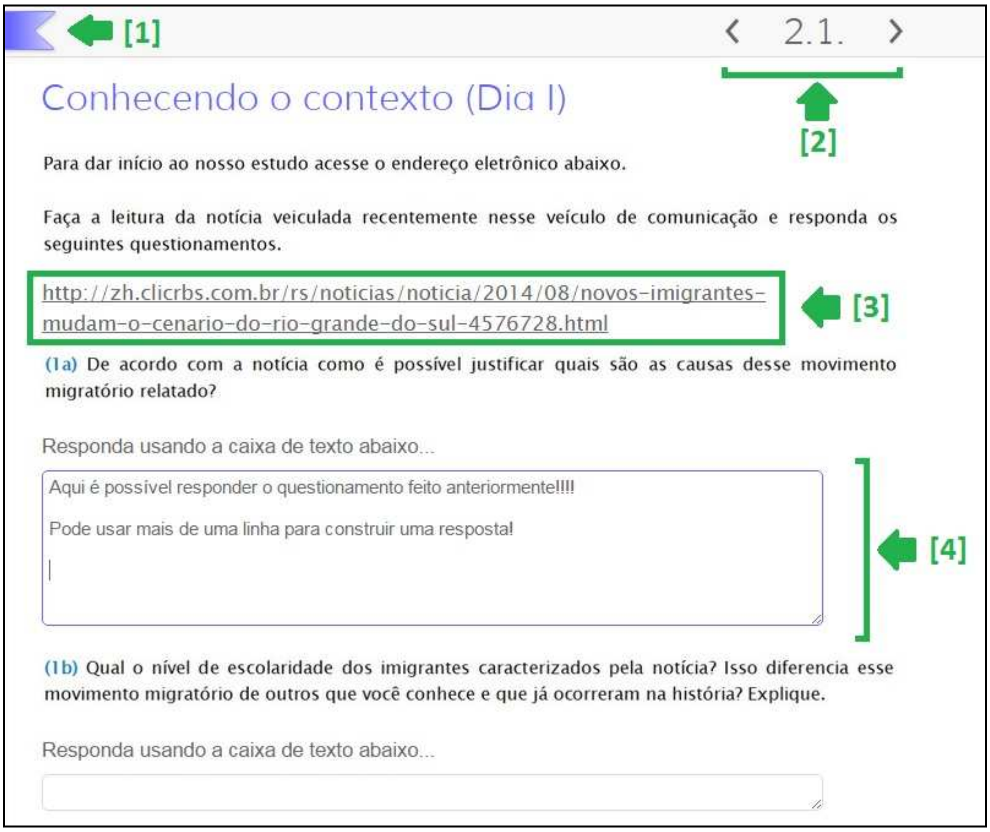


Figura 57 – Exemplo de atividade no GeoGebraBook. Disponível em: http://tube-beta.geogebra.org/material/simple/id/1316155#material/1362037

No início desse capítulo, mencionamos que ao longo do material criado e organizado em um GeoGebraBook é possível integrar diferentes mídias digitais, tais como: texto, imagens, objetos virtuais e vídeos. Conforme ilustrado na figura 58, as atividades podem ser feitas pelos usuários ao mesmo tempo em que os objetos virtuais são manipulados. Indica-se por [A1] e [B3] os objetos virtuais que foram incluídos e estão integrados na página de atividades. Em [B1] e [A3] mostram-se que as caixas de resposta podem ser usadas de modo concomitante com os objetos virtuais. Portanto, não é necessário que o estudante use diferentes janelas durante a execução de uma atividade, concentrando-se assim o seu trabalho e ação em uma única página por vez.

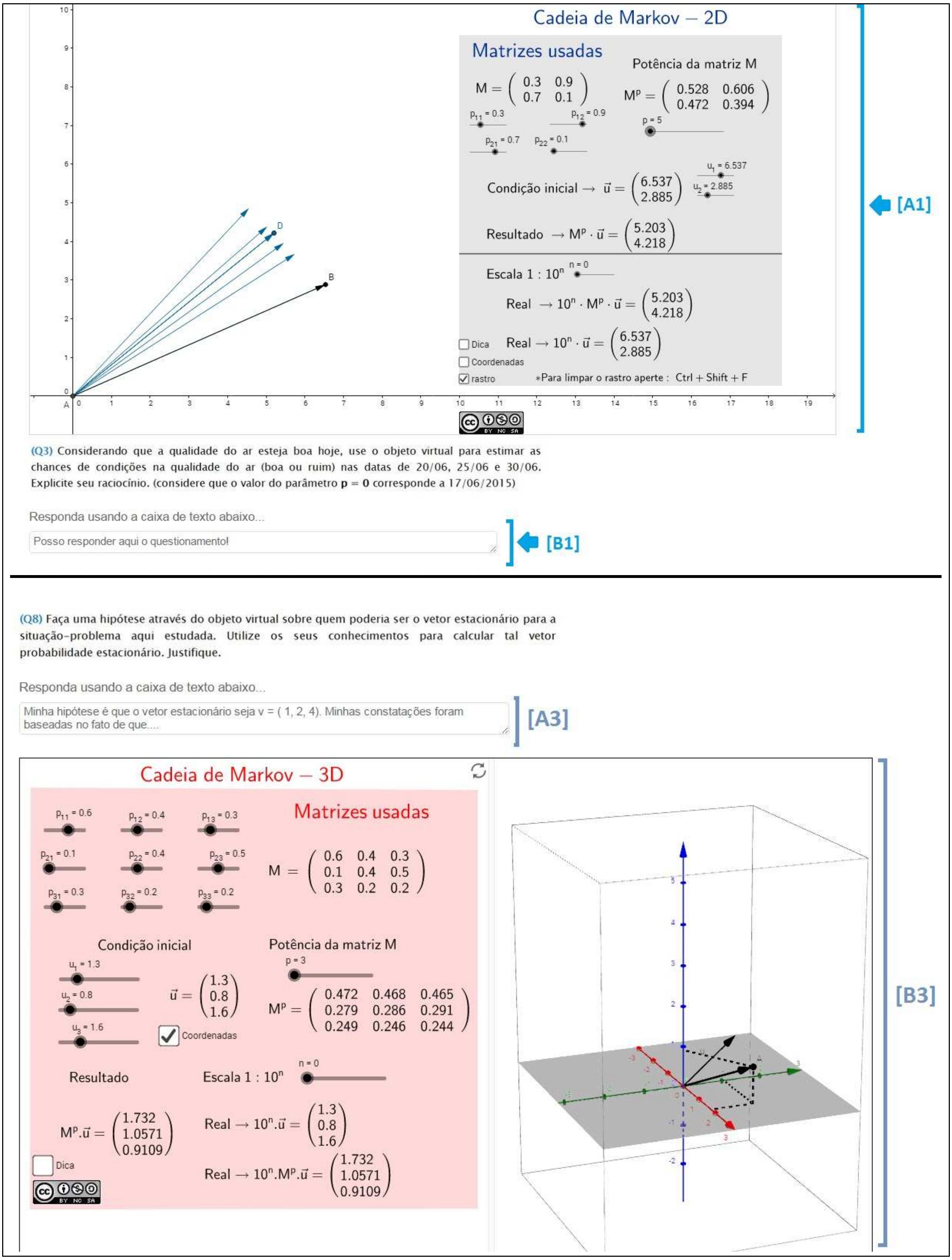


Figura 58 – Integração do objeto virtual nas atividades. Disponíveis em:
http://tube-beta.geogebra.org/material/simple/id/1316155#material/1362047 (versão 2D)
http://tube-beta.geogebra.org/material/simple/id/1316155#material/1582901 (versão 3D)

Após a criação e disponibilização do GeoGebraBook com as sequências de atividades, o material pode ser acessado via internet de qualquer lugar, bastando ter o acesso e o dispositivo para tal. Para os membros do ambiente, que são cadastrados na plataforma do GeoGebraTube, há um recurso chamado “grupos”, de acordo com a indicação [A4], na figura 59. Esse recurso permite que o professor ou qualquer outro membro do ambiente crie grupos (fechados) de estudo e que utilizem o material criado e organizado na forma de GeoGebraBooks, conforme indicado por [B4].

Figura 59 – Modalidade de “Grupos” no GeoGebraTube. Disponível em: http://tube-beta.geogebra.org/user/profile/id/8705 (após efetuar login pessoal)

Após definir a coleção de atividades que serão abordadas em determinado contexto educacional, o professor pode efetuar um convite aos estudantes para a participação no grupo, como membros [A8]. Na figura 60 é possível ver em [B8] o campo onde é necessário incluir o endereço de e-mail para enviar o convite. Depois de aceitar o convite e preencher um cadastro inicial o estudante será incluído primeiramente como membro do grupo [C8], sendo possível alterar sua função para “proprietário” ou “somente visualizador” do grupo.

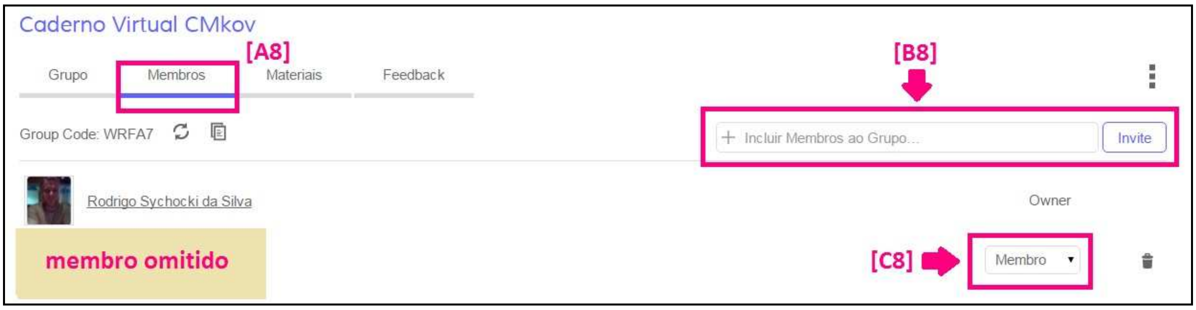


Figura 60 – Cadastro dos membros no grupo. Fonte: O autor.

Quanto às atividades, o professor pode cadastrá-las acrescentando-as na aba materiais [A9]. Neste espaço fica armazenado todo o material organizado para a realização das atividades, sendo oportunizado incluir novos materiais [B9]. Após construir a biblioteca dos materiais virtuais é possível organizá-la para dispor ao grupo de estudantes [B7]. Depois de definir algum roteiro na sequência de atividades, o professor pode disponibilizar gradualmente os materiais, usando os comandos mostrados em [C7]. A partir desse momento os estudantes conseguem visualizar e participar das atividades propostas. Os fatos narrados anteriormente podem ser vistos na figura 61.

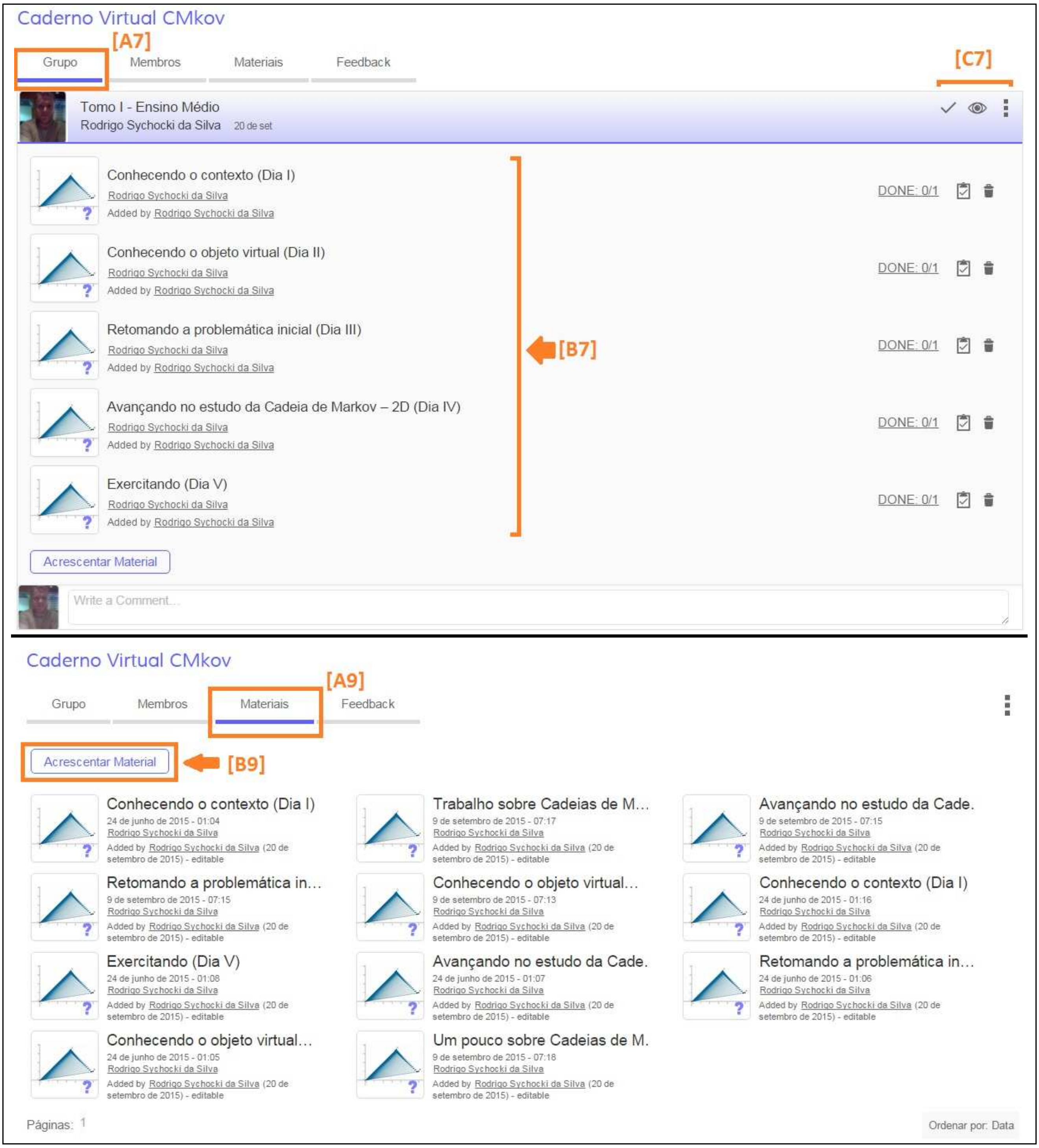


Figura 61 – As atividades disponibilizadas no grupo. Fonte: O autor.

Conforme os membros do grupo avancem na realização das atividades o professor, pode visualizar a produção e fazer o acompanhamento individual de cada membro, na forma de *feedback* instantâneo [A10]. É fornecida de modo resumido uma lista [B10] com o indicativo *unseen* "não visto", *seen* "visto" e *iniciado*. Com isso, o professor pode acompanhar em tempo real os acontecimentos relativos a cada membro do grupo e mais particularmente em cada atividade proposta. Ao clicar em alguma das atividades específicas, o professor pode dar *feedback* na forma de um *smile*[42] ( ) ou ainda na forma de texto, aumentando e potencializando as discussões sobre determinado tópico.

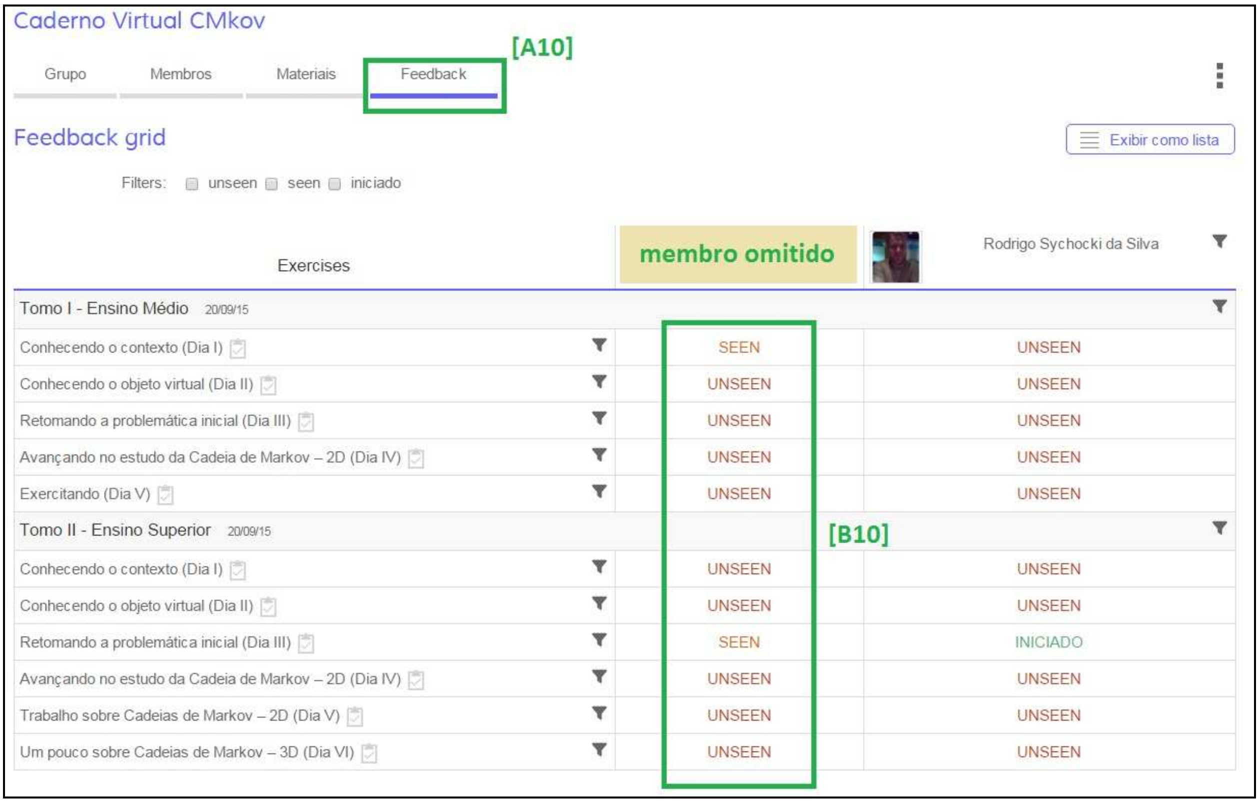


Figura 62 – Página de *feedback* para os membros do grupo. Fonte: O autor.

Por fim, almejou-se com a discussão do presente capítulo mostrar e disponibilizar na forma de um produto virtual as sequências de atividades utilizadas durante a pesquisa de doutorado. Pretendeu-se também trazer, para a discussão, novos e possíveis caminhos a serem percorridos na execução de propostas de ensino que valorizem a construção de conhecimento através da realização de sequências de atividades, possibilitando um novo olhar sobre a forma de desenvolvimento e encaminhamento de sequências didáticas. Desejamos veementemente que o pontapé inicial para a criação de novos materiais, que façam uso da tecnologia digital explorada nesse capítulo, tenha sido dado e, consequentemente, possibilite que no futuro origine novos estudos e pesquisas sobre o impacto do seu uso em sala de aula e também sobre as formas de construção do conhecimento pelos sujeitos envolvidos.

[42] Expressão comumente utilizada para denotar "rostinho sorrindo".

9. PRODUÇÃO ACADÊMICA

Durante o curso de doutorado foram elaborados trabalhos acadêmicos que envolveram o assunto da presente tese. Foram produzidos e apresentados artigos científicos em congressos cuja temática versava Educação Matemática, Tecnologias Digitais e Modelagem Matemática. A divulgação do assunto apresentado e discutido na tese ocorreu também em periódicos científicos. As publicações foram produzidas juntamente com os professores orientadores da presente tese de doutorado, prof. Dr. Dante Augusto Couto Barone (orientador) e prof. Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso (coorientador). Todos os acessos aos links informados abaixo foram feitos em janeiro de 2016.

- **Artigos em periódico (já publicado)**

[1] SILVA, R. S.; BARONE, D. A. C.; BASSO, M. V. A.. **O uso do Geogebra como ferramenta para a construção de conceitos matemáticos: um primeiro estudo envolvendo Cadeias de Markov.** RENOTE. Revista Novas Tecnologias na Educação, v. 12, p. 1-11, 2014; Meio de divulgação: Digital. Série: 1; ISSN/ISBN: 16791916.
Disponível em: http://seer.ufrgs.br/index.php/renote/article/view/50357/31431

[2] SILVA, R. S.; BARONE, D. A. C.; BASSO, M. V. A.. **Contribuições da informática na interpretação, análise e construção de modelos matemáticos em situações-problema envolvendo Cadeias de Markov: da ação à compreensão.** ScientiaTec: Revista de Educação, Ciência e Tecnologia, 2015.; ISSN/ISBN: 23189584.
Disponível em: http://seer.ufrgs.br/index.php/ScientiaTec/article/view/57962

- **Artigo em periódico (aceito, aguarda publicação)**

[3] SILVA, R. S.; BARONE, D. A. C.; BASSO, M. V. A.. **Modelagem Matemática e Tecnologias Digitais: uma aprendizagem baseada na ação.** Educação Matemática Pesquisa (online). 2016. ISSN/ISBN: 19833156.
Estará disponível em: http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/index (a partir de 2016)

- **Artigo completo em congresso (já publicado)**

[4] SILVA, R. S.; BARONE, D. A. C.; BASSO, M. V. A.. **Modelagem Matemática e TICs: Possibilidades Para Uma Abordagem Interdisciplinar De Conceitos Através da Tecnologia Informática**. In: IX CLIOA, 2015, Porto Alegre. Congresso Latino-americano Interdisciplinar Orientado ao Adolescente (CLIOA), 2015. v. 1. p. 1-12. Referências adicionais: Classificação do evento: Internacional; Brasil/ Português; Meio de divulgação: Magnético; Série: 1; ISSN/ISBN: 9788588425132.

[5] SILVA, R. S.; BARONE, D. A. C.; BASSO, M. V. A.. **Cadeias de Markov e Geogebra: modelagem matemática e possibilidades para a construção de conceitos através do uso de objetos virtuais**. In: V Jornada Nacional de Educação Matemática e XVIII Jornada Regional de Educação Matemática, 2014, Passo Fundo. Anais da V Jornada Nacional de Educação Matemática e XVIII Jornada Regional de Educação Matemática. Passo Fundo: Editora da Universidade de Passo Fundo, 2014. v. 1. p. 1-12. Referências adicionais: Classificação do evento: Nacional; Brasil/ Português; Meio de divulgação: Digital; Série: 1; ISSN/ISBN: 2316-3429.
Disponível em: http://www.upf.br/jem/images/trabalhos-2014/minicursos/minicurso_seis.pdf;

[6] SILVA, R. S.; BASSO, M. V. A.. **O uso das tecnologias digitais na construção de conhecimento matemático: um experimento envolvendo modelagem com Cadeias de Markov no ensino médio.** In: XII Encontro Gaúcho de Educação Matemática. (Aguarda Ficha de Catalogação)
Disponível em: http://ebooks.pucrs.br/edipucrs/anais/anais-do-egem/assets/2015/1105955052.pdf

- **Resumo em anais de evento (já publicado)**

[7] SILVA, R. S.; **O papel da abstração reflexionante no processo de tomada de consciência: um aspecto importante na construção dos conceitos matemáticos.** In: Semana Acadêmica da Licenciatura em Matemática - IFRS Campus Caxias do Sul, 2015, Caxias do Sul. REMAT - Revista Eletrônica da Matemática, 2015. v. 1. p. 1-1. Série: 1; ISSN/ISBN: 2447-2689.
Disponível em: https://periodicos.ifrs.edu.br/index.php/REMAT/article/view/200

[8] SILVA, R. S.; **Contribuições da informática na interpretação e análise de problemas envolvendo modelagem matemática com processos estocásticos: algumas reflexões à luz da epistemologia genética**. 2014. (Apresentação de Trabalho/Conferência ou palestra). Referências adicionais: Brasil/Português; Local: Campus Bento Gonçalves; Cidade: Bento Gonçalves; Evento: 3º Semana de Educação, Ciência e Cultura; Inst. promotora/financiadora: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul.
Disponível em:
https://www.researchgate.net/publication/289528855_Contribuicoes_da_informatica_na_interpretacao_e_analise_de_problemas_envolvendo_modelagem_matematica_com_processos_estocasticos_algumas_reflexoes_a_luz_da_epistemologia_genetica

- **Curso de curta duração**

[9] SILVA, R. S.; BARONE, D. A. C.; BASSO, M. V. A.. **Cadeias de Markov e Geogebra: modelagem matemática e possibilidades para a construção de conceitos através do uso de objetos virtuais.** 2014. (Curso de curta duração ministrado/Outra). Referências adicionais: Brasil/Português; Meio de divulgação: Vários; Unidade: horas; Tipo de participação: Organizador; Duração do evento: 3; Local: UPF; Cidade: Passo Fundo; Inst. promotora: Universidade de Passo Fundo.

- **Capítulo de livro (uso implícito na tese, na fundamentação teórica)**

[10] SILVA, R. S.; ROSA, J. A.. **A evolução da lógica matemática até Gödel, Turing e Von Neumann: ideias que levaram ao desenvolvimento da computação moderna**. In: Dante Augusto Couto Barone; Ivan Jorge Boesing. (Org.). Inteligência artificial: diálogos entre mentes e máquinas. 1ed. Porto Alegre: AGE/Evangraf, 2014, p. 89-118. ISBN: 9788577276837.

- **Apresentações de trabalho/palestras ministradas**

[11] SILVA, R. S.; BARONE, D. A. C.; BASSO, M. V. A.. **Modelagem Matemática E Tics: Possibilidades Para Uma Abordagem Interdisciplinar De Conceitos Através Da Tecnologia Informática.** 2015. (Apresentação de Trabalho/Congresso). Referências adicionais: Brasil/Português; Local: Centro de Eventos Plaza São Rafael; Cidade: Porto Alegre; Evento: IX CLIOA (Congresso Latino-Americano Interdisciplinar do Adolescente); Inst. promotora/financiadora: UFRGS/CLIOA.

[12] SILVA, R. S.; BASSO, M. V. A.. **O uso das tecnologias digitais na construção de conhecimento matemático: um experimento envolvendo modelagem matemática com Cadeias de Markov no ensino médio**. 2015. (Apresentação de Trabalho/Congresso). Referências adicionais: Brasil/Português; Local: Faculdade de Matemática (FAMAT); Cidade: Porto Alegre; Evento: XII EGEM - Encontro Gaúcho de Educação Matemática; Inst. promotora/financiadora: PUCRS - Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul.

[13] SILVA, R. S.. **Contribuições da informática na interpretação e análise de problemas envolvendo modelagem matemática com processos estocásticos: algumas reflexões à luz da epistemologia genética**. 2014. (Apresentação de Trabalho/Conferência ou palestra). Referências adicionais: Brasil/Português; Local: Campus Bento Gonçalves; Cidade: Bento Gonçalves; Evento: 3º Semana de Educação, Ciência e Cultura; Inst. promotora/financiadora: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul.

[14] SILVA, R. S.. **O papel da abstração reflexionante no processo da tomada de consciência: um aspecto importante na construção dos conceitos matemáticos**. 2013. (Apresentação de Trabalho/Conferência ou palestra). Referências adicionais: Brasil/Português; Local: IFRS; Cidade: Caxias do Sul; Evento: 3º Semana Acadêmica da Licenciatura em Matemática; Inst. promotora/financiadora: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G. **Associando o computador à resolução de problemas fechados: análise de uma experiência.** Tese de doutorado. Universidade Estadual Paulista (UNESP). Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Instituto de Geociências e Ciências Exatas. 2005. Disponível em: http://www.rc.unesp.br/gpimem/downloads/teses/allevato_nsg_dr_rcla.pdf Acesso em set. 2015.

ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na educação básica**. São Paulo. Contexto. 2012.

ANTON, H.; BUSBY. R. C. **Contemporary Algebra**. Hoboken, New Jersey: Wiley. 2003.

ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra Linear com aplicações**. 10º Ed. Porto Alegre, Bookman, 2012.

ARAÚJO, P. B. **Situações de aprendizagem: a circunferência, a mediatriz e uma abordagem com o Geogebra**. Dissertação de Mestrado em Ensino de Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUCSP. São Paulo. 2010. Disponível em: http://www.sapientia.pucsp.br/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=12289

ARAÚJO, J. L. **Cálculo, tecnologias e modelagem matemática: as discussões dos alunos**. Tese de doutorado. Universidade Estadual Paulista (UNESP). Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Instituto de Geociências e Ciências Exatas. 2002. Disponível em: http://www.mat.ufmg.br/~jussara/tese/tese.pdf Acesso em set. 2015.

ARTIGUE, M. Engenharia Didática. **Didáctica das Matemáticas** (Dir, Jean Brun). Trad. Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, Horizontes Pedagógicos. 1996.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**. São Paulo: Ed. Contexto, 2002.

BECKER, F. **Educação e Construção do Conhecimento**. Porto Alegre. Penso. 2º Ed. 2012.

BECKER, F. **Abstração pseudo-empírica e reflexionante: Significado epistemológico e educacional**. Volume 6 Número Especial – Novembro (2014). Disponível em: http://www2.marilia.unesp.br/revistas/index.php/scheme/article/view/4276/3105

BEHRENDS, E. **Introduction to Markov Chains: with special emphasis on rapid mixing**. Berlin: Vieweg. 2000.

BIASI, H.; DOMENECH, M. **Ferramenta de Software para o auxílio ao processo de Ensino-Aprendizagem de Métodos Estocásticos**. Unoesc & Ciência – ACET, Joaçaba, v. 3, n. 1, p. 37-46, jan./jun. 2012. Disponível em: http://editora.unoesc.edu.br/index.php/acet/article/view/1103/pdf

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem Matemática no ensino**. 5º edição. São Paulo. Contexto. 2011.

BLUM, W,; NISS, M. **Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications, and Links to Order Subjects**. Trends and Issues in Mathematics Instruction. Educational Studies in Mathematics. Dordrechts, v. 22, n.1, p.37-68. 1991.

BORSSOI, A. H. **Modelagem matemática, aprendizagem significativa e tecnologias: articulações em diferentes contextos educacionais**. Tese de doutorado. Universidade Estadual de Londrina (UEL). Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. 2013. Disponível em: http://www.bibliotecadigital.uel.br/document/?code=vtls000187807

BRASIL. Ministério da Educação. Secretária de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o ensino médio: ciência da natureza, matemática e suas tecnologias**. Brasília, v. 2, 2006. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos /pdf/book_volume_02_internet.pdf

BRASIL. Ministério da Educação (MEC), Secretaria da Educação Média e Tecnológica (Semtec). **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Brasília, 2000. Disponível: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf . Acesso em 20 dez. 2011.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica**. Diretoria de Currículos e Educação Integral. Brasília: MEC, SEB, DICEI, 2013. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=15548-d-c-n-educacao-basica-nova-pdf&category_slug=abril-2014-pdf&Itemid=30192 Acesso em 10 set. 2015.

BROUSSEAU, G. Fundamentos e Métodos da Didáctica da Matemática. **Didáctica das Matemáticas** (Dir, Jean Brun). Trad. Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, Horizontes Pedagógicos. 1996.

D´AMBROSIO, U. **Educação Matemática: da teoria à práxis.** Coleção Perspectivas em Educação Matemática. Campinas, SP: Papirus, 1996.

FERREIRA, R. D. **Contribuições do Geogebra para o Estudo de Funções Afim e Quadrática em um Curso de Licenciatura em Matemática**. Dissertação de Mestrado em Ensino de Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUCSP. São Paulo. 2013a. Disponível em: http://www.sapientia.pucsp.br/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=16257

FERREIRA, S. R. I. **Aplicações de matrizes no ensino médio**. Dissertação de mestrado. Universidade de São Paulo. USP. 2013b. Disponível em: http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55136/tde-07062013-100316/en.php.

GRAVINA, M. A. **Os Ambientes de Geometria Dinâmica e o Pensamento Hipotético-Dedutivo**. Tese de Doutorado. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias na Educação. Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação. 2001. Disponível em: http://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/2545

GOTTSCHALK, C. A **Natureza do Conhecimento Matemático sob a Perspectiva de Wittgenstein: algumas implicações educacionais**. Cad. Hist. Fil. Ci., Campinas, Série 3, v. 14, n. 2, p. 305-334, jul.-dez. 2004. Disponível em: http://www.cle.unicamp.br/cadernos/pdf/Cristiane%20Gottschalk.pdf Acesso em set. 2015.

KATOK, A.; HASSELBLATT, B. **Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems**. New York: Cambridge University Press, 1995.

KEMENY, J. G.; SNELL, J. L. **Finite Markov Chains**. New York: Springer. 1976.

LOPES, L. S.; ALVES, G. L. P.; FERREIRA, A. L. A. (2015) **A Simetria nas Aulas de Matemática: uma proposta investigativa**. Educação & Realidade, Porto Alegre, v. 40, n. 2, p. 549-572, abr./jun. Disponível em: http://www.scielo.br/scielo.php?pid=S2175-62362015000200549&script=sci_abstract&tlng=pt

MALHEIROS, A. P. S. **A produção matemática dos alunos em um ambiente de modelagem**. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual Paulista (UNESP). Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Instituto de Geociências e Ciências Exatas. 2004. Disponível em: http://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/91000/malheiros_aps_me_rcla.pdf?sequence=1 Acesso em set. 2015.

MEYER, J. F. C. A.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS, A. P. S. **Modelagem em Educação Matemática**. Coleção Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte. Autêntica. 2011.

MONTANGERO, J.; NAVILLE, D. M. **Piaget ou a Inteligência em Evolução**. Trad. Fernando Becker e Tânia Beatriz Iwaszko Marques. Porto Alegre. Artmed. 1998.

MOREIRA, M. A. **Unidade de Enseñanza Potencialmente Significativas – UEPS**. Aprendizagem Significativa em Revista. Porto Alegre, v.2, n.1, p.43-63. agosto de 2011. Quadrimestral. Disponível em: http://www.if.ufrgs.br/asr/artigos/Artigo_ID10/v1_n2_a2011.pdf Acesso em set. 2015.

PEDROSO, L. W. **Uma proposta de ensino da trigonometria com uso do software Geogebra.** Dissertação de Mestrado em Ensino de Matemática. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, UFRGS. 2012. Disponível em: http://hdl.handle.net/10183/49284

PIAGET, J. **Abstração reflexionante; relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais**. 1977a. Porto Alegre: Artes Médicas. Tradução de Fernando Becker e Petronilha B. G. da Silva. 1995.

PIAGET, J. **A Tomada de Consciência.** 1977b. São Paulo: Melhoramentos. Tradução de Edson Braga de Souza. Editora da Universidade de São Paulo. 1977.

PIAGET, J. **Fazer e Compreender.** 1978. São Paulo: Melhoramentos. Tradução de Christina Larroudé de Paula Leite. Editora da Universidade de São Paulo. 1978.

PPCa. **Projeto Pedagógico de Curso: Licenciatura em Matemática**. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul. Caxias do Sul. 2011. Disponível em: http://www.caxias.ifrs.edu.br/site/midias/arquivos/201421484018929ppc_matematica_2011-01.pdf

PPCb. **Projeto Pedagógico de Curso: Técnico em Plásticos Integrado ao Ensino Médio**. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul. Caxias do Sul. 2010. Disponível em: http://www.caxias.ifrs.edu.br/site/midias/arquivos/2014214152759467ppc_plasticos_integrado_2010.pdf

POWELL, A. B. **Construção Colaborativa do Conhecimento Tecnológico, Pedagógico e do Conteúdo de Professores de Matemática**. GEPEM – Grupos de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática. (Online). n. 64 – Jan./Jun. 2014 (texto em diagramação) Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/269276097_Construo_Colaborativa_do_Conhecimento_Tecnolgico_Pedaggico_e_do_Contedo_de_Professores_de_Matemtica

RIBEIRO, R. S. **Geometrias não-euclidianas na escola: uma proposta de ensino através da geometria dinâmica**. Dissertação de Mestrado em Ensino de Matemática. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, UFRGS. 2013. Disponível em: http://hdl.handle.net/10183/79482

ROSA, M., OREY, D. C.. **A modelagem como um ambiente de aprendizagem para a conversão do conhecimento matemático.** Bolema (online). 2012, vol.26, n.42a, p. 261-290. Disponível em: http://www.scielo.br/pdf/bolema/v26n42a/12.pdf

SILVA, M. J. **Registros de Representações Semióticas no Estudo de Sistemas de Equações de 1º Grau com Duas Variáveis Usando o Software Geogebra**. Dissertação de Mestrado em Ensino de Matemática. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, UFRGS. 2014. Disponível em: http://hdl.handle.net/10183/101414

SILVA, R. S.; ROSA, J. A.. A evolução da lógica matemática até Gödel, Turing e Von Neumann: ideias que levaram ao desenvolvimento da computação moderna. In: Dante Augusto Couto Barone; Ivan Jorge Boesing. (Org.). **Inteligência artificial: diálogos entre mentes e máquinas**. 1ed. Porto Alegre: AGE/Evangraf. 2014.

SILVA, R. S.; BARONE, D. A. C.; BASSO, M. V. A. **Cadeias de Markov e Geogebra: Modelagem Matemática e Possibilidades para a Construção de Conceitos Através do Uso de Objetos Virtuais.** In: V Jornada Nacional de Educação Matemática, XVIII Jornada Regional de Educação Matemática. Universidade de Passo Fundo. 2014a. Disponível em: http://www.upf.br/jem/images/trabalhos-2014/minicursos/minicurso_seis.pdf

SILVA, R. S.; BARONE, D. A. C.; BASSO, M. V. A. **O uso do Geogebra como ferramenta para a construção de conceitos matemáticos: um primeiro estudo envolvendo Cadeias de Markov.** RENOTE: Revista Novas Tecnologias na Educação. V 12. Nº1. 2014b. Disponível em: http://seer.ufrgs.br/index.php/renote/article/view/50357.

SILVA, R. S.; BARONE, D. A. C.; BASSO, M. V. A. **Modelagem Matemática e TICs: possibilidades para uma abordagem interdisciplinar de conceitos através da tecnologia informática**. In: IX CLIOA – Congresso Latino-Americano Interdisciplinar Orientado ao Adolescente. Porto Alegre. 2015.

SILVA, C. E. V. **Aplicações da álgebra linear nas Cadeias de Markov**. Dissertação de mestrado. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). 2013. Disponível em: http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/519/2011_00417_CARLOS_EDUARDO_VIT%C3%93RIA_DA_SILVA.pdf?sequence=1.

SOARES, D. S. **Uma abordagem pedagógica baseada na análise de modelos para alunos de biologia: qual o papel do software?** Tese de doutorado. Universidade Estadual Paulista (UNESP). Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Instituto de Geociências e Ciências Exatas. 2012. Disponível em: http://www.rc.unesp.br/gpimem/downloads/teses/soares_ds_rcla.pdf Acesso em set. 2015.

SOISTAK, A. V.. Uma experiência com a modelagem matemática no Ensino Médio Profissionalizante. In: **Modelagem Matemática: uma perspectiva para a Educação Básica**. BRANDT, C. F.; BURAK, D.; KLÜBER, T. E. (Org.). Ponta Grossa. Editora UEPG. 2010.

SKOVSMOSE, O. **Educação Crítica: incerteza, matemática, responsabilidade**. Tradução de Maria Aparecida Viggiani Bicudo. São Paulo. Cortez. 2007.

TALL, D. **Using the computer as an environment for building and testing mathematical concepts: A Tribute to Richard Skemp**. Papers in Honour of Richard Skemp, 21–36, Warwick (1986). Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/251277011_Using_the_computer_as_an_environment_for_building_and_testing_mathematical_concepts_A_Tribute_to_Richard_Skemp

TALL, D.; DUBINSKY, E. **Advanced Mathematical Thinking and the Computer.** In: Tall D. O. (org.), Advanced Mathematical Thinking, Kluwer: Holland, 231–248 (1991). Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/226812311_Advanced_Mathematical_Thinking_and_the_Computer

TALL, D. **Technology and Cognitive Growth in Mathematics**. A discussion paper for the Conference on Mathematics and New Technologies Thessaloniki. Greece. June 18-20. 1999. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/247705096_Technology_and_Cognitive_Growth_in_Mathematics

VAZ, D. A. F. **Experimentando, Conjecturando, Formalizando e Generalizando: Articulando Investigação Matemática com o Geogebra**. Educativa. Goiânia. v.15. n.1. p.39-51. Jan./jun. 2012, Disponível em: http://seer.pucgoias.edu.br/index.php/educativa/article/view/2491/1549

VELEDA, G. G.. **Sobre a Realidade em Atividades de Modelagem Matemática**. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Universidade Estadual de Londrina, UEL. 2010. Disponível em: http://www.uel.br/pos/mecem/arquivos/resumo_abstract/Gabriele%20Granada%20Veleda/gabriele_veleda.pdf

APÊNDICE A – Termo de consentimento informado do primeiro experimento.

Termo de Consentimento Informado

Eu declaro, por meio deste termo, que concordei em participar do minicurso intitulado **CADEIAS DE MARKOV E GEOGEBRA: MODELAGEM MATEMÁTICA E POSSIBILIDADES PARA A CONSTRUÇÃO DE CONCEITOS ATRAVÉS DO USO DE OBJETOS VIRTUAIS**, desenvolvida pelo pesquisador **Ms. Rodrigo Sychocki da Silva**. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada pelos professores **Dr. Dante Augusto Couto Barone** (Instituto de Informática – UFRGS) e **Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso** (Instituto de Matemática – UFRGS).

Tenho ciência de que minha participação não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa que envolve esse minicurso. Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, trata-se de investigar o potencial da tecnologia informática como ferramenta para elaboração e construção de conceitos através do estudo de modelagens matemáticas envolvendo Cadeias de Markov.

Fui também informado(a) de que os usos das informações oferecidas por mim serão somente em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas sem o meu nome ou qualquer outro tipo de identificação.

A minha colaboração se fará por meio de entrevista/questionário escrito, bem como da participação em oficina/aula/encontro/palestra, em que serei observado(a) e minha produção será analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. No caso de fotos, obtidas durante a minha participação, autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários, etc, sem identificação.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar o(a) pesquisador(a) **Ms. Rodrigo Sychocki da Silva** no IFRS – Campus Caxias do Sul ou pelo e-mail rodrigo.silva@caxias.ifrs.edu.br . Fui ainda informado(a) de que posso me retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Passo Fundo, 06 de maio de 2014.

Assinatura do(a) pesquisador(a): ___________________________________

Assinatura do participante(a) ______________________________________

APÊNDICE B – Termo de consentimento informado do segundo experimento.

Termo de Consentimento Informado
– Ensino Médio –

Eu declaro, por meio deste termo, que concordei em participar da pesquisa de doutorado cujo projeto é intitulado: **"CADEIAS DE MARKOV E MODELAGEM MATEMÁTICA: DA ABSTRAÇÃO EMPÍRICA À REFLEXIONANTE E O PROCESSO DA TOMADA DE CONSCIÊNCIA ATRAVÉS DO USO DE OBJETOS VIRTUAIS"** desenvolvida pelo professor/pesquisador **Me. Rodrigo Sychocki da Silva**. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada pelos professores **Dr. Dante Augusto Couto Barone** (Instituto de Informática – UFRGS) e **Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso** (Instituto de Matemática – UFRGS).

Tenho ciência de que minha participação não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso e avanço da pesquisa científica. Ressalto que fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, trata-se de investigar o potencial da tecnologia informática como ferramenta para elaboração e construção de conceitos matemáticos através do estudo de situações-problema envolvendo a Modelagem Matemática com Cadeias de Markov.

Fui também informado(a) de que os usos das informações oferecidas por mim serão somente em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas sem o meu nome ou qualquer outro tipo de identificação na qual eu possa ser reconhecido. A minha colaboração na pesquisa se faz por meio de material escrito, bem como minha participação em aula, em que serei observado(a) e minha produção será analisada pelo professor/pesquisador. Também fui notificado que a sequência de atividades realizada faz parte da avaliação trimestral da instituição, constituindo-se em um material de avaliação minha, enquanto estudante do quarto ano do curso de Técnico em Plásticos Integrado ao Ensino Médio do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul, Câmpus Caxias do Sul.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar o(a) pesquisador(a) **Me. Rodrigo Sychocki da Silva** no IFRS – Câmpus Caxias do Sul ou pelo e-mail rodrigo.silva@caxias.ifrs.edu.br. Fui ainda informado(a) de que posso solicitar a retirada da minha produção escrita da presente pesquisa, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos, sendo ela apenas usada para fins de avaliação do trimestre na disciplina de matemática.

Caxias do Sul, 24 de junho de 2015.

Assinatura do(a) pesquisador(a): ___________________________________

Assinatura do participante(a) ______________________________________

APÊNDICE C – Termo de consentimento informado do terceiro experimento.

Termo de Consentimento Informado
– Ensino Superior –

Eu declaro, por meio deste termo, que concordei em participar da pesquisa de doutorado cujo projeto é intitulado: **"CADEIAS DE MARKOV E MODELAGEM MATEMÁTICA: DA ABSTRAÇÃO EMPÍRICA À ABSTRAÇÃO REFLETIDA COM USO DE OBJETOS VIRTUAIS"** desenvolvida pelo professor/pesquisador **Me. Rodrigo Sychocki da Silva**. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada pelos professores **Dr. Dante Augusto Couto Barone** (Instituto de Informática – UFRGS) e **Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso** (Instituto de Matemática – UFRGS).

Tenho ciência de que minha participação não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso e avanço da pesquisa científica. Ressalto que fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, trata-se de investigar o potencial da tecnologia informática como ferramenta para elaboração e construção de conceitos matemáticos através do estudo de situações-problema envolvendo a Modelagem Matemática com Cadeias de Markov.

Fui também informado(a) de que os usos das informações oferecidas por mim serão somente em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários, etc.), identificadas sem o meu nome ou qualquer outro tipo de identificação na qual eu possa ser reconhecido. A minha colaboração na pesquisa se faz por meio de material escrito, bem como minha participação em aula, em que serei observado(a) e minha produção será analisada pelo professor/pesquisador. Também fui notificado que a sequência de atividades realizada faz parte da avaliação semestral da instituição, constituindo-se em um material de avaliação minha, enquanto estudante da disciplina de Modelagem Matemática no curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul, Campus Caxias do Sul.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar o(a) pesquisador(a) **Me. Rodrigo Sychocki da Silva** no IFRS – Campus Caxias do Sul ou pelo e-mail rodrigo.silva@caxias.ifrs.edu.br. Fui ainda informado(a) de que posso solicitar a retirada da minha produção escrita da presente pesquisa, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos, sendo ela apenas usada para fins de avaliação do semestre na disciplina de Modelagem Matemática.

Caxias do Sul, 02 de setembro de 2015.

Assinatura do(a) pesquisador(a): ___________________________________

Assinatura do participante(a) ______________________________________

APÊNDICE D – Sequência de Atividades do *primeiro experimento*.

Parte 1: Motivação – Problema inicial

"Suponha que no ano 2000 a taxa de migração de uma cidade para o seu subúrbio seja de 5%. E que durante o mesmo ano a taxa de migração entre o subúrbio e a cidade seja de 3%. Se a população observada no ano 2000 foi de 600000 habitantes na cidade e no subúrbio foi de 400000 então qual a população estimada para o ano 2001?"

(Q1) Após a leitura da situação-problema acima, você consegue citar os assuntos matemáticos que estão envolvidos no problema?

( ) Não assimilei a pergunta.

(Q2) É possível através de relações matemáticas evolvendo os assuntos citados por você na Q1 elaborar a solução para a situação-problema inicial? Construa uma solução para o problema.

( ) Não assimilei a pergunta.

(Q3) A solução proposta por você na Q2 pode ser usada na construção de uma estimativa para a população em 2002? Justifique.

( ) Não assimilei a pergunta.

(Q4) Com o método de solução elaborado nas questões Q2 e Q3 pode ser construído um método para estimar a população no ano de 2020? Podes explicitar alguma maneira para estimar a população no ano de 2020? Justifique.

( ) Não assimilei a pergunta.

(Q5) Generalizando: Com os métodos propostos anteriormente é possível criar um método geral que possa ser utilizado para estimar a população em qualquer ano t? Justifique.

( ) Não assimilei a pergunta.

Parte 2: Explorando o objeto virtual

(Q6) Você sabe o que uma *matriz* na matemática? Justifique sua escolha.

( ) Sim, é um assunto ensinado exclusivamente na matemática do ensino fundamental.

(   ) Sim, é um assunto ensinado exclusivamente na matemática do ensino médio.

(   ) Sim, é um assunto ensinado exclusivamente na matemática do ensino superior.

(   ) Sim, é um assunto ensinado em diversas etapas do desenvolvimento escolar.

(   ) Não, nunca ouvi falar do assunto.

(   ) Não, porém já ouvi falar do assunto.

(   ) Não assimilei a pergunta.

(Q7) Você sabe fazer multiplicação de matrizes? Justifique.

(   ) Não assimilei a pergunta.

(Q8) Você sabe calcular a potência de uma matriz? Justifique.

(   ) Não assimilei a pergunta.

(Q9) Utilizando o objeto virtual defina a matriz $M = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.8 \\ 0.7 & 0.5 \end{bmatrix}$. Calcule através do objeto algumas potências M^p. Em seguida defina $M = \begin{bmatrix} 0.35 & 0.15 \\ 0.65 & 0.85 \end{bmatrix}$. Novamente, calcule através do objeto potências M^p. Você percebe semelhanças ou diferenças entre os resultados obtidos? Justifique.

(   ) Não assimilei a pergunta.

(Q10) Defina a matriz $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Calcule potências M^p e observe o que acontece. Há alguma relação dessa matriz com as matrizes definidas em Q9? Justifique.

(   ) Não assimilei a pergunta.

(Q11) Voltando à situação-problema inicial é possível utilizar *sistemas lineares* para resolver a situação? Justifique.

(   ) Não assimilei a pergunta.

(Q12) Caso sua resposta em Q11 seja afirmativa, como é a escrita matricial do sistema linear envolvido na situação-problema? Use o objeto virtual para verificar se a estimativa para a população no ano 2001 está de acordo com a sua hipótese.

( ) Não assimilei a pergunta.

(Q13) Se até agora sua construção matemática deu certo, podes explicar uma maneira de estimar a população no ano 2020 utilizando o argumento apresentado em Q12? Justifique.

( ) Não assimilei a pergunta.

Parte 3: Explorando a Cadeia de Markov

"Uma Cadeia de Markov é um sistema dinâmico no qual os vetores de estado em uma sucessão de intervalos de tempo são vetores de probabilidade e cada um dos vetores de estado na sucessão dos intervalos de tempo é obtido por uma equação da forma $\vec{u}(k+1) = P.\vec{u}(k)$ onde $P = \left[p_{ij} \right]$ é uma matriz estocástica e p_{ij} é a probabilidade do sistema estar no estado i no tempo $t = k+1$ e no estado j no tempo $t = k$. A matriz P é chamada de matriz de transição para o sistema." (Anton e Busby, 2003, p.228, tradução nossa)

Definições:

1) Vetor de probabilidade: Vetor com entradas a_i; $1 \leq i \leq n$; não negativas tais que $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$.

2) Matriz estocástica: Matriz quadrada cujas colunas são vetores de probabilidade.

(Q14) Você consegue identificar na situação-problema inicial os vetores de probabilidade e a matriz estocástica? Justifique.

( ) Não assimilei a pergunta.

(Q15) Observando o texto inicial da "Parte 3" e a matriz estocástica da situação-problema você consegue explicar qual o significado das entradas p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22}?

( ) Não assimilei a pergunta.

(Q16) Use o objeto virtual para estimar a população na cidade e no subúrbio no ano de 2030, 2040, 2070 e 2100. Explicite suas estimativas.

( ) Não assimilei a pergunta.

(Q17) Observando a evolução do sistema através do objeto virtual, é possível afirmar que a partir de um certo tempo t a população da cidade e do subúrbio estarão estabilizadas? Justifique.

( ) Não assimilei a pergunta.

Definição:

3) Vetor estacionário: (vetor de equilíbrio) É um vetor de probabilidade $\vec{v} \neq \vec{0}$ tal que $P\vec{v} = \vec{v}$.

* Método para calcular: $P\vec{v} = \vec{v} \Leftrightarrow P\vec{v} - \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow (P - I_d)\vec{v} = \vec{0}$. Logo, o vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$ é solução de um sistema linear homogêneo.

(Q18) Faça uma hipótese através do objeto de quem poderia ser o vetor estacionário para a situação-problema. Utilize os seus conhecimentos de sistemas lineares para calcular esse vetor. Justifique.

( ) Não assimilei a pergunta.

Questionário final

1 – Você já teve contato com alguma proposta de ensino envolvendo o assunto deste minicurso?

( ) Sim. Onde: ________________________________ ( ) Não

2 – Você conhece algum objeto virtual que possibilite abordar este assunto?

( ) Sim. Qual? ________________________________ ( ) Não

3 – Você considera que uma proposta de ensino envolvendo Cadeias de Markov através do uso da tecnologia seja importante para uma abordagem que relaciona diversos conteúdos de matemática?

( ) Sim ( ) Não ( ) Talvez

4 – “Se fosse possível utilizar esse objeto virtual em sala de aula, eu não utilizaria, pois ele envolve muitos assuntos da matemática e certamente os alunos ficariam confusos”. Com respeito a essa frase, você:

( ) Concorda ( ) Discorda ( ) Não posso julgar

5 – Você considera que o uso do objeto “**Cadeias de Markov – 2D**” contribuiu para uma melhor compressão da situação-problema apresentada inicialmente?

( ) Sim ( ) Não ( ) Talvez

6 – Você considera possível propor uma investigação envolvendo modelagem matemática onde se faz o uso de Cadeias de Markov e esse objeto virtual possa ser novamente utilizado?

( ) Sim ( ) Não ( ) Talvez

7 – Quais são as suas sugestões, apontamentos ou críticas referentes ao objeto virtual apresentado nesse minicurso?

APÊNDICE E – Sequência de Atividades do *segundo experimento*.

Parte 1: Conhecendo o contexto

1) Para dar início ao nosso estudo acesse o seguinte endereço eletrônico.

http://zh.clicrbs.com.br/rs/noticias/noticia/2014/08/novos-imigrantes-mudam-o-cenario-do-rio-grande-do-sul-4576728.html

Faça a leitura da notícia veiculada recentemente nesse veículo de comunicação e responda os seguintes questionamentos:

(1a) De acordo com a notícia como é possível justificar quais são as causas desse movimento migratório relatado?

( ) Não assimilei a pergunta.

(1b) Qual o nível de escolaridade dos imigrantes caracterizados pela notícia? Isso diferencia esse movimento migratório de outros que você conhece e que já ocorreram na história? Explique.

( ) Não assimilei a pergunta.

(1c) Considerando o período de 2010 até 2014 e os números apresentados através do histograma (gráfico de barras) na notícia, em qual período dos apresentados a seguir ocorreu o aumento mais significativo no número de imigrantes?

( ) 2010 à 2011.
( ) 2011 à 2012.
( ) 2012 à 2013.
( ) 2013 à 2014.

( ) Não assimilei a pergunta.

(1d) Ainda a respeito do fenômeno da migração (emigração ou imigração), você pode listar alguns outros fatos que possam influenciar a sua ocorrência?

( ) Não assimilei a pergunta.

No contexto da migração, quando as pessoas chegam a Caxias do Sul, por exemplo, se deparam com uma realidade muitas vezes diferente da que estavam habituadas em seu lugar de origem. Na tentativa de buscar o seu "lugar ao sol" para se alocar, os imigrantes deslocam-se da cidade para os subúrbios. Observa-se que o contrário também ocorre, ou seja, pessoas partem do subúrbio para a cidade. Certa vez foi considerada a seguinte situação-problema:

"Suponha que no ano 2010 a taxa de migração de Caxias do Sul para o seu subúrbio seja de 7%. E que durante o mesmo ano a taxa de migração do subúrbio para a cidade seja de 4%. Se a população observada no ano 2010 foi de 350000 habitantes na cidade e no subúrbio foi de 100000 habitantes então qual a população estimada para o ano 2011 para cada um dos lugares?"

(P1) Após a leitura da situação-problema anterior, você consegue citar os assuntos matemáticos que considera estar envolvido(s) na resolução da questão?

( ) Não assimilei a pergunta.

(P2) É possível através de relações matemáticas evolvendo os assuntos citados por você na P1 elaborar a solução para a situação-problema inicial? Construa uma solução para o problema.

( ) Não assimilei a pergunta.

(P3) A solução proposta por você na P2 pode ser usada na construção de uma estimativa para a população em 2012? Em caso afirmativo construa uma solução.

( ) Não assimilei a pergunta.

(P4) Com o método de solução elaborado e utilizado nas questões P2 e P3 pode ser construído um método para estimar a população no ano de 2013? Explique.

( ) Não assimilei a pergunta.

(P5) Se fosse possível neste momento enunciar um "princípio geral", você conseguiria elaborar um modelo ou método capaz de explicar como calcular o número de habitantes de Caxias do Sul e do seu subúrbio em cada ano? Explique.

( ) Não assimilei a pergunta.

Parte 2: Conhecendo o objeto virtual

(P1) Você sabe o que uma *matriz* na matemática? Justifique sua escolha.

( ) Sim, é um assunto visto exclusivamente na matemática do ensino fundamental.
( ) Sim, é um assunto visto exclusivamente na matemática do ensino médio.
( ) Sim, é um assunto visto em diversas etapas do desenvolvimento escolar.
( ) Não, nunca ouvi falar do assunto.
( ) Não, porém já ouvi falar do assunto.

( ) Não assimilei a pergunta.

(P2) Você sabe fazer multiplicação de matrizes? Explique.

( ) Não assimilei a pergunta.

(P3) Você sabe calcular uma potência de uma matriz M ? Por exemplo, M^3? Explique.

( ) Não assimilei a pergunta.

(P4) Você sabe o que é um *vetor*? Explique.

( ) Sim, é um assunto visto exclusivamente na matemática do ensino fundamental.
( ) Sim, é um assunto visto exclusivamente na matemática do ensino médio.
( ) Sim, é um assunto visto em diversas etapas do desenvolvimento escolar.
( ) Não, nunca ouvi falar do assunto.
( ) Não, porém já ouvi falar do assunto.

( ) Não assimilei a pergunta.

(P5) Você sabe como representar um vetor? Quais as maneiras que você conhece para fazer isso? Explique.

( ) Não assimilei a pergunta.

Para iniciarmos essa parte da aula, acesse o objeto virtual:

http://tube.geogebra.org/material/show/id/860625

Em seguida, clique no botão: Ir para a versão do estudante

(Ob1) Utilizando o objeto virtual defina a matriz $M = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.7 \\ 0.8 & 0.6 \end{bmatrix}$. Calcule através do objeto virtual algumas potências M^p. Em seguida defina a matriz $M = \begin{bmatrix} 0.45 & 0.65 \\ 0.55 & 0.35 \end{bmatrix}$. Novamente, calcule através do objeto potências M^p. Você percebe semelhanças ou diferenças entre os resultados obtidos com essas matrizes? Explique.

( ) Não assimilei a pergunta.

(Ob2) Defina a matriz $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Calcule algumas potências M^p e observe o que ocorre. Há alguma relação dessa matriz com as matrizes definidas em (Ob1)? Explique.

( ) Não assimilei a pergunta.

(Ob3) Defina o vetor $\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$. O que ocorre quando você altera “n” na escala $1:10^n$? O que significa essa escala?

( ) Não assimilei a pergunta.

(Ob4) Com base no seu conhecimento, efetue o cálculo $\begin{bmatrix} 0.45 & 0.65 \\ 0.55 & 0.35 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$. É possível obter o resultado desse cálculo usando o objeto virtual? Explique.

( ) Não assimilei a pergunta.

(Ob5) Usando o objeto virtual como você calcularia $\begin{bmatrix} 0.45 & 0.65 \\ 0.55 & 0.35 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 0.45 & 0.65 \\ 0.55 & 0.35 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 0.45 & 0.65 \\ 0.55 & 0.35 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = ?$

Explique como você fez isso.

( ) Não assimilei a pergunta.

(Ob6) Após fazer o cálculo em (Ob5), qual o vetor resultado que você obteve? Em relação ao vetor original $\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, há semelhanças ou diferenças entre os resultados obtidos? Explique.

( ) Não assimilei a pergunta.

(Ob7) Observando o resultado obtido em (Ob6), qual o menor número "n" na escala que torna as coordenadas do vetor resultado números inteiros? Explique.

( ) Não assimilei a pergunta.

(Ob8) Com base no que foi feito até agora, como você faria para calcular o resultado da expressão $\underbrace{\begin{bmatrix} 0.45 & 0.65 \\ 0.55 & 0.35 \end{bmatrix} \bullet \cdots \bullet \begin{bmatrix} 0.45 & 0.65 \\ 0.55 & 0.35 \end{bmatrix}}_{300 vezes} \bullet \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = ?$ O resultado é um vetor? É possível fazer esse cálculo "à mão"?

Explique.

( ) Não assimilei a pergunta.

Parte 3: Retomando a problemática inicial

Novamente usaremos o objeto virtual. Pode acessar via o link:

http://tube.geogebra.org/material/show/id/860625

Em seguida, clique no botão: Ir para a versão do estudante

No encontro anterior manipulamos um pouco o objeto virtual com o objetivo de compreender como era possível realizar algumas operações aritméticas envolvendo matrizes quadradas e suas potências, bem como a multiplicação de uma matriz quadrada por um vetor. Hoje retomaremos a situação-problema da migração na tentativa de formular um princípio que possa nos orientar na compreensão do fenômeno. Mas antes, tente responder o seguinte questionamento:

(P1) O que você entende por “idealizar” uma situação na matemática? Há relação entre “ideal” e “realidade”. Explique.

( ) Não assimilei a pergunta.

A situação apresentada antes foi:

“Suponha que no ano 2010 a taxa de migração de Caxias do Sul para o seu subúrbio seja de 7%. E que durante o mesmo ano a taxa de migração do subúrbio para a cidade seja de 4%. Se a população observada no ano 2010 foi de 350000 habitantes na cidade e no subúrbio foi de 100000 habitantes então qual a população estimada para o ano 2011 para cada um dos lugares?”

Possíveis (outras) variáveis envolvidas:

(Ob1) Seria possível utilizar sistemas lineares para resolver a situação anterior? Em caso afirmativo, como você construiria um possível sistema linear para representar a situação-problema?

( ) Não assimilei a pergunta.

(Ob2) Na primeira aula você fez uma estimativa para o cálculo da população em 2011. Através da sua resposta na questão anterior use o objeto virtual para estimar a população tanto da cidade como do subúrbio em 2011. Explicite suas contas feitas utilizando o objeto virtual.

( ) Não assimilei a pergunta.

(Ob3) Mantendo-se as taxas de migração iguais, seria possível construir um sistema linear que pudesse ser usado para estimar a população em 2012 na cidade e no subúrbio? Explicite.

( ) Não assimilei a pergunta.

(Ob4) Supondo todas as taxas de migração mantidas, pode-se estimar a população em 2020 fazendo-se qual cálculo? Use o objeto virtual para estimar essas populações, se possível.

( ) Não assimilei a pergunta.

(Ob5) Genericamente, defina que o ano de 2011 seja $t = 1$. Como você expressaria através de uma expressão matemática a quantidade de população em ambos os lugares (cidade/subúrbio) em uma determinada época *t = n*? Explique.

( ) Não assimilei a pergunta.

Chega-se então ao seguinte conceito:

"Uma Cadeia de Markov é um sistema dinâmico no qual os vetores de estado em uma sucessão de intervalos de tempo são vetores de probabilidade e cada um dos vetores de estado na sucessão dos intervalos de tempo é obtido por uma equação da forma $\vec{u}(k+1) = P.\vec{u}(k)$ *onde* $P = \left[p_{ij} \right]$ *é uma matriz estocástica e* p_{ij} *é a probabilidade do sistema estar no estado* i *no tempo* $t = k+1$ *e no estado* j *no tempo* $t = k$*. A matriz* P *é chamada de matriz de transição para o sistema." (Anton e Busby, 2003, p.228, tradução nossa)*

Definições importantes:

1) Probabilidade: ____

2) Vetor de probabilidade: ____

3) Matriz estocástica: ____

Parte 4: Avançando no estudo da Cadeia de Markov – 2D

Na aula passada falamos um pouco sobre os seguintes termos: "probabilidade", "vetor de probabilidade" e "matriz estocástica". Falamos também sobre que é uma Cadeia de Markov. O conceito que vimos foi:

*"Uma **Cadeia de Markov** é um **sistema dinâmico** no qual os **vetores** de estado em uma sucessão de intervalos de tempo são **vetores de probabilidade** e cada um dos vetores de estado na sucessão dos intervalos de tempo é obtido por uma equação da forma* $\vec{u}(k+1) = P.\vec{u}(k)$ *onde* $P = \left[p_{ij} \right]$ *é uma **matriz estocástica** e* p_{ij} *é a **probabilidade** do sistema estar no estado* i *no tempo* $t = k+1$ *e no estado* j *no tempo* $t = k$*. A matriz* P *é chamada de matriz de transição para o sistema." (Anton e Busby, 2003, p.228, tradução nossa)*

O objeto virtual que estamos utilizando pode ser acessado aqui:
http://tube.geogebra.org/material/show/id/860625

(Ob1) Na situação-problema envolvendo o fenômeno da migração, você consegue identificar os *vetores probabilidade* e a *matriz estocástica*? Explique.

( ) Não assimilei a pergunta.

(Ob2) Se você conseguiu obter uma matriz na questão anterior, como você explicaria o significado das entradas p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22} na matriz com base na definição apresentada no início? Explique.

( ) Não assimilei a pergunta.

(Ob3) Observando a evolução do sistema através do objeto virtual, estime as populações da cidade e do subúrbio nos anos de 2020, 2030 e 2050. Explicite suas estimativas.

( ) Não assimilei a pergunta.

(Ob4) Analisando a evolução do sistema através do objeto virtual é possível afirmar que a partir de certo tempo as populações da cidade e do subúrbio irão se estabilizar[43]? Explique.

( ) Não assimilei a pergunta.

(Ob5) Considere as suas estimativas populacionais para o ano de 2020. O que você pode afirmar sobre a **probabilidade** desse sujeito ir da cidade para o subúrbio (caso ele esteja na cidade)? E a probabilidade dele ir do subúrbio para a cidade (caso ele esteja no subúrbio)? Qual dos dois eventos é mais provável que aconteça? Explique.

( ) Não assimilei a pergunta.

2º Situação-problema. (Adaptada de Anton e Rorres(2012))

Suponha que às 10h em Caxias do Sul cada um dos dois canais de televisão concorrentes (A e B) tenha 150000 telespectadores de audiência. Considerando que a cada hora que passa o canal "A" atrai 10% da audiência do canal "B" e que o canal "B" atrai 20% da audiência do canal "A". Com o passar das horas, a partir das 10h, é possível prever os níveis de audiência em cada um dos canais de televisão utilizando a ideia da Cadeia de Markov.

(P1) A situação apresentada acima está idealizada, para fins de Modelagem?
( ) Sim. Justificativa: ____
( ) Não. Justificativa: ____

(Ob1) Utilizando os recursos do objeto virtual estime quais os níveis de audiência de cada canal às 13h. (Dica: considere que 10h corresponde ao instante zero da Cadeia)

( ) Não assimilei a pergunta.

(Ob2) Você consegue explicitar os vetores probabilidade e a matriz estocástica desse problema? Explique.

( ) Não assimilei a pergunta.

(Ob3) Genericamente, defina que 10h da manhã seja ***p = 0***. Como você expressaria através de uma expressão matemática a quantidade de audiência de ambos os canais (A e B) em uma determinada hora do dia ***p = n***? Explique.

( ) Não assimilei a pergunta.

---

[43] Quando um processo de Markov estabiliza ao longo do tempo dize-se que o processo converge para o "vetor estacionário" ou "vetor de equilíbrio".

(Ob4) Analisando a evolução do sistema através do objeto virtual é possível afirmar que a partir de quantas horas a audiência dos canais A e B estabilizam? Explique.

(   ) Não assimilei a pergunta.

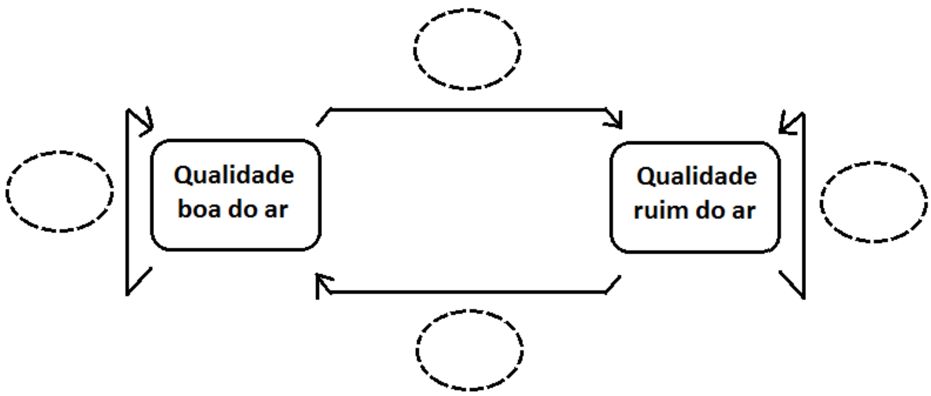
Parte 5: Exercitando

(Adaptada de Anton e Rorres (2012))

Observe a seguinte situação-problema.

Em estações de medições da qualidade do ar nas cidades é possível através de medições e suas análises inferirmos sobre a qualidade do ar "respirado" pelos habitantes da cidade. Em Caxias do Sul verificou-se através da observação e análise de alguns registros empíricos que se em determinado dia a qualidade do ar é boa, então existe uma chance de 90% de que venha a ser boa a qualidade do ar no próximo dia. No estudo verificou-se também que se a qualidade do ar é ruim em determinado dia então existe uma chance de 45% de que a qualidade do ar venha ser ruim também no próximo dia. Nota-se que a qualidade do ar respirado hoje (17/06/2015) é boa, então qual a probabilidade do ar respirado também ser boa daqui 8 dias?

(Q1) Com base nas informações do problema acima preencha o diagrama abaixo com as "chances" de ocorrência dos eventos.



(Q2) Você consegue obter os *vetores probabilidade* e a *matriz estocástica* dessa situação-problema? Explique.

(   ) Não assimilei a pergunta.

Obs.:

(1) Considerando que se o ar está com uma qualidade boa é porque ele não está ruim naquele dia, ou seja, defina a condição inicial como $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(2) Considerando que se o ar está com uma qualidade ruim é porque ele não está bom naquele dia, ou seja, defina a condição inicial como $\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(3) A situação-problema apresentada acima está idealizada, para fins de Modelagem?

(   ) Sim. Justificativa: ____

(   ) Não. Justificativa: ____

(Q3) Considerando que a qualidade do ar esteja boa hoje, use o objeto virtual para estimar as chances de condições na qualidade do ar (boa ou ruim) nas datas de 20/06, 25/06 e 30/06. Explicite seu raciocínio. (considere que o valor do parâmetro **p = 0** corresponde a 17/06/2015)

( ) Não assimilei a pergunta.

(Q4) Mantidas as condições *ideais* para a situação-problema e supondo que seja usada como condição inicial $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ para representar o dia (17/06/2015), no qual a qualidade do ar que se está respirando é **boa**, você consegue expressar através de um modelo matemático, ou regra genérica uma maneira que possa ser usada para estimar da qualidade do ar na cidade de Caxias do Sul ao longo dos demais dias? Explique.

( ) Não assimilei a pergunta.

(Q5) Analisando-se a evolução do sistema dinâmico através do objeto virtual, é possível afirmar que a partir de algum dia a chance da qualidade do ar ser boa ou ruim não se altera mais? Explique.

( ) Não assimilei a pergunta.

APÊNDICE F – Sequência de Atividades do *terceiro experimento*.

Parte 1: Conhecendo o contexto

1) Para dar início à nossa discussão acesse o seguinte endereço eletrônico.

http://zh.clicrbs.com.br/rs/noticias/noticia/2014/08/novos-imigrantes-mudam-o-cenario-do-rio-grande-do-sul-4576728.html

Faça a leitura da notícia veiculada recentemente nesse veículo de comunicação e em seguida explore os seguintes questionamentos:

(1a) De acordo com a notícia como é possível justificar quais são as causas desse movimento migratório relatado?

( ) Não assimilei a pergunta.

(1b) Qual o nível de escolaridade dos imigrantes caracterizados pela notícia? Isso diferencia esse movimento migratório de outros que você conhece e que já ocorreram na história? Explique.

( ) Não assimilei a pergunta.

(1c) Considerando o período de 2010 até 2014 e os números oficiais apresentados através do histograma (gráfico de barras) na notícia, em qual período dos apresentados a seguir ocorreu a variação mais significativa no número de solicitação de refúgio pelos imigrantes?

( ) 2010 à 2011.

( ) 2011 à 2012.

( ) 2012 à 2013.

( ) 2013 à 2014.

( ) Não assimilei a pergunta.

(1d) Ainda a respeito do fenômeno da migração (emigração ou imigração), você pode listar alguns outros fatos ou fatores que possam influenciar a sua ocorrência?

( ) Não assimilei a pergunta.

No contexto da migração, quando as pessoas chegam a Caxias do Sul, por exemplo, se deparam com uma realidade muitas vezes diferente da que estavam habituadas em seu lugar de origem. Na tentativa de buscar o seu “lugar ao sol” para se alocar, os imigrantes deslocam-se da cidade para os subúrbios. Observa-se que o contrário também ocorre, ou seja, pessoas partem do subúrbio para a cidade. Certa vez foi formulada a seguinte situação-problema:

“Suponha que no ano 2010 a taxa de migração de Caxias do Sul para o seu subúrbio seja de 7%. E que durante o mesmo ano a taxa de migração do subúrbio para a cidade seja de 4%. Se a população observada no ano 2010 foi de 350000 habitantes na cidade e no subúrbio foi de 100000 habitantes então qual a população estimada para o ano 2011 para cada um dos lugares?”

(P1) Após a leitura da situação-problema anterior, você consegue citar os assuntos matemáticos que considera estar envolvido(s) na resolução da questão?

( ) Não assimilei a pergunta.

(P2) É possível através de relações matemáticas evolvendo os assuntos citados por você na P1 elaborar a solução para a situação-problema inicial? Construa uma solução para o problema.

( ) Não assimilei a pergunta.

(P3) A solução proposta por você na P2 pode ser usada na construção de uma estimativa para a população em 2012? Em caso afirmativo construa uma solução.

( ) Não assimilei a pergunta.

(P4) Com o método de construção para a solução elaborada e utilizada nas questões P2 e P3 pode ser construído um método para estimar a população no ano de 2013? Explique.

( ) Não assimilei a pergunta.

(P5) Se fosse possível neste momento enunciar um "princípio geral", você conseguiria elaborar um modelo ou método matemático capaz de explicar como calcular a estimativa do número de habitantes da cidade de Caxias do Sul e do seu subúrbio a cada ano? Explique.

( ) Não assimilei a pergunta.

Parte 2: Conhecendo o objeto virtual

(P1) Você sabe o que uma *matriz* na matemática? Justifique sua escolha.

- ( ) Sim, é um assunto visto exclusivamente na matemática do ensino fundamental.
- ( ) Sim, é um assunto visto exclusivamente na matemática do ensino médio.
- ( ) Sim, é um assunto visto em diversas etapas do desenvolvimento escolar.
- ( ) Não, nunca ouvi falar do assunto.
- ( ) Não, porém já ouvi falar do assunto.

( ) Não assimilei a pergunta.

(P2) Caso sua resposta em (P1) tenha sido algum "sim", você poderia mencionar alguma aplicação desse assunto matemático? Explique.

( ) Não assimilei a pergunta.

(P3) Você sabe fazer operações aritméticas envolvendo matrizes? Explique.

( ) Não assimilei a pergunta.

(P4) É possível "dividir" uma matriz por outra? Ou seja, dadas A e B matrizes é possível fazer A/B? Explique.

( ) Não assimilei a pergunta.

(P5) Seja M uma matriz. Você sabe calcular uma potência de uma matriz M ? Por exemplo, M^3? Explique.

( ) Não assimilei a pergunta.

(P6) Você sabe o que é um *vetor*? Explique.

( ) Sim, é um assunto visto exclusivamente nas aulas de matemática no ensino fundamental.
( ) Sim, é um assunto visto exclusivamente nas aulas de física do ensino fundamental.
( ) Sim, é um assunto visto exclusivamente nas aulas de matemática no ensino médio.
( ) Sim, é um assunto visto exclusivamente nas aulas de física do ensino médio.
( ) Sim, é um assunto visto em diversas etapas do desenvolvimento escolar.
( ) Não, nunca ouvi falar do assunto.
( ) Não, porém já ouvi falar do assunto.

( ) Não assimilei a pergunta.

(P7) Se você respondeu algum "sim" em (P6), saberias explicar como se representa um vetor? Quais maneiras você conhece para fazer isso? Explique.

( ) Não assimilei a pergunta.

Para iniciarmos essa parte das atividades, acesse o objeto virtual:

http://tube.geogebra.org/material/show/id/860625

Em seguida, clique no botão: Ir para a versão do estudante

***Explore por alguns instantes o objeto virtual antes de iniciar as atividades a seguir.**

(Ob1) Utilizando o objeto virtual defina a matriz $M = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.7 \\ 0.8 & 0.6 \end{bmatrix}$. Calcule através do objeto virtual algumas potências M^p. Em seguida defina a matriz $M = \begin{bmatrix} 0.45 & 0.65 \\ 0.55 & 0.35 \end{bmatrix}$. Novamente, calcule através do objeto potências M^p. Você percebe *semelhanças* ou *diferenças* entre os resultados obtidos com essas matrizes? Explique.

( ) Não assimilei a pergunta.

(Ob2) Defina a matriz $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Calcule algumas potências M^p e observe o que ocorre. Há alguma relação dessa matriz com as matrizes definidas em (Ob1)? Explique.

( ) Não assimilei a pergunta.

(Ob3) Defina o vetor $\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$. O que ocorre quando você altera "n" na escala $1:10^n$? O que significa essa escala? Explique.

( ) Não assimilei a pergunta.

(Ob4) Com base em seu conhecimento, efetue o cálculo $\begin{bmatrix} 0.45 & 0.65 \\ 0.55 & 0.35 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$. É possível obter o resultado desse cálculo utilizando o objeto virtual? Explique.

( ) Não assimilei a pergunta.

(Ob5) Usando o objeto virtual como você poderia calcular $\begin{bmatrix} 0.45 & 0.65 \\ 0.55 & 0.35 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 0.45 & 0.65 \\ 0.55 & 0.35 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 0.45 & 0.65 \\ 0.55 & 0.35 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = ?$ Explique como você faria isso.

( ) Não assimilei a pergunta.

(Ob6) Após fazer o cálculo em (Ob5), qual o resultado que você obteve? A resposta é um vetor? Em caso afirmativo, há relação, semelhanças, diferenças entre o vetor original $\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ e o resultado obtido? Explique.

( ) Não assimilei a pergunta.

(Ob7) Observando o resultado obtido em (Ob6), qual o menor número "n" na escala que torna as coordenadas do vetor resultado números inteiros? Explique.

( ) Não assimilei a pergunta.

(Ob8) Com base no que foi feito até agora, como você faria para calcular o resultado da expressão $\underbrace{\begin{bmatrix} 0.45 & 0.65 \\ 0.55 & 0.35 \end{bmatrix} \bullet \cdots \bullet \begin{bmatrix} 0.45 & 0.65 \\ 0.55 & 0.35 \end{bmatrix}}_{300 vezes} \bullet \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = ?$ O resultado é um vetor? É possível fazer esse cálculo "à mão"? Explique.

( ) Não assimilei a pergunta.

Parte 3: Retomando a problemática inicial

No momento anterior manipulamos um pouco o objeto virtual com o objetivo de compreender como era possível realizar algumas operações aritméticas envolvendo matrizes quadradas e suas potências, bem como a multiplicação de uma matriz quadrada por uma matriz coluna (vetor). Agora retomaremos a situação-problema da migração na tentativa de formular um princípio que possa nos orientar na compreensão do fenômeno. Mas antes, tente responder os seguintes questionamentos:

(P1) O que você entende por “idealizar” uma situação na matemática? Há relação entre “ideal” e “realidade”. Explique.

( ) Não assimilei a pergunta.

A situação apresentada inicialmente foi:

“Suponha que no ano 2010 a taxa de migração de Caxias do Sul para o seu subúrbio seja de 7%. E que durante o mesmo ano a taxa de migração do subúrbio para a cidade seja de 4%. Se a população observada no ano 2010 foi de 350000 habitantes na cidade e no subúrbio foi de 100000 habitantes então qual a população estimada para o ano 2011 para cada um dos lugares?”

Possíveis (outras) variáveis envolvidas:

(P2) Em se tratando de idealizar o contexto, o estudo proposto que envolve a situação-problema inicial está idealizada ou corresponde a realidade sobre o fenômeno de migração observado? Ao estudar essa situação-problema, a partir de um modelo matemático pode-se explicar alguns fatos observáveis na realidade? Explique.

( ) Não assimilei a pergunta.

(Ob1) Seria possível utilizar sistemas lineares para resolver a situação anterior? Em caso afirmativo, como você construiria um possível sistema linear para representar a situação-problema?

( ) Não assimilei a pergunta.

(Ob2) Na primeira aula você fez uma estimativa para o cálculo da população em 2011. Através da sua resposta na questão anterior use o objeto virtual para estimar a população tanto da cidade como do subúrbio em 2011. Explicite suas contas feitas utilizando o objeto virtual.

( ) Não assimilei a pergunta.

(Ob3) Mantendo-se as taxas de migração iguais, seria possível construir um sistema linear que pudesse ser usado para estimar a população em 2012 na cidade e no subúrbio? Explicite.

( ) Não assimilei a pergunta.

(Ob4) Supondo todas as taxas de migração mantidas, pode-se estimar a população em 2020 fazendo-se qual cálculo? Use o objeto virtual para estimar essas populações, se possível.

( ) Não assimilei a pergunta.

(Ob5) Genericamente, defina que o ano de 2011 seja *t = 1*. Como você expressaria através de uma expressão matemática uma estimativa para a quantidade de população em ambos os lugares (cidade/subúrbio) em uma determinada época *t = n*? Explique.

( ) Não assimilei a pergunta.

Depois da discussão feita até o momento, chega-se ao seguinte conceito:

"Uma Cadeia de Markov é um sistema dinâmico no qual os vetores de estado em uma sucessão de intervalos de tempo são vetores de probabilidade e cada um dos vetores de estado na sucessão dos intervalos de tempo é obtido por uma equação da forma $\vec{u}(k+1) = P.\vec{u}(k)$ *onde* $P = \left[p_{ij} \right]$ *é uma matriz estocástica e* p_{ij} *é a probabilidade do sistema estar no estado* i *no tempo* $t = k+1$ *e no estado* j *no tempo* $t = k$*. A matriz* P *é chamada de matriz de transição para o sistema." (Anton e Busby, 2003, p.228, tradução nossa)*

Definições importantes:

1) Probabilidade: ____

2) Vetor de probabilidade: ____

3) Matriz estocástica: ____

(Ob6) Na situação-problema envolvendo o fenômeno da migração, você consegue identificar quem são os *vetores probabilidade* e a *matriz estocástica*? Explique.

( ) Não assimilei a pergunta.

(Ob7) Se você conseguiu obter uma matriz na questão anterior, como você explicaria o significado das entradas p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22} na matriz com base na definição apresentada no início? Explique.

( ) Não assimilei a pergunta.

Parte 4: Avançando no estudo da Cadeia de Markov – 2D

Na aula passada falamos um pouco sobre os seguintes termos: "probabilidade", "vetor de probabilidade" e "matriz estocástica". Falamos também sobre que é uma Cadeia de Markov. O conceito que vimos foi:

*"Uma **Cadeia de Markov** é um **sistema dinâmico** no qual os **vetores** de estado em uma sucessão de intervalos de tempo são **vetores de probabilidade** e cada um dos vetores de estado na sucessão dos intervalos de tempo é obtido por uma equação da forma $\vec{u}(k+1) = P.\vec{u}(k)$ onde $P = \left[p_{ij} \right]$ é uma **matriz estocástica** e p_{ij} é a **probabilidade** do sistema estar no estado i no tempo $t = k+1$ e no estado j no tempo $t = k$. A matriz P é chamada de matriz de transição para o sistema." (Anton e Busby, 2003, p.228, tradução nossa)*

O objeto virtual que estamos utilizando pode ser acessado aqui:
http://tube.geogebra.org/material/show/id/860625

Com base no estudo desenvolvido até o presente momento sobre a situação-problema inicial foi criado um modelo matemático para compreender a evolução da situação-problema envolvendo um contexto da migração entre Caxias do Sul e seu subúrbio. Avançaremos mais o estudo sobre esse modelo.

(Ob1) Observando a evolução do sistema através do objeto virtual, estime as populações da cidade e do subúrbio nos anos de 2010, 2020 e 2030. Explicite suas estimativas.

( ) Não assimilei a pergunta.

(Ob2) Analisando a evolução do sistema através do objeto virtual é possível afirmar que a partir de certo tempo as populações da cidade e do subúrbio irão se estabilizar[44]? Explique.

( ) Não assimilei a pergunta.

(Ob3) Considere as suas estimativas populacionais para o ano de 2020. Considere um sujeito qualquer dentro do total de sujeitos envolvidos (450000 habitantes). O que você pode afirmar sobre a **probabilidade** desse sujeito ir da cidade para o subúrbio (caso ele esteja na cidade)? E a probabilidade dele ir do subúrbio para a cidade (caso ele esteja no subúrbio)? Qual dos dois eventos é mais provável que aconteça? Explique.

( ) Não assimilei a pergunta.

De acordo com a sua resposta dada em **(Ob2)** chega-se ao seguinte conceito:

Vetor estacionário (vetor de equilíbrio): É um vetor de probabilidade $\vec{v} \neq \vec{0}$ tal que $P\vec{v} = \vec{v}$ e P é matriz estocástica nas condições da definição sobre "cadeia de Markov".

Discussão sobre como calcular o "vetor estacionário".

( ) Não assimilei a pergunta.

[44] Quando um processo de Markov estabiliza ao longo do tempo dize-se que o processo converge para o "vetor estacionário" ou "vetor de equilíbrio".

(Ob4) Faça uma hipótese através do objeto de quem poderia ser o vetor estacionário para a situação-problema. Utilize os seus conhecimentos de sistemas lineares para calcular o vetor. Justifique.

( ) Não assimilei a pergunta.

2º Situação-problema. (Adaptada de Anton e Rorres(2012))

Suponha que às 10h em Caxias do Sul cada um dos dois canais de televisão concorrentes (A e B) tenha 150000 telespectadores de audiência. Considerando que a cada hora que passa o canal "A" atrai 10% da audiência do canal "B" e que o canal "B" atrai 20% da audiência do canal "A". Com o passar das horas, a partir das 10h, é possível prever os níveis de audiência em cada um dos canais de televisão utilizando a ideia da Cadeia de Markov.

(P1) A situação-problema apresentada acima está idealizada, para fins de Modelagem?
( ) Sim. Justificativa: ____
( ) Não. Justificativa: ____

(Ob5) Utilizando os recursos do objeto virtual estime quais os níveis de audiência de cada canal às 13h. (Dica: considere que 10h corresponde ao instante zero da Cadeia)

( ) Não assimilei a pergunta.

(Ob6) Você consegue explicitar os vetores probabilidade e a matriz estocástica desse problema? Explique.

( ) Não assimilei a pergunta.

(Ob7) Genericamente, defina que 10h da manhã seja ***p = 0***. Como você expressaria através de uma expressão matemática a quantidade de audiência de ambos os canais (A e B) em uma determinada hora do dia ***p = n***? Explique.

( ) Não assimilei a pergunta.

(Ob8) Considere as suas estimativas de audiência para os canais A e B às 15h. Considere um sujeito qualquer dentro do total de expectadores. O que você pode afirmar sobre a **probabilidade** desse sujeito começar a assistir o canal B (caso ele esteja assistindo o canal A)? E a probabilidade dele assistir passar a assistir o canal A (caso ele esteja assistindo o canal B)? Qual dos dois eventos é mais provável que aconteça? Explique.

( ) Não assimilei a pergunta.

(Ob9) Analisando a evolução do sistema através do objeto virtual é possível afirmar que a partir de algum instante as audiências dos canais A e B estabilizam/estacionam? Se necessário, consulte sua questão (Ob4). Explique.

( ) Não assimilei a pergunta.

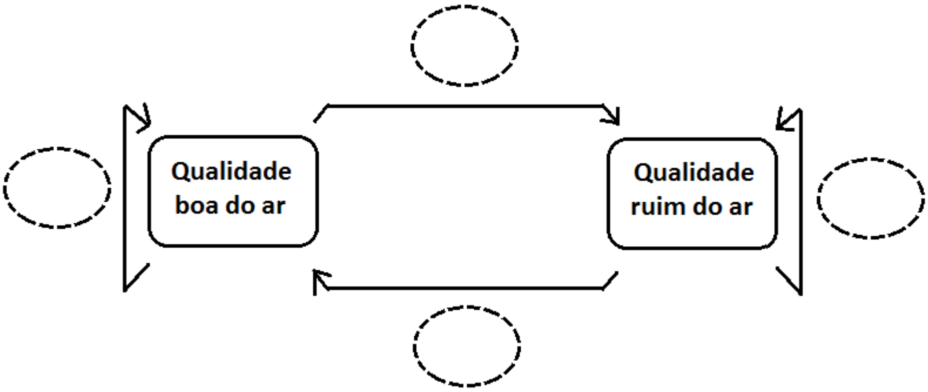
Parte 5: Trabalho sobre Cadeias de Markov – 2D

(Adaptada de Anton e Rorres (2012))

Observe a seguinte situação-problema.

Em estações de medições da qualidade do ar nas cidades é possível através das medições e suas análises inferirmos sobre a qualidade do ar "respirado" pelos habitantes da cidade. Em Caxias do Sul (RS) verificou-se através da observação e análise de alguns registros empíricos que se em determinado dia a qualidade do ar é boa, então existe uma chance de 90% de que venha a ser boa a qualidade do ar no próximo dia. No estudo verificou-se também que se a qualidade do ar é ruim em determinado dia então existe uma chance de 45% de que a qualidade do ar venha ser ruim também no próximo dia. Nota-se que a qualidade do ar respirado hoje (19/08/2015) é boa, então qual a probabilidade do ar respirado também ser boa daqui 8 dias?

(Q1) Com base nas informações do problema acima preencha o diagrama abaixo com as "chances" de ocorrência dos eventos.



(Q2) Você consegue obter os *vetores probabilidade* e a *matriz estocástica* dessa situação-problema? Em caso afirmativo, explicite-os.

( ) Não assimilei a pergunta.

Obs.:
(1) Nos questionamentos a seguir utilize o objeto virtual:
http://tube.geogebra.org/material/show/id/860625
(2) Considerando que se o ar está com uma qualidade boa é porque ele não está ruim naquele dia, ou seja, defina a condição inicial como $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.
(3) Considerando que se o ar está com uma qualidade ruim é porque ele não está bom naquele dia, ou seja, defina a condição inicial como $\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.
(4) A situação-problema apresentada acima está idealizada, para fins de Modelagem?

( ) Sim. Justificativa: ____

( ) Não. Justificativa: ____

(Q3) Considerando que a qualidade do ar esteja boa hoje, use o objeto virtual para estimar as chances de condições na qualidade do ar (boa ou ruim) nas datas de 21/08, 25/08 e 31/08. Explicite seu raciocínio. (considere que o valor do parâmetro **p = 0** corresponde a 19/08/2015)

( ) Não assimilei a pergunta.

(Q4) Mantidas as condições *ideais* para a situação-problema e supondo que seja usada como condição inicial $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ para representar o dia (19/08/2015), no qual a qualidade do ar que se está respirando é **boa**, você consegue expressar através de um modelo matemático, ou regra genérica uma maneira que possa ser usada para estimar da qualidade do ar na cidade de Caxias do Sul ao longo dos demais dias? Explique.

( ) Não assimilei a pergunta.

(Q5) Considere o dia 22/08/2015. De acordo com a evolução do sistema dinâmico e suas estimativas, qual a chance da qualidade do ar no dia 23/08/2015 permanecer ainda "boa", se a qualidade estiver "boa" em 22/08/2015? Caso a qualidade do ar fosse ruim em 22/08/2015, qual seria a chance da qualidade ainda ser "ruim" no dia seguinte? Explique.

( ) Não assimilei a pergunta.

(Q6) Analisando-se a evolução do sistema dinâmico através do objeto virtual e a partir dos seus conhecimentos desenvolvidos até aqui, é possível afirmar que a partir de alguma data as chances da qualidade do ar ser boa ou ruim não se alteram mais? A situação "estaciona" a partir de algum tempo? Explique.

( ) Não assimilei a pergunta.

Parte 6: Um pouco sobre Cadeias de Markov – 3D

O objeto virtual que será utilizado hoje está publicado em:
http://tube.geogebra.org/material/show/id/1519869

Relembrando o conceito já debatido: *"Uma **Cadeia de Markov** é um **sistema dinâmico** no qual os **vetores** de estado em uma sucessão de intervalos de tempo são **vetores de probabilidade** e cada um dos vetores de estado na sucessão dos intervalos de tempo é obtido por uma equação da forma* $\vec{u}(k+1) = P.\vec{u}(k)$ *onde* $P = \left[\, p_{ij} \,\right]$ *é uma **matriz estocástica** e* p_{ij} *é a **probabilidade** do sistema estar no estado* i *no tempo* $t = k+1$ *e no estado* j *no tempo* $t = k$*. A matriz* P *é chamada de matriz de transição para o sistema." (Anton e Busby, 2003, p.228, tradução nossa).*

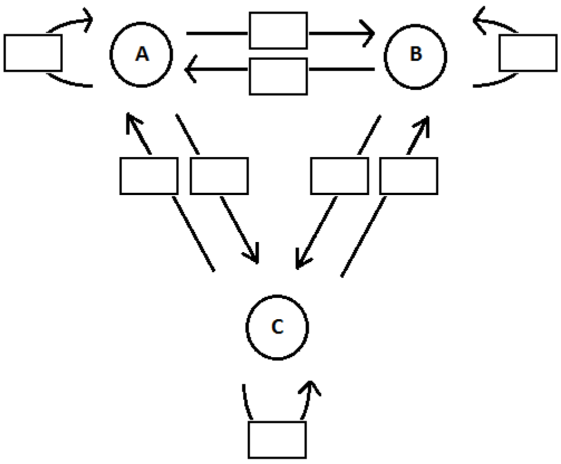
<u>Vetor estacionário</u> (vetor de equilíbrio): É um vetor de probabilidade $\vec{v} \neq \vec{0}$ tal que $P\vec{v} = \vec{v}$ e P é matriz estocástica nas condições da definição sobre "cadeia de Markov".

Observe a seguinte situação-problema. (Adaptada de Lay (1999))

Anualmente em um condomínio residencial em Caxias do Sul é realizada a eleição para o cargo síndico. Para tal formam-se três chapas distintas entre si e aqui designadas por A (situação), B (oposição) e C (liberal). Apenas uma das chapas é a vencedora das eleições anuais. Em um estudo empírico realizado em 2015 no período eleitoral com os moradores do condomínio verificou que a distribuição dos votos poderia seguir a seguinte tabela:

Antes eu votei em X, agora há uma chance de votar em Y	**Probabilidade**
A (situação) → A (situação)	75%
A (situação) → B (oposição)	15%
A (situação) → C (liberal)	10%
B (oposição) → B (oposição)	80%
B (oposição) → A (situação)	10%
B (oposição) → C (liberal)	10%
C (liberal) → C (liberal)	50%
C (liberal) → A (situação)	35%
C (liberal) → B (oposição)	15%

(Q1) Com base nas informações do problema acima preencha o diagrama abaixo com as probabilidades de ocorrência dos eventos.



(Q2) Com base no estudo desenvolvido até aqui, defina as condições abaixo, que serão usadas adiante.

(a) Considerando que o sujeito tenha votado na **chapa A** em uma eleição, a condição inicial será $\vec{u} = \begin{bmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{bmatrix}$.

(b) Considerando que o sujeito tenha votado na **chapa B** em uma eleição, a condição inicial será $\vec{u} = \begin{bmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{bmatrix}$.

(c) Considerando que o sujeito tenha votado na **chapa C** em uma eleição, a condição inicial será $\vec{u} = \begin{bmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{bmatrix}$.

(Q3) Mantendo-se as mesmas chances de voto à longo prazo utilize o objeto virtual para estimar e explicitar as chances de voto em cada uma das chapas (A, B e C) em 2020, 2025 e 2030. Suponha que em 2015 o morador tenha votado na chapa B.

( ) Não assimilei a pergunta.

(Q4) As estimativas feitas por você anteriormente se modificam caso o morador tenha ou votado na chapa A ou na chapa C no ano de 2015? Explique.

( ) Não assimilei a pergunta.

(Q5) Mantidas as condições *ideais* para a situação-problema, você consegue elaborar um modelo matemático ou regra genérica que possa ser utilizada para expressar as estimativas probabilísticas de intenção no voto dos moradores do condomínio? Considere que o processo tem início em 2015 e morador do condomínio tenha votado em algumas das chapas. Explique.

( ) Não assimilei a pergunta.

(Q6) Analisando as estimativas feitas em (Q3) para o ano de 2020, nas eleições do ano 2021 o que é mais provável que aconteça? Que o morador mantenha o voto na chapa que ele votou em 2020 ou mude de chapa ao votar? Explique.

( ) Não assimilei a pergunta.

(Q7) Analisando-se a evolução do sistema dinâmico através do objeto virtual e a partir dos seus conhecimentos desenvolvidos até aqui, é possível afirmar que a partir de alguma data as probabilidades de intenção de voto não se alteram mais? A situação "estaciona" a partir de algum tempo? Explique.

( ) Não assimilei a pergunta.

(Q8) Faça uma hipótese através do objeto virtual sobre quem poderia ser o vetor estacionário para a situação-problema aqui estudada. Utilize os seus conhecimentos para calcular tal vetor probabilidade estacionário. Justifique.

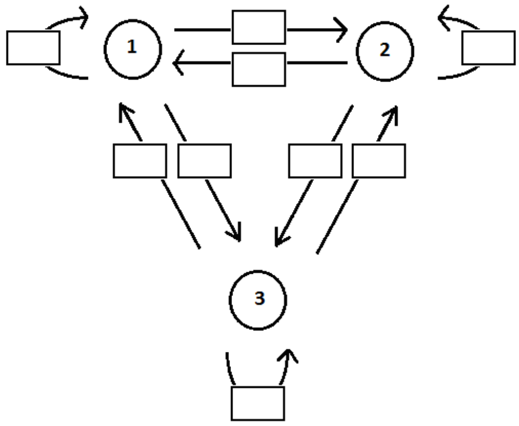
( ) Não assimilei a pergunta.

2º Situação-problema. (Adaptada de Anton e Rorres (2012))

Na savana africana há três reservas monitoradas por pesquisadores da vida selvagem, aqui denotadas por Reserva 1, Reserva 2 e Reserva 3. Devido às condições climáticas atuais, os pesquisadores monitoram as populações de leões que habitam as três reservas, de modo a compreender o movimento migratório desses animais em busca de alimento e água. Há um monitoramento sendo realizado sobre uma amostra total de 500 leões, sendo que atualmente (hoje, 26/08/2015): 50 leões estão na Reserva A, 150 leões estão na Reserva B e 300 leões estão na Reserva C. Com base nos padrões de alimentação e água disponíveis nas reservas os pesquisadores concluem empiricamente as probabilidades envolvendo a migração semanal dos leões pelo ambiente das savanas seja conforme a seguinte distribuição:

Antes o leão estava em X, agora está em Y	**Probabilidade**
Reserva 1 → Reserva 1	50%
Reserva 1 → Reserva 2	20%
Reserva 1 → Reserva 3	30%
Reserva 2 → Reserva 2	20%
Reserva 2 → Reserva 1	40%
Reserva 2 → Reserva 3	40%
Reserva 3 → Reserva 3	10%
Reserva 3 → Reserva 1	60%
Reserva 3 → Reserva 2	30%

(Q9) Com base nas informações do problema acima preencha o diagrama abaixo com as probabilidades de ocorrência dos eventos.



(Q10) Neste problema, para efeitos de estudo, a condição a condição inicial será $\vec{u} = \begin{bmatrix} \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \end{bmatrix}$.

(Q12) Mantendo-se as condições ideais ao longo das semanas utilize o objeto virtual para estimar e explicitar as populações em cada uma das reservas tendo depois de:
(i) quatro semanas
(ii) dois meses
(iii) meio ano
(iv) dois anos

( ) Não assimilei a pergunta.

(Q13) Mantidas as condições *ideais* para a situação-problema, você consegue elaborar um modelo matemático ou regra genérica que possa ser utilizada para expressar as estimativas populacionais para as três reservas? (a data de 26/08/2015 corresponde ao início de observação do fenômeno migratório). Explique.

( ) Não assimilei a pergunta.

(Q14) É possível que a partir de algum instante as populações em cada reserva não se altere mais? Faça alguma hipótese através do objeto virtual sobre isso. Em caso afirmativo, utilize o seu conhecimento para calcular tal vetor probabilidade estacionário. Justifique.

( ) Não assimilei a pergunta.

APÊNDICE G – Programa da disciplina de **Modelagem Matemática**

Programa da disciplina de **Modelagem Matemática** do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul, campus Caxias do Sul.
Fonte: Projeto Pedagógico de Curso[45] (2011).

8º SEMESTRE	
Disciplina: **Modelagem Matemática**	Código: 030188
Natureza: **Teórica**	
Carga Horária: **60 horas**	
Objetivo Geral: Discutir a filosofia científica da modelagem matemática através de problemas que se apresentam em situações concretas. Analisar integralmente modelos simples de problemas de mecânica, biologia, química, eletricidade, ciências médicas, etc., através de equações diferenciais ordinárias.	
Ementa: Este componente curricular busca a caracterização da Modelagem Matemática como método de pesquisa científico e como metodologia de ensino. Elaboração de projetos de modelagem matemática dirigidos para o ensino fundamental e médio. Construção de modelos matemáticos de diversos fenômenos incluindo a implementação de simulação numérica e análise de resultados.	
Bibliografia Básica: [1] BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**: uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2009. | Vol. único - 5 ex. | 51 | B317e [2] BEAN, Dale. O que é modelagem Matemática? In: **Educação Matemática em revista**. Ano 8, nº 9/10, São Paulo, abril, 2001. [3] ALMEIDA, L. M. W. Modelagem Matemática e Formação de Professores. In: V ANPEd-SUL, 2004, Curitiba. **Anais do** V Seminário de Pesquisa em Educação da Região Sul. Curitiba: Universidade Católica do Paraná, 2004. [4] ZILL, D. G. **Equações Diferenciais com aplicações em modelagem.** São Paulo: THOMSON, 2003.	
Bibliografia Complementar: [1] SVIERCOSKI, Rosangela F. **Matemática aplicada às ciências agrárias**: análise de dados e modelos . Viçosa: UFV, 2008. | Vol. Único. [2] D' AMBRÓSIO, U. **Etnomatemática**: um programa. In: Educação Matemática em revista. Ano 1, nº 1, São Paulo, abril, 1993. [3] ZILL, Dennis G. **Equações diferenciais.** São Paulo: Pearson Makron Books , 2008. Vol. 1. [4] BOYCE, William E. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. Rio de Janeiro: LTC, 2006. | Vol. Único. [5] ASCENCIO, Ana Fernanda Gomes; VENERUCHI, Edilene Aparecida. **Fundamentos de Programação de Computadores.** São Paulo: Prentice-Hall, 2005.	

[45] Disponível em: http://www.caxias.ifrs.edu.br/site/midias/arquivos/201421484018929ppc_matematica_2011-01.pdf

APÊNDICE H – Programas das disciplinas de **Matemática III** e **IV**

Programas das disciplinas de **Matemática III** e **IV** do curso de Técnico em Plásticos Integrado ao Ensino Médio do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul, campus Caxias do Sul. Fonte: Projeto Pedagógico de Curso[46] (2010, p.41, 51).

Disciplina: **Matemática III**	Código:
Natureza: **Teórica**	
Carga Horária: **60 horas**	
Objetivos: Desenvolver a capacidade dos alunos a desenvolver cálculos, interpretação de problemas interdisciplinares e do seu cotidiano que envolve funções. Desenvolver a capacidade dos alunos a desenvolver cálculos envolvendo área e volume, interpretação de problemas interdisciplinares e do seu cotidiano.	
Ementa: Matrizes. Determinantes. Sistemas Lineares. Geometria Analítica. Números Complexos.	
Bibliografia Básica: [1] DANTE, L. R. **Matemática**. Volume Único. 1ª edição. São Paulo, SP: Ática, 2005. [2] BIANCHINI, E.; PACCOLA, H. **Curso de Matemática**. Volume Único. 3ª edição. São Paulo, SP: Moderna, 2003. [3] IEZZI, Gelson, et al. **Matemática**: Ensino Médio. Volume Único. 4ª edição. São Paulo, SP: Atual, 2007.	
Bibliografia Complementar: [1] FACCHIN, W. **Matemática para a escola de hoje**. Volume Único. 4ª edição. São Paulo, SP: FTD, 2006. [2] GIOVANNI, José Ruy, et. Al. **Matemática Fundamental**: Uma nova abordagem. Volume Único. São Paulo, SP: FTD, 2002. [3] BARRETO, B. F., SILVA, C. X. **Matemática Aula por Aula**. Volume Único. São Paulo, SP: FTD, 2000. [4] GOULART, M. C. **Matemática para o ensino médio** – Série Parâmetros. Volume Único. 5ª edição. São Paulo, SP: Scipione, 2001. [5] FERNANDES, W. S. **Matemática para o ensino médio**. Volume Único. São Paulo, SP: IBEP. 2005.	

[46] Disponível em: http://www.caxias.ifrs.edu.br/site/midias/arquivos/2014214152759467ppc_plasticos_integrado_2010.pdf

Disciplina: **Matemática IV**	Código:
Natureza: **Teórica**	
Carga Horária: **60 horas**	
Objetivos: Desenvolver a capacidade dos alunos a desenvolver cálculos, interpretação de problemas interdisciplinares e do seu cotidiano que envolve funções. Desenvolver a capacidade dos alunos a desenvolver cálculos envolvendo área e volume, interpretação de problemas interdisciplinares e do seu cotidiano.	
Ementa: Polinômios. Equações algébricas. Análise Combinatória. Estatística. Probabilidade. Matemática Financeira.	
Bibliografia Básica: [1] DANTE, L. R. **Matemática**. Volume Único. 1ª edição. São Paulo, SP: Ática, 2005. [2] BIANCHINI, E.; PACCOLA, H. **Curso de Matemática**. Volume Único. 3ª edição. São Paulo, SP: Moderna, 2003. [3] IEZZI, Gelson, et al. **Matemática**: Ensino Médio. Volume Único. 4ª edição. São Paulo, SP: Atual, 2007.	
Bibliografia Complementar: [1] FACCHIN, W. **Matemática para a escola de hoje**. Volume Único. 4ª edição. São Paulo, SP: FTD, 2006. [2] GIOVANNI, José Ruy, et. Al. **Matemática Fundamental**: Uma nova abordagem. Volume Único. São Paulo, SP: FTD, 2002. [3] BARRETO, B. F., SILVA, C. X. **Matemática Aula por Aula**. Volume Único. São Paulo, SP: FTD, 2000. [4] GOULART, M. C. **Matemática para o ensino médio** – Série Parâmetros. Volume Único. 5ª edição. São Paulo, SP: Scipione, 2001. [5] FERNANDES, W. S. **Matemática para o ensino médio**. Volume Único. São Paulo, SP: IBEP. 2005.	