CONTRIBUIÇÕES DO SOFTWARE GRAFEQ NOS PROCESSOS DE ENSINO E APRENDIZAGEM DO CONTEÚDO DE FUNÇÃO AFIM.

Marina Rampon – marirampon@yahoo.com.br – Polo Picada Café
Leandra Anversa Fioreze – leandra.fioreze@gmail.com –Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Resumo: este trabalho apresenta a descrição da elaboração e aplicação de uma proposta abordando o ensino e aprendizagem do conteúdo de função afim com o auxílio do software GrafEq. O objetivo principal do projeto é favorecer a articulação algébrica e gráfica desta função, facilitando a compreensão entre a relação presente destas duas representações. A sequência didática foi aplicada com uma turma de segunda série do Ensino Médio do Colégio Estadual Landell de Moura, localizado na cidade de Bento Gonçalves- RS. A metodologia utilizada foi a da Engenharia Didática a fim de vincular a pesquisa com a prática docente e permitir a melhor organização do trabalho. A sequência de atividades teve como base a Teoria dos Níveis de Sofisticação do Desenvolvimento Cognitivo de Tall, a qual alia a tecnologia ao crescimento cognitivo em matemática. No que se refere às conclusões do trabalho, podemos destacar que o uso do software GrafEq é um recurso importante no auxílio da aprendizagem de função afim, principalmente na relação entre a representação gráfica e algébrica.

Palavras-chave: Função Afim; Software GrafEq; Engenharia Didática; Teoria dos Níveis de Sofisticação do Desenvolvimento Cognitivo de David Tall.

1 INTRODUÇÃO

O presente artigo relata uma ação pedagógica na área da matemática, a qual tem o objetivo de contribuir com o ensino e aprendizagem de função afim, além de sugerir mudanças na forma de ensino usual deste conteúdo.

Com vista nisso, será relatada e analisada a realização de uma prática que segue os moldes da Engenharia Didática com base na Teoria do Desenvolvimento Cognitivo proposta por Tall (1999), a qual relaciona tecnologia e crescimento cognitivo em matemática.

Nesta busca por uma forma de contribuir ao ensino de função afim, foi elaborada uma proposta de ensino que aborda este conteúdo tendo em vista a necessidade de repensar o processo de ensino e aprendizagem, para que os alunos não repitam apenas processos mecânicos. A presente proposta fez a utilização do software matemático GrafEq, que permitirá, por meio de seus recursos e possibilidades, a visualização gráfica e a representação algébrica das funções afins na mesma janela de trabalho, facilitando a compreensão e possibilitando que o aluno relacione estas duas representações.

Além disso, um dos objetivos é demonstrar uma postura diferente de trabalho na qual o professor é um pesquisador e consegue articular ação didática com produção de conhecimento e, através do relato desta ação pedagógica, busca-se também ressaltar a importância das reflexões feitas pelo professor em relação aos conteúdos, a forma de abordagem, escolha e hipóteses que acompanham o planejamento, a experimentação, a análise posterior e a validação.

2 APORTES TEÓRICOS UTILIZADOS NESTE TRABALHO

Nesta parte do trabalho, serão apresentados os aportes teóricos utilizados como referência para a construção da sequência didática analisada.

2.1 A TEORIA DO DESENVOLVIMENTO COGNITIVO DE DAVID TALL

Para concluir a ocorrência de aprendizagem, a partir da sequência analisada, será utilizada a teoria de David Tall que, assim como já destacamos anteriormente, relaciona tecnologia e crescimento cognitivo em matemática.

De acordo com Tall (1999, p.3, *apud* Cóser, 2008), "o crescimento cognitivo do pensamento matemático avançado é construído não somente sobre as habilidades cognitivas humanas, mas também sobre a interface e facilidades fornecidas pelo software". É com a intenção de auxiliar o aluno na construção de possíveis relações dos conhecimentos matemáticos e por considerar o software um possível facilitador neste processo, devido à sua interface e todas suas ferramentas, que foi utilizado o GrafEq na elaboração das atividades.

Além disso, para Tall (1999), os softwares são importantes na construção do conhecimento matemático, pois seus recursos, como as representações numérica, simbólica e gráfica, permitem que o aluno consiga transitar de um pensamento mais técnico para um pensamento mais formal. Porém, esta transição pode trazer muitas dificuldades para os alunos, já que fará uma grande reformulação cognitiva, por isso ele dividiu o desenvolvimento cognitivo em três níveis de sofisticação, sendo estes: *procedimentos, processos e proceitos.*

Grey e Tall (1994, *apud* Corrêa, 2014) explicam que um *procedimento* pode ser aquele que é utilizado para encontrar uma resposta, sem a necessidade do envolvimento do conceito matemático, por exemplo, um algoritmo. Na sequência didática elaborada a primeira etapa corresponderá ao desenho do peixe (será entregue no primeiro momento das atividades) e o próprio software GrafEq.

O planejamento desta etapa relativa ao procedimento se justifica pelo fato de os alunos não saberem como começar a atividade no momento em que ela for solicitada, já que não estão familiarizados com este formato de construção de gráficos. E o segundo porque sua utilização inicial permitirá que o aluno se familiarize com seus recursos, mas não favorecerá que ele tire conclusões em relação ao conteúdo de função afim.

Para Tall (1998, p.15):

> A evidência que temos sugere que é insuficiente dar apenas aos indivíduos as ferramentas para a realização de procedimentos, se não forem devidamente integrados em uma estrutura cognitiva que pode fazer sentido ao relacionamento entre os vários processos, conceitos e representações. (TALL, 1998, p.15)

Para obter êxito na prática docente, não basta utilizar procedimentos no ensino da matemática – como softwares matemáticos – sem que haja um planejamento prévio e sem intenção clara de onde se quer chegar. O aluno precisa de atividades que façam sentido entre si e de ferramentas que facilitem a construção de seu conhecimento, necessitando, muitas vezes, de um direcionamento, uma intervenção do professor, para que a aprendizagem ocorra.

Processo é "quando o procedimento é concebido como um todo; e o foco é nos dados e nos produtos preferivelmente do que no procedimento particular usado para conduzir o processo" (TALL, 1999, p. 5). Relacionando com a proposta analisada, o aluno passará do procedimento para o processo quando compreender que o comportamento gráfico de uma função afim está relacionado aos seus coeficientes angular e linear.

Para isso, utilizarão o GrafEq e a construção de gráficos de funções afins, a fim de encontrar uma resposta em que os conceitos matemáticos não estão evidentes e, posteriormente, visualizarem as mudanças de um gráfico para outro de acordo com as leis algébricas de cada função afim.

E, por fim, o termo "*proceito* foi introduzido para a combinação de símbolo, processo e conceito que ocorre quando um símbolo evoca um processo para dar o conceito resultante" (GRAY, TALL, 1994, p. 11).

Esta é a etapa em que o aluno passa de um pensamento mais técnico para um pensamento mais formal, ou seja, na sequência proposta o aluno compreenderá o papel dos coeficientes angular e linear e relacionará a eles o comportamento gráfico das funções afins, conseguindo desta forma fazer a construção de outras imagens, diferentes do peixe, mas que utilizem funções afins.

"Estávamos interessados na maneira pela qual os indivíduos interpretam símbolos na aritmética, álgebra e cálculo, fazendo com que alguns estudantes achem a matemática essencialmente fácil enquanto outros acham cada vez mais difícil" (TALL, 1998, p.11).

Por isso que a construção do pensamento cognitivo, a transição pelos três níveis de sofisticação elaborados por Tall, pode trazer dificuldades para os alunos, porque se não forem bem elaboradas pelo docente acabam confundindo ainda mais e tornando a matemática ainda mais difícil para alguns.

É preciso ressaltar que esta etapa é muito importante, pois os "*proceitos* permitem que os indivíduos não apenas realizem procedimentos, mas considerem símbolos como objetos mentais, assim eles podem não só fazer matemática, eles também podem pensar sobre os conceitos" (TALL, 1998, p.12). Pensando nas funções afins, espera-se que os alunos passem a olhar para suas representações algébricas e associar a elas um comportamento gráfico e vice-versa.

Na sequência analisada, ao final da prática, o aluno deverá utilizar os conceitos matemáticos trabalhados e conseguir aplicá-los na elaboração das imagens, ou seja, o aluno deverá conseguir, através dos procedimentos e dos processos fornecidos, utilizar a representação gráfica e a algébrica da função afim para elaborar alguma imagem que ele tenha interesse.

2.2 O PAPEL DO COMPUTADOR NA EDUCAÇÃO

Com base em outros autores além de Tall, serão apresentados alguns aspectos que justifiquem a escolha pela utilização das tecnologias da informação, mais especificamente o computador, na presente proposta.

Incontestavelmente, o computador é um recurso tecnológico muito importante no momento de ensinar e aprender matemática. Para Borba e Penteado (2003, p.87), "no momento em que os computadores, enquanto artefato cultural e enquanto técnica ficam cada vez mais presentes em todos os domínios da atividade humana, é fundamental que eles também estejam presentes nas atividades escolares". O computador pode vir a ser um facilitador nas aulas de matemática, pois se analisarmos que:

> Antes do advento do computador o indivíduo tinha que realizar todos os cálculos de aritmética e manipulações em álgebra à mão (ou, mais apropriadamente, pelo cérebro). Agora cálculos e manipulações podem ser realizados sem esforço pelo computador (TALL, 1999, p.4).

Além disso, sua utilização durante as aulas pode ser uma forma de atrair a atenção e o interesse dos estudantes para a matemática, já que estes, diariamente, têm muito contato com a tecnologia. No caderno V, da etapa 2, da Formação de Professores do Ensino Médio (2014), encontramos que:

> Nos dias de hoje, as transformações culturais mais decisivas provêm de mutações tecnológicas. Assim sendo, as relações entre cultura e comunicação se modificam e se acentuam para a atual geração juvenil. Com efeito, as tecnologias da informação e da comunicação (TICs) transformam-se em verdadeiras marcas de identidade dos jovens assim como são instrumentos de demarcação de fronteiras sociais. (BRASIL, 2014, p. 79)

Neste mesmo sentido, encontramos no guia dos livros didáticos para o Ensino Médio do PNDL 2015 que a utilização dos recursos tecnológicos é um aspecto que não pode ser negligenciado, já que se faz tão presente na vida do estudante, destacando que:

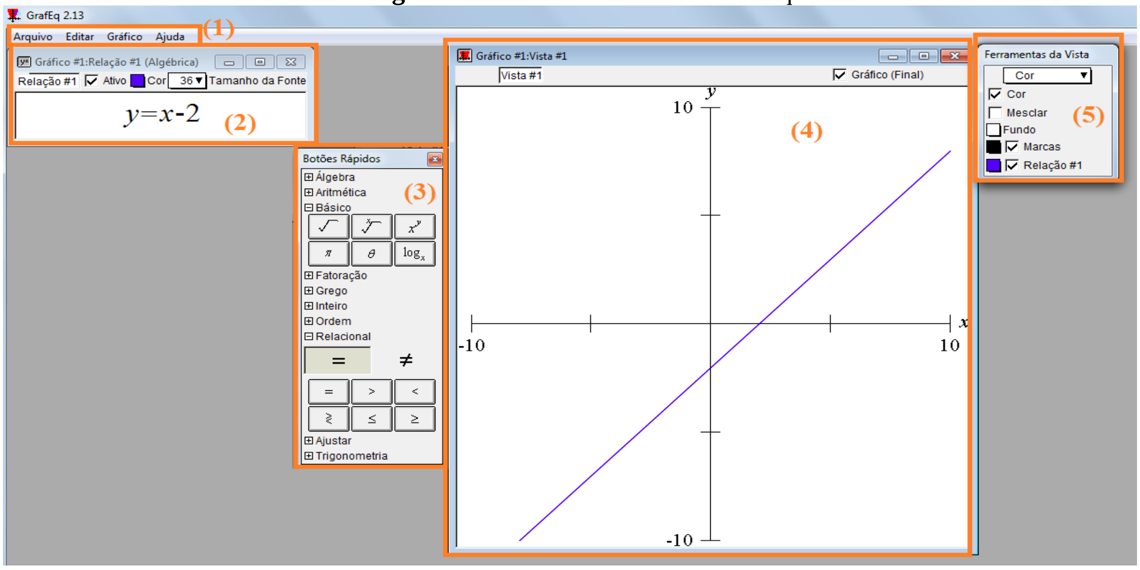
> Nas últimas décadas, a sociedade vem experimentando um período de mudanças profundas e aceleradas nos meios de produção e circulação de bens econômicos, de intercâmbio de informações e de ampliação rápida do acervo e dos horizontes do conhecimento científico. Um dos aspectos distintivos das recentes mudanças é o emprego crescente da Matemática tanto nas práticas sociais do cotidiano – compras e vendas, empréstimos, crediário, contas bancárias, seguros e tantas outras – quanto nas atividades científicas ou tecnológicas. Especialmente no dia a dia do cidadão, são evidentes as

> repercussões dos novos recursos tecnológicos do computador e da calculadora, ambos amplamente difundidos em todos os meios sociais (PNDL, 2015, p.14).

Com o intuito de atrair a atenção e o interesse dos estudantes, e utilizar um recurso tecnológico para o ensino de função afim, que foi escolhido o software GrafEq na sequência proposta. Este software tem download disponível na internet, apresenta versão gratuita para teste e pode ser uma importante ferramenta no ensino de funções, pois mostra na mesma janela a parte algébrica e gráfica e permite que várias funções sejam representadas num mesmo plano cartesiano de forma que até mesmo imagens sejam elaboradas com elas. Notare e Gravina (2013) destacam que a interface do GrafEq permite o trabalho simultâneo nos registros algébrico e gráfico, que pode ajudar na aprendizagem das equações e relações envolvendo as coordenadas (*x*, *y*) de pontos no plano.

Além disso, o software é de fácil manuseio e pode ser utilizado em diferentes línguas, inclusive no português. A interface é simples: possui um menu principal (1), as caixas de texto para digitar as relações (2), a janela "botões rápidos", que apresenta símbolos matemáticos para facilitar a escrita das relações (aparece apenas enquanto estamos digitando ou editando as relações) (3), a janela com registro gráfico (4) e a caixa de ferramentas, na qual podemos alterar as configurações das relações digitadas e da janela gráfica (5). Na imagem 1, a interface do software pode ser observada:

Imagem 1 - Interface do software GrafEq



Fonte: capturada pela autora (2015).

Analisando as diversas funções, espera-se que as dificuldades que os alunos apresentam em relacionar a lei da função afim ao seu gráfico sejam menores com a utilização do software GrafEq, já que ele fornecerá, simultaneamente, as janelas gráfica e algébrica. Este recurso fornecido pelo software, em conjunto com as atividades elaboradas, permite que os alunos façam experimentos e construam suas próprias conclusões acerca do comportamento gráfico destas funções.

Consoante ao que defendem os argumentos da presente proposta, Allevatto (2007) destaca que:

> Pesquisas trazem evidências de que a utilização dos computadores nos ambientes de ensino de Matemática conduz os estudantes a modos de pensar e de construir conhecimento que são típicos do ambiente informático e, por vezes, favoráveis à aprendizagem de conteúdos ou à compreensão de conceitos matemáticos. Tais pesquisas destacam aspectos como o uso regular de representações múltiplas, a manifestação de concepções acerca da Matemática e dos conteúdos matemáticos, a ênfase na visualização, entre outros (ALLEVATTO, 2007, p.3).

Além de todas as vantagens que o GrafEq oferece, o software foi escolhido com o objetivo de sair do formato tradicional das aulas de matemática, na qual o professor é o centro das atenções, e permitir, através da presente proposta, que o aluno possa ser autônomo, que ele seja desafiado a pensar, a tirar suas próprias conclusões e a construir seu próprio conhecimento.

Da mesma forma, o computador ou o software matemático não são utilizados somente para acompanhar as crescentes transformações tecnológicas, mas por considerar essas mudanças favoráveis para a ocorrência e construção do conhecimento. Deve-se considerar, para tanto, que a utilização destes recursos seja feita por meio de propostas bem elaboradas e que o professor compreenda de que forma o aluno aprende.

Tall (1994) afirma que é necessário ao professor não apenas:

> [...] estar ciente das mudanças tecnológicas e as possibilidades, mas ver como eles interagem com a natureza da aprendizagem humana. Como educadores matemáticos, precisamos saber as realidades, bem como as possibilidades de aprendizagem humana na era da tecnologia da informação. (p.2)

Por fim, Allevatto (2007) destaca que cabe ao professor elaborar atividades desafiadoras, problemas que possibilitem ao estudante não somente utilizar, mas de fato tirar proveito das possibilidades que o computador oferece. Os problemas devem estimular a exploração e a investigação, bem como a elaboração de conjecturas por parte do aluno.

2.3 ENGENHARIA DIDÁTICA

Segundo Artigue (1994, 1996 *apud* Carneiro, 2005), o termo Engenharia Didática, criado na área de Didática das Matemáticas, na França, na década de 80, tem inspiração no trabalho do engenheiro, cuja produção exige sólido conhecimento científico, básico e essencial, mas também exige enfrentamento de problemas práticos para os quais não existe teoria prévia — momentos em que é preciso construir soluções.

De maneira bem simples, a engenharia didática tem por princípio buscar soluções para problemas práticos e para os quais não tenha teoria prévia. Ela incentiva o professor a ser um investigador, um pesquisador, a criar formas de ensinar que não estão presentes em livros e das quais os alunos não estão acostumados a aprender.

Para Carneiro (2005), a engenharia didática fornece um roteiro ou um direcionamento para as reflexões dos professores, que, normalmente, ficam perdidos quanto ao que devem repensar e analisar sobre suas práticas, já que com ela o professor se habitua a observar, registrar, analisar a produção em sala de aula e comparar com teorias já estabelecidas.

A Engenharia Didática retrata a importância dos professores refletirem sobre suas tomadas de ações em sala de aula, seus planejamentos, a escolha dos conteúdos e métodos de ensino e a análise posterior de tudo o que fizerem em sala de aula e da qualidade da aprendizagem de seus alunos.

Carneiro (2005) afirma que "a teoria da Engenharia Didática pode ser vista como referencial para o desenvolvimento de produtos para o ensino, gerados na junção do conhecimento prático com o conhecimento teórico". Ou seja, ela alia a dimensão teórica com a dimensão prática e desta junção obtemos produções para o ensino, baseados em experiências em sala de aula, possíveis de serem utilizadas ou aprimoradas por outros docentes.

Os princípios da engenharia didática vão ao encontro do que Silva (1999) já afirmava, ou seja, a quebra do "contrato didático" nas aulas de matemática, nas quais, resumidamente, passa da situação do professor explicar através de aulas expositivas e o aluno reproduzir de maneira semelhante o que lhe foi ensinado, para a situação de favorecer para que o aluno se torne um investigador, o sujeito de sua aprendizagem e o professor deixe de ser o centro das atenções.

Artigue (1994, *apud* Corrêa, 2014) organiza a metodologia e execução da Engenharia Didática em quatro fases:

a) Análise Prévia: nesta etapa são considerados diferentes aspectos, como o ensino habitual do conteúdo, o estudo teórico, a forma como o conteúdo é ensinado e os efeitos que isto causa, as dificuldades dos alunos, dentre outros;

b) Concepção e análise *a priori* de experiências didático-pedagógicas a serem desenvolvidas em sala de aula: nesta fase, têm-se a elaboração da sequência didática, a previsão de possíveis comportamentos dos alunos e que tipo de conhecimentos serão construídos e a elaboração das hipóteses a serem validadas durante o experimento;

c) Experimentação, ou seja, a aplicação da proposta de ensino;

d) Análise *a posteriori* e validação da experiência: através das observações realizadas durante a experimentação e do material produzido pelos alunos é feita a análise *a posteriori*, com o objetivo de validar (ou não) a sequência didática e as hipóteses formuladas.

2.4 RELATO SOBRE O TEMA E CAMPO DE AÇÃO

O tema da presente pesquisa corresponde ao ensino de função afim. Escolhi este tema, pois as experiências que tive ao longo de minha graduação, dos três anos como bolsista do PIBID (Programa Institucional de Bolsa de Iniciação a Docência) e dos três anos como docente, me fizeram perceber que a forma como este conteúdo é trabalhado em sala de aula, geralmente, deixa os estudantes como muitas dúvidas. Ao longo desta trajetória e, também, no desenvolvimento da Especialização da UFRGS (Matemática, Mídias Digitais e Didática: Tripé para a Formação do Professor de

Matemática) percebi que existem outras formas de abordagem deste conteúdo, principalmente, com a utilização do computador e de softwares.

Analisando o ensino usual deste conteúdo, percebi que os alunos do Ensino Médio conseguem construir gráficos com a utilização das tabelas de valores, mas apresentam bastante dificuldade no momento de analisar o comportamento gráfico das funções e muitas vezes não associam este comportamento aos coeficientes. Além disso, foi possível notar que há grandes limitações na obtenção da lei da função através do gráfico, ou seja, a transformação da forma gráfica em algébrica, e não é incomum os alunos acharem difícil e muitas vezes até considerarem sem sentido os exercícios envolvendo este conceito.

O Guia dos Livros Didáticos (PNDL, 2015) destaca a necessidade de trabalhar as diferentes formas de representações das funções e a importância que os softwares têm para a visualização e compreensão do comportamento gráfico:

> No estudo de funções, é importante recorrer a diferentes representações – tabelas, gráficos, fórmulas algébricas – estabelecendo-se relações entre elas. Frequentemente, um problema inicialmente formulado de maneira algébrica pode ser mais facilmente resolvido ou compreendido quando é interpretado geometricamente, e vice-versa. (...) O uso de aplicativos computacionais, que permitem visualizar o gráfico de funções, ajuda tanto a perceber as propriedades dos seus vários tipos, quanto a fazer experimentos com maior riqueza de exemplos. Por isso, é elogiável a tendência, observada em alguns materiais didáticos destinados ao ensino médio, de empregar os referidos aplicativos como recursos para a aprendizagem da Matemática. (PNLD, 2015, p. 97)

Em razão dos motivos apresentados anteriormente e do interesse pelo conteúdo de função, pelos conceitos matemáticos envolvidos e pelas possíveis aplicações no cotidiano, foi elaborada uma sequência de ações que aborda a representação gráfica e algébrica da função afim com a utilização do GrafEq. Esta sequência didática foi aplicada em uma turma de segunda série do Ensino Médio, sendo que os alunos já estudaram este conteúdo, e temos por objetivo contribuir para a compreensão do conceito de função afim.

3 ANÁLISES PRÉVIAS E O ENSINO HABITUAL DE FUNÇÃO AFIM

Nesta etapa algumas análises são feitas divididas em três dimensões: a epistemológica, a didática e a cognitiva.

A dimensão epistemológica traz um breve histórico da construção e evolução do conceito de função. Na dimensão didática foi elaborada uma análise bibliográfica do que já foi publicado sobre o conteúdo de função afim. Nesta parte, também, há uma análise de como vêm funcionando o sistema de ensino deste conteúdo. E na dimensão cognitiva foram estudadas as dificuldades que os alunos apresentam para a construção deste conhecimento.

3.1 DIMENSÃO EPISTEMOLÓGICA

O conceito de função é resultado de um longo processo histórico, no qual Babilônicos e Pitagóricos tentavam explicar os fenômenos naturais. “O conceito de função, presente nos mais diversos ramos da ciência, teve sua origem na tentativa de filósofos e cientistas em compreender a realidade e encontrar métodos que permitissem estudar e descrever os fenômenos naturais” (BOTELHO, 2007, p.65).

Segundo Garcia (2004), a noção de função surgiu como conceito fundamental e indispensável para o estudo quantitativo dos fenômenos naturais iniciados por Galileu (1564- 1642) e Kepler (1571-1630).

O estudo do movimento da queda dos corpos, do movimento dos planetas e dos movimentos curvilíneos foram os motivos que impulsionaram o desenvolvimento do conhecimento matemático relativo a funções. De maneira mais simples, a noção de função está associada, originalmente, a noção de lei natural.

De acordo com Botelho (2007), para que o conceito de função fosse estabelecido como uma relação entre grandezas que variam, foi necessária a definição do conceito de variável, inicialmente, através da simbolização da álgebra.

Foi René Descartes (1596-1650) que criou as representações que utilizamos até hoje, ou seja, utilizar as primeiras letras do alfabeto para quantidades conhecidas e as últimas letras para as desconhecidas.

Já Leonard Euler (1707-1783) fez surgir as definições e os significados de quantidade constante e quantidade variável. Foi ele, também, que em 1734, criou a notação f(x) para designar uma função que depende da variável x.

Em 1797, as definições de funções dadas por Joseph Louis Lagrange (1736-1813) já denotavam a ideia de função como relação entre quantidades variáveis.

O conceito de função demorou muito tempo para ser aperfeiçoado e ao longo de sua evolução ganhou múltiplos significados, os quais foram destacados em um quadro resumo por Garcia (2004).

Seu conceito, como pode ser observado no quadro- resumo exposto na imagem 2, ao longo do tempo foi ganhando definições mais formais e distanciando-se das definições originais que além de mais simples, eram utilizadas para explicar e solucionar problemas do cotidiano e da natureza. Este distanciamento da realidade gera a necessidade de que os professores aproximem este conteúdo a situações cotidianas e tentem apresentar de maneira menos formal os conceitos de funções aos alunos, para que conheçam, compreendam e apliquem conceitos tão indispensáveis na matemática ou em outros contextos, como na Física, na Biologia, dentre outros.

Imagem 2: Resumo da evolução do conceito de função

Século	Autor	Frases Geradoras
XVI	Galileu-Galilei (1564-1642). Termo "função" não é usado. Noção corresponde à de Lei natural - Lei quantitativa que expressa regularidades de um fenômeno natural; relações entre a variação de quantidades observáveis.	(Função) é relação entre variáveis. Variáveis são quantidades observáveis na natureza.
XVII	Leibniz (1646-1716), Newton (1642-1727) – relação entre medidas associadas a uma curva, como por exemplo, as coordenadas de um ponto da curva, a inclinação de uma curva e o raio de curvatura. Leibniz (1670) introduz o termo função.	Função é uma correspondência entre quantidades associadas a uma curva da Geometria. Variáveis são quantidades que assumem diferentes valores, na construção de uma curva.
XVIII	João Bernouilli (1667-1748): função é expressão qualquer formada de uma variável e algumas constantes; Euler (1707-1783): função é uma equação ou fórmula qualquer envolvendo variáveis e constantes.	Função é uma equação, uma fórmula. Variável é um símbolo, um elemento de linguagem.
XIX	Dirichlet (1805-1859): uma variável é um símbolo que representa qualquer dos elementos de um conjunto de números; se duas variáveis x e y estão relacionadas de maneira que, sempre que se atribui um valor a x, corresponde automaticamente, por alguma lei ou regra, um valor a y, então se diz que y é função unívoca de x. A variável x, à qual se atribuem valores à vontade, é chamada variável independente e a variável y, cujos valores dependem dos valores de x, é chamada variável dependente.	Função é uma correspondência entre variáveis. Variável é um símbolo que representa qualquer dos elementos de um conjunto de números.
XX	Grupo Bourbaki (1939): função f é um conjunto de pares ordenados de elementos, sujeitos à condição seguinte: se (a, b) e (a, c) são elementos de f então b=c.	Função é um conjunto de pares ordenados. Omite-se variável.

Fonte: GARCIA (2004).

3.2 DIMENSÃO DIDÁTICA

A abordagem do conteúdo de função afim, normalmente, é embasada nos livros didáticos, os quais são explicados pelos professores e em seguida reproduzidos pelos alunos na resolução de exercícios. Estes, por sua vez, acabam achando os exercícios cansativos, sem, muitas vezes, compreender o objetivo das tarefas e limitando-se a repetir os procedimentos.

A maioria das definições encontradas nos livros diz que toda função do tipo $f(x) = ax + b$, com $(a, b) \in \mathbb{R}$ *e* $a \neq 0$ é uma função do 1º grau ou função afim e, de modo geral, encontramos que seu gráfico é uma reta não vertical, que dois pontos são suficientes para a construção de um gráfico, o ponto em que a reta intercepta o eixo Ox é chamado de zero da função, a constante b, chamada de coeficiente linear, é a ordenada do ponto que a reta corta o eixo Oy, a constante a, é chamada de coeficiente angular e determina a inclinação da reta em relação ao eixo Ox, dentre outras.

Mas será que estas definições são suficientes para que o aluno compreenda o comportamento gráfico e o papel dos coeficientes desta função?

Consideramos que dificilmente o aluno conseguirá ter um entendimento global deste conteúdo apenas com estas definições, pois elas, além de muito formais, são passadas de forma fragmentada. Com estas definições o aluno compreende que o gráfico desta função é uma reta, mas prende-se muito aos cálculos para fazer a construção gráfica e, frequentemente, quando estes estiverem incorretos o aluno não perceberá, demonstrando o quão superficial foi a aprendizagem deste conteúdo.

Para fins de análise e por sabermos que o olhar do "professor é fortemente influenciado pelos livros didáticos" (SANGIACOMO, 1996, *apud* MEIER, 2012, p.16), foi avaliada em três obras didáticas a forma como o conteúdo de função afim é definido e abordado. Os livros foram:

a) PAIVA, Manoel. *Matemática*: volume único, 1ª edição. Editora Moderna: São Paulo, 1999;

b) DANTE, Luiz Roberto. *Matemática*, 1ª edição. Editora Ática: São Paulo, 2005; Volume 1;

c) LEONARDO, Fábio Martins. *Conexões com a Matemática*, 2ª edição. Editora Moderna: São Paulo, 2013. Volume 1.

No primeiro livro, o conceito de função afim (ou função do 1º grau) é construído a partir de um exemplo da produção de uma máquina que fabrica cordas em função de determinado tempo. A situação é representada com uma tabela com 10 valores para tempo (min) e produção (m), em seguida o gráfico correspondente a esta tabela é apresentado e por fim a lei que associa as duas variáveis é destacada.

Dando sequência, o livro apresenta a definição formal de função afim e exemplifica. Logo após, temos a explicação de que o gráfico de uma função afim é uma reta, que a partir de dois pontos distintos esta reta pode ser determinada e três exemplos são realizados: o primeiro a construção do gráfico de uma função afim utilizando a tabela de valores; o segundo, a obtenção da lei de uma função através do gráfico; e o último, uma situação problema, a qual apresenta um gráfico com o valor cobrado por uma empresa em função da extensão de uma estrada e a partir dele determina-se a lei da função, o coeficiente linear (taxa fixa cobrada pela empresa) e o custo total da obra cobrado pela empresa para uma extensão de 50 km (substituição de um valor do domínio da função e obtenção do corresponde para a imagem).

A maioria dos exercícios sugeridos aborda ou a construção do gráfico de funções afins a partir da elaboração da tabela de valores ou a obtenção da lei da função afim através do gráfico.

O segundo livro também define função afim utilizando um exemplo, do salário de um comerciante com uma parte fixa e outra variável, de acordo com um percentual recebido sobre o total de vendas realizadas num mês. Após, temos a definição formal, exemplos, casos particulares da função afim, valor de uma função afim, taxa de variação e exercícios, sendo estes de classificação, cálculo de taxa da variação, substituição de valores na função e situações problema para obtenção da representação algébrica das mesmas.

Os exercícios, na sua maioria, são contextualizados e exigem interpretação. O livro traz uma pequena abordagem sobre a relação entre a função afim e a progressão aritmética. Temos a explicação tradicional da construção do gráfico de uma função afim e a demonstração, através da fórmula da distância entre dois pontos, de que seu gráfico é uma reta. Os exercícios, desta vez, se resumem a construção de gráficos utilizando as tabelas de valores.

No terceiro livro, antes da conceituação formal de função afim, o livro faz uma abordagem baseada em uma situação da Biologia, trazendo informações sobre cálculos relacionados à curva de crescimento de um adolescente a partir da observação do desenvolvimento de seus ossos. Depois da explicação de como isto funciona, um infográfico é apresentado e questões que trabalham, de modo geral, a interpretação de dados e a análise gráfica são sugeridas.

Seguindo, temos a ideia de função afim, apresentada por meio de uma situação problema envolvendo os gastos de um casal que decide fazer uma viagem para o Rio de Janeiro. Após, vêm a definição formal de função afim e casos particulares (função constante, função linear e função identidade).

O livro destaca que há muitas situações que recaem a uma função afim, dentre elas, cita a da temperatura máxima atingida em um dia do verão inglês e nele vemos a explicação de como fazer a transformação da escala Fahrenheit para a escala Celsius, para sabermos qual seria a temperatura equivalente a unidade de medida utilizada aqui no Brasil. Os exercícios desta parte se resumem a classificação e a substituição de valores do domínio na função afim.

Sobre a parte da construção de gráficos, neste livro, também, encontramos as explicações tradicionais para a construção, ou seja, a elaboração da tabela de valores, a marcação dos pares ordenados e o traçar da reta correspondente a estes pontos.

O que chama a atenção é que antes da definição de função afim, este livro traz um exemplo do estudo do sinal de uma função com a utilização de um software (não cita o nome, mas tem a interface muito parecida com a do Winplot), mas na parte da construção gráfica este recurso não é mais utilizado.

Os exercícios, na maioria, são do formato “construa o gráfico das funções”, com exceção do último, o qual solicita que os alunos construam sobre um mesmo plano cartesiano o gráfico das funções $y = 3x$ e $y = 3x - 1$.

O exercício sugere que os alunos procurem por um ponto de intersecção entre as retas, construam o gráfico de mais funções com o mesmo coeficiente angular e na sequência sugere que expliquem o que observaram com esta atividade. Este exercício poderia ser aproveitado pelo professor para explicar a relação entre os coeficientes e o comportamento gráfico.

Com a análise dos três livros didáticos podemos perceber que, na maioria deles, a contextualização fica apenas para os exemplos iniciais e que a construção dos gráficos se resume a tabela de valores e marcações dos pares ordenados no plano cartesiano.

Notamos que o livro *Conexões com a Matemática*, lançado em 2013, apresenta uma maior preocupação com a aproximação do conteúdo de funções afins com situações cotidianas, faz menção da utilização de softwares para a construção de gráficos, porém a construção em si e análise gráfica ainda ficam muito superficiais e com diversas lacunas.

Foi com o objetivo de permitir a visualização gráfica das funções afins e a relação destas com seus coeficientes e sabendo que é muito importante não apenas para modificar a forma de ensino atual, aquela que o professor fala ou explica e o aluno reproduz, mas fazer o aluno pensar, estabelecer relações, usar técnicas conhecidas e conseguir comunicar resultados, que foi elaborada a presente sequência didática.

3.3 DIMENSÃO COGNITIVA

Na condição de professora de matemática em turmas do Ensino Médio, sempre que explico o conteúdo de função afim para os alunos percebo que as maiores dificuldades que eles apresentam são as de converter os gráficos para suas representações algébricas e vice-versa, conseguir representar graficamente o que resolveram por meio de equação, determinar o domínio da função e, principalmente, ler os problemas, interpretá-los e representar de forma algébrica as informações contidas.

A fim de analisar o que os alunos, da turma escolhida para a aplicação da sequência, aprenderam sobre o conteúdo de função afim e o que lembravam sobre ele, foi aplicado um questionário inicial (anexo 1) com os onze alunos presentes no dia.

O formulário continha quatro questões e em cada uma delas havia um aspecto específico para analisar. A primeira questão buscava verificar a forma como os alunos aprenderam a construir gráficos de funções afins. A segunda questão foi elaborada para constatar se os alunos conseguiam identificar a lei da função que origina os gráficos (fazer a passagem gráfica para a algébrica).

O objetivo da terceira e quarta questão era verificar se os alunos sabem o que é o zero de uma função e se tinham conhecimento dos coeficientes angular e linear da função afim assim como suas funções no comportamento gráfico.

Analisando o material obtido, foi possível observar que: na primeira questão, os oito alunos que a resolveram construíram o gráfico da função solicitada utilizando o método da tabela para testar alguns pontos da função e marcar as coordenadas no plano cartesiano para traçarem a reta. Na segunda questão, nenhum, dos onze alunos, conseguiu identificar qual era a função que estava representada graficamente.

Na terceira questão, sete alunos fizeram a construção do gráfico corretamente, marcaram o ponto em que a reta interceptava o eixo Ox, mas não responderam qual era este ponto específico. Além disso, nenhum deles utilizou o conceito de zero da função que era o esperado para este exercício.

Na última questão, apenas cinco alunos a responderam (por meio da construção dos gráficos) e destes: três alunos responderam que apesar dos valores dos coeficientes serem diferentes não mudava nada nos gráficos, que todos permaneciam decrescentes; e dois alunos responderam que a reta da segunda função deslocou-se para cima, o que estaria correto, mas não conseguiram atribuir esta mudança ao coeficiente linear das funções.

Resumidamente, pode-se constatar, com este questionário, que o único método de construção de gráficos que os alunos utilizavam era através da tabela, que não conseguiam fazer (ou não lembravam) a passagem da forma gráfica de uma função afim para algébrica e, no geral, os alunos não atribuíram o comportamento gráfico de uma função afim aos seus coeficientes.

Estas dificuldades, muito provavelmente, se devem pela pouca quantidade de exercícios envolvendo situações cotidianas, pela utilização, unicamente, da construção de tabelas com valores como forma de construção de gráficos e, talvez, pela pouca utilização de mídias digitais (softwares como o GrafEq, o Winplot, o Geogebra, dentre outros) que poderiam favorecer o entendimento geométrico (gráfico) deste tipo de função.

Diante do exposto, conclui-se que explicar função afim utilizando uma linguagem mais acessível e utilizar softwares matemáticos que facilitem a visualização da passagem algébrica para a gráfica, sejam algumas alternativas interessantes para diminuir estas dificuldades apresentadas pelos alunos.

4 ANÁLISE A PRIORI DA EXPERIÊNCIA DIDÁTICA-PEDAGÓGICA E CONCEPÇÃO

Nesta fase, segundo Artigue (1996, *apud* CARNEIRO, 2005), temos uma parte descritiva e uma parte preditiva. É necessário descrever as escolhas efetuadas, definindo as variáveis de comando, em dois âmbitos: global (de forma mais ampla) e local (descrição da atividade proposta).

As primeiras escolhas realizadas se referem ao âmbito global, ou seja, fazem referência a organização geral da Engenharia. Em nossa sequência seriam:

a) Deixar explicita a transformação algébrica de uma função afim para sua forma gráfica e vice-versa;

b) Trabalhar com o computador e softwares matemáticos, fazendo opção pelo *GrafEq*[1], por ser um software livre e de fácil manuseio;

c) Analisar o comportamento gráfico de funções afins, o papel dos coeficientes, com a utilização do software;

d) Organizar as atividades de forma que os alunos consigam transitar entre os três níveis de sofisticação de David Tall (procedimentos, processos e *proceitos*), para que consigam compreender os conceitos e as relações matemáticas presentes neste conteúdo.

A partir das escolhas globais, foram definidas as escolhas locais. O presente plano apresenta uma sequência de ações, desenvolvidas em um encontro de quatro horas, aplicado em uma turma de segunda série do Ensino Médio do Colégio Estadual Landell de Moura, localizado na cidade de Bento Gonçalves.

A sequência de ações foi organizada tendo como ponto de partida um questionário para fins de analisar o que os alunos aprenderam referente ao conteúdo de função afim.

[1] http://www.peda.com/grafeq/

4.1 HIPÓTESES

Durante o planejamento das atividades algumas previsões do comportamento dos alunos foram necessárias. Ao mesmo tempo em que foram descritas as relações entre o comportamento dos alunos e as situações didáticas propostas, foram formuladas hipóteses que serão comparadas com os resultados finais e que contribuirão para validar (ou não) a Engenharia.

Segundo Carneiro (2005), para que a Engenharia seja validada, as hipóteses não podem ser muito amplas e é necessário que tenhamos claro que voltaremos a elas na etapa da experimentação, verificando-as. Precisamos nos perguntar: será que a sequência irá funcionar? Será que as hipóteses são válidas?

Com base nisso, as seguintes hipóteses foram formuladas:

a) 1ª hipótese: em nível cognitivo, os alunos deverão adquirir conhecimentos sobre função afim e compreender a passagem algébrica desta função para a gráfica (e vice-versa). Nos termos de David Tall, eles conseguirão transitar pelos três níveis de sofisticação do desenvolvimento cognitivo (procedimentos, processos e *proceitos*) presentes nesta sequência didática, para compreenderem este conteúdo;

b) 2ª hipótese: os alunos compreenderão rapidamente o funcionamento ou a interface do GrafEq, já que o mesmo é de fácil utilização e que o software, juntamente com as atividades planejadas, seja uma ferramenta importante na compreensão do papel dos coeficientes das funções afins em seus comportamentos gráficos.

Para a análise da sequência, vale ressaltar que a coleta de dados e a avaliação serão feitas através:

a) Das observações realizadas durante a aplicação das atividades;
b) Das produções dos alunos registradas em folhas ou gravadas no computador;
c) Pelas mediações e diálogos registrados no desenvolver das atividades;

d) Por meio da análise da entrevista escrita aos alunos;

e) Por meio da análise do questionário (anexo 1) que foi aplicado antes da execução das atividades.

4.2 RELATO DA EXPERIMENTAÇÃO

A sequência didática foi aplicada no dia 11 de junho do ano de 2015, num único encontro de 4 (quatro) horas/aula, com uma turma de 2ª série do Ensino Médio do Colégio Estadual Landell de Moura, na cidade de Bento Gonçalves- RS. A turma em questão é composta por 20 alunos, dos quais 11 estavam presentes (8 meninas e 3 meninos), o restante participava de atividades esportivas do JERGS (Jogos Estudantis do Rio Grande do Sul).

O plano de ensino que será descrito a seguir foi pensado de forma que os alunos construam conhecimento através dos três níveis de Tall. Para isto, eles analisaram e construíram gráficos de uma função afim; identificaram funções crescentes, decrescentes e constantes; trabalharam com intervalos numéricos e com os conceitos de lei de uma função afim através de imagens e o software GrafEq.

A sequência didática foi dividida em 2 momentos, cada um com duração de 2 (duas) horas-aula, aproximadamente, e em ambos os momentos os alunos trabalharam em duplas.

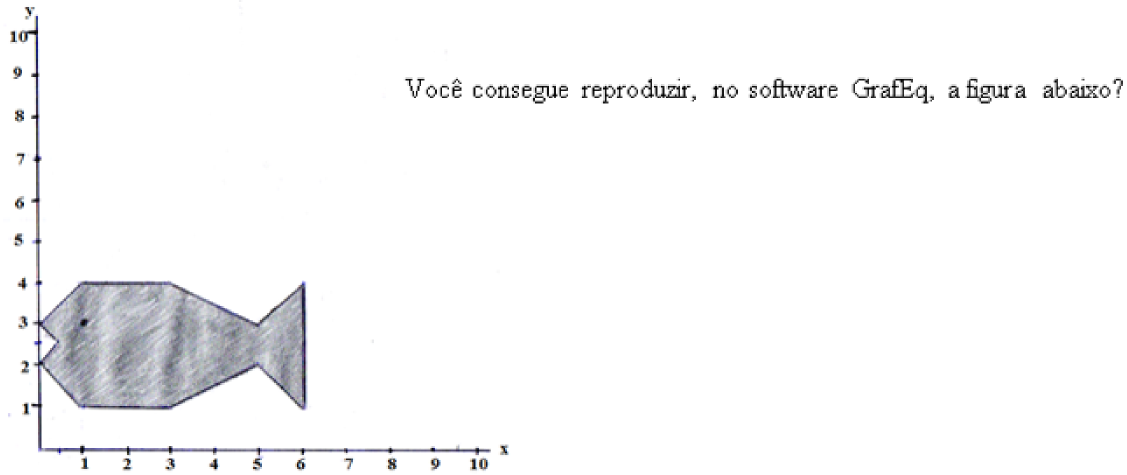
O primeiro momento foi dividido em duas partes: na primeira parte foi entregue aos alunos a imagem contendo o desenho do peixinho sobre o plano cartesiano (imagem 3) com o questionamento se eles eram capazes de reproduzir, no software GrafEq, a mesma imagem.

A maioria deles disse não acreditar que conseguiria realizar a tarefa, pois, certamente, ela necessita de muitos cálculos. Então, na condição de professora que coordenou a execução do experimento, expliquei que o desenho utiliza retas paralelas, retas perpendiculares e retas inclinadas, a maior parte determinada por funções afins. Relacionando com os níveis de Tall esta seria a primeira etapa, ou seja, o *procedimento*.

A intenção desta atividade foi a de que os alunos percebessem que precisariam saber mais sobre os movimentos dos gráficos para realizarem imagens deste formato.

Para finalizar esta primeira parte (do procedimento) entreguei a eles as leis das funções que formavam o desenho do peixinho e eles reproduziram no software, demonstrando grande satisfação na realização desta tarefa e permitindo que explorassem a interface e as ferramentas do software, mas não favorecendo a análise do comportamento gráfico das funções.

Imagem 3: Imagem entregue para os alunos



Fonte: elaborado pela autora (2015)

A segunda parte contém cinco atividades, com os quais foi trabalhada a construção de gráficos com a utilização do software GrafEq, visando a compreensão, por parte dos discentes, do comportamento gráfico de funções afins variadas, além de fazê-los constatar o que ocorre quando alteramos os coeficientes angular e linear destas funções. Baseada na Teoria de Tall, esta parte da sequência didática foi elaborada com a intenção de que partindo de um *procedimento* (construção do peixe no GrafEq) para depois chegar ao *processo,* que possibilite que o discente consiga associar a lei algébrica das funções afins a um comportamento gráfico e que relacione a este, o papel dos coeficientes, conseguindo desta forma transitar entre os dois primeiros níveis de sofisticação (procedimentos e processos).

No primeiro e no segundo exercício, os alunos tinham que construir o gráfico das funções afins, todas sobre um mesmo plano cartesiano, e anotar o que ocorria em relação ao eixo das ordenadas. Ao fazerem isto, questionei: O que aconteceu com o gráfico das funções em relação ao eixo do Y? Porque isso aconteceu?

A grande maioria respondeu que o eixo do y era cortado pela reta no valor que era representado pelo b da função (coeficiente linear) e conforme haviam modificado este valor a reta havia se deslocado para cima ou para baixo. Perceberam que no primeiro exercício o deslocamento correspondia a uma unidade e no segundo a duas unidades.

O terceiro exercício tinha como objetivo fazer com que os alunos percebessem que as funções que apresentam os coeficientes angulares positivos são crescentes e as que apresentam os coeficientes angulares negativos são decrescentes. Além disso, tinham que informar em que pontos a reta cortaria os eixos Ox e Oy.

Foi possível perceber que para a classificação das funções a grande maioria nem precisou fazer os gráficos, assim como também não precisaram para determinar o ponto em que a reta interceptava o eixo Oy.

A dificuldade que apresentaram foi para descobrir em que valor a reta interceptaria o eixo Ox e a grande maioria afirmou, inicialmente, que seria aquele representado pelo coeficiente angular. Então, para que relembrassem da definição de zero da função, foi solicitado que construíssem o gráfico da função $y = x + 5$ e que dissessem em que valor a reta interceptou o eixo do x. Isso fez com eles percebessem que era no valor -5 e não no valor 1 (o valor do coeficiente angular), segundo o que haviam afirmado anteriormente. Foi aí que um aluno lembrou que no ponto onde a reta intercepta o eixo Ox o valor de y precisa ser zero. Depois disso, conseguiram terminar de resolver o exercício.

O quarto exercício tinha por objetivo que os alunos percebessem que ao modificarmos o coeficiente angular de uma função afim, mudamos a inclinação de sua reta. Para isto, dividimos funções em duas colunas: na coluna A as retas são crescentes e conforme o coeficiente angular aproxima-se de zero a reta aproxima-se do eixo Ox pelo lado positivo. Na coluna B as retas são decrescentes e conforme o coeficiente angular aproxima-se de zero a reta aproxima-se do eixo Ox pelo lado negativo. Esta constatação foi feita pelos alunos com facilidade e não foram necessárias muitas intervenções. Isto pode ser verificado, abaixo, através da resposta de uma das duplas:

Imagem 4: Resposta, de uma das duplas, para a questão 4

4) Teste as funções abaixo, primeiro as da coluna A e depois as funções da Coluna B, no GrafEq, e escreva suas conclusões com relação **a declividade da reta**, analisando o coeficiente angular:

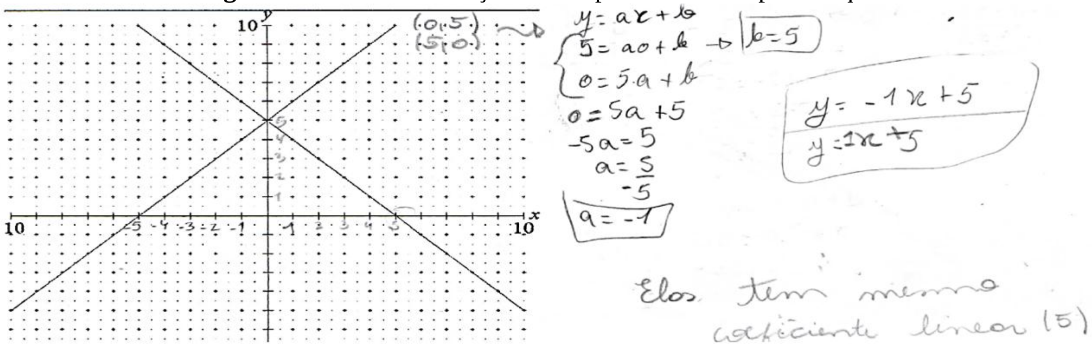
Coluna A	**Coluna B**
y = 4x y = 3x y = x y = 0,8x	y = - 4x y = - 3x y = - x y = - 0,8x

Mudando o coeficiente angular muda a inclinação da reta. Na coluna A quanto mais próximo ao zero o valor do coeficiente angular, mais a reta se aproxima do eixo x pelo lado dos positivos.
B= idem ao anterior só que para o lado do eixo negativo

Fonte: elaborada pela autora (2015)

O quinto e último exercício tinha por objetivo que os alunos descobrissem as leis das funções afins que determinavam as retas representadas no plano cartesiano. Também deveriam perceber que as funções tinham o mesmo coeficiente linear, mas coeficientes angulares opostos. Para determinar as leis algébricas das funções afins foi necessária minha intervenção para que relembrassem como isso deveria ser feito, mas no geral a maioria percebeu que ao determinarem a função de uma delas bastava mudar o sinal do coeficiente angular da outra sem necessidade de novos cálculos. Abaixo podemos ver as anotações de uma das duplas (imagem 5):

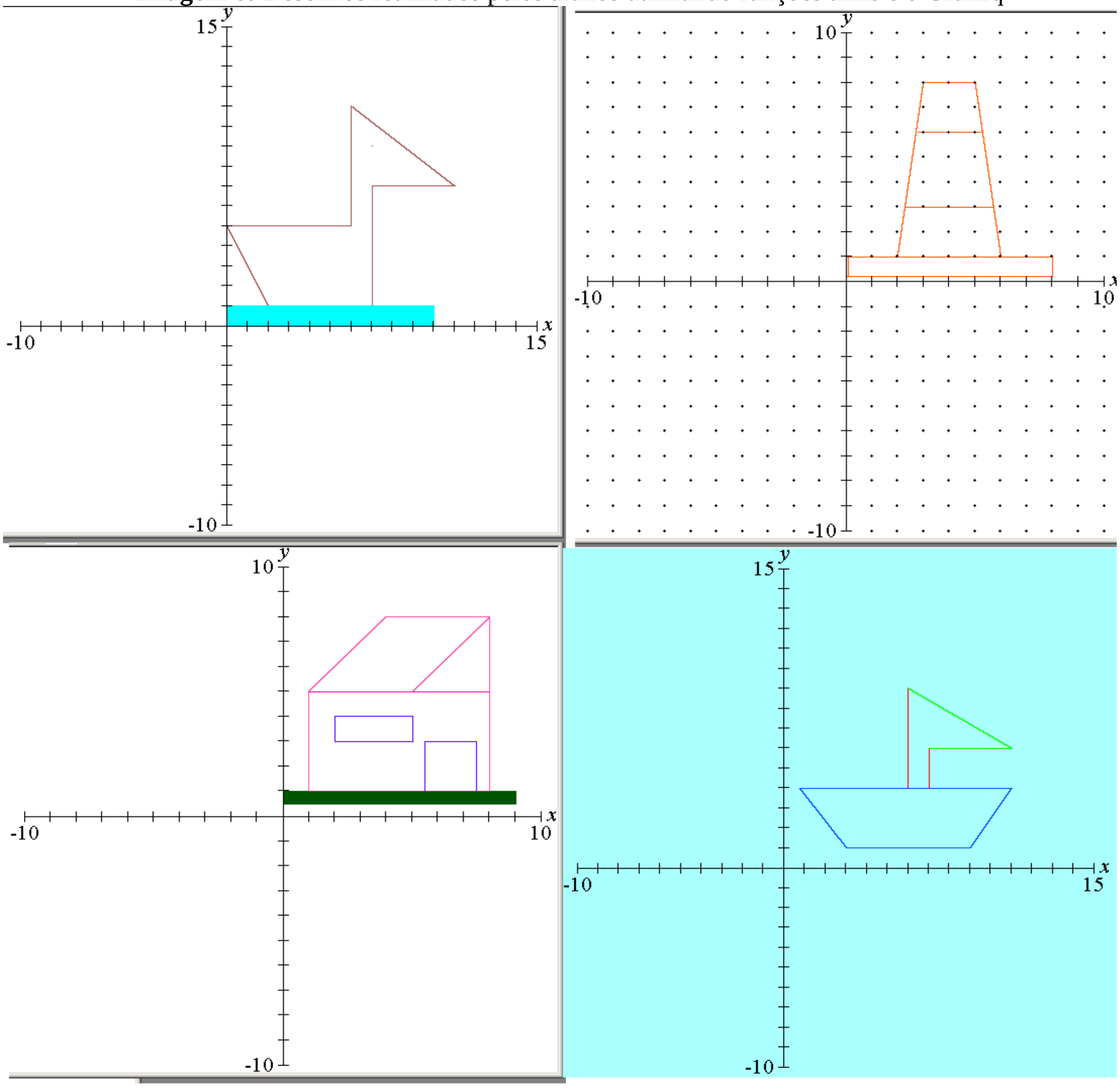
Imagem 5: cálculos e anotações feitas por uma das duplas na questão 5



Fonte: elaborada pela autora (2015)

Finalizada a sequência didática, iniciou-se o segundo momento, no qual foi solicitado que os alunos criassem uma imagem, utilizando os conhecimentos, trabalhados até o momento, sobre funções afins e o software GrafEq. Nesta parte, como os conceitos já estavam internalizados, os alunos realizaram as atividades de forma sistemática e sem tantos testes, chegamos desta forma no último nível do crescimento cognitivo de Tall, ou seja, o *proceito.* O que chamou a atenção nesta etapa, além da animação durante a realização, foi que a maioria não se deteve ao papel para criar as imagens, já que realizaram as construções, diretamente, no GrafEq. Apenas os cálculos de algumas das leis das funções afins foram realizados à mão. Dentre as imagens que foram elaboradas pelos alunos, podemos ver a seguir (imagem 6), um pato, um cone, uma casa e um barco.

Imagem 6: Desenhos realizados pelos alunos utilizando funções afins e o GrafEq



Fonte: capturada pela autora (2015)

5 ANÁLISE A *POSTERIORI*

Nesta etapa da Engenharia Didática, é feita uma análise avaliativa de como ocorreu a experimentação, para, posteriormente, durante a validação da Engenharia, verificarmos o que deu certo durante a aplicação das atividades e o que poderia ser modificado. Será apresentada uma análise de todo material coletado durante a experimentação, para sabermos se nossas hipóteses foram válidas.

Na primeira atividade, a da construção do peixe, esperávamos que os alunos conseguissem se familiarizar com o software GrafEq e seus recursos e que percebessem que com diferentes funções afins poderíamos construir imagens, o que acabou ocorrendo realmente.

Nesta etapa efetuaram os *procedimentos*, ou seja, os alunos utilizaram o software como ferramenta para chegar a um resultado (a construção de gráficos), observou-se que eles digitavam as funções, percebiam que tinham comportamentos gráficos diferentes, mas ainda não conseguiam compreender o porquê aquilo ocorria.

Além disso, as restrições dadas a cada uma das funções, também, ainda não eram bem compreendidas, já que alguns alunos questionavam porque às vezes elas eram dadas em relação ao eixo x e em outras em relação ao eixo y.

O software GrafEq e o direcionamento das atividades que elaboramos para o final da primeira etapa permitiram que eles fizessem alguns testes e que visualizassem conceitos que, anteriormente, não haviam sido capazes. Por exemplo, a construção de diversas funções sobre um mesmo plano cartesiano facilitou o entendimento e a visualização gráfica do comportamento dos coeficientes, tanto angular quanto linear, das funções afins. Isto pode ser constatado com base nas respostas e anotações que as duplas fizeram no material. A definição de zero da função, também foi melhor compreendida, pois através da construção e visualização dos gráficos no GrafEq eles puderam perceber que o valor em que o eixo Ox é interceptado pela reta não é o mesmo valor do coeficiente angular da função, como pensavam inicialmente.

Em relação à dificuldade em realizar a transformação gráfica de uma função afim para a algébrica, apresentadas na última questão da primeira etapa, apesar de algumas dificuldades e da necessidade de interferências durante a realização da tarefa, a maior parte das duplas conseguiu responder corretamente o que era solicitado. Podemos perceber que estes conceitos, realmente, foram compreendidos, porque na atividade em que precisavam deles para a elaboração das imagens, todos conseguiram aplicá-los e sem novas interferências.

Observamos, por meio dos materiais recolhidos e anotações feitas, que ao final da primeira etapa, o procedimento foi bem compreendido, já que os alunos alcançavam os resultados, e que ao recorrem aos conceitos matemáticos envolvidos nas questões, formularam teorias e opiniões quanto ao comportamento gráfico das diferentes funções afins e ao trocarem ideias e conhecimentos com os colegas, eles entraram na etapa de processo, ou seja, construíram suas próprias relações, desenvolveram seu próprio raciocínio.

Na última etapa da sequência, a criação de imagens não só permitiu que os alunos desenvolvessem a criatividade na elaboração destas, como também que eles aplicassem todos os conhecimentos adquiridos e trabalhados sobre função afim até aquele momento. Esta parte, em que deveriam relacionar os símbolos com os conceitos matemáticos, presentes na construção dos gráficos, equivale a última etapa da Teoria do Desenvolvimento Cognitivo de Tall, ou seja, a etapa de *proceito.*

Os resultados obtidos em todo o decorrer da sequência foram bastante satisfatórios, principalmente nesta última atividade, na qual os alunos demonstraram bastante disposição na realização e que haviam de fato compreendido os conceitos de função afim. Alguns alunos colocaram na entrevista final da aplicação da sequência que a acharam válida não só por compreenderam melhor o conteúdo, mas por terem conseguido aplicá-lo para elaborar imagens. Alguns relatos podem ser lidos abaixo nas imagens 7, 8 e 9:

Imagem 7: Respostas de um aluno na entrevista em formato de questionário

Na sua opinião, trabalhar o conteúdo de função afim utilizando o software GrafEq facilitou a compreensão dos conceitos?

(X) Sim ( ) Não. Justifique.

Pois, você aprende na prática

Dentre as atividades desenvolvidas, alguma te interessou mais?

(X) Sim. Qual? fazer a casa **( ) Não.**
Justifique: Porque eu pude desenhar com matemática

Fonte: elaborada pela autora (2015)

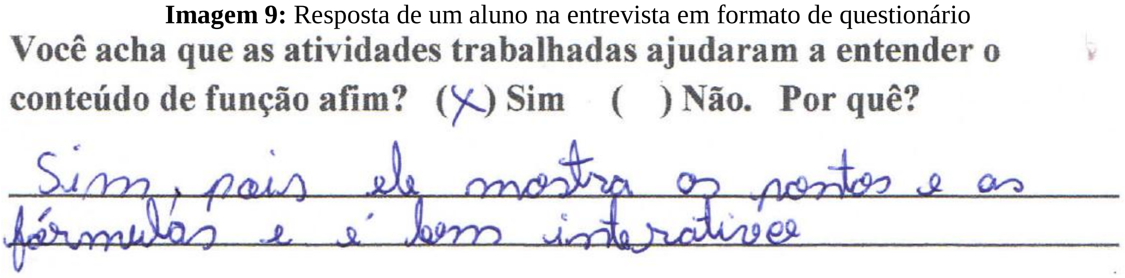
Imagem 8: Resposta de uma aluna na entrevista em formato de questionário

Você gostou de participar das atividades? (X) Sim ( ) Não. Por quê?

Porque faz desenvolver a capacidade de raciocínio.

Fonte: elaborada pela autora (2015)

Imagem 9: Resposta de um aluno na entrevista em formato de questionário



Você acha que as atividades trabalhadas ajudaram a entender o conteúdo de função afim? (X) Sim ( ) Não. Por quê?

Sim, pois ele mostra os pontos e as fórmulas e é bem interativo

Fonte: elaborada pela autora (2015)

6 VALIDAÇÃO DA ENGENHARIA

Nesta última parte da engenharia, serão analisadas as hipóteses levantadas para verificar se a Engenharia Didática proposta foi válida ou não, além de destacarmos o que deu certo e o que poderia ser melhorado em uma próxima aplicação.

Com vista nisso, consideramos a primeira hipótese, que fala sobre o desempenho cognitivo dos alunos, como sendo válida. Eles adquiriram conhecimentos sobre função afim, conseguiram compreender a passagem algébrica desta função para a gráfica (e vice-versa) e aplicaram estes conhecimentos na elaboração de imagens.

Em relação ao uso do software GrafEq, podemos destacar que obtivemos sucesso. Os alunos não só compreenderam rapidamente seu funcionamento como se sentiram motivados a realizar as tarefas. Logo na primeira atividade, sem nenhuma instrução, observou-se que eles conseguiam modificar a cor do fundo da janela gráfica e de seus eixos, além de utilizarem as marcas pré-configuradas para o plano cartesiano. O GrafEq, em conjunto com as atividades que elaboramos, foi um facilitador na construção dos conceitos matemáticos que envolvem o conteúdo de função afim, sendo que os próprios alunos reconheceram que ele ajudou a compreender melhor este conteúdo. Além disso, atribuímos a facilidade que eles tiveram com o software a familiaridade que eles têm com o computador e ao ambiente diferente da aula tradicional a qual estão acostumados.

Notamos, no início da aplicação da sequência, que como as atividades eram diferentes daquelas com que eles estavam habituados, eles se sentiam inseguros quanto ao que deveriam responder e anotar, mas isto foi melhorando no decorrer das atividades. Porém muita coisa que eles expressavam verbalmente ou discutiam com os colegas não anotaram, porque achavam que não era importante e por acreditarmos que a escrita não seja uma prática comum na resolução de exercícios em matemática. Na elaboração das imagens, da última etapa, não foi solicitado que descrevessem como foi feita a elaboração, nem que explicassem a escolha, acreditamos que isto poderia ser feito em uma nova aplicação, já que facilitaria a análise e enriqueceria os registros.

Baseando-nos nas etapas da Teoria do Desenvolvimento Cognitivo de Tall na elaboração das atividades obtivemos bons resultados. Percebemos que a sequência elaborada seguindo os três níveis de sofisticação – procedimento, processo e *proceito* – permitiu que os alunos fossem construindo gradativamente os conceitos que desejávamos. O objetivo principal da sequência, de fazer com que os alunos compreendessem a relação entre os símbolos matemáticos e os conceitos envolvidos, foi atingido. Estas conclusões foram obtidas através dos questionários, das anotações dos alunos, das observações no decorrer da aplicação e dos trabalhos obtidos no final da sequência.

Por meio destas análises, podemos validar a Engenharia Didática proposta, sendo que ela contribuiu com o ensino de função afim e conseguiu reduzir, como podemos perceber na análise a *posteriori*, as dificuldades que os alunos apresentavam inicialmente em conceitos que envolviam este conteúdo.

Além disso, as hipóteses iniciais foram confirmadas. Notamos que a utilização de um ambiente informatizado, o uso do software GrafEq e as atividades que foram elaboradas contribuíram para motivar os alunos durante a aplicação e na construção da aprendizagem.

Por fim, podemos afirmar que a proposta de ensino de função afim com a utilização do software GrafEq é válida, já que melhora de forma satisfatória a aprendizagem dos alunos quanto a representação geométrica e gráfica destas funções.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve por objetivo propor uma abordagem diferente no ensino usual de função afim, utilizando um software matemático como uma importante ferramenta para esta mudança. A ideia era mostrar que com esta abordagem a aprendizagem acontece de forma mais significativa.

O plano de ensino teve o propósito de criar oportunidades aos alunos de revisarem, (re)construírem e aprofundarem os conceitos de função afim, além de permitir que utilizassem um software educacional para isto.

A elaboração das atividades seguiram os moldes da Engenharia Didática, que colaborou na reflexão quanto à forma de elaboração de uma sequência didática com a finalidade de reduzir as dificuldades, frequentemente, apresentadas pelos alunos diante do conteúdo de função afim.

A escolha pela Teoria de Sofisticação dos Níveis de Desenvolvimento Cognitivo de Tall permitiu que direcionássemos as atividades de forma a fazer com que os alunos construíssem de forma gradativa seu conhecimento, ou seja, permitiu que os alunos passassem de um pensamento mais técnico, para um pensar mais formal e que desta forma auxiliassem na compreensãodos conceitos como um todo.

Esta atividade permitiu uma reflexão acerca de alguns modelos de ensino e nos mostrou que a utilização de tecnologias é um caminho interessante a ser seguido e que podem trazer resultados muito bons, assim como os descritos anteriormente. A análise das atividades e das hipóteses serviu, também, para esta reflexão e para ressaltar a importância de repensar sobre a prática docente, além de divulgar e analisar a validade do que é produzido em sala de aula.

A descrição simples e com diversas restrições (principalmente de tempo de aplicação e volume de conteúdo) desta experiência é apenas uma das tantas possibilidades de práticas de ação investigativa referenciadas pela Engenharia Didática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALLEVATTO, Norma Suely Gomes. **As concepções dos alunos sobre resolução de problemas ao utilizarem o computador no estudo de funções.**UNESP: Rio Claro, São Paulo, vol. 28, n.1, p. 131-156, jun. 2007. Disponível em: <http://www.scielo.org.ve/scielo.php?pid=S1011-22512007000100007&script=sci_ arttext>. Acesso em 11 maio 2015.

BORBA, Marcelo de Carvalho. PENTEADO, Mirian Godoy. **Informática e Educação Matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

BOTELHO, Leila. **Um breve histórico do conceito de função.** Niterói: Instituto de Matemática – Universidade Federal Fluminense, 2007, p. 64-75.

BRASIL. Ministério da Educação. **Guia de livros didáticos:** PNDL (2015) – Matemática, Brasília: Ministério da Educação, 2015.

______. Secretaria Nacional de Juventude. **Estação juventude:** conceitos fundamentais – ponto de partida para uma reflexão sobre políticas públicas de juventude. Brasília: Secretaria Nacional de Juventude, 2014. Disponível em <http://www.ipea. gov.br/ participacao/images/pdfs/participacao/politicas%20de%20juventude1.pdf > Acesso em: 11 maio 2015.

______. Secretaria de Educação Básica. **Formação de professores do ensino médio, Etapa II - Caderno V:** Matemática. Curitiba: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2014. 49p. Disponível em <http://observatoriodajuventude.ufmg.br /pactomg/images /Cadernos_2_Etapa/Caderno-5-E2-FINAL.pdf.> Acesso em: 5 jun. 2015.

CARNEIRO, Vera Clotilde. **Engenharia didática:** um referencial para ação investigativa e para formação de professores de Matemática. Zetetike,Campinas: UNICAMP, v. 13, n. 23, 2005, p. 85-118. Disponível em: <http://www.mat.ufrgs.br/~ vclotilde /publicações /ENGENHARIA%20ZETEIKE2005.pdf>. Acesso em 11 maio 2015.

CORRÊA, Bruno Silva. **Contribuições no software winplot nos processos de ensino e de aprendizagem utilizando funções afins e quadráticas utilizando superfícies de revolução**. 2014. Trabalho de Conclusão (Licenciatura em Matemática). Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2014.

CÓSER, Marcelo Salvador Filho. **Aprendizagem de Matemática Financeira no Ensino Médio**: uma proposta de trabalho a partir de planilhas eletrônicas. 2008. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008.

MEIER, Melissa. **Modelagem Geométrica e o desenvolvimento do pensamento Matemático no Ensino Fundamental**. 2012. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

NOTARE, Márcia Rodrigues; GRAVINA, Maria Alice. **A formação continuada de professores de Matemática e a inserção de mídias digitais na escola.** In: COLÓQUIO DE HISTÓRIA E TECNOLOGIA NO ENSINO DE MATEMÁTICA (VI HTEM), 2013, São Carlos, SP. Anais do VI HTEM. São Carlos: UFSCar, 2013.

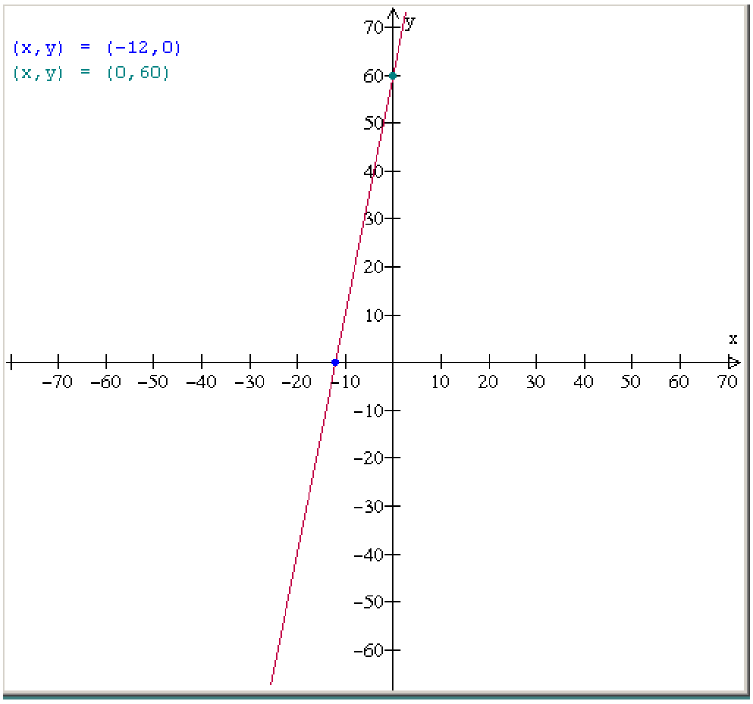
TALL, David. **Information Technology and Mathematics Education:** Enthusiasms, Possibilities and Realities. Disponível em: < http://www.pucrs.br/famat/viali/tic_ literatura /artigos/tics/232-652-1-PB.pdf > Acesso em: 18 maio 2015.

______. **Technology and Cognitive Growth in Mathematics.** In: CONFERENCE ON MATHEMATICS AND NEW TECHNOLOGIES, 1999, Thessaloniki, Greece. A discussion paper. Thessaloniki, Greece: University of Warwick, 1999. Disponível em: <http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/downloads.html> Acesso em: 18 maio 2015

ANEXO 1 (questionário inicial aplicado com os alunos)

Questão 1) Construa o gráfico da função $f(x) = 2x + 1$

Questão 2) Você consegue identificar qual a lei da função representada no gráfico abaixo?



Questão 3) Dada a função $y = -x + 1$ você consegue identificar em que valor a reta intercepta o eixo x? Caso contrário, faça sua construção.

Questão 4) a) O que acontece com o gráfico da função $y = -x + 1$ quando alterarmos o valor do coeficiente angular, como por exemplo, para $y = -3x + 1$?

b) E o que acontece com o gráfico da função y$= -x + 1$, quando alteramos o coeficiente linear, como em $y = -x + 5$?

c) Porque estas mudanças acontecem?

ANEXO 2 (atividades da primeira parte da sequência)

FUNÇÕES de 1º GRAU f(x) = ax + b

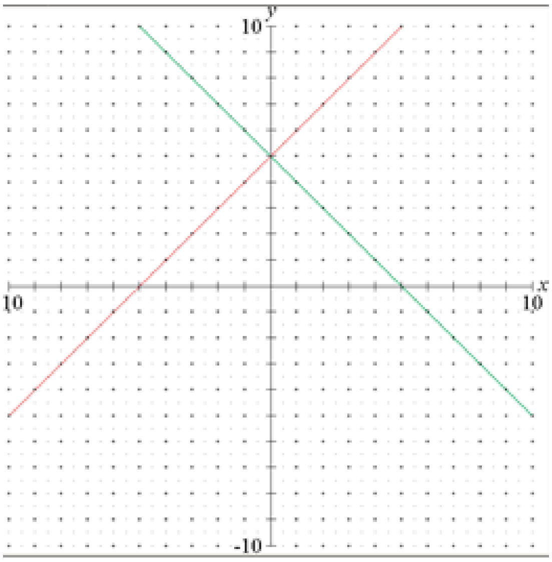
1) Visualize as funções abaixo, todas em um mesmo gráfico, no GrafEq, e anote suas conclusões em relação ao deslocamento no eixo das ordenadas:
y = x
y = x + 1
y = x + 2
y= x – 1
y = x - 2
2) Faça o mesmo agora com as funções abaixo:
y = 2x
y = 2x - 2
y = 2x - 4
y = 2x +2
y = 2x + 4
3) Das funções abaixo, quais são crescentes e quais são decrescentes? Em que ponto cada reta intercepta (corta) os eixos (das ordenadas e das abcissas)? Explique como chegou a estas conclusões.

a. y = 2x – 4 ___________Ponto: (___,____)
b. y = 3x + 1 ___________Ponto: (___,____)
c. y = - 2x – 3 _________Ponto: (___,____)
d. y = 4x – 2 ___________Ponto: (___,____)
e. y = - 3x -2 ___________Ponto: (___,____)
f. y = 2x + 3 ___________Ponto: (___,____)

4) Teste as funções abaixo, primeiro as da coluna A e depois as funções da Coluna B, no GrafEq, e escreva suas conclusões com relação **a declividade da reta**, analisando **o coeficiente angular**:

Coluna A	**Coluna B**
y = 4x y = 3x y = x y = 0,8x	y = - 4x y = - 3x y = - x y = - 0,8x

5) Você consegue identificar quais as duas funções que determinam cada um dos gráficos abaixo? O que elas têm em comum? Como você chegou a estas conclusões?



ANEXO 3 (Entrevista em formato de questionário)

QUESTIONÁRIO (para ser aplicado no final da sequência didática)

Nome:____

Idade: ________________

Já reprovou? ( ) Sim, por notas ( ) Sim, por faltas ( ) Não

Você gostou de participar das atividades? ( ) Sim ( ) Não. Por quê?

____

____

____

Você acha que as atividades trabalhadas ajudaram a entender o conteúdo de função afim? ( ) Sim ( ) Não. Por quê?

____

____

Já tinha utilizado algum software matemático?

( ) Sim. Onde? ________________________________ ( ) Não

Na sua opinião, trabalhar o conteúdo de função afim utilizando o software GrafEq facilitou a compreensão dos conceitos?

( ) Sim ( ) Não. Justifique.

____

____

Dentre as atividades desenvolvidas, alguma te interessou mais?

( ) Sim. Qual? ____

( ) Não. Justifique:____

Descreva no verso da folha como foi participar desta experiência.

ANEXO 4 (Modelo do Termo de Consentimento livre e esclarecido entregue aos alunos)

Curso de Especialização em
MATEMÁTICA, MÍDIAS DIGITAIS E DIDÁTICA
PARA EDUCAÇÃO BÁSICA
Instituto de Matemática

TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu, ____, R.G. _______________, responsável pelo(a) aluno(a) ____________________________________, da turma __________, declaro, por meio deste termo, que concordei em que o(a) aluno(a) participe da pesquisa intitulada *Contribuições do software GrafEq no proceso de ensino e (...) desenvolvida pelo(a) pesquisador(a) Marina Rampon ____________________. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é parte das atividades exigidas pelo Trabalho de Conclusão de Curso, do Curso de Especialização em Matemática – Mídias Digitais – Didática: Tripé para Formação do professor de Matemática, coordenado por Márcia Rodrigues Notare Meneghetti, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, através e-mail ____

Tenho ciência de que a participação do(a) aluno(a) não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, consistem da concepção, implementação e análise de uma experiência de ensino que: trate de conteúdo de matemática bem específico e utilize recursos digitais.

Fui também esclarecido(a) de que os usos das informações oferecidas pelo(a) aluno(a) será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas pela inicial de seu nome e pela idade.

A colaboração do(a) aluno(a) se fará por meio da participação em aula, em que ele(ela) será observado(a) e sua produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. No caso de fotos, obtidas durante a participação do(a) aluno(a), autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários etc, sem identificação. A colaboração do(a) aluno(a) se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar o(a) pesquisador(a) responsável no endereço _____________________________/telefone__________/e-mail____________________

Fui ainda informado(a) de que o(a) aluno(a) pode se retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Porto Alegre, 10 de junho de 2015.

Assinatura do Responsável:

Assinatura do(a) pesquisador(a): Marina Rampon

Assinatura do Orientador da pesquisa: Márcia R. Notare

* Contribuições do software GrafEq nos processos de ensino e aprendizagem do conteúdo de função afim

ANEXO 5 (Fotos da aplicação da sequência didática)