CÁLCULO DA ÁREA: UMA PROPOSTA DE GEOMETRIA DINÂMICA COM INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA ESCOLAR

Laís de Almeida Pereira - prof.laispereira@gmail.com - Pólo Novo Hamburgo
Maria Cristina Varriale - cristina.varriale@ufrgs.br - PPGEMat UFRGS

Resumo: Este artigo aborda a utilização do computador em sala de aula, em específico o UCA[1] (Um Computador Por Aluno), e também, o uso do *software GeoGebra*[2]. Desta forma, tem o objetivo de relatar o primeiro contato de alunos de uma turma de 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola municipal de Novo Hamburgo com uma proposta de investigação, onde o professor interfere o mínimo possível e, os alunos devem a partir do uso da geometria dinâmica chegar às suas próprias conclusões, incentivando-os a questionar e tomar decisões. Após, foi realizada uma discussão de socialização das respostas obtidas na investigação para que os discentes, com o intermédio do professor, compartilhassem suas conclusões e chegassem às definições e fórmulas. Foram produzidos arquivos no *GeoGebra* no qual os alunos, ao moverem as figuras, pudessem observar o que acontece com estas, a fim de que visualizassem a proveniência do cálculo da área, para então, chegar à dedução das fórmulas. Foi possível perceber que os alunos adquiriram a noção de variável em uma fórmula ou equação e aprenderam o cálculo da área do paralelogramo, do losango e do trapézio.

Palavras-chave: Investigação Matemática; Geometria Dinâmica; Educação Matemática

Introdução

Este artigo relata uma investigação que surge da inquietação sobre como ocorre a construção da relação entre a Geometria e a Álgebra. O que motivou este trabalho foi perceber que os alunos, em sua maioria, chegam ao 8° e 9° anos, sem uma real noção a respeito de área, e que não ocorria a ligação da geometria com a álgebra. Por isso, resolvemos buscar alguma forma de minimizar este problema.

---

[1] Informações sobre Projeto UCA disponível em http://www.fnde.gov.br/programas/programa-nacional-de-tecnologia-educacional-proinfo/proinfo-projeto-um-computador-por-aluno-uca.
[2] GeoGebra é um software de geometria dinâmica totalmente gratuito criado por Markus Hohenwarter e disponível para download em http://www.geogebra.org/.

Nos livros didáticos, a construção do conceito de área acontece de forma rápida e praticamente como uma mera informação, sem possibilitar que o aluno descubra, por si próprio, as relações existentes, como por exemplo, no paralelogramo, entre lado e altura, no losango, entre as diagonais, e no trapézio, entre as bases e a altura. Assim, o conhecimento pode não ser agregado pelo aluno de forma adequada, e por isso, ele esquece facilmente o que aprendeu. Também percebemos que os alunos não compreendem o porquê do cálculo da área ser feito como é, isto é, como o cálculo da medida de uma superfície com base em uma unidade quadrada. Alguns deles demonstram saber como calcular, mas não construíram a idéia de unidade de medida de área, para depois verificar quantas destas unidades uma figura possui. Outros demonstram dificuldades em relembrar e a maioria não consegue calcular a área de figuras desconhecidas, figuras cuja área poderia ser calculada facilmente dividindo-as em figuras conhecidas, ou seja, decompondo a figura dada em figuras conhecidas.

Na busca por uma estratégia que pudesse sanar essas dificuldades, chegamos ao uso das mídias digitais. O uso de tecnologias tornou-se possível em minha perspectiva após cursar algumas disciplinas do curso de Especialização em Matemática, Mídias Digitais e Didática na UFRGS, onde estudamos muitos autores que falam sobre as possibilidades de uso de mídias digitais e relatam, como Meyer (2011), aplicações já feitas.

Assim, para auxiliar os alunos a realizarem essa relação entre Geometria e Álgebra, foi escolhido o *software GeoGebra*. Este aplicativo foi escolhido por dois motivos já observados por Gravina (2011), primeiro por ser um software consistente e possuir um menu interessante para trabalhar com a geometria euclidiana, segundo por ser ferramenta na filosofia do "*software* livre", logo, qualquer pessoa que tenha interesse no assunto, geometria, álgebra e ensino de matemática, pode contribuir para sua construção. Trata-se de um software de Geometria Dinâmica que permite que o aluno interaja com figuras geométricas. Brandão e Isotano (2003, p. 1476) explicam:

> O nome "Geometria Dinâmica" (GD) hoje é largamente utilizado para especificar a Geometria implementada em computador, a qual permite que objetos sejam movidos mantendo-se todos os vínculos estabelecidos inicialmente na construção. Este nome pode ser melhor entendido como oposição à geometria tradicional de régua e compasso, que é "estática", pois após o aprendiz realizar uma construção, se ele desejar analisá-la com alguns dos objetos em outra disposição terá que construir um novo desenho.

Desta forma, o uso de computadores em sala de aula mostra-se interessante por permitir que os alunos visualizem o que ocorre com as figuras quando as movemos. Gravina (1996) esclarece com que tipo de ambiente informático estamos tratando:

> São ferramentas de construção: desenhos de objetos e configurações geométricas são feitos a partir das propriedades que os definem. Através de deslocamentos aplicados aos elementos que compõe o desenho, este se transforma, mantendo as relações geométricas que caracterizam a situação. Assim, para um dado objeto ou propriedade , temos associada uma coleção de "desenhos em movimento", e os invariantes que aí aparecem correspondem às propriedades geométricas intrínsecas ao problema. (Gravina, 1996).

Estes invariantes que a autora apresenta, são as propriedades e definições associadas ao objeto, de modo que este não perca suas características essenciais, como por exemplo o paralelogramo possui os lados opostos paralelos. E em um nível mais avançado percebe-se como as propriedades matemáticas se relacionam na imagem. Assim, afirma Valente (2005, p. 11):

> Hoje, a utilização de computadores na Educação é muito mais diversificada, interessante e desafiadora, do que simplesmente a de transmitir informação ao aprendiz. O computador pode ser também utilizado para enriquecer ambientes de aprendizagem e auxiliar o aprendiz no processo de construção do seu conhecimento.

Na nossa proposta é utilizada a investigação matemática. Assim, o aluno é orientado apenas o suficiente para iniciar a investigação, pois o objetivo não é o produto final e sim o processo de construção e a análise em grupo, dos resultados. Assim,

> Neste processo de ensino-aprendizagem, o professor irá incentivar e ajudar o aluno a descobrir por si só o mundo matemático, seus conceitos e suas propriedades. As dicas e conselhos do professor devem ser tomados como valiosos preceitos que servirão como guias durante o processo de descoberta. Dessa forma, é possível estimular a curiosidade sobre a matemática, e não apenas incentivar a busca por uma resposta. (ISOTANI, 2005, p. 12).

É possível encontrar outros trabalhos de pesquisa em Educação Matemática sobre o ensino de perímetro e área. O nosso trabalho tem por objetivo trabalhar apenas o conceito de área do paralelogramo, do losango e do trapézio e algumas propriedades dos quadriláteros. Exemplos de trabalhos são o de Centenaro (2010) na sua monografia de Especialização em Matemática, Mídias Digitais e Didática, onde faz um estudo mais extenso usando outros métodos junto com a tecnologia, como o material concreto e o uso de vídeo, entre os quais podemos citar o trabalho de conclusão de curso de Licenciatura em

Matemática de Silva (2013), que utiliza arquivos *GeoGebra* semelhantes aos que nós utilizamos nesta proposta, porém não existe a aplicação em sala de aula.

Foi utilizada a Investigação Matemática nesta proposta de aula, ou seja, os alunos devem, a partir do que já conhecem, chegar às suas próprias conclusões. Desta forma, recorrem a conhecimentos já adquiridos anteriormente, seja na escola ou em casa, para assim resolver um novo problema. Ponte (2005, p. 23) destaca que:

> o envolvimento ativo do aluno é uma condição fundamental da aprendizagem. O aluno aprende quando mobiliza os seus recursos cognitivos e afetivos com vista a atingir um objetivo. Esse é, precisamente, um dos aspectos fortes das investigações.

O professor continua sendo peça fundamental em uma Investigação Matemática, porém a função passa a ser de mediador, o professor irá induzir o aluno a investigar, sempre lhe respondendo com indagações, a fim de que este chegue à solução (PONTE, 2005).

Referencial teórico

A ideia é introduzir conteúdos, de forma que o aluno construa seu próprio conhecimento. Isso é feito analisando o que já é sabido pelos alunos e fazendo uso destes conhecimentos prévios. Para construir um processo de ensino que julgássemos mais adequado (isso foi verificado com a aplicação), construímos arquivos prontos do *software GeoGebra*. Assim, temos uma ferramenta interativa que, segundo Gravina e Basso (2012, p. 14):

> (...) incorporam *sistemas dinâmicos de representação* na forma de objetos *concreto-abstratos*. São concretos porque existem na tela do computador e podem ser manipulados e são abstratos porque respondem às nossas elaborações e construções mentais.

A Geometria não é mais estática, visualizada apenas da forma como é apresentada em imagens. A tecnologia possibilita uma interação do aluno com o assunto estudado, de forma dinâmica, de modo que ele enxergue o que está acontecendo, podendo fazer comparações, movimentos e relações.

Assim como afirma Meyer (2011, p. 12-13).

> A manipulação direta de objetos construídos e que são colocados em movimento na tela do computador faz com que os alunos observem os resultados obtidos, primeiramente de forma empírica, mas depois buscando explicar as regularidades que vão se tornando cada vez mais evidentes.

O uso do *GeoGebra* permite ao aluno explorar um objeto matemático visualizando simultaneamente a forma algébrica e sua representação geométrica, esboçando figuras, pintando seus desenhos de forma interativa e divertida, e assim, possibilita que o aluno perceba e desenvolva as habilidades necessárias para decompor figuras, usando estratégias próprias, e assim, calcule a área. E só após esta etapa, haverá interferência do professor, que irá então explicar o conteúdo com vocabulário matemático.

A proposta de sala de aula consiste em atividades onde o aluno movimenta pontos e controles deslizantes em um arquivo *GeoGebra* e, a partir de questões elaboradas anteriormente (um questionário guia), produz uma análise reflexiva sobre o que está acontecendo ao realizar os movimentos solicitados, e desta forma, ocorre o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos. Citamos abaixo Goldenberg:

> Para fazer matemática, deve-se ter tendência para detectar e ter em atenção relações (quantitativas, espaciais, hierárquicas ou de inclusão, estruturais, etc), processos e conexões lógicas entre ideias, e deve-se ter capacidades para as descrever. (Goldenberg, 1998)

Percebo que esta é uma das competências que são trabalhadas em atividades com softwares de geometria dinâmica. Essa possibilidade de expressar-se ajuda os alunos a desenvolverem seus pensamentos, estruturá-los e então expô-los.

Valente (1993, p.12) explica que “segundo esta modalidade, o computador não é mais o instrumento que ensina o aprendiz, mas a ferramenta com a qual o aluno desenvolve algo, e, portanto, a aprendizagem ocorre pelo fato de estar executando uma tarefa por meio do computador”. Desta forma, o aluno passa a ser ativo em sua aprendizagem; com o 'computador ferramenta', o aluno interage com os elementos de aprendizagem, deixando de ser um mero receptor de informações.

A investigação matemática necessita de um momento de socialização das ideias e conclusões, e o professor deverá sempre analisar as soluções dos alunos com a turma, a fim de realizar questionamentos que ajudem os alunos a decidirem qual a melhor forma de solucionar, o porquê de um resultado estar certo ou errado. Ponte, Brocardo e Oliveira (2005) explicam que atividades de investigação matemática podem acontecer em três fases, cuja primeira é a introdução da tarefa, a segunda é a realização da tarefa e a terceira é a discussão dos resultados. Este último é um passo fundamental para a investigação, como ressaltam Ponte, Brocardo e Oliveira (p. 25, 2005), "discussão dos resultados, em que os alunos relatam aos colegas o trabalho realizado". Desta forma, para realizar uma atividade de investigação, é necessário, então, apresentar a tarefa de forma clara, possibilitar que o aluno a desenvolva a partir de seus próprios conhecimentos com o mínimo de interferência do professor e, após, realizar uma discussão sobre as soluções obtidas de forma que os alunos possam questionar-se sobre o porquê de seus resultados, se são coerentes, entre outros questionamentos que podem surgir. Logo, "o aluno deve sentir que as suas ideias são valorizadas e que se espera que as discuta com os colegas, não sendo necessária a validação constante por parte do professor." (Ponte, Brocardo e Oliveira, 2005, p. 28)

Análise de Livros didáticos

Foram analisados dois livros didáticos de matemática do 9º ano do Ensino Fundamental, quanto aos capítulos referentes ao cálculo de áreas. Para melhor visualização, os livros analisados serão apenas referidos como LD1, para o Livro "Matemática Teoria e Contexto" dos autores Marília Centurión e José Jakubovic (2012), e, LD2, para o Livro "Projeto Araribá Matemática" organizado por Fabio Martins de Leonardo (2010). Esta análise deve contemplar os aspectos teóricos e metodológicos, bem como a linguagem utilizada, a adequação ao nível de ensino, a proposição dos exercícios e a abordagem histórica do conteúdo.

O LD1 introduz o conteúdo através da área do quadrado e do retângulo como um lembrete, considerando que já foi visto ao longo do livro, e realmente foi visto, mas de forma superficial. Assim, apresenta como deve ser feito o cálculo, mostrando a fórmula e ilustrando com uma figura de um retângulo que destaca a base e a altura. No entanto, não traz a ideia de unidade de área. O assunto é tratado como já visto. Segue com exercícios como exemplos, sendo necessário para resolução destes o uso da decomposição das figuras em retângulos. No segundo exemplo é tratado o cálculo de um triângulo retângulo como sendo a metade de um retângulo. Logo, calcula-se a área do retângulo e depois divide por dois.

A seguir, o LD1 apresenta exercícios para os alunos resolverem. O primeiro faz uso de uma malha quadriculada onde a medida do lado de cada quadradinho da malha é de uma unidade. O segundo exercício dá as medidas de retângulos fazendo uso de radiciação e pede para calcular a área. Os exercícios que seguem tratam de decomposição de figuras, uso de nomenclaturas matemáticas, conversão de unidade de medida e trabalha com o Teorema de Pitágoras já visto em capítulo anterior. Os exercícios evoluem rapidamente abrangendo outros conteúdos matemáticos. Por minha experiência, isso gera dúvidas nos alunos não apenas sobre o assunto que está sendo tratado, mas também sobre os anteriores. Acredito que deveria se começar por trabalhar a ideia de área, para depois deduzir as fórmulas, e não expô-las prontas; assim, se faria uma evolução mais lenta para os exercícios, contemplando mais elementos cotidianos, ou seja, contextualizando.

O LD1 segue com o cálculo da área pelos próximos capítulos tratando do cálculo do paralelogramo, onde apresenta a ideia de preencher a figura com triângulos de forma que passe a ser um retângulo e concluí o cálculo da área de forma algébrica fazendo uso de algumas figuras para ilustrar a situação. Novamente, a dedução é feita de forma rápida, e simplesmente entregue, sem dar espaço para que o aluno possa fazer suas análises e constatações, antes da definição da fórmula.

A área do triângulo é tratada como sendo a metade da área de um paralelogramo composto por dois destes triângulos, ou seja, uma das diagonais do paralelogramo o divide em dois triângulos iguais. O livro traz uma explicação sobre aplicações do cálculo da área no cotidiano intitulada "Um problema curioso", onde chama atenção para uma situação específica da agricultura, em que deve-se plantar mudas com 1m de distância entre elas. Segue com duas soluções: uma constrói quadrados em que as mudas são os vértices e, outra, forma um triângulo equilátero. Então faz questionamentos quanto à economia do espaço. Após, o LD1 segue propondo exercícios. Os exercícios evoluem em um ritmo mais lento, porém a cada questão sempre traz um novo elemento a ser pensado pelo aluno, logo não subestimando a capacidade do discente. Na minha opinião, este enfoque é positivo, pois desta forma as atividades não se tornam repetitivas e são sempre desafiantes.

O próximo capítulo de LD1 trabalha a área de outros polígonos como o trapézio, o losango e polígonos regulares. Todas as áreas são apresentadas com o mesmo modelo de roteiro já descrito anteriormente. A linguagem utilizada é objetiva e apresenta muita álgebra, sendo necessário que o aluno já tenha uma noção de variáveis trabalhada nos anos anteriores. Poucos exercícios possuem relação com elementos da realidade do aluno. Neste livro a história da Matemática não é apresentada.

O LD2 inicia a tratativa da área com um texto sobre moinhos trazendo um parágrafo de história e chegando a modernas turbinas eólicas. Com base neste texto faz alguns questionamentos sobre o conhecimento do aluno sobre o assunto, sobre a forma das pás, e fala sobre a área. Em uma segunda questão apresenta figuras em uma malha quadriculada por quadrados com um centímetro de lado. As questões verificam o conhecimento dos alunos, necessário para o que será estudado. Para ilustrar o cálculo da área do retângulo, divide-o em quadrados de uma unidade de modo que o aluno possa visualizar o que é a área. E então, através de um exemplo numérico, chega à fórmula. Acredito que o uso de exemplos numéricos antes de deduzir a álgebra é valido para que o aluno perceba a substituição dos valores pelas variáveis.

Apresenta poucos exercícios, mas são direcionados ao que foi trabalhado até o momento; estes apresentam uma evolução de dificuldade, porém de forma cuidadosa e não rápida. Apresenta as figuras equidecomponíveis, com ilustração e texto explicativo. O texto é de fácil compreensão. Nesta página, sugere a visualização de um vídeo com a turma. Após, trata da decomposição de um triângulo em um retângulo sem concluir a fórmula do cálculo do triângulo; apenas diz que é possível transformá-lo em um retângulo. Em seguida, traz exercícios que induzem os alunos à investigação, sendo que o objetivo destes é sempre que o aluno com figuras diferentes as decomponha transformando-as em retângulos de área equivalente.

Então, o LD2 apresenta o cálculo do paralelogramo através da ilustração da transformação deste em um retângulo. A área do triângulo é concluída da mesma forma que no LD1 Isso é feito de forma adequada para compreensão dos alunos, na minha opinião. Na sequência, traz o fato de que triângulos com mesma base e altura possuem áreas iguais, e o mesmo para o paralelogramo, demonstrando através de figuras.

Depois disso, o LD2 tem exercícios que são desafiantes e exigem uma base de conhecimento algébrico. Estes são pouco contextualizados. Acredito que os exercícios evoluem rapidamente, provavelmente gerando dúvidas aos alunos em cada etapa. A área do trapézio é apresentada como a soma de dois triângulos que surgem a partir da decomposição deste e então são feitas manipulações algébricas para concluir a fórmula. A área do losango surge também da divisão deste em dois triângulos iguais e manipulações algébricas. Por fim, apresenta quatro exercícios que, na minha opinião, possuem dificuldade razoável para os alunos.

Os livros analisados possuem características distintas em alguns aspectos e comuns em outros. O LD2, na minha opinião apresenta um diferencial que é o uso de questionário para induzir os alunos a conclusões próprias, porém esse uso ainda é minimizado. No entanto, nenhum dos livros analisados possui problematizações para introduzir os assuntos que serão trabalhados. Desta forma, é possível perceber que a construção do conceito de área é feita sem foco na noção de unidade de medida pelo LD1. A decomposição está presente em ambos os livros, mas no LD1 de forma que já se entende que o aluno tenha conhecimento prévio. O ladrilhamento não aparece em nenhum dos livros para o 9º ano.

A Proposta Aplicada em sala de aula

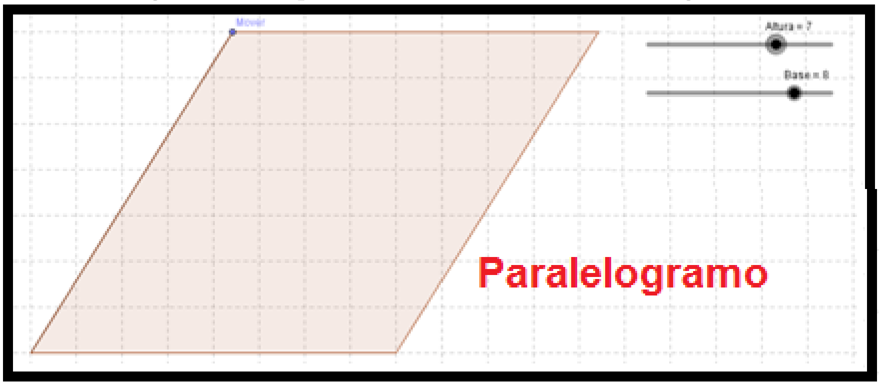
A proposta foi aplicada em 5 (cinco) períodos divididos em três dias, em uma turma de 9° ano com 22 alunos, em uma escola da rede municipal de Novo Hamburgo, situada em uma região conhecida pelo tráfico de drogas. A turma contém três alunos de inclusão com laudo e, assim, com direito a Atendimento Educacional Especializado (AEE) e Sala de Recursos Computacionais. Nos três dias de aplicação da proposta, 2 alunos estiveram ausentes. O primeiro e o segundo dias foram usados para que os alunos explorassem os arquivos *GeoGebra* e respondessem aos questionários. No terceiro dia foi realizada a socialização das respostas, quando foram instigados a concluírem em grupo os objetivos das questões. A escola faz parte do projeto UCA (Um Computador por Aluno), ferramenta utilizada para acesso aos arquivos *GeoGebra*. A investigação foi feita em quatro períodos e a socialização e conclusão em um período.

A atividade consistiu em trabalhar com arquivos do *software GeoGebra* nos quais os alunos movem controles deslizantes que permitem que os valores das medidas variem, desta forma tornando a figura dinâmica, e assim alteram medidas dos lados das figuras. Estas figuras permitem que os alunos possam contar quantos quadrados com medida de uma unidade de lado existem dentro da figura. A atividade consiste em três partes: uma com o paralelogramo, outra com losango e por final, com o trapézio.

As figuras 1, 2 e 3 mostram imagens dos arquivos[3] *GeoGebra* utilizados:

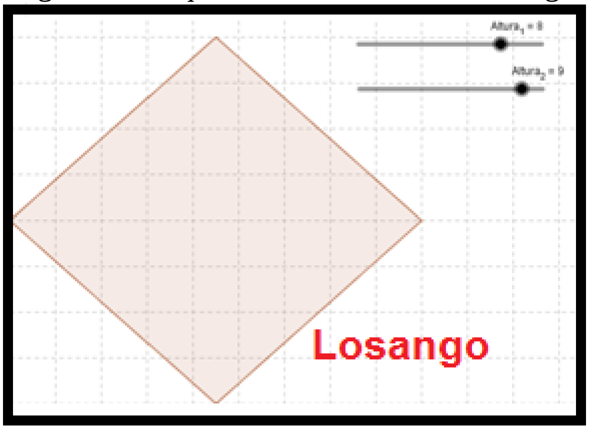
[3] Arquivos disponíveis através do *GeoGebra Online* nos seguintes endereços:
Paralelepípedo: http://ggbtu.be/mOINOyuEf
Losango: http://ggbtu.be/mOLgjfmSL
Trapézio: http://ggbtu.be/mzkOwRvDV
http://ggbtu.be/mgvkqACdY
http://ggbtu.be/mrm0H3CKO
http://ggbtu.be/mucVehcrz

Figura 1 - Arquivo *GeoGebra* com Paralelogramo



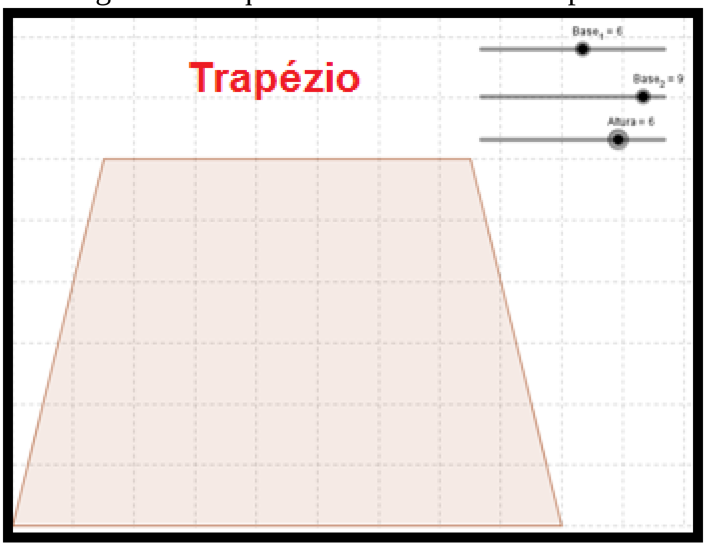
Fonte: Construído pelo autor.

Figura 2 - Arquivo *GeoGebra* com Losango



Fonte: Construído pelo autor.

Figura 3 - Arquivo *GeoGebra* com Trapézio



Fonte: Construído pelo autor.

Para cada arquivo foi usado um questionário para guiar as investigações dos alunos. No Quadro 1, 2 e 3, seguem as questões para cada figura:

Quadro 1 - Questionário Guia para o Paralelogramo

Paralelogramo:
1) Mova os controles deslizantes. Descreva o que acontece com a figura?
2) Ao mover os controles deslizantes que características permanecem?
3) Se mover o ponto Mover de modo que os lados adjacentes sejam perpendiculares, que figura temos? Continua sendo um paralelogramo?
4) Ainda com os lados adjacentes perpendiculares, coloque nos controles deslizantes 5, que figura temos? Continua sendo um paralelogramo?
5) Mova o ponto Mover de modo que os lados adjacentes não sejam perpendiculares. Coloque no controle deslizante Altura 4 e Base 8. Quantos quadrados com medida do lado um temos dentro do paralelogramo construído?
6) Mantendo os valores da questão anterior nos controles deslizantes, mova o ponto Mover, a quantidade de quadrados de lado 1 continua a mesma?
7) Coloque no controle deslizante Altura 6 e Base 9. Quantos quadrados com medida do lado um temos dentro do paralelogramo construído?
8) Existe uma regra, lei para que facilite essa contagem? Se sim, que lei?

Fonte: Construído pelo autor.

Quadro 2 - Questionário Guia para o Losango

Losango:
1) Mova os controles deslizantes. Descreva o que acontece com a figura?
2) Ao mover os controles deslizantes que características permanecem?
3) Coloque nos controles deslizantes 8? Continua sendo um losango? O que isso significa?
4) Quantos quadrados com medida de lado um temos dentro do losango construído?
5) Coloque no controle deslizante Altura1 4 e Altura2 8. Quantos quadrados com medida do lado um temos dentro do losango construído?
6) Coloque no controle deslizante Altura1 8 e Altura2 4, a quantidade de quadrados de lado 1 continua a

mesma? Justifique?

7) Coloque no controle deslizante Altura 6 e Base 9. Quantos quadrados com medida do lado um temos dentro do losango construído?

8) Existe uma regra, lei para que facilite essa contagem? Se sim, que lei?

Fonte: Construído pelo autor.

Quadro 3 - Questionário Guia para o Trapézio

Trapézio:

1) Mova os controles deslizantes. Descreva o que acontece com a figura?

2) Ao mover os controles deslizantes que características permanecem?

3) Coloque nos controles deslizantes 8? Continua sendo um trapézio? O que isso significa?

4) Coloque nos controles deslizantes Base 8 e no controle deslizante altura 6? Continua sendo um trapézio? O que isso significa?

5) Quantos quadrados com medida de lado um temos dentro do trapézio construído?

6) Coloque no controle deslizante Base1 4 e Base2 8 e Altura 2. Quantos quadrados com medida do lado um temos dentro do losango construído?

7) Coloque no controle deslizante Base1 8 e Base2 4 e Altura 2, a quantidade de quadrados de lado 1 continua a mesma? Justifique?

8) Coloque no controle deslizante Base1 7 e Base2 9 e Altura 6. Quantos quadrados com medida do lado um temos dentro do paralelogramo construído?

9) Existe uma regra, lei para que facilite essa contagem? Se sim, que lei?

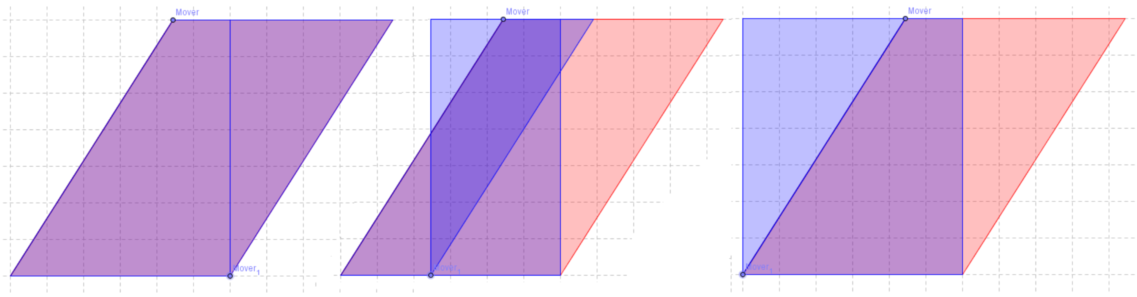
Fonte: Construído pelo autor.

A atividade foi realizada em duplas para que houvessem discussões sobre as informações observadas. Os alunos puderam se agrupar para que essas trocas de ideias ocorressem de forma que produzisse o efeito esperado, ou seja, que os alunos expusessem uns aos outros o que observavam e que fossem críticos quanto às informações constatadas.

Na aula seguinte, foi feita a socialização das respostas. Neste momento o objetivo foi verificar as conclusões dos alunos, ver até onde foram e instigá-los a concluir as ideias obtidas com linguagem matemática. Esta conversa tinha como objetivo o de concluir as fórmulas da área do paralelogramo, do losango e do trapézio.

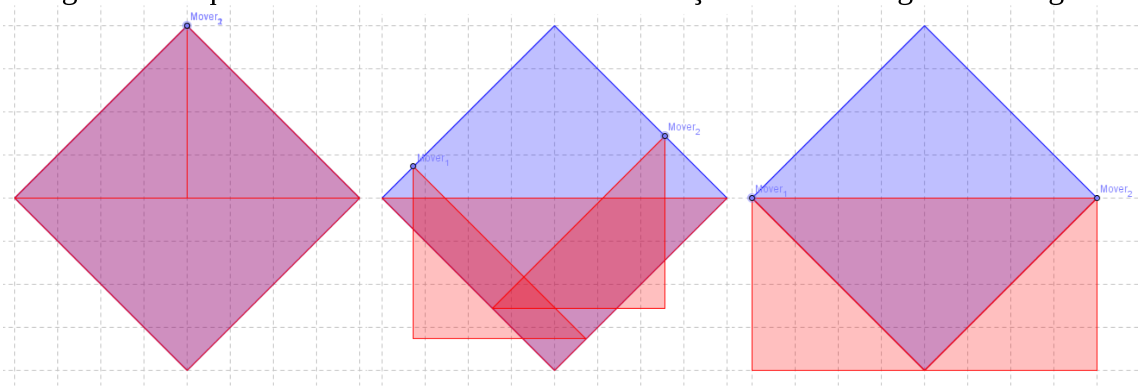
Para que os alunos visualizassem as conclusões obtidas, ou ainda, para aqueles que mesmo após as conversas ainda não tinham chegado aos objetivos, foram usados os arquivos[4] de *GeoGebra*, que seguem nas Figuras 4, 5 e 6:

Figura 4 - Sequência de movimentos da transformação de um paralelogramo em retângulo



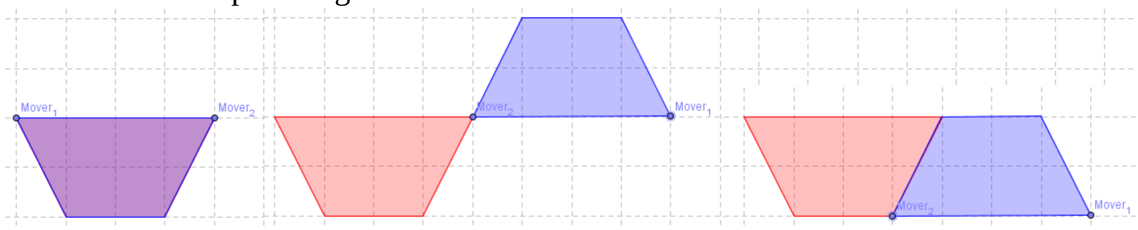
Fonte: Construído pelo autor.

Figura 5 - Sequência de movimentos da transformação de um losango em retângulo



Fonte: Construído pelo autor.

Figura 6 - Sequência de movimentos da transformação de um trapézio em um paralelogramo com o dobro da medida da área deste.



Fonte: Construído pelo autor.

---

[4] Arquivos disponíveis através do *GeoGebra Online* nos seguintes endereços:
Paralelepípedo: http://ggbtu.be/mgvkqACdY
Losango: http://ggbtu.be/mrm0H3CKO
Trapézio: http://ggbtu.be/mucVehcrz

Ao movimentar os polígonos, é possível visualizar as correspondências da área com figuras já conhecidas.

Antes de aplicar essa sequência de atividades, definimos algumas hipóteses, expectativas para a aplicação.

Hipótese 1: Pressupomos que os alunos saibam usar os arquivos *GeoGebra*.

Hipótese 2: Os alunos já tenham trabalhado o assunto "área" em algum momento de sua vida escolar.

Hipótese 3: A proposta tenha potencial para ampliar os significados atribuídos à noção de área;

Hipótese 4: Pressupomos que os alunos, ao final das atividades, adquiriram o conhecimento do cálculo da área do paralelogramo, losango e trapézio, após ter construído a noção de variável dentro de uma fórmula, e então, relacionando a geometria com a álgebra.

Hipótese 5: Pressupomos que os alunos adquiram o conhecimento para decompor figuras planas desconhecidas e irregulares em figuras conhecidas e assim calcular a área destas figuras.

Relato da Aplicação

Uma aula anterior à aplicação da proposta, foi solicitado que os alunos trouxessem os UCA's. No dia, havia no mínimo um UCA por dupla, nem todos trouxeram o aparelho, alguns estavam com problemas técnicos. Foram entregues as folhas com as questões guias para realização da atividade de investigação, que conduziam à reflexão entre as duplas e, solicitado que ligassem o UCA, expliquei que deveriam acessar através de um navegador de internet o endereço dado no início de cada questionário. Alguns tiveram dificuldades, pois mesmo avisando que deveriam cuidar as letras maiúsculas e minúsculas do endereço da página do *GeoGebra Online*, alguns esqueciam um ponto ou uma letra. Com todos os alunos prontos, expliquei como a atividade seria conduzida, que o que interessava é que eles realizassem as atividades cuidadosamente, fazendo o que se pede e analisando cada questão de forma crítica, sendo que eu interferiria o mínimo possível, e o objetivo era de que eles desenvolvessem suas respostas sem se preocupar com certo e errado.

Foram formadas oito duplas e três alunos optaram por construir o relatório individualmente, porém todos tiverem liberdade para interagir com todos, desta forma.

Haviam duplas se ajudando e mesmo quem estava fazendo individualmente trabalhava com outros colegas.

Dois dos alunos de inclusão optaram por fazer a atividade sozinhos, pois eles não fazem questão de fazer com outros colegas e rejeitam ser tratados diferente dos outros, de forma que um deles não aceita nem a ajuda habitual para qualquer aluno, nem atividades referentes a seu nível. O terceiro tem dificuldade para entrar em grupos ou formar duplas, pois os outros alunos afirmam que este não colabora na realização de trabalhos. Tentando convencer uma aluna a aceitar formar dupla, esta só aceitou quando percebeu que poderia fazer com apoio de outras colegas com os quais possui proximidade afetiva.

Todos, sem exceção, logo começaram a executar a atividade. No entanto, foi possível perceber que a falta de hábito em relação a atividades em que tivessem liberdade para expor suas ideias e conclusões acerca do que visualizavam, gerou inseguranças. Muitos me chamavam e questionavam: *"É isso mesmo?", "Só isso?"* Principalmente na questão inicial na qual os alunos tinham que apenas observar o que acontecia quando movimentavam os controles deslizantes.

Eu estava sempre circulando pela sala de aula para observar como os alunos estavam tratando as questões e as dificuldades que apareciam. Poucos me chamavam para fazer perguntas, porém os que chamavam, pediam ajuda frequente.

Quanto à segunda e à terceira questão do questionário sobre o paralelogramo, que pede que o aluno mova o ponto MOVER de forma que os lados adjacentes sejam perpendiculares, houve dúvidas sobre *"o que é adjacente"*; este questionamento surgiu em todas as duplas e algumas se ajudavam. Então, para algumas duplas solicitei que pesquisassem no dicionário o significado das palavras desconhecidas ou que não lembravam. Não houve sucesso quanto ao entendimento, neste momento, e, devido a tantos questionamentos, senti a necessidade de esclarecer o significado de adjacente, lados paralelos e lados perpendiculares.

Ao caminhar pela sala percebi que um aluno navegava pela internet, então me aproximei para verificar o que se passava, ele estava pesquisando uma forma de calcular a área das figuras. Como eu não havia dito nada sobre o uso da internet para pesquisa, e a escola possui *wifi*[5] em todos os espaços, não havia pensado que eles fossem fazer isso. Não repreendi a atitude dele, apenas comuniquei que esperava que ele desenvolvesse a fórmula,

[5] O *wifi* permite a conexão entre diversos dispositivos, como computadores e celulares, sem a necessidade de cabos.

logo, não deveria pesquisar na internet nem nos livros. Após essa situação, percebi que mais alunos poderiam ter se dado conta desta brecha deixada por mim, porém apenas um aluno notou.

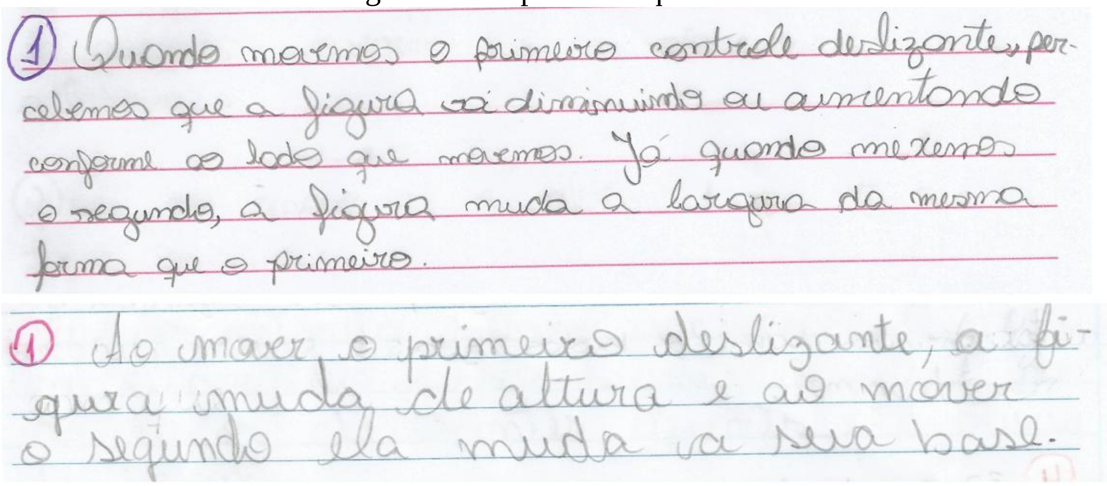
Algumas duplas desenvolveram formas para facilitar a contagem dos 'quadradinhos'. Uns cuidavam para deixar, por exemplo, no paralelogramo os lados a um ângulo de 45º. Assim, os 'quadradinhos' que não eram totalmente preenchidos, eram preenchidos exatamente pela metade, logo podiam juntar duas metades. Outros perceberam que podiam cortar um triângulo e encaixar no outro lado da figura, assim transformando-a em um retângulo e facilitando a contagem. Métodos que facilitaram para que concluíssem as fórmulas ou pelo menos se aproximassem.

Ao longo da atividade os alunos se desviavam raramente da proposta, havendo poucas conversas sobre assuntos paralelos e desencontrados com o que deveriam fazer. É uma turma com boa articulação entre os alunos, com poucas exceções conforme já mencionado, porém ao entrar na sala de aula percebe-se que os meninos sentam de um lado e as meninas do outro, sendo apenas por afinidade entre eles, sem ter motivos como desavenças.

Quanto ao relatório, as respostas obtidas eram curtas, acredito que seja pelo fato de não estarem habituados a escrever e expor ideias na disciplina de matemática e, pela insegurança quanto ao erro. Mesmo quando afirmava que não deveriam se preocupar com o erro, que é através deste que se constrói o conhecimento, percebia que não saiam satisfeitos. Eles provavelmente irão adquirir este hábito conforme forem perdendo a insegurança e, adquirindo vocabulário matemático; é notável a falta deste para explicarem o que estão vendo.

A primeira parte do questionário era referente ao paralelogramo, figura 1 e quadro 1. A questão 1 perguntava o que ocorria quando os controles deslizantes eram movimentados; as respostas foram muito semelhantes, sempre indicando que muda de forma, que aumenta ou que diminui. Abaixo seguem duas respostas mais completas, pois destacam cada controle deslizante.

Figura 7 - Respostas da questão 1.


1 Quando movemos o primeiro controle deslizante, percebemos que a figura vai diminuindo ou aumentando conforme os lado que movemos. Já quando mexemos o segundo, a figura muda a largura da mesma forma que o primeiro.

1 Ao mover o primeiro deslizante, a figura muda de altura e ao mover o segundo ela muda a sua base.

Fonte: Dados da pesquisa.

Na questão 2, as respostas foram semelhantes às da questão 1, com duas exceções que trataram das retas paralelas, porém falarem em perpendiculares, o que demonstra que até esse momento não haviam compreendido realmente a ideia de paralelismo e perpendicularidade. Um relatório apresentou a seguinte resposta:

"Suas retas continuam sendo paralelas e algumas perpendiculares".

Nesta fala, é notável a falta de habilidade com o uso do vocabulário e compreensão do conceito de cada palavra empregada para responder. Um segundo relatório apresentou a mesma inclinação:

"Continua com suas retas paralelas e perpendiculares".

A questão 3 pedia que movessem os pontos de modo que os lados adjacentes fossem perpendiculares e perguntava que figura era a obtida e se continuava sendo um paralelogramo. Quatro duplas responderam corretamente, afirmando que ainda era um paralelogramo e de acordo com o caso de cada dupla, um quadrado ou retângulo. Uma dupla afirmou não ser mais um paralelogramo e, as restantes responderam apenas a figura que obtiveram, um quadrado ou um retângulo. Na questão 4, o objetivo era semelhante ao anterior, porém agora a resposta deve ser que se obtém um quadrado. As respostas seguiram o padrão da questão 3.

As questões 5 e 6 pediam que os alunos contassem os 'quadradinhos' e respondessem quantos contaram e se obtiveram o mesmo valor nas duas questões, pois os valores nos controles deslizantes eram os mesmos, alterando apenas os ângulos entre os lados adjacentes. Todos responderam corretamente:

"Transformando o quadrado em paralelogramo, temos 32 quadradinhos".

"Sim o que significa que a quantidade não muda".

Houve apenas um erro na contagem por parte de uma dupla, mas estes constataram que a quantidade era igual.

A questão 7 era apenas para reforçar a ideia da contagem dos 'quadradinhos', de modo que eles já fossem pensando em um modo para calcular a área.

A questão 8 tinha como objetivo que os alunos chegassem à fórmula para calcular a área do paralelogramo. Dois relatórios não continham resposta. As outra duplas responderam que se deve multiplicar a altura pela base. Apenas uma dupla usou 'letras', variáveis, para representar a altura e a base.

Outras duas duplas, afirmaram:

"Se colocar os lados paralelos e perpendiculares facilita a contagem".

"Deixe a figura de modo que as linhas formem um quadrado ou retângulo e multiplique a base pela altura".

Estas respostas são, provavelmente, decorrentes do fato de terem percebido que quando o paralelogramo possui a mesma altura e base, a área sempre será a mesma não importando a inclinação da figura. Assim, concluíram que, se transformarem em uma figura conhecida, facilita o cálculo.

A primeira questão sobre o arquivo que continha o losango, figura 2 e quadro 2, era sobre o que acontecia ao movimentar os controles deslizantes, semelhante à primeira questão do paralelogramo. As respostas, também, foram semelhantes. Com afirmações como*:*

"As duas bases e a altura se alteram".

"Os controles diminuem e aumentam as bases e a altura".

Na questão de número 2, as respostas foram distintas e longe do esperado. Eu imaginava que eles fossem perceber que dois lados opostos sempre eram paralelos, mas não se aproximaram desta resposta. O mais comum foi afirmarem que a figura continuava sendo um losango.

A questão 3 foi construída para que os alunos percebessem que o losango pode ser quadrado. Nesta questão, era solicitado que colocassem o mesmo valor em ambos os controles deslizantes. Todos afirmaram que a figura obtida continuava sendo um losango, porém apenas duas duplas perceberam que além de losango a figura também era um quadrado; uma destas duplas destacou que o quadrado estava na diagonal, responderam:

"Continua sendo um losango, isso significa que ele continua com os lados iguais e é um quadrado na diagonal".

"As pontas do losango ficou grandes e virou um quadrado".

Estas respostas decorreram provavelmente do costume de sempre ver o quadrado com um par de lados opostos na horizontal e no arquivo a figura ser representada com as diagonais na vertical e horizontal.

As questões 4, 5 e 6 tinham por objetivo que os alunos contassem os 'quadradinhos', sendo que os discentes deveriam perceber que as figuras formadas nas questões 5 e 6 eram iguais, só que em posições diferentes. Com a exceção de 3 relatórios, sendo dois dos alunos com dificuldades atestadas, o restante respondeu corretamente:

"Sim, continua a mesma, porque a medida continua a mesma, só trocou largura e altura".

"Sim é a mesma. Porque as medidas são iguais, mas a posição da figura muda".

"Sim, porque só inverteu os lados".

"Continua a mesma, porque a forma do losango continua a mesma, só fica na vertical".

Ao observar os alunos respondendo as questões sobre o losango, foi possível notar que eles estavam percebendo como decompor a figura para facilitar a contagem de 'quadradinhos'. A questão 7 também era para realizarem a contagem de 'quadradinhos'.

A seguir, a questão 8, onde deveriam relatar se encontraram alguma forma para calcular mais facilmente o número de 'quadradinhos' contidos na figura, esperava-se que chegassem ao menos próximos da fórmula, mesmo que verbalmente. Duas duplas afirmaram não ter encontrado e uma delas tentou explicar sua tentativa:

"Não encontrei nenhuma forma que facilitasse a contagem. Pensei ter encontrado uma que era somando os dois primeiros".

Quatro duplas responderam com a ideia correta, porém se referiram às diagonais com termos errados, conforme respostas:

"Você multiplica a medida de dois lados do losango, e depois divide pela metade".

"Altura1 vezes Altura2, dividido por 2".

"Base multiplicada pela altura, resultado dividido por 2 da o número de quadros".

Ao circular pela sala, percebi que estavam concluindo o cálculo, mas não identifiquei a falta de vocabulário para explicarem, provavelmente por não querer interferir principalmente nesta questão. Outra dupla compreendeu que deveria existir alguma relação entre as diagonais, outra colocou que era só encaixar a figura, acredito que decompondo e transformando-a em um retângulo. E as restantes deixaram em branco.

Na parte sobre o trapézio, figura 3 e quadro 3, houve um aluno de inclusão que não deu conta da extensão do trabalho, logo não respondeu às questões. Na questão 1, as respostas foram novamente semelhantes às questões número 1 referentes ao paralelogramo e ao losango, sendo as respostas praticamente as mesmas, conforme as duplas.

Na questão 2, novamente o esperado era que verificassem as características que permanecem ao mover os controles deslizantes. No entanto, apenas uma dupla mencionou a palavra “paralelo”, porém junto à palavra perpendicular e de forma desconexa, ou seja, sem relação entre elas. Uma afirmou que sempre se tem um trapézio, outras duas duplas responderam que ao movimentar os pontos pode-se obter um quadrado, retângulo ou triângulo, esta última não compreendi o motivo, pois a construção não permite que a figura vire um triângulo.

Nas questões 3 e 4, pedia-se que os alunos deixassem os controles deslizantes com mesmo valor, de forma que a figura passasse a ser também um quadrado e depois, que alterasse o valor da altura de forma que se obtivesse um retângulo. Apenas uma dupla afirmou que a figura continuava sendo um trapézio:

"Continua sendo um trapézio, só que quadrado".

Os demais responderam que a figura passava a ser um quadrado ou retângulo, logo, não mais trapézio:

"Não, se tornou um quadrado".

"Não continua sendo um trapézio, virou um retângulo. Isso significa que deixando os deslizantes iguais ele muda de forma".

As questões 5, 6, 7 e 8, tinham como objetivo que contassem os 'quadradinhos' contidos nas figuras que obtinham, fazendo o que se pedia. Quatro relatórios possuíam equívocos nas contagens de 'quadradinhos'. Outras três responderam corretamente as contagens, porém não perceberam o motivo pelo qual a quantidade de 'quadradinhos' das questões 6 e 7 serem a mesma. O restante se deu conta do motivo de as questões 6 e 7 terem o mesmo resultado na contagem, conforme respostas:

"Continua a mesma, porém fica de cabeça para baixo".

"Continua a mesma, porque mudou base por base então não tem diferença".

"Sim, porque só inverte os números das bases".

A questão 9 perguntava se haviam descoberto alguma forma para facilitar a contagem nessa figura, o trapézio. Nesta questão imaginei que teriam mais dificuldade que nas anteriores que pediam o mesmo. Em quatro relatórios, a resposta era de que a forma para facilitar é o recorte da figura e juntar as partes, a decomposição, outros dois afirmaram não existir uma maneira de contagem mais fácil, e dois relatórios também continham como resposta não ser possível facilitar o cálculo e tentaram explicar o porquê, porém não compreendi o que quiseram dizer, um relatório sem resposta e apenas um com as respostas corretas:

"Somar as bases, multiplicar pela altura e dividir por 2".

Tanto no losango como no trapézio não houve nenhuma solução em forma de equação, fórmula. As respostas obtidas foram sempre descritivas.

Na aula seguinte, foi realizada a socialização das respostas e houve a intervenção do professor para chegarem às respostas corretas. Para isso, usei o projetor para que todos observassem quando movia os controles deslizantes e pontos. A turma normalmente não interage muito, porém neste momento consegui que interagissem mais que o normal. Passei questão por questão para que respondessem às perguntas e que eu pudesse corrigir os erros fazendo outros questionamentos de forma que eles mesmos percebessem seus erros. No entanto, tive que interferir bastante quanto ao vocabulário usado.

Na parte do paralelogramo responderam sem maiores dúvidas. No momento da lei, a resposta mais comum foi multiplica, logo, questionei: *"multiplica o que?"* Responderam: *"a altura pela base"*. Algumas respostas diferentes, mas todas com mesmo sentido. Então recoloquei os paralelogramos das questões anteriores e conferi com eles se dava certo a contagem com a multiplicação. Confirmaram. Desta forma, perguntei se poderia fazer uma fórmula matemática e como ela ficaria. No momento de representar o lado por uma letra, houve um silêncio. Então tive que interferir, *"lembram que uma letra guarda o lugar de um valor desconhecido ou de um lugar que pode ter qualquer valor? Aqui podemos usar alguma?" a resposta: o 'x'. Mas tem que ser o 'x'?"* Não demonstraram reação. Nesta fase trabalhei com eles a ideia de variável, de modo que percebessem que essa fórmula deve funcionar com qualquer paralelogramo. Os alunos demonstraram compreender o motivo de usar uma variável, isso era notável pelos comentários que faziam. Logo, concluíram a fórmula $A = h \cdot b$, onde expliquei que para altura se costuma usar a letra *h*.

Na parte do losango, refiz tudo da mesma forma, a turma respondia o que se esperava. Foi possível perceber que o losango gerou mais trabalho para eles que o paralelogramo. Para concluir a lei de formação, foi mais rápido, visto que já possuíam uma experiência anterior, com o paralelogramo e com as variáveis. Logo, concluíram: $A = \frac{B \cdot b}{2}$, tive que intervir, pois sozinhos não demonstravam estarem chegando ao resultado.

Na parte do trapézio, no momento da socialização demonstraram compreender mais do que tinham escrito nas respostas. Porém o trapézio foi o mais complicado para que todos compreendessem as ideias. O processo do questionário foi refeito, logo surgiu a dúvida novamente se podiam juntar metades de quadrados para formar um, concluíram por eles mesmos que deviam. Então, verificava a resposta com a contagem conforme o que falavam para eu fazer e após, verificava junto a eles se fazendo do jeito que falavam daria o mesmo resultado. As respostas conferiam. No momento de definir a lei de formação, já estavam socializados com a regra conforme a decomposição e um aluno concluiu a fórmula ditando-a para eu colocar no quadro: $A = \frac{(B+b)h}{2}$.

Após essa etapa, era possível perceber que haviam poucos alunos que expressavam olhar de dúvidas. Então fiz uso dos arquivos *GeoGebra* que desenvolvi para explicar o porquê das fórmulas. Foi satisfatório com algumas exclamações: *"agora sim!"*.

Não estava previsto na proposta inicial, mas a atividade trouxe a necessidade de se fazer a construção do organograma dos quadriláteros. Essa construção foi feita na aula seguinte à última da proposta, pois ao socializar as respostas dos questionários surgiam dúvidas, como por exemplo: quando os lados adjacentes de um paralelogramo são perpendiculares, a figura continua sendo um paralelogramo? pois agora, possui aparência de um retângulo. Como haviam algumas questões como esta, os alunos chegaram a definir propriedades equivocadas para algumas figuras, como, para ser trapézio as bases não poderiam possuir o mesmo valor, senão, passa a ser um retângulo.

Análise dos Resultados

Foi possível verificar que os alunos possuem facilidade em compreender como aplicativos e programas de computador que desconhecem funcionam, provavelmente por estarem sempre em contato com o UCA, que já está presente na escola há três anos. E também, por estarem constantemente fazendo uso de aparelhos telefônicos móveis que possuem muitas outras funções além de fazer ligações. Logo, a hipótese 1 foi confirmada. Mesmo sem terem experiências anteriores com o *GeoGebra*, não houve problemas. Acreditamos que isso se deve ao fato de que este *software* possui ferramentas intuitivas.

Os alunos logo perceberam que as perguntas dos questionários e a contagem de 'quadradinhos' se referia à área das figuras, porém demonstraram ter poucas recordações quanto ao assunto. Alguns demonstravam lembrar do cálculo da área do quadrado e retângulo, mas vagamente. Logo, a hipótese 2 foi confirmada, já haviam trabalhado sobre o assunto, porém não fixaram a aprendizagem que provavelmente se desejava.

Acredito que a hipótese 3 tenha sido satisfeita, pois foi possível verificar que alguns alunos estavam se dando conta que poderiam decompor as figuras para transformá-las em figuras conhecidas ou que o cálculo da área fosse mais fácil. E também, que os discentes conseguiram compreender o que é uma unidade de área. Mesmo não se obtendo os resultados desejados, conforme Ponte, Brocardo e Oliveira (p.17, 2005) "não se conseguindo resolver o problema, o trabalho não deixa de valer a pena pelas descobertas imprevistas que proporciona". E isso é fato, nesta experiência os alunos tiveram a oportunidade de ver a geometria e a álgebra sob uma nova perspectiva. Não aconteceu exatamente como o previsto, mas os alunos demonstraram interesse e aprendizado.

Nos questionários poucos usaram letras para representar números desconhecidos, variáveis, porém no momento da construção das fórmulas com o grande grupo, muitos responderam que deveria ser usada uma letra para representar a base ou/e a altura. Nos relatórios muitos concluíram como calcular a área do paralelogramo, porém para o losango e o trapézio, as respostas foram precipitadas. No entanto, na socialização das respostas muitos demonstraram estar compreendendo e falaram de forma adequada. Assim, ao final das atividades, muitos alunos compreenderam o cálculo da área do paralelogramo, losango e trapézio, após ter construído a noção de variável dentro de uma fórmula, e então, relacionando a geometria com a álgebra. Alguns compreenderam logo, outros precisaram de mais explicações, mas quando visualizaram nos arquivos do *GeoGebra* que eram explicativos, demonstraram entender. Esta é uma das contribuições de *softwares* como o *GeoGebra,* oferecer um conjunto de figuras em um mesmo objeto mantendo as características definidas na construção que, de alguma forma, 'concretizam' a figura formal (Gravina, 1996). Assim, a hipótese 4 foi confirmada.

Um aluno concluiu no momento da socialização, que sabendo calcular a área do retângulo, quadrado e triângulo, é possível calcular a área de muitas figuras; então ajudei este aluno, afirmando que facilita para calcular a área de polígonos destacando o conceito de polígono. E ainda, ao longo da atividade, teve duplas que rabiscaram a tela do UCA para decompor a figura em duas partes, onde uma era um triângulo que encaixava na outra parte formando um retângulo. As duplas que não perceberam esse fato ao longo da atividade, tiveram a oportunidade de visualizar isso acontecendo nos arquivos usados para finalizar a proposta. Assim, acredito que a hipótese 5 tenha sido satisfeita, pois a maioria dos alunos apropriou-se do conhecimento que possibilita decompor figuras planas desconhecidas e irregulares em figuras conhecidas e assim calcular a área destas figuras.

Considerações Finais

Esta pesquisa abordou o ensino sobre área de figuras planas, em específico o paralelogramo, losango e trapézio, visando sua aprendizagem. Para isso foi desenvolvida uma proposta de ensino cujo objetivo seria que o aluno pudesse relacionar a representação algébrica do cálculo da área dessas figuras com as respectivas representações geométricas. Para isso, foi usada a Investigação Matemática, de forma que o aluno deveria buscar relações conforme manipulava o arquivo do *GeoGebra*.

Com a análise dos relatórios entregues pelos alunos, foi possível ter a impressão que a atividade não estava tendo o andamento esperado, porém ao observá-los respondendo os questionários, percebemos que estavam construindo ideias, sendo críticos em relação às falas dos colegas, buscando os porquês para o que acontecia na tela do computador. Muito do que foi presenciado em sala, do que eles falaram, disse para colocarem nas respostas, porém não foi colocado, talvez por insegurança, visto que essa foi a primeira atividade que tiveram tanta liberdade em se expressar na disciplina de matemática. Ponte, Brocardo e Oliveira (p.15, 2005) ressaltam "o registro escrito, que se pede numa investigação como essa, constitui um desafio adicional para alunos desse nível de escolaridade, porque exige um tipo de representação que nunca utilizaram".

Ponte, Brocardo e Oliveira (p.23, 2005) explicam, "o aluno aprende quando mobiliza os seus recursos cognitivos e afetivos com vista a atingir um objetivo". Ou seja, o professor deixa o aluno livre para usar recursos próprios adquiridos em sua vida cotidiana ou mesmo na escola, sem se prender nesta fase aos acertos e erros. No entanto, a investigação matemática consiste em um desafio ao professor também, pois como professora em uma investigação matemática, senti dificuldade em não interferir, não dar respostas diretas aos alunos quando questionada. Na investigação matemática, as intervenções devem ocorrer apenas quando são extremamente necessárias e devem ser questionamentos que induzam o aluno à resposta de modo que ele mesmo a sane; porém, saber se estava fazendo os questionamentos corretos era complicado, pois em alguns momentos o aluno conseguia, e em outros eram exigidos mais questionamentos de minha parte.

Acredito que esta proposta tenha atingido seu propósito inicial: criar a noção de área, e ainda, reconhecer os conceitos e classificar os quadriláteros, levou a uma aprendizagem satisfatória. Os alunos demonstraram aprovar este tipo de prática em sala de aula. É uma turma que se comunica muito bem e trabalham em grupo de forma favorável.

Neste sentido, os alunos mostraram estarem mais habituados ao uso do *GeoGebra*. E estavam mais a vontade em responder as perguntas sem muito auxilio da professora. Foi possível dar continuidade ao uso do UCA na aula de matemática, ferramenta presente no dia-a-dia dos alunos, porém em contextos diferentes, mais direcionado a pesquisa e redes sociais, tornou a aula mais atraente para os alunos.

A Geometria Dinâmica mostrou-se como um ambiente de aprendizagem satisfatório, pois os movimentos que os controles deslizantes oferecem e o manuseio de pontos permitiu que os alunos percebessem, ainda que não possuíssem vocabulário para descrever, atributos fixos das figuras. Assim possibilitou que visualizassem algo que, se fosse feito no papel, provavelmente levaria mais tempo e não assumiria todas as variações possíveis de performance de objetos que só a Geometria Dinâmica permite. Desta forma, conforme Gravina e Meyer, "o software GeoGebra, com suas infinitas possibilidades, permite uma abordagem, que diríamos inovadora, para temas fundamentais da geometria, cujo aprendizado exige muita abstração por parte do aluno".

Mesmo não se obtendo os resultados desejados, conforme Ponte, Brocardo e Oliveira (p.17, 2005) "não se conseguindo resolver o problema, o trabalho não deixa de valer a pena pelas descobertas imprevistas que proporciona". E isso é fato, nesta experiência os alunos tiveram a oportunidade de ver a geometria e a álgebra sob uma nova perspectiva. Não aconteceu exatamente como o previsto, mas os alunos demonstraram interesse e aprendizado. Podemos pensar nessa situação como Ponte, Brocardo e Oliveira (p.25, 2005) reconhecem "pode sempre programar-se o modo de começar uma investigação, mas nunca se sabe como ela irá acabar".

Este artigo, embora apresente uma proposta simples, com poucos conteúdos abordados e tempo restrito, consiste em um exemplo de como é possível usar a investigação matemática em sala de aula e o uso de tecnologias de forma favorável aos alunos, mesmo sendo um processo de adaptação lento para os alunos. Práticas que colocam o aluno como a pessoa de ação são importantes para que este desenvolva autonomia para solucionar problemas e chegar a conclusões próprias. Pois fora da escola surgirão muitas situações que o aluno deverá resolver, e não será possível apenas com cálculos tecnicistas.

Torna-se inviável manter a sala de aula sem objetos tecnológicos, pois estes estão presentes no dia a dia de nossos alunos. Cabe ao professor saber fazer uso destas ferramentas de forma a favorecer a aprendizagem do aluno. Logo conforme Basso e Gravina (2012, p.12) "nossas rotinas de sala de aula também deveriam incorporar, cada vez mais, as tecnologias, pois elas influem formas de pensar, de aprender, de produzir". Hoje existe uma variedade de recursos que podem auxiliar as aulas de matemática. Desta forma, a busca por meios tecnológicos para ensinar matemática de forma mais atrativa aos alunos, com o computador e o celular, e que tornem a visão sobre a matemática mais dinâmica e ilustrativa, é contínua.

Referências Bibliográficas

BRANDÃO, Leônidas de Oliveira; ISOTANI, Seiji. Uma ferramenta para ensino de Geometria Dinâmica na Internet: iGeom. In: Congresso da Sociedade Brasileira de Computação - workshop de Informática na Escola, 9., 2003, Campinas. **Anais eletrônicos ...** Campinas: UNICAMP, 2003. p. 410 – 421. Disponível em: <http://www.br-ie.org/pub/index.php/wie/article/view/808/794>. Acesso em: 2 maio 2015.

CENTENARO, Grasciele Fabiana Casagrande. **Perímetro e Área**: uma proposta didática para o Ensino Fundamental. 2010. 100 f. Manografia (Especialização em Matemática, Mídias Digitais e Didática) - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, UFRGS, Porto Alegre, Rio Grande do Sul, 2010. Disponível em: < http://rei.biblioteca.ufpb.br:8080/jspui/bitstream/123456789/779/1/EFS22092014.pdf>. Acesso em: 19 de maio 2015.

CENTURIÓN, Marília. JAKUBOVIC, José. **Matemática Teoria e Contexto**. obra em 4 v. 6º a 9º ano. 1 ed. São Paulo: Saraiva, 2012.

GOLDENBERG, Paul E. "**Hábitos do Pensamento**" um princípio organizador para o currículo (II), Educação e Matemática, 48, 37-44. Disponível em: <http://www.apm.pt/apm/revista/educ48/educ48_6.htm>. Acessado em: 19 de maio 2015.

GRAVINA, Maria Alice. et al. **Modelagem com Geometria Dinâmica na Escola**. In: XIII Conferência Interamericana de Educação Americana. Recife, 2011.

GRAVINA, Maria Alice. **Geometria Dinâmica:uma nova abordagem para o aprendizado da geometria.** In: VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação. 1996, Belo Horizonte.

GRAVINA, Maria Alice; BASSO, Marcus Vinicius de Azevedo. Mídias Digitais na Educação Matemática. In: GRAVINA, Maria Alice et al (Org.). **Matemática, Mídias Digitais e Didática:** tripé para formação do professor de Matemática. Porto Alegre: Evangraf, 2012. Cap. 1. p. 11-36.

ISOTANI, Seiji. **Desenvolvimento de ferramentas no IGEON**: utilizando a Geometria Dinâmica no ensino presencial e a distância. 2005. 92 f. Dissertação (Mestrado em Ciências da Computação)-- Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2005.

LEONARDO, Fabio Martins de (org). **Projeto Araribá Matemática**. obra em 4 v. 6º a 9º ano. 3 ed. São Paulo: Moderna, 2010.

MEIER, Melissa. GRAVINA, Maria Alice. **Modelagem no GeoGebra e o desenvolvimento do pensamento geométrico no Ensino Fundamental**. In: 1ª. Conferência Latino Americana de GeoGebra. São Paulo, 2012. Disponível em: < http://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/9583/7124>. Acesso em: 4 jul. 2015.

MEIER, Melissa. **Modelagem Geométrica e o Desenvolvimento do Pensamento Matemático no Ensino Fundamental**. 2011. 145 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Programa de Pós Graduação em Ensino de Matemática, UFRGS, Porto Alegre, Rio Grande do Sul, 2011. Disponível em: <http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/54727/000852976.pdf?sequence=1>. Acesso em: 19 de maio 2015.

PONTE, João Pedro da, BROCARDO, Joana, OLIVEIRA. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2005.

SILVA, Erenilson Francisco da. **Cálculo de área e perímetro das principais figuras planas**: discutindo a adequação de exercícios e problemas para o GeoGebra. 2013. 66 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática a Distância), UFPB, Pitimbu, Paraíba, 2013. Disponível em: <http://rei.biblioteca.ufpb.br/jspui/bitstream/123456789/779/1/EFS22092014.pdf >. Acesso em: 19 de maio 2015.

VALENTE, José Armando. **Diferentes usos do computador na educação**. In: Computadores e conhecimento: repensando a educação. 1ª ed. Campinas, NIED-Unicamp, 1993. http://www.educacaopublica.rj.gov.br/biblioteca/tecnologia/0022.html

VALENTE, José Armando. Informática na Educação no Brasil:Análise e Contextualização Histórica. In: J.A. Valente (org.). **O Computador na Sociedade do Conhecimento**. Brasília: Estação Palavra - USP, 2005. p. 11-28. Disponível em: < http://www. dominiopublico.gov.br/download/texto/me003150.pdf>. Acesso em: 1 maio 2015.