

ARMANDO MIGUEL AWRUCH

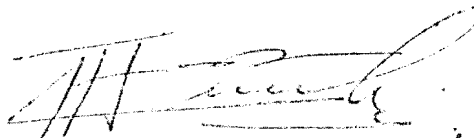
UN MODELO MATEMATICO PARA ESTUDIO DEL MOVIMIENTO DE  
AGUAS "POCO PROFUNDAS" EN REGIMEN NO PERMANENTE

Tese apresentada ao corpo docente do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como parte dos requisitos para obtenção do título de "MESTRE EM CIÊNCIAS".

Porto Alegre  
Estado do Rio Grande do Sul - Brasil

Abril de 1976

Esta tese foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM CIÊNCIAS, e aprovada em sua forma final pelo orientador e pelo Curso de Pós-Graduação.

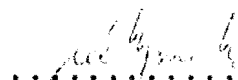


.....  
Prof. Agustin J. Ferrante (Ph.D.)

Orientador

Co-Orientador: Robert A. Adey (Ph.D.)

Universidad de Southampton (Inglaterra)



.....  
Prof. José S. Gomes Franco (M.Sc.)

Coordenador do Curso de Pós-Graduação

A mis padres

Agradezco

A los profesores Agustin J. Ferrante y Robert A. Adey por su orientación y dedicación

Al Curso de Pos-Graduación en Ingeniería Civil de la U.F.R.G.S.

A los integrantes del equipo LORANE por su colaboración

Al Banco Nacional de Desarrollo Económico por su apoyo financiero

A la Universidad Nacional del Nordeste (Rep. Argentina) por posibilitarme a realizar el curso de Pos-Graduación.

## SUMARIO

El objetivo de este trabajo es presentar una formulación matemática para el estudio del movimiento en sistemas de aguas "poco profundas" y su implementación en el sistema HYDR0, lenguaje orientado para Hidrodinámica computacional, el cual forma parte del Proyecto LORANE, desarrollado por el Curso de Pos-Graduación en Ingeniería Civil de la U.F.R.G.S.- Porto Alegre (Brasil).

Se considera un fluido homogéneo y un flujo bidimensional. Son tomados en cuenta los efectos debidos al viento, a la fricción en el fondo, a la aceleración de Coriolis y a la no linealidad de los términos convectivos.

La solución de las ecuaciones que gobiernan el problema se obtiene empleando el método de elementos finitos, utilizándose para tal fin, elementos triangulares de primer y segundo orden.

El modelo, tal como ha quedado en evidencia, permite predecir razonablemente velocidades y niveles en diferentes puntos del sistema de aguas.

La presente formulación matemática fue realizada con vistas a su aplicación específica en el estudio de problemas relativos a circulación en el "Rio Guaíba" y la "Lagoa dos Patos" en el Estado de Rio Grande do Sul, Brasil, si bien la filosofía adoptada para su desarrollo permite su utilización en cualquier otro problema de tipo semejante.

SUMMARY

The objective of this work is to present a mathematical formulation for studying motion in "shallow" water systems and its implementation for the HYDRO System, an oriented language for computational Hydrodynamic, embodied in the LORANE Project, developed by the Pos-Graduate Course in Civil Engineering of the U.F.R.G.S.-Porto Alegre(Brazil).

Homogeneous fluid and two-dimensional flow are considered. Wind effects, bottom friction, Coriolis acceleration, and the non-linearity of the convective terms are taken into account.

The solution of the governing equations is obtained by means of the finite element method, using first and second order triangular elements.

It is shown that the use of the model gives reasonable predictions for velocities and water levels.

The mathematical formulation presented was made having in mind the study of problems concerning circulation in the "Rio Guaiba" and the "Lagoa dos Patos", in the State of Rio Grande do Sul, Brazil, although the philosophy adopted for the development allows its use in any problem of similar type.

INDICE

INTRODUCCIÓN .....	1
CAPÍTULO I - Fundamentos variacionales del método de los elementos finitos .....	5
1.1 - Introducción .....	5
1.2 - Los métodos variacionales y de los residuos ponderados..	6
1.2.1 - El método de Raileigh-Ritz .....	8
1.2.2 - El método de Galerkin .....	14
1.3 - El método de elementos finitos.....	20
 CAPÍTULO II - Las Ecuaciones de Aguas "Poco Profundas".....	24
2.1 - Ecuaciones que gobiernan los fluidos. Dificultades en su resolución .....	24
2.2 - Condiciones de Borde .....	25
2.3 - Las ecuaciones de aguas "poco profundas" .....	27
2.4 - Las ecuaciones de aguas "poco profundas" en términos de la velocidad media .....	37
2.5 - Forma simplificada de las ecuaciones de aguas "poco profundas" .....	40
 CAPÍTULO III - El método de elementos finitos en la solución de las ecuaciones de aguas "poco profundas" ...	43
3.1 - Esquema computacional del método de elementos finitos...	43
3.2 - Aplicación del método de los elementos finitos a las ecuaciones de aguas "poco profundas".....	44
3.3 - Elementos triangulares.....	50
3.3.1 - Introducción.....	50
3.3.2 - Coordenadas triangulares.....	51
3.3.3 - Elementos triangulares de primer orden.....	53
3.3.4 - Elementos triangulares de segundo orden.....	56
3.4 - Esquemas de integración numérica.....	59
3.4.1 - Introducción.....	59
3.4.2 - Métodos de Runge-Kutta y del Predictor-Corrector.....	59
3.4.3 - Esquema trapezoidal.....	64
3.4.4 - El esquema de Galerkin.....	66

3.5 - Aplicación del método de los elementos finitos a la forma simplificada de las ecuaciones de aguas "poco profundas".....	68
---	----

CAPÍTULO IV - Aplicaciones del Modelo de Elementos Finitos para Sistemas de Aguas "Poco Profundas" .....	70
4.1 - Introducción .....	70
4.2 - Ejemplos de aplicación del modelo .....	70
4.3 - Análisis de resultados.....	97
4.4 - Conclusiones.....	101

APENDICE I - Conceptos y ecuaciones básicas de la Mecánica de los fluidos.....	103
A-I.1 - Formulaciones de Lagrange y de Euler. Conceptos básicos.....	103
A-I.2 - Conservación de masa.....	106
A-I.3 - Relaciones de equilibrio. Ecuaciones de "momentum" o cantidad de movimiento.....	107
A-I.4 - Relaciones entre variación de deformaciones en el tiempo y velocidades.....	110
A.I.5 - Primer principio de la Termodinámica. Densidad de energía interna. Función de disipación viscosa. Ecuación de estado.....	113
A.I.6 - Relaciones Constitutivas. Fluidos Newtonianos.....	115
A.I.7 - La ecuación de Navier-Stokes para fluidos Newtonianos incompresibles.....	116
A.I.8 - El principio de Bernoulli.....	119
A.I.9 - Turbulencia.....	120

APENDICE II - Movimiento en un sistema de referencia no inercial. La fuerza de Coriolis.....	124
A-II.1 - Introducción.....	124
A-II.2 - Sistema de coordenadas rotante.....	124
A-II.3 - La fuerza de Coriolis.....	126
A-II.4 - Movimiento relativo de la Tierra.....	127



APENDICE III - Matrices de masa para elementos triangulares de primer y segundo orden.....	130
APENDICE IV - Aspectos Computacionales.....	131
A-IV.1 - Detalles de la implementación del programa. Fórmula de recurrencia general.....	131
A-IV.2 - Utilización de los comandos del sistema HYDRO.....	134
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	137

## INTRODUCCIÓN

La necesidad de un control cada vez más riguroso de la calidad del agua como consecuencia del vertiginoso crecimiento de la cantidad de residuos industriales y descargas domiciliarias depositados en ríos, lagos, estuarios, etc., así como el alto costo de ciertas obras de ingeniería donde determinadas acciones, tales como las mareas por ejemplo, tienen gran incidencia durante y después de su ejecución, han hecho que el conocimiento del movimiento de las masas líquidas se convierta en una cuestión altamente importante, a los efectos de poder predecir velocidades (en dirección e intensidad) y las variaciones del nivel del agua en el sistema en consideración.

Un método tradicional muy utilizado para estudiar estos problemas es el de los modelos físicos; sin embargo, éstos presentan dificultades de escala y construcción. Por ello, no es sorprendente que con el advenimiento de los computadores electrónicos el empleo de los modelos matemáticos adquieran cada vez más notoriedad.

El objetivo propuesto puede alcanzarse con el uso de las ecuaciones de aguas "poco profundas". Se denomina así a masas de agua de poca profundidad relativa, o sea con profundidades pequeñas en relación a una dimensión característica horizontal del sistema (22), (23), (24) o, para el caso en que se estudie la influencia de acciones que provoquen oscilaciones forzadas (tales como mareas, o viento), esta relación está referida a la longitud de onda<sup>(16)</sup>.

Desde su formulación muchos esfuerzos se han realizado para obtener una solución numérica para el sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que definen el comportamiento de estos sistemas de aguas. Dado que una solución exacta es impracticable, los métodos de las líneas caracte

rísticas (characteristic methods) y de las diferencias finitas han encontrado amplia aplicación en este campo, por parte de muchos investigadores (7), (8), (9), (18), (19), (20), (22), (23), (24), (25), (32), (34). Sin embargo, muchos problemas envuelven configuraciones geométricas y condiciones de borde muy complejas que hacen inadecuados esos caminos, el último de los cuales presenta inconvenientes cuando, por razones económicas por ejemplo, es necesario usar mallas no uniformes.

El método de elementos finitos (10), (28), (30), (37), aplicado con extraordinario éxito en problemas referentes a la Mecánica del Sólido durante los últimos quince años, constituye una técnica cuyas aplicaciones a Mecánica de los Fluidos, y a Hidrodinámica, especialmente, han ido aumentando con gran rapidez. Las razones de su empleo en este campo, entre otros, son las siguientes:

- a) Los bordes irregulares y las mallas no uniformes pueden ser tratados sin dificultades computacionales, ni cambios en la programación o formulación del método.
- b) El uso práctico que puede hacerse de programas de análisis de elementos finitos debido a su generalidad, la cual permite abordar un número virtualmente ilimitado de problemas.
- c) Las amplias variaciones que aparecen en las propiedades físicas del fluido, pueden fácilmente considerarse, si se conoce su distribución espacial. Esta ventaja permite tener en cuenta, por ejemplo, variaciones en la viscosidad durante el movimiento turbulento y el efecto de la aceleración de Coriolis. Pero si existen variaciones en la densidad, o sea que se trata de una masa fluida estratificada (ya sea por causa de cuñas salinas o temperatura), se presentan dificultades debido a que la densidad misma es parte de la solución y no puede ser especificada a priori. Con todo, este efecto también puede ser tratado (17), (18), aun cuando en el presente trabajo se considera un medio homogéneo.

Debido a esas ventajas esta técnica se constituye en una manera práctica y atractiva para el análisis de problemas de Hidrodinámica.

Para formular un modelo de elementos finitos, un medio usual es desarrollar un principio variacional adecuado (12). En los problemas de la Mecánica del Sólido, donde se

usa una descripción Lagrangiana, este principio es generalmente fácil de obtener. Sin embargo, resulta difícil saber cuál es un funcional general adecuado para las ecuaciones a derivadas parciales de tipo hiperbólico, que es el caso de las ecuaciones de aguas "poco profundas".

Convencionalmente la base para representar un modelo de elementos finitos es una forma integral, la cual, en el sentido de un principio variacional, corresponde a las ecuaciones diferenciales que gobiernan el sistema. La transformación de estas ecuaciones a una forma integral es llevada a cabo, por ejemplo, por medio del método de los residuos ponderados<sup>(12)</sup> (weighted residuals methods) debido a las dificultades señaladas anteriormente.

Por otra parte, si bien el montaje de un modelo tridimensional parece ser muy conveniente, las inseguridades que existen respecto a viscosidades, a condiciones de borde, etc. justifican un tratamiento bidimensional (lo que conduce a álgebra más simple y economía computacional en tiempo y almacenamiento); es decir, que aún cuando se tienen en cuenta las irregularidades en la topografía del fondo y en la geometría de los bordes, las velocidades se consideran constantes verticalmente. En el presente trabajo se efectúa una descripción del desarrollo de la formulación, implementación, y utilización de un modelo de esa naturaleza.

En el Capítulo I se presentan sumariamente los fundamentos variacionales del método de elementos finitos, con énfasis especial en las técnicas de Raileigh-Ritz y Galerkin, incluyendo algunos ejemplos a los efectos de percibir mejor sus aplicaciones.

En el Capítulo II se deducen las ecuaciones de las aguas "poco profundas" y su forma simplificada, que resulta útil para una primera estimación de la circulación en lagos, estuarios, etc.

En el Capítulo III se aplica el método de los residuos ponderados a las ecuaciones de aguas "poco profundas" para colocarlas en una forma integral, y a partir de allí se desarrolla una formulación matemática, empleando la técnica de elementos finitos. Son presentados, en forma resumida, las ecua

ciones características para elementos triangulares de primer y segundo orden. Además se realiza un estudio de distintos esquemas de integración numérica.

En el Capítulo IV se presentan las características de utilización del sistema HYDRO<sup>(11)</sup>, incluyendo diferentes ejemplos y aplicaciones del modelo que constituye el objeto del presente trabajo. La solución computacional se llevó a cabo con el computador Burroughs B-6700 del Centro de Processamento de Dados de la U.F.R.G.S.

En el apéndice I son expuestas las relaciones básicas y las ecuaciones que gobiernan la Mecánica de los Fluidos<sup>(27)</sup>, con el objeto de recordar las bases sobre la que se asienta la deducción de las ecuaciones de aguas "poco profundas", y por otro lado, la de indicar la posibilidad de aplicarlas a otro tipo de problemas.

En el apéndice II son hechas consideraciones acerca de la fuerza y la aceleración de Coriolis, cuyos efectos pueden tener incidencias en ciertos casos.

En el apéndice III son presentadas las matrices de masa para elementos triangulares de primer y segundo orden, las que aparecen en la expresión matricial a nivel de elemento que surge de la formulación del método de elementos finitos para las ecuaciones de aguas "poco profundas".

En el apéndice IV se tratan aspectos computacionales del programa desarrollado, así como las posibilidades que el mismo ofrece actualmente. Además se comenta con mayores detalles el empleo de los comandos del sistema HYDRO, sumariamente presentados en el Capítulo IV.

## CAPÍTULO I

### Fundamentos variacionales del método de los elementos finitos

#### 1.1 - Introducción

Para intentar resolver matemáticamente cualquier problema físico es indispensable que el mismo pueda ser representado de esa forma. En la mayoría de los problemas de ingeniería la formulación matemática de los mismos viene dada por un sistema de ecuaciones del tipo:

$$L_i(u) = p_i \quad \text{en } V \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n \quad (1.1.1)$$

También existen las condiciones de bordes prescritas, y que pueden ser descritas así:

$$B_j(u) = q_j(s) \quad \text{en } S_j \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, m \quad (1.1.2)$$

En las expresiones (1.1.1) y (1.1.2) se tiene que:

$L_i(\ )$ ,  $B_j(\ )$  son operadores diferenciales o integrales.  $u$  representa las variables independientes del problema, y que definen completamente su estado.

$p_i$ ,  $q_j$  son funciones conocidas.

$V$  es el dominio de integración del problema

$S_j$  es una parte del borde, tal que  $\sum_{j=1}^m S_j = S$ , donde  $S$  es el borde total.

En general, un problema está representado por un modelo continuo (o sea definido por un número infinito de parámetros). Abordar la solución en estos casos puede resultar extremadamente difícil o bien imposible; por ello, asumiendo ciertas hipótesis, es posible discretizar el modelo (o sea, defi-

nirlo por un número finito de parámetros).

De esta forma se puede encontrar una solución al problema, por medio de los diferentes métodos que existen para resolver modelos discretos. Estas soluciones numéricas pueden obtenerse con la utilización de los computadores electrónicos y dan resultados aceptables en relación a los valores exactos que resultan del modelo continuo.

## 1.2 - Los métodos variacionales y de los residuos ponderados

Todo problema "de extremo" puede ser expresado de dos maneras; una por medio de las ecuaciones diferenciales que gobiernan el sistema más las condiciones de borde, según se ha visto en (1.1.1) y (1.1.2), y otra, equivalente, usar un funcional y encontrar su valor estacionario, usando funciones que satisfazan ciertas condiciones de contorno.

Las condiciones de borde pueden ser de dos tipos: a) esenciales, que son aquellas que las funciones aproximadas que representan las incógnitas relevantes del problema deben cumplir con exactitud para posibilitar la convergencia; b) condiciones de contorno naturales, que son aquellas que no necesariamente se satisfacen con exactitud, pero cuya aproximación será mejor si se usa una solución más refinada (a través de funciones de interpolación de más alto orden, o con mayor cantidad de puntos en el modelo discreto).

Un funcional puede expresarse por

$$F = \int_V I(u) dV \quad (1.2.1)$$

Su valor estacionario, o valor extremo del funcional que da la solución exacta del problema es:

$$\delta F = 0 \quad (\text{primera variación del funcional } F) \quad (1.2.2)$$

Teniendo en cuenta lo complejo que puede resultar la solución exacta, se intenta obtener una aproximada. Para ello, se aproxima las variables independientes del problema en la forma

$$u_{ap} = \sum_{k=1}^l \alpha_k \phi_k \quad (1.2.3)$$

donde:

$u_{ap}$  : variable independiente,  $\alpha_k$ : parámetros indeterminados,  $\phi_k$ : funciones linealmente independientes y previamente conocidas.

Incluyendo la (1.2.3) en (1.2.1) se obtiene un funcional aproximado:

$$F_{ap} = \int_V I(u_{ap}) dV = \int_V I(\alpha_k) dV \quad (1.2.4)$$

De plantear el principio variacional  $\delta F_{ap} = 0$ , resulta un sistema de ecuaciones que permite calcular los parámetros  $\alpha_k$ , y, por lo tanto,  $u_{ap}$  puede ser perfectamente determinado.

Entre los métodos variacionales, uno de los que permiten obtener soluciones aproximadas y que es muy utilizado en la práctica, es el de Rayleigh-Ritz (existen otros como el de Kantorovich, Trefftz, etc.).

El empleo del método de Rayleigh-Ritz (y de los otros métodos variacionales), requiere la existencia de un funcional, el cual puede ser muy difícil o imposible de encontrar. Sin embargo, tal como se señaló con anterioridad, otra forma de expresar un problema de ingeniería es por medio de las ecuaciones que gobiernan el sistema más las condiciones de borde. En estos casos la solución aproximada puede intentarse por medio de alguno de los métodos de los residuos ponderados<sup>(12)</sup>. El más importante de ellos para una formulación de elementos finitos es el de Galerkin (existen otros tales como el de Colocación, el de los Mínimos cuadrados, etc.).

A continuación se describe sumariamente en qué consisten estos métodos.

Sea un problema descrito por:

$$L(u) = p \quad \text{en } V \quad (\text{sistema de ecuaciones que gobiernan el problema})$$

$$B(u) = q_s \quad \text{en } S \quad (\text{condiciones de borde})$$

Aproximamos el valor exacto de  $u$  por medio de una expresión como la (1.2.3).

Introduciendo  $u_{ap}$  en el sistema de ecuaciones, se produce un error, o sea:



$$\varepsilon = I(u_{ap}) - p \neq 0 \quad (1.2.5)$$

$\varepsilon = 0$  sólo si  $u_{ap}$  coincide con la solución exacta del problema.

Luego, si la función aproximada cumple con exactitud todas las condiciones de borde, se trata de minimizar el residuo o hacer nula su media, de tal forma que:

$$\int_V \varepsilon W_i \, dV = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.2.6)$$

Las  $W_i$  son funciones ponderadas, y según ellas sean escogidas, dan origen a los diferentes métodos.

Resulta conveniente hacer algunos comentarios adicionales para el caso de los métodos de Rayleigh-Ritz y de Galerkin, pues el método de los elementos finitos puede tomarse como una generalización de esos esquemas.

### 1.2.1 - El método de Rayleigh-Ritz

Para ilustrar mejor, supóngase que se desea determinar la función  $f(x)$ , que corresponde al valor estacionario del funcional

$$F = \int_{x_1}^{x_2} I(f, f_x, x) dx \quad (1.2.1.1)$$

donde  $f_x$  representa la derivada de  $f(x)$  respecto de  $x$ .

Las condiciones de borde vienen dadas por  $f(x_1) = f(x_2) = 0$ . -  $f(x)$  es la solución exacta del problema.

En el método de Rayleigh-Ritz se asume que  $f(x)$  puede ser aproximado por una función  $f(x)_{ap}$  de la siguiente forma:

$$f(x)_{ap} = \alpha_1 \phi_1 + \alpha_2 \phi_2 + \dots + \alpha_n \phi_n \quad (1.2.1.2)$$

donde los  $\phi_i$  son funciones conocidas de  $x$ , linealmente independientes entre sí, y los  $\alpha_i$  son parámetros indeterminados denominados coordenadas generalizadas. Las funciones seleccionadas deben ser continuas hasta el grado  $N-1$ , donde  $N$  es el máximo orden de las derivadas que aparecen en el funcional.

Substituyendo (1.2.1.2) en (1.2.1.1) se obtiene:

$$F(f) \cong F(f_{ap}) = F(\alpha_i) \quad (1.2.1.3)$$

A continuación de acuerdo con el principio variacional correspondiente, que establece que la solución implica que  $\delta F = 0$ , se plantea un sistema de ecuaciones que tiene los  $\alpha_i$  como incógnitas, es decir:

$$\delta F(\alpha) = 0 \Rightarrow \frac{\partial F(\alpha_i)}{\partial \alpha_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.2.1.4)$$

La resolución del sistema (1.2.1.4) permite conocer los parámetros  $\alpha_i$ , y, en consecuencia,  $f(x)_{ap}$ .

Para obtener resultados satisfactorios, las funciones aproximadas que se seleccionan deben satisfacer las condiciones de continuidad del problema, y además las condiciones de borde esenciales. Cuando las imposiciones anteriores son observadas se dice que las funciones son admisibles. Es necesario destacar aquí que en la práctica las condiciones de borde naturales no son frecuentemente satisfechas (Ver ejemplo 2), pero se sobreentiende que cuando el número de funciones de interpolación tiende a infinito, entonces sí lo serán.

Para el caso propuesto, como las condiciones de borde esenciales deben satisfacerse con exactitud, resulta  $f(x_1)_{ap} = f(x_2)_{ap} = 0$ .

Para que las soluciones aproximadas convergan hacia la solución exacta, la serie de funciones aproximadas elegidas debe ser completa. Esto significa que cuando más términos se tomen  $f(x)_{ap}$  se encuentra más próximo a la solución exacta  $f(x)$ , de tal forma que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_1}^{x_2} \left( f(x) - \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i \right)^2 dx = 0 \quad (1.2.1.5)$$

La convergencia será de tipo monótona, o sea que las soluciones aproximadas se irán acercando asintóticamente a la exacta, cuando las funciones elegidas constituyan una serie minimizante, o sea cuando cada nueva aproximación contiene a todas las demás. Para el caso propuesto, una serie minimizante, esta constituida por una secuencia del tipo:

$$\begin{aligned}
 f(x)_{ap}^{(1)} &= \alpha_1^{(1)} \phi_1 \\
 f(x)_{ap}^{(2)} &= \alpha_1^{(2)} \phi_1 + \alpha_2^{(2)} \phi_2 \\
 f(x)_{ap}^{(3)} &= \alpha_1^{(3)} \phi_1 + \alpha_2^{(3)} \phi_2 + \alpha_3^{(3)} \phi_3 \\
 &\dots \\
 f(x)_{ap}^{(n)} &= \alpha_1^{(n)} \phi_1 + \alpha_2^{(n)} \phi_2 + \dots + \alpha_n^{(n)} \phi_n
 \end{aligned}
 \tag{1.2.1.6}$$

Cada nueva solución de (1.2.1.6) será igual o más precisa que la anterior; si el objetivo es minimizar el funcional  $F$ , se cumplirá que:

$$F^{(1)} \geq F^{(2)} \geq F^{(3)} \geq \dots \geq F^{(n)} \geq F \tag{1.2.1.7}$$

Como puede observarse en (1.2.1.7) cada solución da un límite superior de  $F$ .

En el caso que el funcional  $F$  fuera función de varias funciones debe elegirse una función en términos de parámetros indeterminados para cada una de ellas.

Otro aspecto que es necesario destacar es que  $f(x)_{ap}$  puede ser un polinomio, una serie de funciones trigonométricas, etc.

Aunque no es el objetivo de este trabajo desarrollar con profundidad las diferentes técnicas variacionales, resulta conveniente presentar algunos ejemplos a los efectos de comprender mejor sus aplicaciones (estos ejercicios fueron extraídos de las notas del curso "Introduction to Variational Methods for Engineering" dictado por el Prof. Carlos A. Brebbia y realizado en Porto Alegre, Brasil, en agosto de 1973).

Ejemplo 1:

Considerese el funcional correspondiente a la ecuación de Poisson

$$F(f) = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 - 2 C f \right] dx dy \tag{1}$$

Las condiciones de borde son:

$f = 0$  para  $x = 0$ ,  $x = a$ ,  $y = 0$  e  $y = b$ .

Para aproximar la función se toman series trigonométricas. Se supone que:

$$f(x,y) = \sum_k \sum_\ell \alpha_{k\ell} \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\ell\pi y}{b} \quad k, \ell = 1, 3, 5, \dots \quad (2)$$

Dado que las condiciones de borde son homogéneas se tiene, después de integrar por partes, el siguiente punto de partida:

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_{k\ell}} = \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\ell\pi y}{b} dx dy = 0 \quad (3)$$

Sustituyendo (2) en (1) esta expresión toma esta forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \alpha_{k\ell}} &= \alpha_{k\ell} \int_0^a \int_0^b \left[ \left( \frac{\pi k}{a} \right)^2 + \left( \frac{\pi \ell}{b} \right)^2 \right] \operatorname{sen}^2 \frac{k\pi x}{a} \operatorname{sen}^2 \frac{\ell\pi y}{b} dx dy - \\ &- \int_0^a \int_0^b C \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\ell\pi y}{b} dx dy = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Después de integrar se obtiene:

$$\alpha_{k\ell} = \frac{16 a^2 b^2 C}{\pi^4 k \ell (b^2 k^2 + a^2 \ell^2)} \quad (5)$$

Debido a la ortogonalidad un  $\alpha_{k\ell}$  no envuelve al otro, de manera que la solución aproximada puede escribirse:

$$f = \sum_{k=1,3,\dots} \sum_{\ell=1,3,\dots} \frac{16 C a^2 b^2}{\pi^4 k \ell (b^2 k^2 + a^2 \ell^2)} \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\ell\pi y}{b} \quad (6)$$

En el caso de que  $a = b$ , en el centro, o sea para  $x = y = \frac{a}{2}$ , se tiene:

$$f_c = \left( 8 + \frac{16}{15} + \frac{8}{81} + \dots \right) \frac{1}{\pi^4} a^2 C \quad (7)$$

La solución exacta es  $\frac{9.15}{\pi^4} a^2 C$  (8)

Tomando sólo tres términos en la serie (7) se observa que  $f_c = \frac{9.165}{\pi^4} a^2 C$ , solución que está muy próxima de la exacta, dada por la expresión (8).

Ejemplo 2:

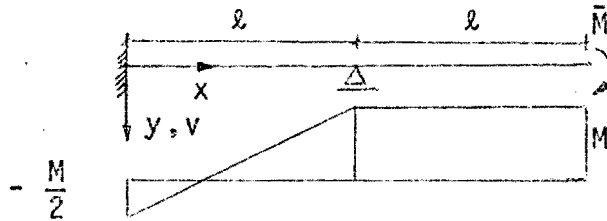


Fig. 1.2.1.1

Se considera la viga indicada en la fig.1.2.1.1. La solución exacta para la rotación en el borde libre es:

$$\theta = \left( \frac{dv}{dx} \right)_{x=2l} = 1.250 \frac{Ml}{EI} \quad (1)$$

En lo que sigue se ilustrará la manera como varía  $\theta$  con dos aproximaciones, y como las condiciones de bordes naturales tienden a ser satisfechas.

Las condiciones de borde esenciales, que deben ser exactamente satisfechas son:

$$v = \frac{dv}{dx} = 0 \quad \text{en } x = 0 \quad \text{y} \quad v = 0 \quad \text{en } x = l.$$

Las condiciones de borde naturales, que no son impuestas, son:

$$M = EI \frac{d^2v}{dx^2} = \bar{M} \quad \text{y} \quad Q = -\frac{dM}{dx} = 0 \quad \text{en } x = 2l \quad (2)$$

Se parte con:

$$v_1 = \alpha_1^{(1)} \phi_1 = \alpha_1^{(1)} [x^2(x-l)] \quad (3)$$

El correspondiente funcional es:

$$F^{(1)} = \int_0^{2l} \frac{EI}{2} \left( \frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 dx - \bar{M} \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=2l} \quad (4)$$

Colocando (3) en (4) se obtiene:

$$F^{(1)} = 28EI(\alpha_1^{(1)})^2 \ell^3 - 8\alpha_1^{(1)} \ell^2 \bar{M} \quad (5)$$

Minimizando:

$$\frac{\partial F^{(1)}}{\partial \alpha_1^{(1)}} = 56EI \alpha_1^{(1)} \ell^3 - 8 \ell^2 \bar{M} = 0 \quad (6)$$

$$\text{Luego } \alpha_1^{(1)} = \frac{1}{7} \left( \frac{\bar{M}}{EI\ell} \right) \quad (7)$$

Las rotaciones y las condiciones de borde naturales en  $x = 2\ell$  son:

$$\theta = \left( \frac{dv}{dx} \right)_{x=2\ell} = 8\alpha_1^{(1)} \ell^2 = \frac{8}{7} \left( \frac{M\ell}{EI} \right) \approx 1.14286 \frac{M\ell}{EI} \quad (8)$$

$$M = EI \left( \frac{d^2v}{dx^2} \right)_{x=2\ell} = \frac{10}{7} \bar{M} \approx 1.42857 \bar{M}; \quad Q = - \left( \frac{dM}{dx} \right)_{x=2\ell} = -\frac{6}{7} \frac{\bar{M}}{\ell} = -0.85714 \frac{\bar{M}}{\ell} \quad (9)$$

Como segunda aproximación se toma

$$V_2 = \alpha_1^{(2)} \phi_1 + \alpha_2^{(2)} \phi_2 = \alpha_1^{(2)} x^2(x-\ell) + \alpha_2^{(2)} x^3(x-\ell) \quad (10)$$

Requiriendo que el funcional  $F$  sea estacionario con respecto a  $\alpha_1^{(2)}$  y  $\alpha_2^{(2)}$  se llega al siguiente sistema de ecuaciones:

$$56 \alpha_1^{(2)} + 152\ell \alpha_2^{(2)} = \frac{8\bar{M}}{EI\ell} \quad (11)$$

$$15 \alpha_1^{(2)} + 441.6 \ell \alpha_2^{(2)} = \frac{20\bar{M}}{EI\ell}$$

Resolviendo el sistema (11) se obtiene:

$$\alpha_1^{(2)} = 0.30315 \left( \frac{\bar{M}}{EI\ell} \right), \quad \ell \alpha_2^{(2)} = -0.05905 \left( \frac{\bar{M}}{EI\ell} \right) \quad (12)$$

La rotación y las condiciones de bordes naturales en  $x = 2\ell$  son:

$$\theta = 8 \alpha_1^{(2)} \ell^2 + 20 \alpha_2^{(2)} \ell^3 = 1.244 \left( \frac{M\ell}{EI} \right) \quad (13)$$

$$M = 0.9055 \bar{M} \quad Q = 0.6614 \frac{\bar{M}}{\ell} \quad (14)$$

La segunda solución da buenos resultados para

la rotación; sin embargo, las condiciones de borde naturales no convergen tan rápidamente.

### 1.2.2 - El método de Galerkin

Se había señalado que, cuando a un cierto problema representado por las ecuaciones que gobiernan el sistema más las condiciones de contorno, se le atribuía una solución aproximada, que podía estar dada por expresiones como las (1.2.3), se producía un cierto error  $\epsilon$ , donde:

$$\epsilon = L(u_{ap}) - p = L\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i\right) - p \neq 0 \quad (1.2.2.1)$$

En el método de Galerkin estos residuos son ortogonalizados con respecto a las funciones  $\phi_j$ , de forma que la (1.2.6) quedaría representada así:

$$\int_V \epsilon \phi_j dV = \int_V \left[ L\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i\right) - p \right] \phi_j dV = 0 \quad \begin{matrix} i=1,2,\dots,n \\ j=1,2,\dots,n \end{matrix} \quad (1.2.2.2)$$

La (1.2.2.2) constituye un sistema de ecuaciones que permite hallar los parámetros  $\alpha_i$ ; en el caso de ser  $L(\ )$  un operador lineal, el sistema es lineal.

Bajo ciertas condiciones (con operadores autoadjuntos y problemas conservativos), se puede integrar por partes la (1.2.2.2), para obtener  $\delta\left\{\int_V I(u)dV\right\} = 0$ , donde  $I$  es una función de  $u$  y de sus derivadas. Para estos casos los métodos de Raileigh-Ritz y Galerkin son equivalentes.

Con todo, el método de Galerkin permite tratar los casos en que los operadores no son autoadjuntos y abordar problemas no lineales.

Considerando la (1.2.3) se puede escribir la primera variación de  $u_{ap}$  como:

$$\delta u_{ap} = \sum_{i=1}^n \delta \alpha_i \phi_i \quad (1.2.2.3)$$

Teniendo en cuenta que:

$$\delta \alpha_i \int_V \left[ L(u_{ap}) - p \right] \phi_i dV = \int_V \left[ L(u_{ap}) - p \right] \delta \alpha_i \phi_i dV = 0 \quad i=1,2,\dots,n \quad (1.2.2.4)$$

Sumando la ecuación representada en (1.2.2.4) se tiene:

$$\sum_{i=1}^n \int_V [L(u_{ap}) - p] \delta \alpha_i \phi_i dV = \int_V [L(u_{ap}) - p] \left( \sum_{i=1}^n \delta \alpha_i \phi_i \right) dV = 0 \quad (1.2.2.5)$$

$$\bar{\delta} \int_V [L(u_{ap}) - p] \delta u_{ap} dV = 0 \quad (1.2.2.6)$$

La expresión (1.2.2.6) representa sumariamente el sistema de ecuaciones dado en (1.2.2.2).

Para observar las diferencias entre Rayleigh-Ritz y Galerkin es conveniente considerar algunos ejemplos ilustrativos (estos ejercicios fueron extraídos de las notas del curso "Introduction to Variational Methods for Engineering" dictado por el Prof. Carlos A. Brebbia y realizado en Porto Alegre, Brasil, en agosto de 1973).

### Ejemplo 1.

Considerese la viga de fundación elástica indicada en la figura 1.2.2.1.

El potencial total de energía es:

$$F = \frac{EI}{2} \int_0^l \left( \frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l K v^2 dx - \int_0^l p v dx \quad (1)$$

donde  $K$  es una constante característica del suelo.

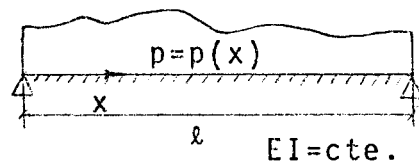


Fig. 1.2.2.1

La primera variación del funcional da:

$$\delta F = EI \int_0^l \frac{d^2 v}{dx^2} \frac{d^2 \delta v}{dx^2} dx + \int_0^l K v \delta v dx - \int_0^l p \delta v dx = 0 \quad (2)$$

Integrando por partes se tiene:



$$\int_0^l (EI \frac{d^4 v}{dx^4} + Kv - p) V dx + \left[ EI \frac{d^2 v}{dx^2} \frac{d \delta v}{dx} - EI \frac{d^3 v}{dx^3} \delta v \right]_{x=0}^{x=l} = 0 \quad (3)$$

La expresión bajo el signo integral es la ecuación diferencial de un elemento  $dx$  de la viga sometida a la carga  $p(x)dx$ . El segundo término es el trabajo realizado por las fuerzas de borde.

En el método de Galerkin se puede satisfacer todas las condiciones de borde (esenciales y naturales) con exactitud, de manera que el segundo término desaparece. Es decir que para  $x = 0, l$ :

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = 0 \quad \bar{0} \quad \frac{d \delta v}{dx} \quad \text{y} \quad \frac{d^3 v}{dx^3} = 0 \quad \bar{0} \quad \delta v = 0 \quad (4)$$

Esto significa que aquí son satisfechas más condiciones que en el método de Rayleigh-Ritz, que sólo satisface con exactitud las condiciones de borde esenciales.

Con todas las condiciones de contorno satisfechas, la ecuación (3) puede escribirse

$$\int_0^l (EI \frac{d^4 v}{dx^4} + Kv - p) \delta v dx = \int_0^l (L(v) - p) \delta v dx = 0 \quad (5)$$

Sustituyendo la función  $v(x)$  por una aproximada  $v(x)_{ap} = \sum \alpha_i \phi_i(x)$  en (5), se llega al sistema de ecuaciones (1.2.2.6).

### Ejemplo 2

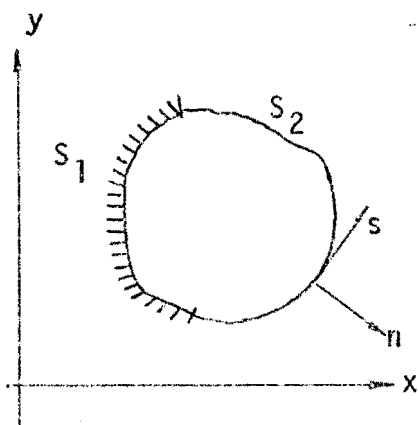


Fig. 1.2.2.2

En el ejemplo anterior se decía que en el método de Galerkin se puede cumplir todas las condiciones de borde, sin satisfacer la ecuación diferencial.

Sin embargo es posible para la solución satisfacer sólo las condiciones de bordes esenciales con exactitud, agregando las integrales correspondientes a las condiciones de borde naturales a la expresión integral.

Para ilustrarlo mejor se considera el caso de filtración en suelo granular. La ley de Darcy para dos dimensiones y medio isotrópico viene dada por

$$u = K \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad v = K \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (1)$$

$K$  : capacidad de permeabilidad del suelo

$\theta$  es el potencial

$u, v$ : velocidades en el sentido  $x$  e  $y$

Si el volumen en los poros es constante, el flujo entrante es igual al saliente. Esto es:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \bar{\theta} \quad K \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (2)$$

Las condiciones de borde son de dos tipos:

- Condiciones de borde esenciales:  $\theta = \bar{\theta}_0$ , donde  $\bar{\theta}_0$  es un valor especificado del potencial en  $S_1$ .
- Condiciones de borde naturales:  $V_n = K \frac{\partial \theta}{\partial n}$  en  $S_2$ , donde  $\vec{n}$  es la normal al borde.

Si la función aproximada escogida satisface ambas condiciones de borde, es necesario sólo satisfacer las ecuaciones de equilibrio, las que pueden ser escritas así:

$$\iint K \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) \delta \theta dx dy = 0 \quad (3)$$

Integrando por partes(3), se puede encontrar las condiciones de borde naturales:

$$\begin{aligned} \iint K \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \delta \theta}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial \delta \theta}{\partial y} \right) dx dy &= \int K \frac{\partial \theta}{\partial x} \delta \theta dy + \\ + \int K \frac{\partial \theta}{\partial y} \delta \theta dx &= \int_S K \frac{\partial \theta}{\partial n} dS \end{aligned} \quad (4)$$

Si la velocidad es conocida en el borde, o sea  $\bar{V}_n = K \frac{\partial \theta}{\partial n}$ , puede ser satisfecha de una manera aproximada escribiendo (Teniendo en cuenta que  $\delta \theta = 0$  en  $S_1$ ):

$$\iint K \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) \delta \theta \, dx dy = \int_{S_2} \left( K \frac{\partial \theta}{\partial n} - \bar{v}_n \right) \delta \theta \, dS \quad (5)$$

La ecuación (5) es la expresión de Galerkin para el caso de que las funciones seleccionadas satisfagan sólo a proximadamente la ecuación de equilibrio y las condiciones de contorno naturales.

La (5) puede escribirse de otra forma, si se integra por partes:

$$\iint K \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \delta \theta}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial \delta \theta}{\partial y} \right) dx dy = \int_{S_2} \bar{v}_n \delta \theta \, dS \quad (6)$$

La (6) no es más que la variación del funcional:

$$F(\theta) = \frac{1}{2} \iint K \left\{ \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy - \int_{S_2} \bar{v}_n \theta \, dS \quad (7)$$

### Ejemplo 3

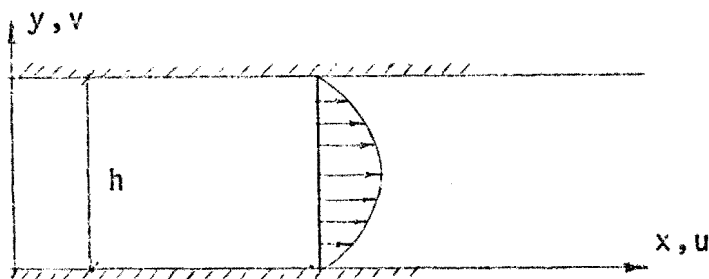


Fig. 1.2.2.3

Flujo de Poiseuille entre dos placas paralelas

Considérese el caso del flujo en un canal de ancho unitario para el caso de  $v = 0$ . La ecuación de la continuidad viene dada por:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

Como  $v = 0$ , resulta  $u = u(y)$

Para un flujo laminar confinado y convección forzada la ecuación de "momentum" en  $x$  viene expresada por:

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2)$$

Donde:

$\rho$  = densidad;  $\mu$ : viscosidad;  $p$ : presión  
 $u, v$ : velocidades en el sentido  $x$  e  $y$  respectivamente.

De (1) se tiene:

$$0 = \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3)$$

Integrando (3) dos veces con respecto a  $y$ , y teniendo en cuenta las condiciones de borde se tiene:

$$u = \frac{1}{2} \frac{h^2}{\mu} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) \left( \frac{y^2}{h^2} - \frac{y}{h} \right) \quad (4)$$

La ecuación (4) da el flujo de Poiseuille entre dos placas paralelas.

La integral de Galerkin puede ahora escribirse así:

$$\int_0^h \left( - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \delta u dy = 0 \quad (5)$$

Integrando por partes y teniendo en cuenta que  $u = 0$  en  $y = 0, h$  se obtiene:

$$\int_0^h \left( \frac{\partial p}{\partial x} u + \mu \frac{\delta u}{\delta y} \frac{\mu \delta u}{\delta y} \right) dy = 0 \quad (6)$$

Se toma como función aproximada la siguiente:

$$u_{ap} = u_c \operatorname{sen} \left( \frac{\pi y}{h} \right) \quad (7)$$

La (7) satisface las condiciones de borde.

Así, introduciendo (7) en (5) se tiene:

$$\int_0^h \left[ \frac{\partial p}{\partial x} \operatorname{sen} \left( \frac{\pi y}{h} \right) + \mu \left( \frac{\pi}{h} \right)^2 \cos^2 \left( \frac{\pi y}{h} \right) \delta u_c \right] \delta u_c dy = 0 \quad (8)$$

De (8):

$$\frac{\partial p}{\partial x} \left( \frac{2h}{\pi} \right) + \nu \frac{\pi^2}{h} \frac{1}{2} u_c = 0 \Rightarrow u_c = -\frac{4h^2}{\pi^3 \nu} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (9)$$

Luego se tiene la siguiente distribución de velocidades:

$$u_{ap} = -\frac{4}{\pi^3} \frac{h^2}{\nu} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) \operatorname{sen} \frac{\pi y}{h} \quad (10)$$

La expresión (10) puede ahora compararse con la solución exacta dada por la (4).

### 1.3 - El método de elementos finitos

La mayor dificultad en la aplicación de los dos métodos descritos anteriormente es la elección de las funciones globales que constituirán la solución aproximada del problema.

Estas funciones además de cumplir, por lo menos, con las condiciones de borde esenciales, deben representar todas las características geométricas y del material del problema. Todas estas condiciones son difíciles de satisfacer para todo el continuo por medio de las referidas funciones globales, por lo que los métodos variacionales y de los residuos ponderados en su forma "clásica" son de alcances limitados.

Con el gran desarrollo alcanzado por los computadores electrónicos, comenzó a tomar forma la idea de que las funciones mencionadas previamente estuvieran localizadas en una pequeña región.

Justamente a través de esta idea es que comenzó a desarrollarse el método de elementos finitos, que ha demostrado ser una técnica muy eficiente para aproximar mediante un sistema de ecuaciones algebraicas las ecuaciones diferenciales correspondientes a un problema continuo, y poder así obtener soluciones aproximadas en términos de un número finito de variables.

Para ilustrar el método, supóngase que exista un funcional  $F$  para un cierto problema que se quiere resolver. La solución del problema viene definida por la expresión variacio

nal  $\delta F = 0$ , que representa la primera variación del funcional  $F$ . Esta es la condición que deberá ser satisfecha por la o las funciones utilizadas para caracterizar el continuo.

El funcional exacto  $F$  es sustituido por uno aproximado  $F_{ap}$ , tal que las variables o funciones que caracterizan el problema se expresen en términos de funciones de interpolación multiplicadas por parámetros indeterminados, que en general están asociados a las variables del problema, o a otras magnitudes físicas.

Para comenzar la resolución, se divide el dominio de integración en subregiones denominadas elementos finitos (sus dimensiones son finitas).

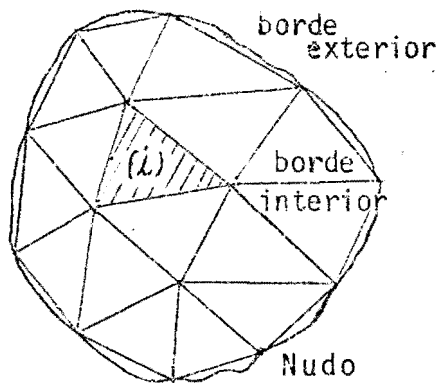


Fig. 1.3.1

Un elemento genérico ( $i$ ) (Ver Fig. 1.3.1) tiene " $n_i$ " nudos; sean " $n$ " el número total de nudos y " $m$ " el número total de elementos.

Sobre cada región (o elemento) las variables del problema se expresan como combinaciones lineales de funciones de interpolación, multiplicadas por parámetros indeterminados.

Estas expresiones representan el comportamiento localizado aproximado de las variables sobre cada elemento. Las funciones aproximadas deben cumplir las condiciones de admisibilidad y completitud mencionadas en el párrafo 1.2.1. En los bordes, o a veces en el interior del elemento se identifican los puntos nodales asociados con el mismo, de tal forma que los parámetros indeterminados correspondan a los valores de las variables del problema en esos puntos, o estén relacionado con esos valores.

Sobre cada elemento se evalúa el funcional aproximado, y su valor total será la suma de esas evaluaciones en todo el dominio de integración (en los " $m$ " elementos). Es decir que:

$$F_{ap} = \sum_{i=1}^m F_{ap}^i \quad (1.3.1)$$

Las variables del elemento "i" se aproxima por:

$$u_{ap}^i = \sum_{k=1}^r \alpha_k^i \phi_k \quad (1.3.2)$$

Reemplazando (1.3.2) en (1.3.1) se tiene el funcional total aproximado en función de los parámetros  $\alpha_k^i$ . Es importante hacer notar que la expresión (1.3.2) sólo es válida en el elemento "i" y que para otro elemento las variables se aproximan por una función del mismo tipo pero los  $\alpha_k$  son diferentes. Respecto a las funciones de interpolación  $\phi_k$ , éstas son las mismas, normalmente, pero también pueden cambiar de elemento a elemento.

Aplicando la condición estacionaria  $\delta F_{ap} = 0$  se tiene:

$$\delta F_{ap} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^r \frac{\partial F_{ap}^i}{\partial \alpha_k^i} \delta \alpha_k^i = 0 \quad (1.3.3)$$

Dado que en (1.3.3)  $\delta \alpha_k^i$  es arbitrario resulta:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^r \frac{\partial F_{ap}^i}{\partial \alpha_k^i} = 0 \quad (1.3.4)$$

La expresión (1.3.4) es un sistema de ecuaciones a partir del cual es posible hallar los  $\alpha_k^i$  y así conocer el valor de cualquier variable.

Tal como es posible percibir, esta solución es aproximada y corresponde a la de un modelo discreto que se comporta casi igual que el modelo continuo. La aproximación se introduce al imponer un comportamiento localizado de las variables del problema.

Para que la solución aproximada converga a la solución exacta, se puede aumentar el número de nudos, es decir, aumentar el número de parámetros indeterminados, o refinar la función de interpolación, o ambas cosas a la vez.

Es preciso señalar que en la práctica el sistema (1.3.4) no se expresa en términos de los  $\alpha_k^i$ , pues ellos son reemplazados por los valores de las variables del problema en los puntos nodales, por lo tanto, la solución del sistema de ecuaciones dará directamente esos valores sin necesidad de calcular

los  $\alpha_k^i$  previamente. Luego, antes de solucionar el sistema deberá tenerse en cuenta las condiciones de borde esenciales.

Aunque puede decirse que no existen estudios acerca de los criterios de convergencia para todos los tipos de problema, ellos pueden resumirse en dos condiciones:

- a) Se requiere que exista continuidad en las variables y sus derivadas hasta el orden  $M-1$  (donde  $M$  es el máximo orden entre las derivadas que aparecen en el funcional) a través de los bordes internos entre elementos.
- b) Cuando el elemento tiende a ser infinitesimal, y las derivadas existentes en el funcional tienden a ser constantes, las funciones aproximadas seleccionadas deben representar esas derivadas constantes con exactitud.

Todo el esquema descrito hasta aquí está basado en el método de Rayleigh-Ritz, pero el método de elementos finitos es general y se puede aplicar aún a los casos en que no puede definirse un funcional. Para ello se utilizan las ecuaciones diferenciales del problema y las condiciones de contorno y se recurre a alguno de los métodos de los residuos ponderados (generalmente el de Galerkin), tal como se verá más adelante.

Posteriormente, en el Capítulo III, se volverá a considerar otros detalles respecto a esta técnica, especialmente en lo que se refiere a la formulación del problema de aguas "poco profundas" para resolverlo por el método de los elementos finitos, y el esquema computacional de solución.



## CAPÍTULO II

### Las Ecuaciones de Aguas "Poco Profundas"

#### 2.1 - Ecuaciones que gobiernan los fluidos. Dificultades en su resolución.

Las ecuaciones básicas que gobiernan los fluidos pueden resumirse en las siguientes expresiones (Ver Apéndice I):

a) Ecuaciones de movimiento:

$$-\frac{\partial p}{\partial x_k} + \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_j} + \rho b_k = \frac{D(\rho v_k)}{Dt} \quad (i, k = 1, 2, 3) \quad (2.1.1)$$

b) Continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.1.2)$$

A partir de (2.1.1) pueden deducirse las ecuaciones de Navier-Stokes, las que en conjunto con la ecuación de la continuidad (2.1.2), la de la energía y dos ecuaciones de estado (cinética y calórica) describen en forma completa el flujo de un fluido Newtoniano (Ver Apéndice I).

Las ecuaciones de Navier-Stokes están ligadas a la ecuación de la energía a través de las ecuaciones de estado que son:

$$\begin{aligned} f(\rho, p, T) &= 0 && \text{Ecuación de estado cinética} \\ u &= u(\rho, T) = 0 && \text{Ecuación de estado calórica.} \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

donde:

$\rho$  : densidad;  $p$ : presión;  $T$ : temperatura;  $u$ : energía interna por unidad de masa.

Si se supone que el flujo es barotrópico, es decir independiente de la temperatura, se puede desacoplar las e-

cuaciones de Navier-Stokes y de la energía y tratarlas separadamente. Las primeras dan las velocidades y la posición de la superficie libre y las últimas, introduciendo la información anterior, dará la distribución de temperatura o algún otro parámetro similar a través del sistema.

Sin embargo es necesario destacar que estas ecuaciones presentan algunas dificultades para encontrar su solución aproximada por medio del computador; ellas se resumen en lo siguiente:

- a) La presencia de una superficie libre.
- b) La naturaleza variable de los bordes cuando los niveles suben y bajan.
- c) Las ecuaciones tri-dimensionales requieren gran capacidad de almacenamiento y mucho tiempo de computador.
- d) La existencia de términos no lineales que aparecen en las ecuaciones y que originan matrices no simétricas, mal condicionadas y que no son diagonalmente dominantes.

## 2.2 - Condiciones de Borde.

Todo conjunto de ecuaciones diferenciales que representan un problema físico, sólo pueden resolverse en el contexto de las condiciones de borde aplicables al problema; en el caso presente, serían las correspondientes al movimiento de grandes masas líquidas de poca profundidad relativa.

Los factores que afectan dicho movimiento son muchos y variados tales como la configuración y posición del fondo, la forma de las costas y la variación de las mismas, fricción entre el agua y el fondo, el tipo de material que constituye el fondo, condiciones meteorológicas (principalmente el viento), la rotación de la Tierra, las fuerzas astronómicas del sol y la luna (que actúan como fuerzas de volumen), las mareas, etc.

Las variaciones topográficas de la superficie que contiene la masa de agua es generalmente muy compleja, y pueden en ciertos casos no permanecer estáticas debido a efectos como la erosión a través del tiempo. Los cambios de configuración en el fondo pueden causar diferentes resistencias al pasaje del agua. Dependiendo de la escala con que se trabaje,

podrá representarse con mayores detalles este problema.

La fricción en el fondo es usualmente incluida en los modelos matemáticos a través de las fórmulas de Chezy o de Manning, que originalmente están dadas para conductos cerrados y canales. Las versiones bidimensionales (25), (31) son extensiones empíricas de esas fórmulas.

Existen autores (31) que sugieren la evaluación del factor de fricción en cada intervalo de tiempo y para cada elemento en consideración, dependiendo de las condiciones prevalecientes en el tiempo, en los modelos tendientes a predecir los movimientos debidos a mareas. Debe tenerse en cuenta que la fricción en el fondo es un efecto de gran importancia en aguas "poco profundas", y que los diferentes materiales que constituyen el fondo tienen distintas resistencias friccionales cuando la profundidad y las velocidades varían.

La principal condición de borde de origen meteorológico es el viento. En circulación en lagos es la única fuerza actuante, pero frecuentemente aparece acoplada a las fuerzas que provocan las mareas. Existen varios trabajos (7) acerca de las relaciones entre las velocidades y tensiones de viento.

El verdadero mecanismo con que el viento provoca el movimiento del agua ha recibido mucha atención, especialmente en lo concerniente a las ondas de superficie generadas por el viento. Este fenómeno es en general muy pequeño para ser incluido en el modelo que se está estudiando.

Aunque la mayoría de los trabajos consideran el viento constante, nada impide que varíe en cada intervalo de tiempo.

Las mareas provocan fuerzas fundamentales que conducen el movimiento de aguas "poco profundas"; es necesario entonces tener una idea de la posición de la superficie libre al tiempo inicial  $t=0$ , y poder evaluar los cambios de esa superficie en los bordes que no dan a tierra (o sea en bordes "abiertos") en cada intervalo de tiempo.

A continuación se deducirán matemáticamente las ecuaciones de agua "poco profundas" ("Shallow water equations or long wave equations") teniendo en cuenta algunos efectos

señalados en este parágrafo.

### 2.3 - Las ecuaciones de aguas "poco profundas"

Las expresiones (2.1.1) y (2.1.2), tal como se ha señalado anteriormente, constituyen el conjunto de ecuaciones que, despreciando los efectos de temperatura, gobiernan a los fluidos. Sin embargo, ellas presentan una serie de dificultades que ya han sido enunciadas previamente.

Estos inconvenientes son superados simplificando las ecuaciones, para obtener finalmente el conjunto conocido como "ecuaciones de aguas poco profundas" (en la terminología inglesa: "the shallow water equations").

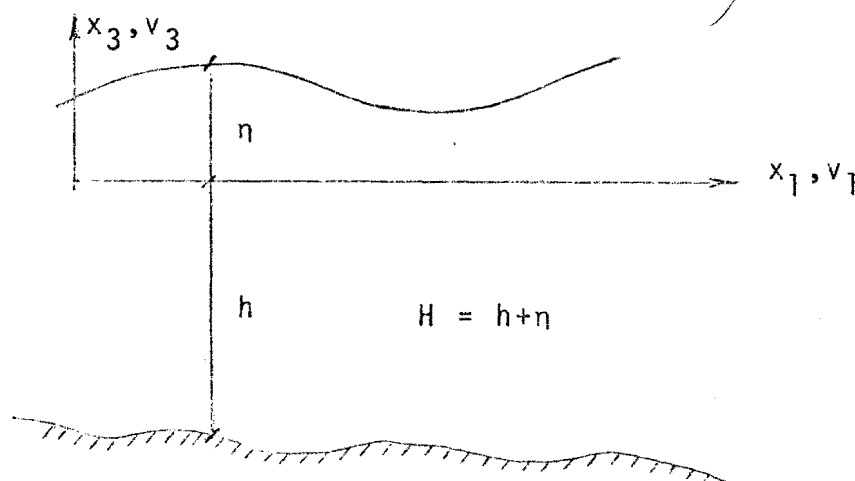


Fig. 2.3.1

La primera simplificación que se introduce es reducir la tercera ecuación de equilibrio o "momentum" (\*) a la siguiente expresión:

$$-\frac{\partial p}{\partial x_3} = -\rho g \quad (2.3.1)$$

El signo de  $g$  se debe a la dirección del eje relativo a la gravedad. En (2.3.1) se han despreciado los términos correspondientes a la aceleración y a las tensiones.

Integrando (2.3.1) se tiene:

$$p = \int_{x_3}^{\eta} \rho g dx_3 = \rho g(\eta - x_3) + p_a \quad (2.3.2)$$

(\*) Esta palabra sería equivalente en la terminología española a "cantidad de movimiento"

En (2.3.2),  $p_a$  es la presión atmosférica y  $n$  es la elevación sobre el nivel medio.

Las otras dos ecuaciones de equilibrio o "momentum" pueden entonces ser expresadas de la siguiente manera:

$$-\frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} + b_1 = \frac{D(\rho v_1)}{Dt} = \frac{\partial(\rho v_1)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_1 v_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\rho v_1 v_2)}{\partial x_2} \quad (2.3.3)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial x_2} + b_2 = \frac{D(\rho v_2)}{Dt} = \frac{\partial(\rho v_2)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_2 v_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\rho v_2 v_2)}{\partial x_2}$$

En (2.3.3) "v" son velocidades medias,  $\rho$  es la densidad y las  $\tau$  están constituidas por la suma de las tensiones viscosas y de Reynolds.

Por otro lado, la ecuación de la continuidad adquiere la siguiente forma:

$$\frac{\partial(\rho v_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\rho v_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(\rho v_3)}{\partial x_3} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (2.3.4)$$

Integrando la expresión (2.3.4) con respecto a  $x_3$  se obtiene (Ver fig.2.3.1)

$$\int_{-h}^n \left[ \frac{\partial(\rho v_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\rho v_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(\rho v_3)}{\partial x_3} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right] dx_3 = 0 \quad (2.3.5)$$

Se define ahora una variable  $q_k$  (masa por unidad de longitud y de tiempo) tal que:

$$q_k = \int_{-h}^n \rho v_k dx_3 = \rho \int_{-h}^n v_k dx_3 \quad (2.3.6)$$

En (2.3.6) se ha supuesto que la densidad no es función de  $x_3$ , es decir que  $\rho = \rho(x_1, x_2, t)$ . Es necesario destacar también que:  $n$  (elevación de la superficie libre) =  $n(x_1, x_2, t)$ ;  $v_1 = v_1(x_1, x_2, x_3, t)$ ;  $v_2 = v_2(x_1, x_2, x_3, t)$ . La condición cinemática establece que

$$v_3 \Big|_{x_3=n} = \frac{Dn}{Dt} = \frac{\partial n}{\partial t} + v_1 \Big|_{x_3=n} \frac{\partial n}{\partial x_1} + v_2 \Big|_{x_3=n} \frac{\partial n}{\partial x_2} \quad (2.3.7)$$

Para resolver (2.3.5) debe tenerse en cuenta, además de la expresión (2.3.7), la regla de Leibnitz para diferenciación parcial de una integral entre límites variables, la que puede escribirse así:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \int_{h_1(x_1, x_2)}^{h_2(x_1, x_2)} f(x_1, x_2, x_3) dx_3 = \int_{h_1(x_1, x_2)}^{h_2(x_1, x_2)} \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_3 + f \Big|_{x_3=h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} - f \Big|_{x_3=h_1} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} \quad (2.3.8)$$

Aplicando (2.3.8) y (2.3.6) a los términos de (2.3.5) se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{-h}^n \frac{\partial v_1}{\partial x_1} dx_3 &= \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{-h}^n v_1 dx_3 - v_1 \Big|_{x_3=n} \frac{\partial n}{\partial x_1} + v_1 \Big|_{x_3=-h} \frac{\partial h}{\partial x_1} = \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial q_1}{\partial x_1} - v_1 \Big|_{x_3=n} \frac{\partial n}{\partial x_1} \end{aligned} \quad (a)$$

$$\begin{aligned} \int_{-h}^n \frac{\partial v_2}{\partial x_2} dx_3 &= \frac{\partial}{\partial x_2} \int_{-h}^n v_2 dx_3 - v_2 \Big|_{x_3=n} \frac{\partial n}{\partial x_2} + v_2 \Big|_{x_3=-h} \frac{\partial h}{\partial x_2} = \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial q_2}{\partial x_2} - v_2 \Big|_{x_3=n} \frac{\partial n}{\partial x_2} \end{aligned} \quad (b)$$

$$\begin{aligned}
\int_{-h}^n \frac{\partial v_3}{\partial x_3} dx_3 &= \frac{\partial}{\partial x_3} \int_{-h}^n v_3 dx_3 - v_3 \Big|_{x_3=n} \frac{\partial n}{\partial x_3} + v_3 \Big|_{x_3=-h} \frac{\partial h}{\partial x_3} = \\
&= \frac{\partial}{\partial x_3} \int_{-h}^n v_3 dx_3 = v_3 \Big|_{x_3=n} - v_3 \Big|_{x_3=-h} = v_3 \Big|_{x_3=n} = \\
&= \frac{Dn}{Dt} = \frac{\partial n}{\partial t} + v_1 \Big|_{x_3=n} \frac{\partial n}{\partial x_1} + v_2 \Big|_{x_3=n} \frac{\partial n}{\partial x_2} \quad (c)
\end{aligned}$$

Sumando (a), (b) y (c), previamente multiplicados por  $\rho$ , se tiene:

$$\rho \int_{-h}^n \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) dx_3 = \frac{\partial q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial q_2}{\partial x_2} + \rho \frac{\partial n}{\partial t} \quad (d)$$

Siendo  $\rho \frac{\partial H}{\partial t} = \rho \frac{\partial (h+n)}{\partial t} = \rho \frac{\partial h}{\partial t} + \rho \frac{\partial n}{\partial t} = \rho \frac{\partial n}{\partial t}$ , el segundo miembro de la expresión (d) puede escribirse de la siguiente manera:

$$\frac{\partial q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial q_2}{\partial x_2} + \rho \frac{\partial H}{\partial t} \quad (e)$$

Por otro lado:

$$\int_{-h}^n \frac{\partial \rho}{\partial t} dx_3 = H \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (f)$$

Teniendo en cuenta (e) y (f) la integral (2.3.5) queda expresada así:

$$\int_{-h}^n \left( \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dx_3 = \frac{\partial q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial q_2}{\partial x_2} + \frac{\partial (\rho H)}{\partial t} = 0 \quad (2.3.9)$$

En (2.3.9), tal como en (2.3.6) se ha supuesto que  $\rho = \rho(x_1, x_2, t)$ , o sea que la densidad no es función de  $x_3$ .

Antes de integrar las ecuaciones de equilibrio o de "momentum" (2.3.3) con respecto a  $x_3$ , es conveniente definir las velocidades instantáneas:

$$v_1 = \bar{v}_1(x_1, x_2, t) + v_1'(x_1, x_2, x_3, t) \quad (2.3.10)$$

$$v_2 = \bar{v}_2(x_1, x_2, t) + v_2'(x_1, x_2, x_3, t)$$

donde:

$v_1$  y  $v_2$  son las velocidades instantáneas

$\bar{v}_1$  y  $\bar{v}_2$  son las velocidades verticalmente promediadas

$v_1'$  y  $v_2'$  son las desviaciones verticales.

Luego:

$$\langle v_k \rangle = \int_{-h}^n v_k dx_3 = \frac{1}{\rho} q_k; \quad \bar{v}_k = \frac{1}{H} \langle v_k \rangle, \quad \langle v_k' \rangle = 0 \quad (2.3.11)$$

Se supone que las fuerzas de volumen son sólo aquellas debidas a los efectos de la aceleración de Coriolis. Así para el Hemisferio Sur resulta (Ver Apéndice II):

$$b_1 = -\rho f v_2; \quad b_2 = \rho f v_1 \quad (2.3.12)$$

Se supone que la pendiente en el fondo y en la superficie libre son pequeñas respecto de la unidad; entonces es posible aproximar las componentes de las tensiones internas de la siguiente manera (Ver fig.2.3.2):

$$\tau_1 \Big|_s = (-\tau_{11} \frac{\partial \eta}{\partial x_1} - \tau_{12} \frac{\partial \eta}{\partial x_2} + \tau_{13})_{\text{superficie}} \quad (2.3.13)$$

$$\tau_1 \Big|_f = (\tau_{11} \frac{\partial h}{\partial x_1} + \tau_{12} \frac{\partial h}{\partial x_2} - \tau_{13})_{\text{fondo}}$$



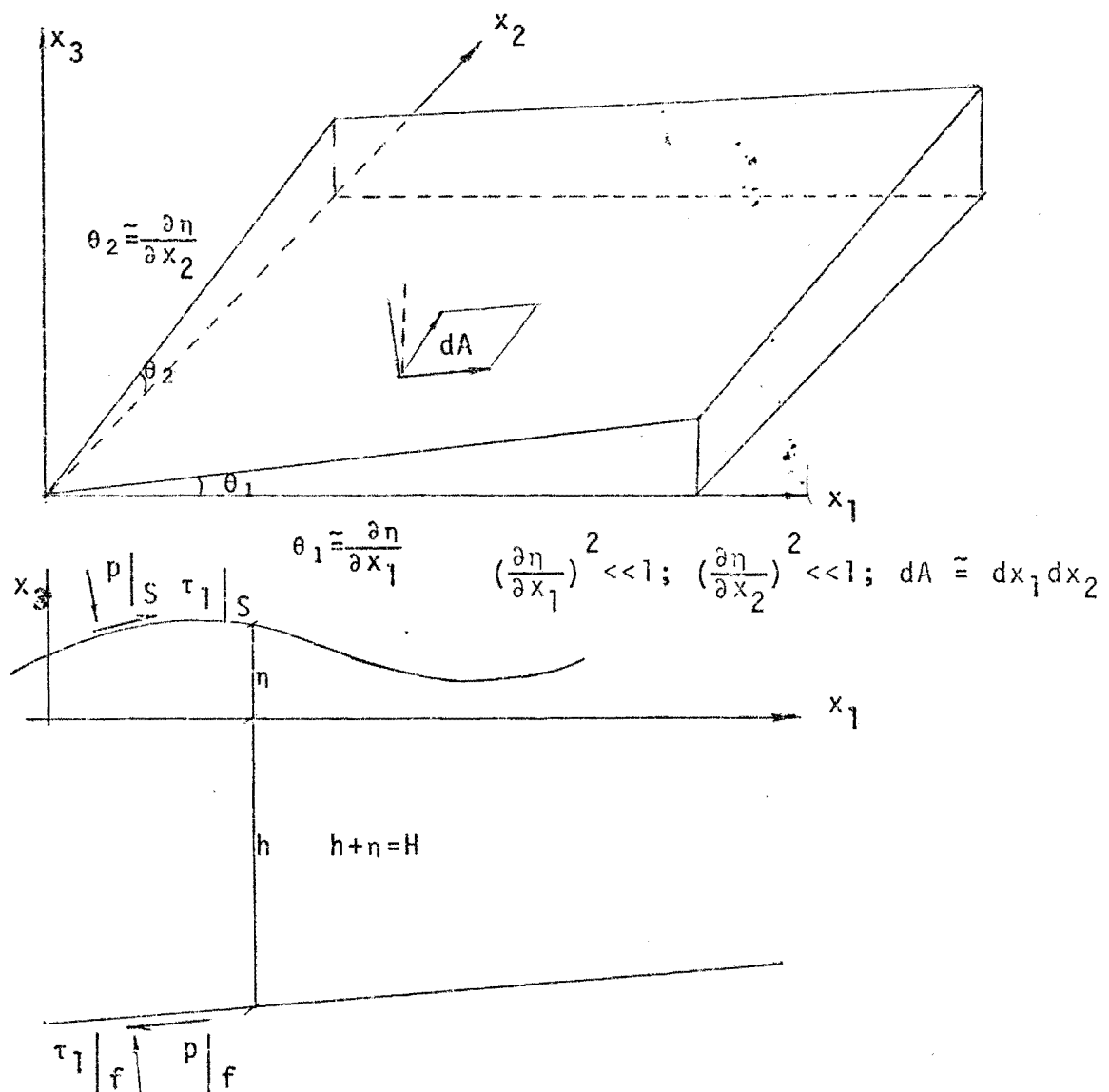


Fig. 2.3.2.

Las expresiones para  $\tau_2|_S$  y  $\tau_2|_f$  son similares a la (2.3.13).

Todas estas tensiones pueden ser consideradas como fuerzas exteriores aplicadas en la superficie libre y en el fondo. Sustituyendo las expresiones (2.3.10), (2.3.11) y (2.3.12) en las ecuaciones (2.3.3), integrando con respecto a  $x_3$  aplicando la regla de Leibnitz (2.3.8) y la condición cinemática (2.3.7) se obtienen los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{q_1^2}{H\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{q_1 q_2}{H\rho} \right) = - \frac{\partial N_p}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{11}}{\partial x_1} + \\ + \frac{\partial N_{12}}{\partial x_2} - f q_2 + p \Big|_S \frac{\partial \eta}{\partial x_1} + \tau_1 \Big|_S + p \Big|_f \frac{\partial h}{\partial x_1} - \tau_1 \Big|_f \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{q_1 q_2}{H\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{q_2^2}{H\rho} \right) = - \frac{\partial N_p}{\partial x_2} + \frac{\partial N_{22}}{\partial x_2} + \\ + \frac{\partial N_{12}}{\partial x_1} + f q_1 + p \Big|_S \frac{\partial \eta}{\partial x_2} + \tau_2 \Big|_S + p \Big|_f \frac{\partial h}{\partial x_2} - \tau_2 \Big|_f \end{aligned}$$

donde:

$$N_p = \langle p \rangle = \int_{-h}^{\eta} p dx_3 = \rho g \frac{H}{2} + H p_a$$

$$N_{11} = \langle \tau_{11} \rangle - \langle \rho v_1^i v_1^i \rangle$$

$$N_{22} = \langle \tau_{22} \rangle - \langle \rho v_2^i v_2^i \rangle \quad (2.3.15)$$

$$N_{12} = \langle \tau_{12} \rangle - \langle \rho v_1^i v_2^i \rangle$$

En general:  $N_{ij} = \langle \tau_{ij} \rangle - \langle \rho v_i^i v_j^i \rangle$

donde, para todos los casos,  $\langle a \rangle = \int_{-h}^{\eta} a dx_3$

Los  $N_{ij}$  pueden ser aproximados de la siguiente forma (Ver expresión A-I.6.7 en Apéndice I):

$$N_{11} \cong 2\epsilon_{11} \frac{\partial q_1}{\partial x_1}$$

$$N_{22} \cong 2\epsilon_{22} \frac{\partial q_2}{\partial x_2} \quad (2.3.16)$$

$$N_{12} \cong \epsilon_{12} \left( \frac{\partial q_1}{\partial x_2} + \frac{\partial q_2}{\partial x_1} \right)$$

Los  $\epsilon_{ij}$  de la expresión (2.3.16) son coeficien

tes de viscosidad generalizados. Si el fluido es isotrópico se cumple que  $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon_{12} = \epsilon$ .

Los esfuerzos de corte en el fondo son dados usualmente por la siguiente relación:

$$\tau_1 \Big|_f = \left(\frac{g}{c^2}\right) \frac{1}{\rho} \frac{q_1 (q_1^2 + q_2^2)^{1/2}}{H^2} ; \quad (2.3.17)$$

$$\tau_2 \Big|_f = \left(\frac{g}{c^2}\right) \frac{1}{\rho} \frac{q_2 (q_1^2 + q_2^2)^{1/2}}{H^2}$$

donde:

$\rho$  es la densidad;  $g$  = aceleración de la gravedad;

$c$  es el factor de fricción o coeficiente de Chezy.

Los esfuerzos de corte en la superficie libre son generalmente debidos al viento y pueden ser expresados así:

$$\tau_1 \Big|_S = \gamma^2 \rho_a W^2 \cos \theta \quad (2.3.18)$$

$$\tau_2 \Big|_S = \gamma^2 \rho_a W^2 \operatorname{sen} \theta$$

donde:

$W$  : velocidad del viento;  $\rho_a$ : densidad del aire;

$\theta$  : ángulo entre la dirección del viento y el eje  $x_1$ .

$\gamma^2$ : coeficiente de las tensiones debidas al viento.

Con todas estas consideraciones las ecuaciones (2.3.14) pueden escribirse de la siguiente forma:

$$\frac{\partial q_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{q_1^2}{H\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{q_1 q_2}{H\rho} \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} (N_{11} - N_p) + \frac{\partial N_{12}}{\partial x_2} + B_1 \quad (2.3.19)$$

$$\frac{\partial q_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{q_1 q_2}{H\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{q_2^2}{H\rho} \right) = \frac{\partial}{\partial x_2} (N_{22} - N_p) + \frac{\partial N_{12}}{\partial x_2} + B_2$$

donde:

$$B_1 = -fq_2 + \gamma^2 \rho a W^2 \cos \theta - \left(\frac{g}{c^2}\right) \frac{1}{\rho} \frac{q_1 (q_1^2 + q_2^2)^{1/2}}{H^2} + \rho a \frac{\partial H}{\partial x_1} + \rho g H \frac{\partial h}{\partial x_1} \quad (2.3.20)$$

$$B_2 = fq_1 + \gamma^2 \rho a W^2 \sin \theta - \left(\frac{g}{c^2}\right) \frac{1}{\rho} \frac{q_2 (q_1^2 + q_2^2)^{1/2}}{H^2} + \rho a \frac{\partial H}{\partial x_2} + \rho g H \frac{\partial h}{\partial x_2} \quad (2.3.21)$$

Merecen un comentario adicional los valores hallados para  $c$  (coeficiente de Chezy) y  $\gamma$ .<sup>(8)</sup>

Experiencias realizadas en Holanda dieron para el coeficiente de Chezy valores variando entre 45 y 70 m<sup>1/2</sup>/seg para el caso de ríos, de manera que  $2 \times 10^{-3} < g/c^2 < 5 \times 10^{-3}$ . El valor más común es 50 m<sup>1/2</sup>/seg, es decir  $g/c^2 = 4 \times 10^{-3}$ .

Otros investigadores (Rossby, Bowden, Hansen) encontraron valores de  $g/c^2$  comprendidos entre  $2.4 \times 10^{-3}$  y  $2.8 \times 10^{-3}$  para el caso de mares.

Experiencias adicionales mostraron que  $c \approx 60$  m<sup>1/2</sup>/seg, o sea  $g/c^2 \approx 2.7 \times 10^{-3}$ .

El coeficiente  $c$  depende de la rugosidad del fondo respecto a la profundidad y del material del fondo.

Con respecto al coeficiente  $\gamma$ , Munk halló valores de  $\gamma^2 = 2.6 \times 10^{-3}$  para velocidades de viento comprendidas entre 6 m/seg y 20 m/seg. Luego  $\gamma^2 \rho a \approx 3.2 \times 10^{-6}$ .

En Zuiderzee (Holanda) se encontró para vientos variando entre 15 m/seg y 25 m/seg y con profundidades variando entre 4 m y 10 m que:  $3.5 \times 10^{-6} < \gamma^2 \rho a < 4.5 \times 10^{-6}$ .

Para resolver el sistema de ecuaciones (2.3.19) bajo las condiciones (2.3.9) se necesitan establecer las condiciones de borde.

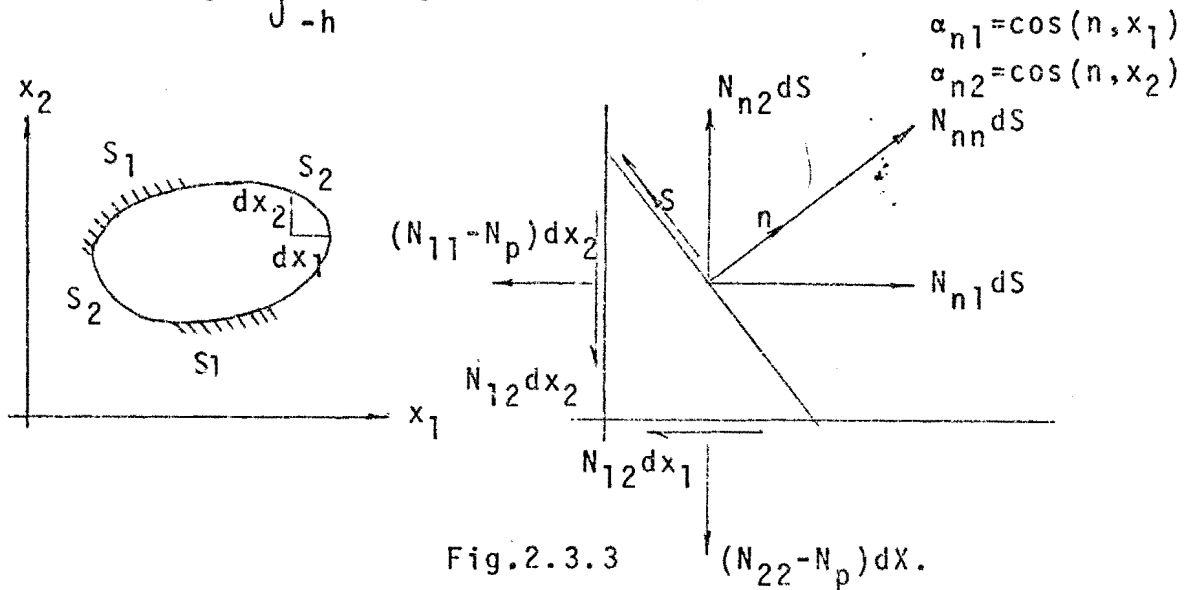
Se tienen dos tipos de condiciones de borde (Ver fig. 2.3.3):

- a) Condición de borde tipo "tierra" ( $S_1$ )
- b) Condición de borde tipo "Océano" ( $S_2$ )

En el sistema de referencia s-n se puede escribir:

$$q_n = \int_{-h}^n \rho v_n dx_3 = \alpha_{n1} q_1 + \alpha_{n2} q_2 \quad (2.3.21)$$

$$q_s = \int_{-h}^n \rho v_s dx_3 = -\alpha_{n2} q_1 + \alpha_{n1} q_2$$



Además:

$$N_{n1} = \alpha_{n1} (N_{11} - N_p) + \alpha_{n2} N_{12} \quad (2.3.22)$$

$$N_{n2} = \alpha_{n1} N_{12} + \alpha_{n2} (N_{22} - N_p)$$

Por otro lado:

$$N_{nn} = \alpha_{n1} N_{n1} + \alpha_{n2} N_{n2} \quad (2.3.23)$$

$$N_{ns} = \alpha_{n2} N_{n1} + \alpha_{n1} N_{n2}$$

En los bordes tipo "tierra" se tiene usualmente:

$$q_n = 0 \quad \text{en } S_1 \quad (2.3.24)$$

Sin embargo, si un río desemboca en el sistema en consideración, se puede especificar el "input" de masa como:

$$q_n = \bar{q}_n = \{q\} \quad (\text{desembocadura de río en una parte del borde } S_1) \quad (2.3.25)$$

$$q_s \neq 0$$

En un borde tipo "océano" se debe prescribir en principio las fuerzas normales y tangenciales:

$$\left. \begin{aligned} N_{nn} &= \bar{N}_{nn} \\ N_{ns} &= \bar{N}_{ns} \end{aligned} \right\} \text{ en } S_2 \quad (2.3.26)$$

Los términos viscosos en general son despreciados y entonces las velocidades y fuerzas tangenciales no necesitan ser prescritas. Entonces las condiciones de borde se reducen a lo siguiente:

$$\left. \begin{aligned} q_n &= 0 & \bar{q}_n &= \bar{q}_n & \text{ en } & S_1 \\ N_{nn} &= \bar{N}_{nn} = -N_p & & & \text{ en } & S_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.3.27)$$

#### 2.4 - Las ecuaciones de aguas "poco profundas" en términos de la velocidad media

Las ecuaciones de equilibrio o de "momentum" dadas por (2.3.19) pueden ser expresadas de la siguiente forma cuando se desprecian los términos viscosos, y teniendo en cuenta que  $N_p = \frac{1}{2} H^2 + H p_a$  (donde  $p_a$  es la presión atmosférica que generalmente se toma como referencia, o sea que  $p_a = 0$ ):

$$\frac{\partial q_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{q_1^2}{H\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{q_1 q_2}{H\rho} \right) + B_1^i = 0 \quad (2.4.1)$$

$$\frac{\partial q_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{q_1 q_2}{H\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{q_2^2}{H\rho} \right) + B_2^i = 0$$

donde:

$$B_1^i = -B_1 + \frac{\partial N_p}{\partial x_1} = f q_2 - \gamma^2 \rho a W^2 \cos \theta + \frac{g}{c^2} \frac{1}{\rho} \frac{(q_1^2 + q_2^2)^{1/2}}{H^2} q_1 + \rho g H \frac{\partial (H-h)}{\partial x_1} \quad (2.4.2)$$

$$B_2^i = -B_2 + \frac{\partial N_p}{\partial x_2} = -f q_1 - \gamma^2 \rho a W^2 \sin \theta + \frac{g}{c^2} \frac{1}{\rho} \frac{(q_1^2 + q_2^2)^{1/2}}{H^2} q_2 + \rho g H \frac{\partial (H-h)}{\partial x_2}$$

$\rho$ : densidad del agua;  $\rho_a$ : densidad del aire;  $f$ : coeficiente de Coriolis;  $\gamma$ : coeficiente de tensiones debidas al viento;  $c$ : coeficiente de Chezy;  $W$ : velocidad del viento;  $\theta$ : ángulo que for-

ma la dirección del viento con el eje  $x_1$ .

La ecuación de la continuidad viene dada por:

$$\frac{\partial(\rho H)}{\partial t} + \frac{\partial q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial q_2}{\partial x_2} = 0 \quad (2.4.3)$$

Las condiciones de borde son:

$$\begin{aligned} q_n = 0 \quad \bar{\sigma} \quad q_n = \bar{q}_n \quad \text{en} \quad S_1 \\ N_{nn} = \bar{N}_{nn} = -\bar{N}_p \quad \text{en} \quad S_2 \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

Las expresiones anteriores consideran al agua un material invíscido, suponiendo que estos efectos no revisten importancia en relación a los provocados por la fricción en el fondo.

Las ecuaciones de aguas "poco profundas" pueden escribirse en términos de las velocidades medias (promediadas verticalmente); esta forma de presentar las fórmulas exige algunas consideraciones adicionales.

Se había definido previamente que (Ver expresión 2.3.11):

$$q_k = \rho \int_{-h}^n v_k dx_3 = \rho \langle v_k \rangle \quad (\rho = \text{cte.}) \quad (2.4.5)$$

$$\bar{v}_k (\text{velocidad media}) = \frac{1}{H} \langle v_k \rangle \quad q_k = \rho(H \bar{v}_k)$$

En lo que sigue se considerarán estas relaciones:

$$\bar{v}_k \bar{v}_i = \frac{1}{H} \langle v_k \rangle \frac{1}{H} \langle v_i \rangle; \quad q_i \cdot q_k = \rho^2 (H \bar{v}_i) (H \bar{v}_k); \quad q_k^2 = \rho^2 (H^2 \bar{v}_k^2); \quad (2.4.6)$$

Por otro lado por razones de simplicidad, se introduce un cambio en la notación haciendo  $\bar{v}_k = v_k$ .

Antes de seguir adelante, resulta conveniente escribir (2.4.1) de la siguiente manera:

$$\frac{\partial q_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{q_1^2}{H\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{q_1 q_2}{H\rho} \right) + F' q_1 + C q_2 + \rho g H \frac{\partial n}{\partial x_1} + W_1' = 0 \quad (2.4.7)$$

$$\frac{\partial q_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{q_1 q_2}{H\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{q_2^2}{H\rho} \right) + F' q_2 - C q_1 + \rho g H \frac{\partial n}{\partial x_2} + W_2' = 0$$

donde:

$$C = f = \text{coef. de Coriolis}; \quad F' = \frac{g}{c^2} \frac{1}{\rho} \left( \frac{q_1^2 + q_2^2}{H^2} \right)^{1/2}; \quad W_1' = -\gamma^2 \rho a W^2 \cos \theta;$$

$$W_2' = -\gamma^2 \rho a W^2 \sin \theta; \quad H = h + n$$

Siendo constante la densidad la ecuación (2.4.3) resulta:

$$\rho \frac{\partial (n+h)}{\partial t} + \frac{\partial q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial q_2}{\partial x_2} = 0 \quad (2.4.8)$$

Usando el concepto de velocidad media dado en (2.4.5), y teniendo en cuenta (2.4.6), las ecuaciones de aguas de poca profundidad relativa pueden expresarse así:

a) Equilibrio o "momentum":

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + F v_1 + C v_2 + g \frac{\partial n}{\partial x_1} + W_1 = 0 \quad (2.4.9)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + F v_2 - C v_1 + g \frac{\partial n}{\partial x_2} + W_2 = 0$$

donde:

$$F = \frac{g}{c^2} \frac{(v_1^2 + v_2^2)^{1/2}}{(n+h)}; \quad W_1 = -\frac{\gamma^2 \rho a}{\rho} \frac{W^2 \cos \theta}{(n+h)}; \quad W_2 = -\frac{\gamma^2 \rho a}{\rho} \frac{W^2 \sin \theta}{(n+h)}$$

b) Continuidad:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial (Hv_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial (Hv_2)}{\partial x_2} = 0 \quad (2.4.10)$$



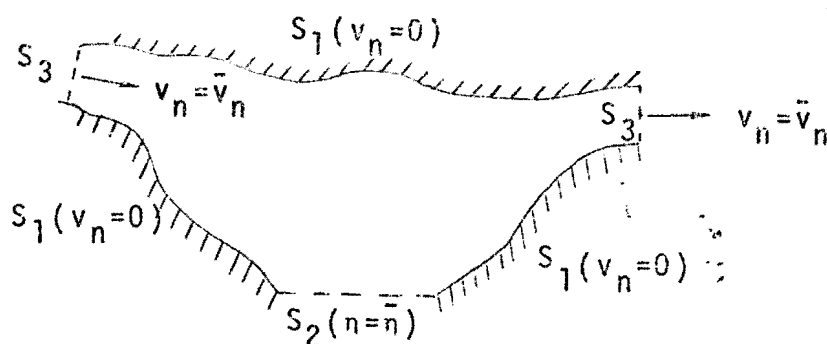


Fig.2.4.1

c) Las condiciones de borde son (Ver fig.2.4.1)

$$v_n = 0 \quad \text{en} \quad S_1; \quad v_n = \bar{v}_n \quad \text{en} \quad S_3$$

$$n = \bar{n} \quad \text{en} \quad S_2$$

### 2.5 - Forma simplificada de las ecuaciones de aguas "poco profundas"

Una estimación inicial de la circulación en ciertos sistemas puede obtenerse si se simplifican las ecuaciones completas desarrolladas en el parágrafo 3. Ello se consigue eliminando los términos no lineales, despreciando los términos de inercia en las ecuaciones de equilibrio o de "momentum" y eliminando los términos dependientes del tiempo en la ecuación de la continuidad. A partir de estas condiciones las expresiones (2.3.19) y (2.3.9) pueden expresarse de la siguiente forma:

$$fq_2 + \rho gH \frac{\partial n}{\partial x_1} + (\tau_1|_s - \tau_1|_f) = 0 \quad (2.5.1)$$

$$-fq_1 + \rho gH \frac{\partial n}{\partial x_2} + (\tau_2|_s - \tau_2|_f) = 0$$

$$\frac{\partial q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial q_2}{\partial x_2} = 0 \quad (2.5.2)$$

Si los valores de  $n$  son pequeños comparados con los de  $h$ , resulta  $H \approx h$ , entonces las (2.5.1) se reducen a:

$$fq_2 + \rho gh \frac{\partial n}{\partial x_1} + (\tau_1|_s - \tau_1|_f) = 0 \quad (2.5.3)$$

$$-fq_1 + \rho gh \frac{\partial n}{\partial x_2} + (\tau_2|_s - \tau_2|_f) = 0$$

En este caso se puede definir:

$$\frac{q_i}{H} \approx \frac{q_i}{h} = \frac{\rho}{h} \int_{-h}^n v_i dx_3 \quad (2.5.4)$$

Por otro lado se supone que las tensiones debido a fricción en el fondo pueden considerarse proporcionales a  $q_i$ , de manera que se obtiene:

$$\tau_1|_f = \beta q_1 \quad \tau_2|_f = \beta q_2 \quad (2.5.5)$$

Se deriva la primera de las (2.5.1) respecto a  $x_2$  y la segunda respecto a  $x_1$ , de donde resulta:

$$f \frac{\partial q_2}{\partial x_2} - \rho g h \frac{\partial \eta}{\partial x_1 \partial x_2} + \left( \frac{\partial \tau_1|_s}{\partial x_2} - \frac{\partial \tau_1|_f}{\partial x_2} \right) = 0 \quad (2.5.6)$$

$$-f \frac{\partial q_1}{\partial x_1} - \rho g h \frac{\partial \eta}{\partial x_1 \partial x_2} + \left( \frac{\partial \tau_2|_s}{\partial x_1} - \frac{\partial \tau_2|_f}{\partial x_2} \right) = 0$$

Los términos  $\partial h / \partial x_1$ , y  $\partial h / \partial x_2$  han sido tomados igual a cero, es decir se considera que la pendiente en el fondo es pequeña.

Restando miembro a miembro la (2.5.6), y teniendo en cuenta la (2.5.2) surge que:

$$\left( \frac{\partial \tau_1|_s}{\partial x_2} - \frac{\partial \tau_2|_s}{\partial x_1} \right) + \left( \frac{\partial \tau_2|_f}{\partial x_1} - \frac{\partial \tau_1|_f}{\partial x_2} \right) = 0 \quad (2.5.7)$$

Aplicando (2.4.5) se tiene:

$$\left( \frac{\partial \tau_1|_s}{\partial x_2} - \frac{\partial \tau_2|_s}{\partial x_1} \right) + \beta \left( \frac{\partial q_2}{\partial x_1} - \frac{\partial q_1}{\partial x_2} \right) = 0 \quad (2.5.8)$$

Se supone que existe una función de corriente  $\psi$  tal que:

$$q_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2} ; \quad q_2 = - \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \quad (2.5.9)$$

Incluyendo (2.5.9) en (2.5.8),  $\bar{\psi}$  adquiere la forma siguiente:

$$\beta \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} \right) = \left( \frac{\partial \tau_1 | s}{\partial x_2} - \frac{\partial \tau_2 | s}{\partial x_1} \right) \quad (2.5.10)$$

La expresión (2.5.10) puede resumirse, escribiéndola así:

$$\beta \nabla^2 \psi = W \quad (2.5.11)$$

En (2.5.11)  $W$  es un término que denota la acción del viento y está representado por el miembro derecho de (2.5.10).

Las condiciones de borde asociadas con esta ecuación son:

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = \bar{q}_s \quad (\text{condiciones de borde naturales}) \quad (2.5.12)$$

$$\psi = \bar{\psi} \quad (\text{condiciones de borde esenciales})$$

La ecuación (2.5.11) junto a las condiciones de contorno (2.5.12) constituyen una manera simplificada de representar las ecuaciones completas de aguas de pequeña profundidad relativa, y son útiles para obtener una estimación inicial de la circulación en lagos, estuarios, etc. <sup>(3)</sup>

### CAPITULO III

#### El método de elementos finitos en la solución de las ecuaciones de aguas "poco profundas"

##### 3.1 - Esquema computacional del método de elementos finitos.

En el capítulo I se establecieron los fundamentos variacionales del método de elementos finitos. En el presente capítulo, el objetivo es presentar una formulación de esta técnica para resolver las ecuaciones de aguas "poco profundas", mostrando al mismo tiempo algunos esquemas numéricos para integrar en el tiempo.

En general los pasos básicos que se deben ejecutar para resolver un problema por medio del método de los elementos finitos son:

- a) Discretización del continuo.
- b) Evaluación de las matrices del elemento.
- c) Ensamblamiento de las ecuaciones que gobiernan el sistema.
- d) Introducción de las condiciones de borde.
- e) Solución del sistema de ecuaciones.
- f) Cálculo, si fuera necesario, de resultados secundarios, a partir de las variables obtenidas en la solución.

Conviene señalar que en la mayoría de los casos el punto a) es efectuado fuera del computador. El mismo consiste en dividir el dominio de integración en subregiones formando una malla de elementos finitos. Un tipo de elemento finito resulta caracterizado por su forma geométrica, por el problema al cual se aplique y el comportamiento localizado aproximado en el cual se basa su formulación. Para que una malla resulte conveniente, el modelo de análisis elaborado debe aproximarse al modelo real con la precisión deseada y sin requerir un tiempo de computación excesivo.

Es necesario tener en cuenta lo siguiente:

- 1) Elementos regulares producirán mejores resultados que los obtenidos a través de una malla con elementos irregulares.
- 2) Conviene incrementar los nudos en zonas donde la variación de las variables puedan ser importantes.
- 3) Cuando existan dudas respecto al comportamiento aproximado de un problema, conviene resolverlo con mallas distintas. Si la diferencia es pequeña es probable que la solución se acerque a la exacta; en caso contrario, es necesario refinar la malla.

Finalmente, una vez decidida la configuración definitiva, se numeran nudos y elementos.

### 3.2 - Aplicación del método de los elementos finitos a las ecuaciones de aguas "poco profundas"

El sistema de ecuaciones diferenciales a derivadas parciales que definen el problema es el siguiente (Ver expresiones 2.4.9 y 2.4.10 en el Capítulo II):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + Fv_1 + Cv_2 + g \frac{\partial \eta}{\partial x_1} + W_1 = 0 \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + Fv_2 - Cv_1 + g \frac{\partial \eta}{\partial x_2} + W_2 = 0 \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial (Hv_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial (Hv_2)}{\partial x_2} = 0 \end{array} \right. \quad (3.2.1)$$

(Las condiciones de borde son:  $v_n = \bar{v}_n$  o  $v_n = 0$  y  $\eta = \bar{\eta}$ ).

donde:

$v_1, v_2$ : velocidades medias en el sentido de los ejes  $x_1$  y  $x_2$  respectivamente.

$H$ : altura total;  $h$ : nivel medio;  $\eta$ : altura de onda o elevación sobre el nivel medio;  $C$ : coeficiente de Coriolis =  $2\omega \text{ sen } \lambda$ ,  $\omega$ : velocidad de rotación de la Tierra;  $\lambda$ : latitud;  $W_1, W_2$ : influencia del viento en la superficie libre del agua.

$$W_1 = -\frac{\gamma^2 \rho_a}{\rho} \frac{W^2 \cos \theta}{(\eta+h)} ; \quad W_2 = -\frac{\gamma^2 \rho_a}{\rho} \frac{W^2 \text{ sen } \theta}{(\eta+h)} ;$$

$W$ : velocidad del viento;  $\gamma^2$ : coeficiente de las tensiones debidas al viento;  $\rho_a$ : densidad del aire;  $\rho$ : densidad del agua;  $\theta$ : ángulo que forma la dirección del viento con el eje  $x_1$ .

$Fv_1, Fv_2$ : influencia de la fricción en el fondo.

$F = \frac{g}{c^2} \frac{(v_1^2 + v_2^2)^{1/2}}{(n+h)}$  ;  $g$ : aceleración de la gravedad,  $c^2$ : coeficiente de Chezy.

Se emplea el método de los residuos ponderados, a los efectos de transformar las ecuaciones (2.2.1) a una forma integral.

Ponderando respecto a  $\delta v_1, \delta v_2$  y  $\delta \eta$  respectivamente las expresiones (3.2.1) se obtiene:

$$\int_A \left( \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + Fv_1 + Cv_2 + g \frac{\partial \eta}{\partial x_1} + W_1 \right) \delta v_1 \, dA = 0 \quad (3.2.2)$$

$$\int_A \left( \frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + Fv_2 - Cv_1 + g \frac{\partial \eta}{\partial x_2} + W_2 \right) \delta v_2 \, dA = 0$$

$$\int_A \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial (Hv_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial (Hv_2)}{\partial x_2} \right) \delta \eta \, dA = 0 \quad (3.2.3)$$

Expandiendo (3.2.3) se tiene:

$$\int_A \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} \delta \eta + H \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \delta \eta + v_1 \frac{\partial H}{\partial x_1} \delta \eta + H \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \delta \eta + v_2 \frac{\partial H}{\partial x_2} \delta \eta \right) dA = 0 \quad (3.2.4)$$

Recordando que si  $f(x)$  y  $g(x)$  son funciones continuas, con derivadas primeras continuas en el intervalo  $[a, b]$ , resulta:

$$\int_a^b f(x) \frac{\partial g(x)}{\partial x} \, dx = f(x) g(x) \Big|_a^b - \int_a^b g(x) \frac{\partial f(x)}{\partial x} \, dx \quad (3.2.5)$$

Aplicando (3.2.5) a cada uno de los términos de (3.2.4) con excepción del primero, se deduce la siguiente expresión para la (3.2.3):

$$\int_A \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} \delta \eta - Hv_1 \frac{\partial \delta \eta}{\partial x_1} - Hv_2 \frac{\partial \delta \eta}{\partial x_2} \right) dA + \int_{S_1} H \bar{v}_n \delta \eta \, dS = 0 \quad (3.2.6)$$

A continuación resulta conveniente expresar (3.2.2) y (3.2.6) en términos matriciales:

$$\int_A \begin{bmatrix} \delta v_1 & 0 \\ 0 & \delta v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial t} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} dA + \int_A \begin{bmatrix} \delta v_1 & 0 \\ 0 & \delta v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + F \\ \vdots \\ -C \end{bmatrix} dA + \int_A \begin{bmatrix} \delta v_1 & 0 \\ 0 & \delta v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ n \end{bmatrix} dA = 0 \quad (3.2.7)$$

$$\int_A [\delta n] \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \end{bmatrix} \{n\} dA + \int_A \left\{ -\frac{\partial \delta n}{\partial x_1} \cdot (n+h) \right. \quad \left. -\frac{\partial \delta n}{\partial x_2} \cdot (n+h) \right. \quad \left. 0 \right\} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ n \end{bmatrix} dA + \int_S [\delta n] [(n+h) \bar{v}_n] dS = 0 \quad (3.2.8)$$

Suponiendo que el dominio de integración ha sido discretizado, el paso siguiente consiste en evaluar las matrices de un elemento; para cumplir esta etapa se emplearán las expresiones (3.2.7) y (3.2.8).

Se considera que el elemento elegido tiene "n" nudos; en consecuencia se toman las siguientes expansiones para las incógnitas:

$$\begin{aligned} v_1 &= \underline{\phi}^T \underline{v}_1^n \\ v_2 &= \underline{\phi}^T \underline{v}_2^n \\ n &= \underline{\phi}^T \underline{n}^n \\ h &= \underline{\phi}^T \underline{h}^n \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

donde:

$$\underline{\phi}^T = \{\phi_1 \quad \phi_2 \quad \dots \quad \phi_n\} \quad ; \quad \underline{v}_1^n = \begin{Bmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \\ \vdots \\ v_1^n \end{Bmatrix} ;$$

$$\underline{v}_2^n = \begin{Bmatrix} v_2^1 \\ v_2^2 \\ \vdots \\ v_2^n \end{Bmatrix} \quad ; \quad \underline{\eta}^n = \begin{Bmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \\ \vdots \\ \eta^n \end{Bmatrix} \quad ; \quad \underline{h}^n = \begin{Bmatrix} h^1 \\ h^2 \\ \vdots \\ h^n \end{Bmatrix}$$

El superíndice T indica un vector transpuesto.

Las funciones  $\phi$  son denominadas funciones de interpolación o de forma y son conocidas. Los vectores  $\underline{v}_1^n$ ,  $\underline{v}_2^n$ ,  $\underline{\eta}^n$  contienen los valores de las incógnitas en los "n" nudos del elemento y son desconocidos.

Sustituyendo (3.2.9) en (3.2.7) y (3.2.8) se obtiene:

$$\begin{aligned} & \delta \underline{v}_1^n, T \left( \int_A \underline{\phi} \underline{\phi}^T dA \right) \frac{\partial \underline{v}_1^n}{\partial t} + \delta \underline{v}_1^n, T \left( \int_A \underline{\phi} \underline{\phi}^T \underline{v}_1^n \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial x_1} dA \right) \underline{v}_1^n + \\ & + \delta \underline{v}_1^n, T \left( \int_A \underline{\phi} \underline{\phi}^T \underline{v}_2^n \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial x_2} dA \right) \underline{v}_1^n + \delta \underline{v}_1^n, T \left( \int_A F \underline{\phi} \underline{\phi}^T dA \right) \underline{v}_1^n + \\ & + \delta \underline{v}_1^n, T \left( C \int_A \underline{\phi} \underline{\phi}^T dA \right) \underline{v}_2^n + \delta \underline{v}_1^n, T \left( g \int_A \underline{\phi} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial x_1} dA \right) \underline{\eta}^n + \\ & + \delta \underline{v}_1^n, T \left( \int_A W_1 \underline{\phi} dA \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.2.10)$$



$$\begin{aligned}
& \delta \underline{v}_2^{n,T} \left( \int_A \underline{\phi} \underline{\phi}^T dA \right) \frac{\partial \underline{v}_2^n}{\partial t} + \delta \underline{v}_2^{n,T} \left( -C \int_A \underline{\phi} \underline{\phi}^T dA \right) \underline{v}_1^n + \\
& + \delta \underline{v}_2^{n,T} \left( \int_A \underline{\phi} \underline{\phi}^T \underline{v}_1^n \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial x_1} dA \right) \underline{v}_2^n + \delta \underline{v}_2^{n,T} \left( \int_A \underline{\phi} \underline{\phi}^T \underline{v}_2^n \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial x_2} dA \right) \underline{v}_2^n + \\
& + \delta \underline{v}_2^{n,T} \left( \int_A F \underline{\phi} \underline{\phi}^T dA \right) \underline{v}_2^n + \delta \underline{v}_2^{n,T} \left( g \int_A \underline{\phi} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial x_2} dA \right) \underline{\eta}^n + \\
& + \delta \underline{v}_2^{n,T} \left( \int_A W_2 \underline{\phi} dA \right) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \delta \underline{\eta}^{n,T} \left( \int_A \underline{\phi} \underline{\phi}^T dA \right) \frac{\partial \underline{\eta}^n}{\partial t} + \delta \underline{\eta}^{n,T} \left( - \int_A \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial x_1} \underline{\phi}^T (\underline{\eta}^n + \underline{h}^n) \underline{\phi}^T dA \right) \underline{v}_1^n + \\
& + \delta \underline{\eta}^{n,T} \left( - \int_A \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial x_2} \underline{\phi}^T (\underline{\eta}^n + \underline{h}^n) \underline{\phi}^T dA \right) \underline{v}_2^n + \delta \underline{\eta}^{n,T} \left( \int_S \bar{q}_n \underline{\phi} dS \right) = 0
\end{aligned} \tag{3.2.11}$$

Teniendo en cuenta que  $\delta \underline{v}_1$ ,  $\delta \underline{v}_2$  y  $\delta \underline{\eta}$  tienen componentes arbitrarios, las expresiones (3.2.10) y (3.2.11) pueden colocarse de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \underline{M}' & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{M}' & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{M}' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{v}_1^n \\ \underline{v}_2^n \\ \underline{\eta}^n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{A}_1 + \underline{A}_2 + \underline{B} & C \underline{M}' & \underline{G}_1 \\ -C \underline{M}' & \underline{A}_1 + \underline{A}_2 + \underline{B} & \underline{G}_2 \\ \underline{N}_1 & \underline{N}_2 & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{v}_1^n \\ \underline{v}_2^n \\ \underline{\eta}^n \end{Bmatrix} +$$

$$+ \begin{Bmatrix} \underline{W}_1 \\ \underline{W}_2 \\ \bar{Q} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.2.12)$$

donde:

C: coeficiente de Coriolis;

$$M' = \int_A \phi \phi^T dA$$

$$\underline{B} = \int_A \frac{g}{c^2} \frac{[(\phi^T v_1^n)^2 + (\phi^T v_2^n)^2]^{1/2}}{\phi^T (\underline{n}^n + \underline{h}^n)} \phi \phi^T dA$$

$$\underline{A}_1 = \int_A \phi \phi^T v_1^n \frac{\partial \phi}{\partial x_1} dA; \quad \underline{A}_2 = \int_A \phi \phi^T v_2^n \frac{\partial \phi}{\partial x_2} dA$$

$$\underline{G}_1 = g \int_A \phi \frac{\partial \phi^T}{\partial x_1} dA; \quad \underline{G}_2 = g \int_A \phi \frac{\partial \phi^T}{\partial x_2} dA; \quad \underline{N}_1 = - \int_A \phi^T (\underline{n}^n +$$

$$+ \underline{h}^n) \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \phi^T dA; \quad \underline{N}_2 = - \int_A \phi^T (\underline{n}^n + \underline{h}^n) \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \phi^T dA$$

$$\underline{W}_1 = - \int_A \frac{\gamma^2 \rho a}{\rho} \frac{W^2 \cos \theta}{\phi^T (\underline{n}^n + \underline{h}^n)} \phi dA; \quad \underline{W}_2 = - \int_A \frac{\gamma^2 \rho a}{\rho} \frac{W^2 \operatorname{sene} \theta}{\phi^T (\underline{n}^n + \underline{h}^n)} \phi dA;$$

$$\bar{Q} = \int_S \bar{q}_n \phi dS$$

En definitiva, condensando la expresión (3.2.12) se obtiene, para un elemento:

$$\underline{M} \dot{\underline{Q}} + \underline{A}(Q)\underline{Q} + \underline{P} = \underline{0} \quad (3.2.13)$$

El paso siguiente en la formulación del método de los elementos finitos consiste en ensamblar la ecuación (3.2.13) para todos los elementos del continuo y aplicar las condiciones de borde correspondientes; finalmente, se llega a la siguiente expresión matricial.

$$\underline{M} \dot{\underline{Q}} + \underline{A}(Q)\underline{Q} + \underline{P} = \underline{0} \quad (3.2.14)$$

donde:

$\underline{M} = \underline{M}(x_1, x_2)$ : representa la matriz de masa global;  $\underline{Q} = \underline{Q}(x_1, x_2, t)$ : representa el vector de las incógnitas ( $v_1, v_2, \eta$ );  $\underline{P} = \underline{P}(x_1, x_2, t)$ : representa el vector de "cargas" (en general debido a la acción del viento);  $\dot{\underline{Q}}$  = representa las derivadas de las velocidades y elevación con respecto al tiempo;  $\underline{A}(Q) = \underline{A}(x_1, x_2, t)$ : matriz que contiene los términos no lineales, efecto de Coriolis, fricción, etc.

En lo que sigue, y para evitar la proliferación de símbolos en la notación, se supondrá que la ecuación (3.2.14) viene dada por la (3.2.13).

### 3.3 - Elementos triangulares

#### 3.3.1 - Introducción

Para evaluar las matrices de la expresión (3.2.13) es necesario escoger la forma geométrica que tendrán las subregiones en que se divide el continuo.

Uno de los elementos más empleados en problemas bidimensionales es el de forma triangular el que puede tener nudos en los vértices, en puntos intermedios sobre sus lados y eventualmente en puntos interiores.

El triángulo es una forma geométrica simple y versátil, que permite representar dominios de integración geoméricamente arbitrarios, y permite aproximar bordes curvos por medio de poligonales, aspectos muy frecuentes en los problemas de Hidrodinámica, lo que ha determinado su empleo intensivo en ese campo.

### 3.3.2 - Coordenadas triangulares

A los efectos de presentar las relaciones básicas correspondientes a coordenadas triangulares se examina la figura 3.3.1.

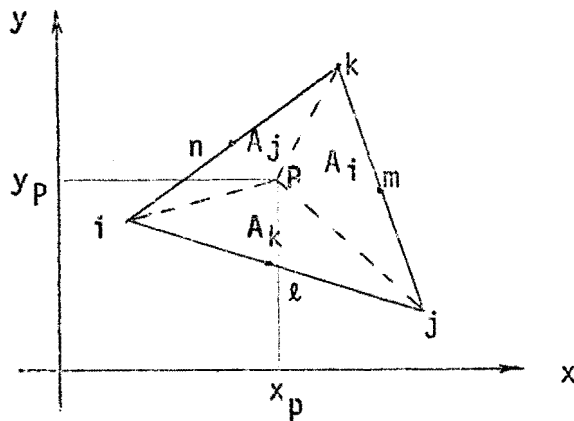


Fig. 3.3.1

$A_i$ : área del triángulo jkP

$A_j$ : área del triángulo kiP

$A_k$ : área del triángulo iJP

$A$ : área del triángulo ijk

l, m, n corresponden a los puntos medios de los lados ij, jk, ki respectivamente

Para un punto P cualquiera dentro del triángulo o sobre sus lados, su posición queda perfectamente definida en base a las coordenadas triangulares:

$$L_i = A_i/A ; \quad L_j = A_j/A , \quad L_k = A_k/A \quad (3.3.2.1)$$

Siendo  $A = A_i + A_j + A_k$ , resulta:

$$L_i + L_j + L_k = 1. \quad (3.3.2.2)$$

Los valores que las coordenadas triangulares adquieren en los puntos característicos son:

Punto	$L_i$	$L_j$	$L_k$
i	1	0	0
j	0	1	0
k	0	0	1
l	1/2	1/2	0
m	0	1/2	1/2
n	1/2	0	1/2

En el baricentro  $L_1=L_2=L_3= 1/3$

Haciendo  $x_p = x$  y  $y_p = y$ , se puede establecer la siguiente relación entre coordenadas triangulares y cartesianas de una manera general:

$$L_n = \frac{A_n}{A} = \frac{1}{2A} [A_n + \beta_n x + \delta_n y] \quad \text{para } n = i, j, k. \quad (3.3.2.3)$$

donde:

$$\begin{aligned} A_i &= x_j y_k - y_j x_k & A_j &= x_k y_i - x_i y_k & A_k &= x_i y_j - x_j y_i \\ \beta_i &= y_j - y_k & \beta_j &= y_k - y_i & \beta_k &= y_i - y_j \\ \delta_i &= x_k x_j & \delta_j &= x_i - x_k & \delta_k &= x_j - x_i \end{aligned}$$

Las coordenadas cartesianas en función de las coordenadas triangulares vienen dadas por:

$$x = x_i L_i + x_j L_j + x_k L_k \quad (3.3.2.4)$$

$$y = y_i L_i + y_j L_j + y_k L_k$$

Para calcular el área de un triángulo pueden utilizarse cualquiera de las siguientes expresiones:

$$A = \frac{1}{2}(\beta_i \delta_j - \beta_j \delta_i) = \frac{1}{2}(\beta_j \delta_k - \beta_k \delta_j) = \frac{1}{2}(\beta_k \delta_i - \beta_i \delta_k) \quad (3.3.2.5)$$

Si se tiene una función  $f = f(L_i, L_j, L_k)$ , se puede comprobar que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2A} \sum_n \beta_n \frac{\partial f}{\partial L_n} \quad n = i, j, k \quad (3.3.2.6)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2A} \sum_n \delta_n \frac{\partial f}{\partial L_n} \quad n = i, j, k$$

Para integrar sobre el área del triángulo, debe tenerse en cuenta la siguiente fórmula:

$$\int_A L_i^r L_j^s L_k^t dA = \frac{r!s!t!}{(r+s+t+2)!} 2A \quad (3.3.2.7)$$

Cuando se integra sobre una línea (un lado del triángulo) es útil la expresión:

$$\int_s L_i^r L_j^k dS = \frac{r!k!}{(r+k+1)!} l_{ij} \quad (3.3.2.8)$$

### 3.3.3 - Elementos triangulares de primer orden

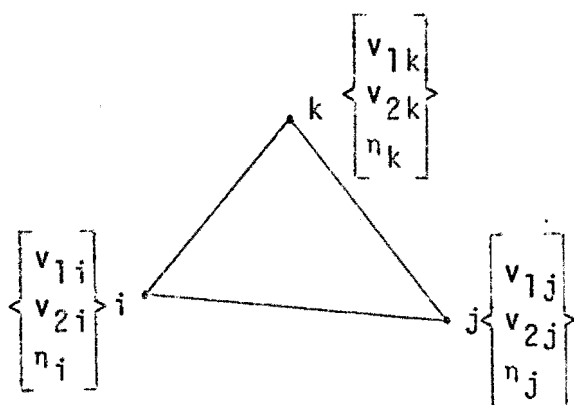


Fig. 3.3.3.1

Se definen las incógnitas en cualquier punto del elemento en función de las incógnitas en los puntos nodales (Ver fig. 3.3.3.1).

Así

$$v_1 = \phi_i v_{1i} + \phi_j v_{1j} + \phi_k v_{1k}$$

$$v_2 = \phi_i v_{2i} + \phi_j v_{2j} + \phi_k v_{2k}$$

$$n = \phi_i n_i + \phi_j n_j + \phi_k n_k$$

$$(3.3.3.1)$$

La expresión (3.3.3.1) debe ser tal que cuando se aplica para las coordenadas de un punto nodal, el resultado debe ser justamente el valor de la incógnita en ese nudo; por esa razón las  $\phi$  son denominadas funciones de interpolación y es conveniente definir las en términos de las coordenadas  $L_i$ ,  $L_j$  y  $L_k$ . Puede observarse, tal como se aclaró en el Cap. I, que se emplean magnitudes con significado físico como parámetros indeterminados en la expansión de las variables.

Es fácil comprobar que las funciones lineales correspondientes a (3.3.3.1) son:

$$v_i = L_i v_{1i} + L_j v_{1j} + L_k v_{1k}$$

$$v_2 = L_i v_{2i} + L_j v_{2j} + L_k v_{2k}$$

$$n = L_i n_i + L_j n_j + L_k n_k$$

$$(3.3.3.2)$$

De (3.3.3.1) y (3.3.3.2) se concluye que:

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\phi}^T & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{\phi}^T & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{\phi}^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1^n \\ v_2^n \\ \vdots \\ v_n^n \end{Bmatrix} \quad (3.3.3.3)$$

donde

$$\underline{\phi}^T = \{\phi_i \quad \phi_j \quad \phi_k\} = \{L_i \quad L_j \quad L_k\}$$

$$\underline{v}_1^n = \{v_{1i} \quad v_{1j} \quad v_{1k}\} ; \underline{v}_2^n = \{v_{2i} \quad v_{2j} \quad v_{2k}\} ; \underline{v}^n = \{v_i \quad v_j \quad v_k\}$$

Para el cálculo de expresiones que contienen las derivadas de  $\underline{\phi}$  debe tenerse en cuenta que:

$$\frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial x} = \left\{ \frac{\partial L_i}{\partial x} \quad \frac{\partial L_j}{\partial x} \quad \frac{\partial L_k}{\partial x} \right\} = \frac{1}{2A} \{\beta_i \quad \beta_j \quad \beta_k\} = \frac{1}{2A} \underline{\beta}^T \quad (3.3.3.4)$$

$$\frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial y} = \left\{ \frac{\partial L_i}{\partial y} \quad \frac{\partial L_j}{\partial y} \quad \frac{\partial L_k}{\partial y} \right\} = \frac{1}{2A} \{\delta_i \quad \delta_j \quad \delta_k\} = \frac{1}{2A} \underline{\delta}^T$$

Otro aspecto que merece atención es el cálculo del vector de cargas equivalentes. Se estudian los siguientes casos:

a) Fuerzas de volumen constantes aplicadas sobre el elemento.

Sean  $W_1$  y  $W_2$  fuerzas de volumen constantes aplicadas sobre el elemento "e" según las direcciones x e y respectivamente. El vector de cargas equivalentes según la dirección x,  $\underline{p}_x^e$ , viene dado por:

$$\underline{p}_x^e = W_1 \int_A \underline{\phi} dA = W_1 \int_A \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_k \end{Bmatrix} dA = W_1 \int_A \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix} dA = \frac{A}{3} W_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (3.3.3.5)$$

donde A es el área del elemento.

Este tipo de acción representa en el problema de aguas "poco profundas" el efecto del viento.

De la misma manera se demuestra que:

$$\underline{p}_y^e = \frac{A_w}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (3.3.3.6)$$

donde  $\underline{p}_y^e$  es el vector de cargas equivalentes del elemento "e" en la dirección Y.

Como las cargas de volumen están dadas por unidad de área, por tratarse de un caso bidimensional, las expresiones (3.3.3.5) y (3.3.3.6) indican que sobre cada nudo debe aplicarse 1/3 de la carga total.

b) Fuerzas distribuidas, aplicadas sobre un lado.

El vector de cargas equivalentes en este caso viene dado por:

$$\int_S \underline{\phi} \bar{q}_n dS \quad (3.3.3.7)$$

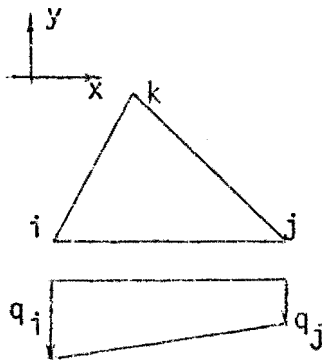


Fig. 3.3.2

Se supone que la carga está aplicada sobre el lado ij (Ver fig.3.3.2) y que la distribución es lineal, es decir que se usará la siguiente expansión para  $\bar{q}_n$ :

$$\bar{q}_n = \underline{\phi}^T \underline{q} \quad (3.3.3.8)$$

donde:

$$\underline{\phi} = \{L_1 \quad L_2 \quad L_3\} \quad \text{y} \quad \underline{q} = \{q_i \quad q_j \quad q_k\}$$

Sustituyendo (3.3.3.8) en (3.3.3.7) y teniendo en cuenta que sobre el lado ij es  $L_k = 0$  y  $q_k = 0$ , se obtiene:

$$\underline{p}_y^e = \int_S \underline{\phi} \underline{\phi}^T \underline{q} dS = l_{ij} \begin{Bmatrix} \frac{1}{3} q_i + \frac{1}{6} q_j \\ \frac{1}{6} q_j + \frac{1}{3} q_i \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.3.3.9)$$

donde:

$\underline{p}_y^e$ : vector de cargas equivalentes en el elemento "e" según la dirección y.

$l_{ij}$ : longitud del lado ij.

Este tipo de acción representa en el problema de aguas "poco profundas" la entrada o salida de flujo en el sistema.



Si la carga es uniformemente distribuida, es decir que  $q_i = q_j = q$ , se tiene:

$$p_y^e = \frac{1}{2} q \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.3.3.10)$$

### 3.3.4 - Elementos triangulares de segundo orden

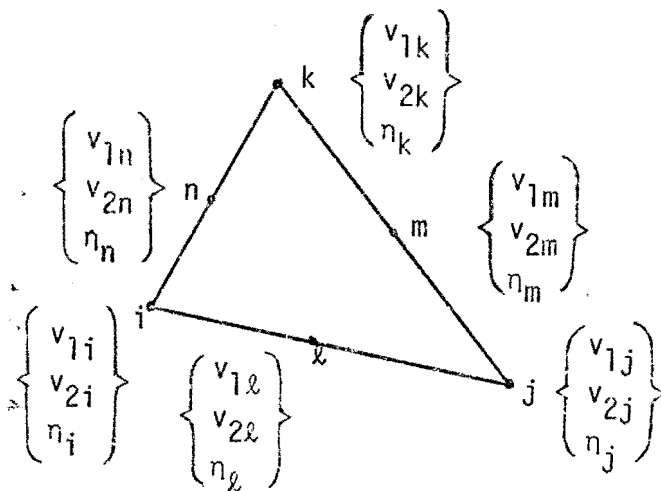


Fig. 3.3.4.1

Las incógnitas en cualquier punto del elemento se colocan en función de las incógnitas nodales y de funciones de interpolación de segundo grado. Así, por ejemplo:

$$v_{1i} = \phi_i v_{1i} + \phi_j v_{1j} + \phi_k v_{1k} + \phi_l v_{1l} + \phi_m v_{1m} + \phi_n v_{1n} \quad (3.3.4.1)$$

donde:

$$\phi_i = L_i(2L_i - 1) \quad \phi_l = 4L_i L_j$$

$$\phi_j = L_j(2L_j - 1) \quad \phi_m = 4L_j L_k$$

$$\phi_k = L_k(2L_k - 1) \quad \phi_n = 4L_k L_i$$

De la misma manera se definen las otras incógnitas ( $v_2$  y  $\eta$ ).

En expresiones que contengan las derivadas de  $\phi$  debe tenerse en cuenta que:

$$\frac{\partial \phi^T}{\partial x} = \frac{1}{2A} \beta^T \psi; \quad \frac{\partial \phi^T}{\partial y} = \frac{1}{2A} \delta^T \psi \quad (3.3.4.2)$$

donde:

A: area del elemento

$$\beta^T = \{\beta_i \quad \beta_j \quad \beta_k\}; \quad \delta^T = \{\delta_i \quad \delta_j \quad \delta_k\}$$

$$\underline{\psi} = \begin{bmatrix} 4L_i^{-1} & 0 & 0 & 4L_j & 0 & 4L_k \\ 0 & 4L_j^{-1} & 0 & 4L_i & 4L_k & 0 \\ 0 & 0 & 4L_k^{-1} & 0 & 4L_j & 4L_i \end{bmatrix}$$

Para el cálculo del vector de cargas equivalentes se consideran dos casos:

a) Fuerzas de volumen constantes aplicadas sobre el elemento.

Siguiendo el mismo esquema que en los triángulos de primer orden, se tiene:

$$\underline{p}_x^e = W_1 \int_A \underline{\phi} dA = W_1 \int_A \left\{ \begin{array}{c} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_k \\ \phi_l \\ \phi_m \\ \phi_n \end{array} \right\} dA = \frac{A}{3} W_1 \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right\} \quad (3.3.4.3)$$

De igual forma se demuestra que:

$$\underline{p}_y^e = \frac{A}{3} W_2 \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right\} \quad (3.3.4.4)$$

donde:

$W_1$  y  $W_2$  son fuerzas de volumen constantes por unidad de area, aplicadas al elemento "e" según las direcciones x e y.

A: area del elemento

$\underline{p}_x^e$  y  $\underline{p}_y^e$ : vectores de cargas equivalentes del elemento "e" en las direcciones x e y respectivamente.

Las expresiones (3.3.4.3) y (3.3.4.4) indican que debe aplicarse 1/3 de la carga total en cada nudo intermedio, siendo nula la carga en los nudos extremos.

b) Fuerzas distribuidas aplicadas sobre un lado.

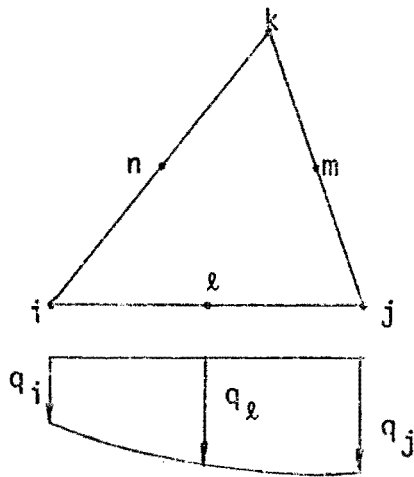


Fig. 3.4.2

El vector de cargas equivalentes está dado por:

$$\int_S \underline{\phi} \bar{q}_n dS \quad (3.3.4.5)$$

Se supone que la carga está aplicada sobre el lado  $ij$  (Ver Fig. 3.4.2) y que la distribución es cuadrática, es decir que se usa la siguiente expansión para  $\bar{q}_n$ :

$$\bar{q}_n = \underline{\phi}^T \underline{q} \quad (3.3.4.6)$$

donde:

$$\underline{\phi} = \{L_i(2L_i-1) \quad L_j(2L_j-1) \quad L_k(2L_k-1) \quad 4L_iL_j \quad 4L_jL_k \quad 4L_kL_i\}$$

$$\underline{q} = \{q_i \quad q_j \quad q_k \quad q_l \quad q_m \quad q_n\}$$

Sustituyendo (3.3.4.6) en (3.3.4.5) y teniendo en cuenta que sobre el lado  $ij$  es  $L_k = L_m = L_n = 0$  y  $q_k = q_m = q_n = 0$  se obtiene:

$$\underline{p}_y^e = \int_S \underline{\phi} \underline{\phi}^T \underline{q} dS = \underline{\lambda}_{ij} \underline{\lambda}_{ij} \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{15} q_i - \frac{1}{30} q_j + \frac{1}{15} q_l \\ -\frac{1}{30} q_i + \frac{2}{15} q_j + \frac{1}{15} q_l \\ 0 \\ \frac{1}{15} q_i + \frac{1}{15} q_j + \frac{8}{15} q_l \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \quad (3.3.4.7)$$

donde:

$\underline{p}_y^e$ : vector de cargas equivalentes en el elemento "e" según la dirección  $Y$ .

$\underline{\lambda}_{ij}$ : longitud del lado  $ij$ .

Si la carga es uniformemente repartida, es decir que  $q_i = q_j = q_l = q$ , se tiene:

$$p_{\sim y}^e = \frac{1}{6} \ell_{i \ell j} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.3.4.8)$$

### 3.4 - Esquemas de integración numérica

#### 3.4.1 - Introducción

Teniendo en cuenta que los problemas característicos en sistemas de aguas de poca profundidad relativa envuelven cientos de puntos y que los límites de integración pueden ser amplios (por lo menos un ciclo en caso de mareas), resulta esencial la elección de esquemas eficientes y estables para integrar en el tiempo.

Los más usuales son los siguientes:

- a) Métodos de Runge-Kutta o métodos de un paso (one step methods).
- b) Métodos del Predictor-Corrector o método de pasos múltiples. (multi-step methods).
- c) Esquema trapezoidal (trapezoidal scheme).
- d) Esquema de Galerkin (The finite-element in time).

Cada uno de estos métodos tienen sus ventajas y desventajas, de manera que conviene estudiar este aspecto con más detalles.

#### 3.4.2 - Métodos de Runge-Kutta y del Predictor-Corrector

Los criterios de comparación de ambos métodos pueden resumirse a los siguientes:

- 1.- Necesidad de un proceso inicial.
- 2.- Facilidad en el cambio de intervalo.
- 3.- Orden del método.
- 4.- Número de evaluaciones de la función por paso.
- 5.- Simplicidad.

Sobre estas bases se pueden analizar las ventajas relativas de uno u otro método.

La utilización de los métodos de Runge-Kutta ofrece las siguientes ventajas:

- 1.- Como no utilizan la información calculada previamente (sólo se requiere la información en un punto), "arrancan" por sí solos, es decir que son auto-iniciables.
- 2.- Como "arrancan" por sí solos permiten mudar fácilmente de intervalo.
- 3.- No requieren iteraciones.

Entre las desventajas se pueden mencionar:

- 1.- El orden es bajo y fijo (Una versión de Runge-Kutta de orden  $p$  coincide con el desarrollo de la función en serie de Taylor hasta los términos  $\Delta t^p$ , donde  $\Delta t$  es el intervalo). Ello obliga a escoger intervalos pequeños para limitar el error de discretización (que por otra parte es difícil de evaluar).
- 2.- El número de evaluaciones de la función en cada paso es grande en comparación con otros métodos (en el método de Runge-Kutta de cuarto orden se requieren cuatro evaluaciones).

El empleo del método del predictor-corrector presenta las siguientes ventajas:

- 1.- Utiliza sólo una evaluación de la función en las fórmulas explícitas (predictor) e  $(I+1)$  en las implícitas (corrector) con  $I$  iteraciones.
- 2.- Fórmulas de orden elevado no elevan el esfuerzo computacional.
- 3.- Se puede obtener una estimación del error por truncamiento durante el proceso computacional.

Los inconvenientes son:

- 1.- No son autoiniciables
- 2.- La variación de  $\Delta t$  es difícil y exige el uso temporario del método de Runge-Kutta.
- 3.- Requiere iteraciones.

La naturaleza complementaria de ambos métodos sugiere la posibilidad de combinar ambos según el esquema siguiente:

- 1.- Iniciar la solución con el método de Runge-Kutta para determinar los primeros puntos (el orden en este caso estará en función del orden que se usará para el predictor y el cor-

- rector en los pasos subsiguientes.
- 2.- Emplear una fórmula de predictor-corrector para calcular los puntos subsecuentes.
  - 3.- Si el número de iteraciones en el corrector es excesivo para obtener la precisión deseada o bien el error de truncamiento es grande, reducir el tamaño del intervalo; caso contrario se puede aumentarlo.
  - 4.- Para cambiar el intervalo debe considerarse el último valor hallado que fue suficientemente preciso como punto inicial y reiniciar la solución a partir de ese punto usando un método de Runge-Kutta tal como en 1.
  - 5.- Calcular el error de truncamiento y sumarlo al valor obtenido.

A continuación se describirá cómo se debe aplicar los métodos mencionados previamente a las ecuaciones de aguas "poco profundas" (6), (35) (36). Para tal fin se coloca la ecuación (3.2.14) de la siguiente forma:

$$\dot{Q} = F(t, Q) \quad (3.4.2.1)$$

donde  $Q = Q[v_1(x_1, x_2, t), v_2(x_1, x_2, t), n(x_1, x_2, t)]$ ;

El método de Runge-Kutta de cuarto orden se puede aplicar según el siguiente algoritmo:

Algoritmo 1:

1.- Se elige el intervalo  $\Delta t$ .

2.- Para  $j = 0, \Delta t, 2\Delta t, \dots$  se calcula:

$$t_0 = a; \quad t_{j+\Delta t} = t_j + \Delta t;$$

$$Q_0 = Q(a);$$

$$K_1 = F(t_j, Q_j); \quad K_2 = F\left(t_j + \frac{\Delta t}{2}, Q_j + \frac{\Delta t}{2} \cdot K_1\right);$$

$$K_3 = F\left(t_j + \frac{\Delta t}{2}, Q_j + \frac{\Delta t}{2} \cdot K_2\right); \quad K_4 = F(t_j + \Delta t, Q_j + \Delta t \cdot K_3);$$

$$Q_{j+\Delta t} = Q_j + \frac{\Delta t}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

El método del predictor-corrector de cuarto orden, empleando el predictor de Adam-Bashforth y el corrector de Adam-Moulton, se aplica a la fórmula (3.4.2.1) según el siguiente

te algoritmo:

Algoritmo 2:

- 1.- Se elige el intervalo  $\Delta t$  y el orden  $p = 4\Delta t$
- 2.- Para  $j=0, \Delta t, 2\Delta t$  se calcula  $Q_{j+\Delta t}$  con el método de Runge-Kutta de cuarto orden (Algoritmo 1). Luego se determina:

$$t_0 = a; \quad F_0 = F(t_0, Q_0) = \nabla^0 F_0$$

$$t_{j+\Delta t} = t_j + \Delta t, \quad F_{j+\Delta t} = F(t_{j+\Delta t}, Q_{j+\Delta t}) = \nabla^0 F_{j+\Delta t}$$

$$\nabla^K F_{j+\Delta t} = \nabla^{K-\Delta t} F_{j+\Delta t} - \nabla^{K-\Delta t} F_j, \quad K = \Delta t, \dots, j+\Delta t$$

- 3.- Para  $j=3\Delta t, 4\Delta t, \dots$  se determina

$$t_{j+\Delta t} = t_j + \Delta t$$

$$Q_{j+\Delta t}^{(0)} = Q_j + \Delta t \sum_{K=0}^{3\Delta t} C_K \nabla^K F_j \quad (\text{Predictor de Adam-Bashforth})$$

donde  $C_K = \{1; 1/2; 5/12; 3/8\}$

$$F_{j+\Delta t}^{(0)} = F(t_{j+\Delta t}, Q_{j+\Delta t}^{(0)}) = \nabla^0 F_{j+\Delta t}^{(0)}$$

$$\nabla^K F_{j+\Delta t}^{(0)} = \nabla^{K-\Delta t} F_{j+\Delta t}^{(0)} - \nabla^{K-\Delta t} F_j^{(0)}, \quad K = \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, 4\Delta t$$

$$Q_{j+\Delta t}^{(1)} = Q_j + \Delta t \sum_{K=0}^{4\Delta t} a_K \nabla^K F_{j+\Delta t}^{(0)} \quad (\text{primera iteración del corrector})$$

donde:  $a_K = \{1; -1/2; -1/12; 1/24; 19/720\}$ ;

- 4.- Para  $i = 1, 2, \dots, I-1$ , se determina:

$$F_{j+\Delta t}^{(i)} = F(t_{j+\Delta t}, Q_{j+\Delta t}^{(i)})$$

$$Q_{j+\Delta t}^{(i+1)} = Q_{j+\Delta t}^{(i)} + \frac{251}{720} \Delta t (F_{j+\Delta t}^{(i)} - F_{j+\Delta t}^{(i-1)})$$

Se define:

$$Q_{j+\Delta t} = Q_{j+\Delta t}^{(I)}; \quad \nabla^0 F_{j+\Delta t} = F(t_{j+\Delta t}, Q_{j+\Delta t})$$

$$\nabla^K F_{j+\Delta t} = \nabla^{K-\Delta t} F_{j+\Delta t} - \nabla^{K-\Delta t} F_j \quad K = \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, 4\Delta t$$

Resumiendo:

Del algoritmo 2 se concluye que la fórmula del predictor, en términos de  $\dot{Q}$ , viene dada por:

$$Q_{t+4\Delta t} = Q_{t+3\Delta t} + \frac{\Delta t}{24} (55\dot{Q}_{t+3\Delta t} - 59\dot{Q}_{t+2\Delta t} + 37\dot{Q}_{t+\Delta t} - 9\dot{Q}_t) \quad (3.4.2.2)$$

donde  $\dot{Q}$  está dada por (3.4.2.1).

La fórmula del corrector es:

$$Q_{t+4\Delta t} = Q_{t+3\Delta t} + \frac{\Delta t}{24} (9\dot{Q}_{t+4\Delta t} + 19\dot{Q}_{t+3\Delta t} - 5\dot{Q}_{t+2\Delta t} + \dot{Q}_{t+\Delta t}) \quad (3.4.2.3)$$

Para los sucesivos valores de  $Q$  en el tiempo el predictor es usado una sola vez. El valor de  $Q_{t+4\Delta t}$  requerido para el corrector se encuentra usando la ecuación (3.4.2.1) y el valor  $Q_{t+4\Delta t}$  del corrector ya evaluado. Si se consigue la convergencia deseada el proceso continúa prediciendo el valor de  $Q_{t+5\Delta t}$ . Si el criterio de convergencia no es satisfecho, otra solución es obtenida para la ecuación (3.4.2.1) usando el valor hallado del corrector para formar el miembro derecho. Los valores del corrector son empleados en este último proceso hasta que la tolerancia deseada es alcanzada.

Se puede probar que cuando más pequeño sea el intervalo, más rápido converge el método, y no se requerirán muchas iteraciones en cada paso, en cambio serán requeridos muchos pasos. Si se escoge un valor mayor del intervalo habrá menos pasos, pero más iteraciones por puntos.

Existe una fuerte evidencia empírica que el número más eficiente de iteraciones es dos (con esto se obtiene el mínimo tiempo de computador).

Este método converge más rápido y es más preciso que otros (trapezoidal, Galerkin), pero tiene el inconveniente que requiere mayor almacenamiento. Por otra parte su estabilidad está condicionada por el intervalo de tiempo  $\Delta t$  (la estabilidad está determinada por la ecuación del corrector solamente).



### 3.4.3 - Esquema trapezoidal

El esquema trapezoidal<sup>(6)</sup>,<sup>(36)</sup> cuenta entre sus principales ventajas la simplicidad de su aplicación y la estabilidad, lo que permite elegir intervalos de tiempo mayores que en el caso de los métodos explícitos. Con todo, la existencia de términos no lineales limita el tamaño de  $\Delta t$  y exige el uso de un proceso iterativo. Durante las iteraciones puede incluirse un coeficiente de relajación para acelerar la convergencia la cual puede definirse por el cambio de porcentaje en la norma Euclidiana para la elevación  $n$  y las velocidades  $v_1$  y  $v_2$ .

Para deducir la fórmula de recurrencia se asume la siguiente condición:

$$Q_{t+\Delta t} - Q_t = \frac{\Delta t}{2} (\dot{Q}_{t+\Delta t} + \dot{Q}_t) \quad (3.4.3.1)$$

donde:

$Q_{t+\Delta t}$ : valores de las incógnitas en el tiempo  $t + \Delta t$ ; no son conocidas.

$Q_t$ : valores de las incógnitas en el tiempo  $t$ , que se suponen conocidas.

Sustituyendo (3.4.3.1) en (3.2.14) se tiene:

$$\left[ \frac{2}{\Delta t} M + A(Q_{t+\Delta t}) \right] Q_{t+\Delta t} = -P_{t+\Delta t} + M \dot{Q}_t + \frac{2}{\Delta t} M Q_t \quad (3.4.3.2)$$

Aplicando (3.2.14) en  $t = t$  se obtiene la fórmula de recurrencia final:

$$\left[ \frac{2}{\Delta t} M + A(Q_{t+\Delta t}) \right] Q_{t+\Delta t} = \left[ \frac{2}{\Delta t} M - A(Q_t) \right] Q_t - P_t - P_{t+\Delta t} \quad (3.4.3.3)$$

La expresión (3.4.3.3) debe resolverse, en problemas dependientes del tiempo, por medio de un proceso iterativo. Se distinguen fundamentalmente tres esquemas:

#### Esquema I:

Partiendo de la expresión (3.4.3.3), se obtiene:

$$[M] Q_{t+\Delta t}^{n+1} = \left[ M - \frac{\Delta t}{2} A(Q_t) \right] Q_t - \frac{\Delta t}{2} (P_t + P_{t+\Delta t}) - \left[ \frac{\Delta t}{2} A^n(Q_{t+\Delta t}) \right] Q_{t+\Delta t}^n \quad (3.4.3.4)$$

donde  $n$  se refiere al número de iteración.

En (3.4.3.4) los términos  $[M]$ ; y  $\left\{ \left[ M - \frac{\Delta t}{2} A(Q_t) \right] Q_t - \frac{\Delta t}{2} (P_t + P_{t+\Delta t}) \right\}$  permanecen constantes durante el proceso iterativo; por otro lado  $[M]$  es una matriz simétrica.

Los pasos a seguir en las iteraciones son los siguientes:

- 1- Estimar  $Q_{t+\Delta t}$  o usar  $Q_t$  y calcular el miembro derecho de la ecuación (3.4.3.4).
- 2- Proceso de sustitución inversa ("back substitution") para calcular  $Q_{t+\Delta t}^{n+1}$
- 3- Calcular el miembro derecho de (3.4.3.4) con  $Q_{t+\Delta t}^{n+1}$  (computado en el paso anterior)
- 4- Retornar al paso 2 y repetir los pasos 2 y 3 hasta que  $Q_{t+\Delta t}^{n+1} \cong Q_{t+\Delta t}^n$ .

A los efectos de acelerar la convergencia se puede introducir un factor de relajación.

Nota: Resulta conveniente destacar que sólo los términos no lineales necesitan ser computados en cada iteración; el resto puede ser almacenado o incluido en la ecuación original de la siguiente forma:

$$\left[ \frac{2}{\Delta t} M + K \right] Q_{t+\Delta t}^{n+1} = \left[ \frac{2}{\Delta t} M - K - A'(Q_t) \right] Q_t - P_t - P_{t+\Delta t} - \left[ A'^n(Q_{t+\Delta t}) \right] Q_{t+\Delta t}^n \quad (3.4.3.5)$$

La expresión original de partida para deducir (3.4.3.5) es:

$$M \dot{Q} + A'(Q)Q + K Q + P = Q \quad (3.4.3.6)$$

donde  $A'(Q)$  contiene los términos no lineales.

La matriz  $\left[ \frac{2M}{\Delta t} + K \right]$  no es simétrica.

Esquema II:

Se emplea la fórmula trapecial en su forma normal:

$$\left[ \frac{2}{\Delta t} \underline{M} + \underline{A}(Q_{t+\Delta t}^n) \right] Q_{t+\Delta t}^n = \left[ \frac{2}{\Delta t} \underline{M} - \underline{A}(Q_t) \right] Q_t - \underline{P}_t - \underline{P}_{t+\Delta t} \quad (3.4.3.7)$$

Para el esquema iterativo se procede según estos pasos:

- 1- Estimar el valor de  $Q_{t+\Delta t}$  o usar  $Q_t$  y calcular el miembro izquierdo de (3.4.3.7) (paso  $n=0$ ).
- 2- Resolver el sistema de ecuaciones para calcular  $Q_{t+\Delta t}^{n+1}$
- 3- Reformar el miembro izquierdo de (3.4.3.7) usando  $Q_{t+\Delta t}^{n+1}$  (calculado en el paso anterior)
- 4- Retornar al paso 2 y repetir los pasos 2 y 3 hasta que  $Q_{t+\Delta t}^{n+1} \approx Q_{t+\Delta t}^n$ .

La matriz  $\left[ \frac{2}{\Delta t} \underline{M} + \underline{A}(Q_{t+\Delta t}^n) \right]$  no es simétrica.

Esquema III:

En el caso de buscar una solución estacionaria, se puede asumir  $\underline{A}(Q_{t+\Delta t}) = \underline{A}(Q_t)$ , ya que en ese caso ("Steady State") resulta  $Q_{t+\Delta t} = Q_t$ . El inconveniente que aquí se presenta es que son necesarios muchos intervalos de tiempo para alcanzar el estado estacionario, pero tiene la ventaja de que no se requiere iteraciones.

Un esquema que también resulta adecuado en estas circunstancias, ya que presenta ventajas en la aplicación de las condiciones de borde y en el montaje del vector de "cargas" (el miembro derecho), surge de colocar la ecuación (3.4.3.4) de la siguiente forma:

$$\underline{M}(Q_{t+\Delta t}^{n+1} - Q_t) = -\frac{\Delta t}{2} \left\{ \left[ \underline{A}(Q_t) Q_t + \underline{P}_t \right] + \left[ \underline{A}^n(Q_{t+\Delta t}) Q_{t+\Delta t} + \underline{P}_{t+\Delta t} \right] \right\} \quad (3.4.3.8)$$

3.4.4 - El esquema de Galerkin<sup>(15)</sup>

El punto de partida es la ecuación (3.2.14), expresada en la forma:

$$\underline{M} \dot{Q} + \underline{A}(Q)Q + \underline{P} = 0 \quad (3.4.4.1)$$

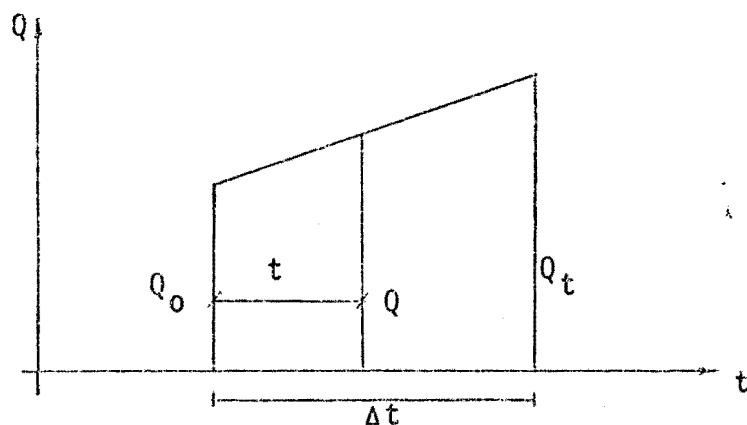


Fig. 3.4.4.1

Se propone para  $\underline{Q}$  la siguiente expansión lineal (Ver fig.3.4.4.1):

$$\underline{Q} = \underline{Q}_0 \left(1 - \frac{t}{\Delta t}\right) + \underline{Q}_t \frac{t}{\Delta t} \quad (3.4.4.2)$$

donde:

$\underline{Q}_t$ : valor del vector de incógnitas al final del intervalo de tiempo.

$\underline{Q}_0$ : valor del vector de incógnitas en el punto inicial de  $t$ .

$\underline{Q}$ : valor del vector de incógnitas en  $0 \leq t \leq \Delta t$

Por otra parte:

$$\underline{Q} = (\underline{Q}_t - \underline{Q}_0) \frac{t}{\Delta t} + \underline{Q}_0 \quad (3.4.4.3)$$

Luego: 
$$\dot{\underline{Q}} = (\underline{Q}_t - \underline{Q}_0) \frac{1}{\Delta t} \quad (3.4.4.4)$$

La expresión de Galerkin (en el tiempo) puede escribirse de la siguiente manera:

$$\int_0^{\Delta t} \{ \underline{M} \dot{\underline{Q}} + \underline{A}(\underline{Q}_0) \underline{Q} + \underline{P}_t \} \frac{t}{\Delta t} dt = 0 \quad (3.4.4.5)$$

Sustituyendo (3.4.4.4) y (3.4.4.2) en (3.4.4.5) se obtiene la fórmula de recurrencia (Adoptada para  $\underline{Q}$  una variable lineal en el intervalo  $\Delta t$ , siguiendo a lo indicado en [3.4.4.1]):

$$\left( \underline{M} + \frac{2}{3} \Delta t \underline{A} \right) \underline{Q}_t = \left[ \underline{M} - \frac{\Delta t}{3} \underline{A}(\underline{Q}_0) \right] \underline{Q}_0 - \underline{P}_t \Delta t \frac{2}{3} - \underline{P}_0 \Delta t \frac{1}{3} \quad (3.4.4.6)$$

Las matrices  $\underline{A}$  y  $\underline{P}$  deben formarse con los valores de  $Q$  obtenidos en el paso anterior.

Tambi3n en este esquema es necesario un proceso iterativo semejante al usado en el m3todo trapezoidal y para acelerar la convergencia puede usarse un coeficiente de relajaci3n. La tentativa inicial es sucesivamente corregida por el proceso de predecir una nueva soluci3n  $Q^{n+1}$  como una funci3n ponderada de las iteraciones previas  $Q^n$  y  $Q^{n-1}$ . As3:

$$Q^{n+1} = wQ^n + (1-w) Q^{n-1} \quad (3.4.4.7)$$

donde  $w$  es el coeficiente de relajaci3n, usado a los efectos de acelerar la convergencia.

La f3rmula (3.4.4.6) se coloca de la siguiente forma (Se hace  $Q_t = Q_{t+\Delta t}$  y  $Q_0 = Q_t$ ):

$$\underline{M} Q_{t+\Delta t}^{n+1} = \left[ \underline{M} - \frac{\Delta t}{3} \underline{A}(Q_t) \right] Q_t - \frac{2}{3} \Delta t \underline{A}^n(Q_{t+\Delta t}) Q_{t+\Delta t}^n \quad (3.4.4.8)$$

En (3.4.3.4) y (3.4.4.8) las matrices  $\underline{M}$  en el miembro izquierdo son ensambladas y triangularizadas una sola vez. Esto significa que la resoluci3n implica formar el miembro derecho, modificar este vector para constituir el sistema triangularizado original y mediante la sustituci3n inversa (back substitution) se completa la soluci3n.

### 3.5 - Aplicaci3n del m3todo de los elementos finitos a la forma simplificada de las ecuaciones de aguas "poco profundas"

Las ecuaciones simplificadas para aguas de poca profundidad relativa con sus correspondientes condiciones de borde est3n expresadas por (2.5.11) y (2.5.12)

Aplicando el m3todo de Galerkin se obtiene:

$$\int_A \left\{ \beta \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} \right) - w \right\} \delta \psi dA = \int_S \beta \frac{\partial \psi}{\partial n} \delta \psi dS \quad (3.5.1)$$

Integrando por partes dos veces el miembro izquierdo y operando, resulta:

$$\int_A \beta \left[ \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{\partial \delta \psi}{\partial x_1} \right) + \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \frac{\partial \delta \psi}{\partial x_2} \right) \right] dA + \int_A w \delta \psi dA = \underline{0} \quad (3.5.2)$$

Usando para la función de corriente  $\psi$  una expansión del tipo  $\psi = \underline{\phi}^T \underline{\psi}^n$ , donde  $\underline{\phi}$  contiene las funciones de interpolación y  $\underline{\psi}^n$  los valores nodales, se llega a la siguiente expresión:

$$\delta \underline{\psi}^{n,T} \left( \int_A \beta \left[ \left( \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial x_1} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial x_1} \right) + \left( \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial x_2} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial x_2} \right) \right] dA \right) \underline{\psi}^n + \delta \underline{\psi}^{n,T} \left( \int_A w \underline{\phi} dA \right) = \underline{0} \quad (3.5.3)$$

La (3.5.3) se puede expresar matricialmente en forma compacta de esta forma:

$$\underline{K} \underline{\psi}^n + \underline{P} = \underline{0} \quad (3.5.4)$$

La (3.5.4) es la ecuación para un elemento. Ensamblando y aplicando las condiciones de borde se llega finalmente a la expresión:

$$\underline{K} \underline{\Psi} + \underline{P} = \underline{0} \quad (3.5.5)$$

Resolviendo (3.5.5) se obtienen los valores de la función de corriente  $\psi$ , y a partir de ella los valores correspondientes de las velocidades.

De esta manera, se consigue una estimación aceptable de la circulación en el sistema en estudio<sup>(3), (5), (13), (14), (18)</sup>.

## CAPÍTULO IV

### Aplicaciones del Modelo de Elementos Finitos para Sistemas de Aguas "Poco Profundas"

#### 4.1 - Introducción

Este capítulo tiene por objeto estudiar las características y posibilidades de algunos de los algoritmos discutidos en el capítulo anterior y de presentar los detalles de su implementación como parte del sistema HYDRO.

Para tal fin se incluyen diversos ejemplos resueltos ya sea por el esquema trapezoidal (Algoritmo 3.4.3.4) o por el de Galerkin en tiempo (Algoritmo 3.4.4.8), empleándose funciones de interpolación lineales en el tiempo.

Se toman diferentes valores para los distintos parámetros del problema (intervalo de tiempo, coeficiente de relajación, etc.) para estudiar la influencia de cada uno de ellos. Son también analizados los efectos de términos del sistema de ecuaciones que gobiernan el problema, tales como los de tipo convectivos, fricción en el fondo, y aceleración de Coriolis.

Son presentados, por último, algunos comandos del sistema HYDRO a través de su aplicación a un problema sencillo, con el objeto de mostrar la simplicidad de su utilización y las facilidades que brinda.

#### 4.2 - Ejemplos de aplicación del modelo

##### Ejemplo 1

Se procede a simular el movimiento del fluido por acción de una oscilación forzada (debido, por ejemplo, al efecto de la marea) en un canal como el indicado en la figura 4.2.1, cuya solución analítica es conocida.

Se trata de un canal rectangular de 60m x 15m, abierto en un extremo y cerrado en el otro, y se intenta represen

tar la propagación de una onda sinusoidal sin amortiguamiento.

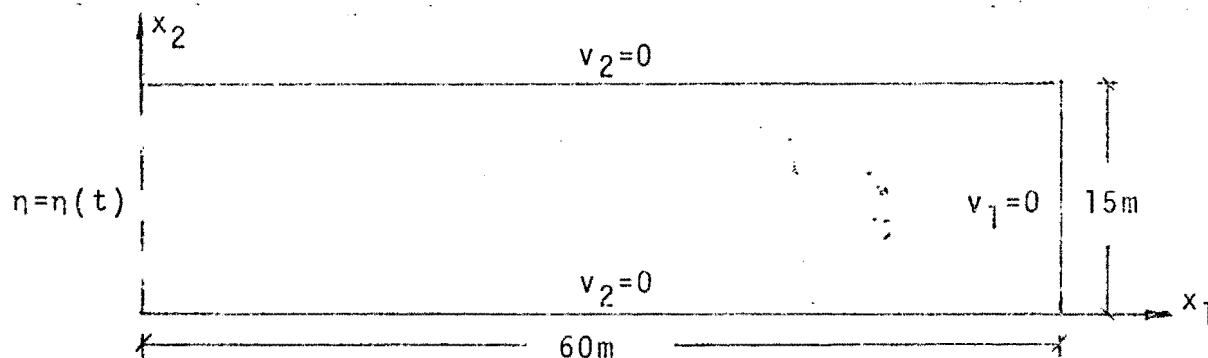


Fig. 4.2.1

Las condiciones de borde del problema son escogidas de manera que no haya movimiento transversal, y vienen dadas por:

$$\begin{aligned} \eta &= a \operatorname{sen} \sigma t & x_1 &= 0, & 0 < x_2 < 15, & t > 0 \\ v_1 &= 0 & x_1 &= 60, & 0 < x_2 < 15, & t > 0 \\ v_2 &= 0 & 0 < x_1 < 60, & x_2 &= 0, 15, & t > 0 \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

Suponiendo que no se tienen en cuenta los efectos de los términos convectivos, de la fricción en el fondo y de la aceleración de Coriolis las ecuaciones que gobiernan este problema son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x_1} &= 0 \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x_2} &= 0 \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + (\eta + h) \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + (\eta + h) \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0$$

Aunque la solución surge de la composición de una onda progresiva y otra reflectiva (Ver ejemplo 3), sólo se considerará la onda progresiva y en ese caso la solución viene dada por las siguientes expresiones:

$$\eta = a \operatorname{sen}(\sigma t - kx_1) \quad (4.2.3)$$

$$v_1 = \frac{agk}{\sigma} \frac{\operatorname{Cosh}[k(h+x_3)]}{\operatorname{Cosh}(kh)} \operatorname{sen}(\sigma t - kx_1)$$

donde:



a: amplitud de la onda  
 g: aceleración de la gravedad  
 h: distancia del nivel medio al fondo  
 k:  $2 \pi/L$   
 $\sigma$ : frecuencia angular =  $2 \pi/T$   
 L: longitud de onda  
 T: periodo

Se toman como datos los siguientes valores:

$a = 1\text{m}$ ;  $h = 10\text{m}$ ;  $g = 10\text{m/seg}^2$ ;  $\sigma = 1\text{rad/seg}$ .

En estas condiciones la solución se puede expresar por medio de expresiones simples:

$$\eta = v_1 = \text{sen}(t - 0.1x_1) \quad (4.2.4)$$

En la figura 4.2.2 se presentan las distintas mallas de elementos finitos que se han utilizado para solucionar el problema, compuestas por elementos triangulares de primer y segundo orden. Se utiliza como esquema de solución el trapezoidal.

En las figuras 4.2.3 y 4.2.4 se observan los perfiles para la superficie libre y las velocidades longitudinales respectivamente a los 6 segundos, con  $\Delta t = 0.4$  segs. Se comparan los resultados exactos con los obtenidos a través de la Malla 1 y la Malla 2.

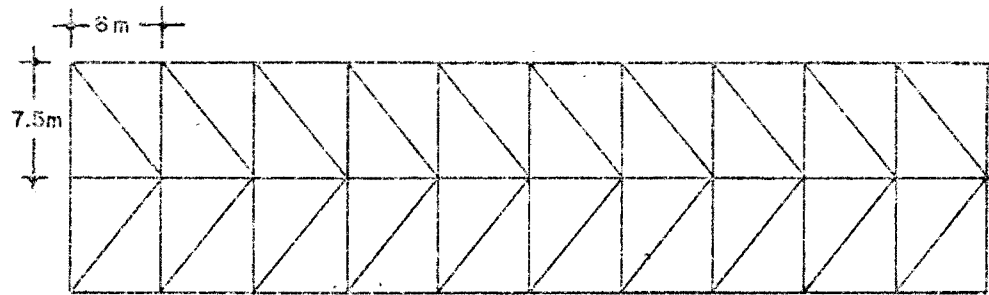
En las figuras 4.2.5 y 4.2.6 aparecen los perfiles de la superficie libre y las velocidades longitudinales respectivamente a los 6 segundos, obtenidos con la Malla 1, pero utilizándose diferentes intervalos de tiempo.

En las figuras 4.2.7 y 4.2.8 se presentan resultados semejantes a los indicados en la figura anterior, sólo que obtenidos a través de la Malla 3, y con diferente valor para la tolerancia en el proceso iterativo.

En las figuras 4.2.9 y 4.2.10 se observan los valores de  $\eta$  y  $v_1$  respectivamente a los 6 segundos obtenido a través de la Malla 4, con  $\Delta t = 0.2$  seg y mostrando la influencia del número de puntos de integración escogido para el proceso de integración numérica, al generarse las matrices de cada elemento.

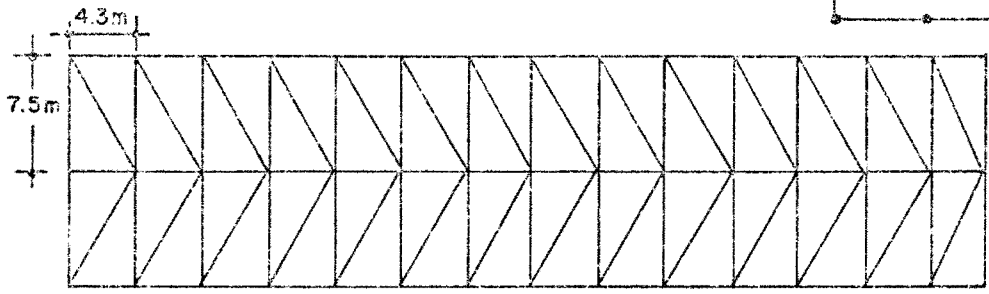
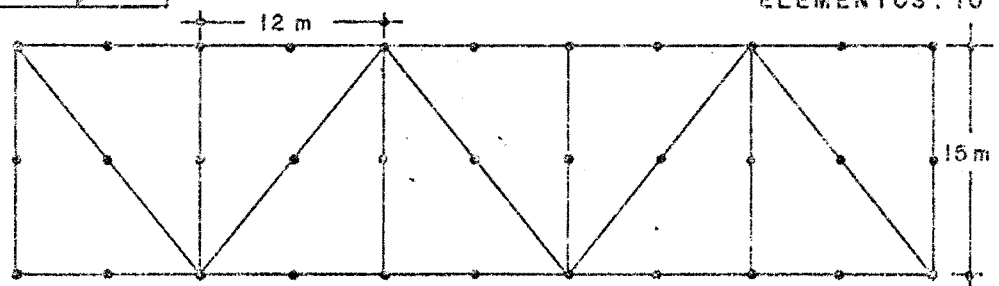
### Ejemplo 2

Se procede a simular el movimiento del fluido por



MALLA ①  
 TRIÁNGULOS DE PRIMER ORDEN  
 CANTIDAD DE NUDOS : 33  
 " " ELEMENTOS : 20

MALLA ②  
 TRIÁNGULOS DE SEGUNDO ORDEN  
 CANTIDAD DE NUDOS : 33  
 " " ELEMENTOS : 10



MALLA ③  
 TRIÁNGULOS DE PRIMER ORDEN  
 CANTIDAD DE NUDOS : 45  
 " " ELEMENTOS : 56

MALLA ④  
 TRIÁNGULOS DE SEGUNDO ORDEN  
 CANTIDAD DE NUDOS : 45  
 " " ELEMENTOS : 16

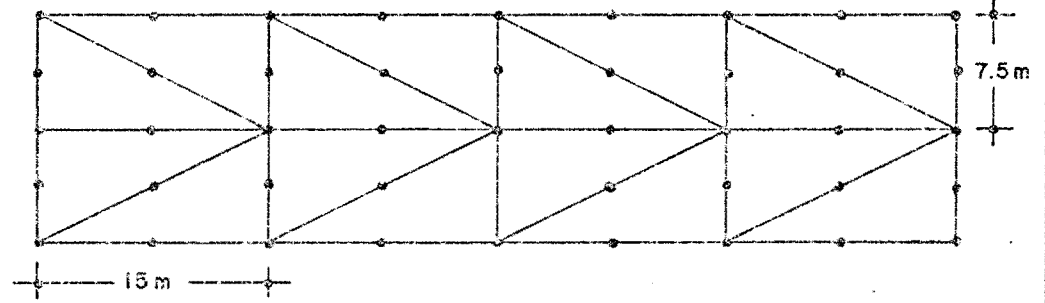


FIG. 4.2.2

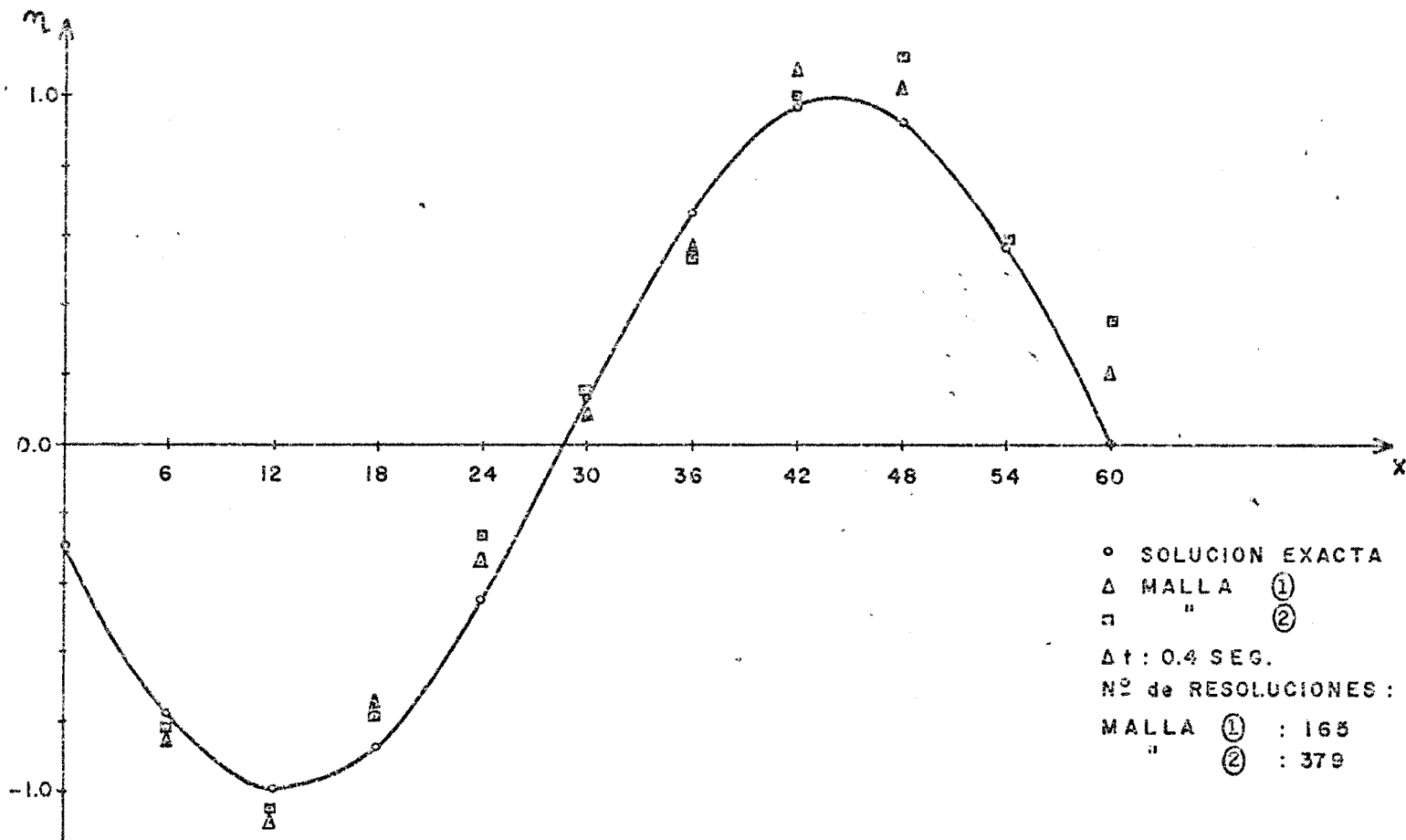


FIG. 4.2.3 PROPAGACIÓN DE UNA ONDA SINUSOIDAL  
 PERFIL DE LA SUPERFICIE LIBRE A LOS 6 SEGUNDOS

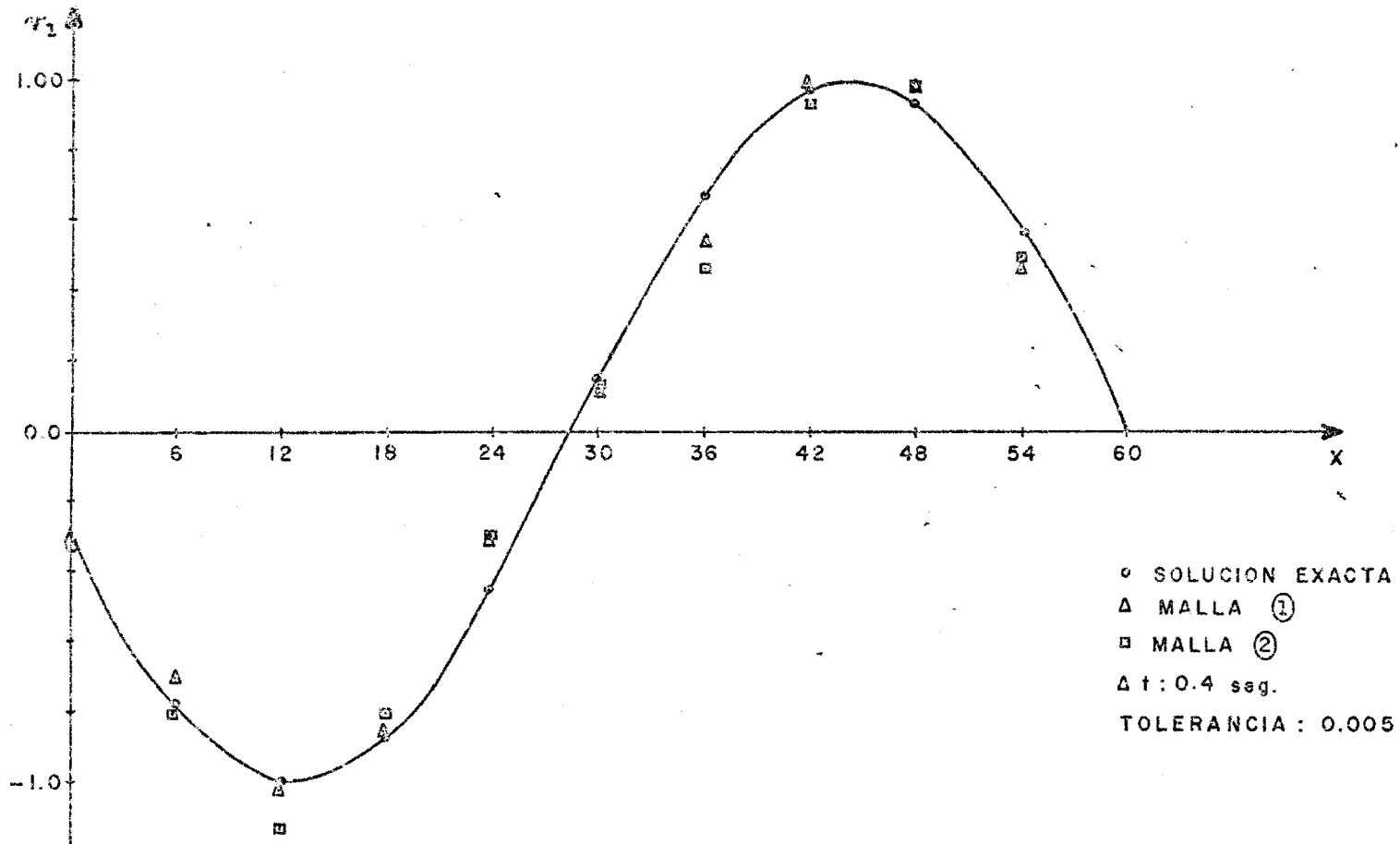


FIG. 4.2.4 PROPAGACIÓN DE UNA ONDA SINUSOIDAL  
 PERFIL DE VELOCIDADES A LOS 6 SEGUNDOS

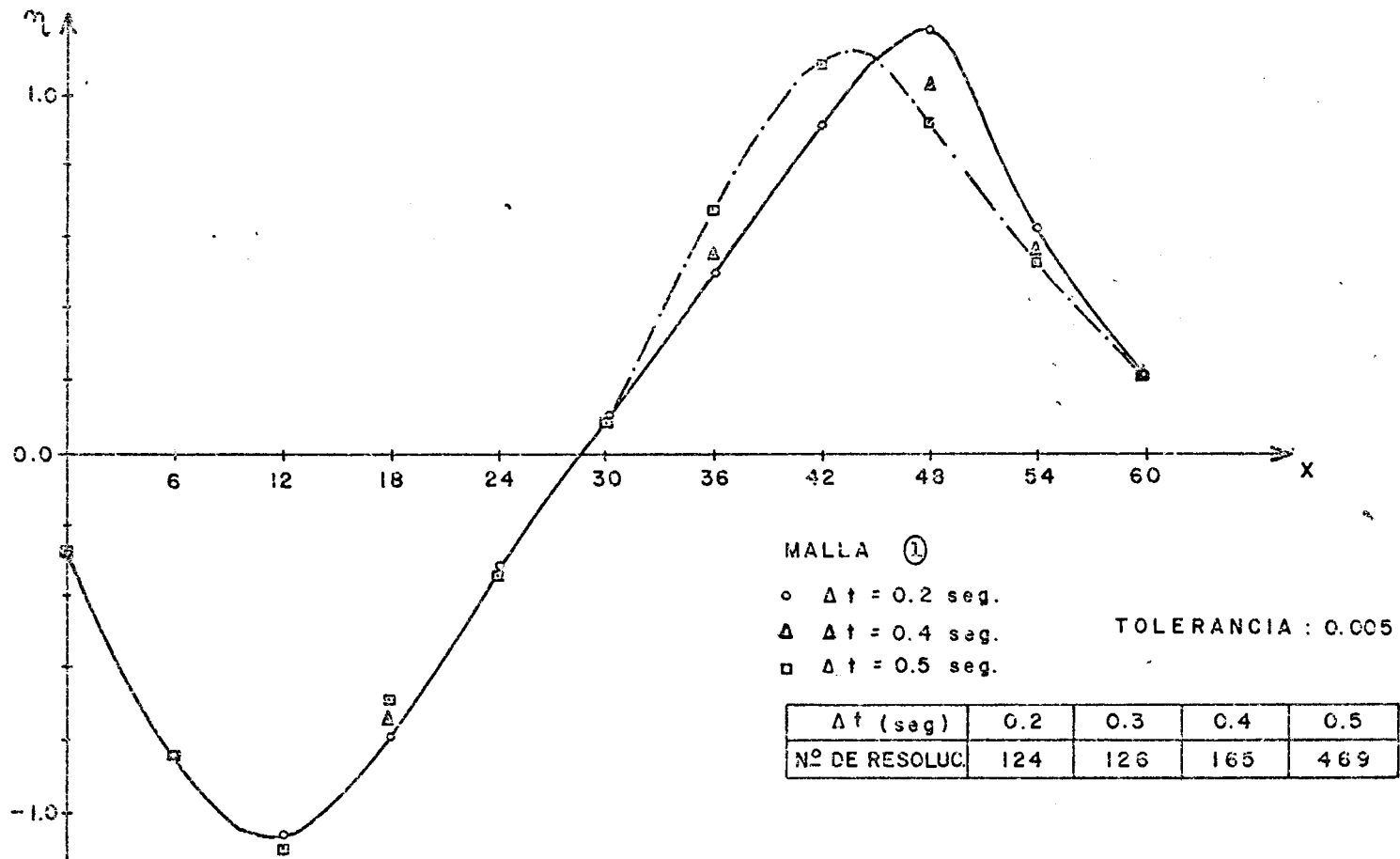


FIG.4.2.5 PROPAGACIÓN DE UNA ONDA SINUSOIDAL  
 PERFIL DE LA SUPERFICIE LIBRE A LOS 6 SEGUNDOS

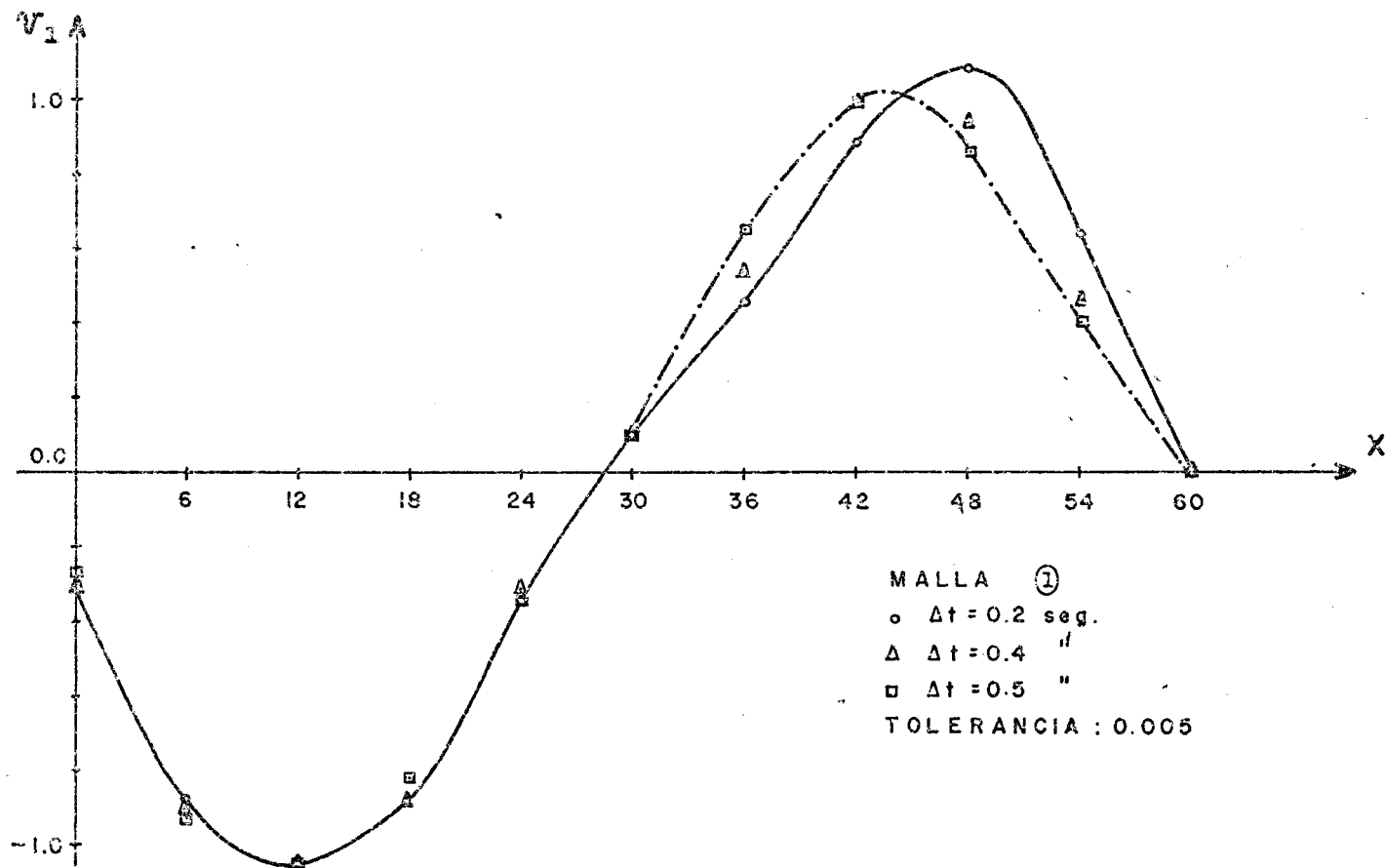


FIG. 4.2.6 PROPAGACIÓN DE UNA ONDA SINUSOIDAL  
 PERFIL DE VELOCIDADES A LOS 6 SEGUNDOS

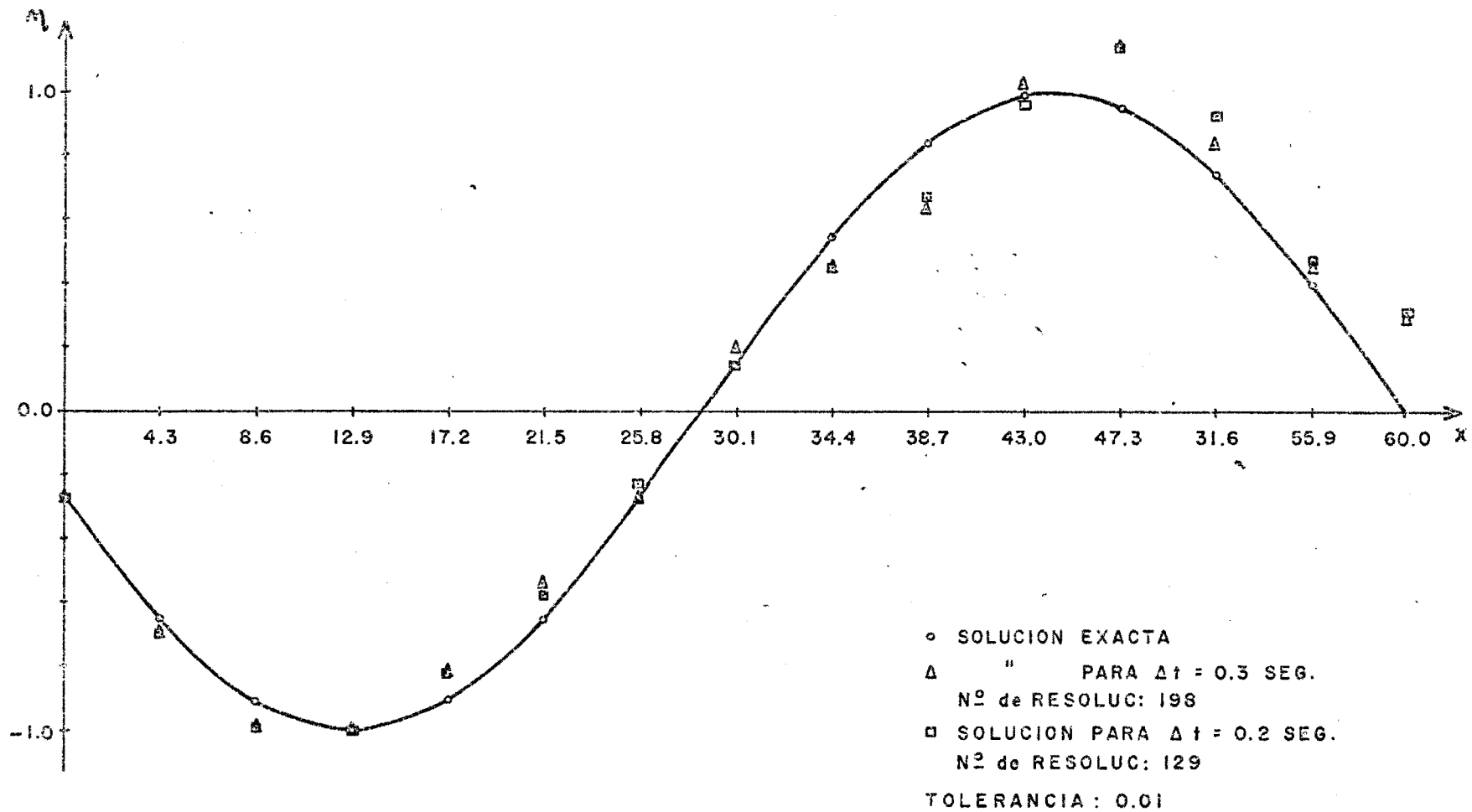


FIG. 4.2.7 PROPAGACIÓN DE UNA ONDA SINUSOIDAL  
 PERFIL DE LA SUPERFICIE LIBRE A LOS 6 SEGUNDOS

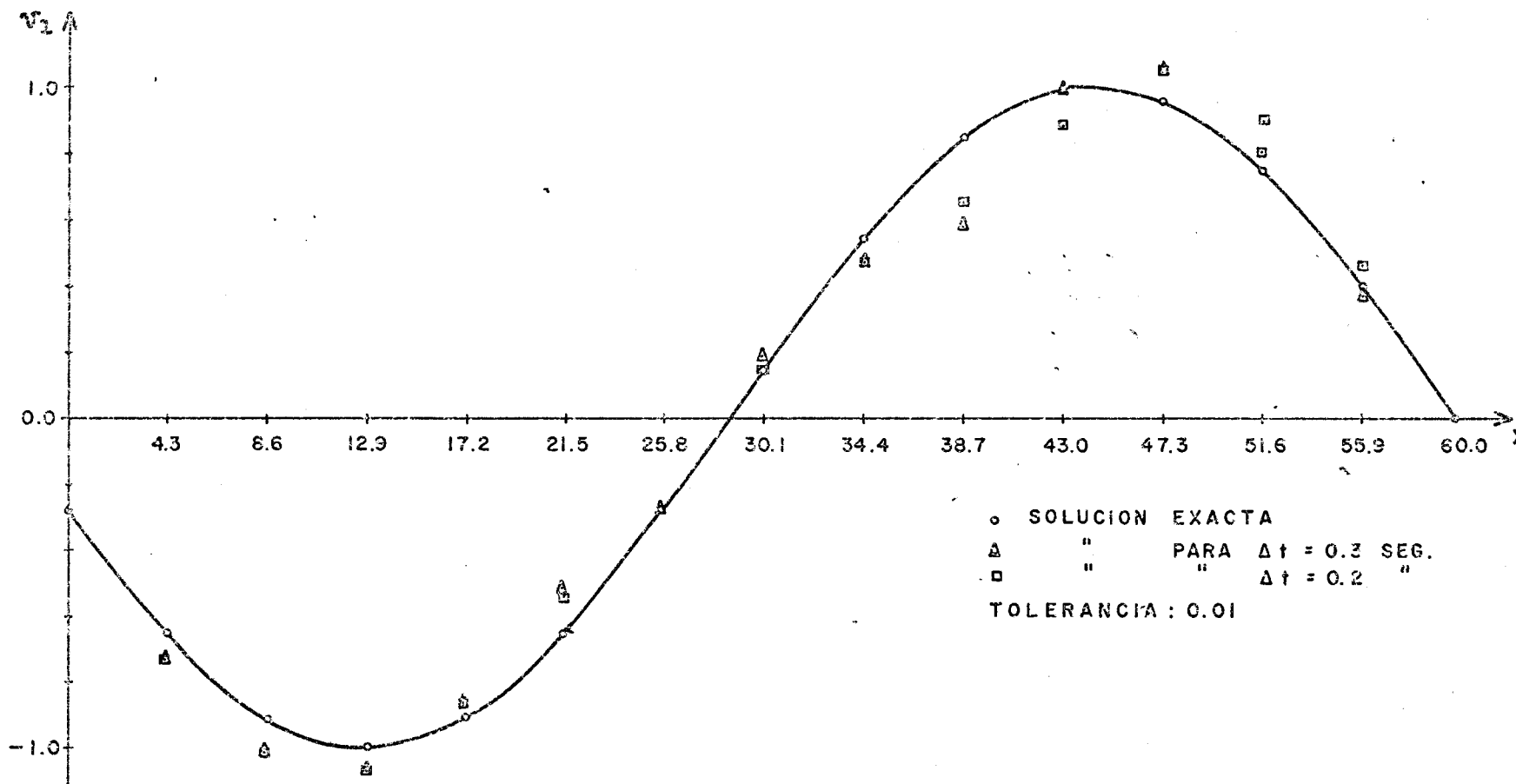


FIG. 4.2.8 PROPAGACIÓN DE UNA ONDA SINUSOIDAL  
 PERFIL DE VELOCIDADES A LOS 6 SEGUNDOS



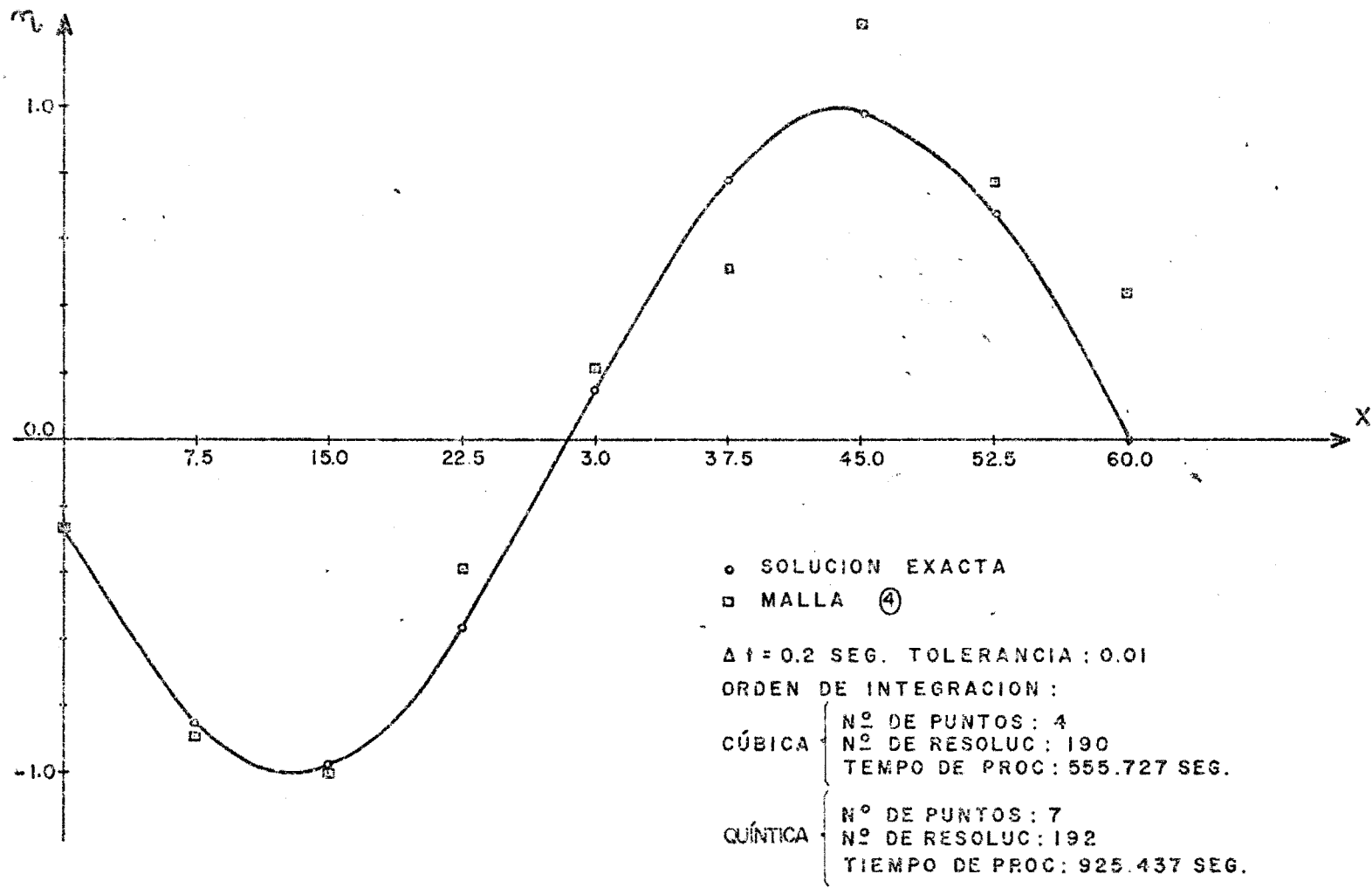


FIG.4.2.9 PROPAGACIÓN DE UNA ONDA SINUSOIDAL  
 PERFIL DE LA SUPERFICIE LIBRE A LOS 6 SEGUNDOS

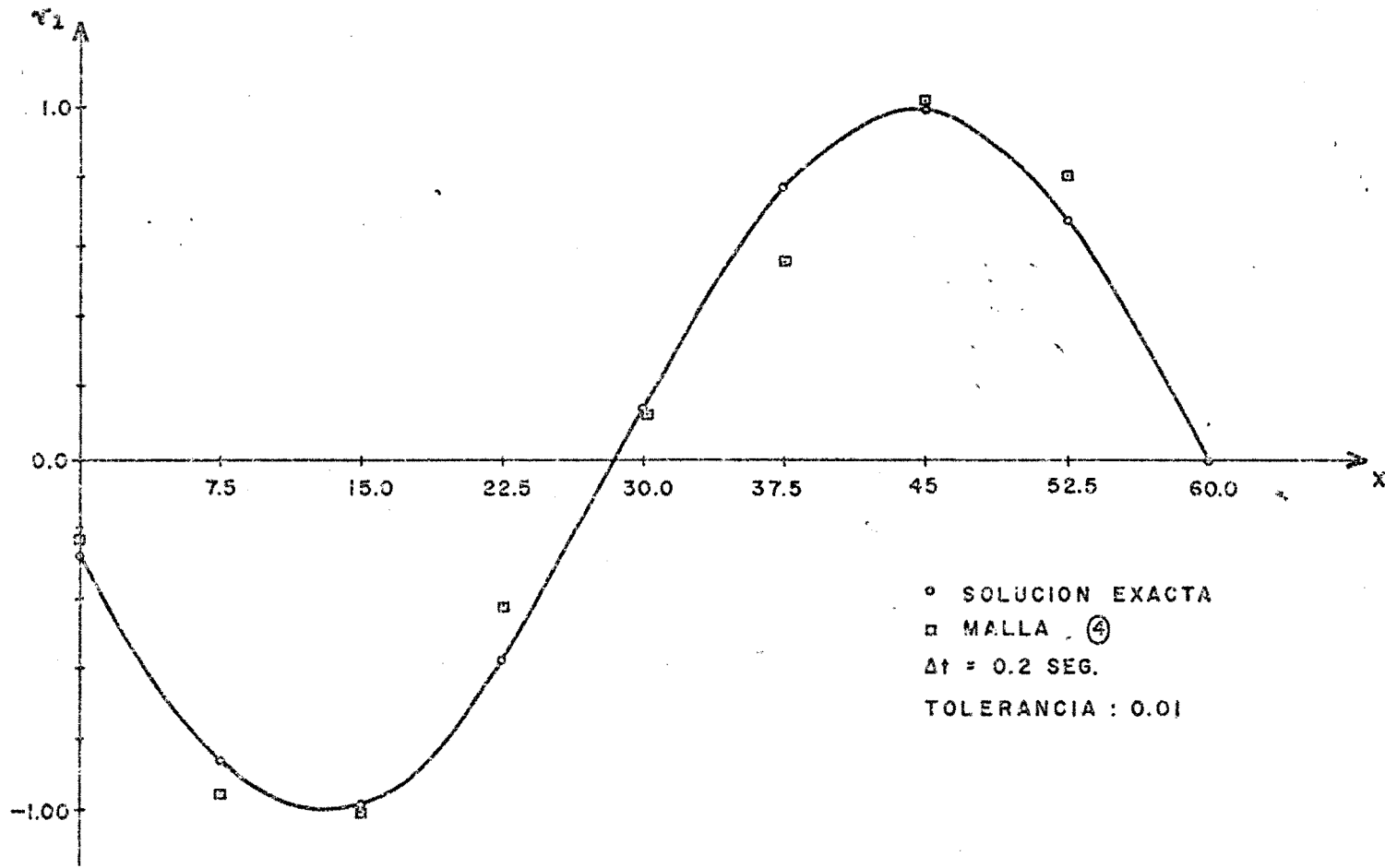


FIG. 4.2.10 PROPAGACIÓN DE UNA ONDA SINUSOIDAL  
PERFIL DE VELOCIDADES A LOS 6 SEGUNDOS

acción de una oscilación forzada en un canal de 90m x 15m y se trata de representar la propagación de una onda sinusoidal sin amortiguamiento.

Las dimensiones geométricas, las condiciones de borde y la malla de elementos finitos escogida están indicadas en las figuras 4.2.11(a) y 4.2.11(b) respectivamente.

Las condiciones de contorno del problema, escogidas de manera que no haya movimiento transversal vienen dadas por:

$$\begin{aligned} \eta &= v_1 = a \operatorname{sen} \sigma t & x_1 &= 0, & 0 < x_2 < 15, & t > 0 \\ v_2 &= 0 & 0 < x_1 < 90, & x_2 &= 0, 15, & t > 0 \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

Las ecuaciones que representan el problema y la solución vienen dadas por las expresiones (4.2.2) y (4.2.3) respectivamente.

Se toman como datos los siguientes valores:

$$a = 1\text{m}; h = 10\text{m}; g = 10\text{m}/\text{seg}^2; \sigma = 1\text{rad}/\text{seg}$$

Con estos valores la solución puede expresarse por la fórmula (4.2.4).

En las figuras 4.2.12 y 4.2.13 se observan los perfiles de  $\eta$  y  $v_1$  respectivamente, a los 8 segundos; se comparan el esquema trapezoidal y el esquema de Galerkin en tiempo (utilizando funciones de interpolación lineales en tiempo).

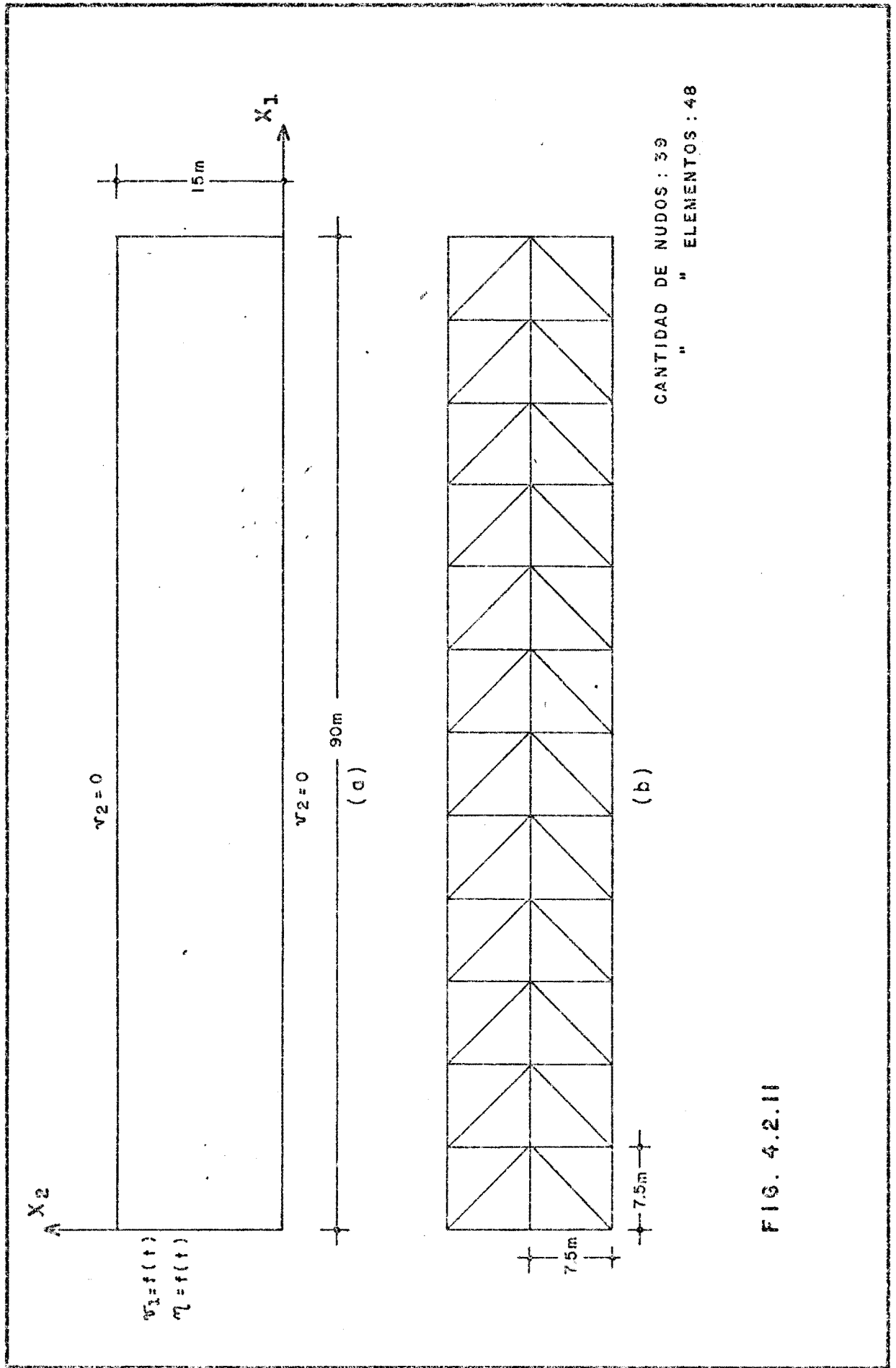
En las figuras 4.2.14 y 4.2.15 se emplea el esquema trapezoidal para obtener los perfiles de  $\eta$  y  $v_1$  a los 8 segundos, cotejándose los resultados que resultan de incluir o no los términos convectivos en las dos primeras ecuaciones de la expresión (4.2.2).

### Ejemplo 3

Se pretende encontrar la variación del nivel del fluido respecto al nivel medio en un canal sometido a la acción de una oscilación forzada debido a la acción de la marea. Se utiliza como esquema de solución el trapezoidal.

En las figuras 4.2.16(a) y 4.2.16(b) se presentan las características geométricas de contorno y la malla de elementos finitos adoptada.

Las ecuaciones que gobiernan el sistema vienen



CANTIDAD DE NUDOS : 39  
" " ELEMENTOS : 48

FIG. 4.2.11

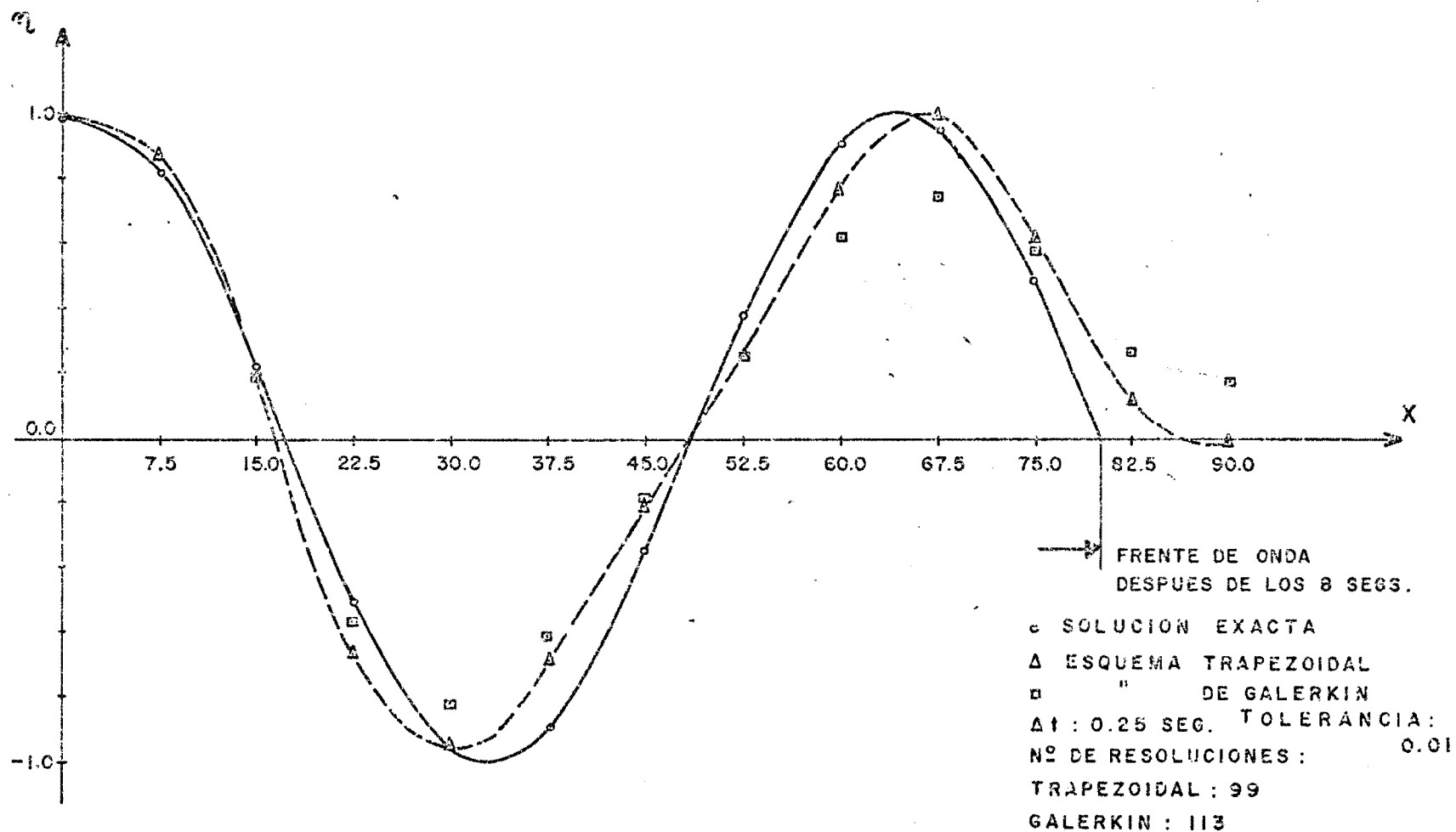


FIG.4.2.12 PROPAGACION DE UNA ONDA SINUSOIDAL  
 PERFIL DE LA SUPERFICIE LIBRE A LOS 8 SEGUNDOS

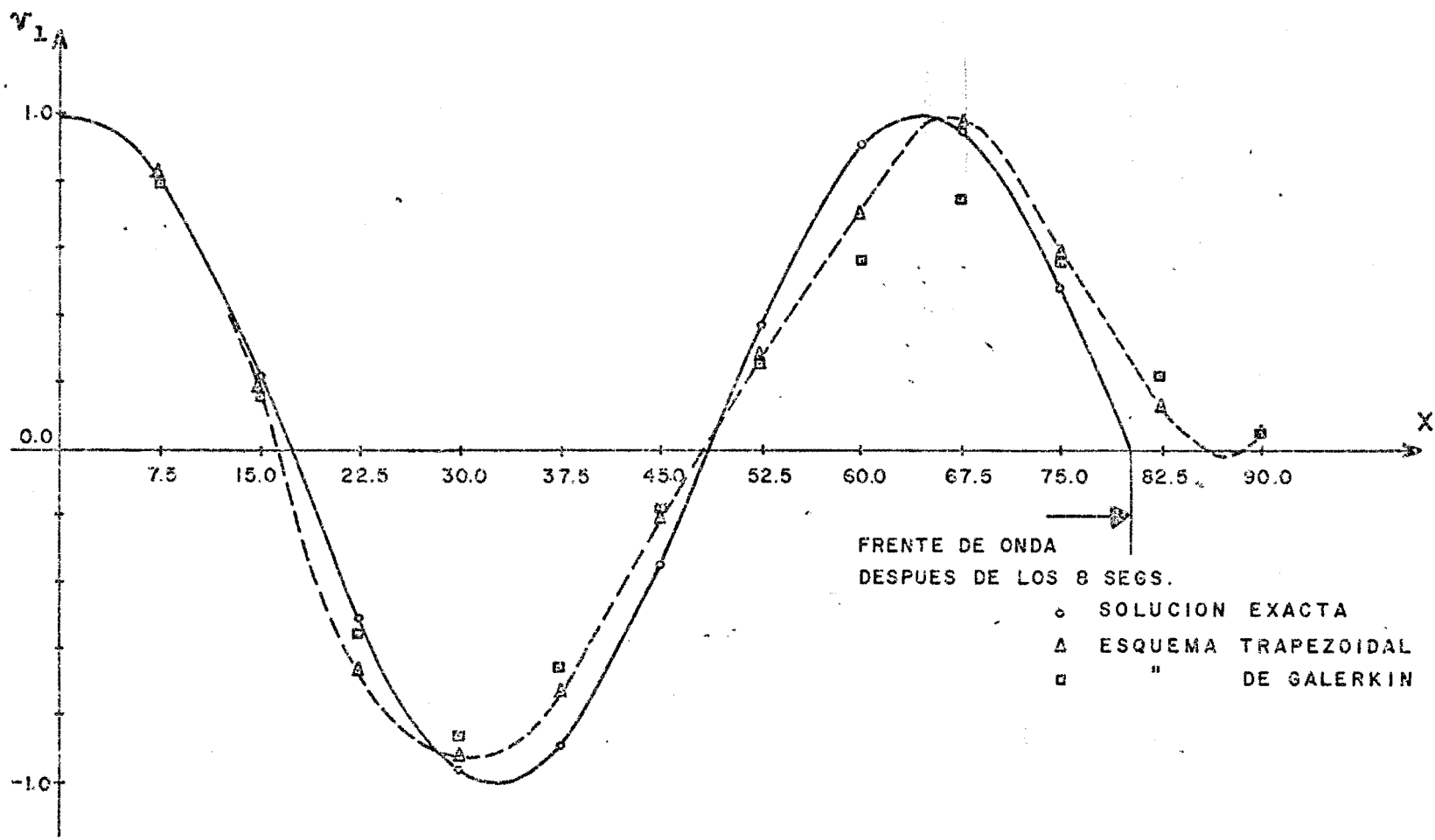


FIG. 4.2.13 PROPAGACIÓN DE UNA ONDA SINUSOIDAL  
 PERFIL DE VELOCIDADES A LOS 8 SEGUNDOS

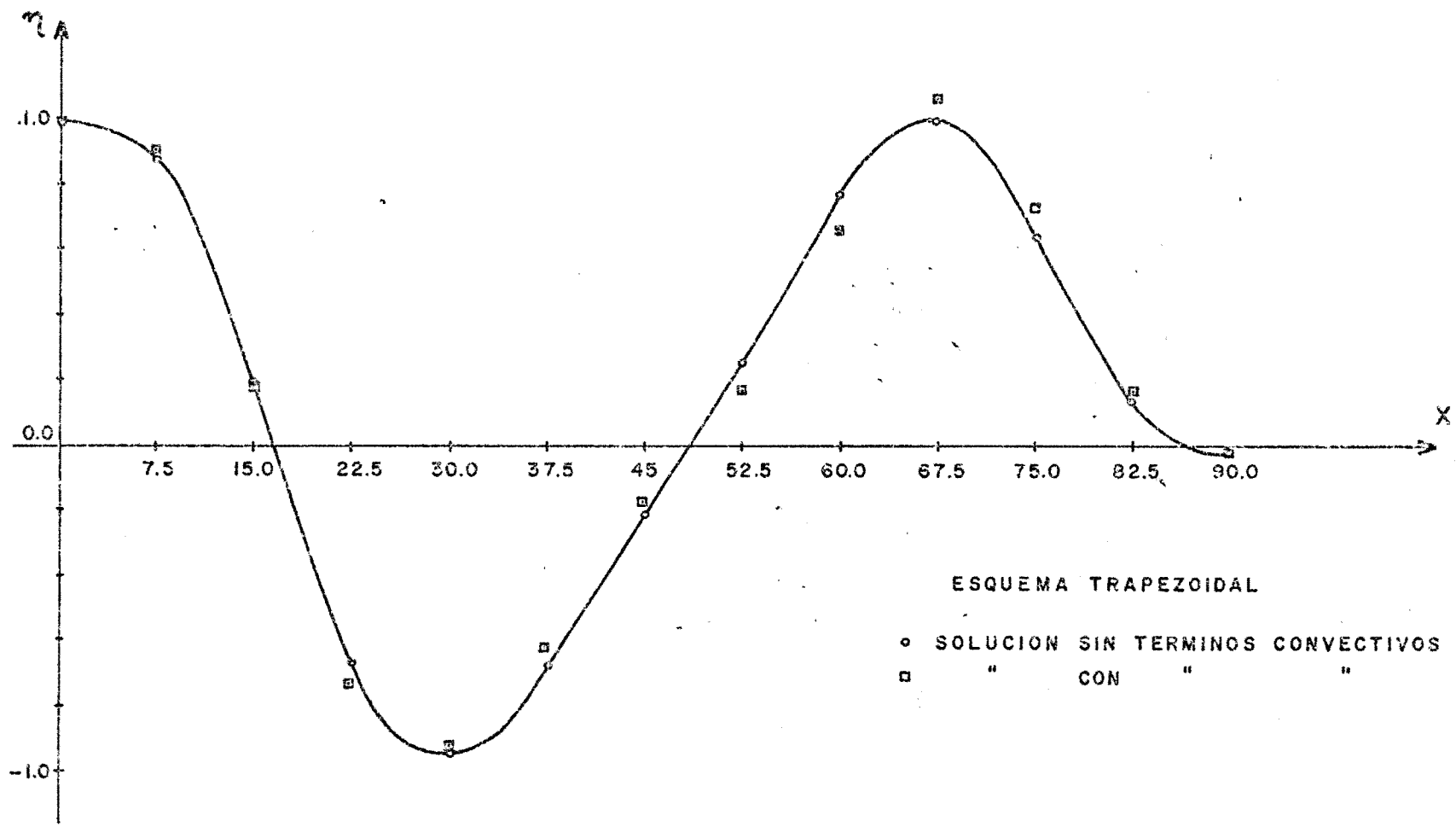


FIG. 4.2.14 PROPAGACIÓN DE UNA ONDA SINUSOIDAL  
 PERFIL DE LA SUPERFICIE LIBRE A LOS 5 SEGUNDOS

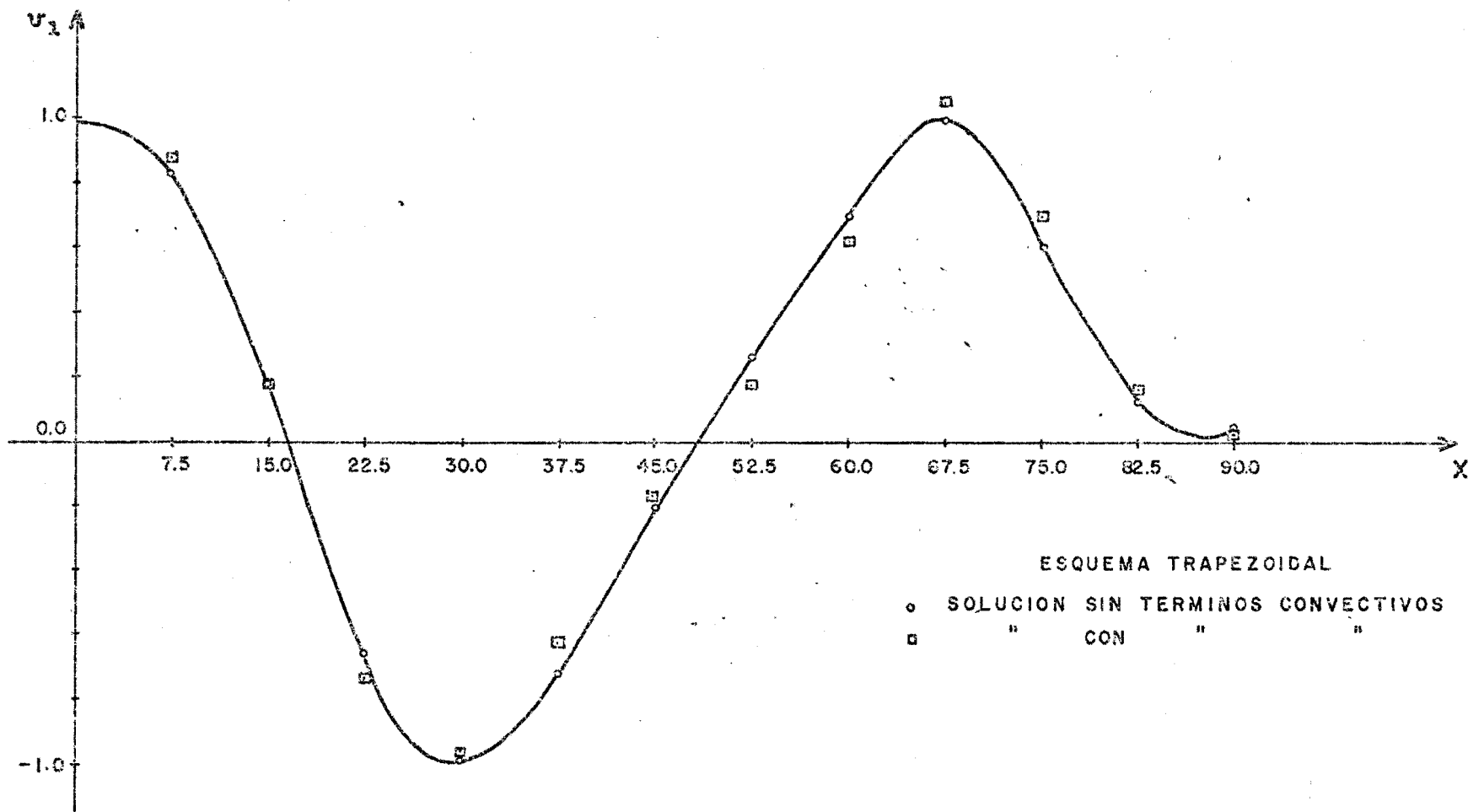


FIG. 4.2.15 PROPAGACION DE UNA ONDA SINUSOIDAL  
 PERFIL DE VELOCIDADES A LOS 8 SEGUNDOS



dadas por la expresión (4.2.2). La excitación externa provoca una onda que entra en el canal por el extremo abierto, y se refleja totalmente en el extremo final, que es cerrado. La composición de la onda entrante y la reflejada da como resultado una onda estacionaria.

Se toma la longitud del canal menor que la cuarta parte de la longitud de onda a los efectos de evitar la aparición de un punto anfifrónico, endonde  $\eta$  es siempre igual a cero y con grandes curvaturas en las proximidades de ese punto.

La solución analítica de este problema es<sup>(21)</sup>:

$$\eta(x_1, t) = a \left( \cos \frac{\sigma x_1}{\sqrt{gh}} + \tan \frac{\sigma L}{\sqrt{gh}} \sin \frac{\sigma x_1}{\sqrt{gh}} \right) \cos \sigma t \quad (4.2.6)$$

$$v_1(x_1, t) = -\frac{a \sqrt{gh}}{h} \left( \sin \frac{\sigma x_1}{\sqrt{gh}} - \tan \frac{\sigma L}{\sqrt{gh}} \cos \frac{\sigma x_1}{\sqrt{gh}} \right) \sin \sigma t$$

Los datos adoptados para este caso son:

$a=0.5\text{m}$ ;  $h=4\text{m}$ ;  $g=9.81\text{m/seg}^2$ ;  $L=200\text{m}$ ;  $\sigma=0.031416\text{rad/seg}$ ;

$T=200\text{seg}$ ;  $\Delta t=2.5\text{seg}$

En este ejemplo se ha partido de las condiciones iniciales proporcionadas por la expresión (4.2.6).

En la figura 4.2.17 se presentan perfiles transversales a 0 seg, 50 segs, 75 segs y 125 segs y una tabla donde se indica el número de resoluciones en función del coeficiente de relajación adoptado.

#### Ejemplo 4

En este ejemplo se estudia la acción del viento introduciendo un modo de oscilación en un lago rectangular orientado en la dirección oeste-este de 150km x 30km, y una profundidad uniforme de 60m. Las dimensiones geométricas y las condiciones de borde se presentan en la figura 4.2.18(a) y la malla de elementos finitos utilizada se encuentra en la figura 4.2.18(b).

Para resolver este caso se emplea el esquema trapezoidal y los datos son los siguientes:

$h$  (profundidad media): 60m

$g$  (aceleración de la gravedad):  $9.81\text{m/seg}^2$

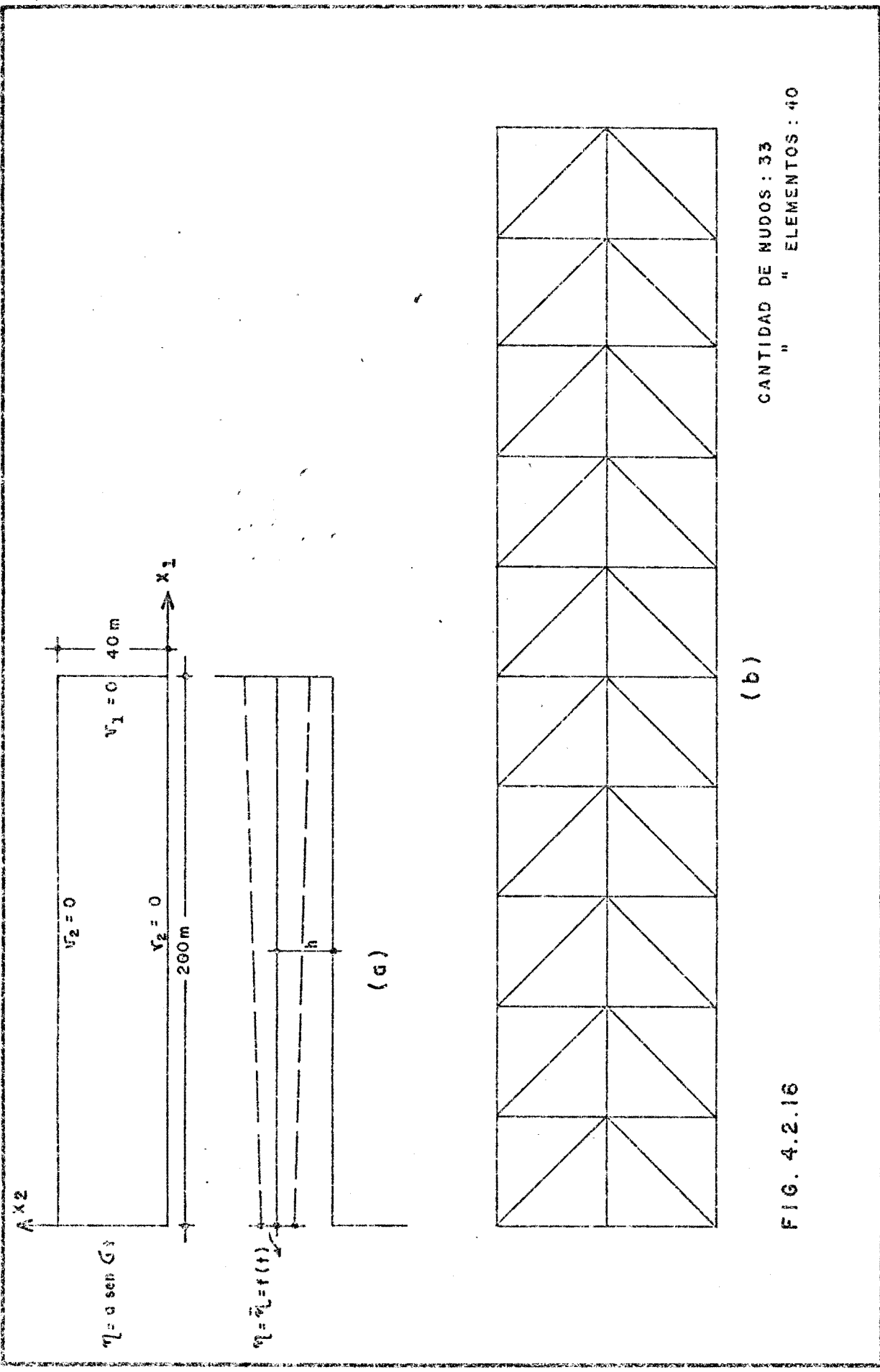
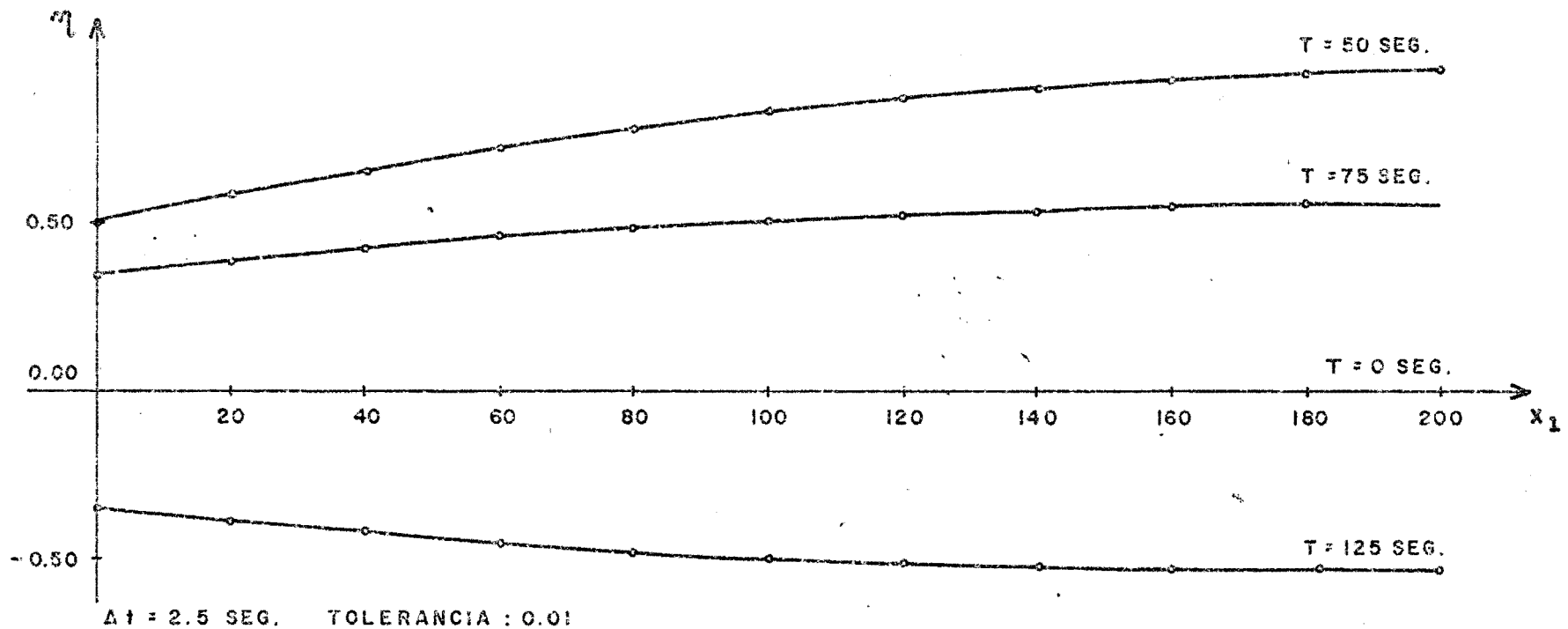


FIG. 4.2.16



COEF. DE RELAJACION	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3
Nº DE RESOLUCIONES	324	275	236	491	249	INESTABLE A LOS 47.5 s.	INESTABLE A LOS 15.0 s.

FIG. 4.2.17 ONDA PROVOCADA POR LA ACCION DE LA MAREA Y REFLEJADA EN EL EXTREMO CERRADO DE UN CANAL DE LONGITUD FINITA

$W_v$  (velocidad del viento): 10m/seg

$\gamma^2 \rho_a / \rho = 3.2 \times 10^{-6}$

$C$  (coeficiente de Coriolis): 0.0001/seg (corresponde a una latitud sur de 43°05'20")

$\Delta t$  (intervalo de tiempo): 300 segs.

$T$  (periodo de oscilación sin amortiguamiento): 12365.5 segs.

Las condiciones de contorno se resumen en la siguiente forma:

$$\begin{array}{llll} v_1 = 0 & x_1 = 0, 150 \text{ km} & 0 \leq x_2 \leq 30 \text{ km} & t \geq 0 \\ v_2 = 0 & 0 \leq x_1 \leq 150 \text{ km} & x_2 = 0, 30 \text{ km} & t \geq 0 \end{array} \quad (4.2.7)$$

En la figura 4.2.19 se observan perfiles de la superficie libre en los nudos centrales de la malla a los 3000 segs, 4500 segs, 6000 segs y 10500 segs.

En la figura 4.2.20 se presenta la variación de la velocidad longitudinal  $v_1$  con el tiempo en ciertos puntos de lago.

En la figura 4.2.21 se indica el efecto amortiguador que produce la fricción en el fondo. Se han usado para tal fin valores no reales del coeficiente de Chezy (1,5,10), ya que un valor real (Chezy=50,60) no permite observar, para este caso, tal fenómeno.

Las velocidades transversales  $v_2$  son pequeñas y se deben al efecto de Coriolis, el que produce variaciones laterales de la superficie libre, tal como se indica en la figura 4.2.22.

Se aprovecha este ejemplo para indicar el uso de algunos de los comandos del sistema HYDRO.

Tomando como base la malla de elementos finitos de la figura 4.2.18(b) los datos del problema pueden ser suministrados al computador de la manera indicada en la hoja siguiente.

Logicamente este ejemplo tiene fines ilustrativos, y a ello se debe su simplicidad. El sistema HYDRO ofrece muchas otras posibilidades, existiendo además comandos que en este caso no han sido utilizados (tales como rotación de nudos, desactivar elementos, vientos y condiciones de borde variables en el tiempo, etc.).

HYDRO "WIND INDUCED OSCILLATIONS IN A RECTANGULAR LAKE"

NODAL COORDINATES

1	0.	0.0	2	0.	15000.0	3	0.	30000.0
4	15000.0	0.0	5	15000.0	15000.0	8	15000.0	30000.0
7	30000.0	0.0	8	30000.0	15000.0	9	30000.0	30000.0
10	45000.0	0.0	11	45000.0	15000.0	12	45000.0	30000.0
13	60000.0	0.0	14	60000.0	15000.0	15	60000.0	30000.0
16	75000.0	0.0	17	75000.0	15000.0	18	75000.0	30000.0
19	90000.0	0.0	20	90000.0	15000.0	21	90000.0	30000.0
22	105000.0	0.0	23	105000.0	15000.0	24	105000.0	30000.0
25	120000.0	0.0	26	120000.0	15000.0	27	120000.0	30000.0
28	135000.0	0.0	29	135000.0	15000.0	30	135000.0	30000.0
31	150000.0	0.0	32	150000.0	15000.0	33	150000.0	30000.0

ELEMENT CONNECTIVITY

1	1	4	5	2	1	5	2	3	2	5	3	4	3	5	6
5	4	7	8	6	4	8	5	7	5	8	6	9	6	8	9
9	7	10	11	10	7	11	8	11	8	11	9	12	9	11	12
13	10	13	14	14	10	14	11	15	11	14	12	16	12	14	15
17	13	16	17	18	13	17	14	19	14	17	15	20	15	17	18
21	16	19	20	22	16	20	17	23	17	20	18	24	18	20	21
25	19	22	23	26	19	23	20	27	20	23	21	28	21	23	24
29	22	25	26	30	22	26	23	31	23	26	24	32	24	26	27
33	25	28	29	34	25	29	26	35	26	29	27	36	27	29	30
37	28	31	32	35	28	32	29	39	29	32	30	40	30	32	33

AGCS INDUSTRIAS GRAFICAS S.A. - DIVISION DE FORMULARIOS CONTINUOS

PRESCRIBED DEFORMATIONS

1 3 31 33 VALUES "V1" 0. "V2" 0.  
 2 32 VALUES "V1" 0.  
 4 6 7 9 10 12 13 15 16 VALUES "V2" 0.  
 18 19 21 22 24 25 27 28 30 VALUES "V2" 0.

CONSTANTS

ALL WIND 0.0000032 GRAVITY 9.81

ELEMENT ATTRIBUTES

1 THRU 40 CHEZY 10. CORIOLIS 0.0001 WIND Y 10 T1 0.

NODAL ATTRIBUTES

1 THRU 33 DEPTH 50.

ELEMENT TYPE

ALL "TRIANG"

TOLERANCE TOL1 0.0001

TIME INTERVAL 84 300.

CIRCULATION TRAPEZOIDAL RELAXATION 0.9 WITHOUT ADVECTIVES

PRINT RESULTS

END

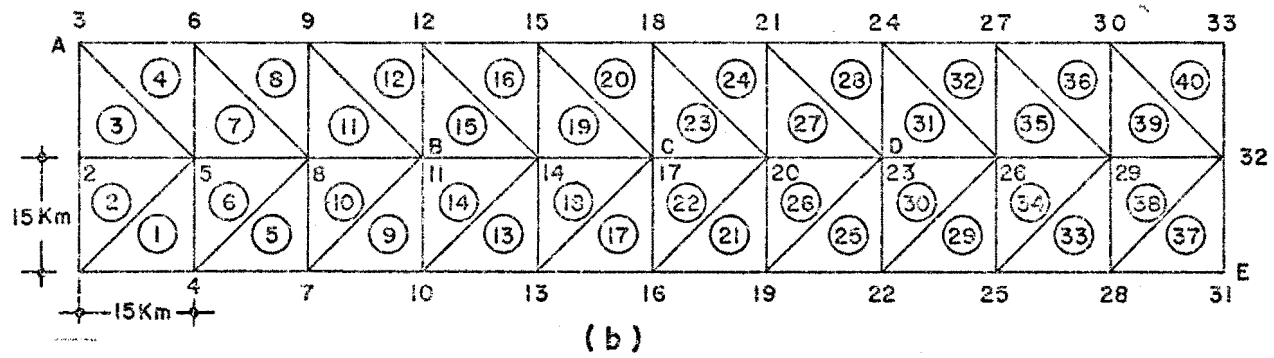
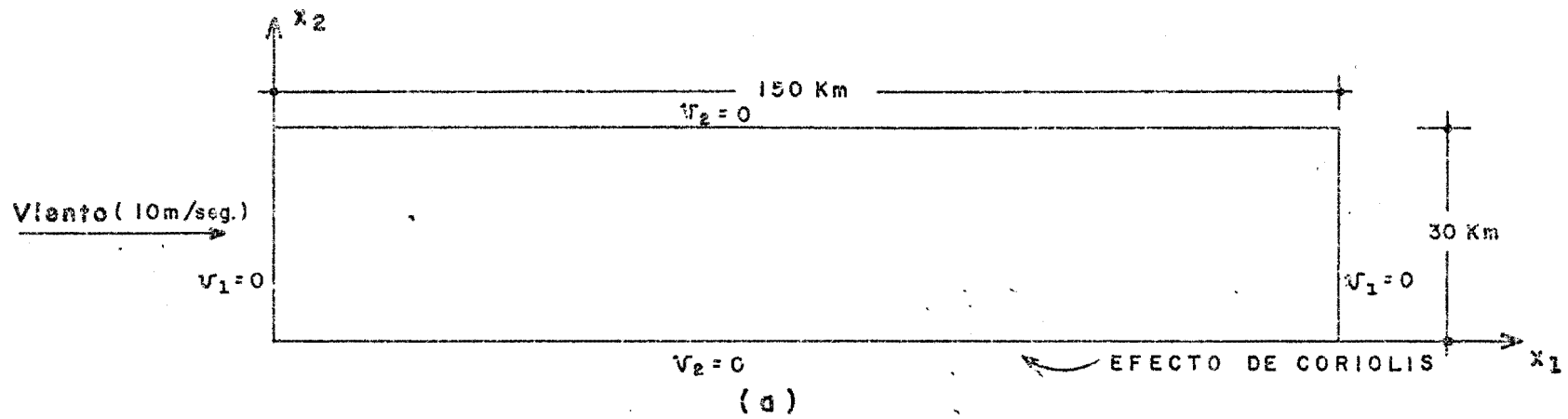


FIG. 4.2.18

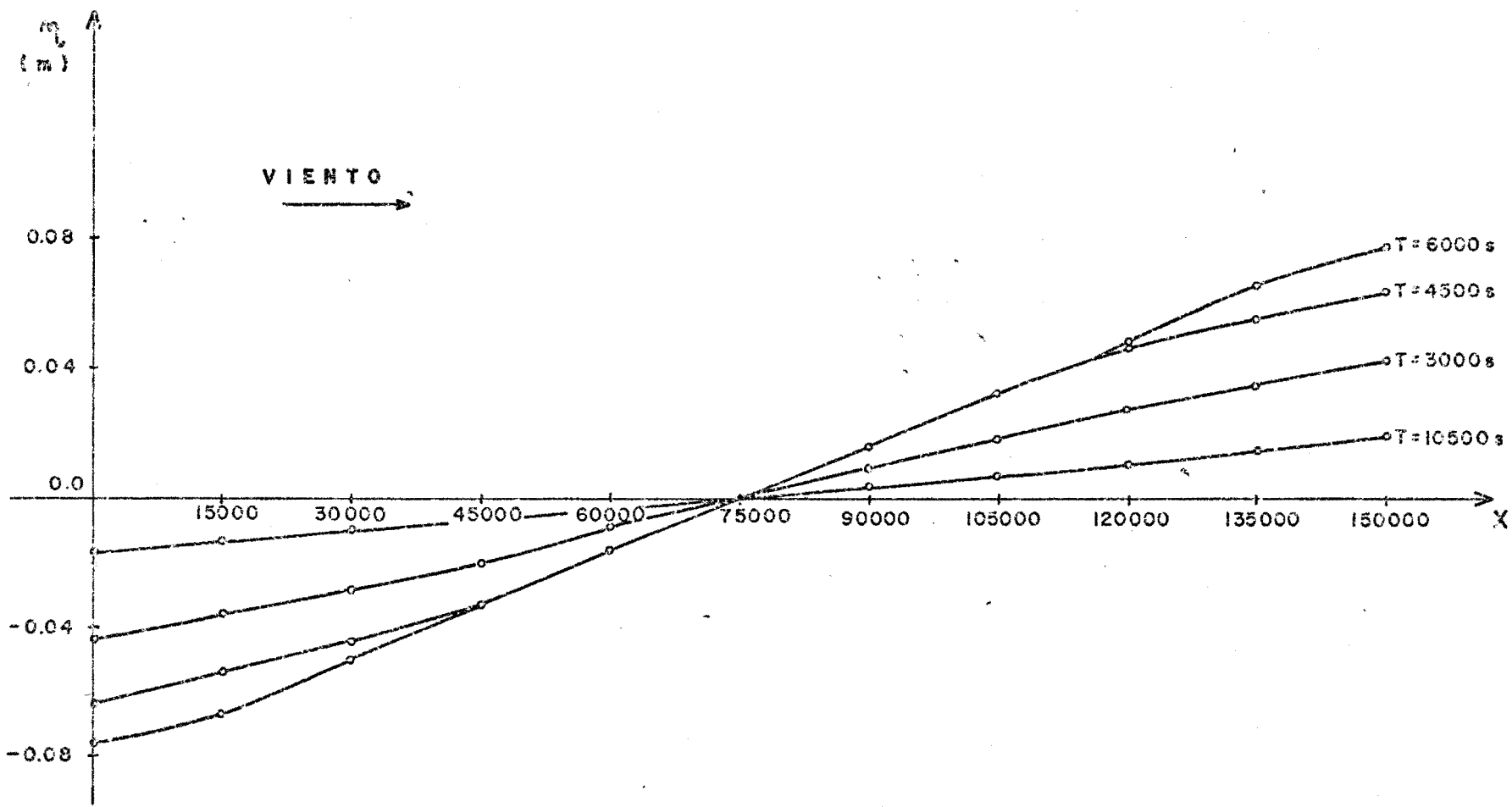
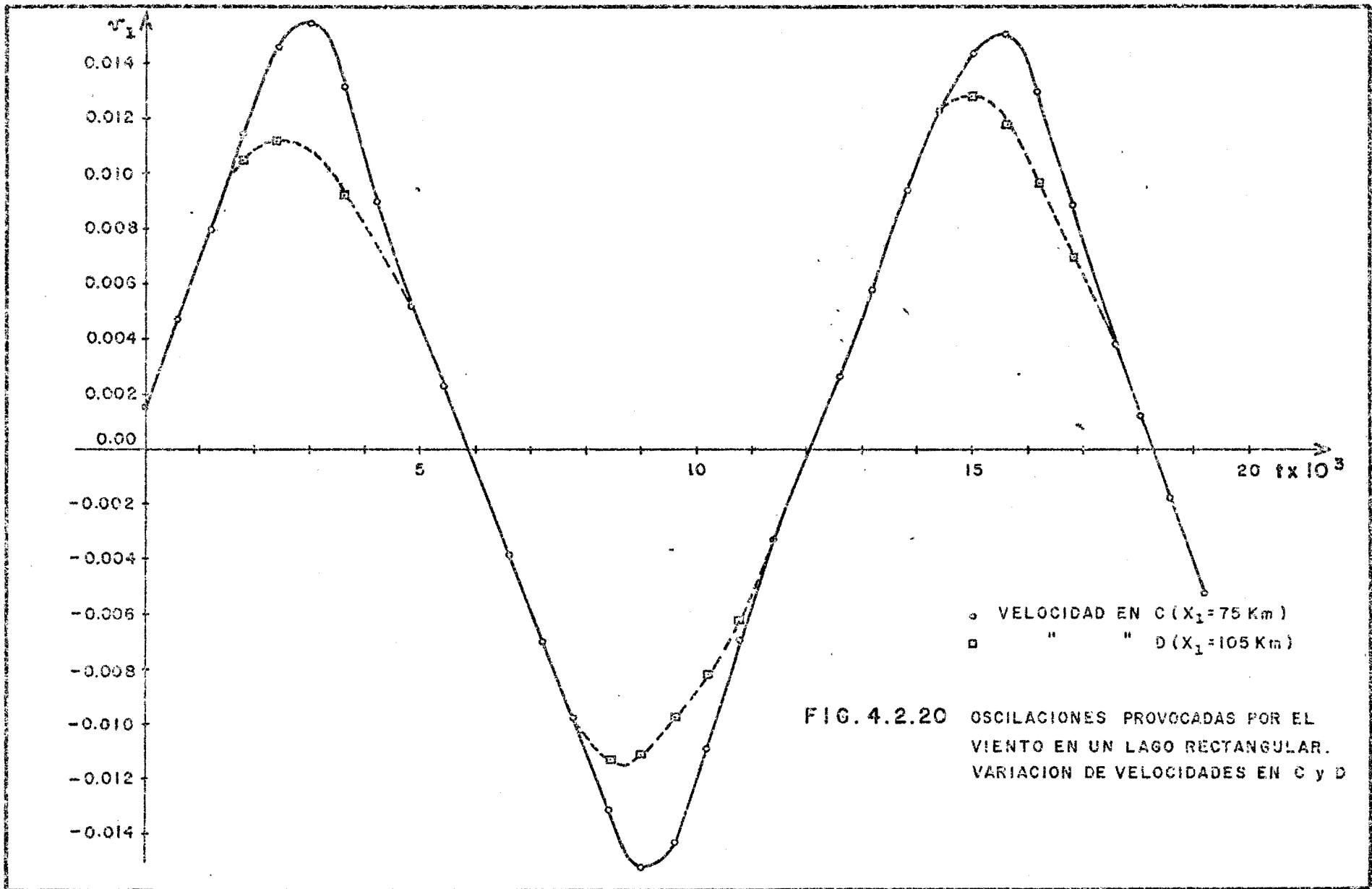


FIG.4.2.19 OSCILACIONES PROVOCADAS POR EL VIENTO EN UN LAGO RECTANGULAR  
PERFILES DE LA SUPERFICIE LIBRE EN LOS NUDOS CENTRALES





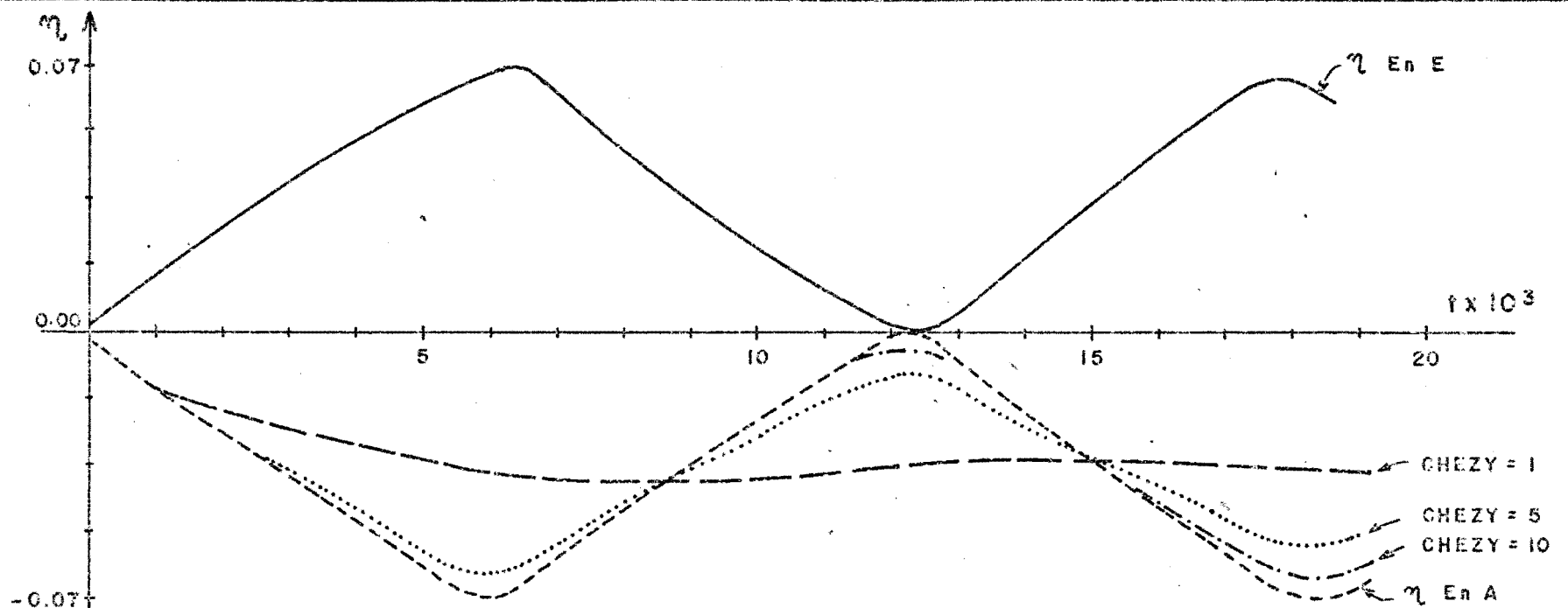


FIG. 4.2.21 OSCILACIONES PROVOCADAS POR EL VIENTO EN UN LAGO RECTANGULAR  
 VARIACION DE LA SUPERFICIE LIBRE EN A ( $X_1 = 0, X_2 = 30 \text{ Km}$ ) Y E ( $X_1 = 150 \text{ Km}, X_2 = 0$ )

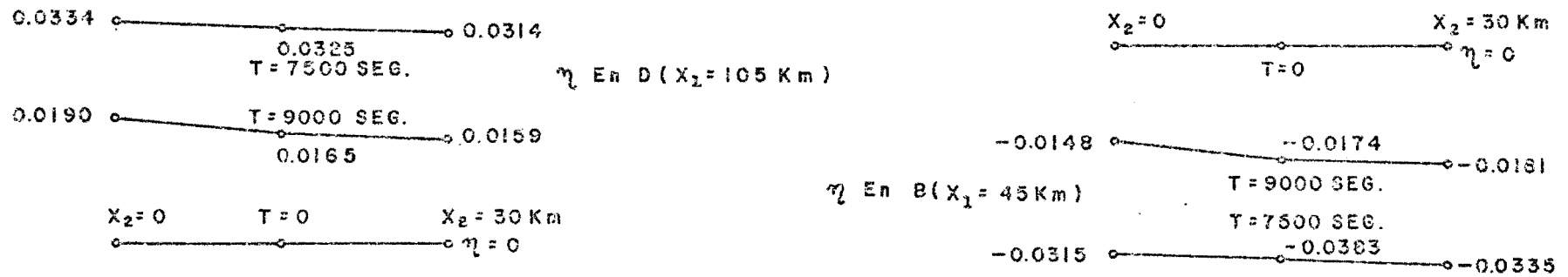


FIG. 4.2.22 OSCILACIONES PROVOCADAS POR EL VIENTO EN UN LAGO RECTANGULAR  
 PERFILES TRANSVERSALES EN B ( $X_1 = 45 \text{ Km}$ ) Y D ( $X_1 = 105 \text{ Km}$ )

Recurriendo al Manual de Sistema HYDRO podrá apreciarse completamente su verdadera potencialidad.

### Ejemplo 5

Una aplicación práctica del modelo de elementos finitos puede observarse en las figuras 4.2.23, 4.2.24 y 4.2.25, en donde se muestran los resultados obtenidos para el Rio Guaíba en el Estado de Rio Grande do Sul (Brasil).

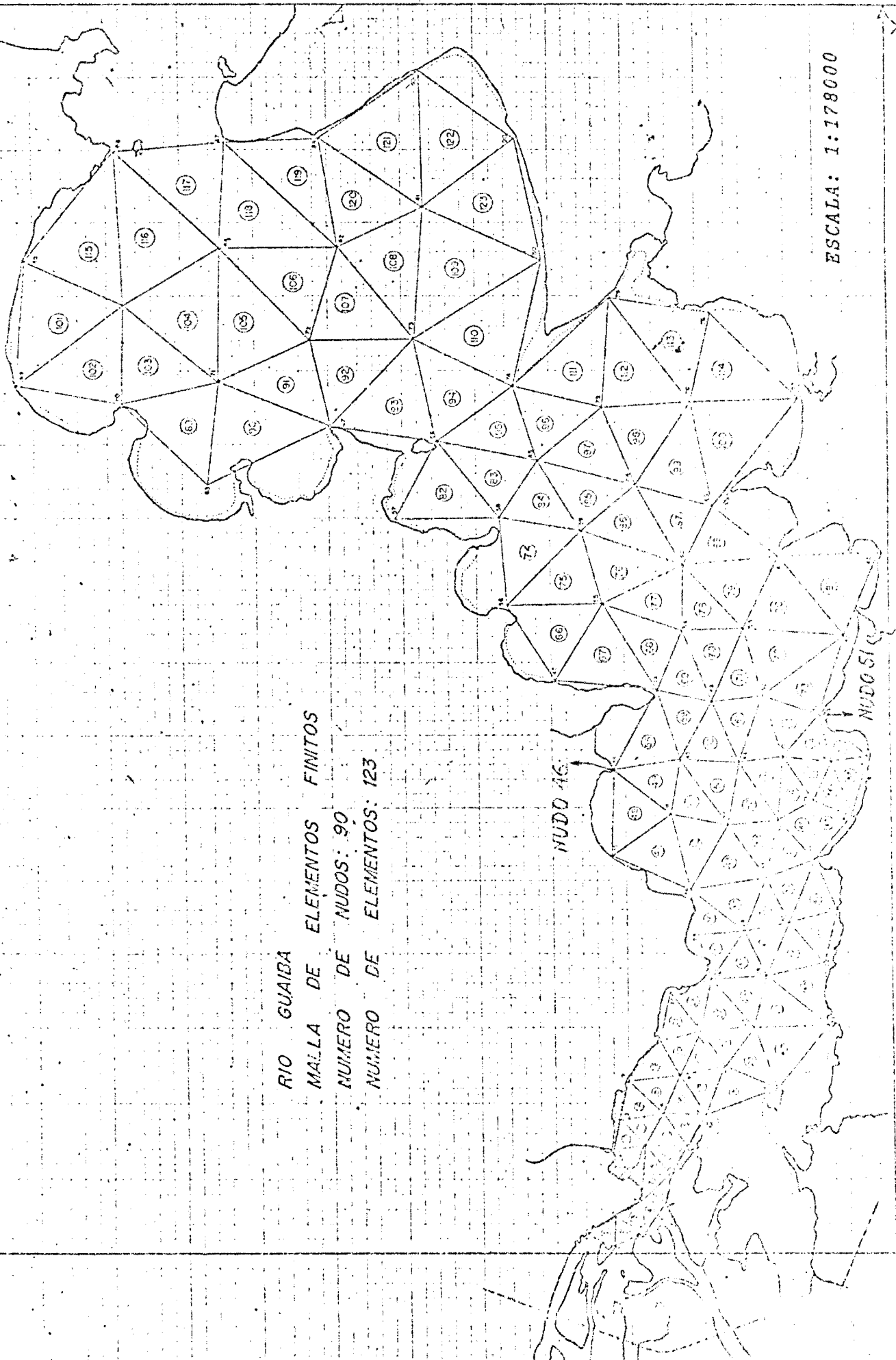
La malla de elementos finitos utilizada, con triángulos de primer orden, no es muy refinada, y los datos utilizados, aunque son valores posiblemente próximos a los reales, han sido escogidos arbitrariamente; como consecuencia de ello, los valores conseguidos sólo son útiles como una primera idea de lo que en realidad ocurre.

### 4.3 - Análisis de resultados

Los resultados obtenidos, resumidos en gráficos y tablas, requieren un análisis a los efectos de poder usar eficientemente el modelo formulado.

A partir de los tres primeros ejemplos presentados pueden hacerse algunas consideraciones, tales como las siguientes (Se toman valores promedios de las variables en las secciones transversales):

- a) Es necesario tomar un número suficiente de puntos longitudinalmente para poder representar con precisión la forma de las ondas (en el ejemplo 1 deberían tomarse por lo menos diez puntos). Debe tenerse en cuenta que a mayor refinamiento corresponde un aumento sensible en tiempo de procesamiento (Ver fig. 4.2.9).
- b) El esquema trapezoidal permite obtener resultados bastante precisos para las ondas en fase y amplitud (Ver fig. 4.2.12 y 4.2.13).
- c) El esquema de Galerkin en tiempo (con funciones de interpolación lineales en tiempo), produce inherentemente amortiguamiento y retardamiento en la fase de la onda con respecto al método trapezoidal (Ver fig. 4.2.12 y fig. 4.2.13).
- d) Un coeficiente de relajación puede eventualmente ayudar a acelerar la convergencia. Para el esquema trapezoidal 0.9



RIO GUAIBA  
 MALLA DE ELEMENTOS FINITOS  
 NUMERO DE NUDOS: 90  
 NUMERO DE ELEMENTOS: 123

ESCALA: 1:178000

FIG. 4.2.23

RIO GUAIBA.  
VELOCIDADES A LOS 3000 SEG.  
ESCALA DE VELOCIDADES: 0,36m/s/1cm

VEIENTO | VELOCIDAD: 10 m/seg  
DIRECCION: 180°

ESCALA: 1:178000

FIG. 4.2.24

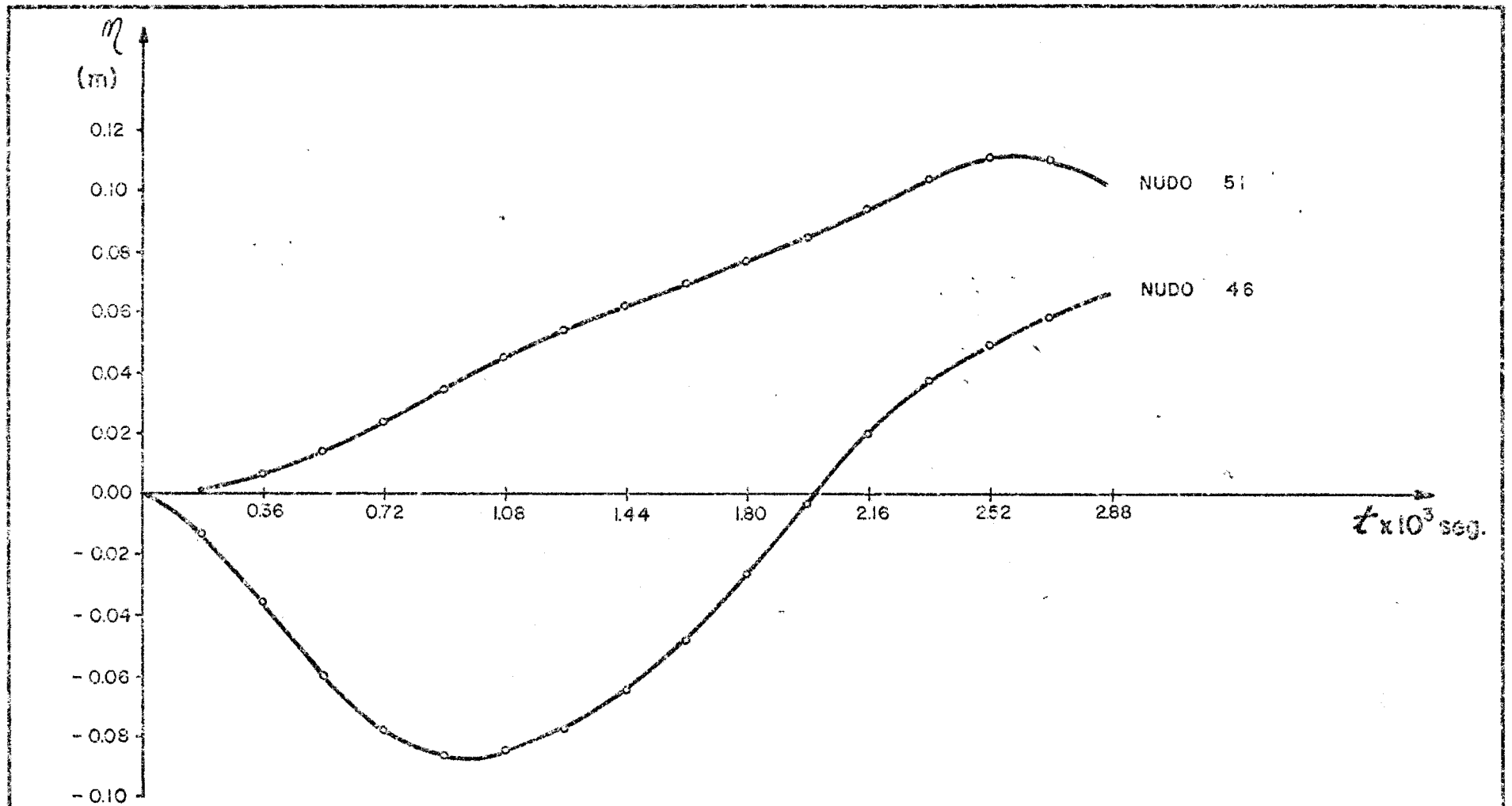


FIG.4.2.25- RIO GUAIBA. VARIACIONES CON RESPECTO AL TIEMPO DEL NIVEL DE AGUAS "POCO PROFUNDAS" EN RELACION AL NIVEL MEDIO EN LOS NUDOS 46 Y 51 DE LA MALLA DE ELEMENTOS FINITOS.

- constituye un valor adecuado (Ver fig. 4.2.17):
- e) El número de puntos de integración que se debe tomar en el proceso de integración numérica para generar las matrices de los elementos, es una cuestión que merece cuidados en caso de que el orden de integración sea un dato de entrada, pues el tiempo de procesamiento es muy sensible con la variación del mismo (Ver fig. 4.2.9).
  - f) El número de resoluciones del sistema de ecuaciones algebraicas que el método de elementos finitos genera, aumenta a medida que aumenta el intervalo de tiempo (Ver fig.4.2.5 y fig. 4.2.7).
  - g) Los términos convectivos pueden despreciarse sin afectar mayormente los resultados, si las velocidades son pequeñas y la topografía del fondo es uniforme (Ver fig.4.2.14 y fig. 4.12.15).

El ejemplo 4 tiene como objetivo, entre otros, el de mostrar la influencia de la fricción en el fondo, que tiene un efecto amortiguante para las variaciones en el tiempo de las elevaciones de la superficie libre (Ver fig. 4.2.21), y la importancia que la aceleración de Coriolis puede tener en ciertos casos, como el del ejemplo citado, donde produce movimientos transversales, a pesar de que el viento está dirigido longitudinalmente (Ver fig.4.2.22).

Finalmente, el ejemplo 5 demuestra la factibilidad de aplicar el modelo a casos reales, con condiciones de borde bastante complejas.

#### 4.4 - Conclusiones

Todos los ejemplos presentados en este trabajo cumplen con el objetivo de demostrar la aplicabilidad del modelo de elementos finitos para simular procesos físicos de movimiento de sistema de aguas "poco profundas", debidos a la acción de mareas y vientos.

Se han obtenido razonables predicciones de niveles y velocidades, para problemas simples de solución analítica conocida, y resultados perfectamente compatibles en otros ejemplos más complejos.

Por otro lado, el empleo de las facilidades del

sistema HYDRO, torna sumamente sencilla la comunicación con el computador del usuario que se propone a analizar y resolver algún problema más o menos complejo de Hidrodinámica. La potencialidad de este Lenguaje Orientado para Hidrodinámica Computacional podrá ser apreciada a través de lectura del Manual que indica la manera de usar los diferentes comandos.

Queda entonces abierta la posibilidad de emplear el modelo formulado para problemas de interés práctico, entre los cuales adquieren gran prioridad aquellos relativos a circulación y polución en el "Rio Guaiba" y "Lagoa dos Patos", que podrán ser abordados una vez que se concluya con la recolección y análisis de los datos necesarios para tal fin.

## APENDICE I

### Conceptos y ecuaciones básicas de la Mecánica de los fluidos

#### A-I.1 - Formulaciones de Lagrange y de Euler. Conceptos básicos

Algunas propiedades que interesan en el estudio de los fluidos, tales como velocidad, presiones, temperaturas, etc., son funciones de posición y de tiempo.

Existen dos maneras de describir el movimiento, por lo que existen dos formas de expresar las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de los fluidos.

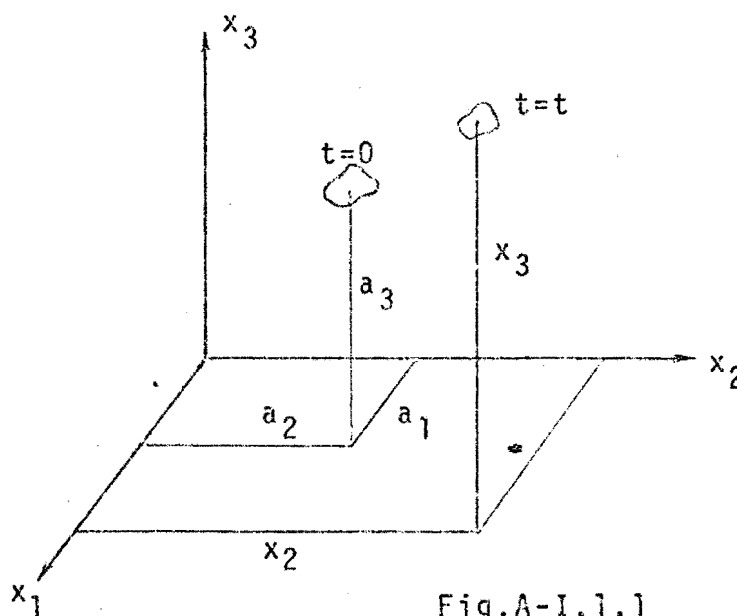


Fig.A-I.1.1

En la descripción de Lagrange, que corresponde a la de un observador moviéndose junto con la partícula, las variables independientes son el tiempo y las coordenadas iniciales  $a_i$ . Es decir que una propiedad cualquiera  $f$  y las coordenadas espaciales  $x_i$  pueden expresarse así (Ver fig.A-I.1.1):

$$f = f(a_1, a_2, a_3, t)$$

$$x_i = a_i + u_i(a_1, a_2, a_3, t) \quad (i=1,2,3)$$

(A-I.1.1)



donde  $u_i$  son las componentes ortogonales del desplazamiento.

Esta formulación, que es adecuada en el estudio de los sólidos, no es apta para fluidos ya que éstos experimentan grandes deformaciones. Para estos casos conviene desarrollar la descripción de Euler, que corresponde a un observador fijo en un sistema de referencia también fijo en el espacio, donde se toma tiempo y coordenadas espaciales como variables independientes. Es decir que:

$$f = f(x_1, x_2, x_3, t) \quad (\text{A-I.1.2})$$

$$a_i = x_i - u_i(x_1, x_2, x_3, t) \quad (i = 1, 2, 3)$$

Se supone que la variable  $f$  es una función continua asociada al punto  $(x_i, t)$ . Durante el incremento de tiempo  $\Delta t$ , el punto material se mueve a  $x_i + \Delta x_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) y la variable adquiere el valor  $f + \Delta f$ . Tomando el primer término de la serie de Taylor expandida en torno a  $(x_i, t)$  resulta, usando la notación indicial de suma:

$$\Delta f = \delta f = \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\text{A-I.1.3})$$

Haciendo la relación  $\Delta f / \Delta t$  en el límite para  $\Delta t \rightarrow 0$  se obtiene:

$$\frac{Df}{Dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} \quad (\text{A-I.1.4})$$

Esta expresión es denominada derivada material o de Stokes.

Es necesario destacar que en este capítulo se hará uso intensivo de la notación indicial de suma según la cual dos índices repetidos en un mismo miembro indican suma (salvo indicación en contrario).

Definiendo  $v_i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x_i}{\Delta t} = \frac{Dx_i}{Dt}$  ( $i=1, 2, 3$ ), donde  $v_i$  son las componentes ortogonales del vector velocidad de la partícula, la expresión (A-I.1.3) puede escribirse de la siguiente forma:

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\text{A-I.1.5})$$

En (A-I.1.5) el primer término se llama "derivada local" (variación de  $f$  con respecto al tiempo, estando la partícula fija en un punto) y los restantes se denominan "términos convectivos" (que se anulan si no hay movimiento).

En la descripción Lagrangiana, que es útil para pequeñas deformaciones,  $f = f(a_i, t)$  y  $\delta f$  se reduce a  $\delta f = \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t$  ya que las coordenadas iniciales del punto permanecen constantes. La derivada material y local coinciden, de manera que:

$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t}$  y  $v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}$ , donde  $u_i$  son las componentes ortogonales del desplazamiento.

La derivada material de una expresión integral se puede expresar así:

$$\frac{D}{Dt} \int_V f \rho dV = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \left( \int_V \rho f dV \right)}{\Delta t} \quad (\text{A-I.1.5})$$

donde:  $f$ : función escalar o vectorial que representa alguna propiedad.

$\rho$ : densidad.

$V$ : volumen de control, viajando a una velocidad prescripta.

Cualquier incremento de (A-I.1.5) está compuesto del incremento de  $f$  dentro del volumen de control más el flujo de  $f$  dirigido hacia afuera debido al transporte de masa a través de la superficie de control. Para una velocidad  $\vec{v}$  actuando en un elemento de superficie de control, el flujo por unidad de tiempo a través de  $dS$  viene dado por:

$$(f\rho)v_n dS = (f\rho)v_i \alpha_{ni} dS \quad (i=1, 2, 3) \quad (\text{A-I.1.6})$$

donde  $v_n$  es la velocidad normal y  $\alpha_{ni}$  son los cosenos directores de las componentes de la velocidad con respecto a la normal.

Luego la derivada material (A-I.1.5) puede escribirse de la siguiente manera:

$$\frac{D}{Dt} \int_V f \rho dV = \int_V \frac{\partial (f \rho)}{\partial t} dV + \int_S (f \rho) v_i \alpha_{ni} dS \quad (\text{A-I.1.7})$$

Aplicando el teorema de Gauss a la integral de superficie en (A-I.1.7) se obtiene:

$$\frac{D}{Dt} \int_V f \rho dV = \int_V \left\{ \frac{\partial (f \rho)}{\partial t} + \frac{\partial (f \rho v_i)}{\partial x_i} \right\} dV \quad (\text{A-I.1.8})$$

La (A-I.1.8) es la expresión del teorema del transporte de Reynolds; ella da el comportamiento de una integral de volumen en el caso en que la integral y el volumen en el que se integra varían con el tiempo.

#### A-I.2 - Conservación de masa

Sea un volumen de control  $V$ , donde la masa está dada por:

$$M = \int_V \rho dV, \quad \text{donde } \rho \text{ es función de espacio y tiempo, es decir}$$

$$\rho = \rho(x_i, t).$$

Si no se crea ni destruye masa en  $V$  se tiene que:

$$\frac{DM}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_V \rho dV = 0. \quad (\text{A-I.2.1})$$

De la expresión (A-I.1.8) surge que:

$$\int_V \left( \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) dV = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\text{A-I.2.2})$$

Siendo el volumen arbitrario, se puede escribir

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad \bar{0} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{A-I.2.3})$$

Las fórmulas (A-I.2.3) son dos formas de presentar la ecuación de la continuidad. Para este caso la (A-I.1.8) se reduce a:

$$\frac{D}{Dt} \int_V f \rho dV = \frac{Df}{Dt} \rho dV = \int_V \left( \frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \rho dV \quad (i=1,2,3) \quad (A-I.2.4)$$

### A-I.3 - Relaciones de equilibrio. Ecuaciones de "momentum" o cantidad de movimiento

Se considera un volumen  $V$  al tiempo  $t$ . Las acciones externas están representadas por las fuerzas de superficie  $\vec{p}$  y las de volumen  $\vec{b}$ . (Ver Fig. A-I.3.1).

Para que exista equilibrio la variación de la cantidad de movimiento debe ser igual a la suma de las fuerzas exteriores.

Si se tiene en cuenta la conservación de la masa (Ec(A-I.1.8)) la cantidad de movimiento puede ser escrita así:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \vec{v} dV = \int_V \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} dV \quad (A-I.3.1)$$

El equilibrio requiere que:

$$\int_V \rho \vec{b} dV + \int_S \vec{p} dS = \int_V \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} dV \quad (A-I.3.2)$$

La (A-I.3.2) no es más que la ley de Newton, donde  $D\vec{v}/Dt$  es la aceleración.

Otra condición de equilibrio es que el momento total de la cantidad de movimiento sea igual a la suma de los momentos de las fuerzas exteriores, vale decir:

$$\int_V \rho (\vec{r} \times \vec{b}) dV + \int_S \rho (\vec{r} \times \vec{p}) dS = \int_V \rho (\vec{r} \times \frac{D\vec{v}}{Dt}) dV \quad (A-I.3.3)$$

La expresión (A-I.3.2) representa un conjunto de ecuaciones escalares que se resumen en:

$$\int_V \rho b_k dV + \int_S p_k dS = \int_V \rho \frac{Dv_k}{Dt} dV \quad (k=1,2,3) \quad (A-I.3.4)$$

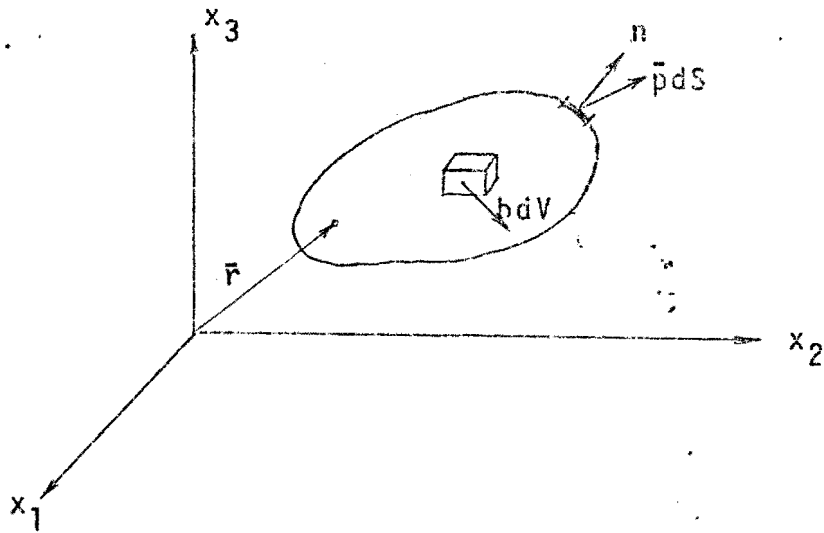


Fig. (A-I.3.1)

Sea  $\vec{\sigma}_j$  la tensión que actúa en la cara cuya normal es el eje  $x_j$  (Ver fig. A-I.3.2).

La representación en componentes cartesianas es:

$$\vec{\sigma}_j = \sigma_{jk} \vec{i}_k \quad (k, j = 1, 2, 3).$$

Por otro lado las leyes de transformación vienen dadas por:

$$\vec{\sigma}_n = \alpha_{nj} \vec{\sigma}_j = \alpha_{nj} \sigma_{jk} \vec{i}_k; \quad \alpha_{nj} = \cos(n, x_j) \quad (k, j = 1, 2, 3) \quad (\text{A-I.3.5})$$

$$\sigma_{nn} = \vec{\sigma}_n \vec{i}_n = \alpha_{nj} \alpha_{nk} \sigma_{jk}$$

$$\sigma_{ns} = \vec{\sigma}_n \vec{i}_s = \alpha_{ni} \alpha_{sk} \sigma_{jk} \quad (\text{A-I.3.6})$$

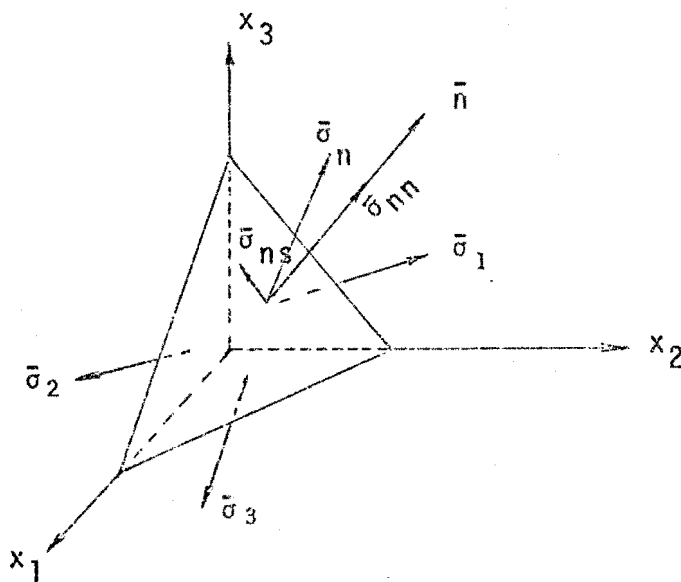


Fig. A-I.3.2

En la superficie de borde  $S$  debe ser:

$$\vec{\sigma}_n = \vec{p} \quad (\text{A-I.3.7})$$

A partir de (A-I.3.4), usando (A-I.3.5), (A-I.3.7) y la fórmula de Gauss se obtienen las ecuaciones de equilibrio y las condiciones de contorno, las que son expresadas escalarmente, así:

$$\frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x_j} + \rho b_k = \rho \frac{Dv_k}{Dt} \quad \text{en } V \quad (j, k = 1, 2, 3) \quad (\text{A-I.3.8})$$

$$p_k = \sigma_{nj} \quad \text{en } S$$

Con la (A-I.3.3), luego de aplicar la (A-I.3.8), se concluye que:  $\sigma_{jk} = \sigma_{kj}$  en  $V$

Si en (A-I.1.7) se hace  $f = \vec{v}$ , después de emplear (A-I.1.6), se obtiene:

$$\frac{D}{Dt} \int_V (\vec{v}\rho) dV = \int_V \frac{\partial (\vec{v}\rho)}{\partial t} dV + \int_S (\vec{v}\rho) v_n dS \quad (\text{A-I.3.9})$$

Haciendo  $f = \vec{v}$  en (A-I.2.4) se llega a la misma ecuación que en (A-I.3.1).

Empleando (A-I.3.1), (A-I.3.2) y (A-I.3.9) se encuentra la siguiente expresión:

$$\int_V \rho \vec{b} dV + \int_S \vec{p} dS = \int_V \frac{\partial (\vec{v}\rho)}{\partial t} dV + \int_S (\vec{v}\rho) v_n dS \quad (\text{A-I.3.10})$$

El primer término del segundo miembro es la variación local de la cantidad de movimiento ("momentum") y el segundo término es el flujo de la cantidad de movimiento ("momentum") dirigido hacia el exterior del volumen  $V$  a través de la superficie  $S$ .

De (A-I.3.10) se deducen las siguientes ecuaciones escalares:

$$\frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x_k} + \rho b_k = \frac{\partial (\rho v_k)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_j v_k) \quad (j, k = 1, 2, 3) \quad (\text{A-I.3.11})$$

Las ecuaciones (A-I.3.11) se denominan ecuaciones de "momentum" o de cantidad de movimiento.

Las componentes de tensión en fluidos pueden separarse en términos de fricción y términos de presión. Así resulta:

$$\sigma_{jk} = \tau_{jk} - p\delta_{jk} \quad (j,k = 1,2,3) \quad (\text{A-I.3.12})$$

donde  $\delta_{jk}$  es el delta de Kroenecker.

Los términos  $\tau_{ij}$  constituyen los componentes viscosos. En caso de no ser considerados, el fluido es no viscoso o invíscido.

Sustituyendo la (A-I.3.12) en la (A-I.3.11) se obtiene las ecuaciones de "momentum" o de cantidad de movimiento expresadas en la siguiente forma:

$$\frac{\partial \tau_{jk}}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_k} + \rho b_k = \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_k) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j v_k) \quad (j,k=1,2,3) \quad (\text{A-I.3.13})$$

#### A-I.4 - Relaciones entre variación de deformaciones en el tiempo y velocidades

La resistencia interna de un fluido al movimiento depende de la variación en el tiempo de las deformaciones; éstas pueden ser de dos tipos:

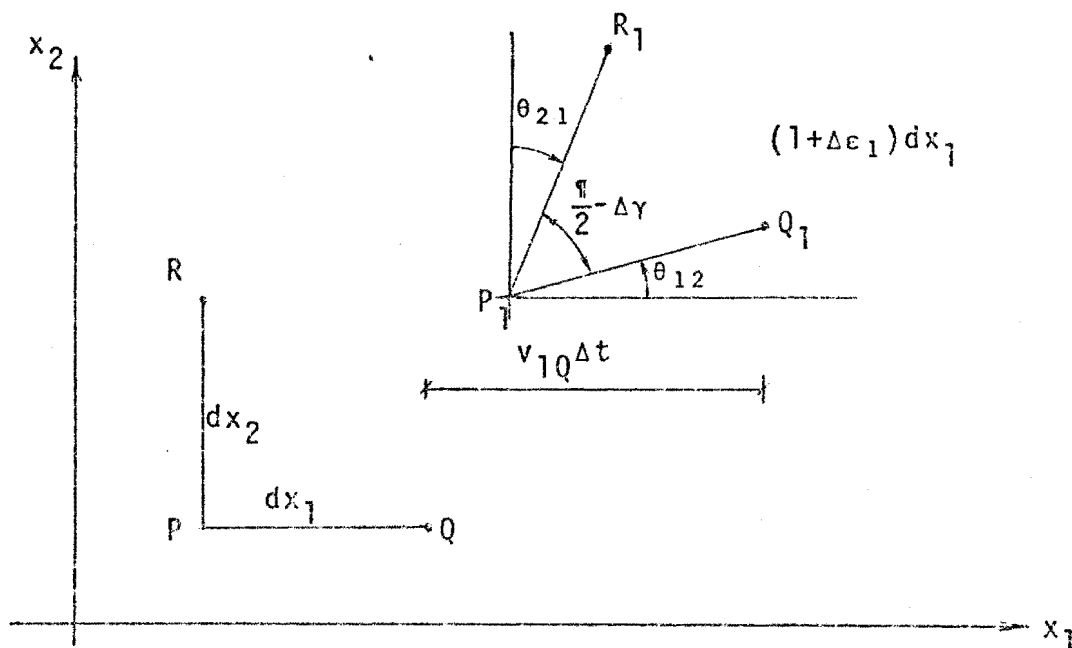


Fig. A-I.4.1

- a) Extensionales: variación relativa en la longitud de un elemento diferencial de línea.  
 b) Cortantes: variación del ángulo entre dos líneas previamente ortogonales.

Se considerará inicialmente el caso bidimensional, generalizándose luego las expresiones obtenidas para el caso tridimensional.

En la fig. A-I.4.1 se observa la posición inicial (tiempo  $t$ ) y la deformada (tiempo  $t+\Delta t$ ) de dos elementos diferenciales de línea.

Un elemento se traslada, rota y tiene un incremento (positivo o negativo) de su longitud y que se denominará  $\Delta \epsilon$ .

La variación en el tiempo de las deformaciones extensionales para un elemento como el  $dx_1$  es:

$$\frac{D}{Dt} (dx_1) = \dot{\epsilon} dx_1; \quad \dot{\epsilon} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \epsilon}{\Delta t} \quad (\text{A-I.4.1})$$

Es posible demostrar a través de consideraciones geométricas que

$$\dot{\epsilon}_1 = \frac{\partial v_1}{\partial x_1}; \quad \dot{\epsilon}_2 = \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \quad (\text{A-I.4.2})$$

La variación volumétrica es:

$$\frac{D}{Dt} (dV) = \dot{\epsilon}_v dV \quad (\text{A-I.4.3})$$

Para el caso tridimensional se obtiene:

$$\dot{\epsilon}_v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \epsilon_v}{\Delta t} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \text{div } \vec{v} \quad (\text{A-I.4.4})$$

De la ecuación de la conservación de la masa se deduce lo siguiente:

$$\frac{D}{Dt} (\rho dV) = 0 \rightarrow \frac{D\rho}{Dt} = -\rho \dot{\epsilon}_v = -\frac{\partial v_i}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\text{A-I.4.5})$$

Luego:



$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i) \quad (i = 1, 2, 3)$$

Si  $\dot{\epsilon}_v = 0$  el fluido es incompresible. En ese caso  $D\rho/Dt=0$ .

Las deformaciones cortantes están dadas por  $\gamma = \theta_{12} + \theta_{21}$ . La derivada material será entonces:

$$\dot{\gamma}_{12} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \gamma}{\Delta t} = \frac{D}{Dt} (\theta_{12} + \theta_{21}) \quad (\text{A-I.4.6})$$

Evaluando las derivadas de  $\theta$  resulta:

$$\dot{\gamma}_{12} = \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \quad (\text{A-I.4.7})$$

Se introducen a continuación los términos  $e_{ij}$ , tales que:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (\text{A-I.4.8})$$

Refiriendo las variaciones de las deformaciones con el tiempo a las  $e_{ij}$  se tiene:

$$\dot{\epsilon}_i = e_{ii} \text{ (sin suma); } \quad \dot{\epsilon}_v = \dot{\epsilon}_v = e_{11} + e_{22} + e_{33}; \quad \dot{\gamma}_{ij} = e_{ij} + e_{ji} = 2e_{ij} \quad (\text{A-I.4.9})$$

Si  $\dot{\gamma} = 0$  las líneas permanecen ortogonales, en ese caso  $\dot{\theta}_{12} = \omega_3$  y  $\dot{\theta}_{21} = -\omega_3$ , donde  $\omega_3$  es la velocidad angular en torno al eje  $x_3$ . La diferencia entre  $\dot{\theta}_{12}$  y  $\dot{\theta}_{21}$  puede ser considerada como una velocidad angular media alrededor del eje  $x_3$ .

Se introduce un tensor cortante  $\omega_{ij}$  tal que:

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (\text{A-I.4.10})$$

$i \neq j$

Una permutación cíclica de los subíndices de la velocidad angular media en torno a los tres ejes, permite obtener:

$$\omega_{12} \rightarrow \omega_3, \quad \omega_{23} \rightarrow \omega_1, \quad \omega_{31} \rightarrow \omega_2$$

El conjunto  $\omega_{ij}$  es conocido como "tensor de vorticidad" y las componentes contraídas constituyen el vector de vorticidad  $\vec{\omega}$ , el cual puede ser expresado de la siguiente manera:

$$\vec{\omega} = \omega_i \vec{r}_i = \frac{1}{2} \text{rot}(\vec{v}) = \frac{1}{2} \nabla \times \vec{v} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\text{A-I.4.11})$$

Si  $\omega_{ij} = 0$  el flujo es irrotacional y se cumple que:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \quad (i, j = (1, 2)(2, 3)(3, 1)) \quad (\text{A-I.4.12})$$

La expresión (A-I.4.12) requiere que el vector velocidad sea el gradiente de una función  $\phi$ , tal que:

$$\vec{\omega} = 0 \rightarrow \vec{v} = \vec{\nabla} \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \vec{r}_j \quad (j = 1, 2, 3) \quad (\text{A-I.4.13})$$

La función  $\phi$  puede interpretarse como un potencial de velocidad. Si el flujo es irrotacional las ecuaciones que gobiernan los flúidos se simplifican bastante.

#### A-I.5 - Primer principio de la Termodinámica. Densidad de energía interna. Función de disipación viscosa. Ecuación de estado.

El primer principio de la termodinámica expresa, en una posición de equilibrio, el requerimiento para el equilibrio de energía en un sistema. Se lo puede escribir de la siguiente manera:

$$W + Q = U + E_c \quad (\text{A-I.5.1})$$

donde:

W: trabajo realizado por las fuerzas externas.

Q: cantidad de calor que entra al sistema.

U: incremento de la energía interna.

$E_c$ : incremento de la energía cinética.

Es fácil comprobar que:

$$\frac{DW}{Dt} + \frac{DQ}{Dt} = \frac{DU}{Dt} + \frac{DE_c}{Dt} \quad (\text{A-1.5.2})$$

Expandiendo los términos de (A-1.5.2) se tiene:

$$\frac{DW}{Dt} = \int_V \rho b_i v_i dV + \int_S p_i v_i dS \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\text{A-1.5.3})$$

$$\frac{DQ}{Dt} = \int_V f_p dV + \int_S -q_n dS = \int_V f_p dV + \int_S -\alpha_{ni} q_i dS$$

donde:

$q_n$ : flujo de calor dirigido hacia afuera del sistema de volumen  $V$  a través de la superficie  $S$ .

$f$ : fuente de calor distribuida, por unidad de masa.

$q_i$ : flujo de calor a través de una cara cuya normal es  $x_i$ .

$\alpha_{ni}$ :  $\cos(n, x_i)$

Utilizando la (A.I.2.4) para expandir derivadas materiales surge que:

$$\frac{DE_c}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_V \frac{1}{2} \rho (v_i)^2 dV = \int_V \rho v_i \frac{Dv_i}{Dt} dV \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\text{A-1.5.4})$$

$$\frac{DU}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_V \rho u dV = \int_V \rho \frac{Du}{Dt} dV$$

donde:

$u$ : densidad de energía interna.

Requiere que las fuerzas satisfagan las ecuaciones de equilibrio y recordando la (A-1.3.12) se tiene, después de aplicar el teorema de la divergencia, la siguiente expresión, extraída de (A-1.5.2):

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial q_i}{\partial x_i} + f_p - \rho e_v + \tau_{ij} e_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (\text{A-1.5.5})$$

Los primeros dos términos del segundo miembro son debidos a la entrada de calor al sistema; el último representa la disipación de energía mecánica que resulta de la fricción y que es una función positiva, para cualquier valor de los  $e_{ij}$ . El término  $pe_v$  representa la expansión volumétrica.

Haciendo  $du = C_p dT$ , donde  $C_p$  es el coeficiente de calor específico a presión constante,  $T$  la temperatura, y despreciando la disipación y la expansión volumétrica, la (A-I.5.5) puede escribirse:

$$\rho_0 C_p \frac{DT}{Dt} = -\frac{\partial q_i}{\partial x_i} + f_{\rho_0} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (A-I.5.6)$$

En (A-I.5.6) se considera  $\rho_0 =$  densidad constante, ya que se supone que no existe acoplamiento entre el comportamiento térmico y mecánico del fluido (Las variaciones de densidad son debidas a la expansión térmica). Esta hipótesis es muy frecuente en las aplicaciones hidráulicas, y por lo tanto se asume que el flujo satisface la relación  $f(p, \rho) = 0$  llamada ecuación barotrópica de estado.

En general se tiene las siguientes ecuaciones de estado relacionando presiones y energía interna a densidad y temperatura:

$$p = p(\rho, T); \quad u = u(\rho, T) \quad (A-I.5.7)$$

#### A-I.6 - Relaciones Constitutivas. Fluidos Newtonianos.

Se denominan fluidos newtonianos aquellos en que la relación entre las tensiones viscosas y las variaciones de las deformaciones son lineales.

Utilizando notación matricial, se define:

$$\underline{\tau}^T = \{ \tau_{11} \quad \tau_{22} \quad \tau_{33} \quad \tau_{12} \quad \tau_{23} \quad \tau_{31} \} \quad (A-I.6.1)$$

$$\underline{e}^T = \{ e_{11} \quad e_{22} \quad e_{33} \quad e_{12} \quad e_{23} \quad e_{31} \}$$

La relación entre tensiones viscosas y la variación de deformaciones puede escribirse de la siguiente manera:

$$\underline{\tau} = \underline{D} \underline{e} \quad (A-I.6.2)$$

Llamando  $\psi$  a la función de disipación mecánica

de energía, se tiene:

$$\underline{\psi} = \underline{\tau}^T \underline{e} = \underline{e}^T \underline{D} \underline{e} \quad (\text{A-I.6.3})$$

Teniendo en cuenta que  $\underline{\psi}$  es una función continua positiva definida de  $\underline{e}$ , la matriz  $\underline{D}$  es simétrica y positiva definida.

Si el fluido es isótropo,  $\underline{D}$  posee sólo dos elementos independientes, y la (A-I.6.2) se reduce a:

$$\tau_{ij} = \lambda e_v \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (\text{A-I.6.4})$$

donde  $\lambda$  y  $\mu$  son coeficientes que dependen del material.

Se define la tensión media como el promedio de las tensiones normales, es decir que:

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = -p + \frac{1}{3}(\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}) \quad (\text{A-I.6.5})$$

Tomando  $\sigma_m = -p$  (condición de Stokes), y utilizando la (A-I.6.4) se llega a la siguiente relación:

$$\lambda = -\frac{2}{3} \mu \quad (\text{A-I.6.6})$$

Si se desprecia la deformación volumétrica por considerarla pequeña en relación a las deformaciones cortantes, se tiene el caso de un fluido incompresible. Esta suposición conduce a la siguiente expresión:

$$\tau_{ij} \cong 2 \mu e_{ij} = \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (\text{A-I.6.7})$$

La ecuación de la continuidad se reduce a:

$$e_v = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \text{div} \vec{V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (\text{A-I.6.8})$$

#### A-I.7 - La ecuación de Navier-Stokes para fluidos Newtonianos incompresibles

El conjunto de las ecuaciones que gobiernan los fluidos newtonianos incompresibles que ha sido deducido hasta ahora pueden resumirse de la siguiente manera (se supone que no

existe acoplamiento térmico-mecánico):

Continuidad:

$$e_v = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \text{div } \vec{v} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad \text{en } V \quad (\text{A-I.7.1})$$

$$\left. \begin{aligned} v_n &= \bar{v}_n \\ v_s &= \bar{v}_s \end{aligned} \right\} \text{ en } S_v \quad (\text{A-I.7.2})$$

$S_v$  : representa la superficie donde las velocidades están prescritas. Si  $S_v$  es un borde físico, como una pared por ejemplo, las componentes de la velocidad son nulas. En esta superficie se incluye también las velocidades de todos los flujos que llegan al sistema en consideración.

Equilibrio:

Si en el primer miembro de la (A-I.3.13) se sustituye  $\tau_{jk}$  por la expresión dada en (A-I.6.7) y se divide ambos miembros por la densidad  $\rho_0 = \text{cte}$ , se obtiene:

$$-\frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{p}{\rho_0} \right) + \nu \nabla^2 v_k + b_k = \frac{\partial}{\partial x_j} (v_j v_k) + \frac{\partial}{\partial t} v_k \quad \left. \begin{aligned} (j=1, 2, 3 \text{ para cada} \\ k=1, 2, 3) \text{ en } V \end{aligned} \right\} (\text{A-I.7.3})$$

donde  $\nu = \mu/\rho_0$  es la viscosidad dinámica.

$\nabla^2 =$  operador laplaciano.

$$\left. \begin{aligned} -p + 2\mu \frac{\partial v_n}{\partial n} &= \bar{p}_n \\ \mu \left( \frac{\partial v_s}{\partial n} - \frac{\partial v_n}{\partial s} \right) - v_k \frac{\partial \alpha_{nk}}{\partial x_s} &= \bar{p}_s \end{aligned} \right\} \text{ en } S_p \quad (\text{A-I.7.4})$$

$S_p$  : representa la superficie donde fuerzas de borde prescritas están actuando. Generalmente  $S_p$  es una superficie "libre" y las fuerzas que actúan sobre ella son la presión atmosférica y las provocadas por el viento.

Balace de calor en el sistema

De (A-I.5.6) se obtiene:

$$C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (v_i T) = f - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \quad (\text{A-I.7.5})$$

} en V

$$q_i = -K^m \rho_0 C_p \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (i=1,2,3) \quad (\text{A-I.7.6})$$

$$T = \bar{T} \quad \text{en } S_T$$

$$q_n = \bar{q}_n \quad \text{en } S_f$$

(A-I.7.7)

$S_T$ : superficie de borde donde la temperatura  $T$  está prescrita.

$S_f$ : superficie de borde donde el flujo de calor  $q_n$  está prescrito.

En (A-I.7.6) se ha tomado la ley de Fourier para la difusión del calor.

Las variables del problema son las componentes de la velocidad  $v_i$ , la presión  $p$  y la temperatura  $T$ ; ellas deben satisfacer las ecuaciones (A-I.7.1), (A-I.7.3) y (A-I.7.5) y las condiciones de borde correspondientes. Aunque existen suficiente número de ecuaciones para resolver un problema, debido a la existencia de términos no lineales debe recurrirse en la mayoría de los casos a esquemas numéricos de solución.

Si el fluido es barotrópico (sin acoplamiento térmico-mecánico) se tienen 10 ecuaciones (3 ecuaciones de movimiento, 1 de continuidad y 6 ecuaciones constitutivas) y 10 incógnitas (6 componentes de tensiones, 3 de velocidades y 1 de presión).

Si el fluido es compresible, presión y densidad están relacionados por la ecuación de estado.

Si se desprecia la viscosidad ( $\mu=0$ ) no puede prescribirse la presión tangencial  $\bar{p}_s$ , ni la velocidad tangencial  $\bar{v}_s$ .

Existen otras formas de representar (A-I.7.3), ya sea colocándola en función de la vorticidad  $\omega_i$  o bien relacionando presiones y variaciones de deformación volumétrica.

### A-I.8 - El principio de Bernoulli

Según la ley de Newton:  $\vec{F} = m \vec{a} = m \frac{D\vec{v}}{Dt}$

Si existe un movimiento de una posición 1 a otra 2,  $\vec{F}$  realiza un trabajo, por lo que se produce un incremento en la energía cinética. El principio de conservación de la energía requiere:

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} v dt = m \int_{t_1}^{t_2} \vec{v} \frac{D\vec{v}}{Dt} dt = m \int_{t_1}^{t_2} \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} \right) dt \quad (\text{A-I.8.1})$$

Esta ley puede aplicarse a cualquier  $\vec{F}$ . Si  $\vec{F}$  es conservativa, deriva de una función potencial, es decir que:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}\Omega, \text{ con } \Omega = \Omega(x) \quad (\text{A-I.8.2})$$

De (A-I.8.2) surge que:

$$\vec{F} \cdot \vec{v} dt = \frac{\partial \Omega}{\partial s} ds \quad (\text{A-I.8.3})$$

La (A-I.8.1) y (A-I.8.3) permiten concluir que  $\Omega + E_c$  es constante en la trayectoria de una partícula.

Si se tiene un fluido sin viscosidad e incompresible la ecuación de equilibrio puede ser expresada de la siguiente manera:

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{b} - \vec{\nabla} \left( \frac{p}{\rho_0} \right) \quad (\text{A-I.8.4})$$

Como  $\vec{b}$  es generalmente debido a la gravedad, deriva de una función potencial, luego:

$$\vec{b} = -\vec{\nabla}\Omega \Rightarrow b_k = -\frac{\partial \Omega}{\partial x_k} \quad (\text{A-I.8.5})$$

Se puede demostrar que:

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} (\vec{v} \cdot \vec{v}) - 2(\vec{v} \times \vec{\omega}) \quad (\text{A-I.8.6})$$

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \times \vec{v}$$



Con (A-I.8.6) la ecuación de equilibrio viene expresada por:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - 2(\vec{v} \times \vec{\omega}) + \vec{\nabla} H = 0 \quad (\text{A-I.8.7})$$

donde:

$$H = \frac{p}{\rho_0} + \Omega + \frac{1}{2} q^2$$

$$q^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = v_i v_i \quad (i=1,2,3)$$

Integrando (A-I.8.7) a lo largo de una trayectoria seguida por la partícula se obtiene:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - 2(\vec{v} \times \vec{\omega}) + \vec{\nabla} H \right\} \cdot \vec{v} dt = 0 \quad (\text{A-I.8.8})$$

Como  $\vec{v}$  y  $\vec{\omega}$  son ortogonales resulta  $\vec{v} \times \vec{\omega} = 0$ . Además para un flujo permanente  $\vec{v}$  y  $p$  son independientes de  $t$ , por lo tanto (A-I.8.8) queda expresado así:

$$H = \frac{p}{\rho_0} + \Omega + \frac{1}{2} (v_i v_i) = \text{cte} \quad (\text{A-I.8.9})$$

La (A-I.8.9) es válida a lo largo de una línea de corriente para flujo permanente y fluido invíscido, y es denominado Principio de Bernoulli.

Si además el flujo es irrotacional, la (A-I.8.7) se reduce a  $\vec{\nabla} H = 0$  y el principio de Bernoulli queda así:

$H = \text{constante}$  en todo el dominio para flujo permanente e irrotacional y fluido invíscido.

### A-I.9 - Turbulencia

El flujo puede dividirse en dos categorías: laminar y turbulento; a los efectos de caracterizar a ambos es necesario conocer la relación entre las fuerzas de inercia y las fuerzas de viscosidad, la que define el número de Reynolds. Es decir:  $R_e = \text{fuerza de inercia} / \text{fuerzas de viscosidad}$ ; si  $R_e < 10^{-2}$  las fuerzas de inercia pueden ser despreciadas; entre  $10^{-2}$  y

$10^3$  ambas fuerzas deben ser consideradas y para  $Re > 10^3$  las fuerzas de viscosidad no se tienen en cuenta.

Si el número de Reynolds es grande, el flujo ya no es más laminar (donde las líneas de corriente no se cortan unas a otras) y las partículas tienden a moverse de una manera aleatoria, en este caso el flujo es turbulento y debe analizarse en términos de velocidades y presiones medias usando conceptos estadísticos.

En el flujo turbulento, las variables instantáneas son interpretadas como la suma de una media más una desviación aleatoria. Entonces se puede escribir:

$$v = v' + v''; \quad p = p' + p'' \quad T = T' + T'' \quad (\text{A-I.9.1})$$

donde ( )' representa la media y ( )'' la desviación.

Si se introduce (A-I.9.1) en la ecuación de equilibrio instantáneo (A-I.3.13) aparecen términos adicionales relativos a las desviaciones. De esta manera resulta:

$$-\frac{\partial p'}{\partial x_k} + \rho_0 b_k + \frac{\partial}{\partial x_j} (\langle \tau_{jk}^f \rangle - \rho_0 \langle v_j'' v_k'' \rangle) = \rho_0 \frac{\partial}{\partial x_j} (v_j' v_k') + \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} v_k' \quad (\text{A-I.9.2})$$

donde  $\langle \rangle$  representa la media ensamblada y  $\tau_{jk}^f$  denota las tensiones viscosas.

En (A-I.9.2) se ha aplicado la siguiente definición:

$$\langle f'g \rangle = f' \langle g \rangle; \quad \langle f'' \rangle = 0 \quad (\text{A-I.9.3})$$

Las desviaciones de segundo orden son interpretadas como tensiones y se denominan tensiones de Reynolds. Por lo tanto en (A-I.9.2) se puede escribir que:

$$\tau = \tau^f + \tau^t$$

$$\tau_{jk}^t = -\rho_0 \langle v_j'' v_k'' \rangle \quad (\text{A-I.9.4})$$

La función de disipación de energía mecánica en el caso de incluir la turbulencia se puede expresar de la sigui

ente forma:

$$(\tau_{ij}^f + \tau_{ij}^t) e_{ij} = \psi^f + \psi^t \quad (\text{A-I.9.5})$$

En (A-I.9.5) se requiere que  $\psi^t$  sea una función continua cuadrática y positiva definida para valores arbitrarios de las medias ensambladas  $e_{ij}$ .

Usando la notación anterior se puede relacionar tensiones y variación de deformaciones por una expresión del tipo  $\tau^t = \underline{D}^t \underline{e}$ , donde  $\underline{D}^t$  es una matriz simétrica y positiva definida (debido a los requerimientos para  $\psi^t$ ).

El problema reside que mientras las tensiones viscosas son dependientes del material, las de Reynolds son propiedades del flujo, por lo que  $\underline{D}^t$  depende del campo de velocidades. Este problema de  $\underline{D}^t$  no ha sido todavía totalmente solucionado.

Para fluidos isotrópicos se toma frecuentemente:

$$\tau_{ij}^t = 2\rho_0 n e_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (\text{A-I.9.6})$$

donde  $n$  es la viscosidad turbulenta ("eddy" viscosity).

Para estudios de circulación en lagos y problemas de ingeniería de costas, se toman términos para  $\underline{D}^t$  sin acoplar deformaciones extensionales y cortantes. Esta forma ortotrópica que se debe a la diferencia entre el flujo horizontal y vertical, aunque más apropiada, tiene el defecto de que valores acertados de los coeficientes no han sido hallados.

En definitiva, para el caso de un flujo turbulento, las ecuaciones y condiciones de borde que han sido formuladas anteriormente quedan expresadas en esta forma:

Continuidad:

$$\frac{\partial v_i^t}{\partial x_i} = 0 \quad (i=1,2,3) \quad \text{en } V \quad (\text{A-I.9.7})$$

Equilibrio:

$$-\frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{p^t}{\rho_0} \right) + \nu \nabla^2 v_k^t + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tau_{jk}^t}{\partial x_j} + b_k = \frac{\partial}{\partial x_j} (v_j^t v_k^t) + \frac{\partial v_k^t}{\partial t} \quad \text{en } V \quad (\text{A-I.9.8})$$

$$-p' + \alpha_{nj} \alpha_{nk}^t \tau_{jk}^t + 2\mu \frac{\partial v_n'}{\partial n} = \bar{p}_n \quad \text{en } S_p \quad (\text{A-I.9.9})$$

$$\alpha_{nj} \alpha_{sk}^t \tau_{jk}^t + \mu \left( \frac{\partial v_s'}{\partial n} - \frac{\partial v_n'}{\partial s} - v_k' \frac{\partial \alpha_{nk}}{\partial x_s} \right)$$

Balance de calor en el sistema:

Para el caso de flujo turbulento la (A-I.7.5) se expresa:

$$\rho_o C_p \frac{DT'}{Dt} = \rho_o f - \frac{\partial}{\partial x_i} (q_i' + \rho_o C_p \langle v_i'' T'' \rangle) \quad (\text{A-I.9.10})$$

El flujo se expande según la ley de Fourier

$$q_i' = -K^m \rho_o C_p \frac{\partial T'}{\partial x_i} \quad (\text{A-I.9.11})$$

donde  $K^m$  es el coeficiente de difusión molecular.

Además los términos debido a desviación de la media son tratados de igual forma:

$$\langle v_i'' T'' \rangle = -K_{ij}^t \frac{\partial T'}{\partial x_j} \quad (\text{A-I.9.12})$$

donde  $K_{ij}^t$  es un coeficiente de difusión molecular debido a turbulencia.

Combinando  $K_{ij}^t$  y  $K^m$  se llega a que (A-I.9.10) tiene la siguiente forma:

$$\frac{\partial T'}{\partial t} = \frac{f}{C_p} + \frac{\partial}{\partial x_i} (K_{ij} \frac{\partial T'}{\partial x_j}) \quad \text{en } V \quad (\text{A-I.9.13})$$

donde  $K_{ij} = K^m + K_{ij}^t$

$T = \bar{T}$  en  $S_T$

$$q_n = -\rho_o C_p \alpha_{ni} (K_{ij} \frac{\partial T'}{\partial x_j}) \quad \text{en } S_f \quad (\text{A-I.9.14})$$

En flujo turbulento  $K^m$  es pequeño en relación a  $K_{ij}^t$  y aunque éste es una propiedad del flujo y no del fluido en muchos casos se lo toma constante e isotrópico, vale decir que:

$$K_{ij}^t = K \delta_{ij} \quad (\text{A-I.9.15})$$

## APENDICE II

### Movimiento en un sistema de referencia no inercial.

#### La fuerza de Coriolis

##### A-II.1 - Introducción

Siempre es posible referir las ecuaciones de movimiento a ejes inerciales; sin embargo en esos casos las ecuaciones pueden tornarse sumamente complicadas, y resulta más fácil referirla a ejes que no son inerciales.

Para describir el movimiento de una partícula sobre o cerca de la Tierra es lógico suponer un sistema de referencia fijo con respecto a ella. Pero, se sabe que el planeta tiene complicados movimientos (compuestos de diferentes rotaciones y aceleraciones) con respecto a un sistema fijo identificado con las estrellas "fijas". Por lo tanto el sistema de referencia fijo con respecto a la Tierra tiene un caracter no inercial.

A pesar de todo, muchos problemas pueden resolverse ignorando este hecho, obteniéndose resultados con suficiente grado de seguridad; pero hay otros importantes efectos que deben ser tenidos en cuenta y que resultan de la naturaleza no inercial de la Tierra como sistema de referencia.

##### A.II.2 - Sistema de coordenadas rotante

Sean (Ver fig.A-II.2.1):

$X_i^1$ : coordenadas del sistema fijo o inercial ( $i = 1, 2, 3$ )

$X_i$ : coordenadas del sistema rotante. ( $i = 1, 2, 3$ )

$X_1^1, X_2^1, X_3^1$ : ejes del sistema fijo o inercial.

$X_1, X_2, X_3$ : ejes del sistema rotante.

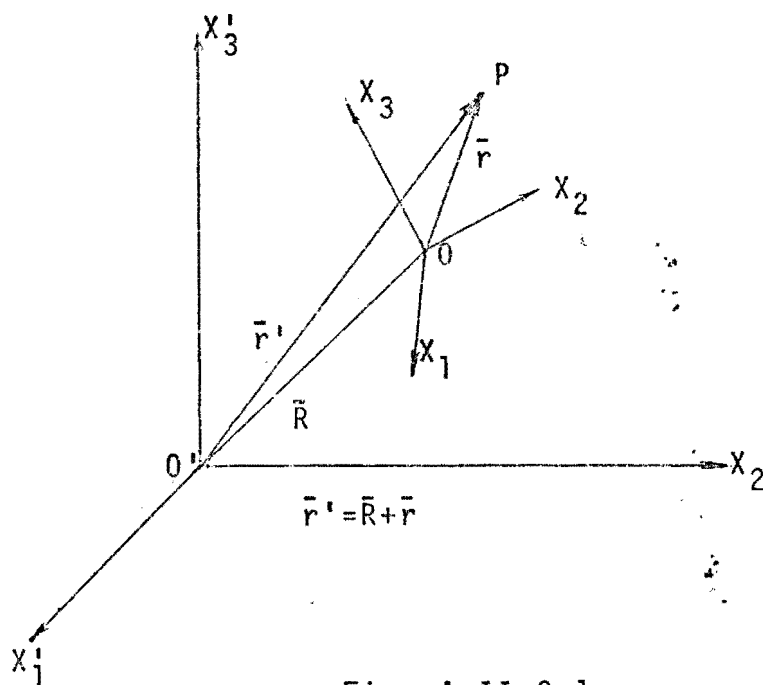


Fig. A-II.2.1

P: partícula de masa  $m$ .

En el estudio de la dinámica de las partículas, se demuestra que:

$$\bar{V}_f = \bar{V} + \bar{v}_r + \bar{\omega} \times \bar{r} \quad (\text{A-2.2.1})$$

donde:

$\bar{V}_f = \dot{\bar{r}}_f = \left(\frac{d\bar{r}'}{dt}\right)_{\text{fijo}}$  : velocidad de P relativa a los ejes fijos

$\bar{V} = \dot{\bar{R}}_f = \left(\frac{d\bar{R}}{dt}\right)_{\text{fijo}}$  : velocidad lineal del origen de los ejes móviles ( $X_1-X_2-X_3$ )

$\bar{v}_r = \dot{\bar{r}}_v = \left(\frac{d\bar{r}}{dt}\right)_{\text{rotante}}$  : velocidad de P relativa a los ejes móviles ( $X_1-X_2-X_3$ )

$\bar{\omega} \times \bar{r}$  : velocidad debida a la rotación de los ejes móviles ( $X_1-X_2-X_3$ ).

$\bar{\omega}$  : velocidad angular de los ejes móviles ( $X_1-X_2-X_3$ ).

### A-II.3 - La fuerza de Coriolis

La ecuación de Newton viene dada por:

$$\bar{F} = m \bar{a} \quad (\text{A-2.3.1})$$

donde:

$\bar{F}$ : fuerza;  $m$ : masa de la partícula;  $\bar{a}$ : aceleración.

La (A-2.3.1) es sólo válida para ejes inerciales de referencia. Por lo tanto la expresión para una partícula puede ser obtenida de:

$$\bar{F} = m \bar{a}_f = m \dot{\bar{V}}_f = m \left( \frac{d\bar{V}_f}{dt} \right)_{\text{fijo}} \quad (\text{A-2.3.2})$$

Diferenciando la (A-2.2.1) y particularizando para el caso de velocidad angular constante (o sea con  $\dot{\omega}=0$ ) se tiene:

$$\bar{F} = m \ddot{\bar{R}}_f + m \left( \frac{d\bar{v}_r}{dt} \right)_{\text{fijo}} + m \bar{\omega} \times \left( \frac{d\bar{r}}{dt} \right)_{\text{fijo}} \quad (\text{A-2.3.3})$$

Es fácil observar que para cualquier vector arbitrario  $\bar{Q}$  (tomando como base la fig. A-II.2.1) se cumple que:

$$\left( \frac{d\bar{Q}}{dt} \right)_{\text{fijo}} = \left( \frac{d\bar{Q}}{dt} \right)_{\text{rotante}} + \bar{\omega} \times \bar{Q} \quad (\text{A-2.3.4})$$

Aplicando para el caso de  $\bar{v}_r$  y de  $\bar{r}$  se tiene:

$$\left( \frac{d\bar{v}_r}{dt} \right)_{\text{fijo}} = \left( \frac{d\bar{v}_r}{dt} \right)_{\text{rotante}} + \bar{\omega} \times \bar{v}_r = \bar{a}_r + \bar{\omega} \times \bar{v}_r \quad (\text{A-2.3.4})$$

donde  $\bar{a}_r$  es la aceleración en el sistema rotante.

$$\left( \frac{d\bar{r}}{dt} \right)_{\text{fijo}} = \left( \frac{d\bar{r}}{dt} \right)_{\text{rotante}} + \bar{\omega} \times \bar{r} \quad (\text{A-2.3.5})$$

Combinando (A-2.3.3), (A-2.3.4) y (A-2.3.5) se obtiene:

$$\bar{F} = m \ddot{\bar{R}}_f + m \bar{a}_r + m \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) + 2m \bar{\omega} \times \bar{v}_r \quad (\text{A-2.3.6})$$

En (A-2.3.6)  $\ddot{\bar{R}}_f$  es la aceleración del origen de las coordenadas móviles. Si se considera que el sistema no inercial sólo tiene rotaciones, o rotaciones más una velocidad uniforme respecto al sistema fijo resulta  $\ddot{\bar{R}}_f=0$  y entonces se

puede escribir:

$$\vec{F} = m\vec{a}_f = m\vec{a}_r + 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_r + m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (\text{A-2.3.7})$$

Para un observador en los ejes móviles, la fuerza efectiva en una partícula es dada por:

$$\vec{F}_{ef} = m\vec{a}_r = m\vec{a}_f - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_r \quad (\text{A-2.3.8})$$

El primer término de (A-2.3.8) es el término usual de la ecuación de Newton. La cantidad  $-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$  es la fuerza centrífuga; el signo negativo implica que esta fuerza está dirigida hacia afuera, alejándose del centro de rotación.

El tercer término,  $-2m\vec{\omega} \times \vec{v}_r$ , es la fuerza de Coriolis. Ella surge del hecho de que la partícula se mueve, pues es proporcional a  $\vec{v}_r$ , y desaparece si no hay movimiento.

Tanto la fuerza de Coriolis, como la centrífuga no son fuerzas en el sentido usual de la palabra; ellas han sido introducidas de una manera artificial, como resultado del requerimiento arbitrario que permite escribir una ecuación que se asemeja a la de Newton, y que al mismo tiempo es válida en un sistema no inercial de referencia. Es decir que así como la ecuación de Newton  $\vec{F} = m\vec{a}_f$  es válido en un sistema inercial, en un sistema rotante se escribe una expresión semejante en términos de la fuerza real ( $m\vec{a}_f$ ) de la siguiente forma:

$\vec{F}_{ef} = \vec{F}_{real} + (\text{términos no inerciales})$ , donde "términos no inerciales" son las "fuerzas de Coriolis y centrífuga".

El uso de estos términos permite usar una ecuación de movimiento que refleja la ecuación de Newton, cuando el sistema de referencia es móvil.

#### A-II.4 - Movimiento relativo de la Tierra

El movimiento de la Tierra respecto a un sistema inercial está dominado por la rotación de la misma alrededor de su eje; el efecto de los otros movimientos (revolución alrededor del sol, movimiento del sistema solar respecto a una galaxia local, etc.) son comparativamente pequeños. Por lo tanto, se puede considerar un sistema de coordenadas fijas relativa a la Tierra en movimiento de rotación pura con respec-



to a un sistema de referencia inercial y se puede aplicar la ecuación (A-2.3.8) a los problemas de movimiento en o cerca de la superficie de la Tierra.

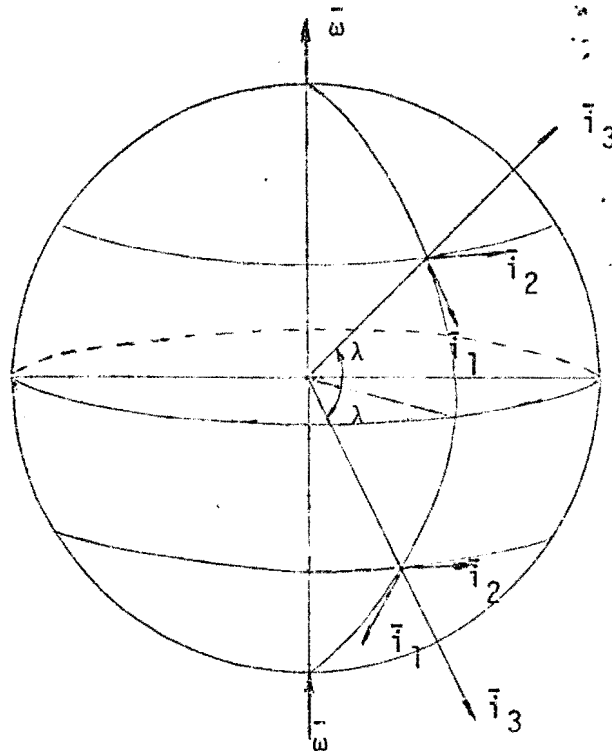


Fig. A-II.4.1

0 modo de ilustración se estudia el caso presentado en la Fig.A-2.4.1. La fuerza de Coriolis, según se ha visto anteriormente, viene dada por:

$$F_C = -2m \bar{\omega} \times \bar{v}_r$$

donde: m: masa de la partícula en estudio

$\bar{\omega}$ : velocidad de rotación de la Tierra

$\bar{v}_r$ : velocidad de la partícula en relación al sistema no inercial ( $\bar{i}_1, \bar{i}_2, \bar{i}_3$ )

El valor de la velocidad de rotación terrestres:

$$\omega = \frac{2\pi \text{ rad/día}}{86400 \text{ seg/día}} \approx 7.29 \times 10^{-5} \text{ rad/seg}$$

La aceleración de Coriolis sería:

$$\bar{a}_c = -2\bar{\omega} \times \bar{v}_r.$$

Las proyecciones de  $\bar{\omega}$  en el sistema móvil son:

Hemisferio Norte:

$$\omega_1 = \omega \cos \lambda$$

$$\omega_2 = 0$$

$$\omega_3 = \omega \operatorname{sen} \lambda$$

$\lambda$  es la latitud.

Hemisferio Sur:

$$\omega_1 = -\omega \cos \lambda$$

$$\omega_2 = 0$$

$$\omega_3 = -\omega \operatorname{sen} \lambda$$

En el caso que se estudie un sistema bidimensional las proyecciones de  $\bar{v}_r$  son:

$$v_{r1} = v_1, \quad v_{r2} = v_2, \quad v_{r3} = 0.$$

Por lo tanto:

En el Hemisferio Norte:

$$\bar{\omega} \times \bar{v}_r = \begin{vmatrix} \bar{i}_1 & \bar{i}_2 & \bar{i}_3 \\ \omega \cos \lambda & 0 & \omega \operatorname{sen} \lambda \\ v_1 & v_2 & 0 \end{vmatrix} = -v_2 \omega \operatorname{sen} \lambda \bar{i}_1 + v_1 \omega \operatorname{sen} \lambda \bar{i}_2 - v_2 \omega \cos \lambda \bar{i}_3$$

Haciendo  $f = 2\omega \operatorname{sen} \lambda = 1.458 \times 10^{-4} \operatorname{sen} \lambda$ , y considerando el caso bidimensional (es decir que  $\omega \cos \lambda v_2 \bar{i}_3 = 0$ ), se tiene:

$$\begin{cases} b_1 = \rho f v_2 \\ b_2 = -\rho f v_1 \end{cases} \quad (\text{A-2.4.1})$$

donde:

$b_1$  y  $b_2$  son fuerzas de volumen;  $f$ : coeficiente de Coriolis (que es función de la latitud).

$\rho$  = densidad o masa específica

En el Hemisferio Sur resulta:

$$\bar{\omega} \times \bar{v}_r = v_2 \omega \operatorname{sen} \lambda \bar{i}_1 - v_1 \omega \operatorname{sen} \lambda \bar{i}_2 - v_2 \omega \cos \lambda \bar{i}_3$$

Luego:

$$\begin{cases} b_1 = -\rho f v_2 \\ b_2 = \rho f v_1 \end{cases} \quad (\text{A-2.4.2})$$

APENDICE III

Matrices de masa para elementos triangulares de primer y segundo orden

I) Matriz  $\underline{M}' = \int_A \underline{\phi}\underline{\phi}^T dA$  para elementos triangulares de primer orden.

$$\underline{M}' = \frac{A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

donde A es el area del elemento.

II) Matriz  $\underline{M}' = \int_A \underline{\phi}\underline{\phi}^T dA$  para elementos triangulares de segundo orden.

$$\underline{M}' = \frac{A}{180} \begin{bmatrix} 6 & -1 & -1 & 0 & -4 & 0 \\ -1 & 6 & -1 & 0 & 0 & -4 \\ -1 & -1 & 6 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 32 & 16 & 16 \\ -4 & 0 & 0 & 16 & 32 & 16 \\ 0 & -4 & 0 & 16 & 16 & 32 \end{bmatrix}$$

donde A es el area del elemento.

## APÉNDICE IV

### Aspectos Computacionales

#### A-IV.1 - Detalles de la implementación del programa. Fórmula de recurrencia general

El programa de computación que ha sido desarrollado para el presente trabajo permite resolver las ecuaciones de aguas "poco profundas", utilizando como esquemas de integración en el tiempo el método trapezoidal (Algoritmo 3.4.3.4 del Cap III) o, alternativamente, el método de Galerkin con funciones de interpolación lineal en tiempo (Algoritmo 3.4.4.8 del Cap III).

La fórmula general que engloba ambos métodos puede escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 [M] \underline{Q}_{t+\Delta t}^{n+1} = & \left( [M-s\Delta t \underline{A}(Q_t)] \underline{Q}_t - s\Delta t \underline{P}_t - (1-s)\Delta t \underline{P}_{t+\Delta t} \right) - \\
 & - [(1-s)\Delta t \underline{A}(Q_{t+\Delta t}^*)] Q_{t+\Delta t}^* \qquad \qquad \qquad (A-IV.1)
 \end{aligned}$$

En la expresión (A-IV.1) "s" es un coeficiente que, según sea el valor asignado al mismo, permite obtener las fórmulas de recurrencia de ambos esquemas señalados anteriormente. Así si  $s = 0.5$  se trabaja con el método trapezoidal y si  $s = 1/3$ , el esquema adoptado es el de Galerkin.

Para confeccionar el programa que resuelva (A-IV.1) se siguieron los pasos que se indican a continuación:

- 1.- Entrada y control de datos
- 2.- Formar la matriz de masa para cada elemento (Ver Apéndice III).
- 3.- Ensamblar la matriz resultante para obtener la matriz de masa global  $\underline{M}$ .
- 4.- Aplicar las condiciones de borde a la matriz de masa global y almacenar las columnas correspondientes a valores pres-

criptos distintos de cero para las incógnitas.

- 5.- Descomponer la matriz de masa global (triangularización).
- 6.- Comienzo de la integración en el tiempo ( $t=0$ ).
- 7.- Calcular  $\underline{C}_1 = \{ [M - s\Delta t A(Q_t)] \underline{Q}_t - s\Delta t \underline{P}_t - (1-s)\Delta t \underline{P}_{t+\Delta t} \}$
- 8.- Comienzo del proceso iterativo ( $n=1$ ). Hacer  $\underline{Q}^n = \underline{Q}^{n-1} = \underline{Q}_t$
- 9.- Calcular  $\underline{Q}^* = w\underline{Q}^n + (1-w)\underline{Q}^{n-1}$ .  
 $w$  es un coeficiente de relajación, usado a los efectos de acelerar la convergencia del proceso iterativo.
- 10.- Calcular  $\underline{C} = \underline{C}_1 + \underline{C}_2$
- 12.- Aplicar condiciones de borde al vector de "cargas"  $\underline{C}$ .
- 13.- Proceso de sustitución inversa (back substitution) para calcular  $\underline{Q}_{t+\Delta t}^{n+1}$
- 14.- Rotar los componentes de  $\underline{Q}_{t+\Delta t}^{n+1}$  que, por imposición de las condiciones de contorno, hayan sido llevados a referirse a otro sistema distinto del constituido por los ejes globales.
- 15.- Aplicar la norma euclidiana como criterio de convergencia del proceso iterativo.

$$\frac{\sum_1^N (Q_{t+\Delta t}^{n+1} - Q_{t+\Delta t}^*)^2}{\sum_1^N (Q_{t+\Delta t}^{n+1})^2} < \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} \text{TOLERANCIA}$$

- 16.- Si el criterio elegido es mayor que la tolerancia admitida, volver al paso 9 (haciendo previamente  $\underline{Q}^{n+1} = \underline{Q}^n$ ,  $\underline{Q}^* = \underline{Q}^{n-1}$ ,  $n=n+1$ ) y repetir el proceso hasta que el criterio antes mencionado sea menor o igual que la tolerancia; en ese caso el proceso iterativo ha llegado a su fin y se continua con el paso siguiente.
- 17.- Hacer  $\underline{Q}_{t+\Delta t} = \underline{Q}_{t+\Delta t}^{n+1}$  e imprimir  $\underline{Q}_{t+\Delta t}$ .
- 18.- Si el tiempo transcurrido es menor que el tiempo determinado como límite de la integración, hacer  $t = t + \Delta t$  y volver al paso 7; se repite el proceso hasta alcanzar el límite superior de la integración; en ese caso se continúa con el paso siguiente.

## 19.- Imprimir los resultados finales.

Conviene enfatizar sobre algunos aspectos del programa esquematizado arriba, a los efectos de observar algunas de sus ventajas y las posibilidades que ofrece.

La matriz  $M$  es una matriz simétrica y del tipo banda, por lo tanto se puede almacenar sólo la parte triangular superior correspondiente al semiancho de banda (que en este caso ha sido colocada en un vector). Por otro lado sus características permiten desacoplar las variables del problema (velocidades y elevaciones de la superficie libre respecto al nivel medio), lo que implica una disminución del semiancho de banda. Finalmente debe señalarse que  $M$  sólo debe ser descompuesta (triangularizada) una sola vez, aunque el proceso de sustitución inversa debe repetirse varias veces; esta circunstancia es ventajosa en tiempo de procesamiento respecto a un esquema que en cada iteración tuviera que modificar (triangularizar) el miembro izquierdo del sistema de ecuaciones.

Puede además observarse que el vector  $C_1$ , que forma parte del miembro derecho, permanece inalterado durante el proceso iterativo, el cual sólo modifica el vector  $C_2$ .

Los datos de entrada que deben ser suministrados son los siguientes:

- 1) Coordenadas de los nudos.
- 2) Lista de nudos que inciden en cada elemento.
- 3) Valores prescritos de las incógnitas en los bordes. Si se trata de valores variando armónicamente con el tiempo deben darse frecuencias circulares y amplitudes. Si dichas incógnitas están referidas a ejes diferentes de los globales, debe suministrarse los ángulos correspondientes.
- 4) Constantes del problema: aceleración de la gravedad y coeficiente de tensión de viento (este último valor se da si existe viento).
- 5) Propiedades de cada elemento: coeficiente de Chezy, coeficiente de Coriolis, velocidad y dirección del viento; estos datos sólo son suministrados si se toman en cuenta los efectos de fricción en el fondo, la aceleración de Coriolis

- y si existe viento respectivamente; cualquiera de estos efectos puede ser despreciado independiente de los demás.
- 6) Propiedades de nudos: profundidad correspondiente al nivel medio en cada nudo.
  - 7) Tipo de elemento a utilizar.
  - 8) Esquema de integración a usar (dependiente del valor dado al parámetro "s" de A-IV.1).
  - 9) Valor para el coeficiente de relajación  $w$  (si es que se decide utilizarlo).
  - 10) Indicación de si se considerarán o no los términos convectivos.
  - 11) Limite superior de integración en el tiempo e intervalo de tiempo.
  - 12) Tolerancia para el proceso iterativo.
  - 13) Valores iniciales si es que existen.

El programa imprime velocidades (en magnitud y dirección), componentes de velocidades, elevaciones respecto al nivel medio, profundidades totales y flujos po unidad de ancho.

El lenguaje de codificación utilizado es el "Extended ALGOL" para la computadora Burroughs B-6700.

#### A-IV.2 - Utilización de los comandos del sistema HYDRO

A continuación se procede a explicar el empleo de los comandos del sistema HYDRO utilizados en el ejemplo 4 del Capítulo IV (Ver página 92). Es necesario hacer notar que la forma en que allí son presentados los comandos no es la única, existiendo otras alternativas (Ellas figuran en el Manual, actualmente en fase de preparación).

El primer comando consiste en colocar después de la palabra HYDRO el título asignado al problema a resolver entre comillas (en este caso "WIND INDUCED OSCILLATIONS IN A RECTANGULAR LAKE").

Luego se dan las coordenadas cartesianas de los nudos respecto a los ejes globales "x-y" (que en los ejemplos presentados se denominan  $x_1$ -  $x_2$ ) a través del comando NODAL COORDINATES; el primer número identifica al nudo y los otros

dos a las coordenadas "x" e "y" respectivamente. Un punto y coma separa los datos de un nudo y de otro en la misma línea; al final de la línea no debe colocarse ninguna puntuación.

Posteriormente se dan las incidencias de cada elemento a través del comando ELEMENT CONNECTIVITY; el primer número identifica al elemento y los otros a los nudos que inciden en el mismo. Estos datos deben darse siguiendo un cierto sentido (en este caso antihorario); si se trabaja con triángulos de seis nudos se colocan primero los nudos extremos y luego los que están en el medio de cada lado del elemento.

En este ejemplo no es necesario dar rotaciones ya que la normal en los contornos coincide con la dirección de los ejes globales.

Continuando, se dan los valores que las incógnitas asumen en los bordes a través del comando PRESCRIBED UNKNOWNNS. En primer lugar se nombra la lista de nudos donde determinadas variables tienen el mismo valor y luego sucesivamente cada incógnita con su valor prescripto. Así en el ejemplo que se considera se establece que en los nudos 1, 3, 31 y 33 las incógnitas  $v_1$  y  $v_2$  tienen valores nulos, en cambio en los nudos 2 y 32 sólo la variable  $v_1$  se anula; de esta forma se describen todas las condiciones de borde.

Luego se suministran las constantes del problema a través del comando CONSTANTES. Estas son la constante de tensión de viento ( $\frac{\gamma^2 \rho a}{\rho}$ ) y la aceleración de la gravedad, identificadas como WIND y GRAVITY respectivamente. A cada constante sigue su valor correspondiente.

Las propiedades de elementos son asignadas a través del comando ELEMENT ATTRIBUTES; siguiendo al mismo se da la lista de elementos que tienen los mismos coeficientes de Chezy, de Coriolis y donde la acción del viento es la misma en magnitud y dirección; estos coeficientes y magnitudes están identificados por las palabras CHEZY, CORIOLIS, WIND V y T1 respectivamente. Si no se quiere considerar algunas de estas acciones, no se coloca la palabra correspondiente.

Las propiedades de nudos son asignadas a través del comando NODAL ATTRIBUTES; luego se dan sucesivamente el número de nudo y la profundidad media correspondiente identifica-



da por la palabra DEPTH, a la que sigue el valor de la misma.

Si todos los nudos o elementos tienen los mismos atributos se puede colocar la palabra ALL en lugar de la lista completa. Si se trata de un grupo de nudos o elementos se puede reemplazar la lista por la palabra THRU colocada entre primer y último nudo o elemento de dicho grupo.

El tipo de elemento a utilizar se decide a través del comando ELEMENT TYPE; siguiendo al mismo se coloca la lista de elementos que serán del mismo tipo. También aquí, si todos los elementos son de la misma clase se puede sustituir la lista completa por la palabra ALL. La palabra "TRIAN3" identifica triángulos de 3 nudos (primer orden); si se trabaja con triángulos de 6 nudos (segundo orden) se usa la palabra "TRIAN6".

El comando TOLERANCE seguido de un número real eventualmente con rótulo, como en este caso TOL1, asigna un valor para la tolerancia en el proceso iterativo.

El comando TIME INTEGRAL seguido por un número que indica cantidad de intervalos de tiempo y por otro que da valores al mismo, es la manera de discretizar el espacio de tiempo, donde el límite superior de integración queda automáticamente fijado. En el ejemplo presentado se toman 64 intervalos de 300 segundos cada uno.

La palabra CIRCULATION da origen al análisis del problema a través del programa detallado en el parágrafo anterior. El esquema de integración se escoge a través de las palabras TRAPEZOIDAL (que es el esquema tomado en el ejemplo) o GALERKIN. El esquema standard es el TRAPEZOIDAL.

La palabra RELAXATION seguida de un número real asigna un valor al coeficiente de relajación.

WITHOUT ADVECTIVES debe usarse cuando se desea despreciar los efectos de los términos convectivos.

Por medio de PRINT RESULTS se obtiene la impresión de los resultados deseados.

Los detalles presentados evidencian las ventajas de implementar un lenguaje orientado, el que a través de comandos simples, con el uso de palabras corrientes en la actividad técnica, permite resolver problemas bastante complejos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. ABBOTT, M.B., DAMSGAARD, A. & RODENHUIS, G.S. System 21, "Jupiter": a design system for two-dimensional nearly-horizontal flows. Journal of Hydraulic Research. Delft, 2(1):1-28, 1973.
2. ALBRECHT, Peter. Análise numérica, um curso moderno. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos, 1973.
3. BONILHA, Nelton F. Circulação em lagos: um modelo matemático simplificado aplicado ao Rio Guaíba e Lagoa dos Patos. Porto Alegre, Departamento de Engenharia Civil da UFRGS, 1974. Tese.
4. BREBBIA, C.A. Finite element models for coastal engineering. In: SEMINÁRIO SOBRE HIDRODINÂMICA COMPUTACIONAL, Porto Alegre, 1975. Porto Alegre, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFRGS, 1975. p.J3-J36.
5. CHENG, Ralph T. Numerical investigation of lake circulation around islands by the finite element method. International Journal for Numerical Methods in Engineering, London, 5(1):103-12, sept.-oct. 1972.
6. CONNOR, J.J. & WANG, J. Finite element modelling of hydrodynamic circulation. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON NUMERICAL METHODS IN FLUID DYNAMICS, Southampton, 1973. Proceedings. London, Pentech Press, 1974. p.355-87.

7. DRONKERS, J.J. Tidal computations for rivers, coastal areas, and seas. Journal of the Hydraulic Division, New York, American Society of Civil Engineers, 95(1):29-77, jan. 1969.
8. DRONKERS, J.J. Tidal computations in rivers and coastal waters. Amsterdam, North-Holland, 1964.
9. ELLIS, J. Unsteady flow in channels of variable cross sections. Journal of the Hydraulic Division, New York, American Society of Civil Engineers, 96(10):1927-45, oct. 1970.
10. FERRANTE, Agustin J. The finite element method. In: SEMINÁRIO SOBRE HIDRODINÂMICA COMPUTACIONAL, Porto Alegre, 1975, Porto Alegre, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFRGS, 1975. p.I3-I32.
11. FERRANTE, Agustin J. & FRANCO, José S. Gomes. Linguagens orientadas para aplicação do método dos elementos finitos. In: SEMINÁRIO SOBRE HIDRODINÂMICA COMPUTACIONAL, Porto Alegre, 1975. Porto Alegre, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFRGS, 1975. p.L3-L8.
12. FINLAYSON, B.A. The method of weighted residuals and variational principles. New York, Academic Press, 1972.
13. GALLAGHER, Richard H. Finite element lake circulation and thermal analysis. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON THE FINITE ELEMENT METHOD IN FLOW ANALYSIS, Swansea, 1974. Proceedings. Finite elements in fluids: viscous flow and hydrodynamics. London, John Wiley, 1975. v.1, p.119-31.
14. GALLAGHER, Richard H. et alii. Finite element shallow lake circulation analysis. Journal of the Hydraulic Division, New York, American Society of Civil Engineers, 99(7):1083-96, july 1973.

15. GROTKOP, G. Finite element analysis of long-period water waves. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Amsterdam, 2(2):147-57, 1973.
16. IPPEN, Arthur T. Estuary and coastline hydrodynamics. New York, M cGraw-Hill, 1966.
17. KING, I.P., NORTON, W.R. & ICEMAN, K.R. A finite element solution for two-dimensional stratified flow problems. In: INTERNATIONAL CONFERENCE OF THE FINITE ELEMENT METHOD IN FLOW ANALYSIS, Swansea, 1974. Proceedings. Finite elements in fluids: viscous flow and hydrodynamics. London, John Wiley, 1975. v.1, p.133-56.
18. LEE, K.K. & LIGGET, J.A. Computation for circulation in stratified lakes. Journal of the Hydraulic Division, New York, American Society of Civil Engineers, 96(10): 2089-115, oct. 1970.
19. LEENDERTSE, J.J. A water-quality simulation model for well-mixed estuaries and coastal seas: principles of computation. New York, Rand Institute, v.1, 1970.
20. LEENDERTSE, J.J. & GRITTON, E.C. A water-quality simulation model for well mixed estuaries and coastal seas: computation procedures. New York, Rand Institute, v.2, 1971.
21. LI, Wen-Hsiung. Differential equations of hydraulic transients, dispersion, and groundwater flow: mathematical methods in water resources. Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1972.
22. LIGGET, J.A. Cell method for computing lake circulation. Journal of the Hydraulic Division, New York, American Society of Civil Engineers, 96(3):725-43, mar. 1970.

23. LIGGET, J.A. Unsteady circulation in shallow homogeneous lakes. Journal of the Hydraulics Division, New York, American Society of Civil Engineers, 95(4):1273-88, July 1969.
24. LIGGET, J.A. & HADSITHEODOROU, C. Circulation in shallow homogeneous lakes. Journal of the Hydraulic Division, New York, American Society of Civil Engineers, 95(2): 609-20, Mar. 1969.
25. LIGGET, J.A. & WOOLHISER, D.A. Difference solutions of the shallow-water equations. Journal of the Engineering Mechanics Division, New York, American Society of Civil Engineers, 93(2):39-71, Apr. 1967.
26. LIU, Henry & PEREZ, Himerio J. Wind-induced circulation in shallow water. Journal of the Hydraulic Division, New York, American Society of Civil Engineers, 97(7):923-35, July 1971.
27. MALVERN, Lawrence E. Introduction to the mechanics of a continuous media. Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1969.
28. MARTIN, H.C. & CAREY, G.H. Introduction to finite element analysis: theory and applications. New York, McGraw-Hill, 1973.
29. MASCH, E.D. & SHANKAR, N.L. Circulation in shallow estuaries. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON RIVER MECHANICS, Bangkok, 1973. Proceedings. River and estuary model analysis. Bangkok, Asian Institute of Technology, 1973. v.3, p.371-81.
30. NORRIE, Douglas H. & DE VRIES, Gerard. The finite element method: fundamentals and applications. New York, Academic Press, 1973.

31. PARTRIDGE, P.W. & BREBBIA, C.A. On the numerical treatment of flow problems in shallow water. Southampton, Department of Civil Engineering of the Southampton University, 1973. 19p.
32. PRANDLE, David & CROOKSHANK, Norman L. Numerical model of St. Lawrence River estuary. Journal of the Hydraulic Division, New York, American Society of Civil Engineers, 100(4):517-29, apr. 1974.
33. RALSTON, Anthony. A first course in numerical analysis. New York, McGraw-Hill, 1965.
34. REID, Robert O. & BODINE, Bernie R. Numerical model for storm surges in Galveston Bay. Journal of the Waterways and Harbors Division, New York, American Society of Civil Engineers, 94(1):33-57, feb. 1968.
35. TAYLOR, C. & DAVIS, J. Finite element numerical modelling of flow and dispersion in estuaries. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON RIVER MECHANICS, Bangkok, 1973. Proceedings. River and estuary model analysis. Bangkok, Asian Institute of Technology, 1973. v.1, p.465-76.
36. TAYLOR, C. & DAVIS, J.M. Tidal propagation and dispersion in estuaries. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON THE FINITE ELEMENT METHOD IN FLOW ANALYSIS, Swansea, 1974. Proceedings. Finite element in fluids: viscous flow and hydrodynamics. London, John Wiley, 1975. v.1, p.95-118.
37. ZIENKIEWICZ, O.C. The finite element method in engineering science. New York, McGraw-Hill, 1971.