

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**SOLUÇÃO ANALÍTICA DA EQUAÇÃO DE TRANSPORTE DE PARTÍCULA NEUTRA
EM GEOMETRIAS CARTESIANA E CILÍNDRICA**

Por

Glênio Aguiar Gonçalves

Tese para obtenção do Título de
Doutor em engenharia

Porto Alegre, Dezembro de 2003

SOLUÇÃO ANALÍTICA DA EQUAÇÃO DE TRANSPORTE DE PARTÍCULA NEUTRA EM GEOMETRIAS CARTESIANA E CILÍNDRICA

Por

Glênio Aguiar Gonçalves

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de

Doutor em engenharia

Área de concentração: Fenômenos de Transporte

Orientador: Prof. Dr. Marco T. M. B. de Vilhena

Comissão de Avaliação:

Prof. Dr. Sérgio Bogado Leite (CNEN);

Prof. PhD. Cláudio de Oliveira Graça (UFSM);

Prof. Dr. Jorge Zabadal (PROMEC);

Prof. Dr. Rubén P. Pazos.

Prof. PhD. Jun Sérgio Ono Fonseca

Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, Dezembro de 2003

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao amigo e professor orientador Marco Tullio M. B. de Vilhena pela oportunidade de realização deste trabalho de doutorado e pela forma serena e segura de sua orientação.

Aos amigos e colegas que de maneira direta ou indireta contribuíram para a execução deste trabalho.

Ao Cnpq pelo suporte financeiro e ao PROMEC representado no seu corpo de funcionários e docente.

Especialmente a generosidade da minha família que não mediu esforços na contribuição para que este trabalho alcançasse seus objetivos.

RESUMO

SOLUÇÃO ANALÍTICA DA EQUAÇÃO DE TRANSPORTE DE PARTÍCULA NEUTRA EM GEOMETRIAS CARTESIANA E CILÍNDRICA

No decurso deste trabalho, são apresentadas soluções analíticas para problemas de transporte de nêutrons em geometrias cilíndrica e cartesiana. Para a geometria cilíndrica, usa-se a transformada de Hankel de ordem zero juntamente com o método S_N para um problema cilíndrico unidimensional, considerando simetria azimutal e espalhamento isotrópico. Este método é aqui chamado HTS_N . O problema cilíndrico com espalhamento anisotrópico é tratado usando o método da decomposição, que possibilita construir um processo recursivo em que a solução HTS_N entra como condição uma inicial. Para a geometria cartesiana, a equação de transporte em uma e duas dimensões é derivada em relação à variável angular tantas vezes quantas for a ordem da expansão do espalhamento anisotrópico. Este processo leva a um conjunto de equações íntegro-diferenciais mais a equação puramente diferencial que pode ser resolvida pelo método de separação de variáveis. Seguindo este processo, foi possível chegar às soluções de Case para o problema de transporte em uma dimensão. Também são apresentadas simulações numéricas para um problema de transporte em geometria cilíndrica isotrópico e com anisotropia quadrática.

Autor: Glênio Aguiar Gonçalves

Orientador: Prof. Dr. Marco T. M. B. de Vilhena

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Tese de Doutorado em Engenharia

Porto Alegre, Dezembro de 2003

ABSTRACT

ANALYTICAL SOLUTION FOR THE TRANSPORT EQUATION FOR NEUTRAL PARTICLES IN CYLINDRICAL AND CARTESIAN GEOMETRY

In this work, we are reported analytical solutions for the transport equation for neutral particles in cylindrical and cartesian geometry. For the cylindrical geometry, it is applied the Hankel transform of order zero in the S_N approximation of the one-dimensional cylindrical transport equation, assuming azimuthal symmetry and isotropic scattering. This procedure is coined HTS_N method. The anisotropic problem is handled using the decomposition method, generating a recursive approach, which the HTS_N solution is used as initial condition. For cartesian geometry, the one and two dimensional transport equation is derived in the angular variable as many time as the degree of the anisotropic scattering. This procedure leads to set of integro-differential plus one differential equation that can be really solved by the variable separation method. Following this procedure, it was possible to come out with the Case solution for the one-dimensional problem. Numerical simulations are reported for the cylindrical transport problem both isotropic and anisotropic case of quadratic degree.

Autor: Glênio Aguiar Gonçalves

Orientador: Prof. Dr. Marco T. M. B. de Vilhena

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Tese de Doutorado em Engenharia

Porto Alegre, Dezembro de 2003

ÍNDICE

1	Introdução	1
2	Solução da Equação de Transporte em Geometria Cilíndrica para um Problema com Espalhamento Isotrópico Usando Transformada de Hankel de Ordem Zero – Método HTS_N	5
2.1	Introdução	5
2.2	Equação Desenvolvida por Mitsis para o Problema em Geometria Cilíndrica	6
2.3	Aplicação da Transformada de Hankel de Ordem Zero - HTS_N	9
2.4	Resultados Numéricos	15
2.4.1	Problema 1	15
2.4.2	Problema 2	17
3	Solução Da Equação de Transporte de Boltzmann em Geometria Cilíndrica Aplicando o Método HTS_N e o Método da Decomposição	18
3.1	Introdução	18
3.2	Descrição do Método da Decomposição	19
3.3	Formulação Matemática voltada à Equação de Transporte em Geometria Cilíndrica	20
3.4	Aplicação Conjunta dos Métodos da Decomposição e HTS_N	24
3.5	Implementação Numérica de Soluções	28
3.5.1	Problema-teste	28
4	Soluções Analíticas da Equação de Transporte de Boltzmann em Geometria Cartesiana Unidimensional	33
4.1	Introdução	33
4.2	Solução da Equação de Boltzmann Isotrópica Unidimensional	34
4.2.1	Análise das Autofunções e Autovalores Associados	36
4.3	Solução da Equação de Boltzmann com Anisotropia Linear	40

4.3.1	Análise das Autofunções e Autovalores Associados	42
4.4	Solução da Equação de Boltzmann com Anisotropia Quadrática	45
4.4.1	Análise das Autofunções e Autovalores Associados	47
4.5	Solução da Equação de Boltzmann Transiente	49
5	Soluções Exatas da Equação de Transporte de Boltzmann em Geometria Cartesiana Bidimensional	52
5.1	Introdução	52
5.2	Solução da Equação de Boltzmann Bidimensional Estacionária	53
5.2.1	Análise das Autofunções e Autovalores Associados.	55
5.3	Solução da Equação de Boltzmann Bidimensional Transiente.	62
6	Conclusão	65
	Referências Bibliográficas	68
	Apêndices	71
A	Identidade entre Operações de Matrizes	71
B	Identidades entre Deltas de Dirac	73
B.1	Prova da Primeira Identidade entre Deltas	73
B.2	Prova da Segunda Identidade entre Deltas	75
C	Equivalência das Autofunções e Autovalores com Case	78
C.1	Normalização das Autofunções para Anisotropia Linear	78
C.2	Normalização das Autofunções para Anisotropia Quadrática	82
D	Desenvolvimento da Função Dispersão Bidimensional	85
E	Equivalência entre Equações de Transporte Unidimensional	87

LISTA DE SÍMBOLOS

Letras Romanas:

<i>A</i>	Matriz de espalhamento
a_{ji}	Elementos da Matriz <i>A</i>
<i>B</i>	Matriz diagonal de coeficientes
B_{kk}	Elementos da Matriz <i>B</i>
<i>C</i>	Matriz diagonal de coeficientes
c	Número médio de nêutrons surgidos após uma colisão
c_m	Coefficientes da aproximação polinomial do fluxo escalar
<i>D</i>	Matriz diagonal dos autovalores de <i>A</i>
$E(r)$	Função que define o erro da aproximação
<i>F</i>	Operador íntegro-diferencial
F	Fluxo de nêutrons incidentes no contorno
h	Valor inicial do operador <i>L</i>
<i>I</i>	Matriz identidade
$I(r)$	Resulta da integral do pseudofluxo angular
I_0	Função de Bessel
J_0	Função de Bessel
K_0	Função de Bessel
<i>L</i>	Operador diferencial
N	Ordem da quadratura gaussiana
P	Designa valor principal de Cauchy
P_l	Polinômio de Legendre de ordem l
$Q(r)$	Fonte externa isotrópica
<i>R</i>	Operador que compõe <i>F</i> : $F = L+R$
R	Raio do cilindro
r	Coordenada radial

$S(r)$	Notação concisa que engloba fonte externa e nêutrons incidentes
s	Autovalor do problema transiente
t	Variável temporal
U	Matriz de autovetores da matriz A
u_n	Função resultante da decomposição
u_{jk}	Elemento da matriz U
v_{jk}	Elemento da matriz U^{-1}
w_i	Peso da quadratura gaussiana
X_ν	Componente espacial da autofunção referente a x
x	Coordenada espacial
Y_λ	Componente espacial da autofunção referente a y
y	Coordenada espacial
Z_i	Norma

Letras Gregas:

α	Autovalor associado a autofunção transiente
α_k	Raiz quadrada positiva do autovalor λ_k
β	Autovalor referente ao problema bidimensional transiente
$\beta(\nu, \lambda)$	Função arbitrária associada a autofunção bidimensional
η	Variável angular da direção de propagação do fluxo na direção y
θ	Ângulo polar da direção de propagação do fluxo; $\mu = \cos \theta$
$A(\nu)$	Função dispersão do problema unidimensional
$A(\nu, \lambda)$	Função dispersão do problema bidimensional
λ	Autovalor associado a coordenada y
$\lambda(\nu)$	Função arbitrária relativa a autofunção unidimensional
λ_k	Autovalor da matriz diagonal D
μ	Variável angular da direção de propagação do fluxo na direção x
μ_i	Discretização da variável μ ; raízes do polinômio de Legendre de ordem N
ν	Autovalor unidimensional contínuo; também é o autovalor bidimensional
ν_0	Autovalor assintótico associado a autofunção unidimensional
ξ	Variável característica da transformada de Hankel

σ_s	Seção de choque de espalhamento isotrópico; tem a mesma definição de c
σ_{s1}	Coefficiente do termo linear da expansão da seção de choque
σ_{s2}	Coefficiente do termo quadrático da expansão da seção de choque
$\Phi(r)$	Vetor pseudofluxo angular discretizado
$\Phi(r, \mu)$	Pseudofluxo angular
$\phi_j(r)$	Componente discretizada do pseudofluxo angular
ϕ_n	Funções resultantes da decomposição do fluxo angular
ϕ_ν	Componente angular da autofunção unidimensional
ϕ_{0+}	Componente angular da autofunção assintótica associada ao autovalor $+\nu_0$
ϕ_{0-}	Componente angular da autofunção assintótica associada ao autovalor $-\nu_0$
$\phi_{\nu\lambda}$	Componente angular da autofunção bidimensional cartesiana
$\bar{\phi}_j(\xi)$	Transformada de Hankel de $\phi_j(r)$
φ	Ângulo polar da direção de propagação do fluxo
$\psi(r, \theta, \varphi)$	Fluxo angular em geometria cilíndrica
$\psi(r)$	Fluxo escalar
ψ_ν	Autofunção da equação de Boltzmann unidimensional
ψ_{0+}	Autofunção da equação de Boltzmann unidimensional associada a $+\nu_0$
ψ_{0-}	Autofunção da equação de Boltzmann unidimensional associada a $-\nu_0$
$\psi_{\nu\lambda}$	Autofunção da equação de Boltzmann bidimensional
ω	Autovalor contínuo; é idêntico ao ν unidimensional

ÍNDICE DE FIGURAS

5.1	Representação Esquemática dos Autovalores Bidimensionais	58
5.2	Representação Esquemática dos Autovalores Bidimensionais	61
5.3	Autovalores λ 's Correspondentes a um dado $\nu = \pm \nu_l$	61

ÍNDICE DE GRÁFICOS

2.1	Fluxos Escalares Isotrópicos para Problemas com Fonte Delta de Dirac.	17
3.1	Fluxo Escalar para o Problema com Anisotropia Quadrática.	29
3.2	Fluxo Angular para o Problema com Anisotropia Quadrática.	30
3.3	Fluxo Angular para o Problema com Anisotropia Quadrática	30
3.4	Mostra a Convergência da Seqüência de Resultados do Problema-Teste	32
3.5	Mostra a Convergência da Série via Teste da Razão.	32
5.1	Comportamento das Raízes da Função Dispersão Bidimensional	58

ÍNDICE DE TABELAS

2.1	Comparação entre as Soluções do Método F_N e o Método HTS_N ; $R=1\text{cm}$	16
2.2	Comparação entre as Soluções do Método F_N e o Método HTS_N ; $R=10\text{cm}$	16
2.3	Fluxo Escalar para um Cilindro de Raio $R=10\text{cm}$ e $c=0,80\text{cm}^{-1}$	17
3.1	Fluxo Escalar determinado para o problema-teste	29

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

O desenvolvimento da teoria de transporte de partículas, nêutrons ou fótons, é extremamente relevante por sua aplicação em várias áreas do conhecimento, indo desde a medicina até geração de energia. Por isso, há um especial interesse na implementação de métodos numéricos e analíticos eficientes na simulação de soluções.

A solução do problema de transporte de partículas segue fundamentalmente duas linhas de abordagem: uma abordagem probabilística e outra determinística. No trato probabilístico, o método de Monte Carlo [Bell e Glasstone, 1970], especificamente, baseia-se na essência física do problema, descrevendo os históricos das partículas, que são tomadas individualmente, gerados pelas sucessivas colisões durante sua trajetória. Este histórico é construído de forma estocástica a partir da definição das seções de choque. O método de Monte Carlo é bastante útil em situações especiais, tal como geometrias complexas. Por outro lado, os métodos determinísticos buscam soluções para a equação íntegro-diferencial, ou integral, de transporte de Boltzmann. Neste contexto, assumem papéis de destaque os métodos de elementos finitos e os métodos cujos procedimentos fundamentam-se na aproximação do fluxo angular por harmônicos esféricos, métodos P_N , ou por quadratura de Gauss, métodos S_N .

Dentre os métodos determinísticos aplicados à equação de transporte de Boltzmann em geometria cilíndrica, Mitsis [Mitsis, 1963] trabalhou um problema com simetria azimutal, num cilindro de altura infinita e espalhamento isotrópico. A solução para o fluxo escalar é expressa como uma expansão em termos das autofunções determinadas por Case [Case e Zweifel, 1967] para o problema em geometria de placa plana. Siewert [Siewert e Thomas, 1984] complementou este trabalho ao incluir termo de fonte externa isotrópica mais uma condição de fluxo incidente constante

no contorno. Alain Kavenoky [Kavenoky, 1978] aplicou o método C_N para um problema isotrópico. Por seu turno, J. K. Fletcher [Fletcher, 1982] desenvolveu uma solução semianalítica para um problema anisotrópico, fazendo a expansão do fluxo angular em harmônicos esféricos. Altaç [Altaç e Spinrad, 1990] desenvolveu o método SK_N que, basicamente, aproxima o *kernel* da integral de transporte por uma soma de *kernels* análogos aos da equação da difusão, gerando um conjunto de equações diferenciais acopladas. As equações resultantes do processo SK_N assemelham-se bastante às desenvolvidas por Mitsis. As dificuldades de tratar problemas de transporte com espalhamento anisotrópico fazem com que a maioria dos métodos desenvolvidos restrinja-se a problemas com espalhamento isotrópico.

Para a equação de transporte em geometria cartesiana, a abordagem determinística engloba uma gama de formulações bem estabelecidas. Case [Case e Zweifel, 1967] trabalhou um problema unidimensional determinando uma base de soluções singulares exatas. Estas soluções determinaram um marco na teoria de transporte porque tornou possível fazer uma análise dos resultados do ponto de vista físico e matemático. Mais recentemente, um conjunto de métodos foi desenvolvido para tratar problemas multidimensionais. Dentre estes, podem ser citados os métodos espectros-nodais, particularmente, SGF-CN (Spectral Green's Function Constant Nodal Method) [Barros, 1990; Barros e Larsen, 1992], no qual o termo de fuga transversal foi aproximado por uma constante, e SGF-ExpN (Spectral Green's Function Exponential Nodal Method) [Barros e Larsen, 1991]. No último, o termo de fuga transversal foi aproximado heurísticamente por uma exponencial tomando a seção de choque macroscópica como a constante de decaimento. Com estes métodos espectros-nodais é possível a obtenção de resultados precisos sem a necessidade da utilização de malhas finas na discretização do domínio. Também merece ser citado a extensão do método LTS_N para abordar problemas multidimensionais [Zabadal, 1994]. Neste procedimento, o método LTS_N é aplicado às equações unidimensionais resultantes da integração nas variáveis espaciais, para tomar os valores médios, das equações S_N multidimensionais. Deste processo resultam soluções analíticas para os fluxos angulares médios e para os fluxos angulares transversos na fronteira do domínio.

Como objetivo, este trabalho propõe-se a tratar a equação de transporte de Boltzmann nas geometrias cilíndrica e cartesiana. Especificamente, o segundo e terceiro capítulos tratam a equação de transporte em geometria cilíndrica. No quarto e quinto capítulos, respectivamente, são abordados os problemas em geometria cartesiana unidimensional e bidimensional. A motivação para este desenvolvimento reside na importância de serem obtidas soluções ou exatas ou soluções numéricas com precisão desejada em ambas as geometrias. Sabidamente, problemas em geometria cilíndrica

apresentam tanta dificuldade em seu tratamento quanto relevância na prática da engenharia nuclear. Por sua vez, a solução da equação de transporte em geometria cartesiana bidimensional de forma exata mostra-se relevante também por indicar uma base de autofunções adequada para desenvolver soluções aproximadas por métodos de aplicação menos complexa. A seguir será feita uma descrição breve do conteúdo de cada capítulo.

O segundo capítulo deste trabalho apresenta uma solução da equação íntegro-diferencial que foi obtida como resultado de uma transformação integral desenvolvida pela seqüência dos trabalhos de Mitsis e Siewert-Thomas. A solução desta equação íntegro-diferencial foi interpretada como um pseudofluxo angular porque, a partir de uma integral específica envolvendo essa solução, chega-se ao fluxo escalar. Como já foi referido, Mitsis resolveu a equação através do método de separação de variáveis, chegando a uma solução em termos das autofunções definidas por Case. Neste trabalho, para a solução desta equação íntegro-diferencial, usa-se a transformada de Hankel de ordem zero [Sneddon, 1972] conjuntamente com o método S_N (método de ordenadas discretas). O procedimento assim proposto foi denominado método HTS_N . A escolha dessa transformada integral decorre do fato de que as soluções que compõem sua base envolvem as funções de Bessel de primeira classe de ordem zero. Isto a torna apropriada para resolver o operador laplaciano em coordenadas cilíndricas que aparece na equação íntegro-diferencial. Por outro lado, há uma vantagem particular vinda da estreita relação de procedimentos entre o método HTS_N e o método LTS_N [Vilhena et al., 1998a]. Isto permite que todo o conhecimento acumulado no desenvolvimento desse último seja usado para a implementação do método HTS_N . Por último, ao final do capítulo, são apresentados resultados numéricos para problemas com fonte delta de Dirac e fonte constante, dos quais os últimos são comparados com soluções apresentadas na literatura.

No terceiro capítulo, propõe-se o uso do método da decomposição [Adomian, G., 1988], juntamente com o método HTS_N , para resolver problemas de transporte em um cilindro infinito com espalhamento anisotrópico. O método da decomposição é usado como um procedimento efetivo para resolver uma ampla classe de problemas lineares e não lineares, tanto de equações diferenciais como íntegro-diferenciais. A aplicação conjunta dos dois métodos se dá de maneira que, pelo método da decomposição, o operador da equação de transporte é desmembrado num componente diferencial, facilmente inversível, e num componente puramente integral que é composto pela integral de espalhamento. Isto possibilita construir uma forma recursiva de aplicação do inverso do operador diferencial, onde a solução HTS_N é usada como condição inicial para o problema anisotrópico. Como ilustração, ao final do capítulo é resolvido um problema-teste com anisotropia quadrática.

Por sua vez, no quarto capítulo é apresentado o método da derivação angular. Este método tem como procedimento básico a derivação da equação íntegro-diferencial de Boltzmann em relação à variável angular até a ordem de derivação que torne essa equação puramente diferencial. Como seqüência, esta equação diferencial é resolvida e sua solução é imposta também como solução, de forma retroativa, do conjunto de equações íntegro-diferenciais resultantes das sucessivas derivações e por último da equação de Boltzmann. Este procedimento origina um conjunto de soluções básicas singulares para a equação de Boltzmann essencialmente idênticas às soluções obtidas por Case, sem, contudo, a necessidade de normalização da integral de espalhamento. Para marcar o procedimento do método, são resolvidos exemplos de problemas unidimensionais com anisotropia, nos regimes estacionário e transiente, e estabelecidas comparações entre resultados obtidos neste trabalho e os de Case [Case e Zweifel, 1967].

Finalmente, no quinto capítulo, são trabalhados problemas de transporte bidimensionais, também nos regimes estacionário e transiente, através do método da derivação angular desenvolvido no capítulo quatro. As soluções obtidas são exatas, compondo uma base de autofunções singulares para a equação de Boltzmann, similar ao caso unidimensional. No decurso do capítulo, são feitas análises das autofunções e dos autovalores associados definindo o espectro admissível à que estes estão restritos. Na apreciação das autofunções, com intuito de mostrar sua consistência, são feitas análises qualitativas, buscando a identificação destas autofunções para situações especiais, onde são tomados os limites para recair no caso unidimensional que tem a forma de solução singular conhecida e tratada no quarto capítulo.

Capítulo 2

SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE TRANSPORTE EM GEOMETRIA CILÍNDRICA PARA UM PROBLEMA COM ESPALHAMENTO ISOTRÓPICO USANDO TRANSFORMADA DE HANKEL DE ORDEM ZERO – MÉTODO HTS_N

2.1) Introdução:

Neste capítulo propõe-se a aplicação da transformada de Hankel de ordem zero [Sneddon, 1972] para o cálculo do fluxo escalar de nêutrons com espalhamento isotrópico, em um cilindro de altura infinita, considerando simetria azimutal do fluxo. Este processo é aqui denominado método HTS_N. Tal desenvolvimento toma como referência o trabalho realizado por Mitsis [Mitsis, 1963] e posteriormente ampliado por Siewert e Thomas [Siewert e Thomas, 1984] para a inclusão do termo de fonte externa isotrópica e incidência de nêutrons constante em relação às variáveis angulares, no contorno do cilindro. Na base, o método HTS_N emprega conjuntamente a transformada de Hankel e o método de ordenadas discretas, S_N.

A aplicação de uma transformada integral, no caso a transformada de Hankel, ao problema de transporte em geometria cilíndrica mostra, *a priori*, a vantagem de ser usado em sua construção todo o conhecimento teórico e computacional acumulado no desenvolvimento do método LTS_N para problemas em geometria cartesiana [Vilhena et al.,1998]. Neste contexto está incluída a inversão analítica da matriz simbólica, que resulta da transformação integral, e a possibilidade do uso de altas ordens para quadratura gaussiana.

Para ilustrar sua validação, o método HTS_N é implementado computacionalmente e então, ao final do capítulo, são apresentados resultados numéricos e, por efeito, estes são comparados com os de problemas divulgados por Siewert e Thomas.

2.2) Equação Desenvolvida por Mitsis para o Problema em Geometria Cilíndrica:

A seguir são apresentados, em descrição breve, o desenvolvimento feito por Mitsis [Mitsis, 1963]^{*} e a já referida implementação realizada por Siewert e Thomas [Siewert e Thomas, 1984][§].

Para um problema em um cilindro infinito com espalhamento isotrópico, a equação integral pode ser deduzida da forma geral

$$\psi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) = \frac{c}{4\pi} \int_0^{s_0} \psi(\mathbf{r} - s \boldsymbol{\Omega}) e^{-s} ds \quad (2.1)$$

na qual a constante c é o número médio de nêutrons surgidos após uma colisão. Como seqüência da dedução, substitui-se a forma geral do fluxo angular, $\psi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})$, por $\psi(r, \theta, \varphi)$, na qual a variável r é a coordenada radial, θ e φ são os ângulos polares que a definem direção de propagação do fluxo e considera-se que o fluxo escalar, $\psi(r)$, depende somente da projeção de \mathbf{r} no plano perpendicular ao eixo do cilindro. Desta forma, a equação integral de transporte, com espalhamento isotrópico para um cilindro de altura infinita, toma a forma

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \frac{c}{4\pi} \int_0^{s_0(r, \theta, \varphi)} \psi\left(\sqrt{r^2 + s^2 \text{sen}^2 \theta - 2sr \text{sen} \theta \cos \varphi}\right) e^{-s} ds \quad (2.2)$$

onde o limite superior da integral é dado por

$$s_0(r, \theta, \varphi) = \frac{r \cos \varphi + \sqrt{R^2 - r^2 \text{sen}^2 \varphi}}{\text{sen} \theta} \quad (2.3)$$

na qual R é o raio do cilindro. Em seu processo, integrando a equação (2.2) em relação às variáveis angulares θ e φ , Mitsis chega à seguinte expressão para o fluxo escalar

^{*} As demais citações a Mitsis devem-se a esta referência.

[§] Também, as demais citações a Siewert, ou a Siewert e Thomas, devem-se a esta referência.

$$\psi(r) = c \int_l^\infty dy \left[\int_0^r K_0(ry) I_0(ty) t \psi(t) dt + \int_r^R K_0(ty) I_0(ry) t \psi(t) dt \right] \quad (2.4)$$

onde I_0 e K_0 são as funções de Bessel de segunda classe [Abramowitz e Stegun, 1964]. Seguindo, faz a seguinte mudança de variável

$$y = \frac{l}{\mu} \quad (2.5)$$

para então reescrever o fluxo escalar, a expressão (2.4), na nova forma

$$\psi(r) = c \int_0^l \frac{d\mu}{\mu^2} \left[\int_0^r K_0(r/\mu) I_0(t/\mu) t \psi(t) dt + \int_r^R K_0(t/\mu) I_0(r/\mu) t \psi(t) dt \right] \quad (2.6)$$

Neste ponto, é definida a função angular $\Phi(r, \mu)$, denominada pseudofluxo angular, de modo que

$$\Theta(r, \mu) = c \left[\int_0^r K_0(r/\mu) I_0(t/\mu) t \psi(t) dt + \int_r^R K_0(t/\mu) I_0(r/\mu) t \psi(t) dt \right] \quad (2.7)$$

ou seja, pela (2.6), o fluxo escalar é dado pela seguinte integração na variável angular

$$\psi(r) = \int_0^l \Theta(r, \mu) \frac{d\mu}{\mu^2} \quad (2.8)$$

A expressão (2.7), ainda seguindo Mitsis, é solução da equação íntegro-diferencial

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{l}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{l}{\mu^2} \right) \Phi(r, \mu) = -c\psi(r) \quad (2.9)$$

a qual, usando a igualdade (2.8), é reescrita como

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{\mu^2} \right) \Phi(r, \mu) = -c \int_0^1 \Phi(r, \mu) \frac{d\mu}{\mu^2} \quad (2.10)$$

e está sujeita à condição de contorno

$$K_1(R/\mu) \Phi(R, \mu) + \mu K_0(R/\mu) \left. \frac{\partial \Phi(r, \mu)}{\partial r} \right|_{r=R} = 0 \quad (2.11)$$

Siewert e Thomas generalizam o trabalho de Mitsis para contemplar problemas com fonte externa isotrópica e incidência de nêutrons constante no contorno do cilindro. Com isto, a equação (2.10) toma a seguinte forma

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{\mu^2} \right) \Phi(r, \mu) = -c \int_0^1 \Phi(r, \mu) \frac{d\mu}{\mu^2} - (1-c)[Q(r) - F] \quad (2.12)$$

em que $Q(r)$ é a fonte externa isotrópica e F é o fluxo constante de nêutrons incidindo no contorno, definido como

$$\psi(R, \mu, \varphi) = \frac{F}{4\pi} \quad (2.13)$$

nos domínios: $\mu \in [-1, 1]$ e $\varphi \in [\pi/2, -\pi/2]$. A equação íntegro-diferencial (2.12) também está sujeita a condição de contorno (2.11). Nesta formulação, o fluxo escalar é dado por

$$\psi(r) = I(r) + F \quad (2.14)$$

onde

$$I(r) = \int_0^1 \Phi(r, \mu) \frac{d\mu}{\mu^2} \quad (2.15)$$

Portanto, resolvendo-se a equação íntegro-diferencial (2.12), o fluxo escalar de nêutrons pode ser determinado a partir da substituição da (2.15) na (2.14).

2.3) Aplicação da Transformada de Hankel de Ordem Zero – HTS_N:

O objetivo desse capítulo, como já referido na introdução, é a aplicação da transformada de Hankel de ordem zero [Sneddon, 1972] na equação íntegro-diferencial (2.12) para assim determinar o fluxo escalar. Para tal, primeiramente emprega-se o método S_N na equação (2.12), fazendo o uso da fórmula da quadratura gaussiana como aproximação da integral e, então, a partir disto, utiliza-se o método da colocação, tomando-se as $N/2$ raízes positivas do polinômio de Legendre de ordem N como pontos de colocação. Com este procedimento, a equação fica

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{\mu_j^2} \right) \phi_j(r) = -c \sum_{i=1}^{N/2} w_i \frac{\phi_i(r)}{\mu_i^2} - (1-c) [S(r)] \quad (2.16)$$

na qual μ_i e w_i são as raízes positivas do polinômio de Legendre de ordem N e os pesos gerados pela fórmula de quadratura Gauss-Legendre, respectivamente. Para simplificação, realizou-se a mudança $S(r) = Q(r) - F$. Ao se aplicar a transformada de Hankel de ordem zero na equação (2.16), obtêm-se

$$\left(-\xi^2 - \frac{1}{\mu_j^2} \right) \bar{\phi}_j(\xi) = -c \sum_{i=1}^{N/2} w_i \frac{\bar{\phi}_i}{\mu_i^2} - (1-c) [\bar{S}(\xi)] \quad (2.17)$$

que pode ser reescrita como

$$\left\{ \xi^2 + \left(\frac{1}{\mu_j^2} - \frac{cw_j}{\mu_j^2} \right) \right\} \bar{\phi}_j(\xi) - c \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N/2} w_i \frac{\bar{\phi}_i}{\mu_i^2} = (1-c) [\bar{S}(\xi)] \quad (2.18)$$

onde $\bar{\phi}_j(\xi)$ é a transformada de Hankel de $\phi_j(r)$. Para um tratamento mais claro, a equação (2.18) é escrita numa notação matricial,

$$(\xi^2 \mathbf{I} + \mathbf{A}) \bar{\boldsymbol{\Phi}}(\xi) = (1-c) [\bar{\mathbf{S}}(\xi)] \quad (2.19)$$

em que \mathbf{I} é a matriz identidade e os elementos da matriz \mathbf{A} (de ordem $N/2 \times N/2$) são

$$a_{ji} = \begin{cases} -\frac{c w_i}{\mu_i^2} & \Rightarrow \text{se } j \neq i \\ \frac{(1-c w_i)}{\mu_i^2} & \Rightarrow \text{se } j = i \end{cases} \quad (2.20)$$

Se a matriz \mathbf{A} for diagonalizada na forma

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{U}^{-1} \quad (2.21)$$

onde \mathbf{U} é a matriz dos autovetores e \mathbf{D} é uma matriz diagonal cujos elementos são os autovalores da matriz \mathbf{A} , então, a equação (2.19) pode ser colocada como

$$\mathbf{U} (\xi^2 \mathbf{I} + \mathbf{D}) \mathbf{U}^{-1} \bar{\boldsymbol{\Phi}}(\xi) = (1-c) [\bar{\mathbf{S}}(\xi)] \quad (2.22)$$

cuja solução formal é dada por

$$\bar{\boldsymbol{\Phi}}(\xi) = \mathbf{U} (\xi^2 \mathbf{I} + \mathbf{D})^{-1} \mathbf{U}^{-1} (1-c) [\bar{\mathbf{S}}(\xi)] \quad (2.23)$$

Ao se tomar $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{V}$, para simplificar a notação, tem-se que o j -ésimo elemento do vetor $\bar{\boldsymbol{\Phi}}$ será

$$\bar{\phi}_j(\xi) = (1-c) \sum_{i,k}^{N/2} \frac{u_{jk} v_{ki}}{\xi^2 + \lambda_k} [\bar{S}(\xi)] \quad (2.24)$$

onde u_{jk} e v_{ki} são os elementos das matrizes U e V , respectivamente, e os λ_k 's são os autovalores da matriz A . Aplicando-se a inversa da transformada de Hankel de ordem zero, H_0^{-1} , na equação (2.24), obtêm-se

$$H_0^{-1}\{\bar{\phi}_j(\xi)\} = \phi_j(r) = (1-c) \sum_{i,k}^{N/2} u_{jk} v_{ki} \left[\int_0^\infty \xi \frac{\bar{S}(\xi)}{\xi^2 + \lambda_k} J_0(r\xi) d\xi \right] \quad (2.25)$$

na qual, tomando-se o termo do interior do colchete e usando-se a relação de Parseval [Sneddon, 1972],

$$\int_0^\infty \xi \frac{J_0(r\xi)}{\xi^2 + \lambda_k} \bar{S}(\xi) d\xi = \int_0^\infty r' H_0^{-1} \left\{ \frac{J_0(r\xi)}{\xi^2 + \lambda_k} \right\} S(r') dr' \quad (2.26)$$

onde

$$H_0^{-1} \left\{ \frac{J_0(r\xi)}{\xi^2 + \lambda_k} \right\} = \int_0^\infty \xi \frac{J_0(r\xi)}{\xi^2 + \lambda_k} J_0(r'\xi) d\xi \quad (2.27)$$

e, por sua vez [Bartman, 1954],

$$\int_0^\infty \xi \frac{J_0(r\xi)}{\xi^2 + \lambda_k} J_0(r'\xi) d\xi = \begin{cases} I_0(\alpha_k r') K_0(\alpha_k r) \Rightarrow \text{para } 0 < r' < r \\ I_0(\alpha_k r) K_0(\alpha_k r') \Rightarrow \text{para } r < r' < \infty \end{cases} \quad (2.28)$$

sendo I_0 e K_0 as funções de Bessel e α_k , a raiz quadrada positiva de λ_k .

Também, deve-se introduzir a condição

$$S(r) = \begin{cases} S(r) & \Rightarrow \text{para } r < R \\ 0 & \Rightarrow \text{para } R \leq r < \infty \end{cases} \quad (2.29)$$

em que R é o raio do cilindro.

Desta forma, usando a igualdade (2.28) na (2.27) e esta na (2.26) e fazendo a substituição, juntamente com a condição (2.29), na equação (2.25), obtêm-se

$$\phi_j(r) = (1-c) \sum_{i,k}^{N/2} u_{jk} v_{ki} \left\{ K_0(\alpha_k r) \int_0^r r' I_0(\alpha_k r') S(r') dr' + I_0(\alpha_k r) \int_r^R r' K_0(\alpha_k r') S(r') dr' \right\} \quad (2.30)$$

que constitui a solução particular da equação (2.16).

Definido o componente particular, a seguir será desenvolvida a determinação do componente homogêneo da solução.

A determinação da solução homogênea é feita através do desacoplamento da equação (2.16). A diagonalização da matriz A , seguida de uma mudança da variável dependente, possibilita que o sistema de equações expresso na (2.16) seja tratado como um conjunto desacoplado de equações diferenciais. Como no processo anterior, o componente homogêneo da solução pode ser encontrado partindo-se da forma matricial da equação (2.16)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \Phi(r) - A \Phi(r) = 0 \quad (2.31)$$

com a matriz A (os elementos desta matriz são dados pela (2.20)) diagonalizada

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \Phi(r) - U D U^{-1} \Phi(r) = 0 \quad (2.32)$$

A equação (2.32), quando pré-multiplicada* por U^{-1} , fica

$$U^{-1} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \Phi(r) - D U^{-1} \Phi(r) = 0 \quad (2.33)$$

* Significa multiplicação à esquerda da equação matricial.

Lembrando que U^{-1} é uma matriz cujos elementos são constantes, então, conforme o apêndice A, a equação diferencial (2.33) pode ser reescrita como

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) U^{-1} \Phi(r) - \mathbf{D} U^{-1} \Phi(r) = 0 \quad (2.34)$$

na qual, fazendo-se a seguinte mudança da variável dependente,

$$\mathbf{H} = U^{-1} \Phi \quad (2.35)$$

torna possível o desacoplamento da solução; já que \mathbf{D} é uma matriz diagonal dos autovalores. Assim

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \mathbf{H}(r) - \mathbf{D} \mathbf{H}(r) = 0 \quad (2.36)$$

ou, de outra forma,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \mathbf{D} \right) \mathbf{H}(r) = 0 \quad (2.37)$$

A solução da equação diferencial (2.37) é escrita como

$$\mathbf{H}(r) = \mathbf{B} \mathbf{I}_0(\alpha r) + \mathbf{C} \mathbf{K}_0(\alpha r) \quad (2.38)$$

na qual \mathbf{B} e \mathbf{C} são matrizes diagonais dos coeficientes, $\mathbf{I}_0(\alpha r)$ e $\mathbf{K}_0(\alpha r)$ são vetores composto por funções de Bessel na forma

$$\mathbf{I}_0(\alpha r) = \begin{bmatrix} I_0(\alpha_1 r) \\ I_0(\alpha_2 r) \\ \vdots \\ I_0(\alpha_{N/2} r) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{K}_0(\alpha r) = \begin{bmatrix} K_0(\alpha_1 r) \\ K_0(\alpha_2 r) \\ \vdots \\ K_0(\alpha_{N/2} r) \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

em que α_k é a raiz quadrada positiva do autovalor λ_k . Entretanto, a solução da equação de Bessel, dada pela (2.38), deve se resumir à parte fisicamente aceitável por permanecer finita na origem. Ou seja

$$\mathbf{H}(r) = \mathbf{B} \mathbf{I}_0(\alpha r) \quad (2.40)$$

Por conseguinte, através da (2.40), e retornando com o acoplamento pela relação (2.35), encontra-se a solução homogênea

$$\Phi(r) = \mathbf{U} \mathbf{B} \mathbf{I}_0(\alpha r) \quad (2.41)$$

Logo, o j-ésimo elemento do vetor da solução homogênea é representado por

$$\phi_j = \sum_k^{N/2} u_{jk} I_0(\alpha_k r) B_{kk} \quad (2.42)$$

A solução geral da equação (2.16), em termos do j-ésimo elemento, é dada pelas equações (2.30) e (2.42):

$$\begin{aligned} \phi_j = & \sum_k^{N/2} u_{jk} I_0(\alpha_k r) B_{kk} + \\ & + (1-c) \sum_{i,k}^{N/2} u_{jk} v_{ki} \left\{ K_0(\alpha_k r) \int_0^r r' I_0(\alpha_k r') S(r') dr' + I_0(\alpha_k r) \int_r^R r' K_0(\alpha_k r') S(r') dr' \right\} \end{aligned} \quad (2.43)$$

sujeita à condição de contorno

$$K_1(R/\mu_j) \phi_j(R) + \mu_j K_0(R/\mu_j) \frac{\partial \phi_j(r)}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0 \quad (2.44)$$

Desta maneira, usando a condição de contorno (2.44) na solução geral (2.43), constitui-se o sistema de equações algébricas

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N/2} u_{jk} \left[\mu_j \alpha_k K_0(R/\mu_j) I_1(\alpha_k R) + K_1(R/\mu_j) I_0(\alpha_k R) \right] B_{kk} = \\ = (c-1) \sum_{i,k}^{N/2} u_{jk} v_{ki} \left\{ \left[\mu_j \alpha_k K_0(R/\mu_j) K_1(\alpha_k R) - K_1(R/\mu_j) K_0(\alpha_k R) \right] \int_0^R r' I_0(\alpha_k r') S(r') dr' \right\} \end{aligned} \quad (2.45)$$

que possibilita a definição dos coeficientes B_{kk} e, por conseqüência, permite que a solução dada pela (2.43), para o pseudofluxo angular, seja completamente determinada.

Portanto, resumindo o processo do método HTS_N , uma vez definido o pseudofluxo angular pela igualdade (2.43), determina-se a função $I(r)$ através da integral (2.15) e então, finalmente, o fluxo escalar será dado pela igualdade (2.14).

2.4) Resultados Numéricos:

Nesta seção são apresentados resultados numéricos e alguns destes são comparados com os de problemas existentes na literatura. O método está implementado computacionalmente em Fortran 90: para a diagonalização da matriz A , utiliza-se a sub-rotina DEVCRG para determinar a matriz dos autovalores e autovetores e, por sua vez, a inversa da matriz dos autovetores é feita pela sub-rotina DLINCG. No cálculo das funções de Bessel modificada de segunda classe, K_0 e K_1 , são usadas as DBSK0 e DBSK1. Todas as sub-rotinas são da biblioteca IMSL.

2.4.1) Problema 1:

Neste primeiro problema de transporte, considera-se um cilindro infinito, simetria azimutal e uma fonte externa constante dada por $Q = I/(1-c)$. Com a finalidade de se fazer uma comparação direta com os resultados numéricos mostrados por Siewert e Thomas pelo método F_N , calcula-se a função $F(r)$ a qual é definida como $F(r) = 1 - \psi(r)/Q$. Os resultados estão dispostos na tabela 2.1 para o raio $R = 1\text{cm}$ e na tabela 2.2 para $R = 10\text{cm}$.

C	r/R	HTS_N	F_N	c	HTS_N	F_N
0.3	0.0	0.3644051	0.364405	0.7	0.5966074	0.596607
	0.2	0.3721565	0.372157		0.6027657	0.602766
	0.4	0.3966218	0.396622		0.6218517	0.621852
	0.6	0.4422055	0.442206		0.6560771	0.656077
	0.8	0.5205972	0.520597		0.7112902	0.711290
	1.0	0.6943689	0.694369		0.8194699	0.819470
0.5	0.0	0.4570654	0.457065	0.9	0.8246774	0.824677
	0.2	0.4644492	0.464449		0.8277036	0.827704
	0.4	0.4875522	0.487552		0.8369856	0.836986
	0.6	0.5298164	0.529816		0.8532714	0.853271
	0.8	0.6003064	0.600306		0.8786069	0.878607
	1.0	0.7475377	0.747538		0.9249285	0.924929

Tabela 2.1: Comparação entre os resultados dos métodos F_N e HTS_N para $R = 1\text{cm}$.

c	r/R	HTS_N	F_N	c	HTS_N	F_N
0.3	0.0	0.4608825(-4) ^a	0.460882(-4)	0.7	0.8018285(-3)	0.801829(-3)
	0.1	0.5953250(-4)	0.595325(-4)		0.9462926(-3)	0.946293(-3)
	0.2	0.1121211(-4)	0.112121(-4)		0.1458973(-2)	0.145897(-2)
	0.3	0.2535790(-3)	0.253579(-3)		0.2626846(-2)	0.262685(-2)
	0.4	0.6253004(-3)	0.625301(-3)		0.5124942(-2)	0.512494(-2)
	0.5	0.1622502(-2)	0.162250(-2)		0.1045203(-1)	0.104520(-1)
	0.6	0.4378799(-2)	0.437880(-2)		0.2193596(-1)	0.219360(-1)
	0.7	0.1228865(-1)	0.122887(-1)		0.4710081(-1)	0.471009(-1)
	0.8	0.3625612(-1)	0.362559(-1)		0.1036163	0.103616
	0.9	0.1167493	0.116748		0.2371388	0.237138
1.0	0.5583602	0.558361	0.6633299	0.663331		
0.5	0.0	0.1388587(-3)	0.138859(-3)	0.9	0.2018980(-1)	0.201898(-1)
	0.1	0.1736797(-3)	0.173680(-3)		0.2160787(-1)	0.216079(-1)
	0.2	0.3050852(-3)	0.305085(-3)		0.2616236(-1)	0.261624(-1)
	0.3	0.6377433(-3)	0.637744(-3)		0.3482524(-1)	0.348252(-1)
	0.4	0.1448808(-2)	0.144881(-2)		0.4947204(-1)	0.494721(-1)
	0.5	0.3448841(-2)	0.344884(-2)		0.7333580(-1)	0.733358(-1)
	0.6	0.8487042(-2)	0.848704(-2)		0.1118111	0.111811
	0.7	0.2152832(-1)	0.215284(-1)		0.1738717	0.173872
	0.8	0.5664461(-1)	0.566444(-1)		0.2747619	0.274762
	0.9	0.1587639	0.158763		0.4426649	0.442664
1.0	0.6009958	0.600996	0.7812426	0.781243		

^a Leia-se como: 0.4608825×10^{-4}

Tabela 2.2: Comparação entre os resultados dos métodos F_N e HTS_N para $R = 10\text{cm}$.

2.4.2) Problema 2:

O problema 2 engloba dois problemas distintos. O primeiro refere-se a um cilindro infinito de raio $R=10\text{cm}$, com fonte delta de Dirac situada em quatro posições diferentes e seção de choque de espalhamento $c=0,85\text{cm}^{-1}$. Os resultados estão apresentados no gráfico 2.1. O segundo problema considerado, também com raio $R=10\text{cm}$, foi implementado para uma condição de contorno $F=1/4\pi$ e seção de choque de espalhamento dada por $c=0,80\text{cm}^{-1}$. Seus resultados estão dispostos na tabela 2.3. Os dois problemas foram resolvidos com ordem de quadratura $N=100$.

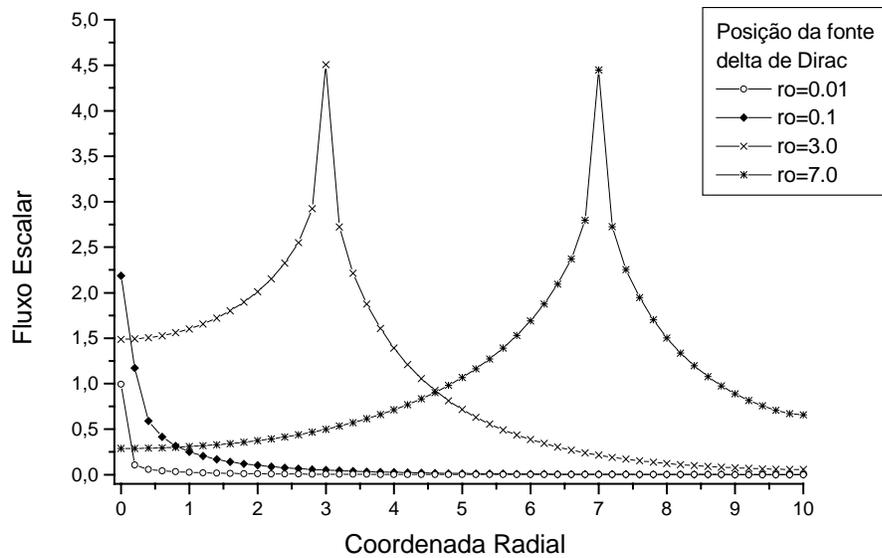


Gráfico 2.1: Fluxos escalares para quatro fontes delta de Dirac colocadas em posições distintas.

r (cm)	Fluxo Escalar	r (cm)	Fluxo Escalar
0	3,00049 ^a (-3)	6	4,30052(-2)
1	3,33918(-3)	7	8,11578(-2)
2	4,72020(-3)	8	1,56144(-1)
3	7,51809(-3)	9	3,09166(-1)
4	1,29340(-2)	10	7,09788(-1)
5	2,32585(-2)		

^a Leia-se: $3,0049 \times 10^{-3}$

Tabela 2.3: Fluxo escalar para um cilindro de raio $R=10\text{cm}$ e $c=0,80\text{cm}^{-1}$.

Capítulo 3

SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE TRANSPORTE DE BOLTZMANN EM GEOMETRIA CILÍNDRICA APLICANDO O MÉTODO HTS_N E O MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO

3.1) Introdução:

Este capítulo está voltado à aplicação do método HTS_N em conjunto com o método da decomposição para resolver a equação de transporte de Boltzmann anisotrópica, em um cilindro infinito, com simetria azimutal.

O método da decomposição é aplicado à solução de equações lineares e não lineares, tanto algébricas, diferenciais como íntegro-diferenciais, e está baseado na decomposição dos operadores que constituem a equação [Adomian, G., 1988]. Esta decomposição é feita de tal maneira que um dos operadores resultantes do desmembramento seja facilmente inversível. Simultaneamente a isso, propõe-se que a solução venha dada por uma série de funções a serem determinadas; funções ϕ_n . Esta solução é contínua e analítica, bem como todas as suas derivadas podem ser obtidas. Toda a fundamentação teórica do método de decomposição, especificamente sobre a convergência, e suas aplicações já foram objetos de um conjunto de publicações [Adomian, G. 1984a, 1984b].

Para o presente caso, usa-se a solução do fluxo escalar para o caso isotrópico obtida através da transformada de Hankel para o problema desenvolvido por Mitsis, HTS_N, como solução ϕ_0 . Assim, num primeiro passo, deve-se converter o fluxo escalar em fluxo angular por meio da colocação da solução HTS_N como a integral de espalhamento do problema isotrópico (*isotropic scattering source*). E, no passo seguinte, aplica-se o método da decomposição para se obter a solução para problemas anisotrópicos.

A seguir será feita uma descrição geral do método da decomposição e posteriormente são estabelecidas as bases para aplicação no caso do problema de transporte de Boltzmann anisotrópico, com simetria azimutal em geometria cilíndrica.

3.2) Descrição do Método de Decomposição:

Dada uma equação genérica

$$Fu(t) = Q(t) \quad (3.1)$$

onde F representa um operador íntegro-diferencial e Q é um termo de fonte externa. Este operador é então decomposto em $L+R$, no qual L é facilmente inversível. Assim a equação pode ser reescrita como

$$Lu + Ru = Q \quad (3.2)$$

ou equivalentemente

$$Lu = Q - Ru \quad (3.3)$$

Sendo o operador L inversível, a solução é formalmente expressa como

$$L^{-1}Lu = L^{-1}Q - L^{-1}Ru \quad (3.4)$$

para a qual L^{-1} é um operador integral. Com isto, a aplicação do operador inverso resulta em

$$L^{-1}Lu = u - h \quad (3.5)$$

onde $h = h(t)$ envolve condições de contorno ou de valor inicial. Assim, a equação (3.4) fica

$$u = h + L^{-1}Q - L^{-1}Ru \quad (3.6)$$

Neste ponto, a função u é decomposta como

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \quad (3.7)$$

e neste processo, u_0 pode ser arbitrariamente identificada como $h + L^{-1}Q$. Esta identificação é feita de modo a agrupar termos previamente conhecidos em u_0 . Então a expressão (3.6) torna-se

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 - L^{-1}R \sum_{n=0}^{\infty} u_n \quad (3.8)$$

e conseqüentemente é estabelecido o processo recursivo

$$u_1 = -L^{-1}Ru_0, \quad u_2 = -L^{-1}Ru_1, \dots, \quad u_{n+1} = -L^{-1}Ru_n \quad (3.9)$$

E caso se defina $K = L^{-1}R$, a expressão (3.8) pode ser reescrita como

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n K^n u_0 \quad (3.10)$$

dando uma visão concisa da dependência da solução em relação à u_0 .

3.3) Formulação Matemática Voltada à Equação de Transporte em Geometria Cilíndrica:

A equação de transporte de Boltzmann, com simetria azimutal, para um cilindro de altura infinita consiste em

$$\left(\sqrt{1-\mu^2} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sqrt{1-\mu^2} \operatorname{sen} \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + I \right) \psi(r, \mu, \varphi) = \frac{I}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \sigma_s(\mu', \mu) \psi(r, \mu', \varphi') d\mu' d\varphi' + Q(r, \mu, \varphi) \quad (3.11)$$

na qual r é a coordenada radial, $\mu = \cos \theta$, com θ e φ sendo os ângulos polares que definem a direção de propagação do fluxo, σ_s é a seção de choque de espalhamento e Q é uma fonte externa. Também foi considerado espalhamento isotrópico na variável angular φ .

A equação de Boltzmann (3.11) pode ser reescrita usando a nomenclatura de operadores. Ou seja:

$$\mathbf{L}\psi(r, \mu, \varphi) = \mathbf{R}\psi(r, \mu, \varphi) \quad (3.12)$$

Onde se fez as seguintes identidades

$$\mathbf{L}\psi \equiv \left(\sqrt{1-\mu^2} \cos(\varphi) \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sqrt{1-\mu^2} \operatorname{sen}(\varphi)}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + I \right) \psi \quad (3.13)$$

$$\mathbf{R}\psi \equiv \frac{I}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \sigma_s(\mu', \mu) \psi(r, \mu', \varphi') d\mu' d\varphi' \quad (3.14)$$

Assim, tomando a equação (3.12) e aplicando o operador inverso \mathbf{L}^{-1} , tem-se

$$\mathbf{L}^{-1} \mathbf{L}\psi(r, \mu, \varphi) = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{R}\psi(r, \mu, \varphi) \quad (3.15)$$

Como \mathbf{L}^{-1} é um operador integral, tendo-se em vista que \mathbf{L} é essencialmente um operador diferencial, na equação (3.15) aparecerá a função que corresponde à condição de contorno ou de valor inicial, ou

$$\psi(r, \mu, \varphi) = h(r, \mu, \varphi) + \mathbf{L}^{-1} \mathbf{R}\psi(r, \mu, \varphi) \quad (3.16)$$

Agora, seguindo o desenvolvimento do método da decomposição, o fluxo angular é desmembrado na série

$$\psi(r, \mu, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(r, \mu, \varphi) \quad (3.17)$$

E quando esta expressão é substituída na equação para o fluxo angular (3.16), obtêm-se

$$\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(r, \mu, \varphi) = h(r, \mu, \varphi) + \mathbf{L}^{-1} \mathbf{R} \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(r, \mu, \varphi) \quad (3.18)$$

Com a finalidade de montar as identidades entre os membros da igualdade (3.18), a seção de choque de espalhamento é expandida em termos de polinômios de Legendre

$$\sigma_s(\mu', \mu) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} \sigma_{sl} P_l(\mu) P_l(\mu') \quad (3.19)$$

e reescreve-se a (3.18) na forma explícita

$$\begin{aligned} \phi_0 + \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \dots = L^{-1} \left\{ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\mu) \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sigma_{sl} P_l(\mu') \phi_0(r, \mu', \varphi') d\mu' d\varphi' + \right. \\ + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\mu) \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sigma_{sl} P_l(\mu') \phi_1(r, \mu', \varphi') d\mu' d\varphi' + \\ + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\mu) \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sigma_{sl} P_l(\mu') \phi_2(r, \mu', \varphi') d\mu' d\varphi' + \\ \left. + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\mu) \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sigma_{sl} P_l(\mu') \phi_3(r, \mu', \varphi') d\mu' d\varphi' + \dots + \mathcal{Q} \right\} \end{aligned}$$

Por fim, os membros da igualdade anterior são repostos de maneira a evidenciar o termo isotrópico do componente ϕ_0 para então incorporá-lo ao termo h da expressão (3.18). Assim, reescreve-se

$$L^{-1} F(r, \mu) = e^{\frac{-r \cos \varphi}{\sqrt{1-\mu^2}}} \int_0^r F(\xi, \mu) \frac{\xi e^{\frac{\sqrt{\xi^2 - r^2 \text{sen}^2 \varphi}}{\sqrt{1-\mu^2}}}}{\sqrt{1-\mu^2} \sqrt{\xi^2 - r^2 \text{sen}^2 \varphi}} d\xi \quad (3.23)$$

na qual pode ser feita a mudança de variável

$$v = \sqrt{\xi^2 - r^2 \text{sen}^2 \varphi} \quad (3.24)$$

e conseqüentemente

$$\xi = \sqrt{v^2 + r^2 \text{sen}^2 \varphi} \quad (3.25)$$

$$d\xi = \frac{v}{\xi} dv \quad (3.26)$$

Substituindo as relações (3.25) e (3.26) na expressão (3.23), obtêm-se

$$L^{-1} F(r, \mu) = \frac{e^{\frac{-r \cos \varphi}{\sqrt{1-\mu^2}}}}{\sqrt{1-\mu^2}} \int_0^r F(\sqrt{v^2 + r^2 \text{sen}^2 \varphi}, \mu) e^{\frac{v}{\sqrt{1-\mu^2}}} dv \quad (3.27)$$

3.4) Aplicação Conjunta dos Métodos da Decomposição e HTS_N :

Na seção anterior, foram estabelecidas as bases para a aplicação do método da decomposição na equação de transporte de Boltzmann em geometria cilíndrica. As correspondências (3.22) foram arranjadas de modo que a primeira expressão no processo recursivo, a qual determina ϕ_0 , seja a equação íntegro-diferencial para o problema isotrópico,

$$\phi_0 = \mathbf{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \sigma_{s0} \phi_0(r, \mu', \varphi') d\mu' d\varphi' \right\} + Q(r) \quad (3.28)$$

que pode ser convertida na equação apresentada por Mitsis e, por seu turno, resolvida pelo método HTS_N. Tendo-se em conta que a solução obtida neste desenvolvimento é o fluxo escalar, conforme descrito no capítulo anterior, então, ϕ_0 deve ser necessariamente convertida no fluxo angular por ser esta a forma exigida para o passo seguinte, ou seja, a determinação de ϕ_l , e a subsequente obtenção dos demais termos. Como será mostrada nos parágrafos seguintes, essa conversão do fluxo escalar em fluxo angular é feita pela colocação da solução de Hankel como a integral de espalhamento do problema isotrópico.

Para ser realizada a conversão do fluxo escalar em fluxo angular, a solução escalar resultante do método HTS_N é aproximada pela forma polinomial

$$\Phi(r) \approx \sum_{m=0}^M c_m r^{2m} \quad (3.29)$$

e esta solução aproximada é posta em substituição ao termo integral de espalhamento na equação de transporte isotrópica,

$$\mathbf{L}\phi_0(r, \mu, \varphi) = \sigma_s \sum_{m=0}^M c_m r^{2m} \quad (3.30)$$

Feito isso, aplica-se o operador inverso \mathbf{L}^{-1} , conforme (3.27), na equação (3.30). Ou seja:

$$\phi_0(r, \mu, \varphi) = e^{\frac{-r \cos \varphi}{\sqrt{1-\mu^2}}} \left[\sigma_s \sum_{m=0}^M c_m \int_0^{r \cos \varphi} \left(\sqrt{v^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} \right)^{2m} \frac{e^{\frac{v}{\sqrt{1-\mu^2}}}}{\sqrt{1-\mu^2}} dv \right] \quad (3.31)$$

Esta expressão é então simplificada pela eliminação da raiz quadrada

$$\phi_0(r, \mu, \varphi) = e^{\frac{-r \cos \varphi}{\sqrt{1-\mu^2}}} \left[\sigma_s \sum_{m=0}^M c_m \int_{r \cos \varphi}^v (v^2 + r^2 \text{sen}^2 \varphi)^m \frac{e^{\frac{v}{\sqrt{1-\mu^2}}}}{\sqrt{1-\mu^2}} dv \right] \quad (3.32)$$

na qual pode ser feita a expansão binomial

$$\begin{aligned} (v^2 + r^2 \text{sen}^2 \varphi)^m &= v^{2m} + \binom{m}{1} v^{2(m-1)} (r \text{sen} \varphi)^2 + \\ &+ \binom{m}{2} v^{2(m-2)} (r \text{sen} \varphi)^4 + \dots + (r \text{sen} \varphi)^{2m} \end{aligned} \quad (3.33)$$

para recair diretamente na integral conhecida [Spiegel, 1973]

$$\int x^n e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} \left(x^n - \frac{nx^{n-1}}{a} + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{a^2} - \dots - \frac{(-1)^n n!}{a^n} \right) \quad (3.34)$$

ou, explicitamente,

$$\begin{aligned} \int v^n e^{\frac{v}{\sqrt{1-\mu^2}}} dv &= \sqrt{1-\mu^2} e^{\frac{v}{\sqrt{1-\mu^2}}} \left[v^n - \sqrt{1-\mu^2} n v^{n-1} + \right. \\ &\left. + \left(\sqrt{1-\mu^2} \right)^2 n(n-1) v^{n-2} - \dots + \left(\sqrt{1-\mu^2} \right)^n (-1)^n n! \right] \Big|_{v=r \cos(\varphi)} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Observando o resultado da integral (3.35) como uma fórmula geral de solução para qualquer m da integral (3.32), nota-se que o fluxo angular isotrópico ϕ_0 também é expresso em polinômios na variável radial r , com os coeficientes agora dependendo das variáveis angulares. Desta forma, determina-se o fluxo angular a partir do fluxo escalar do problema isotrópico. Para determinação dos demais componentes ϕ_n 's da solução, basta utilizar o procedimento recursivo determinado pela (3.22). Tomando este processo em maior detalhe, o resultado da aplicação do operador integral \mathbf{R} , particularmente em relação à variável φ , sobre termos que contenham v elevado a potência ímpar, é

zero. Isto pode ser depreendido pelo fato de que de cada termo da expansão binomial (3.33), onde todas as potências são pares, quando integrado resulta em uma série de termos em ν , de potências pares e ímpares, na qual o limite de integração é $\nu = r \cos \varphi$, conforme a (3.35). E estes, por sua vez, estão multiplicados por termos $r \sen \varphi$ elevados a potências pares, advindos da (3.33). Isto implica em funções de φ do tipo

$$\sen^k(\varphi) \cos^q(\varphi) \quad \begin{cases} k \text{ par} \\ q \text{ ímpar} \end{cases} \quad (3.36)$$

resultante de ν na potência ímpar na expressão (3.35) e

$$\sen^k(\varphi) \cos^q(\varphi) \quad \begin{cases} k \text{ par} \\ q \text{ par} \end{cases} \quad (3.37)$$

resultante de ν na potência par na expressão (3.35). A função (3.36) pode ser expressa em termos da soma de co-senos elevados a potências ímpares e a (3.37), na soma de co-senos em potências pares. Ou seja, as do tipo expressa em (3.36) anulam-se quando se faz a integração

$$\int_0^{2\pi} \cos^n(\varphi) d\varphi = 0, \quad \text{para } n \text{ ímpar} \quad (3.38)$$

Fazendo com que novamente o fluxo seja expresso como um polinômio de potências pares em r , com coeficientes expressos como funções de co-senos elevados a potências pares. Isto é um reflexo da simetria azimutal do problema considerado.

Do que foi exposto, é importante ressaltar resumidamente que a partir da solução HTS_N , que gera um fluxo escalar isotrópico, é possível gerar o fluxo angular e deste, do qual dependem exclusivamente todas as demais ϕ_n 's, como pode ser visto pelas relações (3.22), obter-se os fluxos anisotrópicos contínuos nas variáveis angulares. E ainda mais, deve ser evidenciado o fato de que o uso de interpoladores polinomiais de potências pares faz com que a solução escalar sempre recaia em polinômios da mesma forma. Isto é, não há uma elevação da ordem dos polinômios, evitando que a cada iteração tenha-se aumentada a complexidade da solução.

3.5) Implementação Numérica de Soluções:

Para validar o processo do método da decomposição, será implementado um problema-teste de transporte. Conjuntamente, também serão usados princípios de convergência para ilustrar que a seqüência de termos, gerada a partir da definição de uma norma usando as relações (3.22), e a série composta pela soma desses termos convergem.

Como já foi explicitado na seção precedente, toma-se a solução HTS_N e se faz a interpolação desta solução por polinômios de potências pares. Entretanto, deve-se levar em conta o erro que esta aproximação acarreta. Assim, a relação (3.29) pode ser reescrita como uma igualdade

$$\Phi(r) = \sum_{m=0}^M c_m r^{2m} + E(r) \quad (3.39)$$

em que a função $E(r)$ representa o erro devido à aproximação. Esta função erro é determinada pela diferença entre a solução aproximada e a solução gerada a partir da substituição da integral de espalhamento isotrópica pela forma aproximada do fluxo escalar. Na implementação da solução, a função erro pode ser posta como uma fonte na equação de transporte.

3.5.1) Problema-teste:

Como problema-teste, considera-se o problema de transporte em um cilindro infinito com simetria azimutal, raio R igual à 10cm, fluxo de nêutrons incidentes dado por $F=1/4\pi$ e condição de contorno imposta pela relação (2.10). A seção de choque de espalhamento apresenta isotropia na coordenada azimutal φ e anisotropia quadrática em μ , com os coeficientes da expansão em polinômios de Legendre sendo dados por $\sigma_{s0} = 0,8\text{cm}^{-1}$, $\sigma_{s1} = 0,6\text{cm}^{-1}$ e $\sigma_{s2} = 0,4\text{cm}^{-1}$. Para a implementação, usa-se um polinômio de potências pares de ordem dez e são calculados cem termos recursivos. Os resultados para os fluxos escalar e angulares são mostrados na tabela e gráficos abaixo.

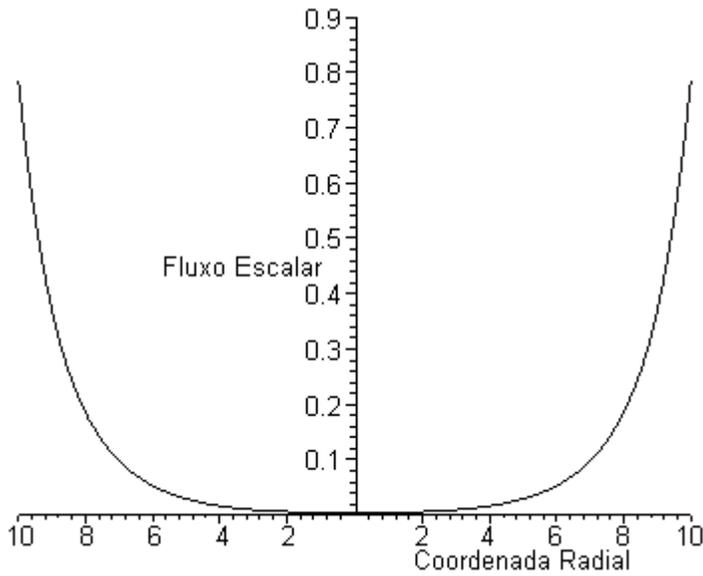


Gráfico 3.1: Fluxo escalar obtido para o problema-teste.

A gráfico anterior está representado na seguinte tabela para alguns pontos específicos:

r (cm)	Fluxo Escalar	r (cm)	Fluxo Escalar
0	3,98259(-3) ^a	6	5,31172(-2)
1	4,48961(-3)	7	9,74657(-2)
2	6,17667(-3)	8	1,84727(-1)
3	9,68658(-3)	9	3,70012(-1)
4	1,64906(-2)	10	7,85198(-1)
5	2,93410(-2)		

^aLeia-se como: $3,98259 \times 10^{-3}$

Tabela 3.1: Fluxo Escalar determinado para o problema-teste.

No gráfico abaixo, representam-se os fluxos angulares obtidos do problema-teste para duas situações distintas: a curva mostrada pela linha contínua refere-se ao fluxo angular com coordenadas polares $\mu = 0,8$ e $\varphi = 0,2\pi$ e a curva mostrada pelos pontos, ao fluxo angular com $\mu = 0,1$ e $\varphi = 0,2\pi$.

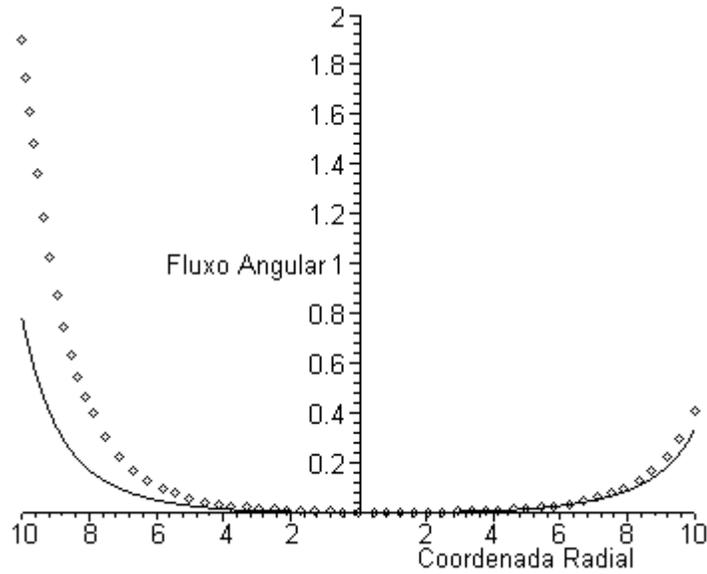


Gráfico 3.2: Fluxo angular obtido para o problema-teste nas situações:
 Linha: $\mu = 0,8$ e $\varphi = 0,2\pi$; Pontos: $\mu = 0,1$ e $\varphi = 0,2\pi$.

E a seguir, mostra-se o gráfico do fluxo angular obtido para outras duas situações. A primeira curva, representada pela linha contínua, refere-se ao fluxo angular com coordenadas polares $\mu = 0,3$ e $\varphi = 0,7\pi$ e a segunda, representada pelos pontos, refere-se ao fluxo angular com coordenadas polares $\mu = 0,3$ e $\varphi = 0,3\pi$.

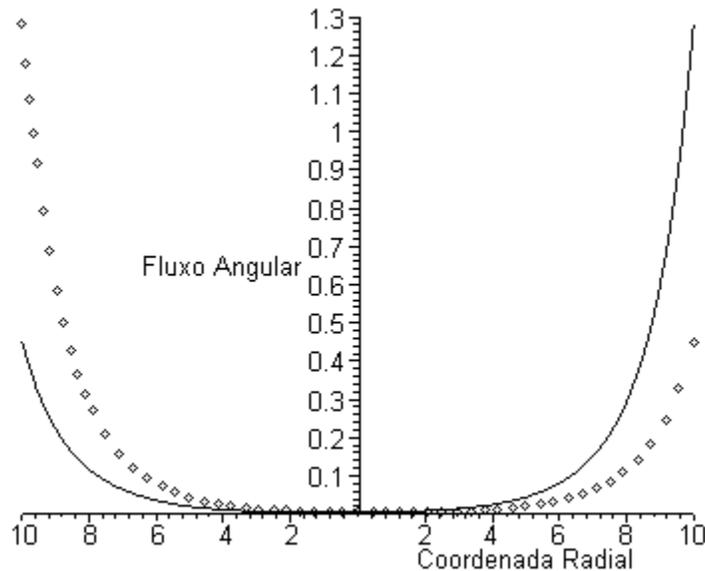


Gráfico 3.3: Fluxo angular obtido para o problema-teste nas situações:
 Linha: $\mu = 0,3$ e $\varphi = 0,7\pi$; Pontos: $\mu = 0,3$ e $\varphi = 0,3\pi$.

Como foi referido na introdução deste capítulo, há um conjunto de publicações analisando, com rigor matemático, a convergência do método da decomposição e, particularmente, do método da decomposição de Adomian que é uma forma mais geral por envolver, além do componente linear, um componente não linear no operador. A seguir, será feita uma ilustração da convergência do método da decomposição baseada nos resultados do problema-teste.

A avaliação da convergência pode ser introduzida através de uma seqüência

$$\{Z_i\} = \{Z_1, Z_2, Z_3, \dots\} \quad (3.40)$$

gerada pela norma

$$Z_i = \frac{1}{2} \int_0^R \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \phi_i(r, \mu, \varphi) dr d\mu d\varphi \quad (3.41)$$

onde as ϕ_i 's são as relações dadas por (3.22), e também pela definição de que uma seqüência infinita converge para um limite Z [Butkov, 1968], se

$$|Z_i - Z| < \varepsilon \quad (3.42)$$

para valores suficientemente grandes de i ; sendo ε um número positivo arbitrariamente pequeno.

O gráfico 3.4 mostra que a seqüência dos resultados do problema-teste gerada pela norma (3.41) converge para o limite finito $Z = 0$, segundo a (3.42).

No passo seguinte, para atingir o objetivo da ilustração, considera-se a convergência da série infinita* formada pela soma dos termos da seqüência dados pela (3.41). Pode se mostrar que esta série infinita é convergente através do teste da razão, o qual estabelece que se

$$|Z_{i+1}/Z_i| < \kappa \quad (3.43)$$

* Que pela definição desta norma em particular, esta série corresponde fisicamente ao fluxo total de nêutrons na seção transversal do cilindro.

para um i suficientemente grande e $\kappa < 1$, a série converge absolutamente [Butkov, 1968]. Isto está representado no gráfico 3.5.

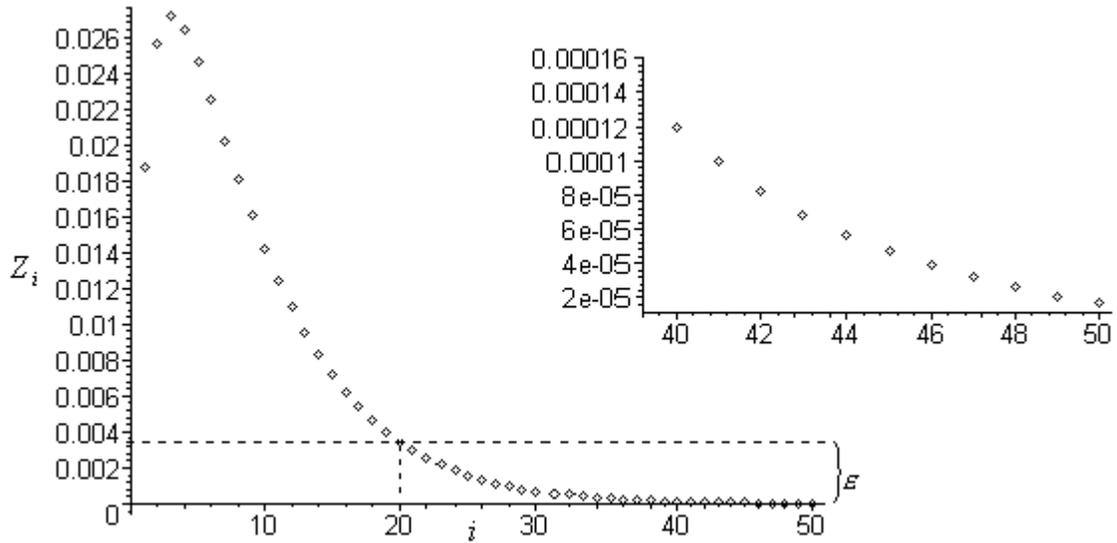


Gráfico 3.4: Mostra a convergência da sequência dos resultados do problema-teste
 - a parte superior direita é a ampliação do intervalo 40-50 da sequência.

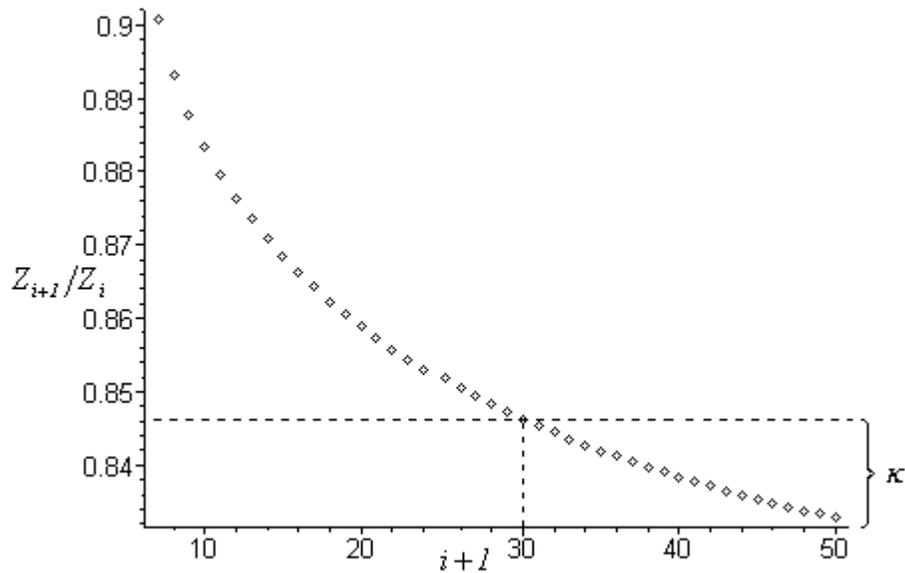


Gráfico 3.5: Mostra a convergência da série via teste da razão.

Capítulo 4

SOLUÇÕES ANALÍTICAS DA EQUAÇÃO DE TRANSPORTE DE BOLTZMANN EM GEOMETRIA CARTESIANA UNIDIMENSIONAL

4.1) Introdução:

Neste capítulo será aplicado um novo método para solução da equação íntegro-diferencial de Boltzmann. Fundamentalmente, este método consiste em tomar derivadas em relação à variável angular da equação de transporte de Boltzmann até a ordem que permita eliminar o termo integral da equação. Para que isso seja possível, no caso anisotrópico, assume-se que a seção de choque de espalhamento $\sigma_s(\Omega', \Omega)$ é aproximada por uma soma finita de polinômios de Legendre. As equações íntegro-diferenciais obtidas pelas sucessivas derivações são resolvidas retroativamente, partindo-se da equação puramente diferencial (última a ser obtida). Isto, em última análise, significa que está sendo considerada a seguinte igualdade

$$\frac{\partial^n}{\partial \mu^n} \left(\mu \frac{\partial \psi(x, \mu)}{\partial x} + \psi(x, \mu) \right) = \sum_{l=0}^L \frac{2l+1}{2} \left(\frac{\partial^n P_l(\mu)}{\partial \mu^n} \right) \int_{-1}^1 \sigma_{sl} P_l(\mu') \psi(x, \mu') d\mu' \quad (4.1)$$

até a ordem de derivação que resulte na equação puramente diferencial

$$\frac{\partial^{L+1}}{\partial \mu^{L+1}} \left(\mu \frac{\partial \psi(x, \mu)}{\partial x} + \psi(x, \mu) \right) = 0 \quad (4.2)$$

As soluções estabelecidas por esse sistema de equações íntegro-diferenciais compõem uma base de autofunções* singulares para equação de transporte, na qual o espectro de autovalores associados fica expresso quando se impõe, por simples substituição, que a autofunção seja também solução da equação de Boltzmann.

As autofunções e os autovalores determinados por este método da derivação angular são essencialmente idênticos aos encontrados pelo método de Case [Case e Zweifel, 1967][§], a menos da normalização imposta por este último.

No decurso do capítulo, como ilustração do procedimento para aplicação do método da derivação angular, são desenvolvidos quatro exemplos. Especificamente, os três primeiros tratam dos problemas em geometria cartesiana unidimensional isotrópico, linearmente anisotrópico e com anisotropia quadrática, respectivamente. O quarto exemplo trata do problema transiente isotrópico. Os quatro exemplos encontram soluções correspondentes pelo método de Case e, por conseguinte, são feitas comparações entre soluções.

4.2) Solução da Equação de Boltzmann Isotrópica Unidimensional:

A equação de Boltzmann isotrópica, unidimensional em geometria cartesiana é dada por:

$$\mu \frac{\partial \psi(x, \mu)}{\partial x} + \psi(x, \mu) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sigma_s \psi(x, \mu') d\mu' \quad (4.3)$$

na qual x é a variável espacial, σ_s é a seção de choque de espalhamento isotrópico e μ é a variável angular que indica a direção de propagação do fluxo; $\mu = \cos\theta$, sendo θ o ângulo polar zenital em geometria esférica.

Em síntese, o método da derivação angular consiste em derivar equação de transporte, em relação a variável angular, com o propósito de eliminar o termo integral. E, em seguida, resolver a equação puramente diferencial parcial, propondo esta também como solução básica da equação de Boltzmann. Assim, a equação (4.3) quando derivada em relação à variável angular μ , toma a forma

* A denominação de autofunções e autovalores é em analogia com a terminologia ordinária. Já que, pelo rigor formal, não se trata de autofunções e autovalores.

[§] Todas as demais citações a Case que se seguem devem-se a esta referência.

$$\frac{\partial \psi(x, \mu)}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 \psi(x, \mu)}{\partial x \partial \mu} + \frac{\partial \psi(x, \mu)}{\partial \mu} = 0 \quad (4.4)$$

A solução da equação diferencial parcial (4.4)^{*}, é expressa por $\psi_\nu(x, \mu) = X_\nu(x) \phi_\nu(\mu)$ [§], onde as funções são dadas pelas seguintes equações diferenciais ordinárias

$$\frac{dX_\nu(x)}{dx} + \frac{1}{\nu} X_\nu(x) = 0 \quad (4.5)$$

$$\frac{d\phi_\nu(\mu)}{d\mu} - \frac{1}{\nu(-\mu/\nu + 1)} \phi_\nu(\mu) = 0 \quad (4.6)$$

das quais resultam as soluções:

$$X_\nu(x) = e^{-\frac{x}{\nu}} \quad \text{e} \quad \phi_\nu(\mu) = \frac{\nu}{\nu - \mu} \quad (4.7)$$

A solução da equação diferencial (4.4) é então dada por

$$\psi_\nu(x, \mu) = A(\nu) \frac{\nu}{\nu - \mu} e^{-\frac{x}{\nu}} \quad (4.8)$$

em que o coeficiente $A(\nu)$ é uma função arbitrária dependente do autovalor ν .

Quando se propõe que a solução (4.8) também seja solução da equação de Boltzmann (4.3), surge uma relação a qual os autovalores ν 's têm que obedecer para que a autofunção se concretize como tal solução da equação de transporte. Desta proposição resulta que

^{*} Todas as soluções de equações diferenciais parciais apresentadas neste capítulo foram obtidas através do *software* matemático Maple V, usando o pacote PDEtools.

[§] Esta notação que coloca o autovalor como um índice subscripto é a mesma usada por Case.

$$A(\nu) \equiv \frac{I}{2} \sigma_s \nu \ln \left[\frac{\nu+I}{\nu-I} \right] - I = 0 \quad (4.9)$$

onde $A(\nu)$ é a chamada função dispersão. Portanto, os autovalores admissíveis, que permitem que a autofunção (4.8) também seja solução da equação de Boltzmann, são as raízes da função dispersão.

4.2.1) Análise das autofunções e dos autovalores associados:

Na análise da solução, deve-se estar atento ao exame dos autovalores admissíveis, levando-se em conta que a autofunção (4.8) é uma função singular. Há duas situações a serem consideradas: a) quando $|\nu| > 1$ e b) quando ν pertencer ao intervalo $[-1,1]$.

Para ν maior em módulo do que a unidade, $|\nu| > 1$, onde não são verificadas singularidades, existem somente dois autovalores discretos, anti-simétricos, que satisfazem a equação (4.9), $\nu = \pm \nu_0$. Estes autovalores estão associados às autofunções chamadas de soluções assintóticas ou fluxos assintóticos por prevalecerem em regiões distantes da fonte ou do contorno [Bell e Glasstone, 1970],

$$\psi_{0\pm}(x, \mu) = A_{0\pm} \frac{\pm \nu_0}{\pm \nu_0 - \mu} e^{\pm \frac{x}{\nu_0}} \quad (4.10)$$

onde $\pm \nu_0$ são as duas raízes da função dispersão (4.9):

$$\frac{I}{2} \sigma_s \nu_0 \ln \left[\frac{\nu_0+I}{\nu_0-I} \right] - I = 0 \quad (4.11)$$

Como forma alternativa, conhecida a relação

$$\frac{I}{2} \ln \left(\frac{\varpi+I}{\varpi-I} \right) = \operatorname{arctgh}(\varpi) \quad (4.12)$$

em que a função inversa da tangente hiperbólica, $\operatorname{arctgh}(\varpi)$, tem valores reais para $\varpi < 1$, enquanto para $\varpi > 1$, a função é dada por $\operatorname{arctgh}(\varpi) = \operatorname{arctgh}(1/\varpi) + \pi/2 i$ §, a expressão (4.11) pode ser reescrita como

$$\sigma_s v_0 \operatorname{arctgh}\left(\frac{I}{v_0}\right) - I = 0 \quad (4.13)$$

Entretanto, deve estar bem visível que tanto a equação (4.11) quanto a (4.13) têm como definição básica a integral

$$\int_{-1}^1 \phi_v(\mu) d\mu \quad (4.14)$$

que constitui o núcleo do termo de espalhamento da equação de Boltzmann. E por isso, as formas alternativas de representação devem estar coerentes com a (4.14).

Prosseguindo a análise, para o caso de autovalores contidos no intervalo $[-1,1]$, é importante a adição, à autofunção (4.8), da função arbitrária

$$\lambda(v) \delta(v - \mu) \quad (4.15)$$

onde δ é a delta de Dirac. Isto é, a autofunção (4.8) para este caso, fica

$$\phi_v(\mu) = \frac{v}{v - \mu} + \lambda(v) \delta(v - \mu) \quad (4.16)$$

Esta autofunção (4.16) continua sendo solução da equação diferencial que determina o componente angular, equação (4.6): claramente, fazendo a simples substituição da (4.16) na equação diferencial (4.6), resulta em

§ A inversa da tangente hiperbólica é plurívoca no eixo imaginário. Assim, essa equação deve ser interpretada como o ramo principal.

$$\lambda(\nu) \left((\nu - \mu) \frac{d\delta(\nu - \mu)}{d\mu} - \delta(\nu - \mu) \right) = 0 \quad (4.17)$$

e esta igualdade é satisfeita pela relação de identidade

$$(\nu - \mu) \frac{d\delta(\nu - \mu)}{d\mu} - \delta(\nu - \mu) \equiv 0 \quad (4.18)$$

(demonstrada no apêndice B), confirmando que é solução.

Então a autofunção é expressa por

$$\psi_\nu(x, \mu) = A(\nu) \left[P \frac{\nu}{\nu - \mu} + \lambda(\nu) \delta(\nu - \mu) \right] e^{-\frac{x}{\nu}} \quad (4.19)$$

onde o valor principal de Cauchy*, designado por P , e a delta de Dirac só têm significados quando dentro da integral.

Fazendo novamente a substituição, agora da autofunção (4.19), na equação de Boltzmann, tira-se a equação que determina a função $\lambda(\nu)$,

$$\lambda(\nu) = \frac{2}{\sigma_s} - P \int_{-1}^1 \frac{\nu}{\nu - \mu} d\mu \quad (4.20)$$

que pode ser representada por

$$\lambda(\nu) = \frac{2}{\sigma_s} - \nu \ln \left(\frac{1 + \nu}{1 - \nu} \right) \quad (4.21)$$

ou ainda, usando a função $arctgh$ [§],

* Onde o símbolo P denota que a integral da função singular será avaliada segundo o valor principal de Cauchy.

§ No restante do capítulo será usada a função logaritmo em vez da função $arctgh$ para representar a integral mostrada na equação (4.20).

$$\lambda(\nu) = \frac{2}{\sigma_s} - 2\nu \operatorname{arctgh}(\nu) \quad (4.22)$$

A diferença apresentada entre a expressão (4.20) e a sua equivalente deduzida por Case deve-se a o fator constante $\sigma_s/2$, que na expressão (4.8), foi incorporado à constante arbitrária da autofunção.

Quando se faz a análise da equação (4.11), é pertinente observar que quando $\sigma_s=1$, os únicos autovalores possíveis que satisfazem a equação são $\nu_0 \rightarrow \infty$. Também, quando $\sigma_s < 1$, verifica-se que as raízes são reais, enquanto que para $\sigma_s > 1$ as duas raízes estão no eixo imaginário.

As autofunções (4.10) e (4.19), a equação geradora dos autovalores associados, (4.11), e a que determina a função $\lambda(\nu)$, (4.21), definidas pelo método da derivação angular, são idênticas às encontradas por Case, sem, contudo, ser imposta a normalização (4.23) do componente angular da autofunção para determiná-los

$$\int_{-l}^l \phi_\nu(\mu) d\mu = 1 \quad (4.23)$$

Assim, do que foi exposto, a solução da equação íntegro-diferencial de Boltzmann para o fluxo angular é dada por

$$\psi(x, \mu) = \phi_{0+}(\mu) e^{-\frac{x}{\nu_0}} + \phi_{0-}(\mu) e^{\frac{x}{\nu_0}} + \int_{-l}^l \phi_\nu(\mu) e^{-\frac{x}{\nu}} d\nu \quad (4.24)$$

ou seja,

$$\psi(x, \mu) = \psi_{0+}(x, \mu) + \psi_{0-}(x, \mu) + \int_{-l}^l \psi_\nu(x, \mu) d\nu \quad (4.25)$$

onde $\psi_{0\pm}$ são as soluções assintóticas.

Nas próximas seções serão determinados as autofunções e os autovalores associados para os casos linearmente anisotrópicos e com anisotropia quadrática.

4.3) Solução da Equação de Boltzmann com Anisotropia Linear:

Para a equação de Boltzmann com anisotropia linear também será aplicado o mesmo procedimento da derivação da equação íntegro-diferencial em relação à variável angular μ . Como a idéia central do método é a derivação da equação íntegro-diferencial até que esta se torne puramente diferencial, então a equação de transporte linearmente anisotrópica será derivada duas vezes em relação à variável angular.

Tomando a equação íntegro-diferencial de Boltzmann com anisotropia linear

$$\mu \frac{\partial \psi(x, \mu)}{\partial x} + \psi(x, \mu) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sigma_{s0} \psi(x, \mu') d\mu' + \frac{3}{2} \mu \int_{-1}^1 \sigma_{s1} \mu' \psi(x, \mu') d\mu' \quad (4.26)$$

onde σ_{s0} e σ_{s1} são os coeficientes da expansão da seção de choque de espalhamento em termos de polinômios de Legendre.

Seguindo o método proposto, deriva-se a primeira vez em relação a variável angular

$$\frac{\partial \psi(x, \mu)}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 \psi(x, \mu)}{\partial x \partial \mu} + \frac{\partial \psi(x, \mu)}{\partial \mu} = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 \sigma_{s1} \mu' \psi(x, \mu') d\mu' \quad (4.27)$$

e, derivando pela segunda vez, chega-se à equação puramente diferencial

$$\mu \frac{\partial^3 \psi(x, \mu)}{\partial x \partial \mu^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi(x, \mu)}{\partial x \partial \mu} + \frac{\partial^2 \psi(x, \mu)}{\partial \mu^2} = 0 \quad (4.28)$$

A solução desta equação diferencial parcial é dada por $X_\nu(x) \phi_\nu(\mu)$, onde

$$\frac{dX_\nu(x)}{dx} + \frac{1}{\nu} X_\nu(x) = 0 \quad (4.29)$$

$$\frac{d^2\phi_\nu(\mu)}{d\mu^2} - \frac{2}{\nu(-\mu/\nu+1)} \frac{d\phi_\nu(\mu)}{d\mu} = 0 \quad (4.30)$$

resultando na solução do componente espacial

$$X_\nu(x) = e^{-\frac{x}{\nu}} \quad (4.31)$$

e na do componente angular

$$\phi_\nu(\mu) = A(\nu) \left(B(\nu) + \frac{\nu}{\nu-\mu} \right) \quad (4.32)$$

Assim, a solução da equação diferencial parcial (4.28) é

$$\psi_\nu(x, \mu) = A(\nu) \left(B(\nu) + \frac{\nu}{\nu-\mu} \right) e^{-\frac{x}{\nu}} \quad (4.33)$$

A substituição da solução (4.33) na equação íntegro-diferencial (4.27) permite tirar a relação para o coeficiente $B(\nu)$. Ou seja:

$$B(\nu) = -\frac{3}{2} \sigma_{sl} \nu^2 \left[\nu \ln \left(\frac{\nu+1}{\nu-1} \right) - 2 \right] \quad (4.34)$$

E substituindo a determinação do coeficiente $B(\nu)$ na solução $\psi_\nu(x, \mu)$, em (4.33), obtêm-se

$$\psi_\nu(x, \mu) = A(\nu) \left\{ -\frac{3}{2} \sigma_{sl} \nu^2 \left[\nu \ln \left(\frac{\nu+1}{\nu-1} \right) - 2 \right] + \frac{\nu}{\nu-\mu} \right\} e^{-\frac{x}{\nu}} \quad (4.35)$$

Finalmente, para a determinação dos autovalores, introduz-se a solução (4.35) na equação íntegro-diferencial de Boltzmann (4.26). Desta maneira, resulta que os autovalores admissíveis são aqueles determinados pelas raízes da função dispersão

$$A(\nu) \equiv \left[3(1 - \sigma_{s0})\sigma_{s1}\nu^2 + \sigma_{s0} \right] \nu \ln\left(\frac{\nu+1}{\nu-1}\right) - 6(1 - \sigma_{s0})\sigma_{s1}\nu^2 - 2 = 0 \quad (4.36)$$

Um modo equivalente para determinação dos autovalores é a substituição da solução (4.35) na forma alternativa da equação de Boltzmann

$$\mu \frac{\partial \psi(x, \mu)}{\partial x} + \psi(x, \mu) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sigma_{s0} \psi(x, \mu') d\mu' + \mu \left(\frac{\partial \psi(x, \mu)}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 \psi(x, \mu)}{\partial x \partial \mu} + \frac{\partial \psi(x, \mu)}{\partial \mu} \right) \quad (4.37)$$

onde foi usada a igualdade expressa pela equação (4.27).

A autofunção (4.35), a equação geradora dos autovalores, (4.36), são análogas às obtidas por Case a menos da normalização*.

4.3.1) Análise das autofunções e dos autovalores associados:

Analogamente ao caso isotrópico, há duas situações a serem avaliadas. O caso em que ν está fora do eixo real $[-1,1]$, autovalores discretos, e os autovalores contínuos em que ν pertence a esse intervalo.

Para autovalores discretos a solução básica para o fluxo angular é dada pela igualdade (4.35) com a correspondente equação (4.36) como função dispersão. Tomando como exemplo a situação específica de interesse da física de transporte, para a qual $\sigma_{s0} < 1$ e $\sigma_{s1} < \sigma_{s0}$, a função dispersão apresenta duas raízes reais, discretas e anti-simétricas que são os autovalores $\nu = \pm \nu_0$. Noutra situação, quando a seguinte relação é satisfeita

$$(1 - \sigma_{s0})\sigma_{s1} + \sigma_{s0} = 1 \quad (4.38)$$

* O estabelecimento da identidade entre as soluções obtidas pelo método de Case e pelo método da derivação, via normalização, está feito no apêndice C.

os únicos autovalores possíveis são $\nu = \pm\infty$. E essa relação só é satisfeita quando se considera $\sigma_{s0}=1$, para qualquer σ_{s1} , ou $\sigma_{s1}=1$ para qualquer σ_{s0} .

Por sua vez, para ν contínuo no intervalo $[-1,1]$, a solução angular (4.32) deve ser acrescida da função arbitrária

$$\lambda(\nu)\delta(\nu - \mu) \quad (4.39)$$

sendo reescrita na forma

$$\phi_\nu(\mu) = A(\nu) \left(B(\nu) + \frac{\nu}{\nu - \mu} + \lambda(\nu)\delta(\nu - \mu) \right) \quad (4.40)$$

a qual continua sendo solução da equação diferencial parcial (4.30): pode ser visto que a simples substituição da (4.40) na equação diferencial (4.30) resulta em

$$\lambda(\nu) \left((\nu - \mu) \frac{d^2 \delta(\nu - \mu)}{d\mu^2} - 2 \frac{d\delta(\nu - \mu)}{d\mu} \right) = 0 \quad (4.41)$$

que é satisfeita pela relação de identidade

$$(\nu - \mu) \frac{d^2 \delta(\nu - \mu)}{d\mu^2} - 2 \frac{d\delta(\nu - \mu)}{d\mu} \equiv 0 \quad (4.42)$$

conforme apêndice B.

Assim, a solução para a autofunção que abrange o espectro de autovalores contínuos é dada por

$$\psi_\nu(x, \mu) = A(\nu) \left\{ B(\nu) + P \frac{\nu}{\nu - \mu} + \lambda(\nu)\delta(\nu - \mu) \right\} e^{-\frac{x}{\nu}} \quad (4.43)$$

E esta solução quando substituída na equação diferencial parcial (4.27), origina a seguinte relação para $B(\nu)$

$$B(\nu) = -\frac{3}{2}\sigma_{s1}\nu^2 \left\{ \left[\nu \ln\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\right) - 2 \right] + \lambda(\nu) \right\} \quad (4.44)$$

Neste ponto, é oportuno comentar que o fato da autofunção obtida pelo método da derivação angular não ser normalizada faz com que o coeficiente $B(\nu)$ mostre uma dependência da função $\lambda(\nu)$, para ν no intervalo $[-1,1]$, como está claro na (4.44); a normalização desaparece com essa dependência.

Assim, usando a expressão que determina $B(\nu)$, a forma explícita para a autofunção é

$$\psi_\nu(x, \mu) = A(\nu) \left\{ -\frac{3}{2}\sigma_{s1}\nu^2 \left[\nu \ln\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\right) - 2 + \lambda(\nu) \right] + P\frac{\nu}{\nu-\mu} + \lambda(\nu)\delta(\nu-\mu) \right\} e^{-\frac{x}{\nu}} \quad (4.45)$$

Como seqüência, quando a expressão (4.45) é posta como solução na equação de transporte de Boltzmann, a relação que determina $\lambda(\nu)$ é então dada por

$$\begin{aligned} \left[3(1-\sigma_{s0})\sigma_{s1}\nu^2 + \sigma_{s0} \right] \nu \ln\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\right) - 6(1-\sigma_{s0})\sigma_{s1}\nu^2 - 2 = \\ = -\left[3(1-\sigma_{s0})\sigma_{s1}\nu^2 + \sigma_{s0} \right] \lambda(\nu) \end{aligned} \quad (4.46)$$

A autofunção (4.45) e a equação que determina $\lambda(\nu)$, (4.46), são essencialmente idênticas às obtidas por Case a menos da normalização.

Desta forma, a solução da equação de transporte com anisotropia linear é escrita como

$$\psi(x, \mu) = \phi_{0+}(\mu)e^{-\frac{x}{\nu_0}} + \phi_{0-}(\mu)e^{\frac{x}{\nu_0}} + \int_{-1}^1 \phi_\nu(\mu)e^{-\frac{x}{\nu}} d\nu \quad (4.47)$$

ou seja,

$$\psi(x, \mu) = \psi_{0+}(x, \mu) + \psi_{0-}(x, \mu) + \int_{-1}^1 \psi_v(x, \mu) dv \quad (4.48)$$

onde $\psi_{0\pm}$ são as soluções assintóticas.

4.4) Solução da Equação de Boltzmann com Anisotropia Quadrática:

A equação de transporte de Boltzmann com anisotropia quadrática é descrita por

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial \psi(x, \mu)}{\partial x} + \psi(x, \mu) = & \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sigma_{s0} \psi(x, \mu') d\mu' + \frac{3}{2} \mu \int_{-1}^1 \sigma_{s1} \mu' \psi(x, \mu') d\mu' + \\ & + \frac{5}{8} (3\mu^2 - 1) \int_{-1}^1 \sigma_{s2} (3\mu'^2 - 1) \psi(x, \mu') d\mu' \end{aligned} \quad (4.49)$$

onde os σ_s 's são os coeficientes da expansão da seção de choque em polinômios de Legendre.

Seguindo os passos do método apresentado, deriva-se esta equação íntegro-diferencial em relação á variável angular por três vezes. Derivando a primeira vez, obtêm-se

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2}{\partial x \partial \mu} + \frac{\partial}{\partial \mu} \right) \psi(x, \mu) = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 \sigma_{s1} \mu' \psi(x, \mu') d\mu' + \frac{15}{4} \mu \int_{-1}^1 \sigma_{s2} (3\mu'^2 - 1) \psi(x, \mu') d\mu' \quad (4.50)$$

derivando novamente,

$$\left(2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial \mu} + \mu \frac{\partial^3}{\partial x \partial \mu^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} \right) \psi(x, \mu) = \frac{15}{4} \int_{-1}^1 \sigma_{s2} (3\mu'^2 - 1) \psi(x, \mu') d\mu' \quad (4.51)$$

E a terceira derivação torna a equação puramente diferencial

$$\left(3\frac{\partial^3}{\partial x\partial\mu^2} + \mu\frac{\partial^4}{\partial x\partial\mu^3} + \frac{\partial^3}{\partial\mu^3}\right)\psi(x,\mu) = 0 \quad (4.52)$$

A solução desta equação diferencial parcial é dada pelo produto $X_\nu(x)\phi_\nu(\mu)$ cujas funções são as soluções das equações diferenciais ordinárias

$$\frac{dX_\nu(x)}{dx} + \frac{1}{\nu}X_\nu(x) = 0 \quad (4.53)$$

$$\frac{d^3\phi_\nu(\mu)}{d\mu^3} - \frac{3}{\nu(-\mu/\nu + 1)}\frac{d^2\phi_\nu(\mu)}{d\mu^2} = 0 \quad (4.54)$$

e, conseqüentemente, resolvidas estas equações diferenciais ordinárias, resulta que a solução da equação diferencial (4.52) é

$$\psi_\nu(x,\mu) = A(\nu)\left(\frac{\nu}{\nu-\mu} - B(\nu)\frac{\mu}{\nu} + C(\nu)\right)e^{-\frac{x}{\nu}} \quad (4.55)$$

O coeficiente $B(\nu)$ é definido pela substituição da solução (4.55) na equação íntegro-diferencial (4.51). Disto se obtêm que

$$B(\nu) = \frac{15}{8}\sigma_{s2}\nu^3\left[(3\nu^2 - 1)\ln\left(\frac{\nu+1}{\nu-1}\right) - 6\nu\right] \quad (4.56)$$

E, para a determinação de $C(\nu)$, substitui-se o $B(\nu)$ na (4.55), e insere-se esta solução na equação íntegro-diferencial (4.50). Assim

$$C(\nu) = \frac{3}{2}\nu^2\left\{\left[\frac{5}{4}\sigma_{s2}(\sigma_{s1} - 1)(3\nu^2 - 1) - \sigma_{s1}\right]\nu\ln\left(\frac{\nu+1}{\nu-1}\right) - \frac{15}{2}\sigma_{s2}\nu^2(\sigma_{s1} - 1) + 2\sigma_{s1}\right\} \quad (4.57)$$

Concluindo completamente a solução (4.55). Ou seja, a autofunção é expressa como

$$\begin{aligned} \psi_\nu(x, \mu) = A(\nu) & \left\{ \frac{\nu}{\nu - \mu} - \frac{15}{8} \sigma_{s_2} \nu^2 \mu \left[(3\nu^2 - 1) \ln \left(\frac{\nu + 1}{\nu - 1} \right) - 6\nu \right] + \right. \\ & \left. \frac{3}{2} \nu^2 \left\{ \left[\frac{5}{4} \sigma_{s_2} (\sigma_{s_1} - 1) (3\nu^2 - 1) - \sigma_{s_1} \right] \nu \ln \left(\frac{\nu + 1}{\nu - 1} \right) - \frac{15}{2} \sigma_{s_2} \nu^2 (\sigma_{s_1} - 1) + 2\sigma_{s_1} \right\} \right\} e^{-\frac{x}{\nu}} \end{aligned} \quad (4.58)$$

Seguindo o processo, assume-se que esta é também solução da equação de Boltzmann (4.49) e, que para isto se concretize, os autovalores ν 's devem ser as raízes da função dispersão

$$\begin{aligned} A(\nu) \equiv & \left\{ \frac{15}{2} \sigma_{s_2} (\sigma_{s_1} - 1) (\sigma_{s_0} - 1) \nu^4 + \left\{ - \left[\frac{5}{2} (\sigma_{s_1} - 1) \sigma_{s_2} + 2\sigma_{s_1} \right] \sigma_{s_0} + \frac{5}{2} (\sigma_{s_1} - 2) \sigma_{s_2} + 2\sigma_{s_1} \right\} \nu^2 \right. \\ & \left. + \left(\frac{2}{3} \sigma_{s_0} + \frac{5}{6} \sigma_{s_2} \right) \right\} \nu \ln \left(\frac{\nu + 1}{\nu - 1} \right) - \\ & - 15 (\sigma_{s_1} - 1) (\sigma_{s_0} - 1) \sigma_{s_2} \nu^4 + [4(\sigma_{s_0} - 1) \sigma_{s_1} + 5\sigma_{s_2}] \nu^2 - \frac{4}{3} = 0 \end{aligned} \quad (4.59)$$

As autofunções dadas pela (4.58) e a função dispersão dada pela (4.59) são idênticas as de Case a menos da normalização, conforme mostrado no apêndice C.

4.4.1) Análise das autofunções e dos autovalores associados:

Para autovalores discretos a autofunção para o fluxo angular, a chamada solução assintótica, é dada pela igualdade (4.58) com a correspondente (4.59) como função dispersão. Como seqüência, para incorporar os autovalores contínuos pertencentes ao intervalo $[-1,1]$, o procedimento é similar ao que foi descrito para os problemas isotrópico e linearmente anisotrópico. Ou seja, ao componente angular da autofunção (4.55) deve ser acrescida a função arbitrária (4.39), sendo reescrita como

$$\phi_\nu(\mu) = A(\nu) \left(\frac{\nu}{\nu - \mu} - B(\nu) \frac{\mu}{\nu} + C(\nu) + \lambda(\nu) \delta(\nu - \mu) \right) \quad (4.60)$$

que, da mesma forma pela qual foi mostrada para os casos anteriores, continua sendo solução da equação diferencial (4.54). Assim, naturalmente a autofunção (4.55) é dada por

$$\psi_\nu(x, \mu) = A(\nu) \left(\frac{\nu}{\nu - \mu} - B(\nu) \frac{\mu}{\nu} + C(\nu) + \lambda(\nu) \delta(\nu - \mu) \right) e^{-\frac{x}{\nu}} \quad (4.61)$$

Esta autofunção quando assumida como solução da equação íntegro-diferencial (4.51), resulta no seguinte coeficiente $B(\nu)$

$$B(\nu) = \frac{15}{8} \sigma_{s2} \nu^2 \left[(3\nu^2 - 1) \left[\nu \ln \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \right) + \lambda(\nu) \right] - 6\nu^2 \right] \quad (4.62)$$

que por sua vez, quando substituído na autofunção (4.61) e esta, finalmente, posta como solução da equação íntegro-diferencial (4.50), resulta na determinação do coeficiente $C(\nu)$

$$C(\nu) = \frac{3}{2} \nu^2 \left\{ \left[\frac{5}{4} \sigma_{s2} (\sigma_{s1} - 1) (3\nu^2 - 1) - \sigma_{s1} \right] \left[\nu \ln \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \right) + \lambda(\nu) \right] - \frac{15}{2} \sigma_{s2} \nu^2 (\sigma_{s1} - 1) + 2\sigma_{s1} \right\} \quad (4.63)$$

Novamente, deve ser enfatizado que a não normalização da autofunção obtida pelo método da derivação angular faz com que os coeficientes $B(\nu)$ e $C(\nu)$ mostrem uma dependência da função $\lambda(\nu)$, para ν no intervalo $[-1, 1]$; a normalização faz desaparecer essa dependência.

Com o estabelecimento dos coeficientes, a autofunção fica definida a menos da determinação da função dispersão. Com efeito, basta substituir a autofunção, com os coeficientes $B(\nu)$ e $C(\nu)$ já calculados, na equação de transporte de Boltzmann (4.49) e encontrar a função dispersão e, como conseqüência, definir a relação que determina $\lambda(\nu)$. Feito isso, resulta que $\lambda(\nu)$ é dada por

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{15}{2} \sigma_{s_2} (\sigma_{s_1} - 1) (\sigma_{s_0} - 1) v^4 + \left\{ - \left[\frac{5}{2} (\sigma_{s_1} - 1) \sigma_{s_2} + 2 \sigma_{s_1} \right] \sigma_{s_0} + \frac{5}{2} (\sigma_{s_1} - 2) \sigma_{s_2} + 2 \sigma_{s_1} \right\} v^2 + \right. \\
& \left. + \left(\frac{2}{3} \sigma_{s_0} + \frac{5}{6} \sigma_{s_2} \right) \right\} v \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) - \\
& - 15 \sigma_{s_2} (\sigma_{s_1} - 1) (\sigma_{s_0} - 1) v^4 + [4(\sigma_{s_0} - 1) \sigma_{s_1} + 5 \sigma_{s_2}] v^2 - \frac{4}{3} = \\
& = - \left\{ \frac{15}{2} \sigma_{s_2} (\sigma_{s_1} - 1) (\sigma_{s_0} - 1) v^4 + \left\{ - \left[\frac{5}{2} (\sigma_{s_1} - 1) \sigma_{s_2} + 2 \sigma_{s_1} \right] \sigma_{s_0} + \frac{5}{2} (\sigma_{s_1} - 2) \sigma_{s_2} + 2 \sigma_{s_1} \right\} v^2 + \right. \\
& \left. + \left(\frac{2}{3} \sigma_{s_0} + \frac{5}{6} \sigma_{s_2} \right) \right\} \lambda(v)
\end{aligned} \tag{4.64}$$

Então, o fluxo angular será expresso por

$$\psi(x, \mu) = \psi_{0+}(x, \mu) + \psi_{0-}(x, \mu) + \int_{-1}^1 \psi_v(x, \mu) dv \tag{4.65}$$

com as autofunções e espectro de autovalores associados já definidos.

4.5) Solução da Equação de Boltzmann Transiente:

O tratamento dedicado ao problema de transporte de Boltzmann transiente será breve já que o desenvolvimento formal é similar ao empregado para o problema estacionário. E é por essa mesma razão que será usada a equação de transporte transiente isotrópica para tal procedimento.

Tomando a equação íntegro-diferencial de Boltzmann transiente para uma velocidade:

$$\frac{\partial \psi(t, x, \mu)}{\partial t} + \mu \frac{\partial \psi(t, x, \mu)}{\partial x} + \psi(t, x, \mu) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sigma_s \psi(t, x, \mu') d\mu' \tag{4.66}$$

Como nos demais casos anteriores, deriva-se esta equação com respeito à variável angular

$$\frac{\partial^2 \psi(t, x, \mu)}{\partial t \partial \mu} + \mu \frac{\partial^2 \psi(t, x, \mu)}{\partial x \partial \mu} + \frac{\partial \psi(t, x, \mu)}{\partial x} + \frac{\partial \psi(t, x, \mu)}{\partial \mu} = 0 \quad (4.67)$$

A solução da equação diferencial parcial (4.67) é dada por

$$\psi_{\alpha\lambda}(t, x, \mu) = \Gamma_\lambda(t) X_\alpha(x) \phi_{\alpha\lambda}(\mu) \quad (4.68)$$

cujas funções são determinadas pelas equações diferenciais ordinárias

$$\frac{d\Gamma_\lambda(t)}{dt} + \lambda \Gamma_\lambda(t) = 0 \quad (4.69)$$

$$\frac{dX_\alpha(x)}{dx} + \frac{1}{\alpha} X_\alpha(x) = 0 \quad (4.70)$$

$$\frac{d\phi_{\alpha\lambda}(\mu)}{d\mu} - \frac{1}{\alpha(1-\lambda-\mu/\alpha)} \phi_{\alpha\lambda}(\mu) = 0 \quad (4.71)$$

Resolvidas essas equações diferenciais parciais, então a solução é expressa como

$$\psi_{\alpha\lambda}(t, x, \mu) = A(\alpha, \lambda) \frac{e^{-\lambda t} e^{-\frac{x}{\alpha}}}{(1-\lambda-\mu/\alpha)} \quad (4.72)$$

na qual fazendo as mudanças de variável[§] $s = (1-\lambda)$, $v = \alpha s$ e uma manipulação algébrica, a solução (4.72) fica

$$\psi_{v,s}(t, x, \mu) = A(\alpha, \lambda) \frac{v}{s} \frac{e^{-(1-s)t} e^{-\frac{s}{v}x}}{(v-\mu)} \quad (4.73)$$

[§] Essas mudanças de variáveis só são necessárias para estabelecer uma correspondência direta com a solução de Case.

Esta solução, ao ser substituída na equação de Boltzmann transiente, determina a função dispersão cujas raízes definem os autovalores aceitáveis

$$A(\nu) \equiv \frac{I}{2} \frac{\sigma_s \nu}{s} \ln \left[\frac{\nu + I}{\nu - I} \right] - I = 0 \quad (4.74)$$

Para autovalores ν pertencentes ao intervalo $[-1,1]$ o procedimento é análogo ao mostrado para o caso estacionário.

As expressões (4.73) e (4.74) são essencialmente idênticas às encontradas por Case. Todavia, Case chegou a essa solução aplicando a transformada de Laplace na variável temporal para assim recair numa equação cuja forma é análoga a do problema estacionário. E é nesta forma estacionária que é aplicada a solução.

Capítulo 5

SOLUÇÕES EXATAS DA EQUAÇÃO DE TRANSPORTE DE BOLTZMANN EM GEOMETRIA CARTESIANA BIDIMENSIONAL

5.1) Introdução:

No capítulo anterior foi resolvida uma série de quatro problemas ilustrativos com o propósito de demonstrar o procedimento e a consistência do método da derivação angular para a equação de transporte de nêutrons em uma dimensão. Ademais, tais exemplos foram comparados a problemas disponíveis na literatura, especificamente a soluções obtidas por Case. Fundamentado nisto, no atual capítulo tal método será levado a resolver a equação de Boltzmann bidimensional cartesiana, nos regimes estacionário e transiente.

O método da derivação angular quando aplicado à equação de transporte de Boltzmann bidimensional segue, essencialmente, um desenvolvimento similar ao do caso unidimensional. A saber: a equação de transporte íntegro-diferencial é derivada em relação a uma das variáveis angular até a ordem de derivação que permita alcançar à equação puramente diferencial. Então, esta equação diferencial é resolvida e assume-se tal solução também como uma base de autofunções da equação íntegro-diferencial de Boltzmann. Entretanto, isto só é concretizado para um espectro de autovalores determinado pelas raízes de uma relação algébrica resultante da imposição. De modo análogo ao caso unidimensional, as soluções básicas bidimensionais obtidas são exatas.

No decurso do capítulo, também será realizada uma análise das autofunções e dos espectros de autovalores associados e neste contexto, a fim de ficar estabelecida a consistência da solução, os resultados são levados à situação limite para recair no caso unidimensional.

5.2) Solução da Equação de Boltzmann Bidimensional Estacionária:

Dada a equação de transporte de Boltzmann bidimensional isotrópica

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{1-\mu^2} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial y} + 1 \right) \psi(x, y, \mu, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \sigma_s \psi(x, y, \mu', \varphi') d\mu' d\varphi' \quad (5.1)$$

Então, derivando essa equação na variável angular φ , com o propósito de eliminar o termo integral, tem-se

$$\left(\mu \frac{\partial^2}{\partial x \partial \varphi} - \sqrt{1-\mu^2} \operatorname{sen} \varphi \frac{\partial}{\partial y} + \sqrt{1-\mu^2} \cos \varphi \frac{\partial^2}{\partial y \partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \psi(x, y, \mu, \varphi) = 0 \quad (5.2)$$

A equação diferencial parcial (5.2) apresenta a seguinte forma de solução:

$$\psi_{v\lambda}(x, y, \mu, \varphi) = X_v(x) Y_\lambda(y) \phi_{v\lambda}(\mu, \varphi) \quad (5.3)$$

onde $X_v(x)$ e $Y_\lambda(y)$ são soluções das equações diferenciais ordinárias

$$\frac{dX_v(x)}{dx} + \frac{1}{v} X_v(x) = 0 \quad (5.4)$$

$$\frac{dY_\lambda(y)}{dy} + \frac{1}{\lambda} Y_\lambda(y) = 0 \quad (5.5)$$

e a função $\phi_{v\lambda}(\mu, \varphi)$ é

$$\phi_{v\lambda}(\mu, \varphi) = - \frac{v\lambda}{\lambda\mu + v\sqrt{1-\mu^2} \cos \varphi - v\lambda} \quad (5.6)$$

Resolvidas as equações diferenciais ordinárias, resulta que a solução é dada por

$$\psi_{\nu,\lambda}(x,y,\mu,\varphi) = A(\nu,\lambda) \frac{\nu\lambda e^{-\left(\frac{x}{\nu} + \frac{y}{\lambda}\right)}}{-\lambda\mu - \nu\sqrt{I - \mu^2} \cos\varphi + \nu\lambda} \quad (5.7)$$

Quando se assume que a solução (5.7) também é uma autofunção da equação de transporte de Boltzmann bidimensional, fica estabelecido a que espectro os autovalores estão sujeitos para que satisfaça tal equação. Então, fazendo a substituição da autofunção na equação de transporte de Boltzmann (5.1), determina-se que o espectro de autovalores admissíveis é constituído pelas raízes da função dispersão

$$A(\nu,\lambda) \equiv I - \frac{I}{4\pi} \sigma_s \nu\lambda \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \frac{I}{-\lambda\mu - \nu\sqrt{I - \mu^2} \cos\varphi + \nu\lambda} d\mu d\varphi = 0 \quad (5.8)$$

Realizando as integrais nos ângulos polares, a expressão anterior toma a seguinte forma

$$A(\nu,\lambda) = I - \frac{I}{2} \frac{\sigma_s \nu\lambda}{\sqrt{\nu^2 + \lambda^2}} \left\{ \ln \left(\frac{-\nu^2 - \lambda^2 - \lambda^2 \nu - \lambda(\nu + I)\sqrt{\nu^2 + \lambda^2}}{\sqrt{\nu^2 + \lambda^2}} \right) - \ln \left(\frac{\nu^2 + \lambda^2 - \lambda^2 \nu - \lambda(\nu - I)\sqrt{\nu^2 + \lambda^2}}{\sqrt{\nu^2 + \lambda^2}} \right) \right\} = 0 \quad (5.9)$$

Esta expressão ainda pode ser bastante simplificada* e, ademais, posta em termos da função *arctgh*, reduzindo-se a

$$A(\nu,\lambda) = I - \frac{\sigma_s \nu\lambda}{\sqrt{\nu^2 + \lambda^2}} \operatorname{arctgh} \left(\frac{\sqrt{\nu^2 + \lambda^2}}{\lambda\nu} \right) = 0 \quad (5.10)$$

Assim, os autovalores aceitáveis são as raízes desta função $A(\nu,\lambda)$. Entretanto, deve ficar claro que o termo envolvendo logaritmos na equação (5.9), ou a inversa da função tangente hiperbólica na (5.10), tem como definição básica a integral da expressão (5.8).

* Este desenvolvimento está mostrado no apêndice D.

5.2.1) Análise das Autofunções e Autovalores Associados:

Para efeito de análise, é conveniente tomar os $\lim_{\lambda \rightarrow \infty}$ da autofunção (5.7) e então verificar a consistência de seu comportamento. Quando é tomado o $\lim_{\lambda \rightarrow \infty}$ da solução (5.7),

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[\frac{v\lambda e^{-\left(\frac{x+y}{v+\lambda}\right)}}{-\lambda\mu - v\sqrt{1-\mu^2} \cos \varphi + v\lambda} \right] = \frac{v}{v-\mu} e^{-\frac{x}{v}} \quad (5.11)$$

verifica-se que esta recai na solução (4.8) do problema unidimensional. Da mesma forma, quando o $\lim_{v \rightarrow \infty}$ é feito, a solução (5.7), torna-se

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \left[\frac{v\lambda e^{-\left(\frac{x+y}{v+\lambda}\right)}}{-\lambda\mu - v\sqrt{1-\mu^2} \cos \varphi + v\lambda} \right] = \frac{\lambda e^{-\frac{y}{\lambda}}}{\lambda - \sqrt{1-\mu^2} \cos \varphi} \quad (5.12)$$

Esta autofunção resultante do limite $v \rightarrow \infty$, a (5.12), é solução da equação de Boltzmann em uma dimensão escrita na forma

$$\sqrt{1-\mu^2} \cos \varphi \frac{\partial \psi(y, \mu, \varphi)}{\partial y} + \psi(y, \mu, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \sigma_s \psi(y, \mu', \varphi') d\mu' d\varphi' \quad (5.13)$$

que é equivalente à equação unidimensional (4.3)*, e, portanto, passível de ser convertida, e reescrita como

$$\eta \frac{\partial \psi(y, \eta)}{\partial y} + \psi(y, \eta) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sigma_s \psi(y, \eta') d\eta' \quad (5.14)$$

onde η é o co-seno diretor em relação à variável espacial y .

* Esta equivalência está demonstrada no apêndice E.

Por sua vez, na relação que determina os autovalores, especificamente na (5.10) que permite melhor visualização, há que ser destacados alguns pontos importantes que refletem propriedades do problema. A saber:

- a) Há uma simetria entre os autovalores, ou seja, se forem feitas as trocas $\nu \Rightarrow \lambda$ e $\lambda \Rightarrow \nu$ a equação permanece invariante. O mesmo acontece caso os sinais dos autovalores forem mudados;
- b) A observação anterior tem como consequência direta que as raízes ocorrem nas seguintes combinações: se o par (ν, λ) é raiz, então (λ, ν) , $(-\nu, -\lambda)$, $(-\nu, \lambda)$ e $(\nu, -\lambda)$ também são raízes;
- c) Se for tomado o limite para $\lambda \rightarrow \infty$ (ou equivalentemente, para $\nu \rightarrow \infty$), a função dispersão que determina os autovalores para o caso bidimensional recai na função dispersão para o unidimensional (equação (4.13)). Explicitamente:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{\sigma_s \nu \lambda}{\sqrt{\nu^2 + \lambda^2}} \operatorname{arctgh} \left(\frac{\sqrt{\nu^2 + \lambda^2}}{\nu \lambda} \right) \right] = 1 - \sigma_s \nu \operatorname{arctgh} \left(\frac{1}{\nu} \right) \quad (5.15)$$

Prosseguindo a análise, quando na equação (5.10) a seguinte condição for satisfeita

$$\frac{\left| \sqrt{\nu^2 + \lambda^2} \right|}{|\nu \lambda|} < 1 \quad (5.16)$$

(vê-se de imediato que esta inequação só é satisfeita para determinados valores de ν e λ , desde que estes sejam maiores do que a unidade), a autofunção (5.7) não possui singularidades. Isto enseja uma mudança de variável na função dispersão (5.10) tal como

$$\nu_0 = \frac{\nu \lambda}{\sqrt{\nu^2 + \lambda^2}} \quad (5.17)$$

a qual foi propositalmente chamada de ν_0 . Deste modo, a função dispersão é reescrita na forma

$$A(\nu, \lambda) = 1 - \sigma_s \nu_0 \operatorname{arctgh}\left(\frac{I}{\nu_0}\right) \quad (5.18)$$

que possui a forma idêntica à função dispersão do problema unidimensional. E, portanto, uma vez calculado ν_0 , que será o mesmo autovalor assintótico unidimensional, pode-se então estabelecer uma vinculação, a partir da equação (5.17), que possibilita relacionar um autovalor em função do outro tendo ν_0 como parâmetro. Ou seja,

$$\lambda = \lambda(\nu_0, \nu) = \frac{\nu \nu_0}{\sqrt{\nu^2 - \nu_0^2}} \quad (5.19)$$

Esta relação permite fazer alguns comentários:

- a) O autovalor λ está posto no eixo dos reais para ν maiores do que o autovalor assintótico unidimensional (valendo a mesma afirmativa para ν);
- b) Quando se faz $|\nu|$ crescer, $|\lambda|$ decresce continuamente a tal ponto que ao ser tomado o limite $|\nu| \rightarrow \infty$, a equação (5.19) leva o autovalor $|\lambda|$ à $|\nu_0|$. Isto significa que o valor mínimo, em módulo, para λ é o próprio autovalor assintótico unidimensional;
- c) Por sua vez, quando $|\nu|$ decresce, o autovalor $|\lambda|$ cresce continuamente, como ilustrado no gráfico 5.1, fazendo com que para o limite $\nu \rightarrow \nu_0$, o autovalor $|\lambda|$ tenda ao infinito;
- d) Como ν e λ são simétricos, conforme já mencionado, conclui-se das observações que os autovalores bidimensionais têm um espectro real e contínuo, limitado, em módulo, pelo autovalor assintótico unidimensional num extremo e pelo ∞ no outro: $\nu_0 \leq |\nu|, |\lambda| \leq \infty$;
- e) Para um dado $|\nu_0|$, há quatro combinações possíveis de raízes cujas diferenças residem no sinal: $(\nu_1, \lambda_1), (\nu_1, -\lambda_1), (-\nu_1, \lambda_1), (-\nu_1, -\lambda_1)$, como está esquematicamente mostrado na figura 5.1.

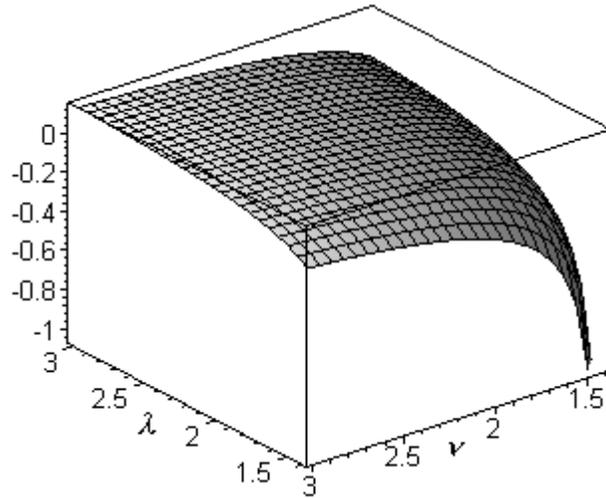


Gráfico 5.1: Comportamento das raízes da equação (5.10), dadas para um $\sigma_s = 0.8$.

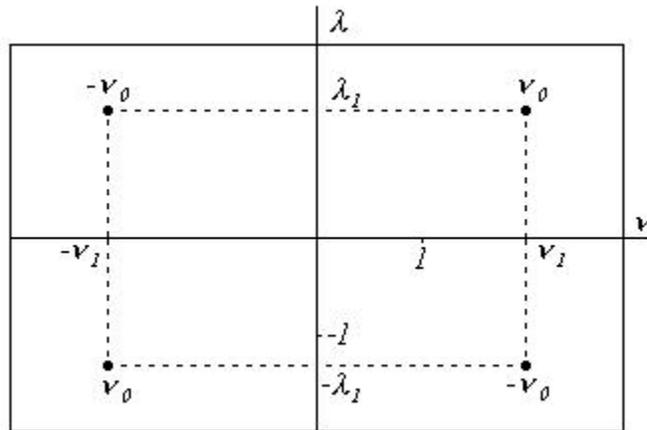


Figura 5.1: Representação esquemática dos autovalores possíveis para um dado $|\nu_0|$.

Neste trabalho, em analogia ao unidimensional, esses autovalores contínuos maiores que a unidade serão denominados por autovalores assintóticos do problema de transporte de Boltzmann bidimensional e, como consequência, as autofunções associadas serão denominadas autofunções assintóticas do caso bidimensional.

Por outro lado, quando a inequação (5.16) não for satisfeita, ou seja,

$$\frac{\sqrt{\nu^2 + \lambda^2}}{|\nu\lambda|} > 1 \quad (5.20)$$

a autofunção (5.6) apresenta singularidades. Para esta situação, como no caso unidimensional, ao componente angular da autofunção (5.6) deve ser adicionada a função arbitrária

$$\beta(v, \lambda) \delta(v\lambda - \lambda\mu - v\sqrt{I - \mu^2} \cos \varphi) \quad (5.21)$$

Assim, o componente angular da autofunção é reescrito como

$$\phi_{v,\lambda}(\mu, \varphi) = \frac{-v\lambda}{\lambda\mu + v\sqrt{I - \mu^2} \cos \varphi - v\lambda} + \beta(v, \lambda) \delta(v\lambda - \lambda\mu - v\sqrt{I - \mu^2} \cos \varphi) \quad (5.22)$$

que continua sendo solução da equação (5.6). Basta escrever a (5.6) na forma

$$\left(-\lambda\mu - v\sqrt{I - \mu^2} \cos \varphi + v\lambda\right) \phi_{v,\lambda}(\mu, \varphi) = v\lambda \quad (5.23)$$

e usar a relação de identidade

$$x \delta(x) \equiv 0 \quad (5.24)$$

para mostrar a afirmativa que a função (5.22) ainda é solução.

Para a determinação do espectro de autovalores desta solução que contempla a singularidade, toma-se o inverso do argumento da função *arctgh* na equação (5.10) para que esta fique em acordo com a integral mostrada na (5.8), ou seja,

$$\frac{\sigma_s v\lambda}{\sqrt{v^2 + \lambda^2}} \operatorname{arctgh} \left(\frac{v\lambda}{\sqrt{v^2 + \lambda^2}} \right) \quad (5.25)$$

então se faz a seguinte mudança de variável

$$\omega = \frac{v\lambda}{\sqrt{v^2 + \lambda^2}} \quad (5.26)$$

e desta maneira, a função dispersão (5.10) será reescrita como

$$\beta(\nu, \lambda) = 1 - \sigma_s \omega \operatorname{arctgh}(\omega) \quad (5.27)$$

recaindo na forma idêntica à da função dispersão unidimensional para autovalores contínuos; onde ω assume o papel do autovalor ν contínuo unidimensional, contido no intervalo $[-1,1]$, mostrado no capítulo anterior. Por efeito, os autovalores admissíveis estarão vinculados pela equação

$$\lambda = \lambda(\omega, \nu) = \frac{\nu\omega}{\sqrt{\nu^2 - \omega^2}} \quad (5.28)$$

que relaciona um autovalor em função do outro tendo como parâmetro o autovalor contínuo do caso unidimensional isotrópico, ω . Da equação (5.28), merece ser comentado que:

- a) Neste espectro, λ varia continuamente e, ademais, é real para ν maior que o autovalor ω e imaginário em outra situação, valendo a mesma sentença para ν ;
- b) Quando se toma o limite $\nu \rightarrow \infty$, o autovalor λ tende ao ω e, pela simetria dos autovalores, quando se toma o limite $\nu \rightarrow \omega$, o autovalor λ tende ao ∞ . Em outras palavras, quando um dos autovalores tender ao infinito, o outro recai no espectro dos autovalores contínuos do problema unidimensional;
- c) Para $\omega \rightarrow 0$, λ também tende a zero para qualquer ν desde que este não esteja no ∞ . Para ν no ∞ há uma indeterminação;
- d) Como na situação anterior, para um dado $|\omega|$, há quatro combinações possíveis de raízes: (ν_I, λ_I) , $(\nu_I, -\lambda_I)$, $(-\nu_I, \lambda_I)$, $(-\nu_I, -\lambda_I)$, também refletindo a simetria de translação, como está representado na figura 5.2.

Destas constatações, tira-se um outro espectro contínuo de autovalores, ν e λ , cujo domínio, em módulo, está limitado num dos extremos pelo autovalor contínuo unidimensional e no outro, pelo infinito, $[\omega, \infty]$.

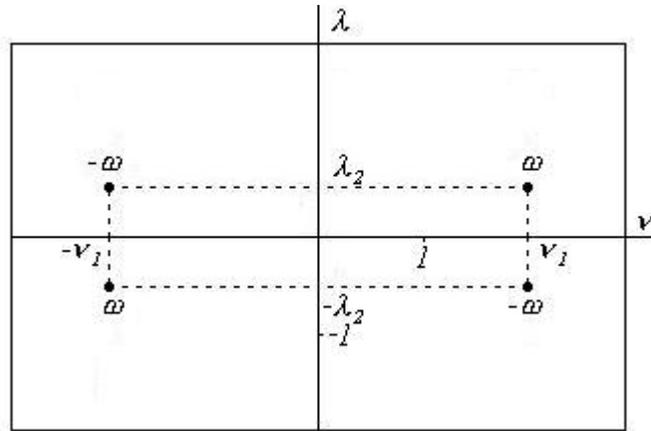


Figura 5.2: Representação esquemática dos autovalores possíveis para um dado $|\omega|$.

Finalmente, baseado nessa exposição, conclui-se que os autovalores admissíveis pertencem a espectros que se sobrepõem; um deles contido, em módulo, no domínio $[\nu_0, \infty]$, e o outro contido em $[\omega, \infty]$. Portanto, na intersecção desses domínios, ou seja, em $[\nu_0, \infty]$, um dado autovalor $\nu = \nu_l$ leva a dois autovalores, $|\lambda_l|$ e $|\lambda_2|$, vindos das inequações (5.16) e (5.20), valendo o mesmo para $\nu = -\nu_l$, como pode ser visto na figura 5.3.

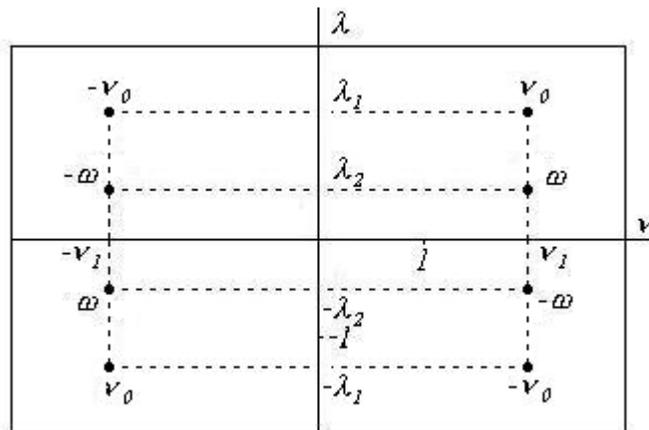


Figura 5.3: Os autovalores λ 's correspondentes a um dado $\nu = \pm \nu_l$.

Assim, a solução formal para o problema bidimensional pode ser posta como

$$\begin{aligned}
\psi(x, y, \mu, \varphi) = & \int_{-\infty}^{-v_0} A(v, \lambda) \phi_{v, \lambda}(\mu, \varphi) e^{-\left(\frac{x+y}{v+\lambda}\right)} dv + \\
& + \int_{v_0}^{\infty} A(v, \lambda) \phi_{v, \lambda}(\mu, \varphi) e^{-\left(\frac{x+y}{v+\lambda}\right)} dv + \\
& + \int_{-I}^I \int_{-\infty}^{\omega} A(v, \lambda) \phi_{v, \lambda}(\mu, \varphi) e^{-\left(\frac{x+y}{v+\lambda}\right)} dv d\omega + \\
& + \int_{-I}^I \int_{\omega}^{\infty} A(v, \lambda) \phi_{v, \lambda}(\mu, \varphi) e^{-\left(\frac{x+y}{v+\lambda}\right)} dv d\omega
\end{aligned} \tag{5.29}$$

onde é necessário estar atento que, nas duas primeiras integrais desta solução, o autovalor λ é uma função, $\lambda = \lambda(\pm v_0, v)$, dada pela equação (5.19), enquanto que nas duas últimas integrais, λ é a função $\lambda = \lambda(\omega, v)$, dada pela equação (5.28).

5.3) Solução da Equação de Boltzmann Bidimensional Transiente:

A abordagem do problema transiente será breve já que a base do procedimento é similar ao aplicado ao problema estacionário.

A equação de transporte bidimensional isotrópica e transiente para uma velocidade é escrita na forma:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mu \frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{I - \mu^2} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial y} + I \right) \psi(t, x, y, \mu, \varphi) = \frac{I}{4\pi} \int_{-I}^I \int_0^{2\pi} \sigma_s \psi(t, x, y, \mu', \varphi') d\mu' d\varphi'$$

(5.30)

Com vistas à aplicação do método da derivação angular, primeiramente deriva-se a equação íntegro-diferencial em relação a variável angular, φ , até ser alcançada a equação puramente diferencial. Ou seja,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t \partial \varphi} + \mu \frac{\partial^2}{\partial x \partial \varphi} - \sqrt{1-\mu^2} \operatorname{sen} \varphi \frac{\partial}{\partial y} + \sqrt{1-\mu^2} \operatorname{cos} \varphi \frac{\partial^2}{\partial y \partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \psi(t, x, y, \mu, \varphi) = 0 \quad (5.31)$$

A solução desta equação diferencial parcial é dada por

$$\psi_{\alpha\beta\gamma}(t, x, y, \mu, \eta) = \Gamma_{\alpha}(t) X_{\beta}(x) Y_{\gamma}(y) \phi_{\alpha\beta\gamma}(\mu, \varphi) \quad (5.32)$$

onde $\Gamma_{\alpha}(t)$, $X_{\beta}(x)$ e $Y_{\gamma}(y)$ são funções definidas pelo conjunto de equações diferenciais parciais

$$\frac{d\Gamma_{\alpha}(t)}{dt} + \alpha \Gamma_{\alpha}(t) = 0 \quad (5.33)$$

$$\frac{dX_{\beta}(x)}{dx} + \frac{1}{\beta} X_{\beta}(x) = 0 \quad (5.34)$$

$$\frac{dY_{\gamma}(y)}{dy} + \frac{1}{\gamma} Y_{\gamma}(y) = 0 \quad (5.35)$$

e a função $\phi_{\alpha\beta\gamma}(\mu, \varphi)$ é expressa por

$$\phi_{\alpha\beta\gamma}(\mu, \varphi) = \frac{1}{1 - \alpha - \mu/\beta - \sqrt{1-\mu^2} \operatorname{cos} \varphi / \gamma} \quad (5.36)$$

Disto, resulta que a solução é

$$\psi_{\alpha\beta\gamma}(t, x, y, \mu, \varphi) = A(\alpha, \beta, \gamma) \frac{e^{-\alpha t} e^{-\left(\frac{x}{\beta} + \frac{y}{\gamma}\right)}}{1 - \alpha - \mu/\beta - \sqrt{1-\mu^2} \operatorname{cos} \varphi / \gamma} \quad (5.37)$$

Fazendo as mudanças de variável, já propostas no capítulo 4, $s = (I - \alpha)$, $\nu = \beta s$ e $\lambda = \gamma s$, a solução torna-se

$$\psi_{s\nu\lambda}(t, x, y, \mu, \varphi) = A(s, \nu, \lambda) \frac{\nu\lambda}{s} \frac{e^{-(I-s)t} e^{-\left(\frac{sx}{\nu} + \frac{sy}{\lambda}\right)}}{-\mu\lambda - \nu\sqrt{I - \mu^2} \cos \varphi + \nu\lambda} \quad (5.38)$$

Seguindo a seqüência do método, quando esta função é posta como solução do problema transporte de Boltzmann transiente, define-se a equação algébrica que determina o espectro de autovalores aceitáveis. Assim, os autovalores são as raízes da função dispersão $A(\nu, \lambda)$,

$$A(\nu, \lambda) = I - \frac{I}{s} \frac{\sigma_s \nu \lambda}{\sqrt{\nu^2 + \lambda^2}} \operatorname{arctgh} \left(\frac{\sqrt{\nu^2 + \lambda^2}}{\lambda \nu} \right) \quad (5.39)$$

Nota-se que as formas da solução (5.38) e da equação (5.39) são similares às encontradas, guardadas as diferenças relativas às dimensões, para o problema unidimensional apresentada no quarto capítulo. Naturalmente, conforme a (5.15), a expressão para os autovalores (5.39) e também a autofunção (5.38) recaem nas do problema unidimensional transiente quando ν , ou λ , forem levados ao limite do ∞ .

Capítulo 6

CONCLUSÃO

Neste trabalho foi abordado um conjunto de problemas que têm fundamental importância no tratamento da teoria de transporte de partículas. Há dois propósitos na linha da abordagem. O primeiro é de fazer um tratamento teórico e numérico, definindo completamente a solução, como nos capítulos dois e três. O segundo é abordar sob o ponto de vista puramente teórico, indicando um rumo para futuras análises e implementação de solução, como nos capítulos quatro e cinco.

A utilização da transformada de Hankel no problema em geometria cilíndrica construído por Mitsis, denominado método HTS_N , desenvolvido no segundo capítulo, mostrou-se bastante eficiente. Seus resultados são validados pela comparação que se fez com simulações numéricas apresentadas na literatura, como foi visto através dos problemas-teste implementados. Além disso, a similaridade com o procedimento bem estabelecido do método LTS_N permite que todo o instrumental teórico e computacional acumulado para o desenvolvimento deste último seja incorporado ao método HTS_N . Isto tem como consequência direta a possibilidade do uso de altas ordens de quadratura.

No terceiro capítulo, a aplicação em conjunto dos métodos da decomposição e o HTS_N , para problemas em geometria cilíndrica com espalhamento anisotrópico, apresenta uma forma simples para a solução do fluxo. Isto se deve basicamente ao uso de interpoladores polinomiais de potências pares, que faz, a cada recursão, com que a forma da solução não se altere e, além disto, possibilita um grande número de termos recursivos. Ademais, o procedimento permite, a partir do fluxo escalar isotrópico definido pelo HTS_N , chegar-se ao fluxo angular anisotrópico com dependência contínua nas variáveis angulares. A relevância desta solução é firmada pela sabida importância da solução de problemas em geometria cilíndrica especialmente na área de engenharia nuclear.

Na série de quatro exemplos desenvolvida no capítulo quatro, mostrou-se que os resultados determinados pelo método construído por Case e o método da derivação angular, desenvolvido neste mesmo capítulo, são essencialmente idênticos para os problemas de transporte unidimensional. E a

aparente diferença entre as soluções, principalmente em problemas com espalhamento anisotrópico, deve-se à normalização da integral de espalhamento, relação (B.2), imposta previamente por Case para que se permitisse a obtenção do componente angular das soluções, como foi demonstrada no apêndice C. Outro resultado significativo é a solução do problema transiente porque a equação de transporte Boltzmann neste regime tem, a menos do co-seno diretor, uma forma similar ao problema bidimensional isotrópico abordado no quinto capítulo.

Com efeito, o desenvolvimento apresentado no capítulo 4 para problemas unidimensionais, com soluções análogas disponíveis na literatura, serve para demonstrar a consistência do método da derivação angular e, com isto, sua conseqüente aplicação em problemas bidimensionais, no capítulo cinco. As soluções exatas e a função dispersão para definir o espectro de autovalores admissíveis, determinadas pelo método proposto para problemas em duas dimensões, tanto estacionário quanto transiente, têm propriedades que merecem ser destacadas porque refletem o comportamento físico esperado de tais soluções. Um desses destaques é a consistência da solução evidenciada pelo fato da autofunção (5.7) recair no problema unidimensional quando um dos autovalores tender ao infinito e, além disso, a função dispersão, cujas raízes definem os autovalores permitidos, também se reduzir a sua equivalente unidimensional. Estas reduções não são triviais, especialmente no caso da equação dos autovalores (5.10), porque a forma como tradicionalmente é escrita a equação de Boltzmann bidimensional, exprimindo o ângulo sólido em coordenadas polares esféricas, não confere, de modo explícito, uma simetria em relação aos co-senos diretores à equação de transporte. Assim, em outras palavras, não há uma equivalência expressa claramente entre os autovalores ν e λ na equação de transporte, apesar de que fisicamente essa equivalência seja esperada. Também precisa ser ressaltada a importância da possibilidade de se reescrever, mediante mudança de variável, a função dispersão de maneira idêntica ao do problema unidimensional. Esta importância se dá porque basta calcular os autovalores unidimensionais, já familiares, e então estabelecer uma relação de dependência simples entre os autovalores bidimensionais, tomando os autovalores unidimensionais como parâmetros. Esta possibilidade também permite observar diretamente como as propriedades unidimensionais se refletem no caso bidimensional. Entretanto, solução composta por autofunções singulares, embora pareçam ser simples, pode apresentar algumas dificuldades.

Finalmente, pode-se concluir que os processos desenvolvidos não se esgotam neste trabalho. Nesta sentença estão incluídos particularmente o método da decomposição aplicado ao problema cilíndrico e o método da derivação angular levado ao problema bidimensional que merecem, do ponto de vista do autor, uma continuidade em projetos futuros. No primeiro caso, há a necessidade

de serem feitas comparações efetivas com soluções existentes na literatura e ainda, implementados outras configurações de problemas. Por sua vez, para o método da derivação angular para a equação bidimensional de Boltzmann, em que pese análise realizada, é importante uma apreciação mais aprofundada tanto das autofunções quanto dos espectros contínuos de autovalores que compõem a solução do problema bidimensional.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abramowitz, M. and Stegun, I. A., 1964. “**Handbook of Mathematical Functions**”, AMS-55, National Bureau of Standard, Washington, DC.

Adomian, G., 1988. “A Review of the Decomposition Method in Applied Mathematics”, **Journal of Mathematical Analysis and Applications**.

Adomian, G., 1984a. “Convergent Series Solution of Non-Linear Equations”, **Journal of Computing and Applied Mathematics**, vol II, pp. 225-230.

Adomian, G., 1984b. “On the Convergence Region for Decomposition Solutions”, **Journal of Computing and Applied Mathematics**, vol II, pp. 379-380.

Altaç, Z., Spinrad, B. I., 1990. “The SK_N Method I: A High-Order Transport Approximation to Neutron Transport Problems”, **Nuclear Science and Engineering**, 106, pp. 471-479.

Barros, R., 1990. “**A Spectral Nodal Method for the Solution of Discrete Ordinates Problems in One and Two Dimensional Cartesian Geometry**”, Tese de Doutorado, Universidade de Michigan.

Barros, R., Larsen, E., 1991. “A Spectral Nodal Method for the Solution of the S_N Equations in x,y -Geometry for Highly Absorbing Deep Penetration Problems”, **VIII Encontro Nacional de Física de Reatores e Termohidráulica**, vol. 1(1), pp. 423-427, Atibaia, SP.

Barros, R., Larsen, E., 1992. “A Spectral Nodal Method for One-Group x,y -Geometry Discrete Ordinates Problems”, **Nuclear Science and Engineering**, vol. 111(34), pp. 34-45.

Bartman, H., 1954. “**Tables of Integral Transforms**”, McGraw-Hill Book Company, Inc., Volume II.

Bell, G. I. and Glasstone, S., 1970. “**Nuclear Reactor Theory**”, Von Nostrand Reinhold Company.

Butkov, E., 1968. “**Mathematical Physics**”, Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Case, K. M. and Zweifel, P.F., 1967. “**Linear Transport Theory**”. Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Fletcher, J. K., 1982. “A Semianalytic Solution of the Monoenergetic Transport Equation in Cylindrical Geometry and the Derivation of Fluxes from of Singular Sources”, **Nuclear Science and Engineering**, pp. 55-61.

Kavenoky, A., 1978. “The C_N Method of Solving the Transport Equation: Application to Cylindrical Geometry”, **Nuclear Science and Engineering**, 65, 514-531.

Mitsis, G. J., 1963. “Transport Solutions to the Monoenergetic Critical Problems”, PhD. Thesis, Report ANL-6787, Argone National Laboratory, Chicago.

Siewert, C. E. and Thomas., J. R. Jr., 1984. “Neutron Transport Calculations in Cylindrical Geometry”, **Nuclear Science and Engineering**, 87, pp. 107-112.

Sneddon, I. N., 1972. “**The Use of Integral Transform**”, MacGraw-Hill.

Spiegel, M. R., 1973. “**Manual de Fórmulas e Tabelas Matemáticas**”, MacGraw-Hill. Inc.

Vilhena, M. T., Barrichelo, L. B., Zabadal, J., Segatto, C. F., and Cardona, A.V., 1998a. “General Solution Of One-Dimensional Approximations To The Transport Equation”, **Progress in Nuclear Energy**, vol. 33, pp. 99.

Zabadal, J., 1994. “**Solução Analítica da Equação de Ordenadas Discretas Multidimensional**”. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PROMEC), Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Zabadal, J., Vilhena, M. T., and Barichello, L. B., 1995. “Solution for Two-Dimensional One Group Discrete Problem by the LTS_N Method”. **Annals of Nuclear Energy**, vol. 22(2), pp. 131-134.

Apêndice A

Identidade Entre Operações de Matrizes:

A igualdade

$$UG(U^{-1}\Psi) = G\Psi \quad (\text{A.1})$$

onde U é uma matriz arbitrária inversível, pode ser mostrada, sem perda de generalidade, a partir da matriz de operadores diferenciais

$$G = \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} & 0 \\ 0 & \frac{d}{dx} \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

e da matriz U e sua inversa

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad U^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{u_{22}}{u_{11}u_{22} - u_{12}u_{21}} & \frac{-u_{12}}{u_{11}u_{22} - u_{12}u_{21}} \\ \frac{-u_{21}}{u_{11}u_{22} - u_{12}u_{21}} & \frac{u_{11}}{u_{11}u_{22} - u_{12}u_{21}} \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

Desta forma,

$$U^{-1}\Psi = \begin{pmatrix} \frac{u_{22}\psi_1 - u_{12}\psi_2}{u_{11}u_{22} - u_{12}u_{21}} \\ -\frac{u_{21}\psi_1 + u_{11}\psi_2}{u_{11}u_{22} - u_{12}u_{21}} \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

e, então,

$$UG(U^{-1}\Psi) = \begin{pmatrix} \frac{u_{11}\left(u_{22}\frac{d\psi_1}{dx} - u_{12}\frac{d\psi_2}{dx}\right) + u_{12}\left(-u_{21}\frac{d\psi_1}{dx} + u_{11}\frac{d\psi_2}{dx}\right)}{u_{11}u_{22} - u_{12}u_{21}} \\ \frac{u_{21}\left(u_{22}\frac{d\psi_1}{dx} - u_{12}\frac{d\psi_2}{dx}\right) + u_{22}\left(-u_{21}\frac{d\psi_1}{dx} + u_{11}\frac{d\psi_2}{dx}\right)}{u_{11}u_{22} - u_{12}u_{21}} \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

ou seja,

$$UG(U^{-1}\Psi) = \begin{pmatrix} \frac{(u_{11}u_{12} - u_{12}u_{21})\frac{d\psi_1}{dx} + (-u_{11}u_{12} + u_{12}u_{11})\frac{d\psi_2}{dx}}{u_{11}u_{22} - u_{12}u_{21}} \\ \frac{(u_{21}u_{22} - u_{22}u_{21})\frac{d\psi_1}{dx} + (-u_{21}u_{12} + u_{22}u_{11})\frac{d\psi_2}{dx}}{u_{11}u_{22} - u_{12}u_{21}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d\psi_1}{dx} \\ \frac{d\psi_2}{dx} \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

que, por sua vez, é idêntica à

$$G\Psi = \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} & 0 \\ 0 & \frac{d}{dx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d\psi_1}{dx} \\ \frac{d\psi_2}{dx} \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

confirmando a igualdade (A.1).

Apêndice B

Identidades Entre Deltas de Dirac:

B.1) Prova da Primeira Identidade entre Deltas:

A equação diferencial (4.6) pode ser reescrita como

$$(v - \mu) \frac{d\phi_v(\mu)}{d\mu} - \phi_v(\mu) = 0 \quad (\text{B.1})$$

que quando é feita a substituição da função

$$\phi_v(\mu) = \frac{v}{v - \mu} + \lambda(v) \delta(v - \mu) \quad (\text{B.2})$$

resulta na expressão

$$(v - \mu) \frac{d\delta(v - \mu)}{d\mu} - \delta(v - \mu) = 0 \quad (\text{B.3})$$

E é esta igualdade que deve ser provada a seguir.

Pela definição familiar da delta de Dirac [Butkov, 1968], tem-se

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - u) f(x) dx = f(u) \quad (\text{B.4})$$

Por outro lado, pode-se estabelecer o seguinte desenvolvimento a partir da integração por partes

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\delta(x-u)}{dx} g(x,u) dx = \delta(x-u)g(x,u) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-u) \frac{dg(x,u)}{dx} dx \quad (\text{B.5})$$

Na qual o primeiro membro da direita da igualdade, nos limites da integração, é

$$\delta(x-u)g(x,u) \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0 \quad (\text{B.6})$$

e assim a relação (B.5) resume-se a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\delta(x-u)}{dx} g(x,u) dx = \int_{-\infty}^{\infty} -\delta(x-u) \frac{dg(x,u)}{dx} dx \quad (\text{B.7})$$

Agora, tomando uma função g em particular escrita como

$$g(x,u) = (x-u)f(x) \quad (\text{B.8})$$

a expressão (B.7) é recolocada como

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x-u) \frac{d\delta(x-u)}{dx} f(x) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-u) f(x) dx - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-u) (x-u) \frac{df(x)}{dx} dx \quad (\text{B.9})$$

na qual, o segundo membro da direita da igualdade é nulo já que satisfaz a identidade

$$(x-u)\delta(x-u) \equiv 0 \quad (\text{B.10})$$

Desta forma, a expressão (B.9) fica

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x-u) \frac{d\delta(x-u)}{dx} f(x) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-u) f(x) dx \quad (\text{B.11})$$

Os limites $\pm\infty$ podem ser substituídos por limites arbitrários $\pm\varepsilon$, desde que u esteja contido nesse intervalo,

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (x-u) \frac{d\delta(x-u)}{dx} f(x) dx = - \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x-u) f(x) dx \quad (\text{B.12})$$

e como esses limites são arbitrários, a igualdade (B.12) é satisfeita pela igualdade dos integrandos

$$(x-u) \frac{d\delta(x-u)}{dx} f(x) = -\delta(x-u) f(x) \quad (\text{B.13})$$

ou seja, a relação (B.13) é escrita como

$$(x-u) \frac{\partial \delta(x-u)}{\partial x} + \delta(x-u) = 0 \quad (\text{B.14})$$

provando o que foi proposto.

B.2) Prova da Segunda Identidade entre Deltas:

A equação diferencial (4.30) pode ser reescrita como

$$(v-\mu) \frac{d^2 \phi_v(\mu)}{d\mu^2} - 2 \frac{d\phi_v(\mu)}{d\mu} = 0 \quad (\text{B.15})$$

que quando é feita a substituição da função

$$\phi_v(\mu) = A(v) \left(B(v) + \frac{v}{v-\mu} + \lambda(v) \delta(v-\mu) \right) \quad (\text{B.16})$$

resulta na expressão

$$(v - \mu) \frac{d^2 \delta(v - \mu)}{d\mu^2} - 2 \frac{d\delta(v - \mu)}{d\mu} = 0 \quad (\text{B.17})$$

E é esta igualdade que deve ser provada a seguir.

A relação (B.7) pode ser levada mais adiante, dando origem a derivadas de ordem superior [Butkov, 1968]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^m \delta(x - u)}{dx^m} g(x, u) dx = (-1)^m \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - u) \frac{d^m g(x, u)}{dx^m} dx \quad (\text{B.18})$$

Para o presente caso, toma-se $m = 2$ e a função g é novamente escrita na forma particular como em (B.8). Disto resulta que a expressão (B.18) fica

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 \delta(x - u)}{dx^2} (x - u) f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} 2 \delta(x - u) \frac{df(x)}{dx} dx + \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - u) (x - u) \frac{d^2 f(x)}{dx^2} dx$$

O segundo membro do lado direito da igualdade,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - u) (x - u) \frac{d^2 f(x)}{dx^2} dx \quad (\text{B.20})$$

é nulo pela identidade mostrada em (B.10). Portanto, a (B.19) resume-se a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 \delta(x - u)}{dx^2} (x - u) f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} 2 \delta(x - u) \frac{df(x)}{dx} dx \quad (\text{B.21})$$

Usando-se a relação (B.7), a igualdade a cima pode ser recolocada na forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 \delta(x - u)}{dx^2} (x - u) f(x) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} 2 \frac{d\delta(x - u)}{dx} f(x) dx \quad (\text{B.22})$$

Pelo mesmo argumento usando anteriormente, os limites $\pm\infty$ podem ser substituídos por limites arbitrários $\pm\varepsilon$ sem alterar a igualdade, indicando que os integrandos da expressão (B.22) devem satisfazer a igualdade, ou seja,

$$(x-u)\frac{d^2\delta(x-u)}{dx^2} + 2\frac{d\delta(x-u)}{dx} = 0 \quad (\text{B.23})$$

provando a relação proposta.

Apêndice C

Equivalência das Autofunções e Autovalores com Case:

A identificação da equivalência entre as expressões, tanto da autofunção quanto da função dispersão que gera os autovalores, obtidas por Case e as obtidas pelo método da derivação angular é feita, a seguir, usando a normalização.

Case chega a seguinte componente angular da autofunção para o caso anisotrópico

$$\phi_\nu(\mu) = \frac{c\nu}{2} \frac{1}{\nu - \mu} \sum_{l=0}^N (2l+1) f_l \phi_{\nu l} P_l(\mu) \quad (\text{C.1})$$

onde foi estabelecida a notação: $c = \sigma_{s0}$ e $f_l = \sigma_{sl} / \sigma_{s0}$. E também foram definidas as normalizações $\phi_{\nu 0} = 1$, $\phi_{\nu 1} = \nu(1-c)$, $\phi_{\nu 2} = 3/2 \nu^2 (1-f_1)(1-c) - 1/2$, ..., onde

$$\int_{-1}^1 P_k(\mu) \phi_\nu(\mu) d\mu \equiv \phi_{\nu k} \quad (\text{C.2})$$

C.1) Normalização das Autofunções para Anisotropia Linear:

Substituindo as relações dadas por (C.2) e feitas as mudanças de notação de f_l e c , a equação (C.1), para anisotropia linear ($N=1$), fica

$$\phi_\nu(\mu) = \frac{1}{2} \frac{\nu}{\nu - \mu} [\sigma_{s0} + 3\sigma_{s1}\nu(1-\sigma_{s0})\mu] \quad (\text{C.3})$$

Para se determinar a função dispersão, cujas raízes definem os autovalores, usa-se a condição de normalização da autofunção

$$\int_{-l}^l \phi_v(\mu) d\mu = 1 \quad (\text{C.4})$$

Ou seja

$$\int_{-l}^l \phi_v(\mu) d\mu = \frac{v}{2} \int_{-l}^l \left[\frac{\sigma_{s0}}{v-\mu} d\mu + 3\sigma_{s1} v (1-\sigma_{s0}) \frac{\mu}{v-\mu} \right] d\mu = 1 \quad (\text{C.5})$$

Assim, levando à integração, a expressão fica

$$\frac{v}{2} \left[\sigma_{s0} \ln\left(\frac{v+l}{v-l}\right) + 3\sigma_{s1} v^2 (1-\sigma_{s0}) \ln\left(\frac{v+l}{v-l}\right) - 6\sigma_{s0} v (1-\sigma_{s0}) \right] = 1 \quad (\text{C.6})$$

que pode ser reorganizada na forma

$$\left\{ \left[3\sigma_{s1} v^2 (1-\sigma_{s0}) \right] + \sigma_{s0} \right\} v \ln\left(\frac{v+l}{v-l}\right) - 6\sigma_{s0} v^2 (1-\sigma_{s0}) = 2 \quad (\text{C.7})$$

Portanto, as expressões (C.3) e (C.7) são o componente angular da autofunção e a função dispersão, respectivamente, gerados pelo método de Case.

Pode-se agora estabelecer a normalização da componente angular da solução (4.35) para levá-la à correspondência com Case. Por conseguinte

$$\int_{-l}^l \phi_v(\mu) d\mu = \int_{-l}^l A(v) \left\{ -\frac{3}{2} \sigma_{s1} v^2 \left[v \ln\left(\frac{v+l}{v-l}\right) - 2 \right] + \frac{v}{v-\mu} \right\} d\mu = 1 \quad (\text{C.8})$$

que, feita a integração, resulta em

$$-3\sigma_{s1} v^2 \left[v \ln\left(\frac{v+l}{v-l}\right) - 2 \right] = \frac{l}{A(v)} - v \ln\left(\frac{v+l}{v-l}\right) \quad (\text{C.9})$$

De outra parte, a relação (C.2) estabelece

$$\int_{-l}^l \mu \phi_\nu(\mu) d\mu = \int_{-l}^l \mu A(\nu) \left\{ -\frac{3}{2} \sigma_{s1} \nu^2 \left[\nu \ln \left(\frac{\nu+1}{\nu-1} \right) - 2 \right] + \frac{\nu}{\nu-\mu} \right\} d\mu = \phi_{\nu l} \quad (\text{C.10})$$

que quando realizadas a integração e a substituição de $\phi_{\nu l} = \nu(1-\sigma_{s0})$, fica

$$\nu^2 \ln \left(\frac{\nu+1}{\nu-1} \right) - 2\nu = \frac{\nu}{A(\nu)} (1-\sigma_{s0}) \quad (\text{C.11})$$

a qual também pode ser posta como

$$\nu \ln \left(\frac{\nu+1}{\nu-1} \right) - 2 = \frac{l}{A(\nu)} - \frac{\sigma_{s0}}{A(\nu)} \quad (\text{C.12})$$

ou ainda

$$\frac{l}{A(\nu)} - \nu \ln \left(\frac{\nu+1}{\nu-1} \right) = \frac{\sigma_{s0}}{A(\nu)} - 2 \quad (\text{C.13})$$

A substituição das relações (C.12) e (C.13) na expressão (C.9), origina a relação

$$-3\sigma_{s1} \nu^2 \frac{l}{A(\nu)} (1-\sigma_{s0}) = \frac{\sigma_{s0}}{A(\nu)} - 2 \quad (\text{C.14})$$

que permite determinar $A(\nu)$,

$$A(\nu) = \frac{3}{2} \sigma_{s1} \nu^2 (1-\sigma_{s0}) + \frac{l}{2} \sigma_{s0} \quad (\text{C.15})$$

A partir dessas relações resultantes da normalização, demonstra-se a equivalência entre as soluções. Deste modo, quando o componente angular da autofunção (4.32) é posto na mesma forma de Case fica escrito como

$$\phi_\nu(\mu) = \frac{A(\nu)}{\nu - \mu} [(I + B(\nu))\nu - B(\nu)\mu] \quad (\text{C.16})$$

e o coeficiente $B(\nu)$ dado pela (4.34), pode ser reescrito, usando a (C.12), como

$$B(\nu) = -\frac{I}{A(\nu)} \frac{3}{2} \sigma_{s1} \nu^2 (I - \sigma_{s0}) \quad (\text{C.17})$$

que também, usando a relação (C.14), pode ainda ser colocado na forma

$$B(\nu) = \frac{I}{A(\nu)} \frac{\sigma_{s0}}{2} - I \quad (\text{C.18})$$

Assim, substituindo a (C.17) e (C.18) na (C.16), obtêm-se

$$\phi_\nu(\mu) = \frac{A(\nu)}{\nu - \mu} \left\{ \left(I + \frac{I}{A(\nu)} \frac{\sigma_{s0}}{2} - I \right) \nu - \left[-\frac{I}{A(\nu)} \frac{3}{2} \sigma_{s1} \nu^2 (I - \sigma_{s0}) \right] \mu \right\} \quad (\text{C.19})$$

que finalmente, feitas as simplificações, é reescrito como

$$\phi_\nu(\mu) = \frac{I}{2} \frac{\nu}{\nu - \mu} [\sigma_{s0} + 3\sigma_{s1}\nu(I - \sigma_{s0})\mu] \quad (\text{C.20})$$

que é idêntico ao componente angular determinado por Case, (C.3). Isto demonstra que a solução de Case corresponde à forma normalizada das autofunções obtidas pelo método da derivação angular.

Por sua vez, as funções dispersão dadas pelo método da derivação angular, (4.36), e pelo de Case, (C.7), mostram-se imediatamente idênticas.

C.2) Normalização das Autofunções para Anisotropia Quadrática:

Usando a relação (C.1), determina-se que a autofunção normalizada de Case para o problema de transporte com anisotropia quadrática, ($N=2$), é dada por

$$\phi_v(\mu) = \frac{v}{v-\mu} \left\{ \frac{\sigma_{s0}}{2} + \frac{3}{2} \sigma_{s1} v (1 - \sigma_{s0}) \mu + \frac{5}{8} \sigma_{s2} [3v^2 (1 - \sigma_{s1})(1 - \sigma_{s0}) - 1] (3\mu^2 - 1) \right\} \quad (C.21)$$

Agora, realizando as normalizações, através da (C.2), do componente angular da autofunção dada pelo método da derivação angular, (4.58), tem-se

$$\begin{aligned} \phi_{v0} = A(v) \left\{ \left[\frac{45}{4} (\sigma_{s1} - 1) \sigma_{s2} v^5 + \left[-\frac{15}{4} (\sigma_{s1} - 1) \sigma_{s2} - 3\sigma_{s1} \right] v^2 + v \right] \ln \left(\frac{v+1}{v-1} \right) - \right. \\ \left. - \frac{45}{2} (\sigma_{s1} - 1) \sigma_{s2} v^4 + 6\sigma_{s1} v^2 \right\} = 1 \end{aligned} \quad (C.22)$$

que é reescrita como

$$\begin{aligned} 3v^2 \left\{ \left[\frac{5}{4} \sigma_{s2} (3v^2 - 1) (\sigma_{s1} - 1) - \sigma_{s1} \right] v \ln \left(\frac{v+1}{v-1} \right) - \frac{15}{2} (\sigma_{s1} - 1) \sigma_{s2} v^2 + 2\sigma_{s1} \right\} + \\ + v \ln \left(\frac{v+1}{v-1} \right) = \frac{1}{A(v)} \end{aligned} \quad (C.23)$$

Seguindo as normalizações,

$$\phi_{v1} = A(v) \left\{ \left[-\frac{15}{4} \sigma_{s2} v^4 + \left(\frac{5}{4} \sigma_{s2} + 1 \right) v^2 \right] \ln \left(\frac{v+1}{v-1} \right) + \frac{15}{2} \sigma_{s2} v^3 - 2v \right\} = v(1 - \sigma_{s1}) \quad (C.24)$$

e, por último,

$$\phi_{\nu_2} = A(\nu) \left\{ \frac{I}{2} (3\nu^2 - 1) \nu \ln \left(\frac{\nu+I}{\nu-I} \right) - 3\nu^2 \right\} = \frac{3}{2} \nu^2 (I - \sigma_{s1})(I - \sigma_{s0}) - \frac{I}{2} \quad (\text{C.25})$$

Através de ϕ_{ν_2} tira-se a seguinte relação

$$(3\nu^2 - 1) \nu \ln \left(\frac{\nu+I}{\nu-I} \right) = 6\nu^2 + \frac{I}{A(\nu)} [3\nu^2 (I - \sigma_{s1})(I - \sigma_{s0}) - I] \quad (\text{C.26})$$

E esta pode ser substituída na (C.24), gerando outra igualdade,

$$\nu \ln \left(\frac{\nu+I}{\nu-I} \right) = \frac{I}{A(\nu)} (I - \sigma_{s0}) + \frac{I}{A(\nu)} \frac{5}{4} [3\nu^2 (I - \sigma_{s1})(I - \sigma_{s0}) - I] + 2 \quad (\text{C.27})$$

Estabelecidas essas relações, percebe-se que a (C.26) permite escrever o coeficiente $B(\nu)$, dado pela (4.56), como

$$B(\nu) = \frac{I}{A(\nu)} \frac{15}{8} \sigma_{s2} \nu^2 [3\nu^2 (I - \sigma_{s1})(I - \sigma_{s0}) - I] \quad (\text{C.28})$$

e a (C.23), usando a (C.27), permite escrever o coeficiente $C(\nu)$, dado pela (4.57), na forma

$$C(\nu) = -\frac{I}{2} \left\{ \frac{I}{A(\nu)} \frac{5}{4} \sigma_{s2} [3\nu^2 (I - \sigma_{s1})(I - \sigma_{s0}) - I] - \frac{I}{A(\nu)} \sigma_{s0} + 2 \right\} \quad (\text{C.29})$$

Neste ponto, a expressão para o componente angular da autofunção, dada pelo método da derivação angular, (4.55), é reescrita na forma de Case, ou seja,

$$\phi_{\nu}(\mu) = \frac{A(\nu)}{\nu - \mu} \left[(\nu + C(\nu))\nu - (B(\nu) + C(\nu))\mu + \frac{B(\nu)}{\nu} \mu^2 \right] \quad (\text{C.30})$$

na qual, substituindo os coeficientes dados pela (C.28) e (C.29), fica

$$\begin{aligned}
\phi_v(\mu) = \frac{1}{2} \frac{A(v)}{v - \mu} & \left\{ \frac{1}{A(v)} \sigma_{s0} v - \frac{1}{A(v)} \frac{5}{4} v [3v^2 (1 - \sigma_{s1})(1 - \sigma_{s0}) - 1] - \right. \\
& - \left. \left\{ \frac{1}{A(v)} \frac{5}{4} (3v^2 - 1) [3v^2 (1 - \sigma_{s1})(1 - \sigma_{s0}) - 1] + \frac{1}{A(v)} \sigma_{s0} - 2 \right\} \mu + \right. \\
& \left. + \frac{1}{A(v)} \frac{5}{4} \sigma_{s2} v [3v^2 (1 - \sigma_{s1})(1 - \sigma_{s0}) - 1] \mu^2 \right\}
\end{aligned} \tag{C.31}$$

Agora, usando as relações (C.27) na (C.26), tira-se a nova relação

$$\frac{1}{A(v)} \frac{5}{4} \sigma_{s2} (3v^2 - 1) [3v^2 (1 - \sigma_{s1})(1 - \sigma_{s0}) - 1] = \frac{1}{A(v)} [(1 - \sigma_{s0})(1 - 3v^2 \sigma_{s1}) - 1] + 2 \tag{C.32}$$

Esta relação permite determinar $A(v)$, ou seja,

$$\begin{aligned}
A(v) = \frac{45}{8} \sigma_{s2} (1 - \sigma_{s1})(1 - \sigma_{s0}) v^4 + \left\{ \left[\frac{15}{8} (1 - \sigma_{s1}) \sigma_{s2} - 2 \sigma_{s1} \right] \sigma_{s0} - \frac{15}{8} \sigma_{s2} (2 - \sigma_{s1}) + 2 \sigma_{s1} \right\} v^2 + \\
+ \frac{1}{2} \sigma_{s0} + \frac{5}{8} \sigma_{s2}
\end{aligned} \tag{C.33}$$

Entretanto, basta a substituição da (C.32) no componente angular (C.31) para resultar em

$$\phi_v(\mu) = \frac{1}{2} \frac{v}{v - \mu} \left\{ \sigma_{s0} + 3 \sigma_{s1} v (1 - \sigma_{s0}) \mu + \frac{5}{4} \sigma_{s2} [3v^2 (1 - \sigma_{s1})(1 - \sigma_{s0}) - 1] (3\mu^2 - 1) \right\} \tag{C.34}$$

que é justamente o componente angular normalizado obtido por Case, a (C.21).

A função dispersão de Case, advinda da normalização (C.4), é idêntica à obtida pelo método da derivação angular (4.59).

Apêndice D

Desenvolvimento da Função Dispersão Bidimensional:

A função dispersão dada pela expressão (5.9) é

$$A(\nu, \lambda) = I - \frac{I}{2} \frac{\sigma_s \nu \lambda}{\sqrt{\nu^2 + \lambda^2}} \left\{ \ln \left(\frac{-\nu^2 - \lambda^2 - \lambda^2 \nu - \lambda(\nu + I)\sqrt{\nu^2 + \lambda^2}}{\sqrt{\nu^2 + \lambda^2}} \right) - \ln \left(\frac{\nu^2 + \lambda^2 - \lambda^2 \nu - \lambda(\nu - I)\sqrt{\nu^2 + \lambda^2}}{\sqrt{\nu^2 + \lambda^2}} \right) \right\} \quad (\text{D.1})$$

Para simplificar, toma-se somente o termo que envolve os logaritmos e, usando a propriedade da soma de logaritmos, este pode ser posto como

$$\ln \left(\frac{-\nu^2 - \lambda^2 - \lambda^2 \nu - \lambda(\nu + I)\sqrt{\nu^2 + \lambda^2}}{\nu^2 + \lambda^2 - \lambda^2 \nu - \lambda(\nu - I)\sqrt{\nu^2 + \lambda^2}} \right) \quad (\text{D.2})$$

O quociente pode sofrer uma série de rearranjos de modo que, primeiramente se faz

$$\ln \left(\frac{-\lambda^2 \nu - (\nu^2 + \lambda^2) - \lambda \nu \sqrt{\nu^2 + \lambda^2} - \lambda \sqrt{\nu^2 + \lambda^2}}{-\lambda^2 \nu + (\nu^2 + \lambda^2) - \lambda \nu \sqrt{\nu^2 + \lambda^2} + \lambda \sqrt{\nu^2 + \lambda^2}} \right) \quad (\text{D.3})$$

e em seqüência se reorganiza como

$$\ln \left(\frac{-\lambda \nu (\sqrt{\nu^2 + \lambda^2} + \lambda) - \sqrt{\nu^2 + \lambda^2} (\sqrt{\nu^2 + \lambda^2} + \lambda)}{-\lambda \nu (\sqrt{\nu^2 + \lambda^2} + \lambda) + \sqrt{\nu^2 + \lambda^2} (\sqrt{\nu^2 + \lambda^2} + \lambda)} \right) \quad (\text{D.4})$$

ou seja,

$$\ln\left(\frac{\lambda v + \sqrt{v^2 + \lambda^2}}{\lambda v - \sqrt{v^2 + \lambda^2}}\right) \quad (\text{D.5})$$

Isto permite cair na igualdade

$$\ln\left(\frac{\frac{\lambda v}{\sqrt{v^2 + \lambda^2}} + 1}{\frac{\lambda v}{\sqrt{v^2 + \lambda^2}} - 1}\right) = 2 \operatorname{arctgh}\left(\frac{\sqrt{v^2 + \lambda^2}}{\lambda v}\right) \quad (\text{D.6})$$

e finalmente, a função dispersão pode ser escrita na forma

$$A(v, \lambda) = 1 - \frac{\sigma_s v \lambda}{\sqrt{v^2 + \lambda^2}} \operatorname{arctgh}\left(\frac{\sqrt{v^2 + \lambda^2}}{\lambda v}\right) \quad (\text{D.7})$$

Apêndice E

Equivalência entre Equações de Transporte Unidimensionais:

Apresentada a equação para o caso unidimensional na forma

$$\sqrt{1-\mu^2} \cos \varphi \frac{\partial \psi(y, \mu, \varphi)}{\partial y} + \psi(y, \mu, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \sigma_s \psi(y, \mu', \varphi') d\mu' d\varphi' \quad (\text{E.1})$$

onde, conhecidamente, $\sqrt{1-\mu^2} = \text{sen } \theta$, sendo θ o ângulo polar zenital.

Agora, propõe-se a seguinte igualdade

$$\cos \alpha = \text{sen } \theta \cos \varphi \quad (\text{E.2})$$

na qual $\cos \alpha$ é o co-seno diretor em relação ao eixo y . Por conseqüência, segue a relação diferencial

$$\text{sen } \alpha = -\cos \theta \cos \varphi \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} + \text{sen } \theta \text{sen } \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \quad (\text{E.3})$$

Levando-se em conta que a equação de transporte unidimensional apresenta simetria azimutal, e, sem perda de generalidade, que o ângulo polar azimutal é zero, a igualdade (E.3) se reduz a

$$\text{sen } \alpha = -\cos \theta \frac{d\theta}{d\alpha} \quad (\text{E.4})$$

Esta expressão (E.4) significa que α e θ são ângulos complementares no plano. Ou seja:

$$\eta \frac{\partial \psi(y, \eta)}{\partial y} + \psi(y, \eta) = \frac{l}{2} \int_{-l}^l \sigma_s \psi(y, \eta') d\eta' \quad (\text{E.5})$$