

**ANÁLISE PROBABILÍSTICA DE VIGAS DE CONCRETO
ARMADO RECUPERADAS À FLEXÃO, ATRAVÉS DO
MÉTODO DE MONTE CARLO UTILIZANDO UM MODELO
DE ELEMENTOS FINITOS**

CHARLEI MARCELO PALIGA

Porto Alegre

Abril de 2008

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

**ANÁLISE PROBABILÍSTICA DE VIGAS DE CONCRETO
ARMADO RECUPERADAS À FLEXÃO, ATRAVÉS DO
MÉTODO DE MONTE CARLO UTILIZANDO UM MODELO
DE ELEMENTOS FINITOS**

CHARLEI MARCELO PALIGA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para a obtenção do título de DOUTOR EM ENGENHARIA.

Porto Alegre
Abril de 2008

**ANÁLISE PROBABILÍSTICA DE VIGAS DE CONCRETO
ARMADO RECUPERADAS À FLEXÃO, ATRAVÉS DO
MÉTODO DE MONTE CARLO UTILIZANDO UM MODELO
DE ELEMENTOS FINITOS**

CHARLEI MARCELO PALIGA

Esta tese foi julgada adequada para a obtenção do título de DOUTOR EM ENGENHARIA e aprovada em sua forma final pelos orientadores e pelo Programa de Pós-Graduação.

Porto Alegre, 29 de fevereiro de 2008.

Prof. Américo Campos Filho (UFRGS)

Dr. pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Orientador

Prof. Mauro de Vasconcellos Real (FURG)

Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Orientador

Prof. Fernando Schnaid (UFRGS)

PhD. pela Oxford University
Coordenador do PPGEC/UFRGS

BANCA EXAMINADORA

Prof^a. Sofia Maria Carrato Diniz (UFMG)

PhD. pela University of Colorado at Boulder

Prof. Daniel Domingues Loriggio (UFSC)

Dr. pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Prof. Jorge Daniel Riera (UFRGS)

PhD. pela Princeton University

Dedico este trabalho à minha mãe, in memoriam, ao meu pai, à minha valorosa irmã e especialmente à minha esposa Aline pelo incentivo e amor incomensuráveis.

AGRADECIMENTOS

Ao chegar ao fim de mais essa valiosa etapa de minha vida, gostaria de expressar meus mais sinceros agradecimentos àqueles que de alguma forma colaboraram para que este trabalho fosse concluído.

*Principalmente aos meus orientadores, Prof. Américo Campos Filho e Prof. Mauro de Vasconcellos Real, pelas intermináveis horas dispensadas e apoio incondicional para o desenvolvimento deste trabalho. Pelas sempre valiosas e constantes orientações, não só para que este trabalho tivesse êxito, mas também para a minha formação profissional e pessoal. Pelas horas de alegria e de aprendizado em simples conversas, pela paciência e estímulo em etapas nas quais o desenvolvimento do trabalho não se dava da melhor forma possível, e principalmente, pela confiança e por terem me acolhido como seu orientando. O meu sincero **MUITO OBRIGADO!***

À minha esposa Aline, sempre otimista, presente, carinhosa e amorosa. Se mais esta etapa foi concluída, muito se deve à sua força.

Ao meu pai, pessoa que me incentivou desde o início de minha vida.

À minha irmã, que mesmo com a distância física que teimava em nos afastar, sempre esteve presente com sua palavra de apoio e amor.

Aos amigos e colegas do PPGEC e do CEMACOM pela feliz convivência, cooperação e amizade, especialmente aos compadres Giuliana e Gustavo Bono.

Aos professores e funcionários da Escola de Engenharia e do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Ao CNPq – Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – pelo suporte financeiro concedido durante a elaboração deste trabalho.

SUMÁRIO

LISTA DE TABELAS	xii
LISTA DE FIGURAS	xiv
LISTA DE SÍMBOLOS	xx
RESUMO	xxvii
ABSTRACT	xxviii
1 INTRODUÇÃO	1
2 TÉCNICAS DE REFORÇO E RECUPERAÇÃO DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO E RECOMENDAÇÕES PARA O PROJETO DE REFORÇO À FLEXÃO	8
2.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS.....	8
2.2 MÉTODOS CONVENCIONAIS DE REFORÇO ESTRUTURAL.....	10
2.2.1 Aumento da seção transversal	11
2.2.2 Protensão externa.....	11
2.2.3 Chapa de aço colada com resina epóxi.....	12
2.2.4 Materiais compósitos.....	14
2.3 PROJETO DE REFORÇO À FLEXÃO COM PRF BASEADO NAS RECOMENDAÇÕES DA <i>fib bulletin 14</i>	19
2.3.1 Recomendações da <i>fib – bulletin 14</i> para o reforço à flexão	19
2.3.1.1 <i>Introdução</i>	20
2.3.1.2 <i>Situação inicial</i>	22
2.3.1.3 <i>Modos de ruptura no estado limite último (ELU)</i>	24
2.3.1.4 <i>Análise no estado limite último (ELU)</i>	26
2.3.1.5 <i>Verificação da ductilidade</i>	34

3 ANÁLISE NÃO-LINEAR, ATRAVÉS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS, DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO REFORÇADAS	36
3.1 INTRODUÇÃO	36
3.2 ELEMENTOS FINITOS PARA O CONCRETO	37
3.2.1 Geometria do elemento	37
3.2.2 Campo de deslocamentos	38
3.2.3 Campo de deformações.....	40
3.2.4 Campo de tensões	40
3.2.5 Definição das forças atuantes	41
3.2.6 O Princípio dos Trabalhos Virtuais	42
3.2.7 Caso particular: Material elástico-linear no regime pequenos deslocamentos	45
3.2.8 Matriz de rigidez do elemento de concreto	46
3.3 ELEMENTOS FINITOS PARA A ARMADURA.....	48
3.3.1 Modelo incorporado.....	48
3.3.2 Formulação geométrica	49
3.3.3 Determinação dos trechos de armadura.....	52
3.3.4 Funções de forma para os elementos de armadura.....	55
3.3.5 Matriz de rigidez e vetor de ações nodais para a armadura.....	56
3.4 ELEMENTOS FINITOS PARA O REFORÇO	59
3.4.1 Formulação do elemento.....	59
3.4.2 Deformação no reforço	60
3.4.3 Matriz de rigidez e vetor de ações nodais para o reforço	61
3.5 ELEMENTOS FINITOS PARA A INTERFACE.....	62
3.5.1 Formulação do elemento.....	63

3.5.2 Matriz de rigidez e vetor de ações nodais para a interface.....	67
3.6 SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES NÃO-LINEARES.....	69
3.6.1 O método BFGS.....	69
3.6.2 O algoritmo incremental-iterativo	72
4 MODELOS CONSTITUTIVOS DOS MATERIAIS	74
4.1 INTRODUÇÃO	74
4.2 MODELO CONSTITUTIVO BIDIMENSIONAL PARA O CONCRETO EM ESTADO ÍNTEGRO	74
4.2.1 Deformação uniaxial equivalente	75
4.2.2 Critério de ruptura de KUPFER e GERSTLE.....	77
4.2.3 Deformação correspondente à máxima tensão	79
4.2.4 Curvas uniaxiais equivalentes.....	80
4.2.5 Procedimento iterativo.....	81
4.3 MODELO PARA O CONCRETO FISSURADO	82
4.3.1 Critério de fissuração.....	83
4.3.2 Equação constitutiva ortotrópica	83
4.3.3 Deformação uniaxial equivalente	84
4.3.4 Colaboração do concreto entre fissuras	84
4.3.5 Módulo de deformação por corte reduzido.....	85
4.4 MODELO PARA O CONCRETO ESMAGADO.....	85
4.4.1 Equação constitutiva ortotrópica	86
4.4.2 Deformação uniaxial equivalente	86
4.4.3 Comportamento do concreto pós-esmagamento	86
4.5 EQUAÇÃO CONSTITUTIVA NO SISTEMA XOY	87
4.5.1 Cálculo das direções dos eixos de ortotropia.....	88

4.5.2	Transformação das deformações do sistema xoy para os eixos de ortotropia.....	89
4.5.3	Transformação das tensões dos eixos de ortotropia para o sistema xoy .	90
4.6	MODELO CONSTITUTIVO PARA O AÇO	91
4.7	MODELO PARA O SISTEMA DE REFORÇO	92
4.7.1	Modelo para o elemento de reforço	93
4.7.2	Modelo para o elemento de interface entre o substrato de concreto e o sistema de reforço estrutural.....	95
5	VALIDAÇÃO DO MODELO ATRAVÉS DE EXEMPLOS DE APLICAÇÃO.....	99
5.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS.....	99
5.2	VIGA SIMULADA POR ASCIONE E FEO (2000).....	101
5.3	VIGA SIMULADA POR ZIRABA E BALUCH (1995)	105
5.4	VIGAS ENSAIADAS POR BEBER (1999)	109
5.4.1	Vigas reforçadas com uma camada de lâmina de fibra de carbono: VR3 e VR4	111
5.4.2	Vigas reforçadas com quatro camadas de lâminas de fibra de carbono: VR5 e VR6.....	114
5.4.3	Vigas reforçadas com sete camadas de lâminas de fibra de carbono: VR7 e VR8	117
5.4.4	Vigas reforçadas com dez camadas de lâminas de fibra de carbono: VR9 e VR10	121
5.5	VIGAS SIMULADAS POR APRILE ET AL. (2001)	124
5.6	VIGA SIMULADA POR SPACONE E LIMKATANYU (2000).....	134

5.7 VIGA ENSAIADA POR CAMPAGNOLO ET AL. (1997)	138
5.8 VIGA ENSAIADA POR ARDUINI ET AL. (1997).....	141
5.9 VIGAS ENSAIADAS POR BEBER (2003)	145
5.10 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	150
6 CONFIABILIDADE NA ANÁLISE ESTRUTURAL	152
6.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS.....	152
6.2 MÉTODOS DE AVALIAÇÃO DA CONFIABILIDADE.....	157
6.2.1 O Método de Monte Carlo	157
6.2.2 Método de Segundo Momento de Primeira Ordem (FOSM)	160
6.2.3 Método de Confiabilidade de Primeira Ordem (FORM)	162
6.3 O MÉTODO DE MONTE CARLO APLICADO A DETERMINAÇÃO DA CONFIABILIDADE ESTRUTURAL DE VIGAS REFORÇADAS.....	164
6.3.1 Considerações iniciais	164
6.3.2 Geração aleatória das propriedades mecânicas do concreto.....	166
6.3.3 Geração aleatória das propriedades mecânicas da armadura	168
6.3.4 Geração aleatória das propriedades mecânicas do reforço.....	168
6.3.5 Geração aleatória das propriedades mecânicas da interface.....	169
6.3.6 Geração aleatória do carregamento	169
6.3.6.1 Carga permanente	170
6.3.6.2 Carga variável.....	170
7 ESTUDO PROBABILÍSTICO DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO RECUPERADAS COM PRFC	172
7.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS.....	172
7.2 DESCRIÇÃO DAS VIGAS ANALISADAS	173

7.3 DESCRIÇÃO DO CARREGAMENTO APLICADO ÀS VIGAS	177
7.4 RESULTADOS NUMÉRICOS OBTIDOS.....	181
7.4.1 Viga V1.....	181
7.4.2 Viga V2.....	190
7.4.3 Viga V3.....	198
8 CONCLUSÕES	206
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	213

LISTA DE TABELAS

<i>Tabela 2.1 – Coeficientes de minoração da resistência do reforço γ_f.....</i>	<i>22</i>
<i>Tabela 4.1 – Fator n.....</i>	<i>87</i>
<i>Tabela 4.2 – Propriedades típicas das fibras de carbono à tração</i>	<i>93</i>
<i>Tabela 4.3 – Parâmetros para a definição da tensão de aderência concreto / chapa de aço .</i>	<i>97</i>
<i>Tabela 4.4 – Parâmetros para a definição da tensão</i>	<i>98</i>
<i>de aderência para materiais compósitos.....</i>	<i>98</i>
<i>Tabela 5.1 – Propriedades dos materiais – Viga simulada por Ascione e Feo (2000).....</i>	<i>102</i>
<i>Tabela 5.2 – Propriedades dos materiais – Viga URB4</i>	<i>106</i>
<i>Tabela 5.3 – Propriedades dos materiais – Vigas ensaiadas por Beber (1999).....</i>	<i>110</i>
<i>Tabela 5.4 – Principais propriedades do tecido de fibra de carbono.....</i>	<i>110</i>
<i>Tabela 5.5 – Denominações dos protótipos</i>	<i>110</i>
<i>Tabela 5.6 – Comparação entre cargas de ruptura</i>	<i>111</i>
<i>Tabela 5.7 – Comparação entre cargas de ruptura</i>	<i>117</i>
<i>Tabela 5.8 – Comparação entre cargas de ruptura</i>	<i>120</i>
<i>Tabela 5.9 – Comparação entre cargas de ruptura</i>	<i>124</i>
<i>Tabela 5.10 – Propriedades mecânicas e geométricas</i>	<i>126</i>
<i>Tabela 5.11 – Comparação entre cargas de ruptura</i>	<i>134</i>
<i>Tabela 5.12 – Propriedades mecânicas dos materiais.....</i>	<i>135</i>
<i>Tabela 5.13 – Propriedades dos materiais – Viga ensaiada por Campagnolo et al. (1997). </i>	<i>139</i>
<i>Tabela 5.14 – Propriedades dos materiais – Vigas simuladas por Arduini et al. (1997).....</i>	<i>142</i>
<i>Tabela 5.15 – Comparação entre cargas de ruptura</i>	<i>145</i>
<i>Tabela 5.16 – Características dos protótipos reforçados</i>	<i>146</i>
<i>Tabela 5.17 – Propriedades do sistema curado in situ.....</i>	<i>146</i>
<i>Tabela 7.1 – Propriedades mecânicas dos materiais utilizados no projeto das vigas.....</i>	<i>174</i>
<i>Tabela 7.2 – Dimensionamento à flexão e ao cisalhamento das vigas V1, V2 e V3.....</i>	<i>175</i>
<i>Tabela 7.3 – Áreas de aço reduzidas e área de reforço em PRFC para um dano de 10%....</i>	<i>176</i>
<i>Tabela 7.4 – Áreas de aço reduzidas e área de reforço em PRFC para um dano de 20%....</i>	<i>176</i>
<i>Tabela 7.5 – Áreas de aço reduzidas e área de reforço em PRFC para um dano de 30%....</i>	<i>176</i>
<i>Tabela 7.6 – Composição do carregamento aplicado às vigas V1, V2 e V3</i>	<i>177</i>
<i>Tabela 7.7 – Análise probabilística da viga V1</i>	<i>187</i>
<i>Tabela 7.8 – Análise probabilística da viga V2</i>	<i>195</i>

Tabela 7.9 – Análise probabilística da viga V3203

LISTA DE FIGURAS

<i>Figura 2.1 – Curvas tensão-deformação para os materiais constituintes no ELU.....</i>	<i>21</i>
<i>Figura 2.2 – Situação inicial.....</i>	<i>23</i>
<i>Figura 2.3 – Modos de falha da aderência.....</i>	<i>25</i>
<i>Figura 2.4 – Análise da seção no ELU: (a) geometria, (b) distribuição de deformações e (c) distribuição de tensões.....</i>	<i>26</i>
<i>Figura 2.5 – Tratamento para o peeling-off em zona de ancoragem.....</i>	<i>30</i>
<i>Figura 2.6 – Falha na extremidade do reforço.....</i>	<i>32</i>
<i>Figura 2.7 – Modelo análogo.....</i>	<i>33</i>
<i>Figura 3.1- Discretização de uma estrutura plana em elementos finitos de 8 nós.....</i>	<i>37</i>
<i>Figura 3.2 – Geometria do elemento isoparamétrico quadrático.....</i>	<i>38</i>
<i>Figura 3.3 – Ponto submetido a um estado plano de tensões.....</i>	<i>41</i>
<i>Figura 3.4 – Barra de aço inserida no elemento de concreto.....</i>	<i>50</i>
<i>Figura 3.5 – Coordenadas ao longo do eixo da armadura.....</i>	<i>51</i>
<i>Figura 3.6 – Curva que define a barra de aço.....</i>	<i>54</i>
<i>Figura 3.7 – Segmento de armadura dentro do elemento de concreto.....</i>	<i>55</i>
<i>Figura 3.8 – Elemento quadrático de barra de treliça.....</i>	<i>59</i>
<i>Figura 3.9 – Sistema global e local para o elemento de interface.....</i>	<i>64</i>
<i>Figura 3.10 – Equivalentes pseudo nós.....</i>	<i>64</i>
<i>Figura 3.11 – Conexão entre os elementos.....</i>	<i>66</i>
<i>Figura 3.12 – O método Quasi-Newton para o caso unidimensional.....</i>	<i>70</i>
<i>Figura 4.1 – Deformação uniaxial equivalente para um material linear.....</i>	<i>75</i>
<i>Figura 4.2 – Critério de ruptura bidimensional de Kupfer e Gerstle.....</i>	<i>78</i>
<i>Figura 4.3 – Curva tensão-deformação uniaxial equivalente para o concreto.....</i>	<i>81</i>
<i>Figura 4.4 – Equação constitutiva para o concreto tracionado.....</i>	<i>84</i>
<i>Figura 4.5 – Deformações principais e eixos de ortotropia.....</i>	<i>89</i>
<i>Figura 4.6 – Modelo constitutivo bilinear para o aço.....</i>	<i>91</i>
<i>Figura 4.7 – Diagrama tensão-deformação dos principais elementos estruturais dos sistemas de reforço (Machado, 2002).....</i>	<i>94</i>
<i>Figura 4.8 – Diagramas tensão-deformação dos sistemas compósitos (Machado, 2002).....</i>	<i>96</i>
<i>Figura 4.9 – Relação analítica tensão de aderência – deslizamento.....</i>	<i>96</i>

<i>Figura 5.1 – Viga em concreto armado reforçada com chapa de aço.....</i>	<i>101</i>
<i>Figura 5.2 – Malha de elementos finitos.....</i>	<i>102</i>
<i>Figura 5.3 – Distribuição da tensão de aderência: $P = 60$ kN.....</i>	<i>103</i>
<i>Figura 5.4 – Distribuição da tensão de aderência: $P = 140$ kN.....</i>	<i>104</i>
<i>Figura 5.5 – Distribuição da tensão de aderência: próximo da ruptura.....</i>	<i>104</i>
<i>Figura 5.6 – Deformações ao longo do reforço.....</i>	<i>105</i>
<i>Figura 5.7 – Detalhamento da viga URB4.....</i>	<i>106</i>
<i>Figura 5.8 – Curva carga x deslocamento: viga URB4.....</i>	<i>107</i>
<i>Figura 5.9 – Tensões no reforço: viga URB4.....</i>	<i>108</i>
<i>Figura 5.10 – Distribuição das tensões de aderência: viga URB4.....</i>	<i>108</i>
<i>Figura 5.11 – Detalhamento das vigas ensaiadas por Beber (1999).....</i>	<i>109</i>
<i>Figura 5.12 – Curvas carga x deslocamento: vigas VR3 e VR4.....</i>	<i>111</i>
<i>Figura 5.13 – Máxima deformação no reforço: vigas VR3 e VR4.....</i>	<i>112</i>
<i>Figura 5.14 – Distribuição das tensões de aderência: viga reforçada com uma camada.....</i>	<i>113</i>
<i>Figura 5.15 – Perfil de tensões normalizadas.....</i>	<i>113</i>
<i>Figura 5.16 – Curvas carga x deslocamento: vigas VR5 e VR6.....</i>	<i>114</i>
<i>Figura 5.17 – Máxima deformação no reforço: vigas VR5 e VR6.....</i>	<i>115</i>
<i>Figura 5.18 – Distribuição das tensões de aderência: viga reforçada com quatro camadas.....</i>	<i>116</i>
<i>Figura 5.19 – Perfil de tensões normalizadas.....</i>	<i>116</i>
<i>Figura 5.20 – Curvas carga x deslocamento: vigas VR7 e VR8.....</i>	<i>118</i>
<i>Figura 5.21 – Máxima deformação no reforço: vigas VR7 e VR8.....</i>	<i>118</i>
<i>Figura 5.22 – Distribuição das tensões de aderência: sete camadas de PRFC.....</i>	<i>119</i>
<i>Figura 5.23 – Perfil de tensões normalizadas.....</i>	<i>120</i>
<i>Figura 5.24 – Curvas carga x deslocamento: vigas VR9 e VR10.....</i>	<i>121</i>
<i>Figura 5.25 – Máxima deformação no reforço: vigas VR9 e VR10.....</i>	<i>122</i>
<i>Figura 5.26 – Distribuição das tensões de aderência: dez camadas de PRFC.....</i>	<i>122</i>
<i>Figura 5.27 – Perfil de tensões normalizadas.....</i>	<i>123</i>
<i>Figura 5.28 – Elementos estruturais reforçados com PRFC ou chapa de aço.....</i>	<i>125</i>
<i>Figura 5.29 – Malha de elementos finitos para todos exemplos.....</i>	<i>126</i>
<i>Figura 5.30 – Curvas carga x deslocamento: viga reforçada com chapa de aço.....</i>	<i>127</i>
<i>Figura 5.31 – Tensão normal no reforço em chapa de aço para a viga: estado limite último.....</i>	<i>127</i>

<i>Figura 5.32 – Tensão de aderência para o caso da viga reforçada com chapa de aço: estado limite último</i>	128
<i>Figura 5.33 – Curvas carga x deslocamento: viga reforçada com PRFC</i>	129
<i>Figura 5.34 - Tensão normal no reforço em PRFC: estado limite último para a viga reforçada</i>	130
<i>Figura 5.35 – Tensão de aderência: estado limite último para a viga reforçada com PRFC</i>	130
<i>Figura 5.36 – Curvas carga x deslocamento: laje reforçada com chapa de aço ou PRFC</i>	132
<i>Figura 5.37 – Tensão de aderência: estado limite último para a laje reforçada com chapa de aço</i>	132
<i>Figura 5.38 – Tensões normalizadas pelo seu máximo valor</i>	133
<i>Figura 5.39 – Curvas carga x deslocamento: deslocamento no meio do vão</i>	135
<i>Figura 5.40 – Distribuição da tensão normal no reforço: $P = 52$ kN</i>	136
<i>Figura 5.41 – Distribuição da tensão normal no reforço: próximo da falha</i>	136
<i>Figura 5.42 – Variação das tensões de aderência: $P = 52$ kN</i>	137
<i>Figura 5.43 – Variação das tensões de aderência: próximo da falha</i>	138
<i>Figura 5.44 – Curvas carga x deslocamento: viga ensaiada por Campagnolo et al. (1997)</i>	139
<i>Figura 5.45 – Variação da tensão normal no reforço para diferentes níveis do carregamento</i>	140
<i>Figura 5.46 – Variação da tensão de aderência para diferentes níveis do carregamento</i>	140
<i>Figura 5.47 – Ruptura da viga V2</i>	141
<i>Figura 5.48 – Detalhamento da viga simulada por Arduini et al. (1997)</i>	142
<i>Figura 5.49 – Curvas carga x deslocamento: viga B2</i>	143
<i>Figura 5.50 – Curvas carga x deformação no reforço: viga B2</i>	144
<i>Figura 5.51 – Distribuição das tensões de aderência: viga B2</i>	144
<i>Figura 5.52 – Detalhamento das vigas ensaiadas por Beber (2003)</i>	145
<i>Figura 5.53 – Distribuição das tensões de aderência para a viga V6B: 60% da carga de ruptura</i>	147
<i>Figura 5.54 – Distribuição das tensões de aderência para a viga V6B: 100% da carga de ruptura</i>	148

<i>Figura 5.55 – Distribuição das tensões de aderência para a viga V7B: 60% da carga de ruptura.....</i>	<i>149</i>
<i>Figura 5.56 – Distribuição das tensões de aderência para a viga V7B: 100% da carga de ruptura.....</i>	<i>149</i>
<i>Figura 6.1 – Representação gráfica da probabilidade de falha.....</i>	<i>156</i>
<i>Figura 6.2 – Funções densidade de probabilidade de R e S.....</i>	<i>158</i>
<i>Figura 6.3 – Distribuição da margem de segurança.....</i>	<i>159</i>
<i>Figura 6.4 – Espaço das variáveis reduzidas R' e S' na abordagem FOSM.....</i>	<i>161</i>
<i>Figura 6.5 – Transformação do espaço original para o espaço padronizado na abordagem FORM.....</i>	<i>162</i>
<i>Figura 6.6 – Relação entre a variável X_1 no espaço original e a variável U_1 no espaço normal padronizado.....</i>	<i>163</i>
<i>Figura 7.1 – Detalhes das vigas analisadas.....</i>	<i>174</i>
<i>Figura 7.2 – Carga permanente e variável: Viga V1.....</i>	<i>178</i>
<i>Figura 7.3 – Carga total: Viga V1.....</i>	<i>178</i>
<i>Figura 7.4 – Carga permanente e variável: Viga V2.....</i>	<i>179</i>
<i>Figura 7.5 – Carga total: Viga V2.....</i>	<i>179</i>
<i>Figura 7.6 – Carga permanente e variável: Viga V3.....</i>	<i>180</i>
<i>Figura 7.7 – Carga total: Viga V3.....</i>	<i>180</i>
<i>Figura 7.8 – Análise determinística da viga V1: Carga x deslocamento.....</i>	<i>182</i>
<i>Figura 7.9 – Convergência estatística da carga de ruptura: viga V1 original.....</i>	<i>183</i>
<i>Figura 7.10 – Convergência do coeficiente de variação da carga de ruptura: viga V1 original.....</i>	<i>183</i>
<i>Figura 7.11 – Margem de segurança: Viga V1 com 10% de dano.....</i>	<i>184</i>
<i>Figura 7.12 – Gráfico de probabilidade normal: Viga V1 com 10% de dano.....</i>	<i>184</i>
<i>Figura 7.13 – Representação do problema R-S em termos de $f_S(s)$ e $F_R(r)$ – Viga V1 com 10% de dano.....</i>	<i>185</i>
<i>Figura 7.14 – Representação do problema R-S em termos de $f_S(s)$ e $F_R(r)$ – Viga V1 com 20% de dano.....</i>	<i>186</i>
<i>Figura 7.15 – Representação do problema R-S em termos de $f_S(s)$ e $F_R(r)$ – Viga V1 com 30% de dano.....</i>	<i>186</i>
<i>Figura 7.16 – Variação da carga média de ruptura com o dano: Viga V1.....</i>	<i>188</i>
<i>Figura 7.17 – Coeficiente de variação da carga de ruptura com o dano: Viga V1.....</i>	<i>188</i>
<i>Figura 7.18 – Variação do índice de confiabilidade com o dano: Viga V1.....</i>	<i>189</i>

<i>Figura 7.19 – Variação da probabilidade de falha com o dano: Viga V1.....</i>	<i>189</i>
<i>Figura 7.20 – Análise determinística da viga V2: Carga x deslocamento</i>	<i>190</i>
<i>Figura 7.21 – Representação do problema R-S em termos de $f_S(s)$ e $F_R(r)$ – Viga V2 com 10% de dano.....</i>	<i>191</i>
<i>Figura 7.22 – Representação do problema R-S em termos de $f_S(s)$ e $F_R(r)$ – Viga V2 com 20% de dano.....</i>	<i>191</i>
<i>Figura 7.23 – Representação do problema R-S em termos de $f_S(s)$ e $F_R(r)$ – Viga V2 com 30% de dano.....</i>	<i>192</i>
<i>Figura 7.24 – Convergência estatística da carga de ruptura: viga V2 recuperada do dano de 20%.....</i>	<i>193</i>
<i>Figura 7.25 – Convergência do coeficiente de variação da carga de ruptura: viga V2 recuperada do dano de 20%.....</i>	<i>194</i>
<i>Figura 7.26 – Margem de segurança: Viga V2 recuperada do dano de 20%.....</i>	<i>194</i>
<i>Figura 7.27 – Gráfico de probabilidade normal: Viga V2 recuperada do dano de 20%.....</i>	<i>195</i>
<i>Figura 7.28 – Variação da carga média de ruptura com o dano: Viga V2.....</i>	<i>196</i>
<i>Figura 7.29 – Coeficiente de variação da carga de ruptura com o dano: Viga V2.....</i>	<i>196</i>
<i>Figura 7.30 – Variação do índice de confiabilidade com o dano: Viga V2.....</i>	<i>197</i>
<i>Figura 7.31 – Variação da probabilidade de falha com o dano: Viga V2.....</i>	<i>197</i>
<i>Figura 7.32 – Análise determinística da viga V3: Carga x deslocamento</i>	<i>198</i>
<i>Figura 7.33 – Margem de segurança: Viga V3 original.....</i>	<i>199</i>
<i>Figura 7.34 – Gráfico de probabilidade normal: Viga V3 original</i>	<i>199</i>
<i>Figura 7.35 – Convergência estatística da carga de ruptura: viga V3 recuperada do dano de 30%.....</i>	<i>200</i>
<i>Figura 7.36 – Convergência do coeficiente de variação da carga de ruptura: viga V3 recuperada do dano de 30%.....</i>	<i>201</i>
<i>Figura 7.37 – Representação do problema R-S em termos de $f_S(s)$ e $F_R(r)$ – Viga V3 com 10% de dano.....</i>	<i>202</i>
<i>Figura 7.38 – Representação do problema R-S em termos de $f_S(s)$ e $F_R(r)$ – Viga V3 com 20% de dano.....</i>	<i>202</i>
<i>Figura 7.39 – Representação do problema R-S em termos de $f_S(s)$ e $F_R(r)$ – Viga V3 com 30% de dano.....</i>	<i>203</i>
<i>Figura 7.40 – Variação da carga média de ruptura com o dano: Viga V3.....</i>	<i>204</i>
<i>Figura 7.41 – Coeficiente de variação da carga de ruptura com o dano: Viga V3.....</i>	<i>204</i>

<i>Figura 7.42 – Variação do índice de confiabilidade com o dano: Viga V3.....</i>	<i>205</i>
<i>Figura 7.43 – Variação da probabilidade de falha com o dano: Viga V3.....</i>	<i>205</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

I - LETRAS ROMANAS MAIÚSCULAS

- A_c - área da seção transversal de concreto
- \mathbf{A}_{NL}^e - vetor de ações nodais não-lineares do elemento de concreto
- \mathbf{A}_{NL} - vetor de ações nodais não-lineares da estrutura
- $(\mathbf{A}_{NL})_S^e$ - vetor de ações nodais não-lineares do elemento de armadura
- $(\mathbf{A}_L)_S^e$ - vetor de ações nodais lineares do elemento de armadura
- $(\mathbf{A}_{NL})_R^e$ - vetor de ações nodais não-lineares do elemento de reforço
- $(\mathbf{A}_L)_R^e$ - vetor de ações nodais lineares do elemento de reforço
- $(\mathbf{A}_{NL})_I^e$ - vetor de ações nodais não-lineares do elemento de interface
- $(\mathbf{A}_L)_I^e$ - vetor de ações nodais lineares do elemento de interface
- A_s - área da seção transversal da armadura tracionada pela ação exclusiva do momento fletor
- A_s' - área da seção transversal da armadura comprimida pela ação exclusiva do momento fletor
- A_R - área da seção transversal do reforço
- \mathbf{B} - matriz que contém as relações deformação-deslocamento para o concreto
- \mathbf{B}_S - matriz que contém as relações deformação-deslocamento para a armadura
- \mathbf{B}_R - matriz que contém as relações deformação-deslocamento para o reforço
- \mathbf{B}_I - matriz que relaciona deslizamento-deslocamento dos pontos nodais da interface
- \mathbf{C}_{cte} - matriz de covariância entre a resistência à compressão, a resistência à tração e o módulo de deformação longitudinal do concreto
- \mathbf{D} - matriz constitutiva (matriz de constantes elásticas)
- E_1, E_2 - módulos de deformação longitudinal secantes do concreto segundo os eixos de ortotropia 1 e 2
- E_{cm} - módulo de deformação longitudinal médio do concreto
- E_{cs} - módulo de deformação longitudinal secante do concreto
- E_{co} - módulo de deformação longitudinal na origem do concreto

E_s	- módulo de deformação longitudinal da armadura
E_R	- módulo de deformação longitudinal do material de reforço
E_f	- módulo de deformação longitudinal do material de reforço
E_{s1}	- módulo de deformação longitudinal da armadura antes do escoamento
E_{s2}	- módulo de deformação longitudinal da armadura após o escoamento
$F_X(x)$	- função de probabilidade acumulada da variável aleatória X
G_{12c}	- módulo de deformação por corte reduzido depois do esmagamento
G_{12r}	- módulo de deformação por corte reduzido, no plano da fissura
G_{co}	- módulo de deformação por corte na origem
$H_j(\chi)$	- função de interpolação unidimensional para armadura
I	- matriz identidade
I	- momento de inércia da seção de concreto
J	- matriz jacobiana
$ \mathbf{J} $	- determinante da matriz jacobiana
J_R	- jacobiano do elemento de reforço
$ \mathbf{J}_I $	- determinante do jacobiano do elemento de interface
\mathbf{K}_L^e	- matriz de rigidez linear do elemento de concreto
\mathbf{K}_{SL}^e	- matriz de rigidez linear do elemento de armadura
\mathbf{K}_{RL}^e	- matriz de rigidez linear do elemento de reforço
\mathbf{K}_{IL}^e	- matriz de rigidez linear do elemento de interface
\mathbf{K}_L	- matriz de rigidez linear da estrutura
\mathbf{K}_C	- contribuição do concreto para a matriz de rigidez do elemento
\mathbf{K}_S	- contribuição do aço para a matriz de rigidez do elemento
\mathbf{K}_r	- matriz de rigidez da estrutura a cada nova iteração no método BFGS
\mathbf{K}_0	- matriz de rigidez tangente na origem da estrutura
\mathbf{K}_T	- matriz de rigidez tangente
L	- distância da extremidade do reforço ao apoio
L	- matriz triangular inferior
M	- momento fletor, variável aleatória margem de segurança
M_n, M_u	- momento resistente nominal da seção reforçada, momento solicitante último

M_o, M_{cr}	- momento de serviço, momento de fissuração
\mathbf{N}	- matriz de interpolação do elemento
$N(\xi, \eta)$	- função de interpolação do elemento de concreto
$N_i'(\varphi)$	- função de interpolação do elemento de interface
N_{fa}	- força de tração no PRF
P	- carga concentrada
P_f	- probabilidade de falha
P_{rup}	- carga concentrada de ruptura
\mathbf{P}	- vetor de ações nodais da estrutura
\mathbf{P}^e	- vetor de ações nodais do elemento
R	- resistência
S	- ação ou solicitação atuante
S_o	- superfície do corpo na configuração indeformada
S_e	- é a área do elemento de concreto contida no plano xoy
$\mathbf{T}_\mathbf{e}$	- matriz de rotação do vetor de deformações do sistema xoy para o sistema $1o2$
\mathbf{U}	- vetor de deslocamentos nodais
\mathbf{U}^e	- vetor de deslocamentos nodais do elemento de concreto
\mathbf{U}_R^e	- vetor de deslocamentos nodais do elemento de reforço
\mathbf{U}_I^e	- vetor de deslocamentos nodais do elemento de interface
\mathbf{U}_R	- vetor de deslocamentos da estrutura a cada nova iteração no método BFGS
V_X	- coeficiente de variação da variável aleatória X
V_d	- força cortante de cálculo
V_o	- volume na configuração indeformada
V_S	- volume da barra de aço
V_R	- volume do elemento de reforço
X	- variável aleatória genérica

II - LETRAS ROMANAS MINÚSCULAS

a	- comprimento do vão de cisalhamento
a_c, a_t, a_e	- componente aleatória da resistência à compressão do concreto, componente aleatória da resistência à tração do concreto, componente aleatória do módulo de deformação longitudinal do concreto

b	- largura da seção transversal retangular
b_n	- valor nominal da largura da seção transversal retangular
b_f	- largura do sistema de reforço
$b_x b_y$	- componentes das forças de volume
\mathbf{b}	- vetor de forças de volume
c	- posição da linha neutra
c_1, c_2	- fator de cálculo da força no PRF, fator de cálculo do comprimento de ancoragem do PRF
d	- altura útil da seção transversal, distância da armadura tracionada pela ação exclusiva do momento fletor ao bordo comprimido da seção transversal; medida de confiabilidade
d'	- distância da armadura comprimida pela ação exclusiva do momento fletor ao bordo comprimido da seção transversal
f_c	- resistência à compressão do concreto
f_{ck}	- resistência característica à compressão do concreto
f_{cm}	- resistência média à compressão do concreto;
f_{cd}	- resistência de cálculo à compressão do concreto
f_{ct}	- resistência à tração do concreto
f_{ctm}	- resistência média à tração do concreto
$f_X(x)$	- função de densidade de probabilidade da variável aleatória X
f_y	- tensão de escoamento do aço
f_{yd}	- tensão de cálculo de escoamento do aço
f_{yk}	- tensão característica de escoamento do aço
f_{ym}	- tensão média de escoamento do aço
f_{fe}	- tensão no reforço no estado limite último para efeitos de dimensionamento
$f_{f,s}$	- tensão no reforço no estado limite de serviço para efeitos de dimensionamento
f_{fu}	- resistência à tração do PRF
f_s	- tensão na armadura no estado limite último para efeitos de dimensionamento
$f_{s,s}$	- tensão na armadura no estado limite de serviço para efeitos de dimensionamento
f_{cbd}	- resistência ao cisalhamento do concreto na ligação PRF/concreto
$f(\chi)$	- função de posição ao longo da armadura
$g(u)$	- função de estado limite no espaço padronizado transformado no método FORM
h	- altura da seção transversal retangular, espessura do elemento finito
k_m	- coeficiente de redução da deformação de ruptura do PRF

k_s	- rigidez ao cisalhamento da interface concreto/reforço
k_c, k_b	- fatores de cálculo da força no PRF para efeitos de ancoragem do reforço
kd	- posição da linha neutra para cargas de serviço
l, l_b	- comprimento do vão, comprimento de ancoragem do reforço
m	- variável normal reduzida margem de segurança
n	- relação entre a deformação última do concreto e a deformação que corresponde à tensão máxima, número de simulações de Monte Carlo, número de camadas de PRF
nb	- número de segmentos de barra de aço contidos no elemento de concreto
np	- número pontos de definição da barra de aço
s	- coordenada ao longo do eixo da armadura, deslizamento entre o concreto e o reforço
s_1, s_2, s_3	- parâmetros da relação tensão de aderência-deslizamento
\mathbf{t}	- vetor de forças por unidade de superfície
t_x, t_y	- forças de superfície atuando nas direções x e y , respectivamente
t_f	- espessura do reforço
u	- deslocamento na direção x , valor assumido por uma variável aleatória
u_1, u_2	- números randômicos de distribuição uniforme
u_i, v_i	- componentes do vetor de deslocamento
\mathbf{u}	- vetor de deslocamentos
v	- deslocamento na direção y
\mathbf{v}	- vetor de atualização do método BFGS
\mathbf{w}	- vetor de atualização do método BFGS
x	- coordenada cartesiana, posição da linha neutra, valor assumido por uma variável aleatória X
x_p, y_p	- coordenadas cartesianas de um ponto de armadura
y	- coordenada cartesiana, valor assumido por uma variável aleatória Y
z_1, z_2, z_3, z_4	- variável aleatória gaussiana, de média zero e variância unitária

III - LETRAS GREGAS MAIÚSCULAS

Δ	- incremento
Δb	- variação da largura da seção transversal em relação ao seu valor nominal
$\overline{\Delta b}$	- variação média da largura da seção transversal em relação ao seu valor nominal

- Φ - função de probabilidade acumulada normal padronizada
 Σ - somatório

IV - LETRAS GREGAS MINÚSCULAS

- α - relação entre as tensões principais σ_1 e σ_2 , parâmetro da relação tensão de aderência-deslizamento, fator de redução da força no PRF para efeitos de ancoragem do reforço
- β - índice de confiabilidade, ângulo entre o eixo da armadura e o eixo x
- β_1 - fator de transformação do diagrama de tensões no concreto
- δ_G - fator de profundidade da linha neutra
- δ - vetor incremento de deslocamentos
- ε - deformação específica axial
- $\varepsilon_{bi}, \varepsilon_o$ - deformação no substrato de concreto na ocasião da aplicação do reforço
- $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ - deformações principais
- $\varepsilon_{1u}, \varepsilon_{2u}$ - deformações uniaxiais equivalentes segundo as direções de ortotropia
- $\varepsilon_{c1f}, \varepsilon_{c2f}$ - deformações correspondentes às tensões máximas, segundo as direções de ortotropia
- ε_{ctu} - deformação última para o concreto tracionado (tension-stiffening)
- ε_{cu} - deformação última para o concreto comprimido
- ε_{fu} - deformação de ruptura do PRF
- ε_{fud} - deformação de ruptura de cálculo do PRF
- $\boldsymbol{\varepsilon}$ - vetor de componentes de deformação
- $\varepsilon_s, \varepsilon_{su}$ - deformação axial ao longo do eixo da armadura, deformação de ruptura do aço
- $\varepsilon_R, \varepsilon_{fe}$ - deformação axial ao longo do eixo do reforço
- ε_c - deformação de compressão no concreto
- ε_y - deformação de escoamento da armadura
- ϕ - fator de minoração da resistência relacionado com a ductilidade da seção
- γ - deformação por corte, fator de redução da resistência à compressão do concreto
- $\gamma_c, \gamma_s, \gamma_f$ - coeficiente parcial de segurança para concreto, aço e PRF, respectivamente
- $\boldsymbol{\gamma}$ - vetor incremento de desequilíbrio
- η - coordenada curvilínea, coeficiente de limitação da tensão no PRF

φ	- coordenada natural do elemento de interface
κ	- coordenada natural do elemento de interface
θ	- ângulo entre a direção 1 dos eixos de ortotropia e o eixo dos x
ν	- coeficiente de Poisson
μ_X	- média (valor esperado) da variável aleatória X
ξ	- coordenada curvilínea para o elemento de concreto, profundidade da zona de compressão no concreto
ρ	- taxa geométrica de armadura longitudinal de vigas
σ_X	- desvio padrão da variável aleatória X
σ	- tensão normal
σ_1, σ_2	- tensões principais
σ_{1f}, σ_{2f}	- tensões máximas segundo as direções de ortotropia
σ_s, σ_R	- tensão normal na armadura, tensão normal no reforço
σ	- tensor de tensões
τ	- tensão de cisalhamento, tensão de aderência
ϕ	- diâmetro das barras da armadura
χ	- coordenada normalizada do eixo da armadura, curvatura
ψ	- vetor de forças desequilibradas, vetor de desequilíbrio
ψ_f	- coeficiente de minoração da resistência do PRF
ζ	- coordenada natural do elemento de reforço

RESUMO

PALIGA, C. M.; CAMPOS FILHO, A.; REAL, M. V. **Análise probabilística de vigas de concreto armado recuperadas à flexão, através do método de Monte Carlo utilizando um modelo de Elementos Finitos.** 2008. Tese de doutorado em engenharia civil. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil – PPGEC, Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS. Porto Alegre, RS, Brasil.

O objetivo deste trabalho é apresentar um modelo para análise probabilística de vigas de concreto armado recuperadas à flexão, através da utilização conjunta do método de simulação de Monte Carlo e do método dos Elementos Finitos. Para uma análise da confiabilidade, foram projetadas vigas de concreto armado seguindo as recomendações da NRR 6118:2003. Após, foi considerado que as armaduras tracionadas de flexão sofreram reduções de 10%, 20% e 30% na sua área da seção transversal, sendo, então, feita uma análise da segurança estrutural remanescente. Para o projeto de recuperação das vigas danificadas, estão apresentados os procedimentos do *Bulletin 14* da *fédération internationale du béton (fib)* para o dimensionamento de sistemas de reforço com material compósito colado externamente às estruturas. Assim, a confiabilidade destas vigas recuperadas pôde ser estimada e comparada à confiabilidade das vigas originais. Dentro do processo de simulação, a resposta em termos da carga de ruptura das vigas de concreto armado recuperadas foi obtida através de uma análise numérica não-linear utilizando um modelo de elementos finitos. Devido à importância do deslizamento entre o substrato de concreto e o sistema de reforço estrutural, foram implementados dentro do modelo de elementos finitos, elementos unidimensionais de interface, quadráticos com seis pontos nodais para a captura deste comportamento. As análises probabilísticas através do método de simulação de Monte Carlo usando um modelo de elementos finitos mostraram que se atinge bom nível de segurança no projeto de vigas de concreto armado seguindo as recomendações da NBR 6118:2003. Entretanto, danos nas armaduras tracionadas de flexão podem fazer com que a confiabilidade caía para níveis inaceitáveis. Como solução, o projeto de recuperação estrutural de acordo com o *Bulletin 14* da *fib* fez com que a confiabilidade das vigas recuperadas fosse no mínimo igual à confiabilidade das vigas originais. Assim, a probabilidade de falha das vigas recuperadas foi menor quando comparado à probabilidade de falha das vigas originais.

Palavras-Chave: reforço estrutural, vigas de concreto armado, método dos elementos finitos, confiabilidade estrutural, compósitos de PRFC.

ABSTRACT

PALIGA, C. M.; CAMPOS FILHO, A.; REAL, M. V. **Probabilistic analysis of reinforced concrete beams rehabilitated for flexure, through the Monte Carlo method using a Finite Element model.** 2008. PhD dissertation in civil engineering. Graduate Program in Civil Engineering – PPGEC, Federal University of Rio Grande do Sul – UFRGS. Porto Alegre, RS, Brazil.

The objective of this work is to present a model for probabilistic analysis of RC beams rehabilitated for flexure, through the simultaneous utilization of the Monte Carlo method and the finite element method. Initially, three RC beams were designed following the NBR 6118:2003 recommendations. In the next step, it was considered that a reduction of the steel reinforcement area of 10%, 20% and 30% had occurred. Then the procedures for strengthening systems design with externally bonded carbon fiber reinforced polymers (*fib*, *Bulletin 14*) were employed for the rehabilitation of the damaged RC beams. Finally, the reliability of the RC beams rehabilitated for flexure could be evaluated and compared to that of the damaged and undamaged RC beams. In the Monte Carlo method, the RC beams failure load was obtained numerically through a nonlinear finite element model. Due to the importance of the slip between the concrete substrate and the external reinforcement, it was introduced in the finite element model a special one-dimensional interface element, with six nodal points and quadratic shape functions. The probabilistic analysis through the Monte Carlo method using a finite element model showed the high reliability attained in the RC beams design following the NBR 6118:2003 recommendations. However, the damage in the internal steel reinforcement can lead to an unacceptable reliability level. As a solution, the design of structural recovery according to the *Bulletin 14* produced a reliability level for the RC beams rehabilitated for flexure at least equal to the reliability level of the undamaged RC beams. Consequently, the failure probability of the RC beams rehabilitated for flexure was lower than the failure probability of the undamaged RC beams.

Keywords: structural strengthening, RC beams, finite element method, structural reliability, CFRP composites.

1 INTRODUÇÃO

O concreto armado é uma combinação de dois materiais bem conhecidos pela humanidade, o concreto e o aço, sendo este normalmente utilizado para suprir a deficiência do concreto em regiões tracionadas.

As origens do concreto, em sua forma mais primitiva, remontam ao império egípcio e romano. Sua história confunde-se com a do cimento, que, adicionado de água, atua como aglomerante necessário para a união dos materiais constituintes do concreto, costumeiramente pedra e areia, denominados agregados. O cimento, em sua forma moderna, foi patenteado em 1824, por James Parker e Joseph Aspdin, com a denominação de Cimento Portland.

A história do aço, por sua vez, está associada à do ferro, que, conforme registros, já era tecnicamente utilizado na China no século VI a.C., porém é no século XVIII que a sua utilização ganhou escala e métodos industriais de fabricação.

O concreto armado é atribuído a Lambot - francês que construiu, em meados do século XIX, um pequeno barco em concreto armado, exibido em uma feira de exposição em Paris, no ano de 1850 -, sendo patenteado em 1855. No entanto, foi Joseph Monier que, em 1867, fez o primeiro uso prático do concreto armado.

Desde então, o concreto armado vem tendo crescente utilização na construção de grande parte da infra-estrutura que permite o funcionamento da economia de um país, sendo hoje o segundo material mais consumido pelo homem, superado apenas pela água.

A discussão a respeito da manutenção e durabilidade de estruturas de concreto é um assunto de vital importância nos dias atuais. Apesar do seu desempenho e larga utilização, a durabilidade das estruturas de concreto está aquém do desejável. Assim sendo, o desenvolvimento coloca, à frente da indústria da construção civil, o desafio de manter a infra-estrutura do país (estradas, pontes, portos, aeroportos, túneis, barragens, prédios públicos, etc.) respeitando as enormes restrições econômicas dos dias atuais, buscando-se fazer mais com menos.

Durante muitos anos, os engenheiros de estruturas aceitavam e projetavam de acordo com um pequeno número de propriedades conhecidas, enquanto a indústria de materiais e

componentes estava mais preocupada em equilibrar confiabilidade e custo, ao invés de buscar novas propriedades (EMMONS et al., 1998). Este panorama modificou-se nos últimos anos. Uma grande variedade de novos materiais (metais refratários, ligas, polímeros e fibras sintéticas) vêm sendo utilizados na indústria da construção civil em geral, e particularmente, na área de reforço e recuperação das construções. As características agregadas por estes materiais abrem novas oportunidades, porém demandam que se entenda bem o seu comportamento.

As estruturas de concreto armado, como de resto qualquer outro material de construção, têm quando de sua concepção uma vida útil média estimada em função de sua finalidade e da sua utilização em serviço.

Devido a problemas de deterioração e degradação química, corrosão das armaduras, sobrecarga, deformações excessivas, segregação dos materiais componentes do concreto e mudança de uso, as estruturas de concreto têm apresentado a necessidade de serem recuperadas ou reforçadas. Existem hoje diferentes técnicas e materiais para o desenvolvimento de um projeto de reforço. Dentre as principais metodologias de reforço ou reabilitação de uma estrutura através da aplicação de reforços externos podem ser citadas a colagem de chapas de aço com resina epóxi, e a aplicação de materiais compósitos à base de fibras. A primeira pode ser considerada como uma das melhores técnicas de reparo e reforço de elementos de concreto deteriorados, e a segunda, uma das mais notáveis técnicas apresentadas nos últimos anos (BEBER, 2003). Fechando este grupo, o aumento da seção transversal com a colocação de uma camada adicional de concreto armado em um elemento existente, e a protensão externa, também podem ser citados como metodologias de reforço ou recuperação.

Dentre todos os tipos de compósitos, aqueles construídos com fibras têm atraído a atenção de muitos pesquisadores envolvidos em aplicações estruturais. Como a forma fibrosa da maioria dos materiais é inerentemente mais resistente do que o mesmo material em sua forma a granel, a utilização de fibras torna-se muito interessante sob o ponto de vista estrutural. O método mais eficiente encontrado consiste em combinar um material fibroso de alta resistência à tração e alto módulo de elasticidade com um material de baixo módulo e baixa resistência.

Os polímeros reforçados com fibras (PRF), ou do inglês *fiber reinforced polymers* (FRP), têm sido utilizados nas indústrias aeroespacial, automotiva e naval nos últimos quarenta anos, por causa da sua alta resistência, baixo peso próprio, grande durabilidade e a

facilidade de assumir formas complexas. São geralmente construídos a partir de fibras de alta resistência em uma matriz polimérica de resina. As fibras utilizadas podem ser de vidro, Kevlar[®], carbono, aramida, etc.

Polímeros reforçados com fibras oferecem vantagens únicas em muitas aplicações, onde materiais convencionais não conseguem fornecer uma vida útil satisfatória. A alta relação resistência/peso próprio e excelente resistência à corrosão eletroquímica tornam os materiais compósitos muito atraentes para aplicações estruturais. Para fins de reforço em peças de concreto armado, os polímeros reforçados com fibras de carbono (PRFC) são os mais apropriados por causa do alto desempenho mecânico das fibras de carbono, permitindo uma significativa redução em suas dimensões.

As vantagens da utilização dos compósitos de fibra de carbono sobre chapas de aço são muito claras. Entretanto, seu alto custo pode chegar de 4 a 20 vezes mais que o aço por unidade de volume. Contudo, em projetos de reabilitação, onde os custos de material raramente excedem 20% do custo total, a economia com a instalação pode justificar o maior custo com o material (MEIER, 1992).

O desenvolvimento da tecnologia do concreto e suas respectivas técnicas construtivas, novos materiais, e técnicas de recuperação e reforço cada vez mais avançadas, exigem métodos de análise e projeto de estruturas cada vez mais sofisticados.

Nos últimos anos houve uma grande evolução nos métodos de análise e projeto de estruturas de concreto armado. Passou-se da tradicional análise elástica linear para modelos complexos de análise não-linear de estruturas, através do método dos elementos finitos (REAL, 2000).

Estes novos modelos permitem a inclusão de fenômenos como o da não-linearidade da relação tensão-deformação dos materiais, a fissuração e a retração do concreto, o comportamento elasto-plástico da armadura, não-linearidades de origem geométrica, etc. Tal nível de sofisticação possibilita que se acompanhe a resposta de uma estrutura de concreto, desde os estágios iniciais de carga até as imediações da ruptura, com muito boa precisão (DARWIN, 1991).

Esta evolução nos processos de análise foi impulsionada em grande parte pelo enorme progresso atingido na fabricação de computadores digitais, notadamente o desenvolvimento de microcomputadores de uso pessoal (PC), com grande capacidade de processamento numérico. Este fato permitiu a utilização em larga escala de métodos numéricos na solução de

problemas de engenharia, principalmente na área de estruturas, além de incentivar o desenvolvimento de novas ferramentas de análise.

Uma simulação computacional de estruturas de concreto, linear ou não-linear, normalmente ainda é feita com base em valores determinísticos adotados para as propriedades dos materiais e para as dimensões da estrutura. Usualmente são empregados os valores médios, entre os diversos dados obtidos experimentalmente, para as propriedades mecânicas dos materiais. Para as dimensões da estrutura costumam ser utilizados os valores nominais, especificados em projeto.

Porém, sempre existe alguma incerteza sobre que valor as propriedades mecânicas dos materiais irão assumir na estrutura, e sobre quais serão as suas características geométricas finais, após a construção. Portanto, as resistências dos materiais e as dimensões das estruturas são, na realidade, variáveis aleatórias que possuem um determinado valor médio, uma certa medida de dispersão, e uma distribuição de probabilidade.

Assim sendo, a resposta da estrutura a um determinado carregamento é, na verdade, uma função de diversas variáveis aleatórias, que afetam o seu desempenho. Desta forma, a própria resposta da estrutura será também uma variável aleatória. Deslocamentos, deformações, tensões e esforços solicitantes são, portanto, variáveis aleatórias.

Portanto, embora uma análise feita com base nas propriedades médias dos materiais e nas dimensões nominais da construção produza uma boa estimativa do seu comportamento, é importante determinar-se o quanto a variabilidade destas propriedades e dimensões pode afetar a resposta da estrutura.

Uma maneira de se determinar o efeito da variabilidade da geometria e das propriedades dos materiais no comportamento da estrutura é a utilização do método de simulação de Monte Carlo. Em primeiro lugar, as variabilidades dos principais parâmetros que influenciam no comportamento da estrutura devem ser representadas através de distribuições de probabilidade matematicamente definidas. Em segundo lugar, deve-se dispor de um modelo matemático que relacione os principais parâmetros do comportamento da estrutura com o seu desempenho sob determinado carregamento.

Embora diversos estudos têm sido realizados para se conhecer o real comportamento das estruturas reforçadas, em nível nacional ainda não foi estabelecida uma norma técnica para o projeto de reforço ou recuperação de elementos estruturais de concreto armado. Para que esta norma possa ser elaborada, dentro de critérios de confiabilidade, é necessário

conhecer a variabilidade dos parâmetros de projeto e fixar coeficientes de segurança adequados.

No Brasil, as diretrizes para o dimensionamento, controle de qualidade e execução apresentam-se, quase na sua totalidade, baseados em fichas técnicas dos produtos, ou ainda, sob a tutela de profissionais associados às empresas que comercializam o sistema de reforço. Internacionalmente, o conhecimento adquirido a partir do desenvolvimento de inúmeros programas experimentais encontra-se em estágio avançado. Isto pode ser evidenciado a partir da organização sistemática de um conjunto de informações sobre a aplicação dos materiais compósitos no reforço de estruturas de concreto. Dentre as várias publicações, destacam-se aquelas que se constituem como documentos normativos:

- ACI 440.2R - *Guide for the design and construction of externally bonded FRP systems for strengthening concrete structures* - American Concrete Institute;
- Bulletin 14 - *Externally bonded FRP reinforcement for RC structures* - Fédération Internationale du Béton (CEB-FIP);
- JSCE 23 - *Recommendation for design and construction of concrete structures using continuous fiber reinforcing material* - Japan Society of Civil Engineers.

Qualquer sistemática de projeto de reforço de estruturas de concreto deve garantir o seu desempenho tanto em relação aos Estados Limites de Serviço (flecha e fissuração), como em relação aos Estados Limites Últimos (ruptura). Este desempenho somente pode ser rigorosamente avaliado através de uma análise probabilística em que as variabilidades da geometria da estrutura, das propriedades mecânicas dos materiais, do carregamento e o erro do modelo adotado sejam levadas em consideração.

Devido a tudo que foi exposto, as pesquisas sobre modelos numéricos para análise, projeto e verificação de estruturas de concreto reforçadas, se justificam, pois antes de ser aplicado o reforço é necessário prever como será o seu comportamento sob cargas de serviço, bem como determinar qual será o aumento de capacidade de carga atingido pela estrutura.

O objetivo deste trabalho é desenvolver um modelo computacional, baseado no método dos elementos finitos, para a análise de estruturas de concreto armado reforçadas, buscando ampliar o conhecimento nesta área, tanto no aspecto da pesquisa, como no que se refere às técnicas de projeto de reforço em estruturas, em uma época em que o país necessita, mais do que nunca, recuperar e conservar suas grandes obras de infra-estrutura.

Uma vez implementado este modelo computacional, será efetivada a análise probabilística com o intuito de avaliar a segurança de vigas de concreto armado reforçadas, com relação ao estado limite último de flexão, projetadas conforme as recomendações dos principais documentos normativos existentes no mundo.

Com relação a organização deste trabalho, no Capítulo 2 são apresentadas as principais técnicas de reforço e recuperação de estruturas de concreto armado, materiais existentes para o desenvolvimento deste tipo de projeto, bem como são detalhados os procedimentos para o dimensionamento de sistemas de reforço colados externamente às estruturas.

A análise não-linear de estruturas de concreto armado é facilitada pela utilização de métodos numéricos. Portanto, no Capítulo 3, é apresentado um modelo para a análise não-linear física de estruturas de concreto armado reforçadas, através do método dos elementos finitos. O concreto é modelado por meio de elementos isoparamétricos bidimensionais, quadráticos, de oito nós, com dois graus de liberdade por nó (OWEN e HINTON, 1980). A armadura é representada através do modelo incorporado, proposto por Elwi e Hruday (1989). Cada barra de armadura é considerada como uma linha mais rígida dentro do elemento de concreto, que resiste apenas a esforços axiais. Causados por deformações devido aos esforços de cisalhamento na interface, os deslocamentos relativos entre o substrato de concreto e o reforço devem ser considerados para uma análise mais realista das estruturas de concreto reforçadas. Assim, para o cálculo deste deslizamento é usado um elemento de interface unidimensional de seis nós, com funções quadráticas de interpolação conforme o trabalho de Adhikary e Mutsuyoshi (2002). Para ser inserido no contexto da formulação na análise não-linear de vigas de concreto armado, o reforço é modelado através de elementos discretos de barra de treliça plana, quadráticos, com três pontos nodais. O elemento é fixado ao restante da malha de elementos finitos, através de um elemento de interface.

No Capítulo 4, são descritos os modelos constitutivos adotados para os materiais concreto, aço, reforço em chapa de aço ou material compósito, e interface. O modelo constitutivo bidimensional para o concreto é baseado no modelo proposto por Darwin e Pecknold (1977b), empregando-se o conceito de deformação uniaxial equivalente e o critério de ruptura bidimensional de Kupfer e Gerstle (1973). Para o concreto tracionado, após a fissuração, adota-se uma curva de *tension-stiffening*, para levar em conta a colaboração do concreto entre fissuras na resistência à tração. A rigidez ao corte no plano da fissura também é considerada. O aço é modelado como um material elasto-plástico perfeito ou com um endurecimento linear, após o escoamento. Para o material compósito, um comportamento

elástico linear até ser atingida a tensão de ruptura, é adotado. Quando chapas de aço são usadas como elementos resistentes nos sistemas de reforço, um comportamento elástico perfeitamente plástico é usado. Para a interface, o modelo usado é baseado nas recomendações do Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993).

No Capítulo 5, é feita a validação do modelo de elementos finitos comparando-se análises numéricas com os resultados experimentais, ou numéricos, obtidos para vigas de concreto armado reforçadas.

Para que se faça a análise da confiabilidade estrutural, são apresentados no Capítulo 6 os principais métodos para a avaliação desta confiabilidade. A formulação que será utilizada na determinação do grau de segurança obtido no projeto de recuperação de vigas de concreto armado danificadas também é mostrada neste capítulo.

No Capítulo 7 são apresentados os resultados obtidos do estudo sobre a confiabilidade de vigas de concreto armado que sofreram dano nas suas armaduras tracionadas de flexão, e que foram recuperadas através da colagem de material compósito à base de fibras de carbono e resinas poliméricas em suas faces tracionadas.

E finalmente, as conclusões formuladas durante o período de elaboração deste trabalho são mostradas no Capítulo 8.

2 TÉCNICAS DE REFORÇO E RECUPERAÇÃO DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO E RECOMENDAÇÕES PARA O PROJETO DE REFORÇO À FLEXÃO

2.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

É comum que, com o passar dos anos, as edificações sofram mudanças em seu regime de utilização, seja através de um aumento do nível de carregamento ou resultante de alterações em sua geometria. Além de modificações, o envelhecimento natural e/ou a deterioração resultante de um ataque químico ou físico, alteram as condições iniciais consideradas na época do projeto. Não é raro, ainda, que as estruturas quando construídas apresentem diferenças em relação ao projeto original. Ademais, pode haver falhas intrínsecas que foram geradas pela adoção de hipóteses inadequadas nas fases de planejamento e projeto. Finalmente, materiais e componentes industrializados de baixa qualidade podem ser incorporados durante a sua execução (CAMPAGNOLO et al., 1999).

O concreto armado, por ser um dos materiais mais importantes da engenharia estrutural, tem merecido atenção especial por parte dos pesquisadores da área em anos recentes. O desenvolvimento da tecnologia do concreto e o avanço das respectivas técnicas de cálculo e de construção, em conjunto com a implementação de ferramentas computacionais sofisticadas capazes de estimar de forma complexa o comportamento do concreto e do aço, vêm permitindo a utilização de elementos progressivamente mais esbeltos. Embora otimizadas sob o ponto de vista estrutural e econômico, estas estruturas são mais sensíveis a eventuais defeitos nos materiais, na execução ou no cálculo, podendo gerar situações de risco. As estruturas de concreto armado de hoje, são, portanto, mais susceptíveis a apresentar um quadro patológico do que as mais antigas, as quais eram dimensionadas com uma margem de segurança superior e dispunham de uma certa reserva de capacidade resistente para suportar a ação de agentes agressivos, mecânicos e/ou químicos (BEBER, 2003).

As manifestações patológicas, de modo geral, apresentam-se de maneira bastante característica e segundo uma incidência bem estabelecida estatisticamente. Dessas

manifestações é possível o estabelecimento da natureza e das origens dos problemas, e as suas futuras conseqüências. As principais manifestações patológicas, em ordem crescente de ocorrência estatística, segundo Machado (2002), são:

➤ Deterioração e degradação química da construção	7%
➤ Deformações (flechas e rotações) excessivas	10%
➤ Segregação dos materiais componentes do concreto	20%
➤ Corrosão das armaduras do concreto armado	20%
➤ Fissuras e trincas ativas ou passivas nas peças de concreto armado	21%
➤ Manchas na superfície do concreto armado	22%

De modo geral, todos os problemas patológicos são originalmente decorrentes do que se denomina de vício construtivo. O problema começa a ocorrer a partir da instalação e da permanência desse mecanismo de deficiência (ou vício). O correto conhecimento do processo é fundamental para que seja estabelecida uma terapia adequada e eficiente (MACHADO, 2002). Ou seja, não basta apenas a detecção do fenômeno, é imprescindível o conhecimento do mecanismo de sua criação para que novas manifestações não ocorram após a reabilitação proposta. Como exemplo, uma fissura decorrente de flexão não pode ser simplesmente obturada sem que se conheça o agente que a produziu, sob o risco de que ela volte a se manifestar, possivelmente em outra localização, quando a peça for novamente submetida ao esforço que a originou.

Assim, a partir do instante em que a estrutura apresente alguma anomalia, e surjam dúvidas quanto à sua capacidade e quanto ao risco inerente à utilização, a mesma deve ser imediatamente analisada sob critérios que permitam estabelecer de forma adequada o grau de segurança e a sobrevida remanescente, e em que condição deverá ou poderá ser utilizada.

Quando o desempenho da estrutura se mostrar insuficiente, mesmo sob cargas de serviço na forma de deslocamentos ou fissuração excessivos, ou apresentar uma resistência última inadequada, nestas circunstâncias, existem duas soluções possíveis (JONES et al., 1988) – demolição e reconstrução, ou efetuar um programa de recuperação ou reparo da estrutura. A escolha entre estas alternativas depende de vários fatores importantes, dentre os quais podemos citar os custos dos materiais e mão-de-obra, e o tempo que a estrutura estará fora de uso.

É evidente que se todas as medidas preventivas e de proteção da construção forem adequadamente consideradas ainda no nível de elaboração do projeto, as eventuais deficiências, ainda passíveis de ocorrência, estarão contidas em uma faixa relativamente estreita de manifestação.

2.2 MÉTODOS CONVENCIONAIS DE REFORÇO ESTRUTURAL

Juntamente com o advento do concreto, a demanda pelo reforço de estruturas surgiu como resposta aos problemas de deterioração, projetos inadequados e problemas de construção, ou ainda, para antecipar-se ao aparecimento de cargas adicionais sobre as estruturas. Inicialmente, em função do pouco conhecimento sobre o comportamento das estruturas, as técnicas de reforço limitavam-se à adição de novos elementos, apoios e no incremento das seções resistentes; métodos que são empregados até hoje. Modernamente, com o surgimento de novas tecnologias, as técnicas de reforço tornaram-se mais sofisticadas (EMMONS et al., 1998).

O desenvolvimento de materiais poliméricos avançados possibilitou a utilização dos mesmos em uma gama de aplicações industriais. Por diversos anos esses materiais têm sido empregados nas indústrias aeroespacial e de defesa, nas construções navais, na indústria automotiva e até mesmo na de equipamentos esportivos.

O alto custo inicial de produção desses materiais, aliada à falta de pesquisas suficientes e informações técnicas adequadas limitaram e inibiram por longo tempo a utilização dos materiais poliméricos avançados na indústria da construção civil.

Contudo, o constante barateamento das matérias-primas e dos custos industriais de manufatura acabou tornando esses materiais cada vez mais competitivos relativamente àqueles tradicionalmente utilizados para a recuperação e o reforço das estruturas de concreto armado e/ou protendido. Essa viabilização econômica, por sua vez, permitiu que fosse realizada uma grande variedade de projetos de pesquisa e de construção dirigida especificamente para o uso dos materiais poliméricos avançados na indústria da construção civil.

Diante da necessidade de uma intervenção para a renovação de uma estrutura, quando se descarta a possibilidade de demolição e reconstrução da mesma, podem ser projetados dois cenários distintos:

- A estrutura será recuperada, isto é, serão recompostas as condições normais de suporte para as quais tinha sido anteriormente desenvolvida;
- A estrutura será reforçada, isto é, terá a sua condição de suporte aumentada em relação àquela para a qual tinha sido anteriormente desenvolvida.

As principais técnicas de reparo e reforço estrutural serão descritas a seguir.

2.2.1 Aumento da seção transversal

Essa metodologia de reforço estrutural é tão antiga quanto à própria indústria da construção (BEBER, 2003). O aumento da seção transversal consiste na colocação de uma camada adicional de concreto armado em um elemento estrutural existente. Pilares, vigas, lajes, tabuleiros de pontes e vigas-parede podem ter suas seções resistentes aumentadas para elevar sua capacidade de carga, rigidez, ductilidade, etc. A nova camada deve ser aplicada à superfície de concreto existente com o objetivo de produzir um elemento monolítico. Argamassas também são empregadas nestas aplicações. Recentemente, este método desenvolveu-se sobremaneira através da utilização de concreto e argamassa projetada.

No entanto, o risco de corrosão das armaduras, a deterioração do concreto do reforço e o aumento da carga permanente sobre a estrutura caracterizaram-se como principais desvantagens deste método (EMMONS et al., 1998; PINTO, 2000; BEBER, 2003).

2.2.2 Protensão externa

Apesar de se constituir em uma técnica construtiva amplamente utilizada desde a década de 50, após permanecer latente por algum tempo, foi redescoberta como uma excelente alternativa no reforço de estruturas de concreto armado. A protensão externa vem desenvolvendo-se rapidamente no reforço de estruturas de concreto, principalmente, nos EUA, Japão e Suíça. A aplicação da protensão externa contribui para a redução das deformações na estrutura existente, bem como para aumentar a capacidade portante destes elementos.

Dentre as principais vantagens deste método de reforço pode-se destacar a relativa simplicidade do método construtivo; a ausência de problemas com o cobrimento dos cabos; a possibilidade de inspeção e eventual reposição dos cabos durante a vida útil.

Por estar localizado no exterior dos elementos estruturais, apresentam-se como desvantagens desta técnica a sua vulnerabilidade à ação do fogo; da corrosão eletroquímica e atos de vandalismo. A proteção de um sistema de protensão contra um ambiente agressivo ou da ação do fogo pode ser alcançada através do encapsulamento dos cabos com concreto convencional ou projetado.

2.2.3 Chapa de aço colada com resina epóxi

O princípio desta técnica é bastante simples. Chapas ou outros elementos de aço são colados na superfície de elementos de concreto através de adesivos epóxi. Este método é utilizado para reparar ou reforçar elementos de concreto com capacidade resistente insuficiente devido a danos estruturais, mudanças de utilização, e muito freqüentemente por corrosão das armaduras.

A grande aceitação desta técnica pode ser atribuída ao desenvolvimento de adesivos com base epóxi de alta qualidade, aliado ao fato de ser uma técnica simples, econômica, eficiente e de aplicação relativamente fácil, permitindo reforçar o elemento sem que haja um aumento significativo em suas dimensões.

Esta técnica é freqüentemente usada para melhorar o desempenho à flexão de estruturas existentes, aumentando a resistência, a rigidez e restringindo a abertura de fissuras no concreto. Tem sido usada para a recuperação de edifícios, reforços em pontes, e amplamente utilizada em países como Bélgica, França, Japão, Polônia, África do Sul, Suíça e Reino Unido (OEHLERS e MORAN, 1990).

O primeiro caso notificado da utilização desta técnica aconteceu em Durban, na África do Sul (década de 60). As vigas de um complexo residencial foram reforçadas com chapas coladas porque a armadura existente, devido a falhas durante a execução, era menor do que a projetada (SAADATMANESH e EHSANI, 1990). Na antiga União Soviética, em 1974, um arco de uma ponte de concreto armado com 60 anos de idade foi reforçado com chapas de aço coladas. Cerca de 25% das armaduras da ponte original estavam corroídas por conta de deficiências no sistema de drenagem de águas pluviais. Na Polônia, onde muitas pontes de concreto armado e protendido foram reforçadas, verificou-se que este é um dos métodos mais econômicos e práticos de reforço de pontes. Diversas pontes de uma rodovia elevada no Japão também foram reforçadas com chapas coladas com resina epóxi, mostrando a eficiência da técnica (BEBER, 1999).

Através de diversos trabalhos, comprovou-se que as chapas de aço coladas na face tracionada de vigas de concreto armado conduzem a aumentos significativos na resistência à flexão, em conjunto com incrementos na rigidez evidenciado por menores deslocamentos e fissuração (JONES et al., 1982 e 1988; SWAMY et al., 1987; ZIRABA e BALUCH, 1995; CAMPAGNOLO et al., 1997; OEHLERS e MOHAMED, 1998; ADHIKARY e MUTSUYOSHI, 2002).

Entretanto, alguns estudos demonstram que uma atenção especial aos reforços com chapa de aço colada deveria ser dada. Resultados extraídos da bibliografia demonstram que após longos períodos de exposição, a corrosão nas chapas de aço é evidente, em especial na interface adesivo/chapa. Esta corrosão, ocorrendo ao longo da interface, compromete perigosamente a aderência entre os elementos, além de ser muito difícil de ser diagnosticada em inspeções de rotina. Assim, após a sua instalação, o reforço deve ser protegido, criando tarefas adicionais de manutenção.

Existem, ainda, problemas práticos envolvendo a aplicação desta técnica. As chapas de aço apresentam peso próprio elevado, dificultando a manipulação e o transporte de elementos com grandes dimensões. Isto conduz a limitação nas dimensões da chapa tornando mais complexos os procedimentos de aplicação.

O Comitê Euro-Internacional Du Béton (CEB, 1983) apresenta algumas recomendações que visam garantir a eficiência desta técnica. São citadas a perfeita aderência entre o concreto, resina e chapa de aço; espessuras máximas da camada de resina epóxi e da chapa de aço de 1,5 mm e 3,0 mm, respectivamente; pressão leve e uniforme na colagem das chapas no concreto, durante um tempo que depende do tipo de adesivo e da temperatura ambiente (mínimo de 24 horas); proteção da região reforçada contra mudanças de temperatura e contra o fogo.

Embora suas primeiras aplicações tenham aparecido na década de 60, um método de projeto racional e unificado para vigas de concreto armado reforçadas pela colagem de chapas de aço não surgiu até hoje. Isto se deve principalmente ao fato dos estudos serem conduzidos experimentalmente, e pelos diferentes modos de falha que os elementos apresentam quando submetidos aos carregamentos, atingindo seu estado limite último por falha à flexão, ao cisalhamento ou por descolamento do sistema de reforço (ADHIKARY e MUTSUYOSHI, 2002).

A falha por descolamento ocorre pela alta concentração de tensões na interface entre a chapa de aço e o concreto na zona de ancoragem ou nas vizinhanças de fissuras de flexão ou cisalhamento, e tem natureza catastrófica, a qual é diferente das falhas clássicas por flexão ou cisalhamento de vigas reforçadas.

Esse descolamento impede que estrutura reforçada atinja sua total capacidade à flexão. Portanto, o ponto mais importante nesta técnica de reforço é evitar este tipo de falha, no intuito de que seja alcançada sua completa capacidade de carga, mantendo a integridade da viga de concreto e do reforço de chapa de aço.

2.2.4 Materiais compósitos

A utilização dos materiais não metálicos surgiu com o intuito de superar as deficiências e inconvenientes da técnica com chapas de aço coladas. Assim, o reforço por colagem de materiais poliméricos à base de fibras, os chamados polímeros reforçados com fibras (PRF), ou do inglês “*fiber reinforced polymers*” (FRP), está se tornando cada vez mais comum devido à sua simplicidade de execução e por ter desempenho superior quando comparada a outras técnicas de reforço estrutural (SALLABERRY, 2005).

Não existe uma definição universalmente aceita para materiais compósitos. O problema reside em que nível é feita esta definição. No contexto deste estudo, materiais compósitos são definidos em termos macro-estruturais (matrizes, partículas, fibras, etc), onde o compósito é uma combinação macroscópica de dois ou mais materiais distintos, possuindo uma interface distinta entre si. O primeiro destes materiais é o reforço, e o segundo uma matriz de resina polimérica (SCHWARTZ, 1984).

Um dos maiores impulsos para o desenvolvimento das técnicas de utilização dos PRF's na construção civil adveio da decisão do governo japonês - preocupado com as conseqüências nas estruturas de concreto armado provocadas por abalos sísmicos que freqüentemente ocorrem no seu arquipélago – de desenvolver processos destinados não somente a recuperar rapidamente estruturas danificadas quando da ocorrência daqueles fenômenos, como também para prevenir, através de reforço estrutural antecipado, as suas seqüelas estruturais. Visava com isso garantir que importantes estruturas do sistema viário permanecessem utilizáveis em situações de emergência, como também, caso fossem ainda assim danificadas, pudessem ser recuperadas prontamente. Com essa determinação, a incipiente técnica de reforço de estruturas de concreto armado utilizando materiais compósitos sofreu um grande desenvolvimento teórico, evolução que ficou evidenciada após a ocorrência,

em 1995, do terremoto de Kobe. Nessa ocasião centenas de estruturas de concreto armado foram reforçadas utilizando-se as fibras de carbono como elementos resistentes dos compósitos, muitas delas monitoradas para fornecerem dados relativos ao desempenho estrutural desse sistema com o passar do tempo (MACHADO, 2002).

Do Japão essas técnicas ganharam a Europa e os Estados Unidos, e hoje os PRF's têm a sua aplicação disseminada por todos os continentes (MACHADO, 2002).

Existem hoje polímeros reforçados com fibras em diversas formas, podendo-se destacar na área da construção civil as seguintes (SANTOS, 2003):

- Barras redondas de PRF utilizadas para substituir as armaduras de aço, uma vez que o aço apresenta sérios problemas de corrosão, magnetismo e densidade elevada;
- Painéis para fachada, prontos para a instalação;
- Perfis de PRF como alternativa para os diversos tipos de materiais estruturais (concreto, aço e madeira) tornam as estruturas mais leves com excelentes propriedades mecânicas, além de um bom comportamento frente à umidade, à corrosão e ao ataque de agentes do meio ambiente;
- Elementos moldados que são utilizados em coberturas, domos, adornos, etc;
- Laminado pré-fabricado de PRF ou preparado *in situ* com mantas e tecidos, em que o endurecimento e adesão ocorrem em um mesmo momento e condições. Estes laminados são utilizados no reforço de diversos tipos de elementos estruturais e podem ser formados pela junção de diversos tipos de resinas e fibras;
- Cabos de protensão, principalmente com fibras de carbono e fios de aço.

Para a utilização dos materiais compósitos como elementos de reforço em estruturas, existem hoje três sistemas que empregam as fibras de carbono combinadas com resinas poliméricas (ROBERY e INNES, 1997):

- Chapas pultrudadas, ou seja, chapas de PRFC de alta resistência impregnadas com resina epóxi ou poliéster, que resultam em perfis contínuos dos mais diversos e complexos formatos que são, então, colados sobre a superfície de concreto;
- Fios de fibra de carbono enrolados sob tensão que são colados como filamentos sobre a superfície ou enrolados a seco e então curados a quente;

- Lâminas pré-impregnadas, com espessura similar a do papel de parede que são coladas sobre a superfície do concreto com resina, seguindo exatamente a curvatura do elemento e permitindo a aplicação em cantos vivos.

Apesar da maioria dos sistemas em uso atualmente estar voltada para a utilização da fibra de carbono, sua utilização tem sido restringida pelo seu alto custo. Além da fibra de carbono, outras fibras encontradas no mercado estão sendo testadas como alternativa para utilização na construção civil. Entre estas fibras destacam-se as fibras de vidro e as fibras de aramida, que apresentam resistência considerável, a um custo mais competitivo (GARCEZ et al., 2005).

As fibras de carbono resultam do tratamento térmico (carbonização) de fibras precursoras orgânicas tais como o poliacrilonitril (PAN) ou com base no alcatrão derivado do petróleo ou do carvão (PITCH) em um ambiente inerte. O processo de produção consiste na oxidação dessas fibras precursoras seguido do processamento a elevadas temperaturas (variando de 1.000°C a 1.500°C para as fibras de carbono até cerca de 3.000°C para as fibras de grafite). Nesse processo térmico, as fibras resultantes apresentam os átomos de carbono perfeitamente alinhados ao longo da fibra precursora, característica que confere extraordinária resistência mecânica ao produto final.

Quanto maior a temperatura em que o processo industrial se realiza, maior será o módulo de elasticidade do material resultante, que varia de 100 GPa a 300 GPa para as fibras de carbono, até 650 GPa para as fibras de grafite. Quanto maior o módulo de elasticidade, maior é o custo do material, encarecendo o produto de maior módulo de elasticidade (grafite) cerca de 15 a 20 vezes mais em relação à fibra de carbono com o módulo de elasticidade situado no extremo inferior da faixa.

Normalmente os sistemas compósitos estruturados comercialmente disponíveis que utilizam as fibras de carbono como elemento resistente apresentam as seguintes características básicas (MACHADO, 2002):

- Elevada resistência mecânica;
- Elevada resistência a ataques químicos diversos;
- Não são afetados pela corrosão por se tratar de um produto inerte;
- Estabilidade térmica e reológica;
- Bom comportamento à fadiga e à atuação de cargas cíclicas;

- Peso específico da ordem de $1,8 \text{ g/cm}^3$, o que lhe confere extrema leveza.

A aplicação de mantas, tecidos ou laminados de compósitos de PRFC (polímero reforçado com fibras de carbono) nas faces tracionadas de vigas de concreto armado, ao invés de chapas de aço, apresenta vantagens significativas, principalmente quando as condições operacionais são desfavoráveis. De fácil manuseio e bastante leves, as mantas/laminados podem ser coladas sem a necessidade de escoramento pesado e caro.

As primeiras pesquisas sobre a aplicação de compósitos de fibra de carbono no reforço de estruturas de concreto armado aconteceram no *EMPA – Swiss Federal Materials Testing and Research Laboratories*, na Suíça, no início da década de 80, com os trabalhos de Meier e Kaiser (HOLLAWAY e LEEMING, 1999; MCKENNA e ERKI, 1994; RAHIMI e HUTCHINSON, 2001).

A partir de então, diversos estudos conduzidos experimentalmente e/ou numericamente foram desenvolvidos nos centros de pesquisa de todo mundo para a investigação do comportamento de elementos estruturais de concreto armado reforçados externamente à flexão, ou ao cisalhamento, pela colagem de PRFC's.

Com o objetivo de determinar a magnitude dos incrementos de resistência e rigidez obtidos através do reforço estrutural com PRF, modos de falha e fatores que influenciam os diversos modos de falha, pesquisadores desenvolveram programas experimentais que têm apresentado um excelente desempenho deste material como reforço de elementos de concreto. No grande grupo de trabalhos conduzidos experimentalmente podem ser citados os de Triantafillou e Plevris (1992), Shahawy et al. (1996a), Norris et al. (1997), Garden e Hollaway (1998), Ross et al. (1999), Beber (1999 e 2003), Beber et al. (2000), Fortes e Padaratz (2000), Silva e Moreno Júnior (2000), Ferrari et al. (2002), Breña et al. (2003), Molina et al. (2005).

Alguns pesquisadores concentraram seus esforços no desenvolvimento de procedimentos analíticos e modelos numéricos que representassem o comportamento das estruturas reforçadas. Assim, podem ser citados os estudos de Shahawy et al. (1996b), Arduini et al. (1997), Ascione e Feo (2000), El-Mihilmy e Tedesco (2000), Spacone e Limkatanyu (2000), Aprile et al. (2001), Buyle-Bodin et al. (2002), Pešić e Pilakoutas (2003), Perera et al. (2004), Deng et al. (2004), Thomsen et al. (2004), Li et al. (2005).

Além de aumentos significativos na resistência e na rigidez, os estudos demonstraram que a utilização do PRFC reduz a abertura de fissuras, além de distribuí-las de forma mais

uniforme ao longo do comprimento da viga. Outro importante aspecto, observado por Ritchie et al. (1991), foi que em vigas sem reforço as fissuras apresentavam-se muito espaçadas e com grande abertura, por outro lado, nas vigas reforçadas, o espaçamento entre fissuras diminuía sensivelmente assim como a sua abertura, sendo este aspecto altamente positivo para a durabilidade das estruturas de concreto armado.

Os modos de ruptura das vigas reforçadas à flexão são os seguintes (TRIANAFILLOU, 1998a):

- Escoamento da armadura de tração, seguido da ruptura do reforço. Esse tipo de ruptura pode ocorrer quando as taxas de aço e reforço forem excepcionalmente baixas, assim como a deformação de ruptura do compósito, ou ainda a uma elevada resistência à compressão do concreto;
- Escoamento da armadura de tração, seguido do esmagamento do concreto. Esse tipo de ruptura decorre do dimensionamento ótimo do reforço. A ruína é governada pela armadura seguido do esmagamento do concreto;
- Esmagamento do concreto. Ocorre quando as taxas de armadura e reforço são elevadas;
- Descolamento do compósito nas extremidades da zona de ancoragem. É uma ruína que ocorre de maneira frágil e brusca;
- Descolamento do compósito em locais próximos a fissuras de flexão ou cisalhamento;
- Descolamento do compósito provocado por irregularidades na superfície do concreto. Pode ser evitado se forem seguidos os cuidados na execução do reforço.

Como reforço à flexão, os PRF's aumentam significativamente a resistência e a rigidez das vigas de concreto armado, porém diminuem a ductilidade das mesmas, o que freqüentemente resulta em um modo de ruptura frágil que não é desejável em projetos estruturais (PEŠIĆ e PILAKOUTAS, 2003). A redução na ductilidade está relacionada ao comportamento puramente elástico linear dos compósitos de fibra de carbono.

Os modos de falha onde há a perda da eficiência do sistema de reforço devido à falha da aderência entre o substrato de concreto e o reforço são os mais observados em vigas de concreto armado reforçadas com materiais compósitos (THOMSEN et al., 2004), assim, os valores das cargas de ruptura acabam, a rigor, sendo limitados pela carga de descolamento do sistema de reforço.

Portanto, se tem dado mais atenção, e estudado, o tipo de falha por descolamento do sistema de reforço devido à concentração de tensões normais e de cisalhamento na zona de ancoragem ou nas proximidades de fissuras de flexão e cisalhamento, desenvolvendo-se modelos numéricos usando o método dos elementos finitos, ou através de procedimentos analíticos para a determinação das tensões interfaciais que conduzem a este modo de ruptura prematuro.

2.3 PROJETO DE REFORÇO À FLEXÃO COM PRF BASEADO NAS RECOMENDAÇÕES DA *fib bulletin 14*

No Brasil, ainda não existe uma norma específica sobre o tema que possa orientar os profissionais na prática de projeto e de execução do reforço com materiais compósitos à base de fibras e resinas. Sendo assim, os engenheiros têm utilizado as recomendações dos fabricantes, do *ACI – Committee 440* (ACI 440.2R, 2002) e do *bulletin 14* (fib, 2001). Os manuais dos fabricantes e os códigos têm sofrido modificações constantes, na tentativa de acompanhar o avanço do conhecimento (FORTES et al., 2002).

As diretrizes básicas para o projeto de reforço com compósitos de fibra de carbono seguem os mesmos princípios do projeto de estruturas convencionais de concreto armado. As principais recomendações de projeto para reforço com PRF da norma europeia serão apresentadas a seguir.

2.3.1 Recomendações da *fib – bulletin 14* para o reforço à flexão

A *International Federation for Structural Concrete fib – Fédération Internationale du Béton* – criada a partir da união do CEB e FIP em 1998, publicou em 2001 um relatório técnico no qual são apresentadas recomendações para o projeto de reforço com uso de materiais compósitos à base de fibras (PRF) colados externamente à estrutura, para a prática de execução e controle de qualidade. Este relatório técnico recebeu o nome de “*Externally bonded FRP reinforcement for RC structures - Bulletin 14*” desenvolvido pelo Task Group 9.3 FRP (Fibre Reinforced Polymer) *reinforcement for concrete structures*. Este grupo é formado por aproximadamente 60 membros, representando a maioria das universidades europeias, institutos de pesquisa e indústrias que trabalham para o avanço deste campo de

pesquisa de materiais compósitos usados para a recuperação e reforço de estruturas de concreto. Também membros do Canadá, Japão e USA formam este grupo de pesquisa.

2.3.1.1 Introdução

O procedimento para o dimensionamento à flexão de vigas de concreto armado reforçadas com PRF pode ser resumido da seguinte maneira (fib – Bulletin 14, 2001):

- Para o elemento a ser reforçado, antes da intervenção: determina-se o momento resistente de projeto (estado limite último - ELU), e verifica-se o estado limite de serviço (ELS). O último não é necessário diretamente, mas fornecerá informações valiosas a respeito do estado limite de serviço do elemento reforçado;
- Para o momento de serviço antes do reforço, M_o , deve-se determinar a deformação inicial ε_o na fibra de maior tração da seção de concreto armado;
- Assume-se completa ação do compósito, e para o momento de projeto, depois do reforço, determina-se a área da seção transversal de PRF necessária para o desempenho da seção no estado limite último;
- Calculam-se os deslocamentos no estado limite de serviço. Se o deslocamento máximo admissível é excedido, determina-se a necessária área da seção transversal de PRF para cumprir essa exigência;
- Calculam-se as tensões no concreto, aço e reforço no estado limite de serviço. Se as tensões admissíveis máximas forem excedidas, determina-se a área da seção transversal de PRF necessária para cumprir essa exigência;
- Verifica-se se a largura do PRF é suficiente para controlar a abertura de fissuras no estado limite de serviço. Aumenta-se a largura do PRF, se necessário, ou no caso de máxima largura já utilizada, aumenta-se a espessura do PRF. A fissuração na interface entre o substrato de concreto e o PRF não é considerada;
- Verifica-se a resistência ao cisalhamento, no caso de acontecerem deslocamentos verticais diferentes nos lados da fissura causada pelo esforço cortante, causando o descolamento do reforço. Se este modo de falha é dominante, determina-se um novo valor para a área da seção transversal de PRF;
- Verifica-se que a falha da aderência na zona de ancoragem ou ao longo do reforço não aconteça. Se for o caso, sistemas mecânicos de ancoragem devem ser feitos;

- Verificam-se situações acidentais;
- Verifica-se a resistência ao cisalhamento do elemento reforçado. Se necessário, um reforço ao cisalhamento deve ser estabelecido.

Neste trabalho, a notação usada para representar as variáveis envolvidas no projeto segue os padrões apresentados no Bulletin 14 (fib, 2001).

As curvas tensão-deformação que representam o concreto, o PRF e o aço são apresentadas na figura 2.1.

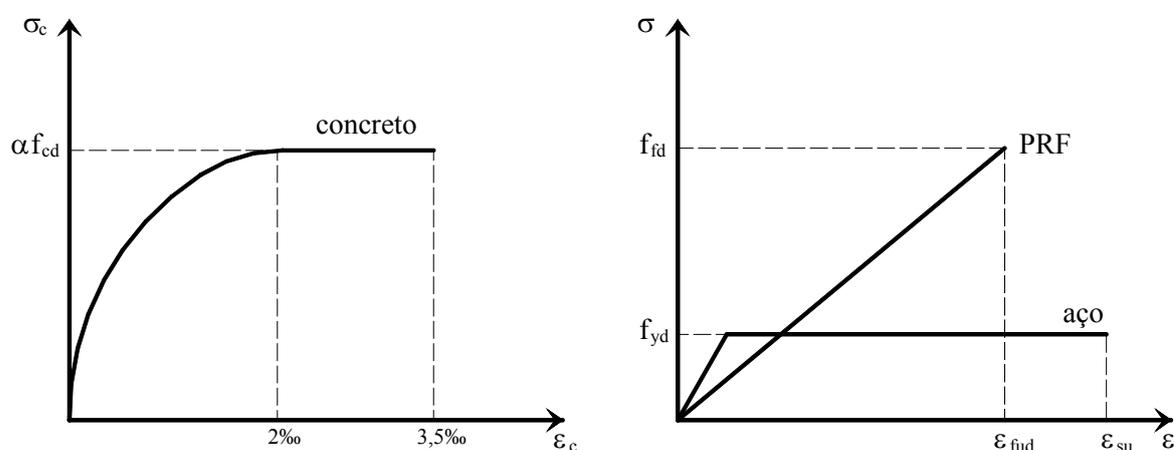


Figura 2.1 – Curvas tensão-deformação para os materiais constituintes no ELU

Essas curvas, juntamente com a hipótese de que não há deslizamento na interface entre o substrato de concreto e o PRF formam a base para a análise da resistência do elemento de concreto armado reforçado à flexão no estado limite último. No concreto, um diagrama parábola-retângulo para a tensão de compressão é usado, com resistência à compressão de projeto $\alpha f_{cd} = \alpha f_{ck} / \gamma_c$ baseado na resistência à compressão característica do concreto f_{ck} . Também é usado um coeficiente parcial de segurança $\gamma_c = 1,5$ e um fator de redução $\alpha = 0,85$ devido à redução na resistência à compressão do concreto sob cargas de longa duração. Para o aço da armadura, uma relação bilinear entre tensões e deformações é considerada, com tensão de escoamento de cálculo $f_{yd} = f_{yk} / \gamma_s$. O coeficiente de segurança γ_s é tomado como sendo igual a 1,15. Para o comportamento à tração do PRF nas verificações no estado limite último, uma resposta elástica linear é admitida, como definida na equação (2.1).

$$\sigma_f = E_{fu} \varepsilon_f \leq f_{fd}, \quad (2.1)$$

onde $E_{fu} = f_{fk} / \varepsilon_{fuk}$ é o módulo de elasticidade baseado nos valores característicos de resistência à tração, f_{fk} , e deformação de ruptura, ε_{fuk} . A resistência à tração característica corresponde ao quantil de 5% da função densidade de probabilidade que representa a resistência à tração do PRF. A resistência à tração de projeto f_{fd} é apresentada na equação (2.2).

$$f_{fd} = \frac{f_{fk} \cdot \varepsilon_{fue}}{\gamma_f \cdot \varepsilon_{fum}} \quad (2.2)$$

onde ε_{fue} é a deformação última efetiva.

Os valores do coeficiente de minoração da resistência do reforço estão apresentados na tabela 2.1. Estes valores são baseados principalmente na observação de diferentes comportamentos do PRF sob carga de longa duração, como também pela influência do método de aplicação do reforço. A relação $\varepsilon_{fue} / \varepsilon_{fum}$ é normalmente igual a 1 em consequência da deformação última efetiva ε_{fue} esperada *in-situ* não ser significativamente diferente da deformação média ε_{fum} obtida através de testes uniaxiais de tração, e também porque pequenas variações são consideradas no coeficiente de segurança γ_f do material de reforço.

Tabela 2.1 – Coeficientes de minoração da resistência do reforço γ_f

Tipo de PRF	Tipo de aplicação A ⁽¹⁾	Tipo de aplicação B ⁽²⁾
PRFC	1,20	1,35
PRFA	1,25	1,45
PRFG	1,30	1,50

⁽¹⁾ Aplicações de sistemas pré-fabricados sob controle normal de qualidade. Aplicações de sistemas curados *in-situ* se todas as providências são tomadas para se obter um alto grau de controle de qualidade.

⁽²⁾ Aplicações de sistemas curados *in-situ* sob controle normal de qualidade. Aplicações de qualquer sistema em locais de difícil acesso que dificulte o processo de recuperação ou reforço.

2.3.1.2 Situação inicial

O efeito do carregamento aplicado à estrutura antes da aplicação do reforço deve ser considerado no cálculo do elemento a ser reforçado. Baseado na teoria da elasticidade e com

momento de serviço, M_o (sem coeficiente de majoração das solicitações), atuando na seção crítica de concreto armado durante a aplicação do reforço, a distribuição das deformações podem ser calculadas. Como M_o normalmente é maior que o momento de fissuração M_{cr} , o cálculo é baseado nas características da seção fissurada, conforme é mostrado na figura 2.2. Se M_o for menor que M_{cr} , esta influência no cálculo do elemento a ser reforçado pode facilmente ser ignorada.

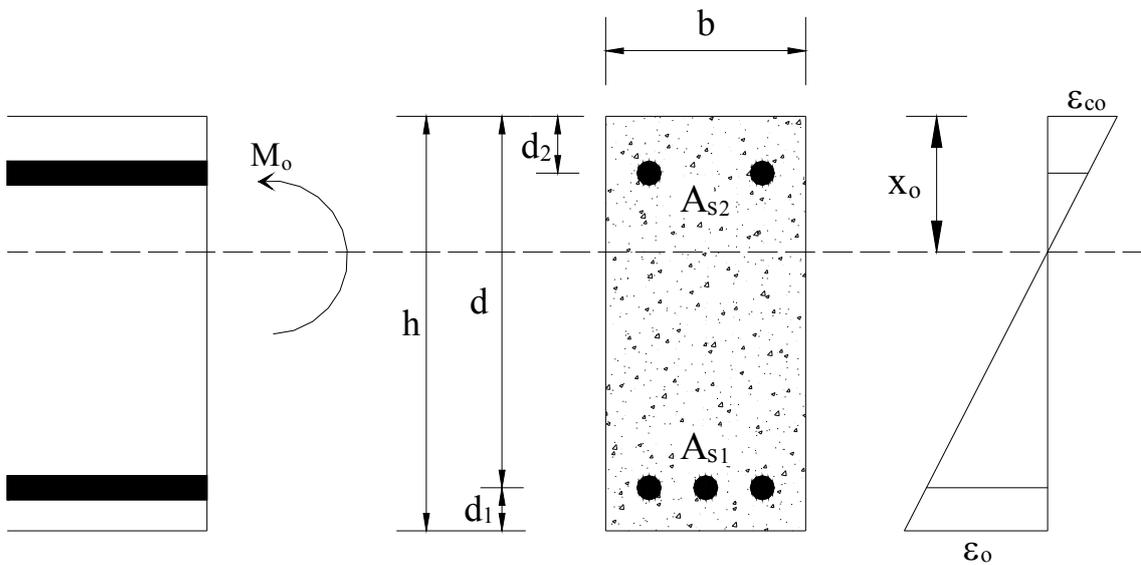


Figura 2.2 – Situação inicial

Baseado no princípio da homogeneização da seção com diferentes materiais, a profundidade da linha neutra x_o pode ser encontrada resolvendo-se a seguinte expressão para o momento estático de áreas:

$$\frac{1}{2}bx_o^2 + \left(\frac{E_s}{E_c} - 1\right)A_{s2}(x_o - d_2) = \frac{E_s}{E_c}A_{s1}(d - x_o). \quad (2.3)$$

A deformação no concreto na fibra mais comprimida pode ser expressa por:

$$\epsilon_{co} = \frac{M_o x_o}{E_c I_o}, \quad (2.4)$$

onde I_o é o momento de inércia da seção homogeneizada, obtido através da equação (2.5).

$$I_o = \frac{bx_o^3}{3} + \left(\frac{E_s}{E_c} - 1 \right) A_{s2} (x_o - d_2)^2 + \frac{E_s}{E_c} A_{s1} (d - x_o)^2. \quad (2.5)$$

Baseado na hipótese da compatibilidade de deformações, a deformação no concreto na fibra de maior tração pode ser obtida da seguinte maneira:

$$\varepsilon_o = \varepsilon_{co} \frac{h - x_o}{x_o}, \quad (2.6)$$

sendo esta a deformação inicial no nível do reforço colado externamente na zona tracionada necessária para a avaliação da viga de concreto armado reforçada.

2.3.1.3 Modos de ruptura no estado limite último (ELU)

Os modos de ruptura de um elemento de concreto armado reforçado à flexão com materiais compósitos colados externamente podem ser divididos em duas classes: (a) aqueles onde se estabelece uma completa transferência de tensões entre o PRF e o concreto, e essa ligação entre os materiais é mantida até que o concreto alcance o esmagamento à compressão, ou haja a falha por ruptura do PRF à tração (esse tipo de ruptura pode ser caracterizada como “clássica”) e, (b) aqueles onde há a falha da aderência entre o substrato de concreto e o reforço antes que um modo de ruptura clássico seja atingido.

A aderência entre os materiais é necessária para a transferência de tensões do concreto para o PRF, conseqüentemente, os modos de ruptura correspondentes a esse mecanismo devem ser levados em conta adequadamente. A falha da aderência implica na completa perda de ação entre o concreto e o PRF, e ocorre na interface entre os dois materiais. Por outro lado, falhas localizadas de aderência ocorrem em zonas específicas entre o substrato de concreto e o PRF. Neste caso a perda de aderência é limitada a pequenas áreas, por exemplo, em um comprimento de 2 mm nas proximidades de fissuras em elementos submetidos à flexão. Assim, descolamentos localizados não causam uma perda total de capacidade resistente do elemento reforçado. Quando descolamentos localizados se propagam, e a ação do reforço é perdida de modo que o mesmo não seja mais capaz de absorver esforços, esta falha é conhecida internacionalmente como *peeling-off*. Se uma redistribuição de tensões do PRF para armadura de tração não é possível, o *peeling-off* provocará uma ruptura frágil e brusca do elemento reforçado.

A maioria das falhas observadas em vigas de concreto armado reforçadas à flexão é causada pelo descolamento do sistema de reforço. O ponto mais susceptível de acontecimento desta falha ocorre na superfície de concreto próxima do sistema de reforço. Dependendo do ponto onde o processo de descolamento se inicia, os seguintes modos de ruptura podem ser identificados (figura 2.3):

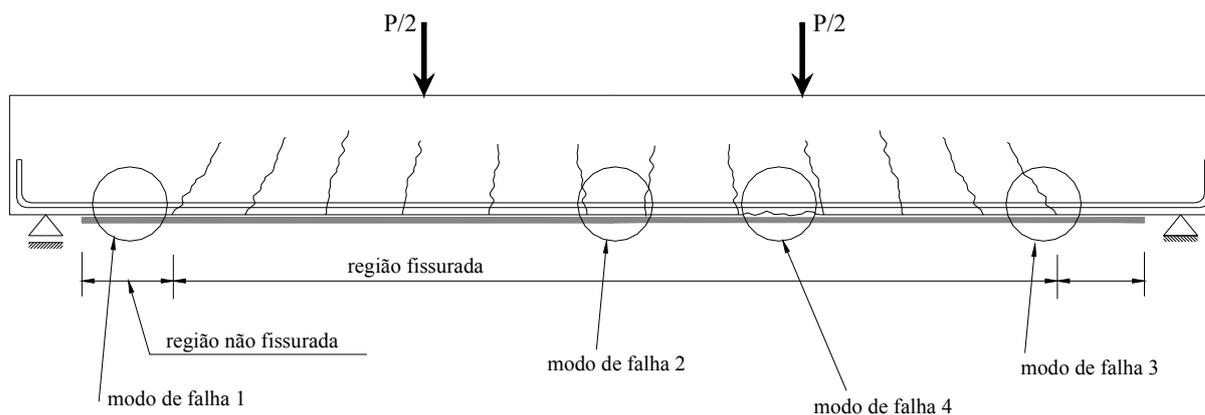


Figura 2.3 – Modos de falha da aderência

- Modo 1: *peeling-off* na região não fissurada de ancoragem. O sistema de reforço descola na região de ancoragem como resultado de fratura do concreto por tensões de cisalhamento;
- Modo 2: *peeling-off* causado por fissuras de flexão. Fissuras verticais de flexão no concreto podem se propagar horizontalmente causando o descolamento do PRF em regiões afastadas da zona de ancoragem;
- Modo 3: *peeling-off* causado por fissuras de cisalhamento. Fissuras por cisalhamento no concreto geralmente resultam em aberturas horizontais e verticais que podem conduzir ao descolamento do reforço;
- Modo 4: *peeling-off* causado por irregularidades na superfície do concreto. Irregularidades ou rugosidade na superfície do concreto podem resultar em descolamento localizado do PRF, o qual pode se propagar e causar *peeling-off*. Este mecanismo de ruptura não tem sido estudado completamente. Alguns estudos mencionam que este mecanismo pode ser evitado adotando-se certas regras práticas de execução e limitações na rugosidade da superfície do concreto.

2.3.1.4 Análise no estado limite último (ELU)

De acordo com o modo de ruptura clássico com escoamento da armadura de tração e esmagamento do concreto comprimido, o qual é mais desejável, a falha na seção crítica acontece por escoamento da armadura seguido do esmagamento do concreto, enquanto o PRF permanece intacto. O momento resistente de projeto da seção reforçada crítica é calculado baseando-se nos princípios de projeto de seções de concreto armado não-reforçadas. Primeiramente, a profundidade da linha neutra, x , é calculada considerando-se a compatibilidade de deformações e o equilíbrio interno de forças, e então o momento resistente de projeto é obtido através do equilíbrio de momentos causados pelas forças internas. A análise deve levar em conta que o elemento de concreto armado pode não estar totalmente descarregado quando o sistema de reforço é instalado, e assim, uma deformação inicial ε_0 na fibra mais tracionada de concreto deve ser considerada (figura 2.4).

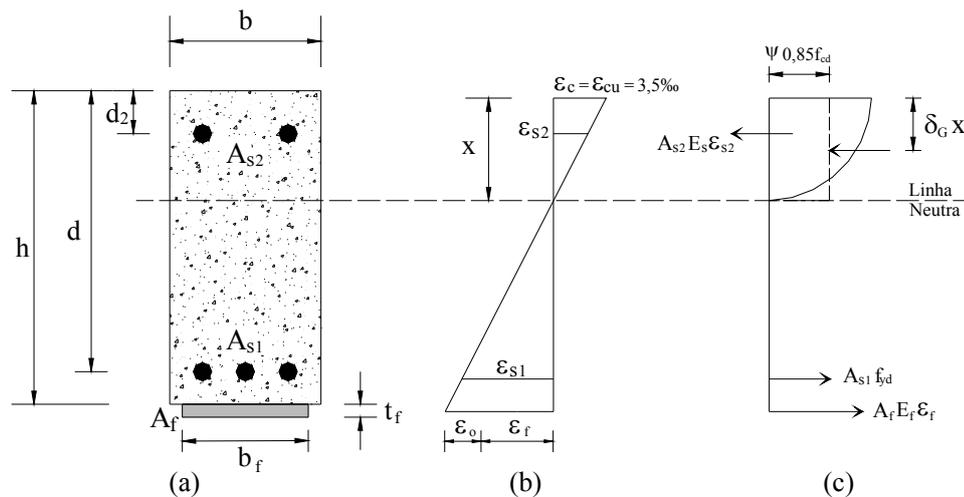


Figura 2.4 – Análise da seção no ELU: (a) geometria, (b) distribuição de deformações e (c) distribuição de tensões

Para o cálculo da profundidade da linha neutra x é usada a equação (2.7).

$$0,85\psi f_{cd} b x + A_{s2} E_s \varepsilon_{s2} = A_{s1} f_{yd} + A_f E_f \varepsilon_f, \quad (2.7)$$

onde $\psi = 0,8$ e,

$$\varepsilon_{s2} = \varepsilon_{cu} \frac{x - d_2}{x}, \quad \text{onde } E_s \varepsilon_{s2} \leq f_{yd} \quad (2.8)$$

$$\varepsilon_f = \varepsilon_{cu} \frac{h-x}{X} - \varepsilon_o, \quad (2.9)$$

assim, o momento resistente de cálculo, M_{Rd} , pode ser obtido através de:

$$M_{Rd} = A_{s1} f_{yd} (d - \delta_G x) + A_f E_f \varepsilon_f (h - \delta_G x) + A_{s2} E_s \varepsilon_{s2} (\delta_G x - d_2), \quad (2.10)$$

com $\delta_G = 0,4$.

Para as equações apresentadas acima serem válidas, as hipóteses admitidas devem ser verificadas: (a) escoamento da armadura de tração, e (b) a deformação no PRF é limitada pela deformação última de cálculo, $\varepsilon_{fud} = \varepsilon_{fuk} / \gamma_f$:

$$\varepsilon_{s1} = \varepsilon_{cu} \frac{d-x}{X} \geq \frac{f_{yd}}{E_s}, \quad (2.11)$$

$$\varepsilon_f = \varepsilon_{cu} \frac{h-x}{X} - \varepsilon_o \leq \varepsilon_{fud}, \quad (2.12)$$

O modo de ruptura envolvendo escoamento da armadura de tração seguido da ruptura do PRF é teoricamente possível. Entretanto, é provável que o descolamento prematuro preceda a ruptura do PRF, e conseqüentemente, este mecanismo não será atingido. A análise para este mecanismo de ruptura é feita segundo os princípios adotados para o caso de ruptura escoamento da armadura/esmagamento do concreto. Assim, as equações (2.7) a (2.10) são ainda aplicáveis, com as seguintes modificações: ε_{cu} é substituído por ε_c ; ε_f é substituída por ε_{fud} ; e ψ , δ_G são calculados pelas seguintes expressões:

$$\psi = \begin{cases} 1000\varepsilon_c \left(0,5 - \frac{1000}{12} \varepsilon_c \right) & \text{para } \varepsilon_c \leq 0,002 \\ 1 - \frac{2}{3000\varepsilon_c} & \text{para } 0,002 \leq \varepsilon_c \leq 0,0035 \end{cases} \quad (2.13)$$

$$\delta_G = \begin{cases} \frac{8-1000\varepsilon_c}{4(6-1000\varepsilon_c)} & \text{para } \varepsilon_c \leq 0,002 \\ \frac{1000\varepsilon_c(3000\varepsilon_c-4)+2}{2000\varepsilon_c(3000\varepsilon_c-2)} & \text{para } 0,002 \leq \varepsilon_c \leq 0,0035 \end{cases} \quad (2.14)$$

O *peeling-off* causado por fissuras de cisalhamento não tem sido devidamente detalhado pela comunidade de pesquisadores até hoje (um modelo de aderência apropriado está ainda para ser desenvolvido). O modelo de Deuring (1993) é provavelmente o de mais fácil entendimento, mas é um tanto complicado de se aplicar. Em um estudo relativamente recente, Blaschko (1997) propõe que o *peeling-off* em fissuras de cisalhamento pode ser evitado limitando o esforço atuante de cisalhamento no valor do esforço resistente de cálculo do elemento de concreto armado sem armadura ao esforço cortante, com a seguinte modificação na resistência característica ao cisalhamento do concreto τ_{Rk} , e com taxa de armadura longitudinal equivalente ρ_{eq} :

$$\tau_{Rk} = 0,15f_{ck}^{1/3}, \quad (2.15)$$

$$\rho_{eq} = \frac{A_s + A_f \frac{E_f}{E_s}}{bd}. \quad (2.16)$$

No caso da resistência ao cisalhamento de projeto ficar abaixo do valor necessário, um modo de reforço ao cisalhamento apropriado deve ser estabelecido.

Segundo as recomendações da fib Bulletin 14 (2001), um tratamento para o *peeling-off* na região de ancoragem e próximo a fissuras de flexão pode ser feito de acordo com várias aproximações: (1) verificação da ancoragem do sistema de reforço, e limitação na deformação do PRF; (2) verificação de acordo com a curva envoltória de tensões de tração no PRF; (3) verificação da ancoragem do sistema de reforço e da transferência de forças na interface concreto/PRF.

De acordo com a fib Bulletin 14 (2001), as três aproximações possuem vantagens e desvantagens na sua aplicação para o tratamento do *peeling-off* na região de ancoragem e próximo a fissuras de flexão. A aproximação (1) é notavelmente o procedimento mais usado para recomendações de projeto, principalmente por sua simplicidade. Entretanto, ela representa uma grosseira simplificação do comportamento real, pelo fato da correspondente deformação no PRF na falha da aderência não ser um valor fixo, mas sim dependente de uma série de parâmetros, como a deformação na armadura interna de tração, e a distribuição das fissuras. A aproximação (2) possui como principal vantagem o fato do *peeling-off* na zona de ancoragem e em fissuras de flexão ser tratado com um mesmo modelo, porém, a principal desvantagem é a sua complexidade, a qual torna difícil sua aplicação em problemas práticos

de engenharia. Uma desvantagem da aproximação (3) é que o tratamento é feito através de modelos diferentes para o *peeling-off* na zona de ancoragem e em fissuras de flexão. Outra desvantagem é que esta aproximação é baseada na distribuição de tensões para um elemento homogêneo não fissurado. Entretanto, uma grande vantagem é a simplicidade para a aplicação em problemas práticos.

Para fins de projeto, modelos mais simples de fácil compreensão devem ser usados, pois evitam possíveis erros por falta de um correto entendimento do modelo proposto. Porém, um nível de segurança adequado deve resultar do procedimento de cálculo. Assim, serão detalhadas aqui as aproximações (1) e (3) para a verificação do descolamento do sistema de reforço na zona de ancoragem e nas proximidades de fissuras de flexão.

A aproximação (1) envolve dois passos independentes. No primeiro, a ancoragem deve ser verificada baseando-se em uma relação constitutiva *tensão de aderência - deslizamento* na interface PRF/concreto. E então, um limite na deformação do PRF deve ser aplicado para garantir que o descolamento em uma região afastada da extremidade não aconteça (segundo passo). A limitação na deformação do PRF tem sido incorporada em um número considerável de procedimentos de projeto, com $\varepsilon_{f,lim}$, no estado limite último, variando de 6,5‰ a 8,5‰.

Recentes resultados experimentais demonstram que a deformação de tração no PRF, quando o *peeling-off* acontece, depende de vários parâmetros, como as propriedades do reforço e concreto, condições de carregamento, espaçamento entre fissuras, etc. Um limite global na deformação pode não ser apropriado para representar a completa variação nas aplicações. Portanto, a limitação na deformação, em alguns casos, pode conduzir a um não econômico uso do material de reforço, especialmente quando o reforço se dará em grandes vãos.

A verificação da ancoragem, com modelo baseado em leis de aderência, fornece a máxima força no PRF que pode ser ancorada, $N_{fa,max}$, e o máximo comprimento de ancoragem, $l_{b,max}$, sendo iguais a:

$$N_{fa,max} = \alpha c_1 k_c k_b b \sqrt{E_f t_f f_{ctm}} \quad [N] \quad (2.17)$$

$$l_{b,max} = \sqrt{\frac{E_f t_f}{c_2 f_{ctm}}} \quad [mm] \quad (2.18)$$

onde α é um fator de redução, aproximadamente igual a 0,9, para se considerar a influência das fissuras inclinadas na resistência da aderência ($\alpha=1$ em vigas com suficiente armadura interna ou externa de cisalhamento); k_c é um fator que considera o grau de compactação do concreto (k_c pode geralmente assumir o valor unitário, porém, para PRF colado em faces de concreto com baixo grau de compactação recomenda-se $k_c=0,67$); e k_b é um fator geométrico.

$$k_b = 1,06 \sqrt{\frac{2 - \frac{b_f}{b}}{1 + \frac{b_f}{400}}} \geq 1, \quad (2.19)$$

com $b_f/b \geq 0,33$. Note-se que b , b_f , e t_f são medidos em *mm*, e E_f , f_{ctm} em *MPa*. Os parâmetros c_1 e c_2 nas equações (2.17) e (2.18) podem ser obtidos através da calibração com testes experimentais. Para PRFC eles são 0,64 e 2, respectivamente.

Para comprimentos de ancoragem $l_b < l_{b,max}$, a força última no PRF a ser ancorada pode ser calculada com o auxílio da equação (2.20).

$$N_{fa} = N_{fa,max} \frac{l_b}{l_{b,max}} \left(2 - \frac{l_b}{l_{b,max}} \right). \quad (2.20)$$

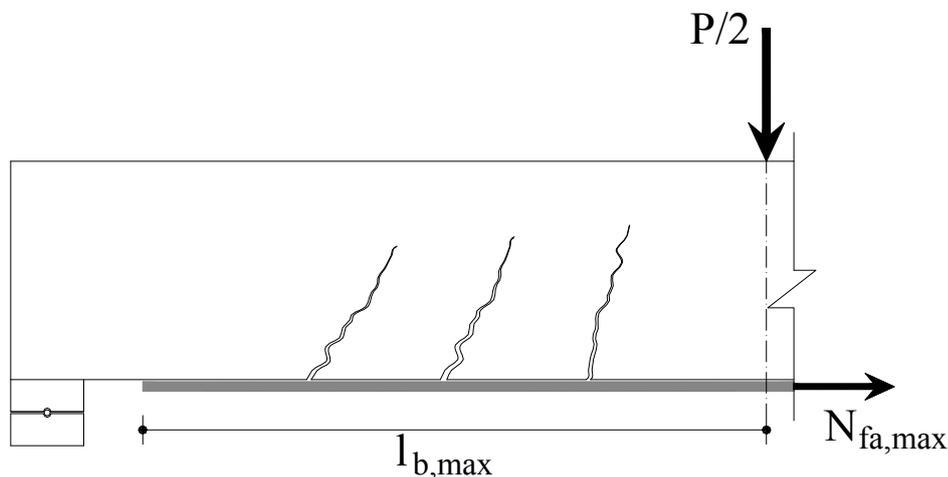


Figura 2.5 – Tratamento para o *peeling-off* em zona de ancoragem

A aplicação da aproximação (3) fornecerá uma previsão mais realista do *peeling-off* nas zonas de ancoragem e fissuras de flexão, bem como o uso mais econômico do sistema de reforço. De acordo com a aproximação (3), dois passos independentes devem ser seguidos. No primeiro é feita a verificação da ancoragem do sistema de reforço baseando-se na relação

de aderência na interface entre o PRF e o concreto. Assim, as equações (2.17) a (2.20) são válidas também para a aproximação (3). Como segundo passo, deve ser verificado que a tensão de aderência τ_b na interface PRF/concreto, resultante de uma variação de forças de tração ao longo do PRF, é limitada. Considerando duas seções transversais distantes Δx , e submetidas aos momentos M_d e $M_d + \Delta M_d$, τ_b será igual a:

$$\tau_b = \frac{\Delta N_{fd}}{b_f \Delta x}, \quad (2.21)$$

onde ΔN_{fd} é a diferença nas forças axiais no PRF entre as duas seções. Para a verificação do estado limite último, a tensão de aderência τ_b deve ser restringida ao valor de projeto da resistência ao cisalhamento da interface, a qual é igual (na maioria dos casos práticos) a resistência ao cisalhamento do concreto na ligação PRF/concreto f_{cbd} . Adotando o critério de ruptura de Mohr-Coulomb, com tensões normais à interface nulas, a resistência da aderência será igual a 1,8 vezes a resistência à tração do concreto, ou seja:

$$f_{cbd} = 1,8 \frac{f_{ctk}}{\gamma_c} \quad (2.22)$$

A equação (2.21) pode ser simplificada considerando-se que $N_{rd} = M_d/z_m$ e $N_{rd} = N_{fd} + N_{sd}$. Dependendo se a armadura interna está escoada ou não, N_{rd} e ΔN_{fd} podem ser calculadas com as seguintes equações:

$$\varepsilon_{s1} < \varepsilon_{yd} : N_{rd} = N_{fd} \left(1 + \frac{A_{s1} E_s \varepsilon_{s1}}{A_f E_f \varepsilon_f} \right) \approx N_{fd} \left(1 + \frac{A_{s1} E_s}{A_f E_f} \right) \quad \text{ou} \quad \Delta N_{fd} = \frac{\Delta M_d}{z_m \left(1 + \frac{A_{s1} E_s}{A_f E_f} \right)} \quad (2.23)$$

$$\varepsilon_{s1} \geq \varepsilon_{yd} : N_{rd} = N_{fd} + A_{s1} f_{yd} \quad \text{ou} \quad \Delta N_{fd} = \frac{\Delta M_d}{z_m} \quad (2.24)$$

Com $\Delta M_d/\Delta x \approx V_d$ (valor de projeto do esforço cortante) e $z_m = (z_s + z_f)/2 \approx 0,95d$, isto nos fornece as seguintes condições:

$$\varepsilon_{s1} < \varepsilon_{yd} : \frac{V_d}{0,95db_f \left(1 + \frac{A_{s1} E_s}{A_f E_f} \right)} \leq f_{cbd} \quad (2.25)$$

$$\varepsilon_{s1} \geq \varepsilon_{yd} : \frac{V_d}{0,95db_f} \leq f_{cbd} \quad (2.26)$$

Na equação (2.23) foi assumido que $\varepsilon_{s1}/\varepsilon_f \approx 1$. Da equação (2.25) pode ser notado que esta hipótese está a favor da segurança.

A principal hipótese desta aproximação é que se as equações acima forem verificadas, fissuras de flexão produzirão somente micro fissuras estáveis na interface concreto/PRF e falha local da aderência, a qual não resultará em ruptura por perda da aderência entre o PRF e o concreto. Conseqüentemente, uma limitação adicional na deformação do PRF não é aplicada.

Algumas investigações sobre o comportamento de estruturas de concreto reforçadas indicam, que, quando o sistema de reforço acaba a uma certa distância do apoio, fissuras aproximadamente verticais podem iniciar na extremidade do reforço e aumentar como fissuras inclinadas causadas pelo cisalhamento do concreto (figura 2.6 lado esquerdo). Entretanto, devido aos estribos internos, a fissura por cisalhamento pode ser impedida, e o sistema de reforço acaba separando-se do concreto no nível da armadura longitudinal de tração, levando junto a camada de cobrimento do concreto (figura 2.6 lado direito). Este mecanismo de falha na aderência pode ser atingido quando a máxima tensão de cisalhamento perto da extremidade do reforço atinge um valor crítico.

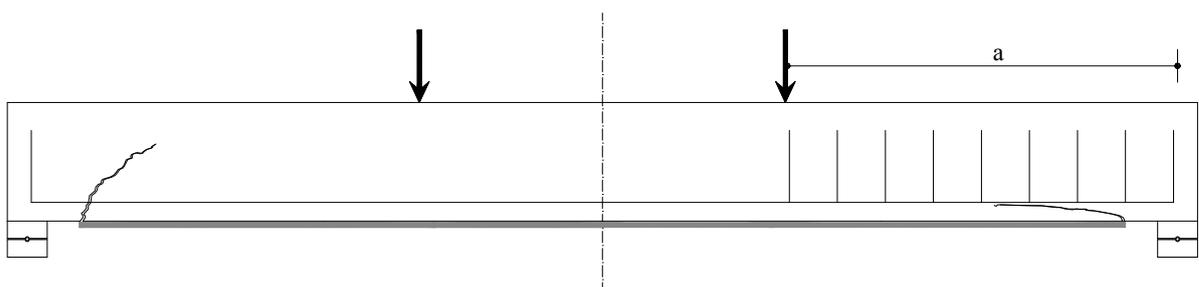


Figura 2.6 – Falha na extremidade do reforço

O tratamento para este mecanismo de ruptura é feito através de um modelo para estruturas reforçadas, análogo ao conceito do vão de cisalhamento fictício (JANSZE, 1997), como ilustrado na figura (2.7).

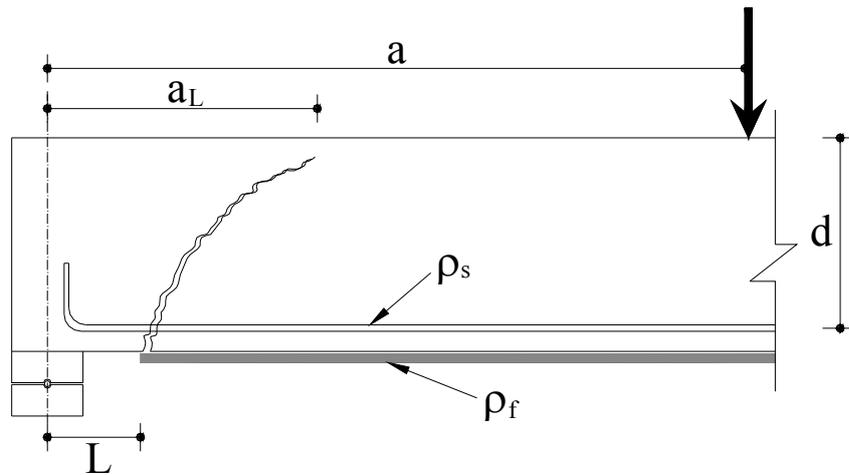


Figura 2.7 – Modelo análogo

As equações para este tratamento são apresentadas a seguir.

$$V_{sd} \leq V_{Rd} = \tau_{Rd} b d \quad (2.27)$$

onde V_{sd} e V_{Rd} são o esforço cortante de projeto e o esforço resistente ao cisalhamento também de projeto, respectivamente. τ_{Rd} é o valor de projeto da resistência ao cisalhamento do concreto, dada pela equação (2.28).

$$\tau_{Rd} = 0,15 \sqrt[3]{3 \frac{d}{a_L} \left(1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \right) \sqrt[3]{100 \rho_s f_{ck}}} \quad (2.28)$$

onde a_L é igual a:

$$a_L = \sqrt[4]{\frac{(1 - \sqrt{\rho_s})^2}{\rho_s} d L^3} \quad (2.29)$$

finalmente,

$$a > L + d, \quad a_L < a \quad (2.30)$$

Nas equações acima, L (em mm) é a distância da extremidade do reforço ao apoio, a (em mm) é o vão de cisalhamento e $\rho_s = A_{s1}/bd$.

O conceito do vão de cisalhamento fictício proporciona uma aproximação simplificada para fins de projeto em engenharia, no intuito de prevenir o modo de falha causada pelo cisalhamento na extremidade do reforço.

2.3.1.5 Verificação da ductilidade

Geralmente, a ductilidade de um elemento reforçado à flexão diminui em relação ao elemento não reforçado. Esta é a situação onde ocorrem rupturas prematuras por falha da aderência e onde existem altas taxas de reforço, com pequenas deformações no PRF, e conseqüentemente pequenas deformações ou curvaturas são obtidas na ruptura.

Para garantir uma adequada ductilidade do elemento reforçado, a armadura interna deve ter um suficiente escoamento na ruptura, e a curvatura (ou deslocamento) na ruptura deve ser grande o suficiente.

A fib Bulletin 14 (2001) fornece as seguintes limitações na profundidade da zona de compressão na ruptura:

$$\xi \leq 0,45 \text{ para concreto do tipo C35/45 ou menor;} \quad (2.31)$$

$$\xi \leq 0,35 \text{ para tipos de concreto maiores que C35/45;} \quad (2.32)$$

onde $\xi = x/d$, sendo x a profundidade da linha neutra e d a altura útil da viga.

Baseando-se nas equações (2.31) e (2.32), com deformação última no concreto $\varepsilon_{cu} = 3,5\%$ e $h/d \approx 1,1$, as seguintes verificações podem ser formuladas em termos da mínima deformação no PRF na ocasião da ruptura:

$$\varepsilon_{fu,c} \geq 0,005 - \varepsilon_o \text{ para concreto do tipo C35/45 ou menor;} \quad (2.33)$$

$$\varepsilon_{fu,c} \geq 0,0075 - \varepsilon_o \text{ para tipos de concreto maiores que C35/45;} \quad (2.34)$$

onde $\varepsilon_{fu,c}$ é a deformação no PRF na seção crítica na ocasião da ruptura.

Em termos da mínima deformação na armadura interna de tração, seguem as equações:

$$\varepsilon_{su,c} \geq 4,3\% \text{ para concreto do tipo C35/45 ou menor;} \quad (2.35)$$

$$\varepsilon_{su,c} \geq 6,5\% \text{ para tipos de concreto maiores que C35/45;} \quad (2.36)$$

onde $\varepsilon_{su,c}$ é a deformação na armadura de tração na seção crítica na ocasião da ruptura. Baseando-se em tipos de aço S500 (deformação característica de escoamento $\varepsilon_{yk}=2,5\%$), isto significa que a deformação na armadura $\varepsilon_{su,c}$ deve ser igual, no mínimo, a 1,7 ou 2,6 vezes sua deformação de escoamento. Conseqüentemente, o índice mínimo de curvatura de ductilidade pode ser aproximado como:

$$\delta_{\chi,\min} \approx 1,7 \text{ para aço S500 e concreto do tipo C35/45 ou menor;} \quad (2.37)$$

$$\delta_{\chi,\min} \approx 2,6 \text{ para aço S500 e tipos de concreto maiores que C35/45;} \quad (2.38)$$

onde δ_{χ} é igual a curvatura na ruptura χ_u dividido pela curvatura no escoamento do aço χ_y . Estas curvaturas podem ser obtidas através de uma relação momento-curvatura, como as apresentadas em Triantafyllou e Plevris (1992).

3 ANÁLISE NÃO-LINEAR, ATRAVÉS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS, DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO REFORÇADAS

3.1 INTRODUÇÃO

O objetivo deste capítulo é apresentar uma formulação para análise não-linear de vigas de concreto armado reforçadas, através do Método dos Elementos Finitos, com solução em deslocamentos.

Inicialmente é feita uma descrição da formulação em deslocamentos para elementos isoparamétricos, usados para modelar o concreto. A partir das relações deformação-deslocamento é obtida a matriz de deformação linear do elemento. A seguir são definidos os vetores de tensão que serão utilizados. Finalmente, aplica-se o Princípio dos Trabalhos Virtuais (P.T.V.), deduzindo-se o sistema de equações não-lineares de equilíbrio que governa o problema.

Apresenta-se como caso particular a solução do problema para um material elástico-linear, dentro do regime de pequenas deformações e pequenos deslocamentos. Deve-se salientar que esta formulação linear apenas servirá para o ajuste incremental-iterativo, sendo útil como parte do processo de solução de sistemas de equações não-lineares.

A inclusão das barras de armadura no modelo de elementos finitos será feita empregando-se o chamado *modelo incorporado*.

O sistema de reforço estrutural é representado através de elementos de treliça, possuindo os mesmos três pontos nodais e funções quadráticas de interpolação.

É incluído no modelo um elemento especial de interface para simular a aderência entre o concreto e o sistema de reforço estrutural, o qual é representado através de um elemento unidimensional de seis nós com funções quadráticas de interpolação.

Com o objetivo de acelerar a convergência do processo de solução do sistema de equações não-lineares é utilizado o método BFGS (STRICKLIN et al., 1973). O esquema

incremental-iterativo empregado na solução dos problemas não-lineares é mostrado no final do capítulo.

3.2 ELEMENTOS FINITOS PARA O CONCRETO

3.2.1 Geometria do elemento

Na figura 3.1 é mostrada uma estrutura plana, representada através de seu plano médio, e que se encontra submetida a um carregamento formado por forças distribuídas e concentradas. O procedimento inicial do método dos elementos finitos consiste em dividir o plano médio da estrutura a ser analisada em pequenos elementos bidimensionais (elementos finitos), que estão conectados entre si por meio de pontos nodais.

Na solução em deslocamentos as incógnitas do problema são os deslocamentos dos pontos nodais, sendo que as deformações e tensões no interior do elemento, bem como as reações de apoio, são calculadas a partir destes.

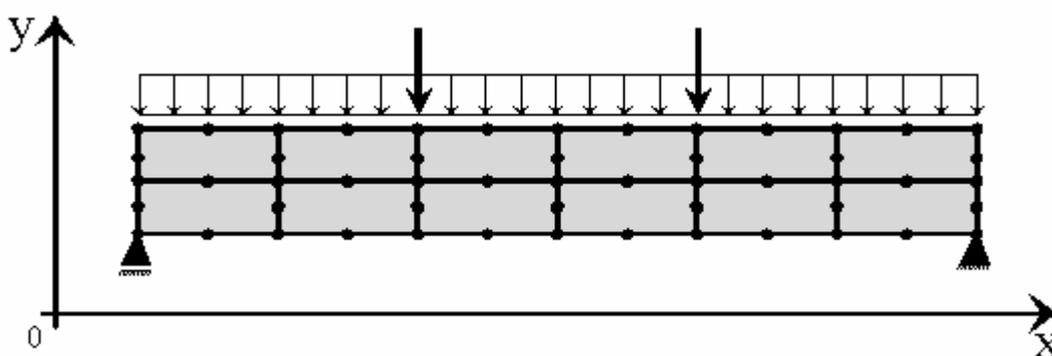


Figura 3.1- Discretização de uma estrutura plana em elementos finitos de 8 nós

Neste trabalho são utilizados elementos isoparamétricos quadráticos, de 8 nós, da família Serendipity, cuja geometria se encontra descrita na figura 3.2. Como sistema de referência local do elemento é adotado um sistema de coordenadas naturais ξ e η . Os pontos nodais se encontram numerados de 1 a 8.

Os elementos isoparamétricos quadráticos são muito versáteis, pois permitem discretizar estruturas com contornos curvilíneos, além de sua excelente performance estar

comprovada em diversos estudos (HINTON, 1977; OWEN, 1980; ZIENKIEWICZ, 1989, 1991).

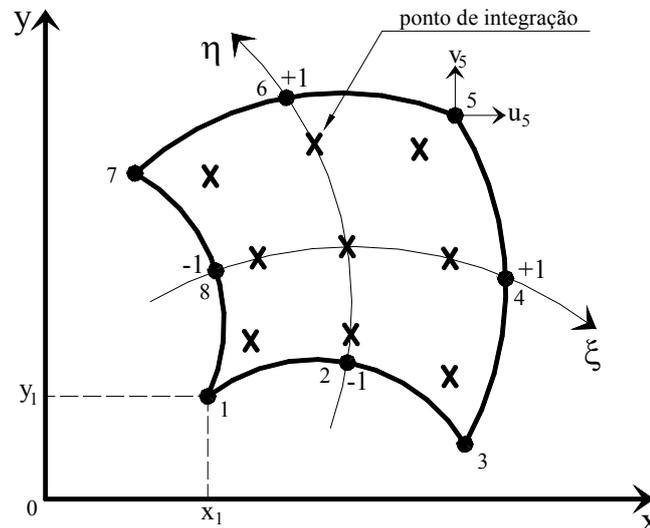


Figura 3.2 – Geometria do elemento isoparamétrico quadrático

3.2.2 Campo de deslocamentos

O primeiro passo em uma análise de estruturas sob estado plano de tensão, através do método dos elementos finitos, com solução em deslocamentos, é descrever de forma única o campo de deslocamentos no interior do elemento em função dos deslocamentos dos pontos nodais.

Mediante o emprego de funções de interpolação, e seguindo a formulação clássica do método dos elementos finitos apresentada em Zienkiewicz (1989), o campo de deslocamentos no interior do elemento é obtido através dos deslocamentos nodais a partir da expressão:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 \begin{bmatrix} N_i(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & N_i(\xi, \eta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}, \quad (3.1)$$

onde u e v são as componentes de deslocamento em um ponto qualquer do elemento nas direções x e y respectivamente. O vetor de deslocamentos do nó i possui as componentes u_i e v_i , nas direções x e y , respectivamente.

As funções de interpolação quadráticas bidimensionais, que têm como variáveis independentes as coordenadas naturais ξ e η , e a numeração dos nós indicada na figura 3.2, são as seguintes (HINTON, 1977):

$$N_1 = -\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta), \quad (3.2)$$

$$N_2 = +\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta), \quad (3.3)$$

$$N_3 = +\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1), \quad (3.4)$$

$$N_4 = +\frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2), \quad (3.5)$$

$$N_5 = +\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1), \quad (3.6)$$

$$N_6 = +\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta), \quad (3.7)$$

$$N_7 = +\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1), \quad (3.8)$$

$$N_8 = +\frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2). \quad (3.9)$$

O elemento isoparamétrico é aquele no qual são empregadas as mesmas funções tanto para interpolar a geometria, quanto para interpolar os deslocamentos. Desta forma, adotando-se o sistema de coordenadas naturais (ξ, η) no elemento, as coordenadas cartesianas $x(\xi, \eta)$ e $y(\xi, \eta)$ em um ponto dentro do elemento são fornecidas pela expressão:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 \begin{bmatrix} N_i(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & N_i(\xi, \eta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix}, \quad (3.10)$$

onde x_i e y_i são as coordenadas cartesianas do nó i .

Cada função de interpolação deve assumir o valor unitário quando são fornecidas as coordenadas do nó que lhe corresponde e deve anular-se quando forem dadas as coordenadas de outro nó. Em um ponto qualquer no interior do elemento, a soma dos valores das funções de interpolação para as coordenadas deste ponto deve ser igual à unidade.

3.2.3 Campo de deformações

O campo de deformações no interior do elemento é obtido através do campo de deslocamentos, empregando-se as relações deformação-deslocamento apresentadas na equação (3.11), ou seja:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad (3.11)$$

onde ε_x , ε_y e γ_{xy} são as componentes de deformação para a situação de estado plano de tensão. Após o sinal de igualdade da equação (3.11) é apresentada a parcela linear das relações deformação-deslocamento. Assim, levando-se em conta a equação (3.1), a equação (3.11) pode ser escrita, para as componentes de deformação no interior do elemento, da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}, \quad (3.12)$$

sendo a matriz que contém as derivadas das funções de interpolação em relação as coordenadas cartesianas chamada de *matriz de deformações linear*, \mathbf{B} . Assim, pode-se escrever a equação (3.12) como mostra a equação abaixo:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{U}^e, \quad (3.13)$$

onde \mathbf{U}^e é o vetor de deslocamentos nodais do elemento.

3.2.4 Campo de tensões

A fim de especificar de forma completa o estado de tensões num ponto de uma estrutura, apresenta-se na figura 3.3 um cubo elementar submetido a um estado plano de tensões representado por componentes normais e tangenciais, σ_x , σ_y e τ_{xy} .

O conjunto destas componentes forma o tensor de tensões σ , cuja matriz, no sistema global de referência, é apresentada na equação (3.14).

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

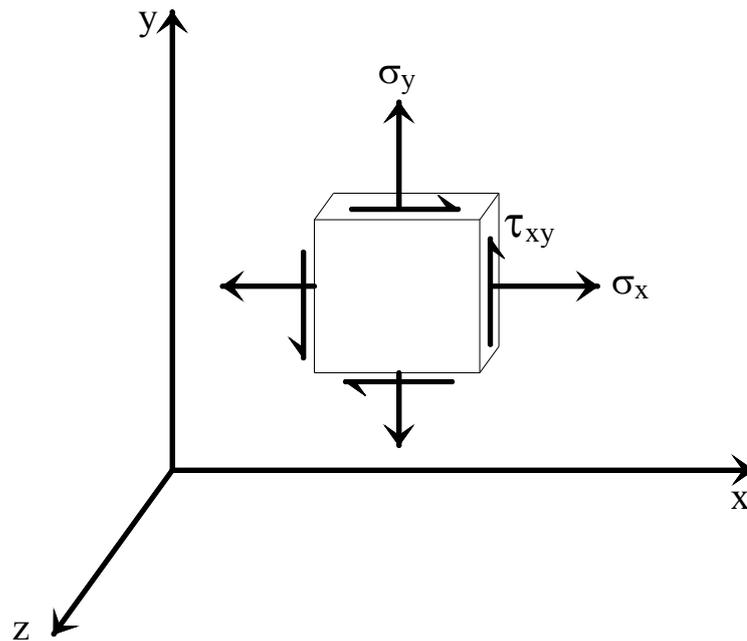


Figura 3.3 – Ponto submetido a um estado plano de tensões

Para serem utilizadas dentro da formulação do método dos elementos finitos, as componentes de tensão devem ser organizadas na forma de um vetor. Assim sendo, as tensões organizadas vetorialmente serão dadas por:

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (3.15)$$

3.2.5 Definição das forças atuantes

Neste trabalho, admite-se como hipótese que o carregamento da estrutura não seja alterado pela deformação da mesma.

A rigor, no regime de grandes deslocamentos, esta hipótese somente é válida para cargas concentradas que não mudam de direção em função da deformação da estrutura (BATHE, 1982).

Neste trabalho considera-se a situação de pequenas deformações e pequenos deslocamentos, assim sendo, as variações de volume e de superfície da configuração original para a configuração deformada são pequenas, e podem, portanto, serem desprezadas.

Na definição das ações nodais equivalentes às forças de volume serão empregados os pesos específicos dos materiais e será considerado o volume indeformado do corpo. Da mesma forma, na definição das ações nodais equivalentes às forças de superfície serão empregados os valores iniciais das forças distribuídas sobre a superfície indeformada da estrutura.

Para as forças de volume é válida a seguinte relação:

$$\mathbf{b} = \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \end{Bmatrix}, \quad (3.16)$$

onde b_x e b_y são forças de volume atuando sobre um elemento de volume da configuração indeformada dV_0 .

As forças de superfície agindo sobre um elemento de superfície da configuração indeformada dS_0 são apresentadas na equação (3.17).

$$\mathbf{t} = \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \end{Bmatrix} \quad (3.17)$$

3.2.6 O Princípio dos Trabalhos Virtuais

Seja um único elemento sujeito à atuação das forças descritas anteriormente, que causam o surgimento de uma distribuição de tensões equilibrantes $\boldsymbol{\sigma}$.

Considerando que este elemento seja submetido a uma variação arbitrária dos deslocamentos $\delta\mathbf{U}^e$, que resulta em um campo de deslocamentos compatível no interior do elemento $\delta\mathbf{u}$. Desta forma, a primeira variação do vetor de deslocamentos \mathbf{u} em um dado ponto do elemento será dada por:

$$\delta\mathbf{u} = \mathbf{N} \delta\mathbf{U}^e, \quad (3.18)$$

e a correspondente variação das componentes de deformação, também compatível, $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$, será dada na forma:

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\delta\mathbf{U}^e. \quad (3.19)$$

Utilizando-se as definições feitas anteriormente, a expressão do Princípio dos Trabalhos Virtuais assume o seguinte aspecto, em uma notação matricial apropriada ao método dos elementos finitos:

$$\int_{V_0} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_{S_0} \delta\mathbf{u}^T \mathbf{t} dS + \int_{V_0} \delta\mathbf{u}^T \mathbf{b} dV \quad (3.20)$$

onde V_0 e S_0 referem-se respectivamente ao volume e à superfície carregada de um elemento finito no sistema indeformado.

Substituindo-se as expressões (3.18) e (3.19) em (3.20), resulta:

$$\int_{V_0} \delta\mathbf{U}^{e,T} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_{S_0} \delta\mathbf{U}^{e,T} \mathbf{N}^T \mathbf{t} dS + \int_{V_0} \delta\mathbf{U}^{e,T} \mathbf{N}^T \mathbf{b} dV. \quad (3.21)$$

Como a variação dos deslocamentos nodais $\delta\mathbf{U}^e$ é arbitrária pode ser eliminada da equação (3.21), logo

$$\int_{V_0} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_{S_0} \mathbf{N}^T \mathbf{t} dS + \int_{V_0} \mathbf{N}^T \mathbf{b} dV. \quad (3.22)$$

A equação (3.22) expressa a condição de equilíbrio para um elemento. Esta equação é válida para qualquer material, uma vez que até o momento não se lançou mão de nenhuma equação constitutiva. Pode-se, também, colocá-la na forma:

$$\mathbf{A}_{NL}^e(\mathbf{U}^e) = \mathbf{P}^e, \quad (3.23)$$

onde

$$\mathbf{A}_{NL}^e = \int_{V_0} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV \quad (3.24)$$

é o vetor de ações nodais não-lineares do elemento, e

$$\mathbf{P}^e = \int_{S_0} \mathbf{N}^T \mathbf{t} dS + \int_{V_0} \mathbf{N}^T \mathbf{b} dV \quad (3.25)$$

é o vetor de ações nodais equivalentes às cargas externas aplicadas sobre o elemento.

Observe-se que o vetor \mathbf{A}_{NL}^e é uma função não-linear do vetor de deslocamentos nodais do elemento \mathbf{U}^e . Esta não-linearidade é causada pela relação tensão-deformação não-linear do material.

Somando-se, para cada nó de elemento em que foi discretizada a estrutura, para cada grau de liberdade, as contribuições dos elementos que para ele concorrem, chega-se a:

$$\mathbf{A}_{NL}(\mathbf{U}) = \mathbf{P}, \quad (3.26)$$

que é a equação de equilíbrio global da estrutura, onde $\mathbf{A}_{NL}(\mathbf{U})$ é o vetor de ações não-lineares da estrutura, e \mathbf{P} é o vetor de cargas nodais aplicadas sobre a estrutura.

A equação (3.26) pode ser reescrita na forma:

$$\mathbf{P} - \mathbf{A}_{NL}(\mathbf{U}) = \mathbf{0}, \quad (3.27)$$

que representa um sistema de equações não-lineares de equilíbrio nodal entre as cargas nodais externas e as ações nodais nos elementos. Onde \mathbf{U} é o vetor de deslocamentos nodais global da estrutura, e $\mathbf{0}$ é um vetor nulo, ambos com as dimensões $n \times 1$, sendo n o número de graus de liberdade total da estrutura.

Se o vetor de deslocamentos nodais da estrutura \mathbf{U} , não for a solução exata para a equação (3.27), existirá um vetor de forças residuais desequilibradas $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{U})$, dado por:

$$\boldsymbol{\psi}(\mathbf{U}) = \mathbf{P} - \mathbf{A}_{NL}(\mathbf{U}). \quad (3.28)$$

O problema da análise não-linear de estruturas, através do Método dos Elementos Finitos, com solução em deslocamentos, consiste em encontrar o vetor de deslocamentos nodais \mathbf{U} , que torne o vetor de forças desequilibradas nulo, ou seja:

$$\boldsymbol{\psi}(\mathbf{U}) = \mathbf{0}. \quad (3.29)$$

O sistema de equações (3.29) é resolvido numericamente através do método apresentado no item 3.6 deste mesmo capítulo.

3.2.7 Caso particular: Material elástico-linear no regime pequenos deslocamentos

Para que se possa desenvolver o algoritmo de solução da equação (3.29), é necessário estabelecer a equação de equilíbrio da estrutura, para um material elástico-linear, dentro do regime de pequenas deformações e pequenos deslocamentos.

Considerando que a estrutura seja formada por um material que obedeça a Lei de Hooke, cujo módulo de deformação é E , e cujo coeficiente de Poisson é ν , a equação constitutiva para o problema de estado plano de tensão pode ser estabelecida na forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (3.30)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}$ é vetor de componentes de tensão, conforme definido em (3.15), $\boldsymbol{\varepsilon}$ é o vetor de componentes de deformação, dado por (3.11), e \mathbf{D} a matriz constitutiva, ou matriz de constantes elásticas, que para o problema de estado plano de tensão é dada na forma:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}. \quad (3.31)$$

Substituindo a equação (3.30) na equação (3.22), e fazendo-se uso da equação (3.13), tem-se:

$$\int_{V_0} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \mathbf{U}^e = \int_{S_0} \mathbf{N}^T \mathbf{t} dS + \int_{V_0} \mathbf{N}^T \mathbf{b} dV. \quad (3.32)$$

Lembrando-se ainda da equação (3.25), podemos escrever a equação (3.32) como segue.

$$\mathbf{K}_L^e \mathbf{U}^e = \mathbf{P}^e, \quad (3.33)$$

onde a matriz

$$\mathbf{K}_L^e = \int_{V_0} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV, \quad (3.34)$$

é a matriz de rigidez linear do elemento, possuindo a dimensão de 16×16 , sendo 16 o número total de graus de liberdade do elemento finito isoparamétrico quadrático de 8 nós, para o estado plano de tensões.

Efetuada-se o somatório em cada grau de liberdade nodal da estrutura das contribuições dos elementos que incidem em um mesmo nó, segundo a equação (3.33) chega-se a:

$$\mathbf{P} = \mathbf{K}_L \mathbf{U}, \quad (3.35)$$

onde \mathbf{K}_L é a matriz de rigidez global linear da estrutura.

Resulta então, um sistema de equações lineares de equilíbrio de $n \times n$, onde n é o número total de graus de liberdade da estrutura, que, uma vez resolvido, fornece os deslocamentos nodais para o carregamento aplicado. A partir do vetor de deslocamentos nodais da estrutura \mathbf{U} , é possível montar-se o vetor de deslocamentos nodais do elemento \mathbf{U}^e . Pode-se, agora, calcular as deformações através de (3.13), e as tensões por meio de (3.30).

A equação (3.35) será empregada como parte do processo de solução do sistema de equações não-lineares dado por (3.29), conforme será mostrado adiante.

3.2.8 Matriz de rigidez do elemento de concreto

Possuindo o elemento de concreto oito pontos nodais, sendo que para cada ponto existem dois graus de liberdade, a matriz de rigidez linear do elemento \mathbf{K}_L^e possuirá as dimensões de 16×16 . Como visto através da equação (3.34), e sabendo-se que a espessura do elemento para um estado plano de tensão é h , a expressão para \mathbf{K}_L^e pode ser escrita na forma:

$$\mathbf{K}_L^e = \int_{S_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} h dS, \quad (3.36)$$

onde S_e é a área do elemento contida no plano xoy , e dS é um elemento infinitesimal desta mesma superfície.

A integral da equação (3.36) é normalmente calculada através de métodos numéricos, como a Quadratura de Gauss-Legendre. Sabendo-se que o elemento é definido em relação as coordenadas naturais ξ e η , que a matriz de deformações \mathbf{B} é definida pelas derivadas das funções de interpolação em relação as coordenadas cartesianas, e que as funções de

interpolação são funções de ξ e η , aplica-se a regra da cadeia para se obter as seguintes relações:

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta}, \quad (3.38)$$

organizando matricialmente as equação (3.37) e (3.38), tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix}, \quad (3.39)$$

ou

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix}, \quad (3.40)$$

sendo \mathbf{J} a matriz Jacobiana do elemento, que pode também ser escrita fazendo-se uso da equação (3.10) na forma:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix}. \quad (3.41)$$

Após as definições apresentadas acima, a equação para o cálculo da matriz de rigidez linear do elemento \mathbf{K}_L^e pode ser escrita como mostrada na equação (3.42)

$$\mathbf{K}_L^e = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} h |\mathbf{J}| d\xi d\eta, \quad (3.42)$$

onde $|\mathbf{J}|$ é o determinante da matriz Jacobiana do elemento.

Neste trabalho a integral da equação (3.42) é resolvida através do método da Quadratura de Gauss-Legendre, empregando-se a regra de 3x3 pontos de integração.

3.3 ELEMENTOS FINITOS PARA A ARMADURA

Para a análise não-linear de estruturas de concreto armado, encontram-se basicamente três métodos para a inclusão da armadura em um modelo de elementos finitos: o modelo distribuído, o modelo incorporado e o modelo discreto (DARWIN, 1991).

No modelo distribuído, considera-se que a armadura seja uniformemente distribuída no elemento finito. Adota-se a hipótese de aderência perfeita entre o aço e o concreto. Este modelo é apropriado para estruturas em que a armadura é composta por barras pouco espaçadas, formando malhas normalmente ortogonais.

No modelo discreto, representa-se a armadura através de elementos de barra de treliça plana, que se conectam à malha de elementos finitos para o concreto por meio de seus nós de extremidade. Neste modelo, a disposição das barras da armadura é limitada pela malha de elementos de concreto, e vice-versa. Além disso, sendo linear o campo de deslocamentos no elemento de treliça, para que haja compatibilidade rigorosa de deslocamentos, o elemento de concreto deve também ser do tipo linear.

No modelo incorporado, a armadura é considerada como uma linha de material mais rígido no interior do elemento de concreto. Adotando-se a hipótese de aderência perfeita, os deslocamentos de um elemento de armadura serão os mesmos do elemento de concreto que o envolve, resultando em um único campo de deslocamentos. As barras de aço podem assumir uma posição arbitrária dentro do elemento de concreto.

Neste estudo é empregado o modelo incorporado, devido a sua maior generalidade na disposição das armaduras em relação aos modelos distribuído e discreto, tendo por base os trabalhos de Elwi e Hrudey (1989) e de Prates Júnior (1992).

3.3.1 Modelo incorporado

No modelo incorporado para a armadura, considera-se que a barra de aço resiste apenas a esforços axiais e que os deslocamentos de qualquer ponto da barra são coincidentes com os deslocamentos do concreto na mesma posição. Desta forma, a barra de aço pode ser

disposta de maneira arbitrária no interior do elemento de concreto, sem que sejam introduzidas incógnitas adicionais no problema.

As barras de aço são representadas por elementos unidimensionais isoparamétricos. Através destes elementos podem ser modeladas barras retas e curvas. Os deslocamentos da barra de aço são determinados a partir dos deslocamentos nodais do elemento de concreto.

Deste modo, a matriz de rigidez da armadura possui as mesmas dimensões da matriz do elemento de concreto, sendo a matriz de rigidez do concreto armado a soma das duas. A expressão para o cálculo da matriz de rigidez do elemento de concreto armado é dada por:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_C + \sum_{i=1}^{nb} \mathbf{K}_{Si}, \quad (3.43)$$

onde nb é o número de segmentos de barra de aço contidos no elemento de concreto.

A matriz de rigidez de cada barra de armadura é definida pela expressão:

$$\mathbf{K}_s = \int_L \mathbf{B}_s^T E_s \mathbf{B}_s A_s ds, \quad (3.44)$$

onde L é o comprimento da barra de aço, A_s é área da seção transversal da armadura, E_s é o módulo de deformação longitudinal do aço e \mathbf{B}_s é o vetor que contém as relações deformações-deslocamento para a armadura.

3.3.2 Formulação geométrica

A geometria das barras de aço é definida em coordenadas cartesianas globais, independentemente da malha de elementos finitos. A geometria das barras retas fica definida por dois pontos, enquanto que para barras curvas são necessários três pontos para a sua definição.

O elemento de concreto, mostrado na figura 3.4, é descrito utilizando-se coordenadas globais (x,y) . As coordenadas naturais locais do elemento são (ξ,η) . De acordo com o procedimento usual para o mapeamento isoparamétrico, as coordenadas globais (x,y) de qualquer ponto no interior do elemento são obtidas através da equação (3.10).

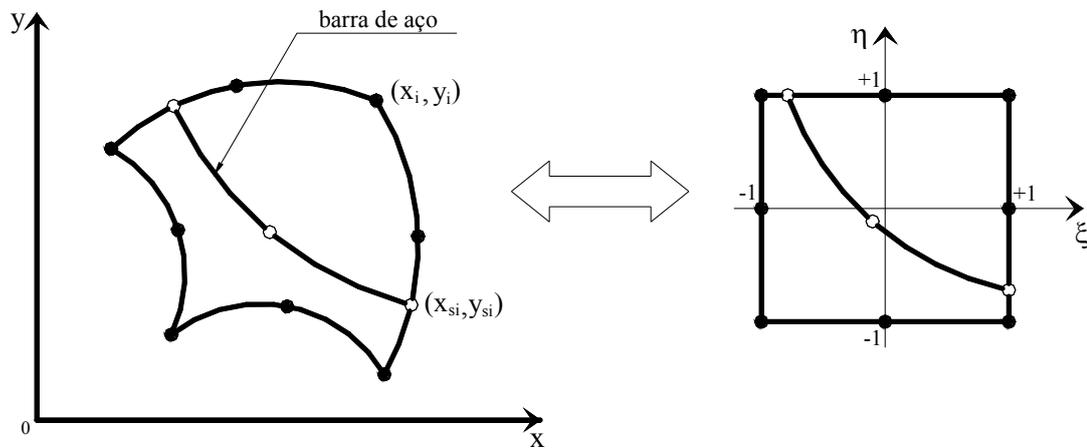


Figura 3.4 – Barra de aço inserida no elemento de concreto

As diferenciais das coordenadas cartesianas x e y , serão dadas por:

$$\begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^T \begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{Bmatrix}, \quad (3.45)$$

onde \mathbf{J} é a matriz Jacobiana do elemento, conforme definida na equação (3.41).

Uma vantagem significativa desta formulação é que a localização e a geometria da barra de aço podem ser estabelecidas independentemente da malha global. Uma vez criada a malha de elementos finitos de concreto, a armadura deve ser especificada por um conjunto de pontos nodais.

Para assegurar uma continuidade interelementar adequada, é necessário colocar nós nos elementos de barra, onde a armadura atravessa o elemento de concreto. As coordenadas dos nós da barra de aço, posicionados entre os nós de definição da mesma, são obtidos por interpolação. Deste modo, nós adicionais são colocados dentro do elemento de concreto.

Sendo x_{si} e y_{si} as coordenadas globais dos nós de uma barra de armadura associados a um dado elemento de concreto, as coordenadas de um ponto qualquer ao longo da barra, dentro deste elemento, são dadas por:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} H_j(\chi) & 0 \\ 0 & H_j(\chi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{sj} \\ y_{sj} \end{Bmatrix}, \quad (3.46)$$

onde $H_j(\chi)$ são funções de interpolação unidimensionais, que são expressas em função de uma coordenada normalizada independente χ .

No cálculo da rigidez associada a uma barra de armadura, é necessário fazer integrações ao longo da mesma. Para isto é necessário determinar um elemento diferencial de comprimento ds , ao longo da armadura. Conforme a figura 3.5, a orientação tangente à barra de aço é dada pelo ângulo β , onde:

$$\cos\beta = \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{d\chi} \frac{d\chi}{ds}, \quad (3.47)$$

e

$$\sin\beta = \frac{dy}{ds} = \frac{dy}{d\chi} \frac{d\chi}{ds}, \quad (3.48)$$

sendo $\cos\beta$ e $\sin\beta$ os cossenos diretores da reta tangente a barra de aço no ponto considerado.

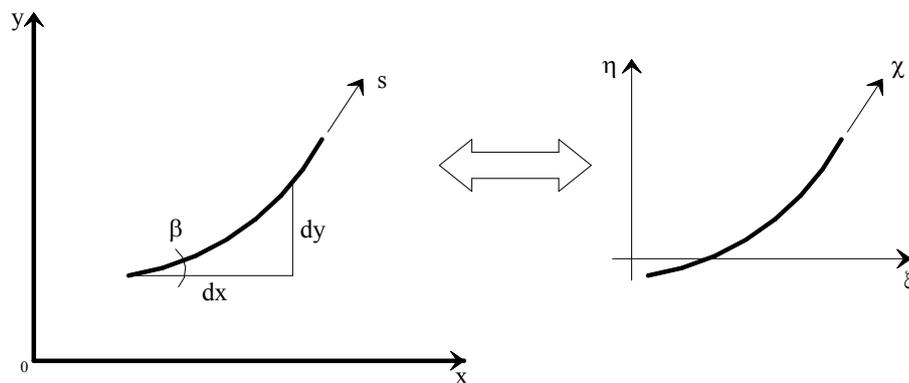


Figura 3.5 – Coordenadas ao longo do eixo da armadura

Lembrando-se que

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \quad (3.49)$$

resulta

$$\frac{ds}{d\chi} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\chi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\chi}\right)^2}, \quad (3.50)$$

onde

$$\begin{Bmatrix} \frac{dx}{d\chi} \\ \frac{dy}{d\chi} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} \frac{dH_j}{d\chi} & 0 \\ 0 & \frac{dH_j}{d\chi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{sj} \\ y_{sj} \end{Bmatrix}, \quad (3.51)$$

logo

$$\cos\beta = \frac{dx/d\chi}{ds/d\chi}, \quad (3.52)$$

e

$$\text{sen}\beta = \frac{dy/d\chi}{ds/d\chi}. \quad (3.53)$$

Desta forma, os cossenos diretores da reta tangente, em qualquer ponto ao longo da armadura, assim como o fator $ds/d\chi$, podem ser facilmente determinados empregando-se as equações acima.

Um elemento de volume dV_s da barra de aço pode ser expresso por:

$$dV_s = A_s ds. \quad (3.54)$$

Utilizando-se o fator descrito na equação (3.50), as integrais envolvendo elementos de volume ao longo da armadura podem ser escritas em termos da coordenada natural χ , como:

$$\int_{V_s} f(\chi) dV_s = \int_{\chi} f(\chi) A_s \frac{ds}{d\chi} d\chi \quad (3.55)$$

onde $f(\chi)$ é uma função de posição ao longo da armadura.

3.3.3 Determinação dos trechos de armadura

As barras de aço são posicionadas dentro da estrutura de concreto através de suas coordenadas globais (x,y) . Para a obtenção da matriz de rigidez total (concreto + aço) de um determinado elemento, necessita-se saber quais barras interceptam este elemento, atribuindo-lhe uma rigidez adicional.

A determinação dos segmentos de barras de aço que ficam no interior de um certo elemento de concreto é feita de forma automática através de uma subrotina computacional extraída do trabalho de Prates Júnior (1992). Uma vez encontrados estes trechos, é realizado o cálculo da matriz de rigidez da armadura.

A primeira etapa deste processo consiste na transformação das coordenadas globais $P_j(x_P, y_P)$, dos pontos de definição da geometria da barra, para as coordenadas naturais $P_j(\xi_P, \eta_P)$ dos mesmos. Para um dado ponto P_j de definição da barra de aço, é válida a seguinte relação:

$$\begin{Bmatrix} x_P \\ y_P \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 \begin{bmatrix} N_i(\xi_P, \eta_P) & 0 \\ 0 & N_i(\xi_P, \eta_P) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix}, \quad (3.56)$$

onde (x_i, y_i) são as coordenadas dos nós do elemento de concreto considerado.

A obtenção de uma forma explícita para ξ_P, η_P a partir da equação (3.56) não é tarefa simples de ser realizada. Elwi e Hrudey (1989) sugerem a utilização do algoritmo de Newton-Raphson para a sua determinação numérica. Desta forma, a determinação de ξ_P, η_P está baseada no fato de que estas coordenadas são as raízes do seguinte sistema de equações não-lineares:

$$f(\xi, \eta) = \begin{Bmatrix} x_P \\ y_P \end{Bmatrix} - \sum_{i=1}^8 \begin{bmatrix} N_i(\xi_P, \eta_P) & 0 \\ 0 & N_i(\xi_P, \eta_P) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (3.57)$$

Empregando-se o método de Newton-Raphson, tem-se, após $k+1$ iterações,

$$\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix}_P^{k+1} = \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix}_P^k + \begin{Bmatrix} \Delta \xi \\ \Delta \eta \end{Bmatrix}_P^{k+1}, \quad (3.58)$$

onde

$$\begin{Bmatrix} \Delta \xi \\ \Delta \eta \end{Bmatrix}_P^{k+1} = [\mathbf{J}^k]^{T,-1} \left(\begin{Bmatrix} x_P \\ y_P \end{Bmatrix} - \sum_{i=1}^8 \begin{bmatrix} N_i(\xi_P^k, \eta_P^k) & 0 \\ 0 & N_i(\xi_P^k, \eta_P^k) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix} \right), \quad (3.59)$$

sendo $[\mathbf{J}^k]^{T,-1}$ a inversa da matriz Jacobiana do elemento de concreto, na iteração k .

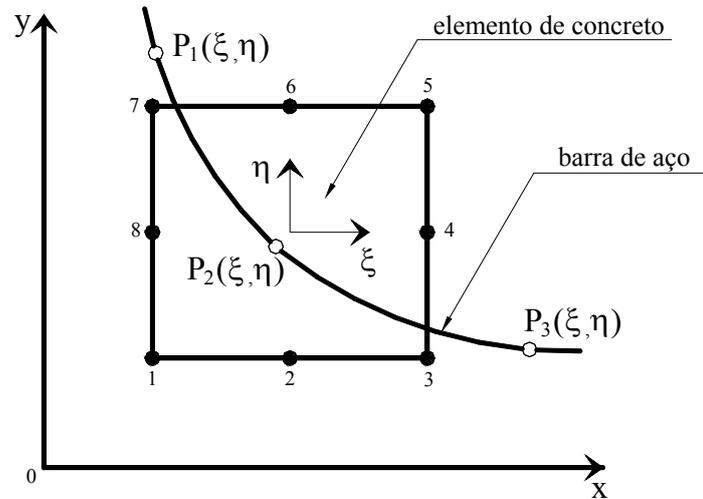


Figura 3.6 – Curva que define a barra de aço

A segunda etapa do processo, após a determinação das coordenadas naturais dos pontos $P_j(\xi_j, \eta_j)$, é a definição da curva que passa por estes pontos, conforme ilustrado pela figura 3.6.

As coordenadas dos pontos da curva que define o eixo da barra de aço podem ser obtidas, mediante o emprego de polinômios interpoladores de Lagrange (ZIENKIEWICZ, 1989), através das seguintes expressões:

$$\xi = \sum_{i=1}^{np} f_i(\eta) \xi_i, \quad (3.60)$$

e

$$\eta = \sum_{i=1}^{np} g_i(\xi) \eta_i, \quad (3.61)$$

onde, para os np pontos de definição da barra de aço, são calculadas as funções (polinômios de Lagrange)

$$f_i(\eta) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{np} \frac{(\eta - \eta_j)}{(\eta_i - \eta_j)}, \quad (3.62)$$

e

$$g_i(\xi) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{np} \frac{(\xi - \xi_j)}{(\xi_i - \xi_j)}. \quad (3.63)$$

Esta forma de definir as coordenadas dos pontos da curva vem a facilitar o cálculo das intersecções desta com os bordos do elemento de concreto.

A terceira etapa consiste na determinação da intersecção da curva P_1, P_2, \dots, P_{np} com cada um dos quatro lados do elemento de concreto. Para tal, fixa-se a coordenada $\xi = \pm l$, do elemento de concreto, e calcula-se a coordenada η da intersecção lado do elemento de concreto – curva da barra. Caso $-l \leq \eta \leq +l$, significa que a barra intercepta este lado do elemento. De forma análoga, fixa-se $\eta = \pm l$, e se verifica se $-l \leq \xi \leq +l$.

A quarta e última etapa do processo consiste em criar nós intermediários no segmento de armadura e no interior do elemento de concreto. Dependendo do grau da curva que define a barra, são criados zero, um ou dois nós intermediários, conforme é mostrados na figura 3.7.

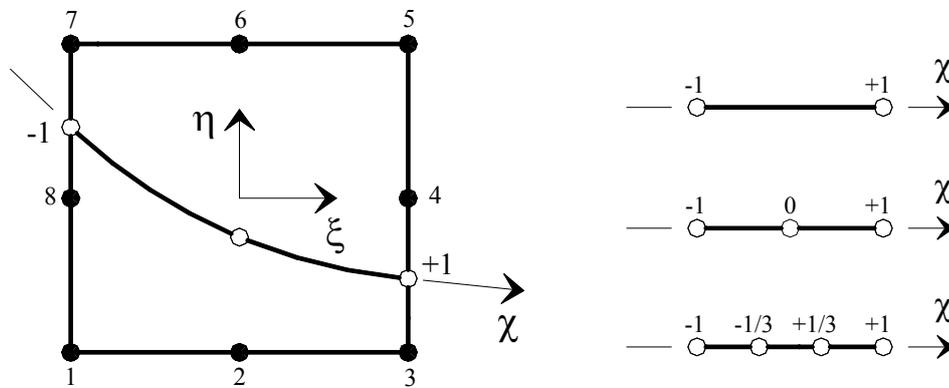


Figura 3.7 – Segmento de armadura dentro do elemento de concreto

3.3.4 Funções de forma para os elementos de armadura

As funções de interpolação para o elemento de armadura são polinômios de Lagrange, definidos de acordo com Zienkiewicz (1989), a partir da expressão:

$$H_k^m(\chi) = \frac{(\chi - \chi_1) \dots (\chi - \chi_{k-1})(\chi - \chi_{k+1}) \dots (\chi - \chi_m)}{(\chi_k - \chi_1) \dots (\chi_k - \chi_{k-1})(\chi_k - \chi_{k+1}) \dots (\chi_k - \chi_m)}, \quad (3.64)$$

que possui valor unitário para $\chi = \chi_k$, e anula-se para $\chi = \chi_i$, sendo $i \neq k$.

Para o elemento de 2 nós, tem-se as seguintes funções de forma:

$$H_1 = \frac{1 - \chi}{2} \quad \text{e} \quad H_2 = \frac{1 + \chi}{2} \quad (3.65)$$

Para o elemento de 3 nós, resultam as seguintes funções de forma:

$$H_1 = \frac{\chi(\chi - 1)}{2}, \quad H_2 = 1 - \chi^2 \quad \text{e} \quad H_3 = \frac{\chi(\chi + 1)}{2} \quad (3.66)$$

Finalmente, para o elemento de 4 nós, as funções de forma são dadas pelas expressões:

$$\begin{aligned} H_1 &= -\frac{1}{16}(9\chi^3 - 9\chi^2 - \chi + 1), & H_2 &= +\frac{9}{16}(3\chi^3 - \chi^2 - 3\chi + 1), \\ H_3 &= -\frac{9}{16}(3\chi^3 + \chi^2 - 3\chi - 1) & \text{e} & \quad H_4 = +\frac{1}{16}(9\chi^3 + 9\chi^2 - \chi - 1). \end{aligned} \quad (3.67)$$

3.3.5 Matriz de rigidez e vetor de ações nodais para a armadura

Considerando-se a hipótese de aderência perfeita entre o aço e o concreto que o envolve, o campo de deslocamentos da armadura é idêntico àquele do elemento de concreto no qual a barra de aço está inserida.

No entanto, formula-se também a hipótese de que uma barra de aço resiste apenas a esforços normais, na direção tangente ao seu eixo. Portanto, a deformação ao longo da armadura é igual à deformação normal, no elemento de concreto, na direção tangente ao eixo da barra.

Assim sendo, as componentes de deformação em um ponto do elemento de concreto, que coincide com um ponto por onde passa uma barra de aço, serão calculadas a partir da equação (3.12). Estabelecendo-se equações para transformação de deformações, e conhecendo-se ε_x , ε_y e γ_{xy} , a deformação da armadura, na direção tangente ao seu eixo, será dada por (POPOV, 1984):

$$\varepsilon_s = \varepsilon_x \cos^2 \beta + \varepsilon_y \sin^2 \beta + \gamma_{xy} \sin \beta \cos \beta. \quad (3.68)$$

A equação (3.68) pode ser reescrita, lembrando a equação (3.11), na forma:

$$\varepsilon_s = \frac{\partial u}{\partial x} \cos^2 \beta + \frac{\partial v}{\partial y} \sin^2 \beta + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \beta \cos \beta + \frac{\partial v}{\partial x} \sin \beta \cos \beta, \quad (3.69)$$

ou ainda, lembrando-se da definição do campo de deslocamentos do elemento de concreto dada por (3.1):

$$\varepsilon_s = \sum_{i=1}^8 \left(\cos^2 \beta \frac{\partial N_i}{\partial x} + \sin \beta \cos \beta \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) u_i + \sum_{i=1}^8 \left(\sin^2 \beta \frac{\partial N_i}{\partial y} + \sin \beta \cos \beta \frac{\partial N_i}{\partial x} \right) v_i. \quad (3.70)$$

A equação (3.70) também pode ser organizada na forma de um produto escalar entre dois vetores, ou seja:

$$\varepsilon_s = \mathbf{B}_s^T \mathbf{U}^e, \quad (3.71)$$

onde \mathbf{U}^e é o vetor de deslocamentos do elemento de concreto, e \mathbf{B}_s o vetor das relações deformação-deslocamento para a armadura, dado por:

$$\mathbf{B}_s^T = \{ \mathbf{B}_{s1}^T, \mathbf{B}_{s2}^T, \dots, \mathbf{B}_{s8}^T \}, \quad (3.72)$$

onde um subvetor genérico \mathbf{B}_{si} é fornecido pela expressão:

$$\mathbf{B}_{si} = \begin{Bmatrix} \cos^2 \beta \frac{\partial N_i}{\partial x} + \sin \beta \cos \beta \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \sin^2 \beta \frac{\partial N_i}{\partial y} + \sin \beta \cos \beta \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad (3.73)$$

sendo que as derivadas das funções de interpolação em relação às coordenadas cartesianas são calculadas segundo a equação (3.40).

A contribuição da armadura para o trabalho virtual interno pode ser calculada a partir da expressão:

$$\delta W_{is} = \int_{V_s} \delta \varepsilon_s \sigma_s dV, \quad (3.74)$$

onde σ_s é a tensão normal atuante na armadura e V_s o volume da mesma.

Substituindo-se a primeira variação da deformação da armadura na equação (3.74), e sabendo-se que a primeira variação do vetor de deslocamentos nodais do elemento de concreto é arbitrária, obtém-se a equação do vetor de ações nodais não-lineares equivalentes da armadura na forma:

$$(\mathbf{A}_{NL})_S^e = \int_{V_s} \mathbf{B}_S \sigma_S dV, \quad (3.75)$$

ou ainda, lembrando-se a equação (3.55),

$$(\mathbf{A}_{NL})_S^e = \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}_S \sigma_S A_S \frac{ds}{d\chi} d\chi, \quad (3.76)$$

que é a expressão que permite calcular as ações nodais equivalentes auto-equilibradas, correspondentes ao estado de tensão a que se encontra submetida a armadura.

Admitindo-se que o aço obedeça a Lei de Hooke com um módulo de elasticidade E_S , o que normalmente acontece do início do carregamento até as imediações da ruptura da estrutura, a equação constitutiva para o aço assume a forma:

$$\sigma_S = E_S \varepsilon_S. \quad (3.77)$$

Substituindo (3.77) e (3.71) em (3.76), tem-se que:

$$(\mathbf{A}_L)_S^e = \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}_S E_S \mathbf{B}_S^T A_S \frac{ds}{d\chi} d\chi \mathbf{U}^e, \quad (3.78)$$

onde $(\mathbf{A}_L)_S^e$ é o vetor de ações lineares para a armadura. A equação (3.78) pode, ainda, ser escrita na forma:

$$(\mathbf{A}_L)_S^e = \mathbf{K}_{SL}^e \mathbf{U}^e, \quad (3.79)$$

onde

$$\mathbf{K}_{SL}^e = \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}_S E_S \mathbf{B}_S^T A_S \frac{ds}{d\chi} d\chi, \quad (3.80)$$

é a definição da matriz de rigidez da armadura.

3.4 ELEMENTOS FINITOS PARA O REFORÇO

A necessidade do aumento da capacidade resistente à flexão de vigas de concreto armado, com o propósito de reabilitação ou reforço, pode conduzir a situações nas quais sistemas de reforço devem ser colados na face tracionada dos elementos estruturais para absorver os esforços de tração devidos aos momentos fletores. Este sistema de reforço acaba aumentando a rigidez e a carga de ruptura da estrutura e reduzindo deflexões e a fissuração.

Para ser inserido no contexto da formulação para análise não-linear de vigas de concreto armado através do Método dos Elementos Finitos, o reforço será modelado através de elementos discretos de barra de treliça plana, quadráticos, com três pontos nodais. O elemento é fixado ao restante da malha de elementos finitos, através de um elemento de interface, o qual será apresentado no item 3.5 deste mesmo capítulo.

3.4.1 Formulação do elemento

O reforço colado externamente à estrutura, e modelado através de elementos de barra de treliça, é definido através das coordenadas cartesianas globais dos pontos nodais dos elementos. Estes elementos são capazes de absorver somente esforços na direção do seu eixo longitudinal.

Na figura 3.8 é mostrado o elemento usado na discretização do sistema de reforço, seus graus de liberdade (deslocamentos horizontais), bem como o sistema da coordenada natural do elemento ζ . Deve ser salientado aqui que os sistemas de coordenadas, cartesiano e natural do elemento, possuem a mesma direção, não necessitando que se faça a rotação da matriz de rigidez do elemento do sistema local para o sistema global.

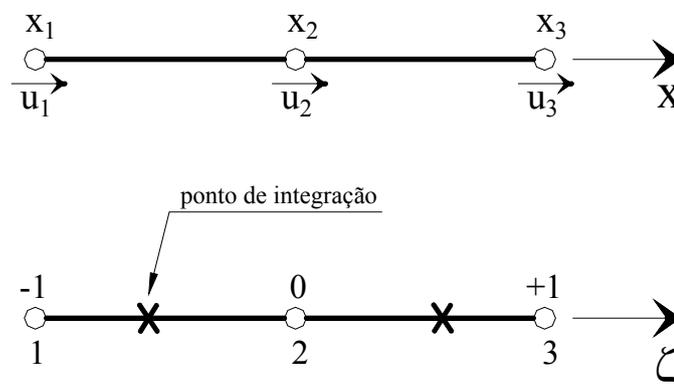


Figura 3.8 – Elemento quadrático de barra de treliça

Para que possa ser definida uma coordenada x no interior do elemento de reforço, e estabelecido o campo de deslocamentos em qualquer ponto do mesmo, deve fazer-se uso de funções de interpolação quadráticas unidimensionais. Estas funções, sendo a numeração correspondente aos nós da figura 3.8, têm a forma:

$$N_1(\zeta) = -\frac{1}{2}\zeta(1-\zeta), \quad (3.81)$$

$$N_2(\zeta) = 1-\zeta^2, \quad (3.82)$$

$$N_3(\zeta) = +\frac{1}{2}\zeta(1+\zeta). \quad (3.83)$$

Desta forma, adotando-se a coordenada natural ζ no elemento, a coordenada cartesiana x no interior do elemento de reforço é fornecida pela expressão:

$$x(\zeta) = \sum_{i=1}^3 N_i(\zeta) x_i \quad (3.84)$$

onde x_i é a coordenada cartesiana do nó i do elemento de reforço.

Através dos deslocamentos dos pontos nodais, o deslocamento horizontal u no interior do elemento é obtido mediante o emprego das funções de interpolação, fazendo-se uso da expressão:

$$u = \sum_{i=1}^3 N_i(\zeta) u_i \quad (3.85)$$

sendo que u_i é o deslocamento na direção do eixo global x do nó i do elemento de reforço.

3.4.2 Deformação no reforço

Conhecido o deslocamento ao qual um ponto qualquer no sistema de reforço é submetido, a deformação ε_R neste mesmo ponto pode ser calculada da seguinte forma:

$$\varepsilon_R = \frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_i(\zeta)}{\partial x} u_i, \quad (3.86)$$

e reescrevendo a mesma equação em uma forma matricial chega-se a:

$$\varepsilon_R = \mathbf{B}_R \mathbf{U}_R^e, \quad (3.87)$$

onde \mathbf{U}_R^e é o vetor de deslocamentos do elemento de reforço, e \mathbf{B}_R o vetor das relações deformação-deslocamento, dado por:

$$\mathbf{B}_R = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1(\zeta)}{\partial x} & \frac{\partial N_2(\zeta)}{\partial x} & \frac{\partial N_3(\zeta)}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad (3.88)$$

sendo que, para o cálculo das derivadas das funções de interpolação em relação a coordenada cartesiana x , é necessário estabelecer as seguintes expressões:

$$\frac{\partial N_i(\zeta)}{\partial x} = J_R^{-1} \frac{\partial N_i(\zeta)}{\partial \zeta}, \quad (3.89)$$

e

$$J_R = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_i(\zeta)}{\partial \zeta} x_i, \quad (3.90)$$

onde J_R é o jacobiano do elemento de reforço.

3.4.3 Matriz de rigidez e vetor de ações nodais para o reforço

Para a obtenção da matriz de rigidez de um elemento de reforço, e do vetor de ações nodais, deve ser calculada a sua contribuição para o trabalho virtual realizado pelas forças internas, sendo que tal contribuição pode ser obtida através da equação (3.91).

$$\delta W_{iR} = \int_{V_R} \delta \varepsilon_R^T \sigma_R dV \quad (3.91)$$

onde σ_R é a tensão normal atuante no reforço e V_R o volume do mesmo.

Substituindo-se a primeira variação da deformação no reforço na equação (3.91), e sabendo-se que a primeira variação do vetor de deslocamentos do reforço é arbitrária, portanto pode ser eliminada, a equação para as ações nodais não-lineares do elemento de reforço pode ser escrita na forma:

$$(\mathbf{A}_{NL})_R^e = \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}_R^T \sigma_R \mathbf{A}_R |J_R| d\zeta. \quad (3.92)$$

Na equação (3.92) A_R representa a área da seção transversal do reforço e $|J_R|$ pode ser calculado através da equação (3.90).

Admitindo-se que a relação entre a tensão e a deformação no reforço seja linear, com um módulo de elasticidade E_R , e sabendo-se que através da equação (3.87) a deformação é calculada, o vetor de ações nodais lineares para o reforço será dado por:

$$(\mathbf{A}_L)_R^e = \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}_R^T E_R \mathbf{B}_R A_R |J_R| d\zeta \mathbf{U}_R^e, \quad (3.93)$$

ou de uma outra forma

$$(\mathbf{A}_L)_R^e = \mathbf{K}_{RL}^e \mathbf{U}_R^e \quad (3.94)$$

onde

$$\mathbf{K}_{RL}^e = \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}_R^T E_R \mathbf{B}_R A_R |J_R| d\zeta \quad (3.95)$$

é a definição da matriz de rigidez do elemento de reforço.

Para o cálculo das integrais das equações (3.92) e (3.95), adota-se neste trabalho o método da Quadratura de Gauss-Legendre, empregando-se a regra de dois pontos de integração como é mostrado na figura 3.8.

3.5 ELEMENTOS FINITOS PARA A INTERFACE

No reforço à flexão de vigas em concreto armado com sistemas colados externamente às estruturas, é essencial o entendimento dos efeitos que o mesmo introduz em relação aos modos de falha. A revisão sobre estudos experimentais publicados na literatura mostra que vigas de concreto armado reforçadas possuem diferentes modos de falha, de dúcteis até rupturas muito frágeis foram observadas. Nos tipos de falhas se incluem modos nos quais a ação do reforço se dá na sua totalidade até a ruptura, e modos onde há a perda da eficiência do sistema de reforço devido à falha da aderência, levando a estrutura ao colapso.

Os modos de falha devidos ao descolamento ou delaminação do reforço são os mais observados em vigas de concreto armado reforçadas com lâminas de PRF (THOMSEM et al., 2004), assim, os valores das cargas de ruptura acabam, a rigor, sendo limitados pela carga de destacamento do sistema de reforço. Este tipo de falha da aderência é do tipo frágil e é devido

à alta concentração de tensões na interface entre o substrato de concreto e o reforço na zona de ancoragem, ou nas proximidades de fissuras de flexão e cisalhamento.

A transferência de esforços entre o sistema de reforço e o concreto gera tensões de cisalhamento na interface entre os dois materiais, assim, para o cálculo destas tensões devem ser conhecidos os deslocamentos relativos entre os dois materiais. Para tal, é incluído no modelo de elementos finitos um elemento especial de interface para simular a aderência entre o substrato de concreto e o sistema de reforço estrutural, baseado no trabalho de Adhikary e Mutsuyoshi (2002).

Por impedir que as vigas de concreto armado reforçadas alcancem sua completa capacidade de carga à flexão, os mecanismos de falha da aderência devem ser entendidos e as propriedades da aderência do concreto conhecidas.

3.5.1 Formulação do elemento

O elemento finito isoparamétrico que será apresentado aqui consiste em um elemento de interface unidimensional com seis pontos nodais, funções quadráticas de interpolação e espessura nula. Este elemento é implementado para modelar a interface concreto-adesivo-reforço, e permite que o deslocamento relativo entre nós adjacentes de um elemento de concreto e um elemento de reforço seja levado em conta.

Semelhantemente ao elemento de reforço apresentado na seção anterior, os sistemas de coordenadas local do elemento e global da estrutura possuem a mesma direção, assim, a matriz de rigidez do elemento de interface é a mesma tanto para o sistema local quanto para o sistema global, não necessitando que se faça a rotação da mesma.

Na figura 3.9 é apresentado o elemento de interface, sendo que no item (a), u_i é o deslocamento na direção horizontal de um ponto nodal, e no item (b) é mostrado o sistema local do elemento e os pontos de integração que serão usados no processo de integração numérica para a obtenção da matriz de rigidez e do vetor de ações nodais não-lineares. Empregar-se-ão três pontos de integração.

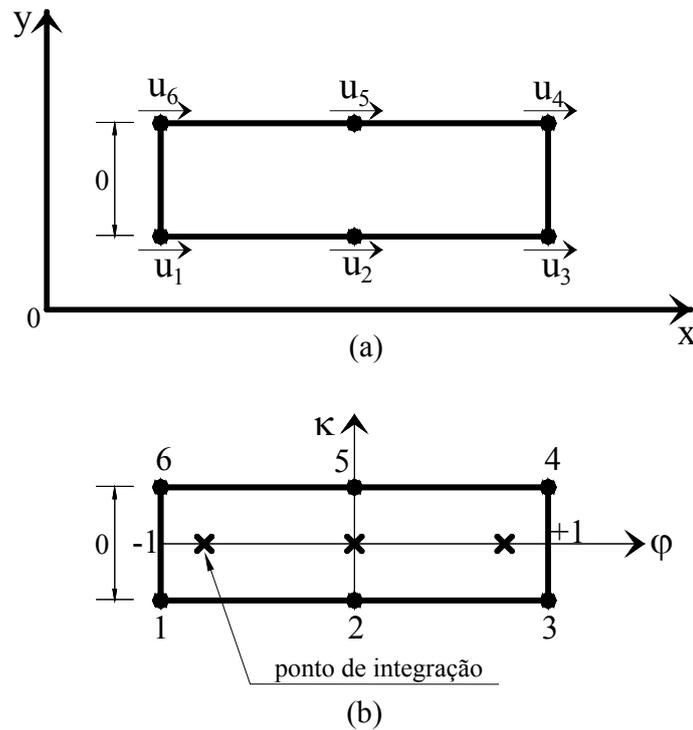


Figura 3.9 – Sistema global e local para o elemento de interface

Pelo fato da espessura do elemento de interface ser nula, é suficiente representá-lo através de equivalentes pseudo nós $1'$, $2'$ e $3'$ como apresentado na figura 3.10. Assim, a definição do elemento é feita através da coordenada x dos pseudo nós no sistema de coordenadas global da estrutura, porém o elemento será formulado em relação a uma coordenada normalizada independente φ . Em virtude disso, devem ser estabelecidas relações entre os dois sistemas de coordenadas, como será mostrado mais adiante.

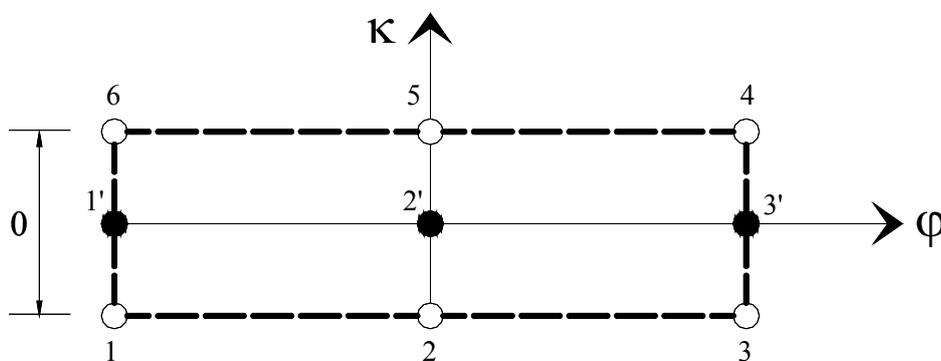


Figura 3.10 – Equivalentes pseudo nós

Por tratar-se de um elemento isoparamétrico, as funções quadráticas de interpolação serão usadas tanto para interpolar os deslocamentos relativos quanto para interpolar as coordenadas. Assim, as três funções de interpolação necessárias são designadas por $N'_1(\varphi)$, $N'_2(\varphi)$ e $N'_3(\varphi)$, tendo a forma:

$$N'_1(\varphi) = -\frac{1}{2}\varphi(1-\varphi), \quad (3.96)$$

$$N'_2(\varphi) = 1-\varphi^2, \quad (3.97)$$

$$N'_3(\varphi) = +\frac{1}{2}\varphi(1+\varphi). \quad (3.98)$$

A coordenada de um ponto no interior do elemento pode ser calculada interpolando-se as coordenadas dos pseudo nós, ou:

$$x(\varphi) = \sum_{i=1}^3 N'_i(\varphi) x'_i, \quad (3.99)$$

onde x'_i é a coordenada no sistema global do pseudo nó i .

No processo de discretização da estrutura em elementos finitos, os nós da face inferior do elemento de interface serão comuns aos nós do elemento de reforço adjacente, enquanto que os nós da face superior do mesmo elemento de interface serão comuns aos nós da face inferior do elemento adjacente de concreto. Na figura 3.11 é ilustrado como os elementos adjacentes de reforço e concreto são conectados através do elemento de interface.

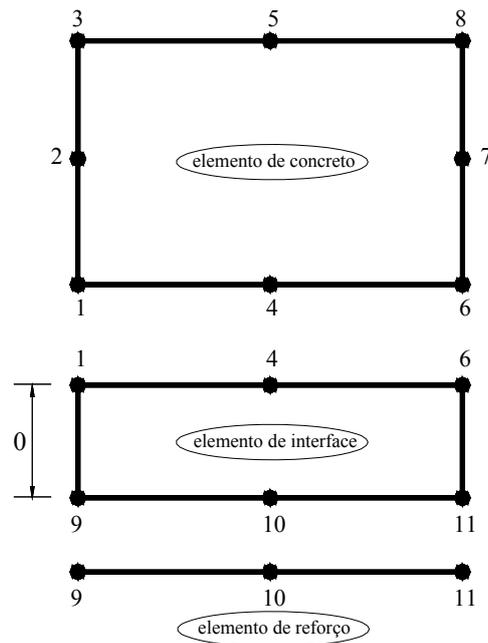


Figura 3.11 – Conexão entre os elementos

Diferentemente dos casos onde as tensões são funções das deformações, as tensões de aderência geradas entre o substrato de concreto e o reforço são funções dos deslocamentos relativos entre os dois materiais. Assim, o deslizamento s em um ponto do elemento de interface será dado pela expressão:

$$s = u_C - u_R, \quad (3.100)$$

onde u_C é o deslocamento horizontal do ponto considerado, no substrato de concreto, e u_R o deslocamento horizontal do ponto adjacente no elemento de reforço.

Sabendo-se que o deslocamento em um ponto qualquer do elemento é obtido mediante a interpolação dos deslocamentos dos pontos nodais do elemento, a equação para o deslizamento em um ponto qualquer pode ser obtido através de:

$$s = \sum_{i=1}^3 N'_i (u_{Ci} - u_{Ri}) = N'_1 (u_6 - u_1) + N'_2 (u_5 - u_2) + N'_3 (u_4 - u_3), \quad (3.101)$$

ou, organizando a equação (3.101) na forma de um produto escalar entre dois vetores, chega-se a:

$$s = \mathbf{B}_1 \mathbf{U}_1^c, \quad (3.102)$$

onde \mathbf{U}_I^e é o vetor de deslocamentos horizontais nodais do elemento de interface, sendo ele apresentado em sua forma transposta na equação a seguir.

$$\mathbf{U}_I^{e,T} = \{u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 \quad u_5 \quad u_6\} \quad (3.103)$$

Ao contrário da formulação convencional do método dos elementos finitos, as funções de interpolação não são diferenciáveis dentro do vetor \mathbf{B}_I que relaciona o deslizamento de um ponto aos deslocamentos nodais, assim \mathbf{B}_I assume a forma:

$$\mathbf{B}_I = \{-N'_1 \quad -N'_2 \quad -N'_3 \quad N'_3 \quad N'_2 \quad N'_1\}. \quad (3.104)$$

3.5.2 Matriz de rigidez e vetor de ações nodais para a interface

O emprego do Princípio dos Trabalhos Virtuais permitirá chegar-se até a equação de equilíbrio do elemento de interface. Em decorrência disso, a matriz de rigidez e o vetor de ações nodais do elemento serão obtidos.

O trabalho virtual realizado pelas forças internas à interface será dado segundo a expressão:

$$\delta W_{il} = \int_V \delta s^T \tau \, dV. \quad (3.105)$$

onde τ é a tensão de aderência entre o elemento de concreto e o elemento de reforço.

Considerando agora que este elemento seja submetido a uma variação arbitrária dos deslocamentos $\delta \mathbf{U}_I^e$, que resulta em um deslizamento compatível no interior do elemento δs . Desta forma, a primeira variação do deslizamento s em um dado ponto do elemento será:

$$\delta s = \mathbf{B}_I \delta \mathbf{U}_I^e, \quad (3.106)$$

Substituindo-se (3.106) em (3.105), pode ser encontrada a integral de linha que representa o vetor de ações nodais não-lineares para o elemento de interface na forma:

$$(\mathbf{A}_{NL})_I^e = \int_{\Gamma} \delta \mathbf{U}_I^{e,T} \mathbf{B}_I^T \tau \, b_f \, dx, \quad (3.107)$$

onde b_f é a largura do elemento de interface, ou seja, b_f é a largura do sistema de reforço.

Por ser a variação δU_1^e arbitrária, ela pode ser eliminada da equação (3.107), resultando assim, a equação para o cálculo do vetor de ações nodais não-lineares no sistema local do elemento do seguinte modo:

$$(\mathbf{A}_{NL})_1^e = \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}_1^T \tau b_f |J_1| d\varphi, \quad (3.108)$$

onde $|J_1|$ é o determinante do jacobiano do elemento de interface, e pode ser obtido mediante o emprego da seguinte equação:

$$|J_1| = \frac{dx}{d\varphi} = \sum_{i=1}^3 \frac{dN'_i(\varphi)}{d\varphi} x'_i. \quad (3.109)$$

Como o cálculo da matriz de rigidez tangente à origem do problema serve para dar início ao processo de solução da equação (3.29), se assumirá que a tensão de aderência seja linearmente proporcional ao deslizamento até a ruptura. Esta aproximação é válida porque o algoritmo necessita apenas de uma estimativa da matriz de rigidez inicial do problema, assim:

$$\tau = k_s s, \quad (3.110)$$

onde k_s é a rigidez ao cisalhamento.

Fazendo-se a substituição para a tensão de aderência na equação (3.108), e sabendo-se que o deslizamento em um ponto pode ser calculado com o emprego da equação (3.102), obtém-se a equação de equilíbrio do elemento de interface na forma:

$$(\mathbf{A}_L)_1^e = \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}_1^T k_s \mathbf{B}_1 b_f |J_1| d\varphi \mathbf{U}_1^e, \quad (3.111)$$

sendo $(\mathbf{A}_L)_1^e$ o vetor de ações nodais lineares para a interface.

A equação (3.111) pode ainda ser escrita de uma outra maneira como mostrado na equação a seguir.

$$(\mathbf{A}_L)_1^e = \mathbf{K}_{IL}^e \mathbf{U}_1^e, \quad (3.112)$$

onde

$$\mathbf{K}_{IL}^e = \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}_1^T k_s \mathbf{B}_1 b_f |J_1| d\varphi, \quad (3.113)$$

é a definição da matriz de rigidez do elemento de interface.

3.6 SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES NÃO-LINEARES

Uma análise rigorosa de estruturas de concreto armado exige a consideração do comportamento mecânico não-linear dos materiais.

Através da aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais, chega-se a um sistema de equações não-lineares dado pela equação (3.28). O objetivo deste item é apresentar um algoritmo numérico para a solução deste sistema, ou seja, encontrar o vetor de deslocamentos nodais \mathbf{U} para o qual se verifique o equilíbrio.

Como forma de acelerar a convergência do processo de solução adota-se o método BFGS (STRICKLIN et al., 1973), sendo que os resultados obtidos com a aplicação deste processo em termos de economia de tempo de computação são significativos em relação a outros métodos tradicionais, como o método de Newton-Raphson padrão e Newton-Raphson modificado.

3.6.1 O método BFGS

Como alternativas para acelerar a convergência do processo de solução do sistema de equações não-lineares surgem os métodos Quasi-Newton (STRICKLIN et al., 1973). Eles nascem da idéia de atualizar a matriz de rigidez tangente de uma maneira mais simples em cada iteração, ao invés de recalculá-la de forma completa (método de Newton-Raphson padrão) ou de mantê-la constante (método de Newton-Raphson modificado).

Existem diversas fórmulas para uma atualização simplificada da matriz tangente, contudo, algumas restrições devem ser impostas (MATTHIES e STRANG, 1979):

a) A nova matriz \mathbf{K}_r deve satisfazer a equação Quasi-Newton, dada na forma:

$$\mathbf{K}_r \Delta \mathbf{U}_r = \boldsymbol{\psi}_r - \boldsymbol{\psi}_{r+1}, \quad (3.114)$$

que, para um problema unidimensional, equivale a aproximar a direção tangente por uma reta secante à curva em dois pontos sucessivos, conforme é ilustrado na figura 3.12.

b) Se \mathbf{K}_{r-1} é simétrica, então, a nova matriz \mathbf{K}_r também deve ser simétrica.

c) Se \mathbf{K}_{r-1} é uma matriz positivo-definida, então, a nova matriz \mathbf{K}_r também deve ser positivo-definida.

d) Como condição essencial, o novo vetor de incremento de deslocamentos ΔU_r deve poder ser calculado com um pequeno custo computacional.

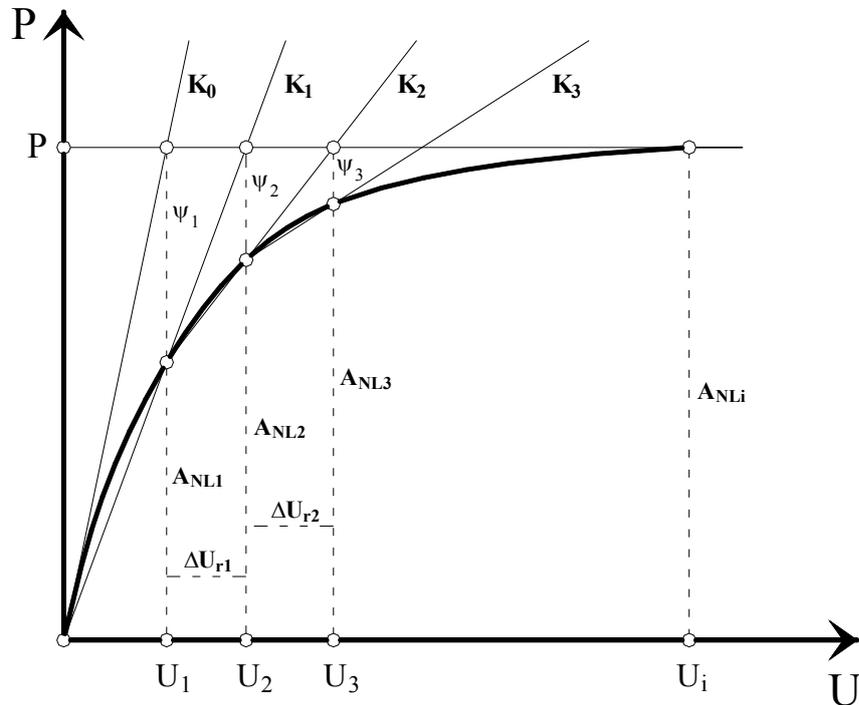


Figura 3.12 – O método Quasi-Newton para o caso unidimensional

Uma fórmula de atualização da matriz tangente que satisfaz a todas as exigências fixadas acima é a atualização de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS), que pode ser escrita de forma mais conveniente em termos de \mathbf{K}_r^{-1} , ao invés de ser dada em função de \mathbf{K}_r .

A atualização aproximada da matriz tangente inversa, segundo o método BFGS, pode ser dada por:

$$\mathbf{K}_r^{-1} = (\mathbf{I} + \mathbf{w}_r \mathbf{v}_r^T) \mathbf{K}_{r-1}^{-1} (\mathbf{I} + \mathbf{v}_r \mathbf{w}_r^T), \quad (3.115)$$

onde \mathbf{I} é uma matriz identidade $n \times n$, sendo n o número de graus de liberdade da estrutura, e \mathbf{w}_r e \mathbf{v}_r são vetores de atualização, com n componentes, que serão definidos adiante. Observe-se que os requisitos de simetria e a condição de matriz positivo-definida são satisfeitos de forma imediata devido ao fato de que os fatores que multiplicam a matriz \mathbf{K}_r^{-1} serem um o transposto do outro.

Assim é possível, partindo-se da matriz tangente na origem \mathbf{K}_0 , obterem-se sucessivas atualizações aproximadas da matriz de rigidez tangente a cada nova iteração. Substituindo-se

o cálculo rigoroso da matriz tangente por sua atualização aproximada dada por (3.115), pode-se utilizar a fórmula de recorrência do método de Newton-Raphson padrão dada por:

$$\Delta \mathbf{U}_r = (\mathbf{K}_T^{-1})_r [\mathbf{P} - \mathbf{A}_{NLr}(\mathbf{U}_r)], \quad (3.116)$$

e

$$\mathbf{U}_{r+1} = \mathbf{U}_r + \Delta \mathbf{U}_r, \quad (3.117)$$

onde \mathbf{K}_T é a matriz de rigidez tangente.

Para evitar o processo de inversão da matriz de rigidez e acelerar o cálculo do novo vetor de deslocamentos, é interessante adotar-se o procedimento alternativo proposto por Matthies e Strang (1979). Observe-se que Matthies e Strang (1979) ainda propõem a adição de um processo de busca (*line-search*), para definir o tamanho do passo na direção do vetor de incremento de deslocamentos.

Para definir os vetores de atualização \mathbf{w}_r e \mathbf{v}_r , é interessante antes introduzir-se as diferenças:

$$\boldsymbol{\delta}_r = \mathbf{U}_r - \mathbf{U}_{r-1}, \quad (3.118)$$

e

$$\boldsymbol{\gamma}_r = \boldsymbol{\Psi}_{r-1} - \boldsymbol{\Psi}_r. \quad (3.119)$$

Os vetores de atualização podem, então, ser escritos na forma:

$$\mathbf{v}_r = \boldsymbol{\Psi}_r - \boldsymbol{\Psi}_{r-1} \left[1 + \sqrt{\frac{\boldsymbol{\delta}_{r-1}^T \boldsymbol{\gamma}_r}{\boldsymbol{\delta}_r^T \boldsymbol{\Psi}_r}} \right], \quad (3.120)$$

e

$$\mathbf{w}_r = \frac{1}{\boldsymbol{\delta}_r^T \boldsymbol{\gamma}_r} \boldsymbol{\delta}_r. \quad (3.121)$$

A convergência dos métodos Quasi-Newton é denominada de superlinear, ou seja, superior à convergência de primeira ordem, e suas condições de convergência e estabilidade têm sido estudadas por diversos autores. A eficiência computacional varia de acordo com o

problema, tendo sido observados ganhos de até 35% em relação ao método de Newton-Raphson (STRICKLIN et al., 1973).

3.6.2 O algoritmo incremental-iterativo

A carga total a ser aplicada sobre a estrutura é dividida em um certo número de partes iguais, obtendo-se assim o vetor de incremento de carga $\Delta\mathbf{P}$, ou seja,

$$\Delta\mathbf{P} = \frac{\mathbf{P}}{N_{etap}}, \quad (3.122)$$

onde \mathbf{P} é o vetor de cargas externas total e N_{etap} é o número de etapas de carga que serão aplicadas na estrutura.

O vetor de cargas no final de cada etapa de carga \mathbf{P}_i é obtido adicionando-se o vetor de incremento de cargas ao vetor de cargas da etapa anterior \mathbf{P}_{i-1} , isto é:

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_{i-1} + \Delta\mathbf{P}. \quad (3.123)$$

Cada etapa do processo de carregamento inicia-se com um desequilíbrio $\Delta\mathbf{P}$ entre o vetor de cargas aplicadas \mathbf{P}_i e o vetor de ações nodais não-lineares $(\mathbf{A}_{NL})_i$. Portanto, deve ser empregado um processo iterativo que permita determinar o vetor de deslocamentos nodais \mathbf{U} , para o qual seja estabelecido o equilíbrio entre cargas externas e esforços internos. Neste trabalho emprega-se o método BFGS, para o ajuste do equilíbrio em cada etapa de carga.

Em uma dada etapa do processo de solução do sistema de equações não-lineares, considera-se que tenha sido atingida a convergência, quando forem satisfeitas simultaneamente as duas condições abaixo, em uma dada iteração r .

$$\frac{\|\boldsymbol{\Psi}_r\|}{\|\mathbf{P}_i\|} \leq 1\% \quad (3.124)$$

e

$$\frac{\|\Delta\mathbf{U}_r\|}{\|\mathbf{U}_r\|} \leq 1\% \quad (3.125)$$

onde:

$\|\boldsymbol{\Psi}_r\|$ é a norma euclidiana do vetor de forças desequilibradas;

$\|\mathbf{P}_i\|$ é a norma euclidiana do vetor de cargas da etapa;

$\|\Delta\mathbf{U}_r\|$ é a norma euclidiana do vetor de incremento de deslocamentos;

$\|\mathbf{U}_r\|$ é a norma euclidiana do último vetor de deslocamentos obtido.

Quando o material chega ao esgotamento de sua capacidade de oferecer esforços resistentes que equilibrem o carregamento externo, é sinal que a estrutura atingiu a ruptura. Este fato é detectado pelo algoritmo, quando não é mais possível satisfazer o critério de convergência dado por (3.124) e (3.125), pois o vetor de desequilíbrio $\boldsymbol{\psi}$ não pode ser reduzido a valores próximos de zero, por maior que seja o número de iterações.

Quando esta situação é atingida, o incremento de carga inicial é dividido por 2, retorna-se à configuração do início da etapa, e tenta-se novamente obter a convergência. Não sendo obtido êxito, divide-se o incremento inicial por 4, volta-se a situação do início da etapa, e busca-se novamente um ponto de equilíbrio. Se após estas tentativas uma configuração estável não for alcançada, admite-se que a estrutura tenha atingido o colapso. Este procedimento permite a determinação da carga de ruptura da estrutura com muito boa precisão.

4 MODELOS CONSTITUTIVOS DOS MATERIAIS

4.1 INTRODUÇÃO

Uma representação consistente do comportamento mecânico dos materiais envolvidos na análise estrutural é de grande importância para um bom desempenho da análise numérica através do método dos elementos finitos. Assim, modelos matemáticos devem ser estabelecidos para o desenvolvimento das relações constitutivas (leis tensão-deformação) dos materiais concreto, aço e do sistema de reforço.

Estas relações constitutivas devem modelar o comportamento físico real dos materiais quando submetidos a tensões e deformações devidas às condições de carregamento que a estrutura apresenta. Diante disso, são necessárias equações constitutivas mais sofisticadas que o simples modelo linear. Dentre os modelos não-lineares mais empregados pode-se citar os modelos baseados na Teoria da Elasticidade Não-Linear e na Teoria da Plasticidade (CHEN e SALEB, 1982).

No decorrer deste capítulo são descritos os modelos constitutivos adotados para os materiais concreto, aço, reforço, e para a interface entre o concreto e o sistema de reforço.

4.2 MODELO CONSTITUTIVO BIDIMENSIONAL PARA O CONCRETO EM ESTADO ÍNTEGRO

Muitos dos materiais normalmente utilizados nas aplicações de engenharia são homogêneos e isotrópicos. Porém, isto não se aplica ao concreto, um material de comportamento heterogêneo e anisotrópico, daí a maior complexidade na sua análise.

Para a representação do comportamento do concreto sob cargas monotônicas de curta duração, é empregado um modelo constitutivo bidimensional desenvolvido por Darwin (DARWIN e PECKNOLD, 1977a e 1977b), que é apropriado para o emprego na análise não-linear de estruturas, através do método dos elementos finitos, sendo também recomendado pelo Código Modelo CEB-FIP 1990 (CEB, 1993).

Por ser o concreto de uma viga solicitado biaxialmente, será introduzido aqui um conceito de deformação uniaxial equivalente para o cálculo das tensões segundo as direções de deformações principais, através de uma relação tensão-deformação uniaxial equivalente.

4.2.1 Deformação uniaxial equivalente

Em um estado biaxial de tensões, a deformação em uma direção não é função apenas da tensão naquela direção, mas sim, devido ao efeito de Poisson, dependente da tensão atuante na direção ortogonal. O conceito de deformação uniaxial equivalente fornece um meio de separar o efeito de Poisson das deformações acumuladas e permite uma representação conveniente dos resultados experimentais.

Para uma melhor compreensão da definição de deformação uniaxial equivalente, é útil analisar-se o comportamento de um material elástico linear, conforme é ilustrado pela figura 4.1. Uma curva representa o gráfico tensão-deformação para a situação de compressão uniaxial. A outra curva representa a relação tensão-deformação segundo a direção mais comprimida, para um estado de compressão biaxial, onde $\sigma_1 = \alpha\sigma_2$. É possível, então, observar-se o efeito enrijecedor que a compressão transversal exerce.

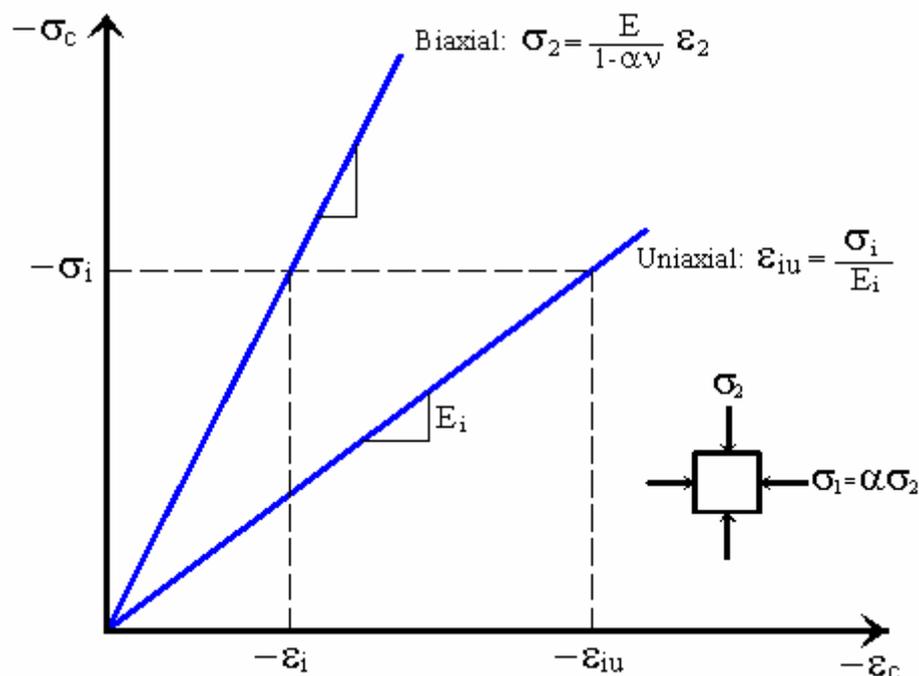


Figura 4.1 – Deformação uniaxial equivalente para um material linear

Para cada relação entre as tensões principais α , a verdadeira relação tensão-deformação terá uma inclinação diferente, enquanto que uma única curva uniaxial equivalente representa a resposta de um material elástico linear.

O concreto, antes de se ter atingido um estado de fissuração ou de esmagamento, é modelado como um material ortotrópico elástico linear, com os eixos de ortotropia coincidindo com os eixos principais de deformação. Assim, para um material ortotrópico, que é um caso particular da anisotropia, a equação constitutiva segundo as direções principais de deformação 1 e 2 será dada por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{1}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} E_1 & \nu\sqrt{E_1E_2} & 0 \\ \nu\sqrt{E_1E_2} & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (4.1)$$

onde σ_1 e σ_2 são as tensões principais, ε_1 e ε_2 as deformações principais, E_1 e E_2 são os módulos de deformação secantes segundo as direções 1 e 2, respectivamente, e ν o coeficiente de Poisson do concreto. Então, a matriz constitutiva do material é definida em função das propriedades E_1 , E_2 e ν , que são consideradas como dependentes do estado de tensão e de deformação atual do ponto considerado. Os módulos secantes E_1 e E_2 , segundo as direções principais de deformação, são determinados a partir de curvas tensão-deformação semelhantes à curva tensão-deformação obtida para o concreto sob solicitação uniaxial. O coeficiente de Poisson ν foi considerado constante e igual a 0,20.

Para um material de comportamento não-linear, as deformações uniaxiais equivalentes, segundo as direções principais 1 e 2, são dadas por:

$$\varepsilon_{1u} = \frac{1}{(1-\nu^2)} \left[\varepsilon_1 + \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} \nu \varepsilon_2 \right] \quad (4.2)$$

$$\varepsilon_{2u} = \frac{1}{(1-\nu^2)} \left[\varepsilon_2 + \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \nu \varepsilon_1 \right].$$

Deve ser salientado que ε_{1u} e ε_{2u} não são realmente deformações, e, portanto não se transformam como as deformações verdadeiras sob uma rotação dos eixos de referência. Além disso, elas são determinadas nas direções principais de deformação, as quais geralmente vão variando durante o carregamento. Deste modo, ε_{1u} , por exemplo, não fornece uma

“história de deformação” segundo uma direção fixa, mas sim em uma direção que muda continuamente e que corresponde à deformação principal ε_I .

Contudo, a introdução destas variáveis permite representar o comportamento biaxial do concreto através de duas curvas tensão-deformação uniaxiais equivalentes separadas, bastante semelhantes à curva correspondente à sollicitação uniaxial do material.

Empregando-se as equações (4.2), a equação (4.1) pode ser escrita na forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{1u} \\ \varepsilon_{2u} \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (4.3)$$

Observa-se então, que as tensões principais podem ser obtidas de relações unidimensionais para o concreto, a partir das deformações uniaxiais equivalentes ε_{1u} e ε_{2u} . Isto é possível em virtude da equação (4.3) estar na forma desacoplada. Entretanto, para se obter as deformações uniaxiais equivalentes, é necessário conhecer os módulos secantes que, por sua vez, dependem das tensões. Um processo iterativo torna-se, então, necessário para a solução do problema (ARAÚJO e CAMPOS FILHO, 1992). Felizmente, 4 ou 5 iterações são suficientes para atingir a convergência dos módulos secantes E_1 e E_2 .

4.2.2 Critério de ruptura de KUPFER e GERSTLE

As expressões analíticas do critério de ruptura bidimensional para o concreto, propostas por Kupfer e Gerstle (1973) e recomendadas pelo Código Modelo CEB-FIP 1990 (CEB, 1993), servem de envoltória para as tensões máximas σ_{1f} e σ_{2f} , que podem ser atingidas pelo material, em cada uma das duas direções principais de tensão.

Na situação de compressão-compressão ($\sigma_1 < 0$ e $\sigma_2 < 0$), ou na situação de tração-compressão ($\sigma_1 > 0$ e $\sigma_2 < 0$), com $\sigma_2 < -0,96f_c$, valem as seguintes expressões:

$$\alpha = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}, \quad (4.4)$$

$$\sigma_{2f} = -\frac{(1 + 3,80\alpha)}{(1 + \alpha)^2} f_c, \quad (4.5)$$

e

$$\sigma_{1f} = -f_c, \text{ para } (\sigma_1 < 0 \text{ e } \sigma_2 < 0); \sigma_{1f} = f_{ct}, (\sigma_1 > 0 \text{ e } \sigma_2 < 0) \quad (4.6)$$

Para o caso de tração-compressão ($\sigma_1 > 0$ e $\sigma_2 < 0$), com $\sigma_2 > -0,96f_c$, são empregadas as expressões:

$$\sigma_{2f} = -f_c, \quad (4.7)$$

e

$$\sigma_{1f} = \left(1 + 0,8 \frac{\sigma_2}{f_c} \right) f_{ct}, \quad (4.8)$$

sendo f_{ct} a resistência à tração uniaxial do concreto.

Na situação de tração-tração ($\sigma_1 > 0$ e $\sigma_2 > 0$), permanecem válidas as resistências uniaxiais, ou seja:

$$\sigma_{1f} = f_{ct}, \quad (4.9)$$

$$\sigma_{2f} = f_{ct}. \quad (4.10)$$

O critério de ruptura de Kupfer e Gerstle é ilustrado pela figura 4.2, onde as tensões principais estão normalizadas pelo módulo da resistência média à compressão cilíndrica uniaxial do concreto f_c .

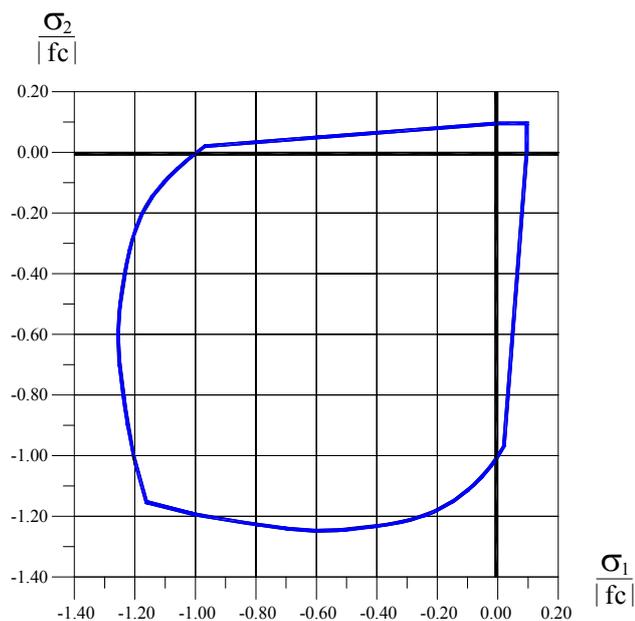


Figura 4.2 – Critério de ruptura bidimensional de Kupfer e Gerstle

4.2.3 Deformação correspondente à máxima tensão

Na situação de solitação biaxial, a deformação correspondente à tensão máxima em cada direção, ε_{c1f} e ε_{c2f} , deve ser determinada conforme a combinação das tensões principais máximas atuantes σ_{1f} e σ_{2f} (CEB, 1993). Assim, na compressão biaxial tem-se:

$$\varepsilon_{c2f} = -0,0022 \left(-3 \frac{\sigma_{2f}}{f_c} - 2 \right), \quad (4.11)$$

$$\varepsilon_{c1f} = -0,0022, \quad (4.12)$$

sendo $-0,0022$ a deformação correspondente à máxima tensão de compressão para o caso uniaxial.

Na situação de tração-compressão com $\sigma_2 < -0,96f_c$ valem as seguintes expressões:

$$\varepsilon_{c2f} = -0,0022 \left(-3 \frac{\sigma_{2f}}{f_c} - 2 \right), \quad (4.13)$$

e

$$\varepsilon_{c1f} = 0,00015. \quad (4.14)$$

Para o estado de tensão tração-compressão, com $\sigma_2 \geq -0,96f_c$, adotam-se as equações:

$$\varepsilon_{c2f} = -0,0022 \left[-1,6 \left(-\frac{\sigma_{2f}}{f_c} \right)^3 + 2,25 \left(-\frac{\sigma_{2f}}{f_c} \right)^2 + 0,35 \left(-\frac{\sigma_{2f}}{f_c} \right) \right], \quad (4.15)$$

$$\varepsilon_{c1f} = 0,00015. \quad (4.16)$$

No caso de tração-tração, as deformações últimas permanecem as mesmas da situação de tração uniaxial, ou seja:

$$\varepsilon_{c1f} = 0,00015, \quad (4.17)$$

$$\varepsilon_{c2f} = 0,00015. \quad (4.18)$$

4.2.4 Curvas uniaxiais equivalentes

Se as curvas tensão-deformação obtidas em ensaios de solitação biaxial para diferentes relações entre as tensões principais σ_1 e σ_2 são normalizadas em relação às tensões máximas e correspondentes deformações máximas observadas (ε_{cif} , σ_{if}), nota-se que as curvas resultantes são aproximadamente coincidentes. Portanto, é possível representá-las através de uma única expressão analítica para a curva tensão-deformação (DARWIN e PECKNOLD, 1977a).

Então, partindo-se de uma única expressão analítica, uma vez conhecidas as tensões máximas e correspondentes deformações máximas (ε_{cif} , σ_{if}), determinadas conforme o item anterior, pode-se estabelecer uma curva uniaxial equivalente em separado para cada direção principal de deformação.

A partir destas curvas uniaxiais equivalentes, determinam-se os módulos de deformação secantes E_1 e E_2 , segundo as direções principais 1 e 2, que são requeridos pela equação constitutiva ortotrópica, definida pela equação (4.1).

Para representar o comportamento do concreto comprimido, até ser atingida a tensão de esmagamento, é empregada a equação tensão-deformação proposta pelo Código Modelo CEB-FIP 1990 (CEB,1993), que pode ser escrita na forma abaixo.

Se $\varepsilon_{iu} \geq \varepsilon_{cif}$, então:

$$\sigma_i = \frac{\frac{E_{co}}{E_{csi}} \varepsilon_{iu} - \left(\frac{\varepsilon_{iu}}{\varepsilon_{cif}} \right)^2}{1 + \left(\frac{E_{co}}{E_{csi}} - 2 \right) \frac{\varepsilon_{iu}}{\varepsilon_{cif}}} \sigma_{if}, \quad (4.19)$$

onde E_{co} é o módulo de deformação longitudinal tangente à origem do diagrama tensão-deformação, e E_{csi} representa o módulo de deformação secante do concreto na direção principal i , associado à tensão limite σ_{if} e a deformação ε_{cif} , conforme é ilustrado na figura 4.3.

O concreto tracionado, antes da fissuração, também é modelado conforme o Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993), através das equações que seguem. Quando $\sigma_i \leq 0,9\sigma_{if}$ tem-se:

$$\sigma_i = E_{co} \varepsilon_{iu}, \quad (4.20)$$

Porém, quando $0,9\sigma_{if} < \sigma_i \leq \sigma_{if}$, vale a expressão:

$$\sigma_i = \sigma_{if} - \frac{0,1\sigma_{if}}{0,00015 - 0,9\frac{\sigma_{if}}{E_{co}}} (0,00015 - \varepsilon_{iu}) \quad (4.21)$$

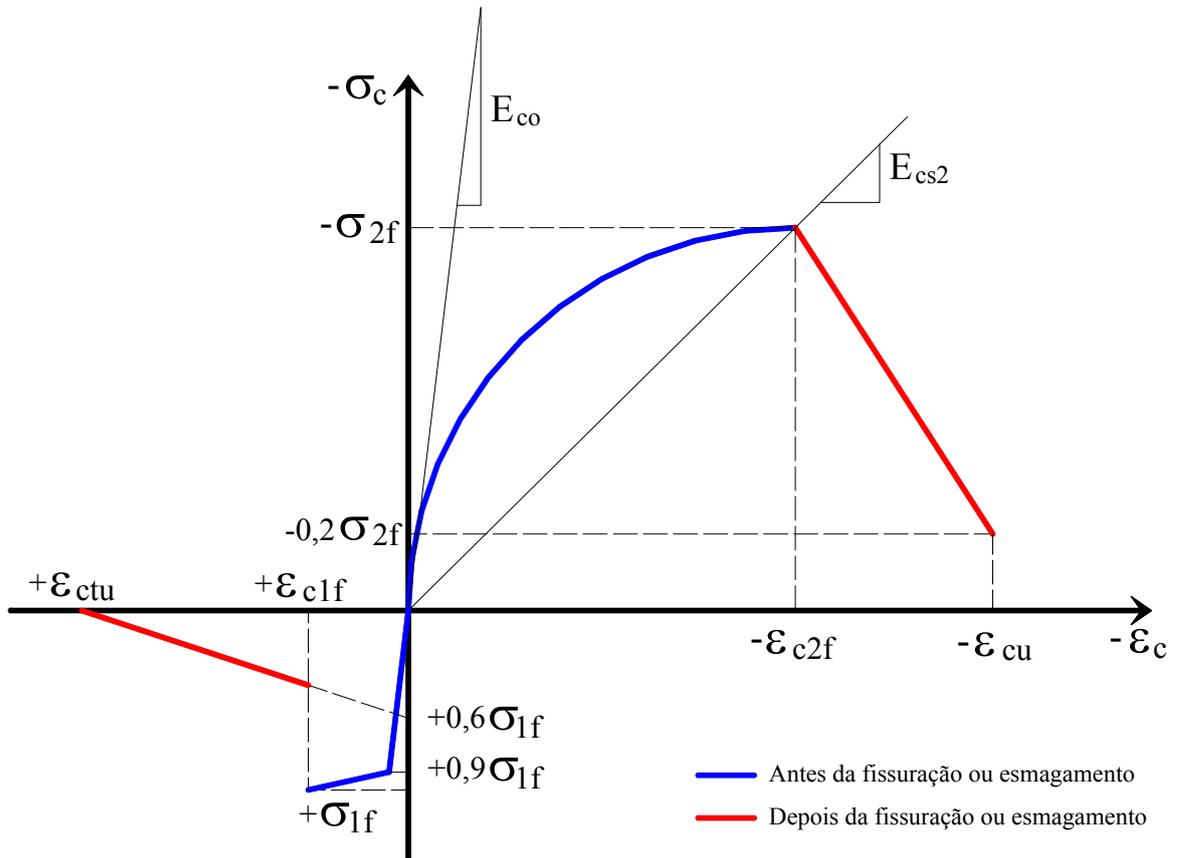


Figura 4.3 – Curva tensão-deformação uniaxial equivalente para o concreto

4.2.5 Procedimento iterativo

Para se determinar as tensões σ_1 e σ_2 a partir das deformações principais ε_1 e ε_2 , é necessário empregar-se um procedimento iterativo.

Inicialmente admite-se um comportamento isotrópico, com $E_1 = E_2 = E_{co}$. Calculam-se as deformações uniaxiais equivalentes ε_{1u} e ε_{2u} , a partir das equações (4.2). De posse das deformações uniaxiais equivalentes, calculam-se as tensões principais σ_1 e σ_2 com o uso da equação (4.3). Com estas tensões, ingressa-se no critério de ruptura bidimensional de Kupfer e Gerstle, e extraem-se os valores para as tensões limites σ_{1f} e σ_{2f} . Com estas tensões máximas

e suas correspondentes deformações, são definidas novas curvas tensão-deformação uniaxiais equivalentes.

A partir destas curvas uniaxiais equivalentes para as direções 1 e 2, com as deformações uniaxiais equivalentes ε_{1u} e ε_{2u} , determinam-se os novos módulos secantes E_1 e E_2 . Com estes módulos, ajustam-se os valores das deformações uniaxiais equivalentes a partir de (4.2). Com estas novas deformações uniaxiais equivalentes, determinam-se novas tensões principais, utilizando-se (4.3). Estas novas tensões geram novas curvas uniaxiais equivalentes através do critério de ruptura de Kupfer e Gerstle. Destas novas curvas são extraídos valores corrigidos para os módulos secantes E_1 e E_2 .

Procede-se assim, iterativamente, até que ocorra a convergência para os valores dos módulos de deformação secantes E_1 e E_2 . Se no decorrer do procedimento ocorrer a fissuração ou o esmagamento do concreto, o procedimento é abandonado, e passa-se a adotar o modelo correspondente ao concreto fissurado ou ao concreto esmagado, conforme descritos a seguir.

4.3 MODELO PARA O CONCRETO FISSURADO

O concreto é um material que se caracteriza por possuir uma resistência à tração bastante inferior à sua resistência à compressão. A resistência à tração é apenas algo em torno de 10% da resistência à compressão. Este tipo de comportamento faz com que, mesmo para um nível de carga não muito elevado, surjam rupturas localizadas em pontos submetidos à tração, que são designadas por fissuras. A fissuração tem por efeito reduzir a rigidez das estruturas de concreto, sendo uma das principais causas do comportamento não-linear que as mesmas apresentam.

Neste trabalho é empregado um modelo de fissuras distribuídas. Este modelo tem a vantagem de não ser necessário redefinir-se a malha de elementos finitos a cada nova fissura que surge na estrutura. Apenas é necessário definir uma equação constitutiva adicional para o concreto no estado fissurado.

Se na região do ponto considerado houver a presença de armadura, a tensão de tração no concreto não é anulada após a fissuração. O esforço de tração é transmitido pela armadura ao concreto situado entre duas fissuras, que empresta sua colaboração na resistência à tração. Este efeito é conhecido na literatura internacional como *tension-stiffening*. Considera-se,

então, uma tensão resistente fictícia, para levar em conta a colaboração que o concreto situado entre duas fissuras fornece na absorção dos esforços de tração.

Também é preciso levar em conta que uma certa parcela de esforço de corte continua a ser transmitida no plano da fissura, através dos mecanismos de engrenamento dos agregados e do efeito de pino da barra de armadura que atravessa a fissura. Para incluir-se este efeito, é necessário introduzir um módulo de deformação por corte reduzido para o concreto fissurado.

4.3.1 Critério de fissuração

Durante o processo de análise de uma estrutura de concreto, se em algum ponto submetido à combinação de tensões tração-tração, ou tração-compressão, a tensão principal σ_I ultrapassar a tensão limite determinada a partir da envoltória do critério de ruptura de Kupfer e Gerstle, forma-se a primeira fissura neste local.

A partir deste instante, o ângulo em que se formou a primeira fissura é fixado e as direções perpendicular e paralela ao plano da fissura passam a ser consideradas como os eixos de ortotropia para o concreto.

4.3.2 Equação constitutiva ortotrópica

Após ser formada a primeira fissura, as direções perpendicular ao plano da fissura, direção 1, e paralela ao plano da fissura, direção 2, são fixadas como sendo os eixos de ortotropia do material. Após a fissuração, o coeficiente de Poisson, ν , é anulado, e as direções 1 e 2 passam a funcionar de forma desacoplada.

A equação constitutiva ortotrópica passa, então, a ser dada na forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{1f} & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & G_{12r} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}, \quad (4.22)$$

onde E_{1f} é o módulo de deformação fictício na direção perpendicular ao plano da fissura, de valor negativo, incluído para levar em conta a colaboração do concreto entre fissuras. E_2 é o módulo de deformação secante segundo a direção 2, e G_{12r} é o módulo de deformação por corte reduzido, incorporado ao modelo para representar a transmissão de esforço de corte no plano da fissura. As propriedades E_{1f} , E_2 e G_{12r} são dependentes do estado de tensão e do estado de deformação existentes no ponto considerado.

4.3.3 Deformação uniaxial equivalente

Após a fissuração, o efeito de Poisson é desprezado. As deformações uniaxiais equivalentes ε_{iu} , para as direções 1 e 2, passam a ser determinadas a partir da rotação do tensor de deformação, determinado no sistema de referência xoy , para o sistema de referência $1o2$. Da mesma forma, depois do concreto haver fissurado, passa-se a determinar a deformação por corte no plano da fissura γ_{12} , a partir da rotação do tensor de deformação determinado no sistema de referência xoy , para o sistema de referência $1o2$.

4.3.4 Colaboração do concreto entre fissuras

A colaboração do concreto entre fissuras na absorção dos esforços de tração, conhecida como *tension-stiffening*, é considerada através da inclusão de um ramo linear descendente no diagrama tensão-deformação do concreto tracionado, após a deformação de fissuração do concreto ε_{c1f} , conforme mostrado na figura 4.4.

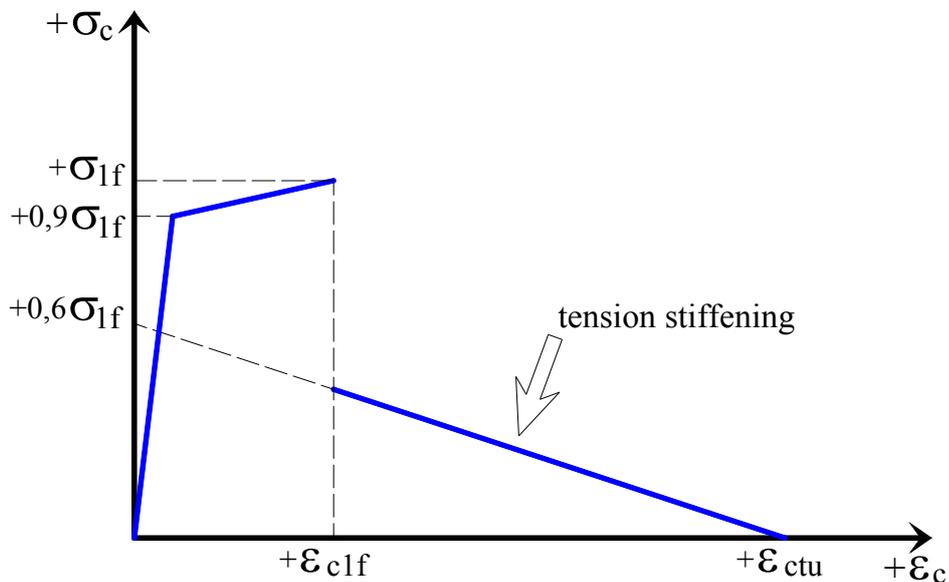


Figura 4.4 – Equação constitutiva para o concreto tracionado

A relação constitutiva para o concreto tracionado após a fissuração é a mesma que foi empregada por Prates Júnior (1992), dada na forma:

$$\sigma_{1u} = 0,6\sigma_{1f} \left(1 - \frac{\varepsilon_{1u}}{\varepsilon_{ctu}} \right), \quad (4.23)$$

onde ε_{ctu} indica a deformação limite para a qual a colaboração do concreto entre fissuras não deve mais ser considerada. Neste trabalho, adota-se para ε_{ctu} o valor de 2‰.

4.3.5 Módulo de deformação por corte reduzido

Para poder representar a transmissão de esforço cortante através do plano da fissura, adota-se um módulo de deformação por corte reduzido G_{12r} , cuja definição é dada por:

$$G_{12r} = \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\varepsilon_{1u}}{0,01} \right) \right] G_{co}, \quad (4.24)$$

sendo G_{co} o módulo de deformação por corte do concreto na origem, dado por:

$$G_{co} = \frac{E_{co}}{2(1+\nu)}. \quad (4.25)$$

Deste modo, a tensão tangencial, transmitida através do plano da fissura, será calculada pela equação:

$$\tau_{12} = G_{12r} \gamma_{12}. \quad (4.26)$$

A equação (4.24) representa o produto de um fator de redução, contido entre colchetes, pelo módulo de deformação por corte do concreto na origem. Observe-se que quanto maior a deformação na direção perpendicular ao plano da fissura, ε_{1u} , menor será a tensão de corte transferida através da fissura.

4.4 MODELO PARA O CONCRETO ESMAGADO

Durante o processo de carregamento incremental de uma estrutura de concreto, em algum ponto submetido à combinação de tensões de compressão-compressão ou tração-compressão com $\sigma_2 < -0,96f_c$, for atingida a resistência à compressão sob sollicitação biaxial, σ_{2f} , conforme determinada pelo critério de ruptura de Kupfer e Gerstle, este ponto é considerado como esmagado na direção 2, e somente consegue suportar um acréscimo de deformação mediante um alívio da tensão de compressão aplicada. Este tipo de comportamento é designado por *strain-softening*.

Assim sendo, após ter sido ultrapassada a deformação ε_{c2f} , que corresponde a tensão limite σ_{2f} , adota-se para a equação constitutiva do concreto comprimido um ramo descendente, cujo módulo de deformação tangente, E_{2c} , será negativo.

4.4.1 Equação constitutiva ortotrópica

Uma vez que a resistência à compressão biaxial do concreto tenha sido atingida, as direções principais de deformação em que ocorreu o esmagamento são fixadas como sendo os eixos de ortotropia do material. A partir deste ponto o coeficiente de Poisson é anulado, e as duas direções são desacopladas.

A equação constitutiva ortotrópica, com o eixo 2 associado à direção em que ocorreu o esmagamento do concreto assume, então, o seguinte aspecto:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & G_{12c} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}, \quad (4.27)$$

onde E_1 é o módulo de deformação secante do concreto na direção 1, E_2 é o módulo de deformação secante segundo a direção do esmagamento (direção 2), e G_{12c} é o módulo de deformação por corte do concreto após o esmagamento, igual a:

$$G_{12c} = \frac{G_{co}}{4}. \quad (4.28)$$

4.4.2 Deformação uniaxial equivalente

Para o concreto esmagado as deformações uniaxiais equivalentes são determinadas através da rotação do tensor de deformação determinado em relação ao sistema de referência $loxy$, para o sistema $lo2$.

4.4.3 Comportamento do concreto pós-esmagamento

A equação tensão-deformação adotada para o concreto, após o esmagamento, é dada por (CEB,1993):

$$\sigma_2 = \sigma_{2f} \left(-\frac{\varepsilon_{2u}}{\varepsilon_{c2f}} \frac{0,8}{n-1} + \frac{n-0,2}{n-1} \right), \quad (4.29)$$

onde n é o fator que determina quantas vezes a deformação última do concreto ε_{cu} é maior que a deformação ε_{c2f} correspondente à máxima tensão σ_{2f} , ou seja:

$$\varepsilon_{cu} = n\varepsilon_{c2f} . \quad (4.30)$$

Este fator, que define a “ductilidade” do concreto após o esmagamento, é fornecido pelo Código Modelo CEB-FIP 1990 (CEB, 1993), em uma tabela que o relaciona com a classe do concreto (f_{ck}). O valor de n é apresentado na tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Fator n

Classe do concreto	C20	C40	C60	C80
n	3	2	1,5	1,2

É possível, ainda, determinar-se uma função de interpolação para obter o valor de n em função da resistência à compressão uniaxial média do concreto f_{cm} , na forma:

$$n = 4,81(f_{cm} - 1,645\sigma_{fc})^{-0,66}, \quad (4.31)$$

sendo f_{cm} e σ_{fc} (desvio padrão de f_c) fornecidos em kN/cm^2 .

O comportamento do concreto no regime pós-esmagamento se encontra ilustrado na figura 4.3.

4.5 EQUAÇÃO CONSTITUTIVA NO SISTEMA XOY

Uma vez determinada a equação constitutiva segundo os eixos de ortotropia 1 e 2, conforme o estado do concreto, seja íntegro, fissurado ou esmagado, deve-se estabelecer a equação constitutiva para o sistema de referência global xoy . Isto é feito aplicando-se uma rotação na matriz constitutiva dos eixos de ortotropia $l\sigma_2$, para o sistema de referência global xoy .

4.5.1 Cálculo das direções dos eixos de ortotropia

Conhecidas as componentes de deformação em um ponto, no sistema de referência xoy , ou seja, ε_x , ε_y e γ_{xy} , as deformações principais ε_1 e ε_2 podem ser calculadas através das expressões clássicas da Resistência dos Materiais (POPOV, 1984), através das equações:

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2},$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}.$$
(4.32)

A partir do conhecimento das deformações principais, é possível determinar-se os cossenos diretores e o ângulo θ , que a direção principal l forma com o eixo x , utilizando-se as seguintes equações:

$$\cos(1, x) = \cos\theta = \frac{\gamma_{xy}/2}{\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_1)^2 + (\gamma_{xy}/2)^2}},$$

$$\cos(1, y) = \sin\theta = \frac{-(\varepsilon_x - \varepsilon_1)}{\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_1)^2 + (\gamma_{xy}/2)^2}},$$
(4.33)

e

$$\theta = \arctan \left[\frac{\cos(1, y)}{\cos(1, x)} \right].$$
(4.34)

A figura 4.5 serve para ilustrar a questão das deformações principais e dos eixos de ortotropia.

Conforme afirmado anteriormente, os eixos de ortotropia do material são considerados coincidentes com as direções principais de deformação. Após a ocorrência da fissuração ou de esmagamento do concreto, em uma dada etapa de carga, os eixos de ortotropia passam a ser fixos, guardando-se as últimas direções principais que foram determinadas.

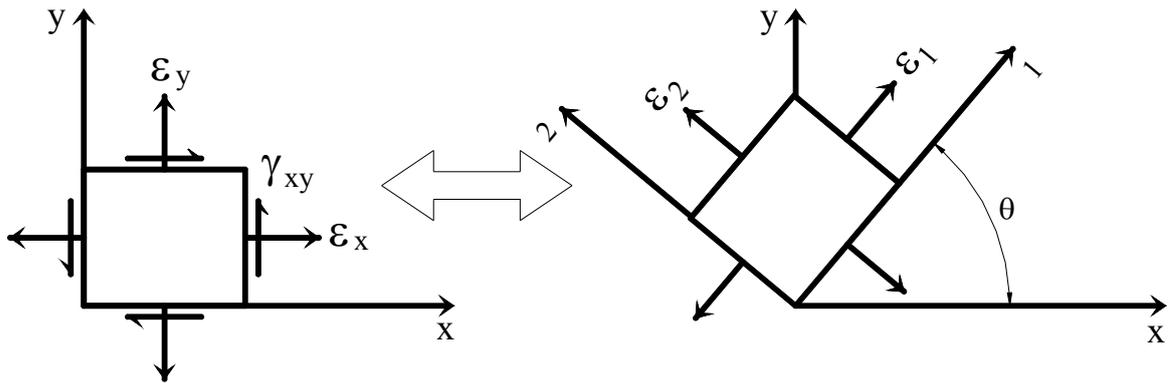


Figura 4.5 – Deformações principais e eixos de ortotropia

4.5.2 Transformação das deformações do sistema xoy para os eixos de ortotropia

As componentes do tensor de deformação segundo as direções dos eixos de ortotropia podem ser calculadas em função das componentes do tensor de deformação determinadas para o sistema xoy , através de uma transformação de rotação. O resultado final desta transformação tensorial pode ser expresso matricialmente na forma (GILBERT e WARNER, 1978):

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{12} = \mathbf{T}_{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}_{xy}, \quad (4.35)$$

onde

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{12}^T = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_{12}\}, \quad (4.36)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{xy}^T = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}, \quad (4.37)$$

e

$$\mathbf{T}_{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \frac{\sin 2\theta}{2} \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -\frac{\sin 2\theta}{2} \\ -\sin 2\theta & \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}. \quad (4.38)$$

4.5.3 Transformação das tensões dos eixos de ortotropia para o sistema xoy

As componentes do tensor de tensões segundo as direções dos eixos xoy podem ser determinadas em função das componentes do tensor de tensões calculadas para as direções dos eixos de ortotropia $1o2$, através de uma transformação de rotação. O resultado final desta transformação tensorial pode ser colocado matricialmente na forma:

$$\boldsymbol{\sigma}_{xy} = \mathbf{T}_{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}_{12}, \quad (4.39)$$

onde

$$\boldsymbol{\sigma}_{12}^T = \{\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}\}, \quad (4.40)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{xy}^T = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}, \quad (4.41)$$

e

$$\mathbf{T}_{\varepsilon}^T = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & -\sin 2\theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & \sin 2\theta \\ \frac{\sin 2\theta}{2} & -\frac{\sin 2\theta}{2} & \cos 2\theta \end{bmatrix}. \quad (4.42)$$

Assim, com base nas equações de (4.35) a (4.42), é possível demonstrar-se que a equação constitutiva no sistema xoy pode ser escrita na forma:

$$\boldsymbol{\sigma}_{xy} = \mathbf{D}_{xy} \boldsymbol{\varepsilon}_{xy}, \quad (4.43)$$

onde

$$\mathbf{D}_{xy} = \mathbf{T}_{\varepsilon}^T \mathbf{D}_{12} \mathbf{T}_{\varepsilon}, \quad (4.44)$$

é a matriz constitutiva no sistema de referência xoy , que é obtida pela transformação de rotação da matriz constitutiva \mathbf{D}_{12} , que é estabelecida nos eixos de ortotropia do material, conforme o estado do concreto, seja íntegro, fissurado ou esmagado, de acordo com as equações (4.1), (4.22) e (4.27), respectivamente.

4.6 MODELO CONSTITUTIVO PARA O AÇO

Conforme se encontra exposto no Capítulo 3, o modelo de elementos finitos incorporado para a armadura considera que as barras de aço resistem apenas a esforços normais na direção tangente de seu eixo. Portanto, é necessário um modelo constitutivo uniaxial para modelar o comportamento do aço.

O aço é modelado segundo um esquema elástico bilinear. Até ser atingida a tensão de escoamento f_y , o módulo de deformação longitudinal é E_{s1} . A partir deste ponto é possível considerar-se um certo enrijecimento do material através do módulo E_{s2} , até ser alcançada a deformação de ruptura ε_{su} .

O comportamento do material em compressão é simulado, por simplicidade, da mesma maneira que quando tracionado.

O diagrama tensão-deformação para a armadura é apresentado na figura 4.6.

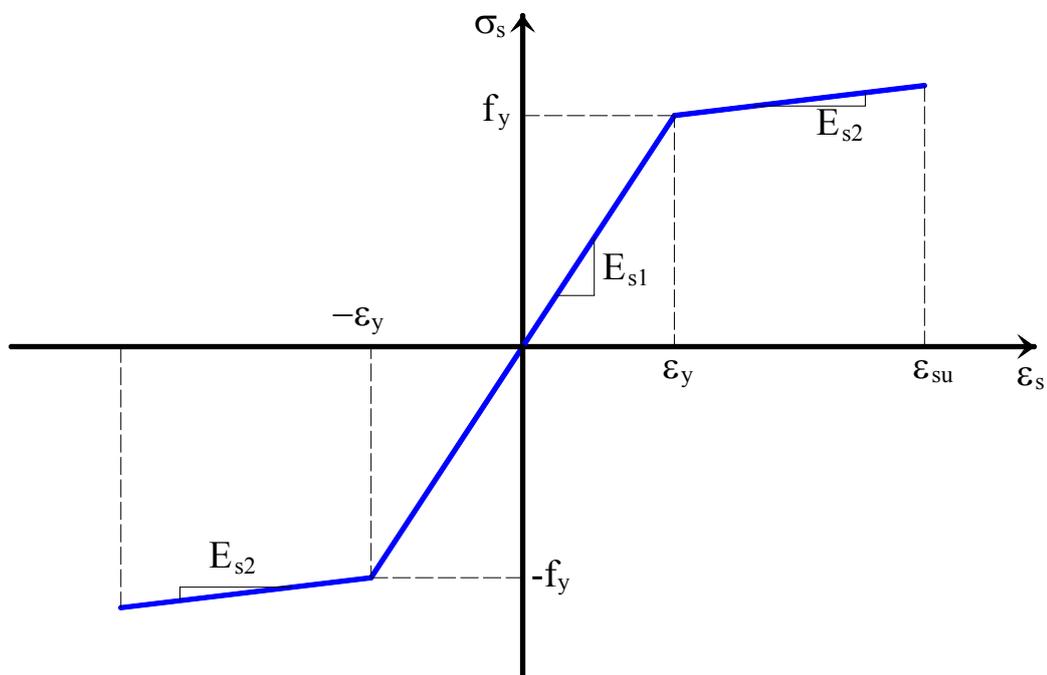


Figura 4.6 – Modelo constitutivo bilinear para o aço

O diagrama da figura 4.6 é expresso analiticamente através das equações:

$$\sigma_S = E_{S2}(\varepsilon_S + \varepsilon_y) - f_y, \text{ se } \varepsilon_S \leq -\varepsilon_y, \quad (4.45)$$

$$\sigma_S = E_{S1}\varepsilon_S, \text{ se } -\varepsilon_y \leq \varepsilon_S \leq \varepsilon_y, \quad (4.46)$$

e

$$\sigma_S = E_{S2}(\varepsilon_S - \varepsilon_y) + f_y, \text{ se } \varepsilon_y \leq \varepsilon_S \leq \varepsilon_{Su}, \quad (4.47)$$

onde ε_y é a deformação que corresponde ao escoamento do aço sob tração uniaxial, dada por:

$$\varepsilon_y = \frac{f_y}{E_{S1}}. \quad (4.48)$$

Para os aços com patamar de escoamento bem definido, adota-se $E_{S2}=0,00$, enquanto que para aços cuja tensão de escoamento é convencional, considera-se para E_{S2} um valor igual a 5% de E_{S1} .

4.7 MODELO PARA O SISTEMA DE REFORÇO

Existem, hoje, diferentes técnicas e materiais para o desenvolvimento do projeto de reforço de uma estrutura em concreto armado. A necessidade de reforço estrutural está geralmente associada a uma mudança de utilização ou como uma alternativa para o melhoramento de sua capacidade para suportar determinado conjunto de solicitações. Um projeto de reforço estrutural é caracterizado pela peculiaridade que cada situação pode apresentar.

Neste trabalho serão considerados os sistemas de reforço colados externamente às estruturas, na face tracionada das mesmas, de chapas de aço ou de materiais compósitos. Estes sistemas de reforço são construídos com dois elementos distintos e fundamentais:

- a matriz polimérica para sistemas estruturados com fibras, a quem cabe a função de manter as fibras coesas, propiciando a transferência das tensões de cisalhamento entre os dois elementos estruturais, concreto e fibra; e o adesivo epóxi para chapas de aço coladas, o qual estabelece um meio de transferência das tensões de cisalhamento entre o substrato de concreto e a chapa de aço.

- o elemento estrutural, constituído pela chapa de aço ou pelas fibras. As fibras dispostas dentro das matrizes poliméricas, ou a chapa de aço, absorvem as tensões de tração decorrentes dos esforços solicitantes.

4.7.1 Modelo para o elemento de reforço

Fibras contínuas, tais como de aramida, de vidro e de carbono, são comumente utilizadas nos sistemas compósitos. As fibras propiciam aos sistemas compósitos suas características de resistência e espessura, e verdadeiramente podem ser consideradas como o “esqueleto” do sistema compósito.

Existem dois tipos de fibras de carbono, a fibra com elevado módulo de elasticidade, denominada Tipo I, e a fibra com elevada resistência, denominada Tipo II.

O ACI 440.2R (2002) indica genericamente para os sistemas compósitos estruturados com fibras de carbono, as seguintes propriedades:

Tabela 4.2 – Propriedades típicas das fibras de carbono à tração

Tipo de fibra de carbono	Módulo de elasticidade (GPa)	Resistência máxima à tração (MPa)	Deformação mínima de ruptura (%)
De uso geral	220 - 240	2050 a 3790	1,2
Alta resistência	220 - 240	3790 a 4820	1,4
Ultra alta resistência	220 - 240	4820 a 6200	1,5
Alto módulo	340 - 520	1720 a 3100	0,5
Ultra alto módulo	520 - 690	1380 a 2400	0,2

Na figura 4.7 é apresentado o diagrama tensão-deformação para os principais elementos que estruturam os sistemas de reforço (MACHADO, 2002). Assim, nota-se que o PRF alcança sua resistência última à tração sem apresentar qualquer escoamento do material, e as propriedades mecânicas são sempre obtidas com referência ao eixo longitudinal devido a maior resistência à tração nessa direção.

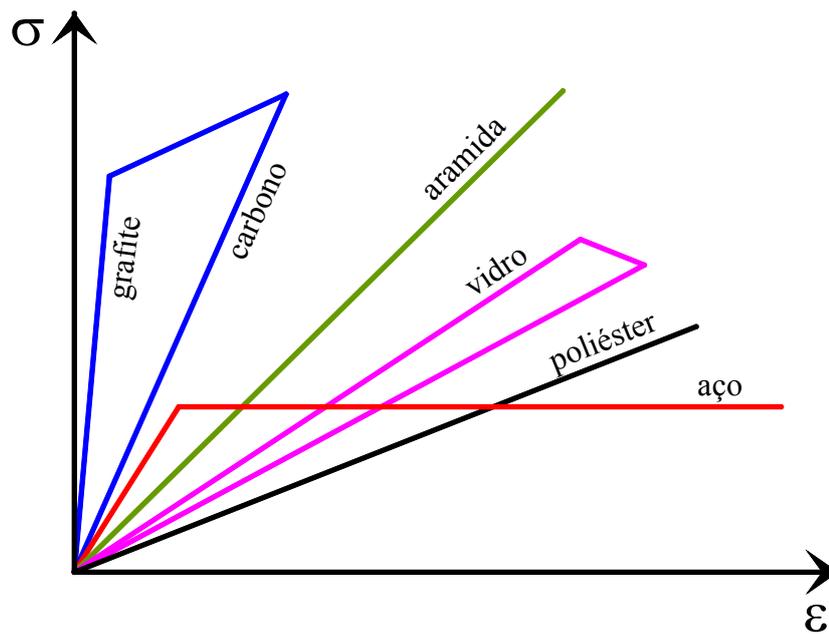


Figura 4.7 – Diagrama tensão-deformação dos principais elementos estruturais dos sistemas de reforço (MACHADO, 2002)

Diante destas informações, considera-se o sistema compósito reforçado com fibras como um material de comportamento elástico linear até ser atingida a sua tensão de ruptura. Em virtude dos esforços serem, fundamentalmente, na direção do seu eixo longitudinal, um modelo uniaxial é suficiente para o cálculo das tensões normais no elemento de reforço, assim, as mesmas podem ser calculadas, do início do carregamento até a ruptura, através da seguinte equação:

$$\sigma_R = E_R \varepsilon_R, \quad (4.49)$$

onde E_R é o módulo de deformação longitudinal, e ε_R a deformação axial no sistema compósito.

Como apresentado na figura 4.7, os aços utilizados como elemento estrutural dos sistemas de reforço, apresentam um comportamento elástico linear, com um módulo de elasticidade E_s , até ser atingida a tensão de escoamento f_y . Após este limite, o aço deforma-se plasticamente até atingir a ruptura com uma tensão constante e endurecimento nulo. Desta maneira, podem ser escritas as seguintes expressões para as tensões normais na chapa de aço:

$$\sigma_R = E_s \varepsilon_R, \text{ se } \varepsilon_R \leq \varepsilon_y = \frac{f_y}{E_s}, \quad (4.50)$$

$$\sigma_R = f_y, \text{ se } \varepsilon_R > \varepsilon_y. \quad (4.51)$$

4.7.2 Modelo para o elemento de interface entre o substrato de concreto e o sistema de reforço estrutural

Não importa qual a técnica de reforço empregada, um dos principais requisitos do sistema composto (existente + reforço) é a capacidade de funcionar como um conjunto, um sistema integrado. Isto pode ser alcançado somente quando se proporciona uma adequada aderência entre o elemento de concreto pré-existente e o reforço. A força de aderência deve ser tal que a estrutura composta apresente um comportamento monolítico. Esta ligação deve ser resistente e durável. Neste contexto, a noção de durabilidade do reforço subentende a coexistência de dois materiais diferentes em um sistema composto durante um período de tempo determinado no projeto de reforço ou recuperação.

As resinas epóxi vêm sendo comercializadas desde a década de 40. No entanto, apenas a partir dos anos 60, com o desenvolvimento de formulações epóxi de alta qualidade é que a mesma popularizou-se. Estas possuem grande resistência mecânica à compressão, à tração e ao cisalhamento; grande velocidade em adquirir estas resistências; ótimo comportamento frente aos agentes químicos agressivos; permite excelente aderência entre concreto e aço; possui retração praticamente desprezível.

A matriz polimérica, em sistemas estruturados com fibras de carbono, tem necessariamente de ter um alongamento de ruptura muito maior do que o alongamento que ocorre na fibra de carbono, para permitir que a mesma continue a possuir capacidade de carga mesmo após a tensão na fibra ter atingido a sua tensão de ruptura (limite de resistência).

Dessa maneira, os sistemas compósitos de fibras de carbono devem trabalhar segundo o critério fibra com ruptura frágil e matriz polimérica com ruptura dúctil, conforme indicado no lado esquerdo da figura 4.8. Assim, fica descartada a possibilidade de que o sistema compósito entre em colapso pela ruptura frágil da matriz, possibilidade de ocorrência que está indicada na parte direita da figura 4.8.

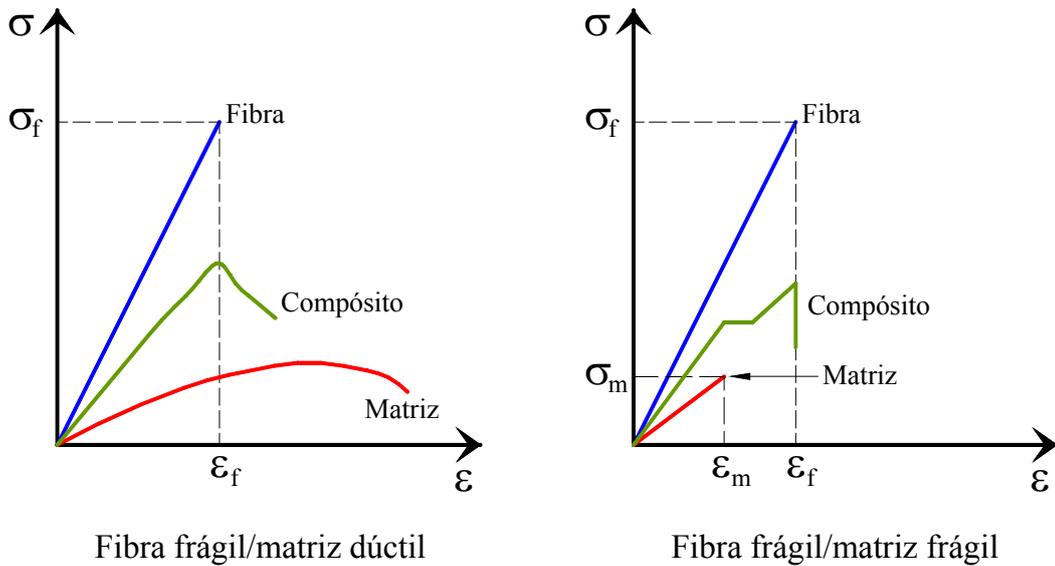


Figura 4.8 – Diagramas tensão-deformação dos sistemas compósitos (MACHADO, 2002)

O modelo de aderência entre os materiais adotado neste trabalho segue a relação *tensão de aderência x deslizamento*, para carregamento monotônico, indicado pelo Código Modelo CEB-FIP 1990 (CEB, 1993), como mostrado na figura 4.9. Este modelo foi usado com sucesso para representar a ligação entre os materiais, em Aurich (2001) e Silva (1999). Utilizando-se a mesma notação usada pelo Código Modelo CEB-FIP 1990 (CEB, 1993), τ representa a tensão de aderência, e s o deslizamento relativo entre o substrato de concreto e o sistema de reforço.

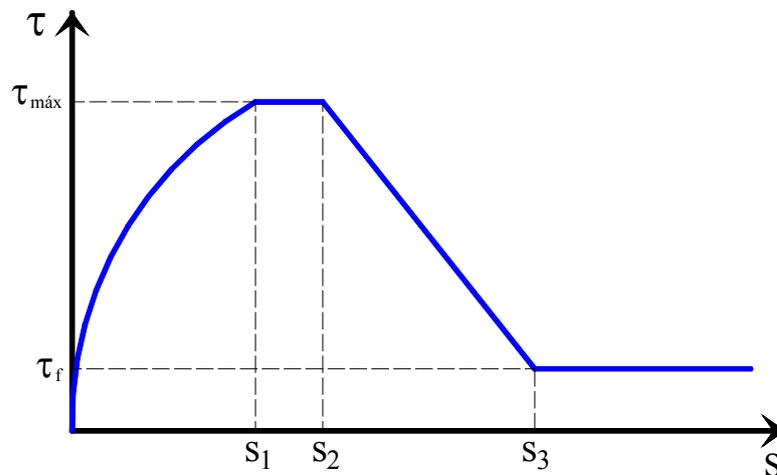


Figura 4.9 – Relação analítica tensão de aderência – deslizamento

Portanto, a tensão de aderência entre o substrato de concreto e o sistema de reforço pode ser calculada em função do deslizamento relativo, de acordo com o modelo apresentado na figura 4.9, usando as seguintes expressões:

$$\tau = \tau_{\text{máx}} \left(\frac{s}{s_1} \right)^\alpha, \quad \text{para } 0 \leq s \leq s_1 \quad (4.52)$$

$$\tau = \tau_{\text{máx}}, \quad \text{para } s_1 < s \leq s_2 \quad (4.53)$$

$$\tau = \tau_{\text{máx}} - (\tau_{\text{máx}} - \tau_f) \left(\frac{s - s_2}{s_3 - s_2} \right), \quad \text{para } s_2 < s \leq s_3 \quad (4.54)$$

$$\tau = \tau_f, \quad \text{para } s > s_3 \quad (4.55)$$

Os parâmetros necessários para o cálculo da tensão de aderência entre o substrato de concreto e o reforço em chapa de aço são fornecidos pelo Código Modelo CEB-FIP 1990 (CEB, 1993), para o caso de tensão de aderência entre o concreto e a armadura, sendo a armadura composta por barras lisas. Na tabela 4.3 são mostrados os parâmetros fornecidos pelo Código Modelo.

Tabela 4.3 – Parâmetros para a definição da tensão de aderência concreto / chapa de aço

	Fio encruado a frio		Barra laminada a quente	
	Boas condições de aderência	Outras condições de aderência	Boas condições de aderência	Outras condições de aderência
$s_1 = s_2 = s_3$	0,01 mm	0,01 mm	0,1 mm	0,1 mm
α	0,5	0,5	0,5	0,5
$\tau_{\text{máx}} = \tau_f$	$0,1 \sqrt{f_{\text{ck}}}$	$0,05 \sqrt{f_{\text{ck}}}$	$0,3 \sqrt{f_{\text{ck}}}$	$0,15 \sqrt{f_{\text{ck}}}$

Devido a poucos estudos existentes para a determinação dos parâmetros necessários para o cálculo da tensão de aderência entre o concreto e o PRFC, são utilizados os parâmetros obtidos por Silva (1999), que estão apresentados na tabela 4.4.

Tabela 4.4 – Parâmetros para a definição da tensão de aderência para materiais compósitos

	PRFC
s_1	0,08 mm
s_2	0,08 mm
s_3	0,65 mm
α	0,6
$\tau_{\text{máx}}$	3,5 MPa
τ_f	0,1 $\tau_{\text{máx}}$

5 VALIDAÇÃO DO MODELO ATRAVÉS DE EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

5.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Um modelo eficiente de elementos finitos para análise não-linear de estruturas de concreto armado reforçadas deve representar corretamente a resposta do problema que se deseja estudar, bem como simular diferentes situações apresentadas pelas peculiaridades de cada estrutura.

Na avaliação da capacidade do modelo, é preciso levar em conta as limitações impostas ao mesmo. É bem sabido que as estruturas de concreto armado apresentam um comportamento altamente não-linear, tendo como causas a relação não-linear entre tensões e deformações; a diferença entre as resistências à tração e à compressão do concreto; a aderência imperfeita entre o aço e o concreto adjacente; os fenômenos da retração e da fluência do concreto; a fissuração e a transmissão de esforços entre as fissuras; o comportamento não-linear geométrico da estrutura, etc. Assim, um modelo completo para análise de estruturas de concreto armado deveria levar em conta todos estes fatores. Contudo, é preciso estabelecer uma relação entre a complexidade do modelo, os recursos de computação necessários e os objetivos a serem atingidos na análise estrutural. Assim sendo, busca-se neste trabalho um modelo numérico que produza bons resultados para o problema a ser analisado.

Portanto, o objetivo deste capítulo é verificar a eficiência do modelo de elementos finitos na análise de vigas de concreto armado reforçadas através da colagem, na face tracionada, de sistemas de reforço estrutural.

São mostrados aqui os resultados obtidos da análise de uma série de vigas reforçadas à flexão, que foram ensaiadas experimentalmente e/ou numericamente por seus autores, e estão apresentados em trabalhos publicados na literatura científica.

Ascione e Feo (2000) apresentam os resultados numéricos de uma viga reforçada à flexão pela colagem de uma chapa de aço, e comparam seus resultados numéricos com os resultados experimentais obtidos por Jones et al. (1988).

Ziraba e Baluch (1995) desenvolveram um modelo de elementos finitos para analisar a resposta de vigas de concreto armado reforçadas à flexão e ao cisalhamento pela colagem de chapas de aço. No modelo é incluído um elemento especial de interface para simular a fina camada de adesivo epóxi. O modelo foi verificado através da comparação com resultados experimentais extraídos de Jones et al. (1982).

Neste programa de pós-graduação, em sua dissertação de mestrado, Beber (1999) obteve resultados experimentais para cinco grupos de vigas: vigas testemunho (referenciadas como VT1 e VT2); vigas reforçadas com uma camada de lâmina de PRFC (referenciadas como VR3 e VR4); vigas reforçadas com quatro camadas de lâminas de PRFC (referenciadas como VR5 e VR6); vigas reforçadas com sete camadas de lâminas de PRFC (VR7 e VR8) e vigas reforçadas com dez camadas de lâminas de PRFC (VR9 e VR10).

Na sua tese de doutorado, neste mesmo programa de pós-graduação, Beber (2003) realizou a investigação experimental do comportamento de vigas de concreto armado reforçadas externamente com PRFC. Foram construídas vigas em escala real, e divididas em dois grupos: o primeiro, denominado Grupo F, com vigas reforçadas à flexão; e o segundo, denominado Grupo C, reforçadas ao cisalhamento.

Em Aprile et al. (2001) é apresentado, resumidamente, um modelo numérico de elementos finitos no qual é considerado o efeito do deslizamento entre a viga de concreto armado e o sistema de reforço no decréscimo da rigidez e da resistência do elemento de concreto armado. Os resultados numéricos obtidos por Aprile et al. (2001) são comparados com os resultados experimentais extraídos de Zarnic et al. (1999), onde é feita a comparação da resposta da estrutura em termos de deslocamentos com relação à carga aplicada.

Ensaio realizado no Laboratório de Ensaio e Modelos Estruturais (LEME), da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), foram feitos em vigas de concreto armado reforçadas com chapas de aço, e os resultados apresentados em Campagnolo et al. (1997). Foi ensaiada uma viga sem qualquer tipo de reforço, e vigas reforçadas com chapas de aço. Serão mostrados aqui os resultados obtidos para a viga denominada V2, a qual foi reforçada e não foi previsto nenhum modo de ancoragem do reforço.

Arduini et al. (1997) apresentam modelos analíticos e numéricos para simular a falha de vigas em concreto armado reforçadas com PRFC. A parte experimental, apresentada em Aubert (1995), é feita com o ensaio de vigas de concreto armado reforçadas com PRFC, e sujeitas a duas cargas concentradas. Os resultados numéricos foram obtidos através do programa comercial de análise ABAQUS, usando o método dos elementos finitos.

5.2 VIGA SIMULADA POR ASCIONE e FEO (2000)

O elemento estrutural aqui apresentado foi ensaiado experimentalmente por Jones et al. (1988) e serviu como parâmetro de verificação do modelo numérico proposto por Ascione e Feo (2000). Trata-se de uma viga biapoiada de seção transversal de $15,5 \times 22,5 \text{ cm}^2$ e 230 cm de comprimento, que foi reforçada à flexão pela colagem, na face tracionada, de uma chapa de aço de seção $12,5 \times 0,6 \text{ cm}^2$ e comprimento de 220 cm. A viga foi submetida a um carregamento composto por duas cargas concentradas nos terços médios. A armadura longitudinal inferior é composta por três barras de aço de 20 mm de diâmetro. Duas barras de aço com 6 mm de diâmetro compõe a armadura superior de compressão. Para evitar a ruptura da viga por cisalhamento, a armadura transversal é composta por barras de 6 mm de diâmetro, espaçadas uniformemente de 7,5 cm.

Na figura 5.1 é apresentada a viga em concreto armado reforçada à flexão, ensaiada experimentalmente por Jones et al. (1988) e simulada numericamente por Ascione e Feo (2000). Aproveitando a simetria do problema em termos de geometria e carregamento, foi discretizada apenas metade da viga. Foi utilizada uma malha de oito elementos ao longo do comprimento, por dois elementos ao longo da altura para representar o concreto. Para a interface e para o reforço foram usados sete elementos, conforme é mostrado na figura 5.2.

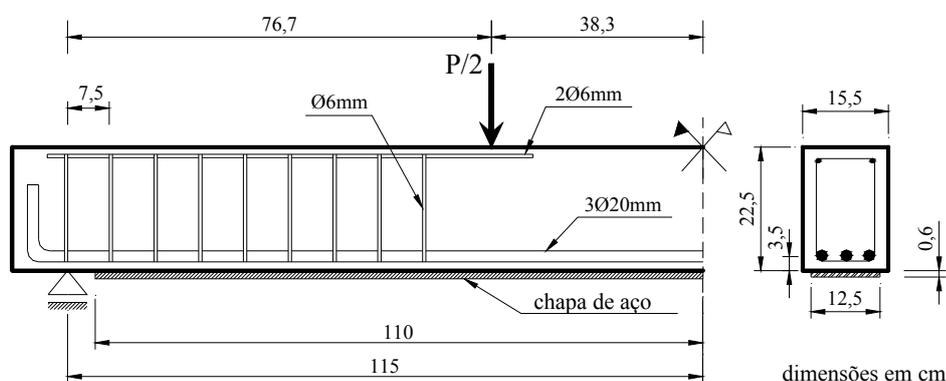


Figura 5.1 – Viga em concreto armado reforçada com chapa de aço

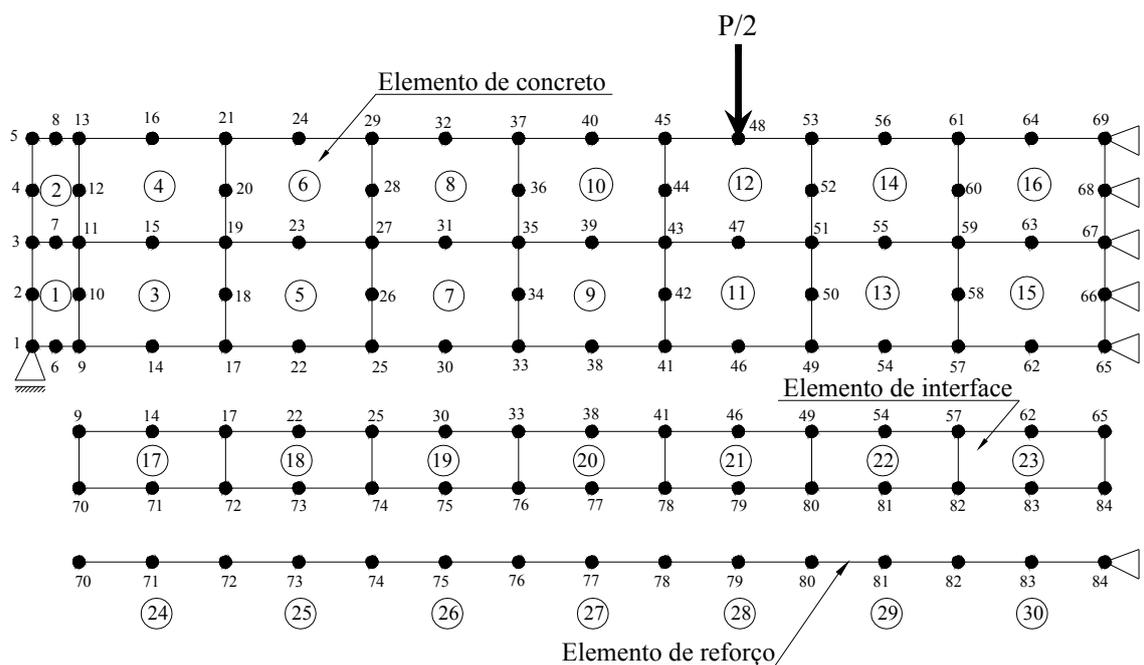


Figura 5.2 – Malha de elementos finitos

Na tabela 5.1 são apresentadas as propriedades dos materiais envolvidos no problema.

Tabela 5.1 – Propriedades dos materiais – Viga simulada por Ascione e Feo (2000)

Concreto	Armadura longitudinal $\phi 20\text{mm}$	Armadura longitudinal e transversal $\phi 6\text{mm}$	Chapa de aço
$f_{cm} = 30 \text{ MPa}$	$f_y = 430 \text{ MPa}$	$f_y = 324 \text{ MPa}$	$f_y = 246 \text{ MPa}$
$f_{ctm} = 2,58 \text{ MPa}$	$E_s = 200 \text{ GPa}$	$E_s = 200 \text{ GPa}$	$E_s = 200 \text{ GPa}$
$E_{co} = 31 \text{ GPa}$	-	-	-
Interface	$k_s = 50 \text{ MPa/mm}$	$\tau_{m\acute{a}x} = 5 \text{ MPa}$	-

Na figura 5.3 são apresentadas as distribuições das tensões de aderência para um nível de carga de 60 kN, correspondendo à aproximadamente 33% da carga de ruptura observada experimentalmente.

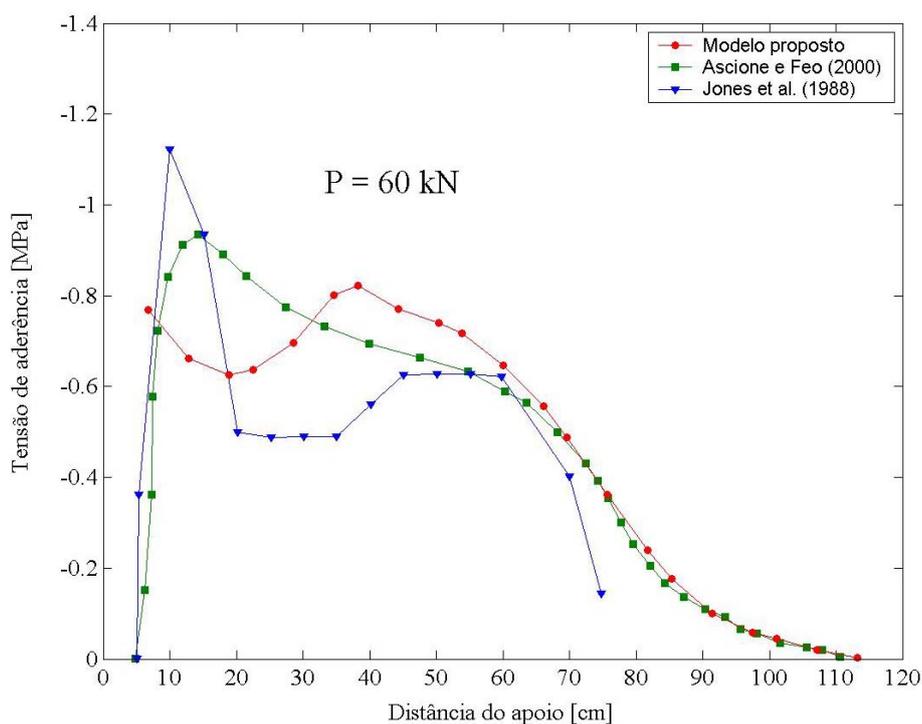


Figura 5.3 – Distribuição da tensão de aderência: $P = 60 \text{ kN}$

Segundo Jones et al. (1988) a falha ocorreu subitamente pela separação da chapa de aço do substrato de concreto sob uma carga P de 182 kN, sendo este um modo de falha típico de vigas reforçadas. Na análise numérica foi empregado um incremento de carga de 1 kN, iterando-se até ser atingido o equilíbrio ou a ruptura, sendo que para P igual a 180,25 kN não foi mais possível atingir uma condição de equilíbrio através do modelo, indicando assim, a ruptura, com uma diferença de $-0,97\%$ em relação a carga de ruptura observada experimentalmente.

Nas figuras 5.4 e 5.5 são apresentadas as distribuições das tensões de aderência ao longo do comprimento do reforço, para níveis do carregamento de aproximadamente 77% da carga de ruptura experimental (figura 5.4), e próximo da ruptura da estrutura (figura 5.5).

A figura 5.6 serve para comparar os resultados obtidos pelo modelo numérico com os dados do ensaio experimental (Jones et al., 1988), para as deformações no reforço ao longo do seu comprimento, para três níveis do carregamento (33%, 77%, e próximo da ruptura).

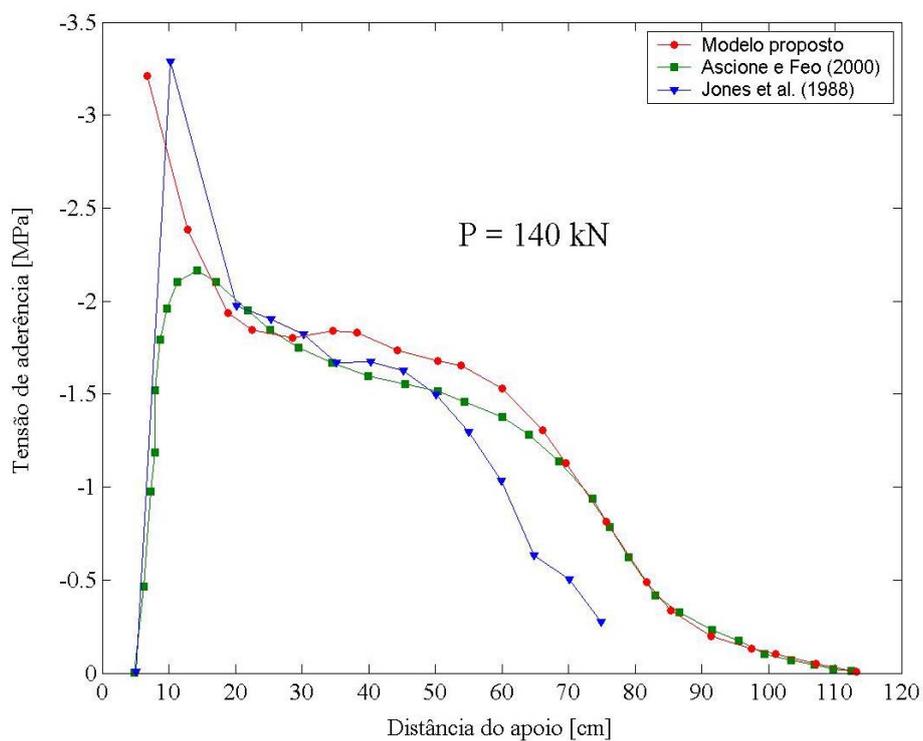


Figura 5.4 – Distribuição da tensão de aderência: $P = 140 \text{ kN}$

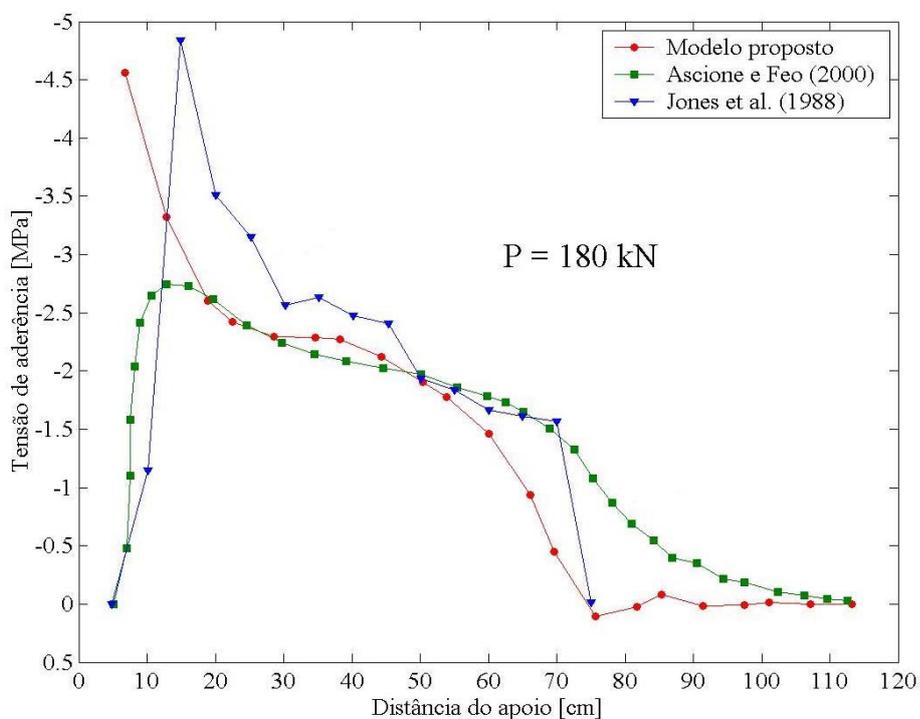


Figura 5.5 – Distribuição da tensão de aderência: próximo da ruptura

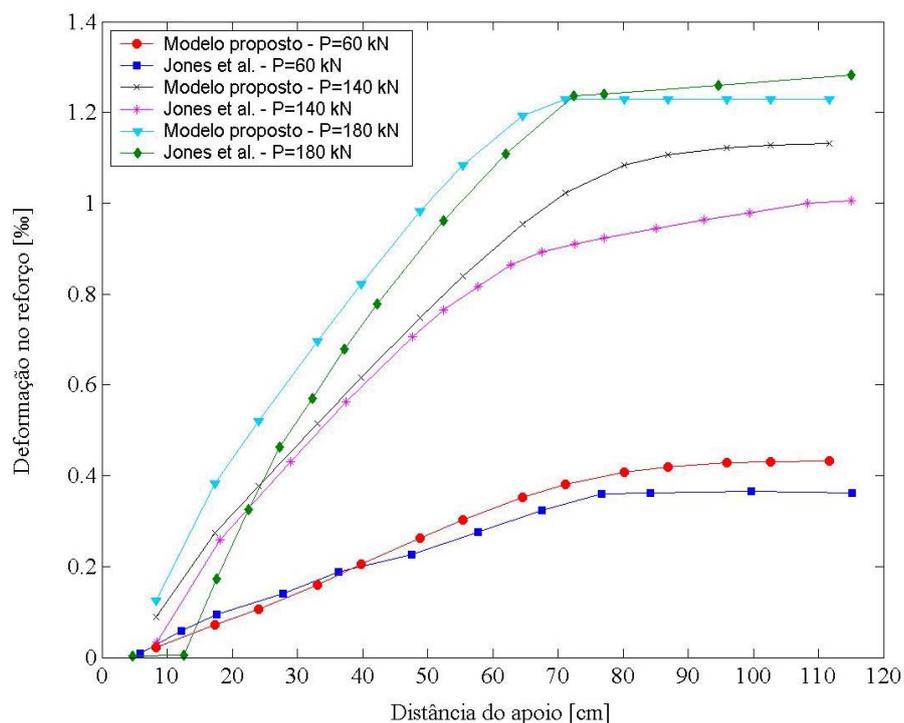


Figura 5.6 – Deformações ao longo do reforço

5.3 VIGA SIMULADA POR ZIRABA e BALUCH (1995)

Ziraba e Baluch (1995) desenvolveram um modelo de elementos finitos para a análise da resposta de vigas de concreto armado reforçadas à flexão e ao cisalhamento. Como verificação do modelo, Ziraba e Baluch (1995) simularam uma viga de concreto armado reforçada à flexão com uma chapa de aço de dimensões $8 \times 0,5 \text{ cm}^2$, com comprimento de 215 cm, sendo que esta viga foi ensaiada experimentalmente por Jones et al. (1982). A viga biapoiada, designada por URB4, possui seção transversal de $10 \times 15 \text{ cm}^2$ com um comprimento de 225 cm. A armadura longitudinal de tração consiste de duas barras de aço com diâmetro de 10 mm, e a armadura de compressão é composta por duas barras de aço de diâmetro 8 mm. Para a absorção dos esforços de cisalhamento, estribos verticais de 6 mm de diâmetro espaçados por 7 cm foram adotados. A viga foi carregada transversalmente por duas cargas concentradas nos terços médios, conforme o detalhamento apresentado na figura 5.7.

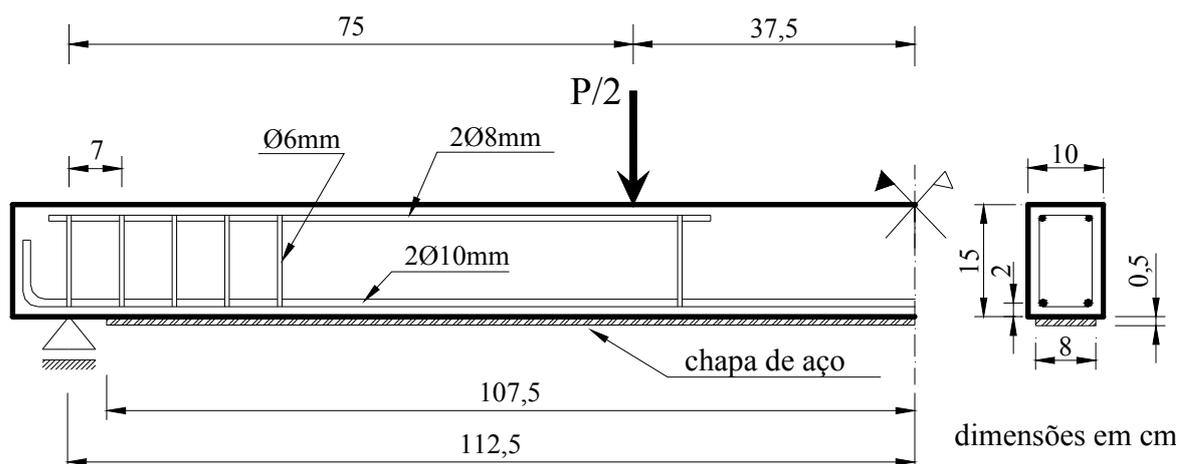


Figura 5.7 – Detalhamento da viga URB4

Devido à simetria apresentada pelo problema, discretizou-se apenas metade da viga usando-se oito elementos ao longo do comprimento, e dois ao longo da altura para representar o concreto, totalizando dezesseis elementos. Para a interface entre o concreto e o reforço foram usados sete elementos. O mesmo número de elementos foi utilizado para representar o reforço. Assim, guardadas as dimensões de cada problema, a malha de elementos finitos usada apresenta o mesmo aspecto da malha apresentada na figura 5.2 do exemplo anterior.

Na tabela 5.2 são apresentadas as propriedades dos materiais envolvidos no problema.

Tabela 5.2 – Propriedades dos materiais – Viga URB4

Concreto	Armadura longitudinal $\phi 10\text{mm}$ e $\phi 8\text{mm}$	Armadura transversal $\phi 6\text{mm}$	Chapa de aço
$f_{cm} = 53,90 \text{ MPa}$	$f_y = 530 \text{ MPa}$	$f_y = 530 \text{ MPa}$	$f_y = 240 \text{ MPa}$
$f_{ctm} = 3,56 \text{ MPa}$	$E_s = 200 \text{ GPa}$	$E_s = 200 \text{ GPa}$	$E_s = 200 \text{ GPa}$
$E_{co} = 37.697 \text{ MPa}$	-	-	-
Interface	$k_S = 45,5 \text{ MPa/mm}$	$\tau_{m\acute{a}x} = 4,55 \text{ MPa}$	-

A curva *carga x deslocamento* obtida numericamente pelo modelo aqui proposto é comparada com as curvas *carga x deslocamento* obtida experimentalmente por Jones et al. (1982) e numericamente por Ziraba e Baluch (1995) através da figura 5.8.

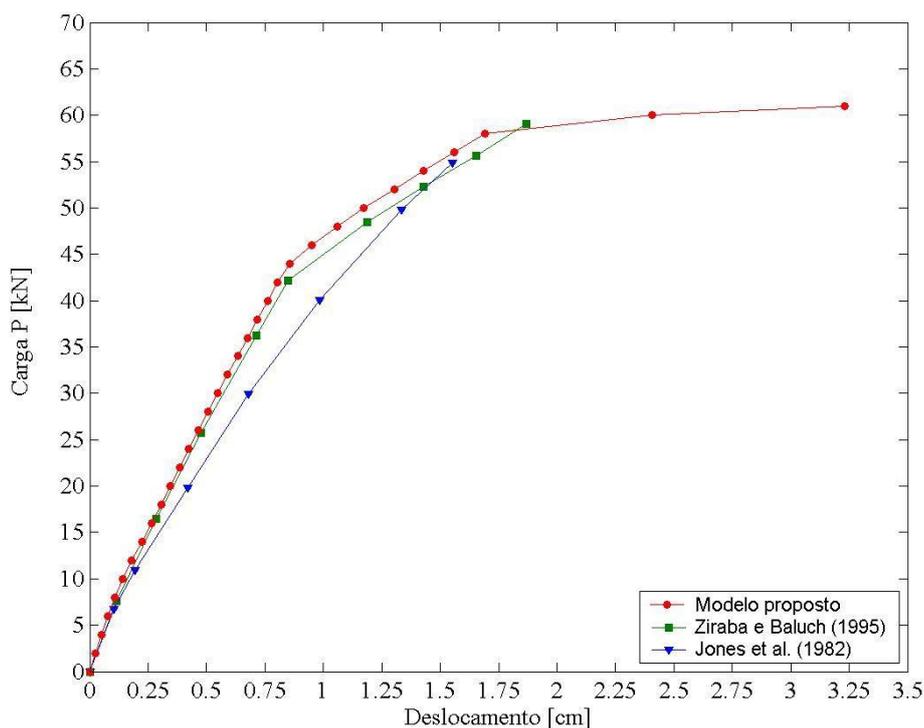


Figura 5.8 – Curva carga x deslocamento: viga URB4

A carga de ruptura relatada por Jones et al. (1982) foi de 57,5 kN, sendo que esta ocorreu por descolamento da chapa de aço próximo ao apoio. Sob uma carga de 55,9 kN iniciou-se a ruptura da interface na extremidade do sistema de reforço.

Através do modelo de elementos finitos aqui apresentado chegou-se a uma aproximação muito boa da carga de ruptura, ficando esta 6,52% acima da carga de ruptura observada experimentalmente, portanto, P_{rup} foi igual a 61,25 kN. Porém, nota-se através da figura 5.8, uma maior rigidez nos resultados obtidos numericamente durante a propagação das fissuras.

A carga de ruptura obtida numericamente por Ziraba e Baluch (1995) foi de 59 kN, assim, em uma comparação com o modelo aqui proposto pode-se estabelecer a relação de +3,81% na diferença entre as cargas de ruptura obtidas através dos dois modelos de elementos finitos.

Na figura 5.9 podem ser observadas as tensões na chapa de aço, ao longo do seu comprimento, na proximidade da ruptura. A comparação é feita entre os dois modelos numéricos.

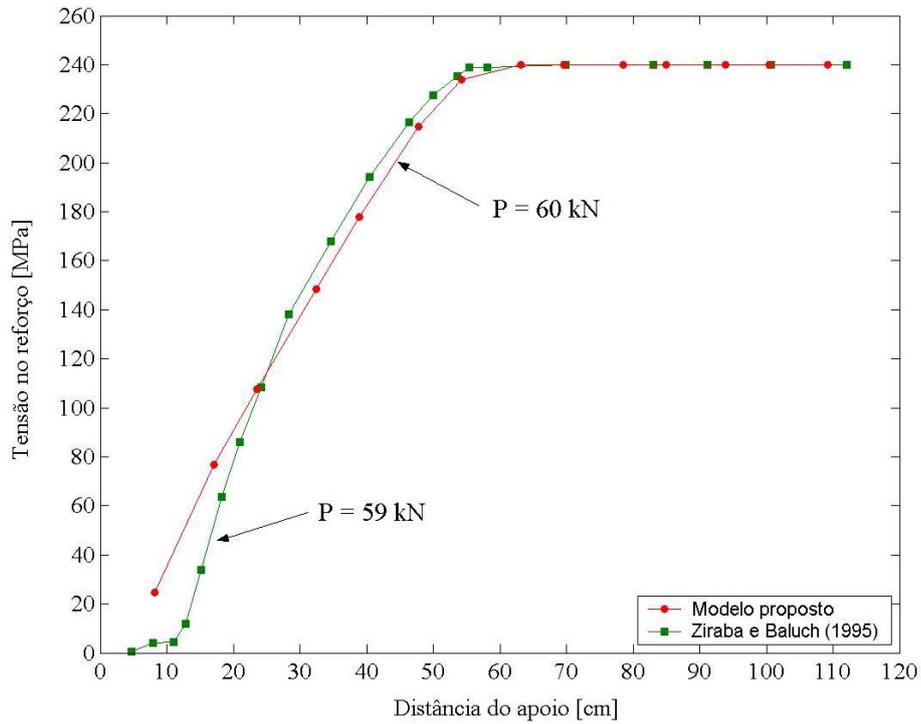


Figura 5.9 – Tensões no reforço: viga URB4

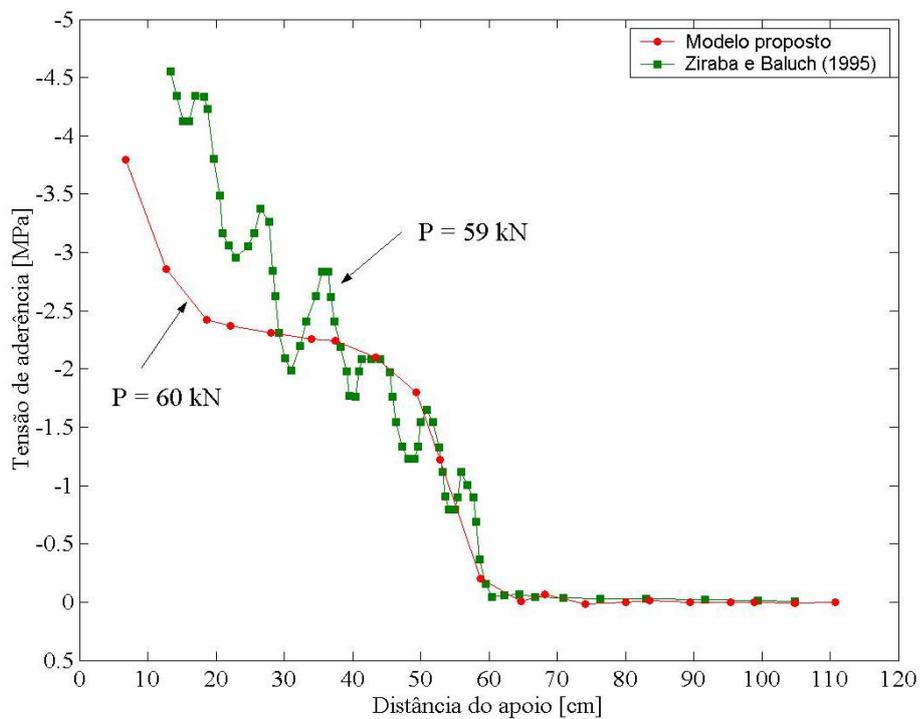


Figura 5.10 – Distribuição das tensões de aderência: viga URB4

Como pode ser observado na figura 5.10, que apresenta as distribuições das tensões de aderência obtidas pelos dois modelos numéricos, as mesmas foram consistentemente maiores próximo ao apoio, na ocasião da ruptura, o que confirma o modo de ruptura observado experimentalmente, ou seja, descolamento da chapa de aço na sua extremidade.

5.4 VIGAS ENSAIADAS POR BEBER (1999)

Na sua dissertação de mestrado, neste programa de pós-graduação, Beber (1999) testou experimentalmente oito vigas de concreto armado reforçadas com lâminas de PRFC. As vigas receberam as denominações de VR3 e VR4, VR5 e VR6, VR7 e VR8, VR9 e VR10, e foram reforçadas com uma, quatro, sete e dez camadas de lâminas de PRFC, respectivamente.

As vigas possuem seção transversal de $12 \times 25 \text{ cm}^2$ e comprimento de 250 cm. A armadura longitudinal inferior é composta por duas barras de aço CA-50, com 10 mm de diâmetro, correspondendo a uma taxa de armadura $\rho = 0,58\%$. Esta taxa de armadura, relativamente pequena, permitiu avaliar o desempenho do reforço sem que as vigas apresentassem ruptura frágil por esmagamento do concreto (Beber, 1999). A armadura superior, por sua vez, é composta por duas barras de aço CA-60, com diâmetro de 6 mm. A armadura transversal consiste de estribos de aço CA-60, com 6 mm de diâmetro e espaçamento uniforme de 11 cm, ao longo de todo o comprimento da viga.

Na figura 5.11 pode ser observado o detalhamento das vigas ensaiadas e o carregamento imposto a elas. E na tabela 5.3, estão apresentadas as propriedades mecânicas dos materiais concreto, aço e da lâmina de PRFC.

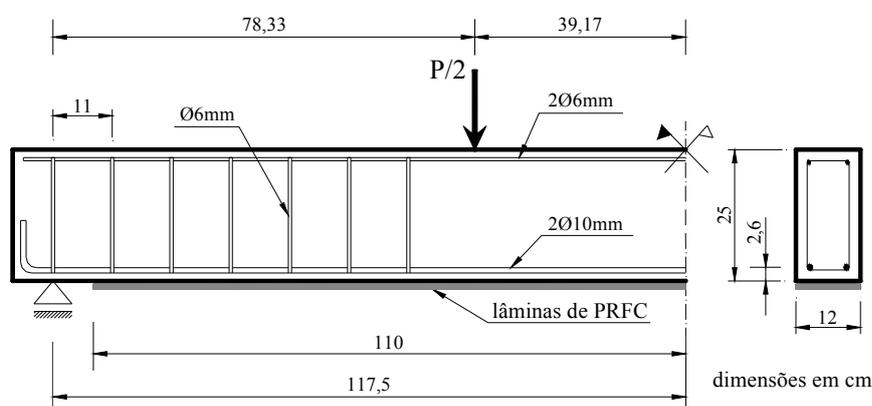


Figura 5.11 – Detalhamento das vigas ensaiadas por Beber (1999)

Tabela 5.3 – Propriedades dos materiais – Vigas ensaiadas por Beber (1999)

Concreto	Armadura longitudinal $\phi 10\text{mm}$	Armadura longitudinal e transversal $\phi 6\text{mm}$	Lâmina de PRFC
$f_{cm} = 33,58 \text{ MPa}$	$f_{ym} = 565 \text{ MPa}$	$f_{ym} = 738 \text{ MPa}$	$\sigma_{rup} = 3.400 \text{ MPa}$
$f_{ctm} = 2,85 \text{ MPa}$	$E_s = 210 \text{ GPa}$	$E_s = 210 \text{ GPa}$	$E_R = 230 \text{ GPa}$
$E_{co} = 32.196 \text{ MPa}$	-	-	-
Interface	$k_s = 25 \text{ MPa/mm}$	$\tau_{m\acute{a}x} = 2,0 \text{ MPa}$	-

As propriedades do tecido de fibra de carbono são apresentadas na tabela 5.4.

Tabela 5.4 – Principais propriedades do tecido de fibra de carbono

Resistência à tração	3.400 MPa
Seção transversal por unidade de largura	1,11 cm ² /m
Peso de fibra por área	200 g/m ²
Deformação específica na ruptura	14,8%

Como dito anteriormente, as vigas foram reforçadas com uma, quatro, sete e dez camadas de lâminas de PRFC, assim, a única diferença apresentada entre elas é a área de reforço adotada, sendo que as mesmas são apresentadas na tabela 5.5.

Tabela 5.5 – Denominações dos protótipos

Protótipo	Nº de camadas de lâminas de fibra de carbono	Área de reforço [cm ²]
VR3 – VR4	1	0,1332
VR5 – VR6	4	0,5328
VR7 – VR8	7	0,9324
VR9 – VR10	10	1,332

5.4.1 Vigas reforçadas com uma camada de lâmina de fibra de carbono: VR3 e VR4

Na figura 5.12 é apresentada a resposta *carga x deslocamento*, obtida numericamente, e é feita a comparação com os resultados dos ensaios experimentais para as vigas reforçadas com uma camada de lâmina de PRFC.

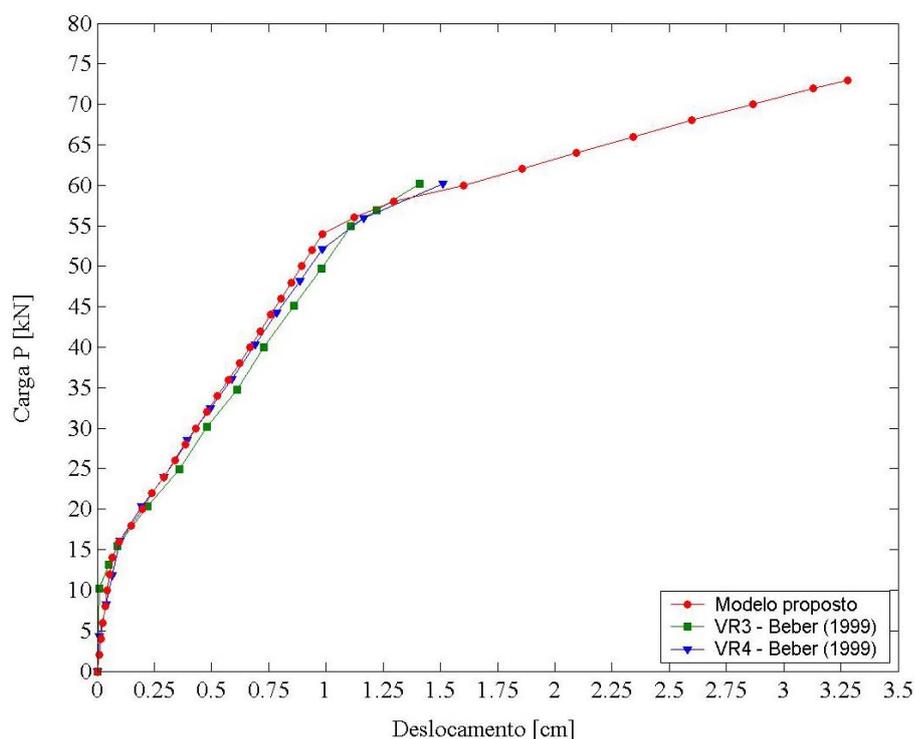


Figura 5.12 – Curvas carga x deslocamento: vigas VR3 e VR4

Na tabela 5.6 é feita a comparação entre as cargas de ruptura numérica e experimental.

Tabela 5.6 – Comparação entre cargas de ruptura

Protótipo	Carga de ruptura [kN]		Diferença [%]
	Modelo	Experimental	
VR3	73,25	65,2	+12,35
VR4		62,0	+18,15

Note-se a diferença entre as cargas de ruptura obtidas experimentalmente, apresentadas na tabela 5.6, e os valores últimos das cargas experimentais apresentadas na figura 5.12. Estes valores últimos apresentados, aproximadamente 60 kN, se deve ao fato de que normalmente em ensaios experimentais as medições são interrompidas um pouco antes da ruptura, para evitar danos nos equipamentos usados nos ensaios.

A comparação entre os resultados numéricos e experimentais da máxima deformação no reforço de PRFC, conforme é incrementado o carregamento externo, é feita na figura 5.13.

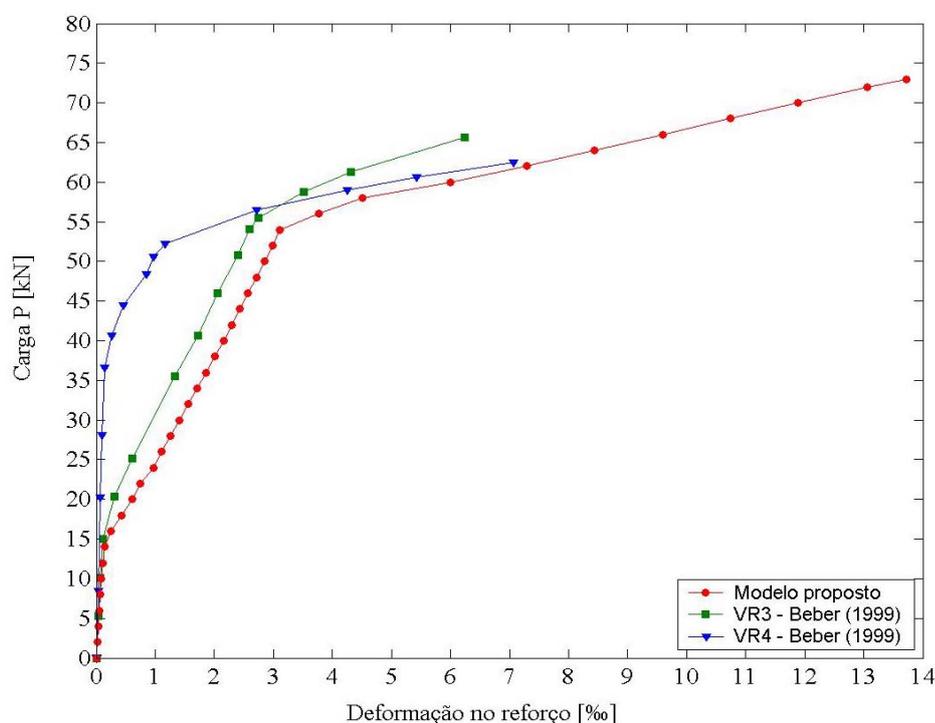


Figura 5.13 – Máxima deformação no reforço: vigas VR3 e VR4

A distribuição das tensões de aderência obtidas numericamente para diferentes níveis do carregamento é apresentada na figura 5.14. De acordo com Beber (1999), o modo de falha das vigas reforçadas com uma camada foi a deformação plástica excessiva da armadura longitudinal de tração, não havendo o descolamento do reforço. Através da figura 5.14 pode ser visto que as tensões de aderência não atingem a tensão última de aderência conforme apresentado na tabela 5.3, mostrando assim, a concordância com o modo de ruptura experimental.

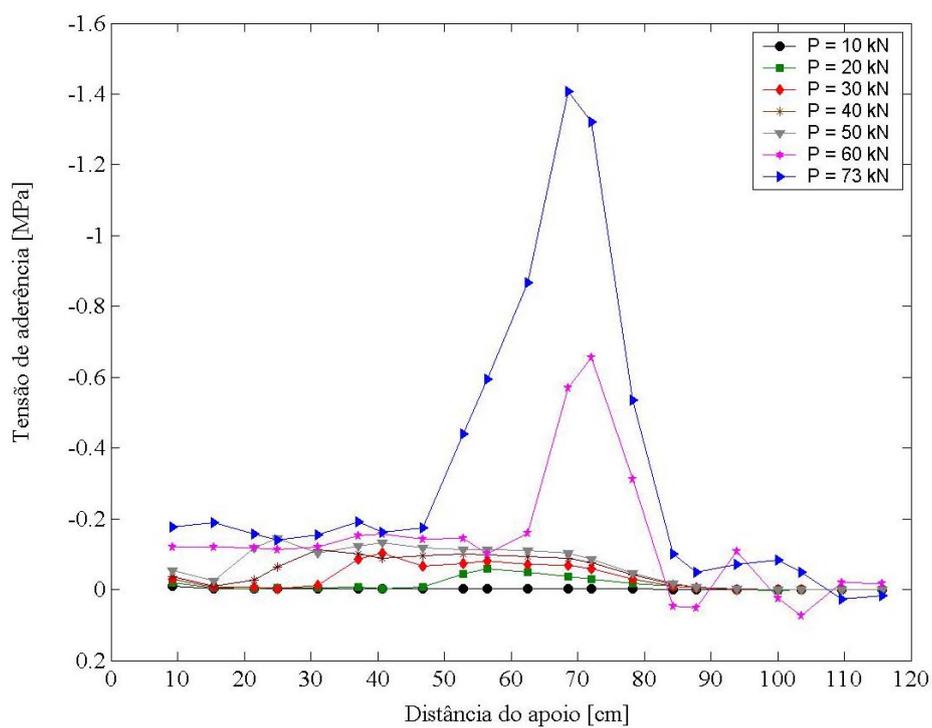


Figura 5.14 – Distribuição das tensões de aderência: viga reforçada com uma camada

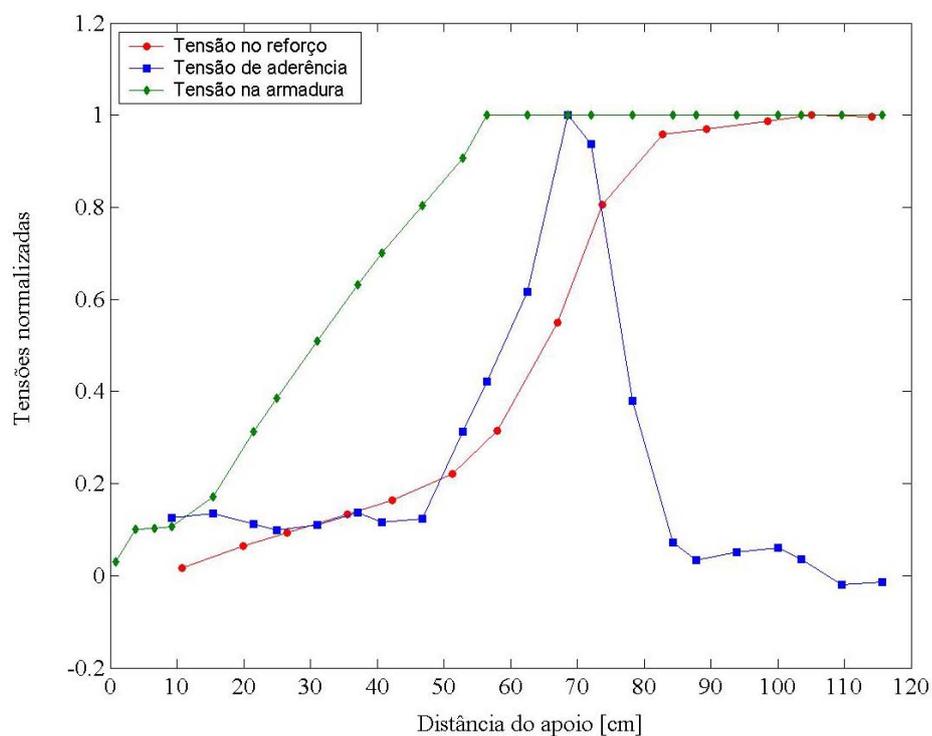


Figura 5.15 – Perfil de tensões normalizadas

A apresentação da figura 5.15 permite a avaliação, em um mesmo diagrama, da evolução e da interação existente entre as tensões normais no reforço e na armadura e as tensões de aderência na interface entre o reforço e o concreto. As tensões estão normalizadas pelo seu máximo valor, e foram obtidas numericamente na última etapa de carga que houve convergência antes da ruptura ($P=73$ kN).

A avaliação dos diagramas da figura 5.15 permite identificar, facilmente, que o nível da tensão normal no reforço cresce, a partir da extremidade, em direção ao meio do vão. Outro importante aspecto está associado aos picos na curva da tensão de aderência. O maior pico é causado pelo gradiente das tensões no reforço (inclinação da curva da tensão no reforço) resultante da mudança no diagrama de momentos fletores na região adjacente às cargas concentradas e do escoamento da armadura de tração.

5.4.2 Vigas reforçadas com quatro camadas de lâminas de fibra de carbono: VR5 e VR6

A avaliação da rigidez de uma estrutura pode ser feita com o uso de uma curva carga *versus* deslocamento. Na figura 5.16 é apresentada a resposta das vigas reforçadas com quatro camadas de lâminas de fibra de carbono, em termos de deslocamentos, frente ao carregamento externo. As curvas representam os resultados experimentais e o resultado numérico.

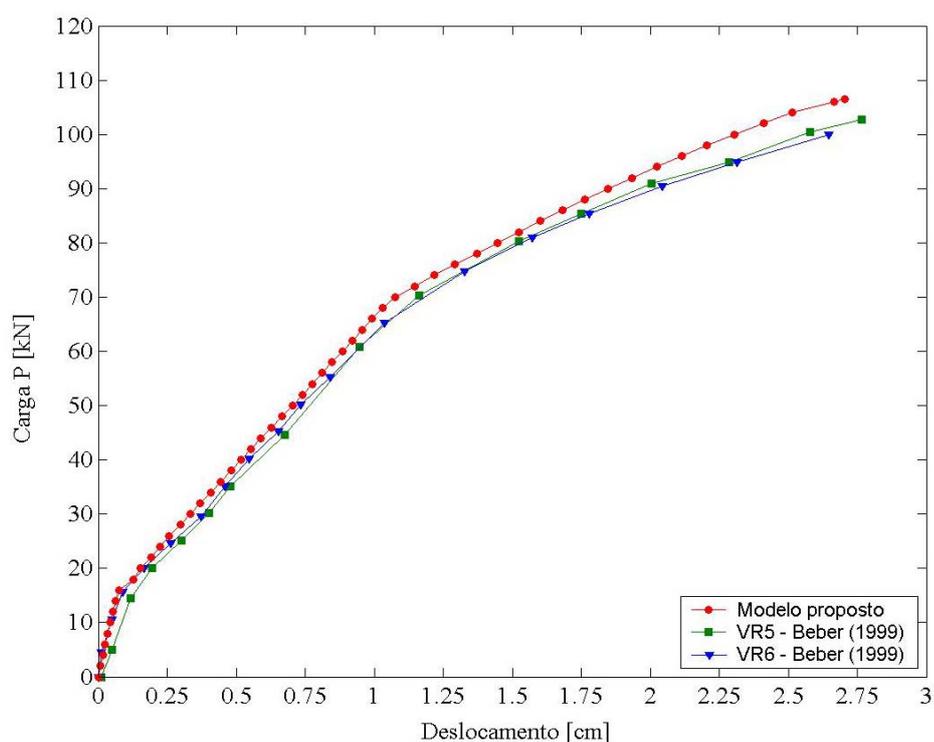


Figura 5.16 – Curvas carga x deslocamento: vigas VR5 e VR6

Através da figura 5.17 pode ser observado o comportamento da deformação máxima no reforço conforme é incrementado o carregamento. É feita a comparação entre os resultados obtidos experimentalmente e os resultados do modelo de elementos finitos, e pode, também, ser notada a proximidade entre os resultados.

Os protótipos reforçados com quatro camadas apresentaram pequenas diferenças quanto às cargas de ruptura experimentais. Entretanto, nos dois casos (VR5 e VR6) a ruptura se deu por falha no sistema de aderência entre o concreto e o reforço.

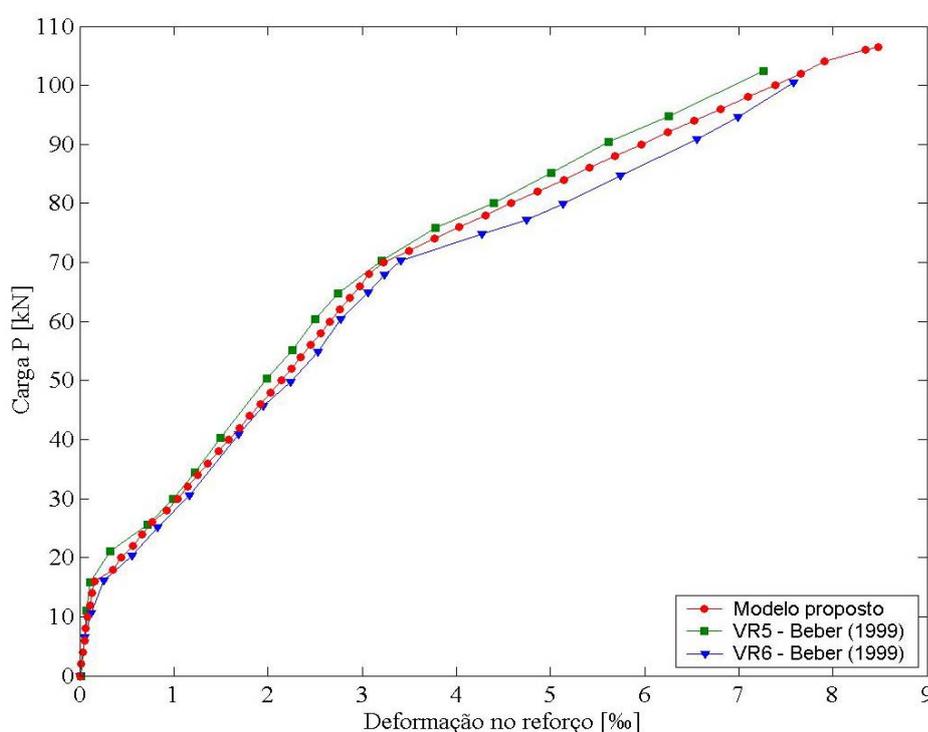


Figura 5.17 – Máxima deformação no reforço: vigas VR5 e VR6

Na figura 5.18 podem ser vistas as distribuições das tensões de aderência obtidas numericamente para sete valores do carregamento. Nota-se o elevado nível de tensões de aderência que a viga está sendo submetida, indicando assim, o descolamento do sistema de reforço nas proximidades da carga concentrada.

Pode ser observada na figura 5.19 a interação existente entre as tensões normais ao longo do reforço em PRFC e da armadura de tração, e a tensão de aderência entre os materiais concreto e reforço. Estas tensões foram normalizadas pelo seu máximo valor obtido na última etapa de carga antes da ruptura ($P=106,5$ kN).

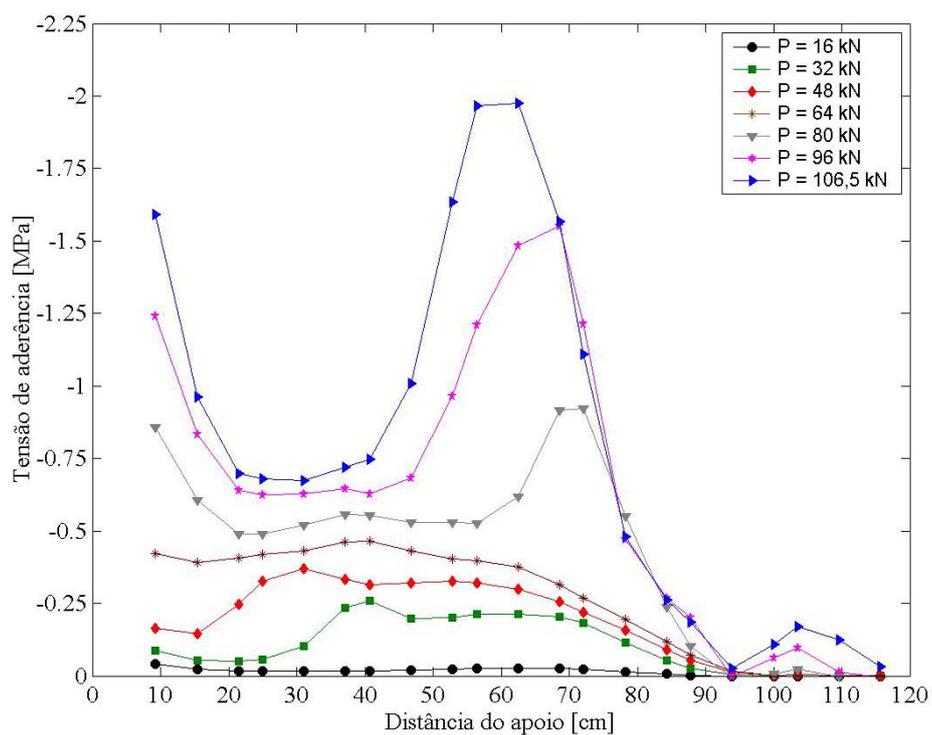


Figura 5.18 – Distribuição das tensões de aderência: viga reforçada com quatro camadas

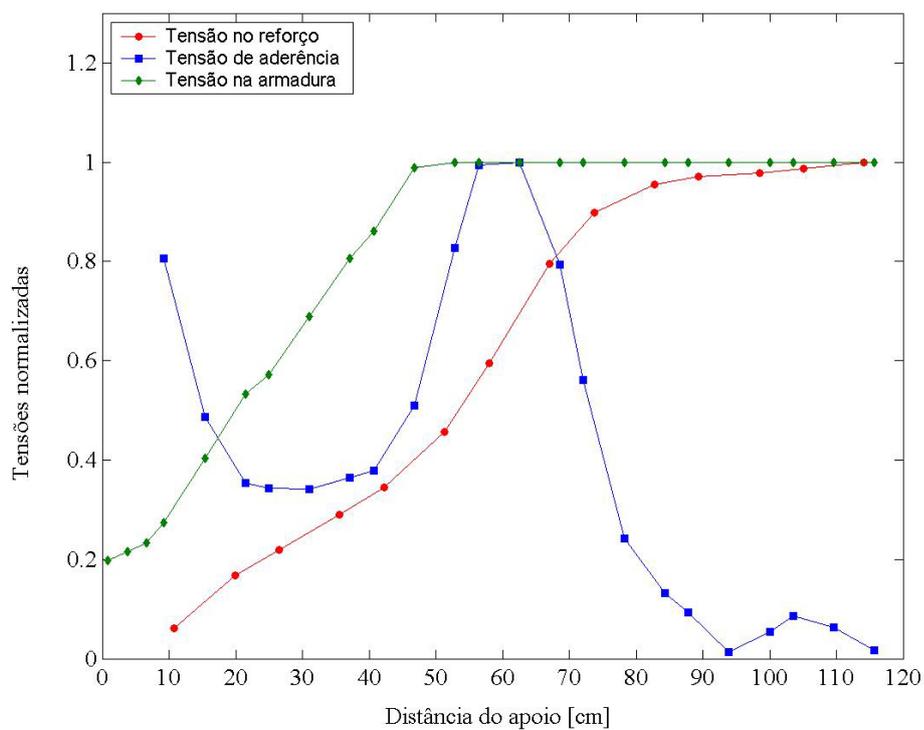


Figura 5.19 – Perfil de tensões normalizadas

Observando-se a figura 5.19 é facilmente detectado que o pico máximo da tensão de aderência ocorre devido ao escoamento da armadura de tração. No trecho em que a armadura não está escoada, o reforço possui sua parcela na absorção dos esforços de tração, bem como a armadura. Porém, quando se entra no trecho de armadura escoada, o reforço passa a contribuir com uma parcela maior na absorção dos esforços de tração, assim, há um aumento no gradiente de tensões no reforço. Como as tensões de aderência estão ligadas às variações de tensões no reforço, e pode ser visto que há uma variação brusca de tensões no reforço devido à armadura escoada, a tensão de aderência sofre também um aumento significativo.

Na tabela 5.7 é feita a comparação entre as cargas de ruptura numérica e experimental.

Tabela 5.7 – Comparação entre cargas de ruptura

Protótipo	Carga de ruptura [kN]		Diferença [%]
	Modelo	Experimental	
VR5	106,75	102,2	+4,45
VR6		100,6	+6,11

5.4.3 Vigas reforçadas com sete camadas de lâminas de fibra de carbono: VR7 e VR8

O deslocamento vertical da seção central com o aumento do carregamento externo aplicado é mostrado na figura 5.20. Através desta figura, são feitas as comparações entre o modelo de elementos finitos e os resultados obtidos por Beber (1999).

Pode ser observado, através da figura 5.20, a boa concordância entre os resultados obtidos numericamente e os resultados experimentais.

As máximas deformações no sistema de reforço ocorrem próximas ao centro da viga. A evolução da deformação com o carregamento no ponto de integração mais próximo ao centro da viga é apresentado na figura 5.21, e são feitas as comparações com as deformações no reforço obtidas experimentalmente por Beber (1999), para as vigas reforçadas com sete camadas de PRFC.

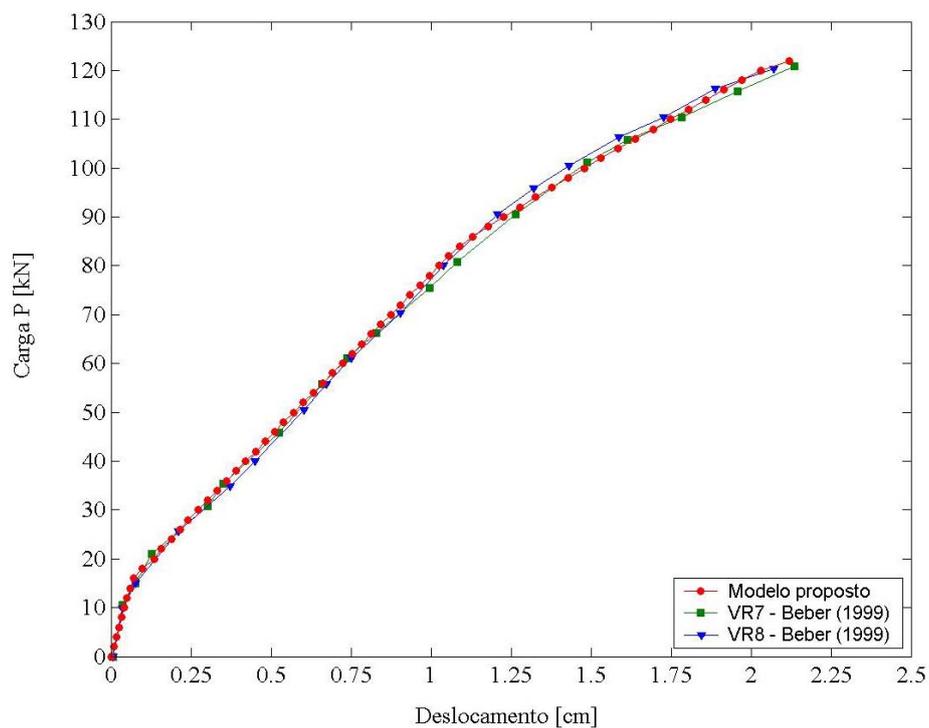


Figura 5.20 – Curvas carga x deslocamento: vigas VR7 e VR8

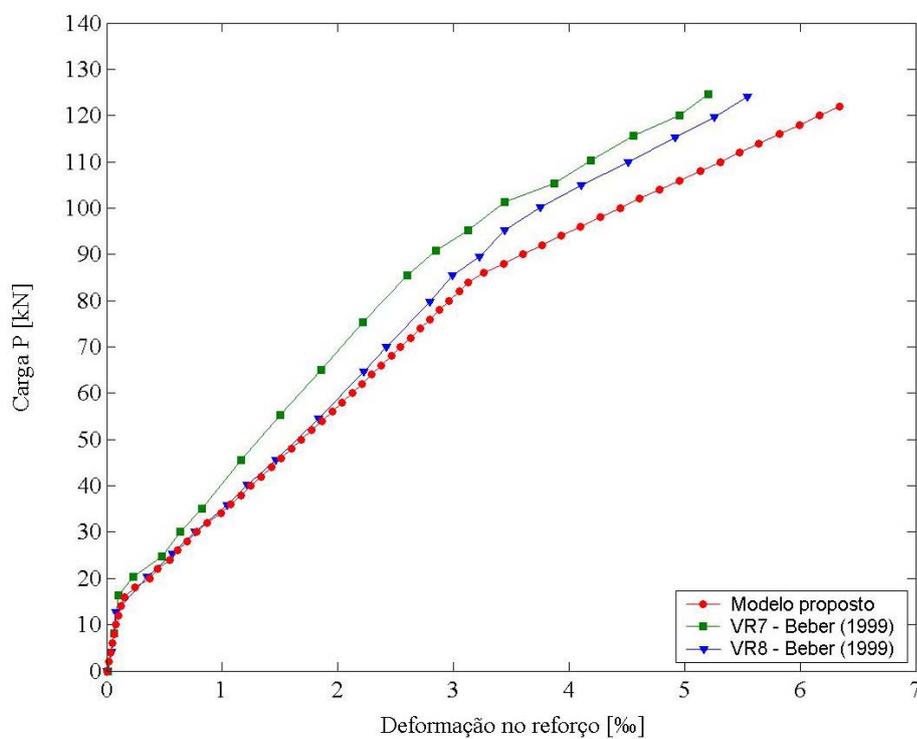


Figura 5.21 – Máxima deformação no reforço: vigas VR7 e VR8

As tensões de aderência entre o concreto e o reforço, obtidas numericamente, são apresentadas na figura 5.22 para diferentes níveis do carregamento.

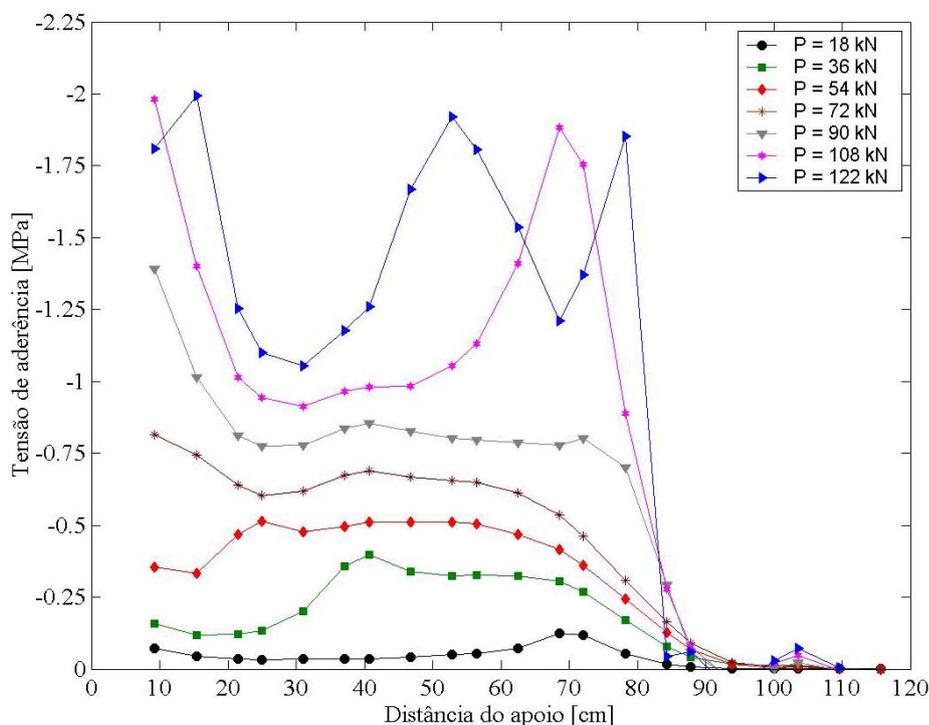


Figura 5.22 – Distribuição das tensões de aderência: sete camadas de PRFC

Beber (1999) relata que a ruptura das vigas reforçadas com sete camadas de PRFC se deu pelo descolamento do sistema de reforço estrutural próximo ao apoio. Pela figura 5.22 pode ser notado que as tensões de aderência obtidas numericamente atingem o valor último de tensão de aderência apresentada na tabela 5.3, justamente no ponto de integração mais próximo ao apoio. Assim, pode-se afirmar que há concordância entre os modos de ruptura experimental e numérico.

Na figura 5.23 são apresentadas as tensões no reforço, na armadura e as tensões de aderência, obtidas numericamente e normalizadas pelo seu máximo valor, na última etapa de carga onde o equilíbrio ainda foi atingido ($P=122$ kN).

Pode constatar-se através das figuras 5.22 e 5.23 que a falha teve sua origem na extremidade do reforço. Este modo de ruptura pode ser identificado como uma falha na ancoragem do mesmo. Iniciando na sua extremidade, este modo de falha é causado pela transferência de tensões de cisalhamento do reforço para o concreto, levando à ruptura da

camada de cobrimento do concreto. Esta ruptura do concreto do cobrimento se deve ao fato de que durante a sedimentação do concreto fresco, pode ocorrer um acúmulo de água sob as barras horizontais da armadura de tração, com a conseqüente formação de vazios, reduzindo assim sua resistência. Portanto, a ligação mais fraca da interface concreto/sistema de reforço ocorre no concreto.

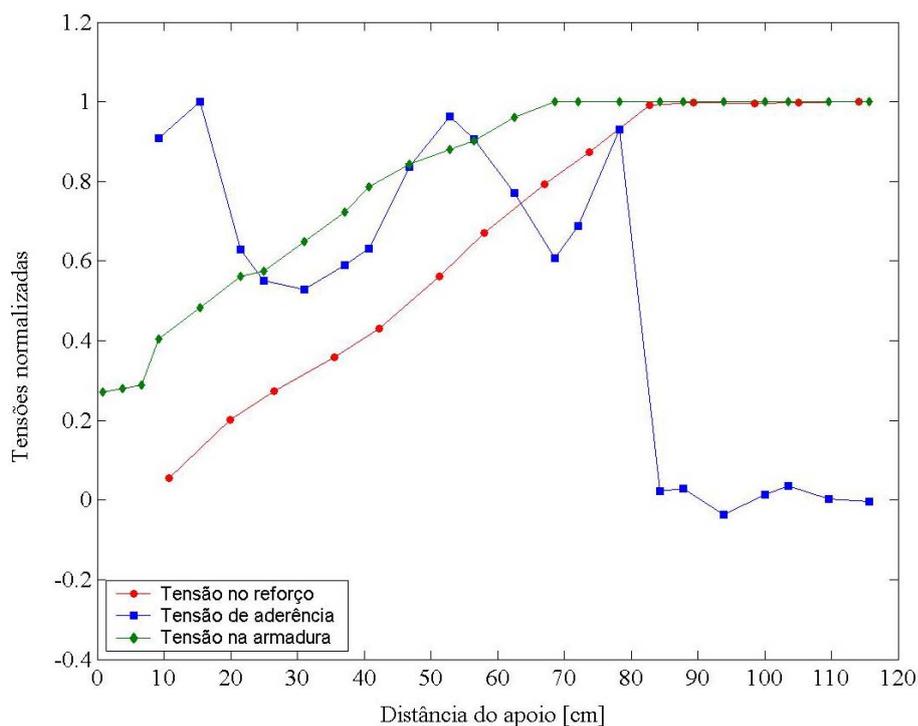


Figura 5.23 – Perfil de tensões normalizadas

A comparação entre as cargas de ruptura obtidas experimentalmente e a carga de ruptura numérica é feita na tabela 5.8.

Tabela 5.8 – Comparação entre cargas de ruptura

Protótipo	Carga de ruptura [kN]		Diferença [%]
	Modelo	Experimental	
VR7	122,25	124,2	-1,57
VR8		124,0	-1,41

5.4.4 Vigas reforçadas com dez camadas de lâminas de fibra de carbono: VR9 e VR10

Segundo Beber (1999), os protótipos reforçados com sete e dez camadas de PRFC apresentaram o mesmo modo de ruptura, ou seja, o descolamento da lâmina de reforço próximo ao apoio.

Podem ser feitas as comparações dos deslocamentos, experimentais e numéricos, para as vigas reforçadas com dez camadas de PRFC através da figura 5.24. Nota-se a excelente concordância entre os resultados para todas as fases da resposta da estrutura, fase elástica, propagação de fissuras e escoamento da armadura de tração.

Na figura 5.25 é apresentada a evolução da máxima deformação no reforço com o incremento no carregamento, onde pode notar-se que a deformação máxima é bastante inferior à deformação de ruptura apresentada na tabela 5.4. E na figura 5.26 são apresentadas as distribuições das tensões de aderência obtidas numericamente para diferentes níveis das cargas concentradas.

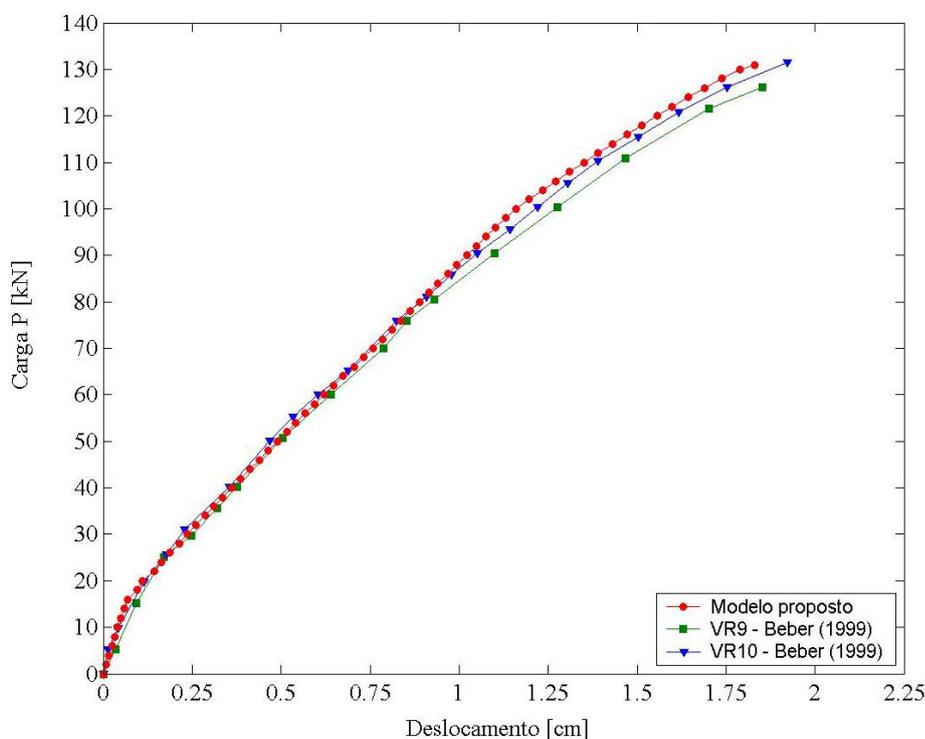


Figura 5.24 – Curvas carga x deslocamento: vigas VR9 e VR10

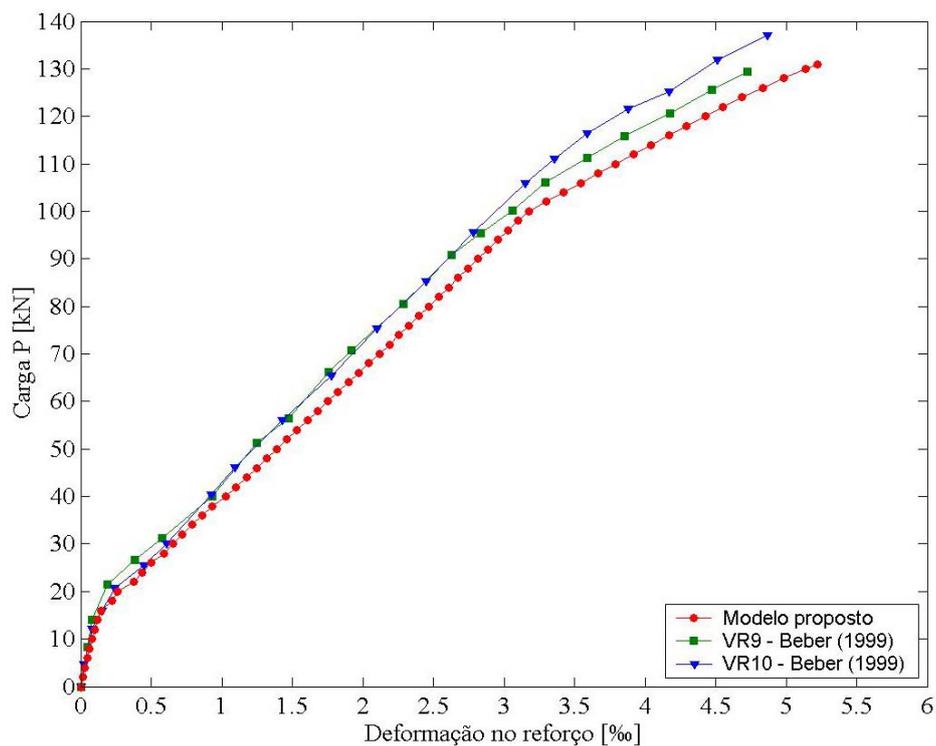


Figura 5.25 – Máxima deformação no reforço: vigas VR9 e VR10

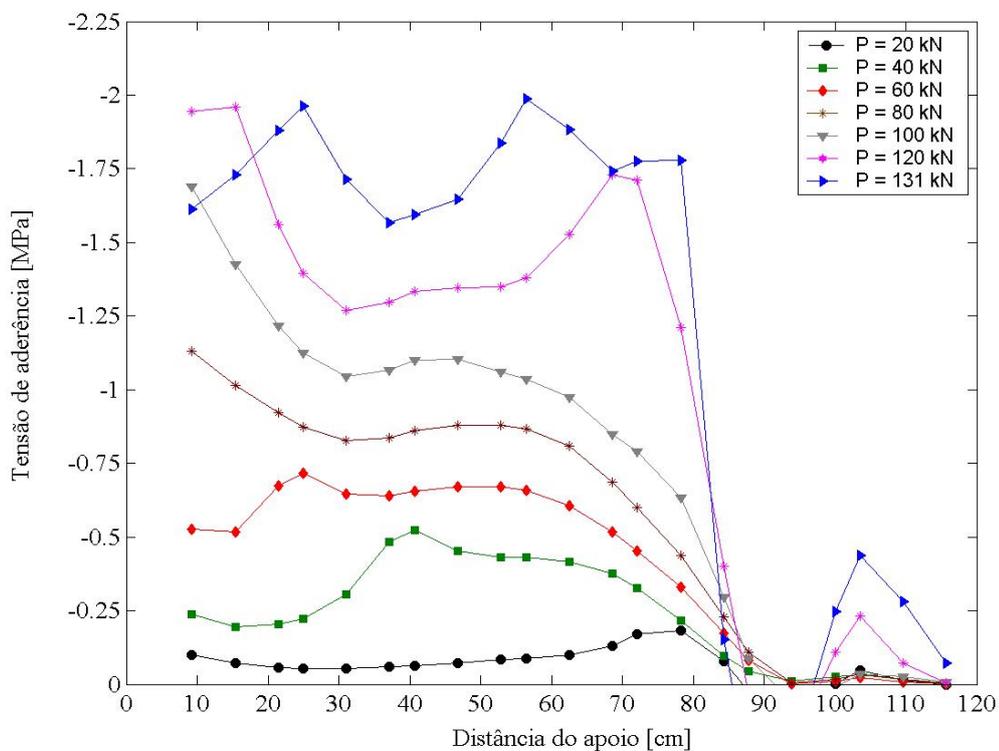


Figura 5.26 – Distribuição das tensões de aderência: dez camadas de PRFC

Fechando esta série de vigas reforçadas, na figura 5.27 é mostrada a interação das tensões normalizadas pelo seu máximo valor, na última etapa de carga antes da ruptura ($P=131$ kN).

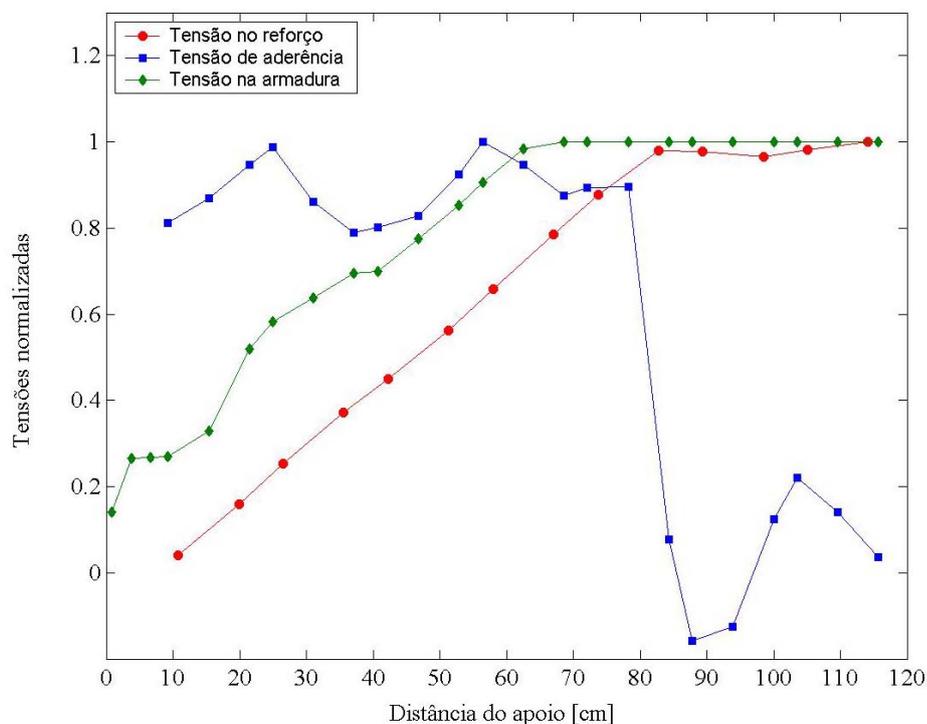


Figura 5.27 – Perfil de tensões normalizadas

Fazendo-se uma análise das figuras apresentadas para a viga reforçada com dez camadas de PRFC, principalmente a figura 5.26, conclui-se que há concordância entre os modos de ruptura observados experimentalmente e numericamente, devido ao fato da tensão de aderência atingir sua tensão última na região próxima ao apoio.

Este tipo de falha ocorre tipicamente em vigas de comportamento frágil, devido à redução na ductilidade que a aplicação do sistema de reforço conduz. A descontinuidade na geometria da seção transversal próxima ao apoio, de uma seção não reforçada para uma seção reforçada, pode causar uma concentração de tensões nesta região, que juntamente com a transferência de tensões de cisalhamento entre o reforço e o concreto podem levar ao descolamento do reforço (THOMSEN et al., 2004).

O aumento na tensão de aderência na região próxima à carga concentrada é uma decorrência da mudança na declividade da curva da tensão normal no reforço (figura 5.27), ou

seja, há um aumento das tensões no reforço devido ao estado de fissuração do concreto e o escoamento da armadura de tração nessa região. A tensão de aderência apresenta a tendência de possuir valores muito próximos de zero quando se aproxima do centro. Tal fato pode ser visto na figura 5.27, e tem como causa a total transferência dos esforços de tração para o reforço, assim, não há mais variações das tensões no mesmo, zerando, ou deixando a tensão de aderência quase nula.

A tabela 5.9 serve de parâmetro para a comparação entre as cargas de ruptura experimentais e a carga de ruptura numérica.

Tabela 5.9 – Comparação entre cargas de ruptura

Protótipo	Carga de ruptura [kN]		Diferença [%]
	Modelo	Experimental	
VR9	131,25	129,6	+1,27
VR10		137,0	-4,20

5.5 VIGAS SIMULADAS POR APRILE et al. (2001)

Na Universidade de Ljubljana, na Eslovênia, foram feitos ensaios experimentais com vigas em concreto armado de diferentes seções transversais, reforçadas com diferentes materiais (PRFC ou chapa de aço) e carregadas até a ruptura. Os resultados desse estudo estão apresentados em Zarnic et al. (1999), e serviram como parâmetro de comparação para os resultados numéricos obtidos por Aprile et al. (2001).

Como exemplo de aplicação do modelo de elementos finitos proposto nesta tese, foram simuladas as vigas de concreto armado com seções transversais de 20 x 30 cm², e as lajes, também em concreto armado, de seções transversais 80 x 12 cm². Todos os protótipos com vão livre entre apoios de comprimento igual a 290 cm. Os elementos em concreto armado foram reforçados primeiramente com uma chapa de aço de comprimento igual a 280 cm, e posteriormente com PRFC de mesmo comprimento da chapa de aço.

As armaduras longitudinais de tração, de compressão e a armadura transversal de cisalhamento foram as mesmas para os dois exemplos das vigas em concreto armado. A armadura longitudinal de tração consiste de uma área A_s de 3,39 cm², enquanto que a

armadura longitudinal de compressão possui uma área A'_s de $2,26 \text{ cm}^2$. Para as lajes em concreto armado foi utilizada uma armadura inferior de flexão com área A_s de $3,84 \text{ cm}^2$ e armadura superior com área A'_s de $2,56 \text{ cm}^2$. Para a garantia de que não haja ruptura dos elementos estruturais por esforços de cisalhamento, usou-se uma armadura transversal com estribos de 6 mm de diâmetro espaçados uniformemente ao longo do comprimento da viga em intervalos de 10 cm, para todos os exemplos.

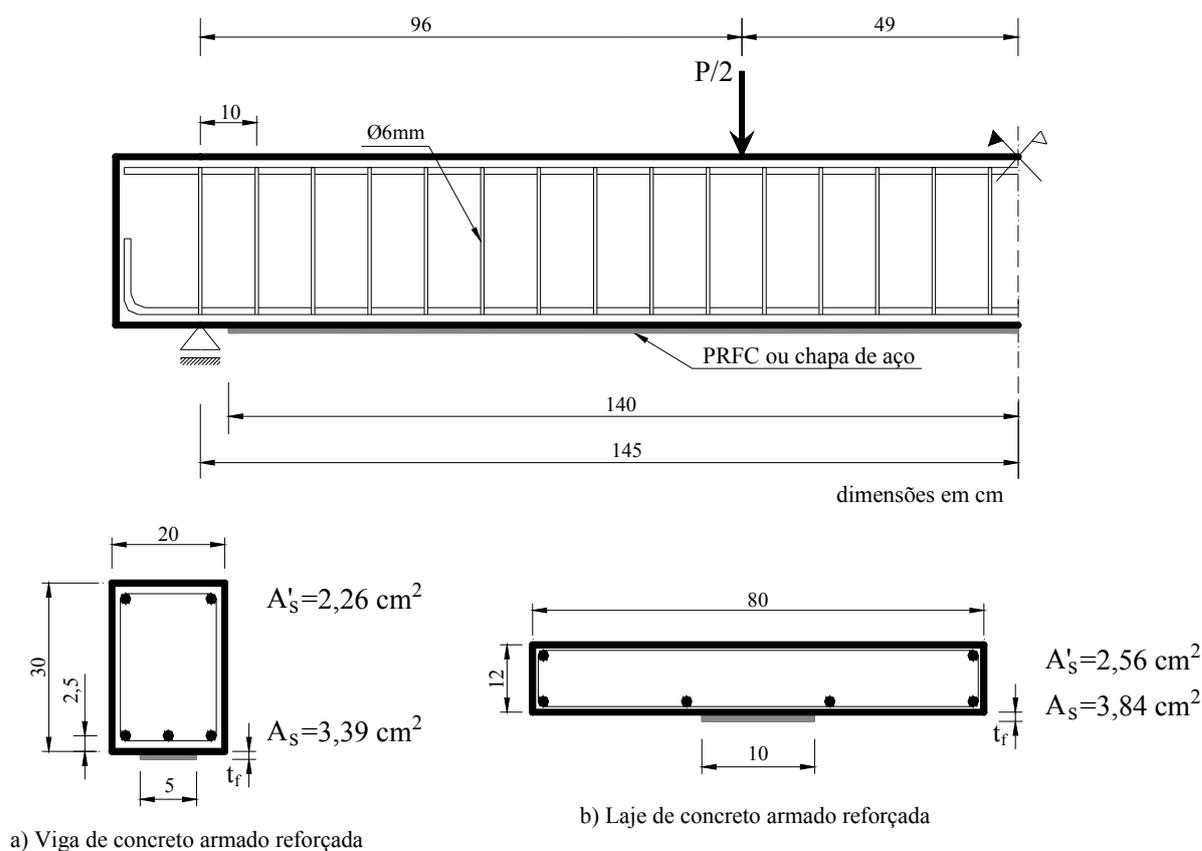


Figura 5.28 – Elementos estruturais reforçados com PRFC ou chapa de aço

Devido à simetria apresentada por ambos os exemplos, discretizou-se apenas metade dos elementos estruturais, conforme é apresentado na figura 5.29, guardadas as proporções da geometria da seção transversal das vigas e das lajes. A geometria dos elementos, bem como as condições de carregamento são apresentadas na figura 5.28.

Na tabela 5.10 são apresentadas as propriedades mecânicas e geométricas dos materiais envolvidos no problema.

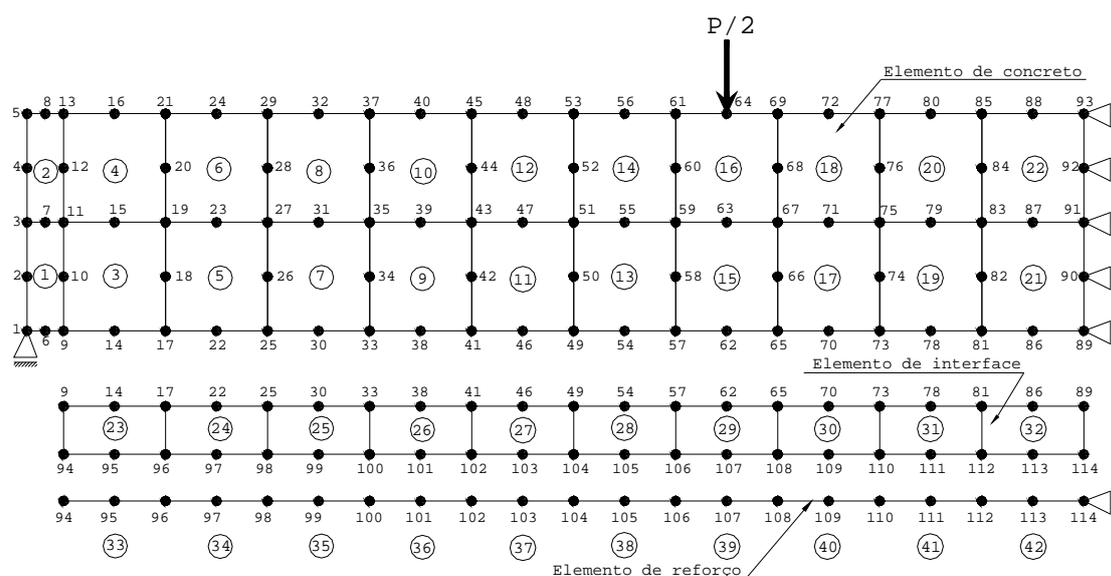


Figura 5.29 – Malha de elementos finitos para todos exemplos

Tabela 5.10 – Propriedades mecânicas e geométricas

Concreto	Barras de armadura	PRFC	Chapa de aço
$f_{cm} = 25 \text{ MPa}$	$f_{ym} = 460 \text{ MPa}$	$\sigma_{rup} = 2.400 \text{ MPa}$	$f_{ym} = 360 \text{ MPa}$
$f_{ctm} = 3,5 \text{ MPa}$	$E_s = 210 \text{ GPa}$	$E_R = 150 \text{ GPa}$	$E_s = 210 \text{ GPa}$
$E_{co} = 27 \text{ GPa}$	-	$t_f = 0,12 \text{ cm}$	$t_f = 0,4 \text{ cm}$
Interface (concreto/chapa de aço)	$k_s = 22,7 \text{ MPa/mm}$	$\tau_{m\acute{a}x} = 2,27 \text{ MPa}$	-
Interface (concreto/PRFC)	$k_s = 62,5 \text{ MPa/mm}$	$\tau_{m\acute{a}x} = 5 \text{ MPa}$	-

A curva *carga x deslocamento* obtida numericamente pelo modelo aqui proposto é comparada com as curvas *carga x deslocamento* obtidas experimentalmente por Zarnic et al. (1999) e numericamente por Aprile et al. (2001) através da figura 5.30, para a viga reforçada com chapa de aço.

A variação da tensão normal no reforço em chapa de aço com a distância em relação ao apoio, para as condições últimas de carregamento, obtidas numericamente pelo modelo proposto e por Aprile et al. (2001) são comparadas na figura 5.31.

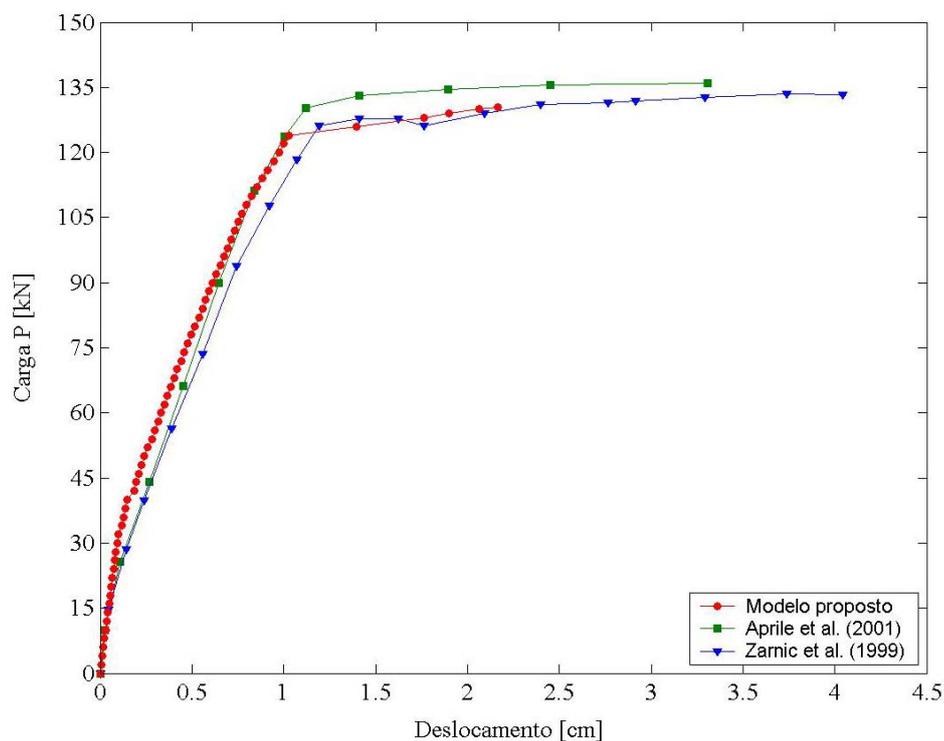


Figura 5.30 – Curvas carga x deslocamento: viga reforçada com chapa de aço

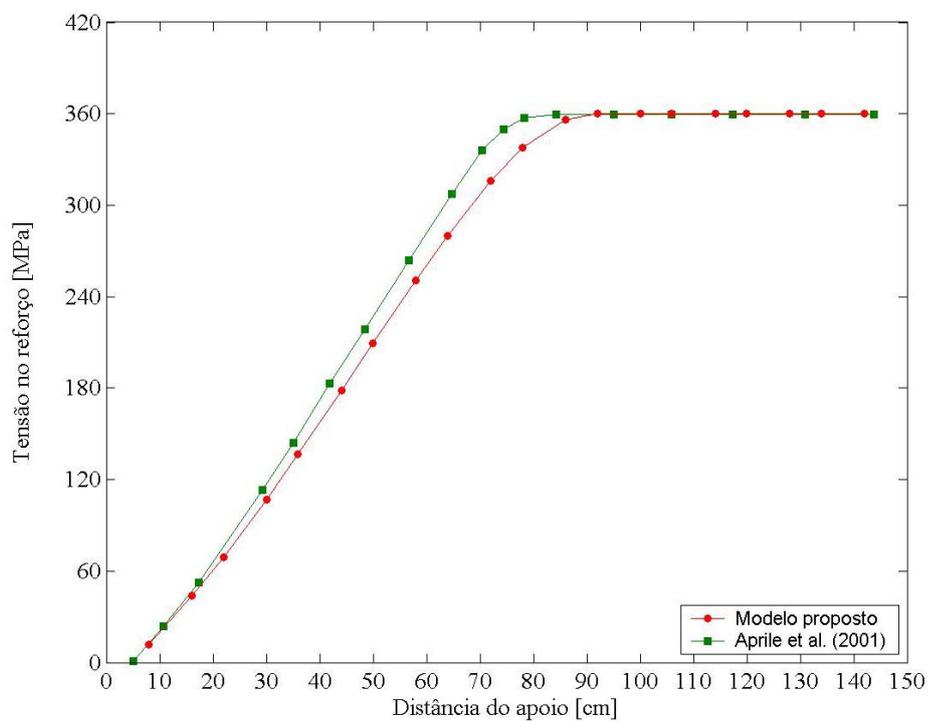


Figura 5.31 – Tensão normal no reforço em chapa de aço para a viga: estado limite último

Na figura 5.32 é feita a comparação entre as tensões de aderência obtidas numericamente pelo modelo proposto e por Aprile et al. (2001) na proximidade da ruptura da estrutura.

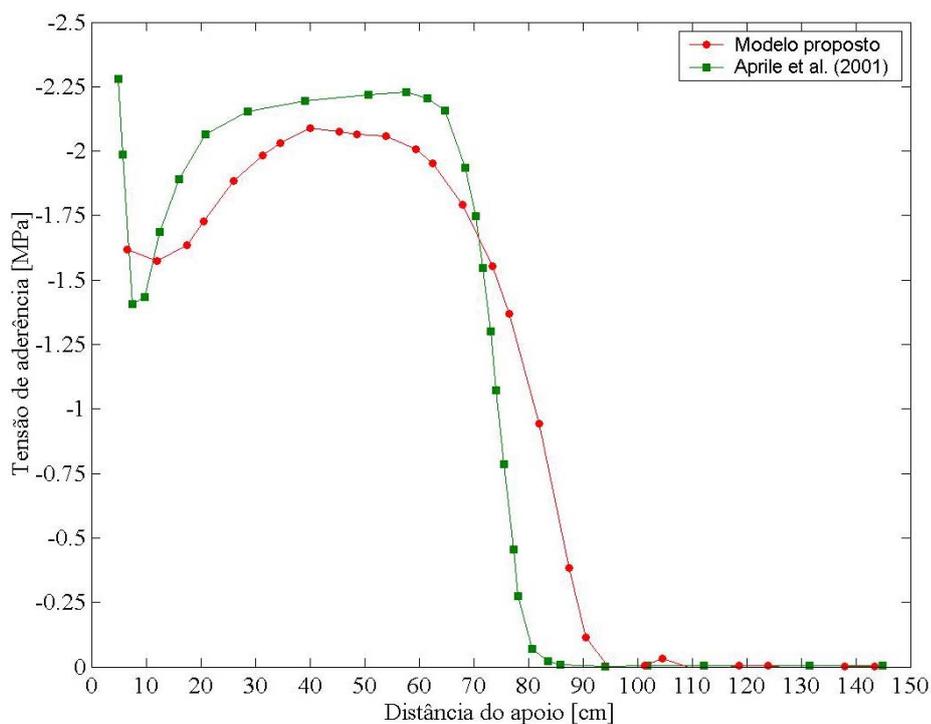


Figura 5.32 – Tensão de aderência para o caso da viga reforçada com chapa de aço: estado limite último

Em uma segunda análise, a viga foi reforçada com PRFC de área transversal de reforço igual a $0,6 \text{ cm}^2$.

Na figura 5.33 é feita a comparação entre as respostas em termos de deslocamentos da viga reforçada com PRFC. São mostrados os resultados obtidos numericamente pelo modelo aqui proposto, por Aprile et al. (2001) e os resultados obtidos experimentalmente por Zarnic et al. (1999).

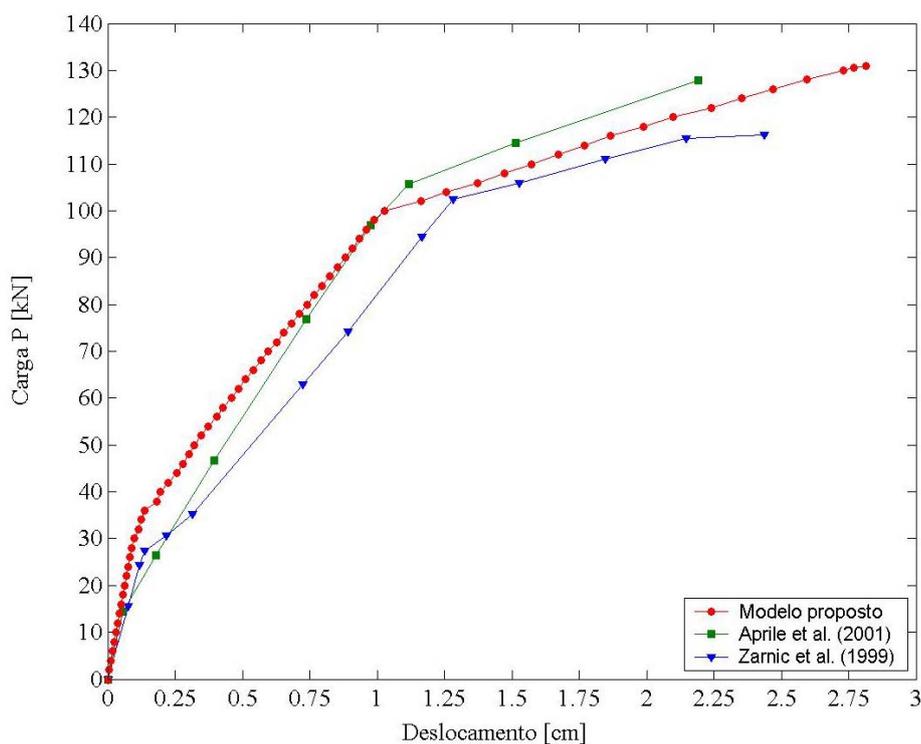


Figura 5.33 – Curvas carga x deslocamento: viga reforçada com PRFC

Na figura 5.34 é mostrada a distribuição das tensões normais no reforço em material compósito conforme aumenta a distância em relação ao apoio da viga, para o nível de carregamento próximo à ruptura da estrutura. São mostrados os valores numéricos obtidos pelo modelo de elementos finitos proposto e por Aprile et al. (2001).

Através da figura 5.35 pode ser observado o comportamento das tensões de aderência do apoio para o centro da viga, valores estes obtidos numericamente para o nível de carregamento próximo à ruptura da estrutura.

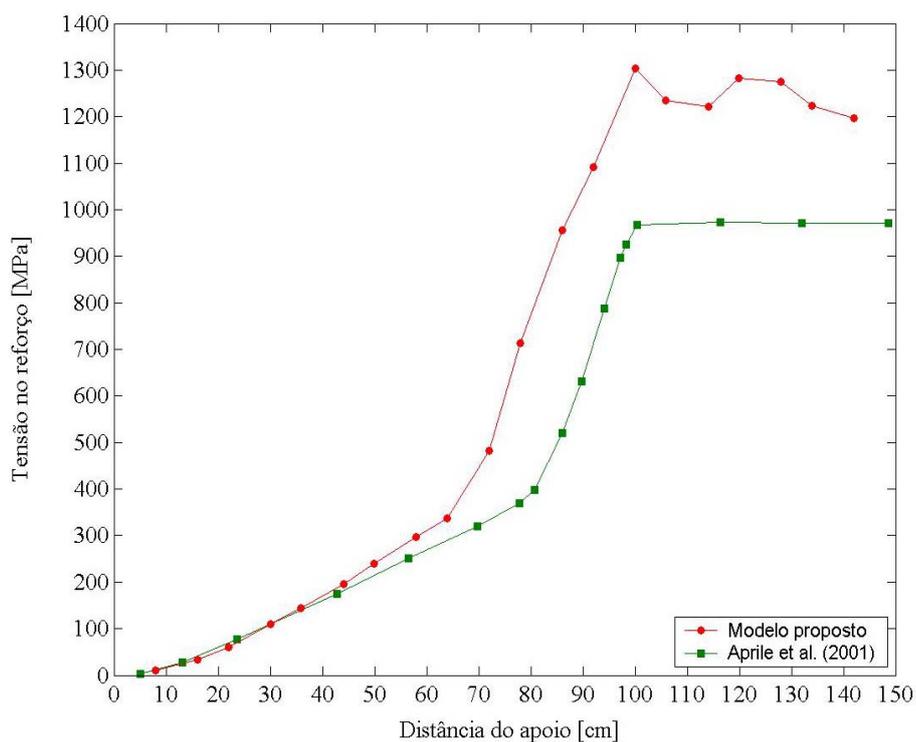


Figura 5.34 - Tensão normal no reforço em PRFC: estado limite último para a viga reforçada

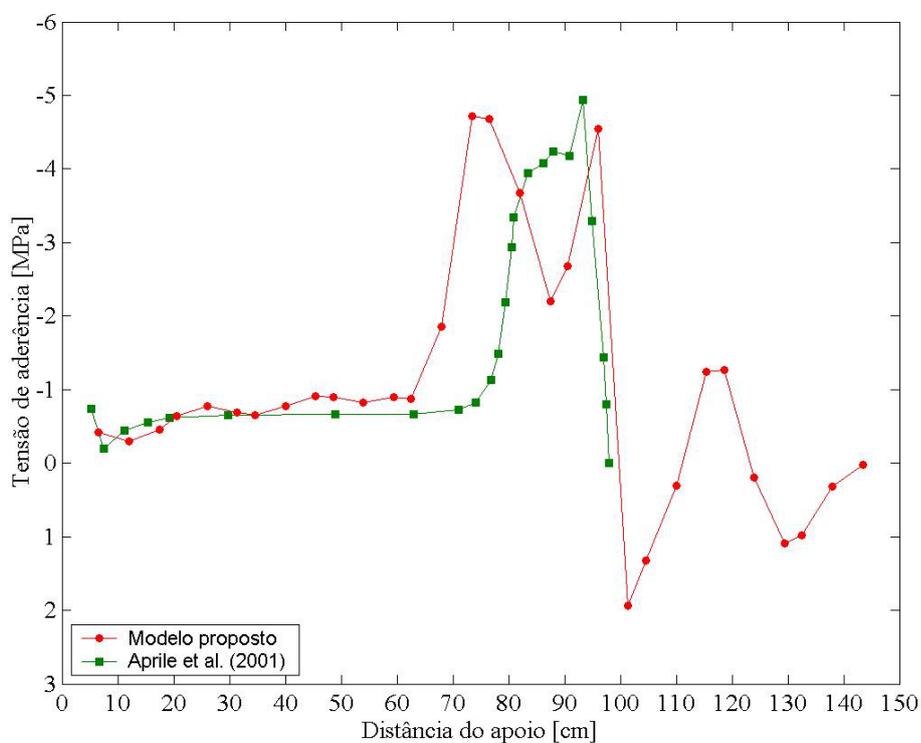


Figura 5.35 – Tensão de aderência: estado limite último para a viga reforçada com PRFC

Foi observado um comportamento diferente em relação à distribuição das tensões de aderência na viga reforçada com PRFC e com chapa de aço. Como pode ser visto na figura 5.32, a tensão de aderência possui a tendência de atingir seu valor último nas proximidades da extremidade do reforço, quando o mesmo é feito em chapa de aço. Quando a técnica de reforço utilizada é à base de fibras de carbono e resina epóxi, dependendo de diversos fatores geométricos e físicos do material de reforço, apresenta-se a tendência de serem atingidas as tensões últimas de aderência nas proximidades da carga aplicada, fato que pode ser notado na figura 5.35 e que foi observado experimentalmente por Zarnic et al. (1999).

Fazendo-se uma análise conjunta das figuras 5.31 e 5.32 para a viga reforçada com chapa de aço, pode ser notado que no trecho central da viga, onde a tensão de aderência é nula, é o trecho em que a chapa de aço está escoada, sendo que a partir deste ponto as tensões no reforço decrescem na direção do apoio, fazendo com que haja o aparecimento de tensões de aderência devido à transferência de tensões entre o concreto e o reforço.

Analisando-se as figuras 5.34 e 5.35, as quais representam o comportamento da viga reforçada com PRFC, conclui-se que o valor máximo da tensão de aderência é devido ao súbito aumento das tensões de tração no reforço, na região próxima da carga concentrada, em consequência do estado de fissuração do concreto e do escoamento da armadura de tração.

Na figura 5.36, os resultados numéricos e experimentais são comparados em termos do carregamento aplicado e dos deslocamentos no centro do vão para ambas as lajes, reforçadas com chapa de aço ou com PRFC.

Através da figura 5.37 pode ser feita uma comparação da variação da tensão de aderência em relação ao apoio, para a laje reforçada com chapa de aço, nas condições últimas de carregamento.

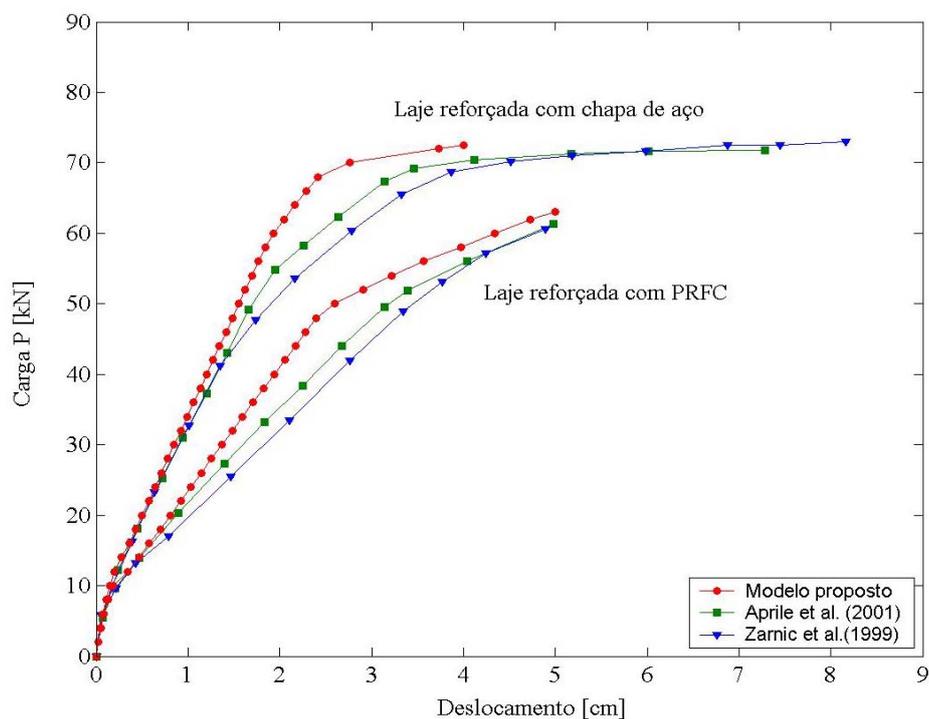


Figura 5.36 – Curvas carga x deslocamento: laje reforçada com chapa de aço ou PRFC

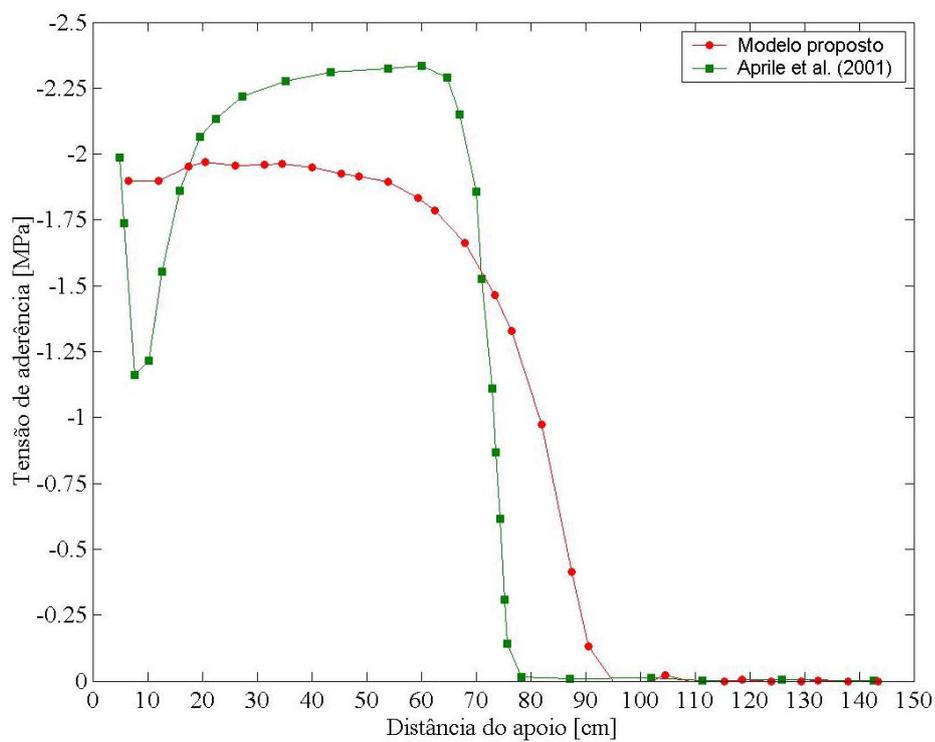


Figura 5.37 – Tensão de aderência: estado limite último para a laje reforçada com chapa de aço

Segundo Aprile et al. (2001), para o caso da laje reforçada com PRFC a distribuição da tensão de aderência entre o reforço e o concreto é similar ao caso da viga reforçada com o mesmo material, assim foi omitida em seu trabalho. Desta maneira, não havendo resultados para a comparação, são mostradas na figura 5.38 as tensões no reforço, na armadura e de aderência normalizadas pelo seu máximo valor e obtidas pelo modelo de elementos finitos aqui proposto. Pode ser confirmado que o comportamento é próximo ao apresentado na figura 5.35 para a viga reforçada com PRFC.

Este modo de falha da aderência em uma zona intermediária pode ser detectado pelo modelo devido ao pico na tensão de aderência causado pela penetração da armadura escoada no trecho entre o carregamento e o apoio (vão de cisalhamento), fazendo com que o reforço passe a absorver uma parcela maior das tensões de tração, devido a sua capacidade em absorver grandes deformações. Estas tensões de tração devem ser transmitidas ao reforço por meio das tensões de aderência. Na figura 5.38 é mostrada a interação entre as tensões normais na armadura e no reforço e as tensões de aderência, e o comportamento descrito acima.

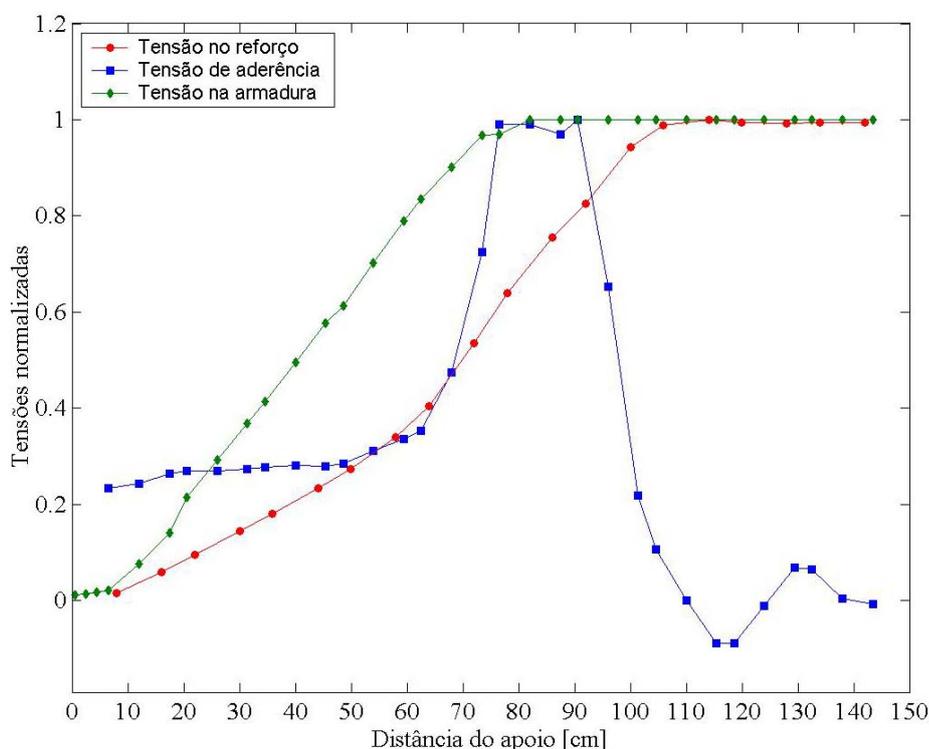


Figura 5.38 – Tensões normalizadas pelo seu máximo valor

Na tabela 5.11 é feita a comparação entre as cargas de ruptura obtidas para os elementos estruturais simulados neste exemplo.

Tabela 5.11 – Comparação entre cargas de ruptura

Protótipo	Carga de ruptura [kN]			Diferença [%]	
	Modelo	Aprile et al. (2001)	Zarnic et al. (1999)	Modelo/Aprile et al. (2001)	Modelo/Zarnic et al. (1999)
Viga com reforço em chapa de aço	130,75	135,90	133,40	-3,79	-1,99
Viga com reforço em PRFC	131,25	127,90	116,20	+2,62	+12,95
Laje com reforço em chapa de aço	72,75	71,80	72,95	+1,32	-0,27
Laje com reforço em PRFC	63,25	61,30	60,60	+3,18	+4,37

5.6 VIGA SIMULADA POR SPACONE E LIMKATANYU (2000)

Em Spacone e Limkatanyu (2000) são apresentados os resultados numéricos da estrutura apresentada na figura 5.28, que possui seção transversal apresentada na mesma figura, item b. Trata-se de uma viga de seção transversal $80 \times 12 \text{ cm}^2$ e distância entre apoios de 290 cm, reforçada com laminado à base de fibras de carbono de comprimento 280 cm e área da seção transversal de $1,20 \text{ cm}^2$. As áreas de armadura, tanto longitudinal quanto transversal, são as mesmas apresentadas na figura 5.28, item b. A diferença está nas propriedades mecânicas dos materiais, sendo que as mesmas são apresentadas na tabela 5.12.

A malha de elementos finitos usada para a simulação numérica através do modelo aqui proposto é a mesma apresentada na figura 5.29.

A carga de ruptura obtida numericamente por Spacone e Limkatanyu (2000) foi de aproximadamente 62 kN, enquanto que a carga de colapso obtida pelo modelo proposto foi de

65,25 kN, estabelecendo assim, uma diferença de +5,24% entre as cargas de ruptura. Segundo os autores, quando há o descolamento do reforço na região próxima à carga concentrada, a viga apresenta uma queda brusca na sua resistência devido à perda de contribuição do mesmo, assim a resistência residual é a da viga original não reforçada, indicando a falha da estrutura.

Tabela 5.12 – Propriedades mecânicas dos materiais

Concreto	Barras de armadura	PRFC
$f_{cm} = 25 \text{ MPa}$	$f_{ym} = 460 \text{ MPa}$	$\sigma_{rup} = 1.800 \text{ MPa}$
$f_{ctm} = 1 \text{ MPa}$	$E_s = 210 \text{ GPa}$	$E_R = 140 \text{ GPa}$
$E_{co} = 27 \text{ GPa}$	-	$t_f = 0,12 \text{ cm}$
Interface	$k_S = 37,5 \text{ MPa/mm}$	$\tau_{m\acute{a}x} = 3 \text{ MPa}$

Na figura 5.39 são apresentadas as curvas *carga x deslocamento*, ambas numéricas, para a estrutura reforçada com PRFC.

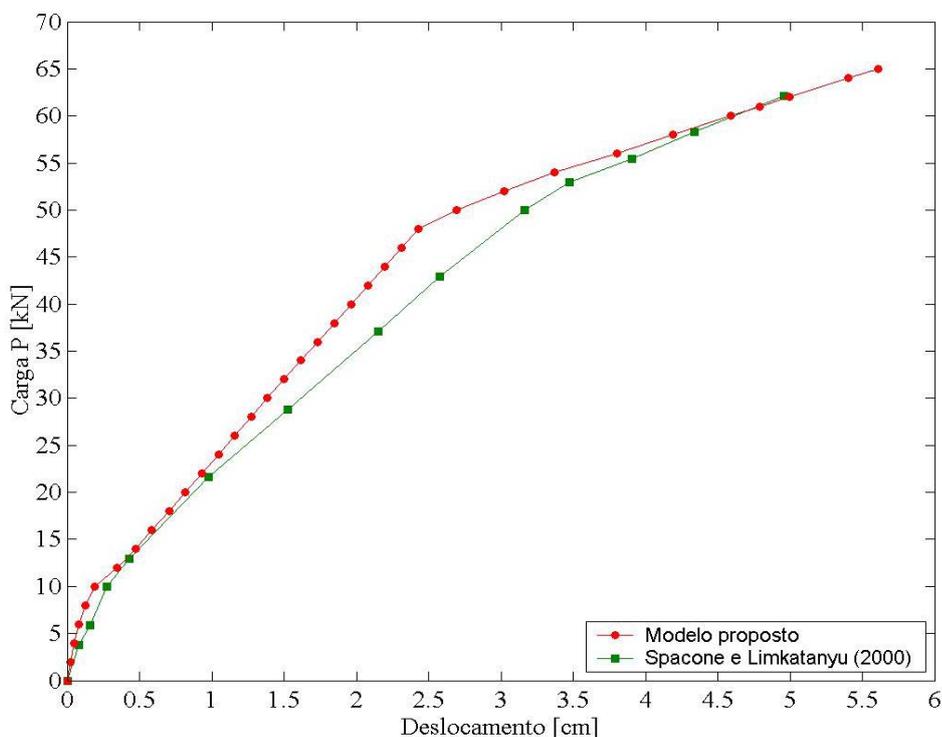


Figura 5.39 – Curvas carga x deslocamento: deslocamento no meio do vão

Nas figuras 5.40 e 5.41 são apresentadas as distribuições das tensões normais no reforço para as cargas de 52 kN e para a carga de falha da estrutura, respectivamente.

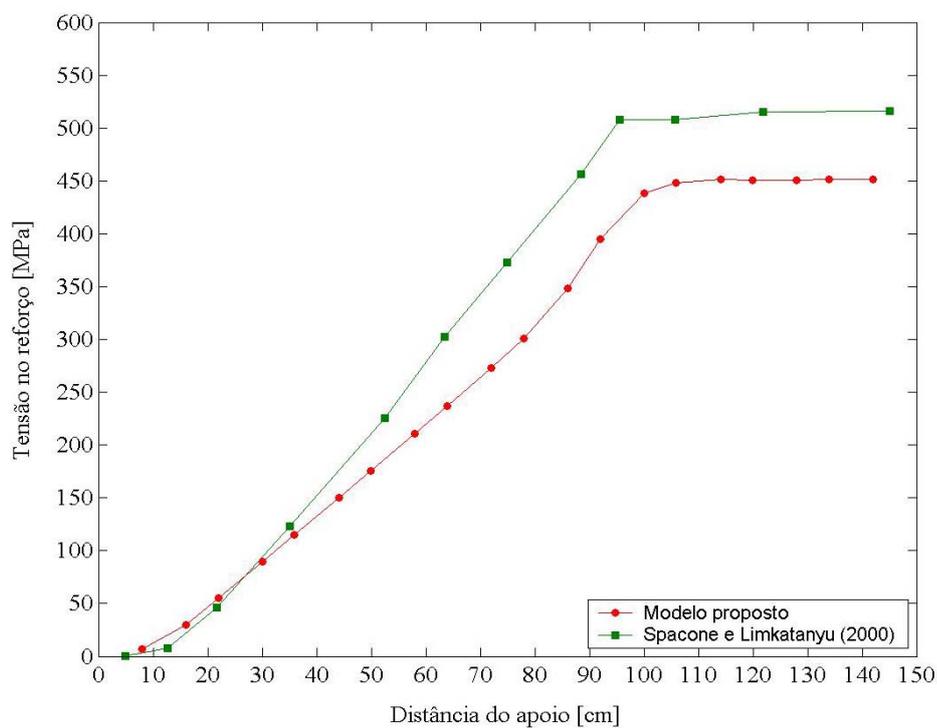


Figura 5.40 – Distribuição da tensão normal no reforço: P = 52 kN

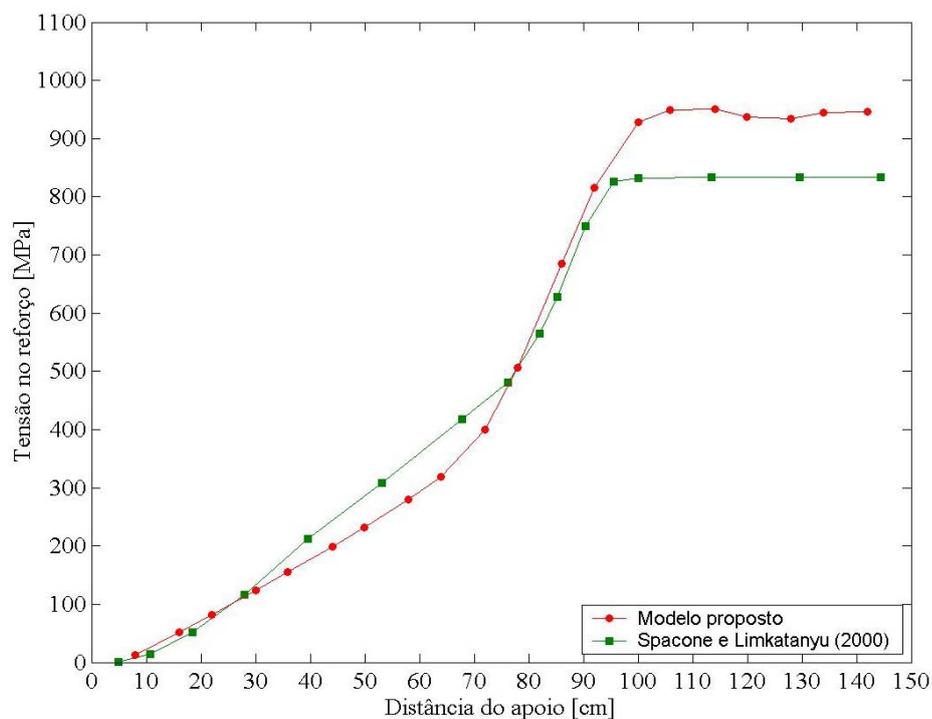


Figura 5.41 – Distribuição da tensão normal no reforço: próximo da falha

São mostradas nas figuras 5.42 e 5.43 como variam as tensões de aderência ao longo do comprimento da viga, para as cargas de 52 kN e próximo ao colapso, respectivamente.

Os resultados aqui comparados mostraram boa concordância em rigidez, resistência e modo de ruptura. A distribuição da tensão de aderência (figura 5.43) mostrou valores praticamente constantes na região entre a extremidade do reforço e próximo à carga concentrada, sendo que há um acréscimo brusco na tensão de aderência quando é feita a transição entre o trecho de regime elástico da armadura e o trecho com armadura em escoamento. Após este pico na tensão de aderência, a mesma assume novamente valores praticamente constantes e próximos de zero, devido à constância de tensões no reforço nesta região.

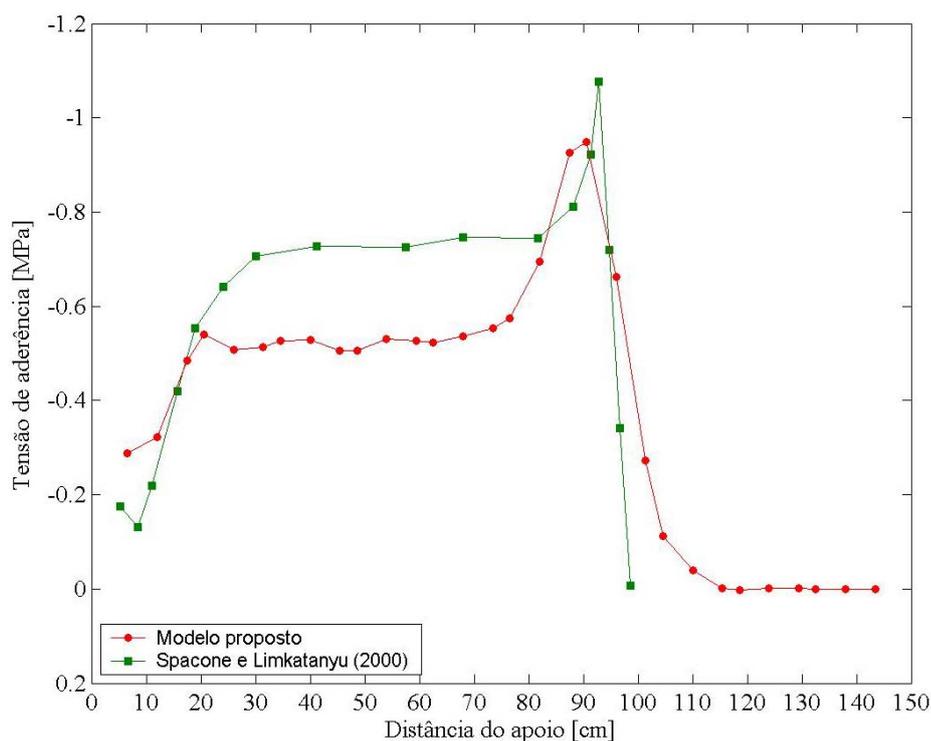


Figura 5.42 – Variação das tensões de aderência: P = 52 kN

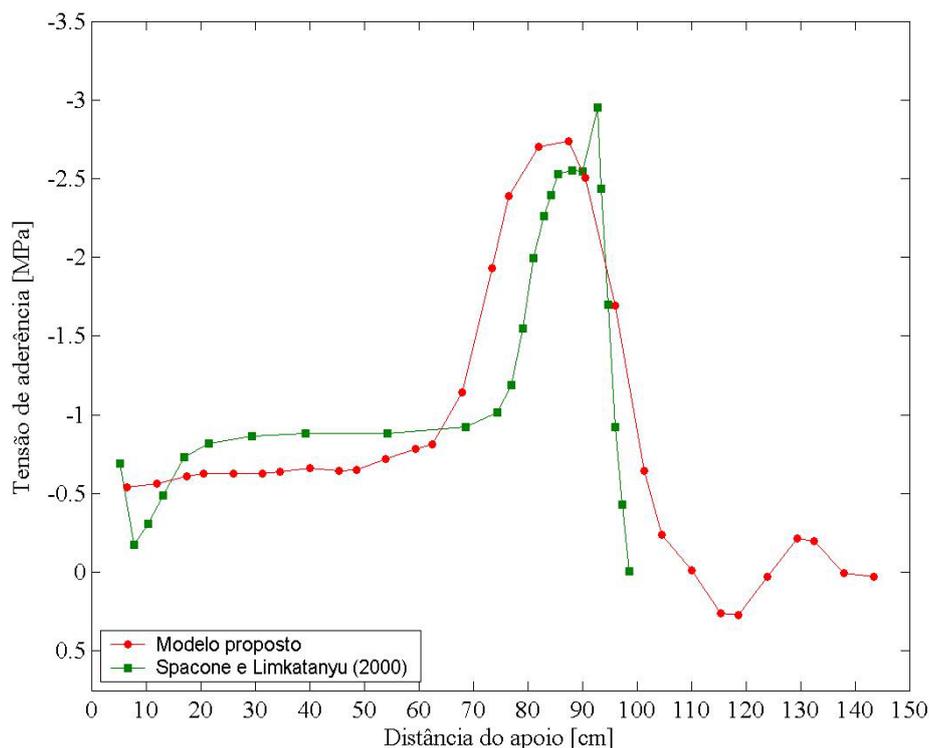


Figura 5.43 – Variação das tensões de aderência: próximo da falha

5.7 VIGA ENSAIADA POR CAMPAGNOLO et al. (1997)

A viga em concreto armado reforçada com chapa de aço apresentada aqui possui as mesmas propriedades geométricas das vigas apresentadas no item 5.4, as quais foram ensaiadas por Beber (1999). Entretanto, a armadura superior, neste exemplo, é composta por duas barras de diâmetro 6,3 mm, e a armadura transversal de estribos de 6,3 mm de diâmetro espaçados uniformemente de 11 cm. A chapa de aço possui um comprimento de 220 cm, largura de 12 cm e espessura 2,8 mm, portanto, a área da seção transversal do reforço é de $3,36 \text{ cm}^2$.

Como nos exemplos apresentados no item 5.4, a malha de elementos finitos possui dezesseis elementos para a representação do concreto, sete elementos para o reforço e sete elementos para a interface. Assim, a malha possui o aspecto apresentado na figura 5.2.

As propriedades dos materiais intervenientes estão apresentadas na tabela 5.13.

Tabela 5.13 – Propriedades dos materiais – Viga ensaiada por Campagnolo et al. (1997)

Concreto	Armadura longitudinal $\phi 10\text{mm}$	Armadura longitudinal e transversal $\phi 6,3\text{mm}$	Chapa de aço
$f_{cm} = 33,26 \text{ MPa}$	$f_{ym} = 549 \text{ MPa}$	$f_{ym} = 657 \text{ MPa}$	$f_{ym} = 326 \text{ MPa}$
$f_{ctm} = 3,28 \text{ MPa}$	$E_s = 210 \text{ GPa}$	$E_s = 210 \text{ GPa}$	$E_s = 210 \text{ GPa}$
$E_{co} = 38,2 \text{ GPa}$	-	-	-
Interface	$k_s = 17,30 \text{ MPa/mm}$	$\tau_{m\acute{a}x} = 0,3\sqrt{f_{cm}} = 1,73 \text{ MPa}$	

Na figura 5.44 é feita a comparação entre as curvas *carga x deslocamento* obtidas numericamente pelo modelo de elementos finitos e experimentalmente por Campagnolo et al. (1997).

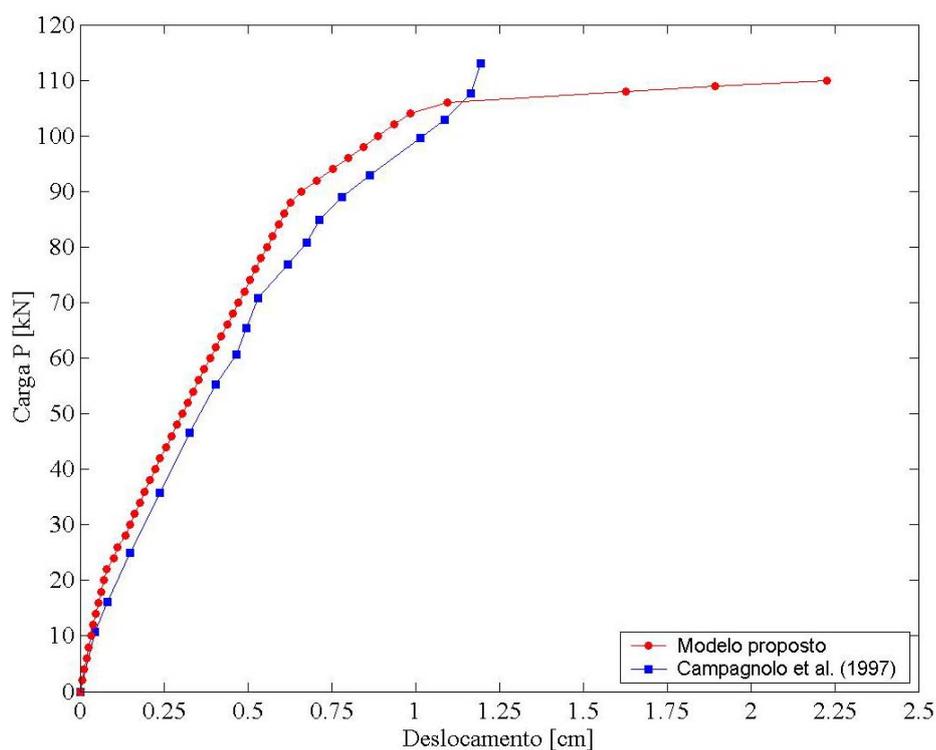


Figura 5.44 – Curvas carga x deslocamento: viga ensaiada por Campagnolo et al. (1997)

As tensões normais no reforço e as tensões de aderência, obtidas numericamente, são apresentadas nas figuras 5.45 e 5.46, respectivamente, para diferentes níveis do carregamento externo.

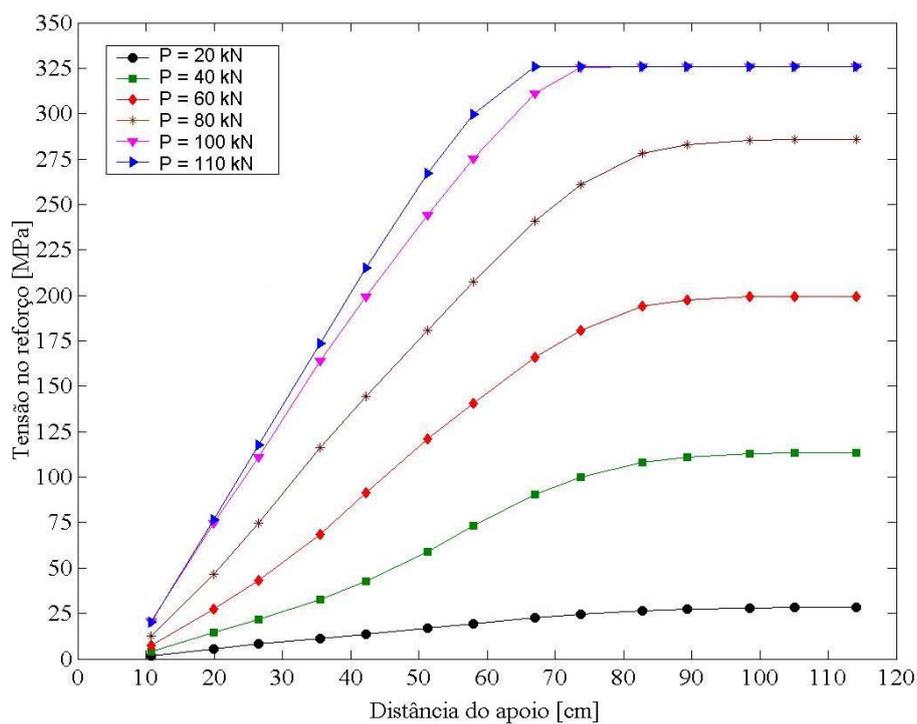


Figura 5.45 – Variação da tensão normal no reforço para diferentes níveis do carregamento

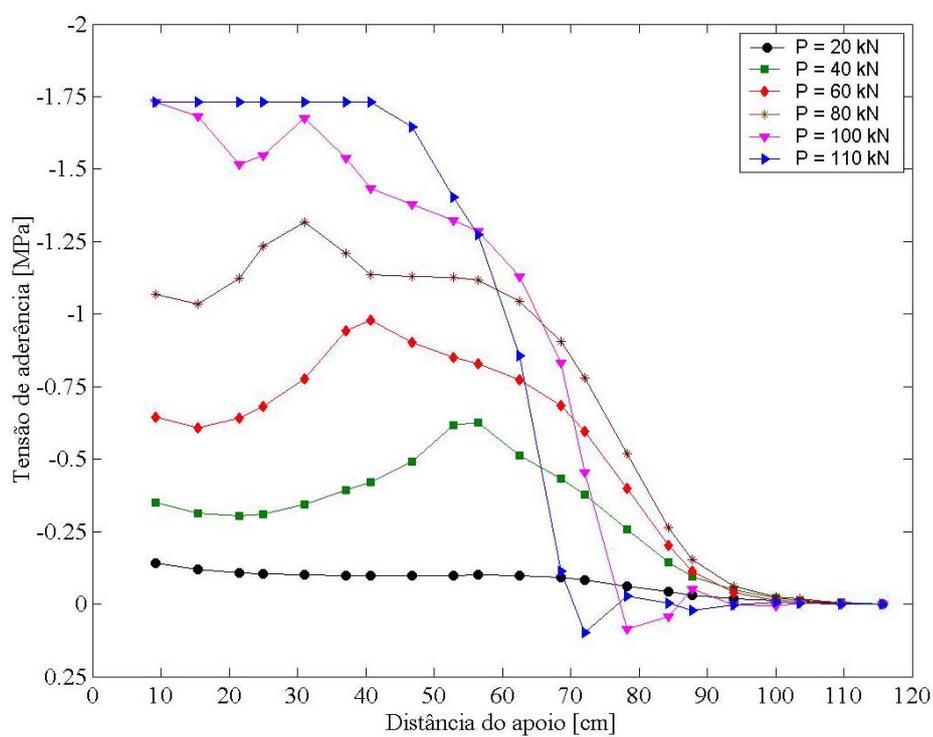


Figura 5.46 – Variação da tensão de aderência para diferentes níveis do carregamento

Segundo Campagnolo et al. (1997), o modo de ruptura da viga reforçada com uma chapa de aço se deu por descolamento do reforço na região próxima ao apoio, conforme é mostrado na figura 5.47. Isto é corroborado pela figura 5.46, onde a tensão última de aderência é atingida na região próxima ao apoio. Segundo os resultados experimentais, a carga que causou o descolamento foi de 113 kN, enquanto que a carga de ruptura obtida numericamente foi de 110,25 kN. Assim, conseguiu-se alcançar uma boa aproximação da carga de ruptura experimental, com diferença de $-2,43\%$.

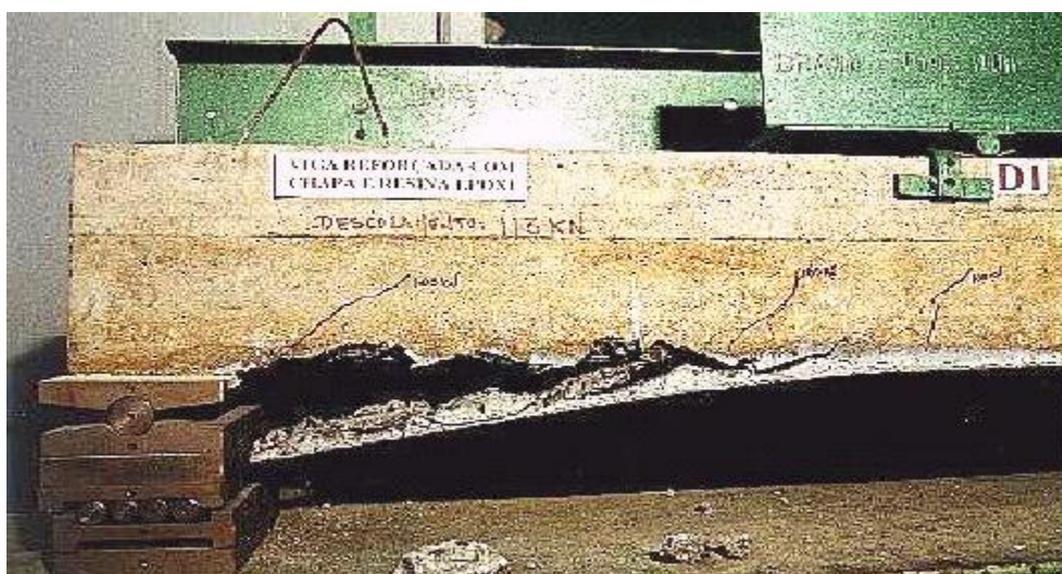


Figura 5.47 – Ruptura da viga V2

5.8 VIGA ENSAIADA POR ARDUINI et al. (1997)

No programa de ensaio das vigas reforçadas com lâminas de PRFC foram moldados os protótipos com dimensões nominais de 30 x 40 x 250 cm (ver figura 5.48). As vigas foram armadas com cinco barras de aço de diâmetro 13 mm (duas barras na parte superior e três barras na parte inferior). Para evitar a falha por cisalhamento foram usados estribos verticais com 8 mm de diâmetro igualmente espaçados de 10 cm. A viga B2, assim denominada em Arduini et al. (1997), foi reforçada com uma lâmina de PRFC de comprimento 230 cm.

Devido à simetria apresentada, discretizou-se apenas metade da viga em nove elementos no comprimento e dois elementos na altura, totalizando assim dezoito elementos bidimensionais para a representação do concreto. Para a representação do reforço foram usados oito elementos de barra de treliça plana. E fazendo a ligação entre o concreto e o reforço foram usados oito elementos de interface, num total de trinta e quatro elementos para a representação total da estrutura. As propriedades dos materiais concreto, barras de armadura e PRFC estão apresentadas na tabela 5.14.

Tabela 5.14 – Propriedades dos materiais – Vigas simuladas por Arduini et al. (1997)

Concreto	Barras de armadura	Lâmina de PRFC
$f_{cm} = 30 \text{ MPa}$	$f_{ym} = 340 \text{ MPa}$	$\sigma_{rup} = 3.000 \text{ MPa}$
$f_{ctm} = 1,9 \text{ MPa}$	$E_s = 200 \text{ GPa}$	$E_R = 400 \text{ GPa}$
$E_{co} = 26 \text{ GPa}$	-	$\epsilon_R = 7,5 \text{ ‰}$
-	-	$t_f = 0,17 \text{ mm}$
Interface	$k_S = 56,25 \text{ MPa/mm}$	$\tau_{m\acute{a}x} = 4,5 \text{ MPa}$

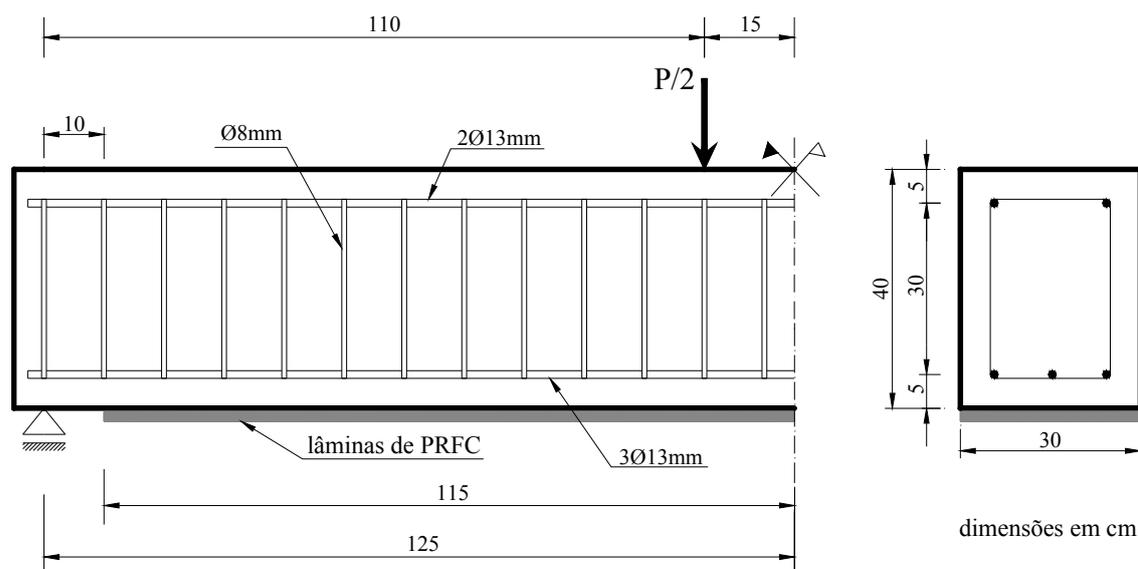


Figura 5.48 – Detalhamento da viga simulada por Arduini et al. (1997)

Nas figuras 5.49, 5.50 e 5.51 são apresentados os resultados obtidos para a viga B2 reforçada com uma lâmina de PRFC com área da seção transversal de reforço igual a $0,51 \text{ cm}^2$. São apresentadas as respostas da estrutura em termos de deslocamentos, máximas deformações normais de tração no reforço e tensões de aderência para diferentes níveis do carregamento aplicado.

A viga B2 chegou à falha por ruptura do reforço à tração na região da seção transversal central após o escoamento da armadura de tração e ganho considerável na capacidade de carga (ARDUINI et al., 1997). Como observado através da figura 5.50, é atingida a deformação de ruptura do reforço, demonstrando a concordância entre os resultados obtidos através do modelo de elementos finitos proposto e os resultados obtidos através dos ensaios experimentais. Também pode ser notado que as tensões de aderência não atingem o valor máximo de aderência.

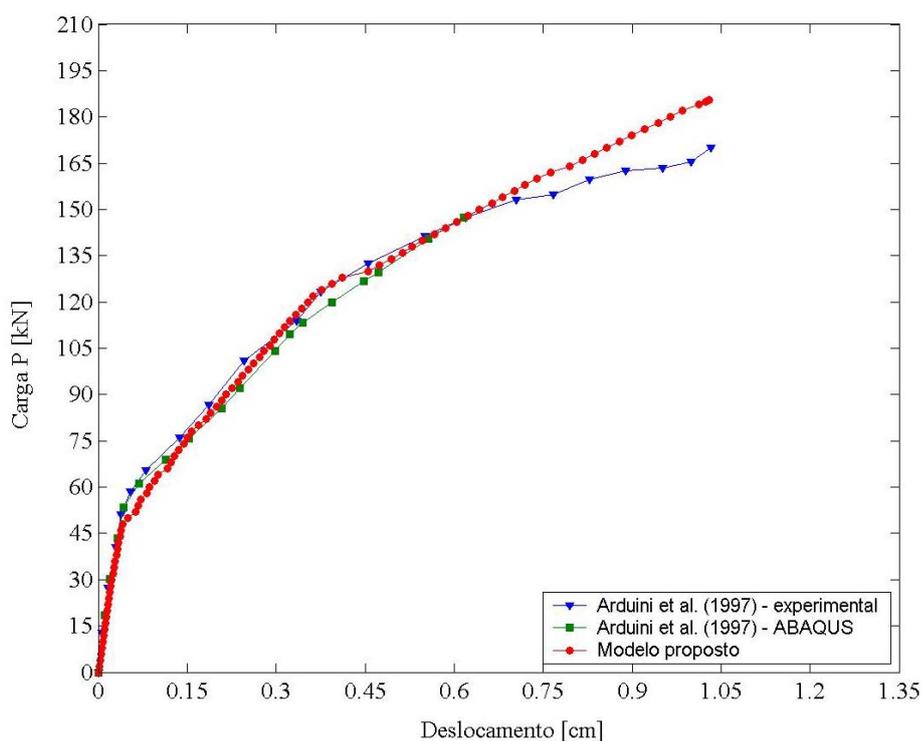


Figura 5.49 – Curvas carga x deslocamento: viga B2

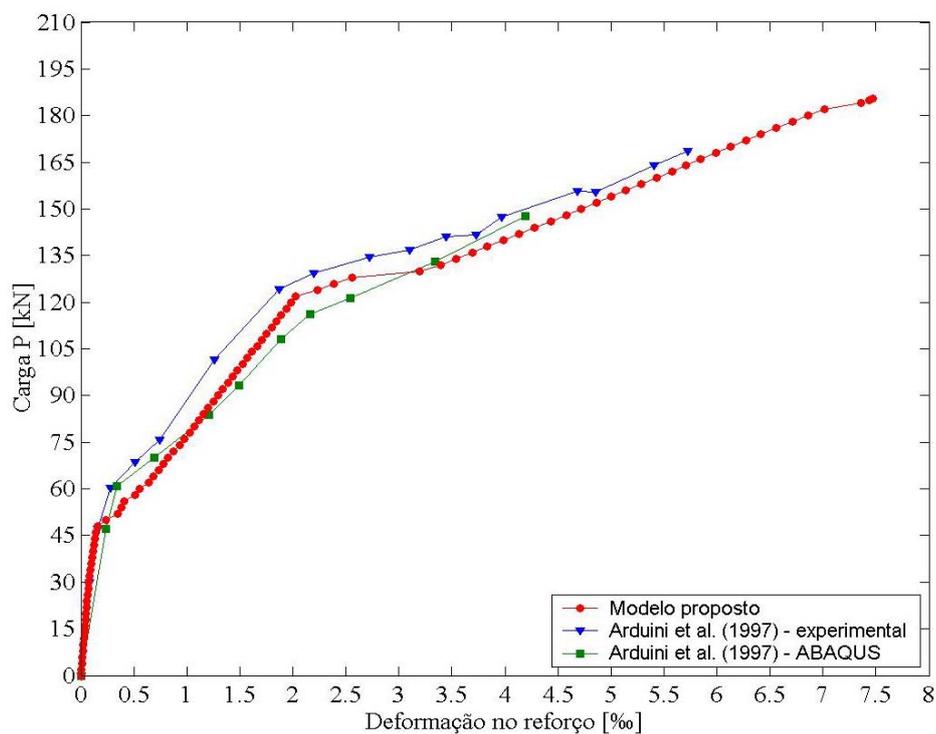


Figura 5.50 – Curvas carga x deformação no reforço: viga B2

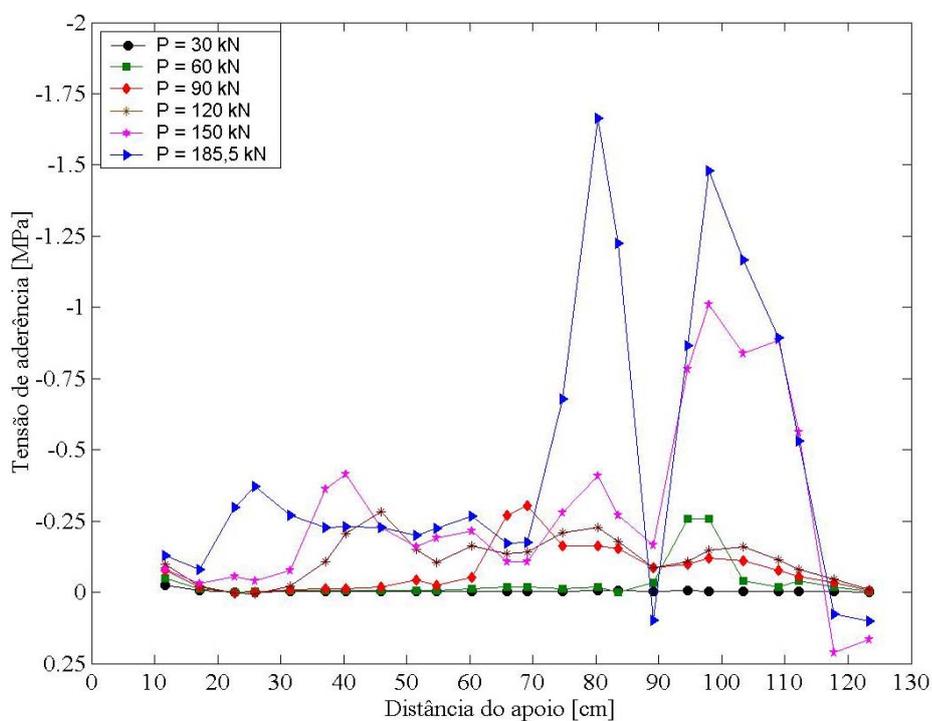


Figura 5.51 – Distribuição das tensões de aderência: viga B2

Na tabela 5.15 são feitas as comparações entre as cargas de ruptura obtidas de diferentes modos.

Tabela 5.15 – Comparação entre cargas de ruptura

Protótipo	Carga de ruptura [kN]			Diferença [%] (Modelo/Experimental)
	Modelo	Experimental	ABAQUS	
B2	185,75	169	148	+9,91

5.9 VIGAS ENSAIADAS POR BEBER (2003)

Na sua tese de doutorado, Beber (2003) realizou a investigação experimental do comportamento de vigas de concreto armado reforçadas externamente com PRFC.

As vigas do Grupo F, assim denominadas em Beber (2003), possuíam seção transversal de $15 \times 30 \text{ cm}^2$ e comprimento de 300 cm, sendo elas biapoiadas. A armadura longitudinal inferior era composta por duas barras de aço CA-50, com 12,5 mm de diâmetro, correspondendo a uma taxa de armadura ρ de 0,6%. A armadura superior, por sua vez, era composta por duas barras de 6,3 mm de diâmetro e aço CA-50. Para evitar que a viga entre em colapso devido ao cisalhamento, adotou-se estribos verticais com 6,3 mm de diâmetro espaçados uniformemente de 7 cm, ao longo de todo comprimento da viga. Na figura 5.52 apresenta-se o detalhamento das vigas do Grupo F.

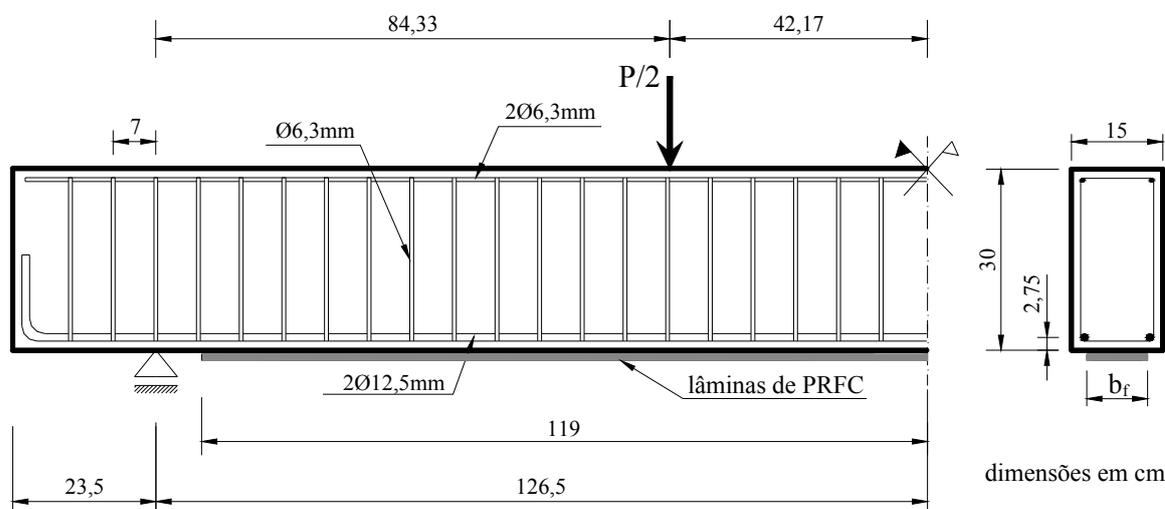


Figura 5.52 – Detalhamento das vigas ensaiadas por Beber (2003)

A malha de elementos finitos usada na análise numérica possui o aspecto da malha apresentada na figura 5.2, ou seja, adotou-se dezesseis elementos para representar o concreto, sete elementos para o reforço e fazendo a ligação entre eles, sete elementos de interface. Em virtude da simetria apresentada em termos de carregamento e propriedades geométricas, modelou-se apenas metade da viga.

As vigas aqui apresentadas possuem a mesma denominação de Beber (2003), e possuem as características mostradas na tabela 5.16.

Tabela 5.16 – Características dos protótipos reforçados

Protótipo	Tipo de sistema de reforço	b_f [cm]	Área de reforço [cm ²]
V6A – V6B	Sistema curado <i>in situ</i> tipo manta flexível	9,5	0,1672 (1 camada)
V7A – V7B	Sistema curado <i>in situ</i> tipo manta flexível	15	0,999 (4 camadas)

Beber (2003) obteve, a partir de ensaios, uma resistência média à compressão do concreto de 32,8 MPa, com um coeficiente de variação de 5,24%. A resistência média à tração, obtida através do ensaio de compressão diametral, foi de 2,9 MPa com um coeficiente de variação de 9,09%. Para a armadura de diâmetro 6,3 mm obteve-se uma tensão média de escoamento de 587,10 MPa, enquanto que para as barras de diâmetro 12,5 mm, f_{ym} obtido experimentalmente foi de 706,50 MPa. O módulo de elasticidade da armadura usado na análise numérica foi de 210 GPa.

O sistema usando mantas flexíveis pré-impregnadas com resina epóxi empregado para o reforço à flexão dos protótipos V6A, V6B, V7A e V7B possui as propriedades, segundo informações do fabricante, apresentadas na tabela 5.17.

Tabela 5.17 – Propriedades do sistema curado *in situ*

Resistência à tração	3.800 MPa
Módulo de elasticidade	240 GPa
Deformação específica na ruptura	15,8 ‰
Espessura	0,0176 cm
Largura	30 cm

Segundo Beber (2003), as vigas V6 (reforçadas com uma camada de PRFC) não apresentaram um modo de ruptura associado ao descolamento do reforço. Mas como constatação, observou-se que a localização da máxima tensão de aderência, para 100% da carga de ruptura da viga V6B localizou-se em 48,5 cm da extremidade do reforço, com valor de 1,18 MPa.

Este comportamento pode ser relacionado com a rigidez do sistema de reforço. Pois como observado em diversos estudos, com o aumento de área da seção transversal do sistema de reforço, e um conseqüente aumento de rigidez, as tensões máximas de aderência deslocam-se de uma situação intermediária para as extremidades do reforço.

Nas figuras 5.53 e 5.54 são feitas as comparações da variação da tensão de aderência em relação à distância ao apoio, para os níveis de 60% e 100% da carga de ruptura da viga V6B.

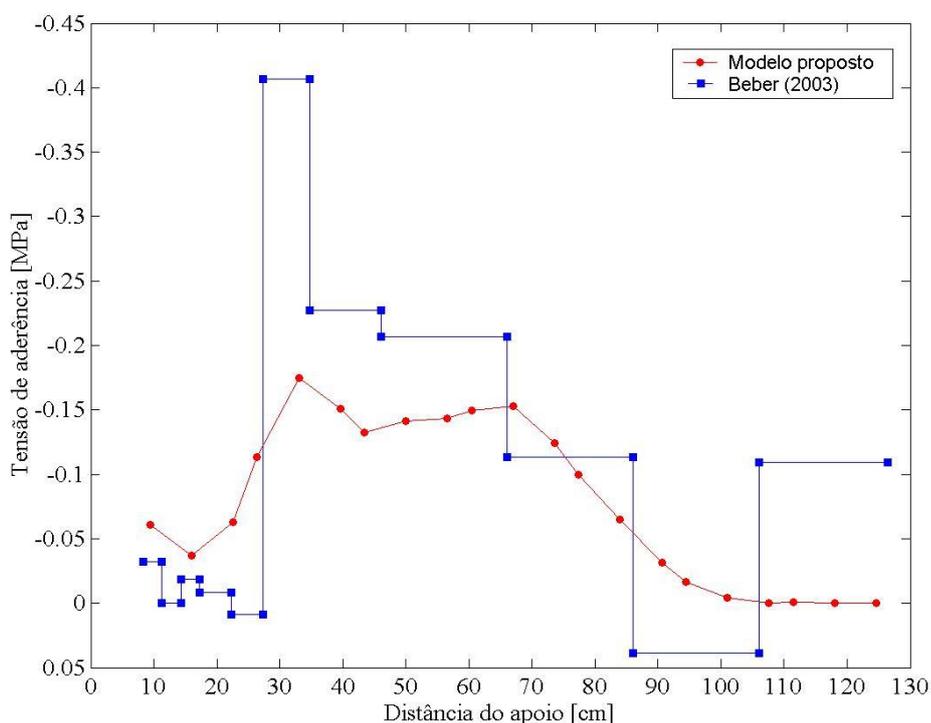


Figura 5.53 – Distribuição das tensões de aderência para a viga V6B: 60% da carga de ruptura

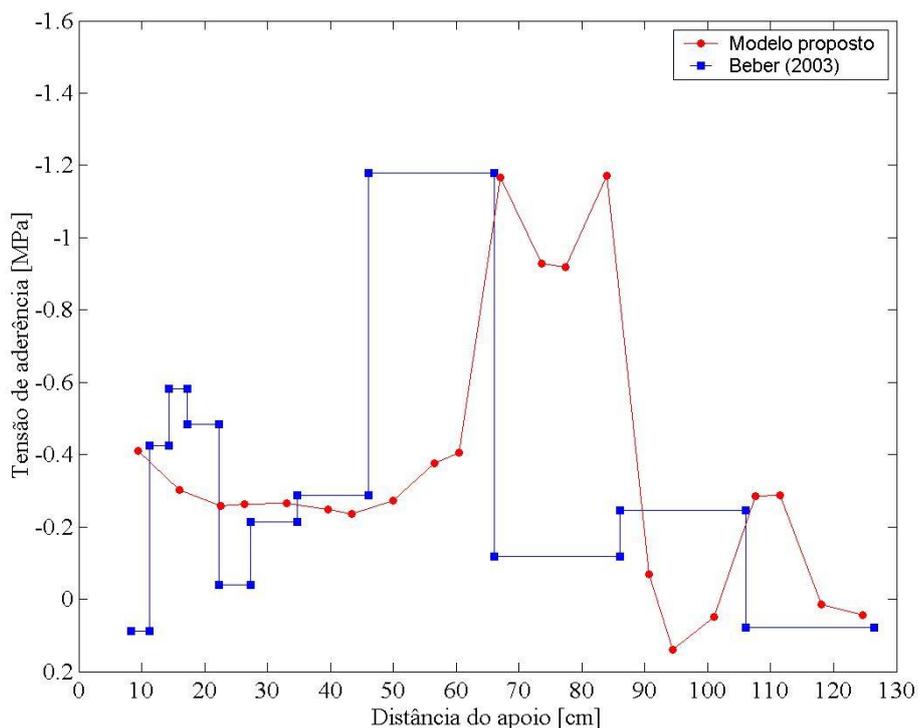


Figura 5.54 – Distribuição das tensões de aderência para a viga V6B: 100% da carga de ruptura

As vigas V7A e V7B foram reforçadas com quatro camadas de PRFC com propriedades apresentadas na tabela 5.17, sendo que três camadas possuem 15 cm de largura e uma camada possui 11,75 cm de largura. A ruptura dessas vigas se deu por descolamento na interface concreto/reforço (BEBER, 2003).

Nas figuras 5.55 e 5.56 são mostrados os comportamentos da tensão de aderência para 60% e 100% da carga de ruptura da viga V7B, respectivamente, que teve como valor máximo de aderência medido experimentalmente a tensão de 3,09 MPa.

Como dito anteriormente, uma maior rigidez do sistema de reforço pode conduzir a situação em que a tensão máxima de aderência é atingida nas proximidades da extremidade do PRFC, e ocorre a conseqüente ruptura do elemento reforçado pela falha na aderência entre os dois materiais (concreto e PRFC). Desta maneira, pode notar-se, através da análise das vigas V6 e V7, que mesmo possuindo modos de ruptura diferentes, o aumento na área da seção transversal fez com que a tensão máxima de aderência se deslocasse de zonas intermediárias para as extremidades do reforço (figuras 5.54 e 5.56).

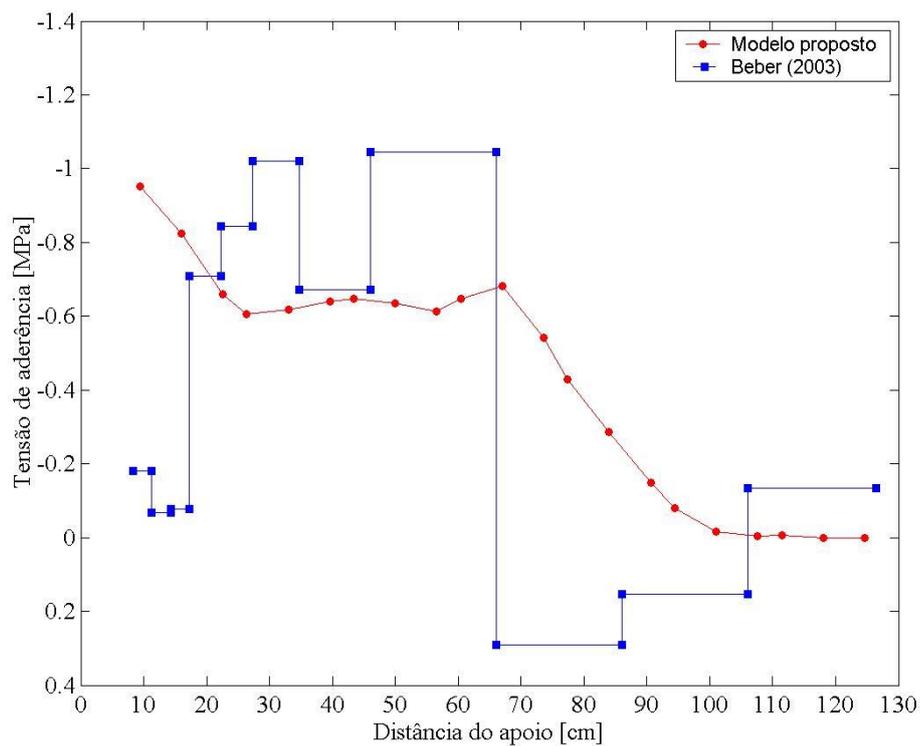


Figura 5.55 – Distribuição das tensões de aderência para a viga V7B:
60% da carga de ruptura

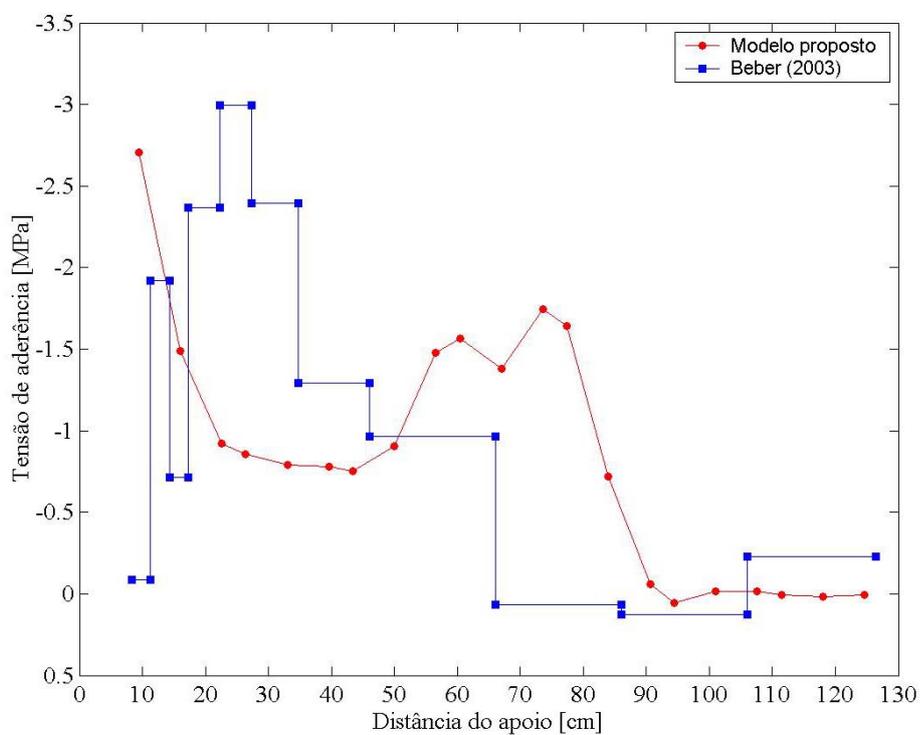


Figura 5.56 – Distribuição das tensões de aderência para a viga V7B:
100% da carga de ruptura

5.10 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com relação aos resultados obtidos nas análises das vigas reforçadas, fazendo-se uso do modelo de elementos finitos aqui apresentado, pode-se formular algumas conclusões parciais até esta etapa do trabalho.

Estabelecendo-se uma relação, para cada exemplo analisado, da carga de ruptura obtida através dos ensaios experimentais e da carga de ruptura obtida numericamente, chegou-se a um valor médio para esta relação, P_{exp} / P_{num} , de 0,97 com coeficiente de variação de aproximadamente 6%. Isto significa que em média as cargas de ruptura obtidas numericamente foram um pouco superiores às cargas de ruptura obtidas nos ensaios experimentais. Esta relação também indica a boa aproximação, em termos das cargas de ruptura, dos resultados numéricos quando comparados aos resultados experimentais.

O modelo numérico de elementos finitos também se mostrou bastante capaz de acompanhar a resposta carga versus deslocamento das vigas analisadas.

No que diz respeito ao comportamento estrutural das vigas reforçadas, mostrou-se a importância da consideração do efeito do deslizamento entre o substrato de concreto e o material de reforço, pois em um grande número de casos a ruptura destas estruturas reforçadas se dá pela incapacidade de transferência de esforços do concreto para o material de reforço.

Para os casos analisados de vigas de concreto armado reforçadas com chapas de aço, constatou-se que a máxima tensão de aderência concreto / reforço é atingida nas proximidades do apoio. Este fato se deve, principalmente, a adoção de um comportamento elástico perfeitamente plástico do aço da chapa. Ao atingir sua tensão de escoamento, na região de maior sollicitação aos esforços de tração (região central), não é mais possível o acréscimo de tensão de tração nessa região da chapa. Não havendo variações nas tensões de tração no reforço, não surgirão tensões de aderência entre o substrato de concreto e a chapa de aço. Contrariamente, na região onde o reforço continua com um comportamento elástico (regiões mais afastadas do centro do vão), haverá variações de tensão de tração que provocarão o surgimento de tensões de aderência necessárias para manter o equilíbrio.

Ao se analisar as vigas de concreto armado reforçadas com PRFC, notou-se que a máxima tensão de aderência pode ser atingida em diferentes regiões ao longo da interface concreto / reforço. Conforme aumentou a rigidez do PRFC, através do aumento da sua área da

seção transversal, o pico na tensão de aderência moveu-se de uma região próxima ao centro do vão para regiões da extremidade do reforço.

O fato da máxima tensão de aderência ser atingida em zonas intermediárias se deve, principalmente, a transição de seções onde a armadura tracionada comporta-se elasticamente para seções com armadura em escoamento. Assim, nessa região de transição, o reforço passa a absorver uma parcela maior dos esforços de tração, gerando grandes variações de tensão ao longo do seu comprimento. Desta maneira, surgirão valores acentuados na tensão de aderência que podem levar ao descolamento do sistema de reforço.

6 CONFIABILIDADE NA ANÁLISE ESTRUTURAL

6.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

O conceito de segurança está associado à confiança qualitativa de que a estrutura terá um desempenho satisfatório quando em uso. No entanto, este conceito evoluiu com o tempo, e na era da revolução industrial inglesa tomou a forma quantitativa de coeficiente de segurança. Nesta época, foi necessária uma sistematização da tecnologia de projeto e execução da construção em geral, devido a grande demanda de obras civis. Consolidando, assim, a Teoria da Resistência dos Materiais e a teoria de segurança, denominada Método das Tensões Admissíveis. Esta teoria adotou uma postura comparativa: selecionou as obras de desempenho estrutural satisfatório e quantificou suas solicitações, estabelecendo valores médios. Estes valores foram comparados às resistências médias obtidas em laboratório para materiais equivalentes àqueles utilizados nas obras analisadas, criando-se, assim, uma quantificação da segurança adequada, que deu origem ao coeficiente de segurança (GRAZIANO, 2005).

Na atualidade, a teoria de segurança corretamente aplicada é a denominada Teoria Semi-Probabilística de Segurança (Método dos Estados Limites), que como o próprio nome indica, é um meio termo entre o ideal da Teoria Probabilística Pura e do já ultrapassado Método das Tensões Admissíveis. Um exemplo de aplicação do Método Semi-Probabilístico no projeto de estruturas é a norma NBR 6118:2003 “Projeto de estruturas de concreto – Procedimento” (ABNT, 2003), onde os conceitos probabilísticos são introduzidos no projeto através dos valores característicos inferiores e dos coeficientes de minoração das resistências dos materiais envolvidos. Também, através dos valores característicos superiores e dos coeficientes de majoração das ações.

No decorrer dos últimos anos, vários modelos sofisticados têm sido desenvolvidos para a análise não-linear de estruturas de concreto. No entanto, todos os cálculos são normalmente feitos com base em valores determinísticos para a geometria da estrutura, para as propriedades mecânicas dos materiais e para o carregamento aplicado.

Na realidade, há sempre uma variabilidade nestes parâmetros do projeto estrutural. Existe incerteza quanto ao valor do carregamento atuante; as grandezas relativas aos materiais, em especial aquelas do concreto, apresentam certa dispersão em relação aos valores médios usualmente adotados; erros de construção podem produzir variações nas dimensões das peças estruturais; e, finalmente, podem existir erros ou simplificações no modelo de cálculo.

Assim sendo, a resposta da estrutura a um determinado carregamento é, na verdade, uma função de diversas variáveis aleatórias, que afetam o seu desempenho. Desta forma, a própria resposta da estrutura será também uma variável aleatória. Deslocamentos, deformações, tensões e esforços solicitantes são, portanto, variáveis aleatórias (REAL, 2000).

Como as resistências dos materiais e as dimensões da estrutura são variáveis aleatórias, existe sempre alguma incerteza sobre que valores assumirão na estrutura concluída. Isto faz com que a própria resistência da estrutura seja também uma variável aleatória. Por outro lado, as ações, permanentes ou variáveis, que vão atuar sobre a estrutura possuem também características aleatórias, pois apresentam certa dispersão em torno de seu valor médio. Logo, o valor máximo da carga ao qual a estrutura estará submetida ao longo de sua vida útil também não pode ser previsto com exatidão.

Conseqüentemente, a margem de segurança, ou seja, a diferença entre a resistência da estrutura e a carga atuante ou efeito desta carga, deverá sofrer oscilações. Portanto, um dos objetivos primordiais de uma norma técnica de projeto de estruturas é assegurar que a probabilidade da margem de segurança de uma determinada estrutura ser inferior a zero seja mínima.

Com o maior conhecimento teórico e experimental das estruturas e o avanço das aplicações de controle de qualidade do setor industrial, os conceitos de segurança progrediram para o âmbito estocástico, trocando o conceito determinístico de coeficiente de segurança pelo de qualidade aleatória, ou seja, o de confiabilidade.

A análise probabilística de estruturas tem como objetivo determinar o efeito da dispersão dos parâmetros de projeto no seu comportamento final, tornando-se, desta maneira, uma ferramenta de análise da confiabilidade alcançada no projeto de uma estrutura.

Uma das formas de se avaliar o nível de segurança (confiabilidade) atingido no projeto de estruturas é determinar o índice de confiabilidade β (ANG e TANG, 1984b), e a

correspondente probabilidade de falha, P_f , associada a β , tanto no que se refere aos Estados Limites de Serviço, como aos Estados Limites Últimos.

Para a definição do índice de confiabilidade β , é necessário definir-se uma função de estado limite M (ANG e TANG, 1984b), como sendo a diferença entre a resistência R (carga de ruptura) da estrutura, e a solicitação S (soma da carga permanente G com a carga variável Q), a qual a estrutura é submetida, ou seja,

$$M = R - S = R - (G + Q). \quad (6.1)$$

Uma vez conhecidas as distribuições de probabilidade de R e S , é possível determinar a distribuição de probabilidade da margem de segurança M .

Se as distribuições de probabilidade de R e S forem normais, tem-se que o valor esperado da margem de segurança μ_M , será dado por:

$$\mu_M = \mu_R - \mu_S, \quad (6.2)$$

e que o desvio padrão da margem de segurança σ_M , para R e S estatisticamente independentes, será obtido através da expressão:

$$\sigma_M = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} \quad (6.3)$$

É possível ainda definir uma variável aleatória de distribuição de probabilidade normal padronizada para a margem de segurança, com média zero e desvio padrão unitário através da equação (6.4).

$$m = \frac{M - \mu_M}{\sigma_M} \quad (6.4)$$

O início da região de falha ou ruptura ocorre quando a margem de segurança M anula-se, ou seja, para a margem de segurança padronizada m igual a:

$$m = -\frac{\mu_M}{\sigma_M} \quad (6.5)$$

A distância deste ponto até o valor médio de m , ou seja, $m=0$, tomada em valor absoluto, é um indicativo do grau de segurança contra a falha ou ruína da estrutura, e é designada pelo índice de confiabilidade β , dado por:

$$\beta = \frac{\mu_M}{\sigma_M} \quad (6.6)$$

A probabilidade de falha, P_f , para uma estrutura que possua uma margem de segurança com distribuição normal padronizada será calculada através da equação:

$$P_f = \Phi(-\beta) \quad (6.7)$$

onde Φ é a função de probabilidade acumulada da variável normal padrão m .

Conclui-se, então, que quanto maior o índice de confiabilidade de uma estrutura, em relação a um certo estado limite, menor será a probabilidade de falha em relação a este estado limite. Este parâmetro é útil, portanto, para se comparar o nível de segurança atingido no projeto de diversas estruturas com relação a um determinado estado limite.

Tendo em vista o risco e o vulto do dano que uma determinada falha pode representar, deve-se estabelecer maior ou menor exigência em termos de confiabilidade.

A probabilidade das resistências serem inferiores as solicitações é de aproximadamente 1%, estabelecendo-se os quantis inferiores de 5% para as resistências e 5% superiores para as solicitações. Esta baixa probabilidade de ocorrência, porém, é insuficiente para preservar vidas humanas e o patrimônio de milhões de reais empregados em uma edificação (GRAZIANO, 2005). Quando a solicitação excede a resistência do sistema, o evento é de ruína, caracterizando uma situação de Estado Limite Último a ser estudada e devidamente conduzida para níveis de probabilidade entre 10^{-6} e 10^{-5} .

Para que este nível de confiabilidade seja atingido, no âmbito do projeto semi-probabilístico é aplicado uma majoração às solicitações e uma minoração às resistências, de tal ordem que se estabeleçam valores de projeto.

É importante compreender que, ao se minorar uma resistência característica R_k , e assim transformá-la em uma resistência de projeto R_d , associa-se àquela grandeza um quantil ainda menor e da ordem de 1%, dependendo da variabilidade da resistência em torno de seu valor médio. Analogamente, as solicitações passam a ser associadas ao quantil de 99%, também dependente de suas variabilidades.

Deste modo, a possibilidade do evento ruína deve cair para níveis estipulados de 10^{-6} a 10^{-5} . Cabe ainda ressaltar que para o aço adota-se um coeficiente de minoração menor do que o concreto, exatamente devido à sua variabilidade ser inferior à do concreto.

Na figura 6.1, é possível identificar de forma sintética uma grande parte dos conceitos envolvidos na segurança das estruturas no Estado Limite Último, onde o gráfico representa as relações entre as possíveis solicitações de uma determinada seção versus as possíveis resistências, com R e S estatisticamente independentes, representadas pela distribuição marginal de probabilidade de cada uma delas. O volume que representa as possíveis combinações entre R e S possui a forma, no espaço, de um “chapéu mexicano”, e é conhecido como função densidade de probabilidade conjunta, $f_{RS}(r,s)$, das variáveis R e S .

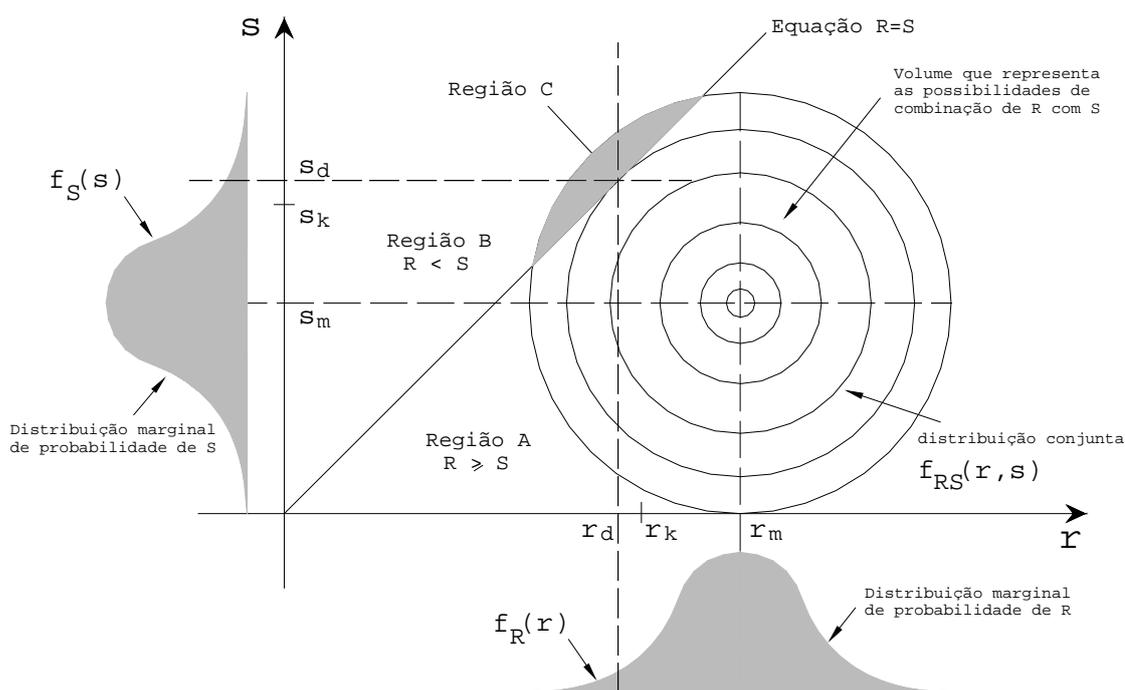


Figura 6.1 – Representação gráfica da probabilidade de falha

Da figura 6.1 pode-se salientar:

- O cruzamento das possibilidades de R e S que congrega todas as combinações possíveis entre resistência e solicitação;
- A equação da reta $R=S$, que separa os resultados de sucesso $R \geq S$ (Região A), dos de ruína $R < S$ (Região B), e que representa a projeção de um plano vertical que intercepta o volume de possibilidades de combinação;
- Que a solicitação de projeto S_d e a resistência de projeto R_d correspondem à igualdade, pois se encontram sobre a reta $R=S$;
- Que a Região C representa a intersecção entre a Região B e o volume de possibilidades, e que dá origem à quantificação dos casos de possível insucesso.

6.2 MÉTODOS DE AVALIAÇÃO DA CONFIABILIDADE

Existem vários procedimentos que são empregados para a obtenção da confiabilidade de uma estrutura, ou de um elemento estrutural. Dentre estes, os métodos de aproximação numérica, como o Método de Confiabilidade de Primeira Ordem (*First Order Reliability Method* - FORM), o Método de Confiabilidade de Segundo Momento de Primeira Ordem (*First Order Second Moment* - FOSM) e os processos de simulação (Método de Simulação de Monte Carlo), são os procedimentos mais utilizados para a obtenção dos índices de confiabilidade.

Neste trabalho somente será feita uma abordagem geral dos principais métodos para a avaliação da confiabilidade, sendo que, para uma análise detalhada, sugere-se consultar a bibliografia especializada no assunto, como Ang e Tang (1984b) e Melchers (1987).

6.2.1 O Método de Monte Carlo

Uma maneira de se determinar o efeito da variabilidade das propriedades dos materiais no comportamento da estrutura reforçada é a utilização da simulação de Monte Carlo (ANG e TANG, 1984b). Em primeiro lugar, as variabilidades dos principais parâmetros que influenciam no comportamento da estrutura devem ser representadas através de distribuições de probabilidade definidas. Em segundo lugar, deve-se dispor de um modelo matemático que relacione os principais parâmetros do comportamento da estrutura com o seu desempenho sob determinado carregamento.

Para propósitos de engenharia, uma simulação pode ser aplicada para estudar o desempenho e/ou a resposta de um sistema. Com um conjunto conhecido de valores dos parâmetros do sistema (ou variáveis de projeto), o processo de simulação fornece uma medida específica do desempenho, ou resposta. Através de repetidas simulações, a sensibilidade da resposta do sistema a variações nos parâmetros de entrada pode ser examinada ou estimada. Com este procedimento, as simulações podem ser usadas para avaliar alternativas ou determinar situações ótimas de projeto.

Para problemas envolvendo variáveis aleatórias com distribuições de probabilidade conhecidas, ou assumidas, o método de simulação de Monte Carlo é uma alternativa. Este método envolve no processo repetidas simulações, usando em cada simulação um conjunto particular de valores das variáveis aleatórias geradas de acordo com as correspondentes

distribuições de probabilidade. Após n simulações, um conjunto de soluções, cada um correspondendo a um diferente conjunto de valores das variáveis aleatórias, é obtido.

Uma amostra da simulação de Monte Carlo é similar a uma amostra de observações experimentais. Portanto, os resultados da simulação de Monte Carlo devem ser tratados estatisticamente. Assim, métodos estatísticos são empregados para determinar os momentos e os tipos de distribuição de probabilidade das variáveis da resposta, que representam o comportamento do sistema (ANG e TANG, 1984b).

Como dito anteriormente, quando se deseja obter a confiabilidade de uma determinada estrutura no estado limite último, pode-se formular o problema em termos da resistência R versus a solicitação S . Na consideração da segurança estrutural, deve ser garantido que a resistência seja suficiente para equilibrar as máximas solicitações durante sua vida útil. Entretanto, devido à presença de incertezas na determinação da resistência e do carregamento, a confiabilidade pode ser estabelecida apenas em termos probabilísticos (DINIZ, 2006). Assim, pode-se dizer que a probabilidade de falha P_f de uma estrutura, ou de um elemento estrutural, será a probabilidade de que a resistência seja inferior à solicitação imposta durante sua vida útil, ou matematicamente:

$$P_f = P(R \leq S) = P(R - S \leq 0) = P(M < 0). \quad (6.8)$$

Na figura 6.2, a resistência R e a solicitação S , contínuas e estatisticamente independentes, são representadas por suas funções densidade de probabilidade, sendo que a região de sobreposição entre $f_R(r)$ e $f_S(s)$ representa uma medida qualitativa da probabilidade de falha (ANG e TANG, 1984b).

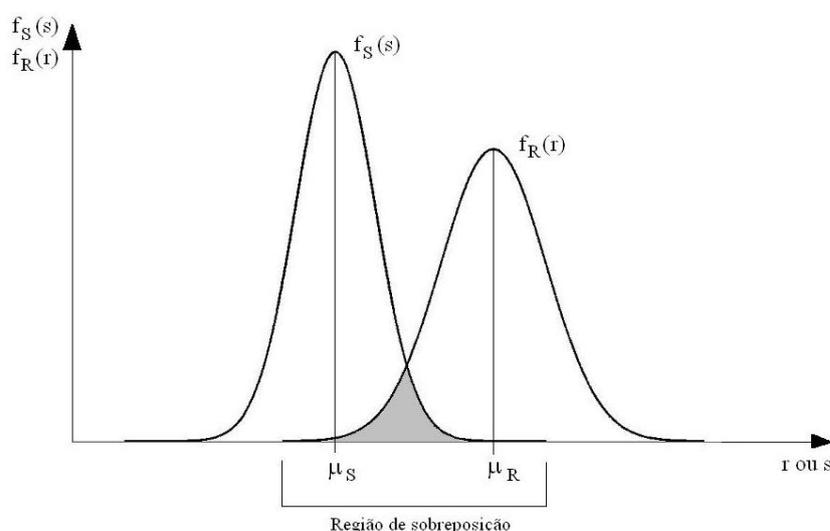


Figura 6.2 – Funções densidade de probabilidade de R e S

Como mostrado graficamente através da figura 6.2, a região de sobreposição depende da posição relativa de $f_R(r)$ e $f_S(s)$, de onde se conclui que P_f diminui quando $f_R(r)$ e $f_S(s)$ se afastam. Por outro lado, a probabilidade de falha aumenta quando $f_R(r)$ e $f_S(s)$ se aproximam. Um outro parâmetro que influencia a região de sobreposição é o grau de dispersão das variáveis aleatórias resistência e solicitação. Desse modo, a probabilidade de falha P_f , para R e S contínuas e estatisticamente independentes, pode ser calculada pela integral de convolução dada na forma (MELCHERS, 1987):

$$P_f = P(R - S \leq 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_R(x) f_S(x) dx \quad (6.9)$$

onde $F_R()$ é a função de probabilidade acumulada da resistência.

O problema resistência versus solicitação na análise da confiabilidade estrutural pode também ser formulado em termos da função de estado limite, ou margem de segurança M , definida pela equação (6.1), como sendo a diferença entre a resistência e a solicitação imposta à estrutura. Deste modo, M também pode ser representada através de uma distribuição de probabilidade. Neste caso, a falha da estrutura ocorrerá quando M for menor que zero, como mostrado na figura 6.3.

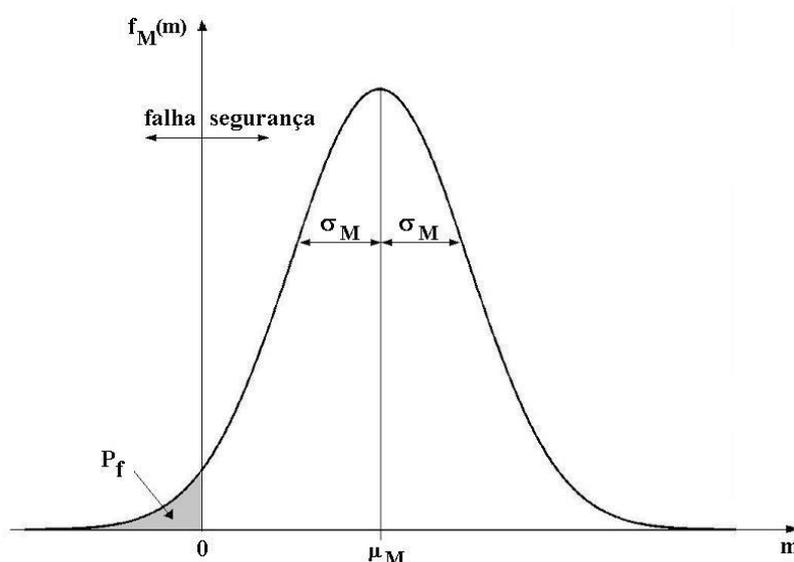


Figura 6.3 – Distribuição da margem de segurança

Deste modo, a probabilidade de falha de uma estrutura, que possui a função densidade de probabilidade da margem de segurança contínua e definida, ocorrerá para o evento $M < 0$, e pode ser obtida pela área sob a curva $f_M(m)$ abaixo de zero, ou seja:

$$P_f = \int_{-\infty}^0 f_M(m) dm = F_M(0) \quad (6.10)$$

onde $F_M()$ é a função de probabilidade acumulada de M .

Os principais empecilhos à utilização do método de Monte Carlo são os recursos computacionais e o tempo de processamento necessários para a realização de numerosas simulações, para que se atinja a convergência estatística dos resultados. Contudo, dados os rápidos avanços que têm sido alcançados pela indústria da informática, estas dificuldades vêm sendo cada vez mais reduzidas, dia após dia, e o método de Monte Carlo firma-se como uma ferramenta poderosa para análise probabilística de estruturas (SHINOZUKA e DEODATIS, 1996).

6.2.2 Método de Segundo Momento de Primeira Ordem (FOSM)

O cálculo da probabilidade de falha ou de sobrevivência de uma estrutura, ou de um elemento estrutural, requer o conhecimento das distribuições de probabilidade $f_R(r)$ e $f_S(s)$ ou da distribuição conjunta $f_{RS}(r,s)$. Na prática, estas informações geralmente não são conhecidas ou a obtenção é dificultada devido à insuficiência de dados. Além do mais, normalmente quando estas distribuições podem ser especificadas, o cálculo exato das probabilidades requer uma integração numérica que pode ser impraticável (ANG e TANG, 1984b).

Freqüentemente, as informações disponíveis sobre as variáveis podem ser suficientes somente para a avaliação do primeiro e segundo momento estatístico, notadamente, o valor médio e a variância das respectivas variáveis aleatórias (e da covariância, para variáveis estatisticamente dependentes). Assim, medidas de segurança ou confiabilidade, devem ser limitadas a funções dos dois primeiros momentos (ANG e TANG, 1984b).

Com o método FOSM, a confiabilidade pode ser avaliada inteiramente como uma função do primeiro e do segundo momento estatístico das variáveis envolvidas, através do cálculo do índice de confiabilidade, β , quando não se têm informações sobre as distribuições de probabilidade.

Para o início do processo deve-se estabelecer uma função de estado limite, que para o caso da confiabilidade estrutural será a diferença entre a resistência R , de média μ_R e desvio padrão σ_R , e o efeito do carregamento S , com média e desvio padrão μ_S e σ_S , respectivamente. Assim, $M=R-S$. Em termos de confiabilidade, tem-se o estado seguro quando $M>0$, estado de falha para $M<0$, e o limite entre os dois estados, ou estado limite, definido pela equação $M=0$.

Introduzem-se agora variáveis reduzidas, as quais são obtidas através da transformação das variáveis para uma forma padronizada (distribuição normal com média zero e desvio padrão unitário), usando as equações (6.11) e (6.12) (ANG e TANG, 1984b).

$$R' = \frac{R - \mu_R}{\sigma_R} \quad (6.11)$$

$$S' = \frac{S - \mu_S}{\sigma_S} \quad (6.12)$$

No espaço das variáveis reduzidas, as regiões de falha e de segurança podem ser representadas como mostrado na figura 6.4. Também, em termos das variáveis reduzidas, a função de estado limite, $M=0$, torna-se (ANG e TANG, 1984b):

$$\sigma_R R' - \sigma_S S' + \mu_R - \mu_S = 0 \quad (6.13)$$

a qual representa uma linha reta como mostrado na figura 6.4. A menor distância da linha reta que representa a função de estado limite à origem do sistema é uma medida da confiabilidade. Esta distância, d_{min} , é dada pela equação (6.14).

$$d_{min} = \beta = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad (6.14)$$

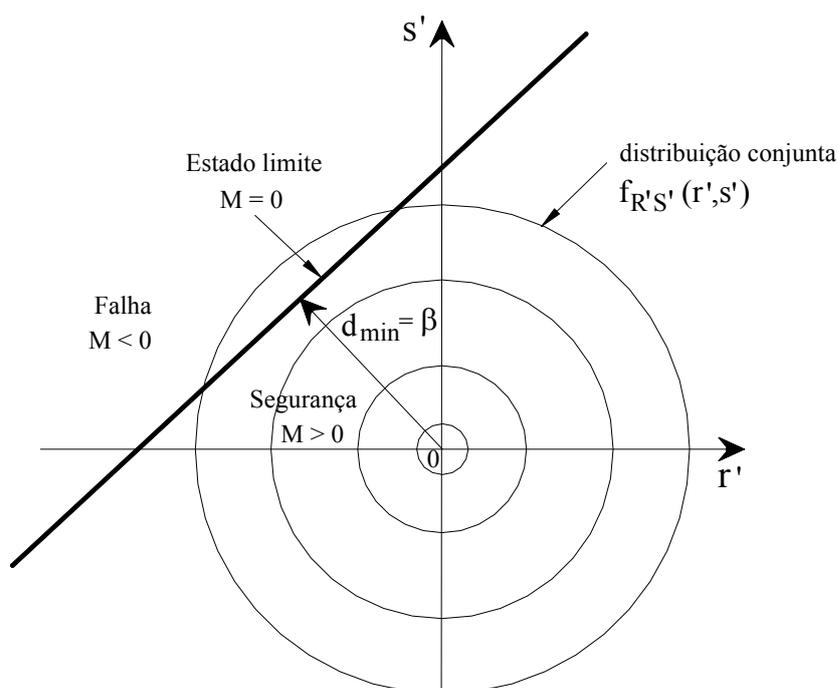


Figura 6.4 – Espaço das variáveis reduzidas R' e S' na abordagem FOSM

6.2.3 Método de Confiabilidade de Primeira Ordem (FORM)

No caso em que as distribuições de probabilidade requeridas possam ser especificadas, a probabilidade de falha P_f pode ser calculada através do Método de Confiabilidade de Primeira Ordem (DINIZ, 2006).

O princípio básico desta técnica consiste em transformar as variáveis aleatórias de um grupo $\mathbf{X}=(X_1, X_2, \dots, X_n)$ com distribuições quaisquer de probabilidade, correlacionadas ou não entre si, e função de probabilidade acumulada $F_{X_i}(x_i)$, com $i=1, 2, \dots, n$, em um grupo $\mathbf{U}=(U_1, U_2, \dots, U_n)$ de variáveis aleatórias estatisticamente independentes, normais equivalentes padronizadas (média zero e desvio padrão unitário).

Se a função de estado limite para o espaço original é $G(\mathbf{X})=0$, a mesma será escrita, para o espaço normal padrão, em função das variáveis normais equivalentes padronizadas, ou seja, $G(\mathbf{U})=0$. Assim, o índice de confiabilidade β será calculado pela menor distância entre a superfície de falha no espaço normal padrão $G(\mathbf{U})=0$, e a origem deste sistema. Na figura 6.5 é sintetizado este processo para um grupo $\mathbf{X}=(X_1, X_2)$ de variáveis aleatórias.

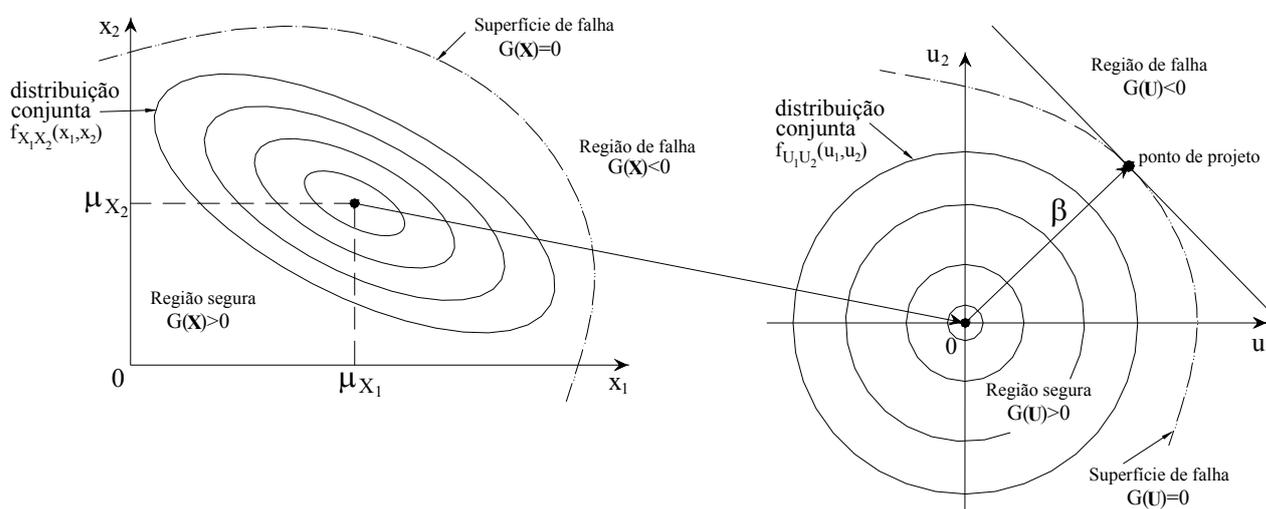


Figura 6.5 – Transformação do espaço original para o espaço padronizado na abordagem FORM

A transformação do grupo $\mathbf{X}=(X_1, X_2, \dots, X_n)$ de variáveis aleatórias, estatisticamente independentes e com distribuições não-normais de probabilidade, pode ser feita conforme

apresentado na figura 6.6 para a variável X_1 , do grupo \mathbf{X} , onde a mesma é transformada em uma variável aleatória normal equivalente padronizada U_1 .

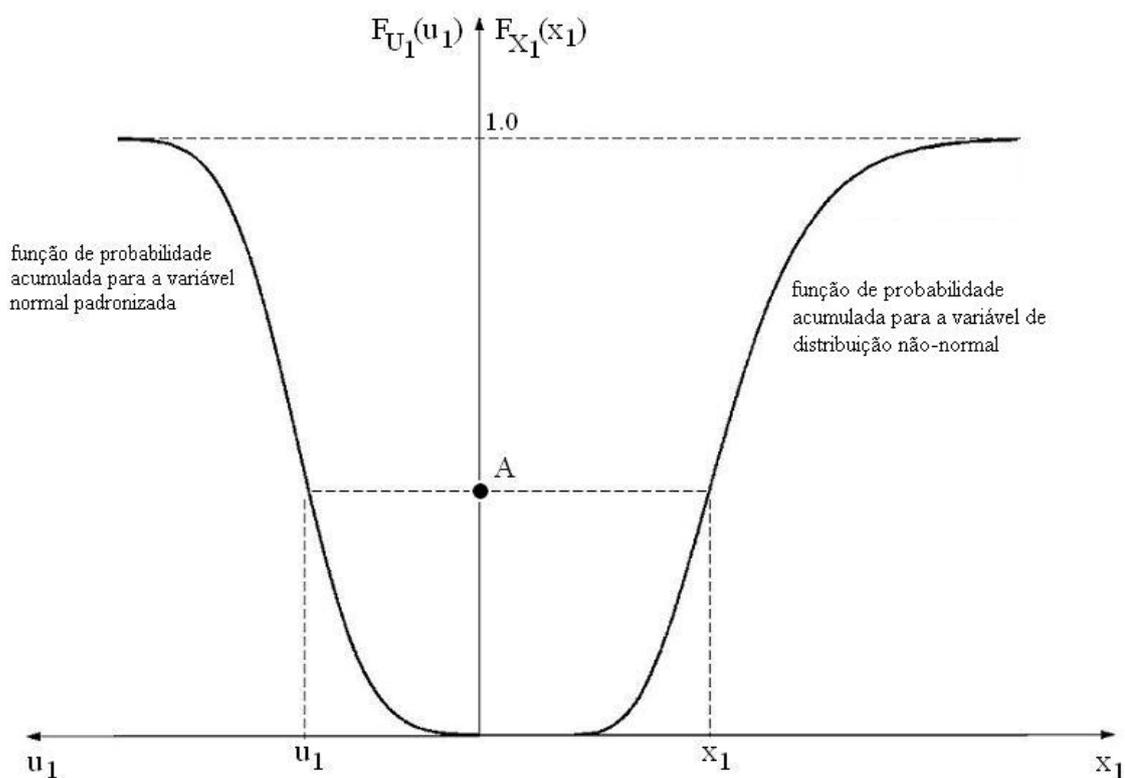


Figura 6.6 – Relação entre a variável X_1 no espaço original e a variável U_1 no espaço normal padronizado

Na figura 6.6, o ponto A representa a igualdade entre a função de probabilidade acumulada da variável aleatória no espaço original e a função de probabilidade acumulada da variável no espaço normal padronizado, ou seja:

$$F_{X_1}(x_1) = F_{U_1}(u_1) = \Phi(u_1), \quad (6.15)$$

ou

$$u_1 = \Phi^{-1}[F_{X_1}(x_1)], \quad (6.16)$$

onde Φ^{-1} é a inversa da função de probabilidade acumulada da variável normal padrão. Este processo de transformação pode ser feito para a obtenção das demais variáveis aleatórias do grupo $\mathbf{U} = (U_1, U_2, \dots, U_n)$, estatisticamente independentes, normais equivalentes padronizadas,

partindo-se do conhecimento do grupo $\mathbf{X}=(X_1, X_2, \dots, X_n)$ de variáveis aleatórias não-correlacionadas.

No caso em que as variáveis aleatórias do grupo \mathbf{X} apresentem correlação entre si, o conjunto de variáveis aleatórias normais equivalentes padronizadas \mathbf{U} , estaticamente independentes, pode ser obtido através da transformação de *Rosenblatt* (MELCHERS, 1987), através das seguintes equações:

$$\begin{aligned}\Phi(u_1) &= F_{X_1}(x_1) \\ \Phi(u_2) &= F_{X_2}(x_2 | x_1) \\ &\vdots \\ \Phi(u_n) &= F_{X_n}(x_n | x_1, \dots, x_{n-1})\end{aligned}\tag{6.17}$$

onde F_{X_i} é a função de probabilidade acumulada condicional de \mathbf{X} .

Invertendo as equações (6.17) sucessivamente, obtêm-se as variáveis aleatórias normais equivalentes desejadas, na forma:

$$\begin{aligned}u_1 &= \Phi^{-1}[F_{X_1}(x_1)] \\ u_2 &= \Phi^{-1}[F_{X_2}(x_2 | x_1)] \\ &\vdots \\ u_n &= \Phi^{-1}[F_{X_n}(x_n | x_1, \dots, x_{n-1})]\end{aligned}\tag{6.18}$$

Para a obtenção do índice de confiabilidade β , segundo o método FORM, é necessário que se estabeleça um procedimento iterativo até que haja a convergência do ponto de projeto e do índice de confiabilidade para o problema analisado.

Segundo Melchers (1987), uma desvantagem deste método é que a função de estado limite após a transformação, $G(\mathbf{U})=0$, torna-se mais complexa e usualmente mais não-linear.

6.3 O MÉTODO DE MONTE CARLO APLICADO A DETERMINAÇÃO DA CONFIABILIDADE ESTRUTURAL DE VIGAS REFORÇADAS

6.3.1 Considerações iniciais

O método de simulação de Monte Carlo é uma técnica que envolve a obtenção de um grupo de amostras para simular um grande número de experimentos e observar os resultados.

Simplificadamente, cada variável aleatória envolvida na análise assumirá um determinado valor, e a função de estado limite checada. Se a função de estado limite é violada, admite-se que o sistema atingiu a falha. Este processo é repetido inúmeras vezes, cada vez, com valores diferentes de cada variável. Atingida a convergência estatística dos resultados, se tem um grupo de amostras, sendo que o mesmo deve ser tratado através de processos estatísticos, obtendo-se, assim, respostas sobre o comportamento do sistema.

Para a aplicação do método de Monte Carlo na análise probabilística de vigas de concreto armado reforçadas à flexão, o primeiro passo é determinar quais parâmetros de projeto serão considerados como variáveis aleatórias e que tipos de distribuição de probabilidade estas variáveis seguem. Neste trabalho, considerar-se-ão como variáveis aleatórias as resistências à compressão e tração do concreto, também seu módulo de elasticidade longitudinal; a tensão de escoamento do aço; a tensão de ruptura do reforço e a máxima tensão de aderência da interface concreto/reforço. Para o carregamento externo aplicado às vigas, será considerado como variável aleatória a parcela permanente do carregamento e também sua parcela variável.

Como próximo passo, um número suficientemente grande de valores para a carga permanente e para a carga variável são gerados através de suas distribuições de probabilidade. A seguir, a carga total que será aplicada à estrutura é obtida através da soma da parcela permanente com a variável.

Para a obtenção das amostras de resistência da viga de concreto armado reforçada (cargas de ruptura), primeiramente são geradas aleatoriamente as resistências dos materiais (concreto, aço e PRFC) e a máxima tensão de aderência. Dando seqüência à análise probabilística, através do modelo de elementos finitos apresentado a carga de ruptura da estrutura com as características da simulação atual é obtida. O processo é repetido até que se obtenha um número de amostras de resistência com o mesmo número de amostras do grupo do carregamento.

Estes resultados podem, então, ser tratados estatisticamente para a obtenção dos valores médios (μ_R e μ_S) e desvios padrão (σ_R e σ_S) da resistência e solicitação. O tipo de distribuição de probabilidade de R e S também pode ser obtido. Através da equação (6.1) a variável aleatória margem de segurança M pode ser determinada, e através de uma análise estatística de M , sua média μ_M e seu desvio padrão σ_M são obtidos.

Para a determinação de qual tipo de distribuição de probabilidade ajusta melhor uma dada variável aleatória, existem alguns testes que podem ser feitos. Gráficos de probabilidade podem ser construídos, ou feitos testes como o de Kolmogorov-Smirnov (ANG e TANG, 1984a). Desta maneira, sabe-se como será a distribuição de probabilidade da resistência, da solicitação e da margem de segurança. Se a margem de segurança pode ser representada por uma distribuição normal de probabilidade, e conhecendo-se seu valor médio e seu desvio padrão, o índice de confiabilidade β será, então, calculado através da equação (6.6), e sua correspondente probabilidade de falha, através da equação (6.7).

Uma das principais tarefas no método de simulação de Monte Carlo é a geração de números aleatórios através de distribuições de probabilidade prescritas. A seguir são descritos os procedimentos para a geração de números aleatórios para as principais variáveis envolvidas na análise de vigas de concreto armado reforçadas.

6.3.2 Geração aleatória das propriedades mecânicas do concreto

Uma vez estabelecida qual a resistência média à compressão do concreto f_{cm} , a resistência média à tração, f_{ctm} , e o módulo de deformação longitudinal médio E_{cm} podem ser obtidos através das expressões recomendadas pelo Código Modelo CEB-FIP 1990 (CEB, 1993).

O coeficiente de variação do módulo de deformação longitudinal do concreto é suposto igual ao coeficiente de variação da resistência à compressão do concreto, ou seja, $V_{Ec} = V_{fc}$. O coeficiente de variação da resistência à tração do concreto é adotado como, $V_{fct} = 1,20V_{fc}$. Isto é feito para levar em consideração a maior variabilidade da resistência à tração do concreto em relação à resistência à compressão (CEB, 1993).

As propriedades mecânicas do concreto f_c , f_{ct} e E_c são três variáveis aleatórias correlacionadas entre si. Portanto, é necessário um modelo de geração de variáveis aleatórias que leve em consideração a correlação existente entre estas três variáveis (REAL, 2000).

A primeira etapa deste processo consiste na geração de três variáveis aleatórias gaussianas, de média zero e desvio padrão unitário, para representar a parcela flutuante das propriedades f_c , f_{ct} e E_c , que são designadas respectivamente por a_c , a_t e a_e .

A seguir, define-se a matriz de covariância entre estas três variáveis aleatórias, dada na forma

$$\mathbf{C}_{cte} = \begin{bmatrix} \sigma_c^2 & \rho_{ct}\sigma_c\sigma_t & \rho_{ce}\sigma_c\sigma_e \\ \rho_{ct}\sigma_c\sigma_t & \sigma_t^2 & \rho_{te}\sigma_t\sigma_e \\ \rho_{ce}\sigma_c\sigma_e & \rho_{te}\sigma_t\sigma_e & \sigma_e^2 \end{bmatrix}, \quad (6.19)$$

onde σ_c , σ_t e σ_e são respectivamente os desvios padrão das variáveis a_c , a_t e a_e , ou ainda, os coeficientes de variação das propriedades f_c , f_{ct} e E_c ; e ρ_{ct} , ρ_{te} e ρ_{ce} são, correspondentemente, os coeficientes de correlação linear entre as propriedades f_c e f_{ct} , entre f_{ct} e E_c , e entre f_c e E_c . Neste trabalho consideram-se os seguintes valores: $\rho_{ct} = 0,80$, $\rho_{te} = 0,70$ e $\rho_{ce} = 0,90$ (REAL, 2000).

Da decomposição de Cholesky da matriz de covariância entre as três variáveis resulta

$$\mathbf{C}_{cte} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T, \quad (6.20)$$

A parte flutuante das variáveis f_c , f_{ct} e E_c , na forma correlacionada, é dada por

$$\begin{Bmatrix} a_c^* \\ a_t^* \\ a_e^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_c \\ a_t \\ a_e \end{Bmatrix}. \quad (6.21)$$

A geração das variáveis aleatórias f_c , f_{ct} e E_c , na sua forma correlacionada é feita a partir das seguintes expressões:

$$f_c = f_{cm} [1 + a_c^*], \quad (6.22)$$

$$f_{ct} = f_{ctm} [1 + a_t^*], \quad (6.23)$$

$$E_c = E_{cm} [1 + a_e^*], \quad (6.24)$$

6.3.3 Geração aleatória das propriedades mecânicas da armadura

A distribuição da tensão de escoamento do aço f_y , é modelada através de uma variável aleatória de distribuição normal, de valor esperado f_{ym} e coeficiente de variação V_{fy} , a partir da expressão

$$f_y = f_{ym} (1 + z_1 V_{fy}) \quad (6.25)$$

onde z_1 é uma variável aleatória gaussiana, de média zero e variância unitária.

A dispersão do módulo de deformação longitudinal do aço (E_s) é pequena, e não foi considerada nas análises, adotando-se o valor médio igual a 210.000 MPa.

6.3.4 Geração aleatória das propriedades mecânicas do reforço

As principais propriedades mecânicas dos PRF são seu módulo de deformação longitudinal E_r e sua tensão de ruptura f_r . Como este material possui um comportamento aproximadamente elástico linear até a ruptura, também se pode adotar como parâmetro de ruptura a deformação específica axial de ruptura ε_r .

Normalmente, recomenda-se para ε_r , ou para f_r , uma distribuição de probabilidade de valores extremos do tipo III (Weibull), e o módulo de deformação longitudinal E_r é usualmente considerado como determinístico (PLEVRIS et al., 1995).

Em Melchers (1987), é apresentada a função de probabilidade acumulada para uma variável aleatória X , com distribuição de probabilidade de valores extremos mínimos do tipo III como sendo:

$$F_X(x) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{x - \varepsilon}{w - \varepsilon} \right)^k \right] \quad (6.26)$$

onde k é o parâmetro de forma da distribuição, w o valor mínimo característico e ε o limite inferior da distribuição.

Usando o método da transformada inversa (MELCHERS, 1987), e fazendo o limite inferior ε da distribuição igual a zero, pode-se obter valores para a tensão de ruptura do reforço com distribuição Weibull de probabilidade da seguinte forma:

$$f_r = w[-\ln(1-u)]^{1/k} \quad (6.27)$$

sendo u um número aleatório de distribuição uniforme entre 0 e 1.

O parâmetro de forma k pode ser determinado, segundo Melchers (1987), usando a equação (6.28):

$$k = V_{fr}^{-1,09} \quad (6.28)$$

onde V_{fr} é o coeficiente de variação da tensão de ruptura do reforço, sendo ele igual a razão entre o desvio padrão e o valor médio da tensão de ruptura do reforço.

Finalmente, o parâmetro w pode ser obtido fazendo-se uso da expressão apresentada a seguir

$$w = \frac{f_{rm}}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)} \quad (6.29)$$

Na equação (6.28), f_{rm} é o valor médio da tensão de ruptura do reforço, e Γ a função gamma.

6.3.5 Geração aleatória das propriedades mecânicas da interface

As principais propriedades da interface entre o reforço e o concreto são a rigidez ao cisalhamento k_s , e a máxima tensão de aderência $\tau_{m\acute{a}x}$. Na falta de maiores dados experimentais, foi adotada uma distribuição normal de probabilidade para a máxima tensão de aderência na interface, sendo a rigidez ao cisalhamento considerada como determinística. O cálculo da tensão máxima de aderência em cada simulação de Monte Carlo pode ser feito através da equação (6.30).

$$\tau_{m\acute{a}x} = \tau_{m\acute{a}x,m} (1 + z_2 V_{\tau_{m\acute{a}x}}) \quad (6.30)$$

onde z_2 é uma variável aleatória gaussiana, de média zero e desvio padrão unitário.

6.3.6 Geração aleatória do carregamento

Para o carregamento aplicado, pode-se considerar que a carga permanente G possui uma distribuição normal de probabilidade com valor médio 5% maior que o seu valor

característico, e coeficiente de variação de 10%. Admite-se, também, que a carga variável Q obedece a uma distribuição de valores extremos máximos do tipo I (Gumbel), possuindo um coeficiente de variação de 25%, e que seu valor médio seja igual ao seu valor característico (GALAMBOS et al, 1982).

6.3.6.1 Carga permanente

Para a geração da carga permanente, deve-se conhecer o seu valor médio, e uma medida de dispersão em relação a este valor médio (desvio padrão ou coeficiente de variação). Desta maneira, através da equação (6.31) pode-se obter valores para a carga G ,

$$G = G_m (1 + z_3 V_G) \quad (6.31)$$

onde G_m e V_G são, respectivamente, a média e o coeficiente de variação de G . A variável z_3 é uma variável aleatória gaussiana, de média zero e desvio padrão unitário.

6.3.6.2 Carga variável

Uma variável aleatória X que apresenta distribuição de probabilidade de valores extremos máximos do tipo I (Gumbel), tem a função de probabilidade acumulada, segundo Melchers (1987), dada na forma:

$$F_X(x) = \exp\left[-e^{-\alpha(x-\beta_o)}\right]. \quad (6.32)$$

Aplicando-se o método da transformada inversa, a carga variável, com distribuição de probabilidade do tipo I, pode ser obtida da seguinte maneira:

$$Q = \beta_o - \frac{1}{\alpha} \ln\left[\ln\left(\frac{1}{u}\right)\right] \quad (6.33)$$

onde u é um número aleatório de distribuição uniforme entre 0 e 1.

Os parâmetros α e β_o da distribuição podem ser calculados pelas equações (6.34) e (6.35), respectivamente, conforme é apresentado em Melchers (1987).

$$\alpha = \frac{\pi}{\sigma_Q \sqrt{6}}, \quad (6.34)$$

$$\beta_o = Q_m - \frac{0,577215665}{\alpha}. \quad (6.35)$$

Nas equações (6.34) e (6.35), σ_Q é o desvio padrão, e Q_m o valor médio da carga variável.

7 ESTUDO PROBABILÍSTICO DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO RECUPERADAS COM PRFC

7.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Este capítulo tem por objetivo apresentar um estudo sobre a confiabilidade de vigas de concreto armado danificadas e que foram recuperadas através do uso de PRFC. Serão feitos testes com três vigas de concreto armado, projetadas de acordo com a norma NBR 6118:2003 (ABNT, 2003), para níveis de carregamento de 10 kN/m, 15 kN/m e 20 kN/m. Após a análise probabilística destas vigas, chamadas de vigas originais, serão aplicados três níveis de dano na armadura inferior de flexão de cada viga. Estes danos se darão através da diminuição da área da seção transversal destas armaduras em 10%, 20% e 30%. Deste modo, poderá ser feita a análise da queda de confiabilidade provocada pelo dano das armaduras. Visando a recuperação da capacidade de carga original destas vigas, serão projetados reforços em PRFC, colados nas faces tracionadas das vigas, com o objetivo de que o mesmo absorva a parcela dos esforços de tração perdida após a aplicação do dano nas armaduras. Este projeto será feito seguindo as recomendações do *fib* Bulletin 14 (2001), com o objetivo de verificar a confiabilidade alcançada quando se adota as recomendações desta norma européia.

A variabilidade do concreto será medida através do coeficiente de variação da sua resistência à compressão, parâmetro este que fornece o grau de qualidade obtido durante a produção do concreto. Por possuírem correlação entre si, o módulo de elasticidade longitudinal do concreto e sua resistência à tração também farão parte da análise probabilística.

No que diz respeito às propriedades das armaduras, se incorporará o efeito da variabilidade da tensão de escoamento, que é um indicativo da qualidade do aço. Por possuir uma pequena variabilidade, o módulo de elasticidade longitudinal do aço será considerado como determinístico nas análises.

Para o PRFC usado na recuperação estrutural, será utilizado um coeficiente de variação da sua tensão de ruptura para a consideração que o mesmo seja uma grandeza

aleatória. Do mesmo modo, para a resistência da aderência entre o PRFC e o substrato de concreto será admitido que a mesma possui uma variabilidade em torno do seu valor médio. Esta máxima tensão de aderência é função da qualidade do concreto do substrato, por este motivo, seu coeficiente de variação será próximo do coeficiente de variação da resistência do concreto.

Finalmente, o carregamento aplicado às vigas será dividido em duas parcelas, a parcela da carga permanente, e a parcela da carga variável. As duas parcelas serão consideradas como variáveis aleatórias, porém, com distribuições de probabilidade distintas.

Através de análises conjuntas do método de simulação de Monte Carlo com o modelo de elementos finitos apresentado nos capítulos anteriores, pode-se, então, determinar, através do que está exposto no capítulo 6, a confiabilidade atingida no projeto das vigas originais, projetadas de acordo com a NBR 6118:2003, a queda de confiabilidade devido ao dano das armaduras de tração, e a recuperação estrutural e o nível de confiabilidade das vigas recuperadas seguindo as recomendações do *fib* Bulletin 14 (2001).

O efeito da variação do carregamento aplicado e da diminuição da resistência da estrutura ao longo da sua vida útil não será analisado aqui.

7.2 DESCRIÇÃO DAS VIGAS ANALISADAS

As vigas, designadas por V1, V2 e V3, foram projetadas de acordo com as especificações da Norma NBR 6118:2003 - Projeto de Estruturas de Concreto (2003), para cargas de serviço $P_k = G_k + Q_k$, respectivamente iguais a 10 kN/m, 15 kN/m e 20 kN/m. Sendo G_k a carga permanente e Q_k a carga variável. Uma relação $G_k / (G_k + Q_k)$ igual a 0,75 foi considerada.

As vigas, biapoiadas, possuem seção transversal retangular de 12 cm x 40 cm e vão de 4,00 m. O carregamento imposto às vigas é uniformemente distribuído ao longo do vão. As propriedades geométricas, configuração do carregamento e armaduras, são apresentadas através da figura 7.1.

As propriedades mecânicas dos materiais utilizados nos projetos das vigas V1, V2 e V3, são apresentadas na tabela 7.1, onde f_k é o valor característico da resistência, f_m é o valor médio da resistência, σ_f é o desvio padrão da resistência, V_f é o coeficiente de

variação da resistência, E_m é o valor médio do módulo de elasticidade do material, e a distribuição de probabilidade adotada para a resistência do material é indicada na última coluna da direita.

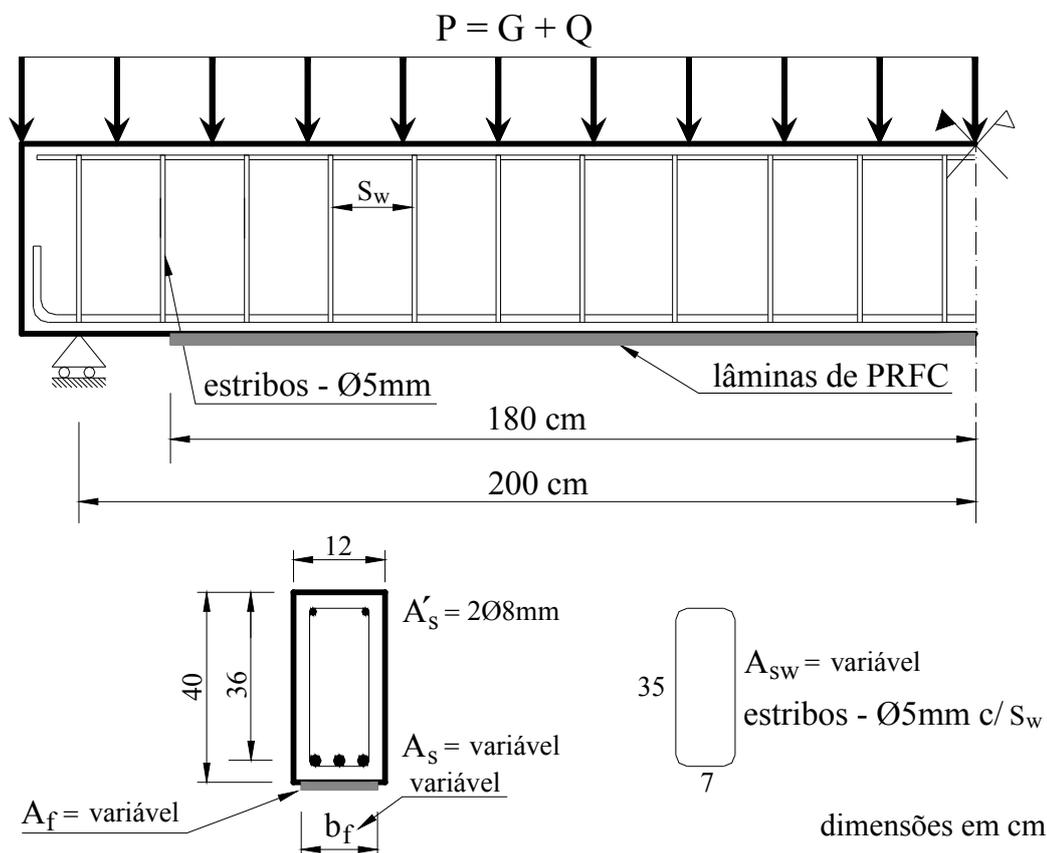


Figura 7.1 – Detalhes das vigas analisadas

Tabela 7.1 – Propriedades mecânicas dos materiais utilizados no projeto das vigas

Materiais	f_k	f_m	σ_f	V_f	E_m	Distribuição Probabilidade
	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[%]	[GPa]	
Concreto	20	26,6	4	15	29,77	Normal
Aço - CA-50	500	598,4	59,8	10	210	Normal
Aço - CA-60	600	718,1	71,8	10	210	Normal
PRFC	3099,5	3400	170	5	230	Weibull

Para a máxima tensão de aderência, assume-se que a mesma obedeça a uma distribuição normal de probabilidade, com valor médio de 3,5 MPa e coeficiente de variação de 15%.

Seguindo as recomendações da norma brasileira NBR 6118:2003, foi feito o dimensionamento das vigas V1, V2 e V3 para a flexão e para o esforço cortante. Como todos os três dimensionamentos resultaram em armadura simples, adotou-se uma armadura superior, porta-estribo, formada por 2 barras de 8 mm de diâmetro, para todas as vigas. Como a norma brasileira de projeto de estruturas de concreto limita o espaçamento máximo dos estribos a 60% da altura útil d (36 cm para as vigas V1, V2 e V3), foi adotado um espaçamento de 21 cm para as vigas V1 e V2, embora o dimensionamento inicial tenha resultado em uma taxa de armadura mínima ao esforço cortante, para estas vigas. Na tabela 7.2 são apresentados os resultados deste dimensionamento.

Tabela 7.2 – Dimensionamento à flexão e ao cisalhamento das vigas V1, V2 e V3

Viga	M_d [kN.m]	A_s [cm ²]	ρ As/b.d	A_s' [cm ²]	V_d [kN]	A_{sw} [cm ² /m]	S_w [cm]
V1	28	1,95	0,45%	1,00	28	1,87	21
V2	42	3,08	0,71%	1,00	42	1,87	21
V3	56	4,37	1,01%	1,00	56	1,96	20

Para dar seguimento aos procedimentos de análise, considera-se, agora, que há uma perda de área da seção transversal da armadura inferior de tração da ordem de 10%, 20% e 30% de cada viga. Estas vigas são chamadas de danificadas, e são feitas análises probabilísticas para a determinação da diminuição da sua segurança no estado limite último.

Após a determinação da confiabilidade das vigas danificadas, parte-se para a recuperação da capacidade de carga original das vigas V1, V2 e V3, através da implementação de um sistema de reforço usando-se lâminas de PRFC na face tracionada das vigas. Este projeto é feito seguindo as recomendações do *fib* Bulletin 14 (2001). Através deste procedimento e de análises probabilísticas pode-se obter o nível de segurança das vigas recuperadas. Nas tabelas 7.3, 7.4 e 7.5 são apresentadas as áreas de armadura de flexão, já

descontadas as perdas, bem como a área de reforço em PRFC necessária, em cada caso, para repor a capacidade resistente inicial de cada viga.

Tabela 7.3 – Áreas de aço reduzidas e área de reforço em PRFC para um dano de 10%

Vigas danificadas	Dano = 0%		Dano = 10%		Área PRFC
	As	ρ	As	ρ	Af
	[cm ²]	As/b.d	[cm ²]	As/b.d	[cm ²]
V1	1,95	0,45%	1,76	0,41%	0,0488
V2	3,08	0,71%	2,77	0,64%	0,0733
V3	4,37	1,01%	3,93	0,91%	0,0980

Tabela 7.4 – Áreas de aço reduzidas e área de reforço em PRFC para um dano de 20%

Vigas danificadas	Dano = 0%		Dano = 20%		Área PRFC
	As	ρ	As	ρ	Af
	[cm ²]	As/b.d	[cm ²]	As/b.d	[cm ²]
V1	1,95	0,45%	1,56	0,36%	0,0650
V2	3,08	0,71%	2,46	0,57%	0,0877
V3	4,37	1,01%	3,50	0,81%	0,1687

Tabela 7.5 – Áreas de aço reduzidas e área de reforço em PRFC para um dano de 30%

Vigas danificadas	Dano = 0%		Dano = 30%		Área PRFC
	As	ρ	As	ρ	Af
	[cm ²]	As/b.d	[cm ²]	As/b.d	[cm ²]
V1	1,95	0,45%	1,37	0,32%	0,0980
V2	3,08	0,71%	2,16	0,50%	0,1388
V3	4,37	1,01%	3,06	0,71%	0,2880

7.3 DESCRIÇÃO DO CARREGAMENTO APLICADO ÀS VIGAS

Para o carregamento aplicado, considera-se que a carga permanente possui uma distribuição normal de probabilidade com valor médio 5% maior que o seu valor característico, e coeficiente de variação de 10%. Admite-se, também, que a carga variável obedeça a uma distribuição de valores extremos máximos do tipo I (Gumbel), possuindo um coeficiente de variação de 25%, e que seu valor médio seja igual ao seu valor característico (GALAMBOS et al., 1982). Na tabela 7.6 é apresentada a composição do carregamento aplicado às vigas V1, V2 e V3.

Tabela 7.6 – Composição do carregamento aplicado às vigas V1, V2 e V3

Vigas	Carga total		Carga permanente				Carga variável			
	P_k	G_k	G_m	V_G	Distribuição	Q_k	Q_m	V_Q	Distribuição	
	[kN/m]	[kN/m]	[kN/m]	[%]		[kN/m]	[kN/m]	[%]		
V1	10	7,5	7,875	10	Normal	2,5	2,5	25	Extremos Tipo I	
V2	15	11,25	11,813	10	Normal	3,75	3,75	25	Extremos Tipo I	
V3	20	15	15,750	10	Normal	5	5	25	Extremos Tipo I	

Para cada uma das vigas analisadas, V1, V2 e V3, são gerados aleatoriamente 1.000 valores para a carga permanente, com uma distribuição normal de probabilidade, e valores médios e coeficientes de variação indicados na tabela 7.6. Da mesma maneira, 1.000 valores são gerados aleatoriamente para a carga variável, com distribuição de valores extremos do tipo I, valores médios e coeficientes de variação mostrados na tabela 7.6. A carga total aplicada às vigas é obtida, então, pela soma da carga permanente mais a carga variável. Para as três vigas a distribuição de probabilidade da carga total resultou em uma distribuição normal, como mostrado nas figuras 7.3, 7.5 e 7.7. Para V1, V2 e V3, o coeficiente de variação obtido para a carga total “P” foi de 9,67%, sendo que seu valor médio foi de 10,33 kN/m para a viga V1, 15,50 kN/m para V2 e 20,67 kN/m para a viga V3. Observa-se, através da tabela 7.6, que como a carga permanente compõe 75% do carregamento, mesmo que a carga variável

possua um coeficiente de variação de 25%, o coeficiente de variação da carga total aproxima-se bastante do coeficiente de variação da carga permanente.

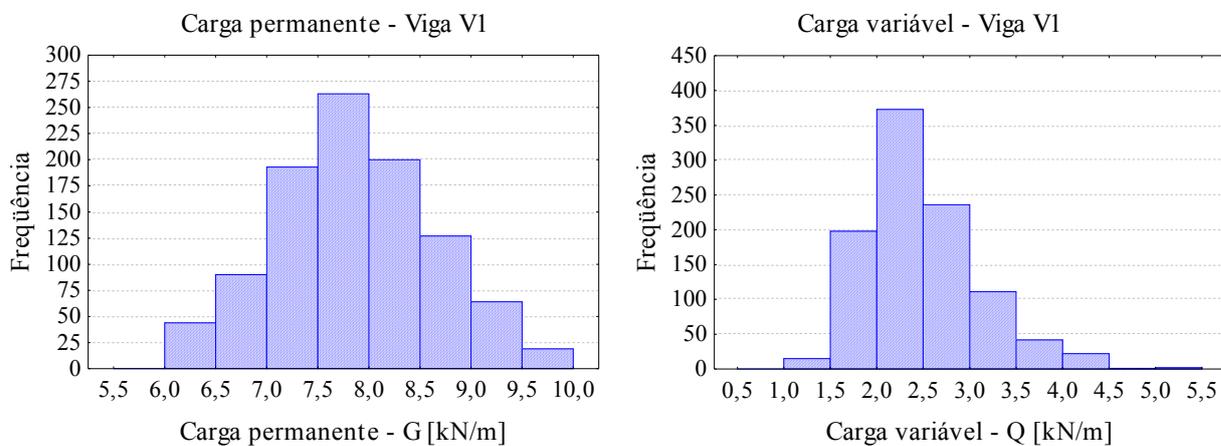


Figura 7.2 – Carga permanente e variável: Viga V1

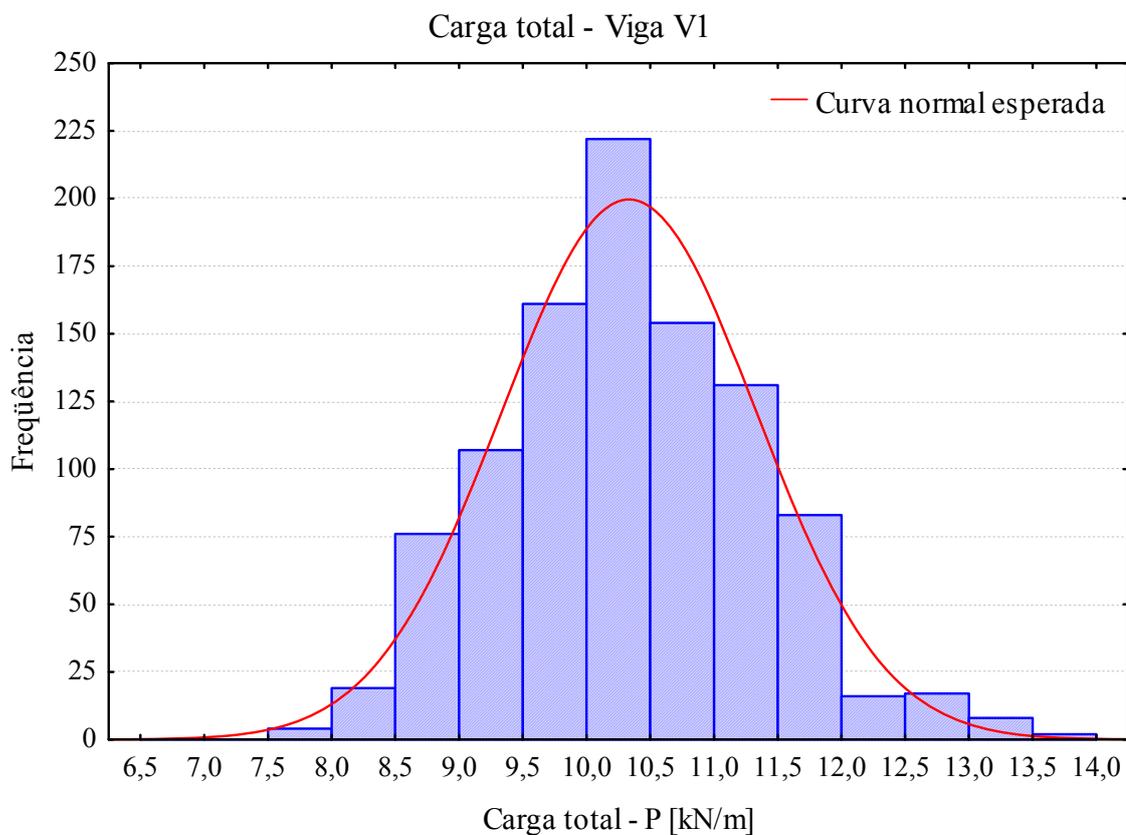


Figura 7.3 – Carga total: Viga V1

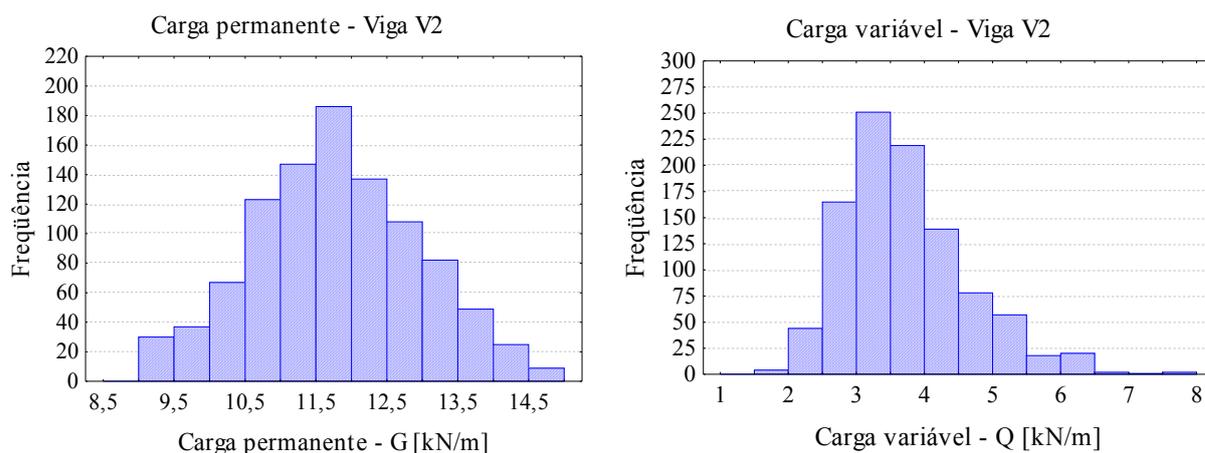


Figura 7.4 – Carga permanente e variável: Viga V2

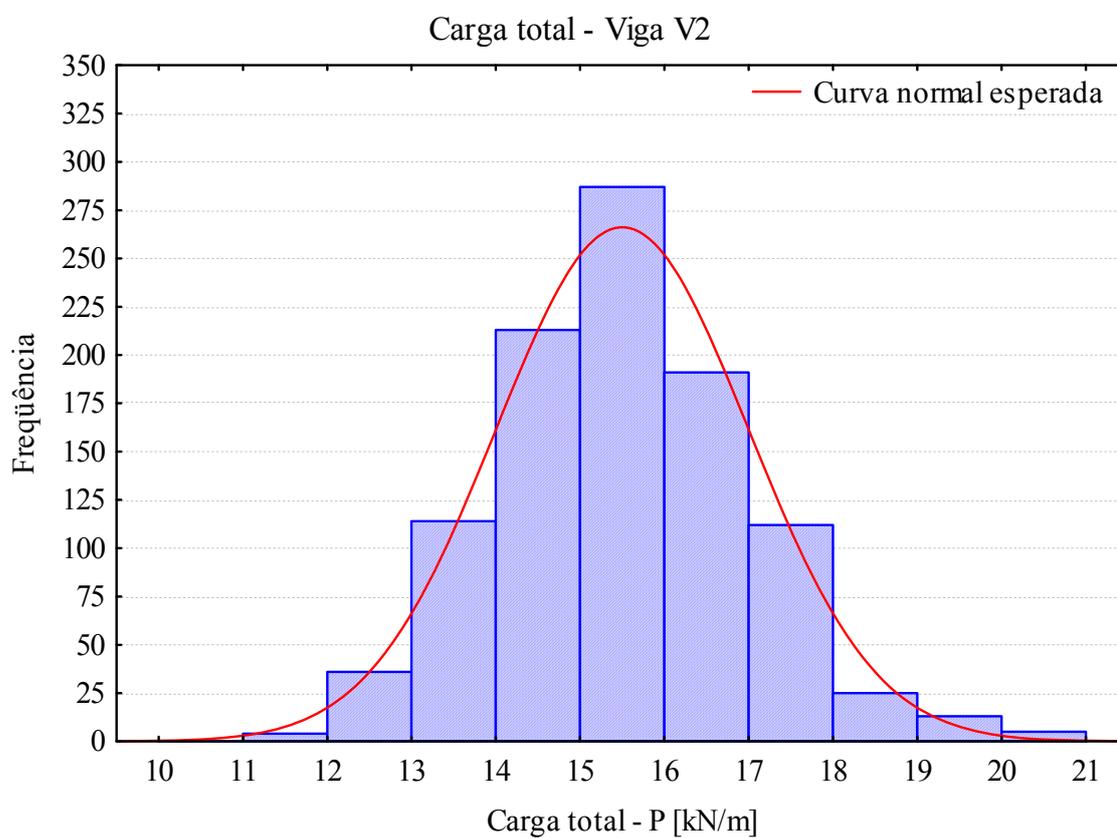


Figura 7.5 – Carga total: Viga V2

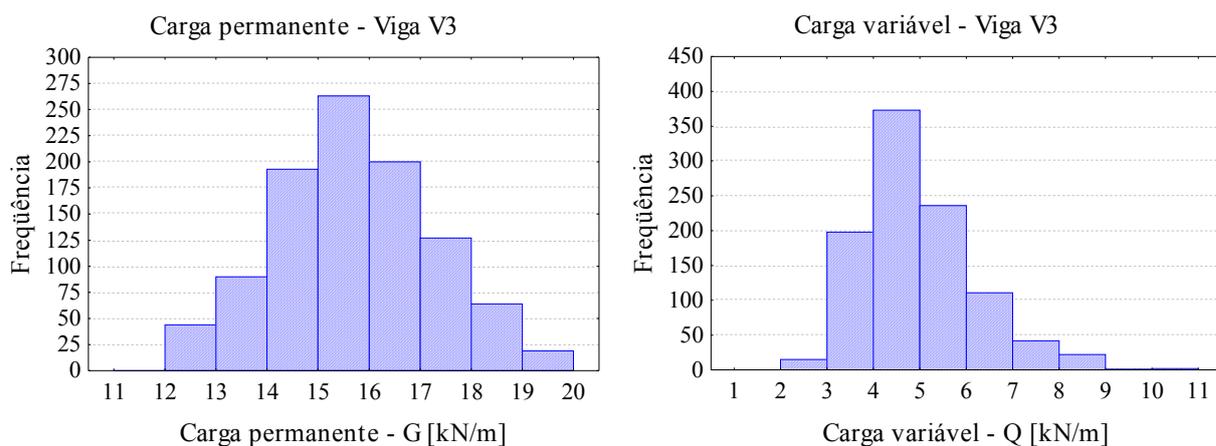


Figura 7.6 – Carga permanente e variável: Viga V3

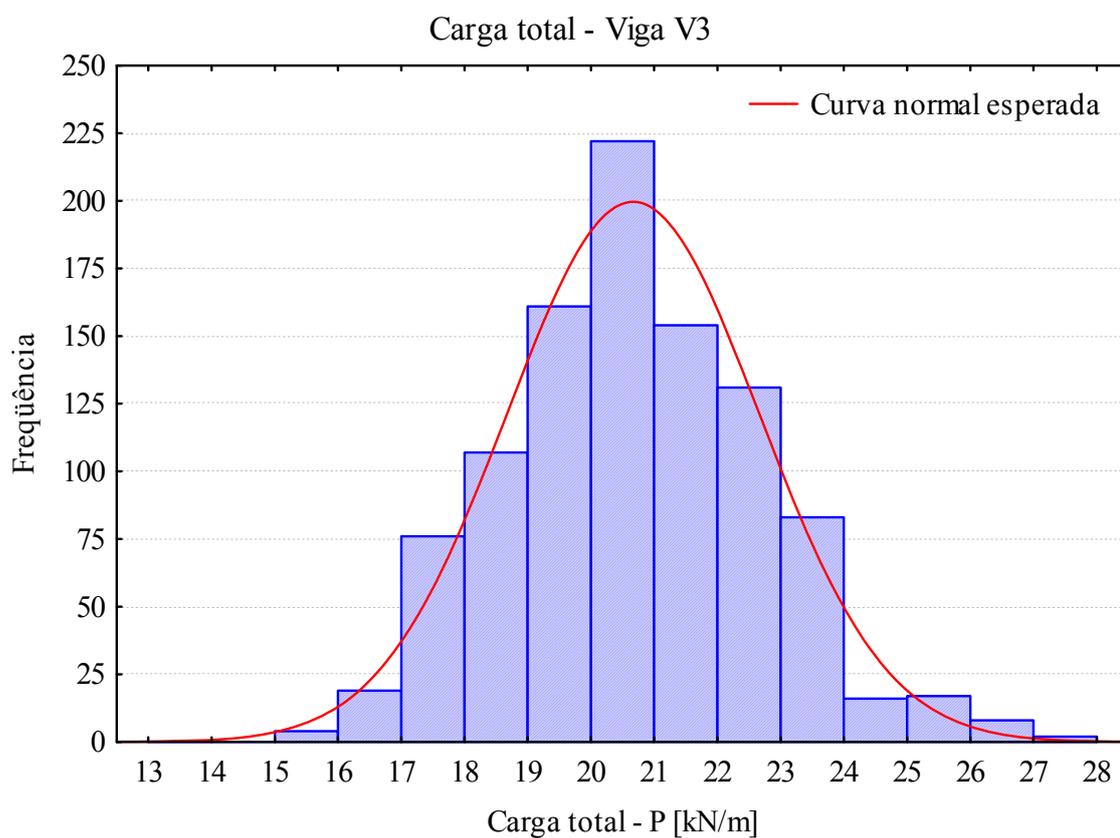


Figura 7.7 – Carga total: Viga V3

7.4 RESULTADOS NUMÉRICOS OBTIDOS

Para cada viga, V1, V2 e V3, foram feitas análises da sua situação original (não-danificada), danificada (dano de 10%, 20% e 30%) e recuperada dos danos de 10%, 20% e 30% da armadura de tração. Desse modo, sete análises foram feitas para cada viga, totalizando vinte e uma análises probabilísticas.

Na análise das resistências (cargas de ruptura) das vigas originais, danificadas e recuperadas, utilizou-se o método de simulação de Monte Carlo juntamente com o modelo não-linear de elementos finitos desenvolvido para a análise de vigas de concreto armado reforçadas. Nas análises das vigas geraram-se aleatoriamente as propriedades dos materiais conforme as distribuições que lhes foram prescritas, e então, foi obtida a carga de ruptura através do modelo de elementos finitos. Para cada uma das análises, 1.000 simulações foram feitas, obtendo-se, deste modo, 1.000 cargas de ruptura. Este número de simulações se mostrou suficiente para que houvesse uma convergência estatística do valor médio das cargas de ruptura, bem como do seu desvio padrão.

7.4.1 Viga V1

Para que se pudesse conhecer o comportamento da viga V1 quando submetida ao carregamento distribuído aplicado, fez-se uma análise determinística com as propriedades médias dos materiais envolvidos. Simulou-se o comportamento da viga V1 original, com os três níveis de dano da armadura e da recuperação dos danos através da colagem de PRFC. Então, foram traçadas as curvas carga versus deslocamento para que se pudesse observar a perda de rigidez das vigas com o aumento no carregamento. Na figura 7.8 são apresentadas estas curvas.

Pode ser constatado, através da figura 7.8, que a ruptura da viga V1 original e das vigas danificadas se deu logo após o início do escoamento da armadura de tração. Entretanto, após o escoamento da armadura de tração nas vigas recuperadas, o PRFC passa a contribuir com a absorção de uma parcela maior dos esforços de tração, possibilitando o aumento de carregamento após o escoamento do aço. Dessa maneira, a ruptura das vigas recuperadas se dá quando é atingida a resistência à tração do material compósito.

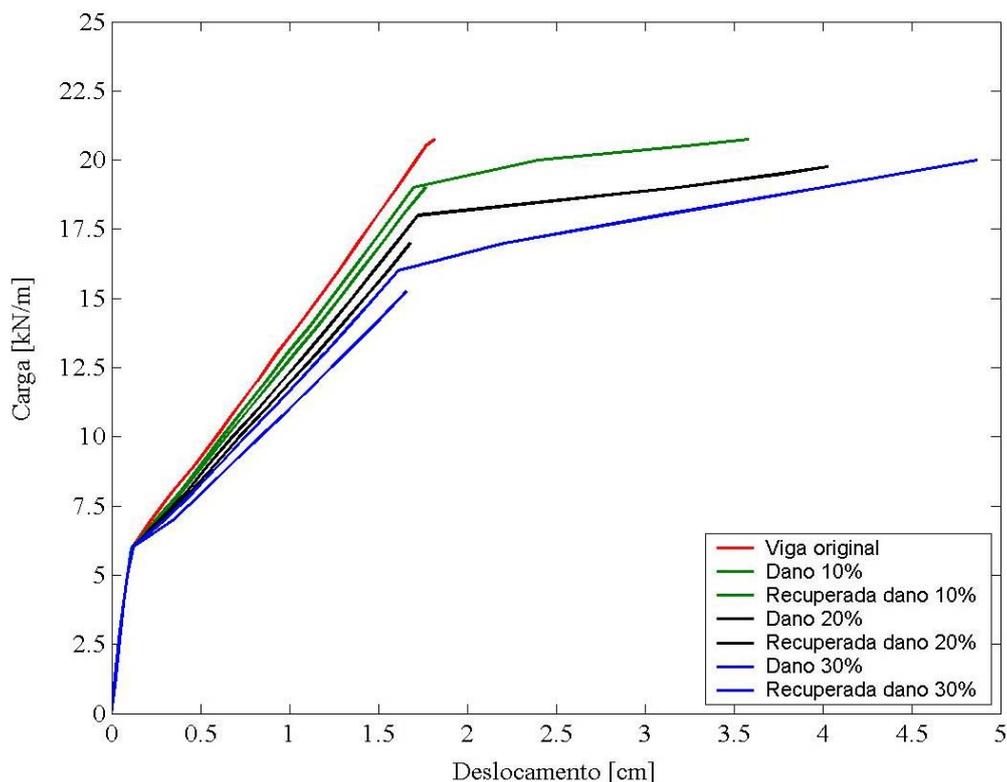


Figura 7.8 – Análise determinística da viga V1: Carga x deslocamento

Na análise probabilística, ou seja, através das 1.000 simulações de Monte Carlo, a viga V1 original, sem dano da armadura de tração, apresentou uma carga média de ruptura de 21,10 kN/m com um coeficiente de variação de 8,77%. Através do teste de Kolmogorov-Smirnov (ANG e TANG, 1984a), tentou-se representar a carga de ruptura com uma distribuição normal de probabilidade, sendo que para um nível de significância de 5% e com um número de 1.000 amostras, o valor crítico é de 0,043. Obteve-se, para este teste, o valor de 0,0418, ficando assim abaixo do valor crítico. Este teste nos indica que a carga de ruptura da viga V1 original pode ser representada através de uma distribuição normal de probabilidade, com valor esperado de 21,10 kN/m e desvio padrão de 1,85 kN/m.

Na figura 7.9 é apresentada a convergência estatística da carga de ruptura da viga V1 original em função do tamanho da amostra. Na figura 7.10 é mostrada a convergência estatística do coeficiente de variação da carga de ruptura.

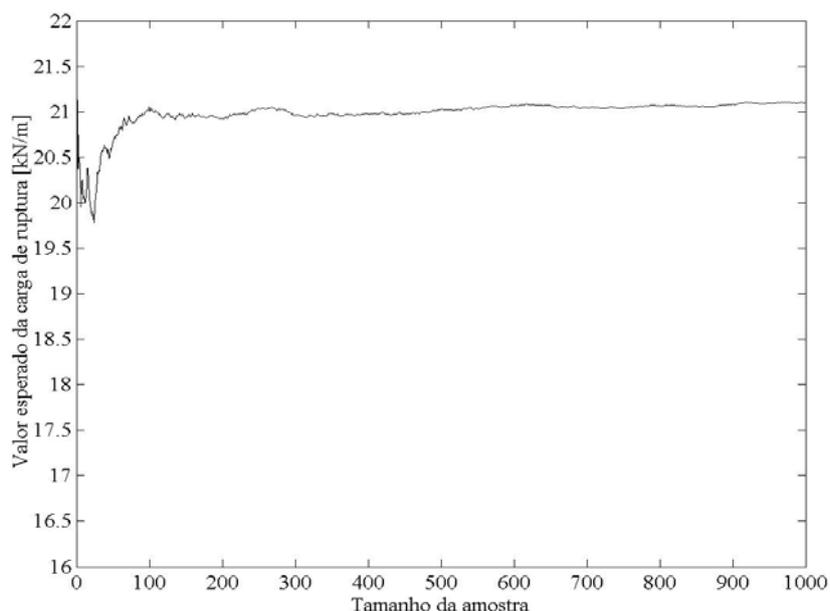


Figura 7.9 – Convergência estatística da carga de ruptura: viga V1 original

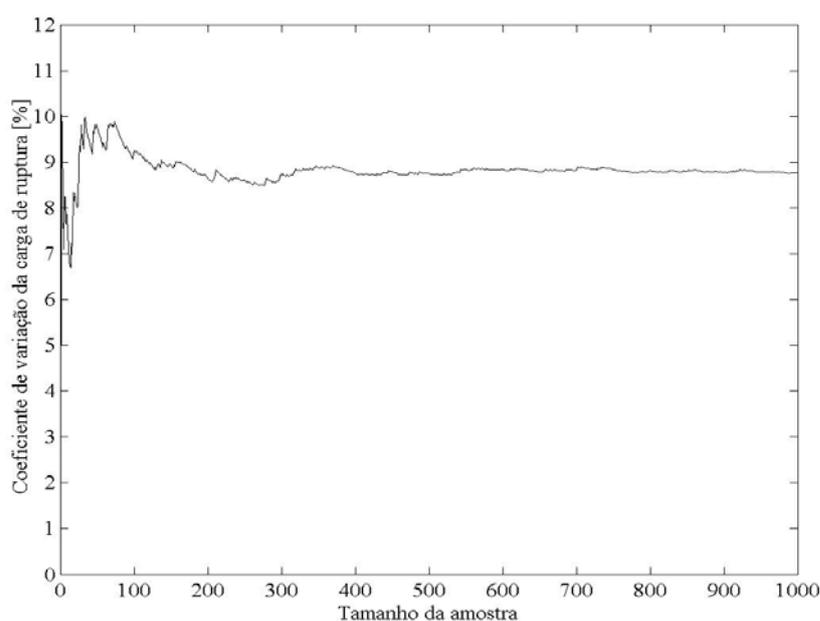


Figura 7.10 – Convergência do coeficiente de variação da carga de ruptura: viga V1 original

Ao aplicar-se o dano de 10% na armadura tracionada, houve uma queda de 9,34% no valor médio da carga de ruptura. Deste modo, o valor médio do carregamento na ruptura da viga V1 baixou para 19,13 kN/m com 8,68% de coeficiente de variação. A margem de segurança teve como média o valor de 8,79 kN/m e desvio padrão de 1,96 kN/m. Na figura 7.11 é mostrado o histograma que representa a variável aleatória margem de segurança, bem

como na figura 7.12 apresenta-se seu gráfico de probabilidade normal. Através do teste de Kolmogorov-Smirnov obteve-se uma máxima diferença entre a distribuição de frequência acumulada com a função de probabilidade acumulada assumida como normal de 0,0142, ficando este valor abaixo do valor crítico de 0,043. Assim, a margem de segurança adapta-se bem a uma distribuição normal de probabilidade.

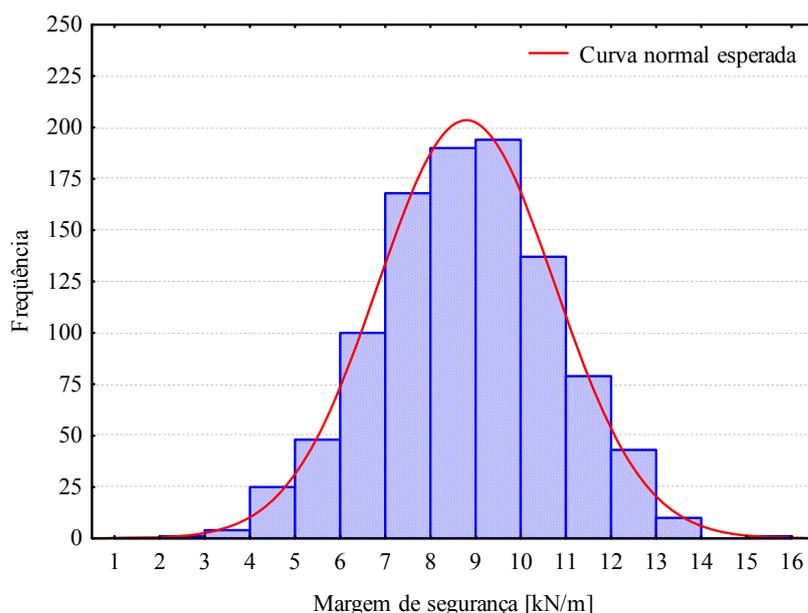


Figura 7.11 – Margem de segurança: Viga V1 com 10% de dano

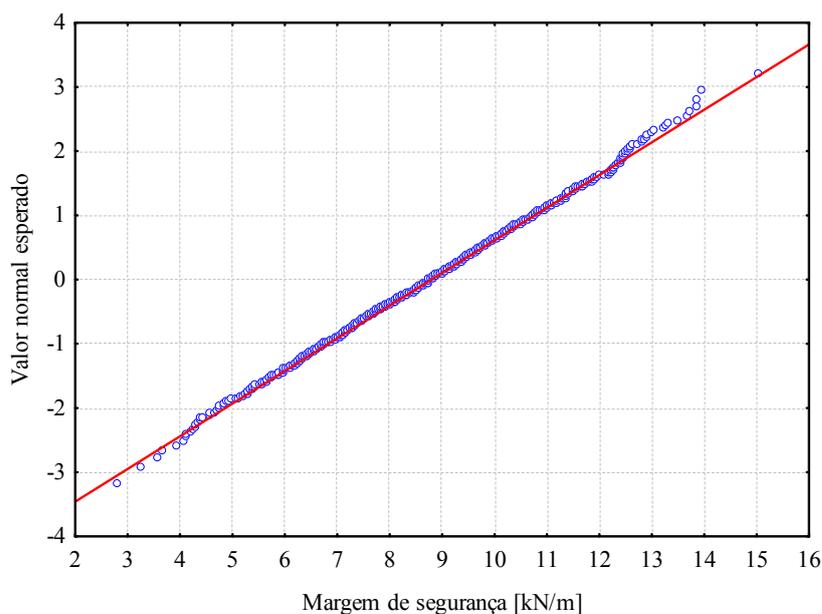


Figura 7.12 – Gráfico de probabilidade normal: Viga V1 com 10% de dano

Após a recuperação do dano causado pela redução de 10% da área da armadura inferior tracionada, a carga média de ruptura da viga V1, obtida através das 1.000 simulações de Monte Carlo, aumentou para 21,04 kN/m com 8,51% de coeficiente de variação. O aumento em relação à carga média de ruptura da viga V1 com 10% de dano foi de 9,98%, ficando, a viga recuperada, com a carga média de ruptura muito próxima da carga média de ruptura da viga V1 original, que foi de 21,10 kN/m. Desse modo, a diferença entre as cargas médias de ruptura da viga original com a viga recuperada foi de 0,28%. Entretanto, houve uma diminuição do seu coeficiente de variação em 2,96%, indicando uma melhoria na confiabilidade da viga recuperada.

Com o objetivo de saber se a carga de ruptura da viga V1 recuperada do dano de 10% pode ser representada através de uma distribuição normal de probabilidade o teste de Kolmogorov-Smirnov foi feito. O parâmetro de comparação obtido através deste teste foi de 0,0392, que comparado ao valor máximo de 0,043, nos indica que a carga de ruptura adapta-se a uma distribuição normal de probabilidade.

Na figura 7.13 é apresentada a interação entre a função densidade de probabilidade da solicitação $f_S(s)$ e a função de probabilidade acumulada $F_R(r)$ da resistência, da viga V1, para as situações de análise do dano de 10% da armadura tracionada.

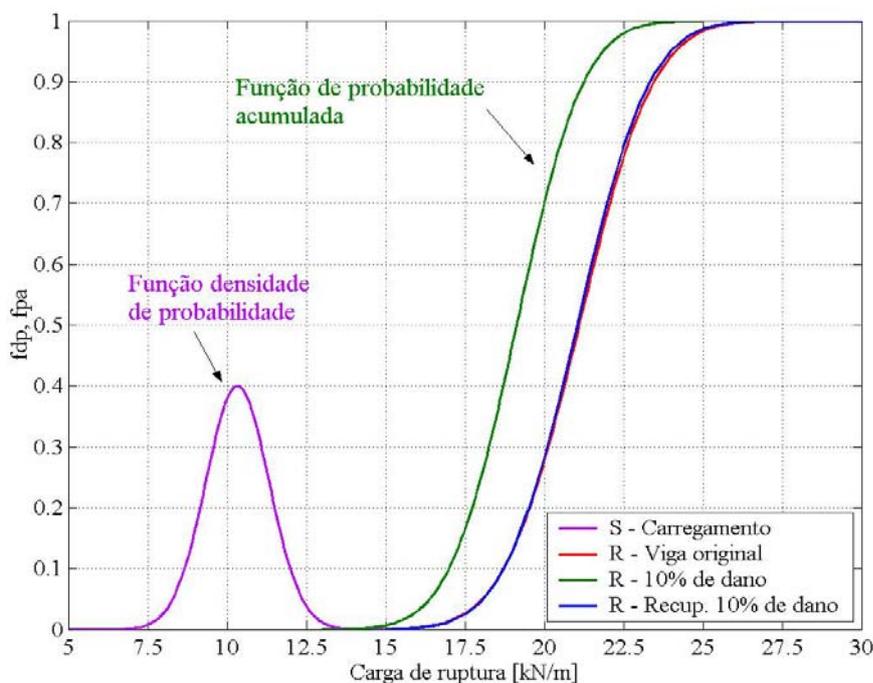


Figura 7.13 – Representação do problema R - S em termos de $f_S(s)$ e $F_R(r)$ – Viga V1 com 10% de dano

Nas figuras 7.14 e 7.15 são apresentadas, respectivamente, as interações entre a função densidade de probabilidade da solicitação $f_S(s)$ e a função de probabilidade acumulada $F_R(r)$ da resistência, da viga V1, para as situações de análise do dano de 20% e 30%.

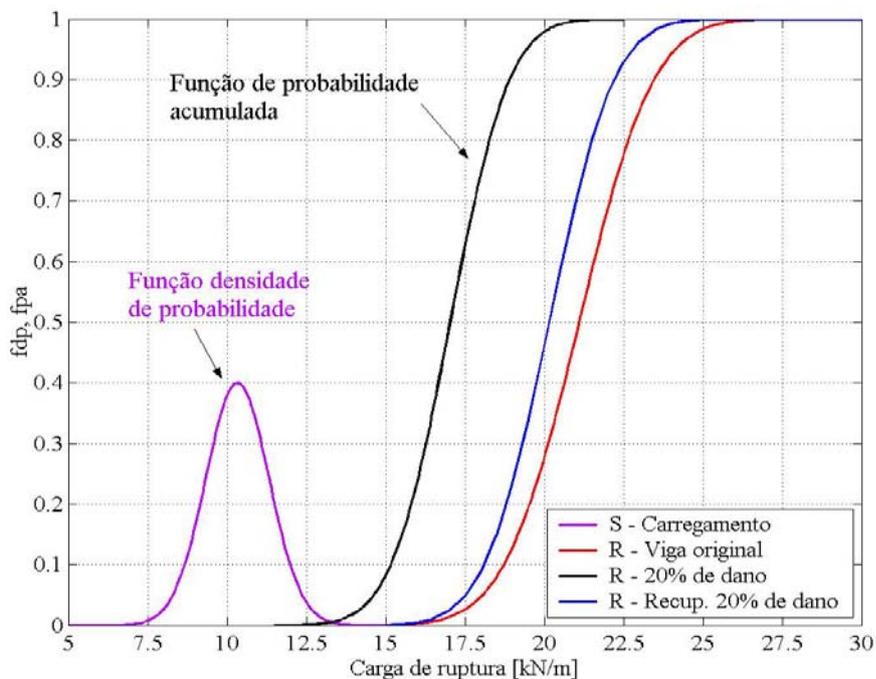


Figura 7.14 – Representação do problema R - S em termos de $f_S(s)$ e $F_R(r)$ – Viga V1 com 20% de dano

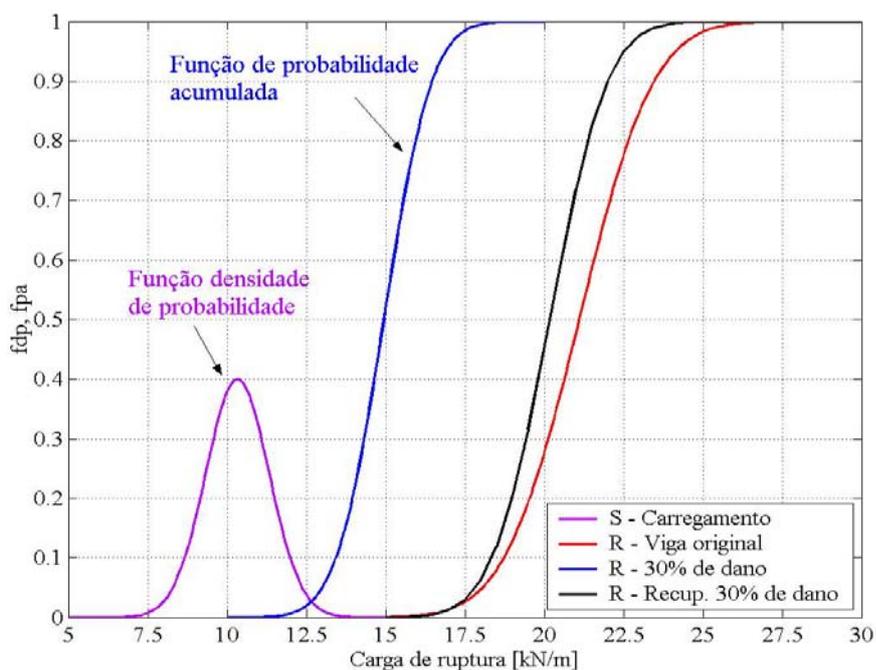


Figura 7.15 – Representação do problema R - S em termos de $f_S(s)$ e $F_R(r)$ – Viga V1 com 30% de dano

No capítulo 6 foi mostrado que a probabilidade de falha de uma estrutura pode ser obtida através da equação (6.9) para R e S contínuas e estatisticamente independentes. Esta equação nos indica que a probabilidade de falha aumenta quando $F_R(r)$ e $f_S(s)$ se aproximam e diminui quando $F_R(r)$ e $f_S(s)$ se afastam. Assim observa-se, através das figuras 7.13, 7.14 e 7.15 que a confiabilidade diminuiu, para os exemplos analisados, conforme aumentou o dano da armadura tracionada. Entretanto, através da recuperação estrutural a função de probabilidade acumulada da resistência afastou-se novamente da função densidade de probabilidade da solicitação, indicando uma recuperação da confiabilidade estrutural destas vigas.

Na tabela 7.7 estão apresentados os valores médios e coeficientes de variação das cargas de ruptura obtidos em todas as análises da viga V1. Também estão mostrados os índices de confiabilidade β , e as correspondentes probabilidades de falha P_f .

Tabela 7.7 – Análise probabilística da viga V1

Viga V1	Original	10% de dano		20% de dano		30% de dano	
		Danific.	Recup.	Danific.	Recup.	Danific.	Recup.
R_m [kN/m]	21,10	19,13	21,04	17,04	20,16	14,95	20,18
V_R [%]	8,77	8,68	8,51	8,59	7,91	7,91	7,03
β	5,11	4,49	5,15	3,82	5,11	3,04	5,69
P_f	$1,60 \times 10^{-7}$	$3,60 \times 10^{-6}$	$1,30 \times 10^{-7}$	$6,70 \times 10^{-5}$	$1,60 \times 10^{-7}$	$1,20 \times 10^{-3}$	$6,40 \times 10^{-9}$

A tabela 7.7 pode ser representada graficamente através das figuras 7.16, 7.17, 7.18 e 7.19. Nestas figuras, é apresentada a variação, com o aumento do dano da armadura de tração, da carga média de ruptura e de seu coeficiente de variação, do índice de confiabilidade e da probabilidade de falha.

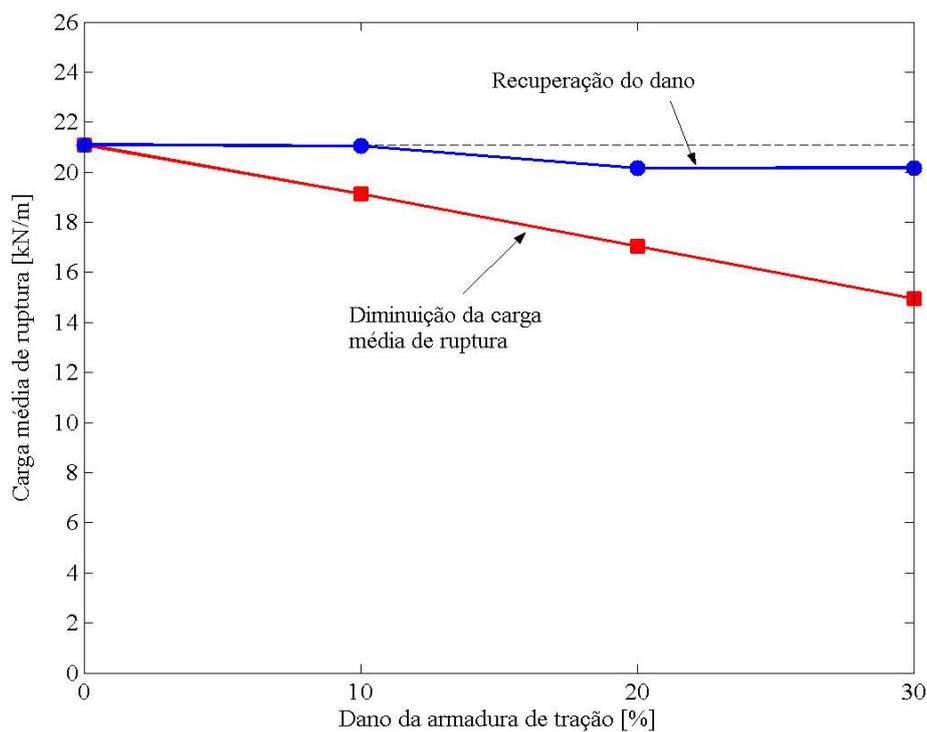


Figura 7.16 – Variação da carga média de ruptura com o dano: Viga V1

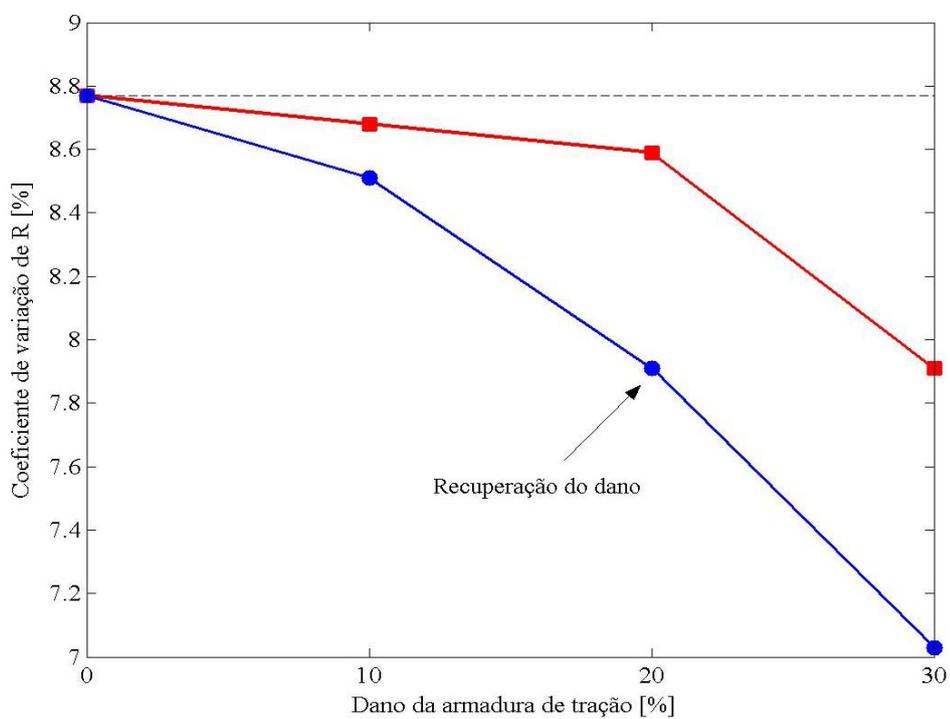


Figura 7.17 – Coeficiente de variação da carga de ruptura com o dano: Viga V1

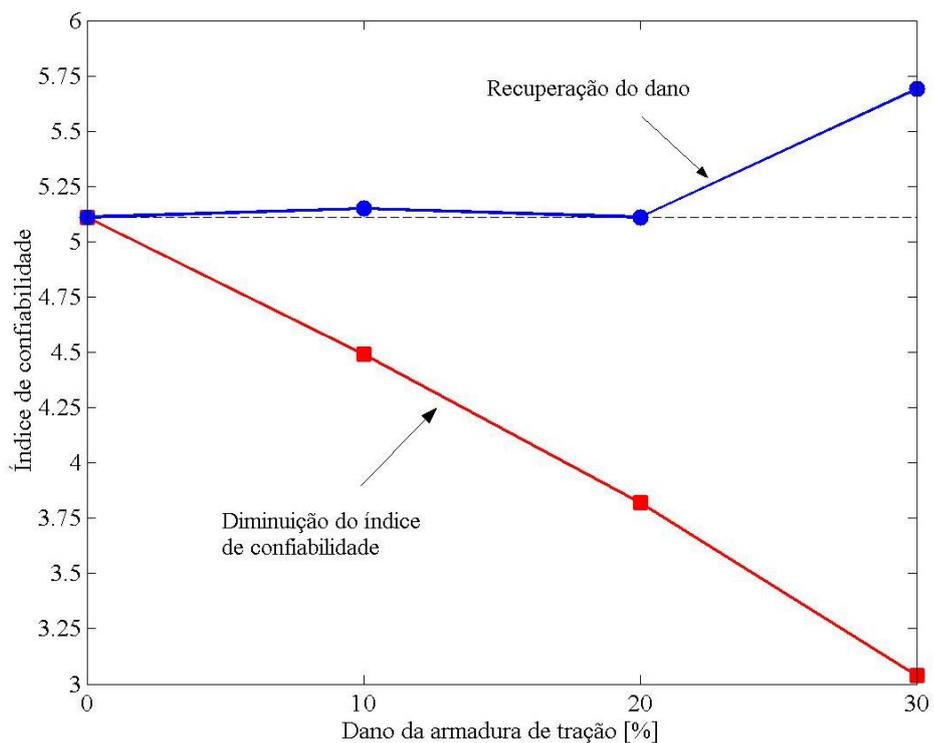


Figura 7.18 – Variação do índice de confiabilidade com o dano: Viga V1

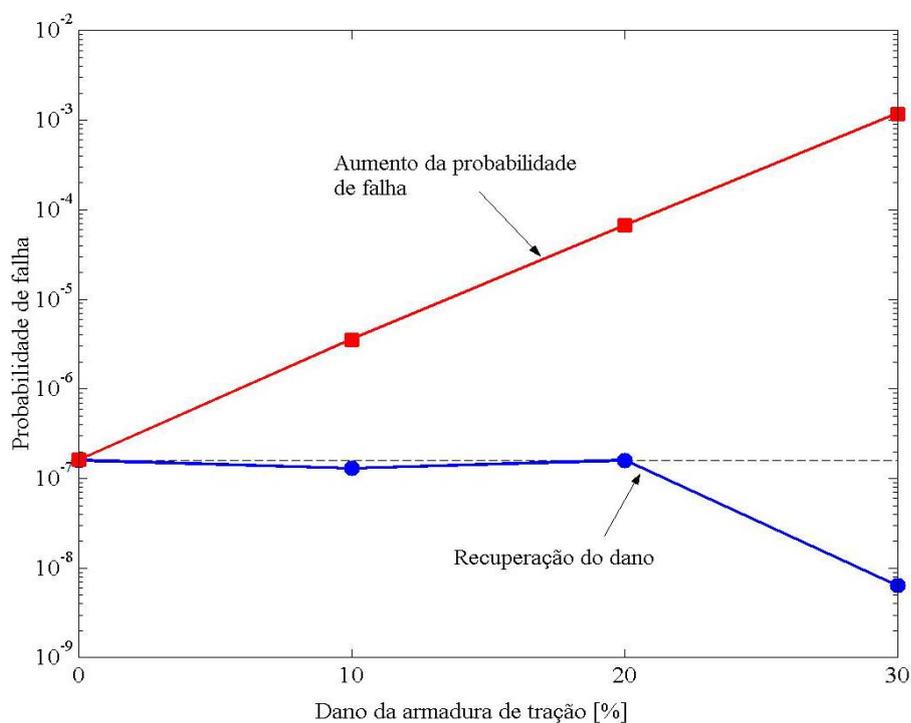


Figura 7.19 – Variação da probabilidade de falha com o dano: Viga V1

7.4.2 Viga V2

Para que fosse feita uma observação sobre o comportamento da viga V2 quando original, ou quando danificada e depois recuperada, análises determinísticas com as propriedades médias dos materiais foram feitas. Na figura 7.20 são apresentados os resultados, em termos das curvas carga versus deslocamento, para as análises determinísticas.

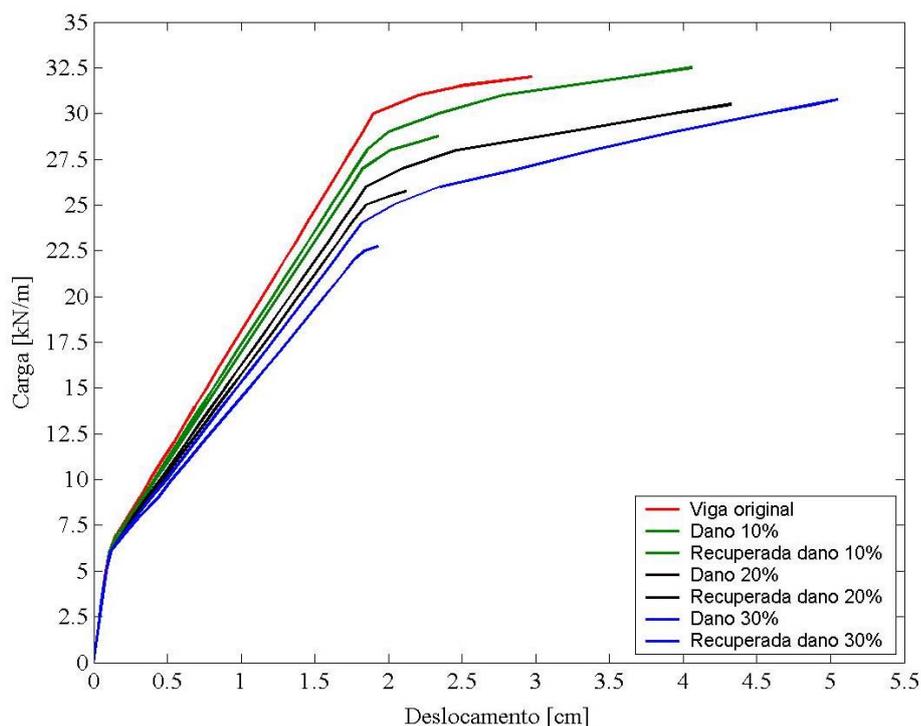


Figura 7.20 – Análise determinística da viga V2: Carga x deslocamento

Fazendo-se uma análise do comportamento estrutural da viga V2 original, através dos resultados apresentados na figura 7.20, observa-se que devido a uma maior taxa de armadura em relação à viga V1, o carregamento aplicado ainda pode ser aumentado após o início do escoamento do aço, com a armadura tracionada deformando-se plasticamente antes da ruptura da estrutura. Entretanto, com a aplicação e com o aumento do dano da armadura, há uma diminuição da taxa de armadura, fazendo com que logo após o início do escoamento do aço se dê a ruptura da estrutura. Porém, a implementação da recuperação estrutural através da colagem de PRFC na face tracionada da viga, fez com que a carga de ruptura fosse aumentada, aproximando-se bastante da carga de ruptura da viga não-danificada.

Com os resultados obtidos da análise probabilística da viga V2 e com os gráficos apresentados nas figuras 7.21, 7.22 e 7.23, constatou-se novamente que a função de

probabilidade acumulada da resistência aproxima-se da função densidade de probabilidade da solicitação conforme aumenta o dano na armadura inferior de tração. Dessa maneira, há um aumento na probabilidade de falha das vigas danificas em relação à viga V2 original.

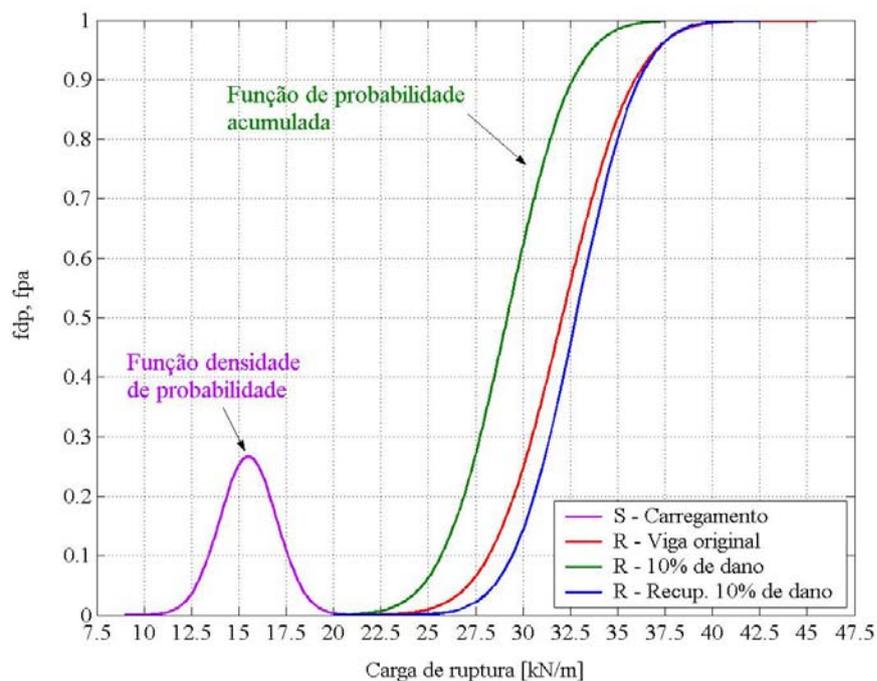


Figura 7.21 – Representação do problema R - S em termos de $f_S(s)$ e $F_R(r)$ – Viga V2 com 10% de dano

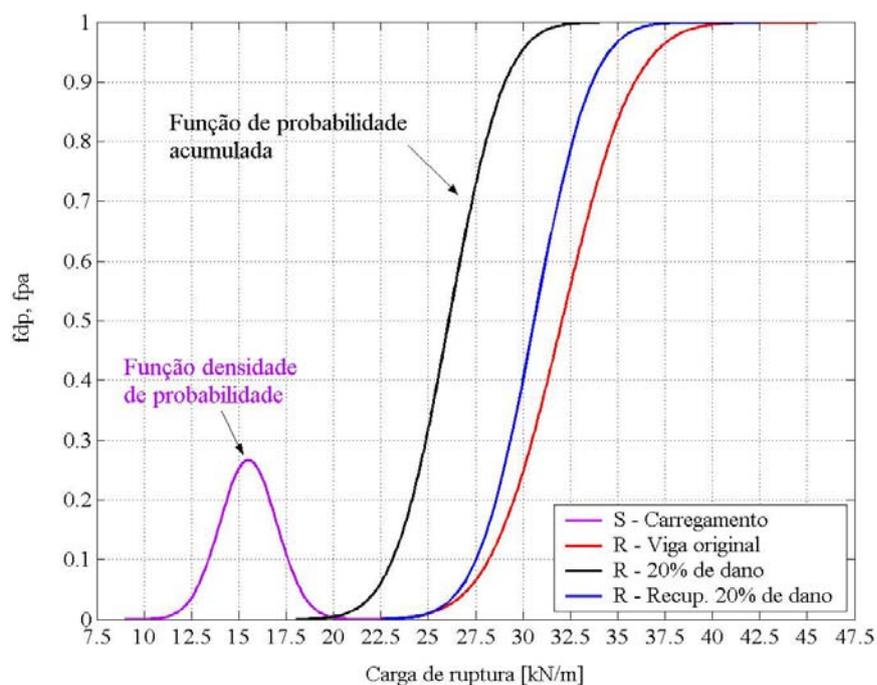


Figura 7.22 – Representação do problema R - S em termos de $f_S(s)$ e $F_R(r)$ – Viga V2 com 20% de dano

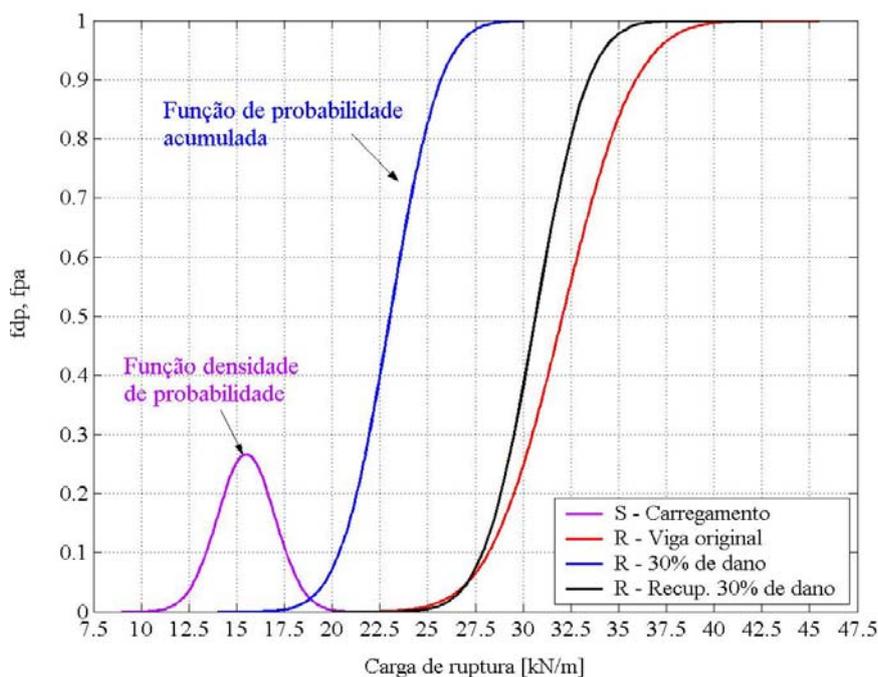


Figura 7.23 – Representação do problema R - S em termos de $f_S(s)$ e $F_R(r)$ – Viga V2 com 30% de dano

Pelas figuras 7.21, 7.22 e 7.23 observa-se que após a recuperação das vigas, a função de probabilidade acumulada da resistência afasta-se da função densidade de probabilidade da solicitação, aproximando-se da função de probabilidade acumulada da resistência da viga V2 na situação original. Verifica-se, também, que o valor médio da resistência na recuperação do dano de 10% ficou ligeiramente superior ao valor médio da resistência na sua situação original. Para a recuperação dos danos de 20% e 30%, a carga média de ruptura ficou um pouco inferior à carga média de ruptura da viga original. Entretanto, a variabilidade em torno do valor médio foi inferior quando comparado à situação original, para as três situações de recuperação dos danos aplicados.

Quando do dano de 20% na armadura tracionada da viga V2 houve uma queda em 18,62% da carga média de ruptura quando comparado à viga não-danificada. Assim, obteve-se, através das 1.000 simulações, o valor médio de 26,09 kN/m com 8,90% de coeficiente de variação.

Para a recuperação da capacidade de carga da viga V2 após o dano de 20% da armadura de tração, lâminas em PRFC com área da seção transversal de $0,0877 \text{ cm}^2$ foram coladas na face tracionada da viga. Conseguiu-se, através deste procedimento, um aumento de 17,29% da carga média de ruptura em relação à viga com 20% de dano. Entretanto, com um valor de 30,60 kN/m, a carga média de ruptura da viga recuperada ficou 4,55% menor que a

carga média de ruptura da viga original (32,06 kN/m). Porém, ao se fazer uma análise da dispersão das cargas de ruptura em relação ao valor médio, vê-se que o coeficiente de variação da carga de ruptura da viga recuperada, que foi de 7,81%, é 16,91% menor quando comparado ao coeficiente de variação da carga de ruptura da viga original. Este fato é um indicativo de que a menor variabilidade em torno do valor médio, e a pequena diferença entre os valores médios das cargas de ruptura das vigas originais e recuperadas, fazem com que a viga recuperada tenha uma menor probabilidade de falha quando comparada à viga original.

Nas figuras 7.24 e 7.25 são apresentadas, respectivamente, a convergência estatística da carga de ruptura da viga V2 recuperada do dano de 20% e do seu coeficiente de variação.

Através do gráfico de convergência estatística apresentado na figura 7.24, observa-se que a carga de ruptura converge rapidamente para o valor esperado da resposta. Para um número em torno de 200 simulações este valor já se aproxima bastante do valor médio da carga de ruptura obtida através das 1.000 simulações.

Porém, para o coeficiente de variação da carga de ruptura a convergência estatística apresentada na figura 7.25, em função do tamanho da amostra, se dá de uma forma mais lenta, necessitando, como mostrado, de um número em torno de 600 simulações.

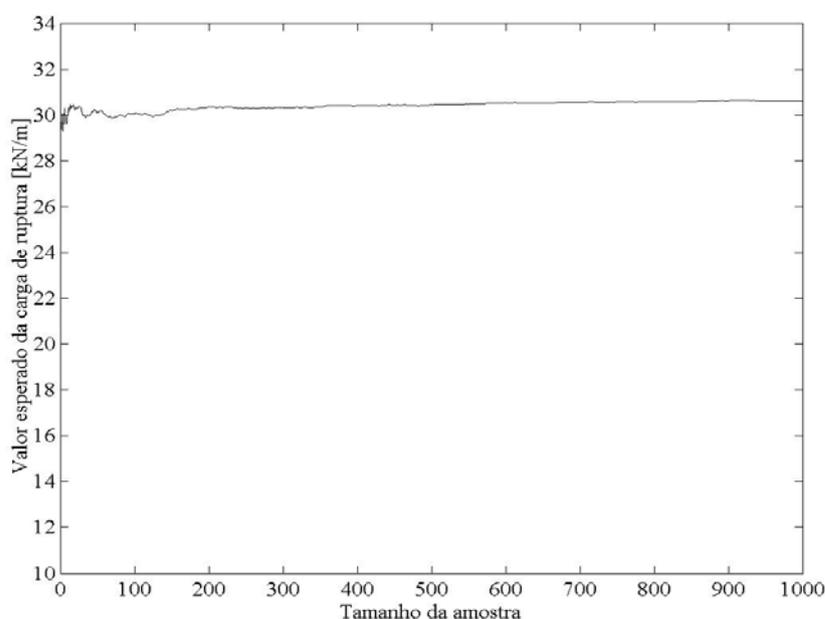


Figura 7.24 – Convergência estatística da carga de ruptura: viga V2 recuperada do dano de 20%

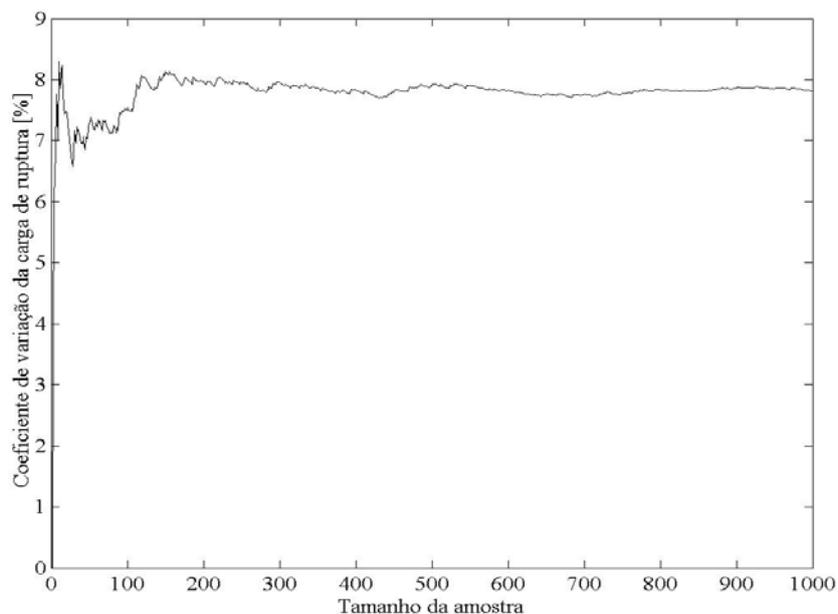


Figura 7.25 – Convergência do coeficiente de variação da carga de ruptura: viga V2 recuperada do dano de 20%

Na figura 7.26 é apresentada a margem de segurança da viga V2 recuperada do dano de 20% da armadura longitudinal de tração. Já na figura 7.27, apresenta-se o gráfico de probabilidade normal da margem de segurança.

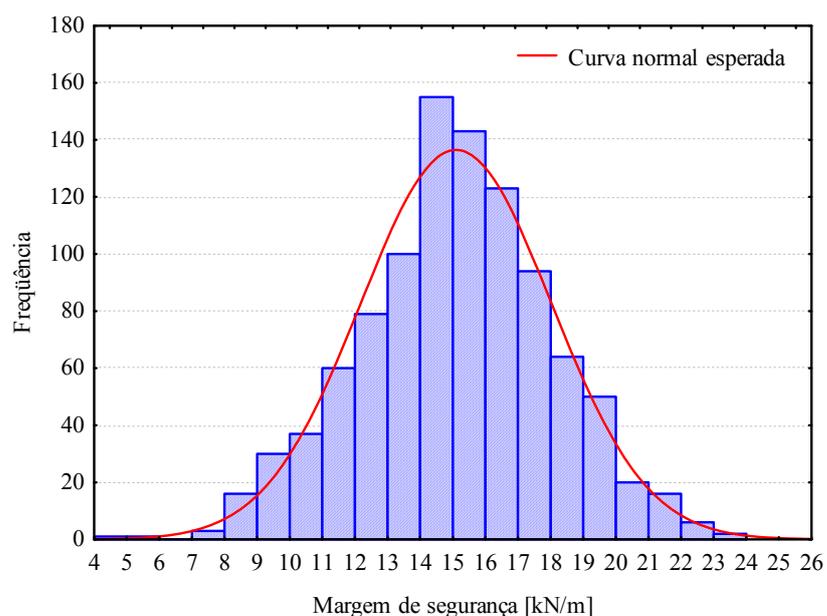


Figura 7.26 – Margem de segurança: Viga V2 recuperada do dano de 20%

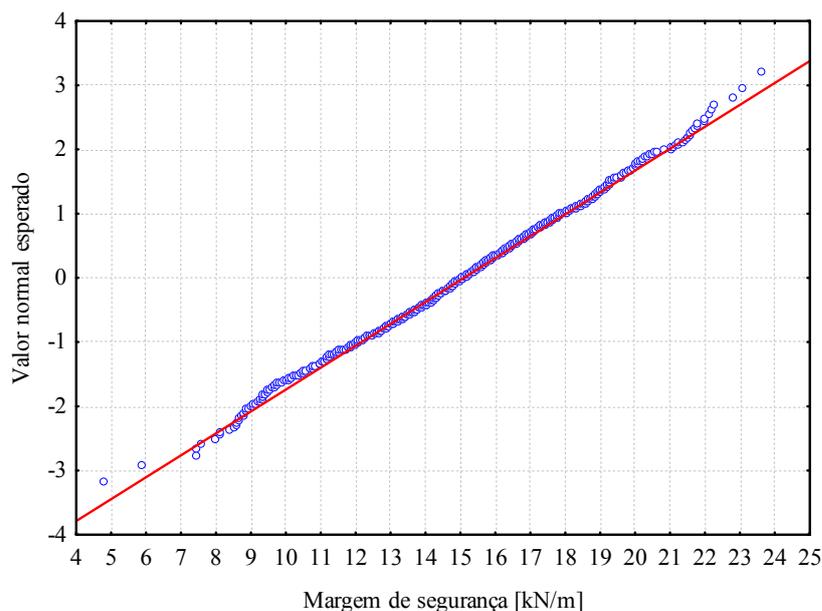


Figura 7.27 – Gráfico de probabilidade normal: Viga V2 recuperada do dano de 20%

Através das figuras 7.26 e 7.27 pode-se constatar que a margem de segurança da viga V2 recuperada segue uma distribuição normal de probabilidade. Fato confirmado pelo número 0,0287 obtido pelo teste de Kolmogorov-Smirnov. Na tabela 7.8 estão apresentados os valores médios e coeficientes de variação das cargas de ruptura obtidos em todas as análises da viga V2, bem como os índices de confiabilidade β , e as correspondentes probabilidades de falha P_f .

Tabela 7.8 – Análise probabilística da viga V2

Viga V2	Original	10% de dano		20% de dano		30% de dano	
		Danific.	Recup.	Danific.	Recup.	Danific.	Recup.
R_m [kN/m]	32,06	29,16	32,79	26,09	30,60	23,04	30,66
V_R [%]	9,40	9,30	7,96	8,90	7,81	9,03	7,05
β	4,85	4,25	5,69	3,87	5,17	2,93	5,61
P_f	$6,20 \times 10^{-7}$	$1,10 \times 10^{-5}$	$6,40 \times 10^{-9}$	$5,40 \times 10^{-5}$	$1,20 \times 10^{-7}$	$1,70 \times 10^{-3}$	$1,00 \times 10^{-8}$

Uma representação gráfica da tabela 7.8 pode ser observada através das figuras 7.28, 7.29, 7.30 e 7.31. Nas figuras, é apresentada a variação, com o aumento do dano da armadura de tração, da carga média de ruptura e de seu coeficiente de variação, do índice de confiabilidade e da probabilidade de falha.

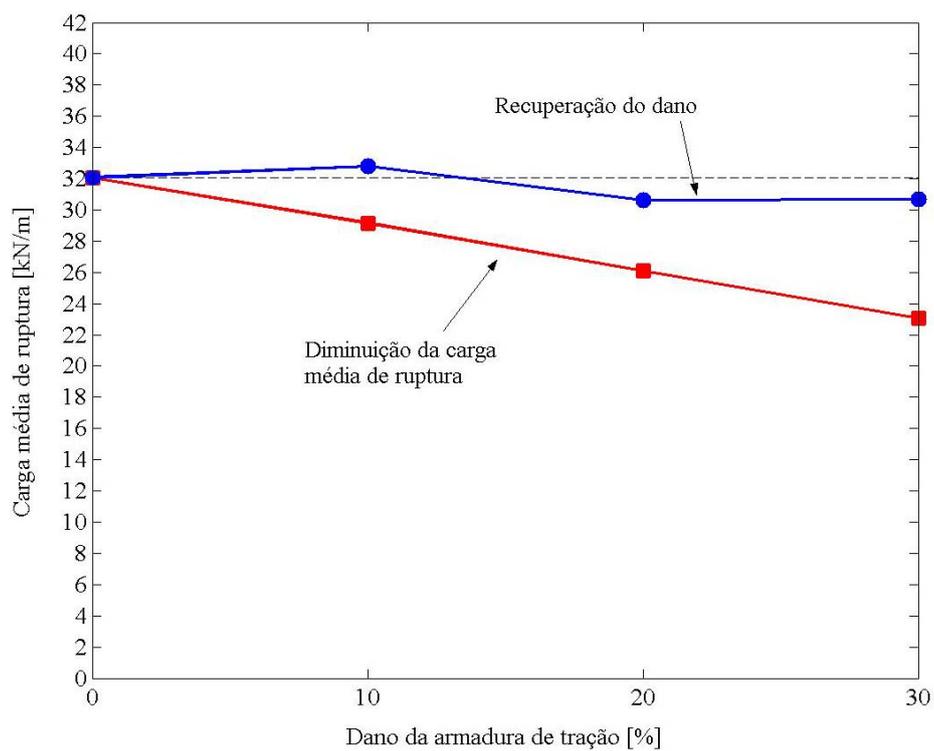


Figura 7.28 – Variação da carga média de ruptura com o dano: Viga V2

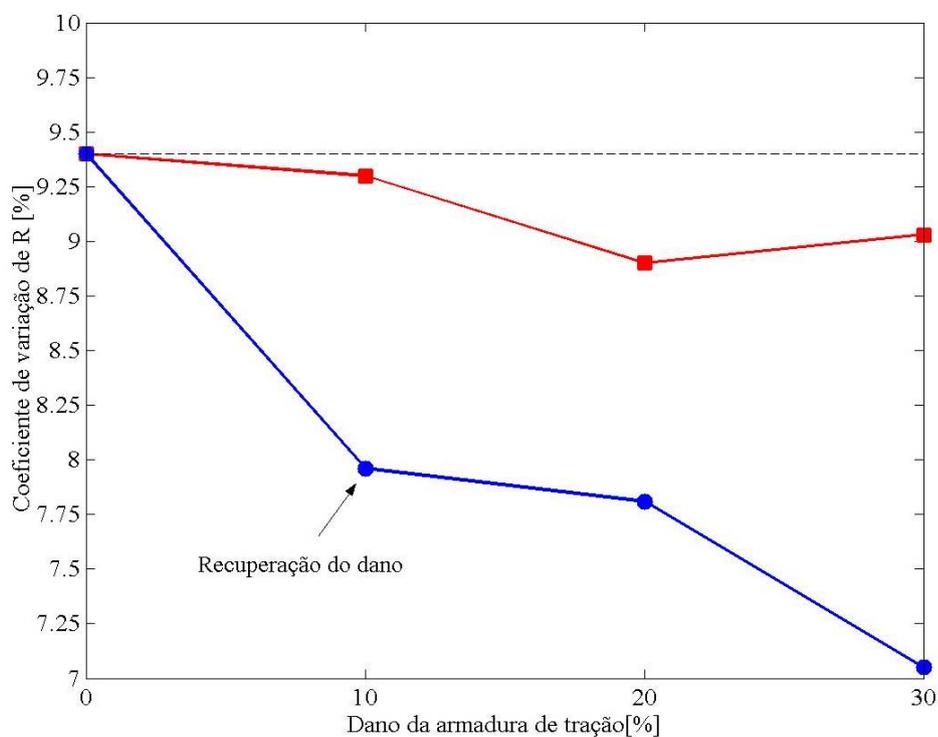


Figura 7.29 – Coeficiente de variação da carga de ruptura com o dano: Viga V2

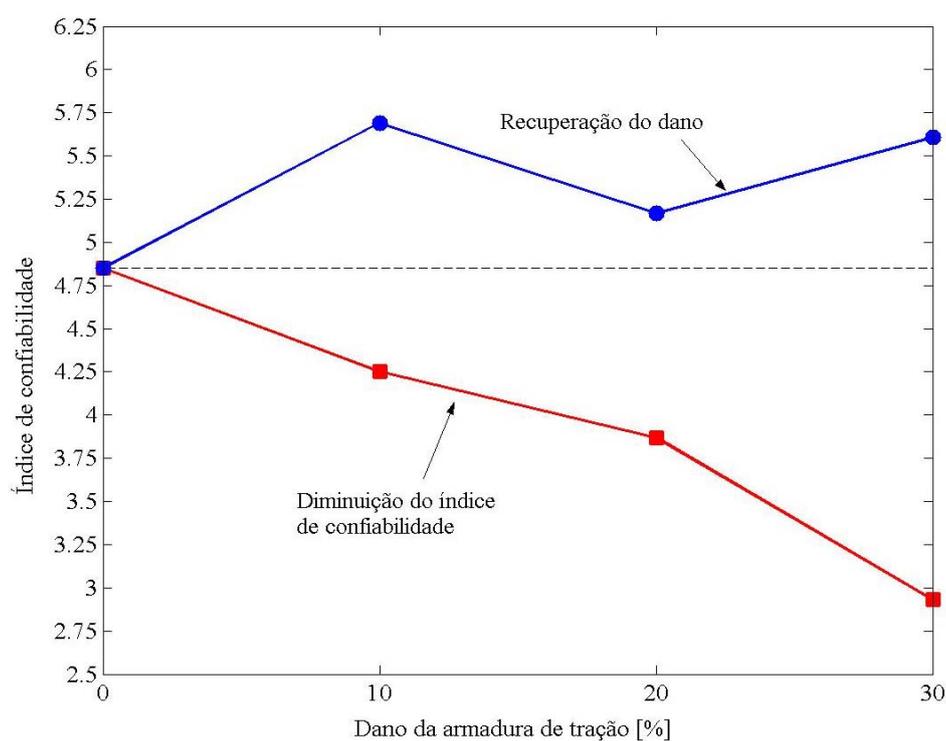


Figura 7.30 – Variação do índice de confiabilidade com o dano: Viga V2

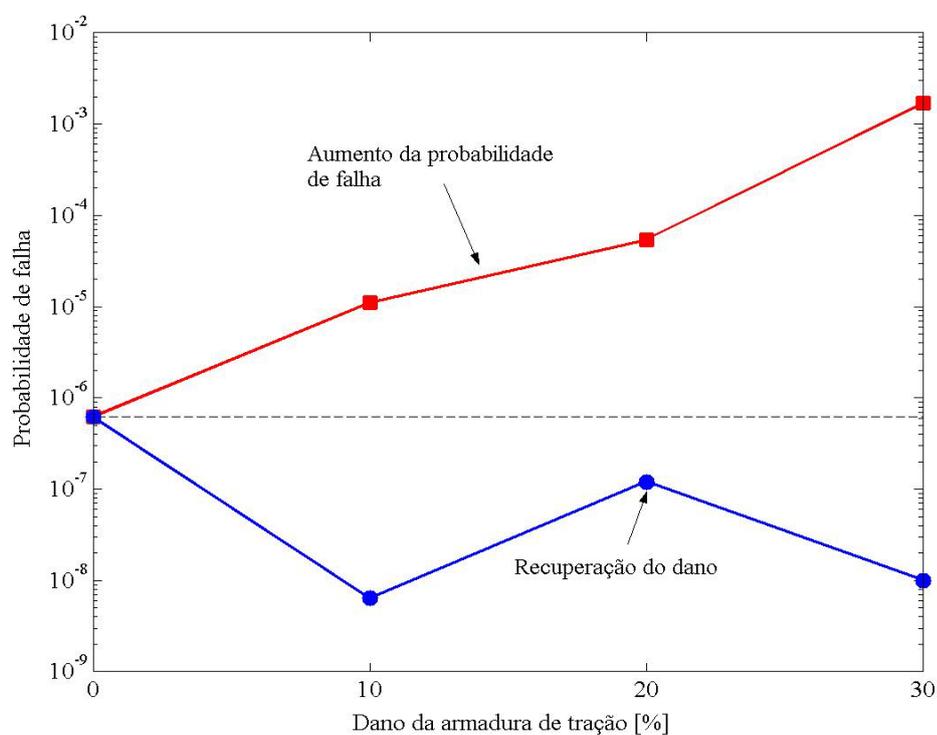


Figura 7.31 – Variação da probabilidade de falha com o dano: Viga V2

7.4.3 Viga V3

O comportamento estrutural da viga V3 quando submetida ao carregamento aplicado foi obtido através de análises determinísticas, usando como propriedades físicas os valores médios de cada variável envolvida. Analisou-se, desse modo, a condição original da viga V3, seu comportamento após a aplicação dos danos na armadura tracionada de flexão, e sua recuperação através da implementação do material compósito. Através da figura 7.32 podem ser observados estes comportamentos frente às solicitações externas.

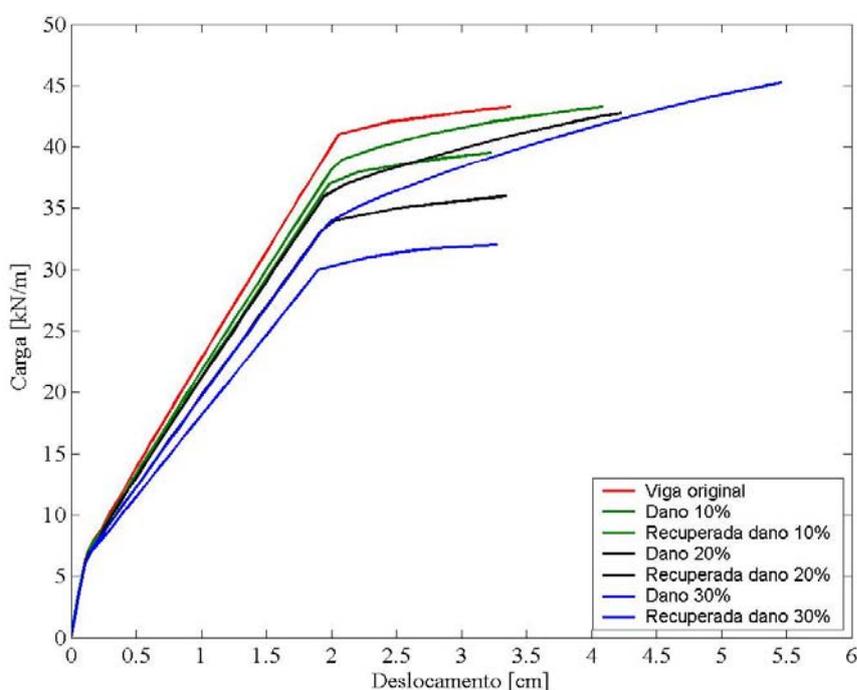


Figura 7.32 – Análise determinística da viga V3: Carga x deslocamento

Em virtude da recuperação estrutural, a carga de ruptura foi restabelecida após a colagem de lâminas de PRFC, sendo que para a situação de recuperação do dano de 30% a carga de ruptura foi superior à carga de ruptura da viga original.

Quando se passou para a análise probabilística da viga V3, obteve-se uma carga média de ruptura de 43,18 kN/m, com 8,51% de coeficiente de variação. Para sua margem de segurança, obteve-se um valor médio de 22,51 kN/m com 4,13 kN/m de desvio padrão.

Para o teste de Kolmogorov-Smirnov, obteve-se como maior diferença entre a distribuição de frequência acumulada, obtida através das amostras da carga de ruptura, e a

função de probabilidade acumulada admitida como normal, o valor de 0,0197. Como este valor ficou abaixo da maior diferença que pode ser alcançada, e observando-se o gráfico de probabilidade normal da margem de segurança apresentada na figura 7.34, pode-se dizer que margem de segurança da viga V3 original segue uma distribuição normal de probabilidade.

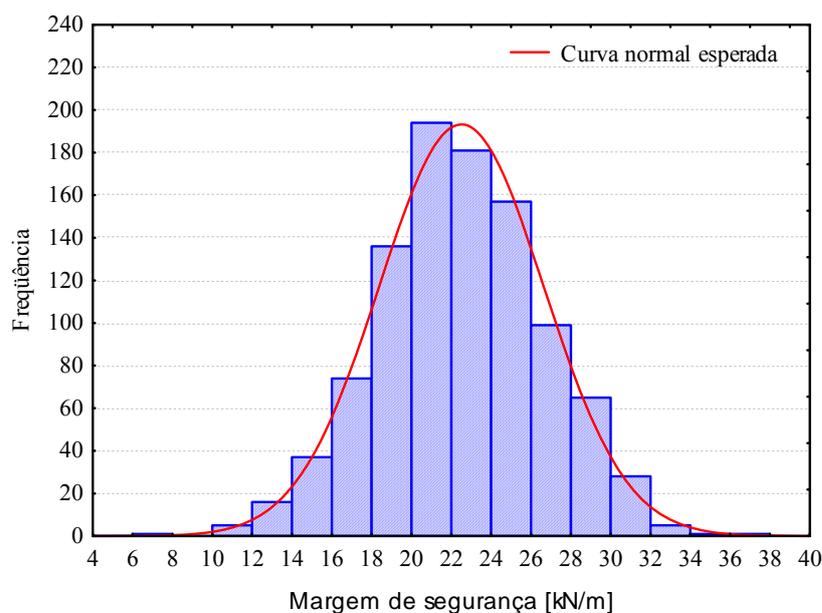


Figura 7.33 – Margem de segurança: Viga V3 original

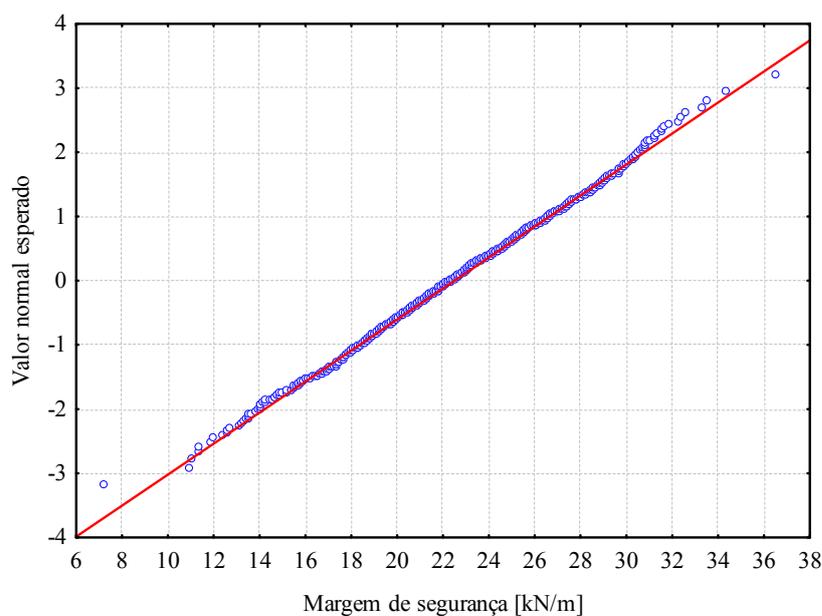


Figura 7.34 – Gráfico de probabilidade normal: Viga V3 original

Como consequência do dano de 30% aplicado na armadura inferior, houve uma queda de 26,22% na carga média de ruptura em relação à viga V3 original. Assim, a carga média de ruptura ficou em 31,86 kN/m com 9,56% de coeficiente de variação.

A carga média de ruptura aumentou em 41,75% quando da recuperação do dano de 30% da armadura de tração. Com um coeficiente de variação de 5,67%, o valor médio da carga de ruptura foi de 45,16 kN/m. Note-se a proximidade do coeficiente de variação da carga de ruptura com o coeficiente de variação da resistência do PRFC (ver tabela 7.1), indicando sua grande influência na ruptura da viga V3 recuperada do dano de 30%. A carga média de ruptura ficou 4,59% maior em relação à viga V3 original, sendo que o coeficiente de variação diminuiu de 8,51% (viga original) para 5,67% (viga recuperada). Uma queda na variabilidade da resposta de 33,37%, fazendo com que o índice de confiabilidade aumentasse em 34,31%. Diminuindo, desse modo, a probabilidade de falha da viga recuperada do dano de 30% em relação à viga original.

Um teste de Kolmogorov-Smirnov, com a obtenção do parâmetro de comparação de valor 0,0355, menor que o valor máximo para 1.000 amostras de 0,043, indica que a carga de ruptura da viga V3 recuperada do dano de 30% pode ser representada através de distribuição normal de probabilidade.

Nas figuras 7.35 e 7.36 são apresentadas, respectivamente, a convergência estatística da carga de ruptura da viga V3 recuperada do dano de 30%, e do seu coeficiente de variação.

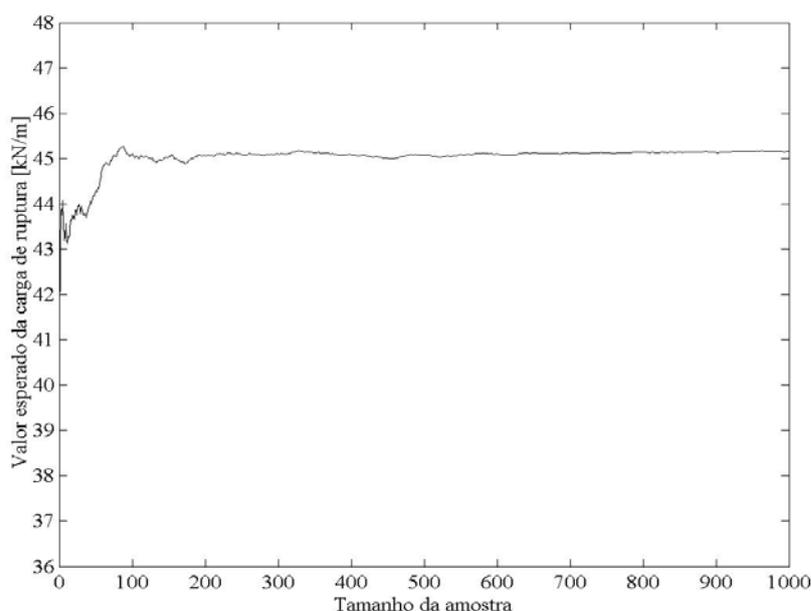


Figura 7.35 – Convergência estatística da carga de ruptura: viga V3 recuperada do dano de 30%

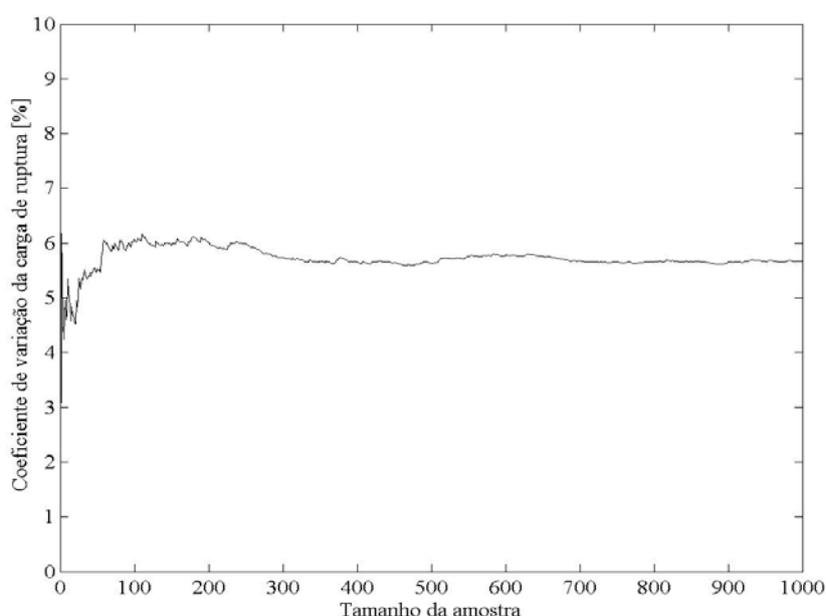


Figura 7.36 – Convergência do coeficiente de variação da carga de ruptura: viga V3 recuperada do dano de 30%

Um indicativo de queda na confiabilidade estrutural se obtém quando a função de probabilidade acumulada da resistência aproxima-se da função densidade de probabilidade do carregamento (ou efeito do carregamento). Este fato é observado nas figuras 7.37, 7.38 e 7.39. Para a situação original da viga V3, a região de sobreposição entre a função de probabilidade acumulada da resistência e a função densidade de probabilidade da solicitação nos indica uma baixíssima probabilidade de falha. Por outro lado, fica evidente através da observação das mesmas figuras a gradativa aproximação entre estas duas funções, aumentando a região de sobreposição, e gerando uma queda na confiabilidade estrutural com o aumento do dano da armadura. Para a situação onde o dano na armadura tracionada atinge os 30% fica mais evidente esta sobreposição. Desta maneira, é de fácil constatação a queda na confiabilidade das vigas de concreto armado com dano em suas armaduras tracionadas quando comparadas a sua situação original.

Quando se fez a recuperação das vigas danificadas as funções de probabilidade acumulada da resistência se afastaram novamente da função densidade de probabilidade da solicitação, indicando aumento de confiabilidade em relação às vigas danificadas. Observa-se nas figuras 7.37, 7.38 e 7.39 que as cargas médias de ruptura das vigas recuperadas dos danos de 10% e 20% ficaram próximas à carga de ruptura da viga original, sendo que para a recuperação dos 30% de dano a carga média de ruptura foi superior à situação original.

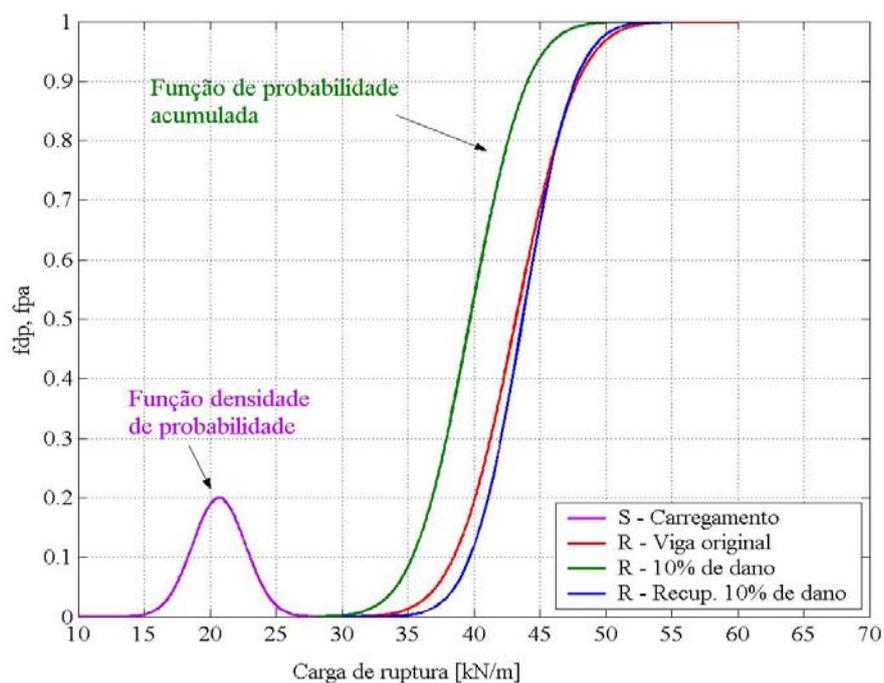


Figura 7.37 – Representação do problema R - S em termos de $f_S(s)$ e $F_R(r)$ – Viga V3 com 10% de dano

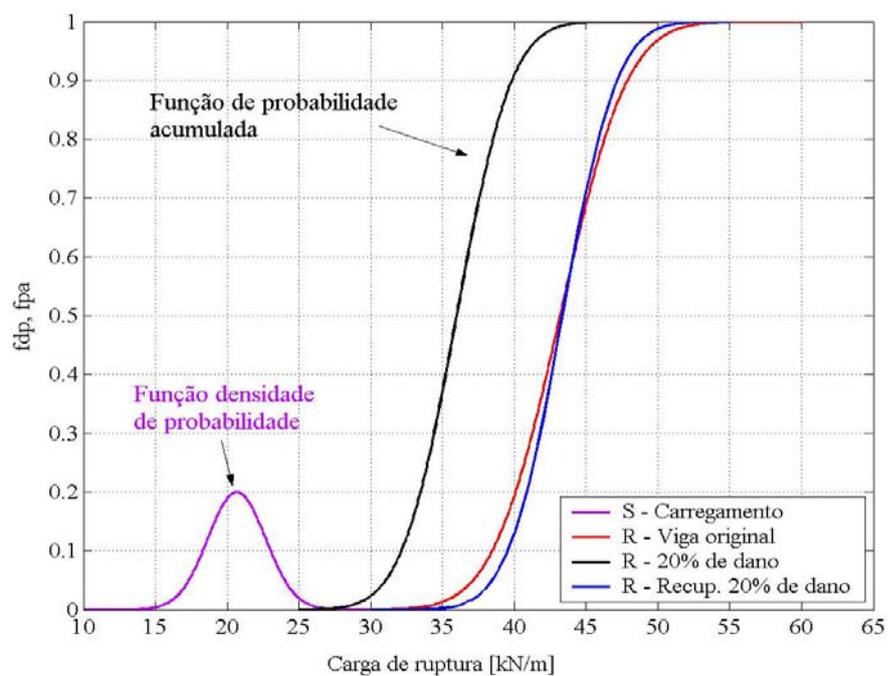


Figura 7.38 – Representação do problema R - S em termos de $f_S(s)$ e $F_R(r)$ – Viga V3 com 20% de dano

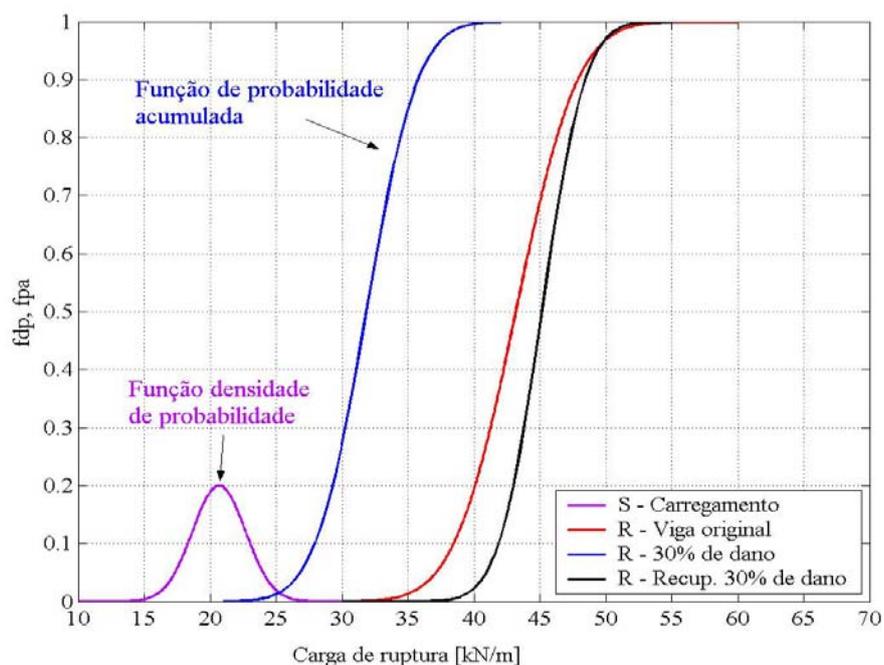


Figura 7.39 – Representação do problema R - S em termos de $f_S(s)$ e $F_R(r)$ – Viga V3 com 30% de dano

Na tabela 7.9 são mostrados todos os resultados obtidos das sete análises da viga V3, sendo que a mesma é representada graficamente através das figuras 7.40, 7.41, 7.42 e 7.43. É apresentada a variação, com o aumento do dano da armadura de tração, da carga média de ruptura e de seu coeficiente de variação, do índice de confiabilidade e da probabilidade de falha.

Tabela 7.9 – Análise probabilística da viga V3

Viga V3	Original	10% de dano		20% de dano		30% de dano	
		Danific.	Recup.	Danific.	Recup.	Danific.	Recup.
R_m [kN/m]	43,18	39,71	43,70	35,99	43,36	31,86	45,16
V_R [%]	8,51	8,60	7,13	8,34	6,84	9,56	5,67
β	5,45	4,75	6,37	4,23	6,41	3,06	7,32
P_f	$2,50 \times 10^{-8}$	$1,00 \times 10^{-6}$	$9,50 \times 10^{-11}$	$1,20 \times 10^{-5}$	$7,30 \times 10^{-11}$	$1,10 \times 10^{-3}$	$1,20 \times 10^{-13}$

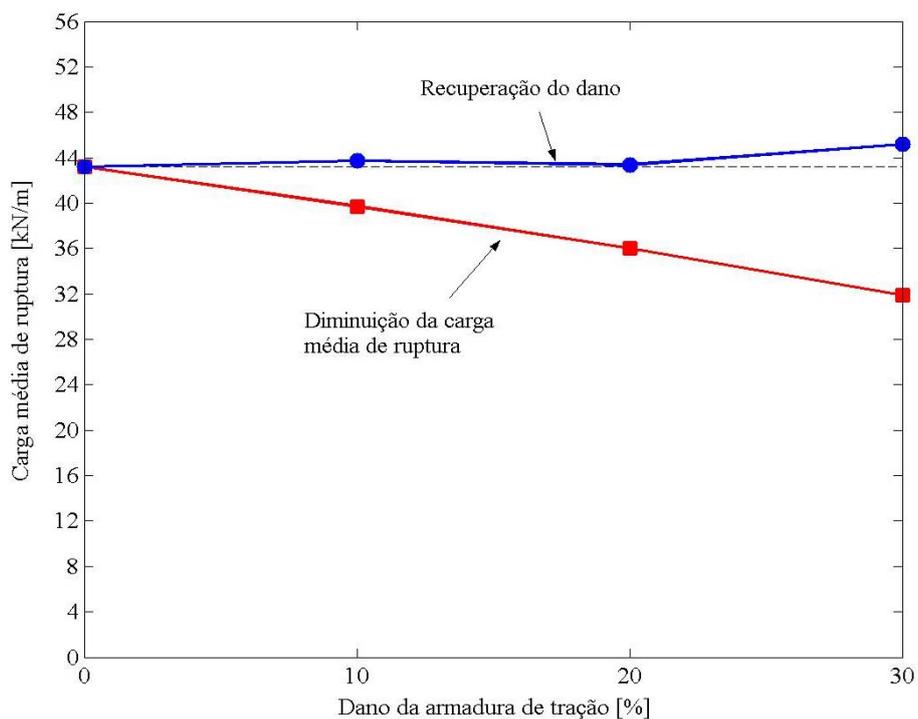


Figura 7.40 – Variação da carga média de ruptura com o dano: Viga V3

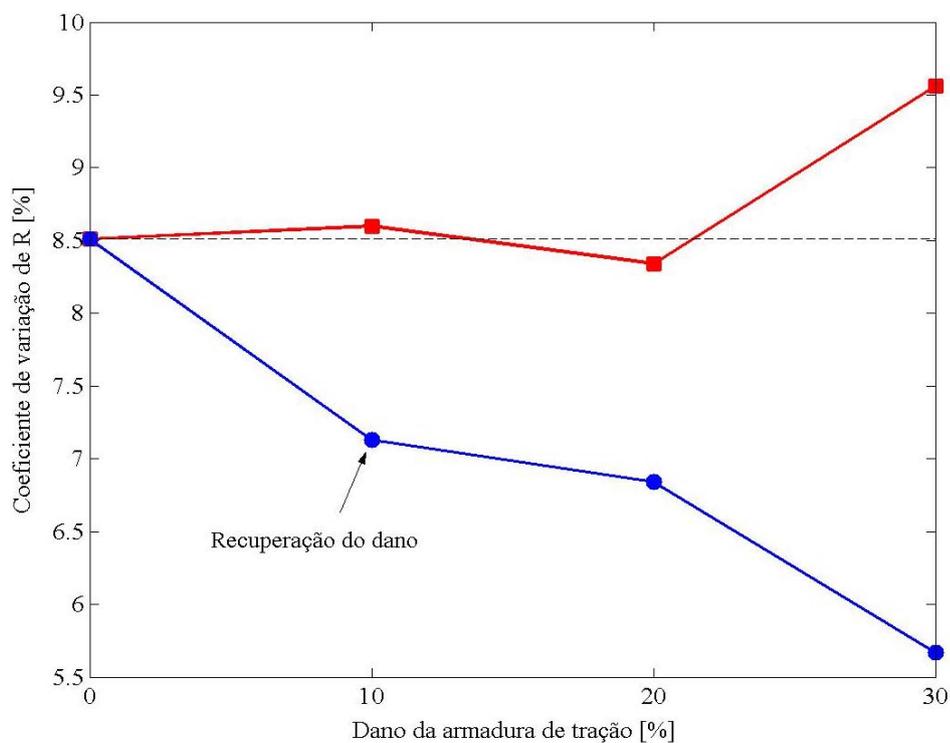


Figura 7.41 – Coeficiente de variação da carga de ruptura com o dano: Viga V3

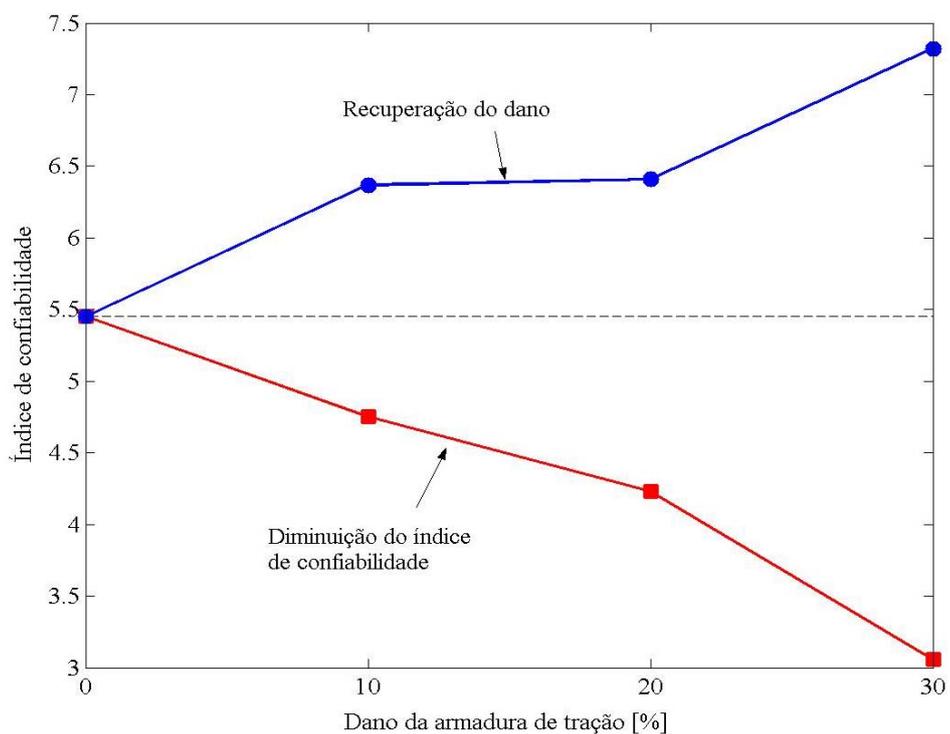


Figura 7.42 – Variação do índice de confiabilidade com o dano: Viga V3

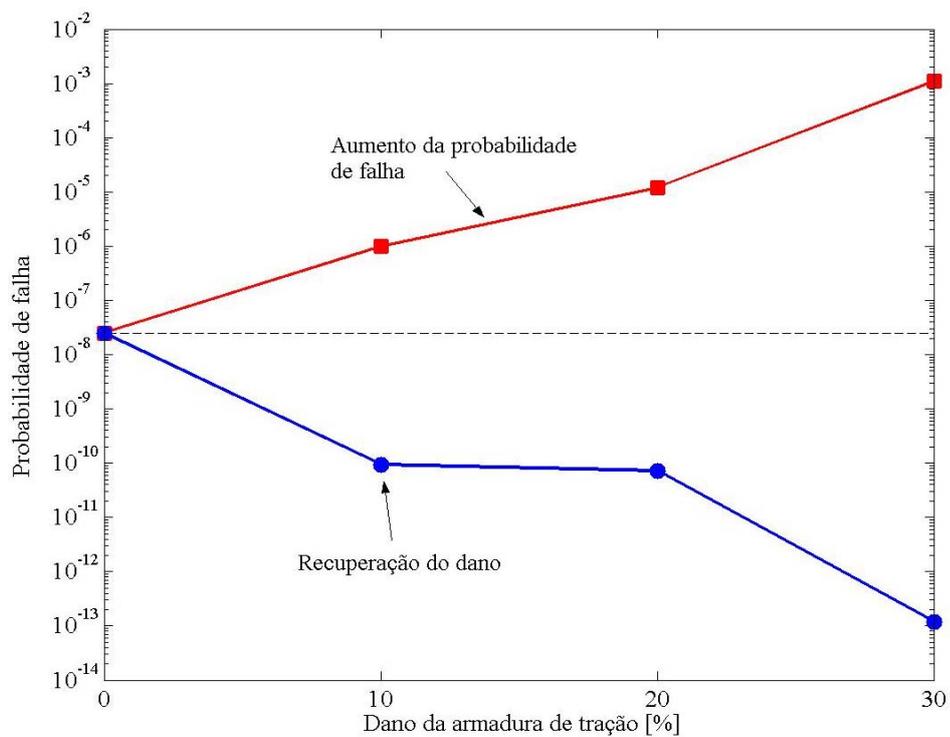


Figura 7.43 – Variação da probabilidade de falha com o dano: Viga V3

8 CONCLUSÕES

Neste trabalho foi apresentado um modelo de elementos finitos para a análise de vigas de concreto armado reforçadas ou recuperadas. Este modelo leva em consideração o efeito que o deslizamento entre o substrato de concreto e o reforço pode causar no modo de ruptura destes elementos estruturais. Através da análise conjunta do modelo com o método de simulação de Monte Carlo, tornou-se possível um estudo sobre a confiabilidade estrutural, no estado limite último de flexão, de vigas de concreto armado recuperadas de um dano sofrido, através da colagem de PRFC em sua face tracionada.

Através deste modelo, puderam ser estabelecidas algumas conclusões sobre o desempenho de vigas reforçadas com materiais compósitos à base de fibras de carbono ou chapas de aço. Também, considerações puderam ser formuladas sobre a confiabilidade alcançada em um projeto de recuperação estrutural seguindo as recomendações do *Bulletin 14* “Externally bonded FRP reinforcement for RC structures” da *Fédération Internationale du Béton (fib)*, 2001).

O modelo determinístico desenvolvido para a análise não-linear de estruturas de concreto armado reforçadas/recuperadas à flexão, submetidas a um estado plano de tensões, mostrou-se capaz de prever de forma bastante adequada as curvas *carga x deslocamento* das estruturas analisadas, bem como o modo e a carga de ruptura. Um valor médio de 0,97, com coeficiente de variação de aproximadamente 6%, foi obtido para a relação entre as cargas de ruptura experimentais e as cargas de ruptura obtidas através do modelo apresentado. Este valor é um indicativo da boa aproximação entre as cargas de ruptura obtidas experimentalmente e as cargas de ruptura da simulação numérica.

A aplicação do sistema de reforço conduz a melhorias significativas no desempenho de vigas de concreto armado. No que diz respeito às propriedades de resistência e rigidez, já é reconhecida a melhoria de desempenho em todas as fases de comportamento de uma estrutura (elástica, propagação de fissuras e escoamento da armadura) submetida a carregamentos monotonicamente crescentes até a ruptura.

Visando uma maior vida útil das estruturas, a aplicação de reforços externos pode conduzir a uma menor sensibilidade aos efeitos ambientais e conseqüentemente a uma maior durabilidade. Isso se deve ao fato das estruturas reforçadas apresentarem fissuras pouco espaçadas, e principalmente, com menor abertura em relação às vigas sem qualquer tipo de reforço estrutural.

Porém, na maioria dos casos de vigas de concreto armado reforçadas (ou recuperadas) à flexão, a carga de ruptura é limitada pela carga que provoca a falha no sistema de aderência entre o concreto e o reforço. Como conseqüência, a falha na aderência impede que o elemento estrutural alcance sua completa capacidade resistente aos esforços de flexão. Este tipo de falha está associado normalmente à transferência de tensões entre o concreto e o reforço, e tem como característica o modo de ruptura frágil, o qual é indesejável em estruturas de concreto armado. Dessa maneira, a ruptura da estrutura por falha na aderência é a principal motivação do desenvolvimento deste e de inúmeros trabalhos no campo do reforço de estruturas, buscando-se um melhor entendimento do comportamento da ligação entre estes materiais.

Quando foram avaliados os comportamentos de vigas de concreto armado reforçadas à flexão, ou com PRFC, ou com chapas de aço, foi observado um comportamento diferente em relação à distribuição das tensões de aderência.

Quando o reforço é feito em chapa de aço, uma tendência que se mostrou foi a de ser atingida a tensão máxima de aderência nas proximidades da extremidade da chapa. Este fato se deve, principalmente, a adoção de um comportamento elasto-plástico perfeito para o aço da chapa. Ao atingir sua tensão de escoamento, na região de maior sollicitação aos esforços de tração (região central), não é mais possível o acréscimo de tensão de tração nessa região da chapa. Não havendo variações nas tensões de tração no reforço, não surgirão tensões de aderência entre o substrato de concreto e a chapa de aço.

Para os casos em que o reforço se deu pela colagem de PRFC, dependendo de diversos fatores, sendo um dos principais a rigidez do mesmo, existe a tendência da tensão máxima de aderência ser atingida em regiões distantes da extremidade do reforço. O fato da máxima tensão de aderência ser atingida em zonas intermediárias se deve, principalmente, a transição de seções onde a armadura tracionada comporta-se elasticamente para seções com armadura em escoamento. Assim, nessa região de transição, o reforço passa a absorver uma parcela maior dos esforços de tração, gerando grandes variações de tensão ao longo do seu

comprimento. Desta maneira, surgirão valores acentuados na tensão de aderência que podem levar ao descolamento do sistema de reforço. Porém, com o aumento do número de lâminas, e conseqüentemente seu aumento de rigidez, existe a possibilidade da máxima tensão de aderência ser atingida na sua extremidade, fazendo com que o descolamento se inicie nas proximidades do apoio e se desenvolva na direção do centro do vão.

É importante observar-se que as propriedades mecânicas dos materiais, as dimensões da estrutura e os carregamentos apresentam sempre alguma variabilidade. No entanto, a maioria das pesquisas de estruturas reforçadas com PRFC tem sido feita de uma maneira determinística, e as variações estatísticas associadas aos principais parâmetros de projeto são usualmente ignoradas.

Para que uma norma técnica de projeto de reforço de estruturas com materiais compósitos seja elaborada dentro de critérios racionais que representem adequadamente o comportamento das estruturas, e que conduzam a um nível de confiabilidade desejável, as características aleatórias dos parâmetros envolvidos devem ser devidamente consideradas e estudadas.

Com os resultados obtidos através da análise probabilística das vigas de concreto armado recuperadas, apresentados no capítulo 7, podem ser formuladas algumas conclusões.

Os valores das cargas de ruptura obtidos através de uma análise determinística, utilizando-se as propriedades médias, ficaram próximos dos valores médios obtidos através das simulações de Monte Carlo.

Para que a confiabilidade atingida no projeto pudesse ser calculada através da formulação aplicada no método de simulação de Monte Carlo, tornava-se necessário que a função de estado limite, ou margem de segurança, definida como a diferença entre as resistências e as solicitações, tivesse uma distribuição normal de probabilidade. Para verificar se a margem de segurança pode ser representada por uma distribuição normal, em cada análise probabilística foram feitos testes de Kolmogorov-Smirnov (ANG e TANG, 1984a). Também, gráficos de probabilidade normal foram plotados. Através das análises destes resultados, pode-se afirmar que a resistência (carga de ruptura) e a margem de segurança estrutural das vigas analisadas, onde a carga permanente corresponde a 75% da carga total, seguem uma distribuição normal de probabilidade.

Para as vigas originais (não-danificadas), projetadas de acordo com a norma brasileira NBR 6118:2003 – Projeto de estruturas de concreto (ABNT, 2003), as probabilidades de falha

P_f atingiram valores perfeitamente aceitáveis. O Eurocode CEN ENV 1991-1 (CEN, 1994) fornece o valor de referência para β de 3,8, com uma correspondente probabilidade de falha de $7,2 \times 10^{-5}$. Considera-se este valor de referência para projetos de prédios residenciais, comerciais, hotéis e escolas, para o Estado Limite Último com período de vida útil de 50 anos. Para as vigas V1 e V2 a probabilidade de falha foi da ordem de 10^{-7} , com índice de confiabilidade β de 5,11 para V1 e 4,85 para V2. Já para a viga V3, a probabilidade de falha caiu para um valor da ordem de 10^{-8} com 5,45 de índice de confiabilidade. Desta maneira, quando seguidas às recomendações da NBR 6118:2003, consegue-se projetar estruturas de concreto armado com um bom nível de segurança, constatado pelos índices de confiabilidade maiores que o valor de referência $\beta=3,8$.

Quando as vigas foram submetidas às reduções de 10%, 20% e 30% na área da seção transversal da armadura longitudinal de tração, as cargas médias de ruptura diminuíram quase que linearmente, indicando que a queda da carga de ruptura é proporcional ao dano sofrido pela armadura. Os índices de confiabilidade também sofreram decréscimos quase que lineares com o aumento do dano da armadura. Por consequência disso, houve um aumento na probabilidade de falha das vigas danificadas em relação às vigas originais. Quando as vigas sofreram danos de 10% na armadura tracionada, os índices de confiabilidade ficaram entre 4,2 e 4,8, indicando um nível de confiabilidade aceitável quando comparado ao índice de confiabilidade de referência ($\beta=3,8$). Para os danos de 20% na armadura de tração, V1 e V2 apresentaram índices de confiabilidade muito próximos ao valor de referência, respectivamente 3,82 e 3,87. Entretanto, os casos onde a queda na confiabilidade foi mais pronunciada aconteceram para o dano de 30% da armadura de tração, onde o índice de confiabilidade ficou entre 2,9 e 3,10, gerando uma probabilidade de falha da ordem de 10^{-3} . Este valor indica um baixo grau de segurança das vigas danificadas em relação à ruptura, necessitando, deste modo, que se faça uma intervenção para sua recuperação estrutural.

O projeto de recuperação estrutural através do uso de PRFC, seguindo as recomendações do *Bulletin 14 (fib, 2001)*, fez com que as resistências médias das vigas fossem recuperadas ou ficassem muito próximas das resistências médias das vigas originais. Sendo este o objetivo quando uma estrutura apresenta um estado avançado de degradação e se toma a decisão de uma intervenção para a sua recuperação estrutural.

Tornou-se possível a constatação, através dos estudos probabilísticos, de que o coeficiente de variação das cargas de ruptura das vigas recuperadas, que é um parâmetro da

variabilidade da resposta em torno de um valor médio, sofreu uma redução quando comparado ao coeficiente de variação das cargas de ruptura das vigas originais. Para a viga V1, a maior queda no coeficiente de variação da viga original para a viga recuperada aconteceu na recuperação do dano de 30%, onde o mesmo diminuiu de 8,77% para 7,03%. Para a viga V2 a diminuição foi ainda maior, caiu de 9,40% para 7,05% na recuperação do dano de 30%. Entretanto, a maior queda no coeficiente de variação da carga de ruptura da viga original para a viga recuperada aconteceu na recuperação do dano de 30% da viga V3, onde houve diminuição de 8,51% para 5,67%. Este coeficiente de variação da carga de ruptura da viga recuperada ficou muito próximo do coeficiente de variação da resistência do PRFC, igual a 5%. Este fato é um indicador da importância que a variabilidade da resistência do material compósito exerce na resposta final da estrutura.

Devido ao fato da proximidade das cargas médias de ruptura das vigas recuperadas e das vigas originais, e das diminuições dos coeficientes de variação das cargas de ruptura das vigas recuperadas em relação às vigas originais, houve um aumento nos índices de confiabilidade das vigas originais para as vigas recuperadas. Para a viga V1, o maior aumento no índice de confiabilidade foi no caso em que o mesmo passou de 5,11 (situação original), para 5,69 na situação de recuperação do dano de 30%. Na análise da viga V2, o maior aumento ocorreu na recuperação do dano de 10%, onde o índice de confiabilidade aumentou de 4,85 (viga V2 original) para 5,69 (viga V2 recuperada do dano de 10%). Porém, o maior aumento entre todos, foi na recuperação do dano de 30% da viga V3, onde o índice de confiabilidade passou de 5,45 na situação original, para 7,32 quando recuperada do dano de 30%.

Pela proximidade das cargas médias de ruptura das vigas recuperadas e das vigas originais, e das diminuições dos coeficientes de variação das cargas de ruptura das vigas recuperadas em relação às vigas originais, houve queda na probabilidade de falha das vigas recuperadas em relação às vigas originais.

A maior confiabilidade da viga V3 recuperada do dano de 30%, em relação às outras vigas, pode ser explicado pelo fato de ser a viga onde se fez uso da maior área de seção transversal de PRFC para a recuperação da capacidade de carga original, onde se utilizou uma área de $0,2880 \text{ cm}^2$. Deste modo, como já dito acima, houve uma diminuição em 33,37% no coeficiente de variação da carga de ruptura da viga original para a viga recuperada, ficando ele próximo ao coeficiente de variação da resistência do material compósito, que é de 5%. Assim, devido a grande influência da resistência do PRFC na ruptura da estrutura, e por

possuir uma variabilidade menor quando comparado ao aço (10%), e a resistência à compressão do concreto (15%), obteve-se uma menor variabilidade da resposta em relação ao seu valor médio, tornando a estrutura mais confiável.

A apresentação gráfica da interação entre a função de probabilidade acumulada da resistência e a função densidade de probabilidade da solicitação torna-se relevante no sentido de fornecer uma medida qualitativa da probabilidade de falha da estrutura ou do elemento estrutural. Mostrou-se graficamente que conforme aumenta o dano na armadura, a função de probabilidade acumulada da resistência aproxima-se cada vez mais da função densidade de probabilidade da solicitação, gerando um aumento na probabilidade de falha. Por outro lado, ao se recuperar as vigas a função de probabilidade acumulada da resistência volta a afastar-se da função densidade de probabilidade da solicitação, aproximando-se da função de probabilidade acumulada da resistência da viga na situação original.

Em consequência de tudo que foi dito acima, pode-se concluir que as vigas que possuem PRFC colado externamente, colaborando na absorção de esforços de tração, tornam-se mais confiáveis em relação às vigas onde o elemento resistente aos esforços de tração é puramente o aço estrutural.

É importante salientar que os valores de β relativamente altos em relação ao valor de referência, servem para avaliar o grau de segurança das vigas dentro das hipóteses formuladas nas análises. Para análises mais realistas, que apresentassem índices de confiabilidade mais próximos ao valor de referência, deveriam ser somados às hipóteses formuladas outros parâmetros que influenciam a confiabilidade da estrutura ou do elemento estrutural. Devido à escassez de dados que representem as características aleatórias da interface entre o concreto e o sistema de reforço, optou-se, para a representação desta variável, por uma distribuição normal com coeficiente de variação próximo ao coeficiente de variação da resistência do concreto. As variações das propriedades geométricas das vigas também deveriam ser consideradas nas análises, dando ênfase maior à variação da posição da armadura tracionada de flexão. A resistência das estruturas de concreto armado normalmente diminuem com o passar dos anos, assim, os índices de confiabilidade deveriam ser calculados para um certo período de tempo. Também, a variação do carregamento com o tempo pode influenciar na confiabilidade estrutural. Outro fator importante nas análises probabilísticas é a relação entre a carga permanente e a carga variável na composição da carga total. Para os casos em que a carga variável é predominante na carga total, acredita-se que deverá haver um decréscimo de confiabilidade devido a maior variabilidade apresentada pela carga variável. Finalizando, os

erros de modelo para o cálculo da resistência, oriundos de simplificações, hipóteses inadequadas e de conhecimento, devem fazer parte da análise de confiabilidade.

Dentro deste contexto, a recuperação estrutural de vigas de concreto armado que por algum motivo sofreram danos e ficaram prejudicadas na sua capacidade de absorção de esforços, seguindo as recomendações para o cálculo da área da seção transversal necessária de PRFC, presentes no *Bulletin 14 “Externally bonded FRP reinforcement for RC structures”* da *Fédération Internationale du Béton (fib, 2001)*, nos permite alcançar muito bom nível de segurança. Consegue-se, desse modo, que a confiabilidade inicial da estrutura seja recuperada ou aumentada pela presença do PRFC.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABNT - ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **Projeto de estruturas de concreto – Procedimento: NBR 6118**. Rio de Janeiro, Mar. 2003.

ACI - AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. **Building Code Requirements for Structural Concrete**. ACI Committe 318. Farmington Hills, 1999.

ACI - AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. **Guide for the design and construction of externally bonded FRP systems for strengthening concrete structures**. ACI Committee 440. Detroit, Jul. 2002.

ADHIKARY, B. B.; MUTSUYOSHI, H. Numerical simulation of steel-plate strengthened concrete beam by a non-linear finite element method model. **Construction and Building Materials**, v.16, p.291-301, 2002.

ANG, A. H-S.; TANG, W. H. **Probability concepts in engineering planning and design. Volume I: Basic principles**. New York, John Wiley & Sons, 1984a.

ANG, A. H-S.; TANG, W. H. **Probability concepts in engineering planning and design. Volume II: Decision, risk, and reliability**. New York, John Wiley & Sons, 1984b.

APRILE, A.; SPACONE, E.; LIMKATANYU, S. Role of bond in RC beams strengthened with steel and FRP plates. **Journal of Structural Engineering**, v.127, n.12, p.1445-1452, Dec. 2001.

ARAÚJO, J. M.; CAMPOS FILHO, A. Modelo bidimensional para análise de vigas de concreto armado. **Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas**, Lisboa, v.34, p.9-12, jul. 1992.

ARDUINI, M.; Di TOMMASO, A.; NANNI, A. Brittle failure in FRP plate and sheet bonded beams. **ACI Structural Journal**, v.94, n.4. p.363-370, Jul-Aug. 1997.

ASCIONE, L.; FEO, L. Modeling of composite/concrete interface of RC beams strengthened with composite laminates. **Composites: Part B**, v.31, p.535-540, 2000.

AUBERT, M. M. **Analysis and design in the linear elastic range of reinforced concrete flexural members externally bonded with FRP sheets**. Master's Thesis, Penn State University, University Park, 1995.

AURICH, M. **Modelo da ligação entre concreto e armadura na análise de estruturas de concreto pelo método dos elementos finitos**. Porto Alegre: PPGEC/UFRGS, 2001. 132p. Dissertação de Mestrado em Engenharia.

BATHE, K. **Finite element procedures in engineering analysis**. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1982.

BEBER, A. J. **Avaliação do desempenho de vigas de concreto armado reforçadas com lâminas de fibra de carbono**. Porto Alegre: PPGEC/UFRGS, 1999. 108p. Dissertação de Mestrado em Engenharia.

BEBER, A. J.; CAMPOS FILHO, A.; CAMPAGNOLO, J. L. Reforço de estruturas de concreto com tecidos de fibra de carbono. In: JORNADAS SUDAMERICANAS DE INGENIERIA ESTRUCTURAL. Punta Del Este, Uruguai, Nov. 2000.

BEBER, A. J. **Comportamento estrutural de vigas de concreto armado reforçadas com compósitos de fibra de carbono**. Porto Alegre: PPGEC/UFRGS, 2003. 317p. Tese de doutorado em engenharia.

BLASCHKO, M. Strengthening with CFRP. **Münchner Massivbau Seminar**. München, German, 1997.

BREÑA, S. F.; BRAMBLETT, R. M.; WOOD, S. L.; KREGER, M. E. Increasing flexural capacity of reinforced concrete beams using carbon fiber-reinforced polymer composites. **ACI Structural Journal**, v.100, n.1, p.36-46, Jan-Feb. 2003.

BUYLE-BODIN, F.; DAVID, E.; RAGNEAU, E. Finite element modeling of flexural behaviour of externally bonded CFRP reinforced concrete structures. **Engineering Structures**, v.24, p.1423-1429, 2002.

CAMPAGNOLO, J. L.; CAMPOS FILHO, A.; SILVA FILHO, L. C. P. Estudo teórico-experimental sobre vigas de concreto armado reforçadas. In: CONGRESSO IBEROAMERICANO DE PATOLOGIA DAS CONSTRUÇÕES, 4., 1997, Porto Alegre. **Anais...** Porto Alegre, UFRGS/CPGEC, 1997. 2v. v2, p 127-134.

CAMPAGNOLO, J. L.; SILVA FILHO, L. C. P.; BEBER, A. J. **Técnicas de reforço e recuperação de estruturas de concreto armado**. UFRGS, Caderno LEME/08, 1999.

CEN – EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION. **Basis of Design and Actions on Structures - Part 1: Basis of Design**. CEN ENV 1991-1, 1994.

CHEN, W. F.; SALEB; A. F. **Constitutive equations for engineering materials**. New York, John Wiley & Sons, 1982.

COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BETON. **Assessment on Concrete Structures and Design Procedures for Upgrading**. Bulletin d'Information n.162, 1983. 288p.

COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BETON. **CEB-FIP model code 1990; design code**. London, Thomas Telford Services, 1993. 437p.

DARWIN, D.; PECKNOLD, D. A. Analysis of cyclic loading of plane structures. **Computers & Structures**, v.7, p.137-147, 1977a.

DARWIN, D.; PECKNOLD, D. A. Nonlinear biaxial stress-strain law for concrete. **Journal of Engineering Mechanics Division**, v.103, p.229-241, Apr. 1977b.

DARWIN, D. Reinforced Concrete. In: ISENBERG, J. (Ed.). **Finite element analysis of reinforced concrete**. New York, ASCE, June 2-5, p.203-232, 1991.

DENG, J.; LEE, M. M. K.; MOY, S. S. J. Stress analysis of steel beams reinforced with a bonded CFRP plate. **Composites Structures**, v.65, p.205-215, 2004.

DEURING, M. **Strengthening of RC with prestressed fiber reinforced plastic sheets**. EMPA Research Report 224, Dübendorf, Switzerland, 1993.

DINIZ, S. M. C. A confiabilidade estrutural e a evolução das normas técnicas. In: VI SIMPÓSIO EPUSP SOBRE ESTRUTURAS DE CONCRETO, **Anais...** São Paulo, 2006.

EL-MIHILMY, M. T.; TEDESCO, J. W. Analysis of reinforced concrete beams strengthened with FRP laminates. **Journal of Structural Engineering**, v.126, n.6, p.684-691, Jun. 2000.

ELWI, A. E.; HRUDEY, T. M. Finite element model for curved embedded reinforcement. **Journal of Engineering Mechanics Division**, v.115, p.740-745, Apr. 1989.

EMMONS, P. H.; VAYSBURD, A. M.; THOMAS, J. Strengthening concrete structures, part I. **Concrete International**, Detroit, ACI, v.20, n.3, p.53-58, Mar. 1998.

EMMONS, P. H.; VAYSBURD, A. M.; THOMAS, J. Strengthening concrete structures, part II. **Concrete International**, Detroit, ACI, v.20, n.4, p.56-60, Apr. 1998.

FÉDÉRATION INTERNATIONALE DU BÉTON. **Externally bonded FRP reinforcement for RC Structures**. Bulletin 14, Lausanne, Switzerland, 2001.

FERRARI, V. J.; PADARATZ, I. J.; LORIGGIO, D. D. Reforço à flexão em vigas de concreto armado com manta de fibra de carbono: mecanismos de incremento de ancoragem. In: 44º CONGRESSO BRASILEIRO DO CONCRETO, **Anais...** Belo Horizonte, Minas Gerais, Ago. 2002.

FORTES, A. S.; PADARATZ, I. J. Vigas de concreto armado reforçadas com polímero reforçado com fibras de carbono (PRFC). In: 42º CONGRESSO BRASILEIRO DO CONCRETO, **Anais...** Fortaleza, 2000.

FORTES, A. S.; PADARATZ, I. J.; BARROS, J. A. O. Projeto de reforço à flexão com FRP baseado nas recomendações do ACI 440. In: JORNADAS SUL-AMERICANAS DE ENGENHARIA ESTRUTURAL, **Anais...** Brasília, Brasil, Mai. 2002.

GALAMBOS, T. V.; ELLINGWOOD, B.; MacGREGOR, J.G.; CORNELL, A. Probability based load criteria: Assessment of current design practice. **Journal of the Structural Division**, v.108, p.959-977, May. 1982.

GARCEZ, M. R.; MENEGHETTI, L. C.; CAETANO, L. F.; CAMPAGNOLO, J. L.; SILVA FILHO, L. C. P. Utilização de fibras de alto desempenho como reforço a flexão em vigas de concreto armado. In: VIII CONGRESSO LATINOAMERICANO DE PATOLOGIA DE LA CONSTRUCCIÓN, **Anais...** v.2, p.65-72, Asunción, Paraguay, 2005.

GARDEN, H. N.; HOLLAWAY, L. C. An experimental study of the influence of plate end anchorage of carbon fibre composite plates used to strengthen reinforced concrete beams. **Composite Structures**, v.42, p.175-188, 1998.

GILBERT, R. I.; WARNER, R. F. Tension stiffening in reinforced concrete slabs. **Journal of the Structural Division**, v.104, p.1885-1900, Dec. 1978.

GRAZIANO, F. P. **Projeto e execução de estruturas de concreto armado**. São Paulo, O Nome da Rosa Editora Ltda, 1ed., Nov. 2005.

HINTON, E.; OWEN, D. R. J. **Finite element programming**. London, Academic Press, 1977.

HOLLAWAY, L. C.; LEEMING, M. B. **Strengthening of reinforced concrete structures using externally bonded FRP composites in structural and civil engineering**. 1ed. Cambridge: Woodhead Publishing Limited, 1999. 327p.

JANSZE, W. **Strengthening of reinforced concrete members in bending by externally bonded steel plates**. Netherlands, 1997, PhD dissertation.

JAPAN SOCIETY OF CIVIL ENGINEERS. **Recommendation for design and construction of concrete structures using continuous fiber reinforcing materials**. JSCE, Concrete engineering series 23, 1997.

JONES, R.; SWAMY, R. N.; ANG, T. H. Under and over-reinforced concrete beams with glued steel plates. **The International Journal of Cement and Lightweight Concrete**, v.4, n.1, p.19-32, Feb. 1982.

JONES, R.; SWAMY, R. N.; CHARIF, A. Plate separation and anchorage of reinforced concrete beams strengthened by epoxy-bonded steel plates. **The Structural Engineer**, v.66, n.5, p.85-94, Mar. 1988.

KUPFER, H. B.; GERSTLE, K. H. Behavior of concrete under biaxial stresses. **Journal of Engineering Mechanics**, v.99, p.853-866, Aug. 1973.

LI, L. J.; GUO, Y. C.; LIU, F.; BUNGEY, J. H. An experimental and numerical study of the effect of thickness and length of CFRP on performance of repaired reinforced concrete beams. **Construction and Building Materials**, *available online*, Aug. 2005.

MACHADO, A. P. **Reforço de estruturas de concreto armado com fibras de carbono – características, dimensionamento e aplicação**. São Paulo: Pini, 2002.

MATTHIES, H.; STRANG, G. The solution of nonlinear finite element equations. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.14, p.1613-1626, 1979.

McKENNA, J. K.; ERKI, M. A. Strengthening of reinforced concrete flexural members using externally applied steel plates and fibre composite sheets – a survey. **Canadian Journal of Civil Engineering**, v.21, p.16-24, 1994.

MEIER, U. Carbon fiber-reinforced polymers: modern materials in bridge engineering. **Structural Engineering International**, v.1, p.7-12, 1992.

MELCHERS, R. E. **Structural reliability: Analysis and prediction**. New York, John Wiley & Sons, 1987.

MOLINA, M.; GUTIERREZ, J. P.; LÓPEZ, C. Refuerzo estructural de elementos de hormigón armado a flexión mediante bandas de CFRP. In: VIII CONGRESSO

LATINOAMERICANO DE PATOLOGIA DE LA CONSTRUCCIÓN, **Anais...** v.2, p.129-136, Asunción, Paraguay, 2005.

NORRIS, T.; SAADATMANESH, H.; EHSANI, M. R. Shear and flexural strengthening of R/C beams with carbon fiber sheets. **Journal of Structural Engineering**, New York, ASCE. v.123, n.7, p.903-911, Jul. 1997.

OEHLERS, D. J.; MORAN, J. P. Premature failure of externally plated reinforced concrete beams. **Journal of Structural Engineering**, v.116, n.4, p.978-995, Apr. 1990.

OEHLERS, D. J.; MOHAMED, A. M. S.; LUO, W. Upgrading continuous reinforced concrete by gluing steel plates to their tension faces. **Journal of Structural Engineering**, v.124, n.3, p.224-232, 1998.

OKEIL, A. M.; EL-TAWIL, S.; SHAHAWY, M. Flexural reliability of reinforced concrete bridge girders strengthened with carbon fiber-reinforced polymer laminates. **Journal of Bridge Engineering**, v.7, n.5, p.290-299, Sept-Oct. 2002.

OWEN, D. R. J.; HINTON, E. **Finite elements in plasticity: theory and practice**. Swansea, Pineridge Press, 1980.

PALIGA, C. M.; CAMPOS FILHO, A.; REAL, M. V. Análise estatística de viga de concreto armado reforçada à flexão pela colagem externa de lâminas de fibras de carbono. In: XXV IBERIAN LATIN-AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING, **Anais...** Recife, Pernambuco, 2004.

PERERA, R.; RECUERO, A.; De DIEGO, A.; LÓPEZ, C. Adherence analysis of fiber-reinforced polymer strengthened RC beams. **Computers & Structures**, v.82, p.1865-1873, Sep-Oct. 2004.

PEŠIĆ, N.; PILAKOUTAS, K. Concrete beams with externally bonded flexural FRP-reinforcement: analytical investigation of debonding failure. **Composites Part B**, v.34, p.327-338, 2003.

PINTO, C. T. M. P. **Reforço à flexão de vigas de concreto armado com fibras de carbono**. Rio de Janeiro: COPPE/UFRJ, 2000. 142 p. Dissertação de mestrado em engenharia.

PLEVRIS, N.; TRIANTAFILLOU, T. C.; VENEZIANO, D. Reliability of RC members strengthened with CFRP laminates. **Journal of Structural Engineering**, v.121, n.7, p.1037-1044, Jul. 1995.

POPOV, E. P. **Resistência dos materiais; versão SI**. 2.ed., Rio de Janeiro, Prentice-Hall do Brasil, 1984.

PRATES JÚNIOR, N. **Um modelo elasto-viscoplástico para análise de peças de concreto estrutural, submetidas a estados planos de tensão, através do método dos elementos finitos**. Porto Alegre: PPGEC/UFRGS, 1992. 131p. Dissertação de Mestrado em Engenharia.

RAHIMI, H.; HUTCHINSON, A. Concrete beams strengthened with externally bonded FRP plates. **Journal of Composites for Construction**, v.5, n.1, p. 44-56, Feb. 2001.

REAL, M. V. **Análise probabilística de estruturas de concreto armado, sob estado plano de tensão, através do método dos elementos finitos**. Porto Alegre: PPGEC/UFRGS, 2000. 249p. Tese de doutorado em engenharia.

REAL, M. V.; CAMPOS FILHO, A.; PALIGA, C. M. Estudo da variabilidade da resposta estrutural de vigas de concreto armado reforçadas com laminados de fibra de carbono. In: 46º CONGRESSO BRASILEIRO DO CONCRETO, **Anais...** Florianópolis, Santa Catarina, 2004.

RITCHIE, P. A.; THOMAS, D. A.; LU, L.; CONNELLY, G. M. External reinforcement of concrete beams using fiber reinforced plastics. **ACI Structural Journal**, Detroit, v.88, n.4, p.490-500, Jul-Aug. 1991.

ROBERY, P.; INNES, C. Carbon fibre strengthening of concrete structures. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON STRUCTURAL FAULTS AND REPAIR, 7., 1997, Edinburgh. **Proceedings...** Edinburgh: Engineering Technics Press, 1997. 3v. v.1, p.197-208.

ROSS, C. A.; JEROME, D. M.; TEDESCO, J. W.; HUGHES, M. L. Strengthening of reinforced concrete beams with externally bonded composite laminates. **ACI Structural Journal**, v.96, n.2, p.212-220, Mar-Apr. 1999.

SAADATMANESH, H.; EHSANI, M. R. Fiber composite plates can strengthen beams. **Concrete International**, Detroit, ACI, v.3, p.65-71, Mar. 1990.

SALLABERRY, R. D. **Limite de deformação das fibras de carbono usadas no reforço à flexão de vigas de concreto armado**. Rio de Janeiro: COPPE/UFRJ, 2005. 162p. Dissertação de mestrado em engenharia.

SANTOS, A. C. D. **Ensaio para análise da interface entre o concreto e polímero reforçado com fibra**. São Paulo: Escola Politécnica da USP, 2003. Tese de doutorado em engenharia.

SCHWARTZ, M. M. **Composite materials handbook**. New York: McGraw-Hill, 1984.

SHAHAWY, M. A.; BEITELMAN, T.; AROCKIASAMY, M.; SOWRIRAJAN, R. Experimental investigation on structural repair and strengthening of damaged prestressed concrete slabs utilizing externally bonded carbon laminates. **Composites Part B**, v.27, p.217-224, 1996a.

SHAHAWY, M. A.; AROCKIASAMY, M.; BEITELMAN, T.; SOWRIRAJAN, R. Reinforced concrete rectangular beams strengthened with CFRP laminates. **Composites Part B**, v.27, p.225-233, 1996b.

SHINOZUKA, M.; DEODATIS, G. Simulation of multidimensional gaussian stochastic fields by spectral representation. **Applied Mechanics Review**, v.49, n.1, p.29-53, Jan. 1996.

SILVA, P. A. S. C. M. **Modelação e análise de estruturas de betão reforçadas com FRP**. Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 1999. 254 p. Dissertação de Mestrado em Engenharia.

SILVA, A. O. B.; MORENO JÚNIOR, A. L. Reforço à flexão em vigas de concreto de alta resistência através da colagem externa de manta de PRFC. In: DAMSTRUC, 2000.

SPACONE, E.; LIMKATANYU, S. Responses of reinforced concrete members including bond-slip effects. **ACI Structural Journal**, v.97, n.6, p.831-839, Nov-Dec. 2000.

STRICKLIN, J. A.; HEISLER, W. E.; VON RUSMAN, W. Evaluation of solution procedures for material and/or geometrically non-linear structural analysis. **Journal of the A.I.A.A.**, v.11, n.3, p.292-299, 1973.

SWAMY, R. N.; JONES, R.; BLOXHAM, J. W. Structural behaviour of reinforced concrete beams strengthened by epoxy-bonded steel plates. **The Structural Engineer**, London, v. 65A, n.2, p.59-68, Feb. 1987.

THOMSEN, H.; SPACONE, E.; LIMKATANYU, S.; CAMATA, G. Failure mode analyses of reinforced concrete beams strengthened in flexure with externally bonded fiber-reinforced polymers. **Journal of Composites for Construction**, v.8, n.2, p.123-131, Apr. 2004.

TRIANAFILLOU, T. C. Strengthening of Structures with Advanced FRPs. In: PROGRESS IN STRUCTURAL ENGINEERING AND MATERIALS, v.1, n.2, p.126-134, 1998a.

TRIANAFILLOU, T. C.; PLEVRIS, N. Strengthening of R/C beams with epoxy bonded fiber composite materials. **Materials and Structures**, v.25, p.201-211, 1992.

UDOEYO, F. F.; UGBEM, P. I. Dimensional variations in reinforced-concrete members. **Journal of Structural Engineering**, v.121, n.12, p.1865-1867, Dec. 1995.

YAMAGUCHI, T.; KATO, Y.; NISHIMURA, T.; UOMOTO, T. Creep rupture of FRP rods made of aramid, carbon and glass fibers. In: **THIRD INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON NON-METALLIC (FRP) REINFORCEMENT FOR CONCRETE STRUCTURES (FRPRCS-3)**, v.2, Japan Concrete Institute, Tokyo, Japan, p.179-186, 1997.

ZARNIC, R.; GOSTIC, S.; BOSILJKOV, V.; BOKAN- BOSILJKOV, V. Improvement of bending load-bearing capacity by externally bonded plates. Proc., **CREATING WITH CONCRETE**, Thomas Telford, London, p.433-442, 1999.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The finite element method. Volume 1: basi formulation and linear problems**. 4.ed., London, McGraw-Hill International, 1989.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The finite element method. Volume 2: fluid mechanics, dynamics and non-linearity**. 4.ed., London, McGraw-Hill International, 1991.

ZIRABA, Y. N.; BALUCH, M. H. Computational model for reinforced concrete beams strengthened by epoxy steel plates. **Finite Elements in Analysis and Design**, v.20, p.253-271, 1995.