

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA**

RENI WOLFFENBÜTTEL

INVESTIGANDO NÚMEROS RACIONAIS COM O SOFTWARE GEOGEBRA

PORTO ALEGRE - RS

2015

RENI WOLFFENBÜTTEL

INVESTIGANDO NÚMEROS RACIONAIS COM O SOFTWARE GEOGEBRA

Dissertação realizada sob orientação da Profa. Dra. Débora da Silva Soares, apresentada ao PPGEMAT do Instituto de Matemática e Estatística da UFRGS em preenchimento parcial dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

PORTO ALEGRE - RS

2015

INVESTIGANDO NÚMEROS RACIONAIS COM O SOFTWARE GEOGEBRA

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
MESTRADO PROFISIONALIZANTE EM ENSINO DE MATEMÁTICA**

PORTO ALEGRE, 16 de Dezembro de 2015

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Daise Lago Pereira Souto
UNEMAT

Profa. Dra. Márcia Rodrigues Notare Meneghetti
IM/UFRGS

Prof. Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso
IM/UFRGS

DEDICATÓRIA

Dedico à minha mãe, Iracema Wolffenbüttel (in memoriam).

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha mãe, Iracema Wolffenbüttel, por ter sido a minha maior incentivadora, tendo ela me apoiado até os seus últimos minutos de vida, e por tudo que ela representa para mim.

Ao meu pai, Egídio, e à minha irmã, Cláudia, pelos auxílios que me deram durante essa jornada, e por entenderem as vezes em que não me fiz presente no convívio familiar.

À minha namora e companheira, Michelle, por se fazer sempre presente e por ter entendido os momentos em que não pude ter-lhe dado a devida atenção por estar me dedicando ao pleito desta pesquisa.

À minha querida e compreensiva orientadora, Profa. Dra. Débora, por ter abraçado comigo esse projeto, colocando-se sempre à disposição e me ajudando sempre que solicitada.

Aos meus ex-alunos de 8º ano da escola Alberto Santos Dumont, por terem se voluntariado à participação da pesquisa, permitindo que ela fosse realizada.

À Universidade Federal do Rio Grande do Sul, por ser a instituição de ensino que oportunizou esta relevante formação profissional.

Aos professores do corpo docente do Curso de Mestrado, pelos ensinamentos a mim proporcionados e pela relação fraterna dentro e fora da sala de aula.

Ao meu colega e amigo de mestrado, Rodrigo, pela parceria durante os estudos.

Aos meus colegas professores das escolas E.M.E.B. Alberto Santos Dumont, E.M.E.F. Marechal Bitencourt e E.M.E.F. Edgard Coelho, pela compreensão, substituições e apoio.

E a todos os meus amigos que, de alguma forma, me incentivaram nessa jornada.

RESUMO

A presente pesquisa tem como foco o ensino dos números racionais no Ensino Fundamental. Seu objetivo é analisar as potencialidades e limitações de uma proposta de ensino que utiliza o computador, em particular do *software* de geometria dinâmica GeoGebra, e a metodologia de aulas de matemática investigativa. Essa proposta de ensino foi aplicada em turmas de 8º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública, localizada na cidade de Sapucaia do Sul/RS. Esses estudantes já traziam conhecimentos sobre números racionais e, diante disso, esse campo numérico foi retomado com a intenção de verificar e contornar possíveis déficits de aprendizagem, assim como de ampliar o conhecimento sobre esses números por meio de investigações em que pudessem ser observadas algumas de suas características. Para isso, propusemos atividades que articulavam simultaneamente diferentes representações dos números racionais. A metodologia de pesquisa empregada foi a qualitativa. A proposta de ensino apresentada no final deste texto como alternativa de trabalho para o ensino de números racionais, e para professores, diante da análise realizada, podem refletir acerca de suas potencialidades e limitações. Dos resultados obtidos, podemos destacar os recursos visuais do *software* GeoGebra, que favoreceram aos alunos a compreensão dos números racionais e suas regularidades, e o cenário investigativo-tecnológico, que fez com que eles se mantivessem engajados na investigação como agentes de seu aprendizado.

Palavras-chave: aulas investigativas, ensino de matemática, números racionais, *software* GeoGebra.

ABSTRACT

This research focuses on the teaching of rational numbers in Elementary School. Its aim is to analyse the potentialities and limitations of a teaching approach which proposes the use of the computer, particularly the dynamic geometry software GeoGebra, and the methodology of investigative math classes. This teaching approach was applied to students of the 8th year of an Elementary Education public school located at Sapucaia do Sul/RS, Brazil. These students already studied rational numbers at school in previous years. Thus this numerical field has been taken into account with the intention to check and bypass possible learning deficits, as well as increase knowledge of these numbers through investigations in which it could be observed some of their characteristics. For this purpose, we proposed activities that simultaneously articulated different representations of rational numbers. The research is based in a qualitative paradigm. The teaching approach is presented at the end of this text as an alternative way for teaching rational numbers and other teachers in view of the analysis can consider its potentialities and limitations. From the results, we can highlight the visuals of the GeoGebra software, which favored students the understanding of rational numbers and their regularities and the investigative - technological scenario, which caused them to remain engaged in research as their learning agents.

Keywords: investigative lessons, mathematics teaching, rational numbers, GeoGebra software.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: exemplo medida 1	19
Figura 2: exemplo medida 2	20
Figura 3: exemplo medida racional	21
Figura 4: exemplo de equivalência de Frações:	31
Figura 5: retângulo fracionado:	32
Figura 6: retângulo fracionado equivalente	32
Figura 7: arquivo Ativ_decimal2	41
Figura 8: generalização dos números racionais	42
Figura 9: régua	44
Figura 10: reta	44
Figura 11: retas paralelas	45
Figura 12: segmentos proporcionais	45
Figura 13: nomeando pontos.....	46
Figura 14: retas concorrentes.....	47
Figura 15: uso do compasso	47
Figura 16: pontos equidistantes	48
Figura 17: reta guia	48
Figura 18: segmento dividido	49
Figura 19: segmento unitário.....	50
Figura 20: retas paralelas no GeoGebra	51
Figura 21: segmentos dos décimos.....	52
Figura 22: paralelas dos centésimos.....	54
Figura 23: centésimos	54
Figura 24: milésimos	55
Figura 25: visualização dos decimais.....	56
Figura 26: visualização dos centésimos.....	56
Figura 27: visualização dos milésimos	56
Figura 28: visualização arquivo Ativ_decimal2.....	61
Figura 29: aproximação.....	61
Figura 30: equivalência 1	63
Figura 31: equivalência 2	63

Figura 32: dízima	67
Figura 33: dízima 2.....	68
Figura 34: deslocamento da dízima	69
Figura 35: composição de racionais.....	70
Figura 36: repartição do segmento em 10 partes.....	85
Figura 37: respostas dos alunos R2 e M3.....	86
Figura 38: indicação dada por R2 e M3	87
Figura 39: escrita do aluno L1	88
Figura 40: escrita da segunda questão	89
Figura 41: resposta da questão 2 por G1, W1 e W2	89
Figura 42: escrita da terceira questão 1	90
Figura 43: escrita da terceira questão 2	90
Figura 44: escrita descritiva.....	91
Figura 45: divisão em centésimos	95
Figura 46: indicando a intersecção.....	96
Figura 47: indicando retas	97
Figura 48: indicando a fração	100
Figura 49: resposta aluno R2	101
Figura 50: localização na primeira partição.....	106
Figura 51: localização na quarta partição.....	106
Figura 52: resposta do aluno L1, segmentos pontos verdes.....	108
Figura 53: observação dos pontos verdes	114
Figura 54: observação dos pontos verdes 2	114
Figura 55: pontos azuis entre os pontos verdes.....	115
Figura 56: pontos azuis entre os pontos pretos.....	115
Figura 57: localização dos pontos azuis entre os pontos A e B	115
Figura 58: localização ponto azul das alunas C1 e G2	119
Figura 59: apontando a localização do ponto azul das alunas C1 e G2.....	120
Figura 60: ponto azul escolhido pelas alunas C1 e G2	121
Figura 61: resposta do aluno D2 para o segmento limitado por pontos pretos	122
Figura 62: visual dos pontos indicados	123
Figura 63: visualização na tela de A1.....	128
Figura 64: explorando o arquivo Ativ_decimal2.....	137
Figura 65: aluno D1 comparando resposta com aluno V2	144

Figura 66: fatorações na fração $36/100$	146
Figura 67: equivalência das frações $36/100$ e $9/25$	147
Figura 68: tela do arquivo Ativ_dizima3	153
Figura 69: respostas frações geratrizes, alunos A1, L1 e V2	156
Figura 70: respostas frações geratrizes, alunas B1 e P1	156
Figura 71: exercícios fixação, alunas S1 e V1.....	159
Figura 72: respostas frações geratrizes, alunos A1, L1 e V2	160

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: questões	86
Quadro 2: questões segmentos centesimais.....	100
Quadro 3: questões sugeridas, milésimos	113
Quadro 4: perguntas graduação infinita dos segmentos decimal.....	122
Quadro 5: perguntas do 4º encontro (alterada a 1ª questão)	126
Quadro 6: bloco de frações	143
Quadro 7: frações com determinadores compostos de 9s	154
Quadro 8: frações com denominadores compostos de 9s e 0s.....	154

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

PCNs
R e C
LABIN

Parâmetros Curriculares Nacionais
Software de Geometria Dinâmica Régua e Compasso
Laboratório de Informática

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	15
1 REFERENCIAL TEÓRICO	18
1.1 Revisão de Literatura	18
1.2 Do Ensino dos Números Racionais.....	24
1.3 Informática no Ensino de Matemática	27
1.4 Investigação Matemática	34
1.5 Representações Múltiplas	37
2 ATIVIDADES PROPOSTAS E CONCEITOS MATEMÁTICOS	40
2.1 Visão Geral da Sequência Didática.....	40
2.2 Atividades Introdutórias (Teorema de Tales).....	42
2.3 Construindo os Decimais no Segmento Unitário	49
2.3.1 Atividades sobre Décimos	50
2.3.2 Atividades sobre Centésimos	53
2.3.3 Atividades sobre Milésimos	55
2.3.4 Atividades sobre as demais Extensões Decimais	55
2.3.4.1 Expansão Decimal de Números Decimais	57
2.3.4.2 Método das Divisões	59
2.4 Ocorrência de Dízimas Periódicas	60
2.4.1 Atividades sobre Ocorrências de Dízimas Periódicas	60
2.4.2 Atividade sobre Exploração de Dízima Periódica.....	67
3 METODOLOGIA DE PESQUISA	75
3.1 Da Pergunta da Pesquisa e dos Objetivos	75
3.2 Pesquisa Qualitativa.....	76
3.3 O Local e os Sujeitos da Pesquisa.....	77
3.4 Coleta e Análise dos Dados	78
4 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS	81
4.1 Da Abordagem sobre as Frações Decimais	81
4.1.1 Dados e Considerações do Primeiro Encontro.....	81
4.1.2 Dados e Considerações do Segundo Encontro	94
4.1.3 Dados e Considerações do Terceiro Encontro	109
4.1.4 Dados e Considerações do Quarto Encontro	125

4.2 Da Abordagem sobre as Frações que geram Dízima Periódica.....	138
4.2.1 Dados e Considerações do Quinto Encontro	139
4.2.2 Dados e Considerações do Sexto Encontro	148
4.3 Retomando a Pergunta Diretriz	161
4.3.1 Das Contribuições do GeoGebra no Ambiente Investigativo.....	162
4.3.2 Das Contribuições do GeoGebra para Aprendizagem dos Números Racionais.....	164
CONSIDERAÇÕES FINAIS	168
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	172
ANEXOS	177

INTRODUÇÃO

Observando nossos alunos ao chegarem na sala de aula, ou na hora do intervalo, percebemos o fascínio que as tecnologias exercem sobre eles. Em um dia, ao chegarmos à escola onde lecionávamos, deparamo-nos, na entrada, com um grupo de alunos, cada um com um aparelho celular na mão. Eles nos mostravam que haviam feito um grupo virtual da turma em uma das redes sociais da internet, e que naquele grupo eles passariam a compartilhar músicas, vídeos e arquivos em geral. Naquele momento, pudemos perceber que os jovens exploram e aprendem muitas coisas sobre tecnologias. Por outro lado, parte dos alunos em sala de aula não demonstrava essa mesma disposição para aprender as matérias que lhes eram ministradas. Isso nos motivou a pensar em uma metodologia que trouxesse o uso das tecnologias para dentro da sala de aula.

Além disso, como íamos lecionar para turmas de 8º ano do Ensino Fundamental no ano de 2014 e havia na grade curricular da escola o conteúdo “conjuntos numéricos”, incluídos aí os “números racionais”, identificamos estes últimos como um tema que, desde que iniciamos a lecionar, nos chama a atenção pela dificuldade que impõe aos alunos, independentemente do ano escolar que frequentam.

Muitos alunos têm dificuldades na aprendizagem dos números racionais. Por vezes, alguns perdem de vista a necessidade de todas as partes em que a unidade está dividida serem iguais, contam as partes incorretamente e, dada uma parte, têm dificuldade em relacioná-la com o todo correspondente. Mesmo quando parecem já ter algum conhecimento dos números racionais, parece faltar a alguns alunos uma noção quantitativa de número racional (PONTE; QUARESMA, 2011, p. 57).

Ainda, sabendo que os alunos gostam de explorar os recursos disponíveis em seus celulares, *tablets* e computadores, além dos aplicativos neles instalados, o presente trabalho busca criar um ambiente de investigação para o estudante. No ambiente investigativo, o aluno se torna sujeito explorador, conforme Brocardo, Oliveira e Ponte (2003, p.23):

Na disciplina de Matemática, como em qualquer outra disciplina escolar, o envolvimento ativo do aluno é uma condição fundamental da aprendizagem. O aluno aprende quando mobiliza os seus recursos

cognitivos e afetivos com vista a atingir um objetivo. Esse é, precisamente, um dos aspectos fortes das investigações. Ao requerer a participação do aluno na formulação das questões a estudar, essa atividade tende a favorecer o seu envolvimento na aprendizagem.

Como os alunos já traziam uma bagagem sobre números racionais, passamos a buscar uma abordagem que os colocassem a realizar tarefas que lhes lembrariam desses números. Na obra de Caraça (1951), os números racionais são explorados por meio de medidas de segmento. Dessa forma, ocorreu-nos que podíamos adaptar o método desse autor ao uso das tecnologias. Analisamos alguns *softwares* livres que pudessem nos auxiliar nessa tarefa e, dos que testamos, o *software* de geometria dinâmica GeoGebra foi aquele que nos ofereceu melhores recursos.

Com isso, a nossa pesquisa trata da elaboração e aplicação de uma proposta de ensino que se apoia em um ambiente investigativo e tecnológico, seguida de sua avaliação, que busca sinalizar suas potencialidades e limitações, qual seja: - De que modo uma proposta investigativa com o uso do *software* GeoGebra contribui para que os estudantes percebam características dos números racionais?

Dessa forma a dissertação está organizada da seguinte forma:

Capítulo 1: realizamos uma revisão de literatura de trabalhos que se aproximam da nossa pesquisa como inspiração e reflexão acerca dos temas com os quais vamos trabalhar. Esse capítulo também contém o aporte teórico que embasa nosso trabalho. A proposta de ensino utiliza-se das ideias da investigação matemática em sala de aula, uso da informática no ensino de matemática e representações múltiplas, e a metodologia da pesquisa se apoia na abordagem qualitativa.

Capítulo 2: arrolamos as atividades da metodologia de ensino e procedemos à escrita formal dos conceitos e propriedades dos números racionais envolvidos nessas atividades.

Capítulo 3: abordamos a metodologia da pesquisa qualitativa, indicando o local onde foi realizado o nosso trabalho prático, os participantes da pesquisa e como os dados foram coletados e analisados.

Capítulo 4: fazemos a apresentação e análise dos dados, indicando as potencialidades e limitações da proposta de ensino realizada, bem como abordamos outros aspectos que influenciaram nosso trabalho.

Considerações Finais: pontuamos nossas reflexões sobre o trabalho desenvolvido e nossas expectativas para trabalhos futuros.

1 REFERENCIAL TEÓRICO

Nosso trabalho se apoia em duas tendências no Ensino da Matemática, são elas: a Utilização de Tecnologias no Ambiente Escolar e o Ambiente de Aprendizagem Investigativo. Nesse capítulo, delineamos junto a pesquisadores dessas áreas a escrita que tende a elucidar o leitor sobre o caminho que tomamos na nossa proposta de ensino para os números racionais.

Preliminarmente fizemos uma revisão de literatura sobre o ensino dos números racionais, de modo a nos auxiliar na elaboração da proposta a ser colocada em prática com nossos alunos.

1.1 Revisão de Literatura

A diversidade de significados dos números racionais e suas representações lhe conferem inúmeras aplicações. Por outro lado, o ensino desses números com suas peculiaridades é um tanto desafiador. Esses aspectos foram relevantes para a escolha do tema em nossa pesquisa.

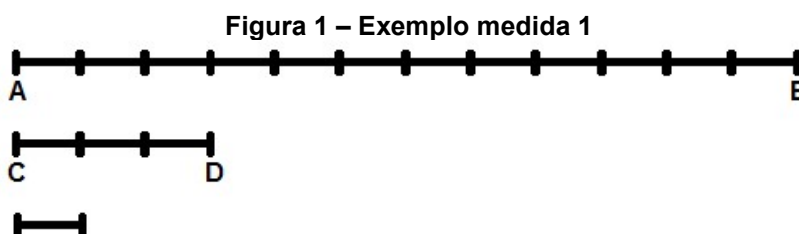
Contudo, queríamos uma maneira diferenciada para abordar os números racionais daquelas sugestões geralmente dadas em livros didáticos e das metodologias das quais já tínhamos conhecimento. Já havíamos decidido fazer uso das tecnologias, então, durante o nosso curso de Mestrado, ao cursarmos a disciplina de Fundamentos de Matemática A, nos foi apresentado o conjunto dos números racionais no contexto geométrico, tomando a comparação de medidas de segmentos, subdivisões de segmentos, construção da reta decimal graduada infinita, entre outros. Simpatizamos com a ideia de adaptar o modo como foram abordados os números racionais naquela disciplina e passamos a buscar por trabalhos acadêmicos que se debruçassem sobre o mesmo tema e contexto.

Entre busca e leituras, vimos com frequência referência ao livro do pesquisador Caraça (1951). Esse autor indica o campo dos racionais como um problema de medida. Primeiramente chama-nos a atenção que a ação de medir é uma necessidade humana. Em seguida, nos responde que medir é dizer quantas

vezes um segmento cabe no outro; mas essa resposta gera um outro aspecto a ser observado, a impossibilidade de termos uma unidade de medida que meça todas as grandezas. Dessa forma ele indica duas condições para podermos medir: 1º) Estabelecer um padrão único de medida para grandezas de mesma espécie, chamando esse padrão de unidade de medida, por exemplo, metros para comprimentos, segundos para tempo; 2º) Responder a pergunta – “Quantas vezes?” que originará um número que indique o resultado da comparação com a unidade, sendo esse número a medida.

O problema de medir, segundo Caraça (1951), passa por três aspectos: 1) escolha da unidade, considerando o aspecto prático, a comodidade e a economia; 2) comparação com a unidade e 3) expressão do resultado dessa comparação por um número. O surgimento do campo dos números racionais será então, exemplificado pelo autor por essa problemática através dos dois exemplos que iremos aqui reproduzir.

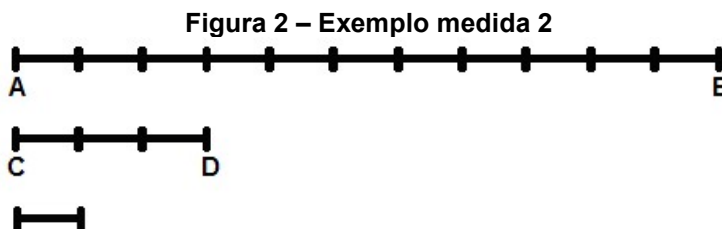
Primeiro exemplo) Tomemos um segmento maior \overline{AB} e outro menor \overline{CD} , onde o segmento \overline{CD} , cabe exatamente 4 vezes em \overline{AB} . Agora dividindo \overline{CD} em 3 partes iguais e tomando uma dessas partes como nova unidade de medida, teremos a medida de \overline{AB} igual a 12 dessas unidades. E sendo \overline{CD} igual a 3 dessas unidades, temos que medir \overline{AB} em relação a \overline{CD} , pode tanto ser indicado pelo número inteiro 4 quanto pela expressão 12:3 ou a razão $\frac{12}{3}$. Nesse caso vemos a razão indicar um número inteiro.



Fonte: Caraça (1951, p.33)

Segundo exemplo) Tomemos dois segmentos um maior \overline{AB} e outro menor \overline{CD} , onde o segmento \overline{CD} está dividido em três partes iguais que assumimos como unidade, e que essa mesma unidade cabe exatamente 11 vezes em \overline{AB} . Sendo \overline{CD} igual a 3 dessas unidades, temos que medir \overline{AB} em relação a \overline{CD} , como fizemos no

primeiro exemplo, pode ser indicado pela expressão 11:3 ou a razão $\frac{11}{3}$. Nesse caso a razão não indica um número inteiro.



Fonte: Caraça (1951, p.34)

O segundo exemplo ilustra a insuficiência dos números inteiros em expressar medidas, o que faz a necessidade de criar um novo *campo numérico* de modo a suprir essa necessidade. Para isso Caraça (1951) enuncia os moldes de criação:

1º) O princípio da extensão: refere-se a criação de novos números por meio dos quais possam exprimir a medida dos segmentos nos casos similares ao do exemplo 2.

2º) A análise do exemplo 2 mostra que a dificuldade está na impossibilidade da divisão resultar números inteiros, quando o dividendo não é múltiplo do divisor.

Dos dois itens acima recorre o terceiro.

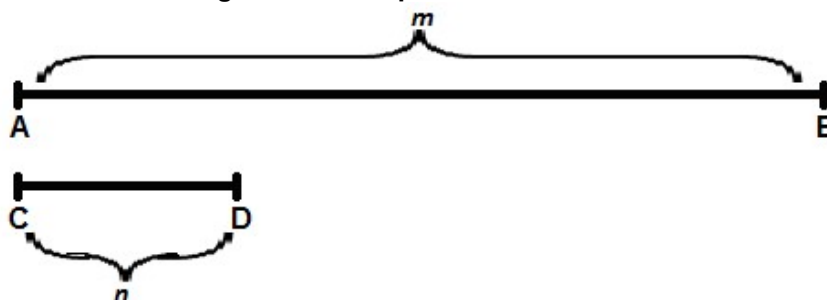
3º) Se quisermos obedecer o princípio *da economia* devemos fazer a construção de modo tal que:

i) os novos números devem abranger todas as hipóteses de medição sejam dos casos do exemplo 1, quanto os casos do exemplo 2;

ii) os novos números se reduzam em números inteiros sempre que o caso de medição se fizer análogo ao exemplo 1.

Atendendo a esses requisitos, decorre a seguinte definição: considere dois segmentos \overline{AB} e \overline{CD} nos quais cabem um número inteiro de vezes o segmento u , onde \overline{AB} contém m vezes e \overline{CD} contém n vezes o segmento u . Diz-se então, por *definição*, que a medida do segmento \overline{AB} , tomando o segmento \overline{CD} como unidade, é o número $\frac{m}{n}$, tendo: $\overline{AB} = \frac{m}{n} \cdot \overline{CD}$, para quaisquer que sejam os números inteiros m e n , com $n \neq 0$.

Figura 3 – Exemplo medida racional



Fonte: Caraça (1951, p.35)

No caso de m ser divisível por n , temos o número $\frac{m}{n}$ um número inteiro que é o quociente dessa divisão. Caso contrário, isto é, de m não ser divisível por n dizemos que o número $\frac{m}{n}$ é fracionário¹. Em qualquer uma dessas hipóteses o número $\frac{m}{n}$ é racional, sendo m chamado de numerador e n denominador.

Dessa forma esses novos números constituem o campo racional ou conjunto dos números racionais que é a união do conjunto dos números inteiros com o conjunto dos números fracionários.

Caraça (1951), nos parágrafos seguintes, faz observações sobre os números racionais, descrevendo suas propriedades e operações. No capítulo seguinte, apresenta a discussão de que o problema de medição não estaria totalmente solucionado pelo conjunto dos racionais. Medidas como as das diagonais de quadrados não teriam representatividade racional, devendo novamente criar outro campo numérico que atendessem tal problema, o que levaria à criação dos números irracionais.

No entanto, ao longo das páginas que seguiam, percebemos que Caraça (1951) fez todo o tratamento dos números racionais por meio da notação de frações pouco dizendo sobre a sua expansão no sistema decimal. Nesse momento ocorreu-nos a ideia de desenvolver em sala de aula atividades no contexto geométrico de medidas de segmentos com as relações entre frações e seus respectivos números racionais expandidos no sistema decimal. Retomamos assim, as leituras dos trabalhos científicos envolvendo racionais para verificar como os autores vinham contemplando o tema. Dentre os que havíamos observado, destacamos três

¹ Termo usado por Caraça (1951) para números racionais não inteiros.

dissertações de mestrado com características próximas a que queremos trabalhar: Boff (2006), Lessa (2011) e Lima (2010).

A pesquisa de Boff (2006) inicia com o levantamento em documentos oficiais brasileiros e norte-americanos sobre as recomendações ao ensino dos números. A respeito de Brasil, os Parâmetros Curriculares Nacional (PCNs) foram os documentos analisados, já para os Estados Unidos da América a análise foi feita sobre os textos da *National Council of Teachers of Mathematics* de 1974.

Boff (2006) lista em seu texto as orientações dos PCNs, fazendo breves comentários, e em seguida, considerando as recomendações do documento oficial, parte para análise de alguns livros didáticos do Ensino Básico aprovados pelo Ministério da Educação, verificando que as orientações dadas não estão totalmente contempladas nos livros didáticos.

Lima (2010), também fez uma análise de livros didáticos. O autor tomou livros de Matemática utilizados no decorrer do século XX com o intuito de verificar como os números racionais eram tratados ao longo desse período. Foram analisados livros das épocas Reforma Campos (1931), movimento da Matemática Moderna (meados dos anos 1960) e pós Matemática Moderna. Na cronologia dos livros de matemática, Lima (2010) constata o abandono da ideia de trabalhar a construção dos números racionais com base na medição. Os autores atuais dos livros didáticos citam a importância desse tipo de tratativa, mas os fazem de modo superficial em suas obras.

Assim como Boff (2006) e Lima (2010), Lessa (2011) faz uma análise de livros didáticos, mas de modo específico ao 6º ano do Ensino Fundamental entre os anos de 1927 até 2010. A autora constata nas dez obras observadas de distintas coleções, a padronização das bibliografias em iniciar o tratamento dos números racionais com a ideia de trabalhar com “parte de um todo” e em seguida se ramificando em outros significados como, medidas, operador, quociente e razão. Lessa (2011) faz um apanhado de como os autores dos livros didáticos enunciam esses significados, sendo unânime a abordagem dos significados parte de um todo e operador, sendo os outros significados - medida, quociente e razão - tratados apenas por um ou dois livros. De todos os livros analisados, apenas um contemplava todos os significados dos números racionais.

Lessa (2011) pressupõe que a compreensão do número racional deva passar por situações variadas e que se desdobre em indagações diversas. Em particular,

cremos que a possibilidade de resgatar o contexto de medidas no ensino dos números racionais é de bom grado, pois permite-nos agregar a geometria com uso de réguas, esquadros e compasso, colocando os alunos a realizar atividades que possam lhes permitir construir conhecimentos por seus esforços, descaracterizando a exemplificação e memorização sinalizada por Boff (2006), e também de que os números racionais são pouco explorados no subconstruto de medida conforme apontado por Lima (2010).

Outro aspecto observado pelos autores são os frequentes equívocos cometidos pelos alunos quando são retomados os números racionais, independente do ano escolar que se encontram. Isso é verificado em geral por todos os professores do Ensino Básico, tendo implicações em outras disciplinas como Lima (2010, p.18) ao comentar sobre sua experiência no ensino de Física a alunos do Ensino Médio. As dificuldades dos alunos em lidar com os números racionais que também temos testemunhados no dia a dia em sala de aula, levou esses autores a criar propostas pedagógicas que visavam amenizar essas defasagens.

Na abordagem de Boff (2006) com alunos da 8ª série equivalente hoje ao 9º ano, verificamos que ela utiliza materiais concretos. Primeiramente os alunos usaram a régua escolar para darem-se conta da insuficiência desse instrumento em realizar medidas em geral. Em seguida, utilizaram o teorema de Tales para fazerem segmentos seccionados em medidas fracionárias e no momento seguinte desenhar um quadrado com sua respectiva diagonal. Com base na análise dessas construções, os alunos puderam concluir que a medida da diagonal do quadrado era não racional. A partir desse momento desenvolveram-se atividades com o objetivo de os alunos perceberem características dos números racionais e irracionais para diferenciá-los e classificá-los corretamente.

Lessa (2011) com alunos do 6º ano optou por trabalhar com três significados dos números racionais, “medida”, “parte-todo” e “operador”, para isso, fez uso de tiras de papel, tendo os alunos realizado medições com essas tiras. Em seguida construíram e relacionaram réguas fracionária e numérica e, por fim, novamente com tiras de papel a professora propôs atividades que levavam a operações de números racionais.

Com o mesmo princípio de medidas e segmentos, Lima (2010) conceituou os números racionais com alunos do 7º ano, sugerindo que expressassem medidas de segmentos tanto em frações quanto em decimais. As atividades foram

potencializadas pelo ambiente tecnológico, que foram desenvolvidas com o uso do computador e do *software* de Geometria Dinâmica R e C. Este *software*, além de contar com ferramentas virtuais equivalentes à régua e ao compasso, dispõe de recursos visuais que permitem, por exemplo, ampliar e reduzir a imagem do objeto geométrico construído na tela do computador. Outro aspecto relevante apontado por Lima (2010) é o fato dos alunos trabalharem com as múltiplas representações. Nesse tipo de abordagem os estudantes presenciam simultaneamente as distintas, mas, equivalentes representações dos números racionais.

No entanto, não percebemos nas sequências didáticas de Boff (2006), Lessa (2011) e Lima (2010) a discussão sobre as características dos números racionais, queremos dizer, as diferenças das frações que geram números decimais de finitas casas daquelas que geram dízima periódica. Portanto, em nossa proposta adotaremos uma abordagem baseada em medidas e segmentos, representações múltiplas e a utilização de tecnologias num ambiente investigativo, para retomar com alunos do 8º ano os números racionais e perceber características nas frações que geram ou não dízima periódica, avaliando também as potencialidades do *software* de Geometria Dinâmica GeoGebra para tais fins.

1.2 Do Ensino dos Números Racionais

Como sinalizamos, faremos a abordagem dos números racionais por meio de medidas de segmentos. Segundo os PCNs (1998) tomar atividades em que as noções de medidas são exploradas geram ricos contextos para trabalhar com os significados dos números e das operações, da ideia de proporcionalidade e escala.

Mas de acordo com a nossa vivência de sala de aula, e daquilo que relatamos na revisão de literatura, o ensino dos números racionais é algo complexo de se fazer. Para Berh. Lesh e Post (1986) a dificuldade encontrada pelos alunos decorre da falta de noção quantitativa dos números racionais, a qual pode ser contornada pela apropriação dos itens abaixo listados:

1. A percepção de que os números racionais são números;

2. O entendimento de que os números racionais podem ser expressos ou representados de muitas maneiras, entre elas, como decimais, razões, divisões, pontos em uma reta numérica, medidas, e como partes de um todo;

3. A percepção de que os números racionais podem ser descritos usando tanto imagem como número numa reta numérica, no entanto, eles não são baseados em um algoritmo de contagem e são mais complexas do aqueles utilizados para ordenar inteiros;

4. O entendimento de que o conjunto dos números racionais é denso. Por exemplo, determinar um número racional vizinho mais próximo do outro já não se faz suficiente por meio de uma simples contagem como se faz com os números inteiros, e nem se tem como fazer essa indicação, devendo assim, perceber que há uma infinitude de números entre dois racionais;

5. A capacidade de compreender a necessidade de estar "atento ao sentido dos resultados", identificada como uma habilidade básica ao operar com números racionais.

6. O entendimento de que os números racionais têm tamanhos absoluto ou relativo podendo ser ordenados por:

a) A magnitude relativa de um par de números racionais pode ser avaliada somente quando relacionado com as totalidades a partir do qual eles derivam seu significado. Por exemplo, $1/2$ de uma torta pequena pode ser menor que $1/3$ de uma torta maior;

b) Uma ordenação absoluta dentro de um conjunto qualquer de números racionais, que estão relacionados com uma unidade comum. Por exemplo, $1/3$ sempre menor do que $1/2$ se ambos referem-se ao mesmo objeto;

c) E, como elementos do sistema matemático, $1/3$ é inferior a $1/2$, por exemplo, porque a unidade de comparação é 1;

7. A constatação de que a relação entre o numerador e denominador define o significado de uma fração e não suas respectivas magnitudes absolutas quando vistos de forma independente. Assim, $1/2$ é mais de $4/9$, embora os dígitos no $1/2$ são cada um menores do que os seus correspondentes dígitos em $4/9$;

8. A capacidade de compreender as operações baseada em inferência transitiva como um conceito estável de igualdade. Por exemplo, $3/4$ e $7/8$ podem ser ordenados simbolicamente se a criança compreende as seguintes conexões : $3/4 = 6/8$ e $6/8 < 7/8$, pode portanto, concluir que, $3/4 < 7/8$.

Os itens 2 e 3 referem-se às distintas maneiras com que os números racionais podem ser apresentados e seus distintos significados. Allevato e Onuchic (2008, p. 87-89) os indicam como as “personalidades” dos números racionais, fazendo os seguintes esclarecimentos:

Ponto racional: todo número racional a/b ocupa um ponto bem definido na reta e, reciprocamente, a todo ponto racional da reta corresponde um número racional [...].

Quociente e seu significado é percebido quando **um número de objetos precisa ser repartido igualmente num certo número de grupos**. Ela aparece mais freqüentemente nas aplicações do que as outras e se refere ao uso dos números racionais como solução para uma situação de divisão [...].

Fração, que é uma **relação da parte com o todo**. Na fração $5/3$, 3 é o **denominador**, indicando que o todo foi dividido em 3 partes iguais e dando nome a essa parte: $1/3$ (é lido *um terço*); 5 é o **numerador**, indicando que cinco dessas partes iguais foram tomadas: o número racional $5/3$ (é lido *cinco terços*). A barra fracionária, neste caso, funciona como um delimitador para o numerador e o denominador. [...] Vale destacar que os **números decimais**: decimais exatas e dízimas periódicas simples e compostas são números racionais, pois podem ser escritos na forma a/b , com a e b inteiros e $b \neq 0$. Esses números não constituem, apesar de terem uma notação diferente, uma nova categoria de números, mas pertencem à mesma categoria das frações.

Operador tem significado semelhante ao de “encolher” ou “esticar”, de “reduzir” ou “ampliar”. No caso, o multiplicador 2 ampliou o multiplicando $1/3$ transformando-o em $2/3$. O **operador define uma estrutura multiplicativa** de números racionais[...].

Razão é uma **comparação multiplicativa entre duas grandezas**, denotada por $a/b = a:b$ (*a está para b*), em que a é denominado **antecedente** e b é denominado **conseqüente**. As propriedades da razão são fundamentalmente diferentes daquelas da fração. O conceito de razão é relevante porque fundamenta o conceito de proporcionalidade [...] é um conceito que “liga” diversos ramos da matemática escolar, como medida, estatística, aritmética, funções, álgebra e geometria. Da proporcionalidade derivam outros importantes conceitos e conteúdos: regras de três, divisão em partes proporcionais, quantidades intensivas, misturas, porcentagem, taxas, juros, descontos, escalas, estimativas populacionais, variação direta, variação inversa, razões trigonométricas, semelhança de triângulos, probabilidades, etc.

As indicações acima, mostram o quão cheio de detalhes acercam os números racionais, ao mesmo tempo que indica ser um conteúdo rico, de aplicações em distintas áreas do conhecimento e, também, sinaliza a complexidade de ensiná-los. Por outro lado, entendemos que as citações anteriores vem ao encontro de atender as diretrizes dos PCNs de Matemática (1998). Ao que se destina à aprendizagem dos números racionais, esses documentos oficiais recomendam:

Compreensão do sistema de numeração decimal, identificando o conjunto de regras e símbolos que o caracterizam e extensão das regras

desse sistema para leitura, escrita e representação dos números racionais na forma decimal.

Reconhecimento de números racionais em diferentes contextos cotidianos e históricos e exploração de situações-problema em que indicam relação parte/todo, quociente, razão ou funcionam como operador. •

Localização na reta numérica de números racionais e reconhecimento de que estes podem ser expressos na forma fracionária e decimal, estabelecendo relações entre essas representações. •

Análise, interpretação, formulação e resolução de situações problema, compreendendo diferentes significados das operações, envolvendo números naturais, inteiros e racionais, reconhecendo que diferentes situações-problema podem ser resolvidas por uma única operação e que eventualmente diferentes operações podem resolver um mesmo problema.

Cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) envolvendo operações com números naturais, inteiros e racionais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos nelas envolvidos, utilizando a calculadora para verificar e controlar resultados [...].

Resolução de situações-problema que envolvem a idéia de proporcionalidade, incluindo os cálculos com porcentagens, pelo uso de estratégias não-convencionais. •

Utilização de representações algébricas para expressar generalizações sobre propriedades das operações aritméticas e regularidades observadas em algumas seqüências numéricas (BRASIL, 1998, p. 71).

São de geral conhecimento as diretrizes dos PCNs para o ensino dos números racionais nos anos finais do Ensino Fundamental. Estes números, em diferentes contextos e representações, são explicados por Allevato e Onuchic (2008) como “personalidades”; junto a isso, estão as dificuldades de compreensão dos alunos pela ausência da noção quantitativa, assinalada por Berh. Lesh e Post (1986). Esses apontamentos encaminham em nossa pesquisa reflexões sobre a prática a ser elaborada e levada para a sala de aula, pois queremos caracterizá-la como alternativa de ensino que propicie aos alunos uma melhor compreensão sobre os números racionais.

1.3 Informática no Ensino de Matemática

Os PCN (1998), reforçando quanto ao uso de recursos tecnológicos, também os citam como principais agentes de transformação da sociedade pelo modo como influenciam o cotidiano das pessoas; pesquisas e experiências educacionais realizadas os têm como possibilidade na melhoria do Ensino de Matemática. Assim, com o crescente acesso a informações que chega à população por meio das

tecnologias, faz urgir a necessidade da incorporação de estudos nessa área, tanto na formação inicial como na formação continuada do professor do ensino fundamental, seja para poder usar amplamente suas possibilidades ou para conhecer e analisar *softwares* educacionais.

Não temos a intenção na nossa pesquisa de trabalhar diretamente com a Informática e a Matemática em questões sociais; contudo, cientes de que a formação do cidadão crítico passa pela interpretação de dados numéricos contidos em textos, gráficos e tabelas, faremos um trabalho destinado ao uso da Informática no entendimento das representações dos números racionais, aos quais são frequentemente explicitados em situações do dia a dia.

Tem-se observado os hábitos de nossos alunos quanto às tecnologias, e passamos a admitir a informática como possibilidade de ensinar Matemática. Presenciamos frequentemente os jovens terem suas rotinas sociais ligadas aos seus celulares e computadores; em alguns casos, isto fica tão evidente que podemos verificar quão “órfãos” estes ficam quando não estão com os seus aparelhos celulares. Com seus eletrônicos, os alunos nos mostram inúmeros jogos e aplicativos com diferentes funcionalidades, os exploram e passam adiante muita informação sobre como operá-los, dando a outros colegas verdadeiro suporte do *software* explorado. Outro fator relevante é a forma como parte dos alunos se sente cativada a se expressar em redes sociais, escrevem aquilo que pensam, combinam eventos, falam do que gostam e expressam opiniões sobre os mais diversos assuntos. Para Kenski (2010, p. 52):

Os jovens não falam em novas tecnologias, falam do que fazem com elas, como criar sites, enviar um email, teclar num *chat*, jogar e brincar em rede com amigos virtuais localizados em partes diferentes do mundo, baixar músicas e clipes, enfim, utilizar naturalmente a capacidade máxima de seus computadores para interagir e criar juntos.

Com relação ao que foi acima descrito, Borba e Penteado (2015) alertam que devemos nos preocupar com as transformações do conhecimento nesse momento em que a mídia a informática se faz cada vez mais presente. Para nós professores-pesquisadores, isso demanda um novo pensar sobre as práticas pedagógicas que os atendam.

Ao refletirmos sobre a proposta para ser levada para a sala de aula, tomaremos como base a visão epistemológica sobre o uso de tecnologias no ensino

de matemática que fundamenta o construto seres-humanos-com-mídia, indicado por Borba (2001). Esse termo, segundo o autor, constituiu-se como uma metáfora para o papel das tecnologias, em particular das tecnologias da inteligência, nos processos de produção do conhecimento. Entende-se por tecnologias da inteligência, conforme Lévy (1993), a oralidade, a escrita e a informática, onde: i) oralidade, como meio dos povos manterem as lembranças de sua cultura e conhecimento; ii) escrita, como meio estável para registrar e organizar conhecimentos e pensamentos e iii) informática como instrumento que envolve a oralidade e a escrita, por meio das diversas formas de registros que implicam discussões simultâneas e que desafiam o pensamento linear.

De acordo com Borba (2001), o indivíduo, ao produzir conhecimento, sempre está de posse de uma mídia, seja a oralidade, escrita e/ou informática. Assim, podemos entender que o conceito seres-humanos-com-mídias refere-se à interação do homem com alguma mídia na produção de conhecimento, em especial os *softwares* que passam a ser atores na promoção do conhecimento que está sendo produzido.

Considerando a perspectiva sugerida pelo construto seres-humanos-com-mídias, onde a articulação entre as formas de registros é indicada como uma das condições para a construção do conhecimento, a informática conforme Borba e Penteadó (2015, p. 48) deve ser entendida como:

[...] uma nova extensão da memória, com diferença qualitativa em relação às outras tecnologias da inteligência e permite que a linearidade de raciocínios seja desafiada por modos de pensar, baseados na simulação, na experimentação e em uma “nova linguagem” que envolve escrita, oralidade, imagens e comunicação instantânea.

Borba (1999) chama nossa atenção para o trabalho desenvolvido por Tikhomirov (1981) acerca dos efeitos do uso computador na cognição humana, o qual analisa, três teorias. Segundo Borba (1999), a primeira trata-se da substituição do homem pelo uso da informática, tão logo refutada, uma vez que a busca por soluções de problemas realizadas pelo homem é bem mais complexa e diferente dos processos realizados pelos computadores. A segunda refere-se à teoria da suplementação, onde o computador resolve alguns problemas de difícil solução para o homem. Aqui, acredita-se que o pensamento pode ser dividido em partes, onde processos complexos de raciocínio podem reagrupar esses fragmentos e obter

novos conhecimentos, dessa forma o homem se justapõe ao computador. Esta teoria também é refutada pois limita-se a uma visão quantitativa e não qualitativa do pensamento. Por fim a terceira trata-se da teoria da reorganização do pensamento, que afirma que o computador regula a atividade humana, modificando o seu modo de pensar de acordo com as possibilidades e restrições que oferece ao usuário. A reorganização do pensamento está atrelada aos *feedbacks* intermediários fornecidos pelo computador e que seriam impossíveis de serem dados por observadores externos.

Diante das teorias acima Borba (1999) explicita ainda em relação a essa terceira, que o uso de mídias, em particular o uso do computador, acarreta um processo de modelagem do ser humano e, ao mesmo tempo, de modelagem da própria mídia por quem a utiliza. Nesse sentido Souto (2013) nos esclarece que a reorganização do pensamento e o coletivo pensante do ponto de vista da produção de conhecimento não decorrem de um agente único, mas do produto de relações mútuas entre as estruturas do pensamento, as ferramentas do intelecto fornecido pela cultura e as mídias. A autora nos explica que os seres humanos são constituídos por técnicas que estendem e modificam seu raciocínio e, ao mesmo tempo, esses seres humanos estão constantemente transformando essas técnicas, e ainda, o conhecimento produzido por meio de uma técnica traz consigo a utilização de mídias ou de tecnologias da inteligência sendo ambos, homens e mídias, protagonistas no processo de reorganização do pensamento e por consequência na produção do conhecimento.

Com base nessa concepção sobre o uso das tecnologias no ensino, a qual é embasada no construto seres-humanos-com-mídias, dentre as diversas tecnologias disponíveis atualmente, optamos por trabalhar com um *software* de Geometria Dinâmica. Conforme Gravina (2001), os ambientes da Geometria Dinâmica como recurso computacional constituído de régua e compasso virtuais, possibilitam construir objetos geométricos a partir de suas propriedades. Os objetos ali construídos podem ser manipulados diretamente por meio de teclado e mouse e observados na tela do computador.

A autora nos explica que os *softwares* de geometria dinâmica se caracterizam pela “estabilidade sob ação de movimento” aplicada nos elementos primitivos de um objeto construído, isto é, podemos construir determinado objeto geométrico com as

propriedades que o definem, de modo que se possa movimentá-lo ou fazer nele transformações sem que se perca as suas características.

No exemplo encontrado no trabalho de Gravina (2001) apresenta a construção de um quadrado, onde ao movimentarmos um dos vértices a construção muda de posição mantendo-se quadrado, mantendo intactas as propriedades que a definem como quadrado. A estabilidade sobre seus elementos durante o movimento permite que se percebam tais características. Acreditamos que essa particularidade possa contribuir para a compreensão das representações dos números racionais, bem como para as frações que os geram.

Para exemplificar, é comum em livros didáticos do Ensino Fundamental, encontrarmos a imagem de barras de chocolates direcionadas ao estudo das frações, como podemos ver na imagem abaixo (Fig. 4), que encontramos no livro didático de Dolce, Iezzi e Machado (2005) ao tratarem de frações equivalentes.

Figura 4 – Exemplo de Equivalência de Frações

Quem comeu mais chocolate?

Luiz e Otávio ganharam um tablete de chocolate cada um. Luiz dividiu seu chocolate em 6 partes iguais e comeu 4. Otávio dividiu o seu em 3 partes iguais e comeu 2. Vejamos:

Luiz comeu $\frac{4}{6}$ do chocolate.

Otávio comeu $\frac{2}{3}$ do chocolate.

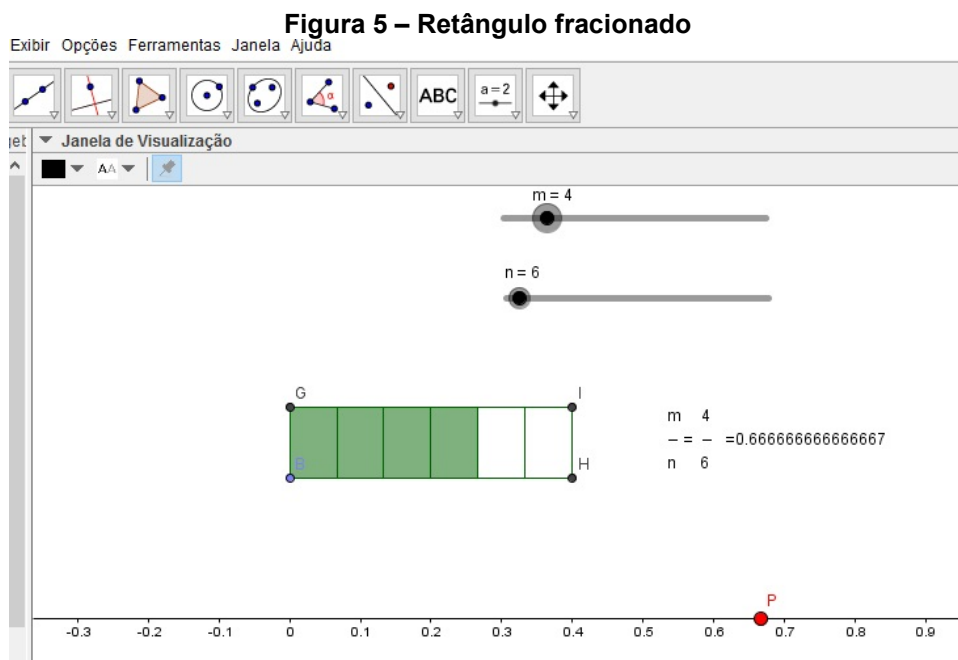
Quem comeu mais chocolate?

Fonte: Dolce, Iezzi e Machado (2005, p.164)

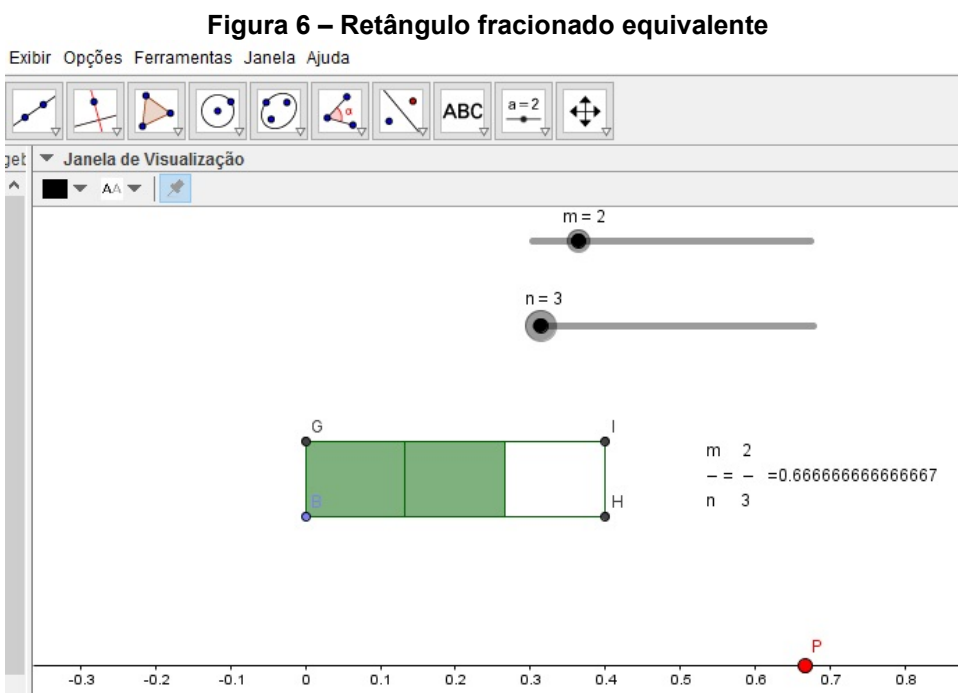
Uma abordagem similar pode ser feita no GeoGebra, com a vantagem de agregar e articular as distintas representações dos números racionais.

Na imagem temos a representação de duas barras de chocolates, cujos formatos são retângulos semelhantes, construímos então, de modo similar, um retângulo estável no GeoGebra. Vinculamos a ele os controles deslizantes “m” e “n”, onde o “n” implica dividir o retângulo em partes congruentes (denominador), e “m”

pintar uma cota dessas partições (numerador); junto ao objeto geométrico dispomos a fração que o indica, acrescido ainda de um ponto na reta numérica (eixo das abscissas do plano cartesiano) que mostra a posição do número racional gerado pela fração. As duas barras de chocolates mostradas na imagem de Dolce, lezzi e Machado (2005) podem ser agora representadas no GeoGebra com os controles deslizante “m” e “n” como podemos visualizar abaixo (Fig 5 e Fig.6):



Fonte: Próprio autor



Fonte: Próprio autor

Com a alteração dos parâmetros “m” numerador e “n” denominador os alunos podem em um curto período ver a equivalência não apenas de um par, mas como de vários pares frações. Além disso, podem verificar que o tamanho da região pintada nos retângulos, a localização do ponto na reta numérica e as representações decimais das frações são iguais.

Nessa abordagem não focamos nas propriedades implícitas que determinam o objeto ser um retângulo, mas sim seu *status* de objeto estável, onde as mudanças ocasionadas pelos controles deslizantes alteram apenas a configuração interna do retângulo, que tendem a favorecer os alunos no estudo dos números racionais em suas distintas representações e significados.

Além disso, as ferramentas virtuais como régua e compasso possibilitam também que os próprios alunos realizem construções e as tomem como objeto de estudo. Pensamos em iniciar nossa proposta de ensino solicitando aos alunos que construam por meio de repartições de um segmento unitário a régua graduada decimal, acreditando que diante dessa tarefa ocorra segundo Gravina (1996) alterações em suas atitudes no processo de aprender, explorando, criando estratégias e formulando conjecturas, ações essas características dos ambientes de aprendizagem investigativo apontados por Brocardo, Oliveira e Ponte (2003). Como um dos prováveis resultados dessa construção, é de que os estudantes venham a afirmar que a graduação do segmento em décimos, centésimos, milésimos e etc. se trata de um processo infinito, assim como, as frações que equivalem a essas partições.

Os dois exemplos, o retângulo manipulável e o segmento graduado são atividades que Gravina (1996, p. 7) classifica em dois aspectos:

Dois são os principais aspectos didáticos de utilização dos programas: a) os alunos constroem os desenhos de objetos ou configurações, quando o objeto é o domínio de determinados conceitos através da construção; b) recebem desenhos prontos, projetados pelo professor, sendo o objetivo a descoberta de invariantes através da experimentação e, dependendo do nível de escolaridade dos alunos, num segundo momento, trabalham as demonstrações dos resultados obtidos experimentalmente.

Tarefas destinadas ao ensino dos números racionais sobre esses dois aspectos estão descritas no Capítulo 2, seja qualquer desses dois tratamentos, as atividades buscam fazer com que os alunos transitem pelas representações desse tipo de número - figura, fração e representação decimal - objetivando a compreensão da equivalência entre elas.

Acreditamos que a informática, em particular o *software* GeoGebra, possa nos favorecer em fazer com que os alunos visualizem a equivalência entre esses diferentes registros. No entanto, explorar essas peculiaridades do conjunto dos números racionais fez com que necessitássemos de um ambiente que colocassem os alunos no papel de analisar tais representações. Como citamos antes, ao encontro dessa expectativa, além do ambiente tecnológico passamos também considerar o ambiente investigativo, pois nele os alunos, de acordo com Brocardo, Oliveira e Ponte (2003) são convidados a agir como matemáticos, os colocando como protagonistas de sua aprendizagem.

Para tanto, é necessário que o uso do computador se destine a tarefas que possam levar os discentes a assumir tal comportamento. Assim, é preciso que as atividades sejam planejadas e que seja feita a: “escolha de propostas pedagógicas que enfatizam a experimentação, visualização, simulação, comunicação eletrônica e problemas abertos. Consideramos que essas propostas estariam em ressonância e em sinergia com a informática” (BORBA; PENTEADO, 2001, pág. 86). Desse modo, o computador pode propiciar esse aspecto exploratório, acordando também com os PCN’s (1998), o qual aponta que computadores e calculadoras podem ser usadas como instrumentos motivadores na realização de tarefas exploratórias e de investigações. Nas seções seguintes, procuramos fundamentar a investigação matemática, os cenários de investigação e a teoria das representações-múltiplas.

1.4 Investigação Matemática

A investigação matemática no processo de ensino-aprendizagem da matemática nos fornece dois fatores que julgamos serem de fundamental importância: primeiro, a posição de protagonista em que colocamos os alunos,

sendo eles agentes de sua aprendizagem, como descrito por Brocardo, Oliveira e Ponte (2003, p.23):

O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os colegas e o professor.

Em segundo, atendendo “a emergência de estudos metacognitivos, isto é, aqueles que procuram investigar o modo como os alunos percebem e relatam seu processo de resolução de problemas ou de aprendizagem de algum conceito matemático” (FIORENTINE; LORENZATO, 2006, p. 43). Além dessa atenção sobre os alunos, professores podem também avaliar a sua prática docente, assumindo o perfil de professor-pesquisador, buscando apontar as variantes que influenciarão o andamento das aulas, tanto nos aspectos positivos quanto nos negativos.

Mas o que é uma aula investigativa? Interpretando Brocardo, Oliveira e Ponte (2003), podemos dizer que aula investigativa parte de uma situação, problema ou tarefa que se propõe aos alunos, de modo que estes mobilizem esforços cognitivos a atingir certos resultados. São situações abertas, onde os alunos, ao buscarem a solução da atividade, traçam estratégias e, a medida que vão se envolvendo, chegam a descobertas tão importantes quanto à própria resposta da tarefa proposta.

Ainda conforme Brocardo, Oliveira e Ponte (2003), a aula investigativa possui três fases:

1) Introdução da tarefa pelo professor: etapa em que o professor garante aos alunos o entendimento do sentido da tarefa proposta. A aula investigação ainda não está difundida no nosso país, se trata ainda de uma novidade tanto para os professores como metodologia, quanto para os alunos como aula. Portanto devemos considerar que os alunos se sintam dependentes da fala dos professores e perdidos quanto à abordagem investigativa. Recomenda-se então, que o professor dê orientações iniciais para os alunos de modo que consigam progredir; todavia, essas informações devem ser entendidas como pistas, cuja finalidade é dar autonomia aos estudantes ao realizarem as atividades, geralmente isso é feito fazendo outra pergunta em relação à questão que o aluno fez. Nessa fase inicial, o professor deve ainda, esclarecer aos alunos que se fará presente como um mediador, um guia de ajuda.

2) Realização da investigação: etapa da investigação propriamente dita. Nessa etapa os estudantes devem buscar meios, mais ou menos consistentes, fazer uso de diversos processos que caracterizam a atividade de investigar. É nessa fase que os alunos elaboram questões, formulam conjecturas, testam essas conjecturas e as justificam ou refutam. Já o professor observa como os alunos desenvolvem a tarefa, procura compreender o modo de pensar dos alunos, e diante das dificuldades dos alunos presta apoio para que consigam transpor os devidos obstáculos.

3) Exposição e discussão coletiva dos resultados: essa etapa é considerada a mais rica da aula de investigação. Nela temos a explanação das conjecturas e conclusões dos alunos, onde a turma, incluído o professor, debatem sobre a tarefa realizada e os resultados. Cabe ao professor ser o mediador desse diálogo expositivo, selecionando os resultados mais significativos. Os alunos são encarregados de refletir sobre o seu trabalho, de explicar a toda turma o modo com que pensaram a atividade, justificar as conjecturas e averiguar de modo coletivo a aceitação ou refutação dos resultados. Diante dessa experiência os alunos começam a perceber a necessidade e o sentido de uma demonstração matemática.

Podemos perceber na proposta de aula investigativa que os alunos são colocados no centro da aprendizagem, isto é, os estudantes não focam seus olhares no esforço do professor em transmitir o conhecimento, mas sim nos seus próprios esforços, sendo eles protagonistas da sua aprendizagem, enquanto, o professor passa a ter um papel de mediador/orientador.

No entanto, o fato do docente se colocar na posição de “retaguarda”, não significa que seu papel no processo de ensino tenha passado a ser menos importante, mas sim, assume uma postura que visa valorizar a participação dos alunos na aula. Para tanto, o sucesso dessa metodologia depende muito de como o professor irá propor a investigação, e que essa proposta considere coisas interessantes para esses estudantes.

Ao planejar o “como fazer” refletimos sobre a equalização dos interesses professor-alunos: se a aula investigativa tende a fazer com que os alunos se interessem por aquilo que se quer ensinar, e isso agrada a nós professores, por outro lado, utilizamos a informática no processo de ensino e aprendizagem, que muito tem tido apelo dos alunos. Assim combinamos a utilização dos computadores pelos alunos na tarefa de investigar sobre os racionais, tendo como objetivo

transformar a sala de aula num cenário investigativo do qual caracterizará nosso ambiente de aprendizagem.

Alinhar a utilização de recursos tecnológicos com aulas de investigação matemática pode ter resultados significativos no ensino de números racionais, já que este conjunto numérico tem se mostrado ao longo do tempo, como conteúdo de difícil compreensão para os estudantes do Ensino Básico, sendo discutido frequentemente entre os professores e motivado muitas pesquisas na área da Educação Matemática. O obstáculo em ensinar esse tipo de número é justificado por seus distintos significados e representações.

De fato, a aquisição de conhecimento passa pela necessidade de registrar. Esses registros, no entanto, utilizam-se de representações com o propósito de facilitar a compreensão daquilo que se está estudando. Dessa forma, independente de qualquer área de conhecimento que esteja sendo estudada, passa pela competência de articularmos distintas formas de representações. Na Matemática, podemos afirmar que essa percepção é ainda mais relevante, pois agregam-se diversificadas formas de registros (números, operadores, gráficos, formas geométricas, entre outras) que se fazem relacionar entre si. Faremos a seguir a escrita sobre as Representações Múltiplas, já que ela assume papel relevante na aprendizagem da Matemática.

1.5 Representações Múltiplas

Os números racionais compreendem uma diversidade de conceitos e significados, além das representações que assumem um papel de destaque. De acordo com Ponte e Quaresma (2011), representar um número significa determinar uma designação, sendo que um número pode ter várias designações, tais, como, representação decimal, fração, ponto na reta numérica. Assim, tanto as linguagens naturais quanto pictóricas são representações que um número racional pode tomar, e que os alunos devem compreender como representações de um mesmo número.

Para Confrey *et al.* (1991), as representações são veículos de comunicação, e as utilizamos para uma variedade de finalidades. Considerando os contextos de diferentes situações, uma mesma representação muda de significado. Assim, é

preciso reconhecer que tanto nós como os alunos constroem a compreensão por representações. Em Matemática, os sistemas de símbolos, gráficos, figuras, esquemas ilustrados de problemas matemáticos, são representações que entrelaçamos com nossas ações a fim de construir um significado matemático.

Vinculado a esse entrelaçamento poderemos fazer uso do recurso visual. Arcavi (1999) indica o sentido da visão como o sentido sensorio mais desenvolvido no ser humano. É pela visão que tomamos o controle visual de movimento, da percepção, da elaboração das palavras e da escrita, da forma e da cor dos objetos. O olhar nos encoraja a ver, não só o que vem à vista, mas também o que somos capazes de interpretar.

A visualização, segundo Arcavi (1999) é um método que permite ver o “invisível”, que conforme sua natureza e papel pode ser caracterizada nos três tópicos a seguir:

a) Vendo o invisível – primeira instância: o invisível se refere ao que não somos capazes de ver por causa das limitações de nosso aparelho visual, por exemplo, algo que está muito longe ou que é muito pequeno. Dessa forma, desenvolvemos tecnologias para superar essas limitações, que permitirão ver o que até o momento era o invisível. Podemos considerar como exemplos lunetas que permitem visualizar planetas distantes, e microscópios que nos permitem observar uma colônia de bactérias.

b) Vendo o invisível - em dados: se dá em um sentido mais figurativo e mais profundo. Aqui o invisível refere-se a um mundo mais "abstrato", que nenhuma tecnologia óptica ou eletrônica pode fazer-nos "visualizar". O invisível se fará visível pela tecnologia que definimos como "tecnologia cognitiva", qual a Matemática se inclui, como criação humana que permite criar meios visuais para tratar diferentes tipos de fenômenos físicos e sociais, caracterizados pela organização de dados.

c) Vendo o invisível - em símbolos e palavras: a visualização é acompanhada de desenvolvimento simbólico. Na matemática, isso confere para os estudantes três importantes aspectos para a aprendizagem. i) visualização para trazer a geometria como suporte que permite observar propriedades puramente simbólicas/algébricas; ii) uma possível forma de resolver o conflito entre soluções (corretas) simbólicas e intuições (incorretas) e iii) como uma maneira de ajudar a recuperar bases conceituais que podem ser facilmente contornadas por soluções formais.

Dentre as três designações, e considerando as múltiplas representações dos números racionais, podemos perceber que o último item indica tratamentos que tendem a tornar possível a percepção dos distintos significados desses números e também a conferir equivalências entre as distintas representações.

No entanto, há de se considerar também o primeiro aspecto. Hoje contamos com recursos computacionais e *softwares* que são verdadeiros instrumentos visuais, que permitem articular as distintas representações, em particular, dos números racionais, permitindo observar e perceber suas propriedades e designações. Adaptando a escrita de Confrey *et al.* (1991), um *software* multirepresentacional que combina gráficos, tabelas, álgebra, e/ou uma calculadora pode permitir que os alunos explorem as ideias sobre números racionais e as relações entre as diversas formas de representá-los.

Ainda, Confrey *et al.* (1991) apontam que o uso de múltiplas formas de representação no ensino de Matemática:

1. potencializa o realce de diferentes aspectos do conceito;
2. conduz a uma convergência das várias representações que podem melhorar ou fortalecer nossa profundidade de entendimento;
3. promove a análise do conflito entre as formas de representações;
4. permite avaliar como as mudanças entre as representação afetam um ao outro;
5. ilustra como formas alternativas de ações em uma representação podem levar os alunos a desenvolverem diversas ideias;
6. potencializa o atravessar as fronteiras das disciplinas tradicionais de conteúdo (álgebra , aritmética e geometria);
7. preve situações para que os alunos possam realizar as suas próprias investigações e ideias;
8. proporciona oportunidades de *feedbacks* aos alunos, revisão e reflexão.

As múltiplas representações de números racionais é um aspecto importante a se considerar no processo de ensino-aprendizagem. Pelos apontamentos acima, compreendemos que seja de fundamental importância buscar por atividades de aprendizagem que contemplem as relações entre vários tipos de suas representações buscando promover a compreensão dos distintos conceitos dos números racionais, e em particular, características das representações decimais dos números racionais.

2 ATIVIDADES PROPOSTAS E CONCEITOS MATEMÁTICOS

Nesse capítulo descreveremos a sequência didática que foi planejada para trabalhar os conceitos de número racional com uso do *software* GeoGebra.

O GeoGebra é um *software* livre de Matemática Dinâmica podendo ser utilizado nos processos de ensino e aprendizagem dessa ciência. Seus criadores e colaboradores o definem da seguinte maneira.

O GeoGebra é um *software* de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino que reúne Geometria, Álgebra, Planilha de Cálculo, Gráficos, Probabilidade, Estatística e Cálculos Simbólicos em um único pacote fácil de se usar. O GeoGebra possui uma comunidade de milhões de usuários em praticamente todos os países. O GeoGebra se tornou um líder na área de softwares de matemática dinâmica, apoiando o ensino e a aprendizagem em Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática. (GEOGEBRA, 2014).

Trata-se de um *software* que nos permite transitar em uma mesma tela por diferentes registros. Por exemplo, o gráfico de uma função e a sua escrita algébrica. Ao pensarmos em números racionais, poderemos trabalhar com a equivalência das diferentes representações destes números: fração, decimal e localização de um ponto na reta numérica. Outras tecnologias, como as calculadoras que estão frequentemente presentes nas aulas de matemática, não nos oferecem essa gama de funcionalidades, e então, já podemos perceber algumas possibilidades das quais poderemos tirar proveito deste aplicativo.

No que segue, apresentaremos os enunciados das tarefas juntamente com as definições e propriedades acerca dos números racionais absolutos, no desejo de esclarecer o que gostaríamos que fosse percebido pelos alunos em cada uma delas. Os encaminhamentos e intervenções do professor serão apresentados em detalhes no capítulo 4, quando daremos descrição dos dados. Estes encaminhamentos também serão foco de análises. O capítulo está estruturado de modo que cada subseção contém as atividades relativas ao conteúdo de seu título.

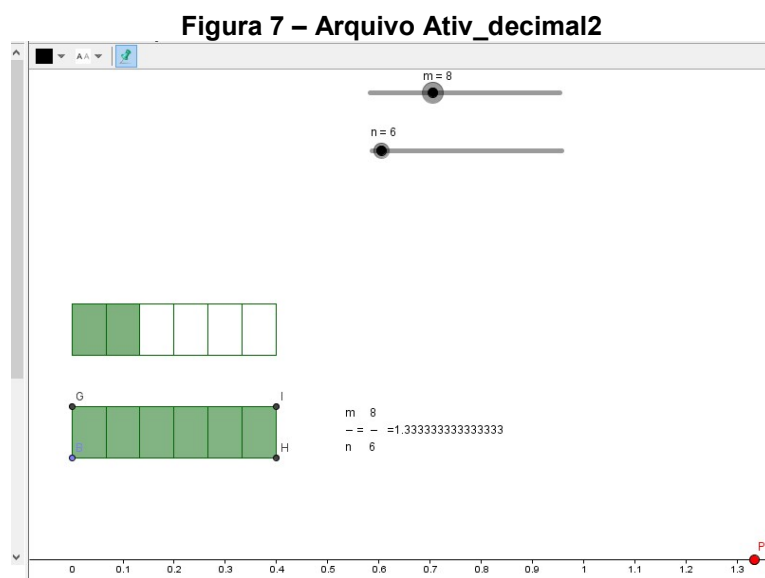
2.1 Visão Geral da Sequência Didática

As primeiras atividades da sequência didática, propostas no GeoGebra, referem-se à construção de um segmento numérico para obter os números racionais

decimais entre 0 e 1. Para tanto, os alunos devem fazer uso de algumas ferramentas virtuais do GeoGebra.

Para o contexto de números racionais absolutos em geral, isto é, sejam frações próprias e impróprias, geratrizes tanto de números com expansão decimal finita, assim como dízimas periódicas, elaboramos o arquivo no GeoGebra, o qual nomeamos “Ativ_decimal2”. A construção foi criada utilizando controles deslizantes, recurso esse manipulativo com o qual os alunos podem fazer alterações no objeto de estudo (retângulos), observando e analisando tais mudanças.

Esse arquivo “Ativ_decimal2” é destinado a trabalhar com as frações através da(s) figura(s) de retângulo(s), que será dividido em n partes pelo controle deslizante n , e colorido em verde em m partes pelo controle m . Portanto, os controles deslizantes m e n determinam, na verdade, numerador e denominador da fração, respectivamente. Tendo os alunos já estudado os números racionais, colocamos junto à fração sua correspondente representação decimal de modo que visualizem a equivalência entre essas representações. Também colocamos um ponto P sobre o eixo das abscissas no plano cartesiano, indicando as posições desses números na reta numérica. A observação desse ponto tem como objetivo possibilitar que os alunos visualizem o número racional diante das escritas de fração e representação decimal, a sua localização na reta numérica.



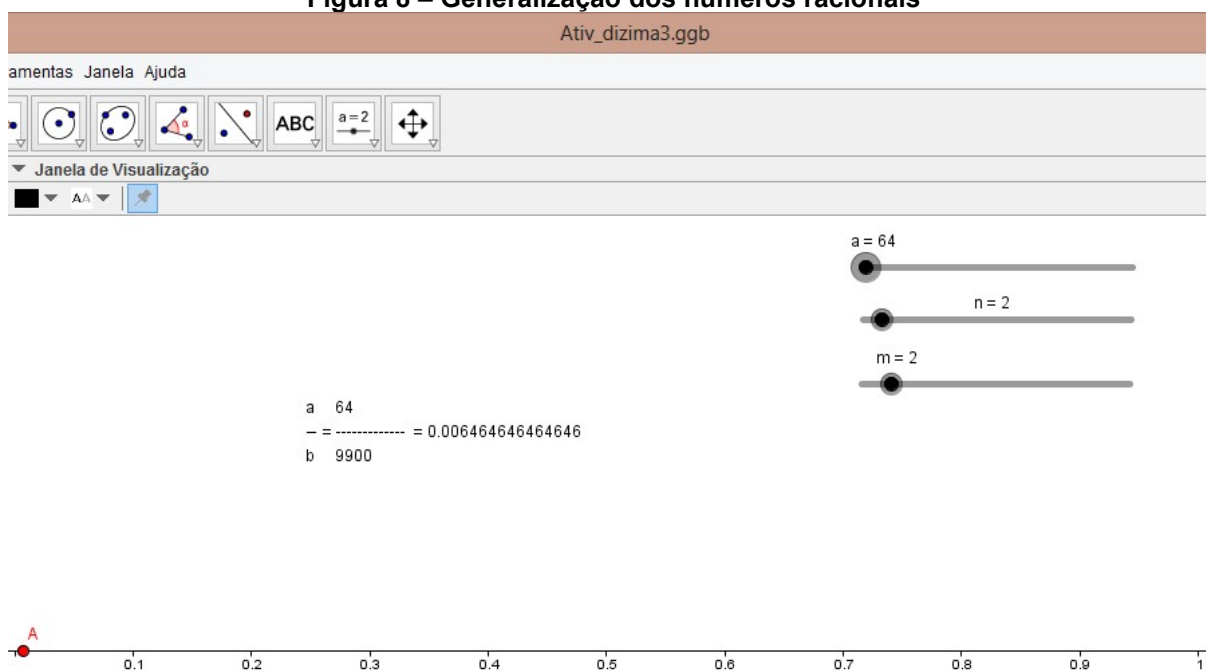
Fonte: Próprio autor

Na etapa seguinte, criamos um arquivo chamado “Ativ_Dízima3” para realizar o estudo sobre regularidades das frações que geram dízimas periódicas. Entretanto,

essa construção dinâmica não se limita apenas à causa das dízimas. Em meio a sua manipulação ocorrem eventuais aparecimentos de números racionais com finitas casas decimais, permitindo que em um segundo momento façamos a abordagem do porquê de isso estar ocorrendo, recapitulando o que já foi estudado e fazendo as considerações finais sobre as frações que geram ou não números periódicos.

Nesse arquivo colocamos três controles deslizantes: a , m e n , sendo o a destinado a indicar o numerador da fração, o n a quantidade de 9s no denominador determinando os n algarismos do período da dízima e, por fim, o m , que acrescenta os zeros no denominador fazendo com que a dízima se desloque m casas decimais à direita.

Figura 8 – Generalização dos números racionais



Fonte: Próprio autor

Realizada uma breve apresentação do GeoGebra, das ferramentas do *software* a serem utilizadas e dos arquivos por nós construídos, passaremos agora a dar detalhes das atividades e dos conceitos matemáticos a elas vinculados.

2.2 – Atividades Introdutórias (Teorema de Tales)

Antes da descrição das atividades que fazem uso das tecnologias, achamos conveniente fazer atividades introdutórias com os alunos utilizando materiais manipulativos, como régua, compasso e esquadros, com a finalidade de conceituar

e aplicar o Teorema de Tales, o qual consideramos um pré-requisito para que os alunos façam as atividades futuras no GeoGebra.

Iniciamos com comparações de segmentos:

(1º passo) Com uma régua desenhe dois segmentos de reta, o segmento \overline{AB} medindo 3cm, e o outro \overline{CD} , medindo 4cm;

(2º passo) Divida a medida do segmento menor pelo maior e anote;

(3º passo) Construa novamente dois segmentos de reta, o segmento \overline{MN} com 6cm de medida e o \overline{PQ} com 8cm.

(4º passo) Divida a medida do segmento menor pelos maior e anote;

Questões sugeridas:

- 1) O que aconteceu com as divisões das medidas dos segmentos?
- 2) Comparando as medidas entre os segmentos de reta, o que você percebe?

Espera-se que os alunos, ao realizarem os desenhos dos segmentos, percebam que os dois segmentos maiores são o dobro da medida dos segmentos menores e que os resultados das divisões são iguais.

Podemos, ainda, solicitar aos alunos que desenhem segmentos uns múltiplos dos outros e façam as respectivas divisões para constatar as proporcionalidades.

Embora as divisões indiquem “razões”, não estamos utilizando essa nomenclatura, pois se referem a um dos distintos significados dados às frações, que queremos investigar durante as aulas em que os alunos farão uso dos computadores.

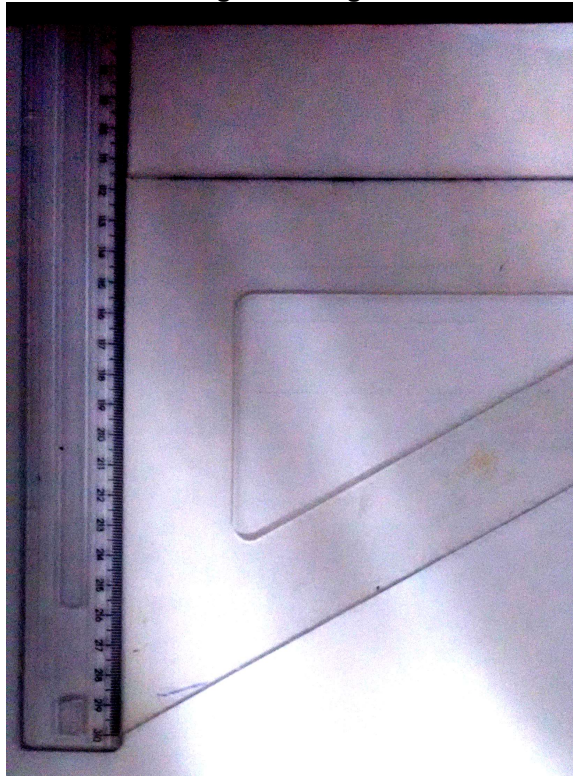
Conceito 2.1 (Segmentos proporcionais): se quatro segmentos, \overline{AB} , \overline{CD} , \overline{MN} e \overline{PQ} , formam a proporção

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{PQ}}$$

dizemos que \overline{AB} e \overline{CD} são proporcionais a \overline{MN} e \overline{PQ} .

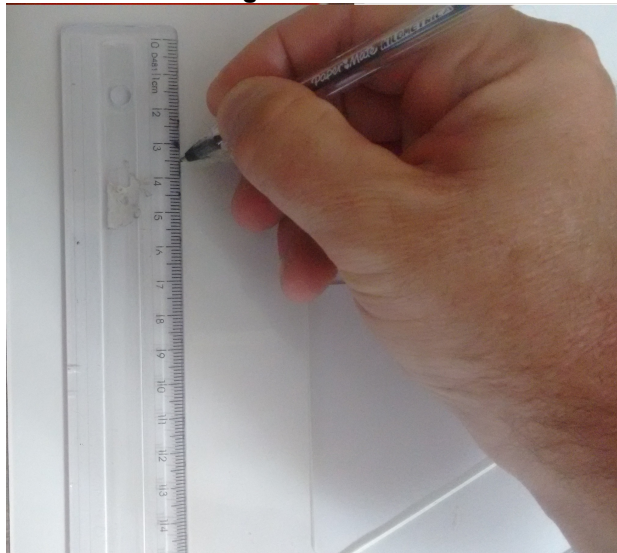
Damos seguimento à aula com a construção de feixe de retas paralelas, sendo interceptadas por duas retas transversais distintas.

(1º passo) Sobre a folha, fixe a régua. Apoie na régua um esquadro;

Figura 9: Régua

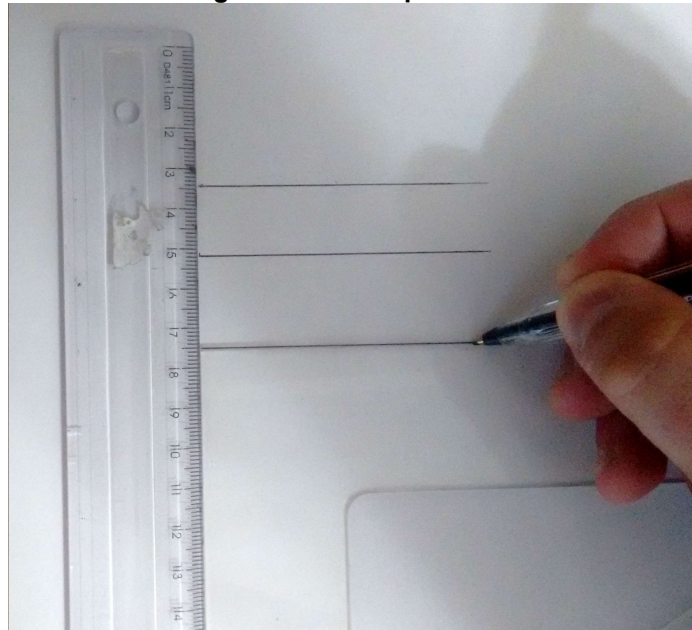
Fonte: próprio autor

(2º passo) Em um dos lados livres, trace a reta a ;

Figura 10: Reta

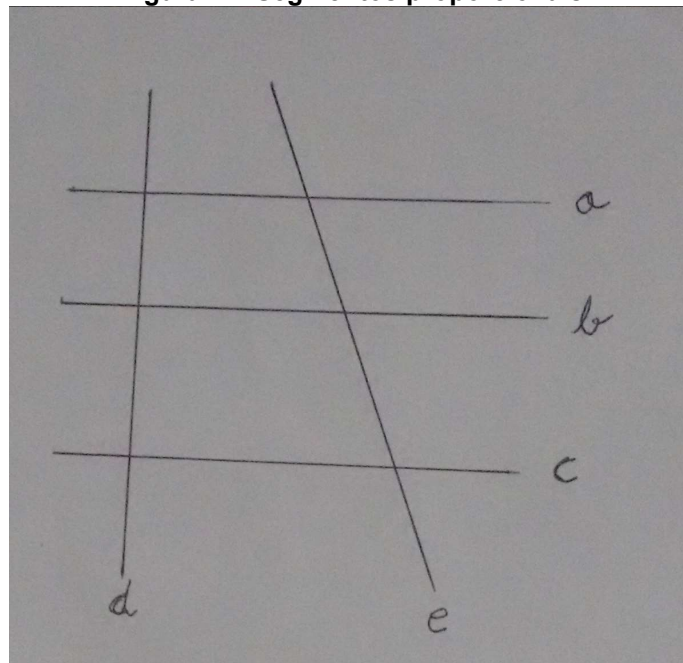
Fonte: próprio autor

(3º passo) Mantendo o esquadro apoiado na régua, deslize-o e desenhe outras duas retas b e c ;

Figura 11: Retas paralelas

Fonte: próprio autor

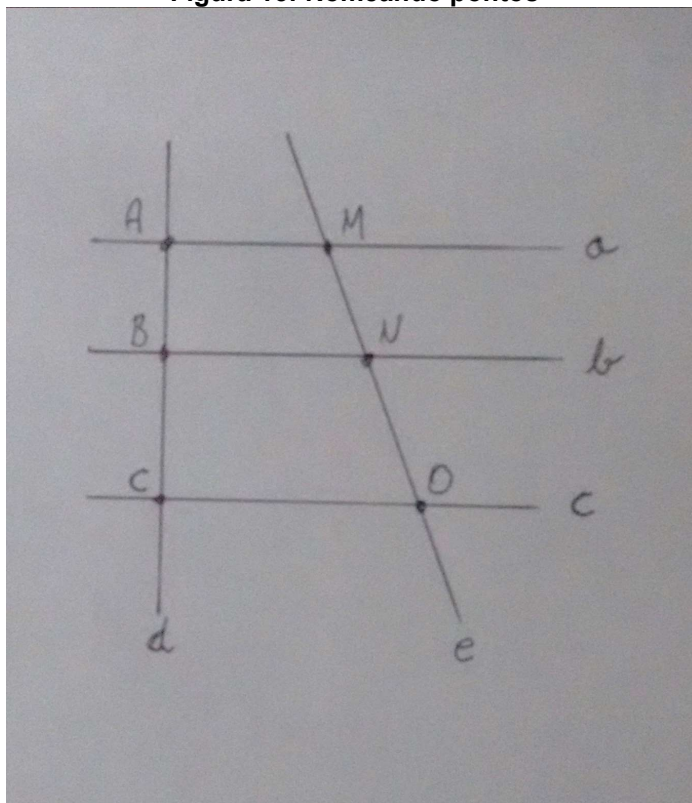
(4º passo) Sobre o feixe de retas paralelas, trace com a régua duas retas transversais d e e ;

Figura 12: Segmentos proporcionais

Fonte: próprio autor

(5º passo) Utilize as letras A, B e C para nomear os pontos de intersecção da reta d com o feixe de retas paralelas e as letras M, N e O para nomear os pontos de intersecção da reta e com o feixe de retas paralelas.

Figura 13: Nomeando pontos



Fonte: próprio autor

Questões sugeridas:

- 1) Quais são as medidas de \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{MN} e \overline{NO} ?
- 2) Calcule as divisões das medidas de \overline{AB} por \overline{BC} e \overline{MN} por \overline{NO} .
- 3) Das divisões e da comparação com os segmentos \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{MN} e \overline{NO} , o que você pode afirmar?

Os alunos devem perceber que os segmentos \overline{AB} e \overline{BC} são proporcionais a \overline{MN} e \overline{NO} . Com esse resultado, enunciaremos o Teorema de Tales.

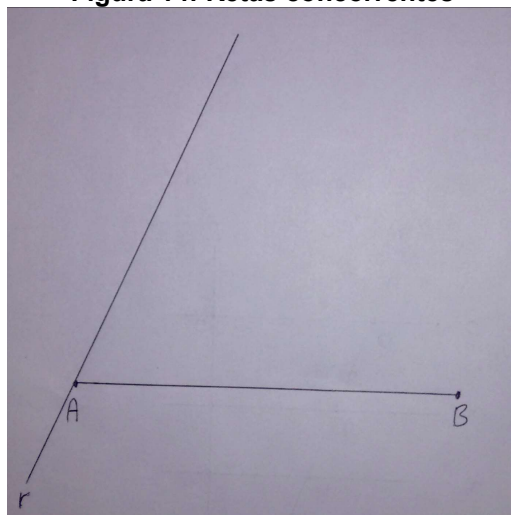
Teorema 2.2 (Teorema de Tales) – Suponhamos que três retas paralelas r , s e t cortam as retas m e n nos pontos A, B e C e A', B' e C', respectivamente. Se \overline{AB} e \overline{BC} são congruentes, então também serão congruentes os segmentos $\overline{A'B'}$ e $\overline{B'C'}$.

Agora, com o Teorema de Tales, fazemos com os estudantes a divisão de um segmento qualquer em três partes iguais.

(1º passo) Desenhe, utilizando a régua, um segmento qualquer \overline{AB} ;

(2º passo) Desenhe uma reta r transversal ao segmento \overline{AB} que passe pelo ponto A;

Figura 14: Retas concorrentes

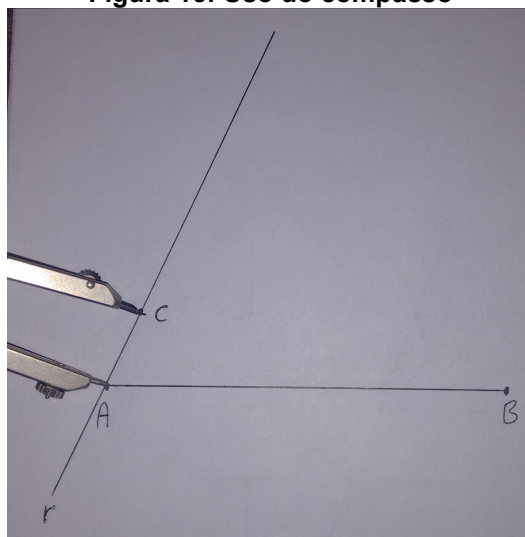


Fonte: próprio autor

(3º passo) Abra o compasso fixando uma medida qualquer (orientar os alunos para não abrirem muito o compasso e cuidarem para manter essa medida);

(4º passo) Com a ponta seca do compasso em A, passe a outra ponta do compasso pela reta r , marcando o ponto C;

Figura 15: Uso do compasso

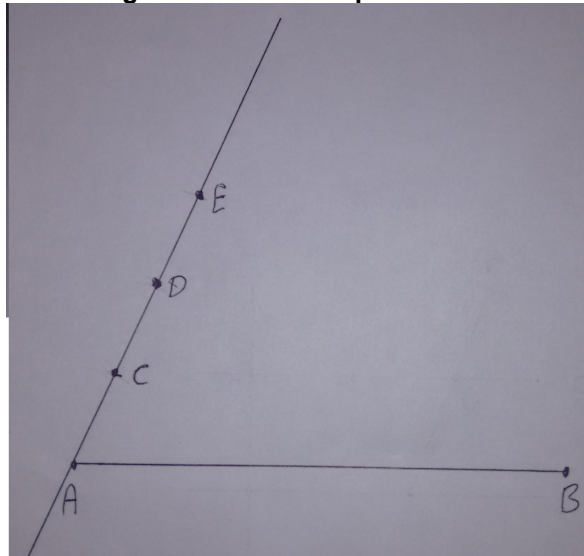


Fonte: próprio autor

(5º passo) Com a ponta seca do compasso em C, e mantendo a mesma abertura do compasso, passe a outra ponta do compasso novamente pela reta r marcando o ponto D;

(6º passo) Com a ponta seca do compasso em D, marque de modo análogo ao 5º passo o ponto E sobre a reta r ;

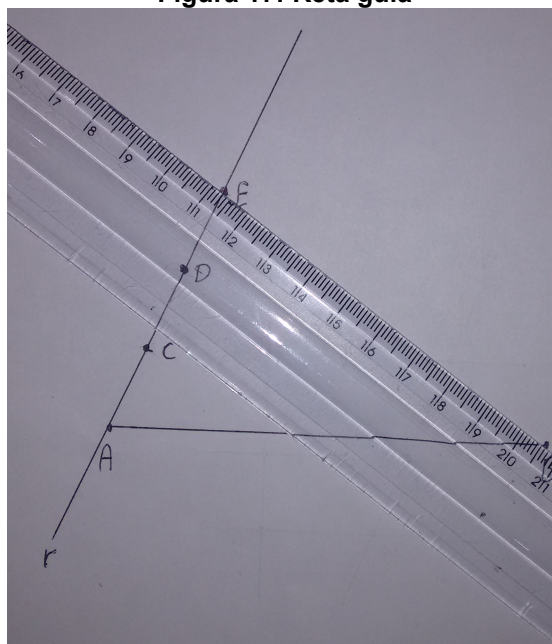
Figura 16: Pontos eqüidistantes



Fonte: próprio autor

(7º passo) Desenhe a reta s que passa pelos pontos E e B;

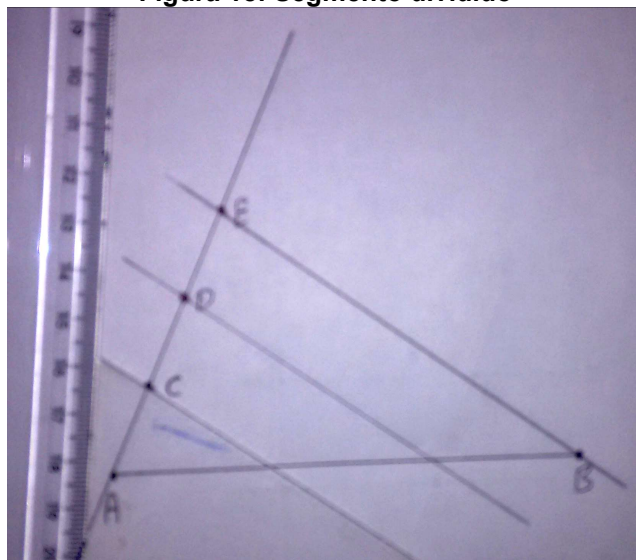
Figura 17: Reta guia



Fonte: próprio autor

(8º passo) Com auxílio de régua e esquadro, trace retas paralelas à reta s , de modo que estas passem pelos pontos C e D;

Figura 18: Segmento dividido



Fonte: próprio autor

(9º passo) Marque os pontos de intersecção do segmento \overline{AB} com as retas obtidas no 8º passo, nomeando-os em M e N.

Questões sugeridas:

- 1) O que você pode dizer das medidas de \overline{AM} , \overline{MN} , \overline{NB} e \overline{NO} ? Justifique sua resposta.
- 2) Usando procedimento análogo à construção anterior, trace dois segmentos dividindo-os em 5 e 7 partes, respectivamente.

A atividade de dividir os segmentos em partes iguais seguirá sendo articulada em nossa proposta de ensino para o estudo das frações decimais em um ambiente investigativo tecnológico. Desse modo, as atividades seguintes terão esta finalidade.

2.3 Construindo os Decimais no Segmento Unitário

2.3.1 Atividades sobre décimos

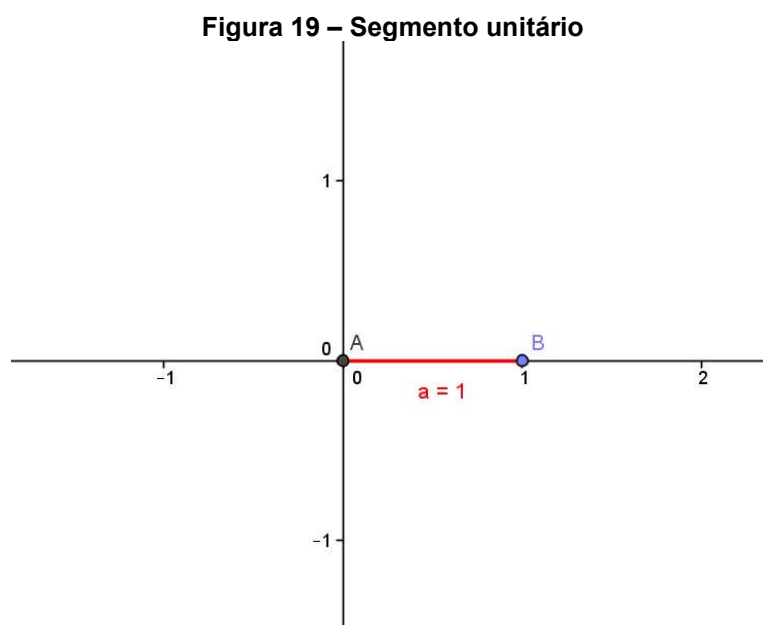
Nosso trabalho sobre frações parte da construção de um segmento unitário que será dividido em partes iguais. Para tal utilizamos procedimentos geométricos embasados nos teorema de Tales no teorema a seguir.

Teorema 2.3 – Cada segmento de reta pode ser dividido em quantas partes iguais quisermos.

Pelos teoremas acima citados indicamos os passos para a obtenção do segmento unitário dividido em dez partes.

(1º Passo) Acionado o *software* GeoGebra, selecione na barra de ferramenta o item “*intersecção de dois objetos*”. Na origem dos eixos cartesianos marque o ponto A.

(2º Passo) Selecione o objeto “*segmento com comprimento fixo*” e tendo como origem o ponto A desenhe o segmento. Para esse segmento, escolha a cor vermelha no seletor de cores do GeoGebra.



Fonte: Próprio autor.

(3º passo) Esconda os eixos cartesianos na janela de visualização. Selecione o objeto “*reta*” e desenhe uma reta qualquer r que passe pelo ponto A e que seja concorrente ao segmento \overline{AB} . Selecione “*ponto em objeto*” e sobre a reta r marque o ponto D, de modo que não esteja muito distante de A.

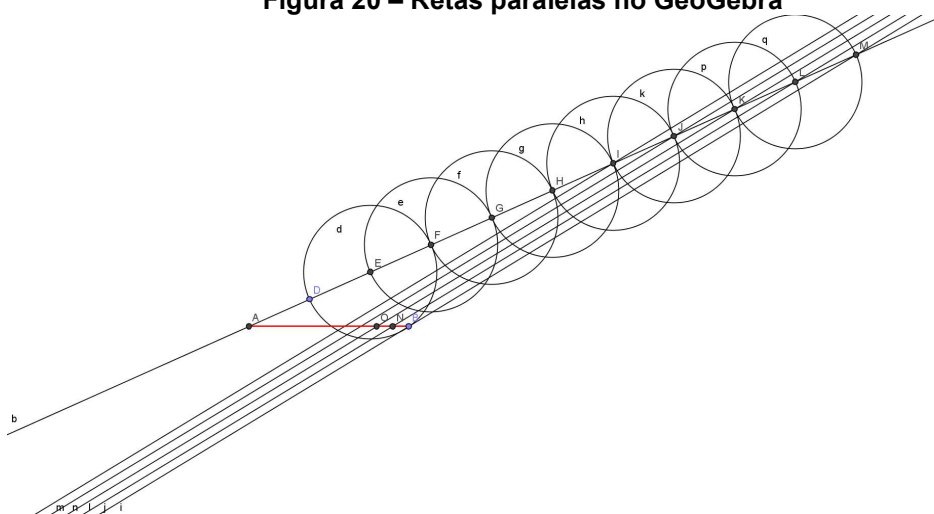
(4º passo) Com a medida de \overline{AD} , marcaremos sobre a reta r dez pontos contando com o ponto D , os quais determinam, dois a dois, segmentos com o mesmo comprimento de \overline{AD} . Para isso, selecionando o objeto “compasso”, tire a medida de \overline{AD} e fixe a circunferência em D . Selecione o item “intersecção entre dois objetos” e marque o ponto de intersecção E da circunferência com a reta r .

(5º passo) Novamente tire a medida de \overline{AD} com a ferramenta “Compasso” e fixe a circunferência no ponto E . Selecione o item “intersecção entre dois objetos” e marque o ponto de intersecção F da circunferência com a reta r . Siga assim, até obter os dez pontos.

(6º passo) Selecione o objeto “reta” e, tomando o último ponto que foi marcado na reta r , vamos supor que seja M , desenhe a reta s que passa por esse ponto e pelo ponto B .

(7º passo) Selecione o objeto “reta paralela”. Vamos desenhar as retas paralelas à reta s , posicionando-as nos pontos marcados sobre a reta r .

Figura 20 – Retas paralelas no GeoGebra



Fonte: Próprio autor

(8º passo) Após desenhadas todas as retas paralelas, selecione “*Intersecção entre dois objetos*” e marque os pontos de intersecção entre as retas paralelas e o segmento unitário.

(9º passo) Mediante os objetos listados na “Janela de Álgebra”, oculte as circunferências e as retas, deixando visível somente o segmento unitário \overline{AB} com as dez divisões demarcadas por pontos.

Figura 21 – Segmentos dos décimos



Fonte: Próprio autor

Questões Sugeridas

- 1) Lembrando das frações, que você já estudou tanto no 6º quanto no 7º, como fica representado cada parte do segmento \overline{AB} ?
- 2) Observando o segmento vermelho de origem em A e que se estende até o terceiro ponto que você marcou o que você pode dizer a respeito de sua medida e da posição do ponto?
- 3) Qual é a medida do segmento limitado pelo segundo e sétimo ponto?

Observamos que, na atividade proposta, a construção do segmento unitário é feita sobre o eixo cartesiano para que, mais a frente, seja possível visualizar a representação decimal atrelada à medida dos segmentos originados pela partição tomando o ponto A como origem. Observamos que essa mesma construção pode ser feita, em princípio, utilizando-se um segmento qualquer.

Nessa primeira atividade temos duas intenções: obter frações compostas pelo denominador 10 e verificar que compreensão os alunos trazem consigo tendo já estudado em anos anteriores o tema frações. Acreditamos que as respostas geradas sejam dadas por composição de dois números naturais e que estejam próximas ao item a das observações da definição abaixo:

Definição 2.4 – fração é toda expressão na forma a/b , onde a e b são números inteiros, sendo b não nulo. O inteiro a é chamado de numerador, enquanto o inteiro b denomina-se denominador.

Observações:

- a) Caso $a < b$, chamaremos de fração própria;
- b) Caso $a > b$, chamaremos de fração imprópria;
- c) Caso a seja múltiplo de b, chamaremos de fração imprópria aparente;
- d) Sendo a e b números inteiros, a fração pode ser positiva, assim como negativa.

Deteremo-nos, nesse trabalho, às frações positivas.

2.3.2 Atividade sobre centésimos

No segmento construído, tomando qualquer uma das partes que foram obtidas na tarefa anterior, vamos dividi-la também em dez partes. Para isso, utilizaremos os mesmos princípios do exercício anterior.

(1º passo) No segmento construído escolha uma das partições feitas na atividade anterior. Num dos pontos extremos desse segmento, digamos que seja o ponto A , trace uma reta t com a ferramenta “reta”.

(2º passo) Selecione a ferramenta “ponto em objeto” e marque um ponto Z não muito distante do ponto A .

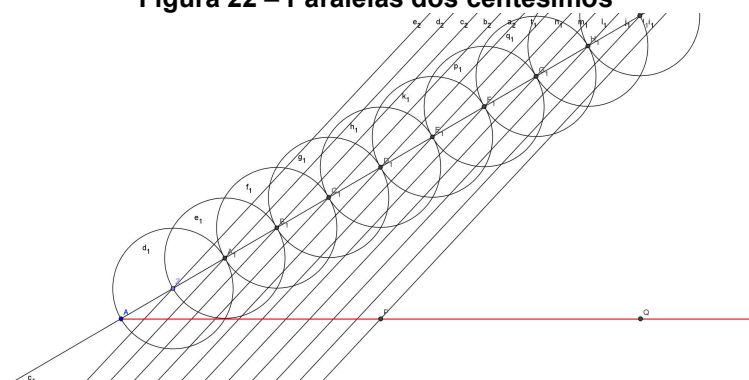
(3º passo) Selecione a ferramenta “Compasso” e tome a medida do segmento \overline{AZ} . Centre a circunferência em Z , em seguida com a ferramenta “*intersecção entre dois objetos*” marque o ponto de intersecção A' entre a reta t e a circunferência, obtendo na reta t outro segmento com a medida de \overline{AZ} .

(4º passo) Repetindo o passo anterior, coloque pontos em t até obter dez segmentos com a medida de \overline{AZ} .

(5º passo) Selecione o objeto “reta” e, tomando o último ponto que foi marcado na reta t , vamos supor que seja M' . Desenhe a reta u que passa por esse ponto e pelo outro ponto extremo da partição escolhida, digamos que seja o ponto P .

(6º passo) Selecione o objeto “reta paralela”, desenhe as retas paralelas a reta u , posicionando-as nos pontos marcados sobre a reta t .

Figura 22 – Paralelas dos centésimos



Fonte: Próprio autor.

(7º passo) Após desenhadas todas as retas paralelas, selecione “Intersecção entre dois objetos” e a cor verde no seletor de cores, em seguida, marque os pontos de intersecção entre as retas paralelas e a partição escolhida.

(8º passo) Na “janela de álgebra”, oculte as circunferências e as retas, deixando visível somente o segmento unitário \overline{AB} com as novas divisões demarcadas pelos pontos verdes.

Figura 23 - Centésimos



Fonte: Próprio autor.

Questões sugeridas:

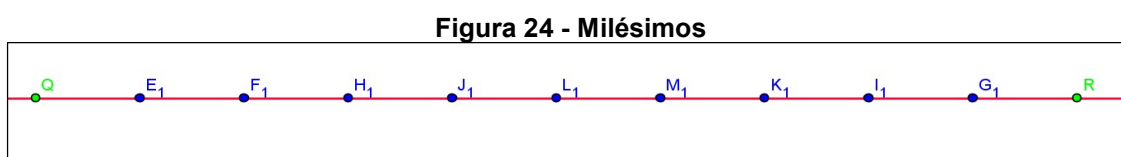
- 1) Reduza e amplie a imagem uma ou mais vezes.
- 2) Se você fizesse o mesmo procedimento de divisões em cada uma das outras partições, quantas partes menores você teria ao longo do segmento \overline{AB} ?
- 3) Que fração indica uma dessas partes menores?
- 4) Tomando um desses novos pontos, como você indica por fração, a posição no segmento \overline{AB} ?
- 5) Ainda em relação ao ponto escolhido, quais são as medidas de A até esse ponto e desse ponto ao ponto B?

A primeira tarefa resulta na obtenção de frações próprias de denominador 10 (décimos); nessa segunda tarefa chegamos às frações próprias de denominadores 100 (centésimos), e a tarefa seguinte será destinada a obtenção de frações de milésimos, caminhando, assim, para a generalização das frações decimais.

2.3.3 Atividade sobre milésimos

Tomando um dos dez segmentos limitados pelos pontos verdes, dever-se-á subdividi-lo em dez partes iguais. Os novos segmentos terão como extremos pontos coloridos de azul.

Não descreveremos aqui os passos dessa construção, pois são análogos aos passos das tarefas anteriores. Sendo assim, teremos como resultado uma figura similar a que segue abaixo:



Fonte: Próprio autor

Propomos nessas três tarefas iniciais a ampliação gradativa da compreensão das frações decimais, levando o aluno a perceber que esse processo de divisões decimais é infinito.

Questões sugeridas:

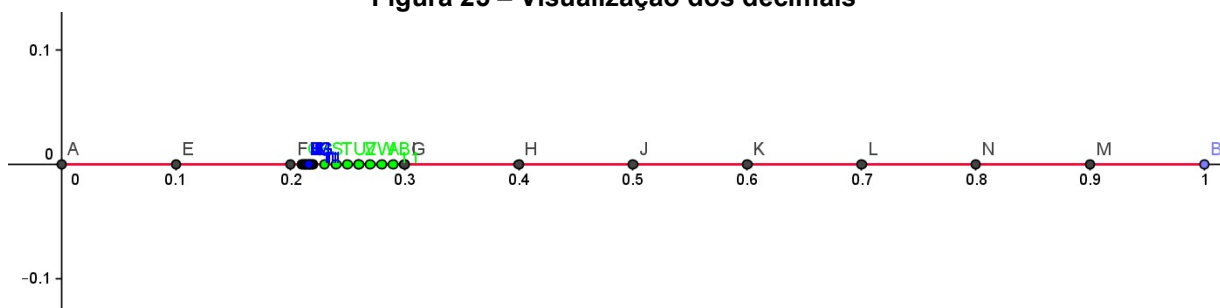
- 1) E agora, quanto dessas partes ainda menores caberiam no segmento \overline{AB} ?
- 2) Cada segmento desses representa que fração do segmento \overline{AB} ?
- 3) Escolhendo um desses pontos, qual fração indicaria a posição dele no segmento \overline{AB} ?

2.3.4 Atividade sobre as demais extensões decimais

No conjunto de atividade que segue, nosso objetivo é que os alunos investiguem a relação entre a representação fracionária e a representação decimal do número racional. Nesse trabalho o uso do eixo cartesiano é necessário, na medida em que o *software* fornece as representações decimais. Esperamos que os estudantes, visualizando as frações com sua respectiva representação decimal e a forma com que estão organizados no segmento numérico, conjecturem como se obtém a expansão decimal em frações com denominadores do tipo 10^n .

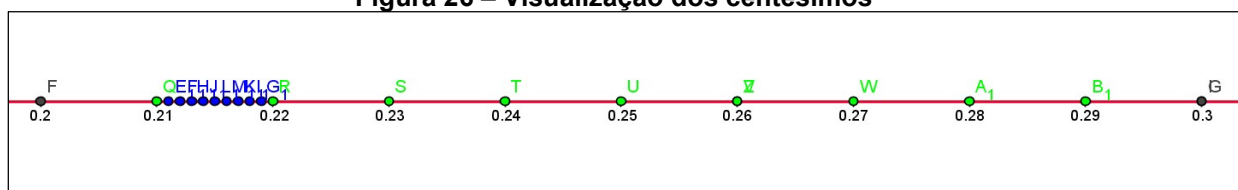
Inicialmente, a atividade propõe aos alunos que, reduzindo e ampliando a imagem no monitor do computador, escolham um ponto de cada cor e escrevam a fração correspondente à sua localização no segmento numérico \overline{AB} .

Figura 25 – Visualização dos decimais



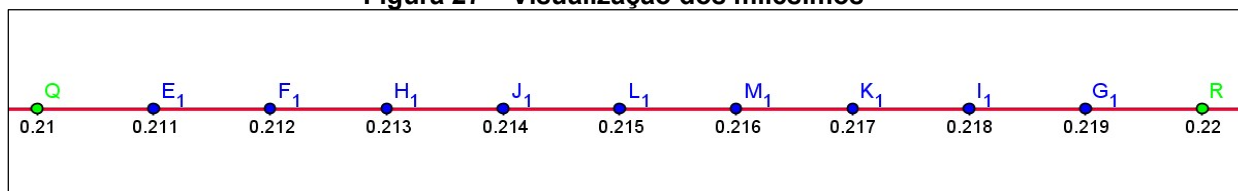
Fonte: Próprio autor

Figura 26 – Visualização dos centésimos



Fonte: Próprio autor

Figura 27 – Visualização dos milésimos



Fonte: Próprio autor

Questões sugeridas:

- 1) Quantas vezes esse processo poderia ser repetido?
- 2) A cada processo a realizar, de que modo o número de segmentos vai aumentando?
- 3) Escolha um ponto de cada cor. Dos pontos que você escolheu e escreveu sua respectiva fração indique através da imagem o número indicado.
- 4) Como você justificaria a igualdade entre a representação de fração e o número decimal?
- 5) Na sequência de frações abaixo indique os respectivos números decimais:

$$\frac{7}{10} =$$

$$\frac{7}{100} =$$

$$\frac{7}{1000} =$$

$$\frac{7}{\underbrace{1000\dots000}_n \text{ zeros}} =$$

6) Para cada número decimal abaixo, indique a fração correspondente:

$$3,2 =$$

$$0,32 =$$

$$0,032 =$$

$$0,0032 =$$

$$0,\underbrace{000\dots0032}_n \text{ algarismos} =$$

7) Quantos números há entre 0 e 1? Justifique.

Esta última atividade contempla a seguinte definição:

Definição 2.5 - Fração decimal é toda fração cujo denominador é igual a 10, 100, 1000 ou qualquer outra potência positiva de 10. São exemplos:

$$\frac{3}{10}, \frac{-71}{1000}, \frac{25}{100}$$

Além da definição acima, as atividades destinam-se também à relação entre a representação decimal que a representa, sendo esses números, assim como os números naturais, estruturados dentro do sistema decimal, onde:

$$\frac{1}{10} = 0,1 \quad \frac{1}{100} = 0,01 \quad \frac{1}{1000} = 0,001$$

daí podemos determinar a seguinte equivalência:

$$\frac{32}{10} = \frac{30 + 2}{10} = \frac{3 \times 10}{10} + \frac{2 \times 1}{10} = 3 \times 1 + 2 \times 0,1 = 3 + 0,2 = 3,2$$

Abaixo descrevemos essa estrutura de modo formal.

2.3.4.1 Expansão decimal de números naturais

Preliminarmente, lembramos que podemos expressar cada número natural N como uma soma de múltiplos das potências de base 10, isto é, como soma de múltiplos de 1, 10, 100, 1000, ...:

$N = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \dots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$, onde os fatores de multiplicidade $a_n, a_{n-1}, \dots, a_3, a_2, a_1, a_0 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ são únicos para cada N .

A decomposição acima tem a escrita resumida abaixo:

$$N = a_n \cdot a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0$$

Façamos um exemplo:

$$2478 = 2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$$

Proposição 2.6 – Todo racional positivo, r , tem uma decomposição única na forma $r = r' + r''$, onde;

$r' \geq 0$ é um número inteiro;

r'' é um número racional verificando $0 \leq r'' < 1$ (parte fracionária).

Prova:

1ª parte – existência da decomposição

Seja $r = a/b$, com a e b inteiros positivos. A divisão euclidiana de a por b nos dá, $a = qb + R$, com $q \geq 0$ inteiro e $0 \leq R < b$. Disso resulta que $r = a/b = q + R/b$.

Afirmamos que $r' = q$ e $r'' = R/b$. Com efeito, como q é inteiro, e como $R/b = a/b - q = r - q$, resta mostrar que $0 \leq R/b < 1$. De fato, essa igualdade é imediata da definição de ordem entre números racionais e o fato de que $0 \leq R < b$.

2ª parte – unicidade da decomposição.

Suponhamos que $r = r' + r''$ e $r = R' + R''$, com r' e R' inteiros ≥ 0 , e que $0 \leq r'', R'' < 1$.

É imediato vermos que $r'' = R''$ implica $r' = R'$. Resta mostrar que a possibilidade $r'' \neq R''$ resulta num absurdo. Com efeito, supondo que $r'' > R''$, como $0 \leq R'' < r'' < 1$, segue que $r'' - R''$ é um número racional verificando $0 < r'' - R'' < 1$. Por outro lado, a igualdade $r' + R' = r = r'' + R''$, nos dá $r'' - R'' = R' - r'$ = número inteiro, o que é um absurdo frente a $0 < r'' - R'' < 1$. De modo análogo mostra-se que $r'' < R''$ nos leva também ao absurdo.

Notamos que a expansão decimal da parte fracionária, r'' , de um número racional positivo r , como deveria ser esperado, tem a decomposição em um múltiplo do décimo, somado com um múltiplo do centésimo, mais um múltiplo de milésimo, e assim por diante. Isto é:

$$r'' = \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{100} + \frac{b_3}{1000} + \dots, \text{ onde, } \forall b_i \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}.$$

Tomando a soma da parte inteira com a parte fracionária que compõem r , temos:

$$r = r' + r'' = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \dots + a_1 10 + a_0 + \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{100} + \frac{b_3}{1000} + \dots, \text{ de forma}$$

abreviada escreve-se:

$$r = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0, b_1 b_2 b_3 \dots$$

Teorema 2.7 – Todo número racional dado por uma fração ordinária equivalente a uma fração decimal, positiva ou negativa, tem uma quantidade finita de dígitos na parte fracionária de sua expansão decimal. Consequentemente, esta expansão tem de ter a forma:

$$\pm a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0, b_1 b_2 b_3 \dots b_m$$

Reciprocamente, toda expansão decimal finita representa um número racional que é dado por uma fração decimal.

Vejamos o exemplo imediato desse teorema:

Determine a expansão decimal do número racional dado pela fração $17/5$.

$$\frac{17}{5} = \frac{2 \times 17}{2 \times 5} = \frac{34}{10} = \frac{30}{10} + \frac{4}{10} = 3 + 0,4 = 3,4$$

O resultado acima pode ser obtido também pelo método das divisões euclidianas sucessivas, referência apresentada a seguir.

2.3.4.2 Método das divisões

Consideremos uma fração a/b equivalente a uma fração decimal, e onde $0 < a < b$.

(1º Passo) Casa dos décimos.

Fazendo uma primeira divisão euclidiana:

$$\frac{a}{b} = \frac{10a}{10b} = \frac{1}{10} \cdot \frac{q_1 b + r_1}{b} = \frac{q_1}{10} + \frac{r_1}{10b}, \text{ onde } 0 \leq r_1 < b.$$

Como $0 < 10a < 10b$, pode ser escrito como $0 < q_1b + r_1 < 10b$, e como $r_1 \geq 0$, segue que $0 \leq q_1 \leq 9$. Por outro lado, $0 \leq r_1 < b$ dá $0 \leq \frac{r_1}{10b} < \frac{1}{10}$, e então segue que em a/b cabem apenas q_1 décimos. Obtemos:

$$\frac{a}{b} = \frac{q_1}{10} + \frac{r_1}{10b}, 0 \leq \frac{r_1}{10b} < \frac{1}{10}$$

Logo, se $r_1 = 0$, temos a expansão $a/b = q_1/10$. Se $r_1 \neq 0$, precisamos ir para a próxima casa.

(2º Passo) Casa dos centésimos.

Considerando que $0 < r_1 < b$, fazemos uma segunda divisão euclidiana:

$$\frac{r_1}{10b} = \frac{10r_1}{100b} = \frac{1}{100} \cdot \frac{q_2b + r_2}{b} = \frac{q_2}{100} + \frac{r_2}{100b}, \text{ onde } 0 < r_2 < b.$$

Como $0 < 10r_1 < 10b$, pode ser escrito como, $0 < q_2b + r_2 < 10b$, e como $r_2 \geq 0$, segue que $0 \leq q_2 \leq 9$. Por outro lado, $0 \leq r_2 < b$ dá $0 \leq \frac{r_2}{100b} < \frac{1}{100}$, e então

segue que em a/b cabem apenas q_2 centésimos. Obtemos:

$$\frac{a}{b} = \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{100} + \frac{r_2}{100b}, \text{ onde } 0 \leq \frac{r_2}{100b} < \frac{1}{100}.$$

Logo, se $r_2 = 0$, temos a expansão $a/b = q_1/10 + q_2/100$. Se $r_2 \neq 0$, precisamos ir para a próxima casa.

Dessa forma, enquanto não encontrarmos restos nulos, continuaremos de modo semelhante fazendo esse processo.

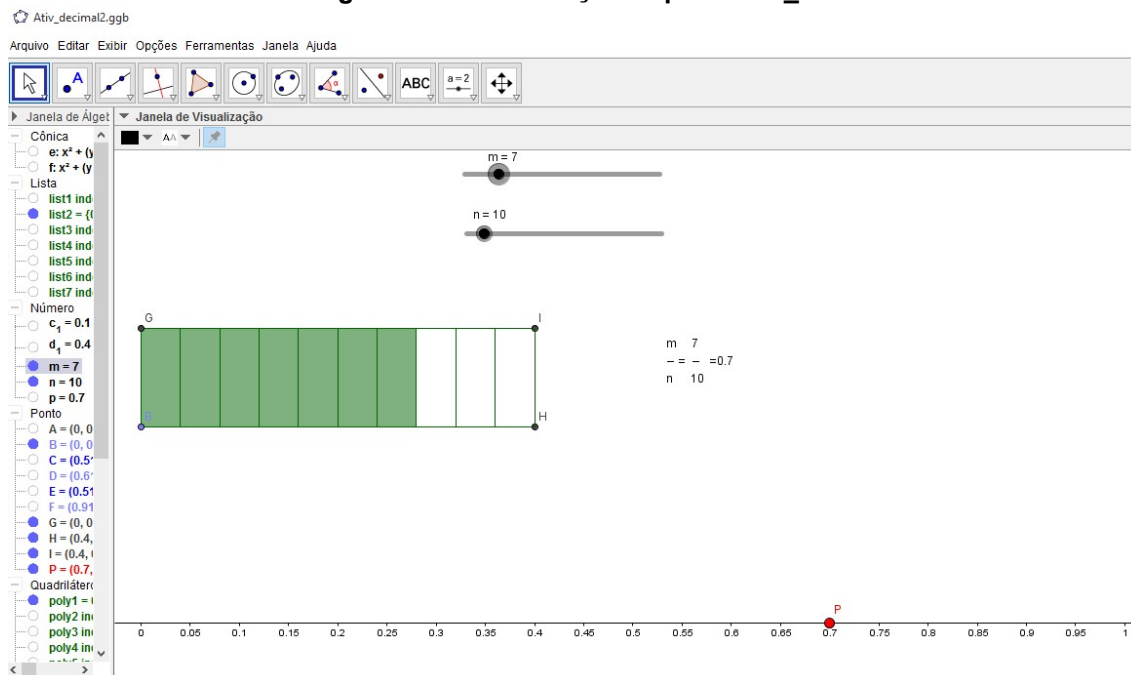
2.4 Ocorrência de Dízimas Periódicas

2.4.1 Atividade sobre Ocorrência de Dízimas Periódicas

Essa atividade inicia-se abrindo com o GeoGebra o arquivo “Ativ_Decimal2”.

Visualizando a construção contida no arquivo, pedimos para que os alunos alterem os valores do numerador m e do denominador n com os controles deslizantes e observem as mudanças na ilustração (retângulo ou retângulos) e no ponto P.

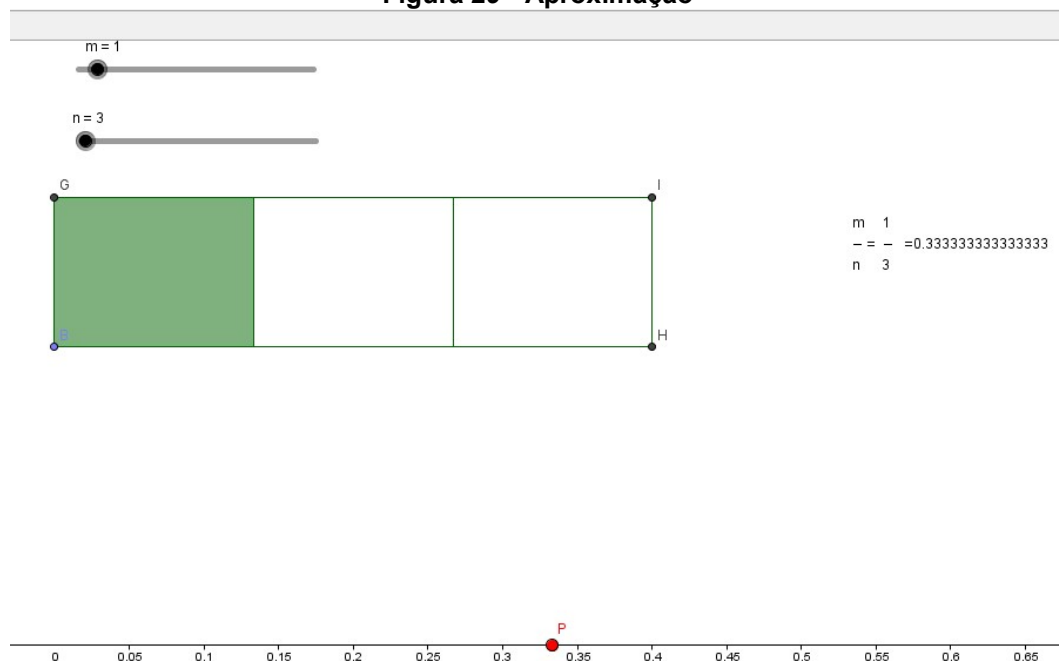
Figura 28 – Visualização arquivo Ativ_decimal2



Fonte: Próprio autor.

Para o estudo de números com dízima, pedimos que representem no arquivo “Ativ_decimal2” do GeoGebra a fração $1/3$ e, em seguida, ampliem a imagem e façam na reta numérica aproximações de números decimais para essa fração, com a finalidade de fazê-los perceber que se trata de algo que segue infinitamente.

Figura 29 - Aproximação



Fonte: próprio autor

Questões sugeridas

1) Ampliando a imagem e observando os números que vão surgindo, preencha conforme indicado as lacunas a seguir com pares de números decimais, um menor e outro maior, que estejam mais próximos de $1/3$.

com uma casa decimal: _____ $< 1/3 <$ _____

com duas casas decimais: _____ $< 1/3 <$ _____

com três casas decimais: _____ $< 1/3 <$ _____

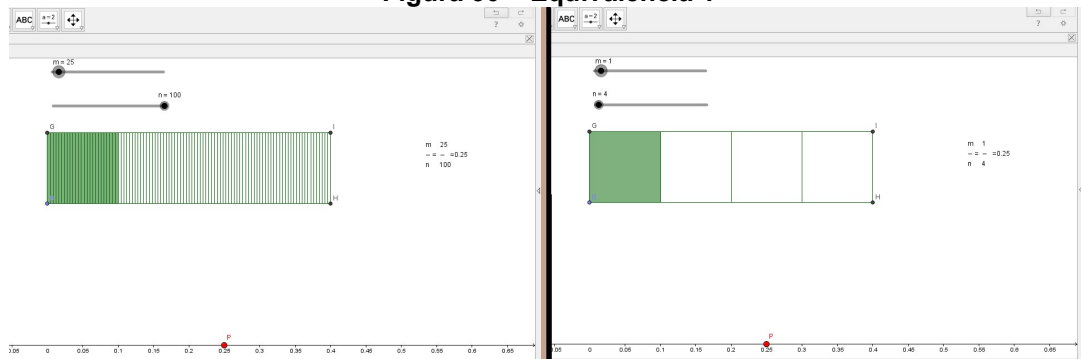
com quatro casas decimais: _____ $< 1/3 <$ _____

com cinco casas decimais: _____ $< 1/3 <$ _____

2) O que você observa com as anotações feitas na atividade anterior? A fração $1/3$ corresponde a algum número decimal? Justifique.

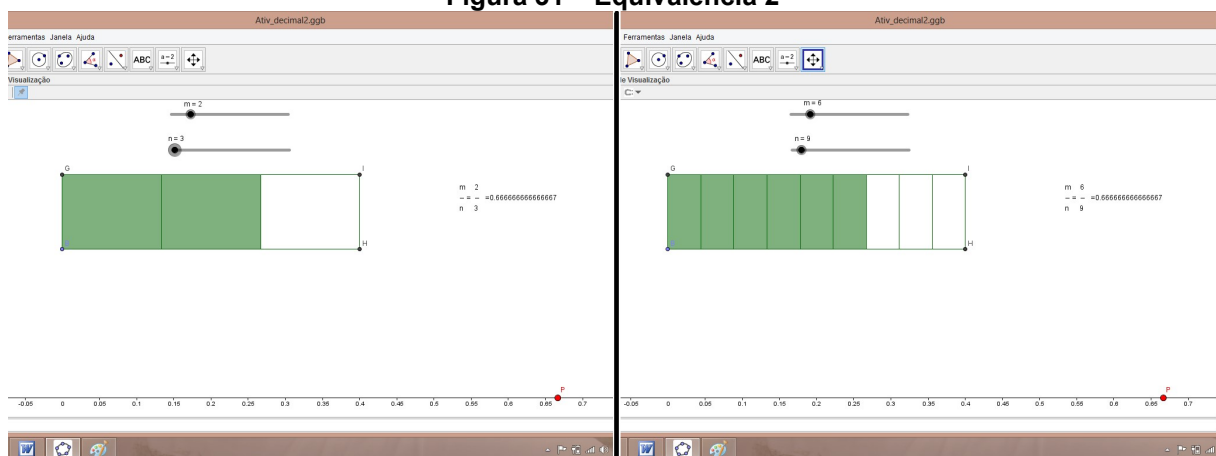
Dando prosseguimento ao estudo sobre as dízimas periódicas, queremos fazer com que nossos estudantes percebam características nas frações que permitam averiguar a ocorrência ou não de dízima periódica. Para tanto, solicitaremos que os alunos representem, no arquivo *Ativ_Decimal2* pares de frações equivalentes e anotem a representação decimal resultante de cada fração, quando, assim, vão perceber essas equivalências. Ainda, esses pares de frações estão organizados em dois blocos, um destinado às frações decimais e o outro às frações que geram dízimas periódicas, na intenção de apontar através de comparações entre esses blocos as diferenças entre esses dois tipos de frações.

Figura 30 – Equivalência 1



Fonte: Próprio autor.

Figura 31 – Equivalência 2



Fonte: Próprio autor.

Após os alunos anotarem junto às frações as respectivas representações decimais, solicitaremos que façamos os numeradores e denominadores das frações, de modo que mantenham as frações organizadas conforme os blocos ao qual pertencem. Em seguida, pediremos que comparem os dois blocos de frações, atentando para os denominadores agora decompostos em fatores primos.

Bloco 1

a) $\frac{25}{100}$ e $\frac{1}{4}$

b) $\frac{16}{10}$ e $\frac{8}{5}$

c) $\frac{5}{10}$ e $\frac{1}{2}$

d) $\frac{36}{100}$ e $\frac{9}{25}$

Bloco 2

a) $\frac{6}{9}$ e $\frac{2}{3}$

b) $\frac{54}{99}$ e $\frac{6}{11}$

c) $\frac{168}{99}$ e $\frac{56}{33}$

d) $\frac{245}{90}$ e $\frac{49}{18}$

Observação: será indicada a notação “barra” para a representação da dízima periódica, $2,7222\dots = 2,7\bar{2}$.

Questões sugeridas

- 1) Para cada par de frações, você percebeu alguma relação entre elas? Quais?
- 2) Conforme você percebeu, as frações foram divididas em dois blocos. Por qual(is) critério(s) elas foram assim separadas?
- 3) Escreva as frações com os numeradores e denominadores fatorados quando possível.
- 4) O que você consegue perceber com essas fatorações?
- 5) Há alguma evidência nas fatorações para a formação dos blocos das frações? Justifique.

Nessa etapa, queremos que os alunos façam conjecturas que ao serem discutidas possam levá-los a perceber que as frações decimais são compostas por fatores 2 e/ou 5 nos seus denominadores quando na forma irredutível, enquanto que nas demais frações irredutíveis com denominadores compostos por outros primos além de 2 e 5 tem-se a geração de dízima periódica. Relacionamos a seguir resultados matemáticos que embasaram a elaboração dessas atividades e que formalizam esses resultados.

Definição 2.8 – Sendo a , b , A e B números inteiros, onde b e $B \neq 0$, dizemos que as frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{A}{B}$ são frações equivalentes, se e somente se $aB = Ab$, isto é:

$$\frac{a}{b} = \frac{A}{B} \Leftrightarrow aB = Ab$$

Definição 2.9 – Chamamos de número racional toda uma classe de frações equivalentes, assim, dois números racionais serão iguais se, e somente se, suas classes são iguais como conjuntos.

O conjunto dos números racionais é simbolizado por \mathbb{Q} .

Chamaremos de r o número racional referente à fração a/b , sendo r a classe de todas as frações equivalentes a a/b .

Definição 2.10 – Toda fração da classe de frações que consiste em um dado número racional é dita ser uma representação fracionária deste número.

Utilizaremos a escrita $r = a/b$ para indicar que a fração a/b é uma representação do número racional r .

Teorema 2.11 – Um número racional r , dado por uma fração a/b , é igual a um racional s dado por uma fração c/d se, e só se, essas duas frações forem equivalentes:

$$r = s \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Definição 2.12 – Uma fração a/b é dita ser irredutível quando a e b forem primos entre si.

Teorema 2.13 – Todo número racional é representado por uma, e só uma, fração irredutível de denominador positivo.

Definição 2.14 - Fração ordinária é toda fração da forma a/b , onde a é um número inteiro e b é um número inteiro positivo.

Proposição 2.15 - Toda fração irredutível é fração ordinária. Em particular, todo número racional tem infinitas representações equivalentes em fração ordinária.

Prova:

Dado r racional, e a/b a fração irredutível que o representa, é imediato que

$$r = \frac{a}{b} = \frac{2a}{2b} = \frac{3a}{3b} = \dots \quad \text{CQD}$$

Teorema 2.16 - Quando o denominador de uma fração ordinária tiver uma fatoração em primos contendo apenas os fatores 2 e/ou 5, esta fração será equivalente a uma fração decimal.

Prova:

Pela hipótese, a fatoração em primos de b é da forma $b = 2^m \cdot 5^n$, onde ao menos um dentre m e n é não nulo. Supondo que $m \geq n$, teremos:

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{2^m \cdot 5^n} = \frac{a \cdot 5^{m-n}}{2^m \cdot 5^n \cdot 5^{m-n}} = \frac{a \cdot 5^{m-n}}{2^m \cdot 5^m} = \frac{a}{10^m}$$

Demonstra-se de modo análogo a possibilidade de $m \leq n$. C.Q.D.

Teorema 2.17 – Todo racional não equivalente a uma fração decimal tem uma expansão decimal infinita periódica.

Prova:

Deteremo-nos à parte após a vírgula, tomando assim o caso de considerar um número racional, $0 < r = a/b < 1$.

Por se tratar de um número racional com expansão decimal infinita, temos a seguinte formalização decorrente do método das divisões:

$$0 < r_1, r_2, r_3, \dots < b, \text{ ou seja, } 0 < r_1, r_2, r_3, \dots \leq b-1$$

Assim, no máximo, após as primeiras $b - 1$ divisões, veremos um resto r_j repetindo o valor de um resto r_i , já obtido ($1 \leq i < j$). Isso implica que a expansão de a/b terá de ter a forma:

$$\frac{a}{b} = 0, q_1 q_2 \dots q_i q_{i+1} \dots q_j q_i q_{i+1} \dots q_j \dots$$

Exemplificando, caso $r_3 = r_1$, teremos:

$$a = r_0 \rightarrow q_1$$

$$r_1 \rightarrow q_2$$

$$r_2 \rightarrow q_3$$

$$r_3 \rightarrow q_2$$

$$r_4 \rightarrow q_3$$

$$r_5 \rightarrow q_2$$

E assim segue, de modo que a expansão fica:

$$\frac{a}{b} = 0, q_1 q_2 q_3 q_2 q_3 \dots = \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{100} + \frac{q_3}{1000} + \frac{q_2}{10000} + \frac{q_3}{100000} + \dots$$

onde a reticência indica repetição do padrão. C.Q.D.

Definição 2.18 – Chamamos de período de uma dízima periódica o primeiro e menor bloco de dígitos que, repetindo-se sucessivamente, gera o restante da dízima.

No número racional $0,1424242\dots$, o menor bloco repetindo-se sucessivamente é o 42, assim 42 é o período.

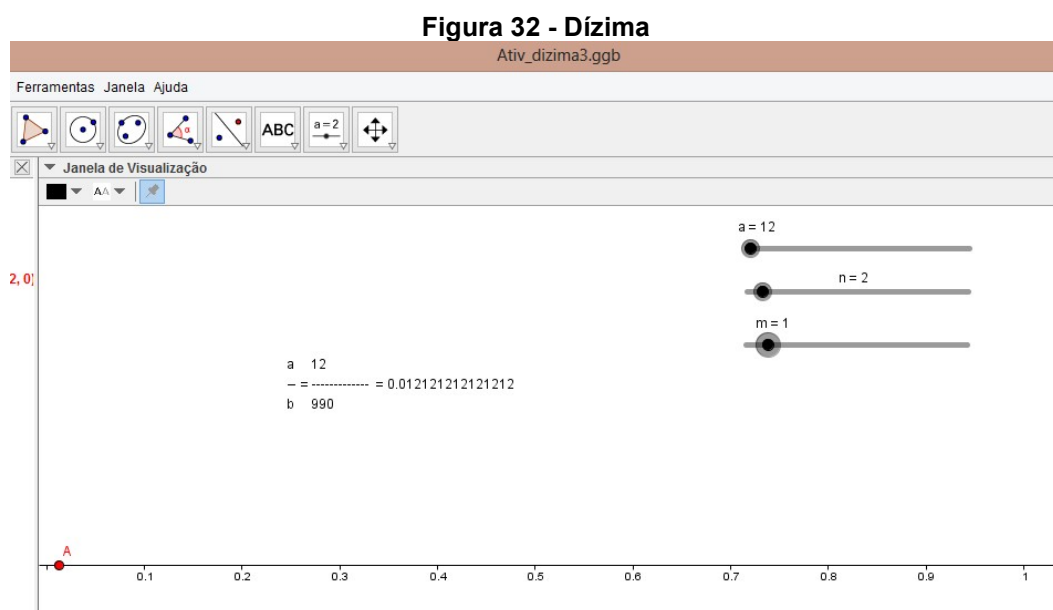
2.4.2 Atividade sobre exploração de dízimas periódicas

Tendo já abordado as frações que resultam em números racionais compostos de dízima periódica, a atividade seguinte buscará fazer com que os alunos consigam determinar as frações geratrizes desses números.

Elaboramos o arquivo no GeoGebra “Ativ_dizima3”, composto de três controles deslizantes a , m e n , que compõem as frações da seguinte maneira:

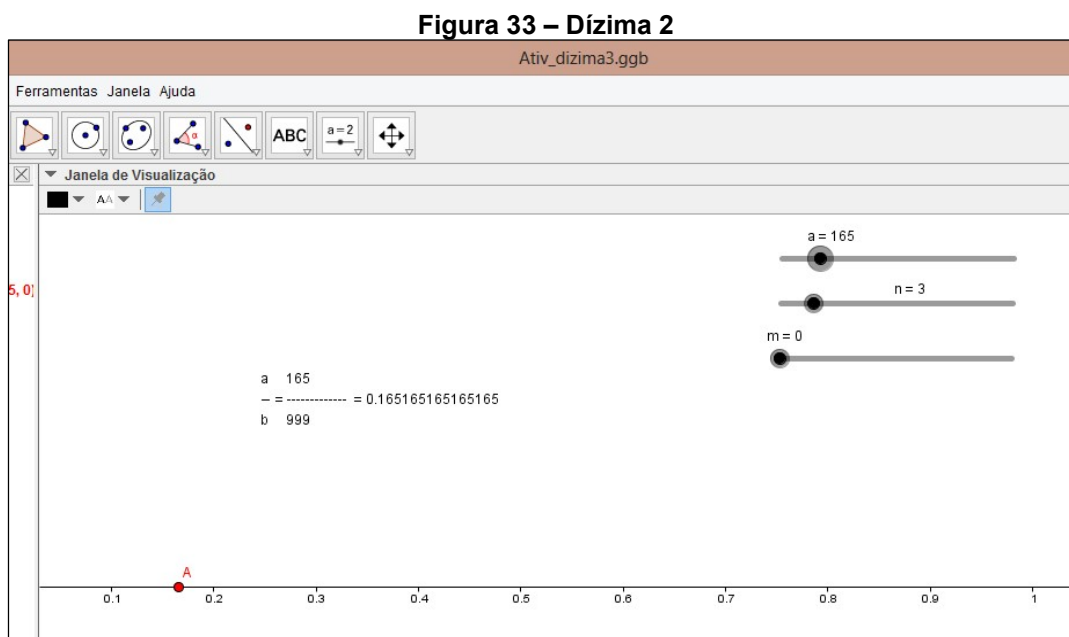
- (1) controle deslizante a determinará o numerador da fração, sendo limitado pelos valores indicados pelos controles deslizantes m e n ;
- (2) controle deslizante n indicará no denominador a quantidade de 9s;
- (3) controle deslizante m indicará no denominador a quantidade de 0s.

Dessa forma, se quisermos indicar a fração $12/990$, devemos indicar $a = 12$, $n = 2$ e $m = 1$, como podemos ver na ilustração a seguir:



Inicialmente exploraremos os números racionais com dízimas partindo da primeira casa decimal, ou seja, da casa dos décimos. Dessa forma, os alunos devem manter o controle deslizante m fixado em 0, e ir alterando os controles a e n , visualizando regularidades entre o numerador e denominador.

Exemplificando, um nove no denominador resultará dízima de um dígito de periodicidade, dois noves no denominador resultarão em dízimas de dois dígitos de periodicidade, e assim por diante. Ilustramos na figura 33 a seguir, o caso de termos três 9s no denominador, obtendo com isso dízima de três dígitos de periodicidade.



Questões sugeridas

- 1) O numerador “a” está limitado por quais números?
- 2) Que regularidade você consegue perceber entre fração e o número decimal expandido, a medida que vai aumentando o controle “n”?
- 3) Represente em fração cada um dos números abaixo, e em seguida, simplifique as frações.

a) $0,\overline{6} =$

b) $0,\overline{54} =$

c) $0,\overline{132} =$

d) $0,\overline{06} =$

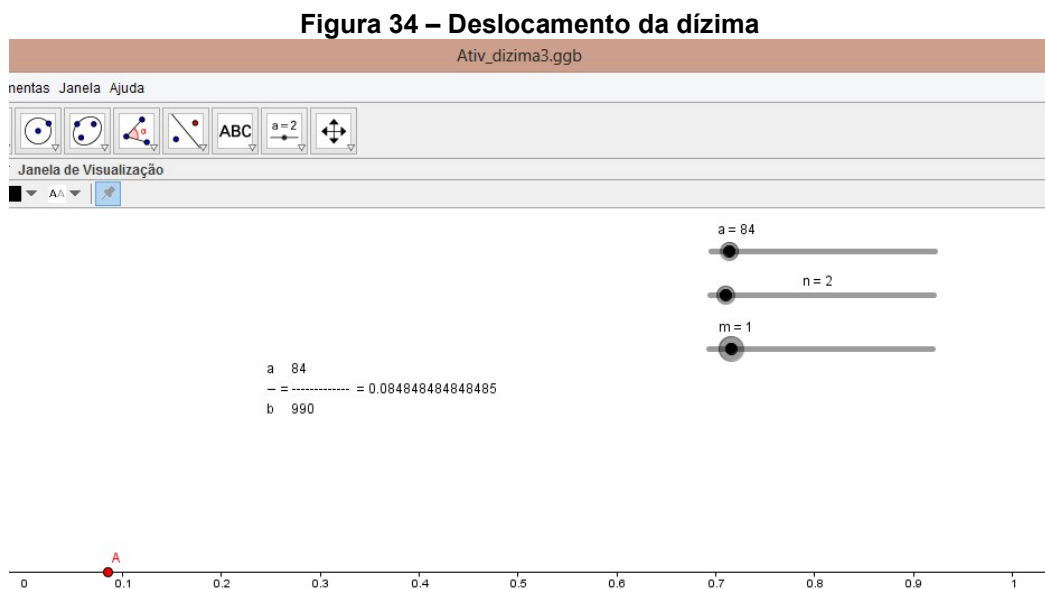
A próxima investigação que queremos sugerir aos estudantes é quanto ao deslocamento da dízima periódica nas casas decimais. Para isso adotaremos os seguintes procedimentos:

(1º) controles deslizantes $n = 1$ e $1 < a < 9$, fazendo variar o controle deslizante m . Obterão, dessa forma, dízimas de um algarismo de periodicidade se deslocando m casas decimais à direita;

(2º) controles deslizantes $n = 2$ e $1 < a < 99$, fazendo variar o controle deslizante m . Obterão, dessa forma, dízimas de dois algarismos de periodicidade se deslocando m casas decimais à direita;

(3º) controles deslizantes $n = 3$ e $1 < a < 999$, fazendo variar o controle deslizante m . Obterão, dessa forma, dízimas de três algarismos de periodicidade se deslocando m casas decimais à direita;

E assim por diante.



Fonte: Próprio autor.

Questões sugeridas

- 1) Explique o que acontece ao alterar os valores de m .
- 2) As dízimas periódicas são compostas por quantos dígitos? Justifique.
- 3) Aumentando os valores de “ m ” e “ n ” descreva de acordo com o denominador o que acontece com a expansão decimal das frações.
- 4) Para cada número abaixo, escreva as suas respectivas frações, e simplifique-as quando possível:

a) $0,00\overline{4} =$

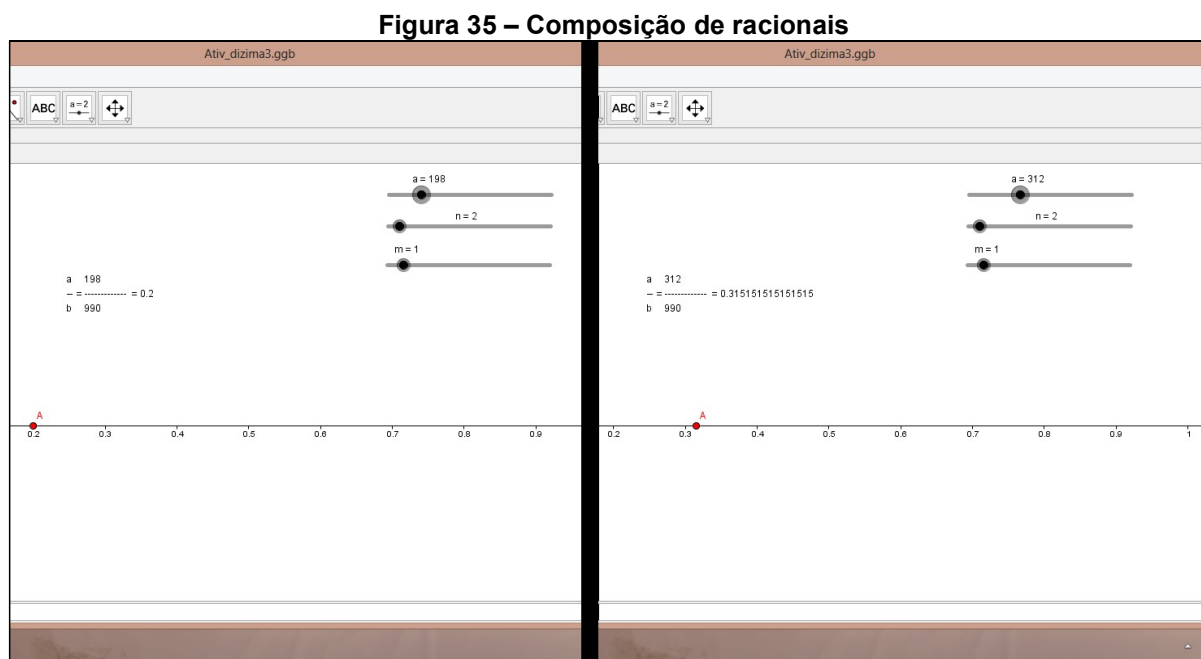
b) $0,04\overline{2} =$

c) $0,007\overline{02} =$

d) $0,000\overline{51} =$

Por fim, tentaremos generalizar as representações dos números racionais, isto é, estabelecer com os alunos as conversões de fração em representações decimais e vice-versa. Dessa forma, no arquivo “Ativ_dizima3”, os alunos devem alterar os três controles deslizantes a , m e n .

Ao fazerem isso, além de perceberem as regularidades já vistas, temos expectativa de que eles percebam que nem todas as frações geram dízimas periódicas. E também, que há frações que geram números racionais compostos de uma parte não periódica e finita com a dízima periódica infinita, isto é, números racionais que são gerados por composição de fração decimal com fração não decimal, tendo eles, nesse momento, buscado explicações de como essas coisas acontecem.



Fonte: Próprio autor.

Questões sugeridas

- 1) Em todas as frações ocorre dízima periódica? Se não, dê exemplos, e tente justificar do porquê não haver dízima.
- 2) Nas frações que ocorrem dízima periódica, todas elas são compostas unicamente do período da dízima periódica? Se não, o que se pode dizer da parte não periódica?
- 3) Tome quatro frações que ocorra números com composição mista de decimais periódicos e não periódicos. Anotando tão somente o número, faça através da adição a separação entre a parte periódica e a não periódica.

Exemplo: $0,42\bar{5} = 0,42 + 0,00\bar{5}$

4) Como poderíamos agora obter a fração geratriz dos números acima?

Exercícios de Fixação sobre as Frações

1) Determine a expansão decimal das frações abaixo:

a) $\frac{5}{8} =$

b) $\frac{7}{12} =$

c) $\frac{16}{5} =$

d) $\frac{115}{33} =$

2) Determine a fração geratriz dos números abaixo:

a) $0,64 =$

b) $0,2\bar{2} =$

c) $0,03\bar{4} =$

d) $7.2 =$

e) $0,5\bar{6} =$

f) $2,7\bar{1}3 =$

A fim de complementar essas últimas generalizações feitas sobre os números racionais enunciaremos os resultados vinculados às atividades propostas.

Proposição 2.19 – Se $b_1b_2\dots b_n$ é um bloco de dígitos não 9 repetido, o método das divisões produz a expansão decimal:

$$\frac{b_1b_2\dots b_n}{\underbrace{99\dots 9}_n} = 0,\overline{b_1b_2\dots b_n}.$$

Prova:

Tomemos o caso particular, o do bloco $b_1b_2b_3 \neq 999$. Passando às sucessivas divisões euclidianas de $a = b_1b_2b_3$ por $b = 999$ e atentando aos respectivos restos:

- Escrevendo $10a = 10b_1b_2b_3 = 999b_1 + r_1$, isolando r_1 :

$$\begin{aligned} r_1 &= 10b_1b_2b_3 - 999b_1 \\ &= 10(100b_1 + 10b_2 + b_3) - 999b_1 \\ &= 1000b_1 + 100b_2 + 10b_3 - 999b_1 \\ &= 100b_2 + 10b_3 + b_1 \\ &= b_2b_3b_1 < 999, \text{ logo, } r_1 \text{ é resto;} \end{aligned}$$

- Escrevendo $10r_1 = 199b_2 + r_2$, isolando r_2 , então:

$$\begin{aligned} r_2 &= 10r_1 - 999b_2 = 10b_2b_3b_1 - 999b_2 \\ &= 10(100b_2 + 10b_3 + b_1) - 999b_2 \\ &= 1000b_2 + 100b_3 + 10b_1 - 999b_2 \\ &= 100b_3 + 10b_1 + b_2 \\ &= b_3b_1b_2 < 999, \text{ logo, } r_2 \text{ é resto;} \end{aligned}$$

- Escrevendo $10r_2 = 199b_3 + r_3$, isolando r_3 , então:

$$\begin{aligned} r_3 &= 10r_2 - 999b_3 = 10b_3b_1b_2 - 999b_3 \\ &= 10(100b_3 + 10b_1 + b_2) - 999b_3 \\ &= 1000b_3 + 100b_1 + 10b_2 - 999b_3 \\ &= 100b_1 + 10b_2 + b_3 \\ &= b_1b_2b_3 < 999, \text{ logo, } r_3 \text{ é resto;} \end{aligned}$$

Observemos que temos uma repetição cíclica dos restos produzidos pelo método, nesse caso:

$$r_0 = a = b_1b_2b_3 \rightarrow r_1 = b_2b_3b_1 \rightarrow r_2 = b_3b_1b_2 \rightarrow r_3 = b_1b_2b_3 \rightarrow \dots$$

consequência disso temos a expansão decimal:

$$\frac{b_1b_2b_3}{999} = 0,\overline{b_1b_2b_3} = 0,b_1b_2b_3b_1b_2b_3b_1b_2b_3\dots \quad \text{CQD.}$$

Teorema 2.20 – Toda dízima periódica simples $0,\overline{b_1b_2\dots b_n}$ não é 9-repetido, é a expressão decimal, obtida pelo método das divisões, de exatamente um número racional $0 < r < 1$. Ademais, este racional é dado pela fração ordinária:

$$r = 0,\overline{b_1b_2\dots b_n} = \frac{b_1b_2\dots b_n}{\underbrace{99\dots 9}_n} = \frac{b_1b_2\dots b_n}{10^n - 1}$$

Teorema 2.21 – Toda dízima periódica composta

$$r = 0,b_1b_2\dots b_n\overline{c_1c_2\dots c_p},$$

onde o bloco $c_1c_2\dots c_p$ não é 9-repetido, é a expansão decimal (obtida pelo método das divisões) de exatamente um número racional $0 < r < 1$. Ademais, este racional é dado pela fração ordinária:

$$r = \frac{b_1b_2\dots b_n}{10^n} + \frac{c_1c_2\dots c_p}{\underbrace{99\dots 90\dots 0}_p \underbrace{}_n}$$

ou, equivalentemente,

$$r = \frac{b_1 b_2 \dots b_n c_1 c_2 \dots c_p - b_1 b_2 \dots b_n}{\underbrace{99 \dots 90}_{p} \dots \underbrace{0}_{n}}$$

De forma resumida:

$$r = 0, b_1 b_2 \dots b_n \overline{c_1 c_2 \dots c_p} = \frac{b_1 b_2 \dots b_n c_1 c_2 \dots c_p - b_1 b_2 \dots b_n}{\underbrace{99 \dots 90}_{p} \dots \underbrace{0}_{n}}$$

Prova:

Tomemos um caso particular $0, b_1 b_2 \dots b_n \overline{c_1 c_2 \dots c_p}$, que permite-nos verificar a veracidade do teorema.

(1ª Parte) Se a dízima dada for a expansão decimal de um racional, então necessariamente este racional só pode ser dado pela fração ordinária do enunciado do teorema.

Supondo que a dízima dada tenha sido produzida fazendo a expansão de um racional $0 < a/b < 1$, teremos a seguinte sequência de igualdades:

$$10a = b_1 b + r_1, \text{ com } 0 \leq r_1 < b$$

$$10r_1 = b_2 b + r_2, \text{ com } 0 \leq r_2 < b$$

$$10r_2 = c_1 b + r_3, \text{ com } 0 \leq r_3 < b$$

$$10r_3 = c_2 b + r_4, \text{ com } 0 \leq r_4 < b$$

$$10r_4 = c_3 b + r_5, \text{ com } 0 \leq r_5 < b$$

Para acharmos a / b , iniciamos multiplicando a primeira igualdade por 10, o que nos dá: $100a = 10b_1 b + 10r_1 = (10b_1 + b_2)b + r_2$, ou seja:

$$\frac{a}{b} = \frac{b_1 b_2}{100} + \frac{r_2}{100b}$$

Para determinar o valor da última parcela, basta observarmos que, a partir da terceira igualdade acima, temos uma situação análoga à que encontramos na prova do teorema 2.20, de modo que seguramente podemos escrever:

$$\frac{r_2}{b} = \frac{c_1 c_2 c_3}{999},$$

e assim, finalmente:

$$\frac{a}{b} = \frac{b_1 b_2}{100} + \frac{r_2}{100b} = \frac{b_1 b_2}{100} + \frac{c_1 c_2 c_3}{99900} = \frac{b_1 b_2 c_1 c_2 c_3 - b_1 b_2}{99900}$$

(2ª parte) Verificaremos agora o candidato:

$$\frac{a}{b} = \frac{b_1 b_2}{100} + \frac{c_1 c_2 c_3}{99900} = \frac{b_1 b_2}{100} + \frac{1}{100} \cdot \frac{c_1 c_2 c_3}{999}$$

que tem como expansão decimal a dízima dada, $0, \overline{b_1 b_2 c_1 c_2 c_3}$.

Para isso, iniciamos observando que, como o bloco $\overline{c_1 c_2 c_3}$ é suposto ser não 9-repetido, teremos

$$0 < \frac{1}{100} \cdot \frac{c_1 c_2 c_3}{999} < \frac{1}{100}$$

Isso implica que a parcela $\frac{c_1 c_2 c_3}{999}$ só pode influenciar a expansão decimal de a/b a partir das casas dos milésimos. Esse fato mais a igualdade $b_1 b_2 / 100 = b_1 / 10 + b_2 / 100$ determinam que, com certeza, a expansão decimal da fração a/b dada, até a casa dos centésimos, é $a/b = b_1 / 10 + b_2 / 100 + \dots$, sendo que os dígitos a partir das casas dos milésimos serão determinados apenas pela parcela $c_1 c_2 c_3 / 99900$.

Da Proposição 2.19, sabemos que o método da divisão aplicando a $c_1 c_2 c_3 / 999$ gera uma sequência de dígitos que tem $c_1 c_2 c_3$ como período, e inicia na casa dos décimos. Conseqüentemente, esse método aplicado a $c_1 c_2 c_3 / 99900$ gera uma sequência de dígitos que tem $c_1 c_2 c_3$ como período, e inicia na casa dos milésimos. Podemos concluir afirmando que o método das divisões produz a expansão:

$$\frac{a}{b} = \frac{b_1 b_2}{100} + \frac{c_1 c_2 c_3}{99900} = 0, \overline{b_1 b_2 c_1 c_2 c_3}. \quad \text{CQD.}$$

Teorema 2.22 – Uma fração irredutível gera uma dízima periódica composta, se e somente se, seu denominador tem, com outros fatores, ao menos um dentre 2 e 5 como fator.

3 METODOLOGIA DE PESQUISA

O presente capítulo traz a formulação da nossa pergunta, a metodologia empregada na pesquisa, o contexto da pesquisa e como os dados foram obtidos e analisados.

3.1 Da Pergunta de Pesquisa e dos Objetivos

O ensino dos números racionais é amplo devido a seus significados e suas distintas representações. Por outro lado, a compreensão de seus conceitos, a maneira como são representados e suas particularidades em operá-los implicam dificuldades de aprendizagem que angustiam tanto os professores no âmbito de ensinar quanto os estudantes na ação de aprender.

Ao longo dos anos, dialogando com outros colegas professores e buscando novas maneiras de abordar os números racionais, temos utilizado de diferentes metodologias que aparentemente têm nos auxiliado a obter melhores resultados. No entanto, as dificuldades ainda se fazem presentes.

Motivados em querer saber a forma de pensar dos alunos e explorar com eles características dos números racionais, encontramos nas aulas investigativas juntamente com o uso do *software* de geometria dinâmica GeoGebra a possibilidade de atender nossos anseios. Então lançamos a seguinte pergunta:

De que modo uma proposta investigativa com o uso do *software* GeoGebra contribui para que os estudantes percebam características dos números racionais?

Com relação a essa pergunta, os objetivos específicos da nossa pesquisa são:

- a) Verificar como a utilização do *software* GeoGebra em um cenário investigativo pode contribuir para a construção do conhecimento e percepção das características dos números racionais;
- b) Apontar as potencialidades e restrições do *software* GeoGebra;
- c) Relatar e tentar compreender os raciocínios desenvolvidos pelos alunos.

Com os objetivos acima citados e buscando responder nossa pergunta, elaboramos uma sequência de atividades (descritas no capítulo 2), que foram aplicadas em uma turma regular. A partir dessa aplicação, construímos os dados que serão apresentados e analisados no capítulo 4.

3.2 Pesquisa Qualitativa

Entendemos que a pesquisa qualitativa vem ao encontro de nossos interesses, já que queremos saber como os alunos desenvolveram os seus raciocínios e as propriedades por eles percebidas durante as tarefas exploratórias. Conforme Goldenberg (2000, p. 14): “a preocupação do pesquisador não é com a representatividade numérica do grupo pesquisado, mas com aprofundamento da compreensão de um grupo social, de uma organização, de uma instituição, de uma trajetória etc”. Para Araújo e Borba (2013) a pesquisa qualitativa traz para o pesquisador dados mais descritivos.

Sobre características da pesquisa qualitativa, Bogdan e Biklen (2010) indicam cinco aspectos:

1) Na investigação qualitativa a fonte direta de coleta de dados é obtida no ambiente constituído pelo pesquisador, atendo-se ao contexto do local por acreditar ter a melhor compreensão das ações.

2) A investigação qualitativa é descritiva, o pesquisador tem preocupação em analisar os dados obtidos por meio de palavras e imagens, descrevendo os resultados da pesquisa por citações feitas com base nesses dados ilustrando e substanciando a apresentação.

3) Os investigadores qualitativos têm maior interesse na maneira como se desenvolveu o processo da pesquisa do que simplesmente pelos resultados ou produtos. A análise transcorre das atividades, procedimentos e interações diárias.

4) Os investigadores qualitativos buscam analisar os dados de forma indutiva, a descrição dos resultados é construída à medida que os dados particulares que foram recolhidos se vão agrupando.

5) O significado é elemento fundamental na abordagem qualitativa, os pesquisadores se interessam pelo ponto de vista da perspectiva dos participantes.

Em nossa pesquisa questionamos sobre as contribuições do GeoGebra em um cenário investigativo para a aprendizagem sobre números racionais, acreditamos que poderemos ter melhor compreensão dos efeitos mediante a sua aplicação no ambiente natural, ou seja, a sala de aula. De acordo com o desenrolar da aplicação, estaremos sendo testemunhas das ações dos alunos e das influências que tanto a investigação quanto a utilização do *software* repercutem em nossos educandos, e ao descrevermos esses fatos, à medida que os percebermos, teremos nas atitudes e falas dos alunos os principais dados a serem considerados na análise da metodologia empregada. Dessa forma, tomando os cinco itens anteriores apontados por Bodgan e Biklen (2010) é que vemos na pesquisa qualitativa a metodologia adequada para atingirmos nosso propósito de verificar as potencialidades do GeoGebra no ambiente investigativo do ensino sobre números racionais.

3.3 O Local e os Sujeitos da Pesquisa

Aplicamos nossa proposta de ensino no nosso local de trabalho, a Escola Municipal de Educação Básica Alberto Santos Dumont, situada na cidade de Sapucaia do Sul/RS. Essa instituição de ensino atende cerca 1200 alunos pertencentes ao bairro onde está localizada a escola, e também das comunidades vizinhas, sendo esses estudantes distribuídos nos três turnos - manhã, tarde e noite.

São participantes da pesquisa os alunos do oitavo ano do Ensino Fundamental, da turma identificada como 8^oC. A escola possui três turmas de 8^o ano, sendo essas turmas com rendimentos muito próximos uma das outras. O que determinou a escolha da turma 8^oC foi o encaixe nos horários quanto à disponibilidade do LABIN.

Essa turma é composta por 24 alunos tendo eles idades entre 13 e 16 anos, dos quais 5 estavam repetindo o 8^o ano. São estudantes que residem nas proximidades da escola, sendo a região situada na periferia da cidade de Sapucaia do Sul. São jovens de famílias humildes e de baixo poder aquisitivo. Conversando com a orientadora da escola, ficamos sabendo que oito desses alunos estavam somente sob tutela ou do pai ou da mãe, ou ainda com pessoas de menor grau de parentesco. A turma é agitada, mas sem ações que indiquem excessos ou indisciplina, ao contrário se mostram respeitosos entre eles e com o professor. O

rendimento escolar é regular, sendo que a maioria da turma apresenta desempenho insatisfatório em uma ou mais disciplinas.

3.4 Coleta e Análise dos Dados

Os dados foram coletados com base na aplicação da proposta de ensino apresentada no capítulo 2, a qual foi desenvolvida em seis encontros, que ocorreram duas vezes por semana entre o fim de outubro e o meio do mês de novembro de 2014.

Querendo observar e analisar as contribuições das aulas investigativas com a utilização do aplicativo GeoGebra, a proposta didática está focada na participação dos alunos, de modo que adotamos alguns meios de coleta de dados que favorecessem a nossa investigação. Abaixo passaremos a listá-los e a descrevê-los:

1) Notas de Campo: foram o instrumento que utilizamos para fazer os registros das observações durante os encontros. Conforme Bogdan e Biklen (2010, p. 152):

Consistem em dois tipos de materiais. O primeiro é descritivo, em que a preocupação é a de captar uma imagem por palavras do local, pessoas, ações e conversas observadas. O outro reflexivo – a parte que apreende mais o ponto de vista do observador, as suas ideias e preocupações.

Dessa forma, registrei em um caderno, as observações durante os encontros com os alunos. Tais anotações eram referentes aos estudantes quanto a suas atitudes, comentários e constatações feitas sobre as atividades e a utilização do computador e, ainda, dos aspectos que observamos sobre a abordagem investigativa e a utilização do *software* GeoGebra.

2) Filmagens: utilizamos duas câmeras filmadoras, situadas em dois extremos da sala de aula, a fim de filmar os encontros em sua integralidade. Pensamos em utilizar *softwares* de captura de tela e sons nos computadores do LABIN, mas como sistema operacional era Linux precisaria de suporte técnico para instalar aquele programa nas máquinas.

Esses recursos registraram atitudes e diálogos dos alunos, e também discussões coletivas das observações, respostas e descobertas obtidas durante as tarefas exploratórias. Utilizamos, ainda, nosso aparelho celular como filmadora, a fim

de termos um meio que nos permitisse circular entre os alunos e coletar dados por meio de diálogos diretos entre nós e o aluno, ou entre nós e um grupo de alunos.

A extração de dados por essa mídia foi feita parcialmente: à medida que íamos assistindo aos vídeos, observávamos ações que indicassem dados significativos para a análise, as pausávamos e repetíamos quantas vezes fossem necessárias para registrá-las no computador. Por vezes, os alunos estavam muito falantes, o que resultou em dificuldades para escutar o que diziam, então, confrontávamos as filmagens das duas câmeras para ter a real descrição do que estávamos visualizando e escutando. Buscamos observar o que os alunos apontavam sobre o uso do *software* GeoGebra naquilo que as atividades lhes exigiam e no que observavam de regularidades.

As cenas que julgamos procedentes para responder a pergunta da nossa pesquisa estão transcritas no capítulo 4.

3) Produção Escrita dos Estudantes: para os alunos foram impressos e entregues perguntas, sendo elas respondidas mediante a realização das atividades exploratórias no computador (Capítulo 2). Após o término da(s) atividade(s) e tendo os alunos respondido tais perguntas eles as compartilharam com os demais colegas durante os momentos de debate coletivo, não podendo eles apagar suas anotações, pois as mesmas foram objeto de análise. Trechos desse material aparecem no capítulo 4, na apresentação e análise dos dados.

Em nossa pesquisa, utilizamos as múltiplas fontes de coleta de dados descritas acima e, a partir da articulação das mesmas, passamos a perceber e descrever as características do cenário investigativo tecnológico, de como os alunos se portavam nesse tipo de ambiente, e ainda a sinalizar as potencialidades e limitações provenientes tanto do ambiente investigativo como da utilização do computador, em especial passamos a analisar as potencialidades do *software* de geometria dinâmica GeoGebra. Borba e Loiola (2013), baseados em Alves-Mazzotti (1998) e Lincoln & Guba (1985), denominam essa articulação entre múltiplas fontes de dados como “triangulação”, a qual é de fundamental importância para dar credibilidade à pesquisa.

Na nossa apresentação e análise de dados, optamos por organizá-las em seções, cada uma delas referente a um encontro. Essas seções foram divididas em dois momentos: o primeiro se destinou a apresentarmos os dados coletados utilizando como base uma narrativa do encontro e fazendo considerações gerais à

medida que elas foram sendo descritas; no segundo momento passamos a detalhar aquelas observações que para nós contribuíram para a resposta à nossa pergunta. O capítulo seguinte se destina a apresentação e análise desses dados.

4 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

Neste capítulo, apresentaremos os dados da pesquisa, os quais foram construídos durante o desenvolvimento da prática de ensino descrita no Capítulo 2, juntamente a uma análise dos mesmos. Baseado em Brocardo, Oliveira e Ponte (2003), o andamento dos encontros com os discentes foi organizado seguindo sempre a sequência de três momentos: 1º) em duplas ou trios os estudantes exploravam as situações propostas utilizando o recurso computacional, 2º) com base na exploração feita, os estudantes respondiam perguntas e 3º) compartilhamento e discussão coletiva das respostas.

Faremos a apresentação e a análise em três etapas: a primeira se referindo a construção e divisão do segmento unitário, para a construção das frações decimais; a segunda, voltada às frações que geram dízima periódica; e a terceira, para fazer o fechamento trabalhando, simultaneamente as frações decimais e geradoras de dízima periódica.

4.1 Da Abordagem sobre as Frações Decimais

4.1.1 Dados e Considerações do Primeiro Encontro: 24/10/2014

A primeira aula foi destinada à apresentação do *software* GeoGebra aos estudantes, à construção de um segmento unitário dividido em 10 partes e, em seguida, à análise de perguntas sobre frações determinadas pela partição do segmento.

É característica dos jovens aprenderem sobre as tecnologias (celulares, microcomputadores, *tablets* etc.) na medida em que as vão manuseando. Dessa forma, tão logo os direcionamos ao Labin e lhes apresentamos o *software* GeoGebra, determinamos um tempo de 10 minutos para que eles pudessem explorá-lo e amenizassem o sentimento de ansiedade que também é característico nessa faixa etária, fato esse comprovado na disputa para ver quem primeiramente

da dupla mexeria no *mouse* do computador, ou nos recorrentes pedidos que um colega fazia ao outro para que lhe desse a vez.

Percebemos que muitos dos alunos se propuseram a desenhar os elementos geométricos indicados nos ícones da barra de ferramentas. Alguns mais curiosos conseguiram movimentar com o *mouse* os objetos que haviam construído. Foi um momento lúdico em que o pedido por intervenção e ajuda do professor inexistiu.

Passado esse momento de reconhecimento, o nosso plano de aula seguiu para a construção de um segmento unitário dividido em 10 partes iguais. Nessa atividade, os alunos utilizariam um conhecimento que eles já haviam desenvolvido na sala de aula com papel, lápis, régua, esquadros e compasso: a divisão de um segmento em partes iguais aplicando o Teorema de Tales.

Estando recentemente os educandos aprendendo a utilizar o *software*, adotamos o procedimento de ir orientando eles nessa primeira atividade. De modo passo a passo, a sequência de comandos foi sendo apresentada em uma ampla projeção da tela do computador que ia sendo exibida no quadro branco da sala.

Assim, começamos com a construção de um segmento unitário contido no eixo das abscissas do plano cartesiano². Obtido o segmento, o plano cartesiano foi ocultado, de modo que apenas o segmento ficasse a mostra.

A partir desse momento, é importante relatar que, antes de apontar qual comando do GeoGebra deveria ser utilizado, perguntamos para os alunos que passos eles tinham realizado na sala de aula com a régua, compasso e esquadros. Nossa intenção foi fazer com que eles, ao repetirem algo semelhante que já haviam feito em sala de aula manualmente, revisassem e fixassem as propriedades do Teorema de Tales, bem como notassem que tudo aquilo que havia sido feito manualmente agora poderia ser feito mediante a utilização do computador e do *software*.

Inicialmente, quando dissemos para os alunos que eles deveriam fazer a divisão do segmento em 10 partes, muitos pronunciaram um “óóóhhh! Em quantas?”, entoando algo que seria muito trabalhoso de se fazer, pois os mesmos já haviam feito manualmente um segmento dividido em 5 partes. Mas isso foi tão somente um alarde inicial. Em seguida, foi com satisfação verificar a espontaneidade

² Conforme comentamos no Capítulo 2 o segmento unitário poderia ter sido qualquer, isto é, não precisaria ser construído sobre o eixo das abscissas. A escolha por fazer essa construção está relacionada às tarefas nas quais os estudantes devem analisar o valor numérico associado a cada ponto da reta, o que é fornecido pelo software para os pontos sobre o eixo.

com que os alunos passaram a participar da aula. Pronunciavam naturalmente aquilo que deveria ser feito.

Professor: - Qual é a primeira coisa que a gente faz?

Aluna G2: - Compasso.

Professor: - O compasso primeiro?

Alunos em coro: - Não, é a reta.

Inicialmente gostaríamos de fazer uma observação sobre o caso da aluna G2. A aluna que, talvez por ser encabulada em participar das aulas e ter dificuldades em Matemática, havia pouco se manifestado nas aulas durante o ano, agora, ao questionarmos a turma, nos surpreendeu a atitude dela em ser a primeira a se manifestar, e ainda, mesmo ela tendo dado a resposta incorreta, continuou a fazer a atividade como se nada houvesse acontecido. O comportamento dos demais alunos também é algo a salientar. Geralmente há alunos que fazem comentários de desprezo quando um colega comete um equívoco, e naquele instante isso foi algo totalmente ausente. Numa visão geral sobre a turma, vimos que as atenções deles estavam voltadas para aquilo que estavam fazendo no computador.

Nesse primeiro momento, já pudemos perceber o engajamento de todos os alunos na realização das tarefas. Também observamos a participação da aluna G2 e a participação amigável dos demais alunos à medida que interagem tanto na dupla ou trio ao qual pertenciam, quanto coletivamente ao serem questionados, conforme poderemos ver no decorrer desse capítulo.

Na primeira atividade realizada passo a passo com os alunos, pudemos verificar se eles conseguiam também adivinhar qual ferramenta deveria ser utilizada. Houve um momento da construção, em que os alunos deveriam marcar o ponto de intersecção entre uma reta e a circunferência. Diante disso, dentro das opções de pontos fornecido pelo GeoGebra, os questionamos:

Professor: – O que nós colocamos agora?

Aluno A1 – Ponto sobre objeto?

Alguns alunos concordaram com a afirmação.

Professor: - Ponto em objeto? Vocês têm certeza?

Professor: - Como colocamos esse ponto aqui? Que ponto é esse? [Se referindo o ponto de intersecção entre um círculo e a reta].

Aluna M1: - Intersecção entre dois objetos.

Com o professor indicando na projeção que aquele ponto a ser colocado deveria pertencer aos dois objetos, a aluna M1 analisou o menu e percebeu que o *ponto entre dois objetos* era a melhor das opções oferecidas, e assim indicou corretamente o procedimento.

Seguimos a obtenção do segmento, intercalando ora orientações via projeções, ora intervenções mais pontuais para alunos que encontravam mais dificuldades. Os alunos mais curiosos, ao tomar a atitude de analisarem e experimentarem os comandos para a realização dos passos que se seguiam, passaram a ter certa independência na realização da tarefa; olhavam e prestavam atenção no professor e na projeção apenas para confirmarem se estavam ou não realizando os procedimentos corretamente. Tivemos dois trios de estudantes acusando o término da construção antes dos demais, até mesmo antes do professor concluir todos os passos via projeção.

O grupo formado pelos alunos G1, W1 e W2 informou ao professor que já haviam terminado a divisão do segmento e, alguns minutos depois, o grupo formado por D1 e R1 também acusou o término da tarefa. Porém ao analisarmos a imagem obtida por este último grupo, os próprios alunos perceberam uma desconformidade:

Aluno D1: Oh professor, dá para fazer de novo?

Professor: Não, não, esperem um pouquinho (no sentido para aguardarem os demais).

Aluno D1: A gente fez a mais [se referindo às partes].

Professor: Quantos vocês fizeram?

Aluno R1: - Onze.

Como podemos perceber, os alunos de certo modo haviam terminado. No entanto, o pedido para fazer novamente, na verdade, era para reparar um erro que haviam cometido. Podemos constatar nas faces dos alunos os semblantes de como se tivessem feito alguma traquinagem, nos permitindo fazer a leitura de que aquela falha não representava para eles um problema, pelo contrário, demonstraram que haviam gostado de realizar a construção e que o erro cometido não passou de uma afobação em querer terminar antes dos outros a tal tarefa.

Foi motivador poder ver os alunos mostrarem-se envolvidos com a aula, e interagirem entre si com perguntas sobre a exploração do GeoGebra e sobre a atividade. Segundo Brocardo, Oliveira e Ponte (2003), podemos dizer que obtivemos o cenário investigativo, os alunos se sentiram a vontade, puderam conversar com

colegas e professor tendo suas ideias valorizadas, por meio de formulação de perguntas e a procura por explicações, os alunos se colocaram como responsáveis pelo seu processo de aprendizagem. Para nós, essas atitudes foram indícios de que os estudantes passariam a participar ativamente das aulas.

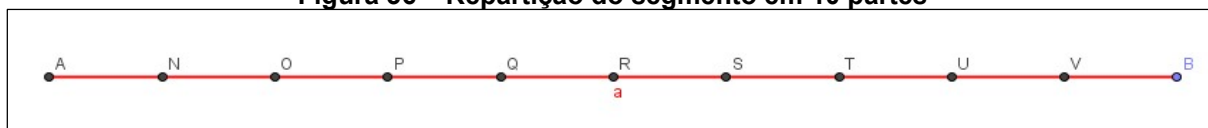
Outros alunos apresentaram equívocos semelhantes a D1 e R1, como a aluna P1 que também havia feito 11 partes, pois havia utilizado o compasso uma vez mais que o necessário; e também a aluna M2 que havia feito 9 partes, pois havia contado também o ponto A, o qual deveria ser desconsiderado.

Em meio a esse tempo, ao transitar pela sala, constatamos a aluna G2 ser auxiliada pelos alunos G1, W1 e W2 que já haviam terminado a tarefa. A aluna que havia feito um pequeno comentário saindo de um estado de inércia, agora continuava dando demonstração do comprometimento na aula de matemática, aceitando que colegas a ajudassem a executar os comandos.

Para Kenski (2010, p.68): “a possibilidade de interação entre professores, alunos, objetos e informações que estejam envolvidos nos processos de ensino redefine toda a dinâmica da sala de aula e cria novos vínculos entre os participantes”. Já de início, pudemos averiguar esses novos vínculos. Com a adoção da aula investigativa e do uso da tecnologia, por meio do uso do laboratório de informática, constatamos mudanças de comportamento dos alunos. O fato de usarem as tecnologias despertou neles o interesse, já que se tratava de um aparelho de que gostam e que está tão presente em seu cotidiano. Assim, exploraram com entusiasmo alguns recursos do *software* GeoGebra.

Uma vez que todos haviam concluído a divisão do segmento unitário em dez partes (Fig.36), foi solicitado que os alunos respondessem a três questões:

Figura 36 – Repartição do segmento em 10 partes



Fonte: Próprio autor

Quadro 1 - Questões

- 1) Lembrando das frações, que você já estudou tanto no 6º quanto no 7º, como fica representado cada parte do segmento \overline{AB} ?
- 2) Observando o segmento vermelho de origem em A e que se estende até o terceiro ponto que você marcou o que você pode dizer a respeito de sua medida e da posição do ponto?
- 3) Qual é a medida do segmento limitado pelo segundo e sétimo pontos?

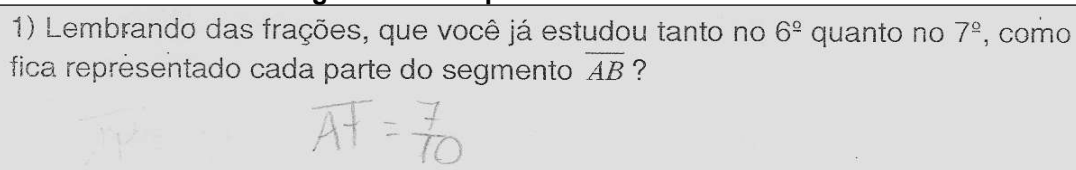
Fonte: próprio autor.

Antes que os educandos começassem a responder, o professor encarregou-se de fazer uma leitura prévia das questões. Em seguida foi dado um tempo considerável para que eles pudessem analisar, dialogar entre os colegas e assim escrever suas respostas.

Percebendo que a maioria dos alunos já havia respondido as perguntas, o professor e a turma passaram a expor e refletir sobre as respostas dadas. O professor pediu ainda, que eles mantivessem as respostas dadas, não apagando-as mesmo que estivessem equivocadas, pois as mesmas seriam primordiais para a pesquisa, e também para que pudessemos como turma entender como os colegas haviam compreendido as questões.

Na primeira questão a resposta predominante foi 1/10. Daqueles que escreveram outros resultados, destacamos aquelas que nos chamaram a atenção:

Figura 37 – Respostas dos alunos R2 e M3



Fonte: Próprio autor

Professor: - Por que vocês pensaram em sete sobre dez?

Aluno R2: - É que o primeiro segmento é o A e daí tem que contar.

Professor: - E o que vocês contaram para chegar no sete sobre dez?

Aluno R2: - Contamos até o T (que seria o sétimo ponto marcado).

Professor: - E o porquê do 10?

Aluna M3: Por que são dez letras.

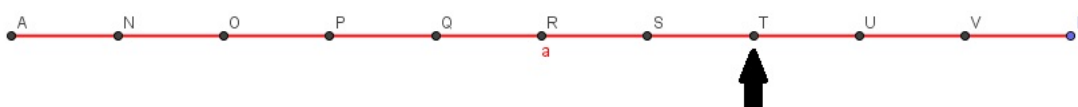
Aluno R2: Por que são dez pontos.

Professor: E o que faz esses dez pontos.

Alunos em coro: - Dividem.

O objetivo desta primeira questão era que os estudantes percebessem que cada segmento que particiona o segmento \overline{AB} , tem como medida, $1/10$ da medida de \overline{AB} , se referindo a uma parte do todo. Neste caso, tínhamos a expectativa de trabalhar com a “personalidade” de Fração, conforme descrevem Allevato e Onuchic (2008), em um contexto de medida. Ao responderem a pergunta, esses alunos não tomaram uma parte em comparação ao segmento todo, mas sim um ponto e, a partir dele, formularam sua resposta. Nesse caso, com base em Allevato e Onuchic (2008), podemos inferir que a fração indicada pelos alunos caracteriza-se pela “personalidade” de *ponto racional*, isto é, o número que ocupa um lugar bem definido na reta numérica e, reciprocamente, todo ponto racional corresponde um número racional. Apesar de os alunos não terem interpretado a pergunta como queríamos, ao confirmarmos na imagem a localização do ponto T, observamos que eles escreveram a fração correspondente à localização do ponto no segmento, o que sugere compreensão no que se refere à escrita da fração em relação à posição do *ponto racional*.

Figura 38 – Indicação dada por R2 e M3



Fonte: Próprio autor

Já o aluno L1 respondeu o seguinte:

Figura 39 – Escrita do aluno L1

1) Lembrando das frações, que você já estudou tanto no 6º quanto no 7º, como fica representado cada parte do segmento \overline{AB} ?

$$\frac{11}{9}$$

Fonte: Próprio autor.

Aluno A1 – Nós colocamos onze sobre nove.

Professor: - Por que vocês colocaram onze sobre nove?

Aluno L1: - Porque são onze pontos que tem nove.

Professor: - O que vocês consideraram?

Aluno L1: - As pontas têm onze e no meio nove.

Nessa resposta, primeiramente os alunos tomam o total de pontos marcados no segmento \overline{AB} , no caso 11 pontos. Em seguida, excluindo os pontos das extremidades, eles consideraram somente os 9 pontos marcados que dividiram o segmento em 10 partes iguais. Segundo a classificação encontrada em Allevalo e Onuchic (2008), a *personalidade* mais próxima para a representação apresentada pelos alunos parece ser a de *razão*. Dependendo de já terem visto e lembrado desse conceito, os alunos poderiam ter enunciado a fração escrita como a razão entre o total de pontos no segmento e os pontos que dividiram o segmento em partes iguais.

O aluno L1 fez relação com as quantidades de pontos, enquanto R2 e M3 priorizaram a ordem dos pontos tendo no extremo esquerdo do segmento o ponto de referência. Esses alunos não tiveram a interpretação esperada da pergunta, que fazia referência a uma das partes em comparação ao segmento, isto é, a parte do todo, ou ainda, a *personalidade de fração*.

Ao termos formulado a pergunta, queríamos que os alunos tomassem o tamanho ou medida de uma das partes e a comparassem com o segmento \overline{AB} , do mesmo modo como eles provavelmente faziam nos anos anteriores com figuras, tomando parte do todo. No entanto, fazendo uma releitura da questão, ao enunciarmos “cada parte do segmento \overline{AB} ”, cremos que não havíamos deixado claro para os alunos que queríamos que eles tomassem apenas uma das partes e a comparassem com \overline{AB} . Assim, pela escrita “cada parte”, por exemplo, pode ser entendido como tomar duas partições e essas constituírem uma das partes de \overline{AB} , ou ainda, tomar pontos de \overline{AB} que constituem uma de suas partes. Dessa forma, quando temos respostas diversificadas para uma mesma pergunta, cabe-nos refletir sobre o que queremos como resposta e a forma com que enunciamos a questão. Talvez possíveis alterações na escrita das perguntas propostas sejam necessárias, as quais serão propostas no produto final deste trabalho. Logo, ao estarmos analisando as repostas dos alunos, estaremos também reavaliando nossos questionamentos, bem como, as atividades propostas.

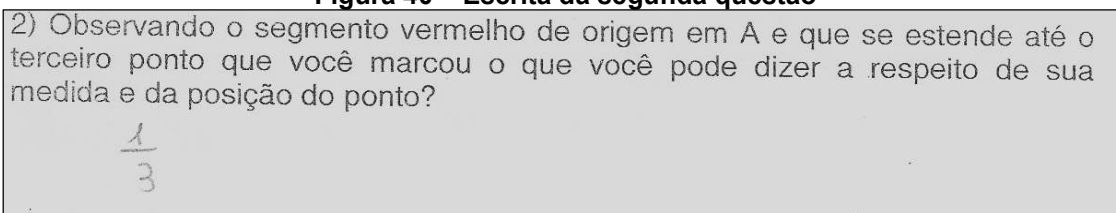
Tendo escutado e discutido as questões, e considerando que a maioria dos alunos havia demonstrado uma justificativa lógica para suas respostas, houve o momento em que tais respostas foram retomadas para indicarmos a afirmação correta. Para isso, fizemos apontamentos que esclareceram os equívocos cometidos e acima apresentados, comparando-os com a resposta indicada corretamente pelos

demais alunos, isto é, a fração de 1/10 para cada parte do segmento. Diante disso, pudemos não só convencer os alunos sobre a resposta adequada, mas também fazê-los entender os equívocos cometidos.

Na questão 2, junto a personalidade de *fração* indicada pela palavra *medida* colocamos a palavra *posição* indicando a personalidade de *ponto racional*, na expectativa dos estudantes verificarem que um racional teria mesma escrita para representar personalidades diferentes. Aqui a resposta de maior ocorrência foi 3/10.

Dentre as demais respostas, encontramos a resposta 1/3 em dois grupos.

Figura 40 – Escrita da segunda questão



Fonte: Próprio autor

Professor : O que vocês pensaram em relação a 1/3?

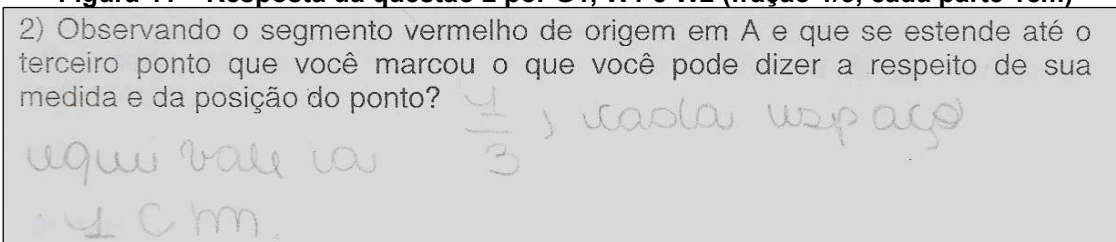
Aluno V2: A, e pegar o P, que é o terceiro.

Aluno L1: O A é o número 1 e P é o 3.

Observamos que a resposta pertence aos mesmos alunos que haviam, na questão anterior, respondido 11/9. Verificamos que eles mantiveram suas atenções voltadas à observação dos pontos. O fato dos pontos A e o terceiro ponto, no caso o ponto P, terem sido citados no enunciado, os participantes L1 e V2 tentaram relacioná-los entre si de alguma forma, sendo que tínhamos expectativa de que eles tomassem o segmento \overline{AP} e o comparassem com \overline{AB} , e a P indicassem a sua posição no segmento.

Como dissemos antes, essa mesma resposta 1/3 foi dada por outro trio de alunos, então, fomos até onde eles estavam sentados e constatamos:

Figura 41 – Resposta da questão 2 por G1, W1 e W2 (fração 1/3, cada parte 1cm)



Fonte: Próprio autor

A resposta dada pelos alunos G1, W1 e W2, foi justificada por W2. Ele nos relatou que o grupo supôs que como o segmento \overline{AB} fora dividido em 10 partes iguais, cada uma dessas partes poderia assumir a medida de 1cm. Em seguida, tomaram o segmento \overline{AB} só até o terceiro ponto marcado, o que deu a eles um total de 3 partes, então assumindo essa parte agora como o todo, cada parte equivaleria a $\frac{1}{3}$. Podemos observar que o trio respondeu tendo restringido a observação do segmento até o terceiro ponto marcado. Eles mantiveram a linha de pensamento (parte/todo), considerando as três partes como o todo.

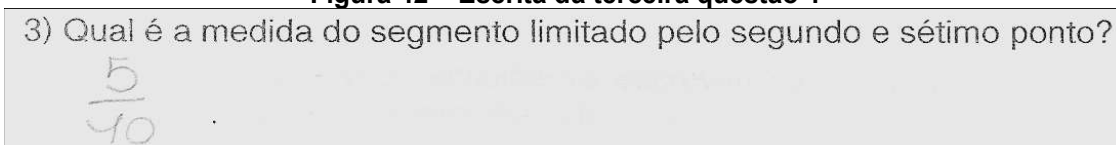
Ainda, observamos que os alunos, em relação à palavra medida, pensaram que deviam expressá-la num sistema de medida do conhecimento deles, então a cada segmento atribuíram a medida de 1cm. Aqui parece que houve a intenção dos estudantes em vincular algo do conhecimento deles com aquilo a ser explicado, passando assim, a atividade ter significado para eles. A Figura 41 acima confirma a intenção da utilização da unidade de medida, e conforme os PCNs (1998, p. 37):

O significado da atividade matemática para o aluno também resulta das conexões que ele estabelece entre os diferentes temas matemáticos e também entre estes e as demais áreas do conhecimento e as situações do cotidiano.

Ao relacionar idéias matemáticas entre si, podem reconhecer princípios gerais, como proporcionalidade, igualdade, composição, decomposição, inclusão e perceber que processos como o estabelecimento de analogias, indução e dedução estão presentes tanto no trabalho com números e operações como no trabalho com o espaço, forma e medidas.

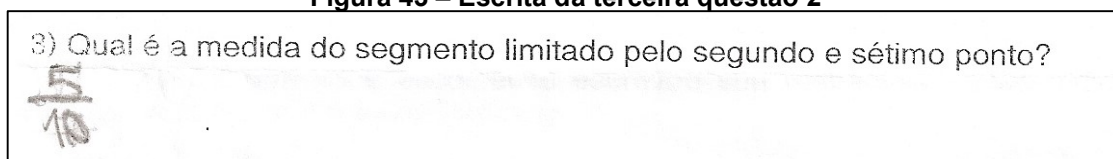
Cognitivamente, quando deparamos com uma pergunta ou problema do qual queremos tratar, buscamos em nossa memória algo que conhecemos e que talvez possa ser utilizado para responder ou entender aquilo que se quer averiguar.

Figura 42 – Escrita da terceira questão 1



Fonte: Próprio autor

Figura 43 – Escrita da terceira questão 2



Fonte: Próprio autor

Na questão 3, os alunos G1, W1 e W2, dizem ter tomado os segmentos entre o segundo e sétimo ponto, obtendo cinco segmentos dos 10, daí dos 5/10 (Fig. 42). Já os alunos A1, L1 e V2 (Fig. 43) relataram que antes deles terem respondido 5/10, haviam escrito 2/7, repetindo a estratégia de observar as posições dos pontos no segmento. Ainda, segundo os alunos, eles modificaram a resposta por influência das respostas dos demais colegas. Nessas três questões iniciais, esses alunos fizeram uso da mesma estratégia, considerar pontos, de modo a ter uma quantidade total e outra parcial e colocá-las em representação de fração, tendo representações próximas à *personalidade* da *razão*, embora eles não demonstrem ter conhecimento ou a intenção de usar a definição literal de razão.

Também presenciamos a aluna P1 dar sua resposta por extenso para a primeira questão. Não conseguimos constatar relação alguma ao tema fração. A aluna, conforme podemos constatar na sua escrita (Fig. 44), literalmente escreveu aquilo que ela havia construído com a sua colega M2.

Figura 44 – Escrita descritiva

1) Lembrando das frações, que você já estudou tanto no 6º quanto no 7º, como fica representado cada parte do segmento \overline{AB} ? *Fica representado como o início de um segmento, que se divide entre partes.*

Fonte: Próprio autor

Ao conversarmos com as alunas, elas esclareceram que não lembravam muito sobre frações e que estavam receosas em escrever algo não condizente, assim resolveram descrever o objeto, ou seja, o que a construção havia representado para elas. Conforme a resposta dada por essas alunas, não nos sentimos seguros em fazermos comentários sobre o que elas entendiam ou não de frações, pois um simples exemplo poderia trazer a elas recordações, e então, passariam a abordá-las corretamente. Por outro lado, o diálogo que tivemos com elas fez com que verificássemos a sua vontade em querer responder as perguntas.

Observamos também que os alunos tiveram essa mesma dificuldade de escrever as repostas que justificariam o raciocínio utilizado. No entanto, isso é compreensível. Brocado, Oliveira e Ponte (2003) alertam para o surgimento de possíveis problemas em aula, quando colocamos os alunos diante dos dois fatores: trabalho em grupo e investigação matemática. Trata-se de uma metodologia nova para os estudantes, ao qual ainda não estão acostumados. A maioria dos alunos

disse não saber como transcrever para o papel a maneira com que haviam pensado a questão. Não é para menos, uma vez que nós professores muitas vezes condicionamos os alunos a responderem com respostas “certas” as perguntas, hábito herdado de uma formação que já se faz ultrapassada.

Sendo a aula organizada em duplas, trios ou quarteto de alunos, o momento de discussão foi essencial para que nós pudéssemos averiguar os raciocínios que os alunos tiveram para responder cada questão, algo que seria dificilmente possível se tivéssemos apenas tomado a escrita deles, pois muitos encontravam dificuldades em escrever aquilo que pensavam pois não estavam acostumados a essa nova metodologia de aula.

Quando uma dupla ou trio tomava a iniciativa de expor a sua maneira de pensar, causava uma cadeia de reações nos colegas, que se sentiam encorajados e em seguida davam suas contribuições para o debate. Dessa forma, a medida que os alunos iam perdendo a timidez, ganhávamos em participação.

Mediante o que os estudantes descreviam em suas falas podíamos compreender o modo com que haviam pensado e tratamos com relevância tanto as respostas corretas como as erradas, confrontando-as e assim podendo retificar os erros cometidos pela forma equivocada que haviam pensado com o raciocínio correto exposto nas respostas dadas por outros colegas. Exemplificamos isso, mediante o diálogo obtido na abordagem da questão 3.

Professor: - Qual é a medida do segmento limitado pelo segundo e sétimo ponto?

Alunas C1 e G1 ao mesmo tempo: - Cinco décimos.

Aluno R2: - Dois sétimos.

Professor: - Apareceram duas frações o dois sétimos e o cinco décimos.

Aluno N1: - Eu coloquei cinco sextos.

Professor: - O cinco sobre seis.

Aluno R2: - O cinco décimos está mais certo.

Professor: - Qual é o certo agora?

Aluno R2: - O cinco décimos ali professor, porque dai tem, fora daqueles dali que tão dentro tem cinco.

Professor: - Isso! A ideia correta é o cinco décimos. Quantos pedacinhos aqui nós temos (entre o segundo e o sétimo ponto do segmento) ?

Alunos: - Cinco.

Professor: - Então nós temos cinco pedacinhos de um total de quantos?

Alunos: - Dez.

Professor: - Agora a parte que me interessa. Por que o cinco sextos e o dois sétimos?

Aluno D1: A e B os dois primeiros o A e o B (pontos), depois o C e o D daí tem sete.

Professor: - Entendi! Dois por causa dos dois primeiros pontos, e sete por causa do sétimo ponto.

A ideia deles, estão seguindo uma ideia de raciocínio. Qual foi a primeira linha de raciocínio deles para a primeira resposta? Quando eles colocaram dois décimos, digo dois sétimos, desculpa, é porque eles estavam pensando lá em um terço. Quando eles pensaram nesse um terço, eles pegaram o primeiro ponto e o terceiro, certo? O primeiro de três. E agora, eles estão pensando assim, o segundo de sete, nesse sentido. Isso?

Aluno D1: - Ok.

Professor: - Então, na linha de raciocínio deles estão seguindo uma lógica. E é a lógica certa?

Aluno W1: - Não.

Os demais concordam com W1 gesticulando suavemente a cabeça.

Professor: - Em se tratando de frações, de trabalhar frações corretamente, até não, mas se tratando de linha de raciocínio está seguindo uma lógica. São formas diferentes de pensar, mas nós sempre vamos prezar pela forma correta.

- Então a forma correta para a questão número três é?

- Alunos: - Cinco décimos.

Propusemos com isso, a valorização do pensar do aluno, mostrando-os que temos o que aprender com os nossos equívocos, e ainda, como professor termos a possibilidade de desfazer uma ideia errada daquilo que antes havia sido compreendido.

Com os diálogos que tivemos, conseguimos identificar alguns traços das distintas *personalidades* das frações descritas por Allevalo e Onuchic (2008). Entretanto, em geral, os alunos deram ideias superficiais sobre frações, demonstrando esquecimento de seu conceito, por um lado, mas dando vestígios de compreensão por outro. Tanto as frações descritas corretamente quanto as

equivocadas foram justificadas pelos alunos, o que permitiu que pudéssemos entender o seu raciocínio, bem como ajudá-los a perceber os equívocos cometidos. Isso é algo extremamente relevante nas aulas investigativas, uma vez que, nesse tipo de abordagem, propõe-se que os estudantes avancem em suas análises, levantando hipóteses e conjecturas. Dar espaço para que compartilhem suas ideias justificando-as, segundo Brocardo, Oliveira e Ponte (2003), é fundamental para que tenham um entendimento mais valioso do que significa investigar, e também, para que desenvolvam a capacidade de comunicar matematicamente e poder refletir sobre o seu trabalho e o seu poder de argumentação. Observamos que, não havíamos ainda, no ano letivo, tido tamanha participação por parte dos alunos.

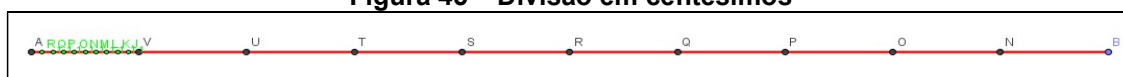
Ainda nessa aula, retomando a utilização do computador e do *software* GeoGebra, pedimos para os alunos que tomassem uma das dez partes do segmento construído, e subdividissem essa parte em outras dez partes menores e iguais, usando os mesmos comandos que haviam utilizado anteriormente. Dessa vez, deixamos os alunos mais independentes na realização da tarefa, observando-os de longe e nos aproximando quando solicitado ou quando percebíamos dificuldades diante a tarefa. Tal atividade se estendeu à aula seguinte.

4.1.2 Dados e Considerações do Segundo Encontro: 29/10/2014

Na aula anterior os alunos construíram um segmento no GeoGebra e o dividiram em dez partes iguais, e estabelecemos as frações com o denominador dez. No final do encontro encaminhamos a eles a tarefa de tomar uma das divisões e dividi-la em outras dez partes, assim, como haviam feito anteriormente no segmento \overline{AB} . Esse encontro então deteve a obtenção e discussão de frações com denominador cem. O leitor deve perceber aqui nossa intenção do encaminhamento dado a definição das frações decimais.

Tendo ainda os alunos que terminar a tarefa proposta na aula anterior, o encontro iniciou com a retomada no GeoGebra do arquivo contendo o segmento que haviam feito. Ou seja, dividiram uma das partes do segmento em dez partes, sinalizados por pontos verdes como foi sugerido, obtendo uma imagem similar à Figura 45.

Figura 45 – Divisão em centésimos

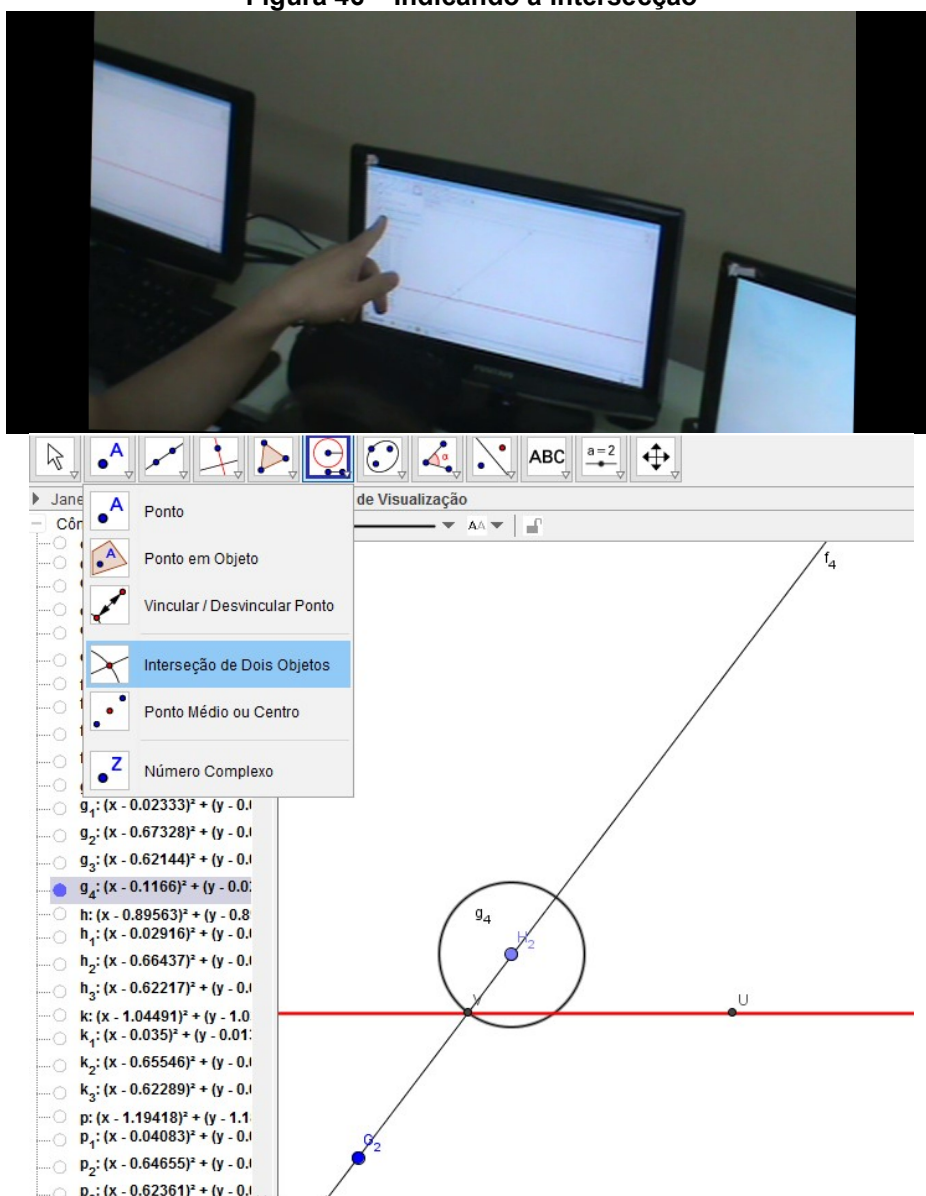


Fonte: Próprio autor

Foi comum percebermos algumas ocorrências na execução das ações no computador, e mesmo que percebíamos essas dificuldades nos alunos, aguardávamos para vermos se eles seriam capazes de avançarem sem o nosso auxílio. Em grande parte, os alunos conseguiram sanar suas dúvidas; a ação de refazer no computador e o trabalho em equipe foi determinante para a execução de cada etapa da construção.

Por exemplo, os alunos G1, W1 e W2, ao selecionarem a ferramenta compasso para determinar no segmento construído a medida do segmento menor, haviam esquecido que, uma vez fixada a circunferência deveriam colocar um ponto de intersecção entre a reta de apoio e a circunferência. Com isso, ao selecionarem novamente o compasso para continuar representando na reta essa mesma medida ficavam sem o ponto de referência. Após refletirem sobre esse empecilho, deram-se conta do que deveria ser feito. Abaixo temos a imagem (Fig. 46) e o pequeno diálogo que ilustra essa situação, isto é, o ponto de intersecção que foi colocado no encontro da circunferência e a reta.

Figura 46 – Indicando a intersecção



Fonte: Próprio autor

Aluno W1: Ah! Entendi.

Aluna G1: É o ponto.

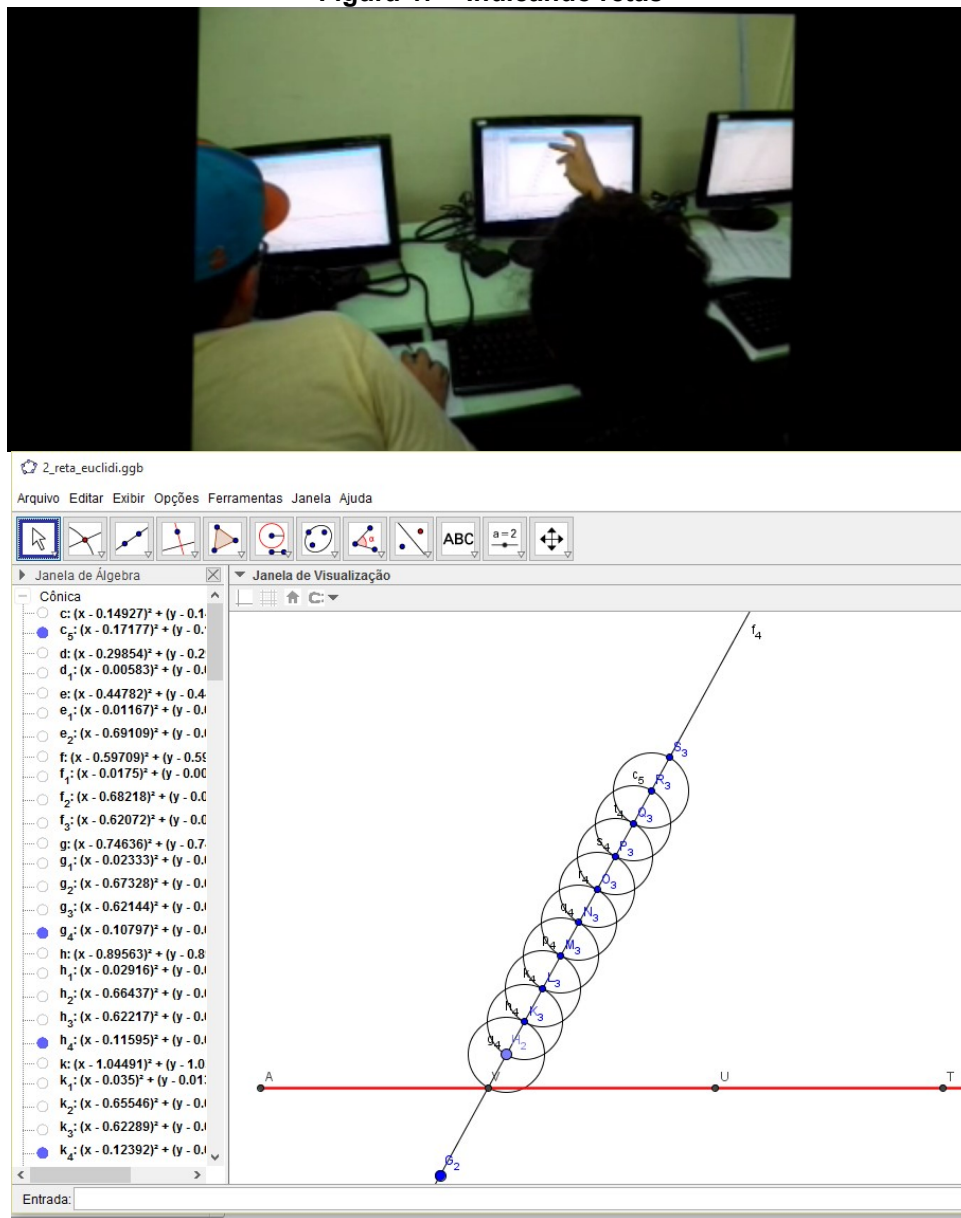
Aluna G1: Ponto de que?

Aluno W1: Intersecção de dois objetos (sinaliza conforme a imagem acima).

Já os alunos M1, M3 e R2, que haviam trabalhado em trio na aula anterior, agora faziam a tarefa em dois computadores, onde a aluna M3 ficava auxiliando enquanto M1 e R2 terminavam a construção. Vimos que a aluna M1 parava por vezes na tentativa de lembrar o que deveria ser feito, e a estratégia por ela adotada era questionar o colega R2 e o aluno L1 do outro grupo, que estavam ao seu lado. Notamos que a aluna sabia o que deveria ser feito, pois naquele momento ela

estava adiantada em relação aos alunos L1 e R2. Assim, o que ela não lembrava eram alguns comandos que deveriam ser selecionados, como podemos indicar na cena abaixo (Fig. 47).

Figura 47 – Indicando retas



Fonte: Próprio autor

Aluna M1: - O que eu coloco daqui até aqui? (se referindo à reta que deveria ser colocada entre dois pontos que ela sinalizou com a mão)

Aluno L1: - Só reta.

Aluna M1: - Agora como eu puxo para cá? (ela queria traçar as retas paralelas a reta anterior, para dividir o segmento em partes iguais)

Aluna M3: - É a reta intersecção. Do outro lado, outro lado. Aí, é reta paralela, eu disse intersecção.

Aluna M1: - Faz aí R2. (Vendo que o colega tinha feito rapidamente as retas paralelas no outro computador e que ele agora havia progredido mais do que ela).

Claro que tínhamos a consciência de que gravar a sequência correta de todos os comandos seria praticamente impossível, mas decidimos por esse encaminhamento com dois propósitos. O primeiro foi observar se os estudantes sabiam a sequência não de comandos, mas da construção geométrica, o que indicaria a compreensão da aplicação do Teorema de Tales. O segundo foi o de que eles, ao errarem o comando, deveriam desfazê-lo e refazê-lo, fixando a maneira de como usar determinada ferramenta do GeoGebra. Esse processo de fazer, desfazer e refazer parte de uma construção é potencializado pelo uso do GeoGebra devido à sua dinamicidade. De fato, a realização desse mesmo processo com o uso de régua, compasso e esquadros, é menos ágil e alunos com maiores dificuldades em manipular essas ferramentas poderiam se desmotivar e/ou se dar conta que cometeram um equívoco em um estágio avançado da construção, onde a única possibilidade seria de refazê-la completamente, causando-lhe frustração e na pior das hipóteses a desistência da realização do trabalho.

Como os alunos realizavam as tarefas em parcerias, quando um aluno não lembrava que ação deveria fazer, o colega ao lado, ou até mesmo elemento de outra dupla, se colocava a auxiliar e, assim, nos detivemos no papel de observador, intervindo somente quando avistávamos algo que impossibilitaria os estudantes de avançarem. Embora fosse comum os alunos esquecerem um ou outro procedimento, como visto nos exemplos acima, isso não os impossibilitou de concluir com êxito a tarefa no GeoGebra, já que eles selecionaram os elementos geométricos corretamente. As falhas ocorriam quando estes não utilizavam corretamente o comando para fixar o objeto geométrico, ou mesmo quando esqueciam de colocar um elemento geométrico. Ao tentarem executar o passo seguinte lembravam daquilo que estava faltando.

O uso das tecnologias pareceu contribuir para que os alunos cooperassem uns com outros. Os que aprendiam por esforços próprios não guardavam o entendimento para si; simultaneamente compartilhavam com o colega ao lado. Dessa forma, os grupos puderam agir com autonomia, ao mesmo tempo em que podiam estabelecer parcerias com outros colegas. O ambiente informatizado,

atrelado às atividades propostas de tipo investigativo conferiu aos alunos mudanças comportamentais com relações voltadas ao ensino colaborativo. Tentamos fazer aquilo que Kenski (2010, p. 66) sugere para as escolas:

A escola deve, antes, pautar-se pela intensificação das oportunidades de aprendizagem e autonomia dos alunos em relação à busca de conhecimentos, da definição de seus caminhos, da liberdade, para que possam criar oportunidades e serem os sujeitos da própria existência.

Em geral, verificamos que os alunos tinham já bom entendimento das ferramentas virtuais e dos passos que deveriam ser dados. Evidentemente houve aqueles que cometeram pequenos equívocos. Procuramos, na medida do possível, não interferir a todo o momento, somente atuando nos casos que impossibilitavam os alunos de seguirem adiante, procuramos dar aos estudantes mais autonomia em suas ações.

Ao longo desse encontro estivemos observando as ações dos alunos diante dos computadores, e averiguamos que os alunos se sentem à vontade diante da máquina. Nós os deixamos mais independentes na realização da tarefa e constatamos que o significado do erro passou a ser considerado como algo “normal” ao olhar do aluno quando diante do computador. Assinalamos alguns fatores que, em nosso entendimento, parecem contribuir para essa compreensão: o primeiro, porque o computador não denuncia aos colegas o equívoco quando cometido; segundo, pela facilidade com que o *software* GeoGebra permite os alunos refazerem as construções; e o terceiro, pela informática se fazer presente na vida de muitos deles.

No sentido de produção de conhecimento, Lévy (2010) esclarece que, até alguns anos atrás, a informática era vista somente como um recurso para automatizar cálculos. Para esse autor, entretanto, a oralidade, a escrita e a informática são entendidas como tecnologias da inteligência, isto é, estas três são as grandes técnicas que estão associadas à memória e ao conhecimento. Borba e Penteado (2015), apoiados no trabalho de Lévy (2010), enfatizam que a produção de conhecimento é gerada por um coletivo pensante formado por humanos e mídias. Assim como proposto no primeiro encontro, com a construção do objeto de estudo realizada pelos alunos no computador, com o decorrer das atividades observamos que pensamentos surgiram desse composto mediante a descrição das respostas

dadas às questões propostas. Assim damos continuidade como as indagações do quadro 4 abaixo relacionadas a essa segunda etapa da construção.

Quadro 2 - Questões segmentos centesimais

1) Reduza e amplie a imagem uma ou mais vezes. Se você fizesse o mesmo procedimento de divisões em cada uma das outras partições, quantas partes menores você teria ao longo do segmento \overline{AB} ?

2) Que fração indica cada uma dessas partes menores?

Fonte: próprio autor

O objetivo da primeira questão era verificar se os alunos conseguiam perceber que no segmento \overline{AB} caberia cem dessas partes menores. As duplas e trios foram unânimes nas respostas a essa questão: todos concluíram que caberiam cem partes menores.

Já na segunda questão obtivemos respostas bem interessantes e diversas. Começamos pela resposta dada por M1, M3 e R2, os quais anotaram $1/10$.

Figura 48 – Indicando a fração

2) Que fração indica uma dessas partes menores?

$$\frac{1}{10}$$

Fonte: Próprio autor

Professor: - Qual foi o pensamento de vocês?

Aluno R2: - Que eram dez espaços, daí um tinha os pontos dentro, daí a gente boto um sobre 10.

Professor: - Vocês viram que dentro do P e do Q. E aí como aqui tem dez, e cada um pedacinho desses seria 1 sobre 10.

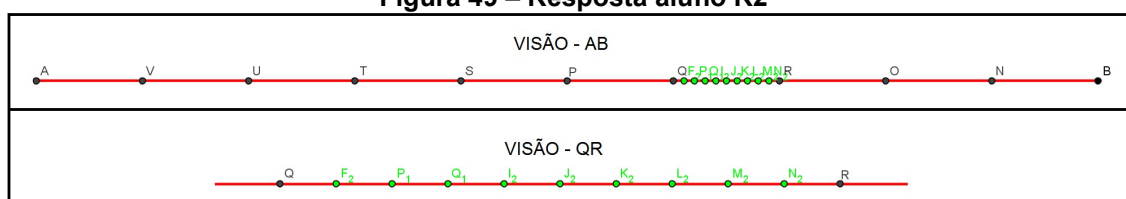
De P a Q tínhamos um dos dez segmentos de \overline{AB} , então eles haviam tomado o segmento menor \overline{PQ} e dividido em 10 partes. Inicialmente havíamos pensado que o trio de alunos havia tomado um dos segmentos de \overline{PQ} e relacionado com o próprio segmento \overline{PQ} e não a todo segmento \overline{AB} . Mas com o decorrer do diálogo percebemos que esses estudantes, haviam sim, pensado na relação entre os

segmentos menores e o segmento inteiro. Assim, o aluno L1 que estava ao lado, e havia trocado informações com aquele grupo, nos chamou a atenção.

Aluno L1: - Não sor! O que ele quis dizer. A linha inteira era 10, daí aquelas divisões eram um só.

Aluno R2: - Tipo do Q até o R, aqueles dentro ali formam 1 [imagem projetada], daí os outros fechavam os dez.

Figura 49 – Resposta aluno R2



Fonte: próprio autor

Aluno L1: - Você tem 10 na linha inteira, e um que é todo dividido. Entendeu?

Professor: - Vocês estão falando todo aqui, isso?

Alunos L1, M1, M3 e R2: - Sim!

Professor: - Esse segmento todo vocês consideram como 10 [segmento \overline{AB}].

E agora?

Aluna M1: - Todos esses pedacinhos seriam 1 [os 10 segmentos que particionam \overline{QR}].

Professor: - Ah! Todos os pedacinhos juntos formariam 1. Isso?

Alunos L1, M1, M3 e R2: - Sim.

Professor: Só que daí estão falando de todos os pedacinhos juntos e a gente precisa de um pedacinho só.

O diálogo nos esclareceu que esses alunos pensaram em relacionar os segmentos menores com o segmento todo (\overline{AB}), e não apenas com a parte que havia sido dividida (\overline{QR}), como havíamos previamente pensado. Resumidamente eles consideraram o segmento \overline{AB} dividido em 10 pedaços maiores (primeira subdivisão), o que corresponde ao denominador 10. Juntando as dez partes menores (segunda subdivisão) formaria 1 dos segmentos maiores, daí chegando no numerador 1. Contudo não chegaram a visualizar que o segmento \overline{AB} estava particionado em 100 segmentos, cada um limitado por dois pontos verdes, não atendendo a nossas expectativas.

A intenção da nossa atividade foi levar todos os estudantes à ideia dos centésimos, mas para esse grupo, percebemos que eles conseguiram relacionar os pedaços menores com os maiores e permanecer nas frações decimais abordadas na aula anterior.

De modo similar aos estudantes M1, M3 e R2, temos a resposta descrita por A1, L1 e V2, que anunciaram $100/10$, e também $10/100$ que foi a resposta dada por D1 e R1, se aproximando assim, à nossa intenção de chegar nos centésimos. O diálogo abaixo apresenta o modo de pensar dos alunos.

Professor: - Esse $100/10$, qual é a ideia aqui?

Aluno D1: - É que todos na reta, e aquela parte verde (pontos) dá dez.

Professor: - O segmento maior, todo o segmento vai te dar 100.

Aluno D1: - E ali dentro dos dois pontos, tem 10.

Professor: - A ideia está boa, só que como fração, a gente coloca em baixo a totalidade de partes divididas.

Aluno D1: - Não! Eu anotei, 10 dividido por 100.

Aluno L1: - Oh! A1 aí tá 10 dividido por 100 (indicando a escrita de D1), e aí 100 sobre 10. Olha é a tua letra.

Aluno A1: - Ah tá! Aonde?

Aluno L1: - Só inverteu, mas está certo.

Professor: - Agora vamos chegar na ideia correta, que é a seguinte. Quantos pedacinhos têm ao todo?

Alunos: - Cem.

Professor: - Então nós teríamos cem partes, do qual nós vamos tomar um só pedacinho, então a resposta certa é um pedacinho de cem, $1/100$.

Conversado sobre as respostas até aqui dadas, já tínhamos argumentos suficientes para concluir com os alunos que cada um daqueles pedacinhos equivalia a $1/100$. De fato, apenas comentamos para eles aquilo que haviam já percebido, que o segmento poderia ser formado por cem daqueles segmentos menores, onde cada um desses segmentos menores era um dos cem.

Há de se fazer uma autocrítica em nossa prática. Verificamos ao articular essa última resposta a descaracterização momentânea da ideia de medida. Ao longo das demais questões vínhamos fazendo comparações entre segmentos menores com os maiores, o que remetia aos alunos expressar quantos segmentos menores cabiam nos maiores, em outras palavras, medir algo maior com algo menor. No

entanto, demos como resposta a indicação de quantidade, o número de partes menores possui o todo, não atribuindo a medida do segmento maior em relação do menor. Junto a isso sabíamos que as aulas investigativas se tratava de um novo modelo ao qual os alunos ainda estavam pouco familiarizados. De acordo com Brocardo, Oliveira e Ponte (2003, p 47) “o professor deve procurar interagir com os alunos tendo em conta as necessidades particulares de cada um sem perder de vista os aspectos mais gerais de gestão da situação didática”, o que nos levará a adequar as questões na tentativa de dar melhor fluidez aos pensamentos dos alunos com raciocínios que se aproximem de nossas expectativas.

Para encerrar essa questão, deixamos por último a resposta que mais nos chamou a atenção, 0,1/10, que embora estava correta, precisava de uma escrita adequada em se tratando de fração. Quando começamos a pedir os resultados, a aluna G1 que fazia parceria com os colegas W1 e W2 indicou o segmento como se fosse uma régua, e justificou da seguinte forma:

Professor: - Era uma ideia sobre (indicado no quadro a escrita 0,1/10);

G1: - 0,1, foi a ideia lá que eu falei.

Professor: - Como é que você achou esse 0,1?

G1: - Dez é do todo.

Professor: - Tu diz, dez é do segmento todo ou só do ...

G1: - Não, é todo, do todo. Daí 0,1 porque está dizendo que é das menores partes né. A gente contou aquela partezinha de dentro do Q até o T (as dez partes demarcadas pelos pontos verdes no segmento \overline{QT}), entendeu? Daí 0,1.

Professor: - De novo, então o todo?

G1: - O todo é dez.

Professor: - Porque são dez partes maiores.

G1: - E do Q até o T é 0,1, porque ele ta dizendo das partes menores.

Professor: - Por que 0,1? (insiste)

G1: - Porque é o espaço que tem entre eles, tipo assim...

W2: - Tipo um de dez (sinalizando com o dedo o número um numa posição superior, e 10 numa inferior, traduzindo, 1/10).

Professor: - Uhm! Um de dez, ok!

Professor: - Esse resultado aqui, ele é importante, na verdade ele tem outra notação que vai corresponder corretamente esta questão.

É interessante que o grupo deu a ideia de fixar o número dez como denominador indicando todo o segmento e, ao terem que indicar uma daquelas partes menores como numerador, denotaram $1/10$ com a escrita de 0,1, resultando assim, na representação 0,1/10. Podemos perceber que os alunos, ao pensarem em régua, ativaram a lembrança da conversão em decimais e por terem que compor uma fração com dois números, um para numerador e outro para denominador, indicaram 0,1 como numerador, em vez da possível escrita $\frac{1 / 10}{10}$.

Após termos dado seguimento com os relatos dos demais resultados que já foram comentados acima, voltamos para a resposta desse grupo, a fim de adequá-la à escrita de fração, também já evidenciada.

Professor: - Então, olha o resultado que o grupo G1, W1 e W2 chegaram. Vocês têm $1/10 = 0,1$, certo? E esse $1/10$ é um desses pedaços aqui [referindo-se aos segmentos congruentes a \overline{QT}] que é um desses pedaços aqui. Concordam?

Alunos: - Sim.

Professor: Quando vocês colocaram 10, significa que vocês pegaram esse pedaço (\overline{QT}) e o dividiram em 10.

Professor: - Primeiro, segmento inteiro, esse pedaço aqui (\overline{QT}) é $1/10$, e esse $1/10$ foi dividido em 10 novamente. Bom! Pegar uma coisa e dividir em 10 e dividir em 10 novamente, vai ter quantos pedaços (indicando o segmento todo) ?

Alunos: - Cem.

Professor: - E desses cem está se pegando somente?

Alunos: - Um.

Esses estudantes conseguem articular duas representações distintas de números racionais e compor uma “terceira representação” para esse mesmo campo numérico, nesse sentido, as representações múltiplas articuladas pelos alunos, destacamos a seguinte afirmação:

Quanto ao potencial das múltiplas representações, considerando que um mesmo objeto matemático pode receber diferentes representações e que estas registram diferentes facetas do mesmo, uma exploração que transita em diferentes sistemas torna-se significativa no processo de construção do conceito. (GRAVINA; SANTAROSA, 1998, p.11)

A articulação das representações é de fato um resultado significativo para os alunos no processo de construção de conceito, apresentam com coerência uma

escrita diferente para o mesmo número $1/100$. Valorizando a resposta desses alunos, se olharmos capítulos de livros que tratam dos números racionais, cremos que não encontraremos escrita similar, tratando-se assim de uma “nova representação” para os números racionais. Segundo Confrey *et al* (1991) as representações e ideias estão inseparavelmente entrelaçadas. Ideias são sempre representadas, e é através do entrelaçamento de nossas ações e representações que construímos significado matemático. Embora $0,1/10$ não seja uma escrita genuína de fração, ficou fácil todos perceberem mediante a visualização da tela projetada, que $0,1/10$ era equivalente à resposta almejada $1/100$.

Demos continuidade, pedindo para que os alunos escolhessem um dos pontos verdes e determinassem em fração a sua localização no segmento \overline{AB} , tanto em relação ao ponto A, quanto ao ponto B.

Professor: - Tomando um dos pontos verdes, como vocês fizeram para identificar esse ponto quanto à localização dele?

Aluno D1: - Eu escolhi o ponto J, daí do A até o J tem 33 pontos [segmentos], daí da parte que tem 100 os pontos verdes é 10, daí eu contei como 1, daí do J até o B dá 67.

Professor: - Daí como ficou sua fração? Em cima ficou que número?

Aluno D1: - Ficou 33.

Professor: - Abaixo?

Aluno D1: - 67.

Professor: - Como vocês pensaram?

Aluno D1: - A gente pensou assim, do A até o V dá 10 (referindo aos segmentos delimitados pelos pontos pretos), daí a gente contou 10 e quando chegou nos pontos verdes a gente contou 1.

Esses alunos usaram a estratégia de contar em dezenas a cada dois pontos escuros, pois sabiam que entre cada par desses pontos cabiam dez segmentos menores indicados pelos pontos verdes. Ao chegarem no ponto V, do qual já contabilizavam 30, passaram a contar de um em um, devido aos pontos verdes indicarem os segmentos menores, sendo um deles, no caso o J, o ponto escolhido para dar a localização. Já a fração que daria a posição do ponto J, descrita como $33/67$, é entendida por esse grupo definindo o numerador como o segmento \overline{AJ} e o denominador como segmento \overline{JB} . Ainda, sendo que eles sabiam que o segmento

\overline{AB} estava particionado por 100 desses segmentos, os questionamos do porquê eles não terem utilizado este fato, e eles esclareceram que achavam que deveriam expressar a medida em uma só fração.

Nessa questão, conforme esperávamos, cada grupo deu uma resposta diferente, isso devido à liberdade que demos para eles escolherem o segmento a ser dividido. Além disso, considerando a visualização da construção no monitor, a posição do ponto escolhido poderia causar facilidades ou dificuldades para o estudante dar sua localização. Para exemplificar nossa expectativa, consideremos as duas figuras abaixo:

Figura 50 – Localização na primeira partição



Fonte: próprio autor

Figura 51 – Localização na quarta partição



Fonte: próprio autor

O aluno que opta por um ponto verde na primeira partição (Fig. 50) poderia levar certa vantagem, pois todos os segmentos menores e pontos verdes estão a mostra entre A e o ponto escolhido, tendo que desconsiderar os segmentos que estão entre o ponto escolhido e o ponto B. Já opção escolha de um ponto na quarta partição (Fig. 51) exige que o aluno faça desconsidere partes nos dois sentidos, ou seja, tanto do ponto A até o ponto escolhido, assim como, do ponto escolhido ao ponto B.

O grupo, que, havia indicado a notação $0,1/10$ anteriormente, demonstrou ter a presença dos decimais como foco. Vejamos como eles indicaram a posição do ponto escolhido.

Professor: - Alguém pensou diferente?

Aluna G1: - A gente.

Professor: - Como vocês pensaram?

Aluna G1: - A gente tem duas, a do W2, 1,1 sobre 10 (1,1/10). E a minha 1,1 sobre 8,9 (1,1/8,9).

Professor: - W2 por que tu escreveu 1,1/10?

Aluno W2: - A gente tinha feito no caso, todos ali inteiro era 10, daí do ponto A até o pontinho ali do lado do B [indicava da esquerda para a direita a primeira partição do segmento em décimos] dava 1 do A até B, até o outro pontinho dava mais um décimo.

Aluna G1: Ele quer dizer que do A até o K [K era o ponto de referência escolhido] tinha 1,1.

Professor: - Até aqui tu teria 1 [indicando o primeiro décimo do segmento], aí como seria um tracinho aqui seria 1,1 [indicando no caso a medida de um centésimo demarcado pelo ponto verde]). É isso?

W2: - É.

Professor: - E esse 1,1 estaria sobre 10?

W2: - É.

Professor: - E por que dos 10?

W2: - Do total.

Professor: - Do total de divisões do A até o B? Ou dos pedacinhos menores? [observando a imagem projetada na parede]

W2: - Do A até o B.

Professor: - Ah! Por que tu tens 10 partes maiores, é isso?

W2: - Isso!

Professor: - E a tua [sinalizando para a aluna G1]?

G1: - A primeira foi a mesma coisa que a dele, do A até o K. Daí depois eu peguei do K até o B, daí dava 8,9.

Professor: - Ah ta! Daí para fechar com os 10?

G1: - É! Porque estava dizendo do ponto escolhido até o B e do A até o K.

Percebemos que o grupo não se deu conta do equívoco cometido. Na questão anterior eles haviam expresso corretamente o segmento limitado por dois pontos verdes, $0,1/10$. Já nessa questão o erro cometido foi assumir os segmentos limitados pelos pontos verdes como $0,1$ e não como $0,1/10$ como antes haviam feito. Caso esses alunos houvessem tomado $0,1/10$ para cada segmento menor, a indicação da localização poderia, apesar de correta, ter uma representação ainda mais “estranha”, como $\frac{0,1 / 10}{10}$.

Percebemos duas tendências nesses alunos: a primeira é a intenção de relacionar o que observavam com o número 10, embora verificado que necessitariam 100 segmentos menores para preencher \overline{AB} ; e a segunda é voltada à opção pela escrita em representação decimal, a utilização da vírgula parece estar atrelada ao fato de os alunos considerarem o segmento \overline{AB} como uma régua, onde os décimos do segmento seriam os centímetros e os centésimos seriam os milímetros.

A resposta esperada para a atividade foi dada pelos alunos L1 e M4.

Aluno L1: - O sor!

Professor: - Ahm!

Aluno M4: - Vem cá explicar o meu.

Professor: - Fala L1.

Aluno L1: - A gente fez 42 sobre 100. A gente fez no quinto (quinto segmento da esquerda para direita).

Professor: - O L1 colocou 42 sobre 100. É no primeiro, segundo ... (no sentido de confirmar na projeção a posição do ponto escolhido)?

Aluno L1: - No quinto.

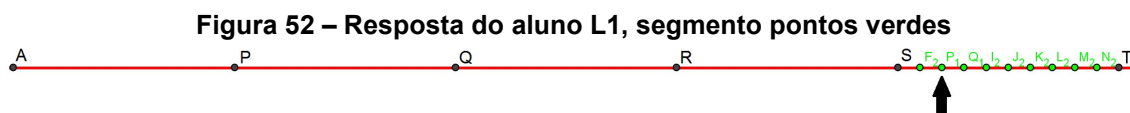
Professor: - Quantos para cá teriam (pontos verdes da esquerda para a direita)?

Aluno L1: - Dois.

Professor: - Como vocês pensaram nos 42?

Aluno L1: - Porque foi dividido em 100, daí no quinto deu 40 pontos.

Professor: - Vamos pegar aqui na reta, tomando o segmento como referência (projeção), até tu chegar no S ... Repete para mim os 42.



Fonte: Próprio autor

L1: - Tinha quarenta pontinhos.

Com o dedo o aluno L1 apontou para a projeção e sinalizou para os pontos A, P, Q, R e S.

Professor: - Ah, tu tomou de 10 em 10 (observando o gesto do aluno)?

L1: - É, isso.

Professor: - Porque cada um teria 10.

L1: - Daí teve mais dois, porque eu escolhi o segundo pontinho.

O segundo ponto a que se refere o aluno é o segundo ponto verde à direita do ponto S.

Professor: - Daí tu chegou no 42? E do 100?

L1: - Do 100, dos cem pontinhos do total.

Dessa resposta obtida e da adequada compreensão demonstrada por essa dupla, esclarecemos ao grupo a representação correta em frações das posições dos pontos verdes na reta.

Na resposta de D1, ele conseguiu contar corretamente que haveria 37 segmentos menores de A até J, e 63 de J até B. De modo similar, a aluna G1 contou 11 segmentos de A até K, e 89 de K até B. Embora as respectivas respostas 37/63 e 1,1/8,9 se mostraram equivocadas, verificamos que nossa expectativa em que a escolha do ponto em diferentes partições do segmento implicaria em facilitar ou dificultar a localização do ponto não se concretizou, pois os alunos conseguiram nessa atividade estabelecer uma relação entre o segmento maior e o todo.

Finalizamos o encontro, tendo encaminhado aos alunos a tarefa de dividir um dos segmentos limitados por pontos verdes novamente em 10, e de marcar esses novos segmentos com pontos azuis.

4.1.3 Dados e Considerações do Terceiro Encontro: 31/10/2014

A nova divisão de segmentos que os alunos fizeram nessa aula, teve como objetivos a obtenção das frações na casa dos milésimos e o conceito das frações decimais. Iniciamos a aula desse dia com os alunos retomando no GeoGebra o arquivo de trabalho das aulas anteriores.

Após poucos minutos, muitos dos alunos já haviam terminado a atividade, evidenciado a compreensão dos comandos do *software* e a sequência correta de sua execução. Os alunos que demoraram mais em realizar a tarefa tinham os seus atrasos justificados pelos pequenos tropeços cometidos, os quais solucionavam logo que percebiam. Outro fator é o das pessoas serem únicas quanto às suas

características e habilidades, a “demora” foi tão somente a razão de elas realizarem os movimentos com maior ou menor destreza.

Achamos adequado, nesse momento, fazer uma retomada dos encontros anteriores e dos aspectos quanto ao uso computador. Alguns dias antes de fazermos uso do LABIN, havíamos trabalhado o Teorema de Tales com os alunos, pois se tratava de um conteúdo que só seria visto por eles no ano seguinte, mas que para nossa proposta pedagógica se tratava de um pré-requisito. Achamos importante fazer essa abordagem utilizando os recursos régua, compasso e esquadros para que pudessem ver na prática a aplicação do teorema e também para que treinassem as habilidades de manuseio desse material escolar. Naquela aula eles viram na prática a proporcionalidade de segmentos de duas ou três retas seccionadas por um feixe de retas paralelas, e também divisões de segmentos em 3, 5 e 7 partes iguais.

Observamos ao longo dos encontros, ao irem fazendo a construção e a divisão do segmento unitário no computador, os alunos buscaram lembrar os procedimentos que haviam feito manuseando régua, compasso e esquadros e repeti-los mediante a escolha de comandos e ferramentas fornecidas pelo GeoGebra. No entanto, ao levarmos para o computador uma atividade similar que os alunos haviam feito com materiais manipulativos, observamos algumas diferenças:

a) *organização*: o GeoGebra oferece o lugar de desenho e as ferramentas virtuais para construções geométricas, o computador se caracteriza como material único. Na aula com materiais manipuláveis, os materiais régua, compasso, lápis, folha, etc ficam sobre a classe do aluno, e mesmo que organizado conforme o movimento a ser feito esses podem atrapalhar.

b) *manuseio*: o uso de régua, compasso e outras ferramentas virtuais do GeoGebra são manipulados somente com a mão que segura o mouse do computador, a maioria dos alunos fizeram a construção com maior conforto e agilidade no manuseio. Já com o material físico os alunos tiveram que ter a destreza de usar até três materiais simultaneamente - foi o caso de traçar retas paralelas, a régua que apoiou o esquadro, o esquadro para traçar as retas paralelas e o lápis para dar o traço.

c) *o refazer*: em equívocos de comandos, ou a escolha errada do objeto geométrico que foi desenhado, temos no GeoGebra o recurso do *refazer*, que permitiu rapidamente os alunos voltar onde haviam cometido o erro, e a partir dali

retomar a construção. Ao desenhar no papel, com uso do concreto, conforme o avançado do desenho, os alunos tiveram que refazê-lo por completo: o apagar da borracha por vezes não era o suficiente pois implicaria em apagar o desenho por completo.

d) do recurso visual: em um mesmo segmento os alunos puderam fazer as divisões dos décimos, centésimos e milésimos no computador com o uso do recurso do zoom do GeoGebra. Com material físico imaginamos que seria até difícil de conseguir obter os centésimos em um mesmo segmento, devido ao tamanho do segmento a ser considerado inicialmente. O campo visual, ou o tamanho dos materiais implicaria dificuldades em traçar as retas paralelas.

e) o tempo: no GeoGebra os elementos geométricos são obtidos com um ou dois cliques no mouse do computador em um curto espaço de tempo. Já os alunos utilizando régua, compasso e esquadro o tempo utilizado aumenta consideravelmente; por exemplo, o aluno deve primeiro posicionar a régua no lugar pretendido para então fazer o traço com o lápis.

Os itens listados são diferenças significativas percebidas ao longo do desenvolvimento das tarefas propostas. No entanto, não estamos aqui defendendo o emprego do computador e a abolição dos materiais convencionais de desenho em sala de aula: basta refletirmos sobre as muitas atividades humanas decorrentes do uso de materiais manuais de medição e desenho. Estamos nos apoiando nas ideias de Borba e Penteado (2015) de que o conhecimento é produzido por homens e mídias, isto é, por coletivos de seres-humanos-com-mídias. As mídias podem ser diversas: lápis-e-papel, oralidade, informática, internet, etc. Nesse sentido, os autores pontuam que diferentes mídias podem ser utilizadas simultaneamente, isto é, uma mídia não anula a outra. Em particular, no nosso caso de nossa proposta, a informática não substitui nem anula os materiais manipuláveis.

Pensamos aqui na possível alteração de nossa proposta de ensino para uma próxima aplicação. Ocorreu-nos a ideia de darmos o início dos estudos dos números racionais com os alunos sem a utilização do computador, mas partindo de maneira similar às aulas introdutórias onde ensinamos os alunos a aplicação do teorema de Tales com materiais concretos, e em seguida solicitando-os que iniciassem a construção do segmento unitário utilizando esses materiais, no caso, papel, compasso, régua etc., e também realizassem a divisão desse segmento em décimos utilizando o teorema de Tales. No passo seguinte ainda de modo braçal,

solicitaríamos que eles fizessem a divisão de uma das partes do segmento (um décimo) em outras dez, partes.

Nesse segundo passo, convidamos o leitor a refletir e concordar com nós, que pelas limitações do tamanho do segmento traçado (tanto faz ser relativamente pequeno ou grande) os alunos sentiriam dificuldades em manusear os instrumentos de desenho constatando o quanto trabalhoso seria a realização de tal tarefa ou dependendo da dimensão do desenho a impossibilidade de sua realização.

Diante da adversidade acima, consideramos que este momento seria ideal para a inserção do uso do computador e do GeoGebra. Com o obstáculo imposto pela tarefa, a utilização do computador surgiria como um ator que permitiria construir o segmento e particioná-lo do mesmo modo como fizemos nos dois primeiros encontros da nossa proposta dando continuidade a tarefa de divisão do segmento unitário. Isso confere as palavras de Borba (1999) de que o computador surge como complemento em sanar problemas difíceis de serem resolvidos pelas pessoas, entende-se que a informática seria outra mídia, assim, como lápis ou régua que os alunos passariam a utilizar para continuar os trabalhos, logo, o uso computacional não aboli o uso de outras tecnologias do conhecimento e sim as complementa.

Outro aspecto é de que o segmento e suas partições é o objeto de estudo, na primeira divisão do segmento, indicando os décimos, as partes poderiam ser visualizadas sem problemas utilizando o desenho realizado em folha de papel. No entanto, as divisões em centésimos e milésimos do segmento com nesse tipo de material seriam difíceis de serem bem visualizadas, ou ainda, resultaria nos alunos terem que tomar outro segmento externo ao segmento unitário e considerá-lo como uma de suas partes para então dividi-lo e terem os centésimos e os milésimos, o que também afetaria a observação e as relações entre essas partes do segmento externo e o segmento unitário.

Com o GeoGebra, as partes que indicam centésimos e milésimos, assim como os décimos podem ser obtidos em um mesmo segmento. Por meio dos recursos de ampliar ou reduzir a imagem no monitor os alunos conseguem fazer comparativos entre os tamanhos das partições, temos assim, uma tecnologia segundo Arcavi (1999) produzida pelo homem que possibilita superar nossas limitações visuais, tornando visível uma parte de milésimo do segmento que em seu tamanho “primitivo” talvez mal seria imperceptível aos nossos olhos. Entretanto, a sua utilização não garante que os alunos ao verem e analisarem figuras ampliando-

as ou reduzindo-as consigam fazer de imediato uma interpretação correta daquilo que deseja ser ensinado. Na divisão dos centésimos, visto no encontro anterior, já tivemos algumas amostras de equívocos, e teremos outras dessas evidências nessa aula que estamos iniciando a analisar.

Prosseguindo, o objetivo inicial do encontro era que os alunos percebessem as frações na ordem dos milésimos e que, após isso, pudéssemos fazer um apanhado geral da organização das frações no sistema decimal. Iniciamos o debate com os alunos justamente para evidenciar que com esses segmentos menores delimitados pelos pontos azuis determinariam os milésimos das futuras frações a serem enunciadas.

Quadro 3 – Questões sugeridas, milésimos

- 1) E agora, quanto dessas partes ainda menores caberiam no segmento \overline{AB} ?
- 2) Cada segmento desses representa que fração do segmento \overline{AB} ?
- 3) E agora, quanto dessas partes ainda menores caberiam no segmento \overline{AB} ?

Fonte: Próprio autor

Professor: - Quantos segmentos cabem de A até o B?

Alunos em geral: - Mil.

Professor: - Alguém achou diferente?

Alunos em geral: - Não.

Percebemos maior segurança na resposta dos alunos, e esses transpareceram ter encontrado uma regularidade a cada vez que se fazem novas divisões dos sub-segmentos de \overline{AB} .

Professor: - Cada segmento desses representa que fração em relação a \overline{AB} ?

Alunos D1 e R1: - Um sobre mil.

Alunos L1 e R2: - Dez sobre mil.

Alunas C1 e G2: - Um centésimo.

Nesse momento o aluno L1 percebeu o denominador 100 citado por C1 e G2, notou que esse foi o único que se diferenciou dos demais, o que lhe causou estranheza e curiosidade em saber como as colegas haviam chegado nos centésimos.

Aluno L1: - Como assim “um centésimo” ?

Professor: - Grupo do um centésimo.

Aluna C1: - Não lembro por quê!

Aluna G2: - Ela tinha falado para mim, mas ela esqueceu.

Íamos dar a voz a outro grupo, mas isso não chegou a se concretizar, pois as mesmas nos chamaram a atenção logo em seguida.

Aluna G2: - Sor, lembramos!

Professor: - Diz aí!

Aluna C1: - Cem, por causa que tem cem pedacinhos verdes em cada parte.

Professor: - Tu fez referência aos pontos verdes, é isso?

Aluna C1: - É!

Figura 53: Observação dos pontos verdes



Fonte: próprio autor

Professor: - Onde caberiam os 100, que tu diz?

Aluna C1: - Cem, causa é os verdes dados em cada parte.

Professor: - Que vai do Q até o P!?

Aluna C1: - E do A até o B, daí é 100 em cada um [Para C1, assim como de Q a P havia 100 segmentos formados pelos pontos azuis, entre outros segmentos formados por pontos pretos também haveria 100 dos pretos.

Figura 54 – Observação dos pontos verdes 2



Fonte: próprio autor

Professor: - Ah! Cem em cada um?

Aluna C1: Não, deve ser dez em cada um, confundiu [a aluna diz isso ao olhar novamente para o segmento cujos extremos eram dois pontos verdes que elas subdividiram em segmentos menores azuis].

Professor: - Tu está falando desses segmentos azuis ali né?

Aluna C1: - Eu não sei de onde eu tirei um centésimo.

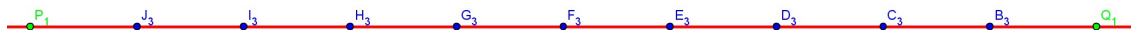
Nesse momento a aluna C1 percebeu que entre cada segmento formado pelos pontos pretos cabem dez segmentos delimitados por pontos verdes. Assim, passamos a esclarecer os equívocos por elas cometidos.

Professor: - Como vocês foram as únicas que colocaram 100, vamos pensar. Porque vocês pensaram em cem?

Aqui desse pontinho verde, Q_1 até o P_1 , quantos pedacinhos delimitados pelos pontos azuis a gente vai ter?

Aluna C1: -Dez.

Figura 55 - Pontos azuis entre os pontos verdes



Fonte: Próprio autor

Professor: - Agora, então, se pegar todos os segmentos ali em verdes, que no meu caso é do Q até o P, quantos teriam do Q até chegar no P?

Aluna C1 e alguns colegas: - Cem.

Figura 56 - Pontos azuis entre os pontos pretos



Fonte: próprio autor

Professor: - Ok! Cem. Está certo é cem. Só que a pergunta é do A até o B.

Figura 57 - Pontos azuis entre os pontos A e B



Fonte: próprio autor

Aluna C1: - Pois é professor, eu não sei porque eu coloquei um centésimo, eu viajei.

As alunas, ao ampliarem e reduzirem a imagem na tela do computador, pareceram ter dificuldades na visualização. Como podemos ver na Figura 55, para conseguirmos olhar todos os pontos azuis tivemos que ampliar a imagem ocultando alguns pontos verdes e pretos; por outro lado, ao reduzirmos a imagem como mostra a Figura 57 conseguimos observar o segmento \overline{AB} , mas os pontos azuis apareceram amontoados, impossibilitando fazermos a distinção de posição entre esses pontos, enxergando-os em um único ponto em vez de em dois ou três.

Para que ficasse claro que dentro do segmento \overline{AB} havia mil segmentos menores, questionamos dois alunos de outros dois grupos, os que haviam indicado a resposta 10/1000.

Professor: - Como vocês chegaram no mil?

Aluno R2: - Dentro do ponto A até o B, nesses pontos aqui, tem cem em cada um, no meio deles.

Professor: - Tu diz que os pontos quais tem cem em cada um?

Aluno L1: - Por exemplo, do A até o O [pontos pretos].

Professor: - Tomando aqui como referência [projeção no quadro].

Aluno L1: - Do A até o B_1 tem 100 no meio.

Professor: - Ah claro! Cada um deles tem cem, e aí vocês fizeram vezes?

Alunos L1 e R2: - Sim!

Aluno R2: - Vezes 10.

Aluno L1: - E que antes tinha dez só como agora aumentou mais um, é mais 10, daí vezes 10.

Os alunos consideraram o 10 como numerador pelos 10 segmentos menores formados pelos pontos azuis os quais preenchiam o espaço entre dois pontos verdes, e o mil como denominador pelo total de segmentos menores que caberiam em todo segmento \overline{AB} . O grupo do aluno L1 já havia dado resposta similar na aula anterior quando tratamos dos centésimos; na ocasião enunciaram 10/100 quando o correto foi 1/100, e nesse momento 10/1000, em vez de 1/1000. Então, vimos que a ideia deles era tomar as 10 partes do segmento que haviam dividido (denominador) e relacioná-lo com o número de vezes que esses segmentos menores caberiam no segmento \overline{AB} , nesse caso 1000 (denominador). Assim, voltamos a esclarecê-los e indicamos a resposta adequada a partir da análise da resposta de outros alunos.

Professor: - Quando vocês colocaram 10/1000, vocês consideraram todas as partes azuis. Juntando todos os espaços limitados pelos pontos azuis, a gente encontra dez.

Concordo com vocês, tá!

Só que a pergunta era de um só. E aí a gente chega na resposta correta que é desse grupo aqui [resposta 1/1000, resposta primeiramente enunciada pelos alunos D1 e R1].

Nesse momento, outros estudantes declaram terem também escrito a mesma resposta.

Como dissemos antes, segundo Arcavi (1999) o homem constrói tecnologias que fazem visível aquilo que até então era invisível. Por outro lado, a sua

observação não será garantia de uma correta interpretação, como podemos presenciar com os alunos C1, G2, L1 e R2. Eles se mostraram confusos; só conseguiram realmente perceber o erro quando intermediamos diálogos e alterações na projeção dos segmentos. Nesse momento, puderam acompanhar junto com os colegas que entre cada espaço de pontos verdes caberiam 10 segmentos formados pelos pontos azuis, e 100 entre cada par de pontos pretos. De acordo com Souto (2013) na busca e armazenamento de informações, os alunos assumem as relações entre eles e aquilo ao seu redor, e o professor ao realizar a retomada daquilo que eles haviam realizado diante ao computador fez com que eles reorganizassem os seus pensamentos. Segundo Arcavi (1999) a acomodação dos saberes foi aqui feita por visualização, acompanhado por desenvolvimento simbólico (frações), tendo na imagem visual o concreto como fator essencial da auto-evidência e imediatismo na obtenção das representações que dão equivalência entre aquilo que se vê e os símbolos.

As “divisões” do segmento unitário feitas pelos alunos tornaram-se o método pelo qual foi possível tornar as frações visíveis (ARCAVI, 1999). O “fazer ver”, segundo Arcavi (1999), tem um papel complementar poderoso sobre três aspectos. Para exemplificar, vamos tomar a resposta equivocada dada por C1 e G2 na questão dos milésimos e procurar articular com os três aspectos apontados por Arcavi (1999):

1º) As alunas, diante da imagem do segmento particionado, já tinham o entendimento que uma daquelas partições indicava uma fração. Assim, embora equivocadas desenvolveram um raciocínio que converteu a imagem daquela parte em $1/100$. Essa ação ilustra o processo da visualização imagem como suporte que permite observar propriedades e então traduzí-la numa escrita simbólica (ARCAVI, 1999).

2º) Na sequência, vimos as alunas C1 e G2 se mostrarem confusas, atrapalhando-se ao justificarem sua resposta com a imagem e o recurso do *zoom* no GeoGebra. Percebemos que as estudantes não tiveram o devido cuidado e a destreza de comparar as partes do segmento ao irem ampliando e/ou reduzindo a imagem, tendo enunciado uma resposta mais intuitiva do que racional. Por outro lado, tomar respostas de seus colegas e fazer uma apresentação organizada da imagem com o recurso *zoom* fez com que C1 e G2 compreendessem as respostas e os raciocínios utilizados por seus pares. Nesse momento, observamos a

visualização como uma possível forma de resolver o conflito entre intuições (incorretas) e soluções simbólicas (corretas) (ARCAVI, 1999).

3º) Finalmente, a visualização como uma maneira de ajudar a reconsiderar comprovações conceituais que podem ser facilmente contornadas por soluções formais. Esse aspecto é exemplificado quando temos um problema e recorremos a figuras para encaminhar o raciocínio que leve a sua resposta. No nosso caso, tanto as alunas C1 e G2, como os demais alunos, construíram o segmento unitário, e nele as partições em décimos, centésimos e milésimos, com a intenção de encaminhá-los a alcançar um de nossos objetivos que é o conceito de frações decimais.

Demos seguimento à aula com o objetivo de verificar se os alunos expressariam corretamente as frações em milésimos, a partir de um dos pontos azuis.

Professor: - A três é boa!

Aluno L1: - Ah! Essa aí é muito fácil.

Aluno R2: - É fácil! É a mesma coisa que a outra [referindo-se a uma questão semelhante quando trabalhavam com os centésimos].

Professor: - Escolhendo um desses pontos qual a fração indicaria a posição dele no segmento \overline{AB} ?

- Vamos às respostas então.

De imediato, mal deixando o professor terminar a frase temos a ansiedade de R2 em ser o primeiro aluno a responder seguido do aluno A1.

Aluno R2: - 323 sobre 1000.

Aluno A1: - 425 sobre 1000.

Ao escrevermos essa segunda resposta no quadro, percebemos muitos alunos falarem juntos suas respostas, demonstrando com isso a motivação provocada pela proposta de ensino. Os alunos se sentiram confiantes em falar suas respostas independentemente de estarem certas ou erradas. A sala, ao que nos parece, se tornou um ambiente descontraído e, à medida que valorizamos aquilo que os estudantes tinham a dizer, eles iam se encorajando a participar mais da aula. Tivemos ainda as repostas:

Aluno L1: - 308 sobre 1000.

Aluna G2: - 25 sobre 1000.

Aluno W3: - 632 sobre 1000.

Alunos W1 e W2: 111 sobre 1000.

Ao terminarmos de escrever as respostas no quadro, as alunas C1 e G2, comparando sua resposta com as dos colegas, pediram para que a sua resposta fosse apagada.

Aluna C1: - O sor apaga os 25 sobre mil.

Aluna G2: - Sor apaga 25 sobre mil.

Professor: - Não! Vou deixar. Me interessa essa resposta. Alguma coisa vocês pensaram para terem chegado nesses 25 sobre 1000.

Aluna C1: - Ah não! Tá certo.

Aluna G2: Tá certo.

Professor: - Está certo?

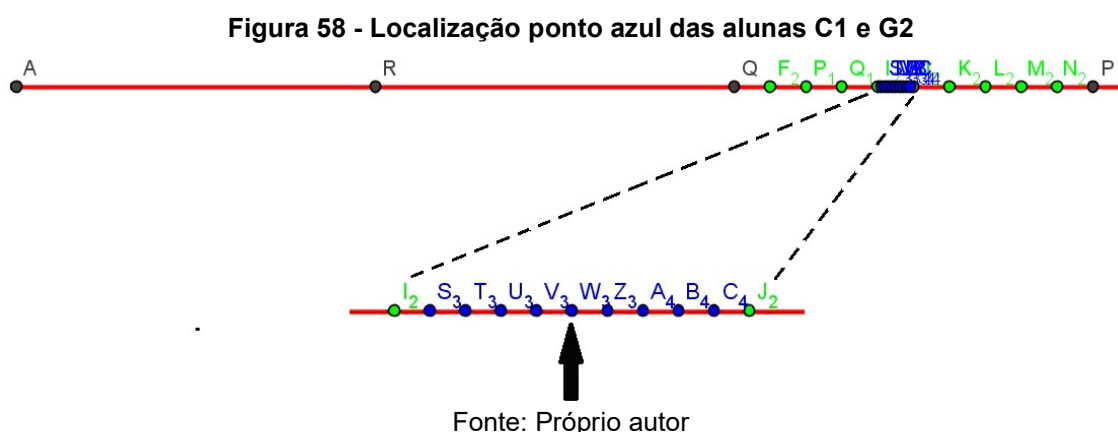
Aluna G2: - Sim.

E diante da diversidade das respostas os alunos sugeriram que começássemos por analisar aquela que tivesse o menor numerador. Aceitamos a recomendação por também ser a resposta que mais se destoou das demais, justamente a resposta dada pelas alunas C1 e G2, 25/1000.

Professor: - Tá! Então começa pelos 25 lá das gurias.

Aluna C1: Daqui até aqui tem 10 [segmento \overline{AR}] e daqui até aqui tem 10 também [segmento \overline{RQ}], daí da vinte. Daí já vi que tá ali no meio, dá mais cinco daqui [ponto V_3], daí dá 25 sobre 1000.

Observamos a indicação da aluna na imagem (Fig. 58) a seguir:



Professor: - Vamos ajudar as gurias aqui.

Aqui, conforme já havíamos apontado anteriormente, temos outra evidência de que ao ampliarem ou reduzirem a imagem com comandos do *software* GeoGebra as alunas C1 e G2 demonstram dificuldades em sinalizar a localização do ponto

escolhido. Então, calmamente, com o auxílio da projeção da tela e participação dos demais colegas, obtivemos a correta localização do ponto.

Professor: - Gente, olhem só! Imaginem que o ponto A delas é o meu S aqui ta! Olhando aqui para tela para vocês entenderem [o ponto A indicado agora por S, seria o extremo esquerdo de \overline{AB}].

- O ponto delas está aqui [o quinto ponto azul marcado por elas da esquerda para a direita], Aí elas falaram que daqui até aqui tem 10 [referindo-se aos pontos pretos que na verdade deveria ser contado como 100 segmentos menores], e até aqui tem mais 10, que chegaria aos vinte.

- Confere ou não confere?

Figura 59 – Apontando a localização do ponto azul das alunas C1 e G2



Fonte: próprio autor

Aluno R2: - Mais ou menos.

Professor: - Vamos de novo. Nós estamos falando das partezinhas azuis. Elas disseram o seguinte: que do A até esse ponto aqui [ponto R], tem dez azulinhos, e deste ponto aqui [ponto R] até aqui [ponto Q] tem outros dez, o que daria os vinte.

Aluno L1: - É verde sor, dos azuis [o aluno querendo informar que entre dois pontos verdes é que teriam dez partes limitadas pelos pontos azuis].

Professor: - Não! Elas estão falando dos pontos pretos. Então vocês concordam que até aqui teriam vinte?

Aluno R2: - Aí daria duzentos e quarenta...

Aluno L1: - É que elas não contaram como 100, elas contaram como 10.

Professor: - Isso! Vocês não contaram como 100 e sim como 10.

Os alunos L1 e R2 identificam o engano cometido pelas alunas C1 e G2, as convencendo que deveriam ter contado de cem em cem.

Aluna G2: - Então é 250?

Professor: - Agora a gente vai ter que ver.

- Os outros grupos, todo mundo considerou que entre pontos pretos teriam 100 pedacinhos?

Alunos em geral: - Sim.

Professor: - Entre os pontos pretos vocês aí tem 100. Agora até o ponto Q temos 200. Agora em cada um desses espaços delimitados pelos pontos verdes, vai ter quantos?

Aluna G2: - Dez.

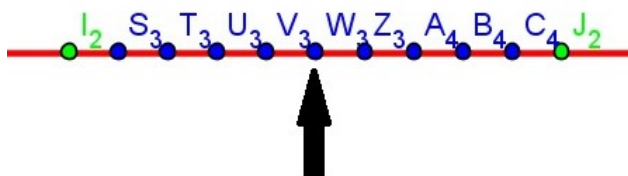
Professor: - Então vamos contar.

Os alunos, contando de 10 em 10, contabilizaram mais 40 segmentos menores. Restava agora a contagem dos segmentos menores limitados pelos pontos azuis, até o ponto escolhido.

Professor: - Agora vocês escolheram qual desses pontos aqui? Seria o primeiro, o segundo? Aí na tela de vocês, qual seria?

Aluna C1: - O quinto.

Figura 60 – Ponto azul escolhido pelas alunas C1 e G2



Fonte: próprio autor

Professor: - Então mais quantos até aqui?

Aluna C1: - Cinco.

Professor: - Então mais cinco pedacinhos. Então em vez de 25 temos 245 sobre mil.

No GeoGebra temos visto quanto o recurso de *zoom* é utilizado pelos alunos nas repartições do segmento e nas investigações em busca de repostas. Diante desse recurso, novamente as alunas C1 e G2, ao terem que indicar uma fração referente aos milésimos encontraram dificuldades na visualização, indicaram $25/1000$ quando o certo seria $245/1000$. Vimos que o aumento ou a redução excessiva da ilustração fez com que as alunas C1 e G2 perdessem detalhes da construção, em particular os pontos, e estando estes ora omitidos, ora sobrepostos, gerou uma dificuldade perceptiva, levando-as a se equivocarem na resposta.

No entanto, o mesmo recurso *zoom* foi utilizado para corrigir o equívoco das alunas. Mostramos o segmento ampliado deixando visíveis todos os pontos azuis e então fomos reduzindo a imagem e novamente articulando diálogos com as alunas e

com os demais colegas, conduzindo-os para a resposta de 245/1000. As alunas pensaram com o *software* GeoGebra usando um de seus recursos que, em um primeiro momento, levou-as ao equívoco. Contudo, permitiu-nos com os mesmos meios reorganizar o seu raciocínio, auxiliando-as a perceber onde havia ocorrido o equívoco e ainda a levá-las à resposta correta.

As demais respostas citadas pelos alunos foram dadas com coerência. Nos resultados 111/1000, 308/1000 e 632/1000, numa rápida conferência pudemos constatar que os alunos estabeleceram corretamente a quantidade de segmentos menores entre pontos verdes e entre pontos pretos.

Tendo os alunos já realizado no GeoGebra o processo de divisão por três vezes, lançamos duas questões, para verificar se eles tinham a ideia da infinidade do processo, e também o modo como aumenta o denominador a cada divisão de dez feita nos sub-segmentos.

Quadro 4 – Perguntas graduação infinita do segmento decimal

- 1) Quantas vezes esse processo poderia ser repetido?
- 2) A cada processo a realizar, de que modo o número de segmentos vai aumentando?

Fonte: próprio autor.

Professor: - Quantas vezes esse processo poderia ser repetido?

Alguns Alunos: - Infinitamente.

Aluno R1: - Não tem como parar.

Aluno L1: - Dá sempre para dividir.

Os colegas que acompanhavam L1 e R1 falaram simultaneamente na possibilidade de ir ampliando no GeoGebra a imagem do segmento para assim poderem fazer novas divisões.

Podemos destacar positivamente a maneira com que o GeoGebra permite trabalhar a imagem do objeto geométrico construído em sua janela de visualização. Os alunos puderam posicionar o segmento para cima, para baixo, para os lados, ou seja, para qualquer lugar na tela que lhes fosse conveniente a melhor execução dos comandos. O *zoom* foi recurso fundamental tanto para os alunos fazerem as divisões no segmento a medida que podiam ampliar e reduzir a imagem, assim como perceber regularidades na construção. A convicção com que os alunos responderam que a divisão decimal do segmento era infinita provavelmente foi influenciada pela potencialidade do uso do *zoom*. De fato, vimos os alunos testarem

esse recurso rolando o botão do mouse do computador para ver o quanto podiam ampliar a imagem afastando um ponto do outro até não serem mais visíveis.

Aluno L1: - Se podemos ir ampliando, podemos sempre ir dividindo.

Embora saibamos que os computadores são limitados, preferimos não comentar nada nesse momento, pois futuramente trabalharíamos com frações geradoras de dízimas periódicas, que também em máquinas implicam limitações. Ressalta-se o quão convencidos os alunos ficaram, por meio do trabalho com o GeoGebra, de que o processo de segmentação decimal é infinito.

Nas sequências de divisões realizadas no segmento \overline{AB} pelos alunos, eles constataram que nas três etapas os tamanhos dos segmentos obtidos eram respectivamente 10, 100 e 1000 vezes menor que \overline{AB} . Em cada etapa os alunos também responderam questões recorrendo à dinamicidade visual proporcionada pelo GeoGebra, o que os fez perceber e indicar corretamente o número de segmentos que surge a cada subdivisão realizada no segmento \overline{AB} , conforme mostra o diálogo a seguir:

Professor: - A cada processo a realizar, de que modo o número de segmentos vai aumentando?

Maioria dos alunos: - De dez em dez.

Aluno L1: - Eles se multiplicam de 10 em 10 vezes.

Aluno W2: - É isso aí, de dez vezes mais.

Finalizando esse encontro, solicitamos que os alunos escolhessem um ponto de cada cor e anotassem a fração, partindo de A aos pontos escolhidos, indicando os tamanhos desses segmentos em relação à medida de \overline{AB} , com o objetivo de verificar se os estudantes tinham compreendido as ideias de décimos, centésimos e milésimos, e também de iniciar a representação dessas frações por meio da expansão decimal.

Durante o desenvolvimento dessa tarefa, ocorreu um fato curioso e relevante. Tomando primeiro os pontos pretos escolhidos pelos alunos, tivemos como respostas frações com denominadores 1000 - por exemplo, o aluno D2 indicou 200/1000, o aluno A1 a fração 300/1000, o aluno N1, 600/1000 etc. Somente uma dupla assinalou a fração com denominador 10, no caso as alunas C1 e G2 com a fração 2/10.

Professor: - Qual é a resposta que se destoa?

Alunos: - A dois sobre dez.

Professor: - E o que vocês acham do dois sobre dez?

Ocorreram murmúrios generalizados na turma.

Professor: - Faz sentido ou não faz?

Alunos: - Faz.

Novamente houve murmúrios na turma, todos dando justificativa para a resposta dada por C1 e G2.

Professor: - Dentro do segmento \overline{AB} quantas partes os pontos pretos dividiram?

Alunos: - Dez.

Professor: - Aí vocês [sinalizando as alunas C1 e G2] colocaram 2/10.

Em seguida, chamamos a atenção para a resposta de outros alunos que responderam com uma fração equivalente à das alunas C1 e G2.

Professor: - Quem colocou a fração 200/1000?

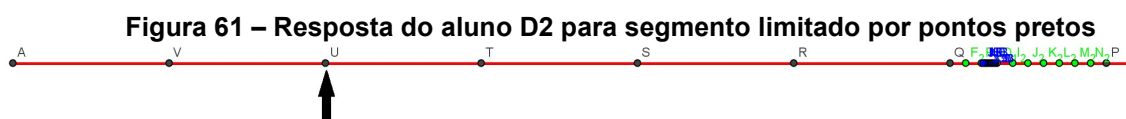
Aluno D2: Eu!

Professor: - Foram vocês R1 e D2. Vocês também pegaram esse ponto [o mesmo ponto das alunas C1 e G2]?

Aluno D2: Fiz valendo por 1000 a reta.

Professor: - E porque vocês colocaram 200?

Aluno D2: - Cada segmento vale 100.



Fonte: Próprio autor

Ao verificarmos os pontos verdes que os alunos tomaram, aconteceu fato semelhante - os alunos, em geral, colocaram os denominadores 1000 e as alunas C1 e G2 fizeram uso agora do denominador 100. Essas alunas indicaram a fração $23/100$, enquanto os alunos R1 e D2 indicaram $420/1000$. Esclarecemos que os pontos não eram os mesmos, mas ambas as frações enunciadas eram condizentes com os pontos escolhidos.

Mas há de se destacar as alunas C1 e G2. Em participações anteriores, relatamos as dificuldades dessas alunas em indicar frações mediante as visualizações dos pontos no monitor do computador. Entretanto, verificamos com

essas últimas respostas que as alunas não só indicaram frações de acordo com as posições dos pontos no segmento, mas também sendo as únicas a fazerem referência à ideia dos décimos, centésimos e milésimos. Ainda, não estando as repostas dos outros alunos erradas, pudemos mostrar que apesar das frações terem sido escritas de formas diferentes (como no caso das frações $2/10$ e $200/1000$), estas representavam uma mesma medida e/ou a localização de um mesmo ponto.

Podemos observar nessa situação, com base em Borba (2001) e Souto (2013) um exemplo de “pensar com” o computador, formando-se um coletivo de alunos-e-professores-com-GeoGebra, em que a reorganização do pensamento é considerada um novo estágio do pensamento qualitativamente diferente que aceita as possibilidades oferecidas pelo computador. No âmbito investigativo podemos entender o porquê devemos considerar a informática como possibilidade de promover conhecimento. Para Borba e Penteado (2015) a informática permite colocar os alunos a desafiar a linearidade de raciocínio, baseado na simulação e experimentação, envolvendo oralidade, escrita, imagens e comunicação instantâneas. Nesse sentido, compreender o uso dos computadores na perspectiva baseada no construto seres-humanos-com-mídias está em harmonia com o uso de atividades investigativas, conforme os próprios autores sugerem em seu trabalho.

O tempo de aula nesse dia esgotara então, deixamos por abordar a escrita da expansão decimal para cada uma dessas frações no encontro seguinte.

4.1.4 Dados e Considerações do Quarto Encontro: 05/11/2014

Como já podemos verificar, a aula em ambientes investigativos tem como características questões exploratórias, seguidas de questionamentos e momentos de diálogos entre alunos e professores, que demandam um tempo considerável. Conforme Brocardo, Oliveira e Ponte (2003), a prática de aulas investigativas necessita carga horária considerável, principalmente nas primeiras experiências e nos primeiros momentos em que se faz discussões na obtenção de resultados. Entretanto, ao realizarmos novas experiências investigativas com esses estudantes o tempo pode ser recuperado, pois eles já estarão mais familiarizados com esse tipo de atividade, sabendo aquilo que esperamos deles. Em nosso caso, a proximidade

do fim do ano letivo e a necessidade de cumprir os conteúdos básicos do currículo escolar não nos daria oportunidade de realizar outra investigação que possibilitasse compensar o tempo aqui destinado, e as circunstâncias fizeram com que repensássemos o seguimento das demais aulas. Além disso, também nos foi comunicado que era preciso disponibilizar o laboratório de informática para realizações de trabalhos de outros professores da escola, tendo em vista que na instituição havia um único laboratório para atender os mais de 1.000 alunos matriculados.

Dessa forma, conforme Brocardo, Oliveira e Ponte (2003) a avaliação do progresso da investigação, considerando as circunstâncias acima, pode levar o professor a reequacionar determinadas decisões quanto ao desenrolar das aulas. Assim, passamos a fazer adaptações nas atividades seguintes, buscando delinear questões mais generalizadas sem que perdêssemos as características de investigar e discutir sobre aquilo que se estava estudando.

Para que não houvesse grandes prejuízos na nossa prática adotamos e sugerimos as seguintes medidas: a) delimitação do tempo da investigação que antes deixávamos mais livre respeitando o tempo de cada aluno; b) indicar as questões mais significativas para o aprendizado e investigação, e c) administrar o tempo destinado aos debates.

No início do quarto encontro, verificando que a livre escolha de pontos sugerida na aula anterior levaria a uma diversidade de respostas e que o tempo para analisá-las nos custaria bons minutos, propomos a alteração da atividade tomando os pontos por nós indicados e lançando, após, algumas perguntas (quadro 7), passando assim os alunos a estudarem sobre os mesmos pontos, confrontando após certo tempo suas respostas.

Quadro 5 - Perguntas 4º encontro (alterada a 1ª questão)

1) Dos pontos que você escolheu e escreveu sua respectiva fração indique através da imagem o número indicado.			
2) Como você justificaria a igualdade entre a representação de fração e o número decimal?			
3) Na sequência de frações abaixo indique os respectivos números decimais:			
$\frac{7}{10} =$	$\frac{7}{100} =$	$\frac{7}{1000} =$	$\frac{7}{1000\dots000} =$ <i>n zeros</i>
4) Para cada número decimal abaixo indique a fração correspondente:			

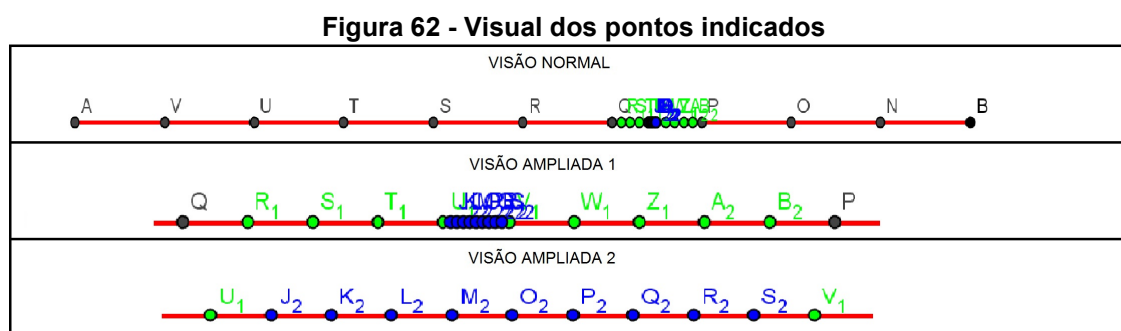
$3,2 =$	$0,32 =$	$0,032 =$	$0,0032 =$	$0,000\dots0032 =$ <i>n</i> algarismos
5) Quantos números há entre 0 e 1? Justifique.				

Fonte: Próprio autor

Indicamos então um ponto de cada cor e, conforme o tamanho do segmento partindo do ponto A, os alunos deveriam indicar a fração em relação ao comprimento do segmento \overline{AB} . Em seguida, acionando a visualização do eixo das abscissas no GeoGebra e considerando-a como uma reta numérica, os alunos tomariam nota da representação decimal indicada pelo *software* equivalente à representação fracionária por eles escrita.

Professor: - Melhor a gente fazer assim, oh! Vamos mudar um pouco esse exercício, em vez de vocês pegarem os pontos que vocês colocaram eu vou dar os pontos ta? Ok?

Então eu quero a fração e o número decimal do U, S₁ e M₂ [sendo das cores preta, verde e azul respectivamente].



Professor: - Para eu analisar as ideias em grupo é melhor que a gente tome os mesmos pontos para ver o que cada grupo vai achar

Fazendo uso da projeção, indicamos para os estudantes ponto por ponto sua localização no segmento. Diante dos monitores eles tomavam os pontos correspondentes e faziam o mesmo, o localizavam no segmento e anotavam as respectivas frações. Obtivemos os seguintes registros.

Professor: - No U vocês obtiveram que fração?

Alunos em geral: - Dois sobre dez.

Professor: - Isso!

Na fração seguinte, referente ao ponto S_1 , ao circularmos na sala, pudemos constatar duas respostas corretas distintas, uma com denominador 100 e a outra com denominador 1000. Perante a isso, fizemos com a turma esses dois encaminhamentos.

Professor: - Quantas partezinhas teríamos até chegar no Q [pontos verdes como referência] ?

Alunos em geral: - Sessenta.

Professor: - E quem pegou os azuis, quanto teria que até chegar no Q?

Alunos em geral: Seiscentos.

Professor: - Então ficaria quanto aqui [ponto S_1]?

Alunos: - 62 sobre 100 [tomando os pontos verdes].

Professor: - E quem colocou mil em baixo ficaria quanto?

Alunos em geral: - Seiscentos e vinte.

Aluno A1: - 602.

Ao transitar entre os alunos, verificamos que muitos fizeram referência ao denominador 1000 por se tratar da memória mais recente, os segmentos menores limitados pelos pontos azuis foram a última atividade de construção no GeoGebra por eles realizados.

Para o ponto S_1 , tivemos a escrita de frações equivalentes, com ressalva da resposta dada por A1. Mas considerando o todo, podemos constatar que os alunos demonstraram homogeneidade em suas respostas.

Indagando a resposta 602, dada pelo aluno A1:

Professor: - Alguém teria colocado diferente por acaso? A1 tu colocou 602?

Aluno A1: - Dois sobre cem.

Professor: - Mas como é que tu pensaste daí?

Aluno A1: - Daí, por exemplo, dos 100, daí até o S tem 2 [o aluno se referindo a quantidade de segmentos menores entre dois pontos pretos].

Professor: - Só que aí tu ficaste limitado pelos pontos Q e P, e é todo o segmento.

Figura 63 - Visualização na tela de A1



Fonte: próprio autor

A visualização no monitor feita pelo aluno A1 tinha uma imagem ampliada do segmento \overline{AB} (Fig. 63), onde os únicos pontos pretos visíveis eram P e Q, tendo contabilizado 600 segmentos menores até o ponto Q, e em seguida somando os dois segmentos até o ponto S_1 , em vez de 20.

Notamos que o aluno A1 para observar os segmentos limitados por pontos de diferentes cores fez uma ampliação da imagem e, por consequência, parte do segmento \overline{AB} transcendeu o campo visual da tela do computador. Percebemos que o aluno fez boa relação entre os segmentos limitados pelos pontos pretos, faltando-lhe talvez alterar algumas vezes o *zoom* da imagem para que, assim, se desse conta da escrita correta da fração.

O recurso *zoom* indicou novamente dificuldades para os alunos do grupo de A1. Estes, ao ampliarem a imagem do segmento \overline{AB} , ficando visível somente \overline{QP} , perderam a noção de medida em relação aos segmentos limitados por pontos azuis dos quais estavam realizando a medição. Em vez de dezenas de segmentos entre pontos verdes os contabilizam um a um. Novamente, como já havíamos feito e relatado nos encontros anteriores, trouxemos para a discussão o raciocínio do aluno e demarcamos aquilo que o aluno não tinha percebido.

Vemos ainda nas atividades que exigem a ampliação e redução de imagem no GeoGebra, a necessidade de estarmos sempre atentos para os detalhes que são ocultados aos alunos quando alteram o campo visual para observação do objeto. Por outro lado, esses momentos surgem como possibilidades de confrontar as respostas. Segundo Borba e Penteado (2015), *softwares* gráficos como o GeoGebra além de trazer a visualização para o centro, trazem para os alunos a experimentação que os auxiliam a desenvolver argumentações. Em determinado momento, o professor promoverá a discussão dessas justificativas, bem como os resultados obtidos, mantendo ou refutando-os. Nesse instante podem surgir novas argumentações e por consequência novas conclusões. Nesse sentido, uma aparente limitação do *software* torna-se uma potencialidade para o ensino de matemática.

Na sequência, avançamos para o ponto M_2 .

Professor: - No M_2 vocês não têm escapatória; como vai ser o denominador?

Alunos em geral: - Mil.

Professor: - Até o Q quantas partes azuis nós temos mesmo?

Alunos em geral: - Seiscentos.

Professor: - Então qual é o numerador nessa fração aqui?

Alunos em geral: - Seiscentos e quarenta e quatro.

O passo seguinte foi tornar visível o eixo das abscissas no GeoGebra podendo ser observada a representação decimal em cada ponto marcado pelos alunos. Assim, solicitamos que os alunos escrevessem do lado das frações obtidas as representações em expansão decimal e equivalentes, de acordo com o ponto observado sobre o segmento \overline{AB} , isto é: $2/10 = 0,2$; $62/100 = 0,62$ e $644/1000 = 0,644$. Ao escrevermos a última igualdade no quadro, o aluno A1 faz a seguinte observação:

Aluno A1: - Ô sor, já está dando a resposta é só tirar o zero.

O aluno A1 percebe a regularidade de que se tirasse o zero e a vírgula da representação em expansão decimal esse seria o numerador da fração. Essa regularidade previamente observada por A1 alinhou-se justamente com a nossa próxima questão. Nosso interesse, era em saber que justificativa os alunos dariam para tais resultados:

Professor: - Como você justificaria a igualdade entre a representação de fração e o número decimal?

Aluno M4: - Dividindo o numerador pelo denominador.

Aluno W2: - O numerador fica antes da vírgula e o denominador ficou antes só porém o zero ali.

A fala de W2 está próxima daquilo que A1 já havia mencionado, percebendo que em frações decimais os denominadores se repetem como algarismos do número, mas não expressam claramente a consequência de termos denominadores decimais, e o mesmo ainda acontece com R1.

Professor: - Ta! Fala R1.

Aluno R1: - Mesma coisa que eu fiz para o sete. Eu fiz lá o resultado 0,7, então 0,7. Ali tá 6/10 lá 7/10, 0,7. Foi o que eu entendi.

Como os alunos não se referiam sobre os denominadores decimais encaminhamos outra pergunta.

Professor: - Por exemplo, aqui em 2/10 deu 0,2, por que não de repente 0,02?

Aluno A1: - Por causa do zero.

Professor: - Hã?

Alunos A1 e R2: - Falta um zero.

Aluno L1: - Porque para contar o 10 ali tem que ter uma casa, porque como é o 10, senão teria que ter duas casas depois da vírgula.

Aluno D1: - O cem, vírgula, 0,07.

Professor: - Isso! Entenderam a ideia deles?

Alunos: - Sim!

Professor: - Quantos zeros têm aqui [referindo-se ao denominador 10]?

Alunos em geral: - Um.

Professor: - Então um zero, dez, décimos, então uma casa decimal. Se for mil quantos zeros ?

Alunos em geral: - Três.

Professor: - Então depois da vírgula quantas casas decimais?

Alunos em geral: - Três.

Professor: - Agora lá no fundo, os alunos M4 e R2 citaram outra coisa. O que vocês falaram?

Aluno M4: - Dividir o numerador pelo denominador.

Professor: - É verdade isso?

Alunos M4 e R2: - Sim, a gente aprendeu isso com o senhor.

Professor: - Lembraram!

Observa-se que os alunos perceberam o número de zeros nas potências de 10 como o indicativo da quantidade de casas decimais do número. Além disso, os alunos M4 e R2 recordaram das aulas dos anos anteriores, onde já haviam convertido frações em decimais, a divisão entre o numerador e o denominador, embora os métodos e recursos utilizados eram diferentes dos de agora. Aproveitamos esse momento, para comprovar a conjectura sobre os denominadores, 10, 100, 1000, utilizando o algoritmo da divisão, e fizemos as divisões referentes às três frações.

Professor: - Então vocês já fizeram contas desse tipo aqui, de pegar o 2 e dividi-lo por 10. No segmento, a gente fez divisão de segmentos, e agora nós estamos levando para a divisão de números.

- Então o dez cabe no 2 quantas vezes? O que a gente fazia daí?

Aluno L1: - Acrescenta o zero.

Aluno A1: - Zero e vírgula.

Professor: - E agora cabem quantas vezes?

Alunos: - Duas.

Professor: - Então o número decimal se dá para justificar pela quantidade de zeros que têm 10, 100, 1000 e também dá para justificar pela divisão.

Dessa maneira, expusemos a todos da classe, as equivalências entre as frações decimais e a representação decimal, podendo a conversão ser feita por eles tanto pela divisão euclidiana aplicando o algoritmo da divisão, quanto pela observação dos denominadores 10, 100, 1000...

As tarefas seguintes consistiam nos alunos realizarem as conversões.

Professor: - Como é que vocês colocaram aqui no primeiro [referindo-se à conversão de $7/10$]?

Alunos: - Zero vírgula sete.

Professor: - O segundo?

Alunos: - Zero vírgula zero sete.

Professor: - O terceiro?

Alunos: - Zero vírgula zero, zero, sete.

Professor: - Quantos zeros têm aqui [referindo-se a fração] $\frac{7}{\underbrace{1000\dots000}_{n \text{ zeros}}}$?

Aluno A1: - Vários.

Professor: - Tem uma quantidade n de zeros. Então como ficaria aqui?

Aluno R2: Zero vírgula n .

Alunos em geral: - Zero vírgula, zero, zero ...

Professor: - Quantos [referindo-se a quantidade de zeros]?

Aluno A1: - Zero vírgula zero, zero, n .

Professor: - Continuo [a medida que ia colocando zeros]?

Aluno D1: - Vai sor, não acaba nunca

Aluno A1: - Bota o n .

Aluno R2: - Bota os três pontinhos.

Professor: - Ponho os três pontinhos. Ta!

Aluno D1: - E o sete.

Professor: - Quantas casas teriam aqui?

Aluno L1: - Vários

Aluna V4: - Ene.

Aluna V4 - É infinitos.

Professor: - Infinitos gente ou não?

Alunos em geral: - Sim.

Professor: - Mas está dizendo que o n é infinito aqui?

Alunos em geral: - Não.

Aluno R2: - Mas também diz que não.

Professor: - Tens razão, não está dizendo que é e nem que não é. Mas ali, quando se diz n , ta gente, é que sim, determina uma quantidade de número, que nem numa equação, uma incógnita. Então a gente representa n ta. Aqui teria n Algarismos.

A indicação do termo n zeros, junto a reticências cujo significado é a continuidade, levou a aluna V4 em dizer que haveria infinitos Algarismos. Então, ao questionarmos com desconfiança a utilização do n zeros implicar uma quantidade infinita de Algarismos, tivemos a justificativa do aluno R2, descrevendo-nos que não estava explícito se o n era ou não uma quantidade finita. Assim, pudemos esclarecer que n determinava uma quantidade finita de Algarismos, ou seja, o termo n zeros representava uma quantidade finita de zeros na fração o que implicaria, também, uma quantidade finita de Algarismos na representação do número racional. Talvez aqui tenhamos dado um indicativo de que não podemos confundir o termo “vários” com o termo “infinito”.

As reticências têm indicação de continuidade, e na matemática, por exemplo, expressamos o conjunto dos números naturais por: $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\dots\}$. Nessa representação, as reticências indicam que os números naturais são infinitos. De forma semelhante, os alunos podem ter tido esse entendimento. Outro aspecto a destacar é quanto ao entendimento da expressão n vezes. Ao questionarmos se o n indicava o infinito, o aluno R2 fez a colocação que ali não dizia nem que sim e nem que não. Explicamos, então, ao aluno e à turma, de que eles já utilizavam letras para representar números, portanto, o n era um número que definia a quantidade de zeros para o denominador, o que implicaria ter finitas casas decimais. A maneira como enunciamos a fração, em particular, o denominador, $\underbrace{100\dots000}_{n \text{ zeros}}$, era uma novidade para grande parte dos alunos que se mostraram surpresos ao vê-la.

Conforme Ponte (2014) para os alunos serem capazes de conhecer conceitos matemáticos, eles necessitam se inteirar de uma diversidade de representações que venham dar suporte à sua compreensão. Em outras palavras, a

Matemática é uma disciplina que exige a diversificação dos registros de representação, deve-se buscar a diferenciação entre representante e representado, bem como, a coordenação desses diferentes registros.

A reflexão acima, nos chama atenção para a importância dos símbolos, do seu significado e a forma com que os articulamos. Por mais que os alunos possam ter ideia dos símbolos, ao relacioná-los podemos ter como resultado interpretações distorcidas e imprecisas.

Dando sequência à atividade, o passo seguinte foi verificar o procedimento contrário, isto é, converter os números com representação decimal em frações decimais, no caso os números: 3,2; 0,32; 0,032 e $0,\underbrace{000\dots0032}_{n \text{ algarismos}}$.

Professor: - E a fração aqui, como é que vocês colocaram? O 3,2?

Alunos em geral: - Trinta e dois sobre 10.

Professor: - A segunda?

Alunos em geral: - Trinta e dois sobre 100.

E sem questionar os alunos já deram a resposta da questão seguinte.

Alunos em geral: - Trinta e dois sobre 1000.

Professor: - E a última que fala 0,00...0032?

Alunas C1, G2 e V4: - A mesma coisa que colocamos ali.

Professor: - Vocês fizeram relação dessa aqui com essa [apontando para a comparação e análise entre as representações de $0,\underbrace{000\dots0032}_{n \text{ algarismos}}$ e $\frac{7}{\underbrace{1000\dots000}_{n \text{ zeros}}}$]?

Alunos em geral: - Sim.

Professor: - Então se for por essa lógica aqui, a gente vai ter o número 32 [numerador], o um aqui embaixo.

Aluno A1: - Daí zero, zero, zero e os três pontinhos.

Professor: - Quantos zeros teremos aqui embaixo?

Aluno R2: - Ene.

Professor: - Ok! Ene zeros.

Nessa parte de conversões tivemos respostas mais diretas e uniformes. Os alunos, em sua maioria, concordavam com as respostas que eram dadas por seus colegas, demonstrando maior consciência da regularidade que se mostrava ao quadro.

Tendo os estudantes realizado os processos de divisões do segmento no GeoGebra, podendo ampliar e reduzir a imagem, e agora investigado a equivalência entre frações decimais e a representação decimal, queríamos saber o que os alunos diriam sobre a quantidade de números racionais existentes entre 0 e 1. Nessa questão os alunos foram unânimes em afirmar que havia infinitos números.

Os estudantes já sabiam que a obtenção de frações decimais no segmento era infinita. Ao perguntarmos a quantidade de números entre 0 e 1 (não naturais), foi fácil se convencerem de que era infinita. Alguns alunos usaram o recurso do *zoom* para responderem essa questão. Contudo, mesmo ampliando muitas vezes a imagem, não conseguiram esgotar o *zoom* do GeoGebra, ou melhor, tendo o intervalo de 0 a 1 visível no computador, ao irem ampliando a imagem, viram números surgirem com dois, três, quatro, cinco dígitos à direita da vírgula. Esse é outro exemplo da descrição feita por Borba e Penteadó (2015) do enfoque experimental realizado pelos alunos os quais podem obter e testar conjecturas explorando ao máximo as possibilidades de rápido *feedback* das mídias informáticas. Na questão levantada, por não conseguirem findar o recurso do *zoom*, concluíram que poderiam ir ampliando infinitamente a imagem, de modo que números com mais casas decimais apareceriam não somente no intervalo de 0 a 1, mas em qualquer outro intervalo.

Mas nos chamou a atenção a resposta dada pelos alunos D1 e R2. Esses alunos tinham outros parceiros de dupla, mas isso não os impediu de trocarem ideias mesmo estando distantes um do outro.

Professor: - O R2 há umas duas aulas antes, ele pegou e disse; - Bah, essa pergunta aqui é tri.

Aluno D1: Ah! Fui eu que falei infinitamente.

Professor: - A maioria, eu já dei uma passada pelos grupos e já dei uma olhadinha no que vocês escreveram. E a maioria chegou a uma mesma resposta.

- Mas R2, quantos números de 0 a 1?

Aluno R2: - Infinitos.

Professor: - O R2 pegou e disse o seguinte [numa das aulas anteriores], ele falou que havia infinitos maiores que os outros. Como será?

Aluno R2: - Entre 0 e 1 tem infinitos, entre 0 e 2 tem um infinito maior, têm mais numerozinhos entre eles.

Professor: - Vocês entenderam a jogada dele?

Alunos: - Sim [e muitos murmuraram com a resposta]!

Professor: - O R2 viajou aí né!? E viajou de uma maneira até filosófica na coisa. Porque, olha ali, de 0 até 1 tem uma quantidade infinita de números, ok? Agora, se pegarmos que nem ele falou de 0 a 2, o pensamento dele diz que vai ter um infinito maior que o outro.

Mas será que há um infinito maior que o outro?

Nesse momento ocorreram muitos murmúrios entre os alunos, e as opiniões se dividiram.

Aluna C1: - Sim, imagina do um ao um milhão.

Aluno A1: - Não se sabe.

Aluno R2: - Oh sor! Um físico eu acho que falou que existem infinitos maiores.

Professor: - Te lembra o nome do físico?

Aluno R2: - Não, eu vi num filme.

Professor: - E o filme tu te lembras?

Aluno R2: - Sim, A culpa é das estrelas.

Aqui vimos a aluna C1 afirmar ser positiva a afirmação da existência de infinitos maiores que outros, tomando um intervalo maior de números. Já o aluno A1 indica que essa pergunta é algo que não tem uma resposta definitiva, enquanto que o aluno R2 continuou também com os dois intervalos distintos de números para fazer a sua afirmação que há infinitos maiores que os outros e justificando também a afirmação de um físico que havia sido citado no filme mencionado.

Professor: - Se a gente for parar para pensar essa questão de infinito, bom, infinito já está dizendo de algo que não tem fim. Agora a gente vai pensar assim, que tem uma coisa que não tem fim e há uma outra coisa que também não tem fim, e que essa coisa que não tem fim seja maior que a outra, parece coisa de bêbado, não parece?

Alunos: [risos].

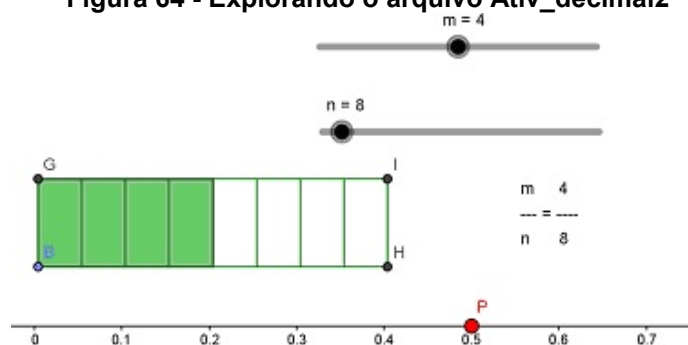
Professor: - Gente, dá muito pano para manga, não sei se aqui alguém vai estudar matemática, mas para quem for nessa linha da matemática e estudar matemática a fundo, tem uma área na matemática que se chama matemática pura que discute esse tipo de coisa.

Os alunos D1 e R2 haviam assistido ao filme intitulado “A Culpa é das Estrelas”, e associado uma cena com a pergunta da aula. Esses jovens expuseram

para o professor e a turma que haveria infinitos maiores que outros. Justificaram esse argumento comparando o intervalo de 0 e 1 com o intervalo de 0 a 2. No entanto, o aluno A1 se demonstra desconfiado, pois como um infinito poderia ser maior que o outro se ambos são infinitos? A discussão era um tanto complexa, e exigia aprofundamento matemático que fugia do escopo da aula, mas enaltecemos as colocações dos colegas por levarem seus pensamentos a ideias tão profundas. Embora saibamos que na Matemática existe a prova de haver infinitos maiores, deixamos esta pergunta em aberto sem resposta até mesmo para que os alunos se motivassem a buscar informação a respeito. Os alunos se colocaram dentro do cenário investigativo da matemática pela matemática, valorizando-a como disciplina. Para nós professores foi um momento de satisfação, o pensamento e o debate trazido pelos alunos D1 e R2 quanto a existência de infinitos maiores que outros, se tornou um fato interessante por se tratar de algo trazido pelos próprios alunos e ter ainda cativado os outros a refletirem em um assunto tão complexo e abstrato. Experimentamos naquele momento um sentimento de ter despertado nos alunos o interesse na Matemática por ela mesma, e ter deixado para eles um convite a estudá-la como sua formação profissional.

Dando seguimento ao encontro, os alunos passaram a trabalhar com o arquivo “ativ_decimal2” no GeoGebra para analisar características das frações próprias como já havíamos descrito no capítulo 2.3.1. Lembramos que se trata de uma construção dotada de um retângulo que vai se dividindo em partes iguais pelo controle deslizante “n” e são pintadas partes desses retângulos pelo controle deslizante “m”, onde $m \leq n$, ou seja, teremos no máximo um retângulo inteiro pintado. Além disso, estava indicado um ponto P sobre o eixo das abscissas que indicava a representação decimal equivalente à fração indicada no retângulo.

Figura 64 - Explorando o arquivo Ativ_decimal2



Fonte: Próprio autor

O restante do tempo desse encontro foi destinado para os alunos se apropriarem das alterações causadas na imagem do retângulo ao mudarem os valores de m e n . Com o término da aula perguntamos para os alunos sobre tais características.

Professor: - Vocês observaram que tem a figura que é um retângulo, tem um controle que é o controle m , tem o outro controle que é o controle n , e mexendo nesses controles eles vão mexendo tanto no retângulo quanto na parte que vai se pintando, e também mexe no ponto P .

- Primeira pergunta que eu faço a vocês. O que faz o n ?

Alunos: - Divide.

Alunos A1 e V2: - Divide em pedacinhos.

Professor: - E o m , o que faz?

Alunos: - Ele pinta.

Aluno A1: - Ele pinta os pedacinhos lá, em verde.

Professor: - Além disso, o que o m e o n formam?

Alunos: - Fração.

Professor: - O que o m é?

Alunos: - Numerador.

Professor: - E o n ?

Alunos: - Denominador.

Nas atividades anteriores os alunos determinavam frações tomando partes de um segmento. Agora passamos da representação geométrica do segmento para um retângulo, sendo agregada a fração e o ponto na reta numérica. A ideia desse arquivo é permitir ao aluno ter as múltiplas representações do número racional em uma mesma tela.

Estando os alunos familiarizados com o arquivo, ficamos combinados em continuar a exploração no próximo encontro.

4.2 Da Abordagem sobre as Frações que geram Dízima Periódica

4.2.1 Dados e Considerações do Quinto Encontro – 12/11/2014

O presente encontro destinou-se a tratar de frações que geram as dízimas periódicas e mostrar para os alunos quando isso ocorrerá. Como primeira atividade do encontro pedimos que os alunos primeiramente fizessem a representação da fração $1/3$ no retângulo do arquivo `ativ_decimal2` no GeoGebra. Em seguida, tomando o ponto P que se situava na reta numérica, eixo das abscissas, pedimos que os alunos anotassem as aproximações decimais da fração $1/3$ fornecidas pelo GeoGebra com uma até cinco casas decimais. Esses valores foram obtidos a partir de comandos de *zoom* no *software*.

Professor: - Com uma casa decimal, 1/3 ficou entre que valores?

Aluna M2: - Entre 0,3 e 0,4.

O restante dos alunos deu a mesma resposta em coro logo após M2 ter falado.

Professor: - Com duas casas o que você acharam?

Alunos: - 0,32 e 0,34.

Aqui observamos que, ao ampliarmos a imagem no GeoGebra, num primeiro instante os decimais mais próximos de $1/3$ são mostrados com o último dígito par, como vemos na resposta acima e na seguinte.

Professor: - Com três casas?

Alguns Alunos: - 0,332 e 0,334.

Os estudantes, em sua maioria, ao anotarem a representação decimal com a quantidade de casas solicitadas, registraram a primeira aparição de números que o GeoGebra trazia, isso fez com que não visualizassem os valores mais próximos de $1/3$, pois para tanto precisariam aplicar mais *zoom*. Esse aspecto passou despercebido pelos alunos, que não se deram conta de que ao ampliar mais a imagem encontrariam uma vizinhança mais próxima de $1/3$.

Os alunos ao terem feito as aproximações, observando a localização do ponto na reta numérica, o passo seguinte foi verificar o que eles haviam percebido.

Professor: - O que você observa com as anotações feitas na atividade anterior? E a outra pergunta é..., tem a fração $1/3$ se vocês conseguem definir um número³ para ela?

- Tá! Primeiro, o que vocês observam?

Aluno R2: - Que cada vez que a imagem é ampliada aumenta um número, que é o 3 no caso.

Aluno D1: - Cada casa aumenta um número, sor, e assim por diante.

Aluno R1: - É infinitamente.

Professor: - E tem alguma regularidade?

Aluno R2: - Aumenta só o três, aparece um três a mais.

Aluna G1: - Aparece um três a mais nas casas que vão aparecendo.

Professor: - Vai sempre aumentando a quantidade de um dígito no caso o 3.

Dá para indicar um valor exato para ele?

Alunos: - Não.

Professor: - Se vocês fossem indicar um número para representar ele, que número vocês colocariam?

Aluno R2: - Três, um vírgula três?

Professor: - Poderia ser um vírgula três?

Aluno W2: - Zero vírgula três.

Nesse momento colocamos no quadro o indicado pelo aluno, ou seja, 0,3.

Professor: - Com uma casa só?

Aluno R2: - Zero virgula três, três e os pontinhos.

Aluna C1: - Zero vírgula e o infinito.

No quadro, acrescentamos mais dois dígitos 3 e as reticências, isto é, anotamos 0,333..., sem chamar a atenção deles para o que estávamos escrevendo.

Professor: - Falando em infinito, o infinito tem alguma coisa haver aí?

Alunos: - Sim.

Aluno R2: - A infinidade do número.

Professor: - E que número seria esse [se referindo ao dígito após a vírgula]?

Aluno W2: - Aquele número que está lá no quadro [se referindo ao número 0,333... que havíamos anotado no quadro com a contribuição dos alunos].

³

Ao utilizarmos a palavra “número” na pergunta, tivemos a intenção de usar um linguajar mais próximo dos alunos, embora o correto fosse dizer “representação decimal”.

Professor: - Nós temos a fração $1/3$ e colocando o que o R2 falou, zero vírgula três, três e colocar os três pontinhos, só que também pode ser outra representação. Diga W2.

Aluno W2: - Bota zero vírgula três e o traço em cima do três.

Alguns alunos, como o W2, já haviam, no ano anterior, determinado números com dízimas periódicas, tendo aplicado o algoritmo da divisão. Aprenderam a indicar a dízima com a notação do traço sobre o período. As aproximações realizadas pelos alunos com o GeoGebra os levaram a pensar na representação decimal com o dígito três se repetindo infinitamente, que com a notação dada pela lembrança do aluno W2, condizia à denominação de dízima periódica.

Na indicação da representação decimal para o número $1/3$, o diálogo característico do cenário investigativo permitiu compor coletivamente a representação decimal. Temos observado que as respostas, quando obtidas com a participação dos alunos, nos deram a boa impressão de que eles aceitam e se apropriam melhor das repostas e conceitos.

[...] a capacidade dos alunos comunicar matematicamente, cuja importância é bem sucedida, pode aqui ser trabalhada de forma espontânea e genuína para os alunos, uma vez que diz respeito aos seus próprios pensamentos. A adicionar esses motivos, haverá a acrescentar e recordar que a escrita dos resultados ajuda os alunos a clarificarem suas ideias, nomeadamente a explicar as suas conjecturas, e favorece o estabelecimento de consensos e de um entendimento comum quanto às suas realizações (BROCARDO, OLIVEIRA, PONTE, p. 36, 2003).

Em seguida, voltamos a visualizar com os alunos no GeoGebra as aproximações por eles realizadas, chamando-os a perceberem, conforme a ampliação da imagem e o número de casas decimais, a representação decimal que mais se aproximava de $1/3$, ou seja, 0,333, por exemplo, está mais próximo de $1/3$ que 0,332. Além disso, retomamos a imagem do computador que permitia olhar a fração $1/3$ com a representação decimal encontrada. No entanto, na representação decimal fornecida pelo *software* não aparecia a reticências. Nesse momento fizemos a ressalva das limitações de se trabalhar com os recursos computacionais.

Professor: - Conforme a gente percebeu, nós temos a fração e o número decimal expandido, no caso aqui é infinito. O computador no caso, ele é limitado, tá gente! O máximo que ele vai conseguir é colocar quinze números depois da vírgula.

Se a gente colocar em “opções” e for para “arredondamento”, o máximo que o computador vai indicar são quinze casas decimais.

Ao elaborarmos as atividades no GeoGebra, podemos constatar que tanto a expansão decimal era limitada em 15 casas decimais quando deixávamos visível, por exemplo, $7/9 = 0,777777777777778$, quanto o esgotamento da ampliação da imagem de algum objeto geométrico. Ao ampliarmos o campo de visão do eixo das abscissas podemos constatar, que os valores nesse eixo a partir da sexta casa decimal começa a fazer uso da escrita E-1, o que indica a divisão dos números visíveis no eixo por 10 ou a multiplicação do número por 10^{-1} , assim, $7,77777E-1 = 0,777777$.

Embora os alunos não tenham ampliado suficientemente para verificarem a aparição de tais expressões, acabamos mostrando visualmente para esses jovens que os computadores e softwares têm limitações. Para Borba e Penteado (2015), as tecnologias exercem forte influência nos estudantes e diante dos resultados que as tecnologias fornecem podem convencê-los de que se trata de uma resposta quando na verdade pode se tratar apenas de uma aproximação, ou de uma imagem que foi representada de forma distorcida devido à configuração da máquina ou do modo como o software interpreta os dados a ele lançado, considerando a linguagem de programação utilizada. Logo computadores, assim como as calculadoras, pela maneira como representam os números racionais, proporcionam uma visualização parcial, deixando à mostra apenas uma pequena quantidade de algarismos, seja pela limitação dos pequenos visores das calculadoras ou pela restrição decorrente da linguagem computacional utilizada na programação do *software*. Nesse sentido, é importante que o professor esteja atento para que essas limitações sejam discutidas com os alunos e, de alguma forma, justificativas sejam buscadas para esclarecer as observações feitas a partir dos experimentos.

Embora o computador e o GeoGebra sejam recursos limitados, seu dinamismo permitiu levar alguns alunos a certas conclusões, como a dos alunos R2 e W2 que afirmaram que a fração $1/3$ gera o decimal $0,3\bar{3}$.

Por outro lado, o computador permite-nos visualizar simultaneamente distintas representações. A atividade trabalhada com os alunos permitiu-lhes representarem a fração numa figura “concreta” (o retângulo fracionado) e em seguida fazerem aproximações na reta da representação decimal correspondente à fração estudada,

observando ainda a vizinhança na qual o número estava compreendido. Após isso, ainda retomamos na tela do computador todas as representações que o GeoGebra nos fornecia, convocando os alunos a observarem o resultado dado pela aquela imagem, sendo todas as representações equivalentes entre si.

Demos continuidade à aula, colocando os alunos a trabalhar com dois blocos distintos de frações, como mostra o quadro 8 abaixo, onde o bloco da esquerda faz referências às frações decimais e o da direita, às frações geradoras de dízimas periódicas. Os alunos representaram e observaram as tais frações no computador, tendo anotado os respectivos números racionais gerados.

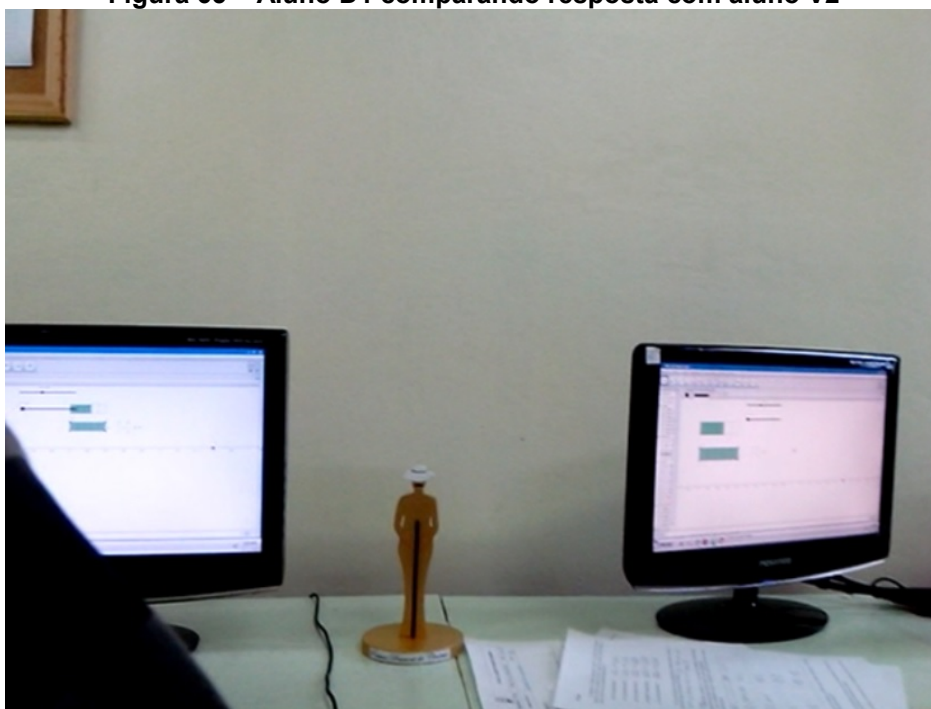
Quadro 6 – Blocos de Frações

Bloco 1	Bloco 2
a) $\frac{25}{100} e \frac{1}{4}$	a) $\frac{6}{9} e \frac{2}{3}$
b) $\frac{16}{10} e \frac{8}{5}$	b) $\frac{54}{99} e \frac{6}{11}$
c) $\frac{5}{10} e \frac{1}{2}$	c) $\frac{168}{99} e \frac{56}{33}$
d) $\frac{36}{100} e \frac{9}{25}$	d) $\frac{245}{90} e \frac{49}{18}$

Fonte: Próprio autor

Passamos pelos grupos, e muitos sem mesmo terminar a escrita de todos os números expandidos na forma decimal, nos questionaram sobre a ocorrência de cada par de frações obter a mesma representação decimal. Presenciamos o aluno D1 representar a fração no seu computador de trabalho e comparar e dialogar com o aluno V2 que no mesmo momento havia sinalizado a outra fração do par no computador, o que os fez questionar o professor, como mostra imagem a seguir.

Figura 65 – Aluno D1 comparando resposta com aluno V2



Fonte: Próprio autor

Aluno D1: - O sor! Todos vão dar a mesma coisa, igual?

Professor: - Isso só quando vocês terminarem é que vão poder dizer se vão dar iguais ou não.

Embora a suspeita deles era procedente, não lhes demos a certeza da afirmação, pois ainda estavam na metade da atividade, e queríamos que o maior número possível de alunos verificasse que os pares de frações eram equivalentes. Isso de fato ocorreu:

Professor: - Vocês viram que as frações estão em pares certo!? O que aconteceu quando vocês representaram as duas frações?

*Alunos: - O mesmo número.
- O mesmo resultado.*

Professor: As frações são representadas pelos mesmos números, mas o que a gente diz que essas frações são?

Aluno R2: - São pares, parentes?

Aluno N1: - Congruentes.

Aluna G1: - Semelhantes.

Não ocorreu a lembrança do termo *frações equivalentes* por parte dos alunos, mas as palavras utilizadas por eles deram ideia de tal definição. Esclarecemos então

para eles, que esses termos são utilizados geralmente na Geometria e o correto era outro conceito, que também já haviam estudado em anos anteriores.

Professor: - Lembrando vocês, são frações equivalentes.

Os alunos haviam mencionado no encontro anterior que a fração indicava também a operação de divisão, mas perdemos a oportunidade, nesse momento, de confirmar o resultado da representação decimal pelo algoritmo da divisão. Deixamos esse procedimento como sugestão para aplicações futuras.

A observação das equivalências foi contemplada mediante o compartilhamento em uma mesma imagem, o retângulo, a fração, a representação decimal e o ponto indicado na reta. Foi o meio que nos permitiu fazer um apanhado geral das representações envolvidas e chamar a atenção para as equivalências entre elas. Concordamos com Borba (2013, p. 352), que afirma: “a compreensão de conceitos matemáticos requer múltiplas representações, e representações visuais podem transformar o entendimento delas”. Esse, para nós, é potencial do *software* GeoGebra: a forma como podemos articular as representações deixando-as à mostra para que os alunos investiguem possíveis relações. Para Allevato (2012), as imagens fornecidas pelo computador permitem aos estudantes questionar suas concepções. Assim, abordagens visuais têm demonstrado facilitar a formulação de conjecturas, refutações, explicações de resultados e de comportamentos dos objetos, dando espaço, portanto, à reflexão.

As múltiplas representações que o *software* nos proporciona, enriquece o método de ensino. Utilizando apenas a lousa, por exemplo, é preciso indicar cada representação, sem o recurso simultâneo que o GeoGebra viabiliza. O quadro-negro até possibilita anotar as representações de uma só vez, porém não permite levar o aluno ao processo dinâmico em que modificar uma das representações implica obter, imediatamente, modificações equivalentes nas demais. Segundo Canavarro e Gafanhoto (2014), em ambientes de geometria dinâmica, os alunos, ao executarem ações no computador para a realização de tarefas, ampliam a sua exploração e análise, abrem novas oportunidades para produzir respostas.

Uma vez verificado que as frações eram equivalentes, questionamos os estudantes sobre a distinção entre as frações do bloco 1 e as do bloco 2. Junto a esta questão, solicitamos que eles também fatorassem as frações, isto é, representassem os numeradores e denominadores em fatores primos, devendo também estarem organizadas em blocos 1 e 2. Ao fazermos isso tínhamos a

intenção de que os alunos pudessem perceber ou pudéssemos ilustrar através dos fatores das frações a condição que implicaria a ocorrência ou não de dízimas periódicas.

Ao verificar que a maioria dos alunos já havia terminado as fatorações, como modo de administrar o tempo que parecia avançar rapidamente, pedimos que eles fossem falando as frações e as respectivas fatorações, as quais transcrevíamos organizadamente no quadro. Ficando as escritas no quadro visíveis a todos, retomamos com eles a propriedade de podermos cancelar os fatores comuns entre numerador e denominador, o que nada mais é que a simplificação das frações de modo a termos as frações irredutíveis com os fatores primos destacados.

Professor: - Por exemplo, nessa fatoração aqui [36/100], nós temos o 36 que é $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$, e nós temos o 100 que é $2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$. O que a gente pode fazer quando temos algo assim?

A pergunta foi muito vaga, e os alunos demonstraram em suas faces não entenderem a pergunta, ficando todos em silêncio. Coube então, fazer questões numa linguagem simples a fim de orientá-los.

Professor: - Vou ativar a memória de vocês. Têm números em cima que se repetem em baixo?

Alunos: - Sim.

Professor: - Que números são esses?

Alunos: - O dois.

Professor: - E quando nós temos números...

Nesse momento a aluna M2 interrompe a fala do professor se antecipando na pergunta que seria feita.

Aluna M2: - Corta [se referindo aos fatores 2 a serem cancelados] !

Professor: - Corta não é! A gente pode usar a propriedade do cancelamento.

- Se a gente aplicar a regra do cancelamento o que isso acarreta?

- E aí o que sobrou?

Alunos: - Três vezes três [numerador] e cinco vezes cinco [denominador].

Figura 66 – Fatorações na fração 36/100

$$\frac{36}{100} = \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot 3 \cdot 3}{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot 5 \cdot 5} = \frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 5}$$

Fonte: Próprio autor

Professor: - Vocês percebem alguma coisa?

Aluno R2: - Ficou o mesmo resultado da outra.

O aluno R2 percebeu e explicou aos seus colegas que os fatores primos remanescentes são os mesmos da fração irredutível e equivalente 9/25.

Figura 67 – Equivalência das frações 36/100 e 9/25

$$\frac{36}{100} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 5} \qquad \frac{9}{25} = \frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 5}$$

Fonte: Próprio autor

Professor: - Vocês lembram que eu pedi que colocassem o número decimal. E o que acontecia?

Alunos: - Repetia.

Professor: - Então aqui vai acontecer a mesma coisa, na verdade estamos simplificando.

Num primeiro momento, utilizamos o recurso visual do GeoGebra com o objeto retângulo e a expansão decimal equivalente às frações. Nesse segundo momento, fizemos uma abordagem voltada à escrita e manipulação numérica para chegar à equivalência das frações. Nossa finalidade foi mostrar aos alunos que, nos distintos momentos, ambas as representações vistas levaram à equivalência de frações.

Previamente queremos alertar que em cada par de frações, uma é irredutível. Futuramente elas seriam utilizadas para verificarmos as frações passivas de dízimas periódicas.

O passo seguinte foi discutir com os alunos a classificação das frações em bloco 1 e bloco 2.

Professor: - Por que as frações estão separadas?

Aluna M3: - O sor! Não é porque no Bloco 1 não tem dízima e no Bloco 2 tem?

Aluna G1: - No Bloco 1 são inteiros, e no Bloco 2 são repetidamente

Aluno R2: - São infinitos.

Aluno W2: - Num é finitos e no outro é infinitos.

Vemos a aluna G1 falar *inteiros* com a clara intenção de se referir a números com finitas casas decimais e *repetidamente* para os números contendo dízima periódica, sendo ela corrigida pelo seu colega W2.

Professor: - No bloco 1 os números são com finitas casas e no 2 os números são com infinitas casas. Mas infinitas casas de que tipo? Como a gente diz?

Aluna M3: - Dízima periódica.

Professor: - Então está bem caracterizado no Bloco 1 são frações que determinam números decimais e no Bloco 2 são frações que determinam dízimas periódicas⁴.

Com base na distinção feita entre os blocos de frações, observamos que as frações decimais possuem uma representação decimal com uma quantidade finita de casas decimais, e as frações não decimais são geratrizes de dízima periódica.

No momento final da aula, os alunos passaram a observar o que as fatorações tinham a dizer.

Professor: - Olhem as fatorações, elas também foram feitas em blocos, as fatorações também tem a ver com elas estarem separadas. Lembrem-se, o que vocês responderam: que aqui [Bloco 1] deu números decimais com finitas casas, e aqui [Bloco 2] deu infinitas casas, dízimas periódicas.

O encontro terminou com a orientação acima, ficando para a próxima aula a discussão sobre as fatorações realizadas.

4.2.2 Dados e Considerações do Sexto Encontro – 14/11/2014

A aula foi iniciada retomando com os alunos as fatorações realizadas no encontro anterior para relacioná-las com as frações separadas em blocos.

Professor: - Então o que a gente viu antes! Que no bloco 1 nós temos números decimais finitos, e no bloco 2 nós temos números com infinitas casas decimais, com as dízimas periódicas.

Será que esses fatores determinam, tem algo a ver com o número decimal ser finito ou gerar dízima periódica?

Após a pergunta prevaleceu o silêncio, o que nos gerou angústia em vermos os alunos não expressarem argumento algum. Julgamos ter sido um momento crítico

⁴ No diálogo percebemos um ato falho, uma vez que deveríamos ter esclarecido aos alunos, que números com dízima periódica também são números decimais, mas sua representação possui infinitos dígitos.

vivenciado na nossa prática, pois observamos os alunos olharem as fatorações e não articularem opiniões nem mesmo com os colegas.

Seria por se tratar da primeira atividade da aula? Eles estariam ainda se situando no que deveria ser respondido? Teria ocorrido alguma situação entre eles que os deixaram fechados uns com outros? Seria um dia atípico onde os alunos estariam mais introvertidos? Ou seria pela maneira que começamos as atividades?

Em aulas anteriores os alunos realizaram atividades investigativas utilizando os computadores e, conforme já relatamos anteriormente, observamos que o manuseio do computador contribuiu para que interagissem entre si, bem como, para a perda da timidez em questionar o professor, além de se sentirem à vontade em expor suas descobertas com a turma. Utilizar a mesma abordagem investigativa, com atividades similares às realizadas no GeoGebra, isto é, analisar regularidades diante dos resultados obtidos, com o foco voltado tão somente para a escrita, parece ter colocado os alunos em inércia, os alunos ficaram silentes e levantamos a hipótese de que isso se deveu a não fazermos uso do computador. Todavia, essa suposição carece de aprofundamento e, por isso, não seremos assertivos em afirmá-la. Mas os resultados já obtidos indicam que quando utilizando o computador os alunos demonstraram maior interação, seja realizando as atividades, seja dialogando com os colegas e o professor.

A alternativa, então, foi fazer questionamentos como sugerem Ponte, Brocado e Oliveira (2003), porém sem obter o resultado que gostaríamos, isto é, dos alunos conseguirem distinguir os dois tipos de frações, visto que a turma chegou apenas a caracterizar frações decimais. Ainda assim, este resultado deve ser valorizado porque houve participação dos alunos; pequena, mas houve.

A apatia dos jovens na sala de aula é um fator que interfere no planejamento do professor, visto que influi no alcance de seus objetivos. Muitas vezes, por mais consciência e preparo que levemos para a sala de aula, os alunos não respondem à altura que desejamos. São reflexões assim que vêm à mente do professor quando se depara com a inatividade de seus alunos, e daí inferimos que o manuseio do computador pode ser um fator de motivação e engajamento importantes na realização de tarefas matemáticas.

Por outro lado, Brocado, Oliveira e Ponte (2003), nesses momentos de impasse dos alunos com a investigação a ser realizada, recomendam que o professor forneça informações para que os alunos sigam adiante.

Embora dando primazia ao questionamento como modo de apoio do progresso do trabalho dos alunos, o professor precisa, por vezes, também fornecer e recordar informação. Trata-se de garantir que o fluxo da investigação não se perca porque os alunos não compreendem certos conceitos ou formas de representação importantes para a atividade (BROCARD; OLIVEIRA; PONTE; 2003, p.53)

Aulas de investigação, ainda segundo Brocardo, Oliveira e Ponte (2003), caracterizam-se por uma grande margem de imprevisibilidade que exige do professor flexibilidade para lidar com novas situações que vão surgindo. No entanto, tomar decisões diante da reação dos alunos a determinadas metodologias é uma atitude quase que de improviso, requer uma reflexão rápida, que será tão mais assertiva quanto maior for a bagagem de experiência e criatividade do professor. Skovsmose (2000) indica que em situações desse tipo, o docente se encontra em zona de risco, e qualquer que seja o cenário investigativo implicará em desafios. Entretanto, a solução não é voltar para a zona de conforto, como aulas de matemática cujas atividades são meros exercícios, mas avançar na tarefa de tornar possível que os alunos e o professor sejam capazes em agir de modo colaborativo dentro da zona de risco, fazendo dessa uma atividade produtiva. O fato é que nossos objetivos naquele momento não se mostraram fáceis de se concretizar. Diferenciar com os alunos frações que geram dízimas das que não geram lançou-nos novos desafios, que levaremos em conta para práticas futuras. Embora tivemos dificuldades, as orientações dadas por Brocardo, Oliveira e Ponte (2003) e Skovsmose (2000) permitiram-nos seguir a diante.

Cabe ainda, fazermos uma autocrítica: de repente não fomos criativos o suficiente para abordar a questão do modo computacional; por outro lado, devemos também considerar que nem toda prática deve e/ou pode ser levada ao uso das tecnologias; outros meios de ensino devem ser considerados como possibilidades, já que nem sempre iremos dispor de tal ferramenta.

Para tirarmos os alunos do estado estático em que estavam, começamos a fazer perguntas pontuais para que conseguissem progredir. Ainda assim, a participação foi tímida e os alunos só conseguiram caracterizar as frações decimais.

Professor: - Observem, o que essas fatorações têm em comum [Bloco 1]?

Aluno W3: - O cinco.

Professor: - Está certo. O que mais?

Aluno W1: - O dois, professor.

Outros Alunos: - O dois.

Aluno W2: - Mas na última, professor [referindo-se à fração 8/5, que apresentava somente o denominador 5]?

O entendimento de W2 era de que as frações decimais deveriam ter os fatores primos 2 e 5 e não somente um deles.

Professor: - Tem o dois e o cinco aqui [Bloco 1], então uma regularidade é essa, o W3 falou em cinco e o W1 falou em dois. Isso acontece em todas?

- Aqui acontece o dois e o cinco [$16/10 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 / 2 \cdot 5$] não é?! Aqui também acontece o dois e o cinco [$36/100 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 / 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$]?

Alunos: - Sim.

Professor: - Nesse aqui [$1/2$]?

Aluna G1 e W2: Não!

Alunos: - Sim.

Aluno R2: - Sim, o dois ali embaixo.

Professor: - Só aparece o dois, não é?! Mas o cinco não aparece. E na última aqui [$8/5$]?

Aluno A1: - Só o cinco.

Professor: - Agora o contrário, somente o cinco.

Professor: - E agora o que tem de diferente no Bloco 2?

Aluna C1: - O dois e o três [a aluna observara a fração irredutível de $6/9 = 2 \cdot 3 / 3 \cdot 3$, no caso, $2/3$]

Professor: - Ok! Tem o dois e o três e...?

Os alunos voltaram a ficar pensativos, e o silêncio novamente prevaleceu. O professor insistiu refazendo a pergunta.

Professor: - O que está acontecendo aqui [Bloco 2] que não está acontecendo aqui [Bloco 1]?

Aluno W3: - Tipo assim ó, sor! Não é que ali [Bloco 1] os números das frações, a parte de baixo é par [se referindo aos denominadores 10, 100, ...] e lá [Bloco 2] é ímpar?

Professor: - Tem a ver [levando em conta que as frações geradoras de dízimas devem ter um fator primo ímpar diferente de 2 e 5 em seu denominador].

Subestimamos a questão dos alunos saberem identificar quando ocorreria dízima ou não. Pensamos que eles, ao analisarem as frações irredutíveis fatoradas, chegariam facilmente à conclusão de que para obter dízima periódica bastava obter um fator primo diferente de 2 ou 5 como fator de seus denominadores. Entretanto, a questão se mostrou bem mais complexa para eles do que imaginávamos.

O episódio não previsto nos sugere uma questão a ser revista num trabalho futuro. De que outra maneira poderíamos fazer a diferenciação entre frações que geram dízimas para as que não geram?

Poderíamos também elaborar outras perguntas que talvez levariam os alunos a chegarem à conclusão esperada, mas percebemos a apatia do grupo, além de termos de considerar quanto de tempo isso ainda levaria. A decisão foi seguir explicando para os alunos aquilo que esperávamos que tivessem percebido.

Professor: - Esta atividade tinha a proposta de vocês verificarem o seguinte: quando os números são decimais, ou seja, aquelas frações que têm denominador 10, 100, 1000 ..., quais são os fatores?

Alguns alunos: - O dois e o cinco.

Professor: - Então para eles serem finitos, vocês terão aqui nos denominadores o 2 e o 5. Pode ser só o 2 e pode ser só o 5, ok?!

- Agora se acontecer de ter um outro número primo ali no denominador, o que vai acontecer? Que acontece se tiver um outro número primo que não seja dois ou cinco?

Aluno L1: - Dízima periódica.

Professor: - Então vocês olhem para o denominador, quando a gente fatorar o denominador, se além do 2 e/ou do 5 tiver um outro número primo teremos dízima periódica.

Esclarecemos ainda que, quando nos referíssemos à análise das frações fatoradas, os alunos as considerassem também simplificadas.

Professor: - Vamos pegar um exemplo. Escolham um número qualquer para colocar aqui em cima.

Aluno W2: - O três.

Professor: - Ok! O três. Agora eu vou colocar o 2 e o 5 [denominador, ficando 3/2.5], assim ela vai dar número com finitas casas ou infinitas casas?

Aluna G2: - Finita.

Professor: - Ok, G2! Vou pegar essa mesma fração, só que em vez de colocar apenas o 2 e o 5 vou colocar outro primo qualquer. Digam um primo qualquer.

Aluna G2: - O sete.

Professor: - O sete. Será que agora vai dar finitas casas?

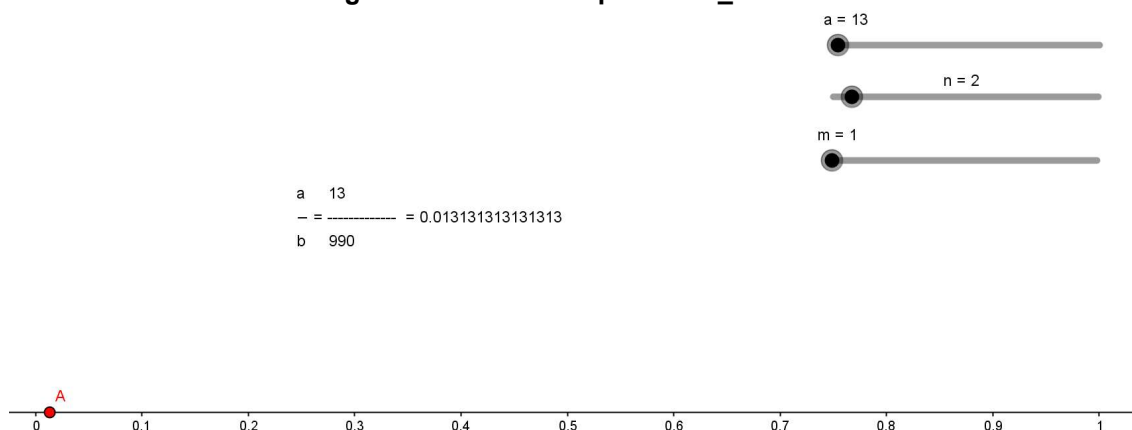
Alunos: - Não.

Professor: - Não. Vai dar infinitas casas.

Reforçamos a coerência das afirmações retomando o uso do computador. Representamos as frações no arquivo do GeoGebra, mostrando a partição do retângulo referente à fração e à respectiva representação decimal. Na sequência, investigamos com os alunos regularidades para conversões de frações em números racionais com dízimas, assim como determinamos frações geratrizes de números racionais.

Pedimos para os alunos abrirem no GeoGebra o arquivo “Ativ_dizima3”, onde temos os três controles deslizantes, n que indicou os 9s no denominador, o m que indicou os 0s no denominador e o a que indicou o numerador, sendo este um valor entre 0 e o denominador formado por m e n . Tomemos como exemplo, $n = 2$, $m = 1$ e $a = 13$, obtendo a fração $13/990$, que está ilustrada na imagem (Fig. 68) a seguir:

Figura 68 - Tela do arquivo Ativ_dizima3



Fonte: próprio autor

Tendo os alunos visualizado o que cada controle deslizante fazia na construção do GeoGebra, organizamos algumas frações em dois quadros, estando estes divididos em três colunas cada um. O primeiro com denominadores formados por 9s e o segundo com denominadores formados por 9s acrescidos de zeros, ilustrado logo abaixo. Coube aos alunos fazerem a representação no GeoGebra e

anotarem no quadro o número racional com a dízima referente a cada fração. Esclarecemos que nesse último encontro tivemos que replanejar as atividades, pois foi o último dia em que o LABIN esteve disponível, por motivos já discriminados neste texto.

Quadro 7 - Frações com denominadores compostos de 9s

$\frac{2}{9} =$	$\frac{35}{99} =$	$\frac{712}{999} =$
$\frac{3}{9} =$	$\frac{36}{99} =$	$\frac{713}{999} =$
$\frac{4}{9} =$	$\frac{37}{99} =$	$\frac{714}{999} =$

Fonte: próprio autor

Quadro 8 - Frações com denominadores compostos de 9s e 0s

$\frac{4}{90} =$	$\frac{37}{990} =$	$\frac{714}{9990} =$
$\frac{4}{900} =$	$\frac{37}{9900} =$	$\frac{714}{99900} =$
$\frac{4}{9000} =$	$\frac{37}{99000} =$	$\frac{714}{999000} =$

Fonte: próprio autor

Tendo os alunos preenchido os quadros, ficou evidente que todas as frações ali presentes eram geradoras de dízima.

Professor: - O que aconteceu em todas as frações?

Alunos: - Dízima periódica.

Em seguida pedimos que os alunos fossem citando em voz alta os números racionais obtidos, e os transcrevemos na lousa da mesma maneira que se apresentavam nos quadros preenchidos pelos estudantes.

Uma vez preenchido o primeiro bloco perguntamos o que eles haviam percebido.

Professor: - Vocês viram que na primeira coluna era um 9 só, na segunda dois 9s e na terceira três 9s. E aí o que vocês perceberam?

Aluno M3: - Denominador, ali antes da vírgula aumenta. O nove, daí após a vírgula é um número só. Daí lá no 99, daí tem a vírgula aumenta dois, aí lá no 999 aí aumenta três.

Apesar de utilizar uma linguagem particular, percebemos que a intenção do aluno era sinalizar que a quantidade de 9s presente no denominador indicaria o número de dígitos presente no período da dízima. M3 foi o primeiro aluno a perceber tal regularidade; enquanto ele se manifestava, os demais passaram a acompanhar a sua explicação, tomando para si o papel de professor. Embora a sua linguagem não fosse a mais adequada, vimos que seus colegas tentaram acompanhar o seu raciocínio.

Professor: - Alguém mais tinha percebido isso?

Não ocorreram manifestações da turma.

Professor: - Repete então M3.

A participação do aluno M3 com o linguajar característico de aluno praticamente explicou para os demais colegas como as dízimas periódicas foram aparecendo. Conforme Brocardo, Oliveira e Ponte (2003), esse é um momento em que o aluno desenvolve a sua capacidade de comunicar-se matematicamente e refletir sobre o seu trabalho e seu poder de argumentação. Não podemos ter melhor participação do que essa, quando o aluno se põe no papel de professor para dar explicações. Após a explanação dada por M3, o professor perguntou à turma se todos concordavam com aquilo que o colega havia percebido. Todos deram razão àquilo que M3 havia explicado, cabendo apenas ao professor colocar as palavras adequadas na explicação do aluno.

Demos um tempo para que os alunos completassem o segundo quadro. Tão logo eles terminaram de preenchê-lo, fizemos a discussão sobre as evidências percebidas.

Professor: - E agora o que acontece no momento que a gente vai acrescentando os zeros?

Aluna G2: - A quantidade de zeros depois dos 9s é o que vai aumentando depois da vírgula.

Professor: - Isso G2! A quantidade de zeros depois da vírgula foi aumentando conforme os zeros que foram colocados.

Dessa vez, em tom mais baixo percebemos outros alunos falarem simultaneamente, sendo respostas convergentes a que a aluna G2 deu. Para comprovar a compreensão das propriedades percebidas, colocamos uma lista de números racionais para que os alunos determinassem a fração geratriz. Trilhamos, assim, o caminho contrário ao da atividade anterior.

Figura 69 – Respostas frações geratrizes, alunos A1, L1 e V2

4) Determinem a fração geratriz de cada um dos números abaixo, e em seguida, simplifique as frações.

a) $0,\bar{6} = \frac{6}{9}$	b) $0,\bar{54} = \frac{54}{99}$
c) $0,00\bar{13} = \frac{13}{9900}$	d) $0,0\bar{7} = \frac{7}{90}$
e) $0,\overline{0013} = \frac{13}{9999}$	f) $0,\overline{07} = \frac{7}{99}$

Fonte: próprio autor

Figura 70 – Respostas frações geratrizes, alunas B1 e P1

4) Determinem a fração geratriz de cada um dos números abaixo, e em seguida, simplifique as frações.

a) $0,\bar{6} = \frac{6}{9}$	b) $0,\bar{54} = \frac{54}{99}$
c) $0,00\bar{13} = \frac{13}{9900}$	d) $0,0\bar{7} = \frac{7}{90}$
e) $0,\overline{0013} = \frac{13}{9999}$	f) $0,\overline{07} = \frac{07}{9}$

Fonte: próprio autor.

Ainda tínhamos que analisar com os alunos a ocorrência de números racionais cujas composições fossem mistas, parte decimal, parte dízima, porém, a escassez do tempo passava a nos preocupar. Como os alunos já haviam trabalhado com o comportamento das frações decimais, e agora haviam estudado as dízimas, fizemos uma prática dirigida voltada para o tratamento numérico e a escrita. Claro, com receio de que a turma pudesse ficar novamente apática como na situação inicial da aula.

Para dialogar, lançamos dois números racionais o $3,\bar{3}$ e o $5,1\bar{2}$, já para podermos sinalizar uma pista para os alunos desmembramos esses dois números em:

$$3,\bar{3} = 3 + 0,\bar{3}$$

$$5,1\bar{2} = 5,1 + 0,0\bar{2}$$

Fizemos isso também para conseguirmos administrar o tempo que nos restava. Dessa forma demos alguns minutos para os alunos pensarem sobre esses números racionais.

Professor: - Na última folha bem acima temos o três barrinha três. Se vocês olharem um pouquinho mais para baixo na folha, esse mesmo três vírgula três ali com dízima está escrito na seguinte forma: três vírgula três é a mesma coisa que três mais zero vírgula três barrinha.

- Me dêem aí o outro número que está aí.

Alunos: - Cinco vírgula doze.

Professor: - Cinco vírgula doze barrinha. Ah! Não, não, não é doze aqui, na verdade é,..., mas na verdade o que vai se repetir é o 2.

- Cinco vírgula um mais zero vírgula. Olhem gente o dois que é dízima que está se repetindo. Ele está a partir de que casa se repetindo?

Aluna G1: - Uma.

Professor: - Uma, falta uma casa aqui.

- Como é que ficaria a fração para determinar, como é que a gente pode determinar a fração para esse cara aí?

- Cinco vírgula um, dois, dois, dois está representado assim como cinco vírgula um com mais zero vírgula zero dois barrinha.

- Isso aqui é a nossa pista, é a pista que eu estou dando. Esse número foi separado por dois termos.

- Então como a gente monta isso $[0,0\bar{2}]$?

Aluno M3: - Dois sobre nove.

Aluno L1: - Dois sobre noventa.

Aluno D1: - Doze sobre noventa?

Professor: - Dois ou doze?

Alunos: - Dois.

Aluno L1: Dois, só o dois repete.

Aluno D1: - É mesmo só o dois.

Professor: - Isso! Aqui só o dois está se repetindo.

Aluno D1: - Sim, aí conta dois depois da vírgula, noventa.

Professor: Ta! O que eu coloco aqui em baixo então [denominador]?

Alunos: - Noventa.

Professor: - Ta! Uma parte a gente já descobriu. E aquela primeira parte [5,1]? Tem dízima ali na primeira parte?

Alunos: - Não.

Professor: - E agora?

Aluno D1: - Cinquenta e um sobre dez.

Professor: - Ahm?

Aluno D1: - Cinquenta e um sobre dez.

Professor: - Claro! Essa é a sacada. Isso aqui não é um número decimal!?! Não tem finitas casas decimais?

- Tem. Então o denominador não vai ser dez, cem, mil, dez mil, ...?

Aluno D1: - Conta o zero pelo o depois da vírgula.

Professor: - Exato. Tu não tem uma casa só? Então é décimos.

- Bom, agora o que tem que fazer?! Somar as frações.

Aluno M4: - Daí temos que tirar o M.M.C. [Mínimo múltiplo comum].

Assim os alunos determinaram e aplicaram o M.M.C.. Em seguida, somaram as duas frações $51/10$ e $2/90$ para determinarem a fração única $461/90$ equivalente a $5,1\bar{2}$. De modo similar, obtiveram outras frações geratrizes de outros números racionais.

Percebemos na condução da atividade acima a descaracterização do diálogo investigativo, de modo não intencional, devido à restrição do tempo, a qual fez com que nossa fala com os alunos os conduzissem para que anunciassem o resultado que esperávamos. De fato, os alunos D1, G1, L1 e M3 foram os colaboradores para que indicássemos a resposta esperada. O tempo tem sido nas aulas de investigação matemática um fator adverso. No texto de Brocardo, Oliveira e Ponte (2003), encontramos o relato da experiência de uma Professora, que não pode propiciar a todos os grupos de alunos momento para apresentarem seus resultados, não podendo a docente explorar a justificção e conjectura dos alunos. Ainda de acordo com Allevalo (2005): nossa angustia, a preocupação com o tempo pode transformar nossa forma de conduzir a aula e nos cegar diante de alguns resultados que não

foram trazidos a tona, dos quais nós professores poderíamos junto aos alunos explorá-los juntamente com o computador ou, até mesmo, o surgimento de novas questões que nos levassem a outras atividades de investigação.

Ainda Alevatto (2005) em seu trabalho percebe que em muitos momentos assumiu postura demasiadamente diretiva, e que poderia ter levado os alunos a explorarem mais os recursos disponíveis do software e a encontrarem de forma mais autônoma as respostas às suas questões. Isso também nos faz refletir, se de repente em outros momentos de interação com os alunos não recorremos ao mesmo comportamento, sendo mais diretivos e menos mediadores da investigação. Certamente neste último encontro esse direcionamento esteve presente. Enfim, fica a indicação de que devemos diante de nossas atitudes policiarmos para que o aspecto investigativo das aulas não acabe sendo descaracterizado.

Para finalizar, colocamos um conjunto de números racionais para serem determinadas as frações geratrizes, sendo alguns com dízimas e outros sem, o que exigiu atenção dos alunos no momento de estabelecerem as frações. Sugerimos que os alunos conferissem os resultados no GeoGebra.

Figura 71 – Exercícios de fixação, alunas S1 e V1

6) Determine a expansão decimal das frações abaixo:

a) $\frac{5}{8} = 0,625$ b) $\frac{7}{12} = 0,5\overline{83}$

c) $\frac{16}{5} = 3,2$ d) $\frac{115}{33} = 3,4\overline{8}$

7) Determine a fração geratriz dos números abaixo:

a) $0,64 = \frac{64}{100}$ b) $0,\overline{2} = \frac{2}{9}$

c) $0,0\overline{34} = \frac{34}{990}$ d) $7,2 = \frac{72}{10}$

e) $0,5\overline{6} =$ $0,5 + 0,0\overline{6} = \frac{5}{10} + \frac{6}{90} = \frac{45}{90} + \frac{6}{90} = \frac{51}{90}$

f) $2,7\overline{13} = \frac{2713}{90}$

Fonte: próprio autor

Figura 72 – Respostas frações geratrizes, alunos A1, L1 e V2

6) Determine a expansão decimal das frações abaixo:

a) $\frac{5}{8} = 0,625$

b) $\frac{7}{12} = 0,58\overline{33}$

c) $\frac{16}{5} = 3,2$

d) $\frac{115}{33} = 3,48\overline{}$

7) Determine a fração geratriz dos números abaixo:

a) $0,64 = \frac{64}{100}$

b) $0,2 = \frac{2}{10}$

c) $0,034 = \frac{34}{1000}$

d) $7,2 = \frac{72}{10}$

e) $0,5\overline{6} = \frac{56}{99}$

f) $2,7\overline{13} = \frac{2683}{990}$

$2,7 + \frac{13}{99} = \frac{27}{10} + \frac{13}{990} = \frac{2673 + 13}{990} = \frac{2686}{990}$

Fonte: próprio autor

Por fim, nosso temor inicial em termos novamente os alunos apáticos não se confirmou; pelo contrário pudemos perceber a aplicação desses estudantes na realização da tarefa, na qual chegaram rapidamente ao resultado esperado. Considerando que na atividade anterior eles haviam usado os computadores, seria isso o agente motivador de nossos estudantes?

Ao menos pudemos suspeitar que sim, devido ao gosto que essa geração tem demonstrado quanto ao uso das tecnologias no seu cotidiano. Em sala de aula, presenciemos o comprometimento deles com as atividades propostas diante dos computadores, repercutindo no comportamento e participação, sendo esse último aspecto relevante, devido também à abordagem investigativa adotada, cuja tendência é motivar os alunos a exporem suas descobertas e ideias.

Retomar o uso do computador nos propiciou representar as frações no arquivo do GeoGebra e, na sequência, investigar com os alunos regularidades para converter frações em números racionais com dízimas, assim como, determinar frações geratrizes de números racionais. Dessa forma, pudemos sistematizar o conhecimento da turma, através de diferentes estratégias de ensino, unindo práticas mais tradicionais como a escrita e cálculos braçais, com o aparato tecnológico, o uso de computadores. Essa prática foi bem satisfatória, pois os alunos puderam representar no computador a fração a fim de obter a representação decimal,

aplicando em seguida o algoritmo da divisão para confirmar o resultado dado pelo *software*. No sentido contrário, ou seja, de obter a fração a partir da representação decimal, os alunos não tinham como antecipar no computador o resultado. A conferência só pôde ser feita quando eles haviam indicado a fração no computador mediante a sua escrita, demonstrando assim, que tinham entendido a regularidade de obter a fração geratriz. Essas atividades exemplificam as possibilidades de trabalho com diferentes mídias simultaneamente. Como já havíamos escrito antes, a utilização da mídia informática não significa o abandono de outras.

[...] é preciso considerar qual é o objetivo da atividade que queremos realizar e saber se ela não pode ser desenvolvida com maior qualidade pelo uso, por exemplo, de um *software* específico. Não significa que vamos abandonar outras mídias, mas temos que refletir sobre a sua adequação (BORBA; PENTEADO, 2015, p. 64).

Considerar a aprendizagem por meio da interação entre: alunos, computadores e nós professores, o coletivo pensante seres-humanos-com-GeoGebra constituído neste trabalho, permitiu diante das experiências didáticas em sala de aula a procura e a mostra dos aspectos benéficos do novo ator GeoGebra no processo de ensino dos números racionais em um cenário investigativo, buscando assim, agir de acordo com Borba e Penteado (2015, p.49): “O nosso trabalho, como educadores matemáticos deve ser o de ver como a matemática se constitui quando novos atores se fazem presentes em sua investigação”. Aproveitamos agora para retomamos nos parágrafos seguintes, a nossa pergunta, destinando palavras na finalidade de respondê-la com os dados aqui apresentados.

4.3 Retomando a Pergunta Diretriz

Dos dados apresentados e das análises que fizemos em cada encontro anterior vamos elencar aqueles que trazem indícios para a resposta da pergunta diretriz: **“De que modo uma proposta investigativa com o uso do *software* GeoGebra contribui para que os estudantes percebam características dos números racionais?”**

4.3.1 Das Contribuições do GeoGebra no Ambiente Investigativo

O primeiro benefício averiguado na adoção da aula matemática investigativa em um cenário tecnológico foi a mudança de atitude dos alunos. A utilização dos computadores cativou os alunos a participarem das tarefas obtendo o ambiente favorável à realização de investigações matemáticas. Conforme Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), é fundamental o professor proporcionar o ambiente onde o aluno se sinta a vontade para questionar, pensar, explorar e trocar ideias tanto com o professor como com seus colegas. Por meio das tarefas propostas com o uso do *software* obtivemos esse ambiente. Os estudantes passaram a explorar primeiramente alguns recursos do *software* GeoGebra, e em seguida, começaram a realizar as tarefas propostas e fazer investigações sobre números racionais. Há de se ressaltar também, as relações de parcerias entre os alunos e alunos com o professor.

Tendo em vista que as tecnologias estão cada vez mais presente no cotidiano dos alunos, ao propormos a utilização do computador trouxemos a possibilidade de um ambiente de ensino que se aproxima da sociedade cada vez mais tecnológica. O *software* GeoGebra constituiu-se um recurso amigável para os estudantes. Seu fácil manuseio contribuiu para que os alunos se sentissem a vontade em explorá-lo, puderam fazer e refazer procedimentos sem que se sentissem constrangidos ao cometerem erros, uma vez que, o *software* permitiu facilmente refazer os passos daquilo que estavam construindo. Além disso, proporcionou aos estudantes um caminho de duas vias, ao utilizarem de conhecimentos dos objetos geométricos para fazer a construção do segmento iam aprendendo a utilizar os comandos do *software*; por outro lado, a partir daquilo que haviam construído passaram a investigar sobre a formação e as características dos números racionais construindo, com isso, conhecimento sobre tais números. Para Borba e Penteado (2015, p. 45):

A informática abre possibilidades de mudanças dentro do próprio conhecimento e que é possível haver uma ressonância entre uma dada pedagogia, a mídia informática e uma visão de conhecimento, sendo harmonioso entre a pedagogia e a mídia utilizada. Ao mesmo tempo, que podem ser considerados como uma tentativa de superar problemas de práticas de ensino tradicional vigente. Assim o enfoque experimental explora ao máximo as possibilidades de rápido *feedback* das mídias informáticas e a facilidade de geração de inúmeros gráficos, tabelas e

expressões algébricas, voltada a prática pedagógica que estimula a utilização de problemas abertos, de formulação de conjecturas em que a sistematização só se dá como coroamento de um processo de investigação por parte de estudantes.

Esse enfoque experimental apontado pelos autores pôde ser observado nas tarefas propostas. De fato, à medida que os alunos faziam suas explorações e faziam suas conjecturas, compartilhavam suas descobertas e conjecturas com os colegas e professor. Os diálogos não somente mostraram os acertos e equívocos dos alunos, mas permitiram que pudéssemos entender a maneira como os alunos raciocinaram sobre as questões e as propriedades dos números racionais que queríamos que fossem percebidos, bem como, outras que eles de repente observaram. Por meio de diálogos os alunos confrontaram suas evidências, o professor no papel de interlocutor verificou com os alunos, as colocações procedentes que deveriam ser consideradas, assim como aquelas que deveriam ser refutadas. Na interação, aluno, investigação, computador e professor, o *software* GeoGebra assumiu papel fundamental. Utilizando esse recurso os alunos construíram seu objeto de estudo, o segmento particionado, e de sua observação puderam aprender sobre números racionais, em particular, as frações decimais. Conforme afirma Borba (2013, p.251):

Os *softwares* educacionais têm a capacidade de realçar o componente visual da matemática atribuindo um papel importante à visualização na Educação Matemática, pois ela alcança uma nova dimensão se for considerado o ambiente de aprendizagem com computadores como um particular coletivo pensante (Lévy, 1993), onde professores, alunos, mídia e conteúdos matemáticos residem juntos e, mais que isso, pensam juntos. Neste coletivo a mídia adquire outro status, isto é, vai além de mostrar uma imagem. Mais especificamente, é possível dizer que o *software* torna-se ator no processo de fazer matemática.

Em nossa pesquisa a utilização do *software* GeoGebra num cenário investigativo foi fundamental para termos o equilíbrio no desenvolvimento do trabalho com os alunos. Atingimos satisfatoriamente os dois pontos assinalados por Ponte, Brocado e Oliveira (2003, p. 47): “dar-lhes a autonomia que é necessária para não comprometer a sua autoria da investigação e, por outro lado, garantir que o trabalho dos alunos vá fluindo e seja significativo do ponto de vista da disciplina de Matemática”. Assim, os alunos e a informática foram atores no processo de


aprendizagem, visto que os estudantes se mantiveram comprometidos com as aulas quase que durante todo o período de aplicação de nossa prática educativa.

4.3.2 Das Contribuições do GeoGebra para Aprendizagem dos Números Racionais


Descreveremos, mediante a adoção do *software* GeoGebra, aspectos que confirmam a afirmação de Ponte, Brocado e Oliveira (2003, p. 35) de que investigações numéricas são decisivas para a compreensão dos números, bem como as capacidades matemáticas que são importantes na obtenção de generalizações.

De imediato, dos resultados específicos do *software* GeoGebra, podemos retomar as potencialidades já elencadas anteriormente reforçando as possibilidades oferecidas por esse aplicativo para os processos de ensino e aprendizagem da Matemática: a) *organização*: os objetos geométricos, já estão pré-dispostos de modo virtual, organizados na barra de ferramentas do aplicativo, ; b) *manuseio*: o uso do compasso e dos elementos geométricos são utilizados por meio do manuseio do *mouse* e do teclado, dando maior conforto e agilidade ao aluno em realizar as tarefas de desenho propostas; c) *o refazer*: equívocos na construção de objetos geométricos podem ser contornados rapidamente por meio do comando “desfazer”, permitindo ao aluno voltar no ponto em que cometeu o erro, e assim, não precisar refazer todo o processo de construção; d) *do recurso visual*: diante da tela do computador podemos movimentar a construção geométrica, dar movimentos por meio de controles deslizantes, reduzir e ampliar a sua imagem, permitindo que os alunos realizem observações e constatem propriedades do objeto construído; e) *o tempo*: no GeoGebra os elementos geométricos estão organizados em menus, onde são facilmente selecionados, e desenhados na área de visualização com dois ou três cliques, minorando o tempo para executar desenhos.

Dentre os itens acima, destacamos os recursos visuais, que foram de suma importância para a investigação sobre a formação e características dos números racionais.

Como apresentamos nesse capítulo, para a investigação sobre frações decimais foi proposto aos alunos a construção de um segmento , e também a divisão dele em partes que indicaram décimos, centésimos e milésimos. Nessa

construção a função *zoom* do GeoGebra foi bastante explorada pelos alunos, mostrando-se um recurso importante para eles conseguirem obter principalmente os segmentos que indicaram os centésimos e os milésimos. Como relatamos, essa construção seria inviável utilizando materiais de desenho convencionais.

Por meio de ampliações e reduções, os estudantes estabeleceram relações entre as frações e as medidas das partições do segmento , assim como indicaram frações quanto às posições dos pontos marcados nesse segmento, a fim de formular suas conjecturas, de modo que, ao expô-las e discuti-las com colegas e professor, obtiveram regularidades da formação de frações decimais. Destaque para a experiência que vivenciamos com as alunas C1 e G2. Ao terem que indicar frações na ordem dos milésimos as alunas ampliaram a imagem do segmento fazendo parte desse objeto ficar oculto. Essa restrição no campo visual implicou dificuldades. Ao terem que explicar a fração que haviam anotado, se sentiram perdidas sem saber explicar que relação haviam feito. O professor, então, interagiu com as alunas utilizando o mesmo recurso visual, articulou diálogos que esclareceram aquilo que havia fugido do campo de visão das estudantes. Assim, a mesma função *zoom* que antes havia imposto obstáculos às alunas, foi o que encaminhou a sua compreensão das frações decimais. Momentos depois fomos agraciados por essas alunas, com respostas que indicavam corretamente frações na ordem dos décimos, centésimos e milésimos.

As investigações com o *zoom* levaram os alunos a conjecturarem que há infinitas frações decimais, bem como em qualquer que seja o intervalo de números racionais há infinitos outros números racionais. Também possibilitou aos estudantes fazerem aproximações para a fração $1/3$. A aparição do mesmo dígito 3 a cada casa decimal visualizada mediante ampliação da imagem permitiu-nos concluir com eles que estavam diante de uma dízima periódica. Dessa forma acreditamos que estudantes deram indícios de terem pensado juntamente com o *software*.

A versatilidade do ambiente dá fluidez aos processos mentais e suporta formas de pensar que ultrapassam as do discurso oral ou escrito, ou do desenho estático. As simulações e as explorações exteriorizam a atividade intelectual que antecede o controle e a exposição racional (GRAVINA, 2001, p.36).

Borba (2011, p. 351) ainda entende que:

Os *softwares* educacionais têm a capacidade de realçar o componente visual da matemática atribuindo um papel importante à visualização na Educação Matemática, pois ela alcança uma nova dimensão se for considerado o ambiente de aprendizagem com computadores como um particular coletivo pensante (Lévy, 1993), onde professores, alunos, mídia e conteúdos matemáticos residem juntos e, mais que isso, pensam juntos.

Outro potencial visual de grande relevância do GeoGebra é a possibilidade de articularmos as distintas representações dos números racionais em uma mesma tela. O arquivo *Ativ_decimal2* por nós elaborado teve essa finalidade. Nesse arquivo dispomos o retângulo fracionado, a fração, o ponto na reta numérica e a representação decimal. Esse arquivo, sendo manipulado pelos alunos por meio de controles deslizantes, contribuiu para eles perceberem números racionais equivalentes. Duas a duas, as frações eram exploradas nesse arquivo, constando que as frações indicavam a mesma parte do retângulo e a mesma representação decimal. Conforme Gafanhoto e Canavarro (2014), o GeoGebra é um aplicativo que permite simultaneidade de visualização de diferentes representações em uma mesma tela, o que torna mais direto o estabelecimento de conexão entre estas. De fato, tendo os alunos observado as representações decimais dos números racionais obtidos no GeoGebra, constataram que havíamos separado as frações decimais e frações não decimais.

Um segundo arquivo, intitulado “*Ativ_dizima3*”, foi explorado pelos educandos por meio de três controles deslizantes. Eles investigaram sobre as regularidades das dízimas periódicas e constataram, rapidamente, que o período da dízima estava relacionado ao denominador da fração, constituído de noves e zeros - a quantidade de noves indicava o número de dígitos da dízima, enquanto os zeros eram responsáveis pelo deslocamento dos dígitos da representação decimal à direita da vírgula.

O estudo investigativo dos números racionais com o uso do *software* Geogebra, tomando a construção, observação e comparação de segmentos, assim como a abordagem das múltiplas representações apresentadas simultaneamente no monitor do computador, evidenciou contribuições significativas para os participantes aprenderem sobre a representação fracionária e decimal, identificando as frações que são decimais e as frações que são geradoras de dízima periódica, e ainda, a

observação de características que possibilitou o saber fazer conversões entre as representações fracionárias e decimais.

Diante dos resultados obtidos na pesquisa, as aulas investigativas juntamente com a utilização das tecnologias, em particular a utilização do *software* GeoGebra, surge como possibilidade de ensino. De acordo com Ponte (2000), as tecnologias viabilizam a aprendizagem de muitos conteúdos, recorrendo a técnicas sofisticadas de simulação e modelação cognitiva acrescidas de interação e comunicação onde os alunos possam desenvolver sua criatividade e refletir criticamente.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Dos dados descritos e analisados, encerraremos o corpo dessa dissertação com nossas considerações finais, destinando alguns parágrafos às aulas de investigação matemática, à utilização do *software* GeoGebra nas aulas de matemática e a reflexões e encaminhamentos de trabalhos futuros.

O estudo realizado destinou-se a perceber as potencialidades do *software* GeoGebra por meio da investigação matemática, na busca por uma proposta de ensino que desse conta de uma compreensão mais significativa dos números racionais para os alunos e lhes amenizasse possíveis dificuldades de compreensão. Isso fez com que tomássemos outra postura em sala de aula; passamos a avaliar não somente o progresso dos alunos na aprendizagem, mas também a efetividade da metodologia por nós elaborada. Assim, nosso foco principal não foi avaliar os estudantes, mas sim os efeitos da nossa prática docente sobre eles. Dessa forma, entendemos que ao ajuizar o rendimento dos alunos em um determinado conteúdo, devíamos, simultaneamente, analisar como se desenvolveu a proposta de ensino que lhes era direcionada.

As aulas investigativas surgiram do nosso desejo de que os estudantes assumissem uma nova postura em sala de aula. Nas salas de aula de hoje, percebemos que os alunos se mostram falantes, mas diante do modo como vínhamos administrando as aulas de matemática, as falas deles pouco se convertiam em diálogos sobre os conteúdos a que eram apresentados. A aula investigativa abordada por Brocado, Oliveira e Ponte (2003) nos possibilitou colocar os alunos como investigadores, portanto, como agentes de seu aprendizado.

Para isso, esses autores assinalam que, nesse tipo de aula, é fundamental que o professor crie um ambiente em que o aluno se sinta a vontade para participar da investigação, fazendo explorações, questionando e exprimindo suas ideias. Nesse aspecto, o uso do computador com o *software* de geometria dinâmica GeoGebra junto com as tarefas propostas foi efetivo.

Hoje, o uso dos aparelhos celulares imprime uma necessidade tal como a de estar vestido. Muitos de nós temos, inclusive, a sensação de nos sentirmos “nus” quando não estamos de posse desse utensílio; e para os nossos jovens esse sentimento parece ser mais intenso, pois nasceram e vivem numa época em que os computadores e aparelhos celulares se proliferaram pelas diversas utilidades que

agregam a cada dia. Dessa forma, percebemos que o uso da tecnologia, recurso tão prestigiado pelos nossos alunos, trouxe uma nova roupagem às aulas de matemática, aproximando-se mais da sua realidade e os levando a participar da aula.

A postura dos alunos, assim como a nossa, efetivamente passaram a ser diferentes durante esses encontros. Os números racionais passaram a ser interpretados mediante a construção de um segmento unitário particionado e da manipulação do(s) retângulo(s) no GeoGebra. A nós coube o papel de mediadores e interlocutores, passamos a agir mais nos bastidores à medida que os alunos iam se embrenhando nas investigações. Conforme Borba (2001), obtivemos o coletivo pensante, ou melhor, o coletivo seres-humanos-com-mídias, onde alunos e computador agiram como “atores” no processo de produção do conhecimento.

Como constatado na análise de dados, os alunos do 8º ano que já haviam estudado os números racionais puderam, por meio da mídia GeoGebra, reorganizar a sua compreensão sobre esses números. A abordagem investigativa permitiu-nos, mediante exposições das respostas dos alunos, entender a forma como haviam raciocinado e, a partir de suas ideias, refazemos no GeoGebra os caminhos por eles percorridos, levando-os a perceber, quando equivocados, em que ponto haviam falhado e fazendo-os, assim, adequar seus entendimentos sobre os números racionais.

Embora já tenhamos apontado os recursos visuais como uma das potencialidades do GeoGebra, queremos reforçar a relevância desse recurso. O *software* permitiu que construíssemos o arquivo “Ativ_decimal2” contendo as múltiplas facetas dos números racionais: retângulo(s) fracionado(s), fração, representação decimal e localização de um ponto na reta numérica, sendo estas apresentadas em uma mesma imagem dinâmica, o que proporcionou aos alunos a manipulação e observação de regularidades mediante as transformações ocasionadas. Dessa maneira, os recursos visuais foram essenciais para os alunos realizarem explorações e conjecturas. Foi também através desse recurso que eles se fizeram entender, o que nos permitiu auxiliá-los, validando ou recusando suas conjecturas.

Por outro lado, nem tudo é perfeito, alguns aspectos adversos também devem ser aqui expostos. De acordo com os pesquisadores Brocardo, Oliveira e Ponte (2003) e Skovsmose (2000), o cenário investigativo se dá por questões abertas; no

entanto, ao colocarmos algumas questões sobre números racionais em relação às ações e explorações realizadas pelos alunos no GeoGebra, constatamos interpretações que se afastaram de nossas expectativas, o que nos pôs a refletir na reformulação de algumas questões que impliquem respostas mais próximas daquilo que queremos ensinar sem perder de vista, também, o caráter investigativo. Reescrevemos, então, essas questões, as quais se fazem presentes no produto final dessa pesquisa, contido nos anexos da mesma.

Outro fator a ser considerado nas questões investigativas é a falta de hábito de nossos alunos em ter de responder perguntas interpretativas. Alguns tiveram dificuldades em articular ideais para responder ou justificar as suas respostas, o que nos levou a avaliar seu conhecimento por outra tecnologia da inteligência, conforme Lévy (1993) -- a oralidade. Isso evidencia que, apesar de agregarem a cada dia novas metodologias de aula, as nossas práticas pedagógicas ainda estão muito voltadas à ideia de professor transmissor e aluno receptor dos conhecimentos, sob a qual predominantemente as perguntas são respondidas pelos alunos de forma mecânica, apenas repetindo procedimentos padronizados.

O trabalho se desenvolveu mais no cunho numérico e menos no algébrico. Queríamos que nossos alunos enxergassem os números racionais, no sentido do que aquele “número” poderia representar concretamente. E assim fizemos, seja como “medida” em segmentos, seja como “quantidade” tomando a parte “retângulos” ou “retângulos inteiros” e mais uma parte de outro retângulo. Embora não tenhamos desenvolvido com os alunos deduções formais, acreditamos que, por meio da dinamicidade do GeoGebra, propomos que os alunos, de modo empírico e dedutivo, estabelecessem regularidades, considerando ser esse um estágio que antecede o das argumentações formais e que os credencia ao processo de demonstração. Apoiamo-nos nos resultados obtidos por Gravina (2001, p.192):

Para os alunos, ainda em fase de transição de patamar de conhecimento, é difícil diferenciar entre uma constatação empírica, proporcionada pelo dinamismo da figura, e uma argumentação dedutiva. Mas constatou-se neste estudo que gradativamente a precisão e o dinamismo dos desenhos funcionaram a favor do acurado controle de fatos declarados e fatos estáveis implícitos, condição primeira para o desenrolar do processo de demonstração, e também operaram como suporte às apreensões operativas, necessárias ao avanço do processo de demonstração.

O uso da linguagem formal motiva-nos a buscar a readequação da metodologia aqui apresentada ao considerar algumas conjecturas obtidas pelos alunos e selecionar aquelas que possuem uma demonstração algébrica mais elementar, iniciando-os na tarefa das demonstrações formais.

Finalizando, professores comprometidos com o processo de ensino de seus discentes, buscam constantemente atualizar-se em cursos de formação continuada; da mesma forma, pensamos que o trabalho não se finda aqui. Em nosso entendimento, obtivemos resultados consideráveis que merecem ser compartilhados e discutidos com outros professores a fim de que possamos receber contribuições para a sua melhoria e obter resultados ainda mais significantes em sala de aula.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALLEVATO, Norma Suely Gomes. **ASSOCIANDO O COMPUTADOR À RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS FECHADOS: ANÁLISE DE UMA EXPERIÊNCIA**. 2005. 378 f. Tese (Doutorado) - Curso de Doutorado em Educação Matemática, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005. Disponível em: <http://www.rc.unesp.br/gpimem/downloads/teses/allevato_nsg_dr_rcla.pdf>. Acesso em: 17 nov. 2014.

ARCAVI, A. (1999), **The role of visual representations in the learning of mathematics**, Disponível em: <www.clab.edc.uoc.gr/aestit/4th/pdf/26.pdf>. Acesso em: 04 Jun. 2014.

BOFF, Daiane Scopell. **A Construção dos Números Reais na Escola Básica**. 2006. 254 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissionalizante em Ensino da Matemática, Instituto de Matemática, Universidade Federal do Estado do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2006.

BOGDAN, Robert C.; BIKLEN, Sari Knopp. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Porto: Porto Editora, 2010. 336 p.

BORBA, Marcelo de Carvalho. Coletivos seres-humanos-com-mídias e a produção de Matemática. In: I SIMPÓSIO BRASILEIRO DA PSICOLOGIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1., 2001, Curitiba. **Anais...**. Curitiba: Editora da Universidade Federal de Tuiti, 2001. p. 135 - 146.

BORBA, Marcelo C.. Educação Matemática a Distância Online: Balanço e Perspectivas. **Cuadernos de Investigación y Formación En Educación Matemática: Trabajos de la XIII CIAEM**, San José, n. 11, p.349-358, dez. 2013. Disponível em: <<http://www.revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/14737>>. Acesso em: 1 out. 2015.

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. **Informática e educação matemática**. 5. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2015. 104 p.

BORBA, Marcelo de Carvalho; ARAÚJO, Jussara de Lóiola. **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. 5. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2013. 140 p.

BORBA, Marcelo de Carvalho. Tecnologias Informáticas na Educação Matemática e a Reorganização do Pensamento. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas**. São Paulo: Unesp, 1999. Cap. 16. p. 285-295.

BORBA, Marcelo C.. Um Modelo Para Compreensão Que Os estudantes Têm Em Um Ambiente De Representações Múltiplas. In: SEMINÁRIO NOVAS PERSPECTIVAS DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NO BRASIL, 4., 1994, Águas de São Pedro. **Anais...** . Brasília: Inep, 1994. p. 6 - 19.

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais. **Matemática**. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa: Tipografia Matemática, 1951.

CONFREY, Jere et al. **The Use of Contextual Problems and Multi-representational Software to Teach the Concept of Functions**. Nova Iorque: Eric, 1991. 109 p.

FIORENTINE, Dario; LORENZATO, Sergio. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. Campinas: Autores Associados, 2006.

GAFANHOTO, Ana Patrícia; CANAVARRO, Ana Paula. A adaptação das tarefas matemáticas: Como promover o uso de múltiplas representações. In: PONTE, João Pedro da. **Práticas Profissionais dos Professores de Matemática**. Lisboa:

Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2014. Cap. 5. p. 113-132. Disponível em: <www.ie.ulisboa.pt>. Acesso em: 10 mar. 2015.

GEOGEBRA. Disponível em: <http://www.geogebra.org>. Acesso em: 10 de mar 2014.

GOLDENBERG, Mirian. **A arte de pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em ciências sociais**. 4. ed. São Paulo: Editora Record, 2000.

GRAVINA, Maria Alice. **Os Ambientes de Geometria Dinâmica e o Pensamento Hipotético-Dedutivo**. 2001. 277 f. Tese (Doutorado) - Curso de Doutorado em Informática da Educação, Universidade Federal do Estado do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.

GRAVINA, M.A.; SANTAROSA, L. M. **A aprendizagem da Matemática em Ambientes Informatizados**. IV Congresso RIBIE. Brasília, 1998. Disponível em: http://www.niee.ufrgs.br/eventos/RIBIE/1998/pdf/com_pos_dem/117.pdf. Acesso em: 10 set 2015.

GRAVINA, Maria Alice. GEOMETRIA DINÂMICA: UMA NOVA ABORDAGEM PARA O APRENDIZADO DA GEOMETRIA. In: VII SIMPÓSIO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO, 7., 1996, Belo Horizonte. **Anais...** . Belo Horizonte: Sbie, 1996. p. 1 - 13. Disponível em: <http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri/pdf/maria-alice_geometria-dinamica1996-vii_sbie.pdf>. Acesso em: 12 ago. 2015.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACHADO, Antonio. **Matemática e Realidade: Ensino Fundamental 5ª série**. 5. ed. São Paulo: Atual Editora, 2005. 304 p

KENSKI, Vani Moreira. **Educação e tecnologias: o novo ritmo da informação**. 6. ed. Campinas: Papirus, 2010.

LESSA, Valéria Espíndola. **A COMPREENSÃO DO CONCEITO DE NÚMERO FRACIONÁRIO: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O SIGNIFICADO MEDIDA**.

2011. 167 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática, Instituto de Matemática, Universidade Federal do Estado do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2011. Disponível em: <<http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/29355/000776001.pdf?...1>>.

Acesso em: 2 mar. 2015.

LÉVY, Pierre. **AS TECNOLOGIAS DA INTELIGÊNCIA: O Futuro do Pensamento na Era da Informática**. Rio de Janeiro: Editora 34, 1993. 203 p.

LIMA, Claudio Woerle. **REPRESENTAÇÕES DOS NÚMEROS RACIONAIS E A MEDIÇÃO DE SEGMENTOS**: Possibilidades com Tecnologias Informáticas. 2010. 201 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado em Ensino da Matemática, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2010.

ONUCHIC, Lourdes de La Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. As Diferenças "Personalidades" do Número Racional Trabalhadas através da Resolução de Problemas. **Bolema**, Rio Claro, p.79-102, 2008.

PONTE, João Pedro da; BROCARD, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003. 152 p.

PONTE, João Pedro da; QUARESMA, Marisa. Abordagem exploratória com representações múltiplas na aprendizagem dos números racionais: Um estudo de desenvolvimento curricular. **Quadrante**, Lisboa, v. , n. 1, p.55-81, 2011.

POST, T. R.; BEHR, M. J.; LESH, R. Research based-observations about children's learning of rational number concepts. **Focus on learning problems in mathematics**. v.18, n.1, 1986.

Disponível em: <http://www.cehd.umn.edu/ci/rationalnumberproject/86_3.html>, Acesso em: 18 out. 2014.

RIPOLL, Jaime Bruck; RIPOLL, Cydara Cavedon; SILVEIRA, José Francisco Porto da. **Números racionais reais e complexos**. 2. ed. Porto Alegre: Ufrgs, 2011. 528 p.

SKOVSMOSE, Ole. Cenários para investigação. **Bolema**, Rio Claro, p.66-91, 2000.

SKOVSMOSE, Ole. **Educação matemática crítica: a questão da democracia**. 3. ed. Campinas: Papirus, 2006.

SOUTO, Daise Lago Pereira. **TRANSFORMAÇÕES EXPANSIVAS EM UM CURSO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA A DISTÂNCIA ONLINE**. 2013. 281 f. Tese (Doutorado) - Curso de Matemática, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2013.

ANEXOS

ANEXO – Termo de consentimento informado

TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu, _____, R.G. _____, responsável pelo(a) aluno(a) _____, da turma _____, declaro, por meio deste termo, que concordei em que o(a) aluno(a) participe da pesquisa intitulada: **INVESTIGANDO OS NÚMEROS RACIONAIS COM O SOFTWARE GEOGEBRA**, desenvolvida pelo(a) pesquisador(a) Prof. Reni Wolffenbüttel. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada pela Prf^a. Dr^a. Débora da Silva Soares.

Poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, por meio do e-mail reniwo@ig.com.br.

Tenho ciência de que a participação do(a) aluno(a) não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, são:

- 1) O ensino dos números racionais;
- 2) Tratar os números racionais geometricamente por meio de medidas e quantidades;
- 3) Utilizar a informática e software de Geometria Dinâmica como recurso didático;
- 4) Elaborar, implementar e analisar uma proposta de ensino que agrega os três itens anteriores.

Fui também esclarecido(a) de que os usos das informações oferecidas pelo(a) aluno(a) será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas pela inicial de seu nome e pela idade.

A colaboração do(a) aluno(a) se fará por meio de entrevista/questionário escrito etc, bem como da participação em oficina/aula/encontro/palestra, em que ele(ela) será observado(a) e sua produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. No caso de fotos e vídeos, obtidos durante a participação do(a) aluno(a), autorizo que sejam utilizados em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários etc, sem identificação (recursos visuais serão utilizados para esconder as feições dos(as) alunos(as)). A colaboração do(a) aluno(a) se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar o(a) pesquisador(a) responsável no endereço Rua Ivoti, 93, Vila Vargas, Sapucaia do Sul-RS, telefone (51)34516277, e-mail: reniwo@ig.com.br.

Fui ainda informado(a) de que o(a) aluno(a) pode se retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Sapucaia do Sul, _____ de _____ de _____.

Assinatura do Responsável:

Assinatura do(a) pesquisador(a):

Assinatura do Orientador da pesquisa:

ANEXO – PROPOSTA DE ENSINO



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
 INSTITUTO DE MATEMÁTICA
 PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA
 Av. Bento Gonçalves, 9500 - Agronomia - 91509-900 - Porto Alegre - RS
 Fone/Fax: (051) 3308.6212
 mat-ppgensimat@ufrgs.br http://www.mat.ufrgs.br/~ppgem



PLANO DE AULA Nº 1: Aula introdutória (Teorema de Tales)

Objetivos:

- Explorar e conceituar segmentos proporcionais utilizando materiais manipulativos;
- Explorar e conceituar o Teorema de Tales;
- Aplicar o teorema de Tales para dividir segmentos em partes iguais.

Tempo: 1 hora e 40 min. ou 2 horas/aula

Iniciamos com comparações de segmentos:

(1º passo) Com uma régua desenhe dois segmentos de reta, o segmento \overline{AB} medindo 3cm, e o outro \overline{CD} , medindo 4cm;

(2º passo) Divida a medida do segmento menor pelo maior e anote;

(3º passo) Construa novamente dois segmentos de reta, o segmento \overline{MN} com 6cm de medida e o \overline{PQ} com 8cm.

(4º passo) Divida a medida do segmento menor pelos maior e anote;

Questões sugeridas:

- 3) O que aconteceu com as divisões das medidas dos segmentos?
- 4) Comparando as medidas entre os segmentos de reta, o que você percebe?

Espera-se que os alunos, ao realizarem os desenhos dos segmentos, percebam que os dois segmentos maiores são o dobro da medida dos segmentos menores e que os resultados das divisões são iguais.

Podemos, ainda, solicitar aos alunos que desenhem segmentos uns múltiplos dos outros e façam as respectivas divisões para constatar as proporcionalidades.

Embora as divisões indiquem “razões”, não estamos utilizando essa nomenclatura, pois se referem a um dos distintos significados dados às frações, que queremos investigar durante as aulas em que os alunos farão uso dos computadores.

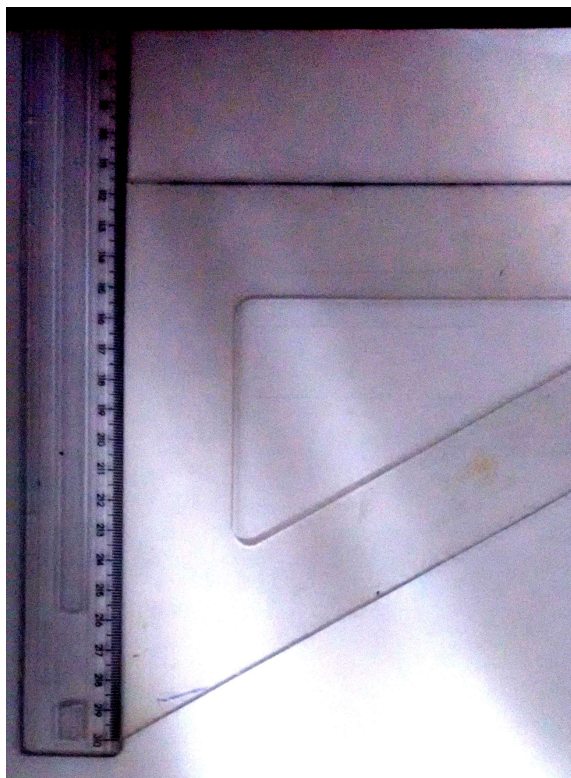
Conceito (Segmentos proporcionais): se quatro segmentos, \overline{AB} , \overline{CD} , \overline{MN} e \overline{PQ} , formam a proporção

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{PQ}}$$

dizemos que \overline{AB} e \overline{CD} são proporcionais a \overline{MN} e \overline{PQ} .

Damos seguimento à aula com a construção de feixe de retas paralelas, sendo interceptadas por duas retas transversais distintas.

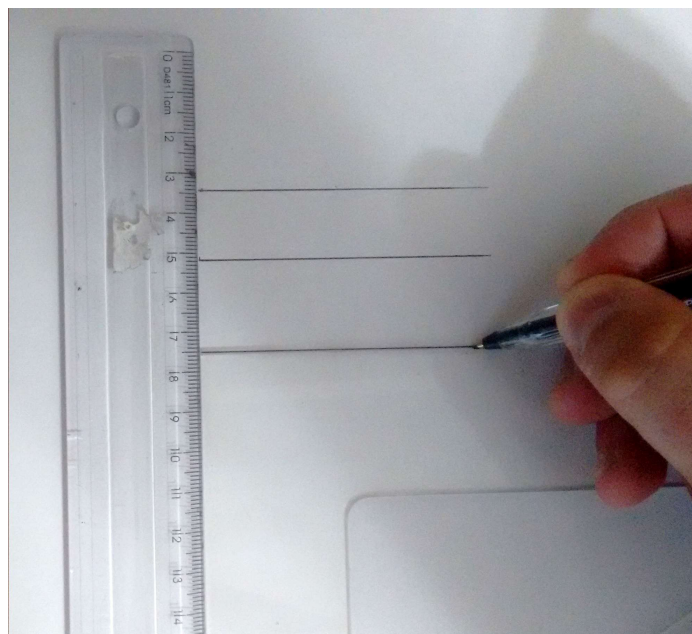
(1º passo) Sobre a folha, fixe a régua. Apoie na régua um esquadro;



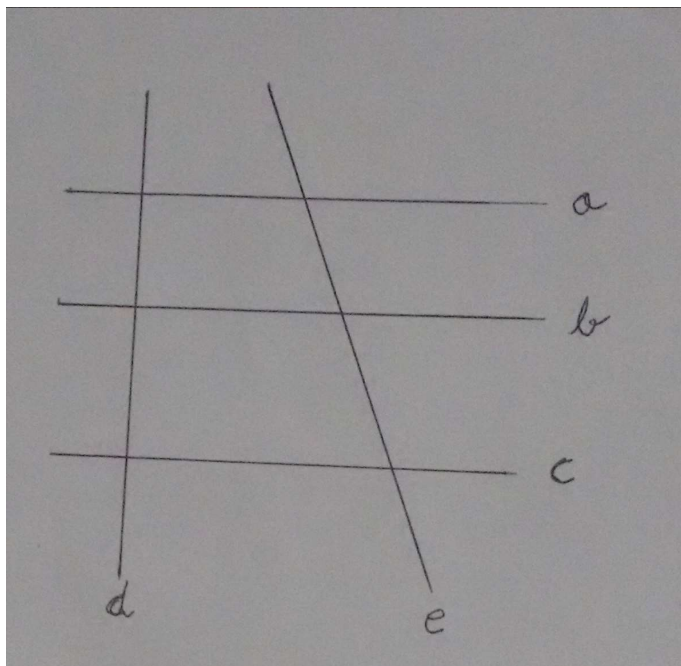
(2º passo) Em um dos lados livres, trace a reta a ;



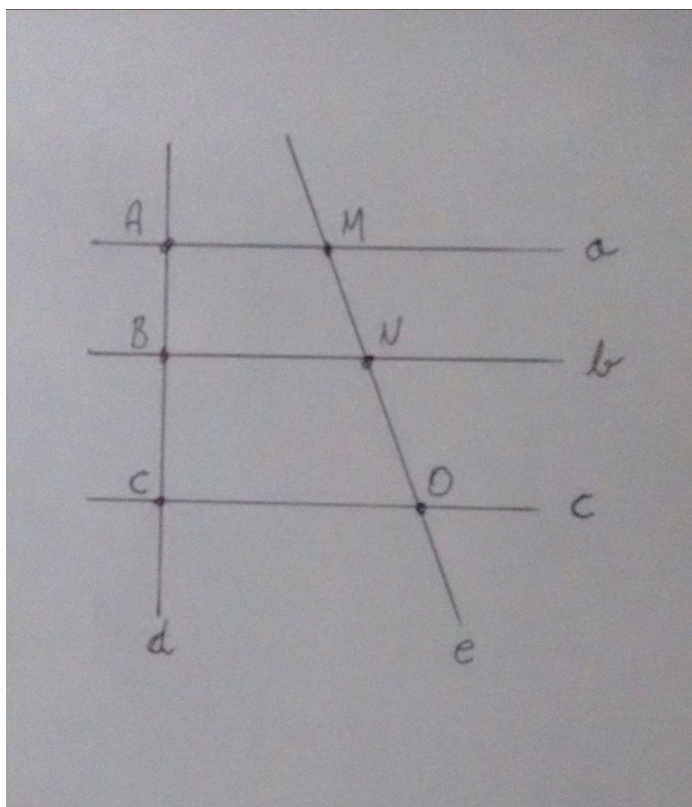
(3º passo) Mantendo o esquadro apoiado na régua, deslize-o e desenhe outras duas retas b e c ;



(4º passo) Sobre o feixe de retas paralelas, trace com a régua duas retas transversais d e e ;



(5º passo) Utilize as letras A, B e C para nomear os pontos de intersecção da reta d com o feixe de retas paralelas e as letras M, N e O para nomear os pontos de intersecção da reta e com o feixe de retas paralelas.



Questões sugeridas:

- 4) Quais são as medidas de \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{MN} e \overline{NO} ?
- 5) Calcule as divisões das medidas de \overline{AB} por \overline{BC} e \overline{MN} por \overline{NO} .
- 6) Das divisões e da comparação com os segmentos \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{MN} e \overline{NO} , o que você pode afirmar?

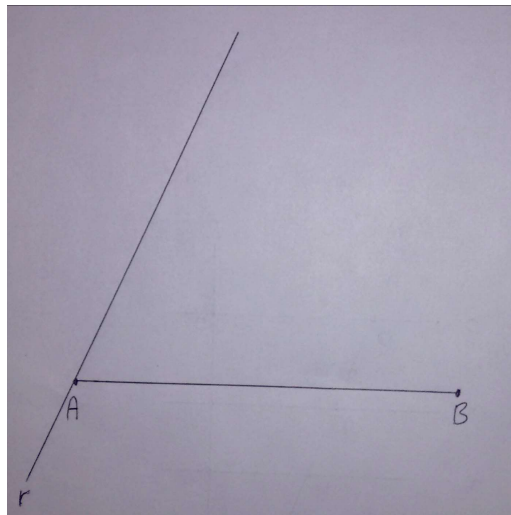
Os alunos devem perceber que os segmentos \overline{AB} e \overline{BC} são proporcionais a \overline{MN} e \overline{NO} . Com esse resultado, enunciamos o Teorema de Tales.

Teorema 2.2 (Teorema de Tales) – Suponhamos que três retas paralelas r , s e t cortam as retas m e n nos pontos A , B e C e A' , B' e C' , respectivamente. Se \overline{AB} e \overline{BC} são congruentes, então também serão congruentes os segmentos $\overline{A'B'}$ e $\overline{B'C'}$.

Agora, com o Teorema de Tales, fazemos com os estudantes a divisão de um segmento qualquer em três partes iguais.

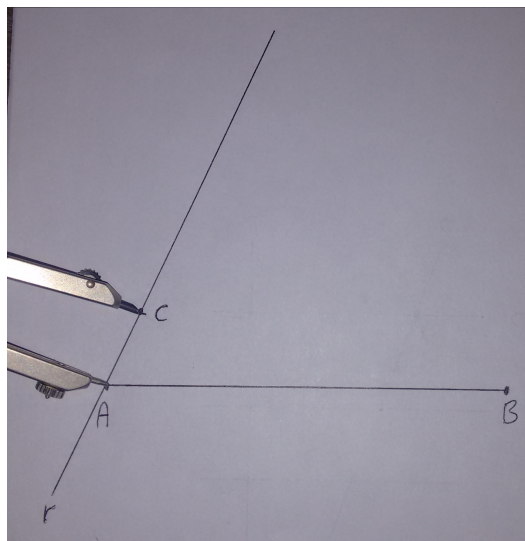
(1º passo) Desenhe, utilizando a régua, um segmento qualquer \overline{AB} ;

(2º passo) Desenhe uma reta r transversal ao segmento \overline{AB} que passe pelo ponto A ;



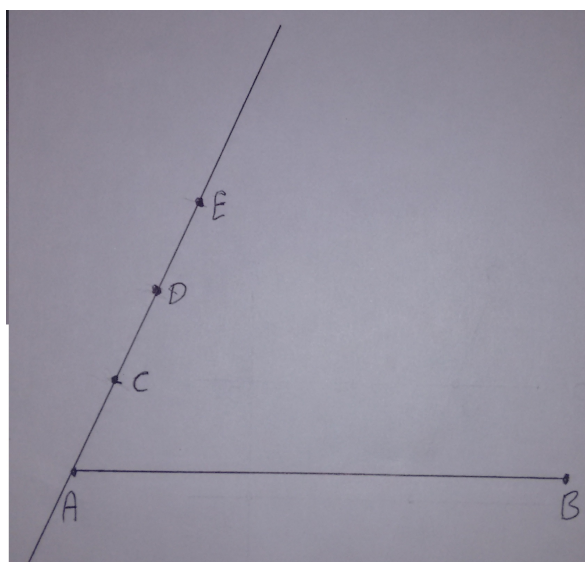
(3º passo) Abra o compasso fixando uma medida qualquer (orientar os alunos para não abrirem muito o compasso e cuidarem para manter essa medida);

(4º passo) Com a ponta seca do compasso em A , passe a outra ponta do compasso pela reta r , marcando o ponto C ;

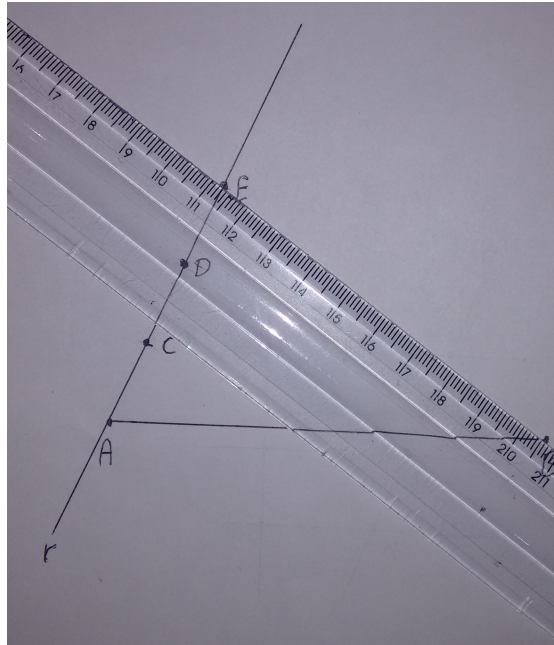


(5º passo) Com a ponta seca do compasso em C, e mantendo a mesma abertura do compasso, passe a outra ponta do compasso novamente pela reta r marcando o ponto D;

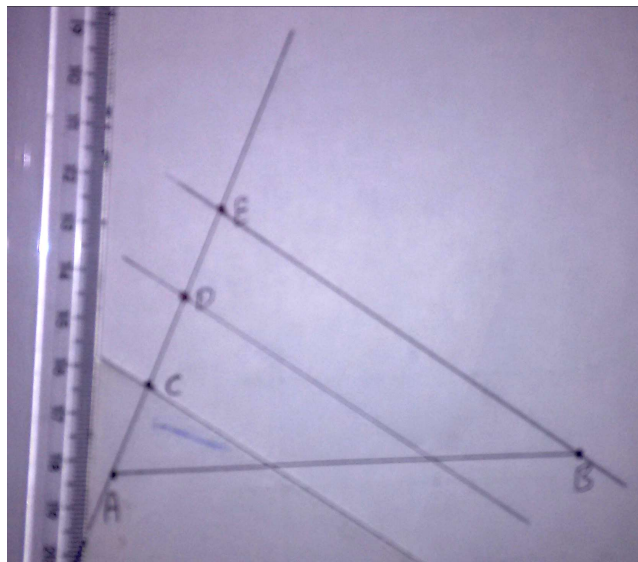
(6º passo) Com a ponta seca do compasso em D, marque de modo análogo ao 5º passo o ponto E sobre a reta r ;



(7º passo) Desenhe a reta s que passa pelos pontos E e B;



(8º passo) Com auxílio de régua e esquadro, trace retas paralelas à reta s , de modo que estas passem pelos pontos C e D ;



(9º passo) Marque os pontos de intersecção do segmento \overline{AB} com as retas obtidas no 8º passo, nomeando-os em M e N .

Questões sugeridas:

- 1) O que você pode dizer das medidas de \overline{AM} , \overline{MN} , \overline{NB} e \overline{NO} ? Justifique sua resposta.

2) Usando procedimento análogo à construção anterior, trace dois segmentos dividindo-os em 5 e 7 partes, respectivamente.

A atividade de dividir os segmentos em partes iguais seguirá sendo articulada em nossa proposta de ensino para o estudo das frações decimais em um ambiente investigativo tecnológico. Desse modo, as atividades seguintes terão esta finalidade.

PLANO DE AULA Nº 2: Explorações iniciais do Software GeoGebra

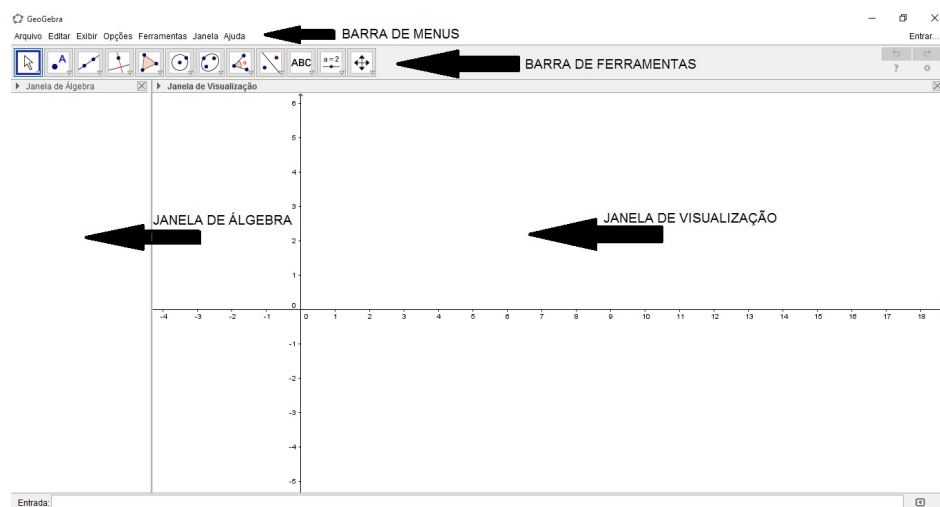
Objetivos:

- Iniciar os alunos no Software GeoGebra;
- Explorar alguns comandos e objetos matemáticos do GeoGebra;
- Construir segmentos e dividi-los em 10 partes iguais;
- Investigar as frações com denominadores 10.



Tempo: 1 hora e 40 min. ou 2 horas/aula







Procedimentos Iniciais

Fazer uma breve apresentação do *software* GeoGebra dando aos alunos um panorama geral do aplicativo.



Em seguida, propor que os alunos façam construções aleatórias, de modo que explorem as ferramentas indicadas no quadro abaixo.

Ícone da Ferramenta	Descrição da Ferramenta
	Ponto: marca um ponto na janela de visualização.
	Ponto em objeto: marca um ponto sobre algum objeto geométrico já desenhado na tela de visualização.

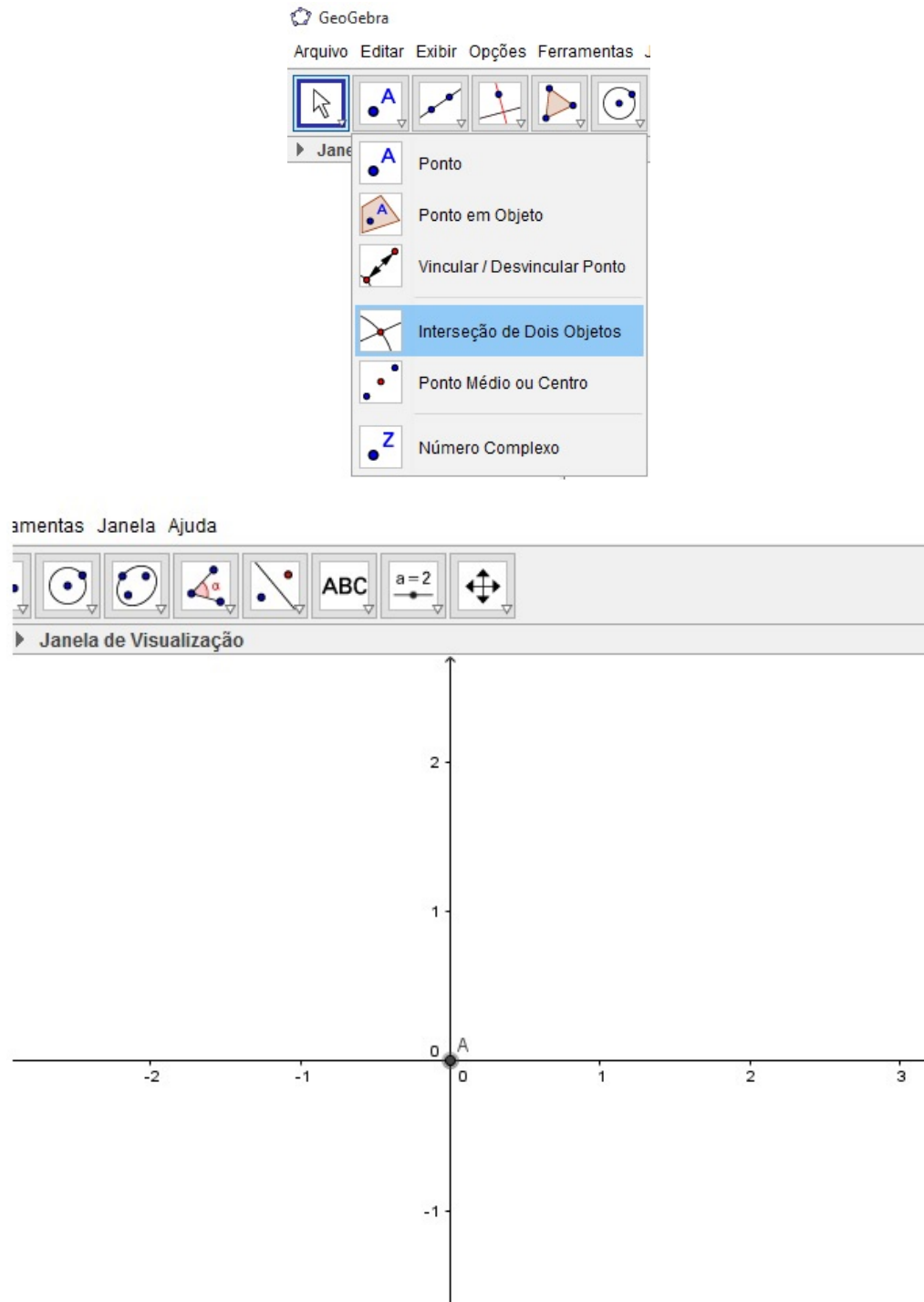
	<p>Intersecção entre dois objetos: marca um ponto de intersecção entre dois objetos geométricos já desenhados.</p>
	<p>Reta: desenha uma reta a partir de dois pontos na janela de visualização.</p>
	<p>Segmento: desenha um segmento de reta a partir de dois pontos na janela de visualização.</p>
	<p>Segmento com comprimento fixo: desenha um segmento de reta a partir de um ponto fixando uma medida para o seu comprimento.</p>
	<p>Reta paralela: desenha uma reta paralela, selecionado um ponto e uma reta, ou semirreta, ou segmento de reta ao qual deseja obter o paralelismo.</p>
	<p>Compasso: ao clicar com o mouse sobre dois pontos que limitam uma medida desejada na janela de visualização, ao selecionar o próximo ponto é gerado uma circunferência com essa medida.</p>

Segmento de Graduação Decimal

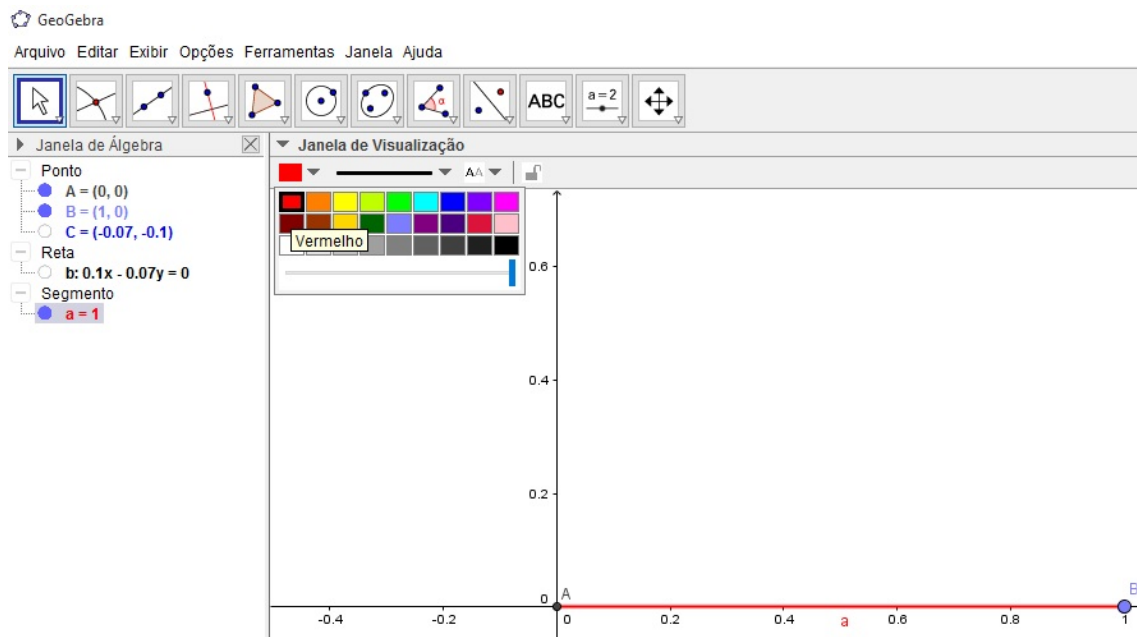
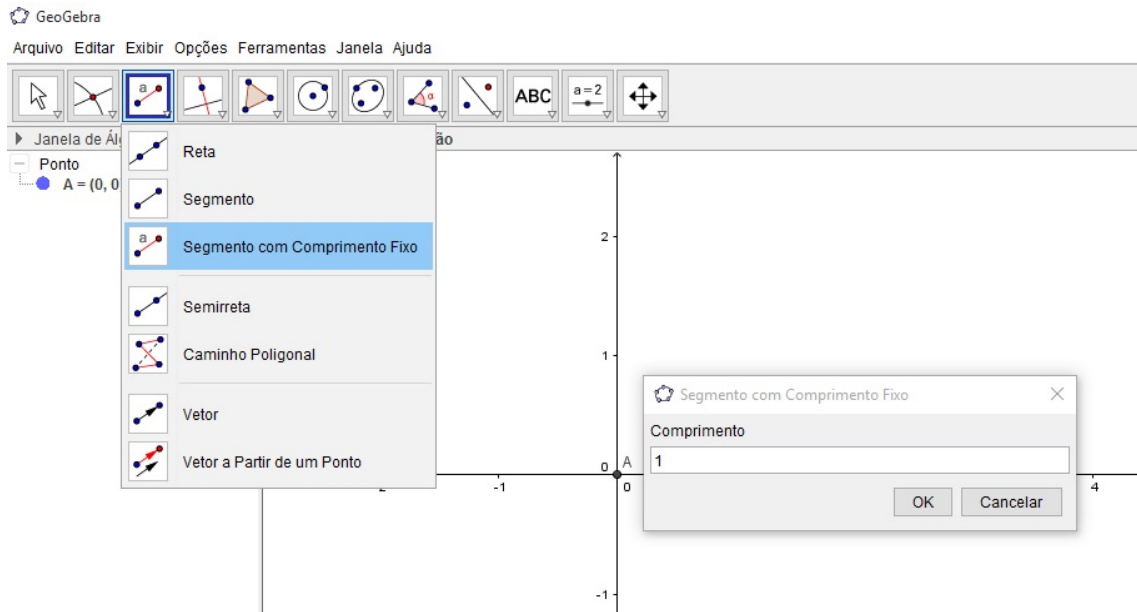
Iniciamos o tema “frações” com a construção do segmento unitário.

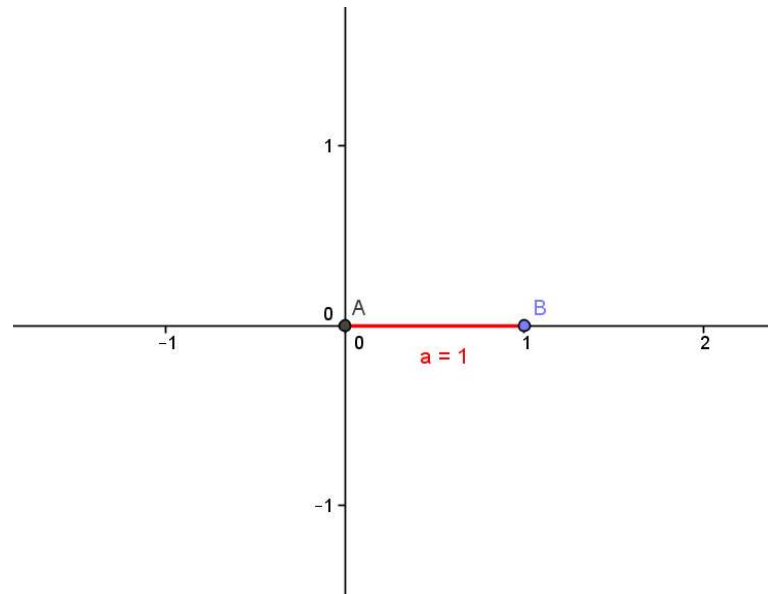
Recomendação: a partir do terceiro passo, recomendamos aos professores que, ao aplicarem a proposta de ensino com os alunos, começassem a questioná-los sobre o que deviam fazer para dividir o segmento em partes iguais, considerando que se tenha realizado com eles em aulas anteriores a aplicação do teorema de Tales na divisão de segmentos. Acreditamos que dessa forma a aula já passe a ter caráter investigativo, pois os estudantes terão de buscar no *software* a ferramenta que atenda a sua necessidade de construção.

(1º Passo) Acionado o *software* GeoGebra, selecione na barra de ferramenta o item “*intersecção de dois objetos*”. Na origem dos eixos cartesianos marque o ponto A.

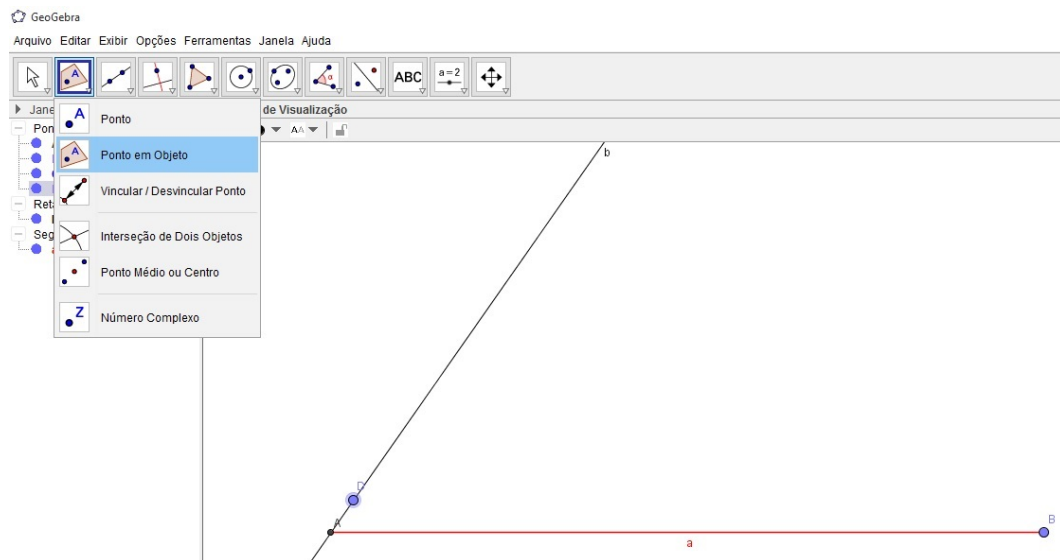
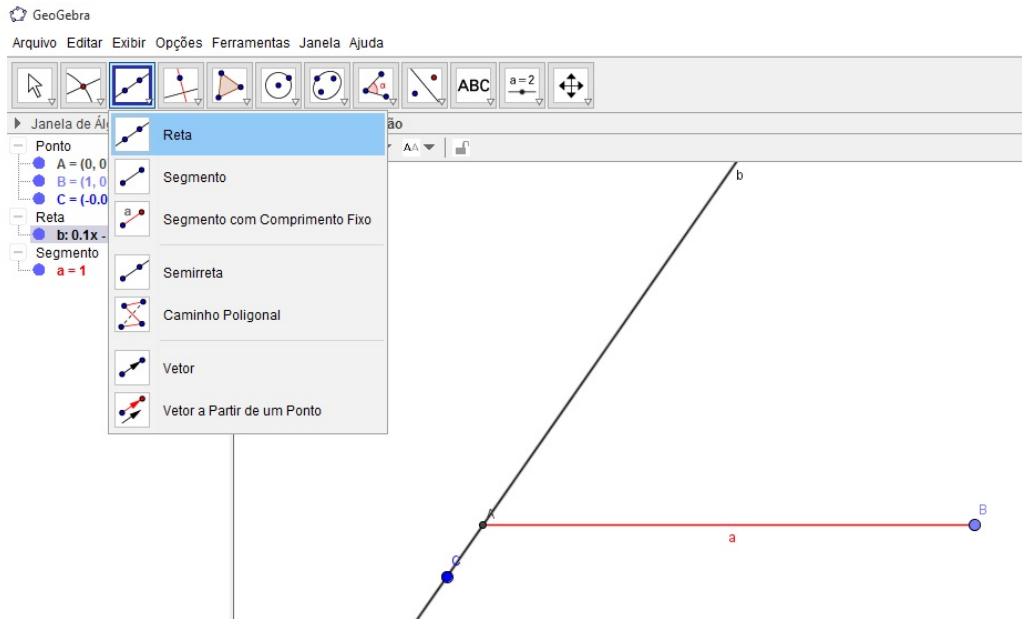


(2º Passo) Selecione o objeto “segmento com comprimento fixo” e, tendo como origem o ponto A, desenhe o segmento com comprimento 1. Para esse segmento, escolha a cor vermelha no seletor de cores do GeoGebra.

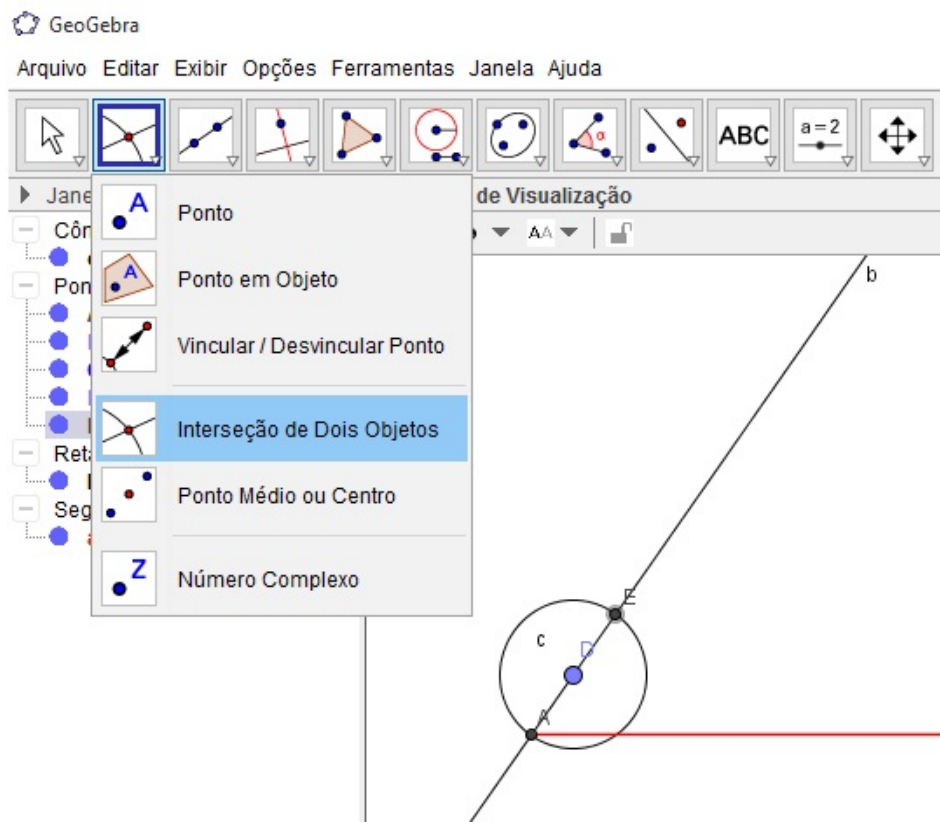
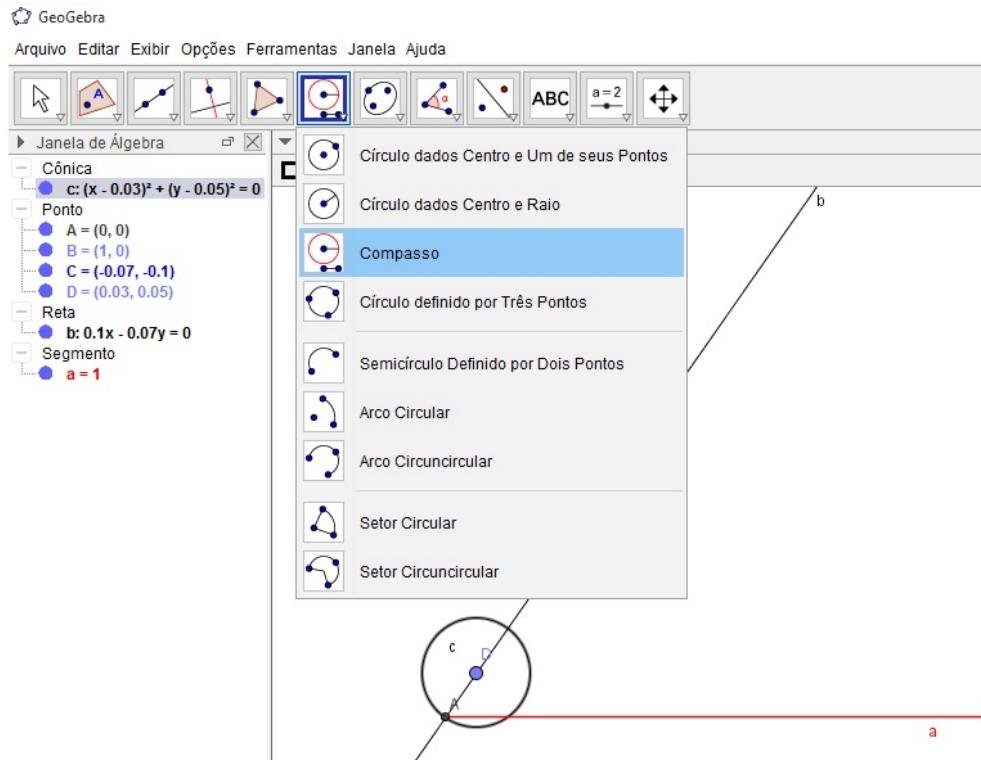




(3º passo) Esconda os eixos cartesianos na janela de visualização. Selecione o objeto “reta” e desenhe uma reta qualquer r que passe pelo ponto A e que seja concorrente ao segmento \overline{AB} . Selecione “ponto em objeto” e sobre a reta r marque o ponto D, de modo que não esteja muito distante de A.

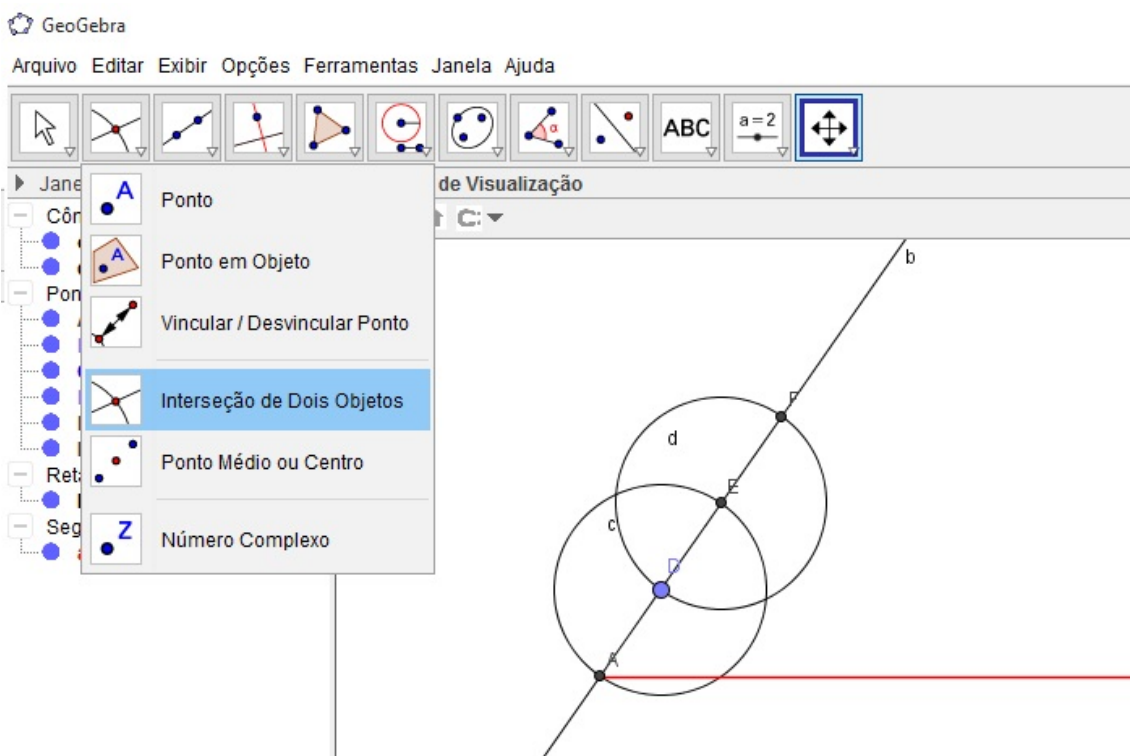
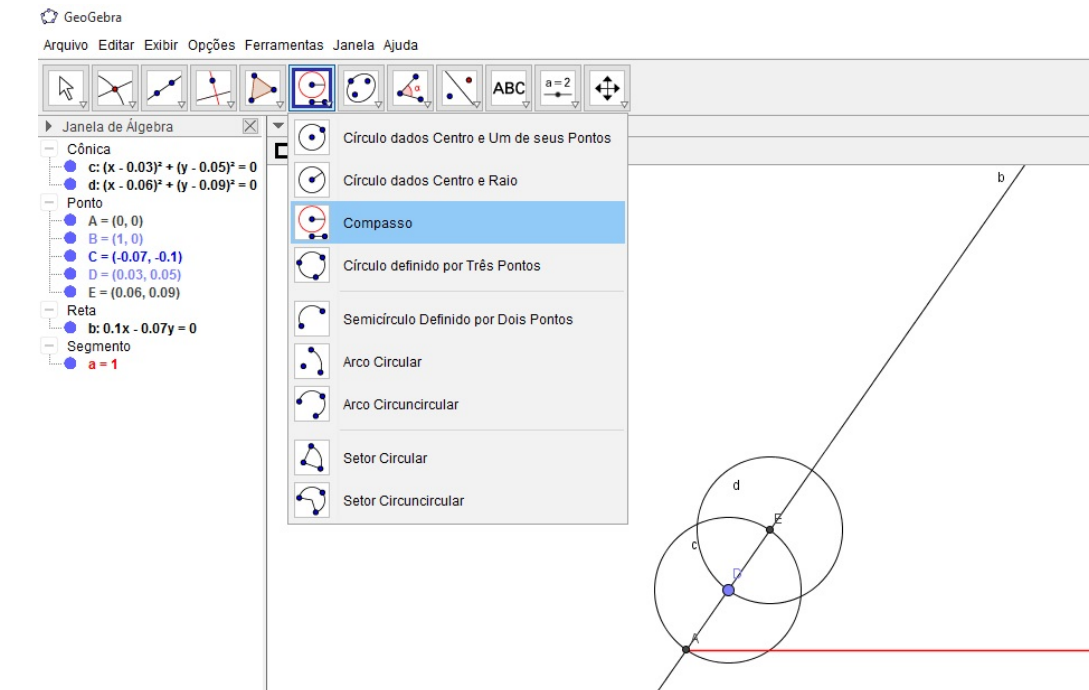


(4º passo) Com a medida de \overline{AD} , marcaremos sobre a reta r dez pontos contando com o ponto D , os quais determinam, dois a dois, segmentos com o mesmo comprimento de \overline{AD} . Para isso, selecionando o objeto “compasso”, tire a medida de \overline{AD} , e fixe a circunferência em D . Selecione o item “intersecção entre dois objetos” e marque o ponto de intersecção E da circunferência com a reta r .



(5º passo) Novamente tire a medida de \overline{AD} com a ferramenta “Compasso” e fixe a circunferência no ponto E. Selecione o item “intersecção entre dois objetos” e

marque o ponto de intersecção F da circunferência com a reta r. Siga assim até obter os dez pontos.



(6º passo) Selecione o objeto “reta” e, tomando o último ponto que foi marcado na reta r, vamos supor que seja M, desenhe a reta s que passa por esse ponto e pelo ponto B.

GeoGebra

Arquivo Editar Exibir Opções Ferramentas Janela Ajuda

Janela de Álgebra

Cônica

- c: $(x - 0.03)^2 + (y - 0.06)^2 = 0.0009$
- d: $(x - 0.06)^2 + (y - 0.12)^2 = 0.0036$
- e: $(x - 0.09)^2 + (y - 0.18)^2 = 0.0081$
- f: $(x - 0.12)^2 + (y - 0.24)^2 = 0.0144$
- g: $(x - 0.15)^2 + (y - 0.30)^2 = 0.0225$
- h: $(x - 0.18)^2 + (y - 0.36)^2 = 0.0324$
- k: $(x - 0.23)^2 + (y - 0.46)^2 = 0.0529$
- p: $(x - 0.26)^2 + (y - 0.52)^2 = 0.0756$
- q: $(x - 0.29)^2 + (y - 0.58)^2 = 0.1024$

Ponto

- A = (0, 0)
- B = (1, 0)
- C = (-0.07, -0.1)
- D = (0.03, 0.05)
- E = (0.06, 0.09)
- F = (0.1, 0.14)
- G = (0.13, 0.18)
- H = (0.16, 0.23)
- I = (0.19, 0.28)
- J = (0.23, 0.32)
- K = (0.26, 0.37)
- L = (0.29, 0.41)
- M = (0.32, 0.46)

Reta

- b: $0.1x - 0.07y = 0$
- i: $0.46x + 0.68y = 0.46$

Segmento

- a = 1

(7º passo) Selecione o objeto “reta paralela”. Vamos desenhar as retas paralelas à reta s, posicionando-as nos pontos marcados sobre a reta r.

GeoGebra

Arquivo Editar Exibir Opções Ferramentas Janela Ajuda

Janela de Álgebra

Cônica

- c: $(x - 0.03)^2 + (y - 0.06)^2 = 0.0009$
- d: $(x - 0.06)^2 + (y - 0.12)^2 = 0.0036$
- e: $(x - 0.09)^2 + (y - 0.18)^2 = 0.0081$
- f: $(x - 0.13)^2 + (y - 0.24)^2 = 0.0144$
- g: $(x - 0.16)^2 + (y - 0.30)^2 = 0.0225$
- h: $(x - 0.19)^2 + (y - 0.36)^2 = 0.0324$
- k: $(x - 0.23)^2 + (y - 0.46)^2 = 0.0529$
- p: $(x - 0.26)^2 + (y - 0.52)^2 = 0.0756$
- q: $(x - 0.29)^2 + (y - 0.58)^2 = 0.1024$

Ponto

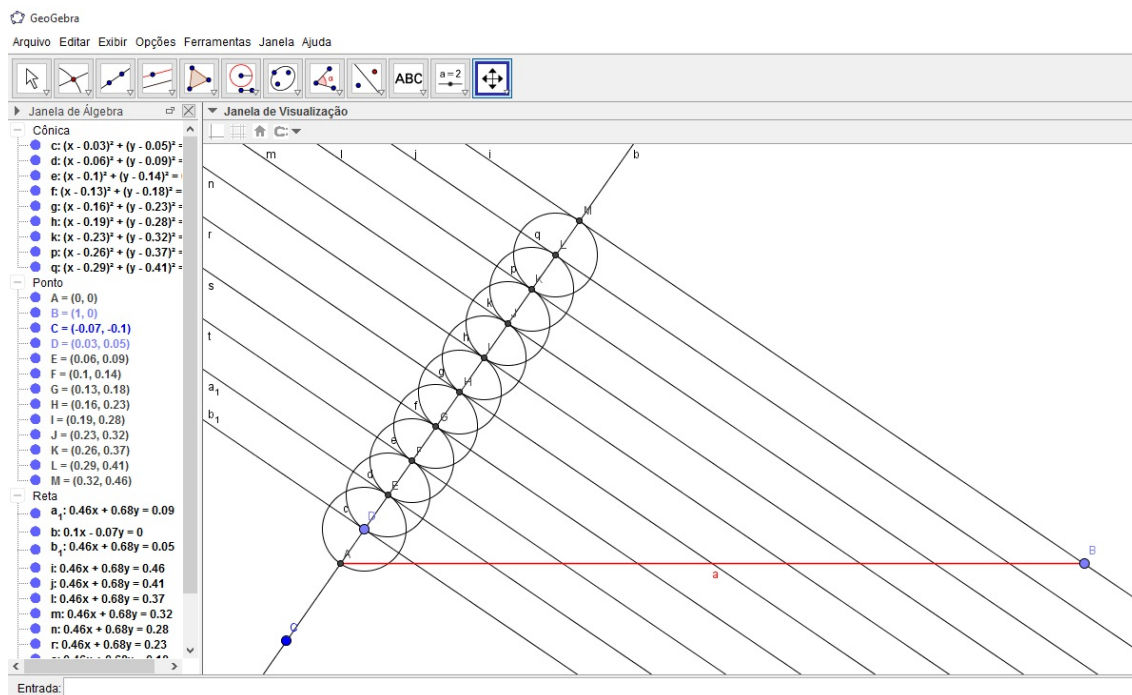
- A = (0, 0)
- B = (1, 0)
- C = (-0.07, -0.1)
- D = (0.03, 0.05)
- E = (0.06, 0.09)
- F = (0.1, 0.14)
- G = (0.13, 0.18)
- H = (0.16, 0.23)
- I = (0.19, 0.28)
- J = (0.23, 0.32)
- K = (0.26, 0.37)
- L = (0.29, 0.41)
- M = (0.32, 0.46)

Reta

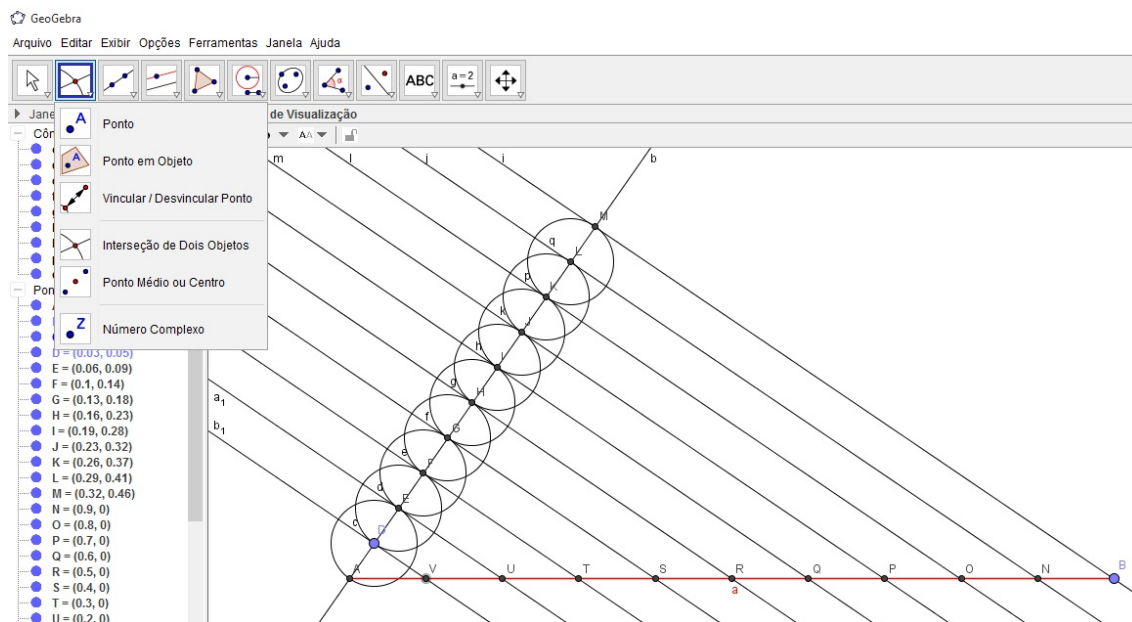
- b: $0.1x - 0.07y = 0$
- i: $0.46x + 0.68y = 0.46$
- j: $0.46x + 0.68y = 0.41$

Segmento

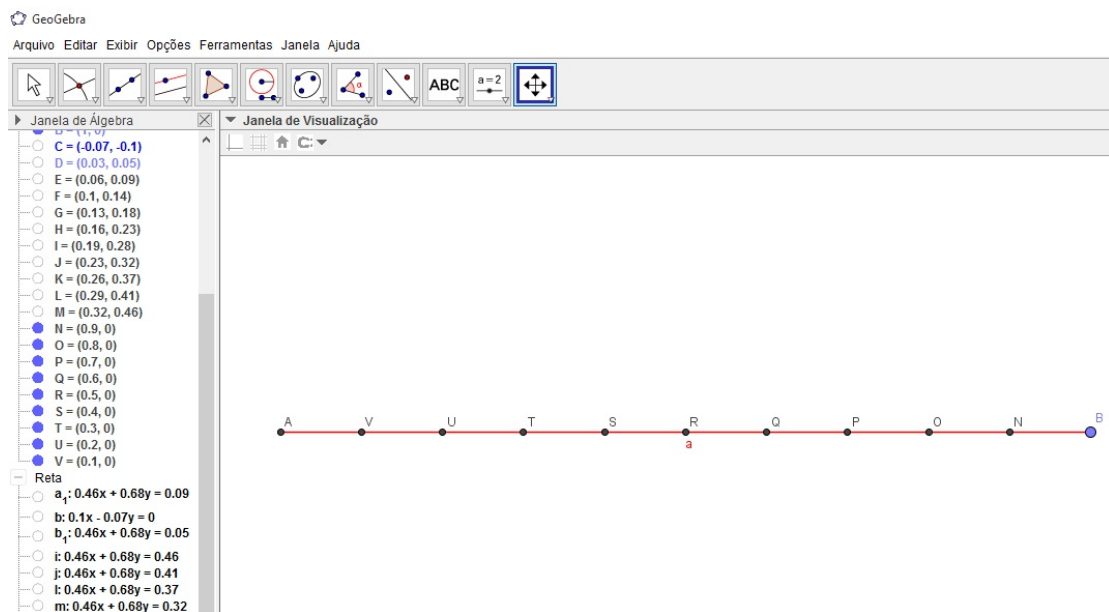
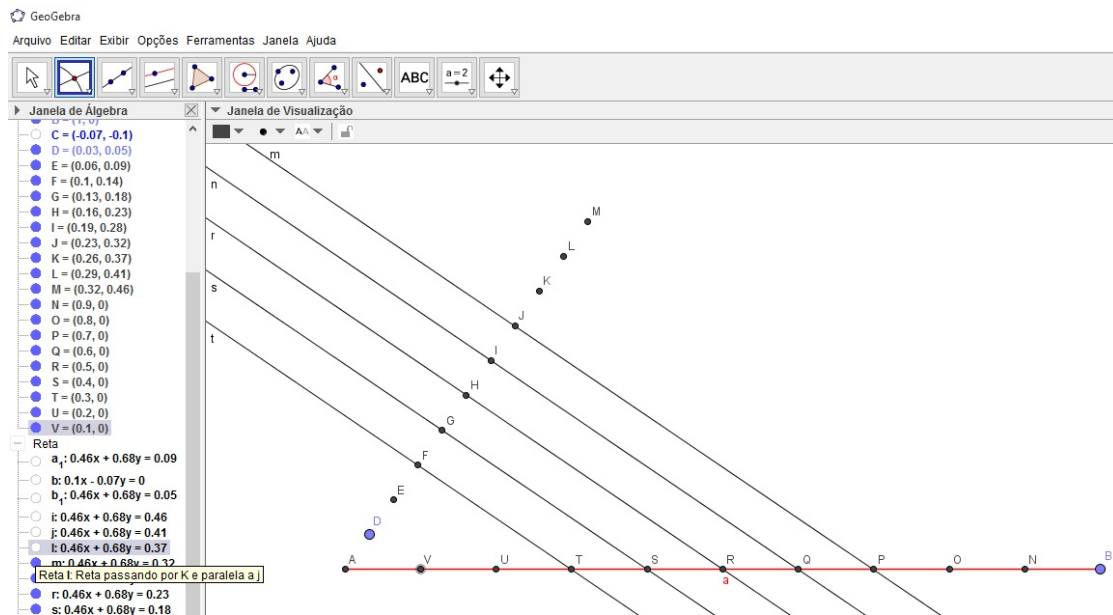
- a = 1



(8º passo) Após desenhadas todas as retas paralelas, selecione “*Intersecção entre dois objetos*” e marque os pontos de intersecção entre as retas paralelas e o segmento unitário.



(9º passo) Mediante os objetos listados na “Janela de Álgebra”, oculte as circunferências e as retas, deixando visível somente o segmento unitário \overline{AB} com as dez divisões demarcadas por pontos.



Questões Sugeridas

1) Lembrando as frações que você já estudou tanto no 6º quanto no 7º anos, e sabendo que o segmento AB tem medida 1, indique aquela que representa a medida de cada parte do segmento \overline{AB} .

2) Observando o segmento vermelho de origem em A e que se estende até o terceiro ponto marcado, escreva a fração que dá a medida desse segmento. Justifique.

3) Qual é a medida do segmento limitado pelo segundo e sétimo pontos?

PLANO DE AULA Nº 3: Graduação dos Centésimos

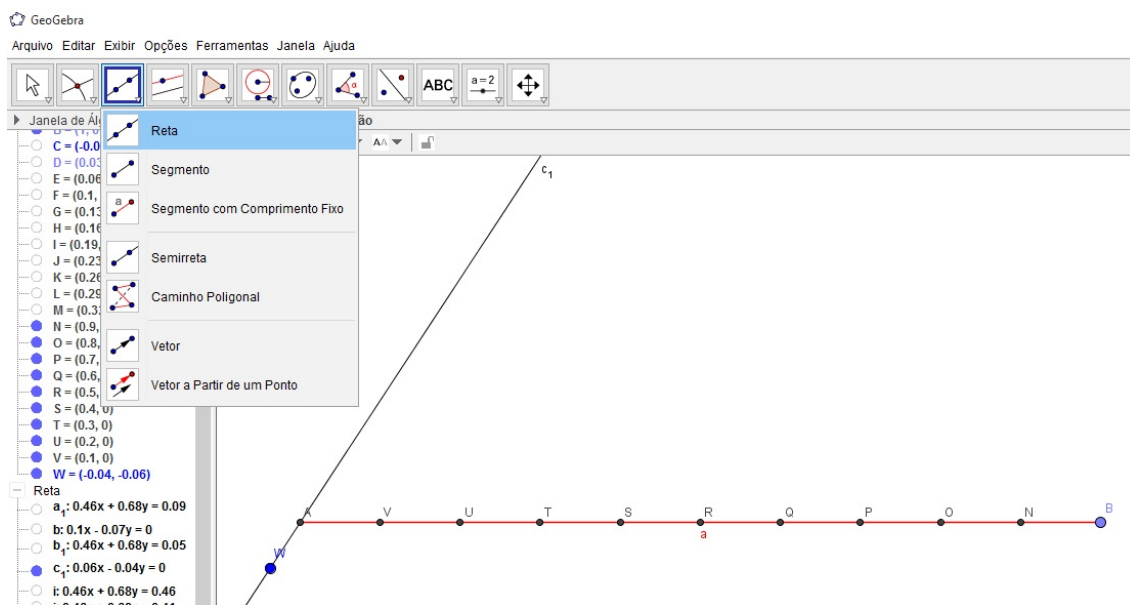
Objetivos:

- Construir no GeoGebra a graduação dos centésimos no segmento \overline{AB} ;
- Investigar sobre frações com denominadores iguais a 100.

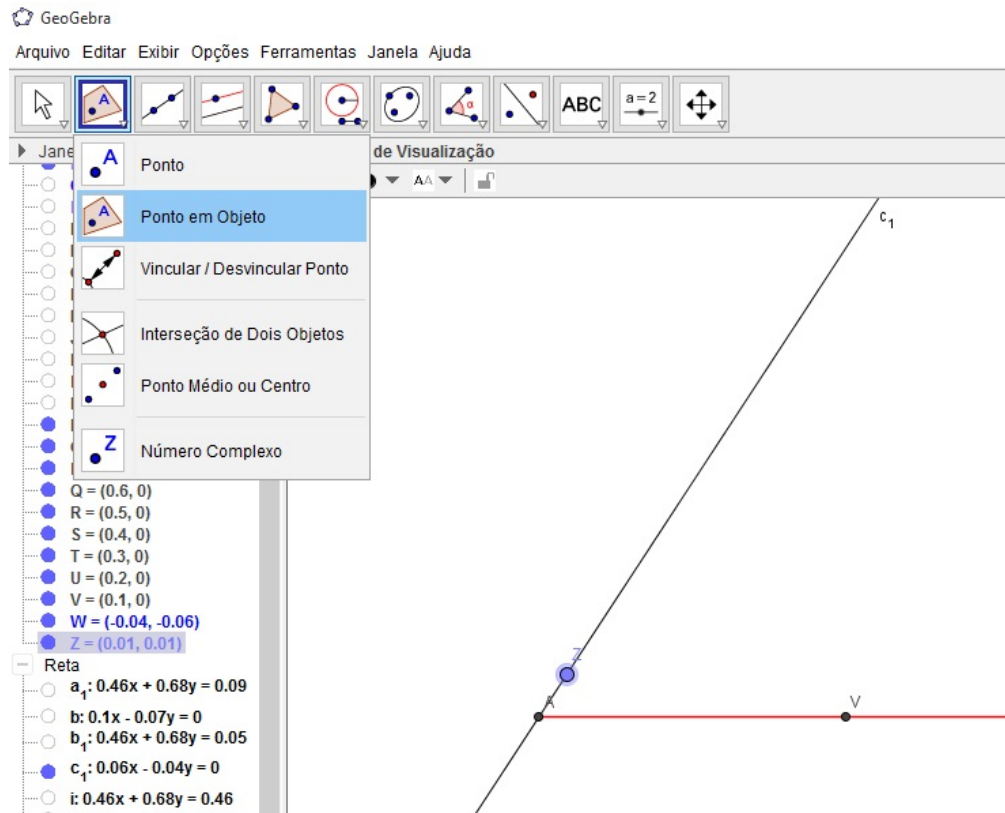
Tempo: 1 hora e 40 min. ou 2 horas/aula.

No segmento construído na aula anterior, tomando qualquer uma das partes que foram obtidas, vamos dividi-la também em dez partes. Para isso, utilizaremos os mesmos princípios do exercício anterior.

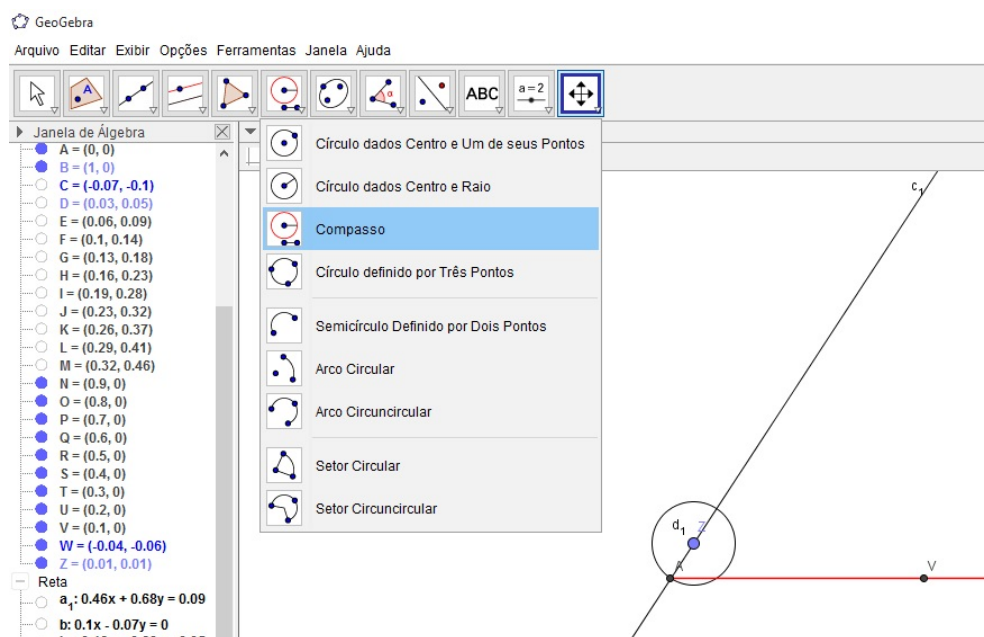
(1º passo) No segmento construído, escolha uma das partições feita na atividade anterior. Num dos pontos extremos desse segmento, digamos que seja o ponto A, trace uma reta t com a ferramenta “reta”.

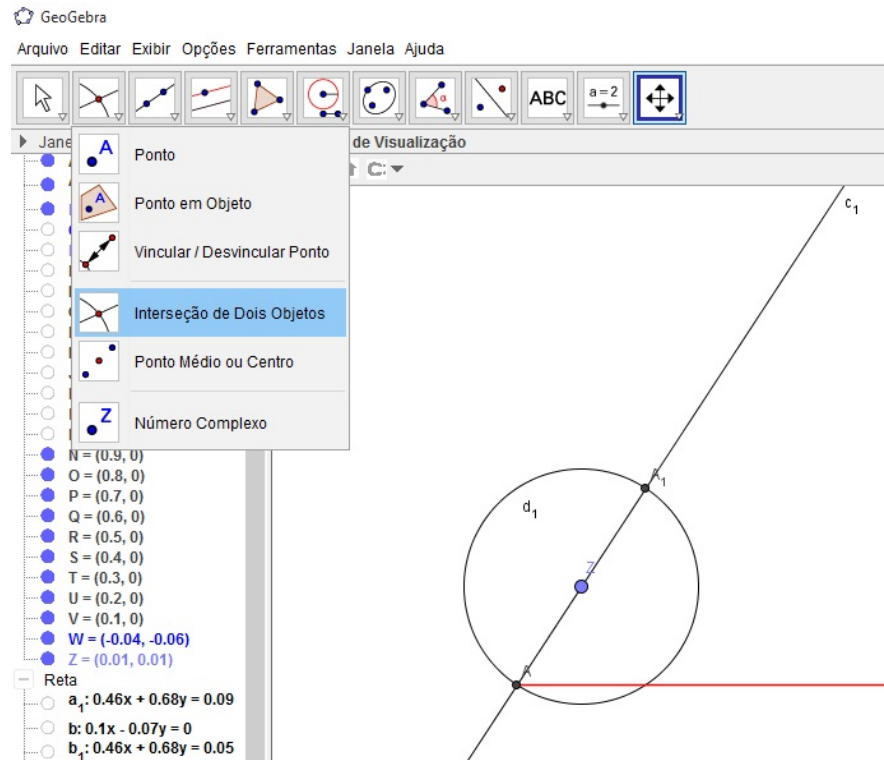


(2º passo) Selecione a ferramenta “ponto em objeto” e marque um ponto Z não muito distante do ponto A.

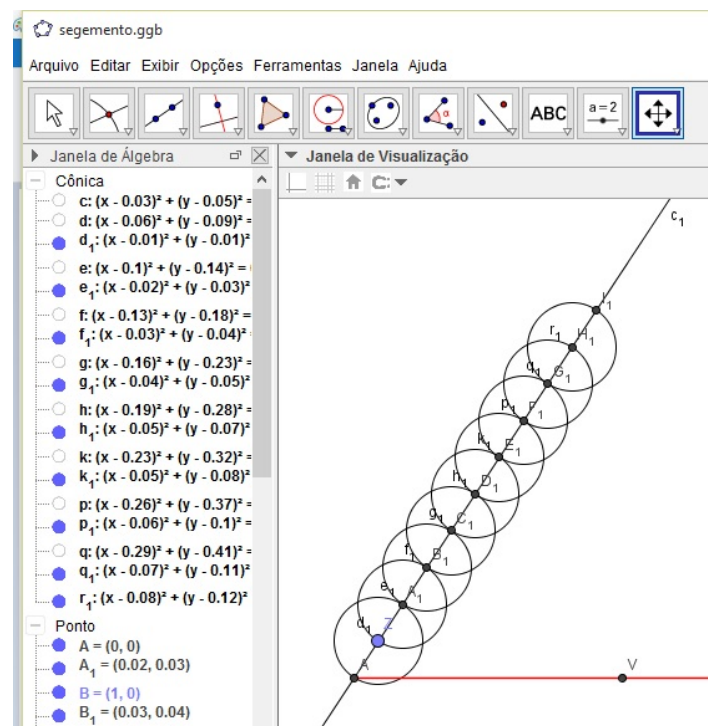


(3º passo) Selecione a ferramenta “Compasso” e tome a medida do segmento \overline{AZ} . Centre a circunferência em Z, em seguida com a ferramenta “intersecção entre dois objetos” marque o ponto de intersecção A' entre a reta t e a circunferência, obtendo na reta t outro segmento com a medida de \overline{AZ} .

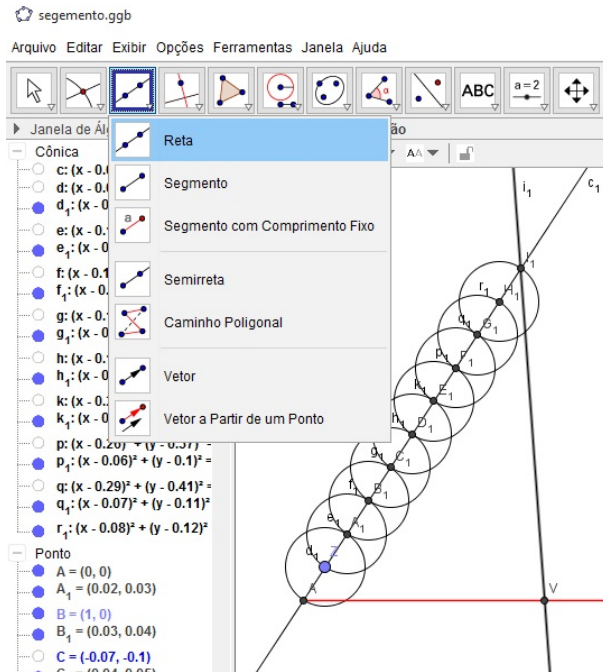




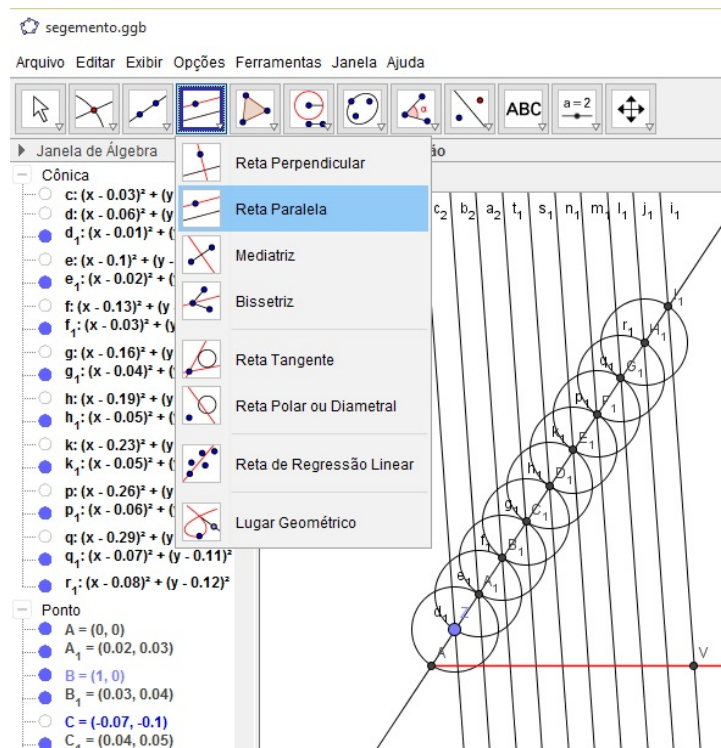
(4º passo) Repetindo o passo anterior, coloque pontos em t até obter dez segmentos com a medida de \overline{AZ} .



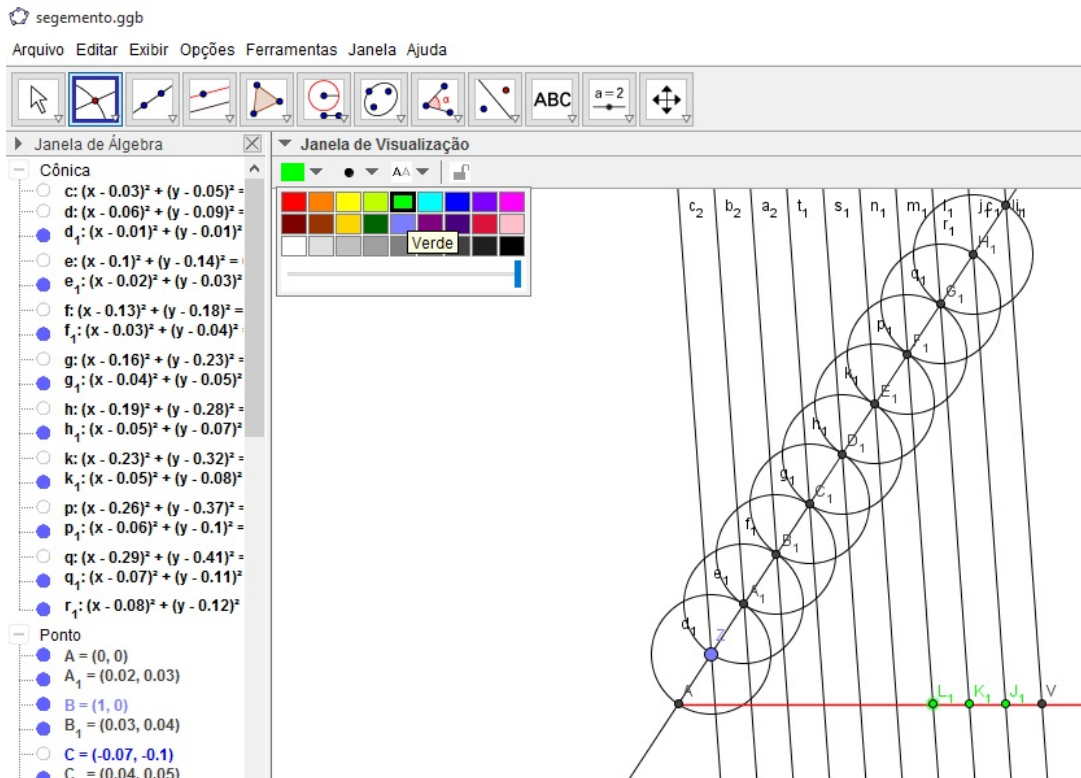
(5º passo) Selecione o objeto “reta” e, tomando o último ponto que foi marcado na reta t , vamos supor que seja M' , desenhe a reta u que passa por esse ponto e pelo outro ponto extremo da partição escolhida, digamos que seja o ponto V .



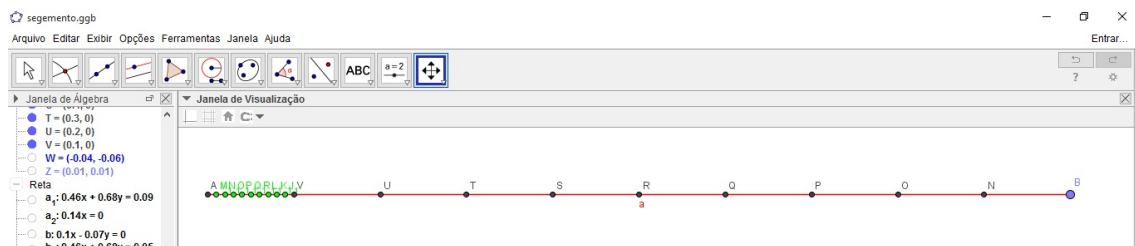
(6º passo) Selecione o objeto “reta paralela” e desenhe as retas paralelas à reta u , posicionando-as nos pontos marcados sobre a reta t .



(7º passo) Após desenhadas todas as retas paralelas, selecione “Intersecção entre dois objetos” e a cor verde no seletor de cores; em seguida, marque os pontos de intersecção entre as retas paralelas e a partição escolhida.



(8º passo) Na “janela de álgebra”, oculte as circunferências e as retas, deixando visível somente o segmento unitário \overline{AB} com as novas divisões demarcadas pelos pontos verdes.



Questões sugeridas:

Reduza e amplie a imagem uma ou mais vezes.

- 1) Se você fizesse o mesmo procedimento de divisões em cada uma das outras partições, quantas partes menores você teria ao longo do segmento \overline{AB} ?
- 2) Que fração indica a medida de uma dessas partes menores?
- 3) Tomando um desses novos pontos, como você indica, por fração, a medida do segmento limitado por A e esse ponto em relação ao segmento \overline{AB} ?
- 4) Ainda em relação ao ponto escolhido, qual é a medida do segmento formado por este ponto e o ponto B ?

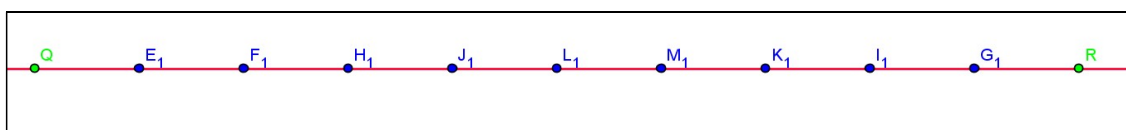
PLANO DE AULA Nº 4: Graduação dos Milésimos e Algumas Generalizações de Frações Decimais

Objetivos:

- | |
|---|
| <ul style="list-style-type: none"> - Construir no GeoGebra a graduação dos milésimos no segmento \overline{AB} ; - Investigar sobre frações com denominadores iguais a 1000; - Investigar algumas regularidades e características das frações decimais. |
|---|

Tempo: 1 hora e 40min. ou 2 horas/aula.
--

Tendo os alunos realizado a graduação dos décimos e centésimos, de modo análogo, propor que tomem um dos segmentos limitados pelos pontos verdes e façam novamente a divisão em dez partes para a obtenção da graduação dos milésimos. Indica-se, ainda, que os pontos limitantes sejam azuis. Não descreveremos aqui os passos dessa construção, pois são similares aos passos das tarefas antecedentes; dessa forma, teremos como resultado uma figura similar à que segue abaixo:



Questões sugeridas:

- 1) E, agora, quantas dessas partes ainda menores caberia no segmento \overline{AB} ?
- 2) A medida de um desses segmentos representa que fração da medida do segmento \overline{AB} ?
- 3) Escolhendo um dos pontos azuis, qual fração indicaria a posição dele no segmento \overline{AB} ?
- 4) Quantas vezes esse processo de divisão do segmento unitário AB poderia ser repetido?
- 5) A cada processo a realizar, de que modo o número de segmentos vai aumentando?

Nessas atividades e questões, o objetivo é fazer com que os alunos investiguem a relação entre a representação fracionária e a representação decimal do número racional. Para isso, faz-se o uso do eixo cartesiano do *software* para fornecer as representações decimais.

Esperamos que os alunos, estando visível o eixo das abscissas, visualizem as escritas das frações com seus respectivos números decimais e a forma com que estão organizados no segmento graduado em décimos, centésimos e milésimos, bem como conjecturem como se obtém a expansão decimal em frações com denominadores do tipo 10^n .

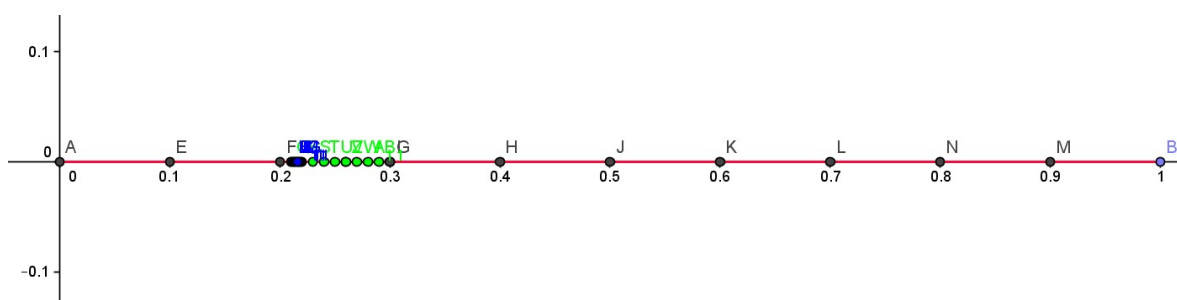
Sugerimos, agora, que o professor, fazendo uso da imagem projetada do segmento com as graduações, indique aos alunos três pontos de \overline{AB} , um de cada cor; em seguida, que os alunos reduzam e ampliem a imagem no monitor do computador para escrever a fração correspondente à medida limitada ou à localização do ponto no segmento \overline{AB} .

6) Indique a fração correspondente à medida do segmento \overline{AH} , \overline{AU} e $\overline{AH_1}$.

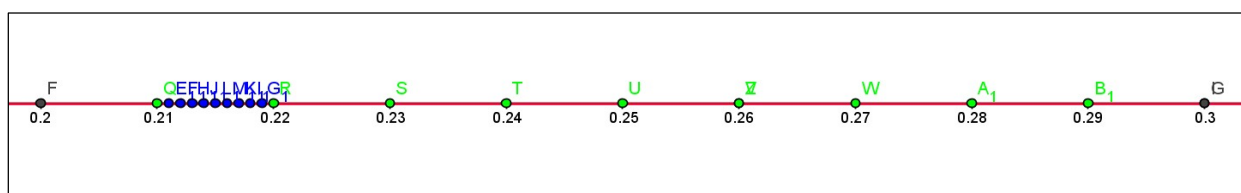
Após verificar que os alunos escreveram as frações, é preciso um diálogo para verificar se as equivalências estão de acordo. Caso não estejam, recomenda-se realizar questionamentos que os encaminhem às respostas adequadas.

O passo seguinte é solicitar aos alunos que tornem visível o eixo cartesiano e escrevam o número de representação decimal equivalente ao ponto indicado.

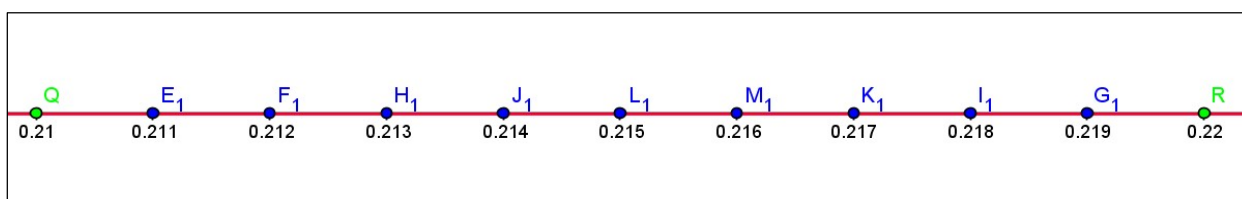
Na figura abaixo, encontra-se a visualização da graduação dos décimos (pontos pretos).



Visualização da graduação dos centésimos (pontos verdes):



Visualização da graduação dos milésimos (pontos azuis):



7) Dos pontos que indicamos e com a escrita das respectivas frações que representam a sua medida e posição em relação a \overline{AB} , observando o segmento no GeoGebra, anote a representação decimal fornecida pelo software. Observe que essa representação decimal é equivalente a cada fração.

8) Como você justificaria a igualdade entre a representação de fração e a representação decimal?

9) Na sequência de frações abaixo, indique os respectivos números decimais:

$$\frac{7}{10} =$$

$$\frac{7}{100} =$$

$$\frac{7}{1000} =$$

$$\frac{7}{\underbrace{1000\dots000}_{n \text{ zeros}}} =$$

10) Para cada número decimal abaixo, indique a fração correspondente:

$$3,2 =$$

$$0,32 =$$

$$0,032 =$$

$$0,0032 =$$

$$0, \underbrace{000\dots0032}_{n \text{ algarismos}} =$$

11) Quantos números racionais há entre 0 e 1? Justifique.

PLANO DE AULA Nº 5: Ocorrências de Dízimas

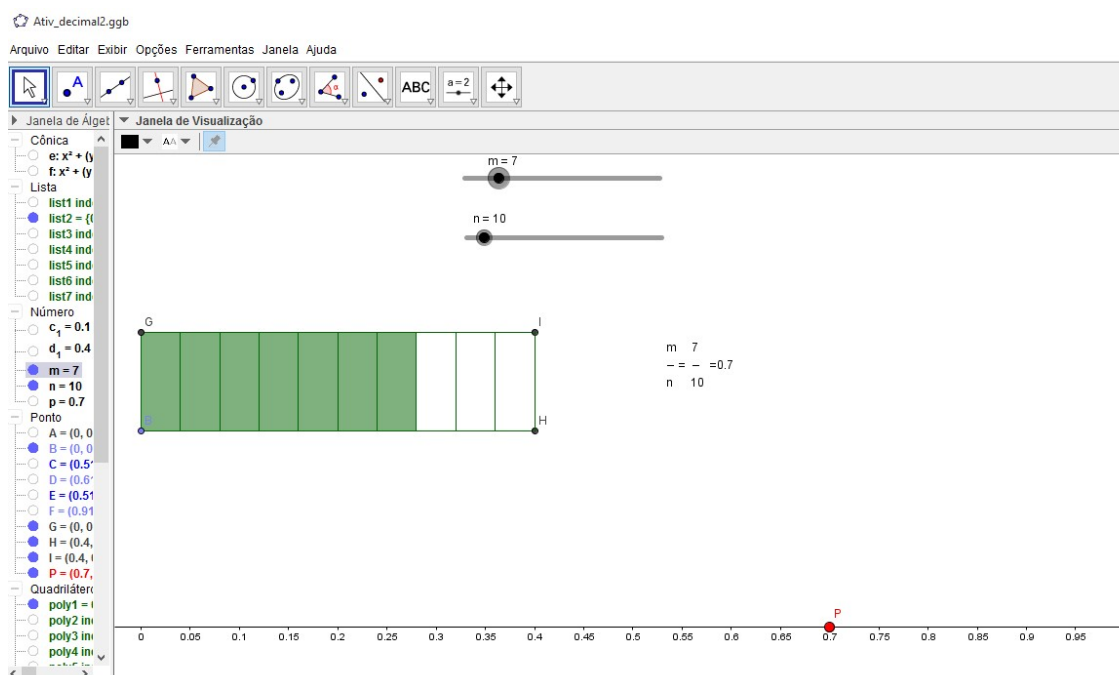
Objetivos:

- Agregar a representações dos números racionais à figura de retângulo(s) particionado(s);
- Explorar, diante das distintas representações de números racionais, a ocorrência de dízimas periódicas;
- Investigar propriedades dos números racionais que determinam a ocorrência ou não de dízima periódica.

Tempo: 1 hora e 40 min. ou 2 horas/aula.

Essa aula inicia-se abrindo no GeoGebra o arquivo “Ativ_Decimal2”.

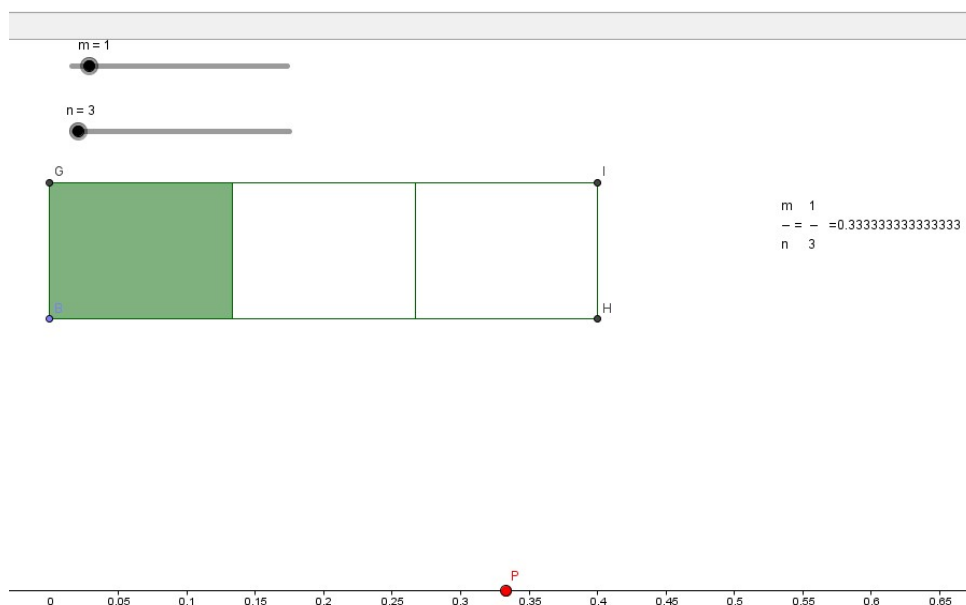
Visualizando a construção contida no arquivo, pedimos que os alunos alterem os valores do numerador m e do denominador n com os controles deslizantes e observem as mudanças na ilustração (retângulo ou retângulos) e no ponto P .



Com esse arquivo, o professor pode retomar os distintos tipos de frações, ou seja, verificar as frações próprias, impróprias e impróprias aparentes.

Focando no estudo de números com dízima, aconselhamos que os alunos, após fazerem uma exploração inicial do arquivo, representem no arquivo “Ativ_decimal2” do GeoGebra, a fração $1/3$ e, em seguida, que ampliem a imagem e

façam na reta numérica aproximações de números decimais para essa fração observando o ponto P. A finalidade é fazê-los perceber que se trata de algo que segue infinitamente e que os dígitos repetidos à direita da vírgula se referem à dízima periódica.



Questões sugeridas

1) Ampliando a imagem e observando os números que vão surgindo, preencha conforme indicado as lacunas a seguir com pares de números decimais, um menor e outro maior, que estejam mais próximos de $1/3$:

com uma casa decimal: _____ $< 1/3 <$ _____

com duas casas decimais: _____ $< 1/3 <$ _____

com três casas decimais: _____ $< 1/3 <$ _____

com quatro casas decimais: _____ $< 1/3 <$ _____

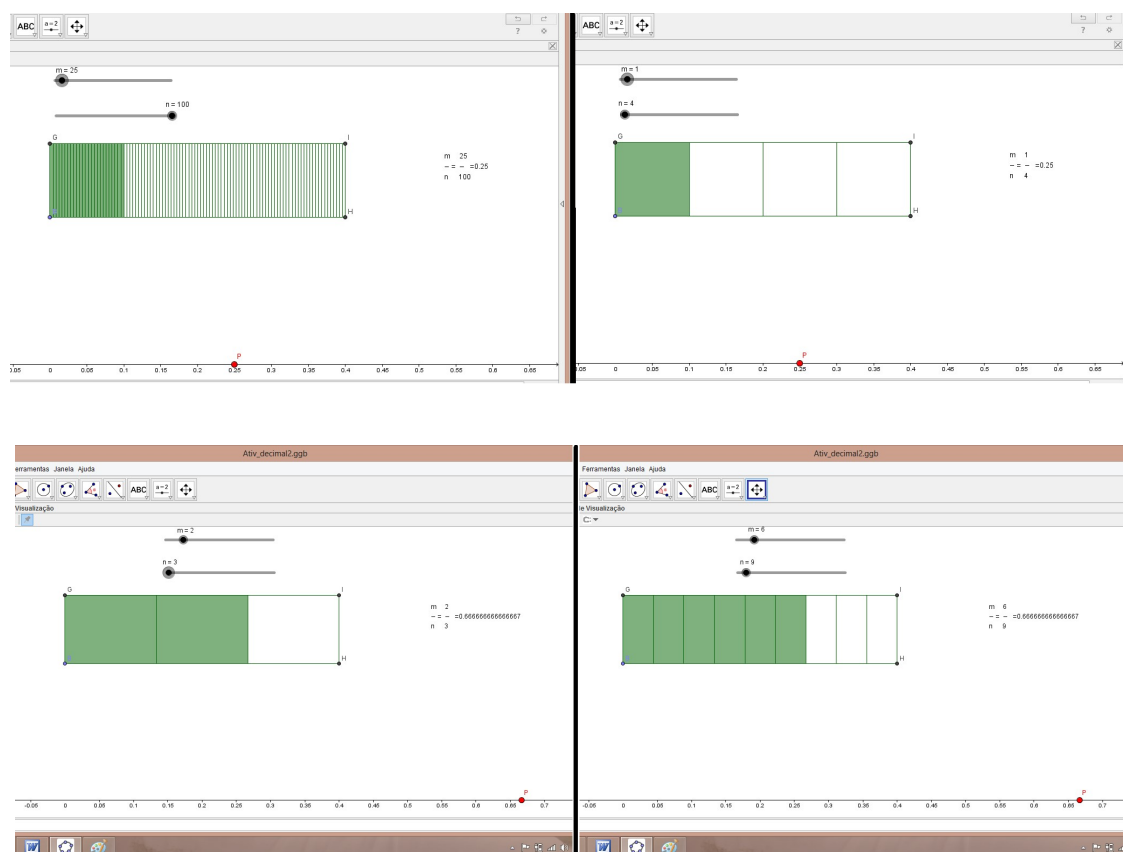
com cinco casas decimais: _____ $< 1/3 <$ _____

2) O que você observa com as anotações feitas na atividade anterior? A fração $1/3$ corresponde a algum número decimal? Justifique.

O estudo segue com atividades no propósito de que os estudantes investiguem sobre características das frações que os permitam averiguar a ocorrência ou não de dízima periódica.

Para tanto, o professor deve solicitar que os alunos representem, no arquivo “Ativ_Decimal2”, pares de frações equivalentes e que anotem o número de representação decimal resultante de cada fração.

No passo seguinte, pedimos aos alunos que, ao perceberem as equivalências, analisem se os pares de frações estão organizados em dois blocos, um destinado às frações decimais e o outro às frações que geram dízimas periódicas, na intenção de que apontem as diferenças entre esses dois tipos de frações.



Após os alunos anotarem junto às frações os respectivos números racionais, solicitaremos que factorem os numeradores e denominadores das frações, de modo que mantenham as frações organizadas conforme os blocos a que pertencem. Em

seguida, pediremos que comparem os dois blocos de frações, atentando para os denominadores agora decompostos em fatores primos.

Bloco 1

$$a) \frac{25}{100} e \frac{1}{4}$$

$$b) \frac{16}{10} e \frac{8}{5}$$

$$c) \frac{5}{10} e \frac{1}{2}$$

$$d) \frac{36}{100} e \frac{9}{25}$$

Bloco 2

$$a) \frac{6}{9} e \frac{2}{3}$$

$$b) \frac{54}{99} e \frac{6}{11}$$

$$c) \frac{168}{99} e \frac{56}{33}$$

$$d) \frac{245}{90} e \frac{49}{18}$$

Observação: será indicada a notação “barra” para as representações das dízimas periódicas $2,7222\dots = 2,7\bar{2}$.

Questões sugeridas

- 1) Para cada par de frações, você percebeu alguma relação entre elas? Quais?
- 2) Conforme você percebeu, as frações foram divididas em dois blocos. Por qual(is) critério(s) você acredita que elas foram assim separadas?
- 3) Escreva as frações com os numeradores e denominadores fatorados, quando possível.
- 4) O que você consegue perceber com essas fatorações?
- 5) Há alguma evidência nas fatorações para a formação dos blocos das frações? Justifique.

Nessa etapa, com as questões acima queremos que os alunos façam conjecturas que, ao serem discutidas, os levem a perceber que as frações decimais são compostas por fatores 2 e/ou 5 nos seus denominadores quando temos frações

equivalentes irredutíveis, enquanto que nas demais frações irredutíveis com denominadores compostos outros primos gerarão dízima periódica.

Com essa distinção se definem as frações decimais e não decimais.

PLANO DE AULA Nº 6: Regularidades da Representação Decimal

Objetivos:

- Investigar regularidades na representação decimal das dízimas periódicas;
- Estabelecer a obtenção da escrita das representações decimais das frações;
- Estabelecer a obtenção da escrita das frações geratrizes das representações decimais;
- Verificar a compreensão da obtenção das escritas das representações dos números racionais pelos alunos, por meio de exercícios de fixação.

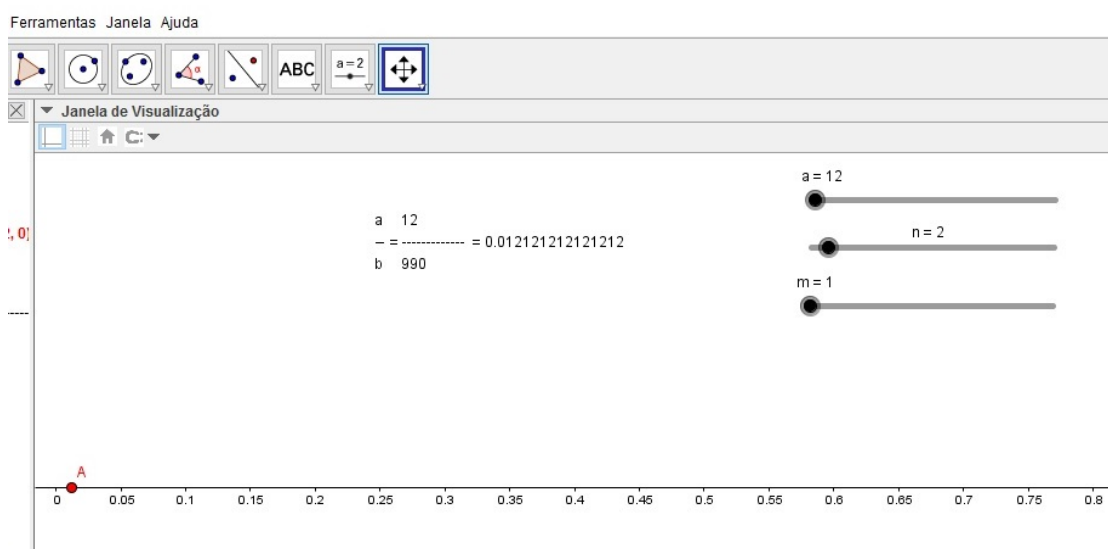
Tempo: 1 hora e 40 min. ou 2 horas/aula.

Tendo já abordado as frações que resultam em números racionais compostos de dízima periódica, a atividade seguinte buscará fazer com que os alunos consigam determinar as frações geratrizes desses números.

Elaboramos o arquivo no GeoGebra “Ativ_dizima3”, composto de três controles deslizantes a , m e n , que irão compor as frações da seguinte maneira:

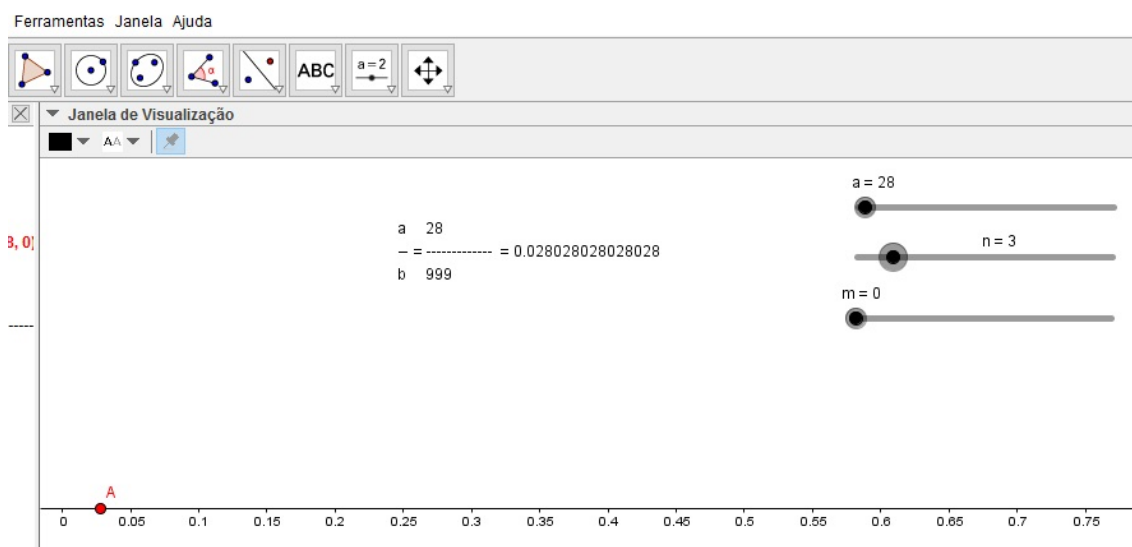
- (1) controle deslizante a determinará o numerador da fração, sendo limitado pelos valores indicados pelos controles deslizantes m e n ;
- (2) controle deslizante n indicará no denominador a quantidade de 9s;
- (3) controle deslizante m indicará no denominador a quantidade de 0s.

Dessa forma, se quisermos indicar a fração $12/990$, devemos mencionar $a = 12$, $n = 2$ e $m = 1$, como podemos ver na ilustração a seguir:



Inicialmente pode-se explorar os números racionais com dízimas partindo da primeira casa decimal, ou seja, da casa dos décimos. Dessa forma, os alunos devem manter o controle deslizante m fixado em 0 e ir alterando os controles a e n , visualizando regularidades entre o numerador e o denominador.

Exemplificando, um nove no denominador resultará em dízima de um dígito de periodicidade, dois noves no denominador resultarão em dízimas de dois dígitos de periodicidade, e assim por diante. Ilustremos na figura a seguir o caso de termos três 9s no denominador, obtendo com isso dízima de três dígitos de periodicidade.



Para essa investigação, colocamos aos alunos o quadro abaixo para que possam preenchê-lo e observar regularidades.

$\frac{2}{9} =$	$\frac{35}{99} =$	$\frac{712}{999} =$
$\frac{3}{9} =$	$\frac{36}{99} =$	$\frac{713}{999} =$
$\frac{4}{9} =$	$\frac{37}{99} =$	$\frac{714}{999} =$

Questões sugeridas

1) Que regularidade você consegue perceber entre a fração e o número decimal expandido à medida que vai aumentando o controle “n”?

2) Represente em fração cada um dos números abaixo e, em seguida, simplifique as frações.

a) $0,\overline{6} =$

b) $0,\overline{54} =$

c) $0,\overline{132} =$

d) $0,\overline{06} =$

A próxima investigação que queremos sugerir aos estudantes é quanto ao deslocamento da dízima periódica nas casas decimais. Para isso, adotaremos os seguintes procedimentos:

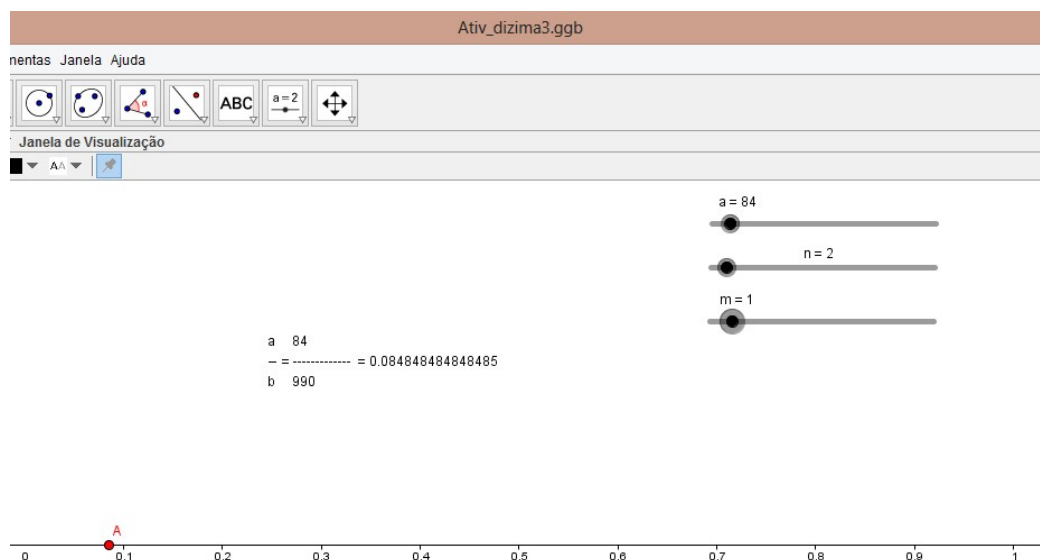
(1º) controles deslizantes $n = 1$ e $1 < a < 9$, fazendo variar o controle deslizante m . Obterão, dessa forma, dízimas de um algarismo de periodicidade se deslocando m casas decimais à direita;

(2º) controles deslizantes $n = 2$ e $1 < a < 99$, fazendo variar o controle deslizante m . Obterão, dessa forma, dízimas de dois algarismos de periodicidade se deslocando m casas decimais à direita;

(3º) controles deslizantes $n = 3$ e $1 < a < 999$, fazendo variar o controle deslizante m . Obterão, dessa forma, dízimas de três algarismos de periodicidade se deslocando m casas decimais à direita.

Com esses passos propõe-se aos alunos que preencham o quadro abaixo:

$\frac{4}{90} =$	$\frac{37}{990} =$	$\frac{714}{9990} =$
$\frac{4}{900} =$	$\frac{37}{9900} =$	$\frac{714}{99900} =$
$\frac{4}{9000} =$	$\frac{37}{99000} =$	$\frac{714}{999000} =$



Questões sugeridas

- 1) Explique o que acontece ao alterar os valores de m .
- 2) As dízimas periódicas são compostas por quantos dígitos? Justifique.
- 3) Aumentando os valores de “ m ” e “ n ”, analise o que ocorre com o denominador e descreva o que acontece com a expansão decimal das frações.
- 4) Para cada número abaixo, escreva as suas respectivas frações e simplifique-as quando possível:

a) $0,00\overline{4} =$

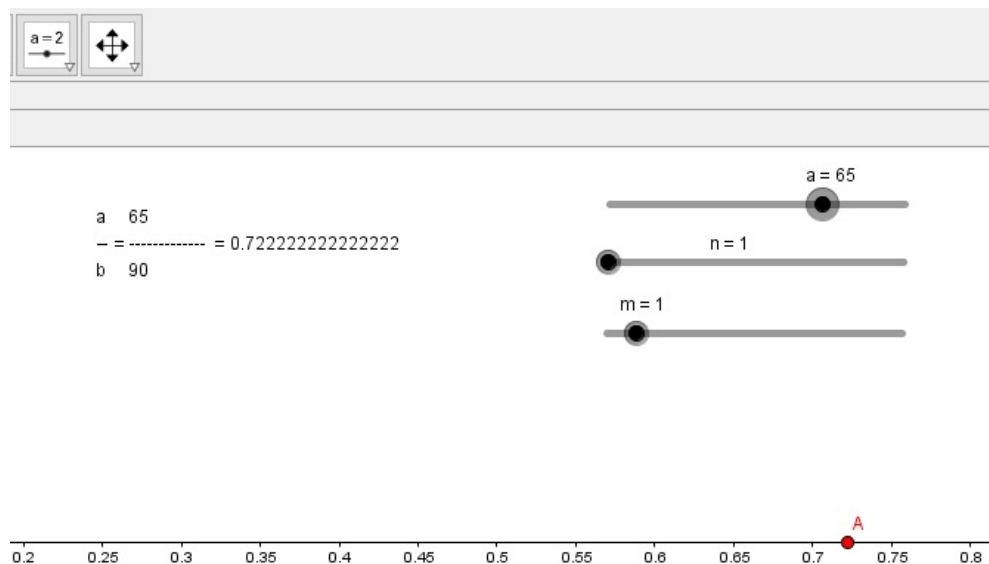
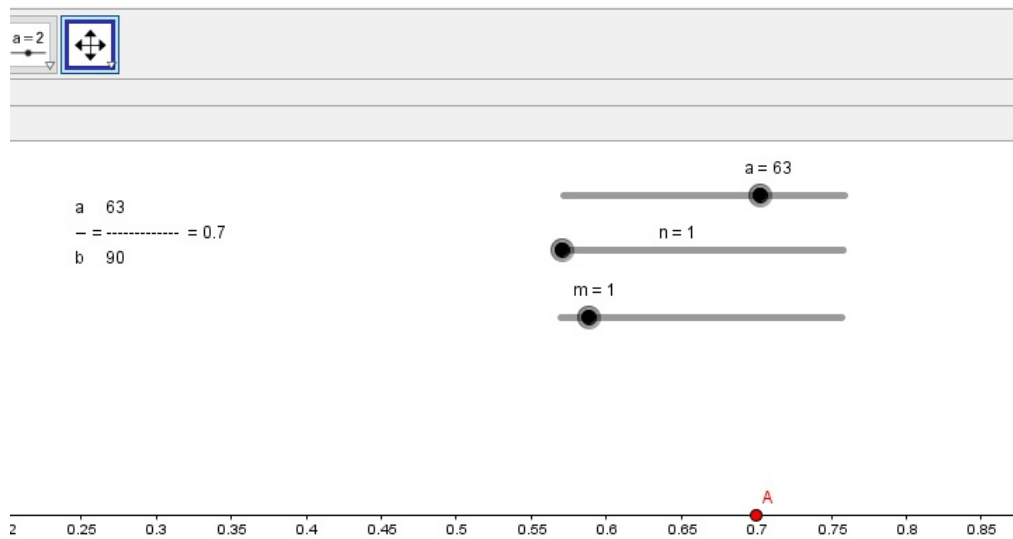
b) $0,04\overline{2} =$

c) $0,007\overline{02} =$

d) $0,0005\overline{1} =$

Por fim, devemos buscar a generalização dos números racionais gerados pelas frações. Dessa forma, no arquivo “Ativ_dizima3”, os alunos devem alterar os três controles deslizantes a , m e n .

Ao fazerem isso, além de perceberem as regularidades já vistas, temos a expectativa de que eles percebam que nem todas as frações geraram dízimas periódicas. E, também, que há frações que geram números racionais compostos de uma parte não periódica e finita com a dízima periódica infinita, isto é, números racionais que são gerados por composição de fração decimal com fração não decimal, tendo eles, nesse momento, buscado explicações de como essas coisas acontecem.



Questões sugeridas

1) Em todas as frações ocorre dízima periódica? Se não, dê exemplos e tente justificar o porquê de não haver dízima.

2) Nas frações em que ocorre dízima periódica, todas elas são compostas unicamente do período da dízima periódica? Se não, o que se pode dizer da parte não periódica?

3) Tome quatro frações em que ocorram números com composição mista de decimais periódicos e não periódicos. Anotando tão somente o número, faça, através da adição, a separação entre a parte periódica e a não periódica.

Exemplo: $0,42\bar{5} = 0,42 + 0,00\bar{5}$

4) Como poderíamos agora obter a fração geratriz dos números acima?

Exercícios de Fixação sobre as Frações

1) Determine a expansão decimal das frações abaixo:

a) $\frac{5}{8} =$

b) $\frac{7}{12} =$

c) $\frac{16}{5} =$

d) $\frac{115}{33} =$

2) Determine a fração geratriz dos números abaixo:

a) $0,64 =$

b) $0,2\bar{2} =$

c) $0,03\bar{4} =$

d) $7,2 =$

e) $0,5\bar{6} =$

f) $2,7\bar{1}3 =$