

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

ANÁLISE DOS EFEITOS DA SUPRESSÃO DA CONDIÇÃO DE NÃO DESLIZAMENTO NA  
SOLUÇÃO DE ESCOAMENTOS BIDIMENSIONAIS

por

João Baptista Dias Moreira

Monografia apresentada ao Departamento de Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Engenheiro Mecânico.

Porto Alegre, Dezembro de 2015





Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Escola de Engenharia  
Departamento de Engenharia Mecânica

ANÁLISE DOS EFEITOS DA SUPRESSÃO DA CONDIÇÃO DE NÃO DESLIZAMENTO NA  
SOLUÇÃO DE ESCOAMENTOS BIDIMENSIONAIS

por

João Baptista Dias Moreira

ESTA MONOGRAFIA FOI JULGADA ADEQUADA COMO PARTE DOS  
REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE  
**ENGENHEIRO MECÂNICO**  
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELA BANCA EXAMINADORA DO  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Prof. Alcy Rodolfo dos Santos Carrara  
Coordenador do Curso de Engenharia Mecânica

Área de Concentração: **Energia e Fenômenos de Transporte**

Orientador: Prof. Jorge Rodolfo Silva Zabadal

Comissão de Avaliação:

Prof. Dr. Sérgio Viçosa Möller

Prof. Dr. Horácio Antônio Vielmo

Profa. Dra. Thamy Cristina Hayashi

Porto Alegre, 11 de Dezembro de 2015.

DIAS MOREIRA, J.B. **Análise dos efeitos da supressão da condição de não deslizamento na solução de escoamentos bidimensionais**. 2015. 22 folhas. Monografia (Trabalho de conclusão do curso em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015.

## RESUMO

Este trabalho investiga os efeitos da não consideração da condição de contorno clássica da mecânica dos fluidos, especificamente, a condição de não deslizamento no escoamento de um fluido em contato com uma superfície sólida. Considera-se o escoamento incompressível bidimensional de um fluido newtoniano a baixos números de Reynolds. Assumindo a condição de não deslizamento, é deduzida uma contradição com relação aos efeitos previstos pela equação bidimensional de Navier Stokes. Sem assumir a condição de não deslizamento, é avaliada a possibilidade de modelar um escoamento de forma a gerar fenômenos característicos como descolamento da camada limite e formação de vórtices. O modelamento é feito utilizando o *software* Maple 2015™ e consiste em obter o campo de velocidades através de uma formulação em termos da função corrente. Por fim, através de uma análise de simetrias admitidas pela equação diferencial que rege o problema, é discutida a possibilidade de introdução de uma novo tipo de condição de contorno. Os resultados indicam que a imposição de não deslizamento do fluido junto à superfície não é uma condição necessária para simular escoamentos com características típicas como descolamento da camada limite e formação de vórtices, embora a solução obtida não forneça padrões realistas de escoamento para os números de Reynolds considerados.

**PALAVRAS-CHAVE:** Condição de não deslizamento. solução analítica. equação de Helmholtz. função corrente.

DIAS MOREIRA, J.B. **Análise dos efeitos da supressão da condição de não deslizamento na solução de escoamentos bidimensionais**. 2015. 22 folhas. Monografia (Trabalho de conclusão do curso em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015.

## **ABSTRACT**

This work investigates the effects of not taking into account fluid mechanics' classical boundary condition, more specifically, the no-slip condition imposed on the interface between a flowing fluid and a solid surface. The flow condition is assumed to be incompressible, bidimensional, at a low Reynolds number and the fluid is treated as a newtonian one. Under the assumption of the no-slip condition, a contradiction is deduced with respect to the properties expected from a viscous flow. It is investigated the possibility of modeling typical phenomena such as boundary layer separation and vortex generation without using the no-slip condition. The model is produced using the software Maple 2015™, and it consists of a method to obtain the velocity field formulating the governing differential equation in terms of the stream function. Furthermore, based on an analysis of the symmetries admitted by the governing differential equation, it is discussed the possibility of introducing a new type of boundary condition. The calculations showed that the imposal of no-slip is not a necessary condition in order to model structures characteristics of certain flows such as boundary layer separation and vortex generation, although the solution obtained does not yield realistic flows for the Reynolds numbers considered.

**KEYWORDS:** No-slip condition. analytical solution. Helmholtz equation. stream function.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	<b>1</b>
2.1	Considerações históricas a respeito da condição de não deslizamento	1
2.2	Formulação analítica de problemas da mecânica dos fluidos	2
<b>3</b>	<b>OBJETIVOS</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>3</b>
4.1	Simetrias de Lie	3
4.2	Obtenção da forma fatorada da equação de Helmholtz	4
4.3	Considerações	5
4.3.1	Consideração qualitativa	6
4.3.2	Consideração quantitativa	6
<b>5</b>	<b>METODOLOGIA</b>	<b>6</b>
<b>6</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÃO</b>	<b>8</b>
6.1	Análise da condição de não deslizamento e deslizamento irrestrito	8
6.2	Análise de simetrias de escala	10
<b>7</b>	<b>CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS</b>	<b>13</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>14</b>
<b>APÊNDICE</b>		<b>15</b>
<b>1</b>	<b>Relação da hipótese simplificativa com a variação do campo de pressão</b>	<b>15</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Em geral, fenômenos físicos são descritos em termos de sistemas de equações diferenciais parciais. Para modelar um sistema físico realisticamente, é necessário escolher condições de contorno que restrinjam o espaço de soluções a respostas coerentes com a realidade. Assim, o estudo das condições de contorno de um problema se justifica quando a obtenção de uma formulação diferente aceita novas metodologias para abordar ou resolver o problema e, em última instância, permite que a comparação entre modelos leve a um melhor entendimento do fenômeno estudado.

Neste trabalho em particular, a condição de contorno de não deslizamento não foi assumida, i. e., não necessariamente as três componentes da velocidade do fluido sobre uma superfície sólida são iguais às três componentes da velocidade da própria superfície.

Dessa forma, é investigada a possibilidade de modelar um escoamento que reproduza as principais propriedades de um escoamento laminar viscoso, tais como formação e separação da camada limite e aparecimento de zonas de recirculação, como é possível observar na fotografia da Figura 1.1.

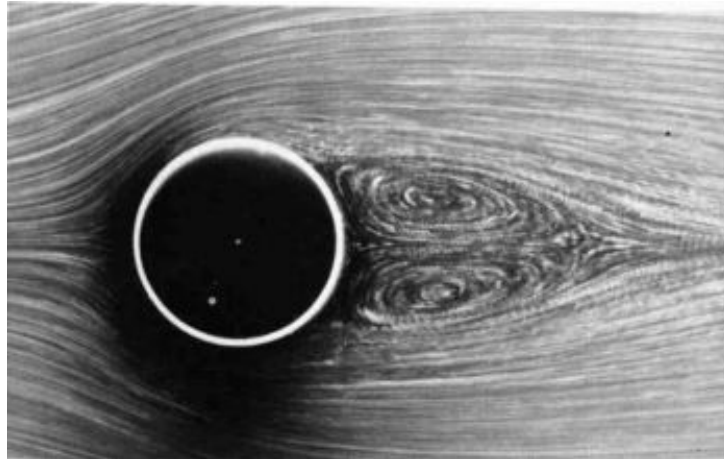


Figura 1.1 – Escoamento laminar sobre cilindro circular,  $Re = 26$ . Fonte:(DYKE, 1982)

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1 Considerações históricas a respeito da condição de não deslizamento

Uma revisão histórica do debate sobre a condição de contato entre um fluido em movimento e um sólido pode ser encontrada em (GOLDSTEIN, 1938, pág. 676-680). Em seus experimentos, Daniell Bernoulli já reconhecia que as velocidades medidas nas regiões próximas a superfícies sólidas diferiam de seus cálculos utilizando a hipótese de fluido perfeito. Três hipóteses eram mais recorrentes entre os cientistas durante o século XIX: de acordo com Goldstein (1938) Girard propôs que há uma camada de fluido que adere à superfície sólida, e sobre essa camada o fluido desliza, sugerindo que o fluido se comporta diferentemente de acordo com sua posição em relação à parede. Navier sugeriu que a velocidade de deslizamento é proporcional à taxa de cisalhamento do fluido junto à parede: sendo  $u$  a velocidade de deslizamento do fluido e  $n$  a direção normal à superfície:

$$u = \lambda \frac{\partial u}{\partial n}. \quad (2.1)$$

Essa é a formulação mais usual de deslizamento ainda hoje de acordo com Lauga *et al.*(2007). Coulomb também havia proposto que o fluido junto a uma superfície sólida adere a essa, embora diferentemente de Girard não assuma que haja uma camada de fluido estática cujo comportamento difere do fluido em movimento, mas sim que a velocidade varia de forma contínua em todo o espaço ocupado pelo fluido. Coube a George Stokes, porém, o papel de defender mais habilmente a hipótese de Coulomb, de forma que ao longo da última metade do século XIX a condição de não deslizamento fosse predominantemente aceita entre mecanicistas de fluidos. Ainda de acordo com Goldstein (1938), James Clerk Maxwell analisou a questão do não deslizamento à luz da teoria cinética de gases a pedido de um árbitro da *Royal Society* e chegou à conclusão de que, se diferenças de temperatura não são consideradas, há deslizamento e ele ocorre de acordo com a expressão dada por Navier (2.1). Além disso, deduziu também que o comprimento  $\lambda$  deve ser um múltiplo do percurso livre médio percorrido pelas moléculas de gás  $L$  tal que  $\lambda \approx 2L$ . Lauga *et al.*(2007) compila e analisa numerosos trabalhos experimentais realizados no século XXI medindo o deslizamento de fluidos newtonianos, com  $\lambda$  variando entre aproximadamente  $1\text{nm}$  e  $1\mu\text{m}$ , o que corrobora os resultados de Maxwell.

## 2.2 Formulação analítica de problemas da mecânica dos fluidos

A resolução analítica de problemas da mecânica dos fluidos é um problema historicamente difícil devido principalmente a não linearidade das equações fundamentais. Mesmo problemas relativamente simples como o escoamento bidimensional transversal a um cilindro só possuem soluções analíticas para casos limites como a a solução encontrada por Lamb para as equações de Oseen (BATCHELOR, 2000, pág.245-246), cujo modelo lineariza os termos advectivos  $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$  como  $U \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right)$ ,  $U$  a velocidade a que o campo de velocidades tende assintoticamente (KUNDU; COHEN, 2008) quando a distância para o objeto submerso vai para o infinito.

Até o fim do século XIX, a inabilidade da teoria de escoamentos potenciais de prever resultados coerentes com experimentos combinado à dificuldade em resolver as equações de Navier-Stokes lançava dúvida sobre a capacidade da teoria da mecânica dos fluidos em obter descrições realistas de escoamentos de interesse prático. Entretanto, durante o terceiro congresso internacional de matemática sediado na cidade de Heidelberg no ano de 1904, L. Prandtl apresentou sua teoria da camada limite (SCHLICHTING, 1979, pág.127-149). Esta consiste em estudar a influência da viscosidade em escoamentos com alto número de Reynolds. Prandtl mostrou que é possível simplificar a equação de Navier-Stokes junto à parede onde o gradiente de velocidade é muito alto e a influência de forças viscosas é grande, enquanto na região mais distante da parede, escoamento potencial é uma solução razoável devido a predominância dos efeitos inerciais, de forma que para resolver todo o campo de velocidades basta impor continuidade entre as soluções de ambas regiões.

Durante a última metade do século XX, a maior acessibilidade a computadores popularizou as técnicas de simulação numérica do comportamento de fluidos (*Computational Fluid Dynamics*-CFD). As primeiras simulações foram realizadas já nos anos 40 utilizando métodos de diferenças finitas descritos por Richardson nos anos 20 (RICHARDSON, 1922). Desde então, tanto a capacidade de processamento de dados por máquinas quanto a diversidade de métodos computacionais cresceu exponencialmente (MALISKA, 1994), e área de simulação numérica em mecânica dos fluidos se tornou um campo de estudo próprio.

Resultados relativamente recentes foram obtidos na área de métodos analíticos para a resolução de equações diferenciais parciais baseados em suas simetrias, tais como simetrias de Lie, transformações de Bäcklund (BLUMAN; KUMEI, 2013; ROGERS; SCHIEF, 2002; SPEROTTO, 2007). Tais técnicas de análise são uma continuação dos estudos de métodos de grupos iniciado por Lie no final do século XIX, complementado por Bäcklund na mesma época e por Ovsianikov no século XX (IBRAGIMOV, 2004). Tal metodologia permite o desenvolvimento de abordagens alternativas a problemas clássicos de mecânica dos fluidos. Beck (2005) e



Fernández (2007), por exemplo, utilizam métodos analíticos para obter soluções da equação de Helmholtz bidimensional transiente e da equação da convecção difusão bidimensional transiente, respectivamente.

### 3 OBJETIVOS

À luz do uso histórico da condição de contorno discutida, e também do desenvolvimentos de procedimentos que tornam operacional a análise de sistemas de equações diferenciais, a proposta deste trabalho é verificar se fenômenos característicos de escoamentos viscosos laminares, tais como separação da camada limite e geração de vórtices, necessitam da imposição da condição de não deslizamento sobre superfícies sólidas ou se tais características possam estar presentes na solução ainda que o deslizamento sobre superfícies sólidas seja restrito.

## 4 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### 4.1 Simetrias de Lie

A seguir é dado um exemplo ilustrativo do uso de simetrias na simplificação de uma equação diferencial parcial. O exemplo escolhido é a equação da difusão unidimensional com fonte:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} + Q(c). \quad (4.1)$$

Analisa-se uma solução particular de (4.1), digamos,  $c(z, t)$ . Suponha agora que exista uma transformação de variáveis  $c' = C(\epsilon, c, z, t)$ ,  $t' = T(\epsilon, c, z, t)$  e  $z' = Z(\epsilon, c, z, t)$  tal que  $c'(z', t')$  também seja solução para (4.1) para qualquer valor real de  $\epsilon$ . Nesse caso, é dito que (4.1) é invariante com relação as transformações  $C, T$  e  $Z$  com parâmetro real  $\epsilon$ . Considere as transformações dadas por:

$$\begin{aligned} c' &= c, \\ t' &= t + \epsilon, \\ z' &= z + \alpha\epsilon, \end{aligned} \quad -\infty < \epsilon < \infty \quad (4.2)$$

onde  $\alpha$  é uma constante real. Pode-se verificar que:

$$\frac{\partial c'}{\partial t'} = \frac{\partial c}{\partial t}, \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial^2 c'}{\partial z'^2} = \frac{\partial^2 c}{\partial z^2}, \quad (4.4)$$

o que implica que  $c'(z', t')$  também satisfaz (4.1). Isso significa que (4.1) é invariante em relação à ação do grupo (4.2), ou similarmente, que (4.2) é uma *simetria* admitida por (4.1).

A transformação com parâmetro  $\epsilon$  leva de uma solução  $c$  para outra solução  $c'$ . Um outro valor real  $\epsilon'$  leva  $c$  para outra solução  $c''$ ,  $c''$  possivelmente diferente de  $c'$ . Caso seja imposto que (4.2) leve de uma solução da equação da difusão para a *mesma* solução, tem-se que

$$c'(z', t') = c(z, t), \quad (4.5)$$

ou equivalentemente:

$$c(z + \alpha\epsilon, t + \epsilon) = c(z, t). \quad (4.6)$$

Derivando essa última expressão em relação a  $\epsilon$  obtém-se a equação diferencial:

$$\alpha \frac{\partial c}{\partial z} + \frac{\partial c}{\partial t} = 0, \quad (4.7)$$

É possível resolver (4.7) pelo método das características (ZWILLINGER, 1998, pág. 325), resultando que a solução mais geral é dada como:

$$c = y(z - \alpha t), \quad (4.8)$$

$y$  uma função ainda indeterminada. Definindo  $x \equiv z - \alpha t$  e substituindo  $c = y(x)$  a equação (4.1) fica:

$$\ddot{y} + \alpha \dot{y} + Q(y) = 0. \quad (4.9)$$

É possível mostrar que essa equação diferencial ordinária também possui uma simetria, explicitamente, (4.9) é invariante com relação a translações no eixo  $x$ :

$$\begin{aligned} y' &= y, \\ x' &= x + \mu, \quad -\infty < \mu < \infty \end{aligned} \quad (4.10)$$

sendo  $\mu$  o parâmetro do grupo. Essa simetria permite obter nova redução de ordem (DRESNER, 1998). Definindo  $u \equiv \dot{y}$ , tem-se que:

$$\dot{u} + \alpha + \frac{Q(y)}{u} = 0. \quad (4.11)$$

Não é possível avançar mais nesse problema utilizando simetrias de Lie sem especificar a função que define a fonte  $Q(y)$ . Entretanto, a utilização de simetrias simplificou o problema original de uma equação diferencial parcial de 2ª ordem em  $t$  e  $z$  para uma equação diferencial ordinária auxiliar.

## 4.2 Obtenção da forma fatorada da equação de Helmholtz

Desprezando forças de campo, a equação de Navier-Stokes bidimensional que descreve o escoamento de um fluido incompressível é dada por:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right). \quad (4.13)$$

Nessas equações,  $u(x, y, t)$  e  $v(x, y, t)$  são as velocidades nas direções  $x$  e  $y$  de um sistema de coordenadas cartesiano,  $p(x, y, t)$  é a pressão e  $\nu$  é a viscosidade cinemática.

Derivando (1.1) em relação a  $y$  e subtraindo de (1.2) derivada em relação a  $x$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \overbrace{\left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)}^{\nabla \cdot \mathbf{u} = 0} \\ & = \nu \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Identificando  $\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$  como a vorticidade, chega-se à equação de Helmholtz:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right). \quad (4.15)$$

Percebendo que  $\frac{\partial(\omega \mathbf{u})}{\partial t} = \omega \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \frac{\partial \omega}{\partial t}$  e usando a definição de  $\omega$ , é possível reescrever a última expressão como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \left[ \frac{\partial(\omega u)}{\partial x} - \omega \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \left[ \frac{\partial(\omega v)}{\partial y} - \omega \frac{\partial v}{\partial y} \right] &= \nu \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right), \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \frac{\partial(\omega u)}{\partial x} + \frac{\partial(\omega v)}{\partial y} - \omega \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \nu \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial \omega}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Agrupando a expressão (4.16) em termos de derivadas em  $x$  e em  $y$ :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \omega u - \nu \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial u}{\partial t} + \omega v - \nu \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) = 0. \quad (4.17)$$

Definindo as componentes  $a$  e  $b$  de um certo campo vetorial  $\mathbf{F} = (a, b)$  como:

$$a = a(t, x, y, u(t, x, y), v(t, x, y), \omega(t, x, y)) = \frac{\partial v}{\partial t} + \omega u - \nu \frac{\partial \omega}{\partial x}, \quad (4.18a)$$

$$b = b(t, x, y, u(t, x, y), v(t, x, y), \omega(t, x, y)) = -\frac{\partial u}{\partial t} + \omega v - \nu \frac{\partial \omega}{\partial y}, \quad (4.18b)$$

é possível identificar das equações (4.17) e (4.18) que:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 0, \quad (4.19)$$

o que significa que  $a = \frac{\partial q}{\partial y}$  e  $b = -\frac{\partial q}{\partial x}$  sempre satisfaz (4.19). Assim, é obtida a seguinte redução de grau:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u\omega &= \nu \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y}, \\ -\frac{\partial u}{\partial t} + v\omega &= \nu \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Essa expressão é a forma fatorada da equação de Helmholtz bidimensional, e sua utilidade nesse trabalho será explorar algumas consequências da condição de contorno de não deslizamento, além de ser um passo intermediário na resolução de (1.1), (1.2).

### 4.3 Considerações

Nessa seção são feitas considerações sobre implicações lógicas da condição de não deslizamento de forma a motivar a investigação de uma formulação alternativa.

#### 4.3.1 Consideração qualitativa

A condição de não deslizamento supõe que a velocidade é nula na fronteira da região que define o fluido, i. e., um fluido que escoar sobre uma superfície sólida em repouso tem velocidade zero na interface fluido-estrutura entre os dois materiais. Isso significa que as partículas de fluido mais próximas aderem totalmente à superfície sólida, ou seja, existem forças de interação eletromagnética que os mantém unidos. Nesse caso, diferentes materiais devem exercer diferentes forças de atração sobre um mesmo fluido, significando que deve haver diferenças perceptíveis no escoamento de um dado fluido nas mesmas condições, sobre superfícies de mesma rugosidade mas de materiais diferentes. Entretanto, resultados empíricos como o diagrama de Moody fornecem fortes indícios que para a mesma rugosidade a diferença entre materiais não é preponderante na configuração das características do escoamento.

#### 4.3.2 Consideração quantitativa

Considere agora o escoamento perpendicular ao eixo principal de um corpo prismático de seção transversal arbitrária. Assumindo a hipótese de não deslizamento, as velocidades sobre a superfície sólida na direção tanto normal quanto tangencial são zero, ou seja, nessa região  $\mathbf{u} = 0$ . Aplicando essa condição em (4.20), temos que:

$$\nu \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} = 0, \quad (4.21)$$

$$\nu \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} = 0. \quad (4.22)$$

Subtraindo a derivada de (4.21) em relação a  $y$  da derivada de (4.22) em relação a  $x$ , se percebe que  $\nabla^2 q = 0$ . Repetindo essa operação em (4.20) (derivada da segunda equação em  $x$  menos derivada da primeira em  $y$ ) se obtém:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \overbrace{\left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)}^{\nabla \cdot \mathbf{u} = 0} + \underbrace{\left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)}_{\omega} \omega + v \frac{\partial \omega}{\partial x} - u \frac{\partial \omega}{\partial y} = - \overbrace{\nabla^2 q}^0. \quad (4.23)$$

Assim,  $\mathbf{u} = 0$  em (4.23) significa que  $\omega^2 = \omega = 0$  em toda a superfície sólida. Vorticidade igual a zero e continuidade implicam:

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{na fronteira fluido-superfície} \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{em todo o escoamento} \quad (4.25)$$

Derivando (4.24) em relação a  $x$ , (4.25) em relação a  $y$  e somando, obtemos  $\nabla^2 v = 0$ . Uma operação análoga mostra que  $\nabla^2 u = 0$ . Mas se o laplaciano das velocidades é zero, as equações (1.1) e (1.2) se resumem a formulação de fluido invíscido, e efeitos viscosos não são sentidos na superfície sólida. Assim, assumir que não há deslizamento contradiz nossa hipótese da viscosidade influenciar as soluções de (1.1) e (1.2), o que é absurdo.

## 5 METODOLOGIA

O campo de velocidades é obtido aplicando uma formulação de variável complexa ao sistema (4.20). Nesse caso, o modelo descrito em termos de  $u, v$  e  $\omega$  pode ser reduzido a uma

única equação e a uma única variável dependente. Considera-se que o regime é permanente e que a variação da pressão  $p(x, y)$  é igual a variação da energia cinética por unidade de massa do fluido. É possível mostrar<sup>1</sup> que nessas condições (4.20) se torna:

$$\begin{aligned} u\omega &= \nu \frac{\partial \omega}{\partial x}, \\ v\omega &= \nu \frac{\partial \omega}{\partial y}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Considere agora a relação entre o plano real e o plano complexo:

$$\begin{aligned} z &= x + iy, \\ \bar{z} &= x - iy. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Pela regra da cadeia,  $\frac{\partial}{\partial x} = (\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}})$ ,  $\frac{\partial}{\partial y} = i(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}})$ . Definindo  $f \equiv u + iv$ , tem-se que:

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = i\left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial f}{\partial z}\right), \quad (5.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} = 0. \quad (5.4)$$

A relação  $\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}$  obtida da equação da continuidade (5.4) permite expressar  $\omega$  como  $\omega(f) = -2i\frac{\partial f}{\partial z}$ . Aplicando essa relação em (5.1) obtém-se:

$$-2iu\frac{\partial f}{\partial z} = -2i\nu\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial \bar{z}}\right), \quad (5.5)$$

$$-2iv\frac{\partial f}{\partial z} = 2\nu\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial \bar{z}}\right). \quad (5.6)$$

Basta então diminuir (5.6) de (5.5) multiplicada por  $i$  para chegar à equação diferencial unicamente em termos de  $f$ :

$$2f\frac{\partial f}{\partial z} = 4\nu\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial \bar{z}}. \quad (5.7)$$

Notando que  $2f\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial(f^2)}{\partial z}$  é possível reduzir de ordem a equação (5.7):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z}\left(f^2 - 4\nu\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right) &= 0, \\ f^2 - 4\nu\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + c(\bar{z}) &= 0, \end{aligned} \quad (5.8)$$

onde se assume  $c(\bar{z}) = 0$  sem perda de generalidade (somente uma função arbitrária é necessária para aplicar a condição de contorno de não penetração). É possível separar as variáveis da expressão (5.8) e então integrar para obter explicitamente:

$$f = \frac{4\nu}{4\nu a(z) - \bar{z}}. \quad (5.9)$$

<sup>1</sup> Ver Apêndice 1

A função  $a(z)$  é determinada ao impor a condição de contorno que determina a geometria do corpo submerso, e seu papel físico é unicamente expressar a condição de não penetração do fluido sobre a superfície sólida. É possível formular essa condição introduzindo a identidade da mecânica dos fluidos  $u = \frac{\partial\psi}{\partial y}$ ,  $v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$ , sendo  $\psi$  uma função real denominada função corrente (KUNDU; COHEN, 2008). Lembrando que o gradiente de uma função é sempre perpendicular às suas isolinhas,  $\nabla\psi \cdot \mathbf{u} = (\frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y}) \cdot (u, v) = -uv + uv = 0$  significa que as isolinhas de  $\psi$  são sempre paralelas ao escoamento. Assim, se a superfície do sólido é descrita por uma certa curva  $g(x, y) = 0$ , para estabelecer a condição de não penetração  $\nabla g \cdot \mathbf{u} = 0$  basta impor que a curva que define  $\psi_0$ , uma isolinha de  $\psi$ , coincida com a curva que satisfaz  $g = 0$ . É possível expressar  $f$  em termos de  $\psi$  utilizando suas definições:

$$f = u + iv = \frac{\partial\psi}{\partial y} - i\frac{\partial\psi}{\partial x} = i\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)\psi - i\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)\psi = -2i\frac{\partial\psi}{\partial \bar{z}},$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial \bar{z}} - \frac{1}{2}if = 0. \quad (5.10)$$

Assim, de (5.10) e (5.9) se obtém:

$$\psi = \text{Re} \left\{ \frac{1}{2}i \int f d\bar{z} + b(z) \right\} = \text{Re} \{ \nu \ln(4\nu a(z) - \bar{z}) + iUz \}. \quad (5.11)$$

A função  $b(z)$  é dada por  $b = iUz$  e está associada a velocidade de corrente livre  $u(x, y)|_{x, y \rightarrow \infty} = U$ , conforme pode ser verificado utilizando a relação (5.10).

Para aplicar a condição de contorno, por simplicidade define-se  $\psi_0 = 0$ . A expressão (5.11) pode então ser representada pela relação funcional:

$$\begin{aligned} \psi &= F(z, \bar{z}, a(z)), \\ \psi_0 &= F(z, \bar{z}, a(z)) = 0. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Ao restringir  $\psi$  à isolinha  $\psi_0$ , a relação  $g = 0$  que define a fronteira do sólido também deve ser respeitada. Como  $x = x(z, \bar{z})$  e  $y = y(z, \bar{z})$ ,  $g(x, y) = 0$  implica que  $\hat{g}(z, \bar{z}) = 0$  para uma certa  $\hat{g}$ , relação que resolvida para  $\bar{z}$  fornece  $\bar{z} = \hat{h}(z)$  para uma certa  $\hat{h}$ . Utilizando essas relações em (5.12) é possível resolver  $F$  em termos de  $a(z)$ :

$$\begin{aligned} F(z, \hat{h}(z), a(z)) &= 0, \\ a(z) &= H(z). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Feito isso,  $\psi$  fica resolvida como  $\psi = \hat{F}(z, \bar{z})$  ou  $\psi = \hat{G}(x, y)$ , e o perfil de velocidades está totalmente determinado para a geometria proposta.

## 6 RESULTADOS E DISCUSSÃO

### 6.1 Análise da condição de não deslizamento e deslizamento irrestrito

A metodologia descrita na seção 5 foi implementada através do sistema algébrico computacional Maple 2015™. As especificações principais do computador utilizado são as seguintes:

- Processador Intel(R) Core(TM) i5-3230M CPU @ 2.60Ghz

- 8 GB de memória RAM

A geometria escolhida foi um cilindro com seção transversal circular de raio  $R$  conforme mostram as Figuras 6.1,6.2. Nessas circunstâncias, a função  $\hat{g}$  imposta fica  $\hat{g}(z, \bar{z}) = z\bar{z} - R = 0$ . A aplicação dessa condição de contorno à equação (5.9) fornece a expressão explícita para  $\psi$ :

$$\begin{aligned}\psi &= -2\nu \arctan(B(x, y), A(x, y)) + Uy, \\ B &= e^{\frac{1}{2}\frac{Ux}{\nu}} \sin\left(\frac{1}{2}\frac{Uy}{\nu}\right)(x^2 + y^2) + x^2y + y^3 - R^2y, \\ A &= e^{\frac{1}{2}\frac{Ux}{\nu}} \cos\left(\frac{1}{2}\frac{Uy}{\nu}\right)(x^2 + y^2) - x^3 - xy^2 + R^2x.\end{aligned}\quad (6.1)$$

Essa expressão foi obtida a partir de um código que resolve a equação diferencial (5.8) e plota as linhas de corrente, e recebe como entrada a função  $g = 0$  que define a geometria do corpo submerso. Para os resultados a seguir, processamento e pós processamento de cada caso levam em média 20 segundos para completar a execução do código. A Figura (6.1) apresenta as linhas de fluxo obtidas plotando 5.11 utilizando viscosidade cinemática  $\nu = 0.0065\text{m}^2/\text{s}$ ,  $R = 1\text{m}$  e  $U = 0.01\text{m}/\text{s}$ . É possível notar a bem definida formação do duplo vórtice à jusante do cilindro e a separação das linhas de fluxo que envolvem a esteira formada. A Figura (6.2) mostra o que ocorre quando do aumento da viscosidade: a região de influência do não deslizamento se torna mais extensa, e com isso aumenta também o tamanho dos vórtices gerados à jusante.

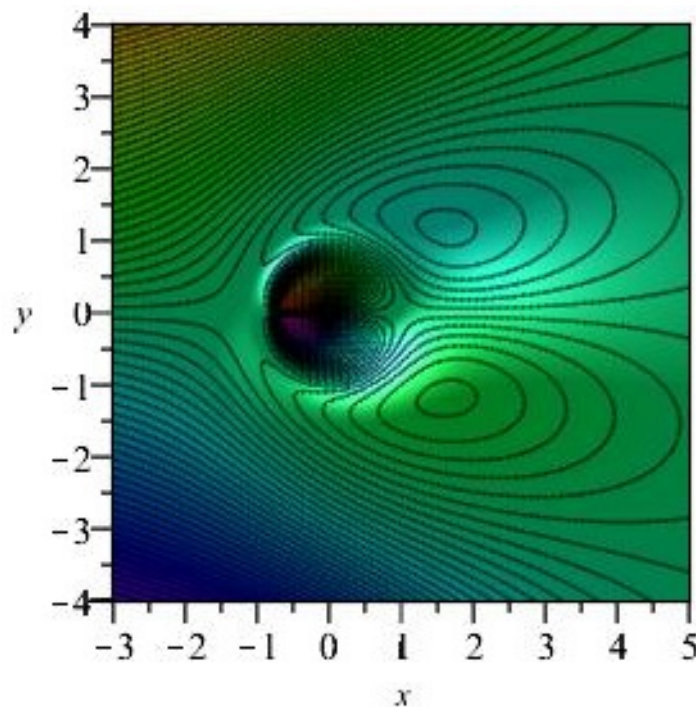


Figura 6.1 – Linhas de corrente para  $\nu = 0.0065\text{m}^2/\text{s}$ ,  $R = 1\text{m}$ ,  $U = 0.01\text{m}/\text{s}$  e  $Re_D = 3,07$ . Existe duplo vórtice ainda que deslizamento entre fluido e sólido esteja presente.

A comparação direta da Figura 1.1 com as Figuras 6.1, 6.2 indica que, embora as principais características do escoamento tenham sido reproduzidas com sucesso, o tamanho dos vórtices à jusante obtido nas simulações parece exagerado em relação ao tamanho do corpo

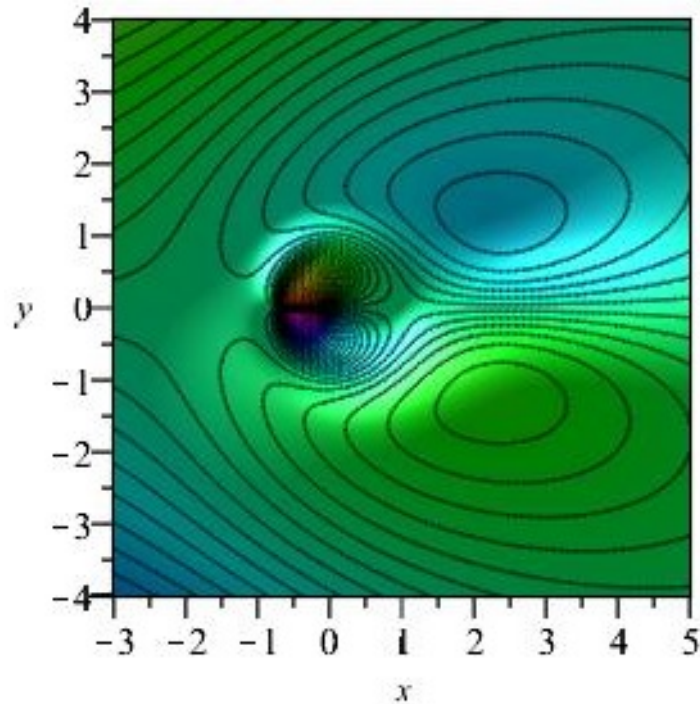


Figura 6.2 – Linhas de corrente para  $\nu = 0.009$ ,  $R = 1\text{m}$ ,  $U = 0.01\text{m/s}$  e  $Re_D = 2,22$ . Dependência do tamanho dos vórtices em relação à viscosidade. A alta viscosidade combinada a existência de deslizamento gera um padrão de recirculação à montante do cilindro.

submerso. É natural questionar se a aparente incongruência é fruto da hipótese fundamental do trabalho de modelar um escoamento sem a imposição da condição de não deslizamento. Para investigar se é isso que ocorre, a equação diferencial foi resolvida novamente aplicando a condição  $\mathbf{u} = 0$  na interface sólido-fluido. O resultado pode ser visto na Figura 6.3: ainda existe o efeito de expulsão das linhas de corrente suficiente para descolá-las do corpo submerso em um certo ponto, entretanto, este não é capaz de gerar as estruturas vorticais à jusante. Fisicamente, pode-se interpretar que nessa solução a corrente de retorno que se opõe ao escoamento principal não é capaz de produzir os vórtices responsáveis pelo adiantamento do ponto de separação da camada limite. A existência de uma parcela do campo  $\psi$  que represente essa corrente de retorno é justamente o que gera o duplo vórtice à jusante. Tais resultados são indício de que tanto a condição de não deslizamento quanto a ausência de restrições representam situações limite da condição física mais fiel à natureza.

## 6.2 Análise de simetrias de escala

Os resultados obtidos na seção 6.1 não se mostraram satisfatórios a despeito da condição de contorno utilizada. É possível, entretanto, estudar uma variedade maior de soluções além das obtidas anteriormente. É descrito a seguir um processo que acrescenta uma variável arbitrária à solução (6.1) sem violar a equação diferencial (5.8). A análise consiste em utilizar uma simetria de (5.8). Caso os resultados obtidos representem escoamentos fisicamente realistas, é possível que forneçam indícios de qual a condição de contorno mais adequada à resolução do problema.



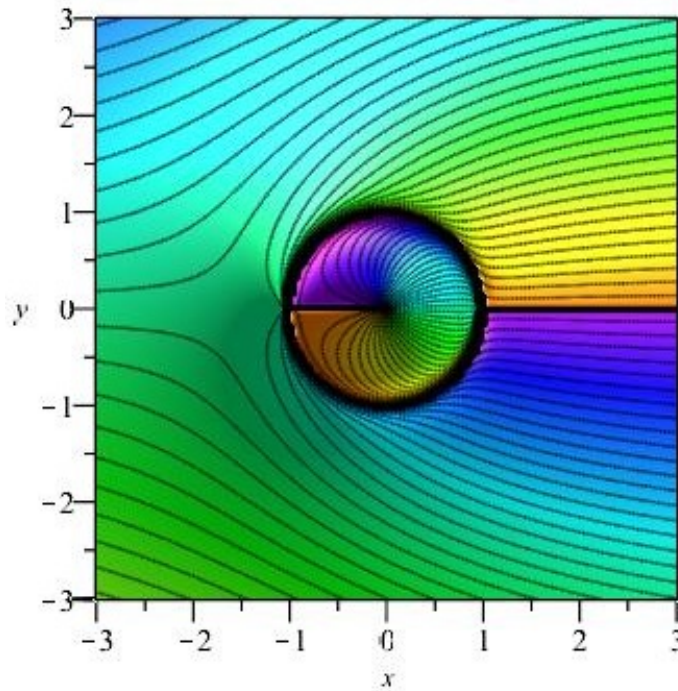


Figura 6.3 – Linhas de corrente para  $\nu = 0.0065\text{m}^2/\text{s}$ ,  $R = 1\text{m}$ ,  $U = 0.01\text{m/s}$  e  $Re_D = 3,07$ . A imposição da condição de não deslizamento inibe a existência do duplo vórtice à jusante. As linhas de corrente parecem divergir à justante, o que depõe contra a fisibilidade da solução.

Considera-se a transformação de variáveis:

$$\begin{aligned} f' &= \frac{1}{k}f, \\ \bar{z}' &= k\bar{z}, \end{aligned} \quad (6.2)$$

sendo  $k$  uma constante. Observe que a definição de  $f$  implica que  $f \propto U$ , e analogamente  $z \propto R$ . Considerando uma definição usual de número de Reynolds para escoamento sobre cilindros,  $Re = \frac{2UR}{\nu}$ , percebe-se que a transformação não altera  $Re$ , portanto qualquer mudança nas soluções é fruto de novas restrições à equação diferencial, e não consequência da variação em escoamentos com diferentes números de Reynolds. A transformação (6.2) aplicada sobre (5.8) resulta:

$$f^2 - 4\nu \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = (kf')^2 - 4\nu \overbrace{\frac{\partial \bar{z}'}{\partial \bar{z}}}^{=k} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (kf') = f'^2 - 4\nu \frac{\partial f'}{\partial \bar{z}'} = 0. \quad (6.3)$$

De acordo com o que foi visto na seção 4.1, isso significa que (6.2) é uma simetria admitida pela equação diferencial e que leva uma certa solução  $f$  para uma outra solução  $f'$ . De fato, cada  $k$  corresponde a uma diferente solução  $\psi(k)$  de uma família de soluções de (6.3), e esse novo parâmetro corresponde a reincorporação de um dos graus de liberdade descartados quando da solução de (5.8), especificamente, de  $c(\bar{z})$ . A transformação (6.2) foi aplicada sobre (6.1), e o escoamento resultante para  $k = 0.78$  pode ser visto na Figura 6.4. A formação dos vórtices ainda está presente, entretanto, o tamanho destes é mais razoável em comparação aos resultados apresentados nas Figuras 6.1, 6.2. Ainda sim, a área de recirculação ainda

é exagerada em relação ao padrão mais realista observável na Figura 1.1, além do número de Reynolds ser muito baixo para apresentar vórtices tão grandes em relação ao tamanho do cilindro.

Dado que o emprego do parâmetro  $k$  permite situar o comportamento da solução entre os extremos tanto do travamento total quanto deslizamento total, é razoável indagar se a condição mais realista não seja a que prescreve o grau de escorregamento do fluido, ou seja, que relacione o valor da função corrente com sua derivada na fronteira:

$$\psi = c \frac{\partial \psi}{\partial n}. \quad (6.4)$$

Aqui  $c$  é uma constante e  $n$  é uma coordenada curvilínea cuja orientação é sempre perpendicular à parede do corpo submerso. A expressão (2.1), por exemplo, é usual em casos típicos de escorregamento como escoamento de gases cujo percurso livre médio das moléculas é da ordem de alguma das dimensões características do modelo (LAUGA *et al.*, 2007) e representa uma condição de contorno abarcada por (6.4)<sup>2</sup>.

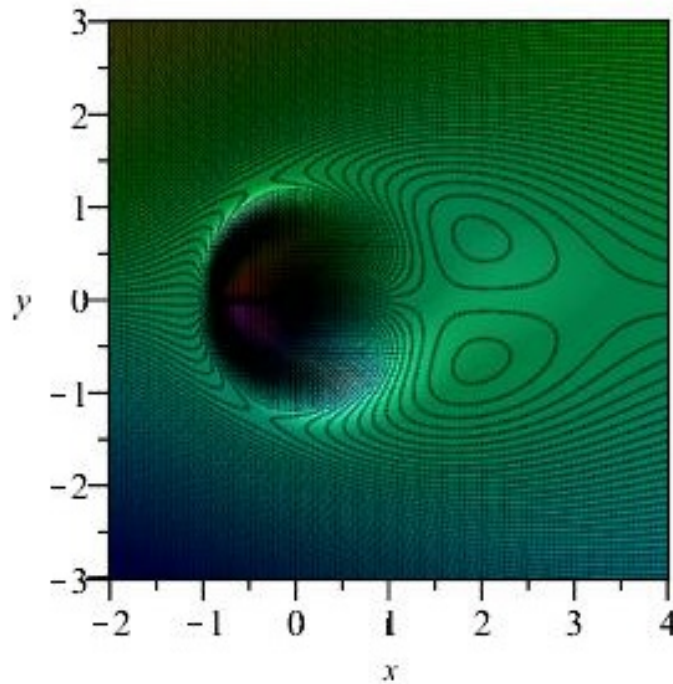


Figura 6.4 – Linhas de corrente para  $\nu = 0.0065\text{m}^2/\text{s}$ ,  $R = 1.13\text{m}$ ,  $U = 0.01\text{m/s}$ ,  $k = 0.78$  e  $Re_D = 3,48$ . Deslizamento parcial.

Quanto às restrições do modelo, um olhar mais atento para a equação (6.1) permite identificar a presença de  $\arctan(B, A)$ , inversa de uma função periódica. Essa função retorna o argumento  $\text{Arg}(Z)$  do número complexo  $Z = A + iB$ , ou seja, o ângulo definido por  $Z$  no plano complexo em relação ao eixo  $x$  (sentido anti-horário), e tem contradomínio definido em  $(-\pi, \pi)$ . Isso significa que  $\text{Arg}(Z)$  apresenta uma descontinuidade cada vez que a trajetória de  $Z$  passa sobre o eixo  $x$  negativo, o que representa uma limitação da formulação obtida. A discretização do domínio permite corrigir essa distorção, embora restrições de tempo não tenham permitido que tal solução fosse aplicada nesse trabalho. A Figura 6.5 permite ver as descontinuidades presentes na solução.

<sup>2</sup> Como  $u = \nabla \times \psi$ , basta aplicar o rotacional sobre (6.4) para retomar a expressão mostrada na página 1.

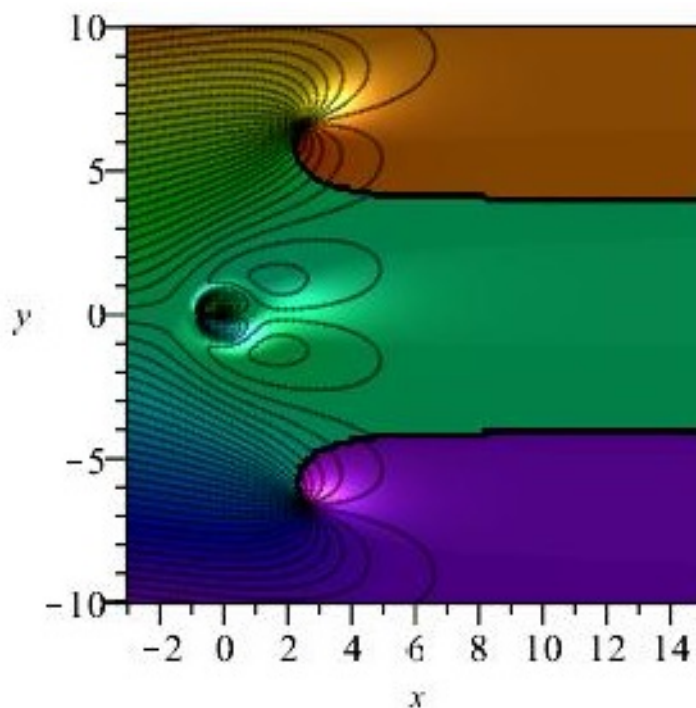


Figura 6.5 – Descontinuidades devido a multivaloração da função arcotangente.

## 7 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho foi utilizada a forma fatorada da equação de Helmholtz para obter a solução analítica do escoamento bidimensional incompressível em regime permanente e a baixo número de Reynolds de um fluido viscoso sobre um cilindro de seção transversal circular. A solução reproduz características típicas de escoamentos viscosos sem utilizar a condição de não deslizamento sobre a superfície sólida, e foi obtida a partir da integração da função corrente em termos de uma variável complexa.

Os resultados indicam que é possível obter soluções analíticas capazes de reproduzir as principais características apresentadas por escoamentos viscosos sem assumir a condição de não deslizamento, entretanto, estas não concordam com escoamentos reais para um mesmo número de Reynolds em uma série de parâmetros:

- Localização do ponto de descolamento da camada limite.
- Tamanho do duplo vórtice à jusante do cilindro.
- Extensão total da esteira à jusante do cilindro no caso em que não se forma duplo vórtice.
- Área de recirculação excessivamente avançada em direção à montante do cilindro.

De forma a obter um entendimento mais profundo da relação do modelo utilizado com suas hipóteses simplificativas, sugere-se que trabalhos futuros investiguem:

- Forma mais eficiente de lidar com descontinuidades do domínio, preferencialmente um método que evite sua discretização.
- Extensão da análise do método sem assumir qual a relação entre campo de pressão e velocidades, de forma a determinar se esse é o fator que gera as discrepâncias físicas do resultado.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BATCHELOR, G. K. *An introduction to fluid dynamics*. [S.l.]: Cambridge university press, 2000.
- BECK, D. Soluções exatas para a equação de helmholtz bidimensional em regime transiente. 2005.
- BLUMAN, G.; KUMEI, S. *Symmetries and differential equations*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 154.
- DRESNER, L. *Applications of Lie's theory of ordinary and partial differential equations*. [S.l.]: CRC Press, 1998.
- DYKE, M. V. *An album of fluid motion*. Parabolic Press Stanford, 1982.
- FERNÁNDEZ, L. C. Simulação da propagação de poluentes utilizando transformação de bäcklund-modelo bidimensional. 2007.
- GOLDSTEIN, S. *Modern developments in fluid dynamics: an account of theory and experiment relating to boundary layers, turbulent motion and wakes*. [S.l.]: Clarendon Press, 1938. v. 2.
- IBRAGIMOV, N. H. *Lie Group Analysis: Classical Heritage*. [S.l.]: School of Engineering-Dept. Mathematics and Science/Blekinge Institute of Technology, 2004.
- KUNDU, P. K.; COHEN, I. M. *Fluid mechanics. 4th*. [S.l.]: ELSEVIER, Oxford, 2008.
- LAUGA, E.; BRENNER, M.; STONE, H. Microfluidics: the no-slip boundary condition. In: *Springer handbook of experimental fluid mechanics*. [S.l.]: Springer, 2007. p. 1219–1240.
- MALISKA, C. R. *Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional: fundamentos e coordenadas generalizadas*. [S.l.]: Livros Técnicos e Científicos, 1994.
- RICHARDSON, L. *Weather prediction by numerical process*. Cambridge: University Press, 1922.
- ROGERS, C.; SCHIEF, W. K. *Bäcklund and Darboux transformations: geometry and modern applications in soliton theory*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2002. v. 30.
- SCHLICHTING, H. *Boundary layer theory*. McGraw-Hill, 1979.
- SPEROTTO, F. A. *Soluções de equações advectivo-difusivas utilizando Split, série geométrica e transformação de Bäcklund*. Tese (Doutorado) — UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL, 2007.
- ZWILLINGER, D. *Handbook of differential equations*. [S.l.]: Gulf Professional Publishing, 1998. v. 1.

## APÊNDICES

## 1 RELAÇÃO DA HIPÓTESE SIMPLIFICATIVA COM A VARIAÇÃO DO CAMPO DE PRESSÃO

A equação de Helmholtz é uma equação diferencial de ordem superior às equações de Navier-Stokes, já que resulta de uma operação de derivação sobre essa última. Em termos mais simples, a derivada de ordem mais alta em Navier-Stokes é de segunda ordem, enquanto na equação de Helmholtz existem derivadas de terceira ordem. As equações de Navier-Stokes para escoamento incompressível em duas dimensões são dadas por:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right). \quad (1.2)$$

Já a equação de Helmholtz:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) = \nu \left[ \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{\partial^2}{\partial xy} \left( \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right]. \quad (1.3)$$

Logo, fazer uma redução de ordem na equação de Helmholtz( de 3ª para 2ª ordem) significa retomar as equações de Navier-Stokes caso o objetivo seja continuar trabalhando com o mesmo espaço de soluções de (1.1),(1.2). Conforme desenvolvido na seção 4.2, a forma fatorada da equação de Helmholtz é dada pela expressão:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\omega = \nu \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y}, \quad (1.4)$$

$$-\frac{\partial u}{\partial t} + v\omega = \nu \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}. \quad (1.5)$$

Assim, a igualdade entre as soluções de (1.1), (1.2) e (1.4), (1.5) é imposta igualando (1.1) a (1.4) e (1.2) a (1.5). Dessa forma, é possível identificar, por exemplo, qual a forma de  $\frac{\partial q}{\partial y}(t, x, y)$  que associa a expressão (1.4) à lei de conservação da quantidade de movimento na direção  $y$  conforme dado por (1.2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u\omega &= \nu \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} - u \frac{\partial u}{\partial y} &= \nu \left[ \frac{\partial v}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial q}{\partial y}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \underbrace{u \cdot \nabla v}_{= \mathbf{u} \cdot \nabla v} \left( + v \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \underbrace{u \frac{\partial u}{\partial y}}_{= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})} &= \nabla^2 v + \frac{\partial q}{\partial y}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla v &= \left[ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \right] + \nabla^2 v + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) + \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \right], \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla v &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nabla^2 v + \left( \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Na segunda linha foram usadas a definição de  $\omega$  e a equação da continuidade, na terceira linha incorporou-se  $v \frac{\partial v}{\partial y}$  de forma a identificar a aceleração advectiva e a derivada da energia cinética por unidade de volume, na quarta linha incorporou-se o termo da pressão e na última linha foi identificada a exigência que torna as expressões (1.2) e (1.4) idênticas. O procedimento para

a quantidade de movimento na direção  $x$  é análogo e resulta que o gradiente de  $q$  pode ser identificado como:

$$\nabla q = -\nabla\left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}\right). \quad (1.7)$$

Portanto, a hipótese de que a variação da pressão obedece a uma expressão do tipo equação de Bernoulli implica que  $\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y} = 0$ , justificando assim o emprego das equações apresentadas na seção 5 para regime permanente:

$$\begin{aligned} u\omega &= \nu \frac{\partial \omega}{\partial x}, \\ v\omega &= \nu \frac{\partial \omega}{\partial y}. \end{aligned} \quad (1.8)$$