

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA

**Modelagem Bayesiana da confiabilidade
de produtos a partir de dados de campo
de utilização de garantia**

Patrícia Klaser Biasoli

Porto Alegre, março de 2003

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA

**MODELAGEM BAYESIANA DA CONFIABILIDADE DE PRODUTOS A PARTIR DE
DADOS DE CAMPO DE UTILIZAÇÃO DE GARANTIA**

Patrícia Klaser Biasoli

Orientador: Professora Márcia Elisa Echeveste

Co-Orientador: Professor Dr. Flávio Sanson Fogliatto

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Patrícia K. Ziegelmann

**Trabalho de Monografia de conclusão para o Curso de Bacharelado em Estatística
como requisito à obtenção do título de Bacharel em Estatística**

Porto Alegre, março de 2003

AGRADECIMENTOS

A realização desse trabalho só foi possível devido a colaboração de diversas pessoas. Estou consciente que não contemplarei todos que fizeram parte dessa jornada, mas devo meus sinceros agradecimentos a todos que participaram direta e indiretamente da realização desse trabalho. Dentre esses gostaria de agradecer especialmente

ao meu namorado, Andrei, pelo compreensão e paciência nos momentos difíceis;

aos meus pais, por compreenderem a minha ausência em casa e no veraneio;

ao Prof. Dr. Flávio S. Fogliatto, por sua dedicação e pelas suas valiosas orientações;

à Prof Márcia, por se mostrar amiga, além de orientadora;

ao Eduardo Falcetta por disponibilizar os dados do seu próprio trabalho;

à Prof Dr. Patrícia, pela sua contribuição na parte de estatística Bayesiana;

a tia Clara pela imprescindível correção ortográfica;

ao LOPP/PPGEP/ UFGRS por me conceder espaço físico para realização desse trabalho.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	5
LISTA DE TABELAS	5
1. COMENTÁRIOS INICIAIS	6
1.1 INTRODUÇÃO	6
1.2 TEMAS E OBJETIVOS	7
1.3 JUSTIFICATIVA	8
1.4 MÉTODO	9
1.5 LIMITAÇÕES DO TRABALHO	10
1.6 ESTRUTURA DO TRABALHO	10
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	12
2.1. ESTIMATIVA DE CONFIABILIDADE	13
2.2. TEMPO-ATÉ-FALHA	13
2.3 FUNÇÕES DE CONFIABILIDADE	16
2.3.1 <i>Função de Confiabilidade</i>	16
2.3.2 <i>Função de Risco</i>	18
2.3.3 <i>Tempo Médio até Falha</i>	20
2.3.4 <i>Tempo Médio entre Falhas</i>	21
2.4 DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE UTILIZADAS EM ANÁLISES DE CONFIABILIDADE	21
2.4.1 <i>Distribuição Exponencial</i>	22
3. MODELAGEM DE DADOS DE TEMPO-ATÉ-FALHA	24
3.1 ESTIMATIVAS DE PARÂMETROS DE DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE	24
3.1.1 <i>Método da Máxima Verossimilhança</i>	24
3.1.2 <i>Estimador de Máxima Verossimilhança para Distribuição Exponencial</i>	27
3.2 TIPOS DE CENSURA	28
3.3 PAPEL DE PROBABILIDADE	31
3.4 TESTES DE ADERÊNCIA	32
3.4.1 <i>Teste de Aderência do Qui-Quadrado</i>	33
3.4.2 <i>Teste Kolmogorov-Smirnov</i>	34
3.5 MODELAGEM BAYESIANA DE DADOS DE CAMPO DE TEMPO-DE-FALHA	36
3.5.1 <i>Estatística Bayesiana</i>	36
3.5.2 <i>Distribuição a Priori e a Posteriori</i>	38
3.5.3 <i>Estimadores Bayesianos X Estimadores de Máxima Verossimilhança</i>	41
3.5.4 <i>Intervalo de Confiança e Intervalo de Credibilidade</i>	41
4. ESTUDO DE CASO	44
4.1 ORGANIZAÇÃO DOS DADOS UTILIZADOS NO ESTUDO	44
4.2 ESPECIFICAÇÃO DOS MODELOS DE DISTRIBUIÇÃO DOS COMPONENTES	46
4.3 MODELAGEM BAYESIANA PARA DADOS DE TEMPOS-ATÉ-FALHA COM DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL	50
4.3.1 <i>Definição da Distribuição a Priori e a Posteriori</i>	50
4.3.2 <i>Análise dos Resultados</i>	53

4.4 ROTEIRO DE MODELAGEM BAYESIANA	53
5. COMENTÁRIOS FINAIS	55
5.1 CONCLUSÕES	55
5.2 DISCUSSÃO	56
5.3 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	56
6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	57

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Relação entre o estado da variável $X(t)$ e o tempo-até-falha t de um componente (Fonte: Hoyland e Rausand, 1994).	14
Figura 2: Exemplo de Função Acumulada de Falha $F(t)$	15
Figura 3: Exemplo de Função Densidade de Probabilidade $f(t)$	15
Figura 4: Exemplo de Função de Confiabilidade $R(t)$	18
Figura 5: Curva de Falha (Curva da Banheira).	19
Figura 6: Comportamento Médio do Tempo-até-Falha do Componente	21
Figura 7: Taxonomia dos tipos de censura (Fonte: Leemis, 1995).	30
Figura 8: Exemplo de Papel de Probabilidade.	32
Figura 9: Diagrama de Blocos do produto analisado.....	45
Figura 10: Gráficos de Papel de probabilidade Weibull e Exponencial com os dados originais, respectivamente.....	47
Figura 11: Papel de probabilidade Weibull e Exponencial com os dados ajustados, respectivamente (até $t=203$).....	48
Figura 12: Gráfico da Distribuição a Posteriori	52
Figura 13: Roteiro de Modelagem Bayesiana aplicado neste estudo.	54

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Características das Funções de Risco.	22
Tabela 2: Resultados dos testes de aderência para os dados de tempos-até-falha da componente hélice ($n=1284$)	48
Tabela 3: Resultados dos testes de aderência para os dados de tempos-até-falha da componente hélice, após a implementação da heurística de modelagem ($n=1253$)	48

1. COMENTÁRIOS INICIAIS

1.1 Introdução

Para se manter em um mercado competitivo, as empresas devem investir na qualidade de seus produtos. Uma forma de avaliar essa qualidade é analisando o número de falhas operacionais que ocorrem durante a sua vida útil. A falha de um produto no período de garantia implica em custos, diretos e indiretos para a empresa. Esta deve financiar a reposição ou manutenção da peça em que a falha ocorreu, além de perder a credibilidade de seus clientes, o que pode gerar perda de consumidores. A garantia de qualidade deve se perpetuar, mesmo no período pós-vendas, uma vez que é um fator decisivo na consolidação da imagem da empresa junto ao consumidor.

Como parte do esforço para melhorar a qualidade de seus produtos e serviços e a fim de permanecerem competitivos, as companhias começam a estender os limites de garantia, de forma a aumentar a satisfação dos consumidores e a confiança em seus produtos (Wasserman e Sudijanto, 1996). A estimativa adequada da *performance* do produto em campo permite identificar oportunidades de aumento da confiabilidade e qualidade do produto (Lawless, 1998). A ampliação dos prazos de garantia pode ser uma estratégia de marketing e, no momento que atingem as expectativas dos clientes, aumentam a fidelidade e o mercado consumidor. O estudo do tempo de garantia nasce no projeto e na fabricação de novos produtos. A consideração da garantia na fase de projeto é capaz de reduzir o índice de falha durante todo processo produtivo assegurando melhores resultados de desempenho do produto no período pós-venda.

Uma das ferramentas utilizadas na redução dos índices de falha em produtos manufaturados é a Análise de Confiabilidade. Esta, essencialmente, é um exercício de modelagem estatística. Sendo assim, é necessário o acesso a dados referentes ao

desempenho do produto analisado. Esses dados são coletados na forma de tempo-até-falha e podem ser obtidos através de testes acelerados ou dados de campo. Testes acelerados são realizados em laboratórios sob condições controladas e podem ter altos custos, além de apresentarem dificuldade no controle das variáveis, o que limita, muitas vezes, o seu uso. Enquanto que os dados de campo são obtidos através dos dados de registro de utilização da garantia do produto.

A falta de dados é um problema encontrado na determinação do tempo de garantia dos produtos. Esta situação ocorre devido: (i) à dificuldade de se obter dados de campo; (ii) à velocidade das mudanças tecnológicas, o que exige que os dados sejam coletados rapidamente antes que o produto se torne obsoleto (Droguett, 2001). Sendo assim, é necessário utilizar técnicas estatísticas adequadas a esse tipo de dado, para que seja possível fazer previsões acerca da confiabilidade do produto.

Uma dificuldade adicional na análise é o fato de lidar com dados censurados na modelagem. Ou seja, alguns poderão ser analisados antes da ocorrência da falha propriamente dita. Assim, não se tem nenhuma informação do produto até que pelo menos uma falha ocorra ou que o período de análise expire.

1.2 Temas e Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é elaborar uma revisão bibliográfica acerca de conceitos básicos relacionados à confiabilidade e a inferência Bayesiana

Como objetivo secundário, pretende-se aplicar os conhecimentos adquiridos na revisão bibliográfica e realizar a modelagem e análise de confiabilidade de dados de garantia. No presente estudo, dados de garantia foram considerados como sendo os registros de tempos-até-falha, observados em unidades de produtos durante o período de garantia determinado pelo fabricante. Os dados utilizados são provenientes de dados de desempenho em campo de produtos, sendo submetidos à censura severa, ou seja, o estudo é interrompido no período estipulado independentemente da ocorrência ou não de uma falha.

Tratando-se de dados extremamente censurados, propõe-se a utilização da estatística Bayesiana para a estimação dos parâmetros. Essa técnica possibilita que a opinião de especialistas auxilie na estimação dos parâmetros da distribuição de probabilidade que modela a confiabilidade do produto analisado. Neste trabalho, utiliza-se a estatística Bayesiana na modelagem dos tempos-até-falha de um componente utilizado na manufatura de aparelhos de ar condicionado.

Também faz parte do objetivo desse trabalho propor a elaboração de um roteiro para orientar pesquisadores a analisarem dados de garantia com a utilização de princípios da estatística Bayesiana.

A aplicação de estatística Bayesiana para análise de dados de confiabilidade é exemplificada por um estudo de caso de dados de garantia de aparelhos de ar condicionado.

1.3 Justificativa

Inicialmente, a escolha do tema a ser estudado foi motivada por sua importância acadêmica, uma vez que o assunto ainda não foi totalmente explorado na literatura. Sendo assim, este trabalho visa a ser mais um referencial teórico de modelagem de dados de garantia, com a aplicação da estatística Bayesiana.

Do ponto de vista prático, o assunto se torna relevante devido a seu potencial de aplicação em empresas de manufatura. Três razões são fundamentais para sustentar esta pesquisa: *(i)* as empresas dispõem de dados de tempos-até-falha, mas não sabem como explorá-los de forma apropriada; *(ii)* a utilização adequada dos dados de garantia pode ser um diferencial no mercado nacional e internacional; *(iii)* em uma época de globalização, os custos de reparo e reposição aumentam por questões geográficas. Produtos são comercializados em cidades e países diferentes do local de fabricação. Sendo assim, o custo de envio do produto para o local de origem, em caso de falha do mesmo, é inviável tanto para o consumidor como para o fabricante. Esse custo pode ser quantificado em unidades monetárias, assim como em tempo desperdiçado para resolver a situação.

A determinação do tempo de garantia é necessária para a avaliação do desempenho do produto. Consumidores esperam que os produtos adquiridos funcionem conforme

indicação do fabricante (Droguett, 2001). Assim, as empresas devem garantir que os produtos não falhem durante um determinado período de tempo.

A utilização de dados de campo justifica-se pelo fato de que estudos de laboratório são caros e não retratam literalmente todas as condições de uso do produto. Os dados de campo, além de capturar vários perfis de comportamento de uso real, representam a *performance* do produto exposta a diversos ambientes que podem ser de difícil reprodução em laboratório. Uma forma de se obter dados de campo é através dos registros de atendimento à garantia. Registros de atendimento são dados que contém informações a respeito da finalidade da compra, tempo aproximado de uso, frequência de uso,....

1.4 Método

O método que foi desenvolvido nesse trabalho de conclusão é de *natureza aplicada* com uma *abordagem quantitativa*.

O método de trabalho foi desenvolvido a partir de quatro etapas. A primeira etapa envolve uma *revisão bibliográfica* a respeito dos principais conceitos da teoria da confiabilidade e de estatística Bayesiana, necessários para compreensão e elaboração do trabalho. A revisão bibliográfica foi baseada na leitura de artigos científicos e livros.

A segunda etapa consistiu na apresentação de *métodos estatísticos* relacionados à solução do problema de pesquisa proposto.

Numa terceira etapa, efetuou-se o *levantamento de técnicas* necessários à aplicação da metodologia proposta. Foram utilizadas técnicas estatísticas para verificar o ajuste dos dados à distribuição Exponencial. Em paralelo à análise dos modelos quantitativos, realizou-se a busca de informações junto a especialistas que pudessem melhorar a precisão do modelo proposto.

Após o levantamento bibliográfico e organização escrita das técnicas necessárias, desenvolveu-se a implementação da mesma em um *estudo de caso*, a fim de exemplificar o método. Nesta etapa, foi apresentada uma aplicação prática do modelo Bayesiano proposto no trabalho.

Para finalizar, apresentou-se as considerações aprendidas durante a execução do estudo. A partir de informações oriundas da implementação do método, propõem-se um roteiro para conduzir pesquisadores com problemas similares de análise.

1.5 Limitações do Trabalho

Neste trabalho não são abordadas situações nas quais os tempos-até-falha são descritos por misturas de distribuições de probabilidade. Também não é focalizada a estimação não-paramétrica da função de confiabilidade a partir de dados censurados.

A metodologia proposta é aplicada em dados de garantia de aparelhos de ar condicionado, sendo assim, podendo ser restrita a este contexto de aplicação. No estudo de caso, o tempo de prateleira - o período de tempo transcorrido entre a data de produção e o início de operação do produto - e o tempo real de utilização e atrasos no registro da utilização da garantia não foram considerados na análise realizada. Utilizam-se dados de desempenho em campo, não sendo simulados dados em laboratório. Além disso, as análises estatísticas estão restritas aos dados gerados em um período de um ano e meio de garantia.

1.6 Estrutura do Trabalho

O presente trabalho foi organizado em 5 capítulos, cujos conteúdos estão delineados a seguir.

No primeiro capítulo, encontram-se as considerações iniciais, objetivos e metodologia de pesquisa empregada. É feita uma introdução ao tema e explicita-se a sua relevância, tanto para o meio acadêmico como para o meio profissional. São também apresentadas as limitações do trabalho.

No segundo capítulo, apresenta-se uma revisão bibliográfica dos conceitos de confiabilidade importantes para a compreensão do tema.

O terceiro capítulo contempla alguns conceitos relacionados com modelagem dos tempos de falha e, em particular, à modelagem Bayesiana para dados de tempo-até-falha.

O quarto capítulo focaliza uma aplicação do modelo em um estudo de caso em aparelhos de ar condicionado.

O quinto capítulo expõe os comentários finais, com apresentação das conclusões do trabalho, juntamente com sugestões para futuros trabalhos.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Confiabilidade pode ser definida como a probabilidade de um produto ou serviço operar por um período específico de tempo (definido como vida) sob condições operacionais projetadas tais como temperatura e voltagem, sem falhar (Elsayed, 1996).

Leemis, (1995) define confiabilidade como uma probabilidade. Assim, os axiomas da probabilidade se aplicam ao cálculo da confiabilidade, em particular, isso significa que todas as confiabilidades devem variar entre 0 e 1.

Quando se define confiabilidade é importante salientar alguns aspectos relevantes, tal como o objeto de estudo (item), que pode ser um produto ou serviço. Em algumas situações, o item é um componente de um produto e, em outras, um conjunto de componentes. Especificar o desempenho adequado de um item implica em conhecer quando ele falha. Para tanto, é necessário definir a finalidade para a qual o produto ou serviço foi projetado e quais as suas condições previstas de operação. As condições ambientais também devem ser especificadas: temperatura, pressão, etc, pois irão afetar o tempo de vida do produto. O desempenho do item está relacionado com o modelo matemático usado para modelar a sua falha (Leemis, 1995).

As definições de confiabilidade também incluem o tempo. Sendo assim, deve-se determinar a unidade de tempo do item para proceder a modelagem. A variável aleatória T indica o tempo até falha. É necessário, também, associar um tempo de duração ao valor da confiabilidade. Assim, não é suficiente, por exemplo, afirmar que a confiabilidade de um item é de 0,7. Ela somente tem significado quando se refere a um período de tempo particular, tal como 100 horas de operação (Leemis, 1995).

Confiabilidade é freqüentemente confundida com qualidade. A principal diferença é que o conceito de confiabilidade incorpora a passagem do tempo, enquanto que o de

qualidade não. Qualidade é uma descrição estática do item. Alta confiabilidade implica em alta qualidade, mas o inverso não é necessariamente verdadeiro (Leemis, 1995).

Uma das principais aplicações de confiabilidade é na prevenção de falhas, que podem ser definidas como o término da disponibilidade de um item para realizar a sua função requerida. As falhas são classificadas de acordo com seus modos de ocorrência. Entende-se por modos de falhas os eventos que levam a diminuição parcial ou total da função do produto e de suas metas de desempenho (Helman e Andery, 1995), por exemplo, fratura, fissuras, trincas....

2.1. Estimativa de Confiabilidade

As principais funções utilizadas em estudos de confiabilidade são:

- Tempo-até-falha, T
- Função de confiabilidade, $R(t)$
- Função de risco, $h(t)$
- Tempo médio até falha, $MTTF$
- Tempo médio entre falhas, $MTBF$.

Uma breve definição de cada item será dada na seqüência.

2.2. Tempo-até-Falha

Tempo-até-falha é definido como o tempo transcorrido a partir do momento em que o item é colocado em operação até a sua primeira falha. O tempo-até-falha é sujeito a sofrer variações, sendo assim, pode ser considerado uma variável aleatória, denominada T . O estado da unidade no tempo t pode ser descrito pelo estado da variável $X(t)$, da seguinte maneira:

$$X(t) = \begin{cases} 1, & \text{se a unidade estiver funcionando no instante } t \\ 0, & \text{se a unidade não estiver funcionando no instante } t \end{cases}$$

A relação entre o estado da variável $X(t)$ e o tempo-até-falha t é mostrada na Figura

1.

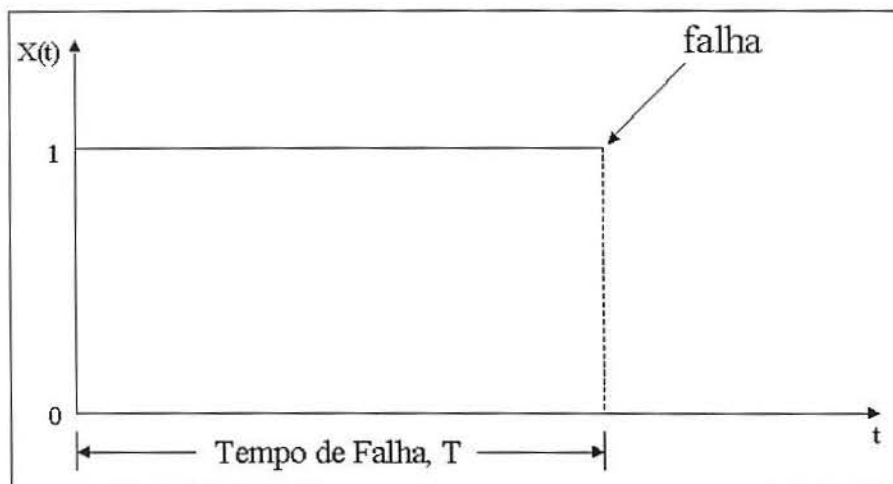


Figura 1: Relação entre o estado da variável $X(t)$ e o tempo-até-falha t de um componente (Fonte: Hoyland e Rausand, 1994).

O tempo-até-falha não precisa necessariamente ser medido em unidade de tempo. Ele pode ser mensurado em número de quilômetros percorridos, número de ciclos, número de rotações, etc. O tempo pode ser medido por variáveis discretas, entretanto assume-se que o tempo-até-falha T é continuamente distribuído com densidade de probabilidade $f(t)$ e função de distribuição dada pela Equação 2.1:

$$F(t) = P(T \leq t) = \int_0^t f(u) du \quad \text{para } t > 0. \quad (2.1)$$

$F(t)$ informa a probabilidade de falha do componente no intervalo de tempo $(0, t]$.

A densidade de probabilidade é definida como:

$$f(t) = \frac{d}{dt} F(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t < T \leq t + \Delta t)}{\Delta t}. \quad (2.2)$$

Isso implica que quando Δt é pequeno, tem-se a seguinte aproximação:

$$P(t < T \leq t + \Delta t) \approx f(t) \cdot \Delta t \quad (2.3)$$

A Função Acumulada de Falha $F(t)$ está exemplificada na Figura 2 e a Função Densidade de Probabilidade $f(t)$, na Figura 3.

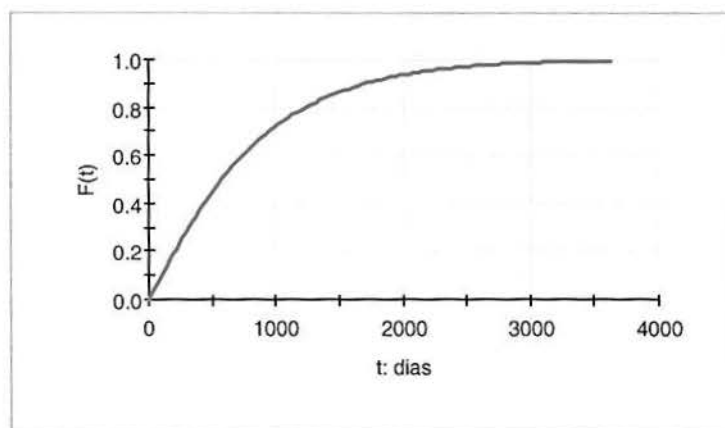


Figura 2: Exemplo de Função Acumulada de Falha $F(t)$.

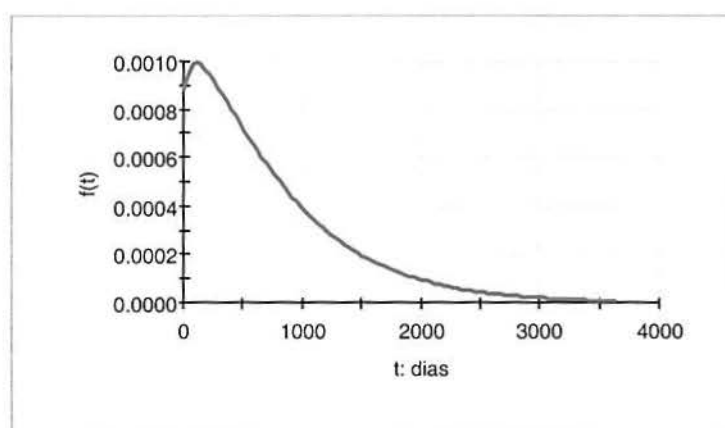


Figura 3: Exemplo de Função Densidade de Probabilidade $f(t)$.

2.3 Funções de Confiabilidade

2.3.1 Função de Confiabilidade

Para definir a função de confiabilidade, é necessário fazer algumas suposições: (i) um item que entra no estado de falha, não volta a funcionar, por conseguinte não é reparável; (ii) os componentes devem ser independentes, isto é, a falha de um componente não influi na probabilidade de falha dos demais. Esta última suposição é importante no ponto de vista matemático, mas muitas vezes não pode ser satisfeita na prática (Leemis, 1995).

A função de confiabilidade $R(t)$ informa a probabilidade de sucesso na operação de uma unidade no intervalo de tempo $(0, t)$ ou, a probabilidade que ela sobreviva no intervalo de tempo $(0, t)$ e, ainda, esteja funcionando no tempo t . (Hoyland e Rausand, 1994).

A função de confiabilidade $R(t)$ também é denominada de função de sobrevivência, porém, na verdade, a função de sobrevivência $S(t)$ é uma generalização da função de confiabilidade. Segundo Leemis (1995), enquanto confiabilidade é definida como a probabilidade de um item estar funcionando num tempo em particular, a função de sobrevivência é a probabilidade de que um item esteja funcionando em qualquer tempo t , ou seja:

$$S(t) = P(T \geq t), \quad t \geq 0 \tag{2.4}$$

$$R(t) = P(T > t) = 1 - F(t), \quad t > 0 \tag{2.5}$$

A análise de sobrevivência é geralmente utilizada na área médica, onde o tempo-de-falha é geralmente o tempo até a morte do paciente, bem como, até a cura ou recidiva de uma doença. Em estudos de câncer, por exemplo, é usual registrar as datas correspondentes ao diagnóstico da doença, à remissão (após o tratamento, o paciente fica livre dos sintomas da doença), à ocorrência da doença (recidiva) e à morte do paciente (Soares e Colosimo, 1995).

Suponha que n_0 componentes idênticos são testados quanto a sua confiabilidade, nas condições propostas de uso. Durante o intervalo de tempo $(t-\Delta t, t)$ observa-se:

n_0 = número de componentes testados;

n_f = número de componentes que falharam durante o intervalo de tempo $(t-\Delta t, t)$;

n_s = número de componentes que não falharam (sobreviveram) durante o intervalo de tempo $(t-\Delta t, t)$.

Sendo que $n_0 = n_f + n_s$.

A função de confiabilidade é definida como a função de probabilidade acumulada de sucesso, no tempo t , sendo dada por (Elsayed, 1996):

$$R(t) = \frac{n_s(t)}{n_s(t) + n_f(t)} = \frac{n_s(t)}{n_0}. \quad (2.6)$$

Sendo T , o tempo-até-falha, uma variável aleatória, pode-se definir $R(t)$ como:

$$R(t) = P(T > t). \quad (2.7)$$

A função distribuição acumulada é definida como

$$F(t) = \frac{n_f(t)}{n_0}. \quad (2.8)$$

Sendo assim, a $F(t)$ pode ser definida com o complemento de $R(t)$:

$$R(t) + F(t) = 1. \quad (2.9)$$

Se o tempo de falha T tem uma função de densidade de probabilidade (f. d. p.), pode-se reescrever $R(t)$ como:

$$R(t) = 1 - F(t) = 1 - \int_0^t f(u) du. \quad (2.10)$$

A Figura 4 mostra um exemplo de uma função de confiabilidade $R(t)$.

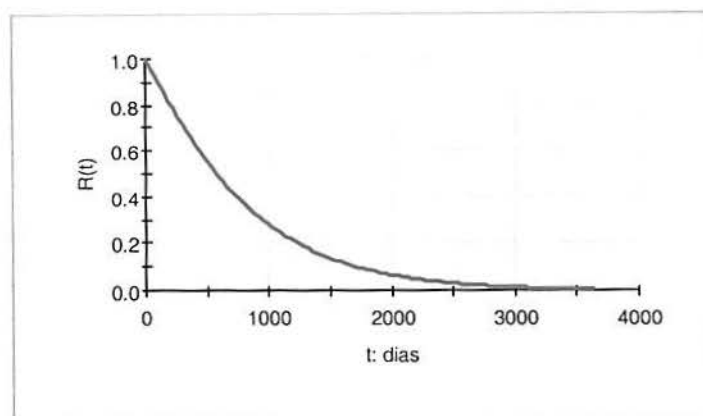


Figura 4: Exemplo de Função de Confiabilidade $R(t)$.

2.3.2 Função de Risco

A função de risco (*Hazard Function* ou *failure rate*) é a probabilidade condicional de falha no intervalo de tempo t ($t, t + \Delta t$), dado que a unidade esteja funcionando no instante t , e definida como:

$$P(t < T \leq t + \Delta t | T > t) = \frac{P(t < T \leq t + \Delta t)}{P(T > t)} = \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{R(t)}. \quad (2.11)$$

Dividindo esta probabilidade pelo comprimento do intervalo de tempo Δt e levando $\Delta t \rightarrow 0$, obtém-se a taxa de falha $h(t)$ de um componente:

$$h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t < T \leq t + \Delta t | T > t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} \frac{1}{R(t)} = \frac{f(t)}{R(t)}. \quad (2.12)$$

Quando Δt é pequeno, temos a seguinte aproximação:

$$P(t < T \leq t + \Delta t / T > t) \approx h(t) \cdot \Delta t. \quad (2.13)$$

A função de risco é útil na estimação do tempo de falha (ou tempo entre falhas) e para estudar o comportamento da falha do componente em função do tempo (Elsayed, 1996).

A Figura 5 mostra um exemplo da função de risco. Esta figura é conhecida como a “Curva da Banheira”, devido à sua forma. Esta curva apresenta três fases, relacionando as etapas da vida de um produto com a probabilidade de ocorrência de uma falha. No período até t_1 , conhecido como fase da “Mortalidade Infantil”, espera-se uma alta taxa de falha no início da operação da unidade devido ao baixo padrão dos componentes, imperfeições de fabricação, erros de projetos e defeitos de instalação. Essa região é indesejada por fabricantes e consumidores, pois implica em custos de reparo desnecessários para o fabricante e interrupção do uso do produto para o consumidor (Elsayed, 1996).

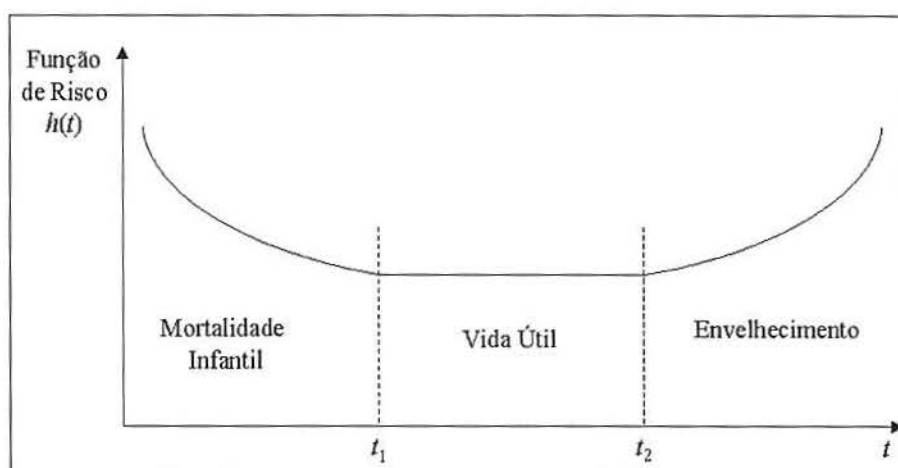


Figura 5: Curva de Falha (Curva da Banheira).

Após o período de decréscimo da taxa de falha, o risco de falha apresenta a tendência de se estabilizar (período entre t_1 e t_2). Produtos caracterizados pela “Curva da Banheira” tendem a ficar o maior tempo de sua vida nessa fase. As falhas ocorridas nesse período são consideradas aleatórias.

No final da vida útil (t_2) do produto, o risco de falha tende a aumentar significativamente. As falhas ocorridas neste período são atribuídas à idade e ao uso do componente. A maneira de minimizar essa fase é através de manutenção ou troca do componente (Elsayed, 1996).

2.3.3 Tempo Médio até Falha

Uma maneira de mensurar a confiabilidade de um componente é através do tempo médio até falha (*mean time to failure* - MTTF) para sistemas não reparáveis. Essa medida se refere à expectativa de tempo entre duas falhas consecutivas, quando o componente não é reparável. Sendo este reparável, a MTTF é referida como tempo médio entre falhas (*mean time between failures* - MTBF).

Considerando n componentes idênticos não reparáveis, com tempos-até-falha t_1, t_2, \dots, t_n , logo a estimativa do tempo médio até falha é (Elsayed, 1996)

$$MTTF = E(T) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i. \quad (2.14)$$

Como T é uma variável aleatória, o seu valor esperado pode ser determinado por:

$$MTTF = \int_0^{\infty} t f(t) dt. \quad (2.15)$$

Mas, como $R(t) = 1 - F(t)$ e $f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = -\frac{dR(t)}{dt}$, substituindo na equação (2.15), obtém-se:

$$MTTF = -\int_0^{\infty} t \frac{dR(t)}{dt} dt = -\int_0^{\infty} t dR(t) = tR(t) \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} R(t) dt. \quad (2.16)$$

Como $R(\infty) = 0$ e $R(0) = 1$, o tempo médio até a falha (MTTF) pode também ser definido por:

$$MTTF = \int_{\infty}^0 R(t) dt. \quad (2.17)$$

2.3.4 Tempo Médio entre Falhas

Segundo Hoyland e Rausand (1994), quando o tempo requerido para o reparo ou substituição do componente com falha é muito pequeno comparado ao tempo médio até a falha (MTTF), o MTTF também representa o tempo médio entre falhas (MTBF). Se o tempo de reparo não pode ser desconsiderado, o MTBF também inclui o tempo até o reparo (*mean time to repair* – MTTR). Esta situação é ilustrada na Figura 6.

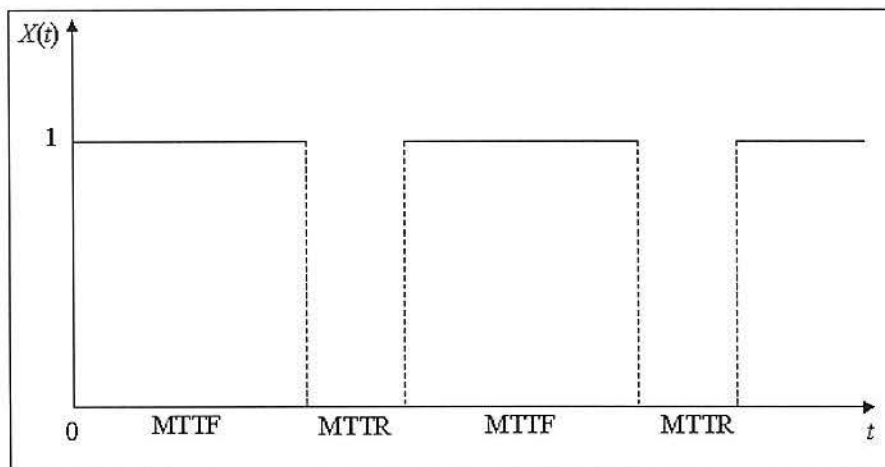


Figura 6: Comportamento Médio do Tempo-até-Falha do Componente
(Fonte: Hoyland e Rausand, 1994).

2.4 Distribuições de Probabilidade utilizadas em Análises de Confiabilidade

Diversas distribuições de probabilidade podem ser utilizadas para modelar tempos-até-falha. As distribuições mais utilizadas são a Exponencial, Weibull, Lognormal e Gama. A Função de Risco, Função de Distribuição, Função de

Confiabilidade, a esperança e os parâmetros dessas quatro distribuições são mostradas na Tabela 1

Tabela 1: Características das Funções de Risco.

	Função				Parâmetros
	Risco	Distribuição	Confiabilidade	Esperança	
	$h(t)$	$F(t)$	$R(t)$	$E(T)$	
Constante	λ	$\lambda e^{-\lambda t}$	$e^{-\lambda t}$	$\frac{1}{\lambda}$	λ
Weibull	$\frac{\gamma}{\theta} t^{\gamma-1}$	$\frac{\gamma}{\theta} t^{\gamma-1} e^{-\frac{t^\gamma}{\theta}}$	$e^{-\frac{t^\gamma}{\theta}}$	$\theta \Gamma\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)$	γ, θ
Lognormal	$\frac{\phi\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right)}{t\sigma R(t)}$	$\frac{1}{t\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right)^2}$	$1 - \int_0^t \frac{1}{\tau\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln \tau - \mu}{\sigma}\right)^2} d\tau$	$e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$	μ, σ
Gama	$\frac{f(t)}{R(t)}$	$\frac{t^{\gamma-1}}{\theta^\gamma \Gamma(\gamma)} e^{-\frac{t}{\theta}}$	$\int_0^t \frac{1}{\theta \Gamma(\gamma)} \left(\frac{\tau}{\theta}\right)^{\gamma-1} e^{-\frac{\tau}{\theta}} d\tau$	$\theta \cdot \gamma$	θ, γ

Fonte: adaptado de Elsayed (1996) e Leemis(1995).

Outras distribuições de probabilidade também são utilizadas para modelar tempos-até-falha, tais como: Muth, Uniforme, Loglogística, Exponencial Potencial e Gompertz. Informações acerca dessas distribuições podem ser encontradas em Leemis (1995).

2.4.1 Distribuição Exponencial

Considera-se que o tempo até-falha T de um componente segue uma distribuição Exponencial com parâmetro λ . Assim, a densidade de probabilidade é dada por (Hoyland e Rausand, 1994):

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad \text{para } t > 0, \lambda > 0. \quad (2.18)$$

Assim, a função de confiabilidade é definida como:

$$R(t) = P(T > t) = \int_t^{\infty} f(u) du = e^{-\lambda t} \text{ para } t > 0 \quad (2.19)$$

O tempo médio de falha (MTTF), que corresponde à esperança da função de densidade é definida como:

$$MTTF = \int_t^{\infty} R(t) dt = \int_t^{\infty} e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} \quad (2.20)$$

e a função de risco é expressa da seguinte maneira:

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda. \quad (2.21)$$

A variância de T é

$$\text{var}(T) = \frac{1}{\lambda^2}. \quad (2.22)$$

3. MODELAGEM DE DADOS DE TEMPO-ATÉ-FALHA

3.1 Estimativas de Parâmetros de Distribuições de Probabilidade

As distribuições de probabilidade são definidas por parâmetros. Sendo assim, em estudos de confiabilidade, uma vez definida a distribuição do tempo-até-falha, é necessário estimar os parâmetros da distribuição a partir da amostra de dados disponível. A seguir será apresentado um dos métodos possíveis de estimar os parâmetros de uma distribuição de probabilidade.

3.1.1. Método da Máxima Verossimilhança

Um dos métodos mais utilizados na estimação de parâmetros de uma distribuição de probabilidade é o método da Máxima Verossimilhança. O objetivo do método de Máxima Verossimilhança é determinar a melhor estimativa para o parâmetro de interesse, usando a função de verossimilhança. Segundo Elsayed (1996), isto pode ser realizado desenvolvendo a função de verossimilhança para as observações e obtendo o logaritmo da expressão. Na seqüência, esta é diferenciada em relação aos respectivos parâmetros e as equações resultantes são igualadas a zero. São, então, solucionadas simultaneamente para obter as melhores estimativas para os parâmetros que maximizem a função de verossimilhança. Uma explicação mais detalhada desse método é apresentada a seguir.

Conforme Mood (1974), a função de verossimilhança de n variáveis aleatórias $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ é definida como uma densidade conjunta da amostra aleatória observada $f_{x_1, \dots, x_n}(x_1, \dots, x_n; \theta)$, a qual é considerada como sendo função dos parâmetros

desconhecidos (θ). Em particular, se X_1, X_2, \dots, X_n forem variáveis aleatórias independentes, então a função de verossimilhança é definida como $f(x_1, \theta).f(x_2, \theta) \dots f(x_n, \theta)$.

Considere que $L(\theta) = L(\theta; x_1, \dots, x_n)$ seja a função de verossimilhança das variáveis aleatórias X_1, X_2, \dots, X_n . Se $\hat{\theta}$ (onde $\hat{\theta}$ é função das observações x_1, x_2, \dots, x_n) é o valor de θ em Φ (onde Φ é o domínio de valores do parâmetro θ) o qual maximiza $L(\theta)$, então $\hat{\Theta} = \hat{\vartheta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ é o estimador de máxima-verossimilhança de θ para a amostra x_1, x_2, \dots, x_n (Mood, 1974).

Usualmente, considera-se X_1, X_2, \dots, X_n uma amostra aleatória descrita por alguma função de densidade $f(x; \theta)$; então, a função de verossimilhança é definida como:

$$L(\theta) = f(x_1, \theta).f(x_2, \theta) \dots f(x_n, \theta). \quad (3.1)$$

Grande parte das funções de verossimilhança satisfazem as condições de regularidade. Assim, o estimador de máxima verossimilhança é a solução da equação (Mood, 1974):

$$\frac{dL(\theta)}{d\theta} = 0. \quad (3.2)$$

Se a função de verossimilhança contém k parâmetros, isto é, se

$$L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) = \prod_{i=1}^n L(x_i; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k), \quad (3.3)$$

então os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ são as variáveis aleatórias $\hat{\Theta}_1 = \hat{\vartheta}_1(X_1, X_2, \dots, X_n)$, $\hat{\Theta}_2 = \hat{\vartheta}_2(X_1, X_2, \dots, X_n)$, ..., $\hat{\Theta}_k = \hat{\vartheta}_k(X_1, X_2, \dots, X_n)$, onde $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_k$ são os valores em Φ que maximizam $L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$; Mood (1974).

Se as condições de regularidade forem satisfeitas, o ponto onde a verossimilhança é máxima será a solução das seguintes k equações:

$$\frac{\partial L(\theta_1, \dots, \theta_k)}{\partial \theta_1} = 0; \quad \frac{\partial L(\theta_1, \dots, \theta_k)}{\partial \theta_2} = 0 \quad \dots \quad \frac{\partial L(\theta_1, \dots, \theta_k)}{\partial \theta_k} = 0. \quad (3.4)$$

Também, neste caso pode ser mais fácil trabalhar com o logaritmo da verossimilhança (Mood, 1974).

No caso de observações censuradas, a função de verossimilhança sofre pequenas alterações (Hoyland e Rausand, 1994). Supondo que algumas observações são censuradas à direita e outras à esquerda, então elas são divididas em três conjuntos de dados, sendo que U corresponde às observações não censuradas, C_R as observações censuradas à direita e C_L as censuradas à esquerda. Assim, a função de verossimilhança é definida como:

$$L(\theta; x) = \prod_{j \in C_L} F(x_j; \theta) \prod_{j \in U} f(x_j; \theta) \prod_{j \in C_R} R(x_j; \theta). \quad (3.5)$$

A função de verossimilhança sofre as seguintes modificações: para as observações censuradas à esquerda, substituem-se as densidades correspondentes pela função de distribuição $F(t)$; para as observações censuradas à direita, substituem-se as densidades pela função de sobrevivência $R(t) = 1 - F(t)$. Desde que $\ln L(\theta; x)$ apresente seus máximos no mesmo valor de θ e de $L(\theta; x)$, $\hat{\theta}(x)$ pode ser encontrado através da seguinte expressão:

$$\ln L(\hat{\theta}(x); x) \geq \ln L(\theta; x) \quad \text{para } \theta \in \Theta \quad (3.6)$$

Usualmente é mais conveniente, do ponto de vista matemático, trabalhar com $\ln L(\theta; x)$ do que com $L(\theta; x)$.

Nas situações mais comuns, a primeira etapa para encontrar o estimador de máxima verossimilhança para θ é resolver as seguintes equações de verossimilhança:

$$U_j = \frac{\partial \ln L(\theta; x)}{\partial \theta_j} = 0 \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, k. \quad (3.7)$$

Freqüentemente, este procedimento vai envolver métodos numéricos, tais como algoritmos de Newton e quasi-Newton, para solucionar as equações (Hoyland e Rausand, 1994).

3.1.2 Estimador de Máxima Verossimilhança para Distribuição Exponencial

A função densidade de probabilidade (f.d.p.) de uma distribuição Exponencial com parâmetro λ é definida por (Elsayed, 1996):

$$f(x, \lambda) = \lambda e^{-\lambda x}. \quad (3.8)$$

A f.d.p. de cada uma das n observações é

$$f(x_i, \lambda) = \lambda e^{-\lambda x_i} \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.9)$$

A função de verossimilhança $L(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda)$ é

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda) = f(x_1, \lambda) \cdot f(x_2, \lambda) \cdot \dots \cdot f(x_n, \lambda) \quad (3.10)$$

$$= \prod_{i=1}^n f(x_i, \lambda) = \lambda^n \prod_{i=1}^n e^{-\lambda x_i} = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i}. \quad (3.11)$$

O logarítmico da função de verossimilhança é

$$\log L(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda) = n \log \lambda - \lambda \sum_{i=1}^n x_i \quad (3.12)$$

e

$$\frac{\partial \log L(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda)}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i = 0. \quad (3.13)$$

Assim, o estimador de máxima verossimilhança de λ é $n / \sum_{i=1}^n x_i$.

3.2 Tipos de Censura

Para realizar testes de confiabilidade, n componentes são colocados em teste de vida e, posteriormente, registra-se o tempo de falha de cada componente. Se o tempo-até-falha de todos os componentes testados for conhecido, diz-se que o conjunto de dados de tempo-até-falha é completo.

Entretanto, é impossível ou impraticável observar o tempo-até-falha de todos os itens em teste; assim, o teste é interrompido antes que o componente apresente algum tipo de falha. Os dados incompletos podem ser resultantes da perda de algum componente durante o teste. Ou por motivos práticos e/ou econômicos, que fazem com que os testes não possam ser executados até que todos os componentes falhem. Os dados incompletos são denominados censurados. A observação censurada ocorre quando se conhece apenas um limite do tempo-até-falha.

Os dados censurados podem ser classificados em dados censurados à direita, à esquerda e censura intervalar. Os dados **censurados à direita** ocorrem quando existe um ou mais itens para os quais apenas o limite superior de tempo de vida é conhecido. Por exemplo, coloca-se 10 máquinas em teste e, após 30 dias, observa-se que 7 falharam. O conjunto de dados disponível será composto, portanto, de 7 tempos-até-falha e 3 observações censuradas à direita, pois sabe-se apenas que o tempo-até-falha dessas 3 observações ocorrerá em algum momento após 30 dias.

A **censura à esquerda** é menos freqüente que a censura à direita. Nas aplicações científicas em que a precisão da medida do equipamento é limitada, um conjunto de dados de campo pode conter observações censuradas à esquerda. Por exemplo, o gás natural na terra não pode ser medido em um nível abaixo de seis partes por milhão, com um dado dispositivo de medida.

Na **censura intervalar** os dados de tempo-até-falha são agrupados em intervalos. Esse tipo de censura ocorre quando não é possível determinar com precisão o momento em que ocorreu a falha. A censura intervalar se verifica quando os componentes são checados periodicamente, assim, somente é possível afirmar que a falha ocorreu em um intervalo entre duas inspeções.

Os tipos de censura à direita que ocorrem com mais freqüência em estudos de confiabilidade são: censura tipo I, censura tipo II e censura aleatória. Estes são definidos a seguir.

- **Censura Tipo I:** Suponha que n unidades de um item são submetidas a um teste durante um período de tempo T . Registra-se o tempo-até-falha de r componentes $t_1, t_2, \dots, t_r \leq T$. O número de unidades sobreviventes é o número total de itens submetidos ao teste menos o número de itens que falharam ($n - r$). O número de falhas é aleatório e será determinado após um período pré-estabelecido de tempo. Além disso, o número de falhas depende da intensidade do teste ao qual foram submetidas as unidades.

Os estudos de confiabilidade só fazem sentido se ocorrerem falhas durante o período T . Logo é necessário definir o período do teste de tal maneira que pelo menos uma falha ocorra. Quando o teste é interrompido, o tempo T é conhecido como tempo de censura (Elsayed, 1996).

- **Censura Tipo II:** Suponha que n componentes são submetidos a um teste até que r unidades falhem. Quando as r unidades falharem, o teste é interrompido no tempo t_r , o que garante o número de dados necessários ao estudo de confiabilidade. O tempo do teste T é uma variável aleatória que depende da duração do teste e da intensidade aplicada. O estudo será concluído após a ocorrência do evento de interesse em um número pré-estabelecido de indivíduos. O número de falhas que ocorrem durante o teste é o parâmetro deste tipo de censura (Elsayed, 1996).

- **Censura Aleatória:** Esse tipo de censura ocorre quando um componente é retirado do teste aleatoriamente. Frequentemente, assume-se que o *i-ésimo* tempo de vida t_i e o *i-ésimo* tempo de censura c_i são variáveis aleatórias independentes. Ou seja, em um conjunto de dados com censura aleatória, os itens não podem ser censurados, porque raramente tem-se taxa de falha muito elevada ou baixa (Leemis, 1995). Não há parâmetros de número de falhas nem de tempo determinado no momento da censura, uma vez que o número de unidades que devem falhar ao final de cada período de tempo não é determinado.

Pode haver uma combinação de tipos de censura (tipo I, tipo II e aleatória) em um mesmo teste de vida. Nesse caso, os dados são denominados multi-censurados.

A taxonomia dos tipos de censuras vem ilustrada na Figura 7:

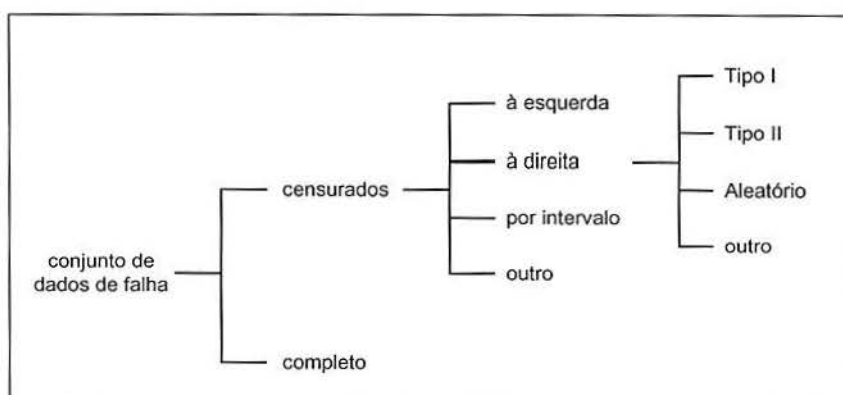


Figura 7: Taxonomia dos tipos de censura (Fonte: Leemis, 1995).

Existem três formas de lidar com dados censurados. A primeira forma é ignorá-los e analisar apenas os itens que foram observados até a falha. Embora isso simplifique a análise estatística, não é uma forma válida. Por exemplo, se essa metodologia for usada com dados censurados à direita, a análise vai considerar apenas os componentes que sobreviveram mais tempo, convertendo-se em um resultado pessimista se os melhores itens forem desconsiderados da análise. A segunda forma é esperar que todas as observações censuradas à direita falhem. Embora essa metodologia seja estatisticamente válida, ela não é prática. Sendo assim, a maneira adequada de lidar com dados censurados

é considerar as observações censuradas probabilisticamente, incluindo os valores censurados nas funções de verossimilhança (Leemis, 1995).

3.3 Papel de Probabilidade

O gráfico denominado "papel de probabilidade" é útil na determinação de parâmetros em distribuições de probabilidade e é muito utilizado na determinação do ajuste de um conjunto de dados a uma distribuição de probabilidade. A análise destes gráficos serve como um complemento aos testes de aderência.

O papel de probabilidade é um gráfico cuja escala foi preparada de modo que os pontos de distribuição de frequências $F(t)$ que seguem perfeitamente a distribuição dada, são plotados numa linha reta (Feigenbaum, 1994), e os pontos, que não se ajustam a mesma, ficam distantes da linha.

O gráfico de t versus $F(t)$ pode ser linearizado, achando a transformação de $F(t)$ e t cuja relação entre as variáveis transformadas seja linear. Assim, os eixos transformados podem ser representados em termos da probabilidade original. A escala resultante geralmente não é linear, sendo chamada de escala de probabilidade. Enquanto que a escala dos dados é uma escala logarítmica ou linear, dependendo da distribuição e do tipo de papel de probabilidade (Meeker e Escobar, 1998).

Kapur e Lamberson (1977) apresentam o papel de probabilidade para a função de distribuição acumulada de Weibull, dada por:

$$F(t) = 1 - e^{-(t/\theta)^\beta}. \quad (3.14)$$

Extraindo o logaritmo natural duas vezes, obtém-se

$$\ln \left(\ln \frac{1}{1 - F(t)} \right) = \beta \ln t - \beta \ln \theta. \quad (3.15)$$

Isolando os termos dependentes e independentes, tem-se:

$$\ln t = \frac{1}{\beta} \ln \left(\ln \frac{1}{1-F(t)} \right) + \ln \theta, \quad (3.16)$$

onde fica clara a forma $Y = (1/\beta)X + A$, que corresponde a equação da reta com o eixo das abscissas igual a $X = \ln[\ln(1/(1-F(t)))]$ e o da ordenada igual a $Y = \ln t$.

A Figura 8 apresenta um exemplo ilustrativo do papel de probabilidade para distribuição de Weibull. Analisando o gráfico, pode-se afirmar que existe um forte indício de que o conjunto de dados analisado se ajusta à distribuição de Weibull.

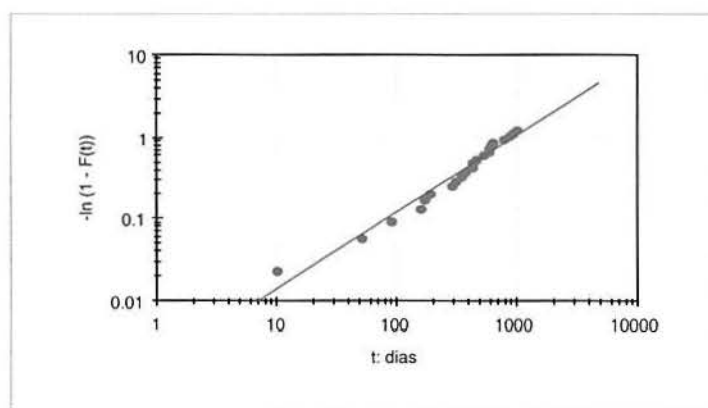


Figura 8: Exemplo de Papel de Probabilidade.

3.4 Testes de Aderência

A validade dos modelos em uma inferência estatística depende da forma da população da qual a amostra foi extraída. Sendo assim, é necessário saber se a população analisada se distribui de acordo com as suposições de um certo modelo. Os testes de aderência (métodos de ajuste) são utilizados para determinar se as observações obtidas de uma população desconhecida se ajustam a um modelo proposto (Daniel, 1978).

Nesta seção será abordada a situação na qual o pesquisador deseja saber se a amostra de dados atende às suposições de que a população amostrada segue alguma

distribuição de probabilidade específica. Serão descritos dois testes de aderência: Teste de Aderência do Qui-Quadrado e o Teste de Kolmogorov-Smirnov.

3.4.1 Teste de Aderência do Qui-Quadrado

O teste de aderência do qui-quadrado compara os dados de densidade de probabilidade de falhas observados com os valores esperados para a distribuição em questão. Esse teste é utilizado na especificação de parâmetros de distribuições discretas, preferencialmente, em distribuições multinomiais (Mood, 1974).

Suponha que uma amostra de tamanho n seja retirada de uma população com distribuição de probabilidade $F(t)$, e utilizando o teste de aderência do qui-quadrado obtém-se a hipótese nula (H_0) a ser descrita da seguinte forma:

$H_0: F(t) = F_0(t)$ para todo t , isto é, a amostra foi retirada de uma população que segue uma distribuição de probabilidade específica, $F_0(t)$.

A hipótese alternativa (H_1) é definida como:

$H_1: F(t) \neq F_0(t)$ para algum t , isto é, a amostra não foi retirada de uma população que segue uma distribuição de probabilidade específica, $F_0(t)$.

Observa-se que a hipótese alternativa não indica como a verdadeira distribuição difere da hipotetizada.

Para aplicar o teste, é necessário que os dados disponíveis para análise sejam uma amostra aleatória de observações independentes de tamanho n . A escala de medida pode ser nominal. Além disso, as observações classificam-se em r categorias mutuamente exclusivas e exaustivas (Daniel, 1978).

Se a hipótese nula for verdadeira, espera-se um bom ajuste entre os valores observados e a frequência esperada em cada categoria. Segundo Daniel (1978), a medida apropriada de ajuste entre as frequências observadas e esperadas é a estatística de teste calculada (χ^2), dividindo o quadrado da diferença entre a frequência observada (O_i) e a esperada (E_i) em cada conjunto dessas frequências pela frequência esperada, ou seja,

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^r \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}. \quad (3.17)$$

Assume-se que as n observações sejam agrupadas em k categorias. Para cada uma destas, existe uma probabilidade de que uma observação selecionada aleatoriamente de uma população hipotetizada venha pertencer a uma categoria. Pode-se designar a probabilidade para cada categoria 1, 2, 3..... r , respectivamente, como $p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_r$. Quando a hipótese nula é verdadeira, obtém-se a frequência esperada para cada categoria, calculando o produto entre n e a probabilidade da categoria correspondente. Por exemplo, np_1, np_i, np_r indica a frequência esperada sob H_0 , para as categorias 1, i e r , respectivamente (Daniel, 1978).

Para grandes amostras, χ^2 segue uma distribuição do Qui-Quadrado com $r-1$ graus de liberdade. Então, se o valor calculado de χ^2 é igual ou maior que o valor tabelado de qui-quadrado com $r-1$ graus de liberdade e nível de significância α , rejeita-se a hipótese nula ao nível α de significância.

3.4.2 Teste Kolmogorov-Smirnov

O teste de aderência do Qui-Quadrado é adequado para dados nominais. Nesta seção apresenta-se o teste de Kolmogorov-Smirnov para uma amostra, que é apropriado para dados contínuos. Logo pode ser aplicado naqueles com escala de medida pelo menos ordinal.

Quando se aplica o teste de Kolmogorov-Smirnov a uma amostra, utiliza-se duas funções de distribuição acumuladas: a hipotetizada e a observada. A função de densidade acumulada é denominada de $F(x)$, que indica a probabilidade que o valor da variável aleatória X seja menor ou igual a x , ou seja, $F(x) = P(X \leq x)$; Daniel, (1978).

Suponha-se que um conjunto de dados seja obtido em uma população desconhecida com função de distribuição $F(x)$ e que o objetivo da análise seja verificar se X possui um bom ajuste a uma distribuição de probabilidade empírica $F_0(x)$. O objetivo do teste de Kolmogorov-Smirnov é determinar se a falta de ajuste entre $F(x)$ e $F_0(x)$ é suficiente para duvidar da hipótese $F(x) = F_0(x)$; Daniel, (1978).

Para a realização do teste, os dados devem consistir em uma amostra aleatória de n observações independentes de uma função de distribuição desconhecida $F_0(x)$.

Segundo Daniel (1978), se $F_0(x)$ é a função de probabilidade acumulada hipotetizada, as hipóteses bilaterais do teste podem ser definidas da seguinte forma:

$H_0: F(x) = F_0(x)$, para todos os x .

$H_1: F(x) \neq F_0(x)$, para pelo menos um valor de x .

As hipóteses unilaterais inferior são definidas como:

$H_0: F(x) \geq F_0(x)$, para todos os x .

$H_1: F(x) < F_0(x)$, para pelo menos um valor de x .

E as hipóteses unilaterais superior são:

$H_0: F(x) \leq F_0(x)$, para todos os x .

$H_1: F(x) > F_0(x)$, para pelo menos um valor de x .

Considerando $S(x)$ como a função de probabilidade acumulada da amostra, ou seja,

$S(x) = (\text{número de observações da amostra menor ou igual a } x) / n$,

a estatística de teste vai depender da hipótese considerada. Para o teste bilateral a estatística de teste é

$$D = \sup_x |F_0(x) - S(x)| \quad (3.18)$$

onde D é o supremo de todos os x , do valor absoluto da diferença $S(x) - F_0(x)$.

Para o teste unilateral inferior a estatística de teste é

$$D^+ = \sup_x [F_0(x) - S(x)] \quad (3.19)$$

onde D é o supremo de todos os x , da diferença $F_0(x) - S(x)$.

E para o teste unilateral superior a estatística de teste é

$$D^- = \sup_x [S(x) - F_0(x)] \quad (3.20)$$

onde D é o supremo de todos os x, da diferença $S(x) - F_0(x)$.

Rejeita-se H_0 ao nível de significância α se a estatística de teste, D, D^+ ou D^- , exceder o valor de $1 - \alpha$ mostrado na tabela do teste de Kolmogorov-Smirnov apresentada em (Daniel, 1978). A hipótese de que a amostra provém da distribuição hipotetizada será aceita se as discrepâncias, entre $S(x)$ e $F_0(x)$ para os valores observados, não forem muito grandes.

3.5 Modelagem Bayesiana de Dados de Campo de Tempo-de-Falha

3.5.1 Estatística Bayesiana

As dificuldades encontradas na utilização de métodos estatísticos tradicionais, como a falta de dados e de conhecimento suficiente sobre a população para gerar suas distribuições, têm sido, em grande parte, responsáveis pelo grande sucesso da avaliação da confiabilidade através dos métodos Bayesianos (Droguett, 2001). Estes são extremamente úteis em confiabilidade, uma vez que possibilitam o uso de informações provenientes de fontes distintas, como opiniões de especialistas e de testes anteriores, na estimação dos parâmetro de interesse, algo que os métodos clássicos de inferência desaprovam. A metodologia Bayesiana é ideal para realizar atualizações sucessivas do conhecimento de confiabilidade, à medida que novas informações se tornam disponíveis.

O termo Bayesiano teve origem no teorema de Bayes, o qual foi desenvolvido por Thomas Bayes, um matemático e teólogo do século XVIII. A primeira publicação do teorema foi realizada em 1763, dois anos após a sua morte. Seu teorema é expresso da seguinte maneira: Considere que B_1, B_2, \dots sejam eventos mutuamente exclusivos e exaustivos contidos numa amostra no espaço S , ou seja (Hoyland e Rausand, 1994):

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = 1 \quad (3.21)$$

$$B_i \cap B_j = \phi \quad \text{para } i \neq j \quad (3.22)$$

$$P(B_i) > 0 \quad \text{para cada } i. \quad (3.23)$$

Considere A um evento onde $P(A) > 0$, então para cada k ,

$$P(B_k / A) = \frac{P(A / B_k)P(B_k)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(A / B_i)P(B_i)}. \quad (3.24)$$

O teorema de Bayes pode ser apresentado pela teoria de probabilidade. Suponha que se esteja interessado no evento H , o qual representa o nível de confiabilidade a ser atingido por um produto, e o evento E represente uma nova informação a respeito da confiabilidade H . O teorema de Bayes indica como a probabilidade a respeito da confiabilidade H muda na presença da nova informação E , onde E indica os dados observados. Aplicando o teorema de Bayes teremos: (adaptado de Droguett, 2001)

$$P(H / E) = \frac{P(E / H) * P(H)}{P(E)}. \quad (3.25)$$

Onde o termo $P(H/E)$ indica a probabilidade a posteriori para os parâmetros do modelo que descreve H . Fornece a crença que se tenha sobre os parâmetros depois de observar os dados de uma amostra. O termo $P(E/H)$ é denominado verossimilhança e fornece a informação contida na amostra de dados. O termo $P(H)$ indica a probabilidade a priori para os parâmetros do modelo que descreve H e fornece a crença que se tenha sobre os parâmetros antes de observar dados de uma amostra. Finalmente, o último termo $P(E)$ pode ser considerado como uma normalização ou fator escalar.

Assim, pode-se atualizar a opinião na hipótese H , dada a evidência adicional E relevante a H . Isto é, o teorema de Bayes possibilita que sejam feitas atualizações sucessivas a respeito da confiabilidade dos produtos à medida que as informações são disponibilizadas. Sendo assim, a distribuição a posteriori hoje torna-se a priori amanhã (Droguet, 2001), uma vez que a informação a posteriori é, genericamente falando, uma combinação entre o conhecimento a priori e novas informações.

3.5.2 Distribuição a Priori e a Posteriori

O teorema de Bayes é definido utilizando a notação de eventos H e E . Entretanto, na seqüência serão utilizadas as notações X e θ , respectivamente, que correspondem a notação de parâmetros.

Suponha que a variável aleatória X tenha distribuição de probabilidade que é função de um parâmetro θ , essa distribuição é denotada por $f(x/\theta)$. Tal notação implica que a distribuição de X é condicional ao parâmetro θ (Montgomery e Runger, 1994). A metodologia de estimação clássica de inferência estatística consiste em selecionar uma amostra aleatória de tamanho n e usar os valores x_1, x_2, \dots, x_n observados nesta amostra para estimar θ . A idéia é derivar um bom estimador para θ , que seja função dos x_i . Esse estimador pode ser obtido, por exemplo, pelo método de máxima verossimilhança. Em inferência clássica o estimador de θ é que é considerado aleatório e o parâmetro θ apesar de desconhecido, é considerado fixo. Na teoria Bayesiana o parâmetro θ é considerado aleatório. Desta maneira, inferências sobre θ podem ser obtidas diretamente da distribuição a posteriori de θ .

A informação adicional sobre θ que se tem, tal como a opinião de especialistas e/ou estudos anteriores, reunida na forma de distribuição de probabilidade para θ , é denominada **distribuição a priori** de θ (Montgomery e Runger, 1995). A distribuição a priori é baseada em diversas opiniões, estas podem ser bastante subjetivas. Além disso, o uso inadequado da subjetividade pode tornar a inferência Bayesiana pouco confiável. A probabilidade a priori é criada, tentando capturar as crenças sobre os parâmetros do modelo antes de analisar os dados.

Em resumo, a teoria Bayesiana de estimação é baseada na distribuição a posteriori para θ . Utiliza-se a distribuição a priori para θ , que denotaremos por $\pi(\theta)$ e a distribuição de probabilidade conjunta da amostra, $f(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta)$ para encontrar a **distribuição a posteriori** para θ , que denotaremos por $\pi(\theta | x_1, x_2, \dots, x_n)$. A posteriori contém a informação da amostra, a qual é expressa através da função de verossimilhança, e da distribuição a priori para θ . Ou seja, expressa o grau de crença em relação ao verdadeiro valor de θ depois de observar a amostra de dados e considerando a crença que se tenha sobre θ antes de observar os dados.

A **função de verossimilhança** relaciona os parâmetros aos dados observados e aos sucessos incertos. A distribuição a priori para os parâmetros é combinada com a verossimilhança proveniente dos dados para se obter a distribuição a posteriori para os parâmetros (Migon, 1988). Em suma, a "receita Bayesiana" fica bem resumida da seguinte forma: a distribuição a posteriori de θ é proporcional à função de verossimilhança de θ vezes a sua distribuição a priori (Migon, 1988).

Conceitualmente é fácil derivar a distribuição à posteriori. A distribuição de probabilidade conjunta da amostra x_1, x_2, \dots, x_n e do parâmetro θ é definida como (Montgomery e Runger, 1995):

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) = f(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta) f(\theta) \quad (3.26)$$

e a distribuição marginal de X_1, X_2, \dots, X_n é

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} \sum_{\theta} f(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta), & \theta \text{ discreto,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) d\theta, & \theta \text{ contínuo.} \end{cases} \quad (3.27)$$

Assim, a distribuição desejada é

$$\pi(\theta | x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta) f(\theta)}{f(x_1, x_2, \dots, x_n)}. \quad (3.28)$$

Um estimador Bayesiano pontual para θ é definido como a média da distribuição a posteriori $\pi(\theta | x_1, x_2, \dots, x_n)$; Montgomery e Runger (1995). Também podemos utilizar a moda ou mediana de $\pi(\theta | x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Enfim, a inferência Bayesiana é realizada a partir da distribuição a posteriori dos parâmetros, que é gerada através da combinação da distribuição a priori com a distribuição amostral via Teorema de Bayes. A distribuição a posteriori representa a incerteza com respeito a θ , depois da observação dos dados.

Após os dados serem observados, pode prever-se uma observação futura, através da **posteriori preditiva**. A distribuição posteriori preditiva é a distribuição de uma futura observação x_{n+1} dado o conhecimento que se tem sobre θ , que é expresso pela priori de θ .

Uma das principais dificuldades do método Bayesiano é a determinação da probabilidade a priori, que é a distribuição de probabilidade que descreve o grau de crença do pesquisador. A forma mais simples é considerar que todos os estados da natureza são igualmente verossímeis (no caso discreto e no contínuo). No trabalho original de Bayes apenas estas probabilidades são consideradas. Por isso, alguns afirmam a seguinte regra para o trabalho de Bayes: se nada é conhecido sobre o parâmetro, deve-se assumir probabilidade constante para todos os possíveis valores dos parâmetros.

Em situações em que os especialistas não possuem conhecimento prévio pode-se definir a distribuição a priori como uma constante. Isto indica que na priori se atribui a mesma chance para todos os possíveis valores dos parâmetros do modelo. Neste caso a priori não terá impacto nenhum na distribuição a posteriori. Esse tipo de priori é denominada de **priori não-informativa**. Para maiores detalhes a respeito de priori não-informativa Migon (1988) recomenda Jeffreys (1961).

Em geral, qualquer distribuição de probabilidade que expresse a crença que se tenha a priori sobre θ pode ser definido como a priori de θ . Note que a forma funcional da priori deve ser combinada com a forma da verossimilhança para originar a posteriori.

Dependendo destas formas de derivação analítica da distribuição, a posteriori pode ficar complexa, em muitos casos, impossível de definir. Uma saída utilizada na prática é usar formas funcionais bastante flexíveis para retratar a informação a priori, como no caso da família Beta para o Modelo Binomial ou como no caso da família Gama para o Modelo Exponencial. Esses tipos de família de distribuição são denominados **Família de Distribuições Conjugadas**, um vez que combinam a distribuição a priori com a verossimilhança de forma a obter uma posteriori da mesma família da distribuição da priori. Essas famílias de distribuições devem ser amplas o suficiente para acomodar vários tipos de informações sobre θ (Migon, 1988). No caso em que a derivação analítica da posteriori é impossível recorre-se a métodos numéricos ou a simulações como, por exemplo, a utilização de simulações através do método MCMC (*Markov Chain Monte Carlo*); Gilks, *et al* (1995).

3.5.3 Estimadores Bayesianos X Estimadores de Máxima Verossimilhança

Existe uma relação entre o estimador Bayesiano e os estimadores de máxima verossimilhança (EMV) para o mesmo parâmetro. Para grandes amostras e/ou priori não-informativa os dois são praticamente iguais.

Na prática, uma amostra de tamanho moderado vai produzir aproximadamente as mesmas estimativas pelo método de Bayes ou por verossimilhança se os dados forem consistentes com a informação assumida a priori. Quanto maior a inconsistência entre a informação a priori e os dados, maior a diferença entre os dois estimadores (Montgomery e Runger, 1995).

3.5.4 Intervalo de Confiança e Intervalo de Credibilidade

Em inferência clássica calcula-se intervalos de confiança para o parâmetro θ . Já em inferência Bayesiana calcula-se intervalos de credibilidade ou intervalos de probabilidade a posteriori. A construção destes intervalos é similar, entretanto a sua interpretação é diferente. A interpretação dos intervalos Bayesianos é diferente do intervalo de confiança

clássico, uma vez que em inferência Bayesiana o parâmetro θ é aleatório, e na clássica é fixo. Em estatística clássica a função é que é aleatória.

O intervalo de confiança clássico é um intervalo que, antes da amostra ser coletada, tem uma probabilidade $(1 - \alpha)$ de incluir o parâmetro desconhecido θ . Isto é, o intervalo de confiança clássico relata a frequência relativa do intervalo incluir θ (Montgomery e Runger, 1995).

Sendo que a distribuição de probabilidade a posteriori representa a crença sobre os parâmetros do modelo. Os intervalos Bayesianos fornecem um grau de crença subjetivo sobre θ . A interpretação é bem mais direta e por esse motivo é melhor que a interpretação de frequência da inferência clássica (Montgomery e Runger, 1995).

Sob abordagem Bayesiana, é possível determinar dois intervalos: o intervalo de probabilidade a posteriori e o intervalo de credibilidade. O intervalo de probabilidade a posteriori é centrado na média da distribuição a posteriori do parâmetro θ , e contém 100 $(1-\alpha)$ por cento da probabilidade a posteriori. Note que o intervalo de probabilidade a posteriori é afetado pelo tamanho da amostra, mas não totalmente determinado por ele (Montgomery e Runger, 1995).

Intuitivamente, a região ou intervalo de credibilidade para o parâmetro θ contém os valores de θ , que são mais prováveis, baseados nas informações disponíveis. Qualquer que seja a credibilidade $(1 - \alpha)$, todos os pontos que pertencem à região de credibilidade têm maior densidade de probabilidade que qualquer outro ponto que não pertença a ela (Migon, 1988). As distribuições a posteriori que ocorrem na prática são unimodais, assim, a região de credibilidade é dada por apenas um intervalo. Se, além de unimodal, a distribuição a posteriori for simétrica, o intervalo de credibilidade também estará centrado na média e, portanto, será igual ao intervalo de probabilidade a posteriori. Se a posteriori for unimodal assimétrica, o intervalo de credibilidade é um intervalo cujo centro não é na média. No caso de posteriori multimodal o intervalo de credibilidade é, na verdade, uma região pois é uma união de vários intervalos (tantos quanto o número de modas); Lee (1997).

A interpretação dos intervalos Bayesianos é de que a probabilidade de θ estar entre o limite inferior e o limite superior do intervalo é de, por exemplo, 0,95. Um intervalo de confiança clássico deve ser interpretado da seguinte maneira "existe 95% de confiança do

intervalo conter o parâmetro θ ". Entretanto, é muito comum, o intervalo de confiança clássico erroneamente ser interpretado como se fosse o intervalo Bayesiano.

Para maiores detalhes sobre a teoria da Inferência Bayesiana, recomenda-se os trabalhos de DeGroot (1970), Marts e Waller (1982), Berger (1985) (Hoyland e Rausand, 1994) e Lee (1997).

4. ESTUDO DE CASO

Este capítulo tem como objetivo ilustrar o uso de estatística Bayesiana através de um conjunto de dados de garantia. Ao final, pretende-se apresentar um roteiro na forma de fluxograma que auxilie pesquisadores a utilizarem uma metodologia para a estimativa da confiabilidade de um produto baseada no teorema de Bayes.

4.1 Organização dos Dados utilizados no estudo

O produto escolhido para o presente estudo é um aparelho de ar condicionado de uso doméstico fabricado no Brasil. O estudo abrange informações das unidades produzidas entre janeiro de 1998 e julho de 1999, totalizando 94.039 aparelhos produzidos nesse intervalo de tempo. Nesse período observou-se 4.081 falhas. Apesar desse modelo ser produzido desde 1997, as primeiras observações foram desconsideradas com o objetivo de reduzir a incidência de falhas originadas no período de “mortalidade infantil” do produto (ver seção 2.3.2).

As informações utilizadas neste estudo foram fornecidas pelo Departamento de Pós-Venda da empresa, que faz o controle de garantia dos produtos. As informações obtidas são provenientes de peças substituídas de onde foram coletados os dados referentes aos tempos-até-falha do produto analisado.

Um fator importante é a unidade de tempo das informações. Nos relatórios de falhas são registrados o mês em que ocorreram, o código do defeito e o número de série do produto, o que possibilita estimar o tempo de falha de cada aparelho. Entretanto, a data de fabricação do produto é registrada em semana e ano. Sendo assim, para unificar as unidades de medidas considerou-se que as informações do tempo-até-falha ocorreram na segunda semana do mês em que aconteceu a falha. Assim, a unidade de tempo utilizada neste trabalho será sempre semana.

Um fator que foi desconsiderado na análise devido a sua aleatoriedade é o “tempo de prateleira”. Conhece-se a data de fabricação do produto, porém não se sabe a data em que o mesmo entrou em funcionamento. Segundo informações históricas da empresa, o “tempo de prateleira” pode variar de duas a trinta e seis semanas. Na prática, o “tempo de prateleira” no comércio é de quatro semanas, devido ao alto valor agregado ao produto (Falcetta, 2000).

O modelo de ar condicionado usado no estudo possui os seguintes componentes: tubulação, rabicho, rede elétrica, condensador, evaporador, compressor, termostato, capilar, chave seletora, motor, capacitador, hélice, turbina, barragem, frente plástica, gabinete, caracol, calha, conjunto base, vanes e botões. Além desses componentes, o aparelho possui elementos de fixação que não foram considerados no estudo.

No Diagrama de Blocos, ilustrado na Figura 9, são desconsiderados os componentes que não impedem o funcionamento do aparelho, caso venha a apresentar falhas (barragem, frente plástica, calha, conjunto base e vanes). Como o rabicho e a rede elétrica apresentam características e modos de falha semelhantes, eles são analisados como um único componente, denominado circuito elétrico (Falcetta, 2000). Foi criado um sub-sistema, denominado evaporador, constituído pelos componentes evaporador, caracol e concha. Esse sub-sistema foi criado porque estes componentes trabalham integrados, logo a falha de um acarreta na falha do outro.

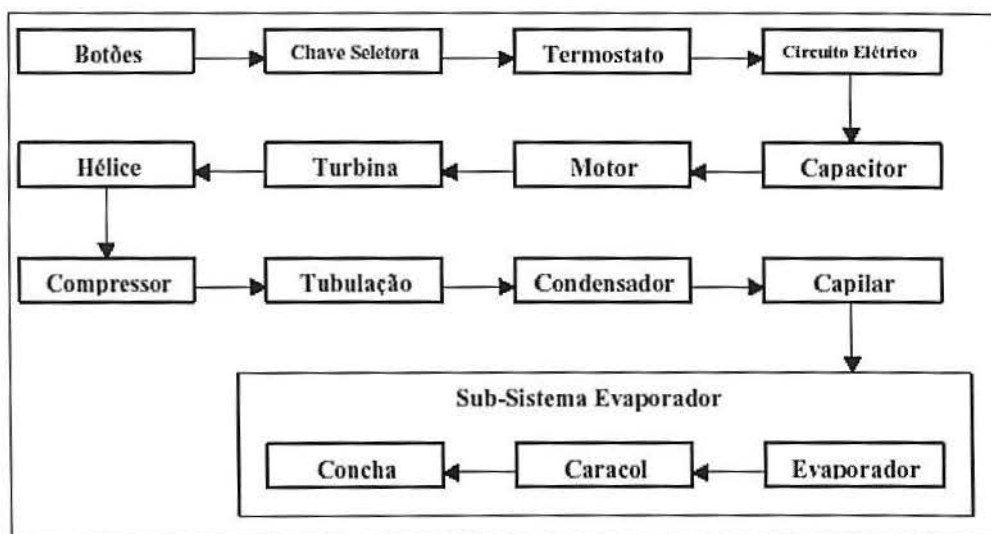


Figura 9: Diagrama de Blocos do produto analisado.

O ar condicionado possui duas funções básicas: refrigeração e ventilação. Para a definição do Diagrama de Blocos foi considerada a unidade operando na função de refrigeração.

Todos os componentes do modelo em estudo são ligados em série, logo a falha de um componente implica no não funcionamento de todo o aparelho. O critério de ligação entre os componentes baseia-se na ordem de acionamento destes quando a unidade é ligada (ver Figura 9).

No momento em que o botão da chave seletora é girado e o termostato ajustado para a temperatura desejada, a unidade é energizada via rabicho e rede elétrica. O capacitador auxilia a partida do motor, que, por sua vez, faz girar a turbina e a hélice. Nesta circunstância, a unidade inicia a função de ventilação. Quando se seleciona a função de refrigeração na chave seletora, o termostato fecha seu contato elétrico se a temperatura, no retorno do ar à unidade, estiver acima do ajustado. É acionado o compressor, iniciando o ciclo de refrigeração. Nesse ciclo, também são utilizados os componentes tubulação, condensador, capilar e o sub-sistema evaporador. Mais detalhes sobre o funcionamento de aparelhos de ar condicionado podem ser vistos em Falcetta (2000).

4.2 Especificação dos Modelos de Distribuição dos Componentes

Alguns componentes podem ter seus modos de falha modelados por mais de uma distribuição de probabilidade. Quando os dados são modelados por uma única distribuição basta identificar a compatibilidade dos dados disponíveis com uma distribuição de probabilidade teórica, calculando seus parâmetros. Entretanto, no caso em que são modelados através de misturas de distribuições é necessário extrair os dados de tempo-até-falha relativos a sua distribuição de origem.

Um mesmo componente pode ter mais de um modo de falha preponderante. Assim, tem-se dados oriundos de duas ou mais populações diferentes que podem ou não seguir a mesma distribuição de probabilidade. No caso do produto analisado diversos componentes apresentam esse comportamento, que pode ser identificado através da análise visual dos

gráficos de papel de probabilidade. A Figura 10 apresenta o papel de probabilidade do componente analisado nesse estudo: a hélice

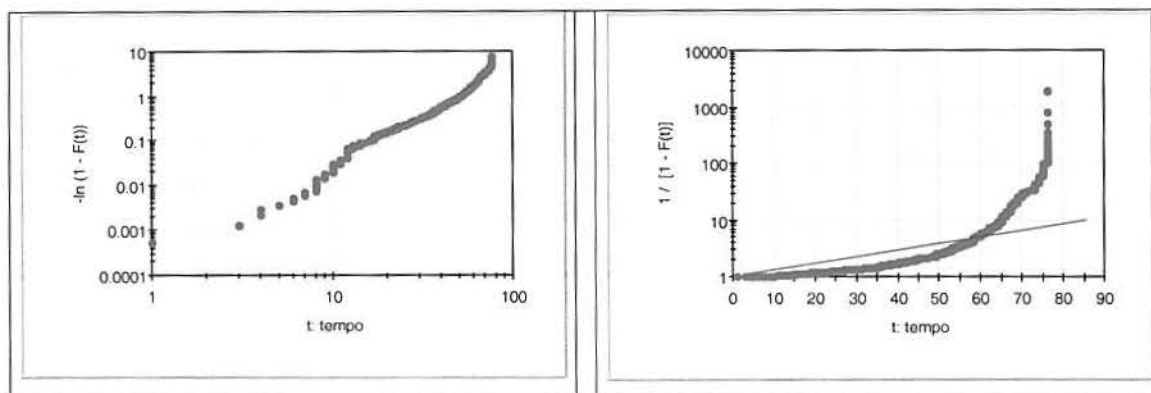


Figura 10: Gráficos de Papel de probabilidade Weibull e Exponencial com os dados originais, respectivamente

Na Figura 10, o gráfico da esquerda apresenta os dados de tempos-até-falha da hélice no papel de probabilidade da distribuição Weibull. O gráfico da direita mostra os dados de tempos-até-falha no papel de probabilidade da distribuição Exponencial. Observa-se, assim, através de inspeção visual, que os dados parecem ser oriundos de uma mistura de distribuições de probabilidade, seguindo uma distribuição Exponencial no intervalo de tempo $[0, 60]$ e uma distribuição Weibull a partir de $t = 60$ semanas.

A derivação matemática de modelos resultantes da mistura de duas ou mais distribuições de probabilidade pode ser extremamente complexa, devido a quantidade de parâmetros a serem estimados (Falcetta, 2000). Como o objetivo dessa monografia não engloba misturas de distribuições de probabilidade, utilizou-se uma heurística para modelagem de dados de tempos-até-falha, em que o objetivo é separar os dados de uma distribuição em relação a outra e, assim, determinar os parâmetros de cada distribuição. Esse método foi proposto por Fogliatto e Falcetta (2001) devido à dificuldade de determinar os parâmetros de distribuições misturadas.

A separação de dados através da heurística utilizada não é total. Assim, apesar de ser possível verificar visualmente uma melhor aderência dos dados estratificados a uma distribuição teórica, tal melhora não é suficiente para validar as hipóteses dos testes de aderência do Qui-Quadrado e de Kolmogorov-Smirnov, como apresentado na Tabela 2. O fato das hipóteses dos teste analíticos não serem validadas podem, também, ser justificado pelo grande tamanho da amostra ($n=1284$). Quando o tamanho da amostra n aumenta,

tendendo à população, os testes estatísticos podem rejeitar a hipótese nula, pois qualquer diferença pode ser considerada significativa. Os resultados dos testes de aderência para os dados originais encontram-se na Tabela 2 e, após a aplicação da heurística de separação dos dados, podem ser observados na Tabela 3.

Tabela 2: Resultados dos testes de aderência para os dados de tempos-até-falha da componente hélice (n=1284)

	TESTE DE ADERÊNCIA	
	<i>Teste do Qui-Quadrado</i>	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov</i>
Modelo Exponencial	$\chi^2=1582,86$ com 34 graus de liberdade	DN = 0,2593
	Nível de Significância = 0,0001	Nível de Significância = 0,0001
Modelo Weibull	$\chi^2=315,95$ com 33 graus de liberdade	DN = 0,0852
	Nível de Significância = 0,0001	Nível de Significância = 0,0001

Tabela 3: Resultados dos testes de aderência para os dados de tempos-até-falha da componente hélice, após a implementação da heurística de modelagem (n=1253)

	TESTE DE ADERÊNCIA	
	<i>Teste do Qui-Quadrado</i>	<i>Teste de Kolmogorov-Smirnov</i>
Modelo Exponencial	$\chi^2=825,84$ com 34 graus de liberdade	DN = 0,2282
	Nível de Significância = 0,0001	Nível de Significância = 0,0001
Modelo Weibull	$\chi^2=1,35 \text{ E}+06$ com 33 graus de liberdade	DN = 0,1187
	Nível de Significância = 0,0001	Nível de Significância = 0,0001

Os gráficos de papel de probabilidade dos dados de tempo-até-falha da hélice, após a aplicação da heurística, são mostrados na Figura 11.

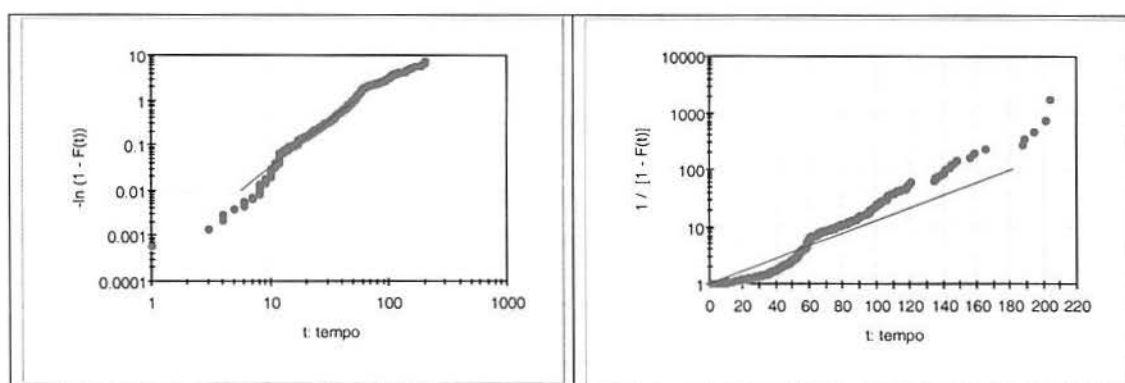


Figura 11: Papel de probabilidade Weibull e Exponencial com os dados ajustados, respectivamente (até t=203)

Após a separação dos dados, pode aparecer alguns dados espúrios que, aparentemente, não pertencem a nenhuma distribuição de probabilidade. Estes podem ser provenientes de modos de falhas raros e, portanto, não apresentam elementos suficientes para caracterizar alguma distribuição teórica. Sendo assim, a sua retirada pode ser realizada através de critérios qualitativos (Falcetta, 2000).

Para fins de estudo foram analisados apenas os tempos-até-falha dos componentes no intervalo de tempo em que estes possuíam distribuição Exponencial. Para determinar a distribuição de probabilidade de cada componente foram realizados os testes de aderência e o papel de probabilidade. Essas análises foram efetuadas no programa computacional PROCONF (1999), desenvolvido com o auxílio de pesquisadores do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal de Rio Grande do Sul, para estudos de confiabilidade e modelagem estatística.

O interesse do estudo está em modelar a vida útil do componente (ver Figura 5). Os dados disponíveis não demonstram falhas precoces (fase da "mortalidade infantil") sofridas pelo componente, uma vez que são eliminadas em testes de *burn-in* realizados na empresa. Esse tipo de teste ocorre quando os componentes são submetidos a condições de operação mais intensas que a carga de operação esperada por um período curto de tempo, a fim de eliminar componentes com defeitos de fabricação (Elsayed, 1996). Os dados de tempos-até-falha disponíveis são censurados em 1,5 anos de garantia, logo não se conhece o comportamento dos mesmos após esse período.

Definida a distribuição teórica que melhor modela os dados de tempo-até-falha do componente analisado, pretende-se calcular o seu parâmetro através da inferência Bayesiana. Conhecido o parâmetro, é possível determinar as curvas de densidade de probabilidade, a função de risco e a confiabilidade da distribuição do item analisado.

A estimação de parâmetros, especialmente em confiabilidade, é necessária, pois as decisões da empresa são baseadas nelas. As conseqüências dessas decisões envolvem dinheiro, assim, a estimativa de parâmetros se justifica por possibilitar a redução de custos (Montgomery e Runger, 1995).

4.3 Modelagem Bayesiana para Dados de Tempos-até-Falha com Distribuição Exponencial

Nesta seção, é apresentada uma tentativa de modelagem Bayesiana da função de confiabilidade de um dos componentes que apresenta distribuição Exponencial nos seus tempos-até-falha durante um período da sua vida útil.

Optou-se pelo uso da Inferência Bayesiana na modelagem da confiabilidade, pois essa técnica possibilita a incorporação de informações de especialistas.

4.3.1 Definição da Distribuição a Priori e a Posteriori

Os procedimentos utilizados para a análise dos dados são, primeiramente, a definição da distribuição de probabilidade a priori. Utilizou-se uma distribuição a priori que pertence a Família de Distribuições Conjugadas, logo a distribuição a posteriori tem a mesma forma funcional da distribuição a priori.

Como mostrado na seção anterior, os dados amostrais utilizados no estudo são provenientes de uma distribuição Exponencial com parâmetro θ .

Seja $X \sim E(\theta)$, $X > 0$ e $\theta > 0$. A função de densidade é definida como

$$f(x|\theta) = \theta e^{-\theta x}. \quad (4.1)$$

A função a priori é definida como (adaptado de Hoyland e Rausand, 1994)

$$\pi(\theta) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \theta^{a-1} e^{-b\theta}. \quad (4.2)$$

Portanto, a função a posteriori é descrita da seguinte maneira:

$$\pi(\theta|x) \propto \theta e^{-\theta x} \theta^{a-1} e^{-b\theta} = \theta^a e^{-\theta(x+b)}. \quad (4.3)$$

Sendo assim, a função a posteriori pode ser definida como uma distribuição de probabilidade Gama com parâmetro de forma igual a $(a+1)$ e parâmetro inverso de escala igual a $(b+x)$, onde

- a é o parâmetro de forma da distribuição à priori;
- b é o parâmetro inverso de escala da distribuição à priori;
- x é o valor observado.

Generalizando para uma amostra de tamanho n , a função à posteriori é definida com parâmetro de forma $(a+n)$ e parâmetro inverso de escala $\left(b + \sum_{i=1}^n x_i\right)$, onde

$\sum_{i=1}^n x_i$ é o somatório de todas as observações x_i da amostra.

Definida a função de distribuição a priori, utilizou-se a opinião dos especialistas para a definição dos parâmetros da distribuição. Os engenheiros da empresa, que fabrica o ar condicionado analisado, afirmam que o aparelho tem vida útil de 10 a 15 anos. Como os componentes do ar condicionado são ligados em série, considerou-se que o componente hélice também tenha uma vida útil de 10 a 15 anos, com 95% de probabilidade. Esta foi definida em 95%, pois, segundo os especialistas, existe uma alta probabilidade do ar condicionado falhar no intervalo de tempo determinado, entretanto, sabe-se que existem aparelhos que falham antes e depois desse intervalo, porém com baixa probabilidade. Como os dados de tempos-até-falha estão definidos em semanas, definiu-se os parâmetros na mesma unidade de medida, considerando-se que em um ano haja 52 semanas.

Utilizando a informação dos especialistas, definiu-se os parâmetros a e b de tal forma que a média fosse 650 semanas (o que corresponde a 12,5 anos) e que o tempo médio até a falha do componente esteja no intervalo entre 520 e 780 semanas (ou, equivalentemente, entre 10 e 15 anos) com 0,95 de probabilidade. Os valores para os parâmetros foram obtidos através do programa computacional First Bayes (2000).

Assim, os parâmetros encontrados para a distribuição a priori Gama são:

- $a = 95,5175$ (parâmetro de forma a priori)
- $b = 0,14695$ (parâmetro inverso de escala a priori)

Utilizando a distribuição a posteriori conjugada da Gama (ver Equação 4.3), os parâmetros da distribuição a posteriori obtidos são:

- $a = 1348,5175$ (parâmetro de forma a posteriori)
- $b = 57685,809$ (parâmetro-inverso de escala a posteriori)

O Figura 12 apresenta o gráfico da distribuição a posteriori, ou seja, uma distribuição Gama com parâmetro de forma igual a 1348 e parâmetro inverso da escala igual a 57686.

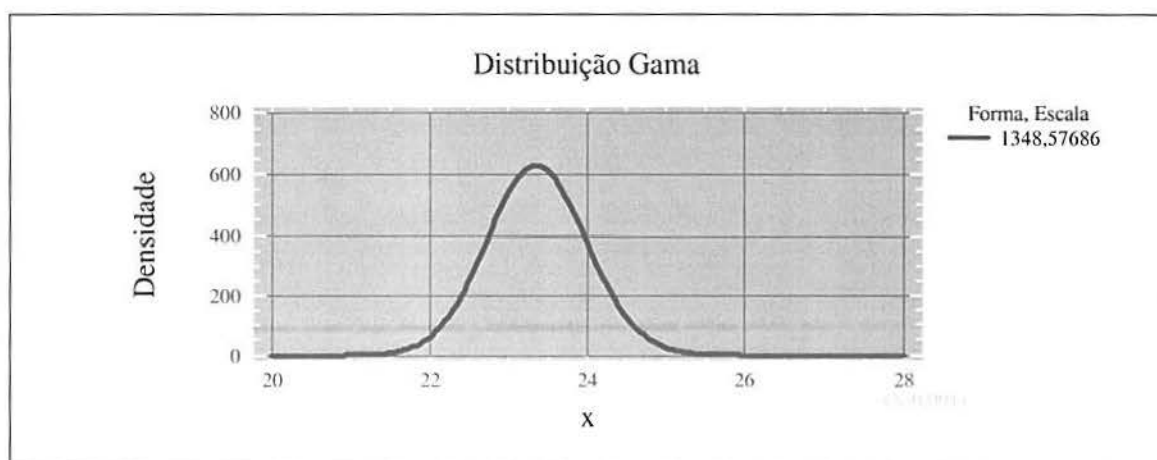


Figura 12: Gráfico da Distribuição a Posteriori

Uma vez que o valor de b corresponde ao inverso do parâmetro de escala, a média da distribuição Gama é obtida pela divisão do parâmetros b pelo a . Assim, a média a posteriori obtida é, aproximadamente, 42,8 semanas.

O intervalo de credibilidade de 95% da distribuição a posteriori é [40,60 – 45,18]. Isso indica que a probabilidade da média da distribuição a posteriori estar entre o limite inferior e o limite superior do intervalo é 0,95. Os valores do intervalo foram obtidos através do programa computacional First Bayes (2000).

O estimador de máxima verossimilhança para o parâmetro da distribuição Exponencial é, aproximadamente, 46 semanas, o equivalente à média da distribuição dos dados. Observa-se que ambos os estimadores para a média são muito semelhantes. Entretanto, os estimadores de máxima verossimilhança não são muito precisos e confiáveis para amostras com dados extremamente censurados (Bacha e Cleux, 1996).

4.3.2 Análise dos Resultados

Os resultados observados mostram-se similares nas suas alternativas de estimação do tempo médio até falha. Esses resultados coincidem com as notas de Montgomery e Runger (1995). Segundo os autores, na prática, uma amostra de tamanho moderado vai produzir aproximadamente as mesmas estimativas pelo método de Bayes ou por verossimilhança se os resultados são consistentes com a informação assumida a priori. Com estimadores bem diferentes, admite-se que o estimador de máxima verossimilhança seria o melhor a ser usado.

Assim, os resultados mostram que a informação disponibilizada pelos especialistas condiz com os dados. Contudo, essas informações não foram suficientes para obter um valor de MTTF do componente analisado que extrapolasse o tempo de garantia (78 semanas), uma vez que é conhecido que a MTTF do aparelho é estimada em 650 semanas. Apesar de esperar obter-se uma estimativa para a MTTF, através do estimador Bayesiano, no intervalo entre 78 e 650 semanas, para, assim, estimar o comportamento da distribuição dos dados de tempos-até-falha nesse período, tal estimativa não seria possível devido a fato da censura dos dados ocorrerem em 1,5 ano.

4.4 Roteiro de Modelagem Bayesiana

Na Figura 13 será apresentado um fluxograma que resume o procedimento de modelagem aplicado no estudo de caso descrito anteriormente. O fluxograma apresenta um possível roteiro de modelagem de confiabilidade de dados de campo através da inferência Bayesiana.

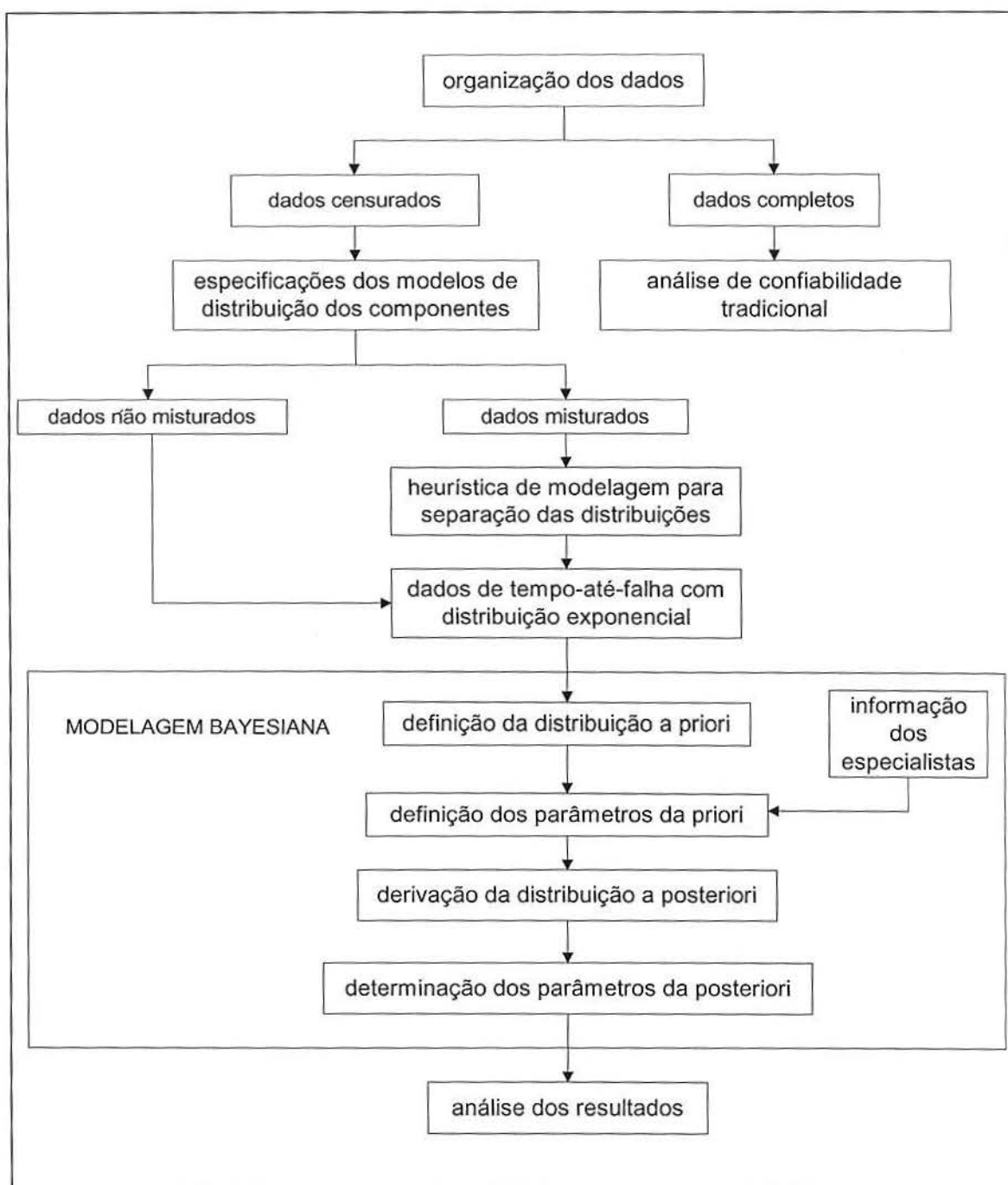


Figura 13: Roteiro de Modelagem Bayesiana aplicado neste estudo.

5. COMENTÁRIOS FINAIS

5.1 Conclusões

Neste trabalho, apresentou-se uma revisão bibliográfica acerca de conceitos básicos de confiabilidade e de inferência Bayesiana. Esse estudo possibilitou o compreensão de conceitos, para, então, utilizar conjuntamente esses dois assuntos num estudo de caso.

O objetivo secundário deste trabalho foi aplicar uma metodologia de modelagem e análise de confiabilidade de dados de garantia, utilizando a inferência Bayesiana. Optou-se pela utilização da teoria Bayesiana, pois os dados analisados são extremamente censurados e possuem informações de especialistas acerca do tempo médio até a falha (MTTF) do componente analisado.

Os resultados mostram que a aplicação da teoria Bayesiana, utilizando a Família de Distribuições Conjugadas, não se mostrou eficiente em situações nas quais os dados são incompletos (censurados) e a amostra é grande. Sendo assim, a informação a priori não teve muita influência na distribuição à posteriori, uma vez que a estimação dos parâmetros da distribuição à posteriori são diretamente proporcionais ao tamanho da amostra, o que influencia o resultado a ser obtido.

Como os dados disponíveis possuem indicativos iniciais da distribuição dos dados de tempo-até-falha, a MTTF obtida foi baixa, ou seja, o valor de MTTF se encontra dentro do período de garantia. Enfim, a aplicação da metodologia proposta não apresentou bons resultados por limitações na técnica, a serem discutidas no item 5.2 deste capítulo.

Como contribuição final do trabalho foi apresentado, na forma de fluxograma, um roteiro de modelagem da confiabilidade de dados de tempo-até-falha através da inferência Bayesiana. Esse roteiro foi baseado na forma em que foi realizado o estudo de caso.

5.2 Discussão

A inferência Bayesiana apresenta limitações quando utilizada para modelar dados censurados. Isso ocorre pois, além da amostra ser grande, a distribuição a priori está muito afastada dos dados, uma vez que acontece num período de tempo diferente dos dados obtidos. Dessa forma a estimativa obtida será no intervalo de tempo dos dados.

A inferência Bayesiana poderia fornecer bons resultados se a distribuição a priori fosse relativa ao tempo médio até falha dos componentes que falham dentro da garantia, ou pelo menos próxima. Neste caso, a priori poderia ser obtida através de dados de estudos anteriores, experiência dos funcionários da assistência técnica quanto ao tempo médio até falha do produto, etc. Entretanto, esse tipo de priori não atenderia ao objetivo do estudo, que é justamente usar os dados disponíveis e uma informação a priori de longo prazo, para prever o comportamento da distribuição de probabilidade dos tempos-até-falha no período de tempo após o prazo de garantia.

Bacha e Celeux (1996) utilizam inferência Bayesiana em um contexto similar ao do estudo realizado. Entretanto, eles utilizam simulação de Monte Carlo e técnicas para aumentar o tamanho da amostra.

5.3 Sugestões para trabalhos futuros

Sugere-se que, em futuros estudos similares, se aplique alguma técnica de simulação para gerar dados no intervalo de tempo entre o final do período de garantia e o tempo médio de duração do aparelho de ar condicionado. Essa simulação deverá ser feita com base em informações de especialistas e dados isolados dos quais se tenha registro ao longo desse período de defasagem.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BACHA, M.; CELEUX, G. **Bayesian estimation of a weibull distribution in a highly censored and small sample setting**. Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, n. 2993, octobre, 1996.

BERGER, J. O. **Statistical decision theory and bayesian analysis**. Springer-Verlag, New York, 1985

DANIEL, W. W. **Applied nonparametric statistics**. Georgia State University, Houghton Mifflin Company, 1978.

DeGROOT, M. H. **Optimal statistical decisions**. McGraw-Hill, New York, 1970.

DROGUETT, E. L. **Estimando a Confiabilidade em produtos em desenvolvimento**. 3º Congresso Brasileiro de Gestão de Desenvolvimento de Produto. Florianópolis, SC. 25-27 setembro de 2001.

ELSAYED, E. A. **Reliability engineering**. Reading, MA: Addison Wesley Longman, 1996.

FALCETTA, E.F. **Análise de confiabilidade de produtos baseada em dados de garantia**. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção-UFRGS, 118p. Porto Alegre, 2000.

FEIGENBAUM, A. V. **Controle de Qualidade Total** Vol. III – Métodos Estatísticos Aplicados à Qualidade. McGraw-Hill, 40ª Ed., 1994.

FIRST BAYES (2000) – Disponível em www.shef.ac.uk/~st1ao/1b.html. Acesso em 05 de fevereiro de 2003.

FOGLIATTO, F. S.; FALCETTA, E. F. **Modelagem da Confiabilidade de produtos a partir de dados de Garantia**. In: 3 Congresso Brasileiro de Gestão de Desenvolvimento de Produto, 2001, Florianópolis. Anais do 3º Congresso Brasileiro De Gestão de desenvolvimento de Produto. Florianópolis, SC: Lagoa Editora, v. CD-ROM, 2001.

GILKS, W. R.; RICHARDSON, S.; SPIGELHALTER, D.J. **Markov chain monte carlo in practice – Interdisciplinary Statistics**. Chapman & Hall / CRC Press, 1995.

HELMAN, H.; ANDERY, P. R. P. **Análise de falhas (aplicação dos métodos de FMEA - FTA)**. Série Ferramentas da Qualidade, Vol. 11, Fundação Christiano Ottoni, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 1995.

HOYLAND, A.; RAUSAND, M. **System reliability theory: models an statistical methods**. New York: Wiley – Interscience, 1994.

HU, X. J.; LAWLESS, J. F. **Estimation of Rate and Mean Functions From Truncated Recurrent Event Data**. Journal of the American Statistical association. March, 1996, Vol. 91, N. 433, Theory and Methods.

KAPUR, K. C.; LAMBERSON L. R. **Reliability in engineering design**. New York: John Wiley & Sons, 1977.

JEFFREYS, H. **Theory of Probability**. Oxford Un. Press, 1961.

LAWLESS, J. F. Statistical analysis of product warranty data. **International Statistical Review**, v.66, n 1, p.41-60, 1998.

LEE, P. M. **Bayesian statistics: an introduction**. London: Arnold (2 nd ed.), 1997.

LEEMIS, L. M. **Reliability – Probabilistic models and statistical methods**. Englewood Cliffs (NJ): Prentice-Hall, 1995.

MARTZ, H. F.; WALLER, R. A.. **Bayesian reliability analysis**. Wiley, New York, 1982.

MEEKER, W. Q.; ESCOBAR, L. A. **Statistical methods for reliability data**. New York: John Wiley & Sons, 680p.,1998.

MIGON, H. S. **Introdução à Inferência Bayesiana**. Mini-Curso – XI Congresso Nacional de matemática Aplicada e Computacional. Ouro Preto, 1988.

MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C. **Applied statistics and probability for engineers**. New York: John Wiley, 1995.

MOOD, A. M.; GRAYBILL, F. A.; BOES, D.C. **Introduction to the theory of statistics**. 3.ed. New York: Mc Graw-Hill, 1974.

PROCONF (1999). **Manual do Usuário**. Porto Alegre: Maxxi Gestão Empresarial.

SOARES, J. F.; COLOSIMO, E.A. **Métodos estatísticos na pesquisa clínica**. 5º SEAGRO, Ribeirão Preto-SP, julho, 1995.

WASSERMAN, G. S.; SUDIJANTO, A. A comparison of three strategies for forecasting warranty claims. **IIE Transactions** 28, 967-977, 1996.

WERNER, L. **Modelagem dos tempos de falha ao longo do calendário**. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, UFRGS, Porto Alegre, 1996.