

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

BRUNO NERVIS

**EQUACIONAMENTO ANALÍTICO DE UMA ANTENA
MONOCÔNICA APLICADA A RADIOENLACES
RECÍPROCOS NO DOMÍNIO DO TEMPO**

Porto Alegre
2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

BRUNO NERVIS

**EQUACIONAMENTO ANALÍTICO DE UMA ANTENA
MONOCÔNICA APLICADA A RADIOENLACES
RECÍPROCOS NO DOMÍNIO DO TEMPO**

Projeto de Diplomação apresentado ao
Departamento de Engenharia Elétrica da Universidade
Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos
para Graduação em Engenharia Elétrica.

ORIENTADOR: Prof. Álvaro Augusto Almeida de Salles

Porto Alegre
2015

CIP - Catalogação na Publicação

Nervis, Bruno

Equacionamento analítico de uma antena monocônica aplicada a radioenlaces recíprocos no domínio do tempo / Bruno Nervis. -- 2015.

100 f.

Orientador: Álvaro Augusto Almeida de Salles.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação) -- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Escola de Engenharia, Curso de Engenharia Elétrica, Porto Alegre, BR-RS, 2015.

1. Eletromagnetismo. 2. Banda Ultra Larga. 3. Antenas. I. Salles, Álvaro Augusto Almeida de, orient. II. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

BRUNO NERVIS

**EQUACIONAMENTO ANALÍTICO DE UMA ANTENA
MONOCÔNICA APLICADA A RADIOENLACES
RECÍPROCOS NO DOMÍNIO DO TEMPO**

Este projeto foi julgado adequado para fazer jus aos créditos da Disciplina de “Projeto de Diplomação”, do Departamento de Engenharia Elétrica e aprovado em sua forma final pelo Orientador e pela Banca Examinadora.

Orientador: _____

Prof. PhD. Álvaro Augusto Almeida de Salles

PhD University College of London, UK

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Hamilton Duarte Klimach, UFRGS

Doutor pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul – Porto Alegre, Brasil

Prof. Ms. Sérgio Luiz Schubert Severo, IFSUL

Mestre pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul – Porto Alegre, Brasil

Porto Alegre, novembro de 2015

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais e irmã, pelo apoio basilar e incondicional.

Aos colegas e amigos do curso, que possibilitaram discussões que enriqueceram este e outros trabalhos, assim como a mim mesmo como indivíduo.

Aos colegas do LACOM, pelo incentivo aos estudos da área e compartilhamento de suas experiências.

Ao CNPq pelas bolsas que incentivaram meus trabalhos no laboratório.

RESUMO

Neste trabalho é realizado um equacionamento analítico da antena monocônica de tamanho finito. As equações de Maxwell são resolvidas em um sistema de coordenadas esféricas, onde o cone da antena coincide com a superfície cônica do sistema de coordenadas esféricas e impõe condições de contorno de condutor elétrico perfeito. O tamanho finito também cria uma zona de transição de impedância, na qual os campos elétricos e magnéticos da região da antena e da região externa devem ser contínuos. Os campos elétricos e magnéticos são descritos por um somatório infinito de produtos de funções de Legendre associadas e de funções de Bessel. A descrição dos campos obtida permite a construção de diagramas de irradiação para diferentes comprimentos elétricos da antena e diversos ângulos de abertura. A impedância de entrada e o ganho relativo são calculados para diversos comprimentos elétricos. É realizada uma discussão acerca da tecnologia de banda ultra larga e a possibilidade do uso desta antena para esta tecnologia. Também é realizada uma discussão acerca da reciprocidade dos diagramas de radiação de recepção e transmissão nos domínios do tempo e da frequência, e da importância desta na tecnologia de banda ultra larga.

Palavras-chaves: Engenharia Elétrica. Eletromagnetismo. Banda Ultra Larga. Antenas.

ABSTRACT

In this work an analytical mathematical development of a finite length monocone antenna is achieved. Maxwell's equations are solved in the spherical coordinate system, where the antenna cone is coincident with the conical surface present in this coordinate system and imposes perfect electrical conductor boundary conditions. The finite length creates an impedance transition zone at the end of the antenna, in which the electrical and magnetic fields must be continuous. These fields are described by an infinite sum of products of Bessel and Legendre associated functions. Radiation patterns for four electrical lengths and two aperture angles are calculated based on this description. The input impedance and the antenna gain are calculated for several electrical lengths. A discussion about ultra wide band technology and the possible uses of the antenna on this technology is done. A discussion about the time and frequency domain reciprocity of the receive and transmission patterns and their importance in ultra wide band technology is also done.

Keywords: Electrical Engineering. Electromagnetism. Ultra wideband. Antennas.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	ANTENAS DE BANDA ULTRA LARGA.....	12
1.2	HISTÓRICO DAS ANTENAS CÔNICAS	13
1.3	RECIPROCIDADE NO TEMPO E NA FREQUÊNCIA.....	15
1.4	OBJETIVOS E LIMITAÇÕES.....	16
1.5	ESTRUTURA DESTE TRABALHO	16
2	TECNOLOGIA UWB	18
2.1	USO DO ESPECTRO ELETROMAGNÉTICO NA TECNOLOGIA UWB.....	18
2.2	ANTENAS DE BANDA ULTRA LARGA.....	19
2.3	APLICAÇÕES DE BANDA ULTRA LARGA	20
3	EQUAÇÕES DE MAXWELL EM COORDENADAS ESFÉRICAS	22
3.1	EQUAÇÕES DE MAXWELL EM COORDENADAS ESFÉRICAS	22
3.2	ONDAS EM COORDENADAS ESFÉRICAS: TE, TM E TEM.....	23
3.3	ONDAS TE E TM.....	24
3.3.1	Considerações preliminares	24
3.3.2	Equações de Maxwell simplificadas para ondas TM	25
3.3.3	Equações de Maxwell simplificadas para ondas TE	26
3.3.4	Separação de variáveis para os casos TM	27
3.4	ONDAS TEM.....	31
4	ANTENA MONOCÔNICA COMO PROBLEMA ELETROMAGNÉTICO	34
4.1	USO DA TEORIA DAS IMAGENS.....	34
4.2	CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA OS CAMPOS ELETROMAGNÉTICOS	36
4.3	SINGULARIDADES DAS FUNÇÕES DE BESSEL E LEGENDRE.....	37
4.4	ADAPTAÇÕES DAS FUNÇÕES PARA A REPRESENTAÇÃO DOS CAMPOS NA REGIÃO II.....	38
4.5	APLICAÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO	40
4.5.1	Região I.....	40
4.5.2	Região II	41
4.6	CAMPOS ELETROMAGNÉTICOS NA FRONTEIRA ENTRE AS REGIÕES I E II.....	43
4.6.1	Campo elétrico E_{θ}	44
4.6.2	Campo magnético H_{ϕ}	46
4.6.3	Campo elétrico E_r	47
4.7	CONTINUIDADE DOS CAMPOS ELETROMAGNÉTICOS NA FRONTEIRA ENTRE AS REGIÕES I E II	47
4.8	CAMPOS INTERNOS E EXTERNOS DADOS POR UM ÚNICO CONJUNTO DE AUTOFUNÇÕES..	48
4.9	RESOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES	52
4.10	IMPEDÂNCIA DE ENTRADA	53
4.10.1	Tensão entre dois cones.....	53
4.10.2	Corrente no cone	54
4.10.3	Impedância de entrada.....	55
4.10.4	Escalamento dos resultados	56
4.11	ALGORITMO DE RESOLUÇÃO NUMÉRICA.....	56
5	CARACTERÍSTICAS DA ANTENA MONOCÔNICA	59
5.1	DIAGRAMA DE IRRADIAÇÃO	59
6	RECIPROCIDADE DE ANTENAS	65
6.1	RECIPROCIDADE DOS DIAGRAMAS DE RECEPÇÃO E TRANSMISSÃO DE UMA ANTENA NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA	65

6.2 RECIPROCIDADE DOS DIAGRAMAS DE RECEPÇÃO E TRANSMISSÃO DE UMA ANTENA NO DOMÍNIO DO TEMPO.....	69
6.3 RECIPROCIDADE DE UM ENLACE CONSTITUÍDO POR DUAS ANTENAS DE TIPOS DISTINTOS	71
6.4 ANTENA AUTO-COMPENSADA.....	72
7 CONCLUSÃO	75
REFERÊNCIAS.....	77
APÊNDICES.....	80
APÊNDICE 1 PROBLEMAS DE STURM-LIOUVILLE	81
APÊNDICE 2 EQUAÇÃO DE BESSEL	85
APÊNDICE 3 EQUAÇÃO DE LEGENDRE ASSOCIADA.....	89
APÊNDICE 4 SISTEMAS DE COORDENADAS ESFÉRICAS.....	99

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Antenas cônicas: (a) Antena discone, (b) antena monocone, (c) antena bicônica..	13
Figura 3 – Vista frontal da antena monocônica.....	34
Figura 4 – Antena bicônica que apresenta os mesmos campos da antena monocônica	35
Figura 5 – Diagrama de irradiação: $\theta_0 = 1^\circ$ e $ka = 1$	60
Figura 6 – Diagrama de irradiação: $\theta_0 = 1^\circ$ e $ka = 4$	60
Figura 7 – Diagrama de irradiação: $\theta_0 = 1^\circ$ e $ka = 6$	61
Figura 8 – Diagrama de irradiação: $\theta_0 = 1^\circ$ e $ka = 60$	61
Figura 9 – Diagrama de irradiação: $\theta_0 = 60^\circ$ e $ka = 1$	62
Figura 10 – Diagrama de irradiação: $\theta_0 = 60^\circ$ e $ka = 4$	63
Figura 11 – Diagrama de irradiação: $\theta_0 = 60^\circ$ e $ka = 6$	63
Figura 12 – Diagrama de irradiação: $\theta_0 = 60^\circ$ e $ka = 60$	64
Figura 13 – Enlace de antenas	65
Figura 14 – (a) Modelo de circuito do dipolo curto (b) Dipolo curto.....	68
Figura 15 – Exemplo de enlace recíproco no tempo constituído por duas antenas distintas: monocone e corneta	71
Figura 16 – Sinais presentes no enlace recíproco no tempo: (a) Sinal a ser transmitido (cone); (b) Sinal sendo recebido (corneta).....	72
Figura 17 – Antena monocônica com lente dielétrica elipsoidal (MCA-L).....	74
Figura 18 – Resultados de simulação comparando as larguras de banda das antenas monocônica com lente (MCA-L), monocônica (MCA) e <i>Impulse Radiating Antenna</i> (IRA). A normalização é feita para o ganho de uma monocone de $\lambda/4$	74
Figura 19 – Orientação de vetores em coordenadas esféricas.....	99

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Tipos de ondas em propagação	24
Tabela 2 – Valores de parâmetros para obter o diagrama de irradiação	59

LISTA DE ABREVIATURAS

TE: Transversal Eléctrico(a)

TM: Transversal Magnético(a)

UWB: *Ultra Wideband* (Banda Ultra larga)

EIRP: *Equivalent Isotropically Radiated Power* (Potência Irradiada Isotrópica Equivalente)

1 INTRODUÇÃO

1.1 ANTENAS DE BANDA ULTRA LARGA

O dispositivo fundamental nos sistemas sem fio é a antena, definida como o componente responsável pela irradiação e recepção de ondas eletromagnéticas (IEEE, 2013). Largura de banda, por sua vez (IEEE, 2013), é definida como a faixa de frequência em que certa característica da antena apresenta uma resposta que atende a uma determinada especificação.

UWB é a sigla em inglês para *Ultra Wideband*, ou banda ultra larga, referindo-se, segundo a norma FCC 02-048 (FCC, 2002) – para os Estados Unidos –, à ocupação e utilização do espectro eletromagnético por dispositivos que possuem larguras de banda fracionária (*fractional bandwidth*) superior a 0,2 ou canal com largura de banda utilizada contiguamente superior a 500 MHz. A largura de banda fracionária BW_f é definida por (1). (FCC, 2002)

$$BW_f \triangleq 2 \frac{f_H - f_L}{f_H + f_L} \quad (1)$$

Onde f_H e f_L são, respectivamente, as frequências superior e inferior de operação, definidas como aquelas que apresentam uma potência emitida de -10 dB abaixo do pico de emissão. A frequência central é $f_c = \frac{f_H + f_L}{2}$.

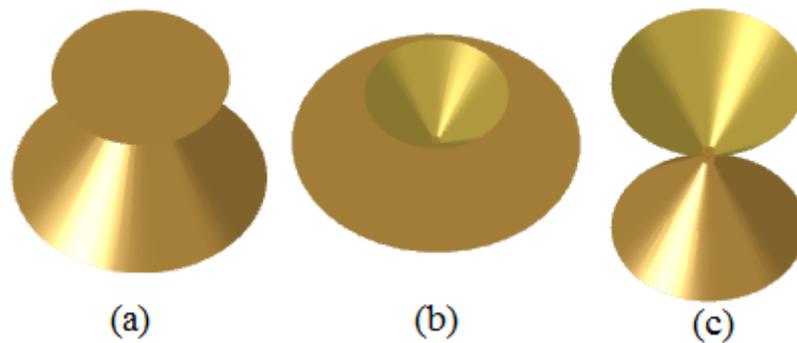
Os usos possíveis para esta tecnologia de banda larga também foram destacados e regulados no âmbito dos Estados Unidos por (FCC, 2002): sistemas de imagem (georadar, visão através de paredes, cercas virtuais e sistemas médicos), radar automotivo e sistemas de comunicação de baixo alcance (*indoor*) e móveis de baixa potência (*handheld*).

Antenas de banda estreita são projetadas e analisadas através de métodos que levam em conta considerações práticas acerca da independência de diversos parâmetros com a frequência. Para as antenas de banda ultra larga, essas considerações passam a ser insuficientes e, ao mesmo

tempo, é necessária atenção a propriedades normalmente negligenciadas, como as que a antena apresenta no domínio do tempo.

Uma das possíveis estruturas para antenas de banda ultra larga é a estrutura cônica, nas suas derivadas bicônica, monocônica e discone, apresentadas na **Figura 1**. A antena monocônica utiliza um plano de terra e a teoria das imagens para criar um cone virtual, tornando a solução da antena monocônica muito semelhante à antena bicônica. A antena discone é uma antena monocônica com um plano de terra pequeno, de forma que os campos são afetados pelos efeitos de borda.

Figura 1 – Antenas cônicas: (a) Antena discone, (b) antena monocone, (c) antena bicônica



FONTE: ANTENNA MAGUS 5.5.0

1.2 HISTÓRICO DAS ANTENAS CÔNICAS

As antenas cônicas foram inicialmente relatadas em uma patente registrada por Oliver Lodge em 1898, numa descrição sobre “áreas capacitivas” (SCHANTZ, 2003). A patente de Lodge tratava de sintonia, uma aplicação de banda estreita, de forma que os aspectos de banda larga não foram analisados.

A redescoberta se deu por (CARTER, 1937), numa época a partir da qual o interesse por antenas de banda larga se tornou perene na literatura, segundo (ALLEN, DOHLER, *et al.*, 2007) (pg. 3), dado que a antena patenteada por Carter era proposta para a transmissão de sinais de televisão.

Os esforços para a análise teórica das estruturas cônicas como irradiadores são iniciados por (SCHELKUNOFF, 1938), em um artigo no qual a teoria de transmissão de ondas esféricas é apresentada.

A antena bicônica, e também o guia de onda cônico, aparecem em (SCHELKUNOFF, 1941), como bases de estudo para antenas de forma arbitrária, já que ao variar o ângulo dos cones é possível aproximar-se de um dipolo ou de uma esfera, cujo centro coincide com a origem do sistema de coordenadas. Independente do ângulo utilizado, os cones acabam por delimitar uma esfera de descontinuidade de raio igual ao comprimento destes, separando o espaço em duas regiões: uma interna à antena – com distância à origem inferior ao comprimento dos cones – e outra externa à antena, que se estende ao infinito. A fronteira entre estas duas regiões, em que deve haver continuidade dos campos elétrico e magnético apesar da alteração geométrica é o foco do estudo e entendida como uma impedância terminal que deve ser determinada.

A natureza das ondas em cada região é investigada em (SCHELKUNOFF, 1946), onde distingue-se entre a onda TEM esférica, chamada principal, e ondas TE e TM, chamadas complementares. A onda TEM só existe na região interior e sua reflexão na esfera de descontinuidade acaba por produzir as ondas complementares internas e externas.

Os resultados de Schelkunoff possuem maior aplicação para antenas cônicas de ângulo pequeno. O dipolo cônico com ângulos maiores foi analisado por (SMITH, 1948).

Os trabalhos de Smith e Schelkunoff são criticados por (TAI, 1948) devido à não inclusão das infinitas ondas complementares das antenas: ambos consideraram apenas a onda principal e uma ou duas ondas complementares nas regiões interna e externa. O artigo de Tai refaz os trabalhos anteriores considerando as infinitas ondas complementares presentes.

(PAPAS e KING, 1951) foram os primeiros a apresentar o diagrama de radiação da antena monocônica alimentada por cabo coaxial, embora considerando apenas a onda principal

na região interior, devido ao grande ângulo da antena.

(HAFNER, 1968) tratou do uso de um material com perdas dielétricas sobre a estrutura da antena, obtendo como resultado a diminuição do comprimento de onda principal da antena.

(GRIMES, 1982) trata a antena bicônica como receptor ao analisar a incidência de uma onda plana nesta, obtendo campos e correntes a partir de uma solução completa.

O trabalho de (MAKURIN e CHUBINSKII, 2007) serviu de base para parte deste trabalho, ao permanecer empregando a continuidade de campos eletromagnéticos na fronteira, considerando todas as ondas complementares e obtendo o diagrama de radiação e a impedância de entrada.

1.3 RECIPROCIDADE NO TEMPO E NA FREQUÊNCIA

A reciprocidade de um radioenlace (ou enlace) é definida por (IEEE, 2000) como a propriedade que permite intercambiar as posições das antenas transmissora e receptora do enlace preservando as amplitudes dos sinais recebidos. Pode ser entendida em dois domínios: o da frequência e o do tempo.

A reciprocidade na frequência é garantida para todos os enlaces de antenas (DYAB, SARKAR, *et al.*, 2013), enquanto que a reciprocidade do enlace no domínio do tempo, em geral, não o é, podendo ocorrer para enlaces constituídos de duas antenas distintas ou em um enlace constituído por um único tipo de antena, mas que apresenta propriedades específicas (TYO, 2008).

Os enlaces recíprocos no tempo são essenciais para a construção dos sistemas de banda ultra larga, já que estes últimos utilizam pulsos que não devem ser distorcidos pela resposta das antenas, isto é, as antenas não podem constituir um meio dispersivo. Um uso crítico, por exemplo, é o radar aéreo de banda ultra larga: a capacidade de identificar a distância dos alvos é dependente do comprimento dos pulsos e quanto mais curtos estes forem, melhor é a precisão

da posição e velocidade do alvo.

1.4 OBJETIVOS E LIMITAÇÕES

Este trabalho realiza uma expansão detalhada das expressões obtidas por (MAKURIN e CHUBINSKII, 2007) para uma antena bicônica no domínio da frequência e as modifica para o caso da antena monocônica. Obtém-se, então, o diagrama de radiação da antena e a sua impedância em função da frequência. Tópicos adicionais são a reciprocidade de um enlace de antenas no domínio do tempo e antenas que satisfazem essa condição.

Limitações na exatidão das expressões obtidas ocorrem ao realizar ao ignorar irradiações que ocorrem em seções da antena que não são analisadas, assim como simplificações utilizadas na região de alimentação, que é considerada infinitamente pequena. Uma construção com condutores reais, que apresentam perdas, deve possuir diferenças no campo. Para o uso de teoria das imagens, o plano de terra é considerado infinito. Para a construção de uma antena real, o plano de terra utilizado deverá possuir dimensões muito maiores que a antena para que os campos irradiados não sejam afetados pelos efeitos de borda, como no caso da antena discone.

1.5 ESTRUTURA DESTE TRABALHO

Este trabalho foi estruturado da seguinte forma:

O capítulo 1 apresenta a proposta, os objetivos, as justificativas, os métodos e as limitações deste trabalho.

O capítulo 2 apresenta uma revisão acerca da tecnologia de ultra banda larga.

O capítulo 3 deriva os campos elétricos e magnéticos que atendem às equações de Maxwell no sistema de coordenadas esféricas.

O capítulo 4 introduz a antena monocônica como problema de valor de contorno, e

particulariza os campos eletromagnéticos em coordenadas esféricas para que atendam a esses valores de contorno. Em seguida são obtidos dois parâmetros de interesse da antena: o diagrama de radiação e impedância de entrada, a partir dos quais outros podem ser obtidos.

O capítulo 5 investiga as características da antena monocônica: diagrama de radiação, impedância de entrada e ganho em função da frequência.

O capítulo 6 realiza uma discussão acerca da reciprocidade de enlaces de antenas.

O capítulo 7 apresenta as conclusões e melhorias acerca deste trabalho.

O Apêndice 1 destaca os problemas de Sturm-Liouville e a importância da ortogonalidade nas soluções obtidas.

O Apêndice 2 realiza uma revisão acerca das funções de Bessel.

O Apêndice 3 faz uma revisão sobre as funções de Legendre, e prova algumas propriedades desta função que são de importância para o texto.

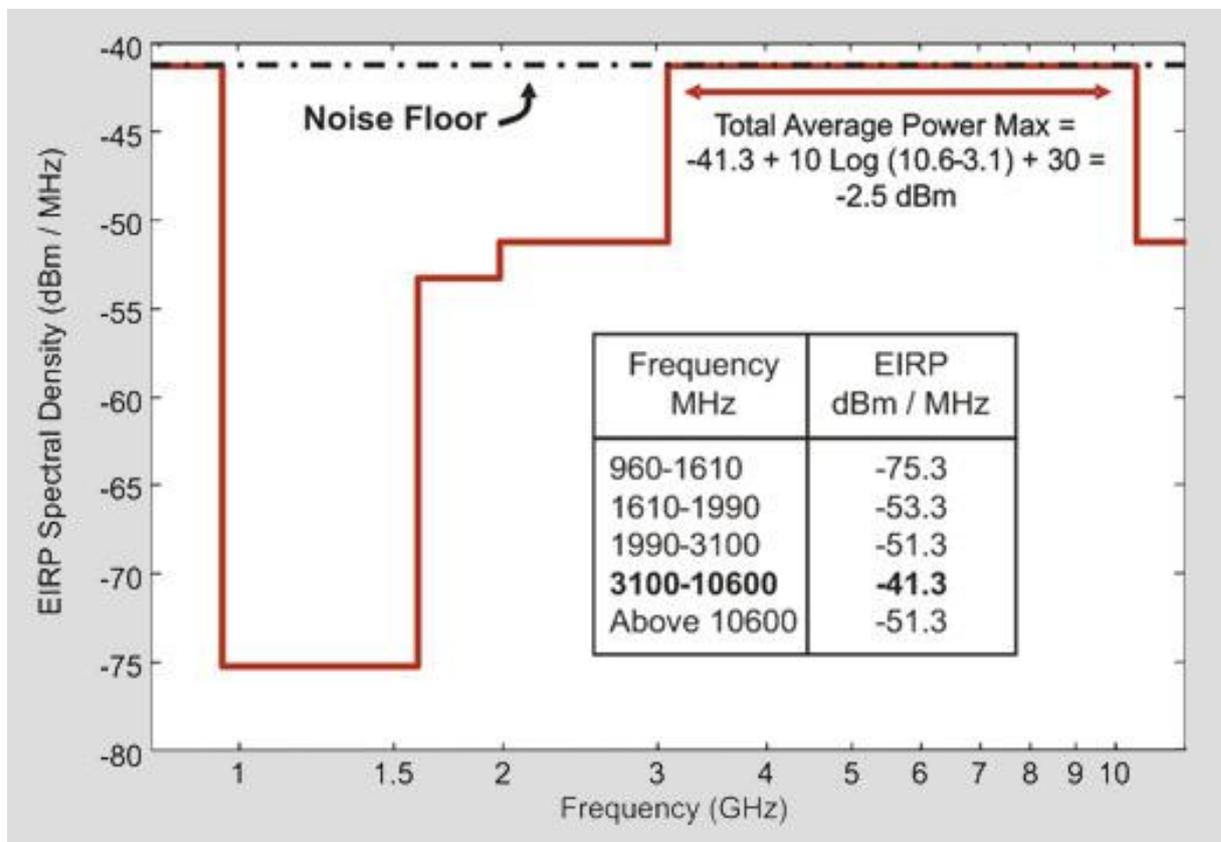
O Apêndice 4 serve como referência rápida para o sistema de coordenadas esféricas.

2 TECNOLOGIA UWB

2.1 USO DO ESPECTRO ELETROMAGNÉTICO NA TECNOLOGIA UWB

A máscara para densidade de potência permitida por (FCC, 2002) para as aplicações UWB é dada na Figura 2 – **Figura 2**.

Figura 2 – Máscara de densidade de potência permitida pela norma UWB da FCC



FONTE: http://www-emt.tu-ilmenau.de/ukolos/history_3.php

As densidades de potência permitidas em (FCC, 2002) foram determinadas de forma a preservar os usos de banda estreita do espectro eletromagnético, que se concentram nas faixas de 1 a 3 GHz. A baixa densidade de potência (-41,3 dBm/MHz) nas outras bandas do espectro implicam em curto alcance, condizente com as aplicações pretendidas, de forma que o uso não

necessita de licença prévia. A baixa densidade de potência também leva os eventuais sistemas de banda estreita operantes a interpretarem os sinais de banda larga como ruído.

2.2 ANTENAS DE BANDA ULTRA LARGA

No capítulo 1, a banda de uma antena foi definida de acordo com a literatura, que é vaga em afirmar qual das características da antena, impedância de entrada, diretividade, ganho, por exemplo, define se a antena é de banda larga ou não. Essa ambiguidade abre espaço para afirmar que uma antena pode ser tida como de banda ultra larga segundo alguma característica, mas que isso não implica necessariamente que outra característica também o seja.

Segundo (WIESBECK, ADAMIUK e STURM, 2009), as antenas de banda ultra larga podem ser classificadas em cinco tipos de acordo com o princípio de irradiação utilizado:

- Estruturas de onda viajante;
- Antenas de ângulos constantes;
- Antenas auto complementares;
- Antenas de múltiplas ressonâncias;
- Antenas eletricamente curtas.

A maioria das antenas utiliza mais de um desses princípios simultaneamente.

As estruturas de onda viajante oferecem uma adaptação suave entre a impedância da linha de transmissão conectada na entrada da antena (*feed line*) e a impedância do espaço livre.

Antenas representantes desse tipo são:

- guias de onda afilados (*tapered waveguide*): antenas Vivaldi e corneta;
- guias de onda ranhurados (*slotted waveguide*);
- antena com haste dielétrica (*dielectric rod antenna*).

As antenas de ângulo constante são aquelas cujas dimensões físicas são descritas através de ângulos, o que torna a antena imune a escalabilidade das suas dimensões físicas. A região de

emissão (ativa), entre o *feed* e o fim do comprimento físico da antena (já que é necessário algum tipo de truncamento) é definida pela frequência de operação imposta. As antenas classificadas nesta categoria são a antena gravata-borboleta (*bowtie*), além das antenas logaritmo-periódicas e espirais.

Antenas auto complementares apresentam uma metalização tal que a substituição de metal por dielétrico e vice-versa não afeta sua impedância de entrada, que acaba, também, sendo independente de frequência. Exemplos são: a antena gravata-borboleta 90°, a antena sinuosa (*sinuous antenna*), a antena logaritmo-espiral e algumas antenas fractais.

Antenas de múltiplas ressonâncias empregam múltiplos irradiadores de banda estreita, cada um construído de forma a cobrir uma seção distinta, mas ligeiramente sobreposta às suas vizinhas, do espectro eletromagnético. Exemplos são a antena logaritmo-periódica e as antenas fractais.

As antenas eletricamente curtas são aquelas cuja dimensão característica é muito menor que o comprimento de onda correspondente às frequências transmitidas, de sorte que as ressonâncias não afetam as características de transmissão/recepção. Exemplos são as antenas ponto (*dot antenna*), as antenas monopolo curto e dipolo curto, assim como suas variantes planares.

As antenas cônicas têm sua classificação dada por três fenômenos de irradiação diferentes: são dispositivos de ângulos constante, podem ser classificados como estruturas de onda viajante ao constituírem um guia de onda afilado e/ou possuírem uma cobertura dielétrica, e ainda, dada a frequência de excitação adequada, se tratarem de antenas eletricamente curtas.

2.3 APLICAÇÕES DE BANDA ULTRA LARGA

A escolha do tipo de antena adequado é dependente do propósito: sistemas de imagem necessitam de diretividade, enquanto aplicações de comunicação requerem imunidade a

perturbações, por exemplo.

Segundo (LICUL, 2004) os sistemas de comunicação baseados em banda ultra larga possuem duas estratégias de modulação majoritariamente utilizadas: a baseada em pulsos, também conhecida como *Impulse Radio*, e a baseada em múltiplas portadoras.

Para estratégias baseadas em múltiplas portadoras, (WIESBECK, ADAMIUK e STURM, 2009) recomendam o uso de antenas de múltiplas ressonâncias, já que o sistema de banda larga pode ser tido como o agregado de múltiplos canais de banda estreita, e as técnicas de projeto podem ser aquelas associadas à antenas de banda estreita.

Para estratégias baseadas em pulsos, em que toda a banda é utilizada em um único canal, o conhecimento e a manipulação da resposta da antena no domínio do tempo é essencial para o projeto do dispositivo de banda ultra larga.

Sistemas de comunicação podem utilizar utilizam um enlace transmissão-recepção formado por duas antenas, separadas por uma grande distância. As distâncias de interesse para sistemas de imagem (georadar etc) são muito menores, e há duas possibilidades para a construção do enlace transmissão-recepção: duas antenas, entre as quais o meio de interesse fica interposto, constituindo assim os métodos de análise por transmissão; ou uma antena, ao lado da qual é colocado o meio de interesse, efetuando a antena tanto a transmissão quanto a recepção dos sinais refletidos, constituindo assim os métodos de análise por refletometria.

A excitação utilizada nos métodos de refletometria para caracterização de meios é, classicamente, a harmônica monocromática (SEVERO, 2003), cujos métodos de análise das respostas obtidas acabam por constituir a refletometria no domínio da frequência (FDR). Já a excitação baseada em pulsos implica na refletometria no domínio do tempo (TDR), que apresenta um custo menor e a possibilidade de análise em muitas frequências simultâneas, devido à grande largura de banda inerente aos pulsos (CATALDO, BENEDETTO e CANNAZZA, 2011).

3 EQUAÇÕES DE MAXWELL EM COORDENADAS ESFÉRICAS

3.1 EQUAÇÕES DE MAXWELL EM COORDENADAS ESFÉRICAS

Assumindo uma dependência harmônica ($e^{j\omega t}$) com o tempo, homogeneidade e isotropia das características do meio, além de ausência de desequilíbrios de cargas, as leis de Faraday-Lenz e Ampère-Maxwell na forma diferencial no domínio da frequência são dadas por (2) e (3).

$$\text{rot } \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \quad (2)$$

$$\text{rot } \vec{H} = j\omega\epsilon\vec{E} \quad (3)$$

Onde ϵ é a permissividade elétrica do meio, μ é a permeabilidade magnética do meio, ω é a frequência angular da excitação harmônica, \vec{H} e \vec{E} são os campos magnético e elétrico, respectivamente e rot denota a operação vetorial rotacional, definida para coordenadas esféricas no Anexo 3.

A assumption da dependência harmônica com o tempo obriga a notar que quaisquer campos \vec{H} e \vec{E} estudados tem suas funções no domínio do tempo (sinais) atendendo às condições de Dirichlet:

- Num período T qualquer, o sinal que representa o campo deve ser absolutamente integrável, isto é:

$$\int_T |x(t)| dt < +\infty \quad (4)$$

Onde $x = \{H, E\}$.

Vale lembrar que um sinal absolutamente integrável também é absolutamente integrável

ao quadrado – a recíproca não é verdadeira.

- A quantidade de máximos e mínimos durante um período do sinal é finita.
- A quantidade de descontinuidades é finita em qualquer período considerado e suas durações também o devem ser.

Garantidas estas condições para o sinal a ser representado, as quais todos os sinais de interesse em Engenharia atendem, a representação de Fourier (harmônica) das equações de Maxwell é válida.

A equação vetorial (2) pode então ser escrita como três equações escalares (5)-(7).

$$\frac{d(\text{sen } \theta E_{\phi})}{d\theta} - \frac{d(E_{\theta})}{d\phi} = -j\omega\mu r \text{ sen } \theta H_r \quad (5)$$

$$\text{sen } \theta \frac{d(rE_{\phi})}{dr} - \frac{dE_r}{d\phi} = j\omega\mu r \text{ sen } \theta H_{\theta} \quad (6)$$

$$\frac{d(rE_{\theta})}{dr} - \frac{dE_r}{d\theta} = -j\omega\mu r H_{\phi} \quad (7)$$

Da mesma forma, a equação (3) pode ser reescrita para obter as equações escalares (8)-(10).

$$\frac{d(\text{sen } \theta H_{\phi})}{d\theta} - \frac{d(H_{\theta})}{d\phi} = j\omega\epsilon r \text{ sen } \theta E_r \quad (8)$$

$$\text{sen } \theta \frac{d(rH_{\phi})}{dr} - \frac{dH_r}{d\phi} = -j\omega\epsilon r \text{ sen } \theta E_{\theta} \quad (9)$$

$$\frac{d(rH_{\theta})}{dr} - \frac{dH_r}{d\theta} = j\omega\epsilon r E_{\phi} \quad (10)$$

3.2 ONDAS EM COORDENADAS ESFÉRICAS: TE, TM E TEM

Resolver as equações de Maxwell para uma determinada configuração de condições de contorno resulta em três modos de solução para ondas propagantes: o modo transversal-elétrico

(TE), o modo transversal magnético (TM) e o modo transversal eletromagnético (TEM), além de modos híbridos, combinações de modos TE e TM.

A diferença entre os três modos de solução está na presença ou não de um dos campos (elétrico ou magnético) na direção de propagação, conforme exposto na **Tabela 1**.

Tabela 1 – Tipos de ondas em propagação

Tipo	Campo transversal à direção de propagação	Campo na direção de propagação
TEM	Ambos	Nenhum
TE	Elétrico	Magnético
TM	Magnético	Elétrico
Híbrido	Ambos	Ambos

No sistema de coordenadas esféricas, onde a direção de propagação é a radial, os modos que se propagam no espaço livre são os TE, TM e híbridos, enquanto que o modo TEM somente se propaga na presença de condutores cônicos (SCHELKUNOFF, 1938).

3.3 ONDAS TE E TM

3.3.1 Considerações preliminares

Em um sistema de coordenadas esférico, a estrutura de guiamento é geralmente uma antena, e a direção de propagação preferencial é a radial. Assim, as ondas TE e TM a serem consideradas são aquelas resultantes da asserção de que $H_r \equiv 0$ (para TM) e $E_r \equiv 0$ (para TE).

A antena em estudo, como se verá no capítulo 4, possui uma simetria azimutal, isto é, as condições de contorno impostas pela estrutura da antena não possuem dependência com a coordenada ϕ , o que implica na asserção $\frac{dX_k}{d\phi} \equiv 0$, onde X_k é qualquer uma das componentes dos campos elétrico ou magnético.

O método mais simples de resolução de equações diferenciais parciais como apresentadas em (5)-(10) é o de separação de variáveis, em que uma função qualquer

$X_k(r, \theta, \phi)$ é expressa como um produto de subfunções $X_{kr}(r) X_{k\theta}(\theta) X_{k\phi}(\phi)$.

Como se procura modelar um sistema físico real, é necessário que todos os campos apresentem valor finito.

3.3.2 Equações de Maxwell simplificadas para ondas TM

A partir das considerações realizadas na seção 3.3 é possível simplificar as equações de Maxwell dadas em (5)-(10).

Assumindo simetria azimutal e considerando apenas a onda TM, a equação (5) fica reduzido à equação (11).

$$\frac{d(E_{\phi\theta} \cos \theta)}{d\theta} = 0 \quad (11)$$

Cuja solução é dada por (12).

$$E_{\phi\theta} = \frac{K_1}{\cos \theta} \quad (12)$$

Os valores de (12) tendem ao infinito em $\theta = \frac{n\pi}{2}$ para n inteiro. Assim, qualquer solução com $K_1 \neq 0$ não é fisicamente realista, e é adequado tomar $E_{\phi\theta} \equiv 0$. Devido ao uso do método de separação de variáveis, segue que $E_{\phi} \equiv 0$.

Substituindo $H_r \equiv 0$ (definição de onda TM) e $E_{\phi} \equiv 0$ (solução da equação (12)) na equação (10), tem-se a equação (13), cuja solução é (14).

$$\frac{d(rH_{\theta r})}{dr} = 0 \quad (13)$$

$$H_{\theta r} = \frac{K_2}{r} \quad (14)$$

$H_{\theta r}$ em (14) tende ao infinito em $r = 0$, sendo adequado, então, tomar $K_2 = 0$, o que implica em $H_{\theta} = 0$.

As equações (8) e (9) passam a ter as formas descritas por (15) e (16) devido à simetria azimutal.

$$\frac{d(\text{sen } \theta H_{\phi})}{d\theta} = j\omega\epsilon r \text{sen } \theta E_r \quad (15)$$

$$\frac{d(rH_{\phi})}{dr} = -j\omega\epsilon r E_{\theta} \quad (16)$$

Reproduz-se em (17), por conveniência, a equação (7), que não é modificada por nenhuma das considerações realizadas nesta seção.

$$\frac{d(rE_{\theta})}{dr} - \frac{dE_r}{d\theta} = -j\omega\mu r H_{\phi} \quad (17)$$

As equações (15)-(17) constituem as equações de Maxwell para onda TM em coordenadas esféricas.

3.3.3 Equações de Maxwell simplificadas para ondas TE

Para a obtenção das equações para ondas TE, aproveita-se a semelhança das equações (2) e (3), em que é possível escrever uma a partir da outra realizando as substituições presentes em (18), como realizado por (MAKURIN e CHUBINSKII, 2007).

$$[H] \Leftrightarrow [E] \quad [-\mu] \Leftrightarrow [\epsilon] \quad (18)$$

Assim, as equações para ondas TM dadas em (15)-(17) podem ser convertidas nas equações para ondas TE presentes em (19)-(21).

$$\frac{d(rH_{\theta})}{dr} - \frac{dH_r}{d\theta} = j\omega\epsilon r E_{\phi} \quad (19)$$

$$\frac{d(\text{sen } \theta E_{\phi})}{d\theta} = -j\omega\mu r \text{sen } \theta H_r \quad (20)$$

$$\frac{d(rE_{\phi})}{dr} = j\omega\mu rH_{\theta} \quad (21)$$

3.3.4 Separação de variáveis para os casos TM

É necessário agora obter as funções para os campos \vec{E} e \vec{H} que satisfazem as equações (15)-(17) e (19)-(21). A solução para ondas TE pode ser obtida pela simetria da seção 3.3.3.

As equações (15)-(17) são interdependentes, mas podem ser desacopladas inserindo-se simultaneamente (15) e (16) em (17), resultando em (22).

$$\frac{d^2(rH_{\phi})}{dr^2} + \frac{1}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} (\sin \theta (rH_{\phi})) \right) = -\omega^2 \mu \epsilon (rH_{\phi}) \quad (22)$$

Tomando rH_{ϕ} como função incógnita e escrevendo-a como um produto:

$$rH_{\phi} = R(r)\Theta(\theta) \quad (23)$$

A equação (22) fica então:

$$\left(\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \omega^2 \mu \epsilon \right) r^2 + \frac{1}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} (\sin \theta \Theta) \right) = 0 \quad (24)$$

Como a primeira parcela de (24) depende unicamente de r enquanto a segunda parcela depende apenas de θ , é razoável supor que cada parcela é igual a uma constante $\pm\alpha^2$, produzindo as equações (25) e (26).

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + (\omega^2 \mu \epsilon r^2 - \alpha^2) R = 0 \quad (25)$$

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} (\sin \theta \Theta) \right) + \alpha^2 \Theta = 0 \quad (26)$$

3.3.4.1 Resolução das equações separadas

A equação (25) pode ser modificada para a equação presente em (27), com constantes dadas por (28).

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + \left(k^2 r^2 - \left(p^2 - \frac{1}{4} \right) \right) R = 0 \quad (27)$$

$$p = \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \alpha^2} \quad k^2 = \omega^2 \mu \epsilon \quad (28)$$

A equação (27) é uma equação de Bessel modificada, de propriedades indicadas no apêndice 2 e solução geral dada por (29).

$$R(r) = C_3 \sqrt{kr} J_{\nu+\frac{1}{2}}(kr) + C_4 \sqrt{kr} J_{-(\nu+\frac{1}{2})}(kr) \quad (29)$$

A função $J_{\nu+\frac{1}{2}}(kr)$ apresenta valor finito para todo r , enquanto a função $J_{-(\nu+\frac{1}{2})}(kr)$ não apresenta valor finito para $r = 0$. Assim, (29) deve ser modificado para (30).

$$R(r) = C_3 \sqrt{kr} J_{\nu+\frac{1}{2}}(kr) \quad (30)$$

A equação (26) pode ser expandida para a equação (31).

$$\sin^2 \theta \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + \sin \theta \cos \theta \frac{d\Theta}{d\theta} + (\alpha^2 \sin^2 \theta - 1) \Theta = 0 \quad (31)$$

Que é uma equação de Legendre associada de ordem 1 e grau n dado por (32).

$$n = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \alpha^2} \quad (32)$$

Propriedades da função de Legendre associada podem ser consultadas no apêndice 3.

Comparando (28) e (32) verifica-se que o grau da equação de Legendre e a ordem da equação de Bessel diferem por $-\frac{1}{2}$, o que permite uma simplificação, inserindo um único

parâmetro v definido em (33).

$$v = n = p - \frac{1}{2} \quad (33)$$

A determinação do valor de α e, por consequência, de v , determina o formato da função incógnita rH_θ , o que leva, através de (15)-(17), ao completo conhecimento dos campos TM presentes. O caso mais geral é de que α , v e n não sejam inteiros, o que leva a equação de Legendre em (31) a possuir a função resposta dada por (34).

$$\Theta(\theta) = C_1 P_v^1(\cos \theta) - C_2 P_v^1(-\cos \theta) \quad (34)$$

Onde o sinal negativo na frente de C_2 ocorre para que (34) coincida com a notação de (MAKURIN e CHUBINSKII, 2007).

Assim, a resposta completa para a função incógnita rH_ϕ em (23) é dada por (35).

$$rH_\phi = C_3 \sqrt{kr} J_{v+\frac{1}{2}}(kr) [C_1 P_v^1(\cos \theta) - C_2 P_v^1(-\cos \theta)] \quad (35)$$

Onde os produtos $C_3 C_1$ e $C_3 C_2$ são dados em ampères. A ordem v é adimensional, assim como o valor das funções de Bessel e Legendre.

3.3.4.2 Obtenção dos campos elétricos das ondas TM por derivação

Para obter os campos elétricos E_r e E_θ , as equações (15) e (16) podem ser modificadas para tomar as formas presentes em (37) e (36).

$$E_\theta = \frac{j}{\omega \epsilon r} \frac{d(rH_\phi)}{dr} \quad (36)$$

$$E_r = -\frac{j}{\omega \epsilon r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} [\sin \theta rH_\phi] \quad (37)$$

Para obter o campo E_θ , substitui-se a equação (23) na equação (36), obtendo a equação (38).

$$E_{\theta} = j \frac{\Theta}{\omega \epsilon r} \frac{dR}{dr} \quad (38)$$

R tem sua forma dada pela equação (30) e sua derivada $\frac{dR}{dr}$ é dada por (39).

$$\frac{dR}{dr} = C_3 \left[\frac{d}{dr} (\sqrt{kr}) J_{\nu+\frac{1}{2}}(kr) + \sqrt{kr} \frac{d}{dr} \left(J_{\nu+\frac{1}{2}}(kr) \right) \right] \quad (39)$$

A partir da fórmula para derivada de função de Bessel, presente no apêndice 2, é possível escrever (39) como (40).

$$\frac{dR}{dr} = kC_3 \left[\sqrt{kr} J_{\nu-\frac{1}{2}}(kr) - \frac{1}{\sqrt{kr}} \nu J_{\nu+\frac{1}{2}}(kr) \right] \quad (40)$$

Substituindo (40) em (38) tem-se (41).

$$E_{\theta} = j \frac{C_3}{\omega \epsilon} \Theta \left[\frac{k\sqrt{kr}}{r} J_{\nu-\frac{1}{2}}(kr) - \frac{\nu k}{r\sqrt{kr}} J_{\nu+\frac{1}{2}}(kr) \right] \quad (41)$$

O que leva à forma final dada em (42).

$$E_{\theta} = j\eta kC_3 \left[\frac{1}{\sqrt{kr}} J_{\nu-\frac{1}{2}}(kr) - \frac{\nu}{\sqrt{(kr)^3}} J_{\nu+\frac{1}{2}}(kr) \right] [C_1 P_{\nu}^1(\cos \theta) - C_2 P_{\nu}^1(-\cos \theta)] \quad (42)$$

Onde η é a impedância do espaço livre, dada por $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$.

Para o campo E_r substitui-se (23) em (37), obtendo (43).

$$E_r = -j \frac{R}{\omega \epsilon r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} [\sin \theta \Theta] \quad (43)$$

Expandindo (43) obtém-se (44).

$$E_r = -j \frac{R}{\omega \epsilon r^2 \sin \theta} \left[\cos \theta \Theta + \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right] \quad (44)$$

Com Θ dado por (34), a equação (44) pode ser modificada para a equação (45) após diversas substituições, detalhadas no apêndice 3.

$$E_r = -j \frac{R}{\omega \epsilon r^2} \hat{E}_r \quad (45)$$

Onde \hat{E}_r é dado por (46), repetido de (224), no Apêndice 3.

$$\hat{E}_r = -(\nu)(\nu + 1)[C_1 P_\nu^0(\cos \theta) + C_2 P_\nu^0(-\cos \theta)] \quad (46)$$

Assim, a forma final para E_r é dada por (47).

$$E_r = jC_3 \eta \frac{1}{r\sqrt{kr}} (\nu)(\nu + 1) J_{\nu+\frac{1}{2}}(kr) [C_1 P_\nu^0(\cos \theta) + C_2 P_\nu^0(-\cos \theta)] \quad (47)$$

3.4 ONDAS TEM

A partir das equações de Maxwell em coordenadas esféricas – equações (5)-(10) – a descrição das ondas TEM é obtida tornando as componentes $E_r = E_\phi = H_r = H_\theta = 0$, isto é, forçando as componentes que não são ortogonais à direção de propagação radial a serem nulas. Também é possível construir a onda TEM fazendo $\alpha = 0$ nas equações (25) e (26). Assumindo que as soluções podem ser escritas como produto de funções de uma variável e que não existe dependência do ângulo azimutal ϕ (as mesmas condições usadas para ondas TE e TM), da equação (9) segue que:

$$rE_\theta = \frac{1}{-j\omega\epsilon} \frac{\partial(rH_\phi)}{\partial r} \quad (48)$$

Inserindo a equação (48) na equação (7) tem-se a equação (49).

$$\frac{\partial^2(rH_\phi)}{\partial r^2} + \omega^2 \mu \epsilon (rH_\phi) = 0 \quad (49)$$

Cuja solução é dada por (50).

$$rH_\phi = C_{11} e^{jkr} + C_{12} e^{-jkr} \quad (50)$$

Onde C_{11} e C_{12} são constantes livres, com a dimensão de ampères.

Sob as mesmas condições de campos elétricos e magnéticos ($E_r = E_\phi = H_r = H_\theta = 0$), a equação (8) se reduz à equação (51).

$$\cos \theta H_\phi + \sin \theta \frac{\partial H_\phi}{\partial \theta} = 0 \quad (51)$$

Cuja solução é dada por (52).

$$H_\phi = \frac{C_{13}}{\sin \theta} \quad (52)$$

Combinando as soluções para θ e r o campo magnético da onda TEM é dada por (53).

$$rH_\phi = C_{11} \frac{e^{jkr}}{\sin \theta} - C_{12} \frac{e^{-jkr}}{\sin \theta} \quad (53)$$

Onde o sinal negativo à frente de C_{12} é utilizado por conveniência.

O campo elétrico associado é obtido diretamente através de (48), produzindo (54).

$$E_\theta = \frac{\eta}{r \sin \theta} [C_{11} e^{jkr} + C_{12} e^{-jkr}] \quad (54)$$

A solução e^{-jkr} representa uma onda que se propaga na direção $+\hat{a}_r$ (progressiva), enquanto a solução e^{jkr} representa uma onda que se propaga na direção $-\hat{a}_r$ (regressiva). Se a causa da onda regressiva for uma reflexão da onda progressiva, faz sentido definir um coeficiente de reflexão Γ na interface dado por (55).

$$\Gamma = \frac{C_{11}}{C_{12}} \quad (55)$$

O campo elétrico pode então ser reescrito como dado por (56).

$$E_\theta = \frac{\eta}{r \sin \theta} C_{12} [e^{-jkr} + \Gamma e^{jkr}] \quad (56)$$

E o campo magnético é dado por (57).

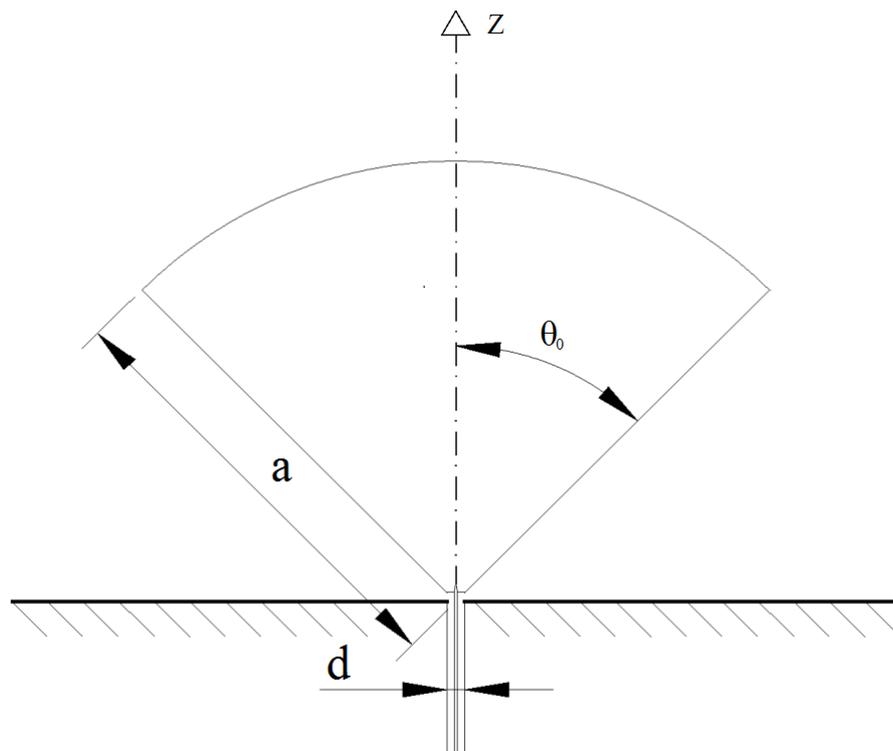
$$H_\phi = \frac{C_{12}}{r \sin \theta} [e^{-jkr} - \Gamma e^{jkr}] \quad (57)$$

4 ANTENA MONOCÔNICA COMO PROBLEMA ELETROMAGNÉTICO

4.1 USO DA TEORIA DAS IMAGENS

A antena sob estudo pode ser classificada como cônica com plano terra ou monocônica. A **Figura 3** mostra a vista frontal desta antena, que possui raio a , ângulo de abertura θ_0 e é alimentada por um cabo coaxial de diâmetro d .

Figura 3 – Vista frontal da antena monocônica

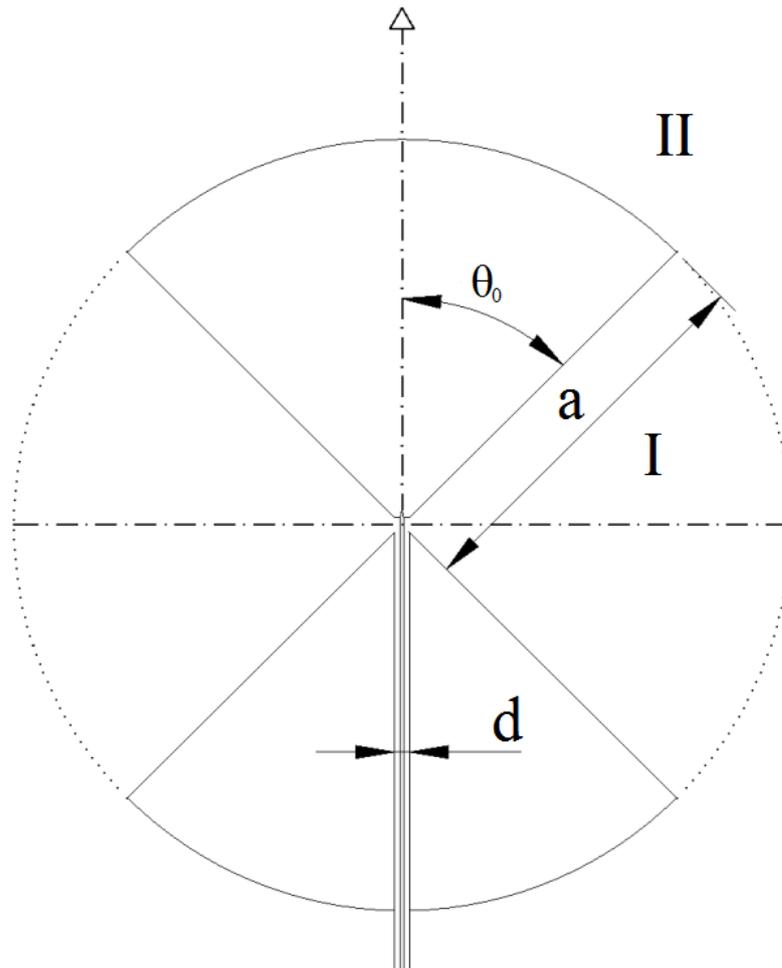


O plano de terra (hachurado), construído em metal, que pode ser considerado um condutor perfeito, ao qual a malha do cabo coaxial de alimentação é conectada. A estrutura cônica também é construída em metal condutor perfeito, e sua fixação mecânica é efetuada apoiando-se o cone no pino formado pelo núcleo do cabo coaxial e, também, num suporte fabricado com um dielétrico eletricamente fino (não mostrado) e de permissividade próxima à do ar nas frequências de interesse (por exemplo, poliuretano expandido – isopor).

A presença do plano de terra, conectado à malha da alimentação, implica na criação de uma imagem virtual da antena (um cone virtual), que opera em contrafase com a antena real, dada a necessidade de satisfazer a condição de contorno de campo elétrico tangencial nulo na superfície metálica (BALANIS, 2005). Cabe a observação de que os campos obtidos são válidos apenas para a região que contém a antena real, já que no interior do plano metálico os campos devem ser nulos.

A **Figura 4** demonstra a situação que será analisada eletromagneticamente. Como o cone inferior é tomado como a referência de terra, uma tensão V_0 imposta entre o plano de terra e o cone real é equivalente a uma tensão $+V_0$ imposta ao cone real e uma tensão de $-V_0$ imposta ao cone imagem, produzindo uma tensão de $2V_0$.

Figura 4 – Antena bicônica que apresenta os mesmos campos da antena monocônica



4.2 CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA OS CAMPOS ELETROMAGNÉTICOS

A antena bicônica da **Figura 4** é formada por duas regiões, denominadas I e II, separadas por uma fronteira esférica de raio a que engloba as bases dos cones.

No interior da região I, a condição de contorno a ser observada é a formada pela superfície de θ constante que constitui o cone, na qual o campo elétrico tangencial, constituído pela componente E_r no caso das ondas TM, deve ser nulo, como expressado em (58).

$$\begin{aligned} E_r(r, \theta_0) &= 0, \\ E_r(r, \pi - \theta_0) &= 0, \end{aligned} \quad 0 < r < a \quad (58)$$

Na região II, os campos devem obedecer às condições impostas pelas superfícies que constituem as bases cônicas, de r constante e igual a a , como dado em (59).

$$\begin{aligned} E_k(a, \theta) &= 0, & 0 < \theta < \theta_0 \\ E_k(a, \theta) &= 0, & \pi - \theta_0 < \theta < \pi \end{aligned} \quad k \in \{\phi, \theta\} \quad (59)$$

Na interface livre (aquela que não possui uma superfície metálica) entre as regiões I e II, os campos eletromagnéticos deverão possuir continuidade, já que a divisão entre as regiões I e II é virtual e o meio material é o mesmo, o que impõe a condição presente em (60).

$$\begin{aligned} \vec{E}_I(a, \theta, \phi) &= \vec{E}_{II}(a, \theta, \phi) & \theta_0 < \theta < \pi - \theta_0 \\ \vec{H}_I(a, \theta, \phi) &= \vec{H}_{II}(a, \theta, \phi) & 0 < \phi < 2\pi \end{aligned} \quad (60)$$

Onde os subscritos I e II se referem às regiões I e II, respectivamente.

Dentro dos cones metálicos, os campos elétricos e magnéticos são identicamente nulos ($\vec{E} = \vec{H} \equiv 0$).

A separação em duas regiões também permite intuir sobre a natureza das ondas eletromagnéticas encontradas em cada região. A descontinuidade que separa as regiões I e II é um obstáculo para as ondas eletromagnéticas, provocando reflexões para o interior da região da

onda incidente (região I para um sinal sendo transmitido pela antena, região II para um sinal sendo recebido). Como a região II é infinita (por definição, ao tratar-se de todo o universo externo à antena), para um sinal sendo recebido, as ondas refletidas na interface não formam um padrão estacionário, e os campos presentes na região II constituem ondas viajantes. Já para um sinal sendo transmitido, as reflexões na interface formam um padrão estacionário, e os campos na região I constituem ondas estacionárias.

Estendendo a condição de campo elétrico tangencial nulo na interface metal-dielétrico ao plano terra que converte a antena bicônica em monocônica, vê-se que o modo TM é o preferencial, pois o campo elétrico distante é naturalmente normal ao plano terra (E_θ), enquanto que o modo TE implica em um campo elétrico distante tangencial ao plano terra (E_ϕ) que, para observar as condições de contorno, deve ser nulo na interface.

4.3 SINGULARIDADES DAS FUNÇÕES DE BESSEL E LEGENDRE

A seção 3.3.4 discutiu a solução para ondas TM e apresentou os campos elétrico e magnético como sendo constituídos pelo produto de duas funções: uma combinação linear de funções de Bessel cujo argumento é o raio, e uma combinação linear de funções de Legendre cujo argumento é o ângulo de elevação θ .

A combinação linear de funções de Bessel é inicialmente apresentada na expressão (29), repetida aqui em (61).

$$R(r) = C_3 \sqrt{kr} J_{\nu+\frac{1}{2}}(kr) + C_4 \sqrt{kr} J_{-(\nu+\frac{1}{2})}(kr) \quad (61)$$

Embora a seção 3.3.4 objetive ser tão genérica quanto possível, ocorre uma particularização para os campos da região interna, e a função $J_{-(\nu+\frac{1}{2})}(kr)$ é prontamente eliminada usando o argumento físico da ausência do valor finito para $r = 0$.

O apêndice 2 apresenta as funções de Neumann e de Hankel, que também resolvem a equação de Bessel para ordens não inteiras. De acordo com (ARFKEN e WEBER, 2005) (pág. 730), as fórmulas assintóticas das funções de Bessel e Neumann permitem afirmar que estas funções são mais apropriadas para a representação de ondas estacionárias, enquanto que as fórmulas assintóticas para as funções de Hankel a demonstram mais apropriada para a representação de ondas viajantes. A função de Hankel não apresenta um valor finito para $r = 0$, mas este ponto não está na região II.

Assim, é correto o uso da função de Bessel para a representação da dependência radial dos campos na região I. Para a região II, dado o argumento apresentado na seção 4.2, as funções de Hankel são mais adequadas, sendo a função de Hankel do segundo tipo, $H_\nu^{(2)}(kr)$, adequada às ondas viajantes que se propagam em direção à $r \rightarrow +\infty$.

A combinação linear de funções de Legendre é apresentada em (34), repetida aqui em (62).

$$\Theta(\theta) = C_1 P_\nu^1(\cos \theta) - C_2 P_\nu^1(-\cos \theta) \quad (62)$$

A função $P_\nu^1(\pm \cos \theta)$ apresenta valor não finito para $\theta = \{0, \pi\}$ para ν não inteiro.

Para a região I, os pontos que apresentam $\theta = \{0, \pi\}$ estão sempre contidos no interior da estrutura metálica, onde (62) não é utilizada. Assim, esta função pode ser considerada apropriada para representar os campos desta região.

Para a região II, a função $P_\nu^1(-\cos \theta)$ deve ser descartada, já que $P_\nu^1(-1)$ deve possuir um valor finito. E ν deve ser um número inteiro, já que $P_\nu^1(\cos \theta)$ ou $P_\nu^1(-\cos \theta)$ divergem para $\theta = \{0, \pi\}$ para ν não inteiro.

4.4 ADAPTAÇÕES DAS FUNÇÕES PARA A REPRESENTAÇÃO DOS CAMPOS NA REGIÃO II

Para a região II, as soluções obtidas na seção 3.3.4 precisam ser reavaliadas de acordo

com o presente na seção 4.3, ou seja, a formação de padrões estacionários e o valor não finito de algumas funções precisam ser observados. As equações de Maxwell são as mesmas para as duas regiões, de forma que a derivação é virtualmente idêntica àquela apresentada na seção 3.3.4.

Para a região externa à antena (II), o campo magnético do modo TM é dado por (63).

$$rH_{\phi II} = R_{II}(r)\Theta_{II}(\theta) \quad (63)$$

Onde R_{II} e Θ_{II} são dados por (64) e (65), respectivamente.

$$R_{II}(r) = C_7 \sqrt{kr} H_{\xi + \frac{1}{2}}^{(2)}(kr) \quad (64)$$

$$\Theta_{II}(\theta) = C_8 P_{\xi}^1(\cos \theta) \quad (65)$$

Onde $H_{\xi}^{(2)}(kr)$ é a função de Hankel e ξ substitui v como autovalor a ser descoberto.

A equação (64) é obtida da mesma forma que a equação (30); enquanto a equação (65) foi derivada da mesma forma que a equação (34). O descarte de $P_{\xi}^1(-\cos \theta)$ é explicado na seção 4.14.5.2.

Assim, a equação (63) fica dada por (66).

$$rH_{\phi II} = C_9 \sqrt{kr} H_{\xi + \frac{1}{2}}^{(2)}(kr) P_{\xi}^1(\cos \theta) \quad (66)$$

Onde $C_9 = C_7 C_8$, tendo dimensão de ampères.

O campo elétrico associado à $H_{\phi II}$ continua a ser dado através da sua derivada, como em (67), cópia de (38).

$$E_{\theta II} = j \frac{\Theta_{II}}{\omega \epsilon r} \frac{dR_{II}}{dr} \quad (67)$$

As funções de Bessel, independente do tipo, obedecem às mesmas regras de derivação.

Assim, a derivada $\frac{dR_{II}}{dr}$ em (67) tem a mesma forma que a derivada da função de Bessel em (

40) e a função $E_{\theta II}$ passa a ser dada por (68).

$$E_{\theta II} = j\eta k C_9 \left[\frac{1}{\sqrt{kr}} H_{\xi-\frac{1}{2}}^{(2)}(kr) - \frac{\xi}{\sqrt{(kr)^3}} H_{\xi+\frac{1}{2}}^{(2)}(kr) \right] P_{\xi}^1(\cos \theta) \quad (68)$$

4.5 APLICAÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO

4.5.1 Região I

Após a determinação das condições de fronteira na superfície do cone, dadas por (58) é necessário aplicá-las na equação de interesse, dada por (47) e repetida em (69).

$$E_r = jC_3 \eta \frac{1}{r\sqrt{kr}} (\nu)(\nu + 1) J_{\nu+\frac{1}{2}}(kr) [C_1 P_{\nu}^0(\cos \theta) + C_2 P_{\nu}^0(-\cos \theta)] \quad (69)$$

A única solução não trivial é a que considera somente a combinação linear de funções de Legendre, o que gera (70).

$$\begin{aligned} C_1 P_{\nu}^0(\cos \theta) + C_2 P_{\nu}^0(-\cos \theta) &= 0 \\ C_1 P_{\nu}^0(\cos(\pi - \theta_0)) + C_2 P_{\nu}^0(-\cos(\pi - \theta_0)) &= 0 \end{aligned} \quad (70)$$

A solução simultânea das equações em (70) produz o sistema e a sua solução:

$$\begin{aligned} C_1^2 - C_2^2 &= 0 \\ C_2 &= \pm C_1 \end{aligned} \quad (71)$$

A escolha do sinal adequado se dá mediante a excitação da antena bicônica equivalente e pode ser entendida a partir do campo E_{θ} associado, dado por (42), e cujo termo de interesse é dado em (72), após a aplicação de (71).

$$\Theta(\theta) = C_1 (P_{\nu}^1(\cos \theta) + C_5 P_{\nu}^1(-\cos \theta)) \quad (72)$$

Onde $C_5 = -\frac{C_2}{C_1} = \pm 1$.

Ao substituir o argumento $\theta = \frac{\pi}{2} - \delta$, a função (72) fica referida ao plano $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, que é a posição do plano terra na antena monocônica. A função $\Theta(\delta)$ é provada par em relação à variável δ se $C_5 = 1$ e ímpar se $C_5 = -1$ no apêndice 3.

O sinal negativo ($C_5 = -1$) corresponde à excitação simétrica, isto é, à excitação da antena bicônica em modo par (correntes induzidas nos cones se encontram em fase), enquanto o sinal positivo de C_5 corresponde à excitação em modo ímpar (correntes induzidas se encontram em contrafase). Como a antena física é excitada em referência à terra, com a indução de campos em contrafase pela teoria das imagens, a única excitação possível para as condições em (71) é a correspondente à excitação não simétrica, o sinal negativo e, portanto $C_5 = 1$.

Os valores de ν que satisfazem as equações em (70) devem ser calculados a partir de um procedimento iterativo, detalhado no Apêndice 2. Os resultados demonstram que os valores de ν adequados constituem um conjunto discreto, isto é, valores específicos de ν , e não uma função contínua. De qualquer forma, de posse dos valores de ν adequados, os campos eletromagnéticos da seção 3.3.4 ficam determinados, a não ser pelas constantes livres C_1 e C_3 , que determinam a amplitude dos campos.

4.5.2 Região II

Na região externa (II), os campos elétrico E_θ e magnético H_ϕ possuem as formulações adaptadas em (66) e (68), respectivamente, e não precisam atender a condições de contorno.

O autovalor ξ das funções externas tem seu conjunto de valores possíveis determinados por duas condições: i) valor finito nos pontos $\theta = \pi$ e $\theta = -\pi$, a qual é atendida para ξ um número inteiro e ii) os campos magnéticos (H_ϕ), que circulam os cones, deverão induzir nestes uma distribuição de corrente coerente com o modo de excitação adotado.

A seção 4.5.1 e o uso da teoria das imagens particularizaram as equações obtidas para os campos na região I para o caso da excitação assimétrica. Para essa excitação, um gerador de sinais conectado aos vértices dos cones deve induzir uma corrente que deve apresentar um único sentido em relação aos eixos, isto é, num dos cones deverá se afastar do vértice e no outro, convergir a ele.

A densidade de corrente induzida sobre um condutor elétrico perfeito é dada pela relação de fronteira presente em (73).

$$\vec{K} = \hat{n} \times \vec{H}_2 \quad (73)$$

Onde \hat{n} é um vetor unitário na direção normal à superfície condutora, \vec{H}_2 é o campo magnético total no meio livre (não condutor) e \vec{K} é a densidade decorrente induzida (em $\frac{A}{m}$) na superfície pelo campo \vec{H}_2 .

O campo magnético da antena monocônica possui apenas componente na direção azimutal (H_ϕ) e a superfície metálica apresenta um vetor normal na direção de $\pm\hat{a}_\theta$, dependendo do cone (real ou virtual). As distribuições de corrente são dadas por (74) e por (75) para os cones real e virtual, respectivamente.

$$\vec{K}(\theta_0) = H_\phi(\theta_0)\hat{a}_r \quad (74)$$

$$\vec{K}(\pi - \theta_0) = -H_\phi(\pi - \theta_0)\hat{a}_r \quad (75)$$

A diferença de sinal entre (74) e (75) e a simetria forçada pela presença do plano terra sugere que o campo magnético H_ϕ precisa apresentar simetria entre os cones para que as distribuições de corrente sejam as mesmas para uma mesma distância radial. Para tanto, a função que representa o campo H_ϕ deve ser ímpar em relação a $\theta = \frac{\pi}{2}$, o que é provado no apêndice 3, onde a condição para paridade par é mostrada como dada por (76).

$$\xi = 2m + 1 \quad (76)$$

Onde v são os autovalores da função de Legendre e $m = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Ou seja, os autovalores das funções de Legendre devem pertencer ao conjunto dos números naturais ímpares. Os números naturais pares correspondem à excitação simétrica.

A argumentação utilizada para obter os autovalores na região II é baseada num fenômeno que ocorre na região I, mas o argumento permanece válido se for intuído que a região I fica efetivamente cada vez menor – sendo substituída pela região II – conforme o ângulo θ_0 se aproxima de zero, devido à perda de influência da superfície metálica. Este argumento foi o utilizado por (SCHELKUNOFF, 1941).

4.6 CAMPOS ELETROMAGNÉTICOS NA FRONTEIRA ENTRE AS REGIÕES I E II

Os campos eletromagnéticos do problema, obtidos ao resolver as equações de Maxwell separadamente para as regiões I e II, devem possuir os mesmos valores na interface entre estas duas regiões, como exposto em (60).

Para fins de brevidade, os campos elétricos e magnéticos parciais (por autovalor) serão expressos como o produto de duas funções, como dados nas equações (77)-(80).

$$E_{\theta I} = (\eta k C_3)_I^e R_I^m \Theta \quad (77)$$

$$H_{\phi I} = C_3^m R_I^m \Theta \quad (78)$$

$$E_{\theta II} = (\eta k C_9)_{II}^e R_{II}^m \Theta \quad (79)$$

$$H_{\phi II} = C_9^m R_{II}^m \Theta \quad (80)$$

As funções de uma única variável são dadas por (81)-(86).

$${}_I^m \Theta = P_{v_i}^1(\cos \theta) - P_{v_i}^1(-\cos \theta) \quad (81)$$

$$e_{\text{I}}^{\text{R}} = j \left(\frac{1}{\sqrt{ka}} J_{\nu_i - \frac{1}{2}}(ka) - \frac{v}{\sqrt{(ka)^3}} J_{\nu_i + \frac{1}{2}}(ka) \right) \quad (82)$$

$$m_{\text{I}}^{\text{R}} = \frac{1}{a} \sqrt{ka} J_{\nu_i + \frac{1}{2}}(ka) \quad (83)$$

$$m_{\text{II}}^{\text{R}} \Theta = P_{2n+1}^1(\cos \theta) \quad (84)$$

$$e_{\text{II}}^{\text{R}} = j \left(\frac{1}{\sqrt{ka}} H_{2n+\frac{1}{2}}^{(2)}(ka) - \frac{2n+1}{\sqrt{(ka)^3}} H_{2n+\frac{3}{2}}^{(2)}(ka) \right) \quad (85)$$

$$m_{\text{II}}^{\text{R}} = \frac{1}{a} \sqrt{ka} H_{2n+\frac{3}{2}}^{(2)}(ka) \quad (86)$$

4.6.1 Campo elétrico E_{θ}

O campo elétrico total na região I na região da interface é dado pela soma da onda TEM progressiva e sua reflexão – equação (56) – e da soma das infinitas ondas TM (ondas complementares), – equação (77) –, resultando na expressão presente em (87).

$$E_{\theta\text{I}}(a) = k\eta C_{12} \left[\frac{e^{-jka}}{ka \sin \theta} + \Gamma \frac{e^{jka}}{ka \sin \theta} + \sum_{i=1}^{+\infty} A_{\nu_i} e_{\text{I}}^{\text{R}} R_{\nu_i}(a) m_{\text{I}}^{\text{R}} \Theta_{\nu_i} \right] \quad (87)$$

O produto $k\eta C_{12}$ tem dimensão de $V \cdot m^{-1}$ e o coeficiente A_{ν_i} é a constante livre de cada modo das ondas complementares na Região I, sendo adimensional.

O valor dos coeficientes Γ e A_{ν_i} pode ser obtido em função de $E_{\theta\text{I}}(a)$ a partir da ortogonalidade das funções de Legendre de autovalores diferentes.

4.6.1.1 Coeficiente A_{ν_i} : constante livre das ondas complementares da região I

Normalizando a equação (87) por $k\eta C_{12}$ e multiplicando toda a equação por $m_{\text{I}}^{\text{R}} \Theta_{\nu_j}$ – que difere de $m_{\text{I}}^{\text{R}} \Theta_{\nu_j}$ apenas pelo índice – tem-se (88).

$$kaE'_{\theta I} m_1 \Theta_{vj} \sin \theta = e^{-jka} m_1 \Theta_{vj} + \Gamma e^{jka} m_1 \Theta_{vj} + \left(\sum_{i=1}^{+\infty} A_{vi} {}^e R_{vi}(a) m_1 \Theta_{vi} \right) m_1 \Theta_{vj} ka \sin \theta \quad (88)$$

$$\text{Onde } E'_{\theta I} = \frac{E_{\theta I}(a)}{k\eta C_{12}}.$$

Integrando a equação (88) entre θ_0 e $\pi - \theta_0$ e utilizando a propriedade da ortogonalidade das funções de Legendre de autovalores diferentes, tem-se (89).

$$ka \int_{\theta_0}^{\pi-\theta_0} E'_{\theta I} m_1 \Theta_{vj} \sin \theta = [e^{-jka} + \Gamma e^{jka}] \int_{\theta_0}^{\pi-\theta_0} m_1 \Theta_{vj} d\theta + ka A_{vj} {}^e R_{vj}(a) \int_{\theta_0}^{\pi-\theta_0} m_1 \Theta_{vj} m_1 \Theta_{vj} \sin \theta d\theta \quad (89)$$

A primeira e a terceira integrais de (89) possuem a forma do produto interno dada no apêndice 1 por (166), com função-peso $w = \sin \theta$. A segunda integral de (89) é a de uma função ímpar (como provado no apêndice 3) sobre um intervalo simétrico, resultando em um valor zero. Utilizando a notação de (166) para o produto interno de duas funções, o coeficiente A_{vj} fica dado por (90).

$$A_{vj} = \frac{(E'_{\theta I}, m_1 \Theta_{vj})}{{}^e R_{vj}(a) |m_1 \Theta_{vj}|^2} \quad (90)$$

4.6.1.2 Coeficiente de reflexão Γ

Seguindo o mesmo procedimento da seção 4.6.1.1, o coeficiente de reflexão fica dado por (91) segundo (MAKURIN e CHUBINSKII, 2007).

$$\Gamma = \exp(-jka) \left[\frac{ka(E'_{\theta I}, m_1 \Theta_0)}{2 \ln \left| \cotg \left(\frac{\theta_0}{2} \right) \right|} - \exp(-jka) \right] \quad (91)$$

4.6.1.3 Coeficiente B_n : constante livre das ondas complementares da região II

O campo elétrico total na região II é dado pela soma dos modos das ondas TM nessa

região, resultando na expressão (92).

$$E_{\theta II}(r) = k\eta C_{12} \sum_{n=0}^{+\infty} B_n {}^e R_n(r) {}^m \Theta_n \quad (92)$$

Onde o coeficiente B_n é adimensional e é a constante livre de cada modo das ondas complementares na Região II, sendo adimensional.

Normalizando a equação (92) por $k\eta C_{12}$, aplicando-a na fronteira $r = a$ e multiplicando toda a equação por ${}^m \Theta_n \sin \theta$ tem-se (93).

$$E'_{\theta II} {}^m \Theta_n \sin \theta = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} B_n {}^e R_n(a) {}^m \Theta_n \right) {}^m \Theta_n \sin \theta \quad (93)$$

$$\text{Onde } E'_{\theta II} = \frac{E_{\theta II}(a)}{k\eta C_{12}}.$$

Integrando a equação (93) entre θ_0 e $\pi - \theta_0$ e utilizando a propriedade da ortogonalidade das funções de Legendre de autovalores diferentes, tem-se (94).

$$\int_{\theta_0}^{\pi-\theta_0} E'_{\theta II} {}^m \Theta_n \sin \theta d\theta = B_n {}^e R_n(a) \int_{\theta_0}^{\pi-\theta_0} {}^m \Theta_n {}^m \Theta_n \sin \theta d\theta \quad (94)$$

Utilizando a notação de produto interno dada por (166) com a função-peso $w = \sin \theta$, os coeficientes B_n ficam dados por (95).

$$B_n = \frac{(E'_{\theta II}, {}^m \Theta_n)}{{}^e R_n(a) |{}^m \Theta_n|^2} \quad (95)$$

4.6.2 Campo magnético H_ϕ

O campo magnético total na região I é obtido da mesma forma que o elétrico, ao somar a expressão (57) com a expressão (78), produzindo (96).

$$H_{\phi I}(a) = \frac{C_{12}}{a} \left[\frac{e^{-jka}}{\sin \theta} - \Gamma \frac{e^{jka}}{\sin \theta} - \sum_{i=1}^{+\infty} A_{vi} {}^e R_{vi} {}^m \Theta_{vi} \right] \quad (96)$$

Onde o sinal negativo da terceira parcela é para obter um fluxo de potência que se propaga no sentido $-\hat{a}_r$.

O campo magnético na região II é dado pela soma dos modos das ondas TM nessa região, resultando na expressão (97).

$$H_{\phi II}(a) = \frac{C_{12}}{a} \sum_{n=0}^{+\infty} B_{n II} {}^m R_n(a) {}^m \Theta_n \quad (97)$$

4.6.3 Campo elétrico E_r

O campo elétrico radial, existente na região I e que deve continuar na região II, apresenta a forma geral dada por (45) e repetida em (98).

$$E_r = -j \frac{R}{\omega \epsilon r^2} \hat{E}_r(\theta) \quad (98)$$

Já o campo magnético associado é dado por (23) e repetido em (99).

$$H_\phi = \frac{1}{r} R(r) \Theta(\theta) \quad (99)$$

Comparando as equações (98) e (99) é possível perceber que o campo E_r atinge valores insignificantes muito mais rapidamente que o campo H_ϕ . Assim, pode-se considerar que $E_{rII} = 0$.

4.7 CONTINUIDADE DOS CAMPOS ELETROMAGNÉTICOS NA FRONTEIRA ENTRE AS REGIÕES I E II

Ao aplicar as expressões para o campo elétrico interno – equação (87) – e externo –

equação (92) – na equação de continuidade presente em (60), tem-se (100).

$$\frac{e^{-jka}}{ka \sin \theta} + \Gamma \frac{e^{jka}}{ka \sin \theta} + \sum_{i=1}^{+\infty} A_{vi} {}^e R_{vi}(a) {}^m \Theta_{vi} = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n {}^e R_n(a) {}^m \Theta_n \quad (100)$$

Aplicando as expressões para o campo magnético interno – equação (96) – e externo – equação (97) – na equação de continuidade presente em (60), tem-se (101).

$$\frac{e^{-jka}}{\sin \theta} - \Gamma \frac{e^{jka}}{\sin \theta} - \sum_{i=1}^{+\infty} A_{vi} {}^m R_{vi}(a) {}^m \Theta_{vi} = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n {}^m R_n(a) {}^m \Theta_n \quad (101)$$

Substituindo os coeficientes A_{vi} – equação (90) –, Γ – equação (91) – e B_n – equação (95) – na equação de continuidade de campo magnético na fronteira – equação (101) –, tem-se (102).

$$2 \frac{e^{-jka}}{\sin \theta} - \frac{ka (E'_{\theta I}, {}^m \Theta_0)}{2 \sin \theta \ln |\cotg(\frac{\theta_0}{2})|} - \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{(E'_{\theta I}, {}^m \Theta_{vi})}{{}_I D_{vi}(a) |{}^m \Theta_{vi}|^2} {}^m \Theta_{vi} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(E'_{\theta II}, {}^m \Theta_n)}{{}_{II} D_n(a) |{}^m \Theta_n|^2} {}^m \Theta_n \quad (102)$$

Onde ${}_I D_{vi}(a)$ e ${}_{II} D_n(a)$ são dados por (103).

$$\begin{aligned} {}_I D_{vi}(a) &= \frac{{}^e R_{vi}(a)}{{}^m R_{vi}(a)} \\ {}_{II} D_n(a) &= \frac{{}^e R_n(a)}{{}^m R_n(a)} \end{aligned} \quad (103)$$

4.8 CAMPOS INTERNOS E EXTERNOS DADOS POR UM ÚNICO CONJUNTO DE AUTOFUNÇÕES

Admitindo que o campo $E'_{\theta II}(a) = E'_{\theta I}(a)$ pode ser descrito pelas autofunções na região I, como dado por (104).

$$E'_{\theta I}(a) = E'_{\theta II}(a) = \sum_{j=0}^{\infty} M_j {}^m \Theta_{vj} \quad (104)$$

Substituindo-se (104) na equação (102) tem-se (105).

$$\begin{aligned} 2 \frac{e^{-jka}}{\sin \theta} - \frac{ka \left(\sum_{j=0}^{\infty} M_j \frac{m_{I\theta_{vj}}}{I\theta_0} \right)}{2 \sin \theta \ln \left| \cotg \left(\frac{\theta_0}{2} \right) \right|} - \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\left(\sum_{j=0}^{\infty} M_j \frac{m_{I\theta_{vj}}}{I\theta_{vi}} \right)}{I D_{vi}(a) \left| \frac{m_{I\theta_{vi}}}{I\theta_{vi}} \right|^2} m_{I\theta_{vi}} \\ = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\sum_{j=0}^{\infty} M_j \frac{m_{I\theta_{vj}}}{II\theta_n} \right)}{II D_n(a) \left| \frac{m_{II\theta_n}}{II\theta_n} \right|^2} m_{II\theta_n} \end{aligned} \quad (105)$$

Por se tratar de uma operação linear, o produto interno de um somatório por uma outra função é igual ao somatório dos produtos internos de cada parcela da série pela outra função e (105) pode ser reescrito como (106).

$$\begin{aligned} 2 \frac{e^{-jka}}{\sin \theta} - \frac{ka M_0 \left| \frac{m_{I\theta_0}}{I\theta_0} \right|^2}{2 \sin \theta \ln \left| \cotg \left(\frac{\theta_0}{2} \right) \right|} - \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{M_i}{I D_{vi}(a)} m_{I\theta_{vi}} \\ = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sum_{j=0}^{\infty} M_j \left(\frac{m_{I\theta_{vj}}}{I\theta_{vj}}, \frac{m_{II\theta_n}}{II\theta_n} \right)}{II D_n(a) \left| \frac{m_{II\theta_n}}{II\theta_n} \right|^2} m_{II\theta_n} \end{aligned} \quad (106)$$

As constantes presentes na segunda parcela do lado esquerdo da equação (106) podem ser aglutinadas numa definição *ad hoc* de M_0 , dada por (107).

$$M'_0 = \frac{ka M_0 \left| \frac{m_{I\theta_0}}{I\theta_0} \right|^2}{2 \ln \left| \cotg \left(\frac{\theta_0}{2} \right) \right|} \quad (107)$$

Multiplicando-se a equação (106) por $m_{I\theta_{vp}}$ – que difere de $m_{I\theta_{vi}}$ apenas pelo índice – e incluindo (107) tem-se (108).

$$\begin{aligned} [2e^{-jka} - M'_0] m_{I\theta_{vp}} - \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{M_i}{I D_{vi}(a)} m_{I\theta_{vi}} m_{I\theta_{vp}} \sin \theta \\ = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sum_{j=0}^{\infty} M_j \left(\frac{m_{I\theta_{vj}}}{I\theta_{vj}}, \frac{m_{II\theta_n}}{II\theta_n} \right)}{II D_n(a) \left| \frac{m_{II\theta_n}}{II\theta_n} \right|^2} m_{II\theta_n} m_{I\theta_{vp}} \sin \theta \end{aligned} \quad (108)$$

Integrando (108) no intervalo θ_0 a $\pi - \theta_0$ e utilizando a notação de produto interno dada por (166) com a função-peso $w = \sin \theta$, esta expressão passa a ser dada por (109).

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{M_i(m_I\Theta_{vi}, m_I\Theta_{vp})}{{}_I D_{vi}(a)} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sum_{j=0}^{\infty} M_j(m_I\Theta_{vj}, m_{II}\Theta_n)}{{}_{II} D_n(a) |m_{II}\Theta_n|^2} (m_{II}\Theta_n, m_I\Theta_{vp}) = P_p \quad (109)$$

Onde P_p é dado por (110).

$$P_p = [2e^{-jka} - M'_0] \int_{\theta_0}^{\pi-\theta_0} m_I\Theta_{vp} d\theta \quad (110)$$

Substituindo o índice i por m na primeira parcela do lado esquerdo da equação (109) e colocando os termos presentes no somatório externo da segunda parcela do lado esquerdo desta equação para o interior do somatório interno desta mesma parcela tem-se (111).

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{M_m(m_I\Theta_{vm}, m_I\Theta_{vp})}{{}_I D_{vm}(a)} + \sum_{n=0}^{+\infty} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{M_j(m_I\Theta_{vj}, m_{II}\Theta_n)(m_{II}\Theta_n, m_I\Theta_{vp})}{{}_{II} D_n(a) |m_{II}\Theta_n|^2} \right] \right\} = P_p \quad (111)$$

Intercambiando os somatórios da segunda parcela do lado esquerdo da equação (111) e substituindo o índice j por m , tem-se (112).

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{M_m(m_I\Theta_{vm}, m_I\Theta_{vp})}{{}_I D_{vm}(a)} + \sum_{m=0}^{+\infty} \left\{ M_m \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(m_I\Theta_{vm}, m_{II}\Theta_n)(m_I\Theta_{vp}, m_{II}\Theta_n)}{{}_{II} D_n(a) |m_{II}\Theta_n|^2} \right] \right\} = P_p \quad (112)$$

Executando o somatório da primeira parcela de (112), tem-se (113).

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{M_m(m_I\Theta_{vm}, m_I\Theta_{vp})}{{}_I D_{vm}(a)} = \frac{|m_I\Theta_{vm}|^2}{{}_I D_{vm}(a)} M_m \quad (113)$$

Para que o lado esquerdo de (112) continue sendo dado por um somatório, o resultado em (113) será reescrito como um somatório, na forma dada por (114).

$$\frac{|m_I\Theta_{vm}|^2}{{}_I D_{vm}(a)} M_m = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{|m_I\Theta_{vp}|^2}{{}_I D_{vp}(a)} M_m \delta_{pm} \quad (114)$$

Onde δ_{pm} é a notação delta de Kronecker, definida segundo (115).

$$\delta_{pm} = \begin{cases} 1, & p = m \\ 0, & p \neq m \end{cases} \quad (115)$$

Substituindo o somatório modificado presente em (114) na equação original em (112), e agrupando os dois somatórios tem-se (116).

$$\sum_{m=0}^{+\infty} M_m \left\{ \frac{|{}^m_I\Theta_{vp}|^2}{{}_I D_{vp}(a)} \delta_{pm} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{({}^m_I\Theta_{vm}, {}^m_{II}\Theta_n)({}^m_I\Theta_{vp}, {}^m_{II}\Theta_n)}{{}_{II} D_n(a) |{}^m_{II}\Theta_n|^2} \right] \right\} = P_m \quad (116)$$

Um sistema linear é definido através de (117).

$$[A]_m [x]_m = [b]_m \quad (117)$$

Onde $[A]_m$ é uma matriz quadrada com m^2 elementos e $[x]_m$ e $[b]_m$ são vetores coluna com m linhas. Os elementos de $[A]$, $[x]$ e $[b]$ devem obedecer à (118).

$$\sum_{j=1}^m (a_{ij} x_j) = b_i \quad (118)$$

Onde a_{ij} , b_j e c_i são os elementos de $[A]$, $[x]$ e $[b]$, respectivamente.

Por inspeção é possível perceber que a equação (116) representa um sistema composto de infinitas equações lineares, enumeradas pelo índice m . A matriz $[A]$ tem seus elementos dados por (119).

$$a_{pm} = \frac{|{}^m_I\Theta_{vp}|^2}{{}_I D_{vp}(a)} \delta_{pm} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{({}^m_I\Theta_{vm}, {}^m_{II}\Theta_n)({}^m_I\Theta_{vp}, {}^m_{II}\Theta_n)}{{}_{II} D_n(a) |{}^m_{II}\Theta_n|^2} \right] \quad (119)$$

Os vetores coluna $[M]$ (no lugar de $[x]$ em (117)) e $[P]$ (no lugar de $[b]$) são dados por (120).

$$\begin{aligned} [M] &= [M_0 \quad \cdots \quad M_m]^T \\ [P] &= [P_0 \quad \cdots \quad P_m]^T \end{aligned} \quad (120)$$

Onde $[]^T$ é a operação de transposição do vetor/matriz.

4.9 RESOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES

O sistema de infinitas equações lineares obtido na seção 4.8 deve ser resolvido, isto é, os coeficientes M_j , primeiro definidos em (104) devem ser obtidos.

Se o sistema fosse finito, sua resolução utilizaria de métodos diretos, como a inversão da matriz $[A]$ ou, quando em busca de rapidez de computação, métodos numéricos. Como este sistema é infinito, sua resolução será dada pelo método da redução.

O método da redução consiste em realizar um truncamento no sistema linear infinito, tornando-o finito, e então resolver através de um método adequado. Assim como nas séries infinitas, a exatidão do resultado aumenta quanto mais termos forem considerados antes do truncamento.

Segundo (SHIVAKUMAR e WONG, 1973) o método da redução pode ser aplicado se a matriz $[A]$ do sistema da equação (117) puder ser classificada como estritamente diagonal dominante, o que significa:

- Os elementos da diagonal principal devem respeitar (121).

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{|a_{ii}|} < \infty \quad (121)$$

- Os demais elementos das linha devem satisfazer a relação dada por (122).

$$\sigma_i |a_{ii}| = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\infty} |a_{ij}| \leq M, \quad 0 \leq \sigma_i < 1, \quad i = 1, 2, \dots, \quad M < \infty \quad (122)$$

- Os elementos do vetor coluna $[b]$ apresentam limites (*bounded sequence*).

Sob essas condições o erro causado pelo n-ésimo truncamento é proporcional à soma dos inversos dos elementos da diagonal principal.

4.10 IMPEDÂNCIA DE ENTRADA

4.10.1 Tensão entre dois cones

A tensão V_{AB} entre dois pontos A e B do espaço é calculada através de (123).

$$V_{AB} = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (123)$$

Onde $d\vec{l}$ é o caminho de integração.

A tensão de interesse é aquela existente entre os dois cones, medida entre dois pontos A e B presentes num meridiano de uma esfera de raio r_0 infinitesimal que engloba $r = 0$. Os pontos A e B estão contidos na superfície metálica dos cones da antena, de forma que a tensão de entrada é dada por (124).

$$V(kr) = - \int_{\theta_0}^{\pi-\theta_0} E_{\theta} r_0 d\theta \quad (124)$$

O campo elétrico E_{θ} na região I foi estabelecido em (87), sendo repetido em (125).

$$E_{\theta I}(r_0) = k\eta C_{12} \left[\frac{e^{-jkr_0}}{kr_0 \sin \theta} + \Gamma \frac{e^{jkr_0}}{kr_0 \sin \theta} + \sum_{i=1}^{+\infty} A_{vi} {}_iR_{vi}(r_0) {}_i^m\Theta_{vi} \right] \quad (125)$$

A aplicação de (125) em (124) resulta em (126).

$$V(kr) = -\eta C_{12} \left\{ [e^{-jkr_0} + \Gamma e^{jkr_0}] \int_{\theta_0}^{\pi-\theta_0} \frac{1}{\sin \theta} d\theta + kr_0 A_{vi} {}_iR_{vi}(r_0) \int_{\theta_0}^{\pi-\theta_0} {}_i^m\Theta_{vi} d\theta \right\} \quad (126)$$

Fazendo o raio r_0 infinitesimal, a tensão entre dois cones fica dada por:

$$V(kr) = 2\eta C_{12} [1 + \Gamma] \ln \left| \cotg \left(\frac{\theta_0}{2} \right) \right| \quad (127)$$

4.10.2 Corrente no cone

A corrente de entrada é definida através da lei de Ampère, sendo dada por (128).

$$I_{in} = \int_C^D \vec{H} \cdot d\vec{l} \quad (128)$$

Onde o caminho de integração $d\vec{l}$ deve englobar a superfície metálica do cone de forma a somar as contribuições do campo causado pela corrente sobre a superfície do cone. Assim, $d\vec{l}$ é dado por uma translação azimutal na esfera infinitesimal de raio r_0 e os pontos C e D formam um caminho fechado. A corrente em (128) é então dada por (129).

$$I_{in} = \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} H_\phi r_0 \sin \theta d\phi \quad (129)$$

H_ϕ na região I é dado por (96) e repetido em (130).

$$H_{\phi I}(r_0) = \frac{C_{12}}{r_0} \left[\frac{e^{-jkr_0}}{\sin \theta} - \Gamma \frac{e^{jkr_0}}{\sin \theta} - \sum_{i=1}^{+\infty} A_{vi} {}^m R_{vi} {}^m \Theta_{vi} \right] \quad (130)$$

Assim, a corrente de entrada é dada então por (131).

$$I_{in} = 2\pi C_{12} \left\{ e^{-jkr_0} - \Gamma e^{jkr_0} - \sum_{i=1}^{+\infty} \left[A_{vi} {}^m R_{vi} \left(\int_{\theta_0}^{\pi-\theta_0} {}^m \Theta_{vi} \sin \theta d\theta \right) \right] \right\} \quad (131)$$

A função de Bessel, quando $\nu \rightarrow \infty$, pode ser aproximada através de (132). (NIST, 2014) (fórmula 10.37.1).

$$J_\nu(z) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}} \left(\frac{ez}{2\nu} \right)^\nu \quad (132)$$

Assim, a função ${}^e R$ é aproximada por (133).

$${}^m_1R(r) \approx \left[\frac{e^{\nu+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}(2\nu+1)^\nu} \right] (kr)^\nu \quad (133)$$

Como $\nu \rightarrow \infty$ para representar as ondas TM complementares a função ${}^m_1R(r) \rightarrow 0$.

Assim, o somatório em (131) tende a zero e a corrente em um cone fica dada por (134).

$$I_{in} = 2\pi C_{12}\{1 - \Gamma\} \quad (134)$$

4.10.3 Impedância de entrada

A impedância de entrada de uma antena é definida através de (135).

$$Z_{in} = \lim_{kr \rightarrow 0} \frac{V(kr)}{I(kr)} \quad (135)$$

Onde $V(kr)$ é a tensão entre os cones e $I(kr)$, a corrente no cone, assumindo uma excitação harmônica.

Substituindo os resultados obtidos em (127) e em (134), a equação (135) passa a ser dada por (136).

$$Z_{in} = \lim_{kr \rightarrow 0} \left\{ \frac{2\eta C_{12}[1 + \Gamma] \ln \left| \cotg \left(\frac{\theta_0}{2} \right) \right|}{2\pi C_{12}\{1 - \Gamma\}} \right\} \quad (136)$$

Avaliando o limite em (136), tem-se (137).

$$Z_{in} = \left(\frac{\eta}{\pi} \ln \left| \cotg \left(\frac{\theta_0}{2} \right) \right| \right) \left(\frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma} \right) \quad (137)$$

Se a antena bicônica possuir um tamanho infinito ($a \rightarrow \infty$), não ocorreriam reflexões e $\Gamma = 0$. A impedância de entrada da antena bicônica infinita seria então dada por (138).

$$Z_{in}^{\infty} = \frac{\eta}{\pi} \ln \left| \cotg \left(\frac{\theta_0}{2} \right) \right| \quad (138)$$

4.10.4 Escalamento dos resultados

Os resultados obtidos neste trabalho permanecem com uma constante livre C_{12} que, para uma tensão imposta V_{in} nos terminais de entrada é determinada através da aplicação direta de (127), obtendo (139) ao fazer $kr \rightarrow 0$.

$$C_{12} = \frac{V_{in}}{2\eta(1 + \Gamma) \ln \left| \cotg \left(\frac{\theta_0}{2} \right) \right|} \quad (139)$$

4.11 ALGORITMO DE RESOLUÇÃO NUMÉRICA

A impedância de entrada e o diagrama de radiação da antena monocônica podem ser calculados a partir destes passos:

- 1) Definir as propriedades do meio: permissividade elétrica ϵ , permeabilidade magnética μ .
- 2) Especificar o ângulo de abertura da antena θ_0 , o comprimento do cone a , a frequência de trabalho f e a tensão de alimentação V_{in} .
- 3) Calcular as quantidades derivadas da primeira: o número de onda k , a frequência angular ω e a impedância do espaço η .
- 4) Definir a quantidade N de autovalores a serem utilizados e o raio máximo de análise $r_{m\acute{a}x}$ (campo distante).
- 5) Obter os zeros da função $m_l^0(\nu) = P_\nu^0(\cos \theta_0) + P_\nu^0(-\cos \theta_0)$, construindo a lista de autovalores internos ν_i . Procurar uma quantidade N de autovalores.
- 6) Construir a lista de autovalores externos através da regra $\nu_m = 2m + 1$, onde $m = \{0, 1, \dots, N\}$.
- 7) Construir tabelas de valores das funções:

- a. ${}^m\theta(v, \theta) = P_{v_i}^1(\cos \theta) + P_{v_i}^1(-\cos \theta)$, $\theta_0 \leq \theta \leq \pi - \theta_0$, $v_i = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$
- b. ${}^e\theta(v, \theta) = P_{v_i}^0(\cos \theta) + P_{v_i}^0(-\cos \theta)$, $\theta_0 \leq \theta \leq \pi - \theta_0$, $v_i = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$
- c. ${}^eR_{v_i}(v, r) = j \left(\frac{1}{\sqrt{kr}} J_{v_i - \frac{1}{2}}(kr) - \frac{v}{\sqrt{(kr)^3}} J_{v_i + \frac{1}{2}}(kr) \right)$, $0 \leq r \leq r_{\text{máx}}$, $v_i = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$
- d. ${}^mR(v, r) = \frac{1}{r} \sqrt{kr} J_{v_i + \frac{1}{2}}(kr)$, $0 \leq r \leq r_{\text{máx}}$, $v_i = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$
- e. ${}^m\theta(n, \theta) = P_n^1(\cos \theta)$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $n = \{1, 3, \dots, 2N + 1\}$
- f. ${}^eR(n, r) = j \left(\frac{1}{\sqrt{kr}} H_{n - \frac{1}{2}}^{(2)}(kr) - \frac{2n+1}{\sqrt{(kr)^3}} H_{n + \frac{1}{2}}^{(2)}(kr) \right)$, $0 \leq r \leq r_{\text{máx}}$, $n = \{1, 3, \dots, 2N + 1\}$
- g. ${}^mR(n, r) = \frac{1}{r} \sqrt{kr} H_{n + \frac{1}{2}}^{(2)}(kr)$, $0 \leq r \leq r_{\text{máx}}$, $v_m = \{1, 3, \dots, 2N + 1\}$

8) Calcular os campos utilizando as expressões:

- a. $E_{\theta I} = (\eta k C_3) {}^eR_{v_i} {}^m\theta_{v_i}$
- b. $H_{\phi I} = C_3 {}^mR_{v_i} {}^m\theta_{v_i}$
- c. $E_{\theta II} = (\eta k C_9) {}^eR_n {}^m\theta_n$
- d. $H_{\phi II} = C_9 {}^mR_n {}^m\theta_n$

9) Calcular as razões das funções radiais interna e externa

- a. ${}_I D_{v_i}(a) = \frac{{}^eR_{v_i}(a)}{{}^mR_{v_i}(a)}$, $v_i = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$
- b. ${}_{II} D_n(a) = \frac{{}^eR_n(a)}{{}^mR_n(a)}$, $n = \{1, 3, \dots, 2N + 1\}$

10) Calcular o módulo das funções de θ :

- a. $|{}^m\theta_{v_p}|^2 = \int_{\theta_0}^{\pi - \theta_0} ({}^m\theta_{v_p})^2 \sin \theta d\theta$, $v_p = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$
- b. $|{}^m\theta_n|^2 = \int_{\theta_0}^{\pi - \theta_0} ({}^m\theta_n)^2 \sin \theta d\theta$, $n = \{1, 3, \dots, 2N + 1\}$

11) Calcular o produto interno das funções de θ :

- a. $({}^m\theta_{v_m}, {}^m\theta_n) = \int_{\theta_0}^{\pi - \theta_0} {}^m\theta_{v_m} {}^m\theta_n \sin \theta d\theta$, $v_m = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$, $n = \{1, 3, \dots, 2N + 1\}$
- b. $({}^m\theta_{v_p}, {}^m\theta_n) = \int_{\theta_0}^{\pi - \theta_0} {}^m\theta_{v_p} {}^m\theta_n \sin \theta d\theta$, $v_p = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$, $n = \{1, 3, \dots, 2N + 1\}$

12) Utilizando os resultados dos itens 9, 10 e 11, construir a matriz de solução

$[A]_{p \times m}$ do problema através do termo geral dado por:

$$a_{pm} = \frac{|{}^m\theta_{v_p}|^2}{{}_I D_{v_p}(a)} \delta_{pm} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{({}^m\theta_{v_m}, {}^m\theta_n) ({}^m\theta_{v_p}, {}^m\theta_n)}{{}_{II} D_n(a) |{}^m\theta_n|^2} \right]$$

onde δ_{pm} implica que esta parcela só é incluída quando o elemento pertence à diagonal principal.

13) Calcular o termo M'_0 .

$$M'_0 = \frac{kaM_0 |{}^m\theta_0|^2}{2 \ln \left| \cotg \left(\frac{\theta_0}{2} \right) \right|}$$

14) Construir o vetor coluna de solução $[P]_{p \times 1}$, cujo termo geral é dado por:

$$p_p = [2e^{-jka} - M'_0] \int_{\theta_0}^{\pi-\theta_0} m'_1 \Theta_{vp} d\theta, \quad v_p = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$$

15) Resolver o sistema linear utilizando quaisquer métodos numéricos:

$$[A][M] = [P]$$

16) Escrever o campo elétrico na fronteira como função dos coeficientes M_j derivados

$$E'_{\theta I}(a) = \sum_{j=0}^{\infty} M_j m'_1 \Theta_{vj}$$

17) Calcular os coeficientes para os campos internos, externos e o coeficiente de reflexão:

$$a. A_{vj} = \frac{(E'_{\theta I, m'_1 \Theta_{vj}})}{e_{1R_{vj}}(a) |m'_1 \Theta_{vj}|^2}$$

$$b. B_n = \frac{(E'_{\theta II, m''_1 \Theta_n})}{e_{1R_n}(a) |m''_1 \Theta_n|^2}$$

$$c. \Gamma = \exp(-jka) \left[\frac{ka(E'_{\theta I, m'_1 \Theta_0})}{2 \ln |\cotg(\frac{\theta_0}{2})|} - \exp(-jka) \right]$$

18) Calcular a constante C_{12} a partir da tensão de entrada:

$$C_{12} = \frac{V_{in}}{2\eta(1 + \Gamma) \ln |\cotg(\frac{\theta_0}{2})|}$$

19) Expressar os campos internos e externos com os coeficientes calculados em 17:

$$a. E_{\theta I}(r) = k\eta C_{12} \left[\frac{e^{-jkr}}{kr \sin \theta} + \Gamma \frac{e^{jkr}}{kr \sin \theta} + \sum_{i=1}^{+\infty} A_{vi} e_{1R_{vi}}(r) m'_1 \Theta_{vi} \right]$$

$$b. H_{\phi I}(r) = \frac{C_{12}}{r} \left[\frac{e^{-jkr}}{\sin \theta} - \Gamma \frac{e^{jkr}}{\sin \theta} - \sum_{i=1}^{+\infty} A_{vi} e_{1R_{vi}} m'_1 \Theta_{vi} \right]$$

$$c. E_{\theta II}(r) = k\eta C_{12} \sum_{n=0}^{+\infty} B_n e_{1R_n}(r) m''_1 \Theta_n$$

$$d. H_{\phi II}(a) = \frac{C_{12}}{a} \sum_{n=0}^{+\infty} B_n m''_1 R_n(a) m''_1 \Theta_n$$

20) Calcular a impedância de entrada a partir do coeficiente de reflexão:

$$Z_{in} = \left(\frac{\eta}{\pi} \ln |\cotg(\frac{\theta_0}{2})| \right) \left(\frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma} \right)$$

5 CARACTERÍSTICAS DA ANTENA MONOCÔNICA

5.1 DIAGRAMA DE IRRADIAÇÃO

O diagrama de irradiação de uma antena é definido por (IEEE, 2013) como o gráfico ou fórmula que expressa a distribuição espacial de uma quantidade eletromagnética gerada pela antena, geralmente proporcional aos campos ou à potência. Um diagrama de fase também pode ser realizado.

O diagrama de radiação é usualmente obtido para a região de campo distante da antena, definido por (IEEE, 2013) como a região na qual a distribuição angular do campo é independente da distância da antena. Para antenas eletricamente longas, onde a maior dimensão da antena d é muito maior que o comprimento de onda λ sendo emitido, a região de campo distante se inicia a uma distância $2 \frac{d^2}{\lambda}$ da antena.

A **Tabela 2** mostra os diagramas de irradiação para a antena em diferentes ângulos de abertura: $\theta_0 = 1^\circ$ e $\theta_0 = 60^\circ$.

Tabela 2 – Valores de parâmetros para obter o diagrama de irradiação

Tipo	Parâmetro 1	Parâmetro 2	Figura utilizada
Diagrama de Irradiação	$\theta_0 = 1^\circ$	ka = 1	Figura 5
		ka = 4	Figura 6
		ka = 6	Figura 7
		ka = 60	Figura 8
	$\theta_0 = 60^\circ$	ka = 1	Figura 9
		ka = 4	Figura 10
		ka = 6	Figura 11
		ka = 60	Figura 12

Figura 5 – Diagrama de irradiação: $\theta_0 = 1^\circ$ e $ka = 1$

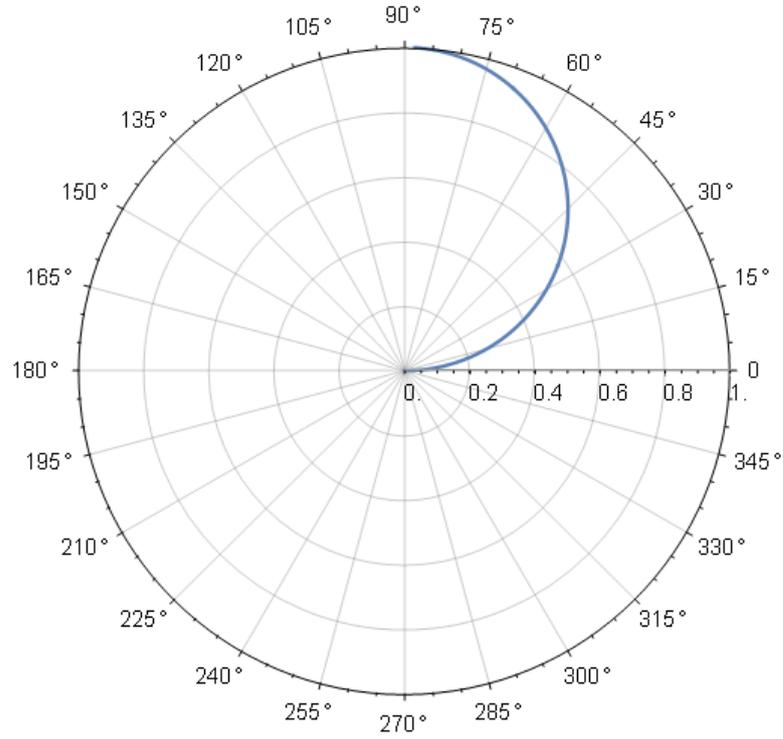


Figura 6 – Diagrama de irradiação: $\theta_0 = 1^\circ$ e $ka = 4$

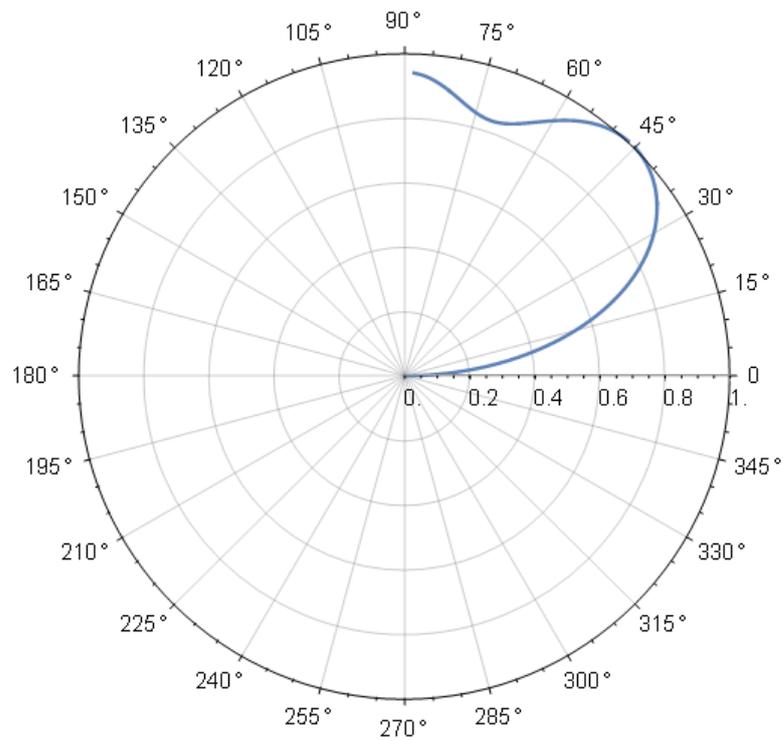


Figura 7 – Diagrama de irradiação: $\theta_0 = 1^\circ$ e $ka = 6$

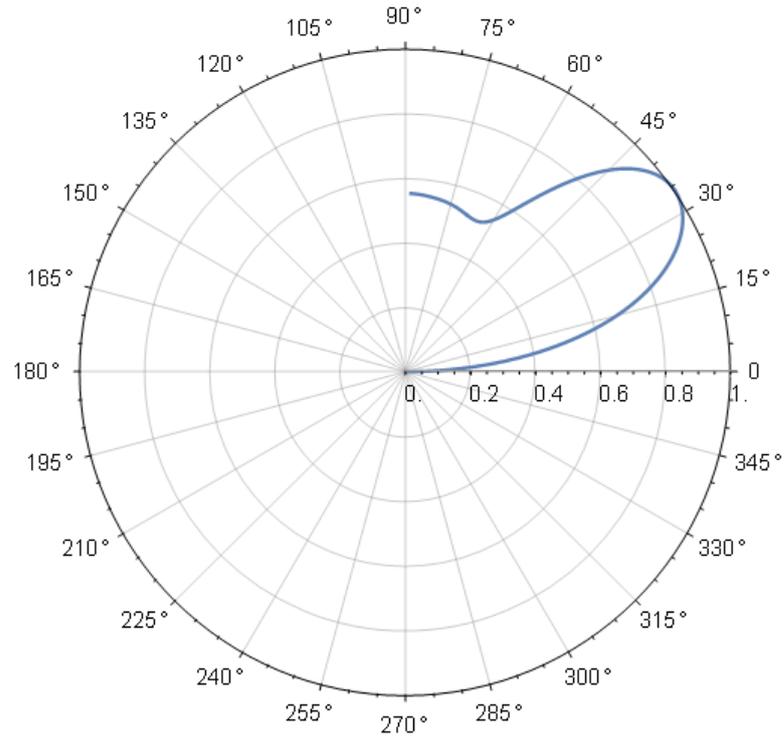
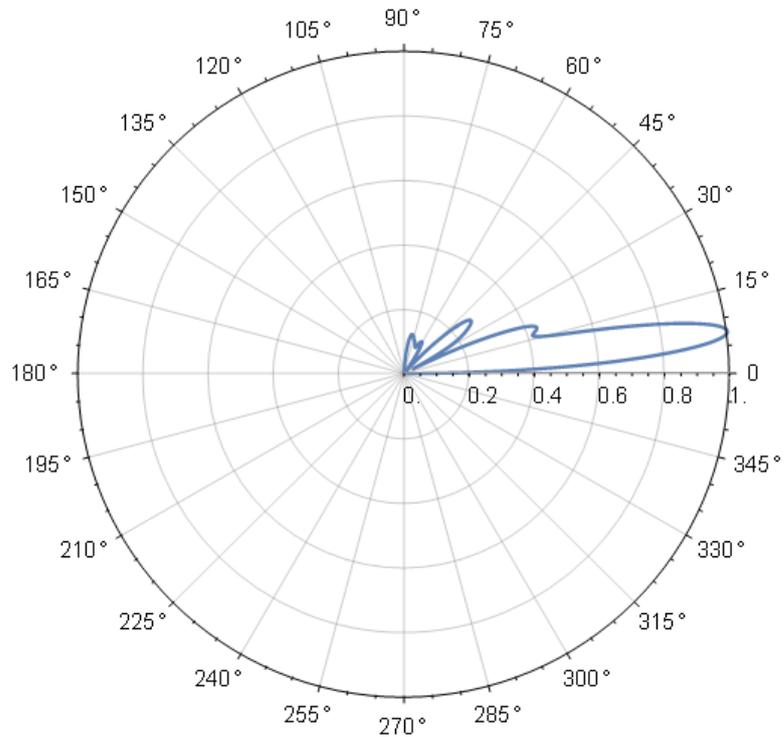


Figura 8 – Diagrama de irradiação: $\theta_0 = 1^\circ$ e $ka = 60$



O diagrama de irradiação apresenta na **Figura 5**, feito para uma antena com ângulo de

abertura $\theta_0 = 1^\circ$ e comprimento elétrico $ka = 1$, mostra que a antena bicônica tem um diagrama de radiação idêntico ao de um dipolo curto, o que é esperado, já que o ângulo de abertura é muito pequeno e o monocone se confunde com um monopolo. Conforme o comprimento elétrico da antena aumenta (a frequência de excitação aumenta), o diagrama de radiação se deforma, apresentando lóbulos e mudando a direção de máxima irradiação, que se distancia do plano terra, como pode ser visto na sequência formada pelas **Figura 6**, **Figura 7** e **Figura 8**.

Figura 9 – Diagrama de irradiação: $\theta_0 = 60^\circ$ e $ka = 1$

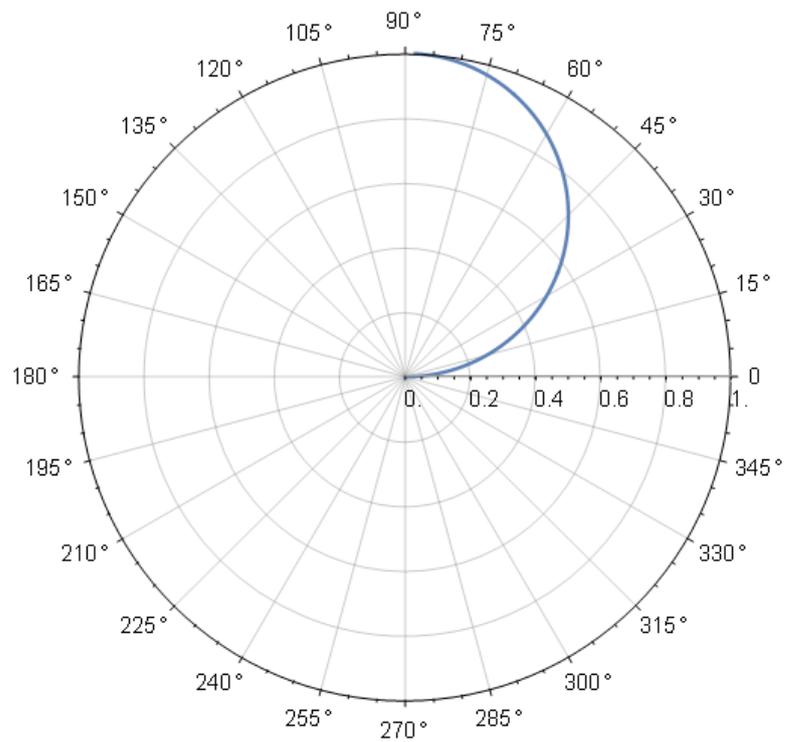


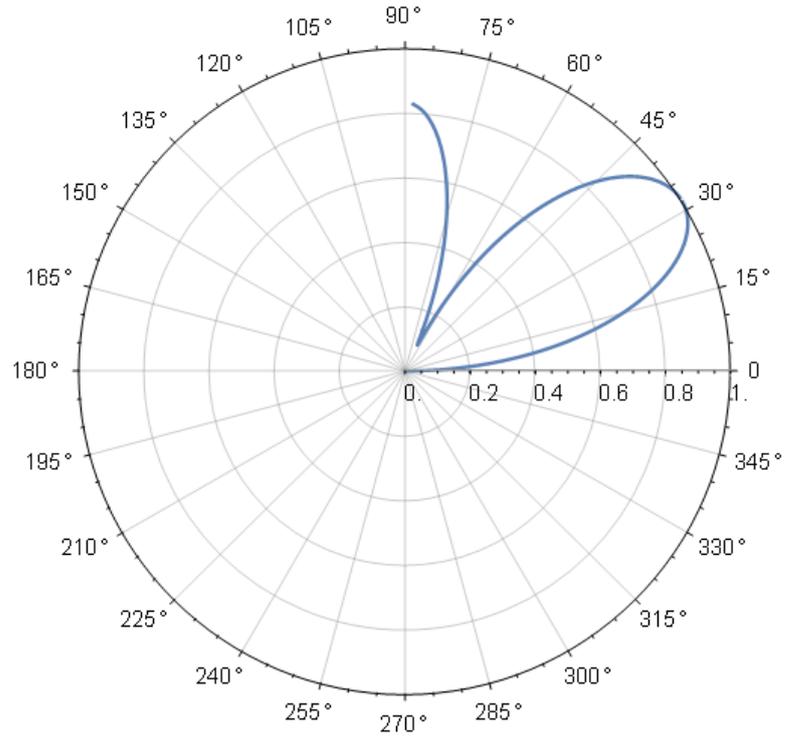
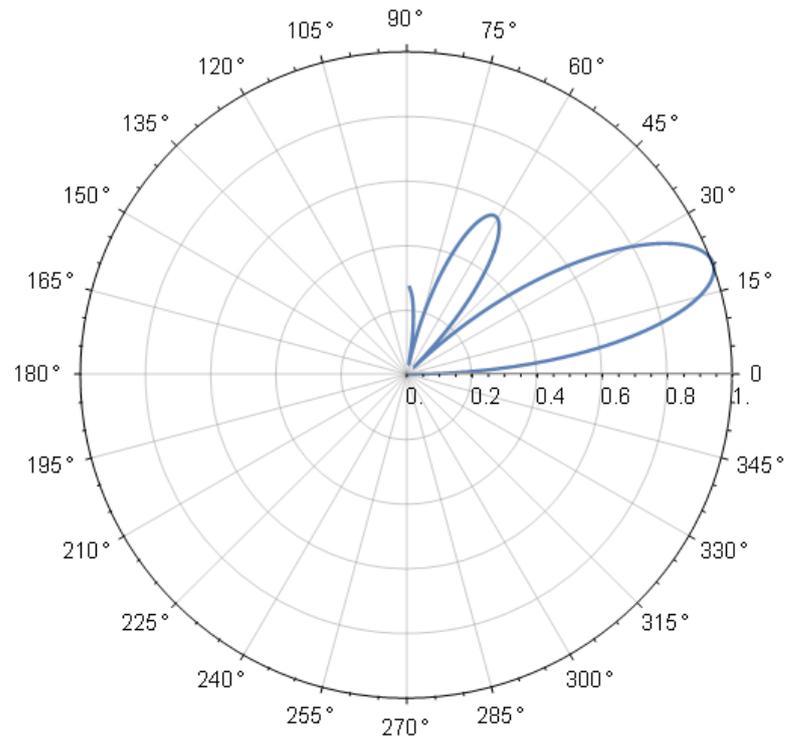
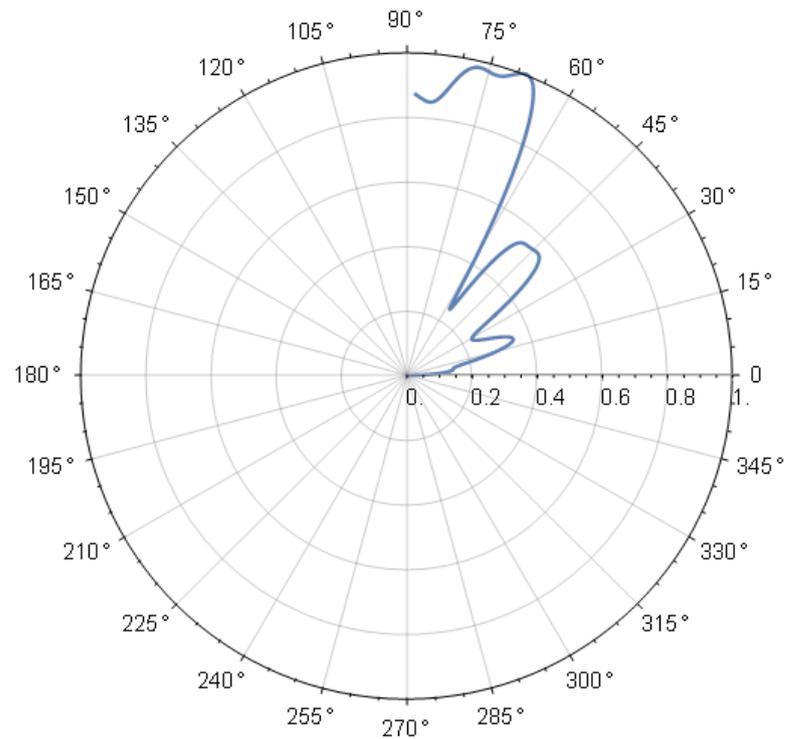
Figura 10 – Diagrama de irradiação: $\theta_0 = 60^\circ$ e $ka = 4$ Figura 11 – Diagrama de irradiação: $\theta_0 = 60^\circ$ e $ka = 6$ 

Figura 12 – Diagrama de irradiação: $\theta_0 = 60^\circ$ e $ka = 60$



O diagrama de irradiação da **Figura 9**, para uma antena de ângulo de abertura $\theta_0 = 60^\circ$ e comprimento elétrico $ka = 1$ é idêntico àquele presente na **Figura 5**. Conforme aumenta o comprimento elétrico, o diagrama se deforma com o aparecimento de lóbulos e aumento do ângulo que aponta na direção de maior irradiação, como pode ser visto nas **Figura 10** e **Figura 11**. Entretanto, para o comprimento elétrico $ka = 60$ na **Figura 12**, a direção de maior irradiação é mais próxima ao plano terra do que para os comprimentos elétricos menores.

6 RECIPROCIDADE DE ANTENAS

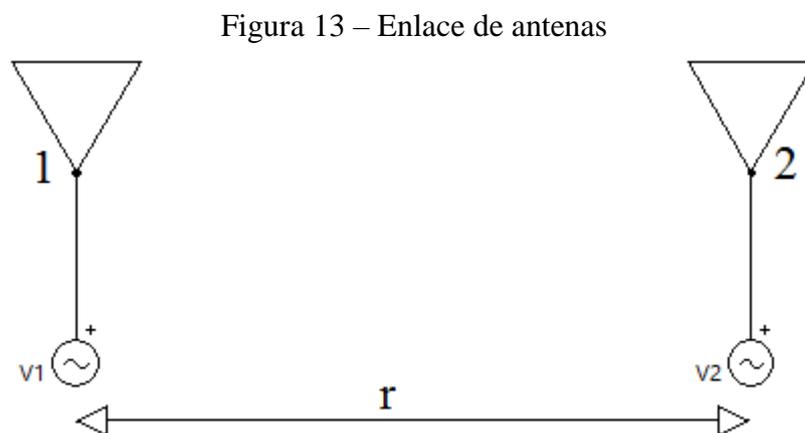
6.1 RECIPROCIDADE DOS DIAGRAMAS DE RECEPÇÃO E TRANSMISSÃO DE UMA ANTENA NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

Dados dois conjuntos distintos de densidades de corrente elétricas: \vec{J}_a e \vec{J}_b ; e magnéticas: \vec{J}_a^m e \vec{J}_b^m e os campos produzidos por essas correntes, \vec{E}_a , \vec{H}_a , \vec{E}_b e \vec{H}_b , no interior de uma região de volume v , limitada por uma superfície S , o teorema da reciprocidade pode ser enunciado na forma dada por (140). (ESTEVES, 1980)

$$\vec{E}_a \cdot \vec{J}_b - \vec{H}_a \cdot \vec{J}_b^m = \vec{E}_b \cdot \vec{J}_a - \vec{H}_b \cdot \vec{J}_a^m \quad (140)$$

Que acaba por indicar que se uma densidade de corrente \vec{J}_a produz um campo \vec{E}_a então um campo $\vec{E}_b = \vec{E}_a$ deve produzir uma densidade de corrente $\vec{J}_b = \vec{J}_a$.

Para avaliar se um enlace de antenas constituído por duas antenas de um mesmo tipo é recíproco, considera-se o enlace da Figura 13, onde as antenas são separadas por uma distância r .



A cada uma das antenas pode ser atribuído um ganho de transmissão G_t , definido por (IEEE, 2013) como a razão entre a intensidade de radiação em uma determinada direção e a

intensidade de radiação resultante se toda a potência que entra na antena se fosse irradiada por um radiador isotrópico.

A intensidade de radiação é a densidade de potência por esterradiano – 1 sr sendo a área na superfície de uma esfera de raio r numericamente igual à área de quadrado de lado r – de forma que é possível definir o ganho como uma razão de densidades de potência, como expresso por (141), sem prejuízo de generalidade.

$$G(\theta, \phi) = \frac{S(\theta, \phi)}{\frac{P_t}{4\pi d^2}} \quad (141)$$

Onde S é a densidade de potência irradiada, P_t é a potência total que entra na antena e d , o raio da esfera formada pela frente de onda irradiada.

Como característica de recepção, a área efetiva da antena A_r é definida por (IEEE, 2013) como a razão entre a potência disponível nos terminais da antena e a densidade de potência de uma onda plana incidente na antena a partir de uma dada direção e com correta polarização, como expresso em (142).

$$A_r = \frac{P_r}{S_{inc}} \quad (142)$$

Onde P_r é a potência recebida pela antena e S_{inc} , a densidade de potência incidente.

Tomando a distância r entre as antenas como o raio da esfera d presente em (141) e substituindo a expressão em (142), pode-se escrever a potência recebida pela antena receptora como dado em (143).

$$P_r = A_r \frac{G_t P_t}{4\pi r^2} \quad (143)$$

Considerando o enlace recíproco e bidirecional, isto é, as antenas 1 e 2 podem ser transmissora e receptora, respectivamente ou vice-versa, (143) permite escrever duas

expressões:

$$\frac{P_2}{P_1} = P_{21} = A_2 \frac{G_1}{4\pi r^2} \quad (144)$$

$$\frac{P_1}{P_2} = P_{12} = A_1 \frac{G_2}{4\pi r^2} \quad (145)$$

Onde (144) coloca a antena 2 como receptora e (145) coloca 2 como transmissora.

A aplicação do teorema da reciprocidade no sistema constituído obriga que $P_{21} = P_{12}$, o que leva então à identidade presente em (146).

$$\frac{A_2}{G_2} = \frac{A_1}{G_1} = \kappa \quad (146)$$

Ou seja, a área efetiva de recepção e o ganho de transmissão estão relacionadas através de uma constante κ que, devido à forma geral com que foi derivada, é independente da antena utilizada.

Para determinar o valor desta constante, um dipolo curto, cujos campos distantes são dados por (147) pode ser utilizado.

$$\begin{aligned} E_\theta &= j \frac{\eta I(\delta l)k}{4\pi r} e^{-jkr} \sin \theta \hat{a}_\theta \\ H_\phi &= j \frac{I(\delta l)k}{4\pi r} e^{-jkr} \sin \theta \hat{a}_\phi \end{aligned} \quad (147)$$

Onde I é a corrente que circula no dipolo curto, η é a impedância do espaço livre, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ e δl é o comprimento total do dipolo.

A densidade de potência irradiada é dada então por (148).

$$S = \frac{1}{2} \text{Re}\{\vec{E} \times \vec{H}^*\} = \frac{1}{2} \eta \left(\frac{I(\delta l)k}{4\pi r} \right)^2 \sin^2 \theta \quad (148)$$

A densidade de potência máxima é obtida quando $\theta = \frac{\pi}{2}$.

A potência total irradiada, que para uma antena sem perdas, é igual à potência de entrada

total, é dada por (149).

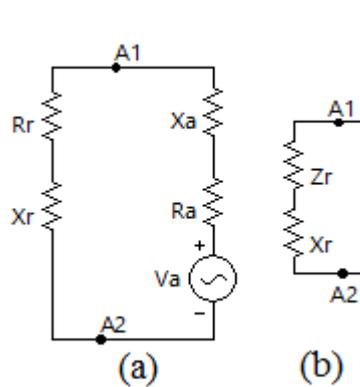
$$P_t = \pi r^2 \eta \left(\frac{I(\delta l)k}{4\pi r} \right)^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^3 \theta = \frac{\pi}{3} \eta \left(\frac{I\delta l}{\lambda} \right)^2 \quad (149)$$

O ganho máximo do dipolo curto é então dado por (150).

$$G_{\text{máx}} = \frac{S\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)}{\frac{P_t}{4\pi r^2}} = \frac{3}{2} \quad (150)$$

A **Figura 14** mostra um modelo de circuito da antena receptora.

Figura 14 – (a) Modelo de circuito do dipolo curto (b) Dipolo curto



A potência recebida disponível nos terminais da antena (os pontos A1 e A2 da **Figura 14**) presente na equação (142) (P_r) é máxima quando a antena se encontra casada com o receptor, isto é, a impedância do receptor ($Z_r = R_r + jX_r$) é o conjugado da impedância da antena ($Z_a = R_a + jX_a$). Cumprindo esta condição, a potência P_r entregue é dada por (151).

$$P_r = \frac{V_a^2}{4R_a} \quad (151)$$

A resistência de entrada R_a é dada pela resistência de irradiação, definida por (IEEE, 2013) como a razão entre a potência irradiada pela antena e o quadrado da corrente RMS admitida pela antena, sendo dada por (152).

$$R_a = \frac{2\pi\eta(\delta l)^2}{3\lambda^2} \quad (152)$$

Como a área de recepção é definida em relação a uma densidade de potência de uma onda plana, a tensão nos terminais do dipolo curto receptor é $V_a = E(\delta l)$, e a potência recebida em (151) fica dada por (153).

$$P_r = \frac{3E^2\lambda^2}{8\pi\eta} \quad (153)$$

A densidade de potência para uma onda plana incidente é $S = \frac{E^2}{\eta}$. A área efetiva fica então dada por (154).

$$A_r = \frac{3\lambda^2}{8\pi} \quad (154)$$

A constante κ fica então dada por (155) através de (150) e (154).

$$\kappa = \frac{A_2}{G_2} = \frac{A_1}{G_1} = \frac{\lambda^2}{4\pi} \quad (155)$$

Observadas as condições de derivação, κ é válida para qualquer antena.

A equação (155) permite observar que, no domínio da frequência, os ganhos de recepção e transmissão diferem por uma relação multiplicativa que pouco afeta o desempenho em banda estreita, já que a frequência de operação varia pouco, e por consequência, também o comprimento de onda λ .

6.2 RECIPROCIDADE DOS DIAGRAMAS DE RECEPÇÃO E TRANSMISSÃO DE UMA ANTENA NO DOMÍNIO DO TEMPO

A relação dos ganhos de recepção e transmissão dada em (155) é dependente da frequência de operação, uma vez que $\lambda = \frac{c}{f}$, onde c é a velocidade da luz e f , a frequência. Dessa

forma, essa relação pode ser reescrita como (156).

$$\kappa = \frac{c^2 \pi}{\omega^2} \quad (156)$$

Substituindo (156) em (146), tem-se (157).

$$A_r(\theta, \phi) = \frac{c^2 \pi}{\omega^2} G_t(\theta, \phi) \quad (157)$$

Onde os subscritos r e t indicam recepção e transmissão, respectivamente.

Como a área efetiva e o ganho são definidos como razões de potências, realizar a raiz quadrada de ambos os lados da equação (157) significa obter uma relação entre as tensões de recepção (vinculadas a A_r e denotadas por A_r^V) e as tensões de transmissão (vinculadas a G_t e denotadas por G_t^V), sendo dado por (158).

$$G_t^V(\omega, \theta, \phi) = \frac{\omega}{c\sqrt{\pi}} A_r^V(\omega, \theta, \phi) \quad (158)$$

Realizando uma transformada inversa de Fourier da equação (158) para obter sua versão no domínio do tempo, tem-se (159).

$$g_t(t, \theta, \phi) = \frac{1}{c\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} a_r(t, \theta, \phi) \quad (159)$$

Onde g_t e a_r são os chamados de ganhos de transmissão e recepção no domínio do tempo.

A equação (159) permite observar que a resposta ao impulso vinculada ao diagrama de transmissão de uma antena de um tipo específico é proporcional à derivada temporal da resposta ao impulso vinculada ao diagrama de recepção de uma antena do mesmo tipo.

Dessa forma, num enlace constituído de antenas idênticas, um sinal de tensão V na entrada da antena transmissora é derivado quando é convertido em campo elétrico. O campo elétrico derivado que chega à antena receptora não é integrado, e o sinal recebido é proporcional

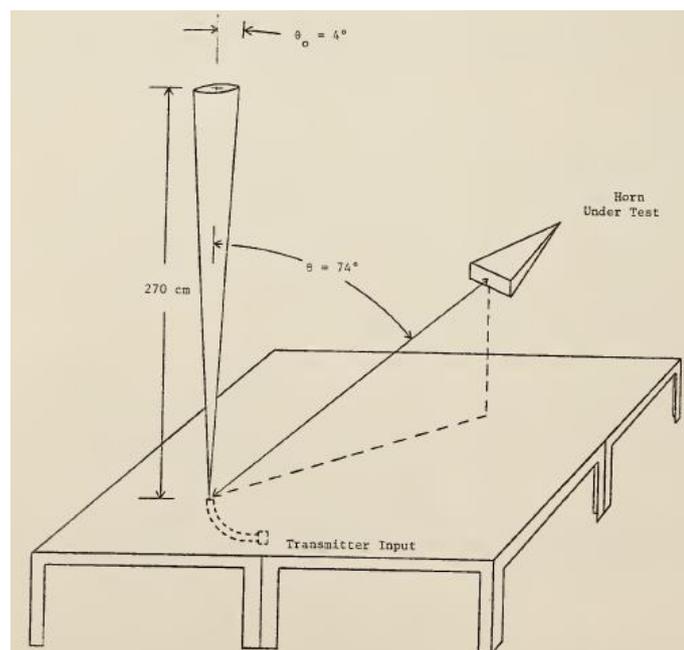
à $\frac{dV}{dt}$, ao invés de V .

6.3 RECIPROCIDADE DE UM ENLACE CONSTITUÍDO POR DUAS ANTENAS DE TIPOS DISTINTOS

Se forem usadas antenas de tipos diferentes na transmissão e recepção, o problema do enlace recíproco no domínio do tempo pode ser contornado. A antena receptora deve possuir uma resposta ao impulso do diagrama de recepção proporcional à integral do ganho de transmissão da outra antena.

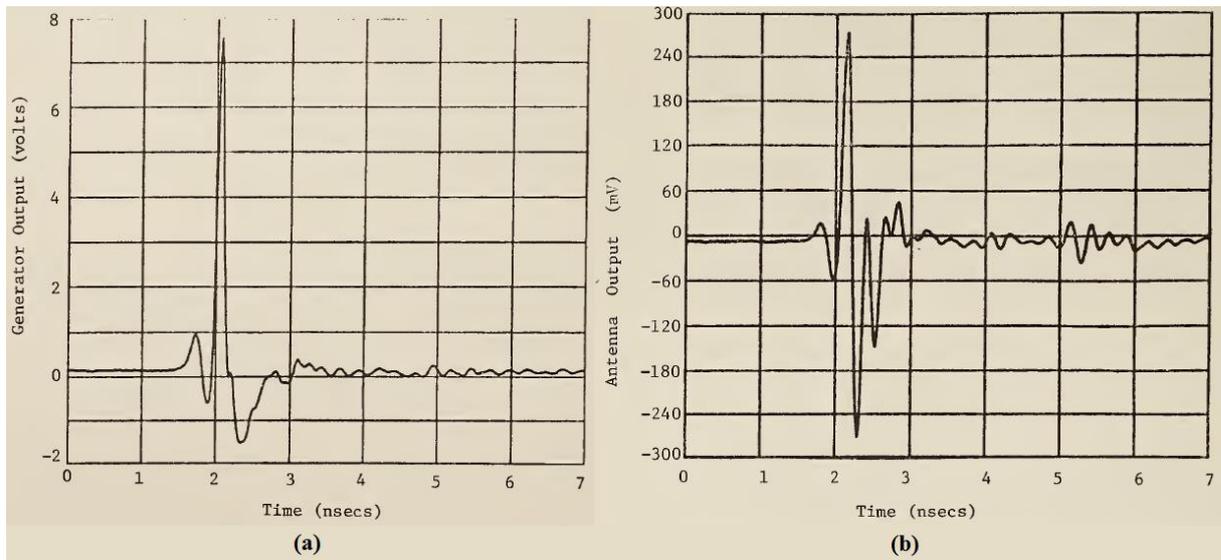
É o caso do par monocone-corneta TEM, mostrado na **Figura 15**, utilizado pelo NIST, órgão para normalização e metrologia no âmbito dos Estados Unidos, para emissão e medição de campos impulsivos (LAWTON e ONDREJKA, 1979). O monocone irradia um campo elétrico proporcional à derivada da tensão de alimentação. A corneta TEM possui uma tensão de saída proporcional à integral do campo elétrico recebido. Assim, os sinais transmitido e recebido são iguais, como mostrado na **Figura 16**.

Figura 15 – Exemplo de enlace recíproco no tempo constituído por duas antenas distintas: monocone e corneta



Fonte: (LAWTON e ONDREJKA, 1979)

Figura 16 – Sinais presentes no enlace recíproco no tempo: (a) Sinal a ser transmitido (cone);
(b) Sinal sendo recebido (corneta)



Fonte: (LAWTON e ONDREJKA, 1979)

6.4 ANTENA AUTO-COMPENSADA

Na seção 6.3 foi apresentado um enlace recíproco no tempo constituído de duas antenas de tipos distintos. Para construir um enlace composto de apenas um tipo de antena, (TYO, 2008) e (TYO e RODRÍGUEZ-HERRERA, 2013) propõem uma antena cujas respostas ao impulso dos diagramas de transmissão e recepção compensam a derivada temporal.

A equação (160), modificada de (158), apresenta a relação esperada entre os ganhos de recepção e transmissão de uma mesma antena.

$$A_r^V(\omega, \theta, \phi) \propto \frac{G_t^V(\omega, \theta, \phi)}{j\omega} \quad (160)$$

A função de transferência total de um enlace $H(\omega)$ é dada pela equação (161).

$$H(\omega) = \frac{V_{rx}(\omega)}{V_{tx}(\omega)} = G_t^V(\omega) \times H_{ch}(\omega) \times A_r^V(\omega) \quad (161)$$

Onde $V_{tx}(\omega)$ e $V_{rx}(\omega)$ são as tensões a transmitir e sendo recebida; $G_t^V(\omega)$ e $A_r^V(\omega)$ são

os ganhos de transmissão e recepção das antenas; $H_{ch}(\omega)$ é a função de transferência do canal que, no espaço livre, pode ser considerada como igual a 1 e \times é a operação de multiplicação.

Inserindo a equação (160) em (161) tem-se:

$$H(\omega) = G_t^V(\omega) \times 1 \times \left[\frac{G_t^V(\omega)}{j\omega} \right] \quad (162)$$

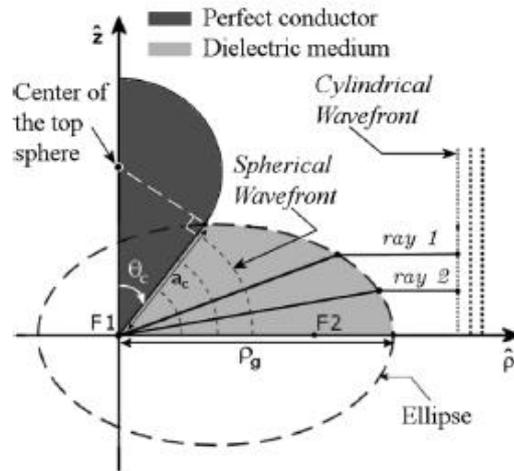
Para que o enlace seja recíproco $H(\omega) = 1$, de forma que:

$$G_t^V(\omega) = (j\omega)^{\frac{1}{2}} \quad (163)$$

A antena proposta por (TYO, 2008) deve implementar o ganho de transmissão dado por (163). O expoente fracionário de $j\omega$ implica que, no domínio do tempo, o ganho de transmissão será proporcional à meia-derivada temporal do ganho de recepção. A antena que implementa tal função de transferência é uma linha de corrente infinita pulsada simultaneamente, irradiando frentes de onda cilíndricas, mas que é fisicamente irrealizável.

Em (ARMANIOUS e TYO, 2009), uma antena monocônica com lente dielétrica (MCA-L) é simulada para demonstrar o princípio. A **Figura 17** apresenta a antena simulada, sendo possível perceber que a lente dielétrica possui formato elipsoidal – com focos na região de alimentação da antena ($r = 0$) e na região de fronteira ($r = a$), de forma que os raios incidentes na superfície do elipsóide são refratados numa direção paralela ao plano de terra e os campos eletromagnéticos irradiados possuem uma frente de onda cilíndrica.

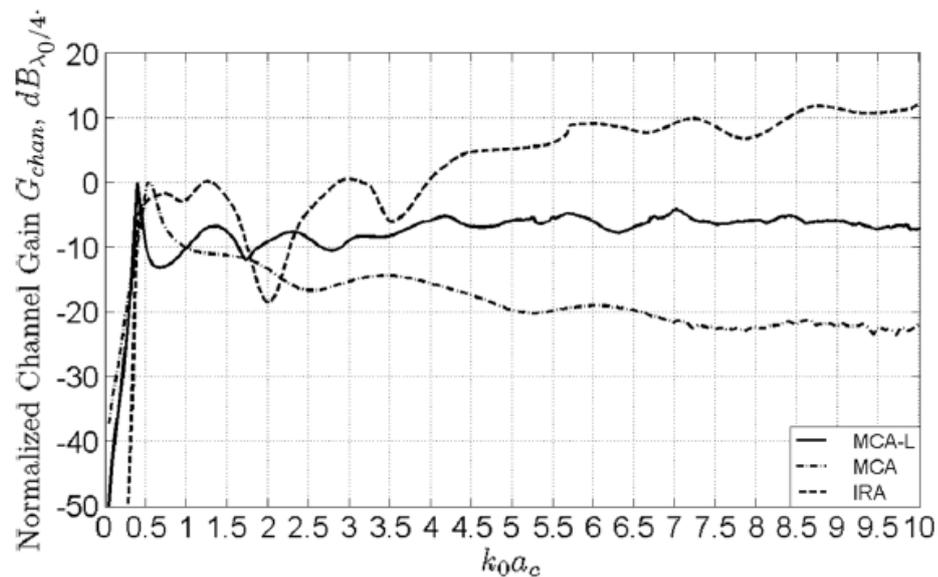
Figura 17 – Antena monocônica com lente dielétrica elipsoidal (MCA-L)



Fonte: (ARMANIOUS e TYO, 2009)

A **Figura 18** realiza uma comparação do ganho do canal em função da frequência (comprimento elétrico da antena) entre três antenas: a antena auto-compensada (MCA-L), a antena monocone (MCA) e uma *Impulse Radiating Antenna* (IRA) baseada em refletor. É possível observar que o ganho da antena MCA-L é plano, enquanto o da antena MCA é proporcional a ω e o da antena IRA é proporcional a $\frac{1}{\omega}$.

Figura 18 – Resultados de simulação comparando as larguras de banda das antenas monocônica com lente (MCA-L), monocônica (MCA) e *Impulse Radiating Antenna* (IRA). A normalização é feita para o ganho de uma monocone de $\frac{\lambda}{4}$.



Fonte: (ARMANIOUS e TYO, 2009)

7 CONCLUSÃO

Examinou-se neste trabalho os campos eletromagnéticos de uma antena monocônica, calculados a partir da aplicação das equações de Maxwell em coordenadas esféricas na vizinhança de um cone metálico e de um plano de terra. Como o cone apresenta um tamanho finito, o espaço de solução fica dividido em duas regiões, uma interna, de formato esférico, com raio determinado pelo comprimento do cone, e outra externa, que representa o espaço livre.

Na região interna, os campos elétrico e magnético ficam dados pela soma de uma onda TEM e sua reflexão na casca esférica e de um conjunto infinito de ondas TM. Estas ondas TM apresentam dependência da coordenada θ dada por funções de Legendre associadas e dependência da coordenada r dada por funções de Bessel. As ordens destas funções (Bessel e Legendre) são determinadas pela necessidade de obedecer à condição de contorno de campo elétrico tangencial nulo na superfície do cone.

Na região externa, se propagam ondas TM semelhantes às presentes na região interna. Entretanto, as ordens das funções de Legendre associadas são exclusivamente números ímpares e as funções de Bessel são substituídas por funções de Hankel, que apresentam um comportamento assintótico de onda viajante, oposto à onda estacionária de Bessel na região interior. De maior importância é que os campos elétrico e magnético sejam contínuos na interface entre as regiões.

Diversas melhorias podem ser realizadas no desenvolvimento destas equações. Não foi possível seguir os passos de (MAKURIN e CHUBINSKII, 2007) relacionados ao coeficiente de reflexão Γ , o que dificulta a obtenção correta da impedância de entrada.

Também foi realizada uma discussão sobre a tecnologia UWB e outras antenas capazes de irradiar sinais com uma largura de banda muito ampla. A reciprocidade no domínio do tempo de um enlace de duas certas antenas distintas foi discutida, assim como a possibilidade da construção de um enlace recíproco no tempo constituído por duas antenas idênticas. O

equacionamento analítico desta antena constitui uma possível continuação deste trabalho.

Outras continuações deste trabalho podem ampliar o estudo da antena, transformando a descrição dos campos eletromagnéticos do domínio da frequência para o domínio do tempo e buscando caracterizar a antena neste domínio.

REFERÊNCIAS

- ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. **Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables**. New York: Dover, 1965.
- ALLEN, B. et al. **ULTRA-WIDEBAND ANTENNAS AND PROPAGATION FOR COMMUNICATIONS, RADAR AND IMAGING**. Hoboken: Wiley & Sons, 2007.
- ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J. **Mathematical Methods for Physicists**. 6. ed. Burlington: Elsevier, 2005.
- ARMANIOUS, M.; TYO, J. S. UWB Self-Compensating Antennas: Numerical Demonstration of the Electromagnetic Working Principle. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, New York, 57, n. 12, Dezembro 2009. 3736-3745.
- BALANIS, C. A. **Antenna Theory: Analysis and Design**. 3. ed. Hoboken: Wiley, 2005.
- BATEMAN, H.; ERDÉLYI, A. **Higher Transcendental Functions**. New York: McGraw-Hill, v. 1, 1953.
- BRIETZKE, E. H. M. Equação de Bessel Modificada. **MAT01167 - Equações Diferenciais II**, 2012. Disponível em: <<http://www.mat.ufrgs.br/~brietzke/bmod/bmod.html>>. Acesso em: 7 Agosto 2014.
- CARTER, P. S. **SHORT WAVE ANTENNA**. 2,175,252, 12 Junho 1937.
- CATALDO, A.; BENEDETTO, E. D.; CANNAZZA, G. **Broadband Reflectometry for Enhanced Diagnostics and Monitoring Applications**. Berlin: Springer, 2011.
- DYAB, W. M. G. et al. A Critical Look at the Principles of Electromagnetic Time Reversal and its Consequences. **IEEE Antennas and Propagation Magazine**, 55, n. 5, Outubro 2013. 28-62.
- ESTEVEZ, L. C. **Antenas: Teoria Básica e Aplicações**. São Paulo: McGraw-Hill, 1980.
- FCC. Federal Communications Commission 02-48. **In the matter of Revision of Part 15 of the Commission's Rules Regarding Ultra-Wideband Transmission Systems first report and order**, 2002. Disponível em: <https://transition.fcc.gov/Bureaus/Engineering_Technology/Orders/2002/fcc02048.pdf>. Acesso em: 17 Agosto 2015.
- GRIMES, D. M. Biconical receiving antenna. **J. Math. Phys**, n. 23, Maio 1982. 897-914.
- HAFNER, K. F. **A Study on the Properties of the Biconical Antenna**. Newark: [s.n.], 1968. Dissertação de mestrado Newark College of Engineering.

HORCHLER, A. D. Hypergeometric Functions Matlab Code. **Andrew D. Horchler Page**, 2013. Disponível em: <<http://biorobots.cwru.edu/personnel/adh/math.se/04/>>. Acesso em: 27 Agosto 2015.

IEEE. **Institute of Electrical and Electronics Engineers Std 100-2000**: The Authoritative Dictionary of IEEE Standards Terms. New York: [s.n.], 2000.

IEEE. **Institute of Electrical and Electronics Engineers Std 145-2013**: IEEE Standard for Definitions of Terms for Antennas. New York: [s.n.], 2013.

LAWTON, R. A.; ONDREJKA, A. R. **NBS Technical Note 1008**: Antennas and the associated Time Domain Range for the measurement of impulsive fields. Boulder: NIST, 1979.

LICUL, S. Ultra-Wideband Antenna Characterization and Measurements, 2004. Disponível em: <<http://scholar.lib.vt.edu/theses/available/etd-11072004-200046/unrestricted/slicul.pdf>>. Acesso em: 17 Agosto 2015.

MAKURIN, M. N.; CHUBINSKII, N. P. The Characteristics of a Biconical Antenna Calculated via the Partial-Domain Method. **Journal of Communications Technology and Electronics**, 52, n. 10, 2007. 1104-1113.

NIST. Legendre And Related Functions. **DIGITAL LIBRARY OF MATEMATICAL FUNCIONS**, 2014. Disponível em: <<http://dlmf.nist.gov/14.10>>. Acesso em: 11 Setembro 2014.

PAPAS, C. H.; KING, R. W. P. Radiation from Wide-Angle Conical Antennas Fed by a Coaxial Line. **PROCEEDINGS OF THE I.R.E.**, New York, 39, Janeiro 1951. 49-51.

SADIKU, M. **Elementos de Eletromagnetismo**. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2004.

SCHANTZ, H. G. **A Brief History of UWB Antennas**. 2003 IEEE Conference on Ultra Wideband Systems and Technologies. Reston: [s.n.]. 2003. p. 209-213.

SCHELKUNOFF, S. A. Transmission Theory of Spherical Waves. **AIEE Transactions**, New York, 57, n. 12, Dezembro 1938. 744-750.

SCHELKUNOFF, S. A. Theory of Antennas of Arbitrary Size and Shape. **Proceedings of the I. R. E.**, London, Setembro 1941. 493-521.

SCHELKUNOFF, S. A. **Electromagnetic Waves**. New York: D. Van Nostrand, 1943.

SCHELKUNOFF, S. A. Principal and Complementary Waves in Antennas. **Proceedings of the I.R.E.**, New York, 34, n. 1, Janeiro 1946. 23-32.

SEVERO, S. L. S. Aquametria por microondas: desenvolvimento de transdutor em microfita. **Dissertação de Mestrado Universidade Federal do Rio Grande do Sul**, Porto Alegre, 2003.

SHIVAKUMAR, P. N.; WONG, R. Linear Equations in Infinite Matrices. **Linear Algebra and Its Applications**, n. 7, 1973. 53-62.

SMITH, P. D. P. The Conical Dipole of Wide Angle. **Journal of Applied Physics**, 19, n. 11, Janeiro 1948. 11-23.

TAI, C. T. On the Theory of Biconical Antennas. **Journal of Applied Physics**, 19, Dezembro 1948. 1155-1160.

TYO, J. S. Self-Compensating Antenna Concept for a Dispersionless UWB Propagation Channel. **IEEE TRANSACTIONS ON ANTENNAS AND PROPAGATION**, New York, 56, n. 5, Maio 2008. 1491-1494.

TYO, J. S.; RODRÍGUEZ-HERRERA, O. G. **Modeling of Self-Compensating Wideband Antennas for Peer-to-Peer Communications in Distributed Sensing Arrays**. IEEE-APS Topical Conference on Antennas and Propagation in Wireless Communications (APWC). Torino: [s.n.]. 2013. p. 1473-1476.

WIESBECK, W.; ADAMIUK, G.; STURM, C. Basic Properties and Design Principles of UWB Antennas. **Proceedings of the IEEE**, 97, n. 2, Fevereiro 2009. 372-385.

APÊNDICES

APÊNDICE 1 PROBLEMAS DE STURM-LIOUVILLE

Uma equação diferencial é classificada como um problema de Sturm-Liouville (S-L) quando possui a forma dada por (164). (ARFKEN e WEBER, 2005).

$$p(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dp}{dx} \frac{dy}{dx} + q(x)y = -\lambda w(x)y \quad (164)$$

Onde $y(x)$ é a função incógnita e $p(x)$, $q(x)$ e $w(x)$ são conhecidos, e $w(x)$ é chamado de função peso; λ é um número arbitrário, conhecido como autovalor da função.

Para um dado λ especificado, pode ou não existir uma solução $y(x)$ que atenda a um conjunto de condições de contorno determinado. Se $y(x)$ existir, é chamado de autofunção da equação diferencial.

A possibilidade ou não da existência de uma solução faz com que o conjunto de autovalores para os quais existe solução seja, em geral, discreto (ARFKEN e WEBER, 2005) (pág. 624). Esses autovalores são também, obrigatoriamente, números reais.

Se $y_i(x)$ e $y_j(x)$ são duas autofunções distintas de um problema S-L, elas apresentam a propriedade da ortogonalidade, dada por (165).

$$(y_i, y_j) = \int_a^b y_i(x)y_j(x)w(x)dx = 0 \quad (165)$$

Onde $i \neq j$, $w(x)$ é a função peso de (164), $[a, b]$ é o intervalo de interesse da variável x e (y_i, y_j) é a notação para o produto interno, definido genericamente por (166).

$$(M, N) = \int_a^b M(x)N(x)w(x)dx \quad (166)$$

Onde M e N são duas funções quaisquer contínuas no intervalo $[a, b]$ e $w(x)$ é a função-peso.

O produto interno de uma função por ela mesma (M, M) é conhecido como o módulo (ou norma) dessa função, sendo dado por (167).

$$(M, M) = \int_a^b M(x)M(x)w(x)dx = |M|^2 \quad (167)$$

Onde a notação $|M|^2$ pode ser utilizada se a função peso utilizada for conhecida através do contexto.

O conjunto de autofunções ortogonais $Y = \{y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\}$ que resolve um problema S-L apresenta a propriedade da completude, isto é, uma função $f(x)$ que atende as condições de Dirichlet, apresentadas na seção 3.1, pode ser aproximada através de uma série:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n y_n(x) \quad (168)$$

Multiplicando (168) por $g_n^*(x)w(x)$, integrando no intervalo $[a, b]$ e utilizando a ortogonalidade entre autofunções distintas, os coeficientes a_n ficam dados por:

$$a_n = \int_a^b f(x)g_n^*(x)w(x)dx \quad (169)$$

O coeficiente a_n em (169) também é chamado de coeficiente de Fourier generalizado.

O erro de aproximação causado pelo truncamento da série no m -ésimo termo é dado pela energia do erro em (170) (ARFKEN e WEBER, 2005) (pág. 649):

$$E = \int_a^b \left[f(x) - \sum_{n=0}^m a_n y_n(x) \right]^2 w(x)dx \geq 0 \quad (170)$$

Onde a igualdade é atingida no limite $m \rightarrow \infty$.

Expandindo o termo quadrático tem-se (171).

$$\int_a^b f^2(x)w(x)dx - 2 \int_a^b f(x) \left(\sum_{n=0}^m a_n y_n(x) \right) w(x)dx + \int_a^b \left(\sum_{n=0}^m a_n y_n(x) \right)^2 w(x)dx \geq 0 \quad (171)$$

Reorganizando a segunda parcela da soma em (171) obtém-se (172).

$$\int_a^b f^2(x)w(x)dx - 2 \sum_{n=0}^m a_n \int_a^b f(x)y_n(x)w(x)dx + \int_a^b \left(\sum_{n=0}^m a_n y_n(x) \right)^2 w(x)dx \geq 0 \quad (172)$$

Aplicando a fórmula para o coeficiente a_n , equação (169), em (172):

$$\int_a^b f^2(x)w(x)dx - 2 \sum_{n=0}^m (a_n)^2 + \int_a^b \left(\sum_{n=0}^m a_n y_n(x) \right)^2 w(x)dx \geq 0 \quad (173)$$

O somatório na terceira parcela da soma em (173) pode ser expandido como:

$$\left(\sum_{n=0}^m a_n y_n(x) \right)^2 = \sum_{n=0}^m (a_n y_n(x))^2 + 2 \sum_{m < n} a_m a_n y_m(x) y_n(x) \quad (174)$$

Como as funções $y_m(x)$ e $y_n(x)$ são ortogonais, a segunda parcela da soma em (174) é igual a zero e (173) fica dado por:

$$\int_a^b f^2(x)w(x)dx \geq \sum_{n=0}^m (a_n)^2 \quad (175)$$

Ou seja, a energia contida pela função $f(x)$ que se queria representar é, no limite, igual àquela contida em cada coeficiente de sua representação por soma infinita. (175) também é conhecida como relação de Parseval.

A convergência da série sendo dada em função da energia do erro em (170) permite afirmar que as séries formadas por autofunções são absolutamente convergentes.

Os campos elétricos e magnéticos presentes no capítulo 3 foram obtidos com base na suposição de que estes são compostos por funções separáveis por variável. Assim, o campo elétrico ou magnético total sendo descrito possui a forma dada por (176).

$$f(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n J_n(r) \Theta_n(\theta) \quad (176)$$

Onde $J_n(r)$ e Θ_n são as autofunções.

A validade da representação em (176) depende da convergência do somatório. Para demonstrar que este converge, partimos do produto de Cauchy de duas séries:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} J_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \Theta_n \right) = \sum_{p=0}^{\infty} \left(\sum_{q=0}^p J_q \Theta_{p-q} \right) \quad (177)$$

O produto de Cauchy de duas séries é convergente se pelo menos uma das séries possuir convergência absoluta. Ambas as séries de autofunções utilizadas neste trabalho apresentam convergência absoluta, por se tratarem de problemas S-L.

Se uma série apresenta convergência absoluta, seus termos podem ser livremente reorganizados, sem que isto afete a convergência. Assim, é possível separar do duplo somatório do lado direito de (177) os produtos $J_q \Theta_{p-q}$ quando $q = p - q$ e colocá-los num somatório próprio, como em (178).

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} J_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \Theta_n \right) = \sum_{p=0}^{\infty} \left(\sum_{q=0; q \neq p-q}^p J_q \Theta_{p-q} \right) + \sum_{m=0}^{\infty} J_m \Theta_m \quad (178)$$

Como o lado direito da igualdade converge e a primeira parcela do lado direito também, só resta a conclusão de que o somatório dos termos $J_m \Theta_m$ também converge e, então, a representação dada por (176) é possível.

Resta provar então que as equações obtidas neste trabalho são problemas S-L, o que é realizado em duas etapas: prova-se que a função canônica é um problema S-L para, em seguida, demonstrar, por substituição, que a equação obtida é uma forma modificada da função canônica.

APÊNDICE 2 EQUAÇÃO DE BESSEL

FORMA CANÔNICA E PROBLEMA DE STURM-LIOUVILLE

A forma canônica da equação diferencial de Bessel de ordem p , com variável independente z e variável dependente w , é dada pela equação (179) (ARFKEN e WEBER, 2005).

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} + (z^2 - p^2)w = 0 \quad (179)$$

Ao dividir (179) por z tem-se:

$$z \frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{dw}{dz} + \left(z - \frac{p^2}{z} \right) w = 0 \quad (180)$$

De onde, por inspeção e semelhança com (164) tem-se:

$$\begin{aligned} p(z) &= z \\ \frac{dp}{dz} &= 1 \end{aligned} \quad (181)$$

Ou seja, a equação de Bessel é um problema de Sturm-Liouville.

SUBSTITUIÇÃO DE VARIÁVEIS

A equação de Bessel presente em (179) pode ser modificada para possuir a mesma forma que uma equação presente nos problemas eletromagnéticos que se objetiva resolver, que, neste trabalho, é a equação (25), reproduzida em (182), com variáveis diferentes, para referência.

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + (\omega^2 \mu \epsilon x^2 - \alpha^2)y = 0 \quad (182)$$

Para demonstração da redutibilidade de (182) à (179), (BRIETZKE, 2012) recomenda assumir (183) como função resposta.

$$y = x^a w(kx^b) \quad (183)$$

Onde w é uma função que satisfaz a equação de Bessel presente em (179).

Transforma-se então (179) para uma expressão de variáveis $y(x)$, fazendo $z = kx^b$ e $w = x^{-a}y$, conseguindo então (184).

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + (1 - 2a)x \frac{dy}{dx} + (a^2 - p^2 b^2 + b^2 k^2 x^{2b})y = 0 \quad (184)$$

Para que a equação (184) apresente semelhança com (182), os valores de a e b devem, por inspeção, ser escolhidos de acordo com (185).

$$a = \frac{1}{2} \quad b = 1 \quad (185)$$

Tem-se então (186) para a equação correspondente.

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + \left(k^2 x^2 + \frac{1}{4} - p^2 \right) y = 0 \quad (186)$$

Ao comparar (182) e (186), k e p ficam determinados em (187).

$$p = \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \alpha^2} \quad k^2 = \omega^2 \mu \epsilon \quad (187)$$

SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DE BESSEL

O formato da função solução w da equação (179) é dependente da ordem p .

Para p não inteiro a solução é dada por (188) (SCHELKUNOFF, 1943).

$$w(z) = C_1 J_p(z) + C_2 J_{-p}(z) \quad (188)$$

Onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias para combinação linear e $J_p(z)$ e $J_{-p}(z)$ são definidas por (189) (SCHELKUNOFF, 1943).

$$\begin{aligned} J_p(z) &= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m (z)^{2m+p}}{m! (m+p)! (2)^{2m+p}} \\ J_{-p}(z) &= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m (z)^{2m-p}}{m! (m-p)! (2)^{2m-p}} \end{aligned} \quad (189)$$

Onde o fatorial é dado pela sua generalização, a função Gama, como em (190).

$$p! = \Gamma(p + 1) \quad (190)$$

Para um argumento $z \geq 0$ a função $J_p(z)$ retorna um valor real e finito. Já $J_{-p}(z)$ não apresenta um valor finito para $z = 0$. A função $J_p(z)$ é conhecida como função de Bessel do primeiro tipo.

Se p for um número inteiro positivo n , $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$, uma combinação linear e (188) não pode ser dita a solução completa da equação de Bessel. Uma segunda solução, ainda para uma ordem p não inteira é definida em (191) (SCHELKUNOFF, 1943).

$$N_p(z) = \frac{J_p(z) \cos(p\pi) - J_{-p}(z)}{\sin(p\pi)} \quad (191)$$

Se a ordem p for um número inteiro positivo n , a solução $N_p(z)$ passa a ser dada por (192) (SCHELKUNOFF, 1943).

$$N_n(z) = \lim_{p \rightarrow n} N_p(z) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial J_p}{\partial p} - (-1)^n \frac{\partial J_{-p}}{\partial p} \right] \quad (192)$$

Que para p não inteiro, apresenta o mesmo resultado de (191). As funções presentes

em (191) ou (192) são conhecidas como funções de Neumann, ou funções de Bessel do segundo tipo.

A solução mais geral é então aquela dada por (193):

$$w(z) = C_1 J_p(z) + C_2 N_p(z) \quad (193)$$

É possível realizar uma combinação de coeficientes complexos das funções J_p e $N_p(z)$, originando as funções de Hankel, ou funções de Bessel do terceiro tipo, que são dadas em (194) (SCHELKUNOFF, 1943).

$$\begin{aligned} H_p^{(1)}(z) &= J_p(z) + jN_p(z) \\ H_p^{(2)}(z) &= J_p(z) - jN_p(z) \end{aligned} \quad (194)$$

A derivada de qualquer função de Bessel em função de seu argumento é dada por (195), sendo derivada a partir de (NIST, 2014), fórmula 10.6.6.

$$\frac{d \left[J_{\nu+\frac{1}{2}}(u) \right]}{du} = J_{\nu-\frac{1}{2}}(u) - u^{-1} \left(\nu + \frac{1}{2} \right) J_{\nu+\frac{1}{2}}(u) \quad (195)$$

APÊNDICE 3 EQUAÇÃO DE LEGENDRE ASSOCIADA

EQUAÇÃO DE LEGENDRE ASSOCIADA E PROBLEMA DE STURM-LIOUVILLE

A equação canônica de Legendre associada de ordem m e grau n é dada por (196).

$$(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + \left[n(n + 1) - \frac{m^2}{1 - x^2} \right] y = 0 \quad (196)$$

Por inspeção e comparação com (164).

$$\begin{aligned} p(x) &= 1 - x^2 \\ \frac{dp}{dx} &= -2x \end{aligned} \quad (197)$$

Ou seja, a equação de Legendre associada é um problema de Sturm-Liouville.

Modificando a equação de Legendre associada para provar que esta é a resolução do problema do ângulo θ . Para a equação (196), assume-se a substituição:

$$\begin{aligned} x &= \cos \theta \\ \theta &= \arccos x \end{aligned} \quad (198)$$

As derivadas de (196) devem ser substituídas segundo a regra da cadeia, em (199).

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{d\theta} \frac{d\theta}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \left(-\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \right) \\ \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d^2 y}{d\theta^2} \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 + \frac{dy}{d\theta} \frac{d^2 \theta}{dx^2} = \frac{d^2 y}{d\theta^2} \left(\frac{1}{1 - x^2} \right) + \frac{dy}{d\theta} \left(-\frac{x}{(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \end{aligned} \quad (199)$$

Substituindo (198) e (199) em (196) tem-se (200)

$$\sin^2 \theta \frac{d^2 y}{d\theta^2} + \cos \theta \sin \theta \frac{dy}{d\theta} + [n(n + 1) \sin^2 \theta - m^2] y = 0 \quad (200)$$

Que é a equação (31), que pode ser dita, então, um problema S-L.

SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DE LEGENDRE ASSOCIADA

Para $m = 0$, a solução fica simplificada para a expressão dada por (201) (SCHELKUNOFF, 1943) (pág 54).

$$P_n(\cos \theta) = \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{(-1)^s (n+s)!}{(n-s)! (s!)^2} \sin^{2s} \frac{\theta}{2} \quad (201)$$

Onde $n! = \Gamma(n+1)$.

Para um m inteiro qualquer, a solução é dada por (202) (SCHELKUNOFF, 1943) (pg. 68).

$$P_n^m(\cos \theta) = (-1)^m \sin^m \theta \frac{d^m P_n(\cos \theta)}{d(\cos \theta)^m} \quad (202)$$

Para $m = 1$, o caso que aparece neste trabalho, (202) é escrita simplificadamente como (203).

$$P_n^1(\cos \theta) = -\sin \theta \frac{dP_n(\cos \theta)}{d(\cos \theta)} \quad (203)$$

A função solução para m não inteiro é dada em (SCHELKUNOFF, 1943) (pág 53) e não é utilizada aqui.

Uma observação, realizada por (SCHELKUNOFF, 1943) (pág 68) é o possível uso de (204) como substituto de (202).

$$T_n^m(\cos \theta) = (-1)^m P_n^m(\cos \theta) \quad (204)$$

PRIMEIRA DERIVADA DAS FUNÇÕES DE LEGENDRE

A equação (31), um caso de (200), é satisfeita pela função resposta presente na

equação (205) – repetida de (34).

$$\Theta(\theta) = C_1 P_v^1(\cos \theta) - C_2 P_v^1(-\cos \theta) \quad (205)$$

O interesse desta seção é obter as derivadas da função em (205) para avançar o desenvolvimento de (44), abreviado em (206).

$$\hat{E}_r = \frac{1}{\sin \theta} \left[\cos \theta \theta + \sin \theta \frac{d\theta}{d\theta} \right] \quad (206)$$

Para facilitar o desenvolvimento das expressões, a substituição em (207) será realizada, a devida generalização sendo realizada posteriormente.

$$\theta \rightarrow \theta'(\theta) = P_v^1(\cos \theta) \quad (207)$$

A expressão (206) fica então dada por (208) após o uso da regra da cadeia.

$$\hat{E}_r^+ = \frac{1}{\sin \theta} \left[\cos \theta P_v^1(\cos \theta) - \sin^2 \theta \frac{dP_v^1(\cos \theta)}{d(\cos \theta)} \right] \quad (208)$$

Para a redução do comprimento da expressão em (208) é interessante substituir segundo (209).

$$\begin{aligned} \cos \theta &= x \\ \sin \theta &= (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (209)$$

A expressão em (208) se torna então a presente em (210).

$$\hat{E}_r^+ = \frac{1}{(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}} \left[x P_v^1(x) - (1 - x^2) \frac{dP_v^1(x)}{dx} \right] \quad (210)$$

A derivada $\frac{dP_v^1(x)}{dx}$ é dada por (211), ou, alternativamente, por (212), a partir de (NIST, 2014) (fórmula 14.10.4 e 14.10.5, respectivamente).

$$\frac{dP_v^1(x)}{dx} = \frac{(-v)P_{v+1}^1(x) + (v+1)xP_v^1(x)}{1 - x^2} \quad (211)$$

$$\frac{dP_v^1(x)}{dx} = \frac{(v+1)P_{v-1}^1(x) - vxP_v^1(x)}{1-x^2} \quad (212)$$

Somando (211) e (212), tem-se (213).

$$\frac{dP_v^1(x)}{dx} = \frac{-vP_{v+1}^1(x) + xP_v^1(x) + (v+1)P_{v-1}^1(x)}{2(1-x^2)} \quad (213)$$

Uma relação de recorrência entre $P_{\lambda+2}^1(x)$, $P_{\lambda+1}^1(x)$ e $P_{\lambda}^1(x)$, onde λ apresenta as mesmas propriedades de v , é estabelecida em (214). (NIST, 2014) (fórmula 14.10.3).

$$(\lambda+1)P_{\lambda+2}^1(x) - (2\lambda+3)xP_{\lambda+1}^1(x) + (\lambda+2)P_{\lambda}^1(x) = 0 \quad (214)$$

Que, utilizando a substituição $v = \lambda + 1$, se torna a expressão presente em (215).

$$(v+1)P_{v-1}^1(x) = -vP_{v+1}^1(x) - (2v+1)xP_v^1(x) \quad (215)$$

Substituindo (215) em (213) tem-se (216).

$$\frac{dP_v^1(x)}{dx} = \frac{-vP_{v+1}^1(x) + (v+1)xP_v^1(x)}{(1-x^2)} \quad (216)$$

A propriedade dada em (217), presente em (NIST, 2014) (fórmula 14.10.2), permite expressar a função de Legendre associada de ordem μ ($P_v^\mu(x)$) como uma função de Legendre de ordem $\mu - 1$ ($P_v^{\mu-1}(x)$).

$$(1-x^2)^{\frac{1}{2}}P_v^{\mu+1}(x) = (v+1)P_{v+1}^\mu(x) + (v+\mu+1)xP_v^\mu(x) = 0 \quad (217)$$

Substituindo $\mu = 0$, (217) se torna (218).

$$P_v^1(x) = \frac{(v+1)}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} [P_{v+1}^0(x) - xP_v^0(x)] \quad (218)$$

Substituindo a expressão (218) em (216), tem-se (219).

$$(1-x^2)^{\frac{3}{2}} \frac{dP_v^1(x)}{dx} = -v(v+2)[P_{v+2}^0(x) - xP_{v+1}^0(x)] + (v+1)^2 x [P_{v+1}^0(x) - xP_v^0(x)] \quad (219)$$

O uso da propriedade presente em (214) na expressão (219) resulta em (220).

$$(1-x^2)^{\frac{3}{2}} \frac{dP_v^1(x)}{dx} = (v+1)\{xP_{v+1}^0(x) + P_v^0(x)[v-x^2(v+1)]\} \quad (220)$$

Aplicando (218) e (220) em (210) tem-se (221).

$$\widehat{E}_r^+ = -(v)(v+1)P_v^0(x) \quad (221)$$

$P_v^1(-x)$ pode ser escrita como dado em (222) (ABRAMOWITZ e STEGUN, 1965) (fórmula 8.2.3).

$$P_v^1(-x) = e^{-jv\pi} P_v^1(x) - \frac{2}{\pi} Q_v^1(x) \quad (222)$$

A função $Q_v^1(x)$ apresenta as mesmas propriedades utilizadas nesta definição

Como as mesmas propriedades utilizadas para converter $P_v^1(x)$ em $P_v^0(x)$ aplicam-se a $Q_v^1(x)$, a equação (223) é a derivada de $\Theta'(\theta) = P_v^1(-\cos \theta)$:

$$\widehat{E}_r^- = (v)(v+1)P_v^0(-x) \quad (223)$$

O campo \widehat{E}_r é então dado pela soma de (221) e (223), como presente em (224).

$$\widehat{E}_r = -(v)(v+1)[C_1 P_v^0(x) + C_2 P_v^0(-x)] \quad (224)$$

IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DAS FUNÇÕES DE LEGENDRE

As funções de Legendre associadas não possuem uma implementação adequada no Mathworks® MATLAB®. Assim, foi necessária a implementação de algumas funções para o cálculo dos valores das funções.

A função de Legendre associada de ordem μ inteira é dada por (225). (NIST, 2014)
(fórmula 14.3.4)

$$P_v^\mu(x) = (-1)^\mu \frac{\Gamma(v + \mu + 1)(1 - x^2)^{\frac{\mu}{2}}}{2^\mu \Gamma(v - \mu + 1)\Gamma(\mu + 1)} {}_2F_1\left(v + \mu + 1, \mu - v, \mu + 1, \frac{1 - x}{2}\right) \quad (225)$$

Onde a função $\frac{{}_2F_1(a,b,c,d)}{\Gamma(\mu+1)}$ é a função de hipergeométrica de Olver.

Para os casos especiais de $\mu = 0$ e $\mu = 1$, a equação (225) é adaptada para (226) e (227), respectivamente

$$P_v^0(x) = {}_2F_1\left(v + 1, -v, 1, \frac{1 - x}{2}\right) \quad (226)$$

$$P_v^1(x) = -\frac{v(v + 1)}{2} \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}} {}_2F_1\left(v + 2, 1 - v, 2, \frac{1 - x}{2}\right) \quad (227)$$

A implementação numérica da função hipergeométrica foi realizada a partir do código presente em (HORCHLER, 2013).

OBTENÇÃO DOS AUTOVALORES DA FUNÇÃO DE LEGENDRE

As equações em (70) podem ser resumidas na equação (228) através da função objetivo $f(v)$, para a qual é necessário encontrar os zeros, também chamados de autovalores.

$$f(v) = P_v^0(x) + C_5 P_v^0(-x) \quad (228)$$

Onde C_5 é uma constante real arbitrária, que no contexto deste trabalho apresenta valor igual a ± 1 , como dado por (71) e onde $P_v^0(x)$ é dado por (226).

Para a obtenção dos autovalores foi utilizado o algoritmo de Newton-Raphson, um método iterativo, que aproxima o zero v através da fórmula dada em (229).

$$v_{k+1} = v_k - \frac{f(v_k)}{f'(v_k)} \quad (229)$$

Onde v_k representa o valor aproximado de v após a k -ésima iteração, $f(v_k)$ é o valor numérico da função $f(v)$ segundo (228) e $f'(v_k)$ é a derivada da função $f(v)$ em função da variável v nas vizinhanças de v_k , que é calculada numericamente através de (230), uma aproximação progressiva da derivada;

$$f'(v_k) = \frac{f(v_{k'}) - f(v_k)}{\Delta v} \quad (230)$$

Onde $f(v_{k'})$ é o valor da função $f(v)$ calculado para $v_{k'}$, que é um valor de v próximo a v_k , do qual a diferença é dada por $\Delta v = v_{k'} - v_k$, que é arbitrado como igual à tolerância especificada para o método de Newton-Raphson.

O algoritmo de Newton-Raphson é implementado como uma função do MATLAB, que é chamada por uma função que varre um intervalo de v especificado pelo usuário e elimina valores iterados que não atingiram a convergência.

APROXIMAÇÃO ASSINTÓTICA DA FUNÇÃO DE LEGENDRE

$P_v^\mu(x)$ possui aproximações assintóticas, como a dada por (231), presente em (BATEMAN e ERDÉLYI, 1953) (fórmula 3.9 (2)).

$$P_v^\mu(\cos \theta) = \frac{\Gamma(v + \mu + 1)}{\Gamma\left(v + \frac{3}{2}\right) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sin \theta} \cos \left[\left(v + \frac{1}{2}\right) \theta - \frac{\pi}{4} + \mu \frac{\pi}{2} \right] + O(v^{-1}) \quad (231)$$

Onde $O(v^{-1})$ indica que o erro da aproximação é inversamente proporcional a v .

PARIDADE DA SOMA E SUBTRAÇÃO DE FUNÇÕES DE LEGENDRE

A aproximação presente em (231) permite determinar se a soma das funções de Legendre dada em (205) possui paridade. Se uma função for par, $f(x) = f(-x)$. Se uma função for ímpar $f(x) = -f(-x)$. Resumindo (231) para seus termos de interesse, cria-se a forma \widehat{P}_ν^μ em (232).

$$\widehat{P}_\nu^\mu(\cos \theta_0) \propto \frac{1}{\sqrt{\sin \theta_0}} \cos \left[\left(\nu + \frac{1}{2} \right) \theta_0 - \frac{\pi}{4} + \mu \frac{\pi}{2} \right] \quad (232)$$

Usando a substituição $\theta_0 = \frac{\pi}{2} - \delta$ tem-se (233).

$$\widehat{P}_\nu^\mu(\delta) \propto \frac{1}{\sqrt{\cos \delta}} \left\{ \cos \left[\frac{\pi}{2} (\nu + \mu) \right] \cos \left[\delta \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \right] + \sin \left[\frac{\pi}{2} (\nu + \mu) \right] \sin \left[\delta \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \right] \right\} \quad (233)$$

Substituindo δ por $-\delta$, obtém-se (234).

$$\widehat{P}_\nu^\mu(-\delta) \propto \frac{1}{\sqrt{\cos \delta}} \left\{ \cos \left[\frac{\pi}{2} (\nu + \mu) \right] \cos \left[\delta \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \right] - \sin \left[\frac{\pi}{2} (\nu + \mu) \right] \sin \left[\delta \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \right] \right\} \quad (234)$$

Somando as equações (233) e (234) – o que equivale a $C_1 = -C_2$ e $C_5 = 1$ na equação (72) – tem-se (235).

$$f(\delta) = \frac{\widehat{P}_\nu^\mu(\delta) + \widehat{P}_\nu^\mu(-\delta)}{2} \propto \cos \left[\frac{\pi}{2} (\nu + \mu) \right] \cos \left[\delta \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \right] \quad (235)$$

Ao substituir δ por $-\delta$ tem-se (236).

$$f(-\delta) = \frac{\widehat{P}_\nu^\mu(-\delta) + \widehat{P}_\nu^\mu(\delta)}{2} \propto \cos \left[\frac{\pi}{2} (\nu + \mu) \right] \cos \left[\delta \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \right] \quad (236)$$

Ou seja, a soma $\widehat{P}_\nu^1(\delta) + \widehat{P}_\nu^1(-\delta)$ é uma função par de δ .

Subtraindo a equação (234) de (233), tem-se (237).

$$f(\delta) = \frac{\widehat{P}_\nu^\mu(\delta) - \widehat{P}_\nu^\mu(-\delta)}{2} \propto \sin \left[\frac{\pi}{2} (\nu + \mu) \right] \sin \left[\delta \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \right] \quad (237)$$

Ao substituir δ por $-\delta$ tem-se (238).

$$f(-\delta) = -\frac{\widehat{P}_\nu^\mu(\delta) - \widehat{P}_\nu^\mu(-\delta)}{2} \propto -\sin\left[\frac{\pi}{2}(\nu + \mu)\right] \sin\left[\delta\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\right] \quad (238)$$

Ou seja, a subtração $\widehat{P}_\nu^\mu(\delta) - \widehat{P}_\nu^\mu(-\delta) - C_5 = -1$ na equação (72) – é uma função ímpar de δ .

APROXIMAÇÕES ASSINTÓTICAS PARA OS AUTOVALORES

A partir da aproximação assintótica em (231), equações do tipo $P_\nu^\mu(\delta) \pm P_\nu^\mu(-\delta) = 0$, por exemplo, (228), podem ter seus autovalores aproximados encontrados ao procurar os zeros não triviais de (235) ($C_5 = 1$) ou (237) ($C_5 = -1$), o que produz as condições apresentadas em (239) e (240), respectivamente.

$$\cos\left[\frac{\pi}{2}(\nu_m + \mu)\right] = 0 \quad \bigvee \quad \cos\left[\delta\left(\nu_n + \frac{1}{2}\right)\right] = 0 \quad (239)$$

$$\sin\left[\frac{\pi}{2}(\nu_m + \mu)\right] = 0 \quad \bigvee \quad \sin\left[\delta\left(\nu_n + \frac{1}{2}\right)\right] = 0 \quad (240)$$

Para o caso em (228) (com $\mu = 0$), no qual as condições apresentadas são aquelas que aparecem em (240), a solução para a condição dependente de δ é dada por (241).

$$\nu_n = \frac{n\pi}{\frac{\pi}{2} - \theta_0} - \frac{1}{2} \quad (241)$$

Onde $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$.

A fórmula ν_n obtida em (241) coincide com a obtida por (MAKURIN e CHUBINSKII, 2007).

PARIDADE DE FUNÇÕES DE LEGENDRE

Se uma função $f(\delta)$ é par, segue que $f(\delta) - f(-\delta) = 0$. A condição de autovalor

presente na expressão (240) permite verificar a paridade da função de Legendre $P_{\xi}^1(\cos \delta)$.

Adaptando $\mu = 1$ na condição independente de δ de (240) obtém-se (242)

$$\nu_m = 2m + 1 \quad (242)$$

Onde $m = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Ou seja, as funções de Legendre de grau ímpar são pares em relação a $\delta = \frac{\pi}{2}$.

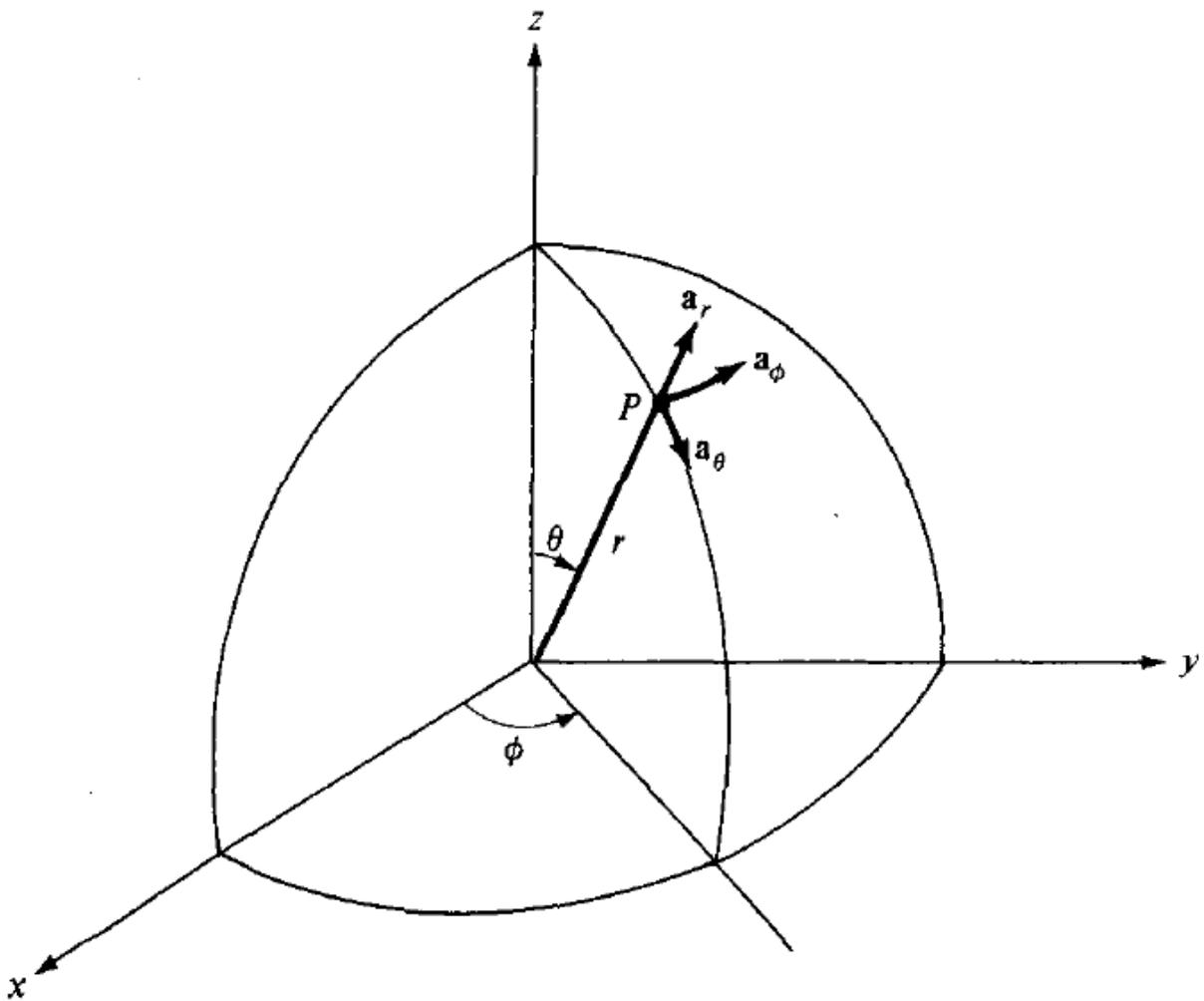
APÊNDICE 4 SISTEMAS DE COORDENADAS ESFÉRICAS

DEFINIÇÃO

O sistema de coordenadas esféricas especifica a posição de um ponto no espaço a partir de uma distância radial r , um ângulo polar medido a partir do zênite θ e um ângulo azimutal ϕ .

A **Figura 19** relaciona o sistema de coordenadas esférico com o sistema cartesiano.

Figura 19 – Orientação de vetores em coordenadas esféricas



FONTE: (SADIKU, 2004)

Os valores das coordenadas do sistema esférico devem respeitar os domínios dados por

(243).

$$\begin{aligned} 0 &\leq r < +\infty \\ 0 &\leq \theta \leq \pi \\ 0 &\leq \phi < 2\pi \end{aligned} \quad (243)$$

As expressões em (244) mostram as relações entre as coordenadas do sistema cartesiano e aquelas do sistema esférico.

$$\begin{aligned} x &= r \operatorname{sen} \theta \cos \phi \\ y &= r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \\ z &= r \cdot \cos \theta \end{aligned} \quad (244)$$

Um vetor qualquer \vec{A} é definido pela expressão (245).

$$\vec{A} \equiv A_r \hat{a}_r + A_\theta \hat{a}_\theta + A_\phi \hat{a}_\phi \quad (245)$$

Os diferenciais de comprimento são dados em (246). (SADIKU, 2004)

$$\begin{aligned} d\vec{l} \cdot \hat{a}_r &= dr \\ d\vec{l} \cdot \hat{a}_\theta &= r d\theta \\ d\vec{l} \cdot \hat{a}_\phi &= r \operatorname{sen} \theta d\phi \end{aligned} \quad (246)$$

O rotacional do vetor \vec{A} é dado pela expressão presente em (247). (SADIKU, 2004)

$$\operatorname{rot} \vec{A} \equiv \frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \theta} \begin{vmatrix} \hat{a}_r & r \hat{a}_\theta & (r \operatorname{sen} \theta) \hat{a}_\phi \\ \frac{d}{dr} & \frac{d}{d\theta} & \frac{d}{d\phi} \\ A_r & r A_\theta & (r \operatorname{sen} \theta) A_\phi \end{vmatrix} \quad (247)$$