UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

AS CONCEPÇÕES DE CÁLCULO NA TRANSIÇÃO DO ENSINO MÉDIO PARA O ENSINO SUPERIOR: UMA VISÃO DA TEORIA APOS

Vanessa de Azeredo Abreu

PORTO ALEGRE

2015/2

AS CONCEPÇÕES DE CÁLCULO NA TRANSIÇÃO DO ENSINO MÉDIO PARA O ENSINO SUPERIOR: UMA VISÃO DA TEORIA APOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado junto ao Curso de Matemática da UFRGS como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Luisa Rodriguez Doering

Vanessa de Azeredo Abreu

PORTO ALEGRE

2015/2

AS CONCEPÇÕES DE CÁLCULO NA TRANSIÇÃO DO ENSINO MÉDIO PARA O ENSINO SUPERIOR: UMA VISÃO DA TEORIA APOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado junto ao Curso de Matemática da UFRGS como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Luisa Rodriguez Doering

Comissão examinadora:

____

Profa. Dra. Elisabete Zardo Búrigo

INSTITUTO DE MATEMÁTICA – UFRGS

____

Profa. Dra. Débora da Silva Soares

INSTITUTO DE MATEMÁTICA – UFRGS

Porto Alegre, 27 de novembro de 2015

AGRADECIMENTOS

À Profa. Dra. Luisa Rodriguez Doering pela orientação, não somente neste trabalho, mas ao longo de cinco semestres de faculdade.

À Profa. Dra. Elisabete Zardo Búrigo e à Profa. Dra. Débora da Silva Soares, por aceitarem o convite para compor a banca examinadora deste trabalho.

Aos alunos participantes do projeto Processos de Aprendizagem em Cálculo: acompanhamento de alunos não aprovados, por contribuírem com o presente trabalho.

À Universidade Federal do Rio Grande do Sul, em especial aos professores do Instituto de Matemática e da Faculdade de Educação, pelo ensino de qualidade.

À minha família, especialmente meus pais e meus irmãos, pelo incentivo e apoio.

Resumo:

Este trabalho apresenta um estudo do processo de transição do Ensino Médio para o Ensino Superior na área da Matemática, com foco na disciplina de Cálculo e Geometria Analítica I – A, bem como suas implicações nas concepções de Cálculo de estudantes, segundo uma visão da Teoria APOS. Para realizar esse estudo, mostramos a análise do material produzido por quatro alunos que foram acompanhados durante o segundo semestre letivo de 2013 quando cursavam, pela segunda vez, a disciplina Cálculo e Geometria Analítica I – A. Utilizamos os conceitos da Teoria APOS para auxiliar na interpretação desse material, de modo a interpretar as estratégias de resolução adotadas pelos alunos, bem como suas dificuldades. Observamos que os estudantes analisados nesse trabalho apresentaram posturas diferentes frente à disciplina de Cálculo I.

Palavras-chave: Ensino Médio; Ensino de Cálculo; Teoria APOS.

Abstract:

In this paper we present a study of the transition process from high school to higher education in Mathematics, focusing on a first year Calculus course, as well as on its consequences on the student's conceptions of Calculus, according to an APOS Theory vision. To perform this study, we present an analysis of the material produced by four students who were assisted during the second academic semester of 2013, when they attended this course for the second time. In order to understand the resolution strategies of these students, as well as their difficulties, we use the APOS Theory concepts. We observed that these students presented different behaviors regarding this Calculus discipline.

Keywords: high school; Calculus' teaching; APOS Theory.

Lista de Figuras

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho tem por objetivo estudar o processo de transição do Ensino Médio para o Ensino Superior na área da Matemática, com foco na disciplina de Cálculo e Geometria Analítica I – A, bem como suas implicações nas concepções [1] de Cálculo apresentadas pelos alunos, segundo uma visão da Teoria APOS. Para atingir esse objetivo, buscaremos responder à seguinte pergunta: qual a relação entre as experiências prévias de escolarização e as concepções de Cálculo de estudantes?

A motivação para este trabalho teve início no período em que fui bolsista de iniciação científica do projeto Processos de Aprendizagem em Cálculo: acompanhamento de alunos não aprovados. Esse projeto foi destinado a um grupo de estudantes da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) que não obteve aprovação na disciplina Cálculo e Geometria Analítica I – A[2] em 2013/1 e que a cursaria novamente no semestre seguinte. O projeto teve como objetivos centrais acompanhar o processo de conscientização e superação dos erros por parte dos alunos, e o desenvolvimento de sua autonomia na identificação de suas dificuldades e necessidades de estudo.

Para atender aos objetivos do projeto, adotou-se, como dinâmica, encontros semanais individuais com cada um dos participantes do projeto. Os alunos eram convidados a realizar testes e provas do semestre anterior, exercícios do livro ou de aula, e em seguida, a explicar o raciocínio desenvolvido. Os alunos eram convidados ainda, a comparar a resolução apresentada ali no momento, com o que haviam feito da outra vez em que cursaram a disciplina. Tivemos acesso às provas dos alunos, o que permitiu que realizássemos uma análise anteriormente aos encontros. Ao longo do projeto foram coletados registros da fala e da escrita de todos os envolvidos, por meio de gravações, anotações, e do recolhimento de todo o material por eles produzido.

Ao participar deste projeto, tive a oportunidade de acompanhar um grupo de alunos ao longo da segunda vez em que cursaram a disciplina de Cálculo I. O que permitiu observar os avanços, logrados pelos estudantes, na precisão da linguagem e na verificação de condições para o uso de determinadas técnicas ou procedimentos, mas também a persistência de erros provenientes do Ensino Médio. Além disso, pude caracterizar as estratégias de estudo desses alunos, e os diferentes estilos de aprendizagem matemática evidenciados. O atendimento

[1] O modo como são concebidos, por estudantes, os conceitos trabalhados na disciplina de Cálculo, usando como base as concepções de *ação*, *processo*, *objeto* e *esquema*, referenciadas na Teoria APOS.
[2] Disciplina de primeiro semestre, obrigatória em vários cursos de graduação da UFRGS.

realizado junto aos estudantes no segundo semestre letivo de 2013, os resultados encontrados com base na análise dos dados obtidos, as leituras realizadas, e o interesse na área, motivou-me a discutir, no presente trabalho, as concepções de Cálculo, na transição do Ensino Médio para o Ensino Superior, de estudantes.

A primeira parte desse trabalho apresenta algumas considerações teóricas sobre aspectos diretamente ligados ao tema em estudo. Inicialmente, apresentamos uma análise do trabalho realizado por Baraldo (2009) sobre a necessidade e viabilidade de um ensino dinâmico de funções. Em seguida, analisamos algumas ideias de Tall (1992) em relação a transição para o pensar matemático avançado, e o trabalho desenvolvido por Búrigo e Doering (2006), o qual aponta, por exemplo, que a forma como conceitos considerados anteriores e essenciais para o avanço na disciplina de Cálculo são concebidos no Ensino Médio pode interferir no desempenho dos alunos na disciplina. Encerramos as considerações teóricas abordando os conceitos de *concepção ação*, *concepção processo*, *concepção objeto* e *concepção esquema*, que compõem a chamada Teoria APOS.

Na sequência analisamos alguns dados coletados durante a realização do projeto. Para realizar essa análise utilizamos, principalmente, os conceitos de *concepção ação* e *concepção processo*, referenciados na Teoria APOS. Essa teoria nos permite caracterizar as concepções que os alunos têm sobre funções e diversos outros conceitos matemáticos avançados e auxilia, neste caso, na identificação de como as experiências prévias de escolarização afetam ou condicionam as concepções de Cálculo de estudantes.

Finalizamos o trabalho apresentando uma visão geral do conjunto de análises realizadas, indicando os resultados obtidos e nossas futuras investigações envolvendo o estudo de estratégias e estilos de aprendizagem matemática destes e de outros alunos participantes do projeto.

2 CONSIDERAÇÕES TEÓRICAS

2.1 Trabalhos Correlatos

A compreensão do conceito de função tem sido reconhecida como central na aprendizagem de noções e técnicas abordadas nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral. Sendo assim, começo apresentando uma análise do trabalho desenvolvido por Baraldo (2009), no qual aborda a necessidade e a viabilidade de um ensino dinâmico de funções.

O referido trabalho teve por objetivo abordar alguns aspectos do ensino de funções reais de uma variável real no Ensino Médio, apontando acerca da necessidade e viabilidade de um ensino de funções que desenvolva o chamado Pensamento Variacional do aluno.

Para tal o autor utilizou como instrumento de pesquisa a análise de algumas produções escritas e orais de alunos das Turmas Especiais de Cálculo da (UFRGS), projeto de extensão do qual foi bolsista, e de um questionário referente ao tema funções aplicado aos alunos da disciplina de Fundamentos de Matemática Elementar II, no período em que atuou como monitor da disciplina.

As chamadas Turmas Especiais de Cálculo I – A, eram destinadas a estudantes que já haviam sido reprovados duas ou mais vezes na disciplina Cálculo e Geometria Analítica I – A. Essas turmas possuíam uma dinâmica de sala de aula diferente das demais, e seu objetivo era contribuir para a superação das dificuldades daqueles alunos. As principais diferenças entre essas turmas e as turmas regulares consistiam em: aulas expositivas em menor duração; mais tempo destinado à resolução de exercícios em sala de aula; e presença constante de monitor em sala de aula.

Para auxiliar na identificação das dificuldades dos alunos, a interpretação das produções apresentadas foi realizada com base nas concepções da Teoria APOS. A Teoria APOS, segundo Dubinsky e McDonald (apud BARALDO, 2009, p. 32) baseia-se no pressuposto de que o conhecimento matemático é construído pelo sujeito como um modo individual de lidar com problemas matemáticos, através de *ações*, *processos* e *objetos* mentais que se organizam em esquemas. Foi de interesse do autor consultar algumas ideias propostas pelos autores da Teoria APOS ao tratar da aprendizagem de funções.

A análise das produções dos alunos, realizada por Baraldo (2009), mostrou que muitos estudantes estão restritos à chamada concepção ação, pois concebem o objeto função de maneira estática, o que pode dificultar o avanço na compreensão de funções e de conteúdos matemáticos mais avançados. Foi possível concluir ainda, que há necessidade de um ensino de funções que valorize o Pensamento Variacional. Ou seja, defende-se um ensino de funções focado nos conceitos de variável e de variação, que permita compreender de que modo duas quantidades variam uma em função da outra.

Para mostrar a viabilidade de se desenvolver um ensino de funções mais dinâmico, o autor termina apresentando uma análise de duas dissertações de mestrado, referentes ao Pensamento Variacional. Essas dissertações abordam propostas de ensino que utilizam Modelagem Matemática para o estudo de problemas de outras áreas do conhecimento.

De fato, para muitos estudantes o conceito de função limita-se apenas a ser visto como um objeto, nem sequer cogitam a possibilidade de enxergá-lo como um processo, e a sua representação é feita ou por uma fórmula, na qual se coloca um valor e se obtém outro, ou por meio de uma curva estática que sempre apresenta uma mesma regularidade (quase sempre uma reta).

No Ensino Médio, na maioria das vezes, o conceito de função é abordado de uma forma bastante simplificada e desprovida de significado, uma vez que só é requisitado que se trabalhe com funções bem comportadas. Já o gráfico de uma função é visto apenas como consequência da lei de formação da função, e sua análise é feita de forma superficial. Observa-se ainda, que assuntos como translações, compressões, entre outros, não constam no currículo escolar.

De acordo com Tall (1992), baseados nesses aspectos os alunos acabam construindo vincos que os impossibilitam de lidar com situações onde as características, usualmente, conhecidas não estão presentes, por exemplo, uma questão sobre função sem apresentar a lei de formação. Assim ao se depararem com algo muito diferente do que estão habituados, acabam encontrando dificuldades para reconhecer ou até mesmo contestar a validade de determinado conceito.

Tall (1992) afirma que a passagem para o pensar matemático avançado envolve uma transição difícil, desde uma posição em que os conceitos têm uma base intuitiva fundamentada na experiência, até uma em que eles são especificados por definições formais e suas propriedades são reconstruídas por meio da dedução lógica.

Ou seja, as noções matemáticas não são apenas usadas de acordo com a sua definição formal (definição conceito), mas também por meio de representações mentais que podem ser diferentes para cada pessoa. A experiência adquirida pelo indivíduo, anterior ao encontro de definições formais, afeta o modo pelo qual ele forma as representações mentais desses conceitos (imagem conceito).

Deste modo, essa transição fará com que a mente do aluno seja, simultaneamente, regida por experiências anteriores e suas propriedades, junto com o volume crescente de conhecimento dedutivo. Porém, Tall (1992) afirma que isso produz um grande número de conflitos cognitivos que podem atuar como um obstáculo ao aprendizado.

Outro ponto relevante apresentado por Tall (1992) é o questionamento à introdução de um conceito por meio de definições formais que contêm elementos que não são familiares para o aluno. Acredita-se que seja mais adequado tentar encontrar uma abordagem construída a partir de conceitos que tenham o papel de serem familiares para o aluno e também de fornecerem a base para o desenvolvimento matemático seguinte. Este conceito é chamado de raiz cognitiva.

De um modo geral, Tall (1992) apresenta os conceitos descritos acima, com base nas observações dos resultados de uma pesquisa realizada com um grupo de estudantes e professores, sobre a conceitualização de vários conceitos avançados (função, limite, infinito e o processo da demonstração matemática).

De fato, se observarmos um aluno que se encontra nesse processo de transição, veremos que muitas de suas experiências diárias, e a forma pela qual os conceitos foram introduzidos durante sua formação escolar, podem influenciar na aceitação ou negação de uma definição formal.

Deve-se destacar ainda, que conceitos tais como limite, infinito e o processo da demonstração matemática, não constam no currículo escolar, sendo assim, esperado que cada indivíduo se retenha a uma definição informal e muito particular destes conceitos. Usualmente, o conceito de limite é entendido como algo que não deve ser ultrapassado, que respeita uma certa cota, e o conceito de infinito é descrito como algo muito grande ou muito pequeno.

Já no caso de uma demonstração, seria interessante que enquanto estivesse no Ensino Médio o aluno fosse induzido a intuir, a pensar sobre o que está sendo exposto ou colocado em dúvida, pois ao buscar respostas e justificativas estará criando para si um convencimento, que mais tarde pode vir a ser usado como um ponto de partida para a realização da extensão de um conceito através de uma definição formal e deduções lógicas.

Acredito que estes aspectos precisam ser pensados e avaliados com calma, afinal, ao mesmo tempo em que se necessita criar formas de tornar o ensinamento de um conceito o mais próximo possível do contexto em que o aluno está inserido, é preciso cuidado para que isso não se sobreponha demais, a ponto de que esta seja a única imagem a qual ele irá recorrer quando necessário.

Concordo, de fato, que a princípio seja mais conveniente partir de algo mais corriqueiro ao aluno, porém, nem sempre apenas este será o suficiente para promover o aprendizado e a ampliação do assunto trabalhado, assim como se optarmos por algo mais formal pode ser que também não dê conta, ambos podem vir a se tornar falhos mais adiante.

Ao iniciar no curso de Cálculo os estudantes tentam empregar as mesmas estratégias utilizadas para resolver as questões às quais eram submetidos no Ensino Médio, porém, sem alcançar o sucesso desejado. De fato, as questões às quais os alunos serão submetidos na disciplina de Cálculo são mais complexas do que as trabalhadas no Ensino Médio, exigindo uma habilidade algébrica desenvolvida e certa antecipação sobre a escolha da técnica a ser empregada.

Estes e outros aspectos são apresentados no trabalho desenvolvido por Búrigo e Doering (2006), cujo objetivo foi relatar a superação do fracasso vivenciada pela maioria dos alunos que participaram das turmas especiais de Cálculo, refletindo acerca do conhecimento que esta experiência permitiu produzir sobre o ensino e a aprendizagem na área de Cálculo.

Com base no acompanhamento das turmas e nos depoimentos dos próprios estudantes, as autoras começam apresentando alguns motivos que podem ter levado estes estudantes a sofrer sucessivas reprovações na disciplina. A falta de engajamento foi o motivo mais frequentemente apontado pelos próprios estudantes para explicar as reprovações nos semestres anteriores. Acredita-se que essa ausência de engajamento esteja relacionada a diversos fatores: incompreensão ou despreparo para a dedicação requerida pela disciplina, desinteresse pela disciplina ou pelos tópicos abordados, bem como problemas pessoais ou profissionais que impediriam maior dedicação ao estudo. Destaca-se ainda, as dificuldades com conceitos e técnicas, novos regimes e objetos de estudo, novas formas de convívio, e expectativa de desempenho da família. Em seguida, apresentam os índices de aprovação dos estudantes das turmas especiais, atribuindo os resultados satisfatórios à dinâmica adotada nessas turmas.

As autoras acreditam que a dinâmica adotada, além de incentivar os alunos a persistirem na resolução de exercícios, dialogando com colegas, monitor e professor, tenha permitido, ainda, que os alunos explicitassem suas próprias concepções e dúvidas, tendo a oportunidade de discuti-las com professor e monitor. De um modo geral, a escrita foi destacada como um dos elementos que favoreceram a aprendizagem nas turmas especiais, pois os alunos eram incentivados a mostrar sua escrita não só para os professores e monitores como também para os colegas.

Segundo Búrigo e Doering (2006), essa experiência com as turmas especiais permitiu aos professores conhecer mais a fundo as dificuldades ou entraves à aprendizagem dos estudantes de Cálculo, e refletir sobre os métodos de avaliação empregados, pois estes muitas vezes mascaram dificuldades com as técnicas de resolução das questões, ou, ao contrário, a aplicação mecânica de procedimentos pode esconder a ausência de compreensão.

Com base nas ideias apresentadas por Búrigo e Doering (2006), podemos observar que a forma como conceitos considerados anteriores e essenciais para o avanço na disciplina de Cálculo são concebidos no Ensino Médio pode afetar ou condicionar o desempenho dos alunos na disciplina.

2.2 Teoria APOS

De acordo com Dubinsky (1991), a chamada Teoria APOS consiste em uma teoria de inspiração piagetiana, cujo objetivo seria expandir as ideias de Piaget originalmente direcionadas para as construções espontâneas de conceitos matemáticos, adaptando-as para a análise da aprendizagem de conceitos avançados em matemática. Essa teoria vem permitindo investigar como estudantes aprendem conceitos em Cálculo, Álgebra e Análise, por exemplo. A denominação APOS se deve aos estágios de desenvolvimento (de conceitos matemáticos) identificados nos estudantes: ***A****ction*, ***P****rocess*, ***O****bject* e ***S****chema*.

Uma *ação*, segundo a teoria APOS, é uma transformação de objetos para obter outros objetos percebida pelo sujeito como essencialmente externa (onde não há reflexão). Para uma ação, usa-se a memória e uma instrução passo-a-passo de como realizar a transformação. Quando uma ação é repetida e o sujeito reflete sobre ela, pode então produzir uma construção chamada *processo*, que não necessita mais de estímulos externos, e que pode ser mentalmente revertida ou combinada com outros processos. Um *objeto* é construído a partir de um processo como uma totalidade e percebe que transformações podem modificá-lo. Finalmente, um *esquema* para um certo conceito matemático é uma coleção individual de ações, processos, objetos e outros esquemas que estão ligados por alguns princípios gerais para compor um quadro mental ao qual o sujeito pode recorrer como suporte para lidar com situações-problema relacionadas a esse conceito.

Quando aplicada ao conceito de função, por exemplo, uma *concepção ação* pode ser entendida como “uma concepção estática na qual o sujeito tende a pensar na função seguindo um passo de cada vez” e “envolve, por exemplo, a habilidade de substituir números em uma expressão e calcular seu valor”. Uma *concepção processo* de função envolve uma transformação dinâmica de quantidades; o sujeito consegue pensar sobre a transformação como uma atividade completa que começa com objetos de algum tipo, faz algo com esses objetos, e obtém novos como resultado do que é feito. Uma função é concebida como *objeto* se é possível efetuar ações (mentais) sobre ela, em geral ações que a transformam.

3 ANÁLISE DOS DADOS

Para identificar como as experiências prévias de escolarização afetam ou condicionam as concepções de Cálculo de estudantes, são utilizados dados coletados durante a realização do projeto Processos de Aprendizagem em Cálculo: acompanhamento de alunos não aprovados. Os dados utilizados e a análise realizada caracterizam esta pesquisa como qualitativa, pois, de fato, não nos interessa olhar para dados numéricos, e sim analisar o pensar matemático dos alunos que participaram do projeto, e as estratégias por eles empregadas na resolução das questões e em sua rotina de estudo.

> Pesquisa qualitativa prevê pluralidade de método quanto ao foco, envolvendo uma abordagem interpretativa e naturalística do assunto pesquisado. Isso significa que os pesquisadores qualitativos estudam as coisas em seu ambiente natural, tentando dar sentido aos fenômenos, ou interpretá-los, em termos dos significados que as pessoas dão a eles. A pesquisa qualitativa envolve o uso e a coleção de uma variedade de materiais empíricos - estudo de caso, experiência pessoal, introspectiva, história de vida, entrevista e textos gerados a partir de observações, textos históricos, de interação e visuais - que descrevem momentos rotineiros e problemáticos e significados nas vidas dos indivíduos (DENZIN; LINCOLN, 1994, p. 2; apud ARAÚJO, 2002, p. 67).

Bogdan e Biklen (1994) apresentam cinco características básicas dos estudos qualitativos: 1) na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal; 2) a investigação qualitativa é descritiva; 3) os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos; 4) os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva, isto é, não recolhem dados ou provas com o objetivo de confirmar ou inferir hipóteses construídas previamente; ao invés disso, as abstrações são construídas à medida que os dados particulares que foram recolhidos se vão agrupando; 5) o significado é de importância vital na abordagem qualitativa.

Para ilustrar a maneira como os conceitos de Cálculo são concebidos por estudantes, analisamos o material produzido por quatro alunos que apresentaram posturas de estudo distintas, mas ao mesmo tempo assemelhadas a de outros alunos participantes do projeto, contemplando as características e diferenças do grupo de alunos.

Esse material consiste em produções escritas (provas e testes), transcrição de trechos da fala dos estudantes, e aspectos particulares de cada aluno, observados no transcorrer dos encontros. A análise das produções escritas permite identificar estratégias de resolução empregadas pelos estudantes ao resolver as questões. Os trechos da fala ajudam a corroborar a análise do material escrito, ou podem complementar a análise apresentada indicando outros aspectos não explicitados pelo aluno na escrita.

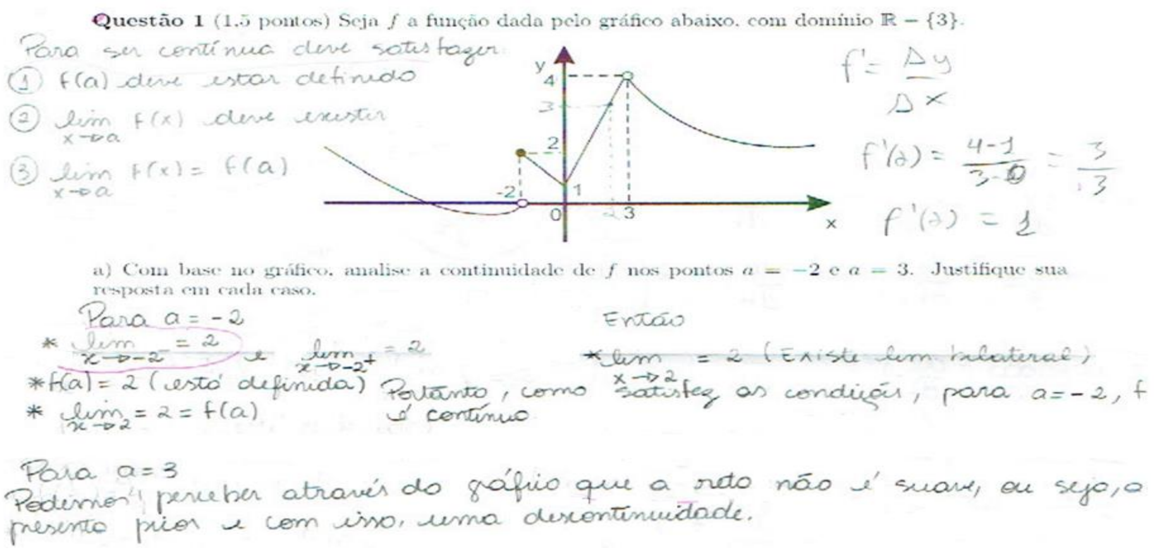
Para auxiliar na interpretação das produções escritas e verbais, são utilizadas as ideias base da Teoria APOS, a qual fornece uma categoria para a caracterização das concepções que os alunos têm sobre funções. Essa caracterização se faz necessária, pois todos os conceitos desenvolvidos em Cálculo estão relacionados ao conceito de função. Os conceitos apresentados pela Teoria APOS são úteis na interpretação dos erros, das dificuldades e das estratégias utilizadas pelos alunos para lidar com funções e diversos outros conceitos matemáticos avançados.

3.1 Análise do Material Produzido pelo Aluno A

Analisamos, inicialmente, uma questão que solicita a continuidade da função f, representada pelo gráfico abaixo, nos pontos de abscissas $a = -2$ e $a = 3$. Essa questão consta no segundo teste que o aluno prestou quando fez Cálculo I pela primeira vez, no primeiro semestre letivo de 2013.

Por definição, uma função f é contínua no ponto de abscissa $x = a$ se $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Para resolver essa questão calculamos os limites laterais, e caso o limite no ponto de abscissa $x = a$ exista, comparamos seu valor com o valor de $f(a)$. Se esses valores forem iguais, f será contínua no ponto de abscissa $x = a$.

Figura 1 – Questão e resolução extraídas do teste 2 realizado pelo Aluno A em 2013/1



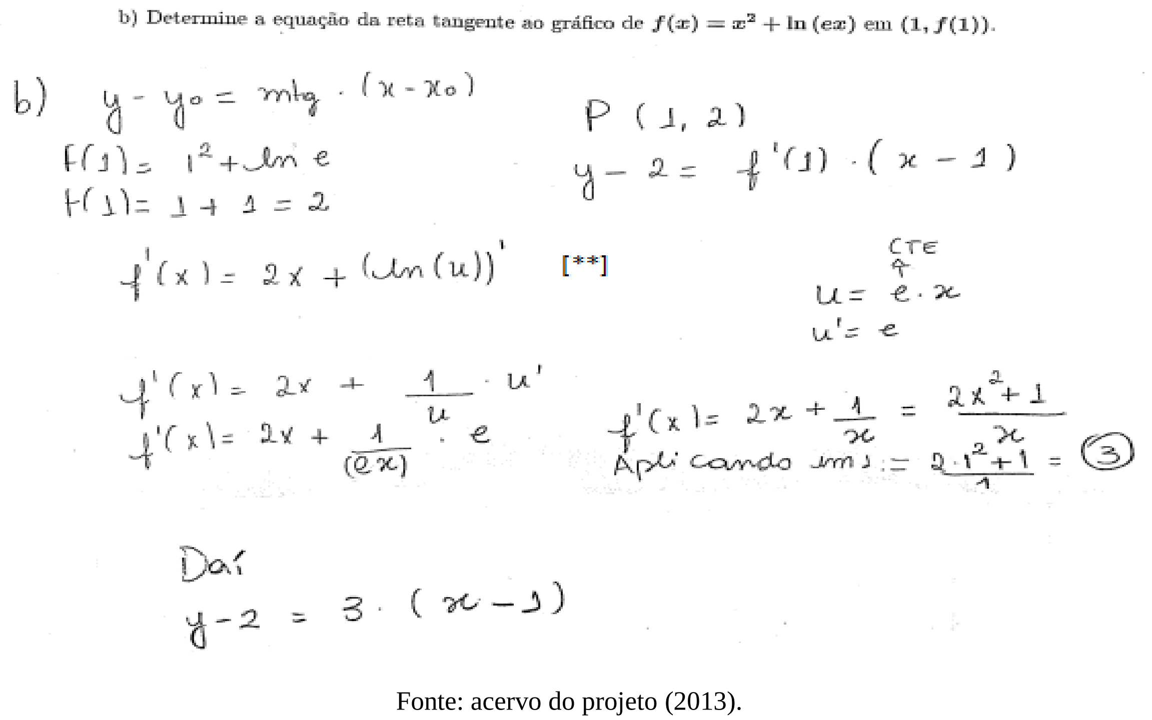
Fonte: acervo do projeto (2013).

Para verificar se a função é contínua no ponto de abscissa $a = -2$, o aluno parte da definição de continuidade, ou seja, verifica se a condição $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ é satisfeita. Para isso, escreve a definição e a confronta com os dados do exercício. Segundo a Teoria APOS, o aluno alcança uma concepção processo após refletir acerca da ação realizada. Podemos observar que, no caso do Aluno A, essa reflexão é realizada antes, durante e depois da ação, pois, não só escreve a propriedade que está sendo utilizada ao resolver o exercício, como também os passos que precisam ser feitos para verificar essa propriedade, bem como as justificativas apresentadas e conclusões obtidas. Porém, é importante ressaltar que, ao decidir acerca da continuidade da função no ponto de abscissa $a = 3$, o aluno apresenta uma justificativa não adequada (confunde continuidade e derivabilidade), o que nos mostra que nesse momento o aluno ainda não havia atingido, plenamente, uma concepção processo.

A próxima questão aqui apresentada consta na primeira prova que o aluno prestou quando fez Cálculo I pela primeira vez, no primeiro semestre letivo de 2013. Solicitamos que o aluno a refizesse em casa sem rever a sua prova do semestre anterior.

Essa questão solicita a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^2 + ln(ex)$ no ponto $\left(1, f(1)\right)$; não apresentamos a descrição do procedimento realizado na resolução da questão, pois a solução do aluno reproduzida abaixo apresenta uma escrita clara e organizada. Inserimos a marcação [**] para referência.

Figura 2 – Questão da prova 1 de 2013/1 realizada pelo Aluno A, com resolução de 2013/2



b) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^2 + \ln(ex)$ em $(1, f(1))$.

b) $y - y_0 = m_{tg} \cdot (x - x_0)$

$f(1) = 1^2 + \ln e$

$f(1) = 1 + 1 = 2$

$P(1, 2)$

$y - 2 = f'(1) \cdot (x - 1)$

$f'(x) = 2x + (\ln(u))'$ [**]

$u = \overset{\text{CTE}}{e} \cdot x$

$u' = e$

$f'(x) = 2x + \frac{1}{u} \cdot u'$

$f'(x) = 2x + \frac{1}{(ex)} \cdot e$

$f'(x) = 2x + \frac{1}{x} = \frac{2x^2 + 1}{x}$

Aplicando em 1: $\frac{2 \cdot 1^2 + 1}{1} = 3$

Daí

$y - 2 = 3 \cdot (x - 1)$

Fonte: acervo do projeto (2013).

A resolução apresentada foi resolvida pelo aluno antes do encontro, o que lhe garantiu tempo suficiente para resolver a questão.

Segue a transcrição da descrição verbal do aluno sobre a sua resolução; as expressões no interior dos colchetes foram acrescentadas para auxiliar a compreensão do leitor.

> *Aluno A – Tá, daí a segunda [item b] era a equação da reta tangente. Tá, daí primeiro eu descobri o* y [$calculou\ f(1)$]*, eu substituí na função e achei 2. Daí eu peguei e fui derivar a função, derivei o* x^2*, deu* $2x + l\,n(u)'$ [$**$]*, porque ali tinha uma função dentro* [$atribuiu\ u = ex$]*, daí como era uma constante, aqui ficou só* $e \left[\frac{d[ex]}{dx} = e\right]$*, aí ficou* $\frac{1}{u}u'$ [*aplica a regra da cadeia para ln(u)*] *daí ficou* $2x + \frac{1}{ex}e$*, daí aqui dava pra simplificar* [$cancelar\ a\ constante\ e$]*, aí ficava* $2x + \frac{1}{x}$*. Aplicava no ponto 1 e dava 3* [$calculou\ f'(1)$]*, aí...*

Observa-se que o aluno apresenta uma concepção processo avançada e traços de uma concepção objeto de função e derivada, pois atribui significado à função derivada encontrada, efetuando sucessivas ações que modificam a função $f(x) = x^2 + ln(ex)$. Inicialmente, o aluno deriva a função, aplicando-a, em seguida, no ponto $\left(1, f(1)\right)$ e usando o valor encontrado como o coeficiente angular da reta tangente à curva nesse ponto.

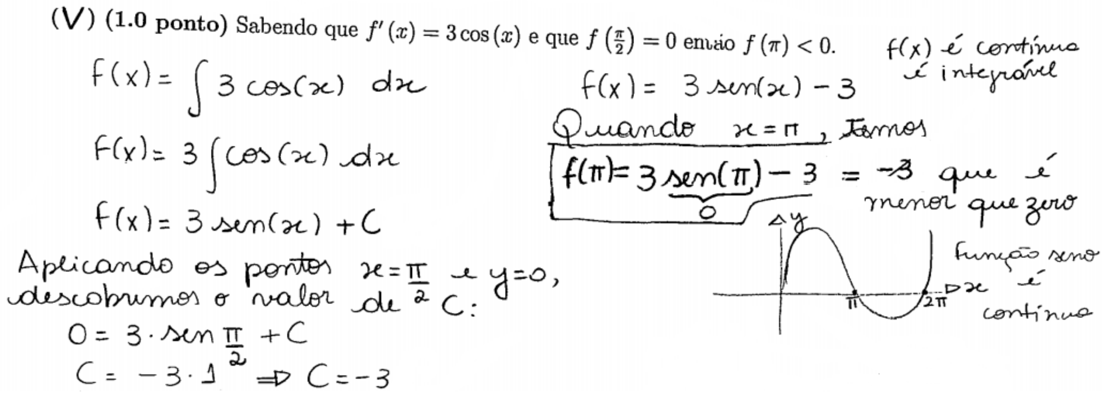
Observamos ainda, que o aluno não apresenta dificuldade em usar os dados calculados em uma equação de reta. Além disso, demonstra ter conhecimento de que a representação geométrica da função derivada, quando aplicada em um certo ponto, nada mais é do que a inclinação da reta tangente à curva nesse ponto, ou seja, sua concepção de derivada não se limita a uma noção algébrica.

O aluno demonstra clareza e organização tanto na fala quanto na escrita apresentada, além de mostrar uma boa desenvoltura algébrica (isola as variáveis e substitui os dados corretamente) e domínio da técnica utilizada na resolução da questão. Consegue ainda, identificar $ln(ex)$ como uma composição de funções, aplicando a regra de derivação correta (regra da cadeia). O aluno desenvolve separadamente as derivadas que compõem a regra da cadeia.

A questão apresentada abaixo pede para verificar se a afirmação é verdadeira ou falsa. Essa questão consta na segunda prova que o aluno prestou quando fez Cálculo I pela segunda vez, no segundo semestre letivo de 2013.

A resolução apresentada abaixo foi extraída da prova mencionada, realizada pelo aluno.

Figura 3 – Questão e resolução extraídas da prova 2 realizada pelo Aluno A em 2013/2



Fonte: acervo do projeto (2013).

Observamos que, para resolver essa questão, é necessário encontrar uma antiderivada para $f'(x) = 3\cos(x)$, ou seja, uma função f cuja derivada é $f'(x) = 3\cos(x)$.

Inicialmente, o aluno escreve $f(x) = \int 3\cos(x)\,dx$, encontrando uma primitiva $f(x) = 3sen(x) + c$. Em seguida, aplica f em $x = \frac{\pi}{2}$, obtendo o valor da constante c. Por fim, substitui c por -3, e aplica f em π, para verificar se $f(\pi) < 0$, conforme mencionado no enunciado da questão.

A maioria dos alunos participantes do projeto, ao resolver esta questão, comete o erro de atribuir à constante c o valor zero, o que tornaria sem sentido a informação do enunciado de que $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, visto que sua presença só se faz necessária para a obtenção do valor da constante. O aluno faz um uso adequado dos dados do enunciado, identificando corretamente que para encontrar uma antiderivada para f' seria necessário reverter o processo inicial, isto é, integrar f'.

Por meio do trabalho desenvolvido com o aluno, observamos que ele demonstra clareza e organização tanto na fala quanto na escrita apresentada, indicando cada passo realizado na resolução dos exercícios. Outro ponto importante em sua rotina de estudos foi a elaboração de resumos que continham definições e teoremas (resultados), bem como as condições de validade de sua aplicação. Com base em todos os dados analisados acreditamos que, atualmente, o aluno possui um entendimento mais profundo dos conceitos estudados, caracterizando uma concepção processo avançada e traços de uma concepção objeto.

Durante o Ensino Médio, aprendeu a estudar sozinho, já que ficou por um longo período sem professor de matemática, o que contribuiu para uma certa autonomia nos estudos, como relatado abaixo.

> *Aluno A – Eu não tive professor de matemática durante todo o Ensino Médio porque a minha escola era pública e daí faltava professor. Aí a gente ficava quatro meses sem professor. Aí vinha um professor e a gente tinha que recuperar todas as aulas de tarde. Aí ficava uma confusão. Então, eu peguei e estudei por conta própria, por isso que trigonometria ficou meio...*

A maturidade e autonomia desenvolvidas pelo aluno no Ensino Médio favoreceram o desenvolvimento de um método satisfatório de estudo, resultando em sua aprovação em Cálculo I na segunda vez em que cursou a disciplina. Por outro lado, a aprendizagem de alguns conteúdos importantes para a disciplina de Cálculo I como, por exemplo, trigonometria, foi prejudicada pela ausência de um estudo sistemático. Todo conhecimento referente ao estudo de trigonometria apresentado pelo aluno ao iniciar o curso de Cálculo, é fruto de sua dedicação e esforço pessoal.

O aluno relata ainda, conforme a transcrição abaixo, que a disciplina de Cálculo I é mais difícil do que a matemática do Ensino Médio, porque agora há uma necessidade de interpretar e entender os conteúdos. Enquanto no Ensino Médio, na maioria das vezes, o professor simplesmente apresentava o conteúdo sem propor ou explicar sua aplicabilidade.

> *Aluno A – O Cálculo é mais difícil do que a matemática do Ensino Médio porque tu tem que interpretar, tem que entender porque as coisas acontecem. No Ensino Médio o professor chega lá e passa a matéria, não vai ficar te explicando para que tu vai usar.*

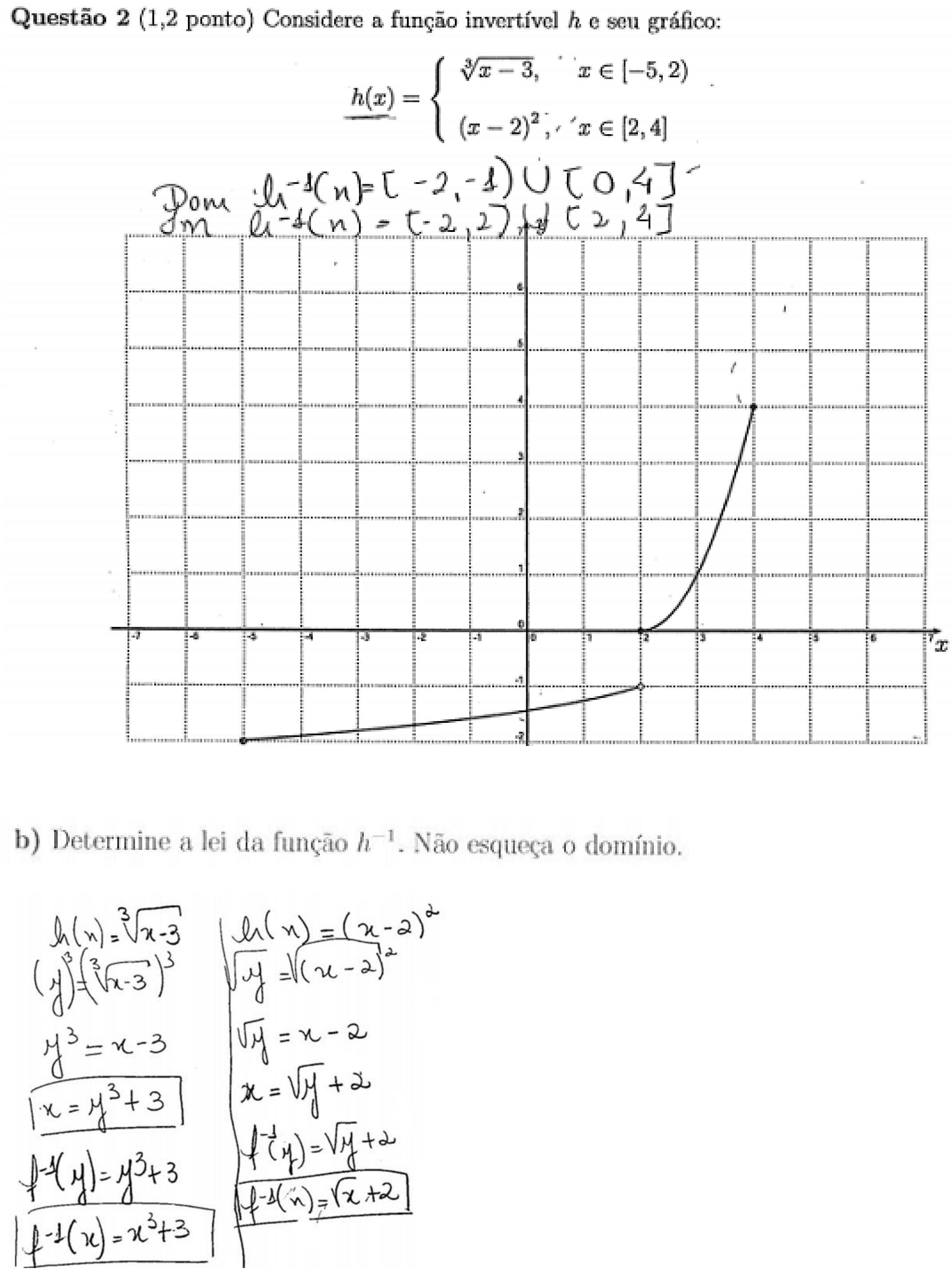
De uma maneira geral, tanto da primeira vez quanto da segunda vez em que o Aluno A fez Cálculo I, apresentou suas resoluções de modo organizado, demonstrando ter uma ideia sobre como resolver o problema, e como prosseguir em sua resolução. Acreditamos que, da primeira vez em que o aluno cursou a disciplina, mostrou-se propício a desenvolver uma concepção processo acerca dos conceitos trabalhados, porém, foi somente ao cursá-la pela segunda vez que o aluno atingiu, plenamente, uma concepção processo, apresentando indícios de uma concepção objeto.

3.2 Análise do Material Produzido pelo Aluno B

A questão anexada abaixo consta em um teste aplicado no segundo semestre letivo de 2013 a alunos da disciplina de Cálculo I. Solicitamos que o aluno a resolvesse conosco durante o encontro. Essa questão solicita a lei da função inversa de uma função dada por partes, e o seu respectivo domínio.

Lembramos que um procedimento para encontrar a função inversa da função $y = h(x)$ consiste em: 1) se possível, resolver essa equação em x como função de y; 2) a função resultante será $x = h^{-1}(y)$ que fornece uma fórmula para a inversa com variável independente y; 3) se y for aceitável como variável independente, encontramos uma expressão para h^{-1}. Caso contrário, troque x por y. Para determinar o domínio da função inversa podemos utilizar que dada uma função invertível h: $\begin{cases} Dom\ h^{-1} = Im\ h \\ Im\ h^{-1} = Dom\ h \end{cases}$.

Figura 4 – Questão e resolução extraídas do teste 1 realizado pelo Aluno B em 2013/2



$$\text{Dom } f(x) = \text{Im } f^{-1}(x) = [-5, 2)$$
$$\text{Im } f(x) = \text{Dom } f^{-1}(x) = [-2, -1)$$

$$\text{Dom } f(x) = \text{Im } f^{-1}(x) = [2, 4]$$
$$\text{Im } f(x) = \text{Dom } f^{-1}(x) = [0, 4]$$

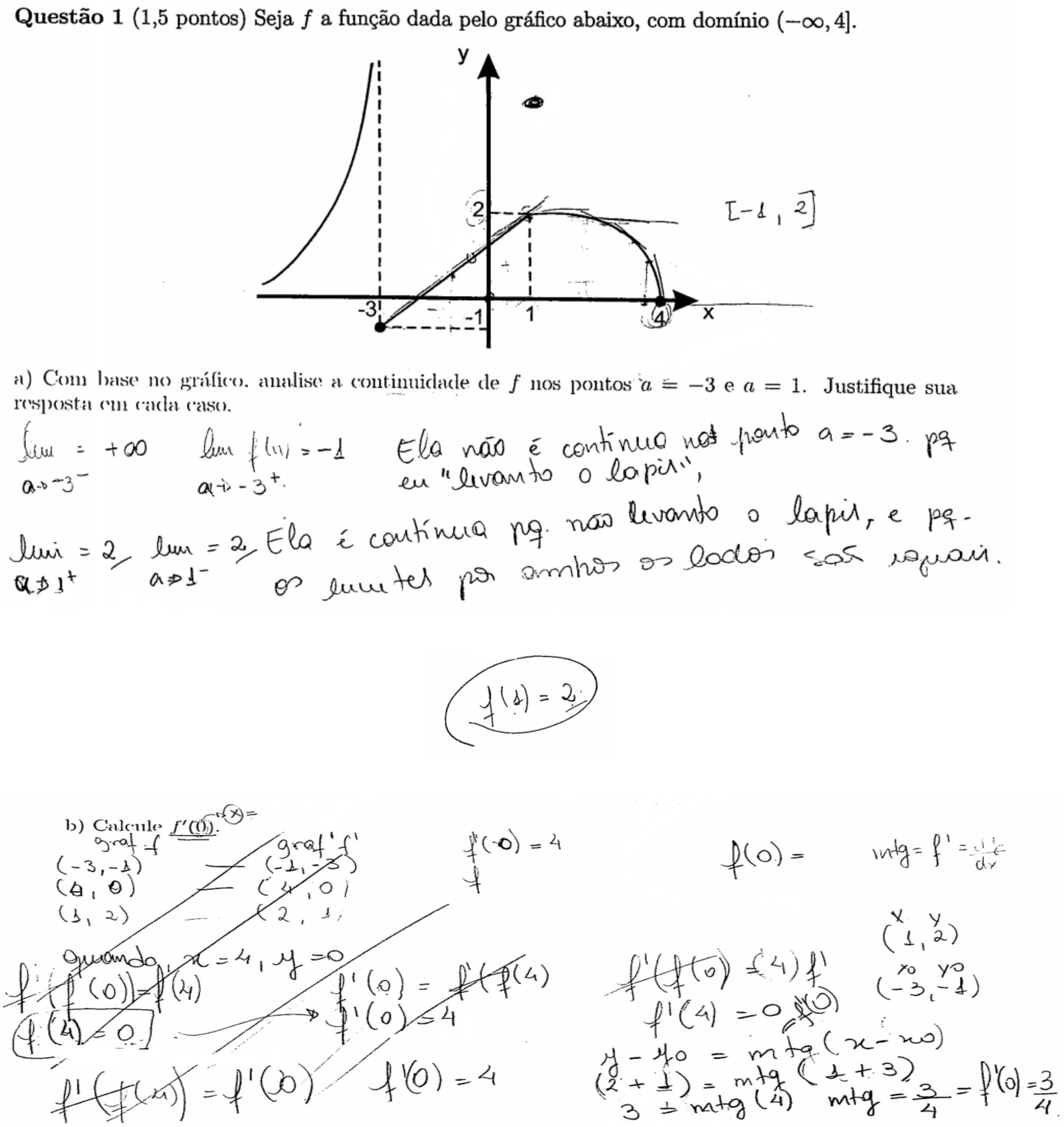
Fonte: acervo do projeto (2013).

Observamos que, ao encontrar a função inversa e seu domínio, o aluno apresenta o procedimento (domínio do método), de forma clara e organizada, porém, apesar de apresentar alguns pedaços de teoria encaixados, não podemos garantir que ele realmente entenda como ocorre essa troca.

A resolução acima nos mostra, ainda, que o aluno não escreve o módulo ao extrair a raiz quadrada, porém, ao ser questionado, demonstrou ter consciência de que, neste caso em particular, a ausência do módulo não acarretou problema algum, devido ao domínio fornecido pelo enunciado da questão, mas que em outros casos a ausência do módulo pode vir a causar algum problema. Observamos ainda, que o aluno designa por h as duas partes da função, o que não é adequado, já que as partes são distintas. Em seguida, aplica a técnica para determinar a função inversa de h. Apesar de ter começado denominando ambas as partes da função por h, a função inversa das partes é expressa por f^{-1}. O que evidencia uma ambiguidade de nomenclatura, bem como um apego à notação do livro (que provavelmente é a mesma vista em aula). A ordem com que o aluno escreve a relação entre domínio da f e imagem da f^{-1}, assim como a relação entre imagem da f e domínio da f^{-1} é outro indício desse apego. Isso indica que o aluno simplesmente aplica a memorização do método. Por outro lado, o enunciado da questão não solicita que ele justifique as passagens realizadas. De fato, esta questão pode ser resolvida apenas com a aplicação do método aprendido em aula, ou seja, exige simplesmente uma concepção ação por parte do aluno, e é isso que o aluno nos apresenta em sua resolução.

A próxima questão aqui apresentada consta em um teste aplicado no primeiro semestre letivo de 2013 a alunos da disciplina de Cálculo I. Solicitamos que o aluno a resolvesse conosco durante o encontro.

Figura 5 – Questão 1 do teste 2 aplicado em 2013/1, com resolução do Aluno B em 2013/2


Questão 1 (1,5 pontos) Seja f a função dada pelo gráfico abaixo, com domínio $(-\infty, 4]$.

a) Com base no gráfico, analise a continuidade de f nos pontos $a = -3$ e $a = 1$. Justifique sua resposta em cada caso.

$\lim_{a \to -3^-} = +\infty$ $\quad \lim_{a \to -3^+} f(1) = -1$ Ela não é contínua no ponto $a = -3$. pq eu "levanto o lapis",

$\lim_{a \to 1^+} = 2$, $\lim_{a \to 1^-} = 2$, Ela é contínua pq. não levanto o lapis, e pq. os limites por ambos os lados são iguais.

$f(1) = 2$

b) Calcule $f'(0)$.

graf f: $(-3, -1)$, $(4, 0)$, $(1, 2)$

graf f': $(-1, -3)$, $(4, 0)$, $(2, 1)$

$f'(-0) = 4$

Quando $x = 4$, $y = 0$

$f'(f'(0)) = f(4)$

$\boxed{f(4) = 0}$

$f'(0) = f'(f(4))$

$f'(0) = 4$

$f'(f(4)) = f'(0)$ $\quad f'(0) = 4$

$f(0) =$ $\quad m_{tg} = f' = \frac{dy}{dx}$

$f'(f(0)) = (4) f'$

$f'(4) = 0$

$(x, y) = (1, 2)$; $(x_0, y_0) = (-3, -1)$

$y - y_0 = m_{tg}(x - x_0)$

$(2 + 1) = m_{tg}(1 + 3)$

$3 = m_{tg}(4)$ $\quad m_{tg} = \frac{3}{4} = f'(0) = \frac{3}{4}$

Fonte: acervo do projeto (2013).

O primeiro item da questão pede para verificar se a função é contínua nos pontos de abscissas $a = -3$ e $a = 1$.

Por definição, uma função f é contínua no ponto de abscissa $x = a$ se $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Para resolver essa questão calculamos os limites laterais, e caso o limite no ponto de abscissa $x = a$ exista, comparamos seu valor com o valor de $f(a)$. Se esses valores forem iguais, f será contínua no ponto de abscissa $x = a$.

Para justificar a descontinuidade da função f no ponto de abscissa $a = -3$, o aluno utiliza a expressão "não levanto o lápis", mencionada pelo professor em aula, conforme a fala do aluno. Apesar de ter calculado os limites laterais de f no ponto de abscissa $a = -3$, o aluno não apresenta conclusão alguma a partir deles. Já para justificar a continuidade da função f no ponto de abscissa $a = 1$, argumenta que "não levanta o lápis", e que os limites laterais são iguais, ou seja, verifica apenas os limites laterais concluindo a existência do limite, o que não é suficiente para garantir a continuidade da função em um ponto.

Observamos que o aluno parece não saber ao certo qual a importância do cálculo dos limites laterais para a verificação da continuidade da função, demonstra, ainda, desconhecer que, para garantir a continuidade da função em um certo ponto de abscissa $x = a$, devemos ter: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, sempre que esse limite existir. Em ambos os casos, observamos que, o aluno apresenta o conceito de continuidade com base no aspecto visual, indicando que pouco se baseia na definição formal para justificar a continuidade de f. De fato, o recurso visual pode ser utilizado como uma informação adicional para a verificação da continuidade, mas ainda assim necessitamos da definição para garantir a continuidade da função no ponto.

Entretanto, é importante ressaltar que, quando questionado o aluno, demonstra ter consciência de vários aspectos não desenvolvidos na escrita. Por exemplo, ao argumentar que a função é contínua porque os limites laterais são iguais, a fala do aluno nos mostra que ele tem consciência de que falta algo, mas não sabe dizer exatamente o que está faltando. Parece-nos assim, que o aluno internaliza a ação, mas não sente a necessidade de expressar isto sempre que resolve uma questão. Prefere tornar o procedimento rotineiro, pois, além de ser o suficiente para resolver a questão, lhe traz maior segurança.

O segundo item da questão solicita o valor de $f'(0)$.

A derivada de uma função f aplicada em um certo ponto representa a inclinação da reta tangente à curva nesse ponto. De fato, para resolver esta questão, basta calcular o valor do coeficiente angular da reta que passa pelos pontos $(1,2)$ e $(-3,-1)$, pois o ponto $(0, f(0))$ pertence a esta reta.

Observamos que o aluno apresenta dificuldade em determinar o valor de $f'(0)$, pois como a questão não fornece informação alguma a respeito da lei da função f, torna-se impossível encontrar uma expressão para f'. Isto pode estar relacionado ao fato de, na maioria das vezes, alimentar-se a ideia de que é necessário a existência de uma fórmula para caracterizar uma função, conforme afirma Tall (1992):

> A pesquisa empírica mostra que, mesmo quando os alunos recebem uma definição formal, sua experiência dominante a partir de exemplos de funções com propriedades comuns implícitas, leva-os a desenvolver uma imagem conceito de uma função que implicitamente tenha essas propriedades. Por exemplo, se as funções encontradas são dadas principalmente em termos de fórmulas, isso leva muitos alunos a acreditarem que a existência de uma fórmula seja essencial para uma função (TALL, 1992, nossa tradução).

O aluno demonstra, ainda, desconhecer que $f'(0)$ representa a inclinação da reta tangente à curva no ponto de abscissa $x = 0$. O que configura uma concepção ação de função e derivada.

De fato, o aluno apresenta um método de estudos bem definido, o qual melhor se adequa às suas necessidades e interesses. As falas do aluno, transcritas abaixo, nos mostram que seu estudo consiste, essencialmente, em fazer e refazer exemplos, pois se sente mais seguro a partir do momento em que o processo de resolução dos exercícios se torna um procedimento rotineiro.

Segue a transcrição das falas do aluno.

> *Aluno B – Eu fiz, eu tinha feito umas listas de exercícios, mas o que eu mais fiz foram os testes anteriores. Eu fiz e refiz também os exercícios que o professor deu em aula, ele deu um monte de exercícios, eu refiz todos eles.*
>
> *Aluno B – Eu encontrei a minha maneira de estudo, eu faço exercícios e refaço a mesma prova no mínimo umas três vezes. Eu faço uma vez, aí eu vejo se tá certo, ou se tá errado. O que tiver errado eu vejo, questiono e refaço depois a prova toda pra saber se aquele jeito de fazer já tá memorizado. Então, eu cheguei à conclusão de tem que estar no automático, tem que saber fazer aquela coisa automaticamente.*
>
> *Aluno B – A ideia de fazer várias vezes é transformar isso em um mecanismo que nem quando tu faz uma Bhaskara. Se aquilo lá não se torna mais mecânico, tu vai ficar um tempão pensando.*

A transcrição da última fala do aluno nos mostra que, durante o Ensino Médio, ele já apresentava esse hábito de transformar a resolução dos problemas em procedimentos rotineiros. Provavelmente, realizava várias questões semelhantes que exigissem a aplicação da fórmula de Bhaskara, identificando assim, facilmente, questões do mesmo padrão que pudessem ser resolvidas com essa fórmula. Salientamos que, na rotinização, o aluno pode passar a classificar essas questões como: “essa eu resolvo aplicando a fórmula de Bhaskara”, sem entender exatamente o porquê. O que demonstra que os conceitos são concebidos de maneira estática, caracterizando assim, uma concepção ação. Essas ideias são sustentadas por Búrigo, Doering e Rempel (2005), como podemos observar abaixo:

> A compreensão construída pelos estudantes sobre o significado das tarefas escolares estaria, então, orientando a construção de suas estratégias no curso de Cálculo. Frente a um ritmo intensificado de exposição de novos conceitos e técnicas, a simplificação dos problemas apresentados seria um recurso autorizado pelas experiências prévias de escolarização. A resolução usual de problemas com a aplicação de uma única "fórmula" ou "regra" motivaria a ideia de que problemas formulados por professores em contextos escolares são necessariamente simples e de soluções previsíveis: a fórmula não seria um instrumento de resolução de problema, mas o motivo mesmo de sua formulação. A interpretação de que uma técnica ou artifício é suficiente para resolver cada questão configura-se, entretanto, como um obstáculo à consideração das dificuldades envolvidas e à elaboração de estratégias de resolução mais complexas ou flexíveis, envolvendo a articulação de diferentes transformações ou equivalências (BÚRIGO; DOERING; REMPEL, 2005, p. 4).

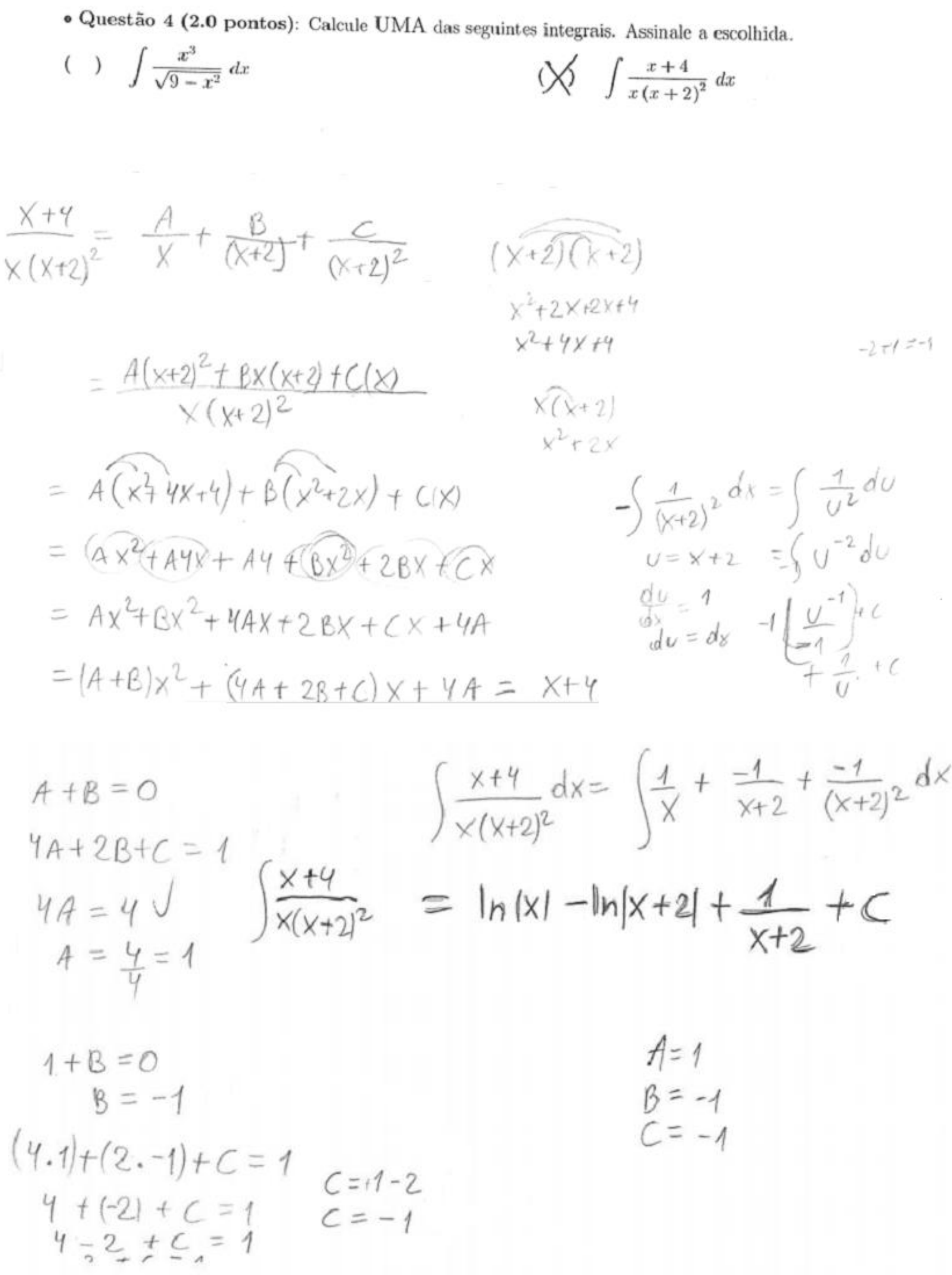
De modo geral, acreditamos que a maneira de estudo adotada pelo aluno tenha lhe proporcionado um certo amadurecimento matemático, pois se mostrou participativo e questionador durante os encontros. Além disso, o próprio aluno nos relata que antes não questionava porque não entendia, ou seja, como poderia questionar algo que desconhece? Relata ainda, que hoje se sente entendedor e apto a compartilhar com os colegas os conhecimentos adquiridos, e de fato, o faz.

3.3 Análise do Material Produzido pelo Aluno C

Analisamos, inicialmente, uma questão que consta na segunda prova que o aluno prestou quando fez Cálculo I pela segunda vez, no segundo semestre letivo de 2013. Essa questão solicita o cálculo de uma das integrais indicadas. O aluno opta por resolver a segunda integral, utilizando-se da técnica de integração por frações parciais.

A técnica de integração por frações parciais é utilizada para expressar um quociente $\frac{p(x)}{q(x)}$ onde $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios e $grau\, p < grau\, q$ como uma soma de parcelas simples de integrar, chamadas "frações parciais". Tal técnica consiste em: determinar os fatores irredutíveis de $grau$ 1 e $grau$ 2 do denominador, com as respectivas multiplicidades; cada fator irredutível de $grau$ 1 da forma $(ax + b)$ com multiplicidade k, dará lugar a um número de parcelas igual à sua multiplicidade, do seguinte tipo: $\frac{A_1}{(ax+b)} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(ax+b)^k}$; cada fator irredutível de $grau$ 2 da forma $(ax^2 + bx + c)$ com multiplicidade m, dará lugar a um número de parcelas igual à sua multiplicidade, do seguinte tipo: $\frac{B_1x+C_1}{(ax^2+bx+c)} + \frac{B_2x+C_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{B_mx+C_m}{(ax^2+bx+c)^m}$.

Figura 6 – Questão e resolução extraídas da prova 2 realizada pelo Aluno C em 2013/2



• **Questão 4 (2.0 pontos)**: Calcule UMA das seguintes integrais. Assinale a escolhida.

( ) $\int \frac{x^3}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$ (X) $\int \frac{x+4}{x(x+2)^2}\,dx$

$$\frac{X+4}{X(X+2)^2} = \frac{A}{X} + \frac{B}{(X+2)} + \frac{C}{(X+2)^2}$$

$(X+2)(X+2)$

$X^2+2X+2X+4$

X^2+4X+4

$-2+1=-1$

$$= \frac{A(X+2)^2 + BX(X+2) + C(X)}{X(X+2)^2}$$

$X(X+2)$

X^2+2X

$= A(X^2+4X+4) + B(X^2+2X) + C(X)$

$= AX^2 + A4X + A4 + BX^2 + 2BX + CX$

$= AX^2 + BX^2 + 4AX + 2BX + CX + 4A$

$= (A+B)X^2 + (4A+2B+C)X + 4A = X+4$

$-\int \frac{1}{(X+2)^2}\,dx = \int \frac{1}{U^2}\,dU$

$U = X+2$ $= \int U^{-2}\,dU$

$\frac{dU}{dX} = 1$ $-1\left[\frac{U^{-1}}{-1}\right] + C$

$dU = dX$ $+\frac{1}{U} + C$

$A+B=0$

$4A+2B+C=1$

$4A=4$

$A = \frac{4}{4} = 1$

$$\int \frac{X+4}{X(X+2)^2}\,dX = \int \frac{1}{X} + \frac{-1}{X+2} + \frac{-1}{(X+2)^2}\,dX$$

$$\int \frac{X+4}{X(X+2)^2} = \ln|X| - \ln|X+2| + \frac{1}{X+2} + C$$

$1+B=0$

$B=-1$

$(4.1)+(2.-1)+C=1$

$4+(-2)+C=1$

$4-2+C=1$

$C=1-2$

$C=-1$

$A=1$

$B=-1$

$C=-1$

Fonte: acervo do projeto (2013).

Ao resolver conosco uma questão similar a esta, o aluno escreve a integral corretamente, porém, encontra dificuldades ao resolver os sistemas lineares gerados por este método. O estudante demonstra não dominar o processo de isolar uma variável e substituir na outra, e depois voltar. Demonstra ainda, dificuldade em realizar manipulações algébricas e operações elementares.

O aluno diz que entende o processo de integração por frações parciais, e de como fazer, mas que sua dificuldade mesmo está em resolver sistemas. Dificuldade esta que parece ter sido superada para sistemas simples, levando-se em conta a análise da questão apresentada acima. Nota-se que a aplicação da técnica de integração por frações parciais (até a montagem do sistema linear), neste caso, requer apenas a memorização do método por parte do aluno; uma concepção ação já se mostra suficiente para executar a técnica de integração por frações parciais de modo satisfatório. Já a resolução de um sistema exige que o indivíduo possua uma antecipação sobre quais variáveis eliminar para obter o resultado desejado, há uma necessidade de uma concepção processo.

Observamos também que o aluno teve dificuldades para acompanhar o desenvolvimento de um exemplo do livro, solicitando nosso auxílio para entendê-lo. A questão solicita o cálculo da integral $\int \frac{dx}{(1+3x^2)}$.

Figura 7 – Exemplo resolvido do livro

▶ **Exemplo 5** Calcule $\int \frac{dx}{1+3x^2}$.

Solução Substituindo

$$u = \sqrt{3}x, \quad du = \sqrt{3}\,dx$$

obtemos

$$\int \frac{dx}{1+3x^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{arc tg } u + C = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{arc tg } (\sqrt{3}x) + C \blacktriangleleft$$

Fonte: Anton, Bivens e Davis (2007).

Nesse exemplo alguns passos foram omitidos (a identificação $u^2 = 3x^2$), requerendo assim, que o aluno possuísse uma certa desenvoltura e antecipação algébrica. Mais do que não perceber que havia sido realizado substituições e manipulações corriqueiras, o aluno não reconheceu a técnica empregada, isto é, não identificou que existia algo da forma $\frac{1}{(1+u^2)}$, e que, após fazer esta identificação, seria necessário isolar u para dar início ao processo de integração por substituição.

É importante ressaltar que, para acompanhar o desenvolvimento de um exemplo apresentado pelo livro, é preciso perceber a presença de manipulações algébricas e identificar a técnica empregada. Ou seja, é necessário compreender e refletir acerca de um procedimento realizado por outra pessoa, evidenciando assim, a necessidade de que o indivíduo construa uma concepção processo sobre uma ação que nem sequer foi realizada por ele. Podemos assim, atribuir as dificuldades apresentadas pelo aluno à ausência de compreensão e reflexão em torno de suas próprias ações.

Por meio do trabalho desenvolvido, observamos que, ao resolver uma expressão numérica, o aluno não arrisca a realização de simplificações, opta por realizar todo o desenvolvimento numérico. Por exemplo, no cálculo $1 \cdot \left(\frac{4}{4}\right) = \frac{4}{4} = 1$, explicita a multiplicação por 1, o que não é comum, demonstrando sua necessidade de fazer todos os passos, mesmo os considerados triviais. Também nos mostra que efetua uma operação de cada vez, repetindo $\frac{4}{4}$ na expressão, o que indica que possui consciência sobre suas reais habilidades.

Talvez esta tenha sido a forma que ele encontrou de minimizar as chances de cometer erros ao utilizar-se de técnicas sobre as quais não possui domínio. Ou apenas seja um modo de lidar com a falta de compreensão acerca do que está sendo feito, bem como com sua falta de antecipação.

Por meio da transcrição da fala abaixo observamos que o aluno apresenta dificuldade para perceber que a derivada é uma taxa de variação, bem como de perceber e se convencer da ideia de movimento relacionada à sua definição. Acreditamos que essa dificuldade está relacionada com o fato de, no Ensino Médio que ele cursou, o objeto função ser, usualmente, concebido de uma maneira estática. Evidenciando apenas a presença de uma concepção ação de função e derivada.

Segue a transcrição da fala do aluno.

> *Aluno C – Eu não conseguia enxergar que a derivada é uma taxa de variação. Não conseguia enxergar aquele movimento. Não conseguia enxergar que era um movimento. Em derivada eu aprendi apenas a derivar.*

O aluno nos relata ainda, conforme transcrito abaixo, a diferença entre o nível de exigência do Ensino Médio e o da disciplina de Cálculo I. Evidenciando a falta de engajamento por parte do aluno.

> *Aluno C – No Ensino Médio se cobrava muito menos do que se cobra aqui em um período menor de tempo. Eu estudava pouco e passava na média. Fiz meu Ensino Médio em colégio público. Cheguei aqui e tenho que estudar todo dia para conseguir vencer. Eu acho que mesmo que a pessoa saiba o conteúdo tem que estudar todo dia para manter na mente. Eu cheguei a fazer o pré-cálculo, tava mais perdido que... Levei um susto. Lá já vi que não sabia nada.*

Observamos ainda, que a entonação de algumas falas do aluno nos mostra insegurança para resolver os exercícios, e incerteza das respostas ou resultados. O aluno se mostra seguidamente reticente, repetindo e respondendo aos questionamentos com entonação de pergunta.

Os aspectos relatados, até o momento, podem ser observados no trabalho desenvolvido por Búrigo, Doering e Rempel (2005), conforme ilustrado abaixo:

> As dificuldades na aprendizagem, envolvendo não só a compreensão de conteúdos da matemática do ensino médio, mas a ausência de antecipações que orientem a escolha de uma estratégia e de avaliações que permitam corrigi-la, o reconhecimento eventual de situações que pedem um determinado tratamento e as indecisões relativas às condições de validade de regras ou relações ficam, na maioria das vezes, negligenciadas pelo ocultamento das próprias dificuldades. Isto estaria sendo sustentado por uma incompreensão ou negação das tarefas estabelecidas pela disciplina e das habilidades requeridas: os erros são minimizados porque, na ótica dos estudantes, expressariam apenas uma apropriação ainda insuficiente do uso de regras e truques e poderiam ser superados com mais treino, atenção ou sorte (BÚRIGO; DOERING; REMPEL, 2005, p. 7).

É importante ressaltar que, após concluir o Ensino Médio, o aluno ficou nove anos sem estudar.

Segue a transcrição da fala do aluno.

> *Aluno C – Fiz o Ensino Médio há uns nove anos atrás, mas acho que não aprendi mesmo, pois fiz vários concursos que tinham matemática e nunca consegui ir bem. Eu não sabia função nem trigonometria, aprendi na disciplina de Cálculo. Quando tinha o conteúdo função, eu não sabia o que era, aprendi o conteúdo por insistência.*

Apesar de ter ficado um tempo sem estudar, observamos em sua fala que, o aluno não atribui suas dificuldades a esse tempo sem estudar, pois, quando questionado, argumenta que durante esse período estudou para prestar concursos, nunca conseguindo ir bem nos conteúdos de matemática.

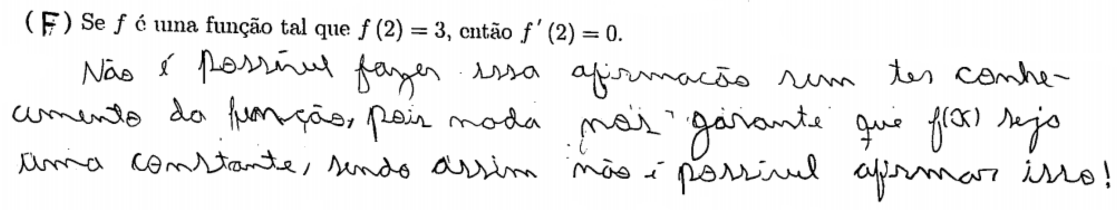
Observamos que, na maioria das vezes, o aluno não resolve questões de “verdadeiro ou falso”, ou que necessitem o uso de argumentos geométricos. Realiza, exclusivamente, questões que, no máximo, exigem a aplicação de um procedimento. De fato, a resolução de questões desse tipo não exige muita compreensão por parte do aluno acerca do que está sendo feito. Basicamente, há um procedimento a ser seguido. Algumas vezes o aluno executa bem o procedimento, porém, comete manipulações algébricas incorretas, comprometendo o restante da resolução. O que reforça a hipótese de que o aluno apresenta apenas a presença de uma concepção ação.

3.4 Análise do Material Produzido pelo Aluno D

Iniciamos analisando uma questão da segunda prova que o aluno prestou quando fez Cálculo I pela segunda vez, no segundo semestre letivo de 2013. Essa questão pede para decidir acerca da veracidade da afirmação.

O item apresentado abaixo é falso, e pelo critério de correção utilizado, supõe-se que para justificar sua resposta, o aluno exiba um contra-exemplo, isto é, uma função para a qual $f(2) = 3$, mas $f'(2) \neq 0$.

Figura 8 – Questão e resolução extraídas da prova 2 realizada pelo Aluno D em 2013/2



(F) Se f é uma função tal que $f(2) = 3$, então $f'(2) = 0$.

Não é possível fazer essa afirmação sem ter conhecimento da função, pois nada nos garante que $f(x)$ seja uma constante, sendo assim não é possível afirmar isso!

Fonte: acervo do projeto (2013).

Na primeira parte da justificativa o aluno evidencia uma concepção ação de função, pois argumenta que necessita conhecer a lei da função para decidir acerca da afirmação. Já na segunda parte da justificativa apresenta uma concepção processo de função, pois argumenta que nada nos garante que f seja uma constante, demonstrando que admite f como uma função qualquer.

As questões anexadas abaixo constam em um teste aplicado no segundo semestre letivo de 2013 a alunos da disciplina de Cálculo I. Solicitamos que o aluno as resolvesse conosco durante o encontro.

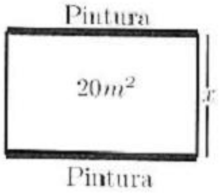
Analisamos, inicialmente, uma questão que solicita a lei da função que determina a soma das áreas das paredes que serão pintadas em função da largura x de uma sala retangular.

Uma maneira de resolver esta questão é, inicialmente, designar o comprimento da parede por y, e em seguida, escrever a expressão que representa a área do piso. Em seguida, escrevemos a área de uma das paredes em função da variável x, ou seja, isolamos na expressão anterior a variável y em função da variável x e substituímos na nova expressão. Como são duas paredes, multiplicamos por 2 a expressão obtida para a área da parede. Por fim, analisamos a expressão a fim de determinar o domínio da função encontrada. Como a variável x é uma medida e a expressão da área nos fornece apenas a restrição de que x seja positivo, temos que o domínio da função é dado por $x > 0$.

A solução do aluno está apresentada abaixo, com a inserção da marcação [*] para referência.

Figura 9 – Questão 1 e resolução extraídas do teste 1 realizado pelo Aluno D em 2013/2

Questão 1 (1 ponto) Um pintor foi contratado para pintar duas paredes internas de uma sala retangular, conforme ilustrado na figura abaixo.



Só lhe foi informado que a altura da sala é de $2,5m$ e a área de seu piso é $20m^2$. Com base nestas informações é possível determinar a soma das áreas da paredes que serão pintadas em função da largura x da sala, indicada na figura? Em caso afirmativo, determine tal função, não esquecendo seu domínio.

$\boxed{20}\; x$, x

$20 = x \cdot y$

[*] $y = \frac{20}{x}$ (y) é o tamanho do comprimento da Parede!

2,5m é a altura!

Então:

$\frac{20}{x} \cdot \frac{2,5}{1} = \frac{50}{x}$

$20 \times 2,5 = 100 + 40 = 50,0$

Como são duas Paredes:

$\frac{2}{1} \cdot \frac{50}{x} = \boxed{\frac{100}{x}}$ $\quad A = \frac{100}{x}$

Dom: $x > 0$

$x > 0 \Rightarrow$ como a área é o produto dos lados então qualquer valor positivo pode assumir a propriedade!

$x > 0$

Fonte: acervo do projeto (2013).

Inicialmente, o aluno escreve a equação da área do piso da sala em relação as variáveis x e y, e em seguida, isola a variável y em função da variável x [*]. De acordo com o enunciado da questão, a altura da sala é de $2,5\ m$. A área de uma das paredes a ser pintada corresponde a $y \cdot 2,5$. Fazendo uso desta informação e de [*], o aluno encontra a área de uma das paredes a ser pintada em função da largura x. Como são duas paredes, o aluno multiplica por 2 o resultado encontrado $\left(\frac{50}{x}\right)$, obtendo assim, $A = \frac{100}{x}$, com $x > 0$.

Segue a transcrição da descrição verbal do aluno sobre a sua resolução.

> *Aluno D – A primeira questão pedia se era possível determinar a área a ser pintada em função da área do piso, da área da parede e do piso. Então, eu obtive o comprimento da área do piso, o comprimento lateral que denominaram y, isolei a variável e encontrei o comprimento. Como a altura aqui no problema já era dada (especificada), eu apenas multipliquei com a fórmula da área, comprimento vezes a altura. Como eram duas paredes, multipliquei por dois e encontrei o resultado $\frac{100}{x}$. Como o domínio ele é proporcional, ele é um produto, não interessa o tamanho do cateto, o que importa é que eles sejam proporcionais. Então, portanto, o domínio tem que ser apenas maior que zero, o outro vértice vai ser proporcional.*

O aluno faz uso das informações fornecidas pelo enunciado do problema de maneira adequada, demonstrando ter consciência sobre o que se refere o problema, e sobre como prosseguir em sua resolução, descrevendo os passos que precisam ser feitos para obter o resultado, bem como as justificativas apresentadas e conclusões obtidas. O aluno demonstra, ainda, clareza e organização tanto na fala quanto na escrita apresentada, e nos mostra uma boa desenvoltura algébrica (isola as variáveis e substitui os dados corretamente). A fala do aluno nos mostra, ainda, que ele apresenta uma justificativa a cada passo executado, indicando que refletiu a respeito do que foi feito. O que indica a presença de uma concepção processo.

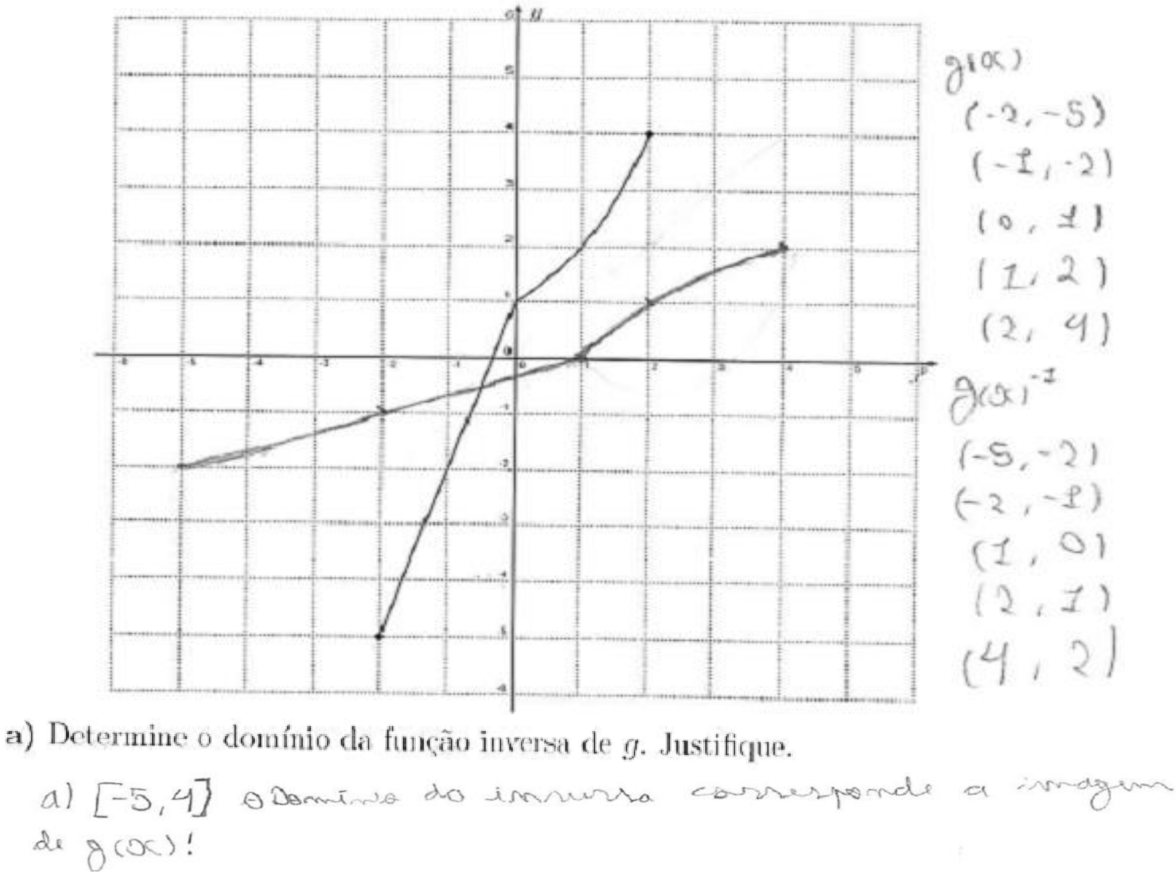
A próxima questão aqui apresentada solicita o domínio da função inversa de uma função dada por partes.

Para resolver esta questão podemos utilizar que, dada uma função invertível g, $\begin{cases} Dom\ g^{-1} = Im\ g \\ Im\ g^{-1} = Dom\ g \end{cases}.$

Figura 10 – Questão 2 (a) e resolução extraídas do teste 1 realizado pelo Aluno D em 2013/2

Questão 2 (1 ponto) Considere a função invertível g e seu gráfico:

$$g(x) = \begin{cases} 3x + 1, & x \in [-2, 0] \\ 2^x, & x \in (0, 2] \end{cases}$$



Fonte: acervo do projeto (2013).

Segue a transcrição da descrição verbal do aluno sobre a sua resolução.

> *Aluno D – Bem, aqui a primeira questão pedia para eu determinar o domínio da função inversa de g. O domínio da função inversa de g é justamente a imagem de g, então, eu obtive os dados da imagem, inverti as coordenadas e encontrei o domínio facilmente.*

Podemos observar, acima, que o aluno procurou explicar de forma genérica o método empregado na resolução da questão, para somente ao final da explicação fazer menção aos dados numéricos apresentados no problema. É possível observar ainda, que ele anota em sua resolução que o domínio da inversa corresponde à imagem de g, ou seja, deixa claro, ao resolver o problema, qual argumento matemático está sendo utilizado.

O item abaixo solicita o gráfico de g^{-1}.

Figura 11 – Questão 2 (b) e resolução extraídas do teste 1 realizado pelo Aluno D em 2013/2

b) Esboce, na grade acima, o gráfico de g^{-1}.

Fonte: acervo do projeto (2013).

Segue a transcrição da descrição verbal do aluno sobre a sua resolução.

> *Aluno D – Esse daqui tem o método tradicional que tu pode fazer que é esse daqui que eu fiz de inverter os pontos, trocar as ordenadas pelas abscissas, como tu também pode pegar e traçar a bissetriz e aí tu pode refletir o gráfico, que essa vai ser a proporção, mas eu me sinto mais seguro fazendo esse método da inversão aqui.*

A fala do aluno e a sua resolução nos mostram que ele acredita que a inversão das coordenadas de alguns pontos e a reflexão do gráfico em torno da reta bissetriz são procedimentos equivalentes, o que não é correto, pois não inverte “todos” os pontos do domínio de g (inverte apenas os pontos em que as coordenadas são inteiras).

A entrevistadora solicita ao aluno uma justificativa para o modo escolhido para unir os pontos, já que esses dois pontos poderiam ter sido unidos, nesse caso, por um segmento de curva de três maneiras distintas: ou reto, ou côncavo para baixo ou côncavo para cima.

O aluno se conscientiza, ao ser convidado a justificar sua escolha do traçado do gráfico entre dois pontos com coordenadas invertidas, que a primeira técnica aplicada a apenas alguns pontos é base para a segunda. A discussão em torno da questão permite, ainda, que o aluno perceba que a inversão das coordenadas de alguns pontos não é suficiente para traçar o gráfico de g^{-1} e que, então, a reflexão do gráfico de g em torno da reta bissetriz é que indica a maneira correta de unir dois pontos no gráfico de g^{-1}.

Pelo trabalho desenvolvido com o aluno, não podemos dizer que ele recorra a exemplos para o entendimento do conteúdo, mas sim que considera importante em sua rotina de estudos o processo de resolver exercícios. O aluno, durante os encontros, mencionou que realizava os exercícios indicados no livro, os exercícios das listas do Programa de Apoio à Graduação (PAG), e os exercícios dados em aula pela professora.

O aluno relata ainda, conforme transcrito abaixo, que procurou estudar conceitos matemáticos básicos, anteriores ao Cálculo I, e considerados essenciais para o avanço na disciplina, pois percebeu que esse era um ponto no qual apresentava dificuldades. Para realizar este estudo, o aluno utilizou-se das definições e propriedades trazidas pelos livros didáticos.

Segue a transcrição da fala do aluno.

> *Aluno D – Faltava desde função até trigonometria; racional; colocar no mesmo denominador. Fiquei as férias inteiras estudando matemática básica. Eu consegui superar as dificuldades, mas não foi tão fácil como teria sido se tivesse tido uma boa preparação antes de chegar aqui.*

> *Aluno D – No Ensino Médio a gente meio que faz porque tem que fazer, já em Cálculo a gente faz porque tem que passar, ou porque quer aprender. Então, tu acaba estudando mais, acaba se interessando mais. No Ensino Médio era uma coisa mais simples, tu estudava um pouco e eles te “chutavam”. Aqui a coisa é mais rígida.*

A transcrição acima nos mostra, ainda, que há uma diferença na forma como o aluno encarava as atividades realizadas no Ensino Médio e a maneira como ele encara a disciplina de Cálculo I. Para atender as exigências estabelecidas pela disciplina, o aluno criou estratégias que lhe permitiram superar antigas dificuldades e encarar os novos desafios estabelecidos pela disciplina de Cálculo I.

Observou-se que, durante os cursos de Cálculo I e Cálculo II, o aluno elaborou resumos que o auxiliaram na hora de estudar. Estes resumos não foram recolhidos, mas foram vistos por nós durante os encontros realizados com o aluno.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesse trabalho analisamos o material produzido por quatro alunos que apresentaram posturas diferentes frente à disciplina de Cálculo I. O Aluno A, por exemplo, apresenta um método de estudo bem consistente, o qual surge da necessidade de suprir a ausência de professor de matemática durante o Ensino Médio, o que lhe proporcionou um maior engajamento com a disciplina e uma certa autonomia nos estudos. O Aluno B tem a necessidade de transformar a resolução dos problemas em procedimentos rotineiros, o que já é percebido durante o Ensino Médio. O Aluno C parece não ter desenvolvido um método próprio de estudo, o que pode estar relacionado com a falta de compreensão, já evidenciada no Ensino Médio, dos conteúdos matemáticos. O Aluno D demonstra ter consciência acerca de suas dificuldades, provenientes do Ensino Médio, adotando estratégias que lhe permitiram superar essas dificuldades (estudou durante as férias conceitos matemáticos "básicos") e adaptar-se ao nível de exigência da disciplina de Cálculo I.

Para atingir o objetivo proposto nesse trabalho, buscamos responder a seguinte pergunta: qual a relação entre as experiências prévias de escolarização e as concepções de Cálculo de estudantes?

Em todos os casos analisados foi evidenciada, por meio do relato dos alunos, a diferença entre o nível e o tipo de exigência do Ensino Médio e os da disciplina de Cálculo I. Conforme a fala dos estudantes analisados nesse trabalho, enquanto no Ensino Médio havia uma certa "facilidade" para eles em obter aprovação, despendendo pouco tempo de dedicação aos estudos, na disciplina de Cálculo I é necessário adaptar-se a uma grande quantidade de conteúdos em um curto espaço de tempo, o que exige um maior tempo de dedicação aos estudos. Outro aspecto importante evidenciado foi que, na maioria das vezes, no Ensino Médio, cursado por esse grupo de estudantes, não era proposto/apresentado uma aplicação provida de significado dos conteúdos trabalhados, simplesmente, era exigido uma aplicação imediata dos conceitos. Indicando que a forma como os conceitos foram concebidos no Ensino Médio, cursado por eles, não exigia que o aluno desenvolvesse mais do que uma concepção ação. Já na disciplina de Cálculo I da UFRGS, em geral, as questões às quais os alunos serão submetidos são mais complexas do que as trabalhadas no Ensino Médio, exigindo uma habilidade algébrica desenvolvida e certa antecipação sobre a escolha da técnica a ser empregada. Além disso, em Cálculo I é exigido que o aluno interprete e entenda os conteúdos, mais avançados, apresentados, fazendo-se necessário assim, uma transição para uma concepção processo. Essa necessidade de interpretar e entender os conteúdos, também deveria estar presente no Ensino Médio, porém, nesse caso, isso não ocorreu.

Observamos ainda, que todos os alunos analisados nesse trabalho, relatam dificuldades nos conteúdos função e trigonometria e as atribuem a um Ensino Médio precário, no qual os conteúdos foram concebidos de uma maneira estática, exigindo por parte do aluno apenas o desenvolvimento de uma concepção ação.

Acreditamos que investigações referentes à transição do Ensino Médio para o Ensino Superior e suas implicações nas concepções de Cálculo de estudantes, podem abrir novas perspectivas e contribuir para a compreensão da dinâmica dos processos de ensino e de aprendizagem nessa disciplina. Esse tipo de pesquisa mostra-se bastante relevante na eficácia do aprendizado do aluno, pois, nos últimos anos, estudos nessa área ganharam força e espaço no contexto de ensino e de aprendizagem e têm-se mostrado úteis na compreensão dos mecanismos que regulam o comportamento dos estudantes. As análises apresentadas nesse trabalho e o acompanhamento realizado com os alunos no segundo semestre letivo de 2013, instigam a realização de novas investigações na área de ensino/aprendizagem de Cálculo. De fato, seguiremos estudando esse tema, estamos engajados em um novo projeto que vem nos permitindo dar continuidade ao estudo de estratégias e estilos de aprendizagem matemática do grupo de alunos participantes do projeto anterior.

5 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. Cálculo. 8ª edição. Porto Alegre: Bookman, 2007.

BARALDO, Bruno Pimentel Franceschi. Sobre a Necessidade e a Viabilidade de um Ensino Dinâmico de Funções. Porto Alegre, 2009. Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

BIKLEN, Sari K.; BOGDAN, Robert C. Investigação Qualitativa em Educação - uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, 1994. pp. 47-74.

BÚRIGO, Elisabete Z.; DOERING, Luisa R. A Experiência das Turmas Especiais de Cálculo. In: Seminário Nacional de Pedagogia Universitária (4. : 2006 out. 9-11: Porto Alegre, RS). [Anais] Aprendizagem na educação superior: desenvolvimento profissional do docente e o desempenho dos alunos [recurso eletrônico]. Porto Alegre: PUC/RS, 2006 9 p.

______; ______; REMPEL, Ana L. A resolução de problemas segundo estudantes de Cálculo. In: CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, V, 2005, Porto. **Actas.** Porto: 2005. Disponível em <http://www.mytwt.net/cibem5/>

DUBINSKY, E. Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In: Advanced Mathematical Thinking. Netherlands: Kluwer, 1991. p. 95-123.

TALL, David. A Transição para o Pensar Matemático Avançado: funções, limites, infinito e demonstração. In: Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. New York, 1992, p. 495-511.