

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**Análise de Erros de Métodos Discretos
para Problemas de Contorno em Malhas
Arbitrárias**

por

Greice da Silva Lorenzzetti

Dissertação submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de
Mestre em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Paulo Ricardo de Ávila Zingano
Orientador

Profa. Dra. Janaína Pires Zingano
Co-orientadora

Porto Alegre, 9 de junho de 2008.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Lorenzetti, Greice da Silva

Análise de Erros de Métodos Discretos para Problemas de Contorno em Malhas Arbitrárias / Greice da Silva Lorenzetti.—Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2008.

117 p.: il.

Dissertação (mestrado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2008.

Orientador: Zingano, Paulo Ricardo de Ávila; Coorientadora: Zingano, Janaína Pires

Dissertação: Matemática Aplicada
malhas arbitrárias, análise de erros, métodos discretos

Análise de Erros de Métodos Discretos para Problemas de Contorno em Malhas Arbitrárias

por

Greice da Silva Lorenzzetti

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em
Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade
Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a
obtenção do grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Análise Numérica

Orientador: Prof. Dr. Paulo Ricardo de Ávila Zingano

Co-orientadora: Profa. Dra. Janaína Pires Zingano

Banca examinadora:

Prof. Dr. Álvaro Luiz de Bortoli
PPGMAp/IM/UFRGS-RS

Prof. Dr. Leonardo Prange Bonorino
PPGMAT/IM/UFRGS-RS

Prof. Dr. Oclide José Dotto
DEME/CCET/UCS-RS

Dissertação apresentada e aprovada em
9 de junho de 2008.

Profa. Dra. Maria Cristina Varriale
Coordenadora

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todas as pessoas que estiveram presentes comigo e fizeram parte tão construtivamente desta etapa, acompanhando, direta ou indiretamente, todo o processo de obtenção do grau de Mestre em Matemática Aplicada.

A Deus por ter posto em meu caminho professores maravilhosos, desde minha infância e adolescência, com os quais despertei o gosto pela Matemática e aprendi, principalmente, a ser persistente, dedicada e a acreditar em meus sonhos.

No Curso de Licenciatura Plena em Matemática da UCS, convivi com professores exemplares, com os quais descobri um novo mundo. A Matemática que naquela ocasião conheci, tornou meus dias mais coloridos e mais cheios de vida. Foi onde delicieei-me com os diferentes sabores da Matemática e da Física. Estes professores estarão sempre guardados em meu coração por me terem propiciado momentos inesquecíveis, não só de aprendizados científicos, mas também de companheirismo, incentivo e, principalmente, amizade.

Agradeço em especial aos sábios e respeitados conselhos do professor Dr. Oclide José Dotto da UCS que, além de meu grande professor e orientador de iniciação científica na graduação, foi, e sempre será, um grande amigo que incentivou e torceu pelo meu desenvolvimento durante o Curso de Mestrado em Matemática Aplicada do PPGMAp da UFRGS.

Aos excelentes professores da UFRGS que me acompanharam nesta etapa de preenchimento de lacunas, de crescimento intelectual e, principalmente, crescimento pessoal. Aos professores Doutores Jacques Aveline Loureiro da Silva, Leandro Farina

e Manuela Longoni de Castro, que sempre demonstraram-se dispostos a colaborar em minha caminhada. Aos professores Doutores Paulo Ricardo de Ávila Zingano e Janaína Pires Zingano que estiveram efetivamente presentes na realização deste trabalho, com suas contribuições sábias e indispensáveis.

Por fim, aos pilares da minha vida, a família maravilhosa que, apesar da distância nestes dois anos de curso, esteve constantemente presente em meus pensamentos e em meu coração. Tenho apenas motivos para agradecer pela forma com que meus pais, Valdivino Pedro Lorenzetti e Maria Leda da Silva Lorenzetti, cuidaram, criaram e amaram minha irmã Priscila da Silva Lorenzetti e eu. Estes são três exemplos de vida que sempre lutaram pelos seus sonhos, pensando na felicidade de nossa família.

Deus presenteou-me com uma família linda, professores magníficos e competentes, amigos e colegas com quem estudei incontáveis horas diárias e, para completar tamanha felicidade, colocou-me ao encontro do meu amor, André Augusto Andreis, que sempre foi amoroso, compreensível com meus estudos e incentivador em minha caminhada.

Obrigada a todas estas pessoas que me acompanharam até aqui.

Obrigada de coração.

Conteúdo

AGRADECIMENTOS	iv
LISTA DE FIGURAS	viii
LISTA DE SIGLAS	xi
RESUMO	xii
ABSTRACT	xiii
1 INTRODUÇÃO	1
2 MÉTODO MIMÉTICO DE SEGUNDA ORDEM - MIM02 . . .	6
2.1 Introdução	6
2.2 Análise dos Erros de Solução e de Derivada de Primeira Ordem para $q(x) = 0$	14
2.3 Análise dos Erros de Solução e de Derivada de Primeira Ordem para $q(x) \geq 0$	27
2.4 Análise do Erro da Derivada de Segunda Ordem	32
2.5 Resultados Numéricos	40
3 MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS DE SEGUNDA ORDEM - FEM02	57
3.1 Introdução	57
3.2 Análise dos Erros de Solução e de Derivada de Primeira Ordem para $q(x) = 0$	72
3.3 Análise dos Erros de Solução e de Derivada de Primeira Ordem para $q(x) \geq 0$	80
3.4 Análise do Erro da Derivada de Segunda Ordem	81
3.5 Resultados Numéricos	86
4 CONSIDERAÇÕES FINAIS	97

BIBLIOGRAFIA 115

Lista de Figuras

Figura 1 - Malha com os nodos x_i , centro das células $x_{i-\frac{1}{2}}$ e comprimentos $L_{i-\frac{1}{2}}$ e h_i .

Figura 2a - Representação gráfica do erro de solução decorrente do MIM02 para o problema de *Sturm-Liouville* com condições de contorno de *Dirichlet-Dirichlet*.

Figura 2b - Representação gráfica dos erros de solução e derivada de primeira ordem decorrentes do MIM02 para o problema de *Sturm-Liouville* com condições de contorno de *Dirichlet-Dirichlet*.

Figura 2c - Representação gráfica dos erros de derivada de primeira e segunda ordens decorrentes do MIM02 para o problema de *Sturm-Liouville* com condições de contorno de *Dirichlet-Dirichlet*.

Figura 3a - Representação gráfica do erro de solução decorrente do MIM02 para o problema de *Sturm-Liouville* com condições de contorno de *Dirichlet-Neumann*.

Figura 3b - Representação gráfica dos erros de derivada de primeira e segunda ordens decorrentes do MIM02 para o problema de *Sturm-Liouville* com condições de contorno de *Dirichlet-Neumann*.

Figura 4a - Representação gráfica do erro de solução decorrente do MIM02 para o problema de *Sturm-Liouville* com condições de contorno de *Dirichlet-Robin*.

Figura 4b - Representação gráfica dos erros de derivada de primeira e segunda ordens decorrentes do MIM02 para o problema de *Sturm-Liouville* com condições de contorno de *Dirichlet-Robin*.

Figura 5a - Representação gráfica do erro de solução decorrente do MIM02 para o problema de *Sturm-Liouville* com condições de contorno de *Neumann-Robin*.

Figura 5b - Representação gráfica dos erros de derivada de primeira e segunda ordens decorrentes do MIM02 para o problema de *Sturm-Liouville* com condições de contorno de *Neumann-Robin*.

Figura 6a - Representação gráfica dos erros de solução e de derivada de primeira e segunda ordens decorrentes do MIM02 para o problema de *Sturm-Liouville* com condições de contorno de *Robin-Robin*.

Figura 6b - Representação gráfica dos erros de derivada de primeira e segunda ordens decorrentes do MIM02 para o problema de *Sturm-Liouville* com condições de contorno de *Robin-Robin*.

Figura 7 - Funções de base $\varphi_0, \dots, \varphi_i, \dots, \varphi_N$.

Figura 8a - Representação gráfica do erro de solução decorrente do FEM02 para o problema de *Sturm-Liouville* com condições de contorno de *Dirichlet-Dirichlet*.

Figura 8b - Representação gráfica dos erros de solução e derivada de primeira e segunda ordens decorrentes do FEM02 para o problema de *Sturm-Liouville* com condições de contorno de *Dirichlet-Dirichlet*.

Figura 9a - Representação gráfica do erro de solução decorrente do FEM02 para o problema de *Sturm-Liouville* com condições de contorno de *Dirichlet-Neumann*.

Figura 9b - Representação gráfica dos erros de solução e de derivada de primeira e segunda ordens decorrentes do FEM02 para o problema de *Sturm-Liouville* com condições de contorno de *Dirichlet-Neumann*.

Figura 10a - Representação gráfica do erro de solução decorrente do FEM02 para o problema de *Sturm-Liouville* com condições de contorno de *Dirichlet-Robin*.

Figura 10b - Representação gráfica dos erros de solução e de derivada de primeira e segunda ordens decorrentes do FEM02 para o problema de *Sturm-Liouville* com condições de contorno de *Dirichlet-Robin*.

Figura 11a - Representação gráfica do erro de solução decorrente do FEM02 para o problema de *Sturm-Liouville* com condições de contorno de *Neumann-Robin*.

Figura 11b - Representação gráfica dos erros de solução e de derivada de primeira e segunda ordens decorrentes do FEM02 para o problema de *Sturm-Liouville* com condições de contorno de *Neumann-Robin*.

Figura 12a - Representação gráfica do erro de solução decorrente do FEM02 para o problema de *Sturm-Liouville* com condições de contorno de *Robin-Robin*.

Figura 12b - Representação gráfica dos erros de solução e de derivada de primeira e segunda ordens decorrentes do FEM02 para o problema de *Sturm-Liouville* com condições de contorno de *Robin-Robin*.

Figura 13a - Erro de solução do MIM02 para malhas uniforme e não-uniforme.

Figura 13b - Componente global do erro de solução do MIM02 para malha não-uniforme.

Figura 14 - Erro de solução do FEM02 para malhas uniforme e não-uniforme.

Figura 15a - Erro de solução: MIM02 \times FEM02.

Figura 15b - Erro de solução: MIM02 \times FEM02.

Figura 16a - MIM02: Erro da derivada de 1ª ordem.

Figura 16b - FEM02: Erro da derivada de 1^a ordem.

Figura 17 - Erro da derivada de 1^a ordem: MIM02 \times FEM02.

Figura 18a - MIM02: Erro da derivada de 2^a ordem.

Figura 18b - FEM02: Erro da derivada de 2^a ordem.

Figura 19a - Erro da derivada de 2^a ordem: MIM02 \times FEM02.

Figura 19b - Erro da derivada de 2^a ordem: MIM02 \times FEM02.

LISTA DE SIGLAS

CCET	Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
DEME	Departamento de Matemática e Estatística
EDO	Equação Diferencial Ordinária
FEM02	Método de Elementos Finitos de Segunda Ordem (Finite Element Methods)
MIM02	Método Mimético de Segunda Ordem (Mimetic Methods)
PPGMAp	Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada
PPGMAT	Programa de Pós-Graduação em Matemática
UCS	Universidade de Caxias do Sul
UFRGS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul

RESUMO

Neste trabalho, examinamos detalhadamente um procedimento de análise, introduzido em [21] e desenvolvido em [11] e [18], para a investigação dos erros em malhas arbitrárias, decorrentes de métodos discretos (diferenças finitas e elementos finitos) de segunda ordem para problemas de *Sturm-Liouville* regulares, com condições de contorno tipo *Dirichlet*, *Neumann* ou *Robin* (ou combinações destas).

Esta análise nos permite obter estimativas finas sobre erros de solução e derivadas de primeira e segunda ordens. Aplicamos o procedimento em detalhe para o exame do método mimético discutido em [21] e do método de elementos finitos considerado em [18] e [11] (método de *Galerkin* com elementos seccionalmente lineares). Em particular, fenômenos de supraconvergência em ambos os métodos são observados e explicados facilmente a partir das estimativas desenvolvidas.

ABSTRACT

In the present work, we give a detailed discussion of the error analysis introduced in [21], and further developed in [11] and [18], of 2nd-order discrete methods (both finite-difference and finite element methods are considered here) for one-dimensional *Sturm-Liouville* problems with separated boundary conditions of *Dirichlet*, *Neumann*, or *Robin* type (or combinations of these).

Such an analysis yields very precise estimates for both solution and derivative errors in the approximations. Application is given to the analysis of the mimetic method discussed in [21], and the standard 2nd-order *Galerkin* method [18], [11] with piecewise linear elements. In particular, supraconvergence effects are clearly explained based on the estimates obtained by the theory.

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho, apresentamos detalhadamente um procedimento recentemente desenvolvido em [11], [18], [21], de análise de erros para aproximações discretas do problema de *Sturm-Liouville*

$$-\frac{d}{dx} \left(\mathbf{k}(x) \frac{d\mathbf{u}}{dx} \right) + \mathbf{q}(x) \mathbf{u}(x) = \mathbf{f}(x), \quad a < x < b, \quad (1.1)$$

$$\alpha_0 \mathbf{u}(a) - \alpha_1 \mathbf{u}'(a) = \gamma_a, \quad (1.2)$$

$$\beta_0 \mathbf{u}(b) + \beta_1 \mathbf{u}'(b) = \gamma_b, \quad (1.3)$$

onde $\mathbf{k}(x)$, $\mathbf{q}(x)$ e $\mathbf{f}(x)$ são funções dadas suaves, com $\mathbf{k}(x) > 0$, $\mathbf{q}(x) \geq 0$ em $[a, b]$, e α_0 , α_1 , β_0 e β_1 são constantes não negativas satisfazendo $\alpha_0 + \alpha_1 > 0$, $\beta_0 + \beta_1 > 0$ e $\alpha_0 + \beta_0 > 0$, sendo γ_a e γ_b constantes arbitrárias. Sob tais condições, é bem sabido que o problema acima tem uma única solução $\mathbf{u}(x)$, que em geral não pode ser obtida na forma explícita.

Para obter os valores $\mathbf{u}(x)$, recorre-se tipicamente a aproximações v^h obtidas por métodos discretos como diferenças finitas ou elementos finitos, associados a malhas de pontos $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$ em $[a, b]$. A questão fundamental nestas aproximações é estimar corretamente o erro cometido, $e^h = v^h - u^h$, onde u^h denota os valores exatos nos pontos da malha. Além disso, computada a aproximação v^h , pode-se obter a partir dela aproximações naturais para as derivadas de $\mathbf{u}(x)$ se desejado (por exemplo, $\mathbf{u}'(x)$ e $\mathbf{u}''(x)$), sendo de interesse estimar os erros destas aproximações. A qualidade e comportamento dos inúmeros métodos discretos disponíveis pode variar grandemente, e pequenas (aparentemente) diferenças no planejamento destes métodos pode acarretar grandes diferenças no desempenho resultante.

De modo geral, no caso do problema (1.1), (1.2), (1.3) os métodos de elementos finitos são referidos como aqueles produzindo os melhores resultados (comparados a procedimentos alternativos de complexidade equivalente) [4], [19]. Ocasionalmente, referências podem ser encontradas na literatura contestando tal afirmação [7], [8], [14], [16], [17]. No caso dos métodos examinados no presente trabalho (MIM02 e FEM02), pôde-se verificar a superioridade do uso de elementos finitos com relação aos erros de solução e^h , com a situação se invertendo para os erros de derivadas (particularmente derivadas de segunda ordem) em malhas não uniformes. Esta clara distinção torna-se possível graças às estimativas obtidas para os diversos erros, suficientemente finas para descrever o comportamento dos métodos MIM02 e FEM02.

Para a análise dos erros, diversas técnicas podem ser utilizadas, com grau de sucesso variável. Para métodos de diferenças finitas, os procedimentos tradicionais consistem em examinar as equações discretas correspondentes,

$$\mathbb{L}_h v^h = f^h, \quad (1.4)$$

onde \mathbb{L}_h é um operador discreto (linear) representando o problema (1.1), (1.2), (1.3) acima, em termos do "erro de truncamento", dado por

$$\mathbb{L}_h u^h = f^h + \tau^h, \quad (1.5)$$

onde u^h representa a solução exata $\mathbf{u}(x)$ em determinados pontos da malha. Segue então, por linearidade, que $e^h = v^h - u^h$ satisfaz o problema discreto

$$\mathbb{L}_h e^h = -\tau^h, \quad (1.6)$$

de onde, em princípio, e^h pode ser investigado. A equação (1.6) corresponde a um sistema de equações algébricas lineares, com solução dada por

$$e^h = -\mathbb{G}_h \tau^h, \quad \mathbb{G}_h = \mathbb{L}_h^{-1}, \quad (1.7)$$

onde \mathbb{G}_h é o chamado operador de *Green* correspondente ao método discreto considerado. Claramente, a investigação detalhada de \mathbb{G}_h permite estimar e^h adequadamente em muitos casos [15]. O exame mais simples da equação (1.7) pode ser

discutida do seguinte modo: introduzindo uma norma $|\cdot|_h$ para medir e^h , τ^h , e sendo $\|\cdot\|_h$ a norma de operador associada, isto é,

$$\|G\|_h = \sup_{|v|_h=1} |Gv|_h, \quad (1.8)$$

obtém-se de (1.7) que

$$|e^h|_h \leq \|\mathbb{G}_h\|_h \cdot |\tau^h|_h, \quad (1.9)$$

de modo que $|\tau^h|_h \rightarrow 0$ (isto é, (1.4) é *consistente*) ao $h \rightarrow 0$ (isto é, ao se refinar a malha) acarreta $|e^h|_h \rightarrow 0$ (isto é, (1.4) é *convergente*) se $\|\mathbb{G}_h\|_h$ se mantiver limitada (isto é, (1.4) é *estável*). Além disso, segue que e^h tem pelo menos a ordem de τ^h . Em malhas uniformes, é comum ocorrer que e^h e τ^h tenham exatamente a mesma ordem, e assim (1.9) descreve adequadamente o comportamento do erro e^h . Em malhas gerais, contudo, é comum e^h ter ordem mais alta que τ^h (isto é, (1.4) é *supraconvergente* [12], [17], [20]), e (1.9) é pouco adequada neste caso. Mais ainda, pode mesmo ocorrer $|\tau^h|_h \not\rightarrow 0$ ao $h \rightarrow 0$ e (1.4) ser convergente, a ponto de ser competitivo com os métodos mais populares. Esta é a situação do método mimético MIM02, cuja análise é apresentada no *Capítulo 2*.

No *Capítulo 2*, descrevemos o método mimético MIM02 para (1.1), (1.2), (1.3) discutido em [8], [11], [18], [21] e analisamos detalhadamente suas propriedades de convergência. Este método é dito mimético por ser escrito na forma

$$-\mathcal{D}(k^h \cdot \mathcal{G}v^h) + q^h \cdot v^h = f^h, \quad (1.10)$$

para projeções apropriadas k^h , q^h , f^h de $\mathbf{k}(x)$, $\mathbf{q}(x)$, $\mathbf{f}(x)$ sobre a malha, e onde \mathcal{D} e \mathcal{G} são operadores de diferenças satisfazendo

$$\sum_{i=0}^N w_i (\mathcal{G}v)_i h_i = w_N v_N - w_0 v_0 - \sum_{i=1}^N (\mathcal{D}w)_{i-\frac{1}{2}} v_{i-\frac{1}{2}} L_{i-\frac{1}{2}}, \quad (1.11)$$

para funções de malha $w^h = \{w_i, 0 \leq i \leq N\}$ e $v^h = \{v_{i-\frac{1}{2}}, 0 \leq i \leq N+1\}$ quaisquer, com $L_{i-\frac{1}{2}} = x_i - x_{i-1}$, $h_i = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ os

pontos da malha, $x_{i-\frac{1}{2}} = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$, $x_{-\frac{1}{2}} \equiv x_0$ e $x_{N+\frac{1}{2}} \equiv x_N$, imitando (e daí o termo *mimético*) na forma discreta a propriedade fundamental (integração por partes)

$$\int_a^b \mathbf{w}(x) \mathbf{v}'(x) dx = \mathbf{w}(b) \mathbf{v}(b) - \mathbf{w}(a) \mathbf{v}(a) - \int_a^b \mathbf{w}'(x) \mathbf{v}(x) dx, \quad (1.12)$$

válida para $\mathbf{w}(x), \mathbf{v}(x) \in C^1([a, b])$ quaisquer. Esta estrutura mimética é utilizada em [8], [21] para estabelecer a convergência de MIM02 em malhas arbitrárias, sendo mostrado que

$$|e^h|_2 = O(\hbar), \quad (1.13)$$

onde \hbar é a medida de espaçamento da malha dado por

$$\hbar = \sqrt{\sum_{i=1}^N L_{i-\frac{1}{2}}^3}, \quad (1.14)$$

e $|\cdot|_2$ denota a norma euclidiana. Em [18], a análise foi modificada de modo a obter o resultado de segunda ordem

$$e_{i-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{8} u''(x_{i-\frac{1}{2}}) L_{i-\frac{1}{2}}^2 + O(\hbar^2), \quad 1 \leq i \leq N, \quad (1.15)$$

com $e_0 = O(\hbar^2)$ e $e_N = O(\hbar^2)$, que corresponde ao comportamento exato observado nos experimentos, em qualquer malha. A derivação de (1.15) é feita no *Capítulo 2* considerando primeiramente o caso $\mathbf{q}(x) = 0$ (*Seção 2.2*), posteriormente estendido a $\mathbf{q}(x) \geq 0$ na *Seção 2.3*. Antes de obter (1.15), é necessário estimar os erros de derivada $E = \mathcal{G}v - u'$, que satisfazem

$$E_i = O(\hbar^2), \quad 0 \leq i \leq N. \quad (1.16)$$

No *Capítulo 3*, o mesmo tipo de análise é desenvolvida em detalhe para o estudo dos erros de aproximação no caso do método de *Galerkin* com elementos triangulares, FEM02 [19]. Na *Seção 3.1*, revisamos a construção do FEM02 seguindo [19], e a seguir iniciamos a análise de erros seguindo a mesma marcha do capítulo precedente, examinando os erros e^h (erro de solução) e E^h (erro da derivada de primeira ordem) inicialmente no caso mais fácil $\mathbf{q}(x) = 0$ (*Seção 3.2*), e utilizando estes resultados

para investigar o caso $\mathbf{q} \geq 0$ (*Seção 3.3*). Na *Seção 3.4*, mostramos que os erros da derivada de segunda ordem satisfazem estimativas de primeira ordem apenas (em malhas não suaves),

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_i &= \left(\frac{1}{6} \frac{k'_i}{k_i} u''_i + \frac{1}{3} u'''_i \right) \left(L_{i+\frac{1}{2}} - L_{i-\frac{1}{2}} \right) \\ &+ O(L_{i-\frac{1}{2}}^2) + O(L_{i+\frac{1}{2}}^2) + O(\hbar^2), \quad 1 \leq i \leq N-1, \end{aligned} \tag{1.17}$$

em contraste com MIM02. Vários experimentos numéricos são apresentados na *Seção 3.5*, confirmando os resultados teóricos integralmente.

Finalmente, no *Capítulo 4*, fazemos considerações finais a respeito dos dois métodos, comparando seu desempenho a partir dos resultados teóricos e ilustrando com experimentos numéricos.

2 MÉTODO MIMÉTICO DE SEGUNDA ORDEM - MIM02

2.1 Introdução

Consideremos o problema regular de *Sturm-Liouville* com condições de contorno separáveis,

$$-\frac{d}{dx} \left(\mathbf{k}(x) \frac{d\mathbf{u}}{dx} \right) + \mathbf{q}(x) \mathbf{u}(x) = \mathbf{f}(x), \quad a < x < b, \quad (2.1)$$

$$\alpha_0 \mathbf{u}(a) - \alpha_1 \mathbf{k}(a) \mathbf{u}'(a) = \gamma_a, \quad (2.2)$$

$$\beta_0 \mathbf{u}(b) + \beta_1 \mathbf{k}(b) \mathbf{u}'(b) = \gamma_b, \quad (2.3)$$

com γ_a e γ_b constantes quaisquer, $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0$ e β_1 constantes dadas satisfazendo $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1 \geq 0$, $\alpha_0 + \alpha_1 > 0$, $\beta_0 + \beta_1 > 0$ e $\alpha_0 + \beta_0 > 0$, e onde $\mathbf{k}(x)$, $\mathbf{q}(x)$ e $\mathbf{f}(x)$ são funções suaves dadas, com $\mathbf{k}(x) > 0$ e $\mathbf{q}(x) \geq 0$ para todo x no intervalo $[a, b]$.

Para a discretização de (2.1), (2.2), (2.3), criemos uma malha arbitrária no intervalo $[a, b]$, com $N + 1$ pontos $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$, chamados *nodos*, que dividem $[a, b]$ em N subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, ou *células*, com comprimento $L_{i-\frac{1}{2}} = x_i - x_{i-1}$, cujo centro é denotado por $x_{i-\frac{1}{2}}$, $1 \leq i \leq N$. Convenientemente, assumamos que $x_{-\frac{1}{2}} \equiv 0$, $L_{-\frac{1}{2}} \equiv 0$, $x_{N+\frac{1}{2}} \equiv x_N$, $L_{N+\frac{1}{2}} \equiv 0$, e associemos cada comprimento local entre os centros, com $h_i := x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$, isto é,

$$h_i := \frac{L_{i-\frac{1}{2}} + L_{i+\frac{1}{2}}}{2}, \quad 0 \leq i \leq N. \quad (2.4)$$

Esta notação para os diversos pontos de malha e comprimentos é ilustrada na *Fig. 1*.

¹Esta notação provém de [7] e [16].

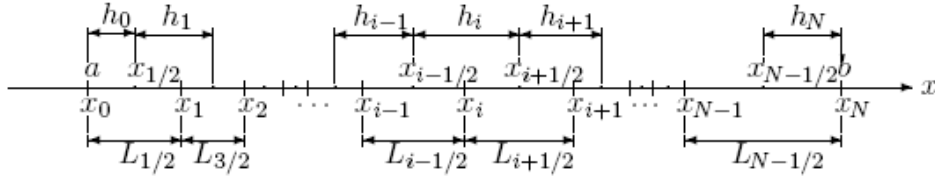


Figura 1 - Malha com os nodos x_i , centro das células $x_{i-\frac{1}{2}}$ e comprimentos $L_{i-\frac{1}{2}}$ e h_i .

Finalmente, construíamos o conjunto dos centros das células $\mathcal{C} = \{x_{i-\frac{1}{2}} : 1 \leq i \leq N\}$, o conjunto estendido $\bar{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \cup \{x_0, x_N\}$, o conjunto dos nodos da malha $\mathcal{N} = \{x_i : 0 \leq i \leq N\}$, e os espaços correspondentes das funções de malha

$$\mathcal{H}_{\mathcal{C}} = \{w : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}\}, \quad \mathcal{H}_{\bar{\mathcal{C}}} = \{w : \bar{\mathcal{C}} \rightarrow \mathbb{R}\}, \quad \mathcal{H}_{\mathcal{N}} = \{w : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}\}, \quad (2.5)$$

e projeções $\mathbb{P}_{\mathcal{C}} : C^0([a, b]) \rightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{C}}$, $\mathbb{P}_{\bar{\mathcal{C}}} : C^0([a, b]) \rightarrow \mathcal{H}_{\bar{\mathcal{C}}}$, $\mathbb{P}_{\mathcal{N}} : C^0([a, b]) \rightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{N}}$, que podem ser dadas por valores pontuais, médias nas células, etc. Como nossas funções são suaves, será irrelevante se usarmos valores pontuais ou valores médios, e vamos tomar $\mathbb{P}_{\mathcal{C}}(w)_{i-\frac{1}{2}} = \mathbb{P}_{\bar{\mathcal{C}}}(w)_{i-\frac{1}{2}} = w(x_{i-\frac{1}{2}})$, $1 \leq i \leq N$, $\mathbb{P}_{\bar{\mathcal{C}}}(w)_0 = w(x_0)$, $\mathbb{P}_{\bar{\mathcal{C}}}(w)_N = w(x_N)$, e $\mathbb{P}_{\mathcal{N}}(w)_i = w(x_i)$, $0 \leq i \leq N$, usando também w_i , $w_{i-\frac{1}{2}}$, para denotar os valores pontuais $w(x_i)$, $w(x_{i-\frac{1}{2}})$, e similarmente $w'_i = w'(x_i)$, $w''_{i-\frac{1}{2}} = w''(x_{i-\frac{1}{2}})$, e assim por diante, desde que w seja suficientemente suave.

Dados os pontos sobre a malha x_i , $x_{i-\frac{1}{2}}$, definamos dois operadores naturais de diferenças finitas: a derivada primeira discreta $\mathcal{D} : \mathcal{H}_{\mathcal{N}} \rightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{C}}$ (“divergente discreto”) dada por

$$(\mathcal{D}w)_{i-\frac{1}{2}} = \frac{w_i - w_{i-1}}{L_{i-\frac{1}{2}}}, \quad 1 \leq i \leq N, \quad (2.6)$$

aplicada a uma função nodal arbitrária $w \in \mathcal{H}_{\mathcal{N}}$, e derivada segunda discreta $\mathcal{G} : \mathcal{H}_{\bar{\mathcal{C}}} \rightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{N}}$ (“gradiente discreto”) dada por

$$(\mathcal{G}z)_i = \frac{z_{i+\frac{1}{2}} - z_{i-\frac{1}{2}}}{h_i}, \quad 0 \leq i \leq N, \quad (2.7)$$

agindo nas funções $z \in \mathcal{H}_{\bar{c}}$. Nosso esquema de diferenças para (2.1) consiste em encontrarmos a função de malha v^h (aproximação obtida para a solução \mathbf{u} , ou seja, projeção \mathbf{u}^h de \mathbf{u} sobre a malha), que satisfaz o problema discreto análogo,

$$-\mathcal{D}(k \cdot \mathcal{G}v^h) + q \cdot v^h = f, \quad (2.8)$$

onde $k = \mathbb{P}_{\mathcal{N}}(\mathbf{k})$, $q = \mathbb{P}_{\mathcal{C}}(\mathbf{q})$ e $f = \mathbb{P}_{\mathcal{C}}(\mathbf{f})$ são as projeções de \mathbf{k} , \mathbf{q} , \mathbf{f} em (2.1) para os espaços de funções discretas $\mathcal{H}_{\mathcal{N}}$ e $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}$, respectivamente, e \cdot indica a multiplicação ponto a ponto. Aqui, v_0 e v_N denotam os valores de v^h para os nodos $x_0 = a$ e $x_N = b$.

Usando (2.6) e (2.7) na equação (2.8), chegamos ao método numérico MIM02 (método mimético de segunda ordem),

$$\boxed{-\frac{k_{i-1}}{h_{i-1}} v_{i-\frac{3}{2}} + \left(\frac{k_{i-1}}{h_{i-1}} + \frac{k_i}{h_i} + q_{i-\frac{1}{2}} L_{i-\frac{1}{2}} \right) v_{i-\frac{1}{2}} - \frac{k_i}{h_i} v_{i+\frac{1}{2}} = L_{i-\frac{1}{2}} f_{i-\frac{1}{2}},} \quad (2.9)$$

onde $v_{i-\frac{1}{2}}$, com $1 \leq i \leq N$, são os valores de v^h , e k_i , $q_{i-\frac{1}{2}}$, $f_{i-\frac{1}{2}}$ são os valores pontuais $k_i = \mathbf{k}(x_i)$, $q_{i-\frac{1}{2}} = \mathbf{q}(x_{i-\frac{1}{2}})$ e $f_{i-\frac{1}{2}} = \mathbf{f}(x_{i-\frac{1}{2}})$.

Matematicamente, (2.8) é nada mais que um sistema de equações lineares algébricas, trivialmente resolvível em comparação com o problema original. De interesse fundamental aqui são os erros cometidos, $e^h \in \mathcal{H}_{\bar{c}}$ ("erro de solução"), $E^h \in \mathcal{H}_{\mathcal{N}}$ ("erro de gradiente"), e $\mathbb{E}^h \in \mathcal{H}_{\bar{c}}$ ("erro da derivada de segunda ordem"), definidos por $e^h = v^h - \mathbb{P}_{\bar{c}}(\mathbf{u})$, $E^h = \mathcal{G}v^h - \mathbb{P}_{\mathcal{N}}\left(\frac{d\mathbf{u}}{dx}\right)$, $\mathbb{E}^h = \mathcal{D}(\mathcal{G}v^h) - \mathbb{P}_{\bar{c}}\left(\frac{d^2\mathbf{u}}{dx^2}\right)$, isto é,

$$e_{i-\frac{1}{2}} = v_{i-\frac{1}{2}} - \mathbf{u}(x_{i-\frac{1}{2}}), \quad 0 \leq i \leq N+1, \quad (2.10)$$

$$E_i = (\mathcal{G}v^h)_i - \mathbf{u}'(x_i) = \frac{v_{i+\frac{1}{2}} - v_{i-\frac{1}{2}}}{h_i} - \mathbf{u}'(x_i), \quad 0 \leq i \leq N, \quad (2.11)$$

e

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_i &= \mathcal{D}(\mathcal{G}v^h)_{i-\frac{1}{2}} - \mathbf{u}''(x_{i-\frac{1}{2}}) \\ &= \frac{1}{L_{i-\frac{1}{2}}} \left(\frac{v_{i+\frac{1}{2}} - v_{i-\frac{1}{2}}}{h_i} - \frac{v_{i-\frac{1}{2}} - v_{i-\frac{3}{2}}}{h_{i-1}} \right) - \mathbf{u}''(x_{i-\frac{1}{2}}), \quad 1 \leq i \leq N.\end{aligned}\tag{2.12}$$

Existe uma importante quantidade que está intimamente ligada aos erros de solução, e^h , e de derivada, E^h , que é o chamado erro de truncamento, ou de discretização, $\tau(\mathbf{u}) \in \mathcal{H}_C$. Substituindo v^h por u^h em (2.8), obtemos

$$-\mathcal{D}(k \cdot \mathcal{G}u^h) + q \cdot u^h = f + \tau(\mathbf{u}),\tag{2.13}$$

onde $u^h = \mathbb{P}_C(\mathbf{u})$. Subtraindo (2.13) de (2.8), obtemos a seguinte expressão

$$-\mathcal{D}(k \cdot \mathcal{G}e^h) + q \cdot e^h = -\tau(\mathbf{u}).\tag{2.14}$$

Pelo esquema numérico (2.9), podemos reescrever a equação (2.13) como

$$\begin{aligned}\tau(\mathbf{u})_{i-\frac{1}{2}} L_{i-\frac{1}{2}} &= -\frac{k_{i-1}}{h_{i-1}} u_{i-\frac{3}{2}} + \left(\frac{k_{i-1}}{h_{i-1}} + \frac{k_i}{h_i} + q_{i-\frac{1}{2}} L_{i-\frac{1}{2}} \right) u_{i-\frac{1}{2}} \\ &\quad - \frac{k_i}{h_i} u_{i+\frac{1}{2}} - L_{i-\frac{1}{2}} f_{i-\frac{1}{2}},\end{aligned}\tag{2.15}$$

que implica

$$\begin{aligned}\tau(\mathbf{u})_{i-\frac{1}{2}} L_{i-\frac{1}{2}} &= -\frac{k \left(x_{i-\frac{1}{2}} - \frac{L_{i-\frac{1}{2}}}{2} \right)}{h_{i-1}} u \left(x_{i-\frac{1}{2}} - \frac{L_{i-\frac{1}{2}} + L_{i-\frac{3}{2}}}{2} \right) \\ &\quad + \left[\frac{k \left(x_{i-\frac{1}{2}} - \frac{L_{i-\frac{1}{2}}}{2} \right)}{h_{i-1}} + \frac{k \left(x_{i-\frac{1}{2}} + \frac{L_{i-\frac{1}{2}}}{2} \right)}{h_i} + q \left(x_{i-\frac{1}{2}} \right) L_{i-\frac{1}{2}} \right] u \left(x_{i-\frac{1}{2}} \right) \\ &\quad - \frac{k \left(x_{i-\frac{1}{2}} + \frac{L_{i-\frac{1}{2}}}{2} \right)}{h_i} u \left(x_{i-\frac{1}{2}} + \frac{L_{i-\frac{1}{2}} + L_{i+\frac{1}{2}}}{2} \right) - L_{i-\frac{1}{2}} f \left(x_{i-\frac{1}{2}} \right).\end{aligned}\tag{2.16}$$

Lembrando que $h_{i-1} = \frac{L_{i-\frac{1}{2}} + L_{i-\frac{3}{2}}}{2}$ e $h_i = \frac{L_{i-\frac{1}{2}} + L_{i+\frac{1}{2}}}{2}$, e utilizando as seguintes expansões de *Taylor* no ponto $x_{i-\frac{1}{2}}$,

$$k \left(x_{i-\frac{1}{2}} - \frac{L_{i-\frac{1}{2}}}{2} \right) = k_{i-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} k'_{i-\frac{1}{2}} L_{i-\frac{1}{2}} + \frac{1}{8} k''_{i-\frac{1}{2}} L_{i-\frac{1}{2}}^2 + O(L_{i-\frac{1}{2}}^3), \quad (2.17)$$

$$k \left(x_{i-\frac{1}{2}} + \frac{L_{i-\frac{1}{2}}}{2} \right) = k_{i-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} k'_{i-\frac{1}{2}} L_{i-\frac{1}{2}} + \frac{1}{8} k''_{i-\frac{1}{2}} L_{i-\frac{1}{2}}^2 + O(L_{i-\frac{1}{2}}^3), \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} u \left(x_{i-\frac{1}{2}} - \frac{L_{i-\frac{1}{2}} + L_{i-\frac{3}{2}}}{2} \right) &= u_{i-\frac{1}{2}} - u'_{i-\frac{1}{2}} h_{i-1} + \frac{1}{2} u''_{i-\frac{1}{2}} h_{i-1}^2 \\ &\quad - \frac{1}{6} u'''_{i-\frac{1}{2}} h_{i-1}^3 + O(L_{i-\frac{1}{2}}^4) + O(L_{i-\frac{3}{2}}^4), \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} u \left(x_{i-\frac{1}{2}} + \frac{L_{i-\frac{1}{2}} + L_{i+\frac{1}{2}}}{2} \right) &= u_{i-\frac{1}{2}} + u'_{i-\frac{1}{2}} h_i + \frac{1}{2} u''_{i-\frac{1}{2}} h_i^2 \\ &\quad + \frac{1}{6} u'''_{i-\frac{1}{2}} h_i^3 + O(L_{i-\frac{1}{2}}^4) + O(L_{i+\frac{1}{2}}^4), \end{aligned} \quad (2.20)$$

obtemos,

$$\begin{aligned} \tau(\mathbf{u})_{i-\frac{1}{2}} L_{i-\frac{1}{2}} &= -k_{i-\frac{1}{2}} u''_{i-\frac{1}{2}} \left(\frac{h_{i-1} + h_i}{2} \right) \\ &\quad - \frac{1}{6} K_{i-\frac{1}{2}} u'''_{i-\frac{1}{2}} (h_i^2 - h_{i-1}^2) \\ &\quad - \frac{1}{4} K'_{i-\frac{1}{2}} u''_{i-\frac{1}{2}} (L_{i-\frac{1}{2}} h_i - L_{i-\frac{1}{2}} h_{i-1}) \\ &\quad - K'_{i-\frac{1}{2}} u'_{i-\frac{1}{2}} L_{i-\frac{1}{2}} + q_{i-\frac{1}{2}} u_{i-\frac{1}{2}} L_{i-\frac{1}{2}} - L_{i-\frac{1}{2}} f_{i-\frac{1}{2}} \\ &\quad + O(L_{i-\frac{3}{2}}^3) + O(L_{i-\frac{1}{2}}^2) + O(L_{i+\frac{1}{2}}^3). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Como $-\mathbf{k}(x)\mathbf{u}''(x) - \mathbf{k}'(x)\mathbf{u}'(x) + \mathbf{q}(x)\mathbf{u}(x) - \mathbf{f}(x) = 0$, temos que o erro de truncamento para o método mimético é dado por

$$\begin{aligned} \tau(\mathbf{u})_{i-\frac{1}{2}} &= k_{i-\frac{1}{2}} u''_{i-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{h_i + h_{i-1}}{2L_{i-\frac{1}{2}}} \right) \\ &\quad - \frac{1}{6} K_{i-\frac{1}{2}} u'''_{i-\frac{1}{2}} \frac{h_i^2 - h_{i-1}^2}{L_{i-\frac{1}{2}}} \\ &\quad - \frac{1}{4} K'_{i-\frac{1}{2}} u''_{i-\frac{1}{2}} (h_i - h_{i-1}) \\ &\quad + O(L_{i-\frac{3}{2}}^2) + O(L_{i-\frac{1}{2}}^2) + O(L_{i+\frac{1}{2}}^2), \quad 1 \leq i \leq N, \end{aligned} \quad (2.22)$$

desde que $\mathbf{k} \in C^3([a, b])$ e $\mathbf{u} \in C^4([a, b])$.

Como visto anteriormente, subtraindo (2.13) de (2.8), obtemos

$$-\mathcal{D}(k \cdot \mathcal{G}e^h) + q \cdot e^h = -\tau(\mathbf{u}), \quad (2.23)$$

onde e^h é determinado por $\tau(\mathbf{u})$ através da equação linear $\mathbb{L}_h e^h = -\tau(\mathbf{u})$. Disto, $e^h = -\mathbb{G}_h \tau(\mathbf{u})$, onde $\mathbb{G}_h = \mathbb{L}_h^{-1}$ é o operador de *Green* discreto associado a (2.8).

Tratemos agora do problema algébrico. Já vimos que o erro $e^h = v^h - u^h$ satisfaz a equação algébrica $\mathbb{L}_h e^h = -\tau(\mathbf{u})$, onde \mathbb{L}_h é dado por (2.14), isto é, $\mathbb{L}_h = \mathcal{L}_h^{-1} A_h$, com $\mathcal{L}_h = \text{diag}\{L_{\frac{1}{2}}, L_{\frac{3}{2}}, \dots, L_{N-\frac{1}{2}}\}$ e $A_h = A_h(\mathbf{q})$, dada por

$$A_h(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} a_{\frac{1}{2}}^{[\mathbf{q}]} & -c_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ -c_1 & a_{\frac{3}{2}}^{[\mathbf{q}]} & -c_2 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & -c_2 & a_{\frac{5}{2}}^{[\mathbf{q}]} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & a_{N-\frac{3}{2}}^{[\mathbf{q}]} & -c_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & -c_{N-1} & a_{N-\frac{1}{2}}^{[\mathbf{q}]} \end{bmatrix}, \quad (2.24)$$

onde

$$c_i = \frac{k_i}{h_i}, \quad 0 \leq i \leq N, \quad (2.25)$$

$$a_{i-\frac{1}{2}}^{[\mathbf{q}]} = c_{i-1} + c_i + q_{i-\frac{1}{2}} L_{i-\frac{1}{2}}, \quad 1 \leq i \leq N. \quad (2.26)$$

Em particular, e^h resolve a equação $A_h(\mathbf{q})e^h = \vec{\mathbf{b}}(\mathbf{u})$, com $\vec{\mathbf{b}}(\mathbf{u}) = -\mathcal{L}_h \tau(\mathbf{u})$, isto é,

$$\mathbf{b}(\mathbf{u})_{i-\frac{1}{2}} = -L_{i-\frac{1}{2}} \tau(\mathbf{u})_{i-\frac{1}{2}}, \quad 1 \leq i \leq N. \quad (2.27)$$

Reduzindo $A_h(\mathbf{q})e^h = \vec{\mathbf{b}}(\mathbf{u})$ à forma triangular superior pela eliminação Gaussiana, obtemos $\hat{A}_h(\mathbf{q})e^h = \vec{\mathbf{b}}(\mathbf{u})$, onde $\hat{A}_h(\mathbf{q})$ é a matriz triangular

$$\hat{A}_h(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \hat{a}_{\frac{1}{2}}^{[\mathbf{q}]} & -c_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & \hat{a}_{\frac{3}{2}}^{[\mathbf{q}]} & -c_2 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{a}_{\frac{5}{2}}^{[\mathbf{q}]} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \hat{a}_{N-\frac{3}{2}}^{[\mathbf{q}]} & -c_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \hat{a}_{N-\frac{1}{2}}^{[\mathbf{q}]} \end{bmatrix}, \quad (2.28)$$

com

$$\hat{a}_{i-\frac{1}{2}}^{[\mathbf{q}]} = \theta_{i-1}^{[\mathbf{q}]} c_{i-1} + c_i + q_{i-\frac{1}{2}} L_{i-\frac{1}{2}}, \quad 1 \leq i \leq N, \quad (2.29)$$

onde $\theta_0^{[\mathbf{q}]} = 1$ e $\theta_1^{[\mathbf{q}]}, \theta_2^{[\mathbf{q}]}, \dots$ são quantidades positivas computadas recursivamente pela fórmula

$$\theta_i^{[\mathbf{q}]} = \frac{c_{i-1} \theta_{i-1}^{[\mathbf{q}]} + q_{i-\frac{1}{2}} L_{i-\frac{1}{2}}}{c_{i-1} \theta_{i-1}^{[\mathbf{q}]} + c_i + q_{i-\frac{1}{2}} L_{i-\frac{1}{2}}}, \quad 1 \leq i \leq N-1. \quad (2.30)$$

Quando $\mathbf{q}(x) = 0$, temos que $\frac{1}{c_i \theta_i^{[0]}} = \frac{1}{c_i} + \frac{1}{c_{i-1} \theta_{i-1}^{[0]}}$ para cada $i \geq 1$, o que resulta em

$$\frac{1}{c_i \theta_i^{[0]}} = \frac{1}{c_i} + \sum_{l=0}^{i-1} \frac{1}{c_l} = \sum_{l=0}^i \frac{h_l}{k_l}, \quad (2.31)$$

enquanto que, para $\mathbf{q}(x) \geq 0$,

$$\frac{1}{c_i \theta_i^{[\mathbf{q}]}} \leq \sum_{l=0}^i \frac{h_l}{k_l}. \quad (2.32)$$

Os coeficientes $\theta_i^{[\mathbf{q}]}$ são também usados para computar o vetor $\hat{\mathbf{b}}(\mathbf{u}) \in \mathcal{H}_C$, dado por

$$\hat{\mathbf{b}}(\mathbf{u})_{i-\frac{1}{2}} = \sum_{j=1}^i \frac{\theta_{i-1}^{[\mathbf{q}]} c_{i-1}}{\theta_{j-1}^{[\mathbf{q}]} c_{j-1}} \nu_{ij}^{[\mathbf{q}]} \mathbf{b}(\mathbf{u})_{j-\frac{1}{2}}, \quad 1 \leq i \leq N, \quad (2.33)$$

com $v_{ii}^{[\mathbf{q}]} = 1$ para $1 \leq i \leq N$ e

$$v_{ij}^{[\mathbf{q}]} = \prod_{l=j}^{i-1} \frac{\theta_{l-1}^{[\mathbf{q}]} c_{l-1}}{\theta_{l-1}^{[\mathbf{q}]} c_{l-1} + q_{l-\frac{1}{2}} L_{l-\frac{1}{2}}}, \quad 1 \leq j \leq i-1, \quad 2 \leq i \leq N. \quad (2.34)$$

Daí obtemos, em particular, o bem conhecido resultado que, para $\mathbf{q}(x) \geq 0$, todos os N^2 elementos de A_h^{-1} , e os operadores de *Green* \mathbb{G}_h , são positivos. Além disso, esse resultado permanece válido para qualquer $\mathbf{q}(x)$ limitada em $[a, b]$, desde que a malha seja suficientemente fina. Temos também o seguinte lema,

Lema 2.1. *Se $\hat{\mathbf{b}} = (\hat{\mathbf{b}}_{\frac{1}{2}}, \hat{\mathbf{b}}_{\frac{3}{2}}, \dots, \hat{\mathbf{b}}_{N-\frac{1}{2}}) \in \mathcal{H}_C$ é tal que $|\hat{\mathbf{b}}_{i-\frac{1}{2}}| \leq \theta_{i-1}^{[\mathbf{q}]} c_{i-1} \Gamma$ para algum $\Gamma > 0$ e todo $1 \leq i \leq N$, então a solução $v = (v_{\frac{1}{2}}, \dots, v_{N-\frac{1}{2}}) \in \mathcal{H}_C$ de $\hat{A}_h(\mathbf{q})v = \hat{\mathbf{b}}$ satisfaz a estimativa $|v_{i-\frac{1}{2}}| \leq \Gamma$ para todo $1 \leq i \leq N$, desde que $\mathbf{q}(x) \geq 0$ em $[a, b]$, ou, para $\mathbf{q}(x)$ qualquer, que a malha seja suficientemente fina.*

Demonstração. Para $i = N$, temos

$$v_{N-\frac{1}{2}} = \frac{\hat{\mathbf{b}}_{N-\frac{1}{2}}}{\hat{a}_{N-\frac{1}{2}}^{[\mathbf{q}]}} = \frac{\hat{\mathbf{b}}_{N-\frac{1}{2}}}{\theta_{N-1}^{[\mathbf{q}]} c_{N-1} + c_N}, \quad (2.35)$$

tal que $|v_{N-\frac{1}{2}}| \leq \frac{|\hat{\mathbf{b}}_{N-\frac{1}{2}}|}{\theta_{N-1}^{[\mathbf{q}]} c_{N-1}} \leq \Gamma$ por hipótese. Do mesmo modo,

$$v_{N-\frac{3}{2}} = \frac{\hat{\mathbf{b}}_{N-\frac{3}{2}}}{\hat{a}_{N-\frac{3}{2}}^{[\mathbf{q}]}} + \frac{c_{N-1}}{\hat{a}_{N-\frac{3}{2}}^{[\mathbf{q}]}} v_{N-\frac{1}{2}}, \quad (2.36)$$

de maneira que

$$|v_{N-\frac{3}{2}}| \leq \frac{\theta_{N-2}^{[\mathbf{q}]} c_{N-2}}{\theta_{N-2}^{[\mathbf{q}]} c_{N-2} + c_{N-1}} \frac{|\hat{\mathbf{b}}_{N-\frac{3}{2}}|}{\theta_{N-2}^{[\mathbf{q}]} c_{N-2}} + \frac{c_{N-1}}{\theta_{N-2}^{[\mathbf{q}]} c_{N-2} + c_{N-1}} |v_{N-\frac{1}{2}}| \leq \Gamma, \quad (2.37)$$

e assim sucessivamente com $i = N-2, N-3, \dots, 1$. \square

Notemos de passagem que, quando $\mathbf{q}(x) \geq 0$, do *Lemma 2.1* e de (2.31), (2.32), (2.33) e (2.34), obtemos

$$\|\mathbb{G}_h\|_\infty = \sup_{v \in \mathcal{H}_C, v \neq 0} \frac{|\mathbb{G}_h v|_{\text{sup}}}{|v|_{\text{sup}}} \leq \frac{(b-a)^2}{m_0(\mathbf{k})} \quad (2.38)$$

em qualquer malha, onde $m_0(\mathbf{k})$ é o valor mínimo $m_0(\mathbf{k}) = \min\{\mathbf{k}(x) : a \leq x \leq b\}$.

2.2 Análise dos Erros de Solução e de Derivada de Primeira Ordem para $\mathbf{q}(x) = 0$

Consideremos o problema de *Sturm-Liouville* com condições de contorno de *Dirichlet* em $x = a$ e $x = b$,

$$-\frac{d}{dx} \left(\mathbf{k}(x) \frac{d\mathbf{u}}{dx} \right) + \mathbf{q}(x) \mathbf{u}(x) = \mathbf{f}(x), \quad a < x < b, \quad (2.39)$$

$$\alpha_0 \mathbf{u}(a) = \gamma_a, \quad \beta_0 \mathbf{u}(b) = \gamma_b, \quad (2.40)$$

onde γ_a e γ_b são constantes dadas, $\alpha_0 > 0$, $\beta_0 > 0$, $\mathbf{k}(x) \in C^3([a, b])$, $\mathbf{q}(x) \in C^2([a, b])$, $\mathbf{f}(x) \in C^2([a, b])$, $\mathbf{k}(x) > 0$ em $[a, b]$, $\mathbf{q}(x) \geq 0$ em $[a, b]$ e $\mathbf{u}(x) \in C^4([a, b])$. Na verdade, de acordo com [21], podemos supor que

$$\mathbf{q}(x) > -\frac{1}{(b-a) \int_a^b \frac{1}{\mathbf{k}(t)} dt}, \quad x \in [a, b]. \quad (2.41)$$

A discretização desse problema pelo método mimético de diferenças finitas é dada por,

$$-\frac{k_{i-1}}{h_{i-1}} v_{i-\frac{3}{2}} + \left(\frac{k_{i-1}}{h_{i-1}} + \frac{k_i}{h_i} \right) v_{i-\frac{1}{2}} - \frac{k_i}{h_i} v_{i+\frac{1}{2}} = L_{i-\frac{1}{2}} f_{i-\frac{1}{2}}, \quad (2.42)$$

$$v_{-\frac{1}{2}} \equiv v_0 = \frac{\gamma_a}{\alpha_0}, \quad v_{N+\frac{1}{2}} \equiv v_N = \frac{\gamma_b}{\beta_0}. \quad (2.43)$$

Em primeiro lugar, estimemos a quantidade $\mathcal{G}e^h$. Como $L_{j-\frac{1}{2}}(\mathcal{D}(k \cdot \mathcal{G}e^h))_{j-\frac{1}{2}} = k_j(\mathcal{G}e^h)_j - k_{j-1}(\mathcal{G}e^h)_{j-1}$, podemos escrever

$$k_i (\mathcal{G}e^h)_i = k_N (\mathcal{G}e^h)_N - \sum_{j=i+1}^N L_{j-\frac{1}{2}} (\mathcal{D}(k \cdot \mathcal{G}e^h))_{j-\frac{1}{2}}, \quad (2.44)$$

para $0 \leq i \leq N$, de onde obtemos, usando (2.14) e admitindo $q(x) = 0$,

$$k_i (\mathcal{G}e^h)_i = k_N (\mathcal{G}e^h)_N - \sum_{j=i+1}^N L_{j-\frac{1}{2}} \tau(\mathbf{u})_{j-\frac{1}{2}}, \quad 0 \leq i \leq N, \quad (2.45)$$

onde o erro de truncamento $\tau(\mathbf{u})$ é dado por (2.22), o que nos leva a

$$\sum_{j=i+1}^N L_{j-\frac{1}{2}} \tau(\mathbf{u})_{j-\frac{1}{2}} = J_1(h) + J_2(h) + J_3(h) + O(h^2), \quad (2.46)$$

onde

$$J_1(h) = \sum_{j=i+1}^N k_{j-\frac{1}{2}} u''_{j-\frac{1}{2}} \left(L_{j-\frac{1}{2}} - \frac{h_{j-1} + h_j}{2} \right), \quad (2.47)$$

$$J_2(h) = -\frac{1}{6} \sum_{j=i+1}^N k_{j-\frac{1}{2}} u'''_{j-\frac{1}{2}} (h_j^2 - h_{j-1}^2), \quad (2.48)$$

$$J_3(h) = -\frac{1}{4} \sum_{j=i+1}^N k'_{j-\frac{1}{2}} u''_{j-\frac{1}{2}} L_{j-\frac{1}{2}} (h_j - h_{j-1}), \quad (2.49)$$

com \hbar sendo a medida de espaçamento de malha definida por $\hbar = \sqrt{\sum_{j=1}^N L_{j-\frac{1}{2}}^3}$.

$$\text{Agora, como } h_i = \frac{L_{i-\frac{1}{2}} + L_{i+\frac{1}{2}}}{2},$$

$$J_1(h) = -\frac{1}{4} \sum_{j=i+1}^N w_{j-\frac{1}{2}} \left(\left(L_{j+\frac{1}{2}} - L_{j-\frac{1}{2}} \right) - \left(L_{j-\frac{1}{2}} - L_{j-\frac{3}{2}} \right) \right), \quad (2.50)$$

onde $\mathbf{w}(x) := \mathbf{k}(x) \mathbf{u}''(x)$. Esta equação pode ser reescrita na forma

$$\begin{aligned} J_1(h) &= -\frac{1}{4} \sum_{j=i+1}^N \left(w_j \left(L_{j+\frac{1}{2}} - L_{j-\frac{1}{2}} \right) - w_{j-1} \left(L_{j-\frac{1}{2}} - L_{j-\frac{3}{2}} \right) \right) \\ &\quad + \frac{1}{4} \sum_{j=i+1}^N \left(w_j - w_{j-\frac{1}{2}} \right) \left(L_{j+\frac{1}{2}} - L_{j-\frac{1}{2}} \right) \\ &\quad + \frac{1}{4} \sum_{j=i+1}^N \left(w_{j-\frac{1}{2}} - w_{j-1} \right) \left(L_{j-\frac{1}{2}} - L_{j-\frac{3}{2}} \right). \end{aligned} \quad (2.51)$$

Observemos que $\left(w_j - w_{j-\frac{1}{2}} \right) = w'_{j-\frac{1}{2}} \frac{L_{j-\frac{1}{2}}}{2} + O(L_{j-\frac{1}{2}}^2)$, $\left(w_{j-\frac{1}{2}} - w_{j-1} \right) = w'_{j-\frac{1}{2}} \frac{L_{j-\frac{1}{2}}}{2} + O(L_{j-\frac{1}{2}}^2)$, $L_{N+\frac{1}{2}} \equiv 0$, $L_{-\frac{1}{2}} \equiv 0$, $x_{N+\frac{1}{2}} \equiv x_N = b$ e $x_{-\frac{1}{2}} \equiv x_0 = a$. Além

disso, temos séries telescópicas, o que nos leva ao seguinte resultado,

$$\begin{aligned}
J_1(h) &= -\frac{1}{4} \left(w_N \left(0 - L_{N-\frac{1}{2}} \right) - w_i \left(L_{i+\frac{1}{2}} - L_{i-\frac{1}{2}} \right) \right) \\
&+ \frac{1}{8} \sum_{j=i+1}^N w'_{j-\frac{1}{2}} \left(L_{j+\frac{1}{2}} L_{j-\frac{1}{2}} - L_{j-\frac{1}{2}}^2 \right) \\
&+ \frac{1}{8} \sum_{j=i+1}^N w'_{j-\frac{1}{2}} \left(L_{j-\frac{1}{2}}^2 - L_{j-\frac{1}{2}} L_{j-\frac{3}{2}} \right) + O(\hbar^2) \\
&= \frac{1}{4} w_N L_{N-\frac{1}{2}} + \frac{1}{4} w_i \left(L_{i+\frac{1}{2}} - L_{i-\frac{1}{2}} \right) \\
&+ \frac{1}{8} \sum_{j=i+1}^N \left(w'_{j-\frac{1}{2}} L_{j+\frac{1}{2}} L_{j-\frac{1}{2}} - w'_{j-\frac{1}{2}} L_{j-\frac{1}{2}} L_{j-\frac{3}{2}} \right) + O(\hbar^2).
\end{aligned} \tag{2.52}$$

Como $w'_{j-\frac{1}{2}} = w'_j + O(L_{j-\frac{1}{2}})$, e também $w'_{j-\frac{1}{2}} = w'_{j-1} + O(L_{j-\frac{1}{2}})$, temos

$$\begin{aligned}
J_1(h) &= \frac{1}{4} w_N L_{N-\frac{1}{2}} + \frac{1}{4} w_i \left(L_{i+\frac{1}{2}} - L_{i-\frac{1}{2}} \right) \\
&+ \frac{1}{8} \sum_{j=i+1}^N \left(w'_j L_{j+\frac{1}{2}} L_{j-\frac{1}{2}} - w'_{j-1} L_{j-\frac{1}{2}} L_{j-\frac{3}{2}} \right) + O(\hbar^2) \\
&= \frac{1}{4} w_N L_{N-\frac{1}{2}} + \frac{1}{4} w_i \left(L_{i+\frac{1}{2}} - L_{i-\frac{1}{2}} \right) \\
&+ \frac{1}{8} w'_N L_{N+\frac{1}{2}} L_{N-\frac{1}{2}} - \frac{1}{8} w'_i L_{i+\frac{1}{2}} L_{i-\frac{1}{2}} + O(\hbar^2).
\end{aligned} \tag{2.53}$$

Como $\mathbf{w}(x) = \mathbf{k}(x)\mathbf{u}''(x)$, e portanto $\mathbf{w}'(x) = \mathbf{k}(x)\mathbf{u}'''(x) + \mathbf{k}'(x)\mathbf{u}''(x)$, segue que

$$\begin{aligned}
J_1(h) &= \frac{1}{4} k_N u''_N L_{N-\frac{1}{2}} + \frac{1}{4} k_i u''_i \left(L_{i+\frac{1}{2}} - L_{i-\frac{1}{2}} \right) \\
&- \frac{1}{8} (k'_i u'''_i + k'_i u''_i) L_{i+\frac{1}{2}} L_{i-\frac{1}{2}} + O(\hbar^2).
\end{aligned} \tag{2.54}$$

Similarmente, considerando $\tilde{\mathbf{w}}(x) := \mathbf{k}(x)\mathbf{u}'''(x)$, $\tilde{w}_{j-\frac{1}{2}} = \tilde{w}_j + O(L_{j-\frac{1}{2}})$ e $\tilde{w}_{j-\frac{1}{2}} = \tilde{w}_{j-1} + O(L_{j-\frac{1}{2}})$, obtemos

$$\begin{aligned}
J_2(h) &= -\frac{1}{6} \sum_{j=i+1}^N k_{j-\frac{1}{2}} u'''_{j-\frac{1}{2}} (h_j^2 - h_{j-1}^2) \\
&= -\frac{1}{6} \sum_{j=i+1}^N \left(\tilde{w}_{j-\frac{1}{2}} h_j^2 - \tilde{w}_{j-\frac{1}{2}} h_{j-1}^2 \right) \\
&= -\frac{1}{6} \sum_{j=i+1}^N (\tilde{w}_j h_j^2 - \tilde{w}_{j-1} h_{j-1}^2) + O(\hbar^2) \\
&= -\frac{1}{6} (\tilde{w}_N h_N^2 - \tilde{w}_i h_i^2) + O(\hbar^2) \\
&= -\frac{1}{6} \tilde{w}_N \frac{L_{N-\frac{1}{2}}^2}{4} + \frac{1}{6} \tilde{w}_i \frac{(L_{i-\frac{1}{2}} + L_{i+\frac{1}{2}})^2}{4} + O(\hbar^2).
\end{aligned} \tag{2.55}$$

Logo,

$$J_2(h) = -\frac{1}{24} k_N u'''_N L_{N-\frac{1}{2}}^2 + \frac{1}{24} k_i u'''_i (L_{i-\frac{1}{2}} + L_{i+\frac{1}{2}})^2 + O(\hbar^2). \tag{2.56}$$

Finalmente, para $\hat{\mathbf{w}}(x) = \mathbf{k}'(x)\mathbf{u}''(x)$, temos

$$\begin{aligned}
J_3(h) &= -\frac{1}{4} \sum_{j=i+1}^N k'_{j-\frac{1}{2}} u''_{j-\frac{1}{2}} L_{j-\frac{1}{2}} (h_j - h_{j-1}) \\
&= -\frac{1}{4} \sum_{j=i+1}^N k'_{j-\frac{1}{2}} u''_{j-\frac{1}{2}} L_{j-\frac{1}{2}} \left(\frac{L_{j+\frac{1}{2}} - L_{j-\frac{3}{2}}}{2} \right) \\
&= -\frac{1}{8} \sum_{j=i+1}^N \left(\hat{w}_{j-\frac{1}{2}} L_{j+\frac{1}{2}} L_{j-\frac{1}{2}} - L_{j-\frac{1}{2}} L_{j-\frac{3}{2}} \hat{w}_{j-\frac{1}{2}} \right).
\end{aligned} \tag{2.57}$$

Usando expansões de *Taylor* para $\hat{\mathbf{w}}(x)$ temos que $\hat{w}_{j-\frac{1}{2}} = \hat{w}_j + O(L_{j-\frac{1}{2}})$, ou também, $\hat{w}_{j-\frac{1}{2}} = \hat{w}_{j-1} + O(L_{j-\frac{1}{2}})$, o que nos leva a

$$\begin{aligned}
J_3(h) &= -\frac{1}{8} \sum_{j=i+1}^N \left(\hat{w}_j L_{j+\frac{1}{2}} L_{j-\frac{1}{2}} - \hat{w}_{j-1} L_{j-\frac{1}{2}} L_{j-\frac{3}{2}} \right) + O(\hbar^2) \\
&= -\frac{1}{8} \left(\hat{w}_N L_{N+\frac{1}{2}} L_{N-\frac{1}{2}} - \hat{w}_i L_{i+\frac{1}{2}} L_{i-\frac{1}{2}} \right) + O(\hbar^2).
\end{aligned} \tag{2.58}$$

Lembrando que $L_{N+\frac{1}{2}} = 0$, segue que

$$J_3(h) = \frac{1}{8} \hat{w}_i L_{i+\frac{1}{2}} L_{i-\frac{1}{2}} + O(\hbar^2), \quad (2.59)$$

ou seja,

$$J_3(h) = \frac{1}{8} k'_i u''_i L_{i+\frac{1}{2}} L_{i-\frac{1}{2}} + O(\hbar^2). \quad (2.60)$$

Portanto, de (2.46) e (2.54), (2.56), (2.60), obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{j=i+1}^N L_{j-\frac{1}{2}} \tau(\mathbf{u})_{j-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{4} k_N u''_N L_{N-\frac{1}{2}} - \frac{1}{24} k_N u'''_N L_{N-\frac{1}{2}}^2 \\ &+ \frac{1}{4} k_i u''_i \left(L_{i+\frac{1}{2}} - L_{i-\frac{1}{2}} \right) \\ &+ \frac{1}{24} k_i u'''_i \left(L_{i-\frac{1}{2}}^2 + L_{i+\frac{1}{2}}^2 - L_{i-\frac{1}{2}} L_{i+\frac{1}{2}} \right) + O(\hbar^2). \end{aligned} \quad (2.61)$$

Computemos $e_{N-\frac{1}{2}}$ por eliminação Gaussiana em (2.14). Resolvendo $A_h(0)e^h = -\mathcal{L}_h \tau(\mathbf{u})$ para $e_{N-\frac{1}{2}}$, obtemos, a partir de $A_h(\mathbf{q})$ com $\mathbf{q}(x) = 0$, $\mathbf{b}(\mathbf{u})_{i-\frac{1}{2}}$, $\hat{A}_h(\mathbf{q})$, $\hat{a}_{i-\frac{1}{2}}^{[\mathbf{q}]}$, $\hat{\mathbf{b}}(\mathbf{u})_{i-\frac{1}{2}}$, $\nu_{ij}^{[\mathbf{q}]}$ apresentados anteriormente, que

$$e_{N-\frac{1}{2}} = \frac{\hat{\mathbf{b}}_{N-\frac{1}{2}}}{\hat{a}_{N-\frac{1}{2}}^{[0]}} = \frac{1}{\theta_{N-1}^{[0]} c_{N-1} + c_N} \sum_{j=1}^N \frac{\theta_{N-1}^{[0]} c_{N-1}}{\theta_{j-1}^{[0]} c_{j-1}} \nu_{Nj}^{[0]} \mathbf{b}(\mathbf{u})_{j-\frac{1}{2}}, \quad (2.62)$$

com $\nu_{Nj}^{[0]} = \prod_{l=j}^{N-1} \frac{\theta_{l-1}^{[0]} c_{l-1}}{\theta_{l-1}^{[0]} c_{l-1}}$, $1 \leq j \leq N-1$, o que resulta em

$$e_{N-\frac{1}{2}} = - \frac{\theta_{N-1}^{[0]} c_{N-1}}{c_N + \theta_{N-1}^{[0]} c_{N-1}} \sum_{j=1}^N \frac{1}{\theta_{j-1}^{[0]} c_{j-1}} L_{j-\frac{1}{2}} \tau(\mathbf{u})_{j-\frac{1}{2}}, \quad (2.63)$$

onde $c_i = \frac{k_i}{h_i}$ e $\frac{1}{c_j \theta_j^{[0]}} = \sum_{l=0}^j \frac{h_l}{k_l}$, com $0 \leq j \leq N$. É conveniente introduzirmos I_j , $0 \leq j \leq N$,

$$I_j := \sum_{l=0}^j \frac{h_l}{k_l}. \quad (2.64)$$

Em particular, $I_N = \sum_{l=0}^N \frac{h_l}{k_l}$ é dado pela aproximação trapezoidal $\int_a^b \frac{1}{\mathbf{k}(x)} dx$, tal que $I_N = \int_a^b \frac{1}{\mathbf{k}(x)} dx + O(\hbar^2)$. Agora,

$$\begin{aligned} \frac{\theta_{N-1}^{[0]} c_{N-1}}{c_N + \theta_{N-1}^{[0]} c_{N-1}} &= \frac{1}{1 + \frac{c_N}{\theta_{N-1}^{[0]} c_{N-1}}} = \frac{\frac{1}{c_N}}{\frac{1}{c_N} + \frac{1}{\theta_{N-1}^{[0]} c_{N-1}}} \\ &= \frac{\frac{h_N}{k_N}}{\frac{h_N}{k_N} + \sum_{l=0}^{N-1} \frac{h_l}{k_l}} = \frac{\frac{h_N}{k_N}}{\sum_{l=0}^N \frac{h_l}{k_l}} = \frac{h_N}{I_N}, \end{aligned} \quad (2.65)$$

isto é,

$$\frac{\theta_{N-1}^{[0]} c_{N-1}}{c_N + \theta_{N-1}^{[0]} c_{N-1}} = \frac{h_N}{k_N I_N}. \quad (2.66)$$

Por outro lado, da fórmula (2.22) para o erro de truncamento e $\mathbf{q}(x) = 0$, temos

$$\sum_{j=1}^N \frac{1}{\theta_{j-1}^{[0]} c_{j-1}} L_{j-\frac{1}{2}} \tau(\mathbf{u})_{j-\frac{1}{2}} = \hat{J}_1(h) + \hat{J}_2(h) + \hat{J}_3(h) + O(\hbar^2), \quad (2.67)$$

onde

$$\hat{J}_1(h) = \sum_{j=1}^N I_{j-1} K_{j-\frac{1}{2}} u''_{j-\frac{1}{2}} \left(L_{j-\frac{1}{2}} - \frac{h_j + h_{j-1}}{2} \right), \quad (2.68)$$

$$\hat{J}_2(h) = -\frac{1}{6} \sum_{j=1}^N I_{j-1} K_{j-\frac{1}{2}} u'''_{j-\frac{1}{2}} (h_j^2 - h_{j-1}^2), \quad (2.69)$$

$$\hat{J}_3(h) = -\frac{1}{4} \sum_{j=1}^N I_{j-1} K'_{j-\frac{1}{2}} u''_{j-\frac{1}{2}} (h_j - h_{j-1}) L_{j-\frac{1}{2}}. \quad (2.70)$$

Consideremos agora $\mathbf{w}(x) := \mathbf{k}(x)\mathbf{u}''(x)$. Assim,

$$\begin{aligned}
\hat{J}_1(h) &= \sum_{j=1}^N I_{j-1} K_{j-\frac{1}{2}} u''_{j-\frac{1}{2}} \left(L_{j-\frac{1}{2}} - \frac{h_j + h_{j-1}}{2} \right) \\
&= -\frac{1}{4} \sum_{j=1}^N I_{j-1} w_{j-\frac{1}{2}} \left(\left(L_{j+\frac{1}{2}} - L_{j-\frac{1}{2}} \right) - \left(L_{j-\frac{1}{2}} - L_{j-\frac{3}{2}} \right) \right) \\
&= -\frac{1}{4} \sum_{j=1}^N \left(I_j w_j \left(L_{j+\frac{1}{2}} - L_{j-\frac{1}{2}} \right) - I_{j-1} w_{j-1} \left(L_{j-\frac{1}{2}} - L_{j-\frac{3}{2}} \right) \right) \\
&\quad + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^N \left(I_j w_j - I_{j-1} w_{j-\frac{1}{2}} \right) \left(L_{j+\frac{1}{2}} - L_{j-\frac{1}{2}} \right) \\
&\quad + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^N I_{j-1} \left(w_{j-\frac{1}{2}} - w_{j-1} \right) \left(L_{j-\frac{1}{2}} - L_{j-\frac{3}{2}} \right) \\
&= -\frac{1}{4} \left(I_N w_N \left(L_{N+\frac{1}{2}} - L_{N-\frac{1}{2}} \right) - I_0 w_0 \left(L_{\frac{1}{2}} - L_{-\frac{1}{2}} \right) \right) \\
&\quad + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^N (I_j - I_{j-1}) w_j \left(L_{j+\frac{1}{2}} - L_{j-\frac{1}{2}} \right) \\
&\quad + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^N I_{j-1} \left(w_j - w_{j-\frac{1}{2}} \right) \left(L_{j+\frac{1}{2}} - L_{j-\frac{1}{2}} \right) \\
&\quad + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^N I_{j-1} \left(w_{j-\frac{1}{2}} - w_{j-1} \right) \left(L_{j-\frac{1}{2}} - L_{j-\frac{3}{2}} \right).
\end{aligned}$$

(2.71)

Como $L_{N+\frac{1}{2}} = 0$, $L_{-\frac{1}{2}} = 0$, $I_j - I_{j-1} = \frac{h_j}{k_j}$, $w_j - w_{j-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}w'_{j-\frac{1}{2}}L_{j-\frac{1}{2}} + O(L_{j-\frac{1}{2}}^2)$ e $w_{j-\frac{1}{2}} - w_{j-1} = \frac{1}{2}w'_{j-\frac{1}{2}}L_{j-\frac{1}{2}} + O(L_{j-\frac{1}{2}}^2)$, segue que

$$\begin{aligned}
\hat{J}_1(h) &= \frac{1}{4} I_N w_N L_{N-\frac{1}{2}} + \frac{1}{4} I_0 w_0 L_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^N u''_j h_j \left(L_{j+\frac{1}{2}} - L_{j-\frac{1}{2}} \right) \\
&+ \frac{1}{8} \sum_{j=1}^N I_{j-1} w'_{j-\frac{1}{2}} \left(L_{j+\frac{1}{2}} L_{j-\frac{1}{2}} - L_{j-\frac{1}{2}}^2 \right) \\
&+ I_{j-1} w'_{j-\frac{1}{2}} \left(L_{j-\frac{1}{2}}^2 - L_{j-\frac{1}{2}} L_{j-\frac{3}{2}} \right) + O(\hbar^2) \\
&= \frac{1}{4} I_N w_N L_{N-\frac{1}{2}} + \frac{1}{4} u''_0 h_0 L_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{8} \sum_{j=1}^N u''_j \left(L_{j+\frac{1}{2}}^2 - L_{j-\frac{1}{2}}^2 \right) \\
&+ \frac{1}{8} \sum_{j=1}^N \left(I_{j-1} w'_{j-\frac{1}{2}} L_{j+\frac{1}{2}} L_{j-\frac{1}{2}} - I_{j-1} w'_{j-\frac{1}{2}} L_{j-\frac{1}{2}} L_{j-\frac{3}{2}} \right) + O(\hbar^2),
\end{aligned} \tag{2.72}$$

visto que $I_0 = \frac{h_0}{k_0}$ e $h_j = \frac{1}{2} \left(L_{j+\frac{1}{2}} + L_{j-\frac{1}{2}} \right)$. Como $h_0 = \frac{L_{\frac{1}{2}}}{2}$,

$I_{j-1} w'_{j-\frac{1}{2}} = I_j w'_{j+\frac{1}{2}} - (I_j w'_{j+\frac{1}{2}} - I_{j-1} w'_{j-\frac{1}{2}})$ e

$(I_j w'_{j+\frac{1}{2}} - I_{j-1} w'_{j-\frac{1}{2}}) = (I_j - I_{j-1}) w'_{j+\frac{1}{2}} + I_{j-1} (w'_{j+\frac{1}{2}} - w'_{j-\frac{1}{2}}) = O(h_j)$, segue que

$$\begin{aligned}
\hat{J}_1(h) &= \frac{1}{4} I_N w_N L_{N-\frac{1}{2}} + \frac{1}{8} u''_0 L_{\frac{1}{2}}^2 + \frac{1}{8} \sum_{j=1}^N \left(u''_j L_{j+\frac{1}{2}}^2 - u''_j L_{j-\frac{1}{2}}^2 \right) \\
&+ \frac{1}{8} \sum_{j=1}^N \left(I_j w'_{j+\frac{1}{2}} L_{j+\frac{1}{2}} L_{j-\frac{1}{2}} - I_{j-1} w'_{j-\frac{1}{2}} L_{j-\frac{1}{2}} L_{j-\frac{3}{2}} \right) + O(\hbar^2).
\end{aligned} \tag{2.73}$$

Fazendo $u''_j = u''_{j-1} + O(L_{j-\frac{1}{2}})$, temos

$$\begin{aligned}
\hat{J}_1(h) &= \frac{1}{4} I_N w_N L_{N-\frac{1}{2}} + \frac{1}{8} u''_0 L_{\frac{1}{2}}^2 + \frac{1}{8} \left(u''_N L_{N+\frac{1}{2}}^2 - u''_0 L_{\frac{1}{2}}^2 \right) \\
&+ \frac{1}{8} \left(I_N w'_{N+\frac{1}{2}} L_{N+\frac{1}{2}} L_{N-\frac{1}{2}} - I_0 w'_{\frac{1}{2}} L_{\frac{1}{2}} L_{-\frac{1}{2}} \right) + O(\hbar^2).
\end{aligned} \tag{2.74}$$

Como $L_{N+\frac{1}{2}} = 0$ e $L_{-\frac{1}{2}} = 0$, obtemos

$$\hat{J}_1(h) = \frac{1}{4} I_N w_N L_{N-\frac{1}{2}} + O(\hbar^2), \tag{2.75}$$

isto é,

$$\hat{J}_1(h) = \frac{1}{4} I_N k_N u''_N L_{N-\frac{1}{2}} + O(\hbar^2). \tag{2.76}$$

Similarmente, para $\tilde{\mathbf{w}}(x) := \mathbf{k}(x)\mathbf{u}'''(x)$, chegamos a

$$\begin{aligned}\hat{J}_2(h) &= -\frac{1}{6} \sum_{j=1}^N I_{j-1} K_{j-\frac{1}{2}} u_{j-\frac{1}{2}}''' (h_j^2 - h_{j-1}^2) \\ &= -\frac{1}{6} \sum_{j=1}^N \left(I_{j-1} \tilde{w}_{j-\frac{1}{2}} h_j^2 - I_{j-1} \tilde{w}_{j-\frac{1}{2}} h_{j-1}^2 \right).\end{aligned}\tag{2.77}$$

De maneira análoga,

$$\begin{aligned}I_{j-1} \tilde{w}_{j-\frac{1}{2}} &= I_j \tilde{w}_j - \left(I_j \tilde{w}_j - I_{j-1} \tilde{w}_{j-\frac{1}{2}} \right), \\ \left(I_j \tilde{w}_j - I_{j-1} \tilde{w}_{j-\frac{1}{2}} \right) &= (I_j - I_{j-1}) \tilde{w}_j + I_{j-1} \left(\tilde{w}_j - \tilde{w}_{j-\frac{1}{2}} \right), \\ (I_j - I_{j-1}) &= O(h_j), \\ \left(\tilde{w}_j - \tilde{w}_{j-\frac{1}{2}} \right) &= O(L_{j-\frac{1}{2}}), \\ \tilde{w}_{j-\frac{1}{2}} &= \tilde{w}_{j-1} + (\tilde{w}_{j-\frac{1}{2}} - \tilde{w}_{j-1}) = \tilde{w}_{j-1} + O(L_{j-\frac{1}{2}}),\end{aligned}\tag{2.78}$$

o que resulta em

$$\begin{aligned}\hat{J}_2(h) &= -\frac{1}{6} \sum_{j=1}^N (I_j \tilde{w}_j h_j^2 - I_{j-1} \tilde{w}_{j-1} h_{j-1}^2) + O(\hbar^2) \\ &= -\frac{1}{6} (I_N \tilde{w}_N h_N^2 - I_0 \tilde{w}_0 h_0^2) + O(\hbar^2).\end{aligned}\tag{2.79}$$

Como $L_{N+\frac{1}{2}} = 0$ e $I_0 = \frac{h_0}{k_0}$, temos

$$\hat{J}_2(h) = -\frac{1}{6} I_N \tilde{w}_N \frac{L_{N-\frac{1}{2}}^2}{4} + O(\hbar^2),\tag{2.80}$$

ou seja,

$$\hat{J}_2(h) = -\frac{1}{24} I_N k_N u_N''' L_{N-\frac{1}{2}}^2 + O(\hbar^2).\tag{2.81}$$

Finalmente, considerando $\hat{\mathbf{w}}(x) := \mathbf{k}'(x)\mathbf{u}''(x)$ e escrevendo $(h_j - h_{j-1}) = \frac{1}{2} (L_{j+\frac{1}{2}} - L_{j-\frac{3}{2}})$, obtemos

$$\begin{aligned}\hat{J}_3(h) &= -\frac{1}{4} \sum_{j=1}^N I_{j-1} K'_{j-\frac{1}{2}} u_{j-\frac{1}{2}}'' L_{j-\frac{1}{2}} (h_j - h_{j-1}) \\ &= -\frac{1}{8} \sum_{j=1}^N \left(I_{j-1} \hat{w}_{j-\frac{1}{2}} L_{j+\frac{1}{2}} L_{j-\frac{1}{2}} - I_{j-1} \hat{w}_{j-\frac{1}{2}} L_{j-\frac{1}{2}} L_{j-\frac{3}{2}} \right).\end{aligned}\tag{2.82}$$

Da mesma forma que no caso anterior,

$$\begin{aligned}
I_{j-1} \hat{w}_{j-\frac{1}{2}} &= I_j \hat{w}_j - \left(I_j \hat{w}_j - I_{j-1} \hat{w}_{j-\frac{1}{2}} \right), \\
\left(I_j \hat{w}_j - I_{j-1} \hat{w}_{j-\frac{1}{2}} \right) &= (I_j - I_{j-1}) \hat{w}_j + I_{j-1} \left(\hat{w}_j - \hat{w}_{j-\frac{1}{2}} \right), \\
(I_j - I_{j-1}) &= O(h_j), \\
\left(\hat{w}_j - \hat{w}_{j-\frac{1}{2}} \right) &= O(L_{j-\frac{1}{2}}), \\
\hat{w}_{j-\frac{1}{2}} &= \hat{w}_{j-1} + (\hat{w}_{j-\frac{1}{2}} - \hat{w}_{j-1}) = \hat{w}_{j-1} + O(L_{j-\frac{1}{2}}),
\end{aligned} \tag{2.83}$$

o que resulta em

$$\begin{aligned}
\hat{J}_3(h) &= -\frac{1}{8} \sum_{j=1}^N \left(I_j \hat{w}_j L_{j+\frac{1}{2}} L_{j-\frac{1}{2}} - I_{j-1} \hat{w}_{j-1} L_{j-\frac{1}{2}} L_{j-\frac{3}{2}} \right) + O(\hbar^2) \\
&= -\frac{1}{8} \left(I_N \hat{w}_N L_{N+\frac{1}{2}} L_{N-\frac{1}{2}} - I_0 \hat{w}_0 L_{\frac{1}{2}} L_{-\frac{1}{2}} \right) + O(\hbar^2).
\end{aligned} \tag{2.84}$$

Como $L_{-\frac{1}{2}} = 0$ e $L_{N+\frac{1}{2}} = 0$, segue que

$$\hat{J}_3(h) = O(\hbar^2). \tag{2.85}$$

Conseqüentemente, de (2.67) e (2.76), (2.81), (2.85), temos

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^N \frac{1}{\theta_{j-1}^{[0]} c_{j-1}} L_{j-\frac{1}{2}} \tau(\mathbf{u})_{j-\frac{1}{2}} &= \hat{J}_1(h) + \hat{J}_2(h) + \hat{J}_3(h) + O(\hbar^2) \\
&= \frac{1}{4} I_N k_N u_N'' L_{N-\frac{1}{2}} - \frac{1}{24} I_N k_N u_N''' L_{N-\frac{1}{2}}^2 + O(\hbar^2),
\end{aligned} \tag{2.86}$$

isto é,

$$\sum_{j=1}^N \frac{1}{\theta_{j-1}^{[0]} c_{j-1}} L_{j-\frac{1}{2}} \tau(\mathbf{u})_{j-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} I_N k_N u_N'' L_{N-\frac{1}{2}} - \frac{1}{24} I_N k_N u_N''' L_{N-\frac{1}{2}}^2 + O(\hbar^2). \tag{2.87}$$

Com (2.66) e (2.87), a equação (2.63) pode ser reescrita na forma

$$\begin{aligned}
e_{N-\frac{1}{2}} &= -\frac{\theta_{N-1}^{[0]} c_{N-1}}{c_N + \theta_{N-1}^{[0]} c_{N-1}} \sum_{j=1}^N \frac{1}{\theta_{j-1}^{[0]} c_{j-1}} L_{j-\frac{1}{2}} \tau(\mathbf{u})_{j-\frac{1}{2}} \\
&= -\frac{h_N}{k_N I_N} \left(\frac{1}{4} I_N k_N u_N'' L_{N-\frac{1}{2}} - \frac{1}{24} I_N k_N u_N''' L_{N-\frac{1}{2}}^2 + O(\hbar^2) \right),
\end{aligned} \tag{2.88}$$

isto é,

$$e_{N-\frac{1}{2}} = -h_N \left(\frac{1}{4} u_N'' L_{N-\frac{1}{2}} - \frac{1}{24} u_N''' L_{N-\frac{1}{2}}^2 + O(\hbar^2) \right), \quad (2.89)$$

ou de forma equivalente,

$$e_{N-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{8} u_N'' L_{N-\frac{1}{2}}^2 + \frac{1}{48} u_N''' L_{N-\frac{1}{2}}^3 + h_N O(\hbar^2). \quad (2.90)$$

Em particular,

$$\begin{aligned} (\mathcal{G}e^h)_N &= \frac{e_N - e_{N-\frac{1}{2}}}{h_N} = -\frac{e_{N-\frac{1}{2}}}{h_N} \\ &= \frac{1}{4} u_N'' L_{N-\frac{1}{2}} - \frac{1}{24} u_N''' L_{N-\frac{1}{2}}^2 + O(\hbar^2), \end{aligned} \quad (2.91)$$

isto é,

$$(\mathcal{G}e^h)_N = \frac{1}{4} u_N'' L_{N-\frac{1}{2}} - \frac{1}{24} u_N''' L_{N-\frac{1}{2}}^2 + O(\hbar^2). \quad (2.92)$$

Com (2.45), (2.61) e (2.92), chegamos a

$$\begin{aligned} k_i (\mathcal{G}e^h)_i &= k_N (\mathcal{G}e^h)_N - \sum_{j=i+1}^N L_{j-\frac{1}{2}} \tau(\mathbf{u})_{j-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{4} k_N u_N'' L_{N-\frac{1}{2}} - \frac{1}{24} k_N u_N''' L_{N-\frac{1}{2}}^2 + O(\hbar^2) \\ &\quad - \left[\frac{1}{4} k_N u_N'' L_{N-\frac{1}{2}} - \frac{1}{24} k_N u_N''' L_{N-\frac{1}{2}}^2 \right. \\ &\quad + \frac{1}{4} k_i u_i'' \left(L_{i+\frac{1}{2}} - L_{i-\frac{1}{2}} \right) \\ &\quad \left. + \frac{1}{24} k_i u_i''' \left(L_{i-\frac{1}{2}}^2 + L_{i+\frac{1}{2}}^2 - L_{i-\frac{1}{2}} L_{i+\frac{1}{2}} \right) + O(\hbar^2) \right] \\ &= -\frac{1}{4} k_i u_i'' \left(L_{i+\frac{1}{2}} - L_{i-\frac{1}{2}} \right) \\ &\quad - \frac{1}{24} k_i u_i''' \left(L_{i-\frac{1}{2}}^2 + L_{i+\frac{1}{2}}^2 - L_{i-\frac{1}{2}} L_{i+\frac{1}{2}} \right) + O(\hbar^2), \end{aligned} \quad (2.93)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} (\mathcal{G}e^h)_i &= -\frac{1}{4} u_i'' \left(L_{i+\frac{1}{2}} - L_{i-\frac{1}{2}} \right) \\ &\quad - \frac{1}{24} u_i''' \left(L_{i-\frac{1}{2}}^2 + L_{i+\frac{1}{2}}^2 - L_{i-\frac{1}{2}} L_{i+\frac{1}{2}} \right) + O(\hbar^2), \quad 0 \leq i \leq N. \end{aligned} \quad (2.94)$$

De (2.11), temos que

$$\begin{aligned} E_i &= \frac{v_{i+\frac{1}{2}} - v_{i-\frac{1}{2}}}{h_i} - \mathbf{u}'(x_i) = (\mathcal{G}v^h)_i - \mathbf{u}'(x_i) \\ &= (\mathcal{G}(v^h - u^h))_i + (\mathcal{G}u^h)_i - \mathbf{u}'(x_i) = (\mathcal{G}e^h)_i + \tau_{\mathcal{G}}(\mathbf{u})_i, \end{aligned} \quad (2.95)$$

onde $\tau_{\mathcal{G}}(\mathbf{u})_i = (\mathcal{G}u^h)_i - \mathbf{u}'(x_i)$. Por expansões de *Taylor* para $\mathbf{u}(x)$ em torno de x_i , chegamos a

$$\begin{aligned} \tau_{\mathcal{G}}(\mathbf{u})_i &= \frac{\mathbf{u}(x_{i+\frac{1}{2}}) - \mathbf{u}(x_{i-\frac{1}{2}})}{h_i} - \mathbf{u}'(x_i) = \frac{1}{4} u_i'' (L_{i+\frac{1}{2}} - L_{i-\frac{1}{2}}) \\ &+ \frac{1}{24} u_i''' (L_{i+\frac{1}{2}}^2 + L_{i-\frac{1}{2}}^2 - L_{i-\frac{1}{2}} L_{i+\frac{1}{2}}) + O(L_{i-\frac{1}{2}}^3) + O(L_{i+\frac{1}{2}}^3), \end{aligned} \quad (2.96)$$

onde $\mathbf{u}(x) \in C^4([a, b])$.

Conseqüentemente,

$$\boxed{E_i = O(h^2), \quad 0 \leq i \leq N.} \quad (2.97)$$

No caso *Dirichlet*, conhecemos e_0 (e e_N), isto é, $e_0 = 0$ (e $e_N = 0$). Como

$$E_{i-1} = (\mathcal{G}v^h)_{i-1} - \mathbf{u}'(x_{i-1}) = \frac{v_{i-\frac{1}{2}} - v_{i-\frac{3}{2}}}{h_{i-1}} - u'_{i-1}, \quad (2.98)$$

$$\begin{aligned} v_{i-\frac{1}{2}} &= v_{i-\frac{3}{2}} + h_{i-1} u'_{i-1} + h_{i-1} E_{i-1} \\ &= \dots = v_{\frac{1}{2}} + \sum_{j=1}^{i-1} h_j u'_j + \sum_{j=1}^{i-1} h_j E_j \\ &= v_0 + \sum_{j=0}^{i-1} h_j u'_j + \sum_{j=0}^{i-1} h_j E_j, \end{aligned} \quad (2.99)$$

ou seja,

$$v_{i-\frac{1}{2}} = v_0 + \sum_{j=0}^{i-1} h_j u'_j + \sum_{j=0}^{i-1} h_j E_j, \quad 1 \leq i \leq N+1. \quad (2.100)$$

Similarmente, como

$$E_i = (\mathcal{G}v^h)_i - \mathbf{u}'(x_i) = \frac{v_{i+\frac{1}{2}} - v_{i-\frac{1}{2}}}{h_i} - u'_i, \quad (2.101)$$

$$v_{i-\frac{1}{2}} = v_{i+\frac{1}{2}} - h_i u'_i - h_i E_i, \quad (2.102)$$

ou seja,

$$v_{i-\frac{1}{2}} = v_N - \sum_{j=i}^N h_j u'_j - \sum_{j=i}^N h_j E_j, \quad 0 \leq i \leq N. \quad (2.103)$$

De (2.100) obtemos,

$$\begin{aligned} v_{i-\frac{1}{2}} &= v_0 + \sum_{j=0}^{i-1} h_j u'_j + \sum_{j=0}^{i-1} h_j E_j \\ &= v_0 + \left(\sum_{j=0}^{i-1} h_j u'_j - \frac{L_{i-\frac{1}{2}}}{2} u'_{i-1} \right) + \frac{L_{i-\frac{1}{2}}}{2} u'_{i-1} + \sum_{j=0}^{i-1} h_j E_j. \end{aligned} \quad (2.104)$$

Os termos entre parênteses nesta última equação representam a aproximação trapezoidal para $\int_{x_0}^{x_{i-1}} \mathbf{u}'(x) dx$, e, como já sabemos que $E_j = O(\hbar^2)$, temos

$$\begin{aligned} v_{i-\frac{1}{2}} &= v_0 + \left(\int_{x_0}^{x_{i-1}} \mathbf{u}'(x) dx + O(\hbar^2) \right) + \frac{1}{2} L_{i-\frac{1}{2}} u'_{i-1} + O(\hbar^2) \\ &= v_0 + [u_{i-1} - u_0 + O(\hbar^2)] + \frac{1}{2} L_{i-\frac{1}{2}} u'_{i-1} + O(\hbar^2) \\ &= u_{i-1} + \frac{1}{2} L_{i-\frac{1}{2}} u'_{i-1} + O(\hbar^2). \end{aligned} \quad (2.105)$$

Como $u_{i-\frac{1}{2}} = u_{i-1} + \frac{1}{2} L_{i-\frac{1}{2}} u'_{i-1} + \frac{1}{8} L_{i-\frac{1}{2}}^2 u''_{i-1} + O(L_{i-\frac{1}{2}}^3)$, segue que

$$v_{i-\frac{1}{2}} = u_{i-\frac{1}{2}} - \frac{1}{8} L_{i-\frac{1}{2}}^2 u''_{i-1} + O(L_{i-\frac{1}{2}}^3) + O(\hbar^2), \quad (2.106)$$

e portanto,

$$\boxed{e_{i-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{8} u''_{i-\frac{1}{2}} L_{i-\frac{1}{2}}^2 + O(\hbar^2), \quad 1 \leq i \leq N,} \quad (2.107)$$

com $e_0 = 0$ e $e_N = 0$.

Os demais casos correspondentes às outras condições de contorno são tratados de modo inteiramente análogo, ver [10] para uma discussão detalhada.

2.3 Análise dos Erros de Solução e de Derivada de Primeira Ordem para $\mathbf{q}(x) \geq 0$

Consideremos agora o problema de estimar os erros

$$e_{i-\frac{1}{2}}^{[\mathbf{q}]} = v_{i-\frac{1}{2}}^{[\mathbf{q}]} - \mathbf{u}^{[\mathbf{q}]}(x_{i-\frac{1}{2}}), \quad 0 \leq i \leq N+1, \quad (2.108)$$

e

$$E_i^{[\mathbf{q}]} = \frac{v_{i+\frac{1}{2}}^{[\mathbf{q}]} - v_{i-\frac{1}{2}}^{[\mathbf{q}]}}{h_i} - \frac{d\mathbf{u}^{[\mathbf{q}]}}{dx}(x_i), \quad 0 \leq i \leq N, \quad (2.109)$$

onde $v_{-\frac{1}{2}}^{[\mathbf{q}]} \equiv v_0^{[\mathbf{q}]}$, $v_{\frac{1}{2}}^{[\mathbf{q}]}, \dots, v_{N-\frac{1}{2}}^{[\mathbf{q}]}, v_{N+\frac{1}{2}}^{[\mathbf{q}]} \equiv v_N^{[\mathbf{q}]}$ denotam as aproximações obtidas para os valores da solução do problema (2.1)-(2.3), representada por $\mathbf{u}^{[\mathbf{q}]}(x)$, nos pontos $x_{i-\frac{1}{2}}$, $0 \leq i \leq N+1$, para dada função $\mathbf{q}(x) \in C^0([a, b])$ não negativa. O propósito desta seção é demonstrar o seguinte resultado.

Teorema 2.1. *Na notação acima, tem-se*

$$e_{i-\frac{1}{2}}^{[\mathbf{q}]} = e_{i-\frac{1}{2}}^{[0]} + O(\hbar^2), \quad 0 \leq i \leq N+1, \quad (2.110)$$

e

$$E_i^{[\mathbf{q}]} = E_i^{[0]} + O(\hbar^2), \quad 0 \leq i \leq N, \quad (2.111)$$

uniformemente em i , onde $e^{[0]}$, $E^{[0]}$ denotam respectivamente os erros de solução e de derivada correspondentes ao caso $\mathbf{q}(x) = 0$.

Demonstração. Apresentaremos aqui a análise dos erros e^h e E^h , com $\mathbf{q}(x) \geq 0$, para o caso de condições de contorno de *Dirichlet* em $x = a$ e $x = b$. Para os demais casos, o procedimento é análogo. Do tratamento algébrico realizado na *Seção 2.1*, $e^{[\mathbf{q}]} \in \mathcal{H}_c$ é solução para o sistema linear algébrico

$$A_h(\mathbf{q}) e^{[\mathbf{q}]} = -\mathcal{L}_h \tau(\mathbf{u}), \quad (2.112)$$

$$A_h(\mathbf{q}) = A_h(0) + Q_h(\mathbf{q}), \quad (2.113)$$

onde $\mathcal{L}_h = \text{diag}(L_{\frac{1}{2}}, \dots, L_{N-\frac{1}{2}})$, $Q_h(\mathbf{q}) = \text{diag}(q_{\frac{1}{2}}L_{\frac{1}{2}}, \dots, q_{N-\frac{1}{2}}L_{N-\frac{1}{2}})$, $A_h(\mathbf{q})$ é dada em (2.24), (2.25) e (2.26), e $\tau(\mathbf{u}) \in \mathcal{H}_C$ é o erro de truncamento dado por (2.13). Inicialmente, consideremos o caso $\mathbf{q}(x) \geq 0$. Fixando $e^{[0]}$,

$$A_h(0) e^{[0]} = -\mathcal{L}_h \tau(\mathbf{u}), \quad (2.114)$$

obtemos, para a diferença $e^{[\mathbf{q}]} - e^{[0]}$, a equação

$$A_h(\mathbf{q}) (e^{[\mathbf{q}]} - e^{[0]}) = -Q_h e^{[0]}. \quad (2.115)$$

Reduzindo (2.115) à forma triangular, obtemos, por (2.28), (2.29), (2.30), (2.33) e (2.34),

$$\hat{A}_h(\mathbf{q}) (e^{[\mathbf{q}]} - e^{[0]}) = \hat{\zeta}, \quad (2.116)$$

com $\hat{\zeta} \in \mathcal{H}_C$, dado por

$$\hat{\zeta}_{i-\frac{1}{2}} = - \sum_{j=1}^i \frac{\theta_{i-1}^{[\mathbf{q}]} c_{i-1}}{\theta_{j-1}^{[\mathbf{q}]} c_{j-1}} \nu_{ij}^{[\mathbf{q}]} L_{j-\frac{1}{2}} q_{j-\frac{1}{2}} e_{j-\frac{1}{2}}^{[0]}, \quad 1 \leq i \leq N. \quad (2.117)$$

Para $\mathbf{q}(x) \geq 0$, temos (2.32), e de (2.34) segue que $|\nu_{ij}^{[\mathbf{q}]}| \leq 1$ para todo i, j .

Assim,

$$\begin{aligned} |\hat{\zeta}_{i-\frac{1}{2}}| &\leq \theta_{i-1}^{[\mathbf{q}]} c_{i-1} \sum_{j=1}^i \frac{1}{\theta_{j-1}^{[\mathbf{q}]} c_{j-1}} L_{j-\frac{1}{2}} \|\mathbf{q}\|_{\text{sup}} |e_{j-\frac{1}{2}}^{[0]}| \\ &\leq \theta_{i-1}^{[\mathbf{q}]} c_{i-1} \|\mathbf{q}\|_{\text{sup}} \sum_{l=1}^i \frac{h_l}{k_l} \sum_{j=1}^i L_{j-\frac{1}{2}} |e_{j-\frac{1}{2}}^{[0]}|, \quad 1 \leq i \leq N, \end{aligned} \quad (2.118)$$

isto é,

$$|\hat{\zeta}_{i-\frac{1}{2}}| \leq \theta_{i-1}^{[\mathbf{q}]} c_{i-1} I_N \|\mathbf{q}\|_{\text{sup}} \sum_{j=1}^N L_{j-\frac{1}{2}} |e_{j-\frac{1}{2}}^{[0]}|, \quad 1 \leq i \leq N, \quad (2.119)$$

onde $\|\mathbf{q}\|_{\text{sup}} = \sup_{x \in [a,b]} \mathbf{q}(x)$. Então, do *Lema 2.1*,

$$\|e^{[\mathbf{q}]} - e^{[0]}\|_{\text{sup}} \leq I_N \|\mathbf{q}\|_{\text{sup}} \sum_{j=1}^N L_{j-\frac{1}{2}} |e_{j-\frac{1}{2}}^{[0]}|, \quad 1 \leq i \leq N, \quad (2.120)$$

quando $\mathbf{q}(x) \geq 0$, e como $e_{j-\frac{1}{2}}^{[0]} = O(L_{j-\frac{1}{2}}^2) + O(\hbar^2)$ da Seção 2.2, obtemos $\|e^{[\mathbf{q}]} - e^{[0]}\|_{\text{sup}} = O(\hbar^2)$. Devido a $e_{i-\frac{1}{2}}^{[\mathbf{q}]} = e_{i-\frac{1}{2}}^{[0]} + O(\|e^{[\mathbf{q}]} - e^{[0]}\|_{\text{sup}})$, temos

$$e_{i-\frac{1}{2}}^{[\mathbf{q}]} = -\frac{1}{8} \mathbf{u}''(x_{i-\frac{1}{2}}) L_{i-\frac{1}{2}}^2 + O(\hbar^2), \quad 1 \leq i \leq N, \quad (2.121)$$

onde o tamanho da constante no termo $O(\hbar^2)$ depende dos valores de $\mathbf{q}(x)$, $\mathbf{k}(x)$, $\frac{1}{\mathbf{k}(x)}$ e das derivadas $\mathbf{k}(x)^l$, $\mathbf{u}(x)^{(1+l)}$, com $0 \leq l \leq 3$, em $[a, b]$.

Estendamos (2.121) para funções $\mathbf{q}(\cdot)$ satisfazendo (2.41), procedendo da seguinte forma. Busquemos $0 < \lambda < 1$ tal que

$$\mathbf{q}(x) \geq -\frac{\lambda}{(b-a)\mathcal{I}}, \quad a \leq x \leq b, \quad \mathcal{I} = \int_a^b \frac{1}{\mathbf{k}(s)} ds, \quad (2.122)$$

e suponhamos que a malha seja suficientemente fina, de forma que tenhamos

$$I_N = \sum_{l=0}^N \frac{h_l}{k_l} \leq \frac{\lambda + 1}{2\lambda} \int_a^b \frac{1}{\mathbf{k}(s)} ds. \quad (2.123)$$

Como antes, o erro $e^{[\mathbf{q}]} = v^h - u^h$ da aproximação v^h dado em (2.8), com $v_0 = \gamma_a$ e $v_N = \gamma_b$, é determinado pela equação $A_h(\mathbf{q})e^{[\mathbf{q}]} = -\mathcal{L}_h\tau(\mathbf{u})$, onde $\tau(\mathbf{u}) \in \mathcal{H}_c$ é o erro de truncamento dado por (2.13). Definindo $\mathbf{q}^* = \sup\{0, \mathbf{q}\}$, seja $e^{[\mathbf{q}^*]} \in \mathcal{H}_c$ definido por $A_h(\mathbf{q}^*)e^{[\mathbf{q}^*]} = -\mathcal{L}_h\tau(\mathbf{u})$, o que produz

$$A_h(\mathbf{q}^*)(e^{[\mathbf{q}]} - e^{[\mathbf{q}^*]}) = -Q_h(\mathbf{q} - \mathbf{q}^*)e^{[\mathbf{q}^*]} - Q_h(\mathbf{q} - \mathbf{q}^*)(e^{[\mathbf{q}]} - e^{[\mathbf{q}^*]}), \quad (2.124)$$

onde $Q_h(\mathbf{q} - \mathbf{q}^*) = \text{diag}\{(q_{\frac{1}{2}} - q_{\frac{1}{2}}^*)L_{\frac{1}{2}}, \dots, (q_{N-\frac{1}{2}} - q_{N-\frac{1}{2}}^*)L_{N-\frac{1}{2}}\}$. Esta equação pode ser resolvida iterativamente fazendo $e^{[\mathbf{q}]} - e^{[\mathbf{q}^*]} = \lim_{p \rightarrow \infty} w^{(p)}$, com $w^{(0)} = (0, \dots, 0)$ e $w^{(1)}$, $w^{(2)}$, ..., dados por

$$A_h(\mathbf{q}^*)w^{(p)} = -Q_h(\mathbf{q} - \mathbf{q}^*)e^{[\mathbf{q}^*]} - Q_h(\mathbf{q} - \mathbf{q}^*)w^{(p-1)}, \quad p \geq 1. \quad (2.125)$$

Assim, $A_h(\mathbf{q}^*)w^{(1)} = -Q_h(\mathbf{q} - \mathbf{q}^*)e^{[\mathbf{q}^*]}$, ou $\hat{A}_h(\mathbf{q}^*)w^{(1)} = \hat{\zeta}^{(1)}$ na forma triangular com

$$\hat{\zeta}_{i-\frac{1}{2}}^{(1)} = -\sum_{j=1}^i \frac{\theta_{i-1}^{[\mathbf{q}^*]} c_{i-1}}{\theta_{j-1}^{[\mathbf{q}^*]} c_{j-1}} \nu_{ij}^{[\mathbf{q}^*]} L_{j-\frac{1}{2}} \left(q_{j-\frac{1}{2}} - q_{j-\frac{1}{2}}^* \right) e_{j-\frac{1}{2}}^{[\mathbf{q}^*]}, \quad 1 \leq i \leq N. \quad (2.126)$$

Como $\mathbf{q}^* \geq 0$, obtemos $|\hat{\zeta}_{i-\frac{1}{2}}^{(1)}| \leq \theta_{i-1}^{[\mathbf{q}^*]} c_{i-1} I_N \|\mathbf{q} - \mathbf{q}^*\|_{\text{sup}} \sum_{j=1}^N L_{j-\frac{1}{2}} |e_{j-\frac{1}{2}}^{[\mathbf{q}^*]}|$, isto é,

$$|\hat{\zeta}_{i-\frac{1}{2}}^{(1)}| = \theta_{i-1}^{[\mathbf{q}^*]} c_{i-1} \frac{\lambda + 1}{2} \frac{1}{b - a} \sum_{j=1}^N L_{j-\frac{1}{2}} |e_{j-\frac{1}{2}}^{[\mathbf{q}^*]}|, \quad 1 \leq i \leq N, \quad (2.127)$$

usando (2.122) e (2.123). De forma semelhante, obtemos, para quaisquer $p \geq 1$ e $1 \leq i \leq N$,

$$|\hat{\zeta}_{i-\frac{1}{2}}^{(p)} - \hat{\zeta}_{i-\frac{1}{2}}^{(p-1)}| \leq \theta_{i-1}^{[\mathbf{q}^*]} c_{i-1} \left(\frac{\lambda + 1}{2}\right)^p \frac{1}{b - a} \sum_{j=1}^N L_{j-\frac{1}{2}} |e_{j-\frac{1}{2}}^{[\mathbf{q}^*]}|, \quad (2.128)$$

que produz, pelo *Lema 2.1*, $\|w^{(p)} - w^{(p-1)}\|_{\text{sup}} \leq \left(\frac{\lambda+1}{2}\right)^p \frac{1}{b-a} \sum_{j=1}^N L_{j-\frac{1}{2}} |e_{j-\frac{1}{2}}^{[\mathbf{q}^*]}|$ para todo $p \geq 1$. Portanto,

$$\|e^{[\mathbf{q}]} - e^{\mathbf{q}^*}\|_{\text{sup}} \leq \sum_{p=1}^{\infty} \|w^{(p)} - w^{(p-1)}\|_{\text{sup}} \leq \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda} \frac{1}{b - a} \sum_{j=1}^N L_{j-\frac{1}{2}} |e_{j-\frac{1}{2}}^{[\mathbf{q}^*]}| \quad (2.129)$$

e então, como $|e_{j-\frac{1}{2}}^{[\mathbf{q}^*]}| = O(L_{j-\frac{1}{2}}^2) + O(\hbar^2)$ de (2.121), temos que $\|e^{[\mathbf{q}]} - e^{[\mathbf{q}^*]}\|_{\text{sup}} = O(\hbar^2)$. Isto resulta em

$$\begin{aligned} e_{i-\frac{1}{2}}^{[\mathbf{q}]} &= e_{i-\frac{1}{2}}^{[\mathbf{q}^*]} + O(\|e^{[\mathbf{q}]} - e^{\mathbf{q}^*}\|_{\text{sup}}) \\ &= -\frac{1}{8} \mathbf{u}''(x_{i-\frac{1}{2}}) L_{i-\frac{1}{2}}^2 + O(\hbar^2), \quad 1 \leq i \leq N. \end{aligned} \quad (2.130)$$

Continuemos estimando $E^{[\mathbf{q}]}$, $\mathcal{G}e^{[\mathbf{q}]}$, e agora que (2.130) foi obtido, procedamos como na *Seção 2.2*. A partir de (2.44), temos, para $0 \leq i \leq N$,

$$k_i (\mathcal{G}e^{[\mathbf{q}]})_i = k_N (\mathcal{G}e^{[\mathbf{q}]})_N - \sum_{j=i+1}^N L_{j-\frac{1}{2}} q_{j-\frac{1}{2}} e_{j-\frac{1}{2}}^{[\mathbf{q}]} - \sum_{j=i+1}^N L_{j-\frac{1}{2}} \tau(\mathbf{u})_{j-\frac{1}{2}}, \quad (2.131)$$

onde a primeira soma tem tamanho $O(\hbar^2)$, por (2.130), e a última já foi computada em (2.61). Quanto a $k_N (\mathcal{G}e^{[\mathbf{q}]})_N$, procedemos como antes, computando $e_{N-\frac{1}{2}}^{[\mathbf{q}]}$ com terceira ordem de precisão usando os métodos utilizados no tratamento algébrico apresentado na *Seção 2.1*. De (2.112) e (2.113), temos $A_h(0)e^{[\mathbf{q}]} = \mathbf{b}(\mathbf{u}) - Q_h(\mathbf{q})e^{[\mathbf{q}]}$, onde $\mathbf{b}(\mathbf{u}) = -\mathcal{L}_h \tau(\mathbf{u})$. Após a eliminação, isso torna-se $\hat{A}_h(0)e^{[\mathbf{q}]} = \hat{\mathbf{b}}(\mathbf{u}) - \hat{\zeta}$, com

$\hat{\zeta} = (\hat{\zeta}_{\frac{1}{2}}, \dots, \hat{\zeta}_{N-\frac{1}{2}}) \in \mathcal{H}_C$ dado por

$$\hat{\zeta}_{i-\frac{1}{2}} = - \sum_{j=1}^i \frac{\theta_{i-1}^{[0]} c_{i-1}}{\theta_{j-1}^{[0]} c_{j-1}} L_{j-\frac{1}{2}} q_{j-\frac{1}{2}} e_{j-\frac{1}{2}}^{[\mathbf{q}]}, \quad 1 \leq i \leq N, \quad (2.132)$$

conforme (2.28), (2.29), (2.30), (2.33) e (2.34). Como, $|\hat{\zeta}_{i-\frac{1}{2}}| \leq \theta_{i-1}^{[0]} c_{i-1} I_N \|\mathbf{q}\|_{\text{sup}} \sum_{j=1}^i L_{j-\frac{1}{2}} |e_{j-\frac{1}{2}}^{[\mathbf{q}]}|$ por (2.31) e (2.64) para $j = N$, de (2.28) e (2.66), obtemos

$$\begin{aligned} |(\hat{A}_h(0)^{-1} \hat{\zeta})_{N-\frac{1}{2}}| &\leq \frac{\theta_{N-1}^{[0]} c_{N-1}}{c_N + \theta_{N-1}^{[0]} c_{N-1}} I_N \|\mathbf{q}\|_{\text{sup}} \sum_{j=1}^N L_{j-\frac{1}{2}} |e_{j-\frac{1}{2}}^{[\mathbf{q}]}| \\ &= \frac{h_N}{k_N} \|\mathbf{q}\|_{\text{sup}} \sum_{j=1}^N L_{j-\frac{1}{2}} |e_{j-\frac{1}{2}}^{[\mathbf{q}]}|. \end{aligned} \quad (2.133)$$

Para $e^{[0]} = A_h(0)^{-1} \mathbf{b}(\mathbf{u}) = \hat{A}_h(0)^{-1} \hat{\mathbf{b}}(\mathbf{u})$, temos $e_{N-\frac{1}{2}}^{[\mathbf{q}]} = e_{N-\frac{1}{2}}^{[0]} - (\hat{A}_h(0)^{-1} \hat{\zeta})_{N-\frac{1}{2}}$, de maneira que, por (2.63), (2.89), (2.130), (2.133),

$$e_{N-\frac{1}{2}}^{[\mathbf{q}]} = h_N \left(-\frac{1}{4} u_N'' L_{N-\frac{1}{2}} + \frac{1}{24} u_N''' L_{N-\frac{1}{2}}^2 + O(\hbar^2) \right), \quad (2.134)$$

dando

$$(\mathcal{G}e^{[\mathbf{q}]})_N = \frac{1}{4} u_N'' L_{N-\frac{1}{2}} - \frac{1}{24} u_N''' L_{N-\frac{1}{2}}^2 + O(\hbar^2). \quad (2.135)$$

Conseqüentemente, de (2.61), (2.130), (2.131), (2.135), obtemos

$$\begin{aligned} (\mathcal{G}e^{[\mathbf{q}]})_i &= -\frac{1}{4} u_i'' \left(L_{i+\frac{1}{2}} - L_{i-\frac{1}{2}} \right) \\ &\quad - \frac{1}{24} u_i''' \left(L_{i-\frac{1}{2}}^2 - L_{i-\frac{1}{2}} L_{i+\frac{1}{2}} + L_{i+\frac{1}{2}}^2 \right) + O(\hbar^2) \end{aligned} \quad (2.136)$$

para todo $0 \leq i \leq N$ tal que $E^{[\mathbf{q}]} = \mathcal{G}e^{[\mathbf{q}]} + \tau_{\mathcal{G}}(\mathbf{u}) = O(\hbar^2)$, como afirmado. \square

2.4 Análise do Erro da Derivada de Segunda Ordem

Analisemos inicialmente $\mathcal{D}(E)_{i-\frac{1}{2}}$, com $1 \leq i \leq N$. Sabemos que o erro da derivada de primeira ordem é dado por

$$E = \mathcal{G}e^h + \tau_{\mathcal{G}}(\mathbf{u}). \quad (2.137)$$

Multiplicando (2.137) por k , obtemos

$$k \cdot E = k \cdot \mathcal{G}e^h + k \cdot \tau_{\mathcal{G}}(\mathbf{u}), \quad (2.138)$$

que, por sua vez, implica

$$\mathcal{D}(k \cdot E) = \mathcal{D}(k \cdot \mathcal{G}e^h) + \mathcal{D}(k \cdot \tau_{\mathcal{G}}(\mathbf{u})). \quad (2.139)$$

Pela equação (2.14), como $-\mathcal{D}(k \cdot \mathcal{G}e^h) + q \cdot e^h = -\tau(\mathbf{u})$, segue que

$$\mathcal{D}(k \cdot E)_{i-\frac{1}{2}} = q_{i-\frac{1}{2}} \cdot e_{i-\frac{1}{2}} + \tau(\mathbf{u})_{i-\frac{1}{2}} + \mathcal{D}(k \cdot \tau_{\mathcal{G}}(\mathbf{u}))_{i-\frac{1}{2}}, \quad 1 \leq i \leq N. \quad (2.140)$$

Além disso,

$$\mathcal{D}(w \cdot z)_{i-\frac{1}{2}} = \frac{w_i z_i - w_{i-1} z_{i-1}}{L_{i-\frac{1}{2}}} = \frac{w_i - w_{i-1}}{L_{i-\frac{1}{2}}} z_i + w_{i-1} \frac{z_i - z_{i-1}}{L_{i-\frac{1}{2}}}, \quad (2.141)$$

isto é,

$$\mathcal{D}(w \cdot z)_{i-\frac{1}{2}} = (\mathcal{D}w)_{i-\frac{1}{2}} z_i + w_{i-1} (\mathcal{D}z)_{i-\frac{1}{2}}, \quad (2.142)$$

o que implica

$$\mathcal{D}(k \cdot E)_{i-\frac{1}{2}} = k_i \cdot (\mathcal{D}E)_{i-\frac{1}{2}} + E_{i-1} \cdot \mathcal{D}(k)_{i-\frac{1}{2}}, \quad (2.143)$$

onde

$$\mathcal{D}(k)_{i-\frac{1}{2}} = \frac{k_i - k_{i-1}}{L_{i-\frac{1}{2}}} = k'_{i-\frac{1}{2}} + O(L_{i-\frac{1}{2}}^2), \quad (2.144)$$

visto que $\mathbf{k}(x) \in C^3([a, b])$.

Similarmente, de (2.142), chegamos a

$$\mathcal{D}(k \cdot \tau_{\mathcal{G}}(\mathbf{u}))_{i-\frac{1}{2}} = k_{i-1} \cdot \mathcal{D}(\tau_{\mathcal{G}}(\mathbf{u}))_{i-\frac{1}{2}} + (\mathcal{D}k)_{i-\frac{1}{2}} \cdot \tau_{\mathcal{G}}(\mathbf{u})_i. \quad (2.145)$$

Substituindo (2.143) e (2.145) em (2.140), obtemos

$$\begin{aligned} k_i \cdot (\mathcal{D}E)_{i-\frac{1}{2}} &= -E_{i-1} \cdot (\mathcal{D}k)_{i-\frac{1}{2}} + q_{i-\frac{1}{2}} e_{i-\frac{1}{2}} + \tau(\mathbf{u})_{i-\frac{1}{2}} \\ &+ (\mathcal{D}k)_{i-\frac{1}{2}} \tau_{\mathcal{G}}(\mathbf{u})_i + k_{i-1} \mathcal{D}(\tau_{\mathcal{G}}(\mathbf{u}))_{i-\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (2.146)$$

onde

$$E_{i-1} = O(\hbar^2), \quad (2.147)$$

$$(\mathcal{D}k)_{i-\frac{1}{2}} = O(1), \quad (2.148)$$

$$q_{i-\frac{1}{2}} = O(1), \quad (2.149)$$

$$e_{i-\frac{1}{2}} = O(L_{i-\frac{1}{2}}^2) + O(\hbar^2), \quad (2.150)$$

$$\begin{aligned} \tau(\mathbf{u})_{i-1/2} &= k_{i-1/2} u''_{i-1/2} \left(1 - \frac{h_i + h_{i-1}}{2L_{i-1/2}} \right) \\ &- \frac{1}{6} K_{i-1/2} u'''_{i-1/2} \frac{h_i^2 - h_{i-1}^2}{L_{i-1/2}} - \frac{1}{4} K'_{i-1/2} u''_{i-1/2} (h_i - h_{i-1}) \\ &+ O(L_{i-3/2}^2) + O(L_{i-1/2}^2) + O(L_{i+1/2}^2), \end{aligned} \quad (2.151)$$

e,

$$\mathcal{D}(k)_{i-\frac{1}{2}} = k'_{i-\frac{1}{2}} + O(L_{i-\frac{1}{2}}^2). \quad (2.152)$$

Fazendo

$$\begin{aligned} \mathbf{u}'(x_i) &= \mathbf{u}'(x_{i-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} L_{i-\frac{1}{2}}) \\ &= u'_{i-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} u''_{i-\frac{1}{2}} L_{i-\frac{1}{2}} + \frac{1}{8} u'''_{i-\frac{1}{2}} L_{i-\frac{1}{2}}^2 + O(L_{i-\frac{1}{2}}^3), \end{aligned} \quad (2.153)$$

segue que,

$$\begin{aligned} \tau_{\mathcal{G}}(\mathbf{u})_i &= (\mathcal{G}u^h)_i - \mathbf{u}'(x_i) = \frac{\mathbf{u}(x_{i-\frac{1}{2}} + h_i) - \mathbf{u}(x_{i-\frac{1}{2}})}{h_i} - \mathbf{u}'(x_i) \\ &= \left(u'_{i-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} u''_{i-\frac{1}{2}} h_i + \frac{1}{6} u'''_{i-\frac{1}{2}} h_i^2 + O(h_i^3) \right) - u'_i \\ &= \frac{1}{4} u''_{i-\frac{1}{2}} (L_{i+\frac{1}{2}} - L_{i-\frac{1}{2}}) + \frac{1}{6} u'''_{i-\frac{1}{2}} h_i^2 - \frac{1}{8} u'''_{i-\frac{1}{2}} L_{i-\frac{1}{2}}^2 + O(h_i^3), \end{aligned} \quad (2.154)$$

ou seja,

$$\tau_{\mathcal{G}}(\mathbf{u})_i = \frac{1}{4} u''_{i-\frac{1}{2}} (L_{i+\frac{1}{2}} - L_{i-\frac{1}{2}}) + O(h_i^2). \quad (2.155)$$

Além disso,

$$\mathcal{D}(\tau_{\mathcal{G}}(\mathbf{u}))_{i-\frac{1}{2}} = \frac{1}{L_{i-\frac{1}{2}}} (\tau_{\mathcal{G}}(\mathbf{u})_i - \tau_{\mathcal{G}}(\mathbf{u})_{i-1}), \quad (2.156)$$

onde

$$\begin{aligned}\tau_{\mathcal{G}}(\mathbf{u})_i &= \frac{\mathbf{u}(x_{i-\frac{1}{2}} + h_i) - \mathbf{u}(x_{i-\frac{1}{2}})}{h_i} - \mathbf{u}'(x_i) \\ &= u'_{i-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} u''_{i-\frac{1}{2}} h_i + \frac{1}{6} u'''_{i-\frac{1}{2}} h_i^2 + O(h_i^3) - u'_i,\end{aligned}\tag{2.157}$$

e

$$\begin{aligned}\tau_{\mathcal{G}}(\mathbf{u})_{i-1} &= \frac{\mathbf{u}(x_{i-\frac{1}{2}}) - \mathbf{u}(x_{i-\frac{1}{2}} - h_{i-1})}{h_{i-1}} - \mathbf{u}'(x_{i-1}) \\ &= \frac{\mathbf{u}(x_{i-\frac{1}{2}}) - (u_{i-\frac{1}{2}} - h_{i-1} u'_{i-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} h_{i-1}^2 u''_{i-\frac{1}{2}} - \frac{1}{6} h_{i-1}^3 u'''_{i-\frac{1}{2}} + O(h_{i-1}^4))}{h_{i-1}} \\ &\quad - \mathbf{u}'(x_{i-1}) \\ &= u'_{i-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} u''_{i-\frac{1}{2}} h_{i-1} + \frac{1}{6} u'''_{i-\frac{1}{2}} h_{i-1}^2 + O(h_{i-1}^3) - u'_{i-1}.\end{aligned}\tag{2.158}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}\tau_{\mathcal{G}}(\mathbf{u})_i - \tau_{\mathcal{G}}(\mathbf{u})_{i-1} &= u''_{i-\frac{1}{2}} \frac{h_i + h_{i-1}}{2} + \frac{1}{6} u'''_{i-\frac{1}{2}} (h_i^2 - h_{i-1}^2) \\ &\quad - (u'_i - u'_{i-1}) + O(h_i^3) + O(h_{i-1}^3).\end{aligned}\tag{2.159}$$

Como $(u'_i - u'_{i-1}) = u''_{i-\frac{1}{2}} L_{i-\frac{1}{2}} + O(L_{i-\frac{1}{2}}^3)$, segue que

$$\begin{aligned}\frac{1}{L_{i-\frac{1}{2}}} (\tau_{\mathcal{G}}(\mathbf{u})_i - \tau_{\mathcal{G}}(\mathbf{u})_{i-1}) &= u''_{i-\frac{1}{2}} \frac{h_i + h_{i-1}}{2 L_{i-\frac{1}{2}}} + \frac{1}{6} u'''_{i-\frac{1}{2}} \frac{h_i^2 - h_{i-1}^2}{L_{i-\frac{1}{2}}} \\ &\quad - u''_{i-\frac{1}{2}} + O(L_{i-\frac{1}{2}}^2) \\ &\quad + O(L_{i-\frac{3}{2}}^2) \frac{L_{i-\frac{3}{2}}}{L_{i-\frac{1}{2}}} + O(L_{i+\frac{1}{2}}^2) \frac{L_{i+\frac{1}{2}}}{L_{i-\frac{1}{2}}}.\end{aligned}\tag{2.160}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(\tau_{\mathcal{G}}(\mathbf{u}))_{i-\frac{1}{2}} &= u''_{i-\frac{1}{2}} \left(\frac{h_i + h_{i-1}}{2 L_{i-\frac{1}{2}}} - 1 \right) + \frac{1}{6} u'''_{i-\frac{1}{2}} \frac{h_i^2 - h_{i-1}^2}{L_{i-\frac{1}{2}}} \\ &\quad + O(L_{i-\frac{1}{2}}^2) + O(L_{i-\frac{3}{2}}^2) \frac{L_{i-\frac{3}{2}}}{L_{i-\frac{1}{2}}} + O(L_{i+\frac{1}{2}}^2) \frac{L_{i+\frac{1}{2}}}{L_{i-\frac{1}{2}}}.\end{aligned}\tag{2.161}$$

Usando as equações (2.151) e (2.161) em (2.146), obtemos

$$\begin{aligned}
k_i \cdot (\mathcal{D}E)_{i-\frac{1}{2}} &= O(\hbar^2) + O(L_{i-\frac{1}{2}}^2) + \frac{1}{4} k'_{i-\frac{1}{2}} u''_{i-\frac{1}{2}} \left(L_{i+\frac{1}{2}} - L_{i-\frac{1}{2}} \right) \\
&+ \tau(\mathbf{u})_{i-\frac{1}{2}} + k_{i-1} \cdot \mathcal{D}(\tau_{\mathcal{G}}(\mathbf{u}))_{i-\frac{1}{2}} \\
&= O(\hbar^2) + O(L_{i-\frac{1}{2}}^2) + \frac{1}{4} k'_{i-\frac{1}{2}} u''_{i-\frac{1}{2}} \left(L_{i+\frac{1}{2}} - L_{i-\frac{1}{2}} \right) \\
&+ \left[k_{i-1/2} u''_{i-1/2} \left(1 - \frac{h_i + h_{i-1}}{2L_{i-1/2}} \right) \right. \\
&- \frac{1}{6} K_{i-1/2} u'''_{i-1/2} \frac{h_i^2 - h_{i-1}^2}{L_{i-1/2}} - \frac{1}{4} K'_{i-1/2} u''_{i-1/2} (h_i - h_{i-1}) \\
&+ O(L_{i-3/2}^2) + O(L_{i-1/2}^2) + O(L_{i+1/2}^2) \left. \right] \\
&+ k_{i-1} u''_{i-\frac{1}{2}} \left(\frac{h_i + h_{i-1}}{2L_{i-\frac{1}{2}}} - 1 \right) + \frac{1}{6} k_{i-1} u'''_{i-\frac{1}{2}} \frac{h_i^2 - h_{i-1}^2}{L_{i-\frac{1}{2}}} \\
&+ O(L_{i-\frac{1}{2}}^2) + O(L_{i-\frac{3}{2}}^2) \frac{L_{i-\frac{3}{2}}}{L_{i-\frac{1}{2}}} + O(L_{i+\frac{1}{2}}^2) \frac{L_{i+\frac{1}{2}}}{L_{i-\frac{1}{2}}} \\
&= (k_{i-\frac{1}{2}} - k_{i-1}) u''_{i-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{h_i + h_{i-1}}{2L_{i-\frac{1}{2}}} \right) \\
&- \frac{1}{6} (k_{i-\frac{1}{2}} - k_{i-1}) u'''_{i-\frac{1}{2}} \frac{h_i^2 - h_{i-1}^2}{L_{i-\frac{1}{2}}} \\
&+ \frac{1}{4} k'_{i-\frac{1}{2}} u''_{i-\frac{1}{2}} \left(\frac{L_{i+\frac{1}{2}}}{2} - L_{i-\frac{1}{2}} + \frac{L_{i-\frac{3}{2}}}{2} \right) + O(\hbar^2) + O(L_{i-\frac{1}{2}}^2) \\
&+ \left(1 + \frac{L_{i-\frac{3}{2}}}{L_{i-\frac{1}{2}}} \right) O(L_{i-\frac{3}{2}}^2) + \left(1 + \frac{L_{i+\frac{1}{2}}}{L_{i-\frac{1}{2}}} \right) O(L_{i+\frac{1}{2}}^2).
\end{aligned} \tag{2.162}$$

Como $(k_{i-\frac{1}{2}} - k_{i-1}) = \frac{1}{2} k'_{i-\frac{1}{2}} L_{i-\frac{1}{2}} + O(L_{i-\frac{1}{2}}^2)$, temos

$$\begin{aligned}
k_i \cdot (\mathcal{D}E)_{i-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{4} k'_{i-\frac{1}{2}} u''_{i-\frac{1}{2}} \left(2L_{i-\frac{1}{2}} - (h_i + h_{i-1}) + \frac{L_{i+\frac{1}{2}}}{2} - L_{i-\frac{1}{2}} + \frac{L_{i-\frac{3}{2}}}{2} \right) \\
&+ O(L_{i-\frac{1}{2}}^2) + O(L_{i-\frac{3}{2}}^2) + O(L_{i+\frac{1}{2}}^2) + O(\hbar^2) \\
&+ \frac{L_{i-\frac{3}{2}}}{L_{i-\frac{1}{2}}} O(L_{i-\frac{3}{2}}^2) \frac{L_{i+\frac{1}{2}}}{L_{i-\frac{1}{2}}} O(L_{i+\frac{1}{2}}^2),
\end{aligned} \tag{2.163}$$

isto é,

$$\begin{aligned} k_i \cdot (\mathcal{D}E)_{i-\frac{1}{2}} &= O(L_{i-\frac{3}{2}}^2) + O(L_{i-\frac{1}{2}}^2) + O(L_{i+\frac{1}{2}}^2) + O(\hbar^2) \\ &+ \frac{L_{i-\frac{3}{2}}}{L_{i-\frac{1}{2}}} O(L_{i-\frac{3}{2}}^2) + \frac{L_{i+\frac{1}{2}}}{L_{i-\frac{1}{2}}} O(L_{i+\frac{1}{2}}^2), \quad 1 \leq i \leq N. \end{aligned} \quad (2.164)$$

Portanto,

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{D}(E)_{i-\frac{1}{2}} &= O(L_{i-\frac{3}{2}}^2) + O(L_{i-\frac{1}{2}}^2) + O(L_{i+\frac{1}{2}}^2) + O(\hbar^2) \\ &+ \frac{L_{i-\frac{3}{2}}}{L_{i-\frac{1}{2}}} O(L_{i-\frac{3}{2}}^2) + \frac{L_{i+\frac{1}{2}}}{L_{i-\frac{1}{2}}} O(L_{i+\frac{1}{2}}^2), \quad 1 \leq i \leq N. \end{aligned}} \quad (2.165)$$

Analisemos agora o erro da derivada de segunda ordem, denotado por $\mathbb{E}_{i-\frac{1}{2}}$.

Lembrando que $e^h = v^h - u^h$, segue que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{i-\frac{1}{2}} &:= \mathcal{D}(\mathcal{G}v^h)_{i-\frac{1}{2}} - \mathbf{u}''(x_{i-\frac{1}{2}}) \\ &= \mathcal{D}(\mathcal{G}e^h)_{i-\frac{1}{2}} + \mathcal{D}(\mathcal{G}u^h)_{i-\frac{1}{2}} - u''_{i-\frac{1}{2}}, \quad 1 \leq i \leq N. \end{aligned} \quad (2.166)$$

Multiplicando a equação anterior por k_{i-1} , e usando o fato de que

$\mathcal{D}(k \cdot \mathcal{G}e^h)_{i-\frac{1}{2}} = k_{i-1} \cdot \mathcal{D}(\mathcal{G}e^h)_{i-\frac{1}{2}} + (\mathcal{G}e^h)_i \cdot \mathcal{D}(k)_{i-\frac{1}{2}}$, e $-\mathcal{D}(k \cdot \mathcal{G}e^h) + q \cdot e^h = -\tau(\mathbf{u})$,

chegamos a

$$\begin{aligned} k_{i-1} \cdot \mathbb{E}_{i-\frac{1}{2}} &= k_{i-1} \cdot \mathcal{D}(\mathcal{G}e^h)_{i-\frac{1}{2}} + k_{i-1} \cdot \left(\mathcal{D}(\mathcal{G}u^h)_{i-\frac{1}{2}} - u''_{i-\frac{1}{2}} \right) \\ &= \mathcal{D}(k \cdot \mathcal{G}e^h)_{i-\frac{1}{2}} - \mathcal{D}(k)_{i-\frac{1}{2}} \cdot (\mathcal{G}e^h)_i + k_{i-1} \cdot \left(\mathcal{D}(\mathcal{G}u^h)_{i-\frac{1}{2}} - u''_{i-\frac{1}{2}} \right) \\ &= q_{i-\frac{1}{2}} \cdot e_{i-\frac{1}{2}} + \tau(\mathbf{u})_{i-\frac{1}{2}} - \mathcal{D}(k)_{i-\frac{1}{2}} \cdot (\mathcal{G}e^h)_i \\ &+ k_{i-1} \cdot \left(\mathcal{D}(\mathcal{G}u^h)_{i-\frac{1}{2}} - u''_{i-\frac{1}{2}} \right), \end{aligned} \quad (2.167)$$

isto é,

$$\begin{aligned} k_{i-1} \cdot \mathbb{E}_{i-\frac{1}{2}} &= q_{i-\frac{1}{2}} \cdot e_{i-\frac{1}{2}} + \tau(\mathbf{u})_{i-\frac{1}{2}} - \mathcal{D}(k)_{i-\frac{1}{2}} \cdot (\mathcal{G}e^h)_i \\ &+ k_{i-1} \cdot \left(\mathcal{D}(\mathcal{G}u^h)_{i-\frac{1}{2}} - u''_{i-\frac{1}{2}} \right), \quad 1 \leq i \leq N, \end{aligned} \quad (2.168)$$

onde

$$q_{i-\frac{1}{2}} = O(1), \quad (2.169)$$

$$e_{i-\frac{1}{2}} = O(L_{i-\frac{1}{2}}^2) + O(\hbar^2), \quad (2.170)$$

$$\begin{aligned} \tau(\mathbf{u})_{i-1/2} &= k_{i-1/2} u''_{i-1/2} \left(1 - \frac{h_i + h_{i-1}}{2L_{i-1/2}} \right) - \frac{1}{6} K_{i-1/2} u'''_{i-1/2} \frac{h_i^2 - h_{i-1}^2}{L_{i-1/2}} \\ &\quad - \frac{1}{4} K'_{i-1/2} u''_{i-1/2} (h_i - h_{i-1}) + O(L_{i-3/2}^2) + O(L_{i-1/2}^2) + O(L_{i+1/2}^2), \end{aligned} \quad (2.171)$$

e

$$\mathcal{D}(k)_{i-\frac{1}{2}} = k'_{i-\frac{1}{2}} + O(L_{i-\frac{1}{2}}^2). \quad (2.172)$$

Fazendo

$$\begin{aligned} u_{i+\frac{1}{2}} &= \mathbf{u}(x_{i-\frac{1}{2}} + h_i) \\ &= u_{i-\frac{1}{2}} + u'_{i-\frac{1}{2}} h_i + \frac{1}{2} u''_{i-\frac{1}{2}} h_i^2 + \frac{1}{6} u'''_{i-\frac{1}{2}} h_i^3 + O(h_i^4), \end{aligned} \quad (2.173)$$

$$\begin{aligned} u_{i-\frac{3}{2}} &= \mathbf{u}(x_{i-\frac{1}{2}} - h_{i-1}) \\ &= u_{i-\frac{1}{2}} - u'_{i-\frac{1}{2}} h_{i-1} + \frac{1}{2} u''_{i-\frac{1}{2}} h_{i-1}^2 - \frac{1}{6} u'''_{i-\frac{1}{2}} h_{i-1}^3 + O(h_{i-1}^4), \end{aligned} \quad (2.174)$$

e usando o fato de que

$$\mathcal{D}(\mathcal{G}u^h)_{i-\frac{1}{2}} = \frac{1}{L_{i-\frac{1}{2}}} \left(\frac{u_{i+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}}}{h_i} - \frac{u_{i-\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{3}{2}}}{h_{i-1}} \right), \quad (2.175)$$

chegamos a

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathcal{G}u^h)_{i-\frac{1}{2}} - u''_{i-\frac{1}{2}} &= u''_{i-\frac{1}{2}} \left(\frac{h_{i+1} + h_i}{2L_{i-\frac{1}{2}}} - 1 \right) + \frac{1}{6} u'''_{i-\frac{1}{2}} \frac{h_i^2 - h_{i-1}^2}{L_{i-\frac{1}{2}}} \\ &\quad + \frac{1}{L_{i-\frac{1}{2}}} O(h_i^3) + \frac{1}{L_{i-\frac{1}{2}}} O(h_{i-1}^3), \quad 1 \leq i \leq N. \end{aligned} \quad (2.176)$$

Além disso, da equação (2.94), temos que

$$\begin{aligned} (\mathcal{G}e^h)_i &= -\frac{1}{4} u''_i \left(L_{i+\frac{1}{2}} - L_{i-\frac{1}{2}} \right) \\ &\quad - \frac{1}{24} u'''_i \left(L_{i-\frac{1}{2}}^2 + L_{i+\frac{1}{2}}^2 - L_{i-\frac{1}{2}} L_{i+\frac{1}{2}} \right) + O(\hbar^2), \quad 1 \leq i \leq N. \end{aligned} \quad (2.177)$$

Dessa forma, (2.168) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
k_{i-1} \cdot \mathbb{E}_{i-\frac{1}{2}} &= O(L_{i-\frac{1}{2}}^2) + O(\hbar^2) + k_{i-\frac{1}{2}} u''_{i-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{h_i + h_{i-1}}{2 L_{i-\frac{1}{2}}} \right) \\
&\quad - \frac{1}{6} k_{i-\frac{1}{2}} u'''_{i-\frac{1}{2}} \frac{h_i^2 - h_{i-1}^2}{L_{i-\frac{1}{2}}} - \frac{1}{4} k'_{i-\frac{1}{2}} u''_{i-\frac{1}{2}} (h_i - h_{i-1}) + O(L_{i-\frac{3}{2}}^2) \\
&\quad + O(L_{i-\frac{1}{2}}^2) + O(L_{i+\frac{1}{2}}^2) + \frac{1}{4} k'_{i-\frac{1}{2}} u'_i (L_{i+\frac{1}{2}} - L_{i-\frac{1}{2}}) \\
&\quad + \frac{1}{24} k'_{i-\frac{1}{2}} u'''_i (L_{i-\frac{1}{2}}^2 + L_{i+\frac{1}{2}}^2 - L_{i-\frac{1}{2}} L_{i+\frac{1}{2}}) \\
&\quad + O(\hbar^2) + O(L_{i-\frac{1}{2}}^2) + O(L_{i+\frac{1}{2}}^2) \\
&\quad + k_{i-1} u''_{i-\frac{1}{2}} \left(\frac{h_{i-1} + h_i}{2 L_{i-\frac{1}{2}}} - 1 \right) + \frac{1}{6} k_{i-1} u'''_{i-\frac{1}{2}} \frac{h_i^2 - h_{i-1}^2}{L_{i-\frac{1}{2}}} \\
&\quad + \frac{1}{L_{i-\frac{1}{2}}} O(h_i^3) + \frac{1}{L_{i-\frac{1}{2}}} O(h_{i-1}^3).
\end{aligned} \tag{2.178}$$

Como $u''_i = u''_{i-\frac{1}{2}} + O(L_{i-\frac{1}{2}})$,

$$\begin{aligned}
k_{i-1} \cdot \mathbb{E}_{i-\frac{1}{2}} &= (k_{i-\frac{1}{2}} - k_{i-1}) u''_{i-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{h_i + h_{i-1}}{2 L_{i-\frac{1}{2}}} \right) \\
&\quad - \frac{1}{6} (k_{i-\frac{1}{2}} - k_{i-1}) u'''_{i-\frac{1}{2}} \frac{h_i^2 - h_{i-1}^2}{L_{i-\frac{1}{2}}} \\
&\quad + \frac{1}{4} k'_{i-\frac{1}{2}} u''_{i-\frac{1}{2}} (L_{i+\frac{1}{2}} - L_{i-\frac{1}{2}} - h_i + h_{i-1}) \\
&\quad + O(L_{i-\frac{3}{2}}^2) + O(L_{i-\frac{1}{2}}^2) + O(L_{i+\frac{1}{2}}^2) \\
&\quad + O(\hbar^2) + \frac{L_{i+\frac{1}{2}}}{L_{i-\frac{1}{2}}} O(L_{i+\frac{1}{2}}^2) + \frac{L_{i-\frac{3}{2}}}{L_{i-\frac{1}{2}}} O(L_{i-\frac{3}{2}}^2).
\end{aligned} \tag{2.179}$$

Escrevendo $(k_{i-\frac{1}{2}} - k_{i-1}) = \frac{1}{2} k'_{i-\frac{1}{2}} L_{i-\frac{1}{2}} + O(L_{i-\frac{1}{2}}^2)$, chegamos a

$$\begin{aligned}
k_{i-1} \cdot \mathbb{E}_{i-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{4} k'_{i-\frac{1}{2}} u''_{i-\frac{1}{2}} \left(2 L_{i-\frac{1}{2}} - h_{i-1} - h_i + L_{i+\frac{1}{2}} - L_{i-\frac{1}{2}} - h_i + h_{i-1} \right) \\
&\quad + O(L_{i-\frac{1}{2}}^2) + O(L_{i+\frac{1}{2}}^2) + O(L_{i-\frac{3}{2}}^2) + O(\hbar^2) \\
&\quad + \frac{L_{i+\frac{1}{2}}}{L_{i-\frac{1}{2}}} O(L_{i+\frac{1}{2}}^2) + \frac{L_{i-\frac{3}{2}}}{L_{i-\frac{1}{2}}} O(L_{i-\frac{3}{2}}^2),
\end{aligned} \tag{2.180}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
k_{i-1} \cdot \mathbb{E}_{i-\frac{1}{2}} &= O(L_{i-\frac{3}{2}}^2) + O(L_{i-\frac{1}{2}}^2) + O(L_{i+\frac{1}{2}}^2) + O(\hbar^2) \\
&+ \frac{L_{i+\frac{1}{2}}}{L_{i-\frac{1}{2}}} O(L_{i+\frac{1}{2}}^2) + \frac{L_{i-\frac{3}{2}}}{L_{i-\frac{1}{2}}} O(L_{i-\frac{3}{2}}^2) \quad 1 \leq i \leq N.
\end{aligned} \tag{2.181}$$

Dessa forma obtemos,

$$\boxed{
\begin{aligned}
\mathbb{E}_{i-\frac{1}{2}} &= O(L_{i-\frac{3}{2}}^2) + O(L_{i-\frac{1}{2}}^2) + O(L_{i+\frac{1}{2}}^2) + O(\hbar^2) \\
&+ \frac{L_{i+\frac{1}{2}}}{L_{i-\frac{1}{2}}} O(L_{i+\frac{1}{2}}^2) + \frac{L_{i-\frac{3}{2}}}{L_{i-\frac{1}{2}}} O(L_{i-\frac{3}{2}}^2) \quad 1 \leq i \leq N,
\end{aligned}
} \tag{2.182}$$

onde

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{i-\frac{1}{2}} &= \mathcal{D}(\mathcal{G}v^h)_{i-\frac{1}{2}} - \mathbf{u}''(x_{i-\frac{1}{2}}) \\
&= \frac{1}{L_{i-\frac{1}{2}}} \left(\frac{v_{i+\frac{1}{2}} - v_{i-\frac{1}{2}}}{h_i} - \frac{v_{i-\frac{1}{2}} - v_{i-\frac{3}{2}}}{h_{i-1}} \right) - u''_{i-\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{2.183}$$

é o erro da derivada de segunda ordem.

2.5 Resultados Numéricos

Neste capítulo vimos que, utilizando a discretização pelo método mimético de segunda ordem para o problema de *Sturm-Liouville* com condições de contorno separáveis,

$$-\frac{d}{dx} \left(\mathbf{k}(x) \frac{d\mathbf{u}}{dx} \right) + \mathbf{q}(x) \mathbf{u}(x) = \mathbf{f}(x), \quad a < x < b, \quad (2.184)$$

$$\alpha_0 \mathbf{u}(a) - \alpha_1 \mathbf{k}(a) \mathbf{u}'(a) = \gamma_a, \quad (2.185)$$

$$\beta_0 \mathbf{u}(b) + \beta_1 \mathbf{k}(b) \mathbf{u}'(b) = \gamma_b, \quad (2.186)$$

onde γ_a e γ_b são constantes quaisquer, α_0 , α_1 , β_0 e β_1 são constantes dadas satisfazendo $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1 \geq 0$, $\alpha_0 + \alpha_1 > 0$, $\beta_0 + \beta_1 > 0$ e $\alpha_0 + \beta_0 > 0$, e onde $\mathbf{k}(x)$, $\mathbf{q}(x)$ e $\mathbf{f}(x)$ são funções suaves dadas, com $\mathbf{k}(x) > 0$ e $\mathbf{q}(x) \geq 0$ para todo x no intervalo $[a, b]$, chegamos aos seguintes resultados para os erros de solução, derivada de primeira ordem e derivada de segunda ordem, respectivamente,

$$e_0 = O(\hbar^2), \quad e_N = O(\hbar^2), \quad (2.187)$$

$$e_{i-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{8} u''_{i-\frac{1}{2}} L_{i-\frac{1}{2}}^2 + O(\hbar^2), \quad 1 \leq i \leq N, \quad (2.188)$$

$$E_i = O(\hbar^2), \quad 0 \leq i \leq N, \quad (2.189)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{i-\frac{1}{2}} &= O(L_{i-\frac{3}{2}}^2) + O(L_{i-\frac{1}{2}}^2) + O(L_{i+\frac{1}{2}}^2) + O(\hbar^2) \\ &+ \frac{L_{i+\frac{1}{2}}}{L_{i-\frac{1}{2}}} O(L_{i+\frac{1}{2}}^2) + \frac{L_{i-\frac{3}{2}}}{L_{i-\frac{1}{2}}} O(L_{i-\frac{3}{2}}^2) \quad 1 \leq i \leq N. \end{aligned} \quad (2.190)$$

Assim, as aproximações $\mathbf{v}(x_{i-\frac{1}{2}})$ para os valores de solução $\mathbf{u}(x_{i-\frac{1}{2}})$ são afetadas por erros locais $e_{i-\frac{1}{2}}^{\text{loc}} = -\frac{1}{8} u''_{i-\frac{1}{2}} L_{i-\frac{1}{2}}^2$, determinados pelos comprimentos locais $L_{i-\frac{1}{2}}$, sobrepostos nos erros $e_{i-\frac{1}{2}}^{\text{glob}} = e_{i-\frac{1}{2}} - e_{i-\frac{1}{2}}^{\text{loc}} = O(\hbar^2)$, que estão globalmente relacionados com a distribuição dos pontos da malha. Nos pontos a e b , os erros de solução são globalmente comportados. O erro da derivada de primeira ordem também possui um comportamento global, diferente do erro de segunda ordem, que além de um termo global, possui termos que dependem dos comprimentos

locais $L_{i-\frac{3}{2}}$, $L_{i-\frac{1}{2}}$ e $L_{i+\frac{1}{2}}$, assim como das razões $\frac{L_{i+\frac{1}{2}}}{L_{i-\frac{1}{2}}}$ e $\frac{L_{i-\frac{3}{2}}}{L_{i-\frac{1}{2}}}$.

Vejamos alguns exemplos que ilustram estes resultados, utilizando malhas não-uniformes².

Exemplo 2.1. *Caso Dirichlet-Dirichlet*

Nas figuras (2a), (2b), (2c) e (2d) apresentamos os erros de solução e de derivada de primeira e segunda ordens para o problema de *Sturm-Liouville* (2.184), (2.185), (2.186), com $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 0$, $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 0$, $\mathbf{k}(x) = 1 + x^2$, $\mathbf{q}(x) = -5x^2$ e $\mathbf{u}(x) = 1 + \cos(x)$ no intervalo $[0, 1]$. Utilizamos uma malha não-uniforme, cujas células têm espaçamento $\frac{H}{(\frac{N}{2})^{0.5}}$, $\frac{H}{(\frac{N}{2}-1)^{0.5}}$, ..., $\frac{H}{2^{0.5}}$, H , H , $\frac{H}{2^{0.5}}$, ..., $\frac{H}{(\frac{N}{2}-1)^{0.5}}$, $\frac{H}{(\frac{N}{2})^{0.5}}$, onde $H = \frac{1}{N}$ e N é o número de células. Para os gráficos da coluna à esquerda, $N = 100$, enquanto que nos gráficos da coluna à direita, $N = 155$. Para a malha de 100 células, os nodos são dados por

$$x_i = \begin{cases} 0 & \text{se } i = 0, \\ x_{i-1} + \frac{1}{100(51-i)^{0.5}} & \text{se } 1 \leq i \leq 50, \\ x_{i-1} + \frac{1}{100(i-50)^{0.5}} & \text{se } 51 \leq i \leq 100. \end{cases} \quad (2.191)$$

Nesta malha, $\hbar^2 = 2.8099e - 004$. Para a malha de 155 células, os nodos são dados por

$$x_i = \begin{cases} 0 & \text{se } i = 0, \\ x_{i-1} + \frac{1}{155(79-i)^{0.5}} & \text{se } 1 \leq i \leq 78, \\ x_{i-1} + \frac{1}{155(i-78)^{0.5}} & \text{se } 79 \leq i \leq 155. \end{cases} \quad (2.192)$$

Neste caso, $\hbar^2 = 1.4022e - 004$, ou seja, aproximadamente a metade do valor de \hbar^2 para a malha anterior. Observemos que o termo global do erro de solução e o

²Simulações realizadas com o software MATLAB R2007a, versão 7.4.0287, em um processador Intel Celeron M 350, 1.3 Ghz e 256 Mb de memória RAM.

erro da derivada de primeira ordem caem pela metade quando h^2 também tem seu valor reduzido pela metade.

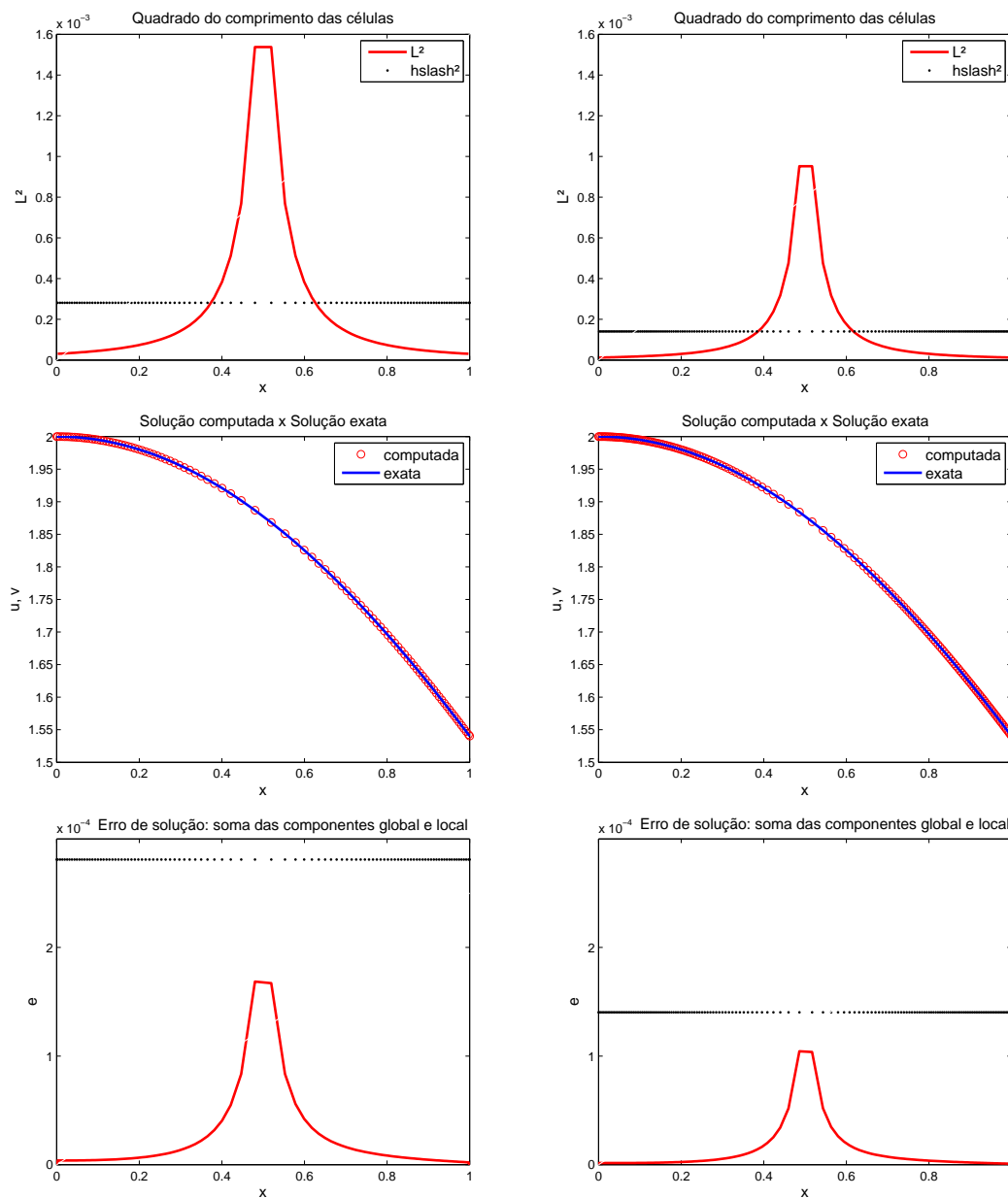


Figura 2a - Representação gráfica do erro de solução decorrente do MIM02 para o problema de Sturm-Liouville com condições de contorno de Dirichlet-Dirichlet.

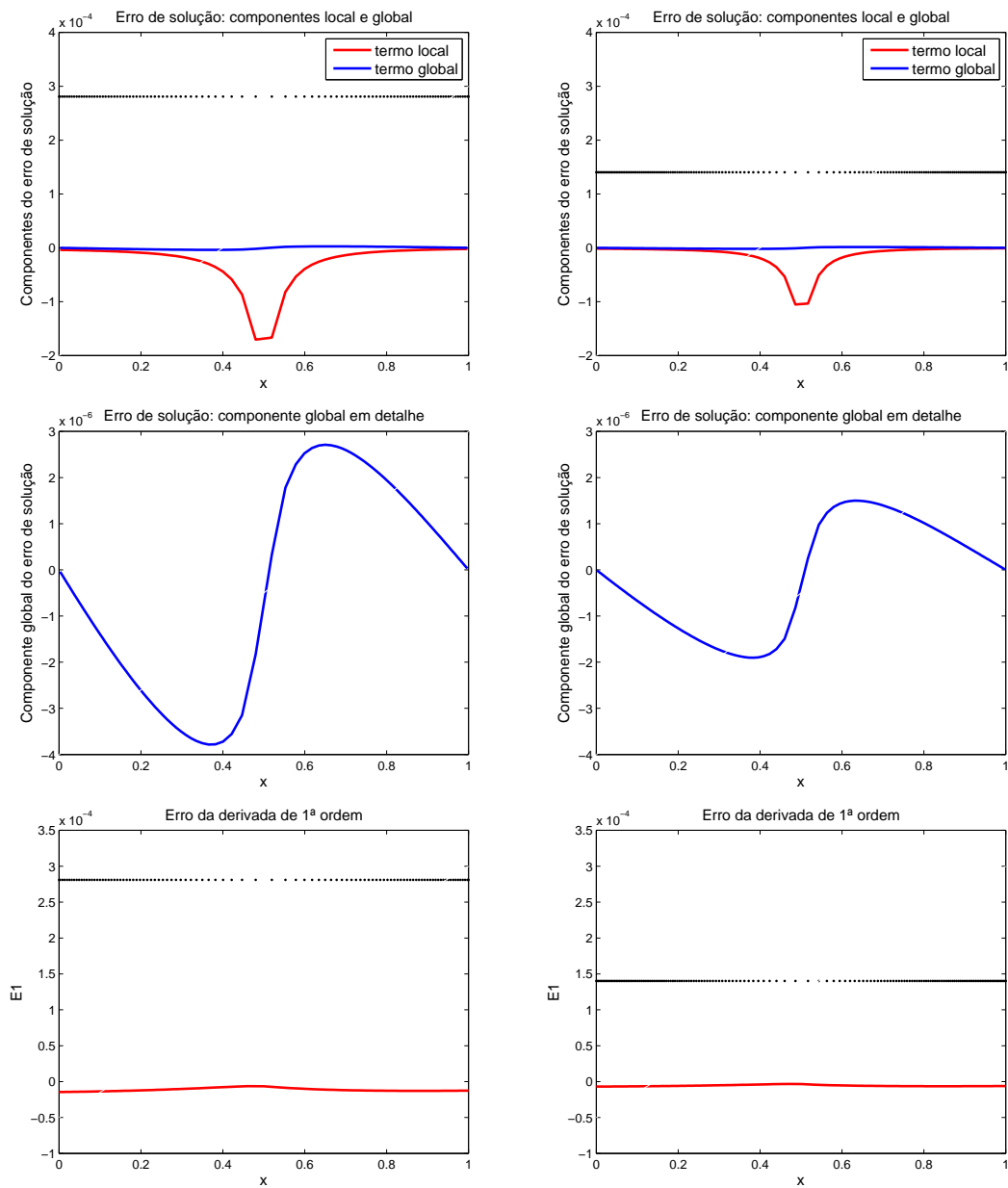


Figura 2b - Representação gráfica dos erros de solução e derivada de primeira ordem decorrentes do MIM02 para o problema de Sturm-Liouville com condições de contorno de Dirichlet-Dirichlet.

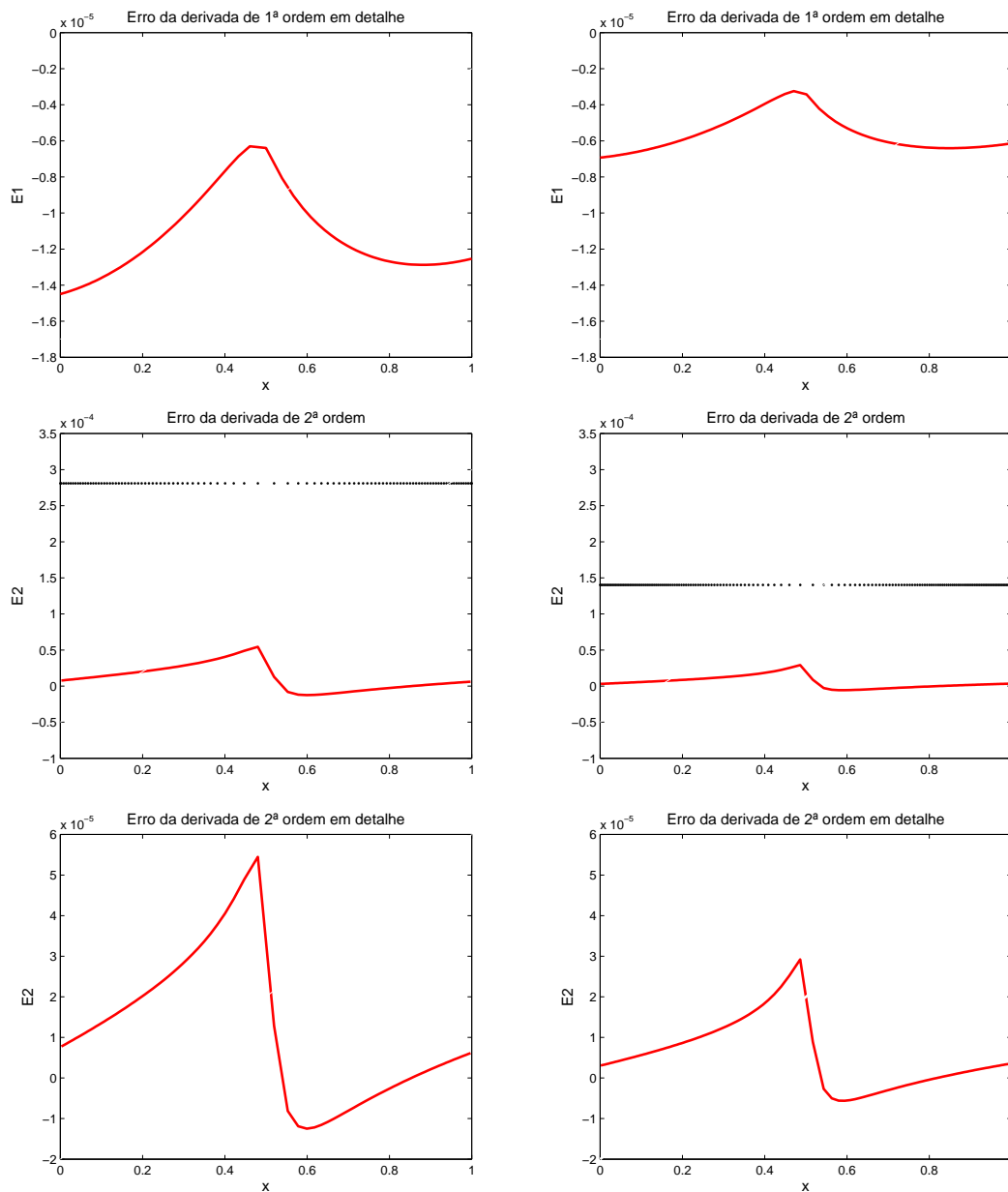


Figura 2c - Representação gráfica dos erros de derivada de primeira e segunda ordens decorrentes do MIM02 para o problema de Sturm-Liouville com condições de contorno de Dirichlet-Dirichlet.

Para a malha de 100 células, o algoritmo *mim02_dd.m* foi executado em 0.006063 segundos, enquanto que para a malha de 155 células, levou 0.006095 segundos.

Exemplo 2.2. *Caso Dirichlet-Neumann*

Nas figuras (3a) e (3b) apresentamos os erros de solução e de derivada de primeira e segunda ordens para o problema de *Sturm-Liouville* (2.184), (2.185), (2.186), com $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 0$, $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = 1$, $\mathbf{k}(x) = 2 + \sin(x)$, $\mathbf{q}(x) = -\exp(x)$ e $\mathbf{u}(x) = x + \sin(x)$ no intervalo $[0, 1]$. Utilizamos uma malha não-uniforme, cujas células têm espaçamento $\frac{H}{(\frac{N}{2})^{0.9}}$, $\frac{H}{(\frac{N}{2}-1)^{0.9}}$, ..., $\frac{H}{2^{0.9}}$, H , H , $\frac{H}{2^{0.9}}$, ..., $\frac{H}{(\frac{N}{2}-1)^{0.9}}$, $\frac{H}{(\frac{N}{2})^{0.9}}$, onde $H = \frac{1}{N}$ e N é o número de células. Neste exemplo tomamos $N = 100$ e os nodos são dados por

$$x_i = \begin{cases} 0 & \text{se } i = 0, \\ x_{i-1} + \frac{1}{100(51-i)^{0.9}} & \text{se } 1 \leq i \leq 50, \\ x_{i-1} + \frac{1}{100(i-50)^{0.9}} & \text{se } 51 \leq i \leq 100. \end{cases} \quad (2.193)$$

Nesta malha, $\tilde{h}^2 = 0.0021$.

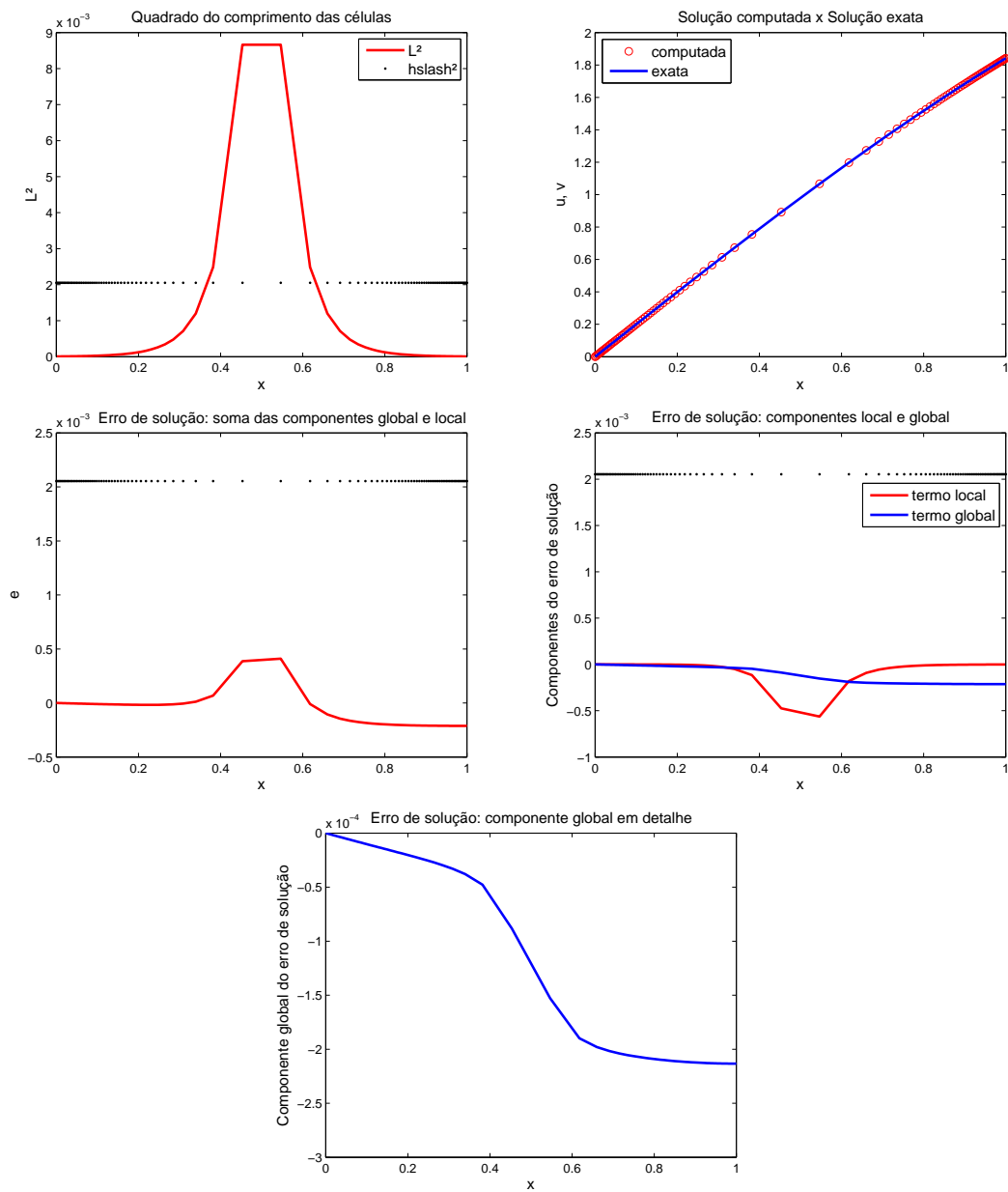


Figura 3a - Representação gráfica do erro de solução decorrente do MIM02 para o problema de Sturm-Liouville com condições de contorno de Dirichlet-Neumann.

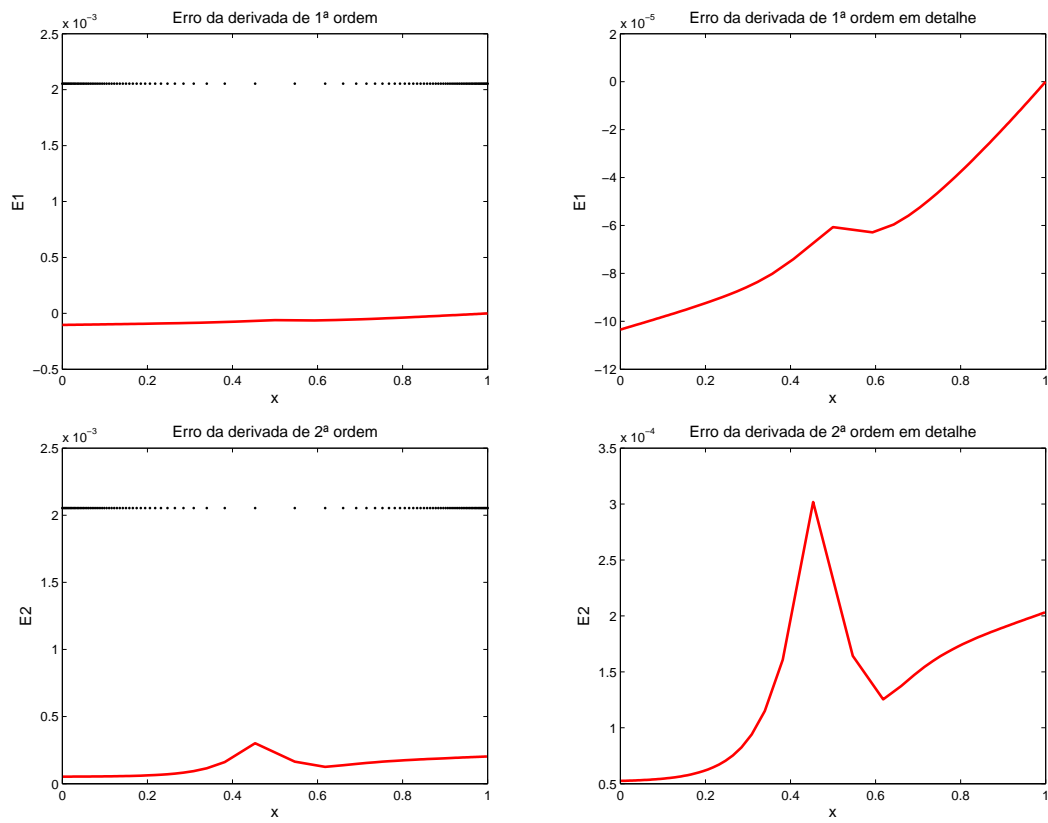


Figura 3b - Representação gráfica dos erros de derivada de primeira e segunda ordens decorrentes do MIM02 para o problema de Sturm-Liouville com condições de contorno de Dirichlet-Neumann.

Para esta malha de 100 células, o algoritmo `mim02_dr.m` foi executado em 0.006327 segundos.

Exemplo 2.3. *Caso Dirichlet-Robin*

Nas figuras (4a) e (4b) apresentamos os erros de solução e de derivada de primeira e segunda ordens para o problema de *Sturm-Liouville* (2.184), (2.185), (2.186), com $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 0$, $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 1$, $\mathbf{k}(x) = 3 + \cos(x)$, $\mathbf{q}(x) = -x^2$ e $\mathbf{u}(x) = 1 + \cos(x)$ no intervalo $[0, 1]$. Utilizamos uma malha não-uniforme, cujas células têm espaçamento $\frac{H}{(\frac{N}{4})^{0.5}}$, $\frac{H}{(\frac{N}{4}-1)^{0.5}}$, ..., H , H , ..., $\frac{H}{(\frac{N}{4}-1)^{0.5}}$, $\frac{H}{(\frac{N}{4})^{0.5}}$, $\frac{H}{(\frac{N}{4})^{0.5}}$, $\frac{H}{(\frac{N}{4}-1)^{0.5}}$, ..., H , H , ..., $\frac{H}{(\frac{N}{4}-1)^{0.5}}$, $\frac{H}{(\frac{N}{4})^{0.5}}$, onde $H = \frac{1}{N}$ e N é o número de células. Aqui $N = 100$ e os nodos são dados por

$$x_i = \begin{cases} 0 & \text{se } i = 0, \\ x_{i-1} + \frac{1}{100(26-i)^{0.5}} & \text{se } 1 \leq i \leq 25, \\ x_{i-1} + \frac{1}{100(i-25)^{0.5}} & \text{se } 26 \leq i \leq 50, \\ x_{i-1} + \frac{1}{100(76-i)^{0.5}} & \text{se } 51 \leq i \leq 75, \\ x_{i-1} + \frac{1}{100(i-75)^{0.5}} & \text{se } 76 \leq i \leq 100. \end{cases} \quad (2.194)$$

Nesta malha, $\tilde{h}^2 = 2.1482e - 004$.

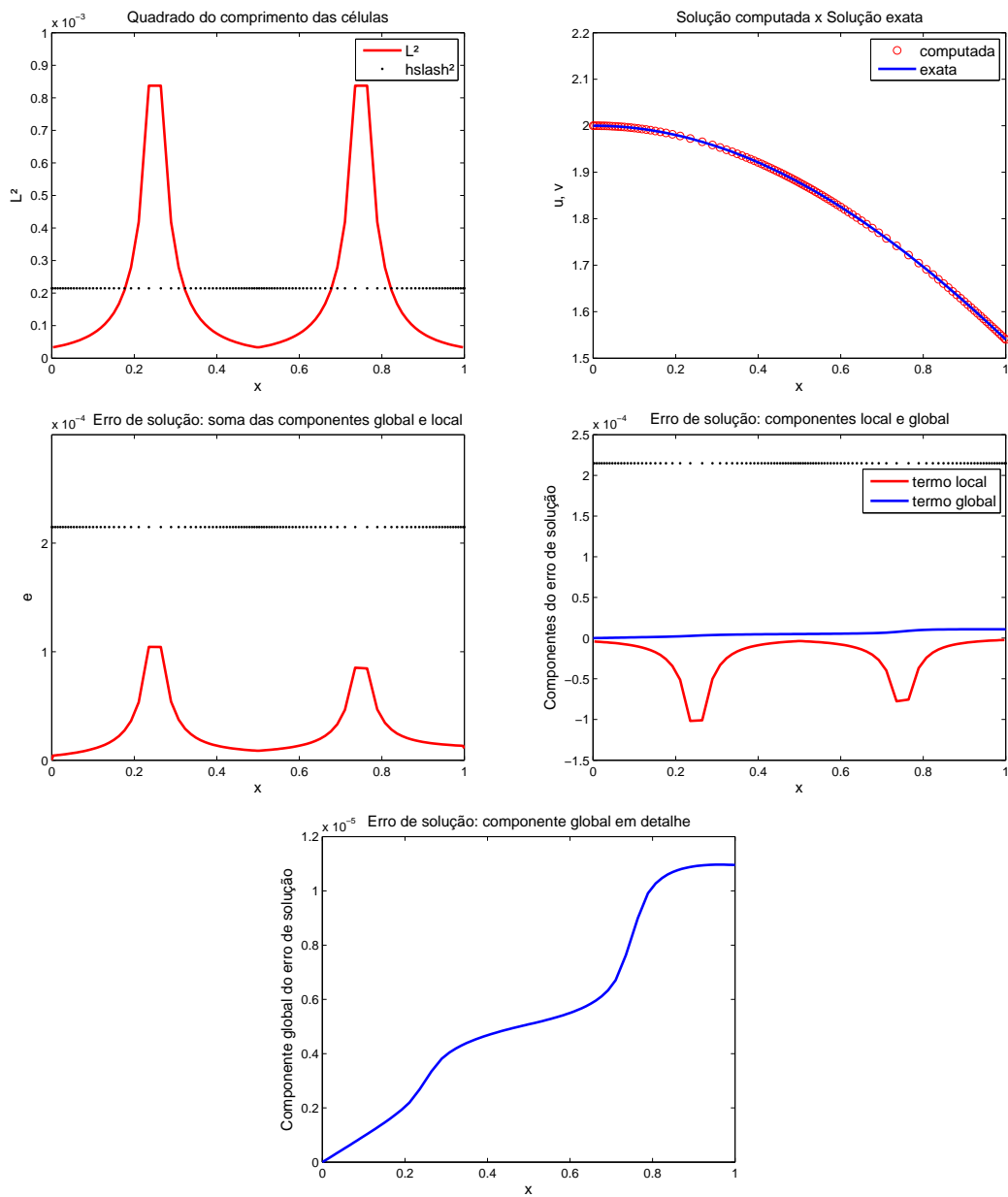


Figura 4a - Representação gráfica do erro de solução decorrente do MIM02 para o problema de Sturm-Liouville com condições de contorno de Dirichlet-Robin.

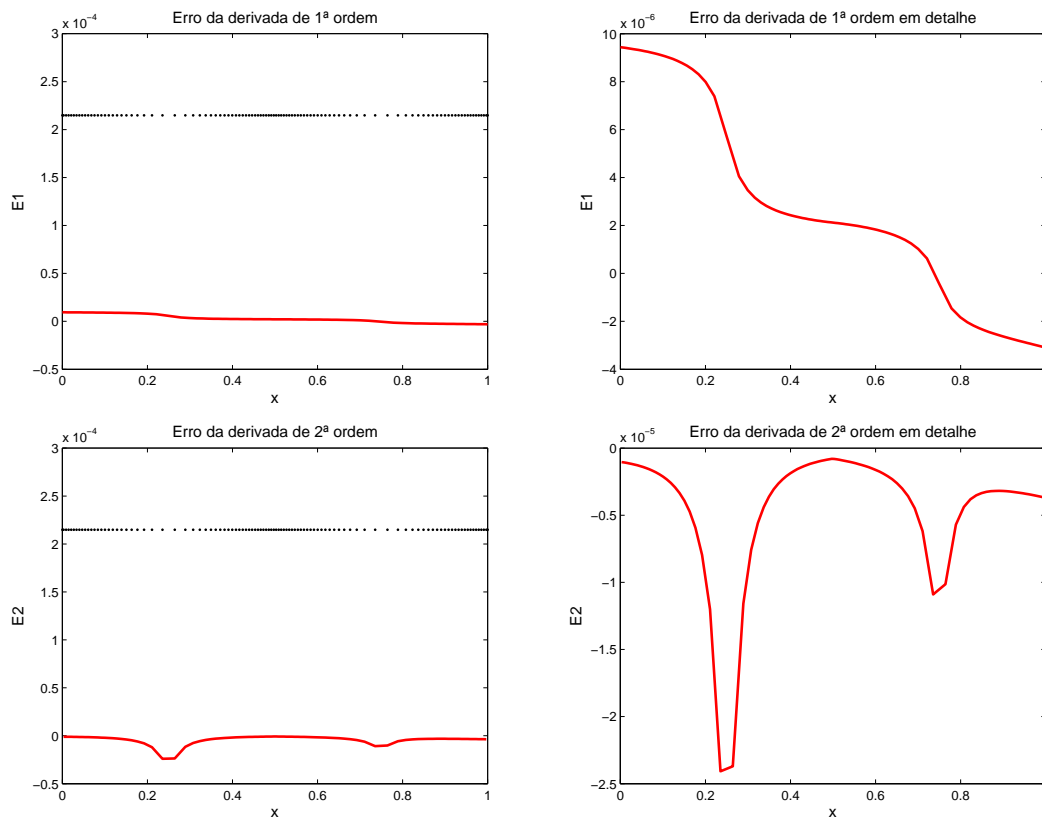


Figura 4b - Representação gráfica dos erros de derivada de primeira e segunda ordens decorrentes do MIM02 para o problema de Sturm-Liouville com condições de contorno de Dirichlet-Robin.

Para esta malha de 100 células, o algoritmo `mim02_dr.m` foi executado em 0.006302 segundos.

Exemplo 2.4. *Caso Neumann-Robin*

Nas figuras (5a) e (5b) apresentamos os erros de solução e de derivada de primeira e segunda ordens para o problema de *Sturm-Liouville* (2.184), (2.185), (2.186), com $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 1$, $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 1$, $\mathbf{k}(x) = 1 + x^2$, $\mathbf{q}(x) = -5x^2$ e $\mathbf{u}(x) = 3x + \cos(x)$ no intervalo $[0, 1]$. Utilizamos uma malha não-uniforme, cujas células têm espaçamento $\frac{H}{2}$, $\frac{H}{2}$, $2H$, $\frac{H}{2}$, $\frac{H}{2}$, $2H, \dots, \frac{H}{2}, \frac{H}{2}, 2H$, onde $H = \frac{1}{N}$ e N é o número de células. A malha utilizada aqui é de 100 células e os nodos são dados por

$$x_i = \begin{cases} 0 & \text{se } i = 0, \\ x_{i-1} + 2H & \text{se } i = 3j, \text{ com } 1 \leq j \leq 33, \\ x_{i-1} + \frac{H}{2} & \text{caso contrário, com } 1 \leq i \leq 100, \end{cases} \quad (2.195)$$

onde $H = \frac{1}{100}$. Nesta malha, $\tilde{h}^2 = 2.7650e - 004$.

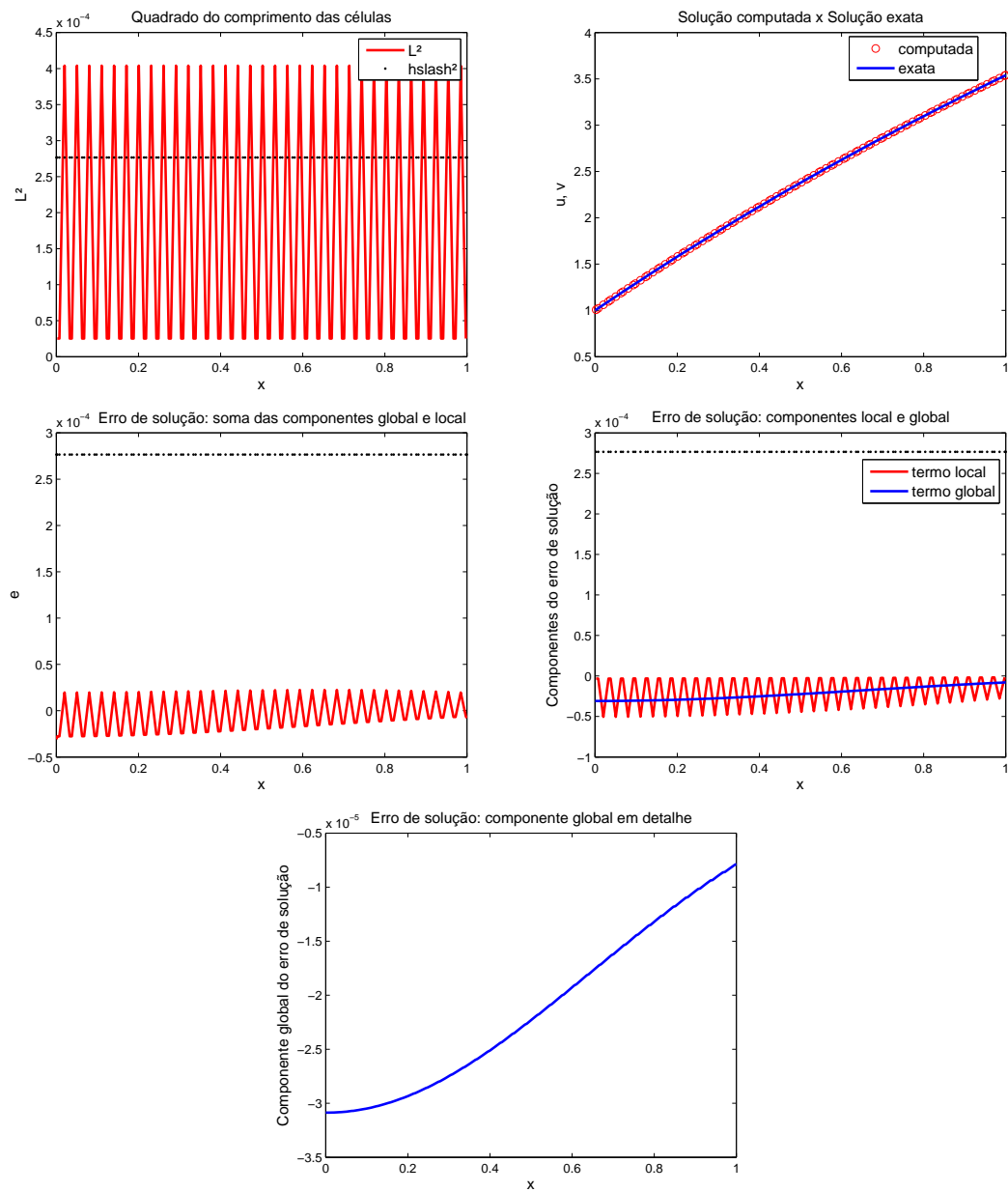


Figura 5a - Representação gráfica do erro de solução decorrente do MIM02 para o problema de Sturm-Liouville com condições de contorno de Neumann-Robin.

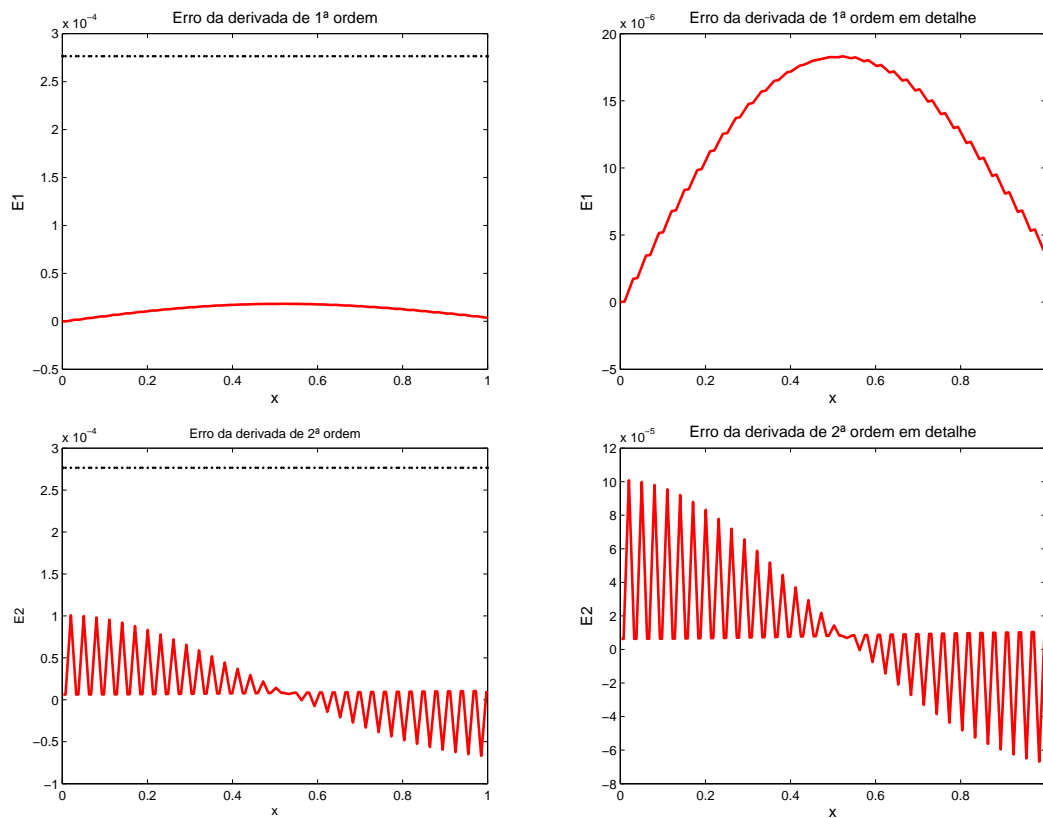


Figura 5b - Representação gráfica dos erros de derivada de primeira e segunda ordens decorrentes do MIM02 para o problema de Sturm-Liouville com condições de contorno de Neumann-Robin.

Para esta malha de 100 células, o algoritmo *mim02_rr.m* foi executado em 0.006855 segundos.

Exemplo 2.5. *Caso Robin-Robin*

Nas figuras (6a) e (6b) apresentamos os erros de solução e de derivada de primeira e segunda ordens para o problema de *Sturm-Liouville* (2.184), (2.185), (2.186), com $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 1$, $\mathbf{k}(x) = 1 + x^2$, $\mathbf{q}(x) = -x^3$ e $\mathbf{u}(x) = x + \cos(x)$ no intervalo $[0, 1]$. Utilizamos uma malha não-uniforme, cujas células têm espaçamento $H, H^2, H^2, H^2, H^2, H^2, H^2, H^2, H^2, H^2, H, H^2, H^2, H^2, H^2, H^2, H^2, H^2, H^2, \dots, H, H^2, H^2, H^2, H^2, H^2, H^2, H^2, H^2$, onde $H = \frac{1}{N}$ e N é o número de células. A malha utilizada aqui é de 500 células e os nodos são dados por

$$x_i = \begin{cases} 0 & \text{se } i = 0, \\ H & \text{se } i = 1, \\ x_{i-1} + H & \text{se } i = 10j, \text{ com } 1 \leq j \leq 50, \\ x_{i-1} + H^2 & \text{caso contrário, com } 2 \leq i < 500, \end{cases} \quad (2.196)$$

onde $H = \frac{1}{500}$. Nesta malha, $h^2 = 3.0418e - 004$.

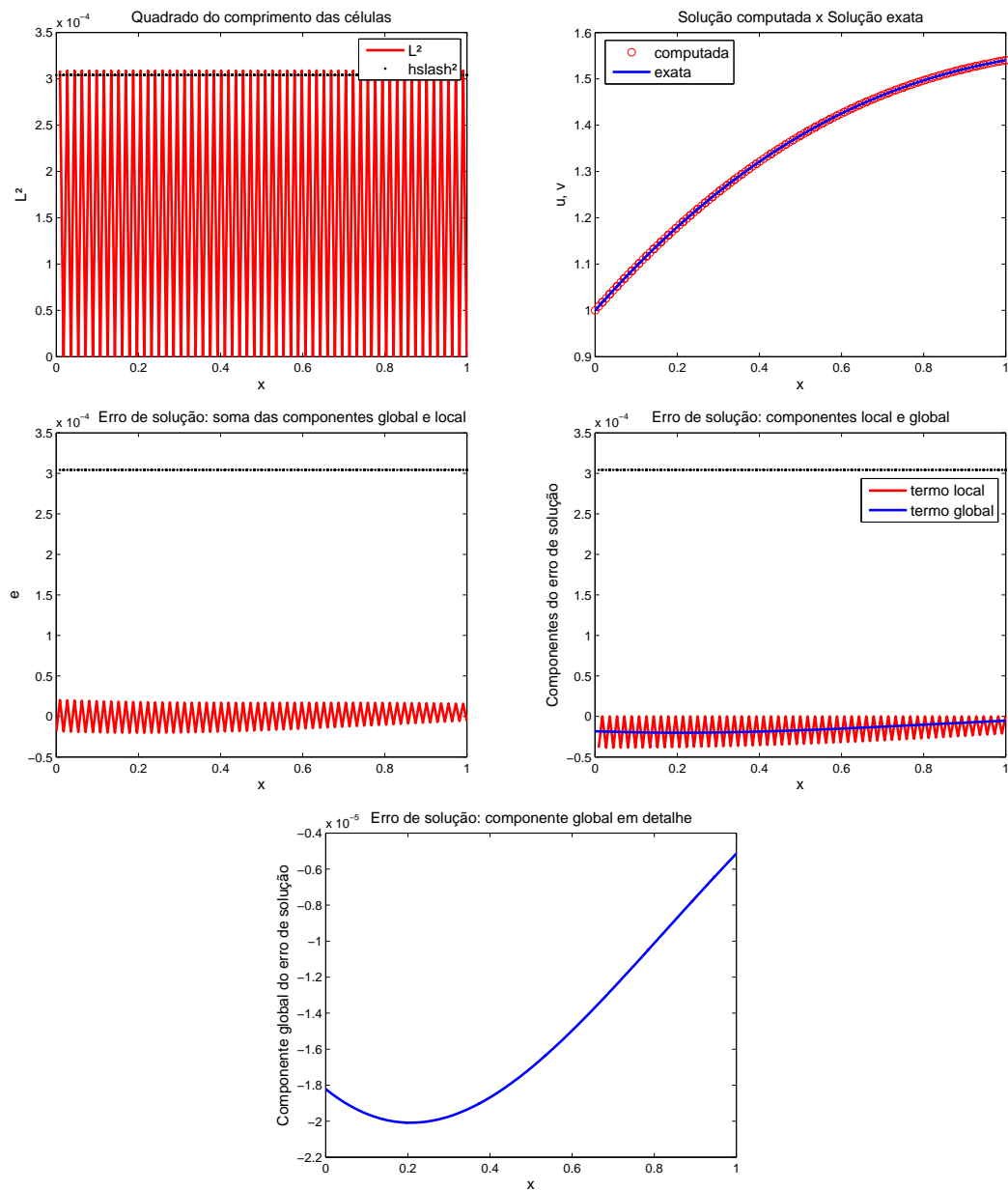


Figura 6a - Representação gráfica dos erros de solução e de derivada de primeira e segunda ordens decorrentes do MIM02 para o problema de Sturm-Liouville com condições de contorno de Robin-Robin.

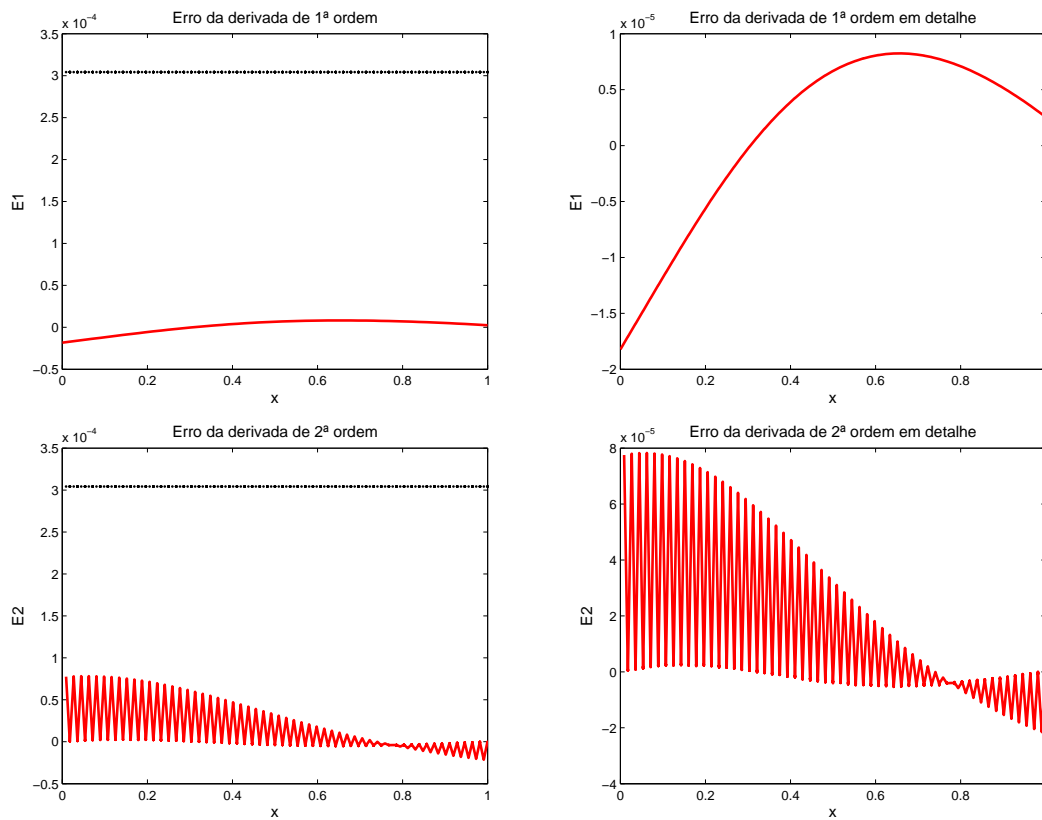


Figura 6b - Representação gráfica dos erros de derivada de primeira e segunda ordens decorrentes do MIM02 para o problema de Sturm-Liouville com condições de contorno de Robin-Robin.

Para esta malha de 500 células, o algoritmo *mim02_rr.m* foi executado em 0.008050 segundos.

3 MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS DE SEGUNDA ORDEM - FEM02

3.1 Introdução

Consideremos o problema regular de *Sturm-Liouville* com condições de contorno separáveis,

$$-\frac{d}{dx} \left(\mathbf{k}(x) \frac{d\mathbf{u}}{dx} \right) + \mathbf{q}(x) \mathbf{u}(x) = \mathbf{f}(x), \quad a < x < b, \quad (3.1)$$

$$\alpha_0 \mathbf{u}(a) - \alpha_1 \mathbf{k}(a) \mathbf{u}'(a) = \gamma_a, \quad (3.2)$$

$$\beta_0 \mathbf{u}(b) + \beta_1 \mathbf{k}(b) \mathbf{u}'(b) = \gamma_b, \quad (3.3)$$

com γ_a e γ_b constantes quaisquer, α_0 , α_1 , β_0 e β_1 constantes dadas satisfazendo α_0 , α_1 , β_0 , $\beta_1 \geq 0$, $\alpha_0 + \alpha_1 > 0$, $\beta_0 + \beta_1 > 0$ e $\alpha_0 + \beta_0 > 0$, e onde $\mathbf{k}(x)$, $\mathbf{q}(x)$ e $\mathbf{f}(x)$ são funções suaves dadas, com $\mathbf{k}(x) > 0$ e $\mathbf{q}(x) \geq 0$ para todo x no intervalo $[a, b]$.

Sejam φ_i , com $0 \leq i \leq N$, funções seccionalmente lineares definidas por

$$\varphi_i(x) := \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{L_{i-\frac{1}{2}}} & \text{se } x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ \frac{x_{i+1} - x}{L_{i+\frac{1}{2}}} & \text{se } x_i < x \leq x_{i+1}, \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (3.4)$$

tais que

$$\mathbf{v}(x) := \sum_{j=0}^N v_j \varphi_j(x) \quad (3.5)$$

é uma aproximação para $\mathbf{u}(x)$ pelo método de elementos finitos, $v_j = \mathbf{v}(x_j)$ e $\varphi_i(a) = \varphi_i(b) = 0$, exceto para φ_0 e φ_N , valores que não serão usados para a resolução do sistema.

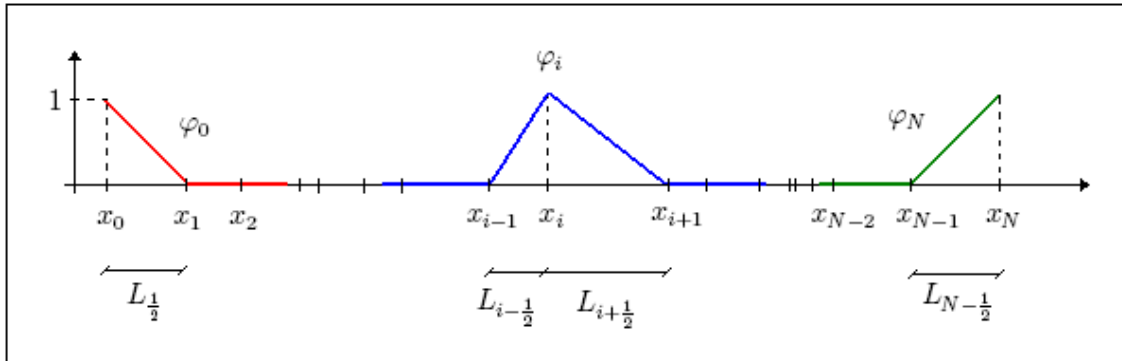


Figura 7 - Funções de base $\varphi_0, \dots, \varphi_i, \dots, \varphi_N$.

Multiplicando a EDO (3.1) por φ_i , $1 \leq i \leq N - 1$, integrando por partes o resultado em $[a, b]$ e utilizando o fato de que $\varphi_i(a) = 0$ e $\varphi_i(b) = 0$, obtemos

$$\int_a^b \mathbf{k}(x) \mathbf{u}'(x) \varphi_i'(x) dx + \int_a^b \mathbf{q}(x) \mathbf{u}(x) \varphi_i(x) dx = \int_a^b \mathbf{f}(x) \varphi_i(x) dx. \quad (3.6)$$

Substituindo $\mathbf{u}(x)$ pela aproximação $\mathbf{v}(x)$, temos que

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^N v_j \int_a^b \mathbf{k}(x) \varphi_j'(x) \varphi_i'(x) dx + \sum_{j=0}^N v_j \int_a^b \mathbf{q}(x) \varphi_j(x) \varphi_i(x) dx \\ = \int_a^b \mathbf{f}(x) \varphi_i(x) dx, \quad 1 \leq i \leq N - 1. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Pela definição (3.4), temos

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^N v_j \int_a^b \mathbf{k}(x) \varphi_j'(x) \varphi_i'(x) dx &= v_{i-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \mathbf{k}(x) \varphi_{i-1}'(x) \varphi_i'(x) dx \\ &+ v_i \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \mathbf{k}(x) \varphi_i'(x) \varphi_i'(x) dx \\ &+ v_{i+1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \mathbf{k}(x) \varphi_{i+1}'(x) \varphi_i'(x) dx, \end{aligned} \quad (3.8)$$

que pode ser reescrita como,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^N v_j \int_a^b \mathbf{k}(x) \varphi'_j(x) \varphi'_i(x) dx &= -\frac{1}{L_{i-\frac{1}{2}}} \left(\frac{1}{L_{i-\frac{1}{2}}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \mathbf{k}(x) dx \right) v_{i-1} \\
&+ \frac{1}{L_{i-\frac{1}{2}}} \left(\frac{1}{L_{i-\frac{1}{2}}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \mathbf{k}(x) dx \right) v_i \\
&+ \frac{1}{L_{i+\frac{1}{2}}} \left(\frac{1}{L_{i+\frac{1}{2}}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \mathbf{k}(x) dx \right) v_i \\
&- \frac{1}{L_{i+\frac{1}{2}}} \left(\frac{1}{L_{i+\frac{1}{2}}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \mathbf{k}(x) dx \right) v_{i+1},
\end{aligned} \tag{3.9}$$

ou seja,

$$\sum_{j=0}^N v_j \int_a^b \mathbf{k}(x) \varphi'_j(x) \varphi'_i(x) dx = \bar{k}_{i-\frac{1}{2}} \left(\frac{v_i - v_{i-1}}{L_{i-\frac{1}{2}}} \right) - \bar{k}_{i+\frac{1}{2}} \left(\frac{v_{i+1} - v_i}{L_{i+\frac{1}{2}}} \right), \tag{3.10}$$

onde

$$\bar{k}_{i-\frac{1}{2}} := \frac{1}{L_{i-\frac{1}{2}}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \mathbf{k}(x) dx, \quad 1 \leq i \leq N. \tag{3.11}$$

Também temos,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^N v_j \int_a^b \mathbf{q}(x) \varphi_j(x) \varphi_i(x) dx &= v_{i-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \mathbf{q}(x) \varphi_{i-1}(x) \varphi_i(x) dx \\
&+ v_i \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \mathbf{q}(x) \varphi_i(x) \varphi_i(x) dx \\
&+ v_{i+1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \mathbf{q}(x) \varphi_{i+1}(x) \varphi_i(x) dx,
\end{aligned} \tag{3.12}$$

que pode ser reescrita como,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^N v_j \int_a^b \mathbf{q}(x) \varphi_j(x) \varphi_i(x) dx &= v_{i-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \mathbf{q}(x) \left(\frac{x_i - x}{L_{i-\frac{1}{2}}} \right) \left(\frac{x - x_{i-1}}{L_{i-\frac{1}{2}}} \right) dx \\
&+ v_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \mathbf{q}(x) \left(\frac{x - x_{i-1}}{L_{i-\frac{1}{2}}} \right)^2 dx \\
&+ v_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} \mathbf{q}(x) \left(\frac{x_{i+1} - x}{L_{i+\frac{1}{2}}} \right)^2 dx \\
&+ v_{i+1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \mathbf{q}(x) \left(\frac{x_{i+1} - x}{L_{i+\frac{1}{2}}} \right) \left(\frac{x - x_i}{L_{i+\frac{1}{2}}} \right) dx
\end{aligned} \tag{3.13}$$

ou seja,

$$\sum_{j=0}^N v_j \int_a^b \mathbf{q}(x) \varphi_j(x) \varphi_i(x) dx = h_i (q * v)_i, \tag{3.14}$$

onde

$$\begin{aligned}
(q * v)_i &:= v_{i-1} \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \mathbf{q}(x) \left(\frac{x_i - x}{L_{i-\frac{1}{2}}} \right) \left(\frac{x - x_{i-1}}{L_{i-\frac{1}{2}}} \right) dx \\
&+ v_i \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \mathbf{q}(x) \left(\frac{x - x_{i-1}}{L_{i-\frac{1}{2}}} \right)^2 dx \\
&+ v_i \frac{1}{h_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \mathbf{q}(x) \left(\frac{x_{i+1} - x}{L_{i+\frac{1}{2}}} \right)^2 dx \\
&+ v_{i+1} \frac{1}{h_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \mathbf{q}(x) \left(\frac{x_{i+1} - x}{L_{i+\frac{1}{2}}} \right) \left(\frac{x - x_i}{L_{i+\frac{1}{2}}} \right) dx, \quad 1 \leq i \leq N - 1.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Além disso,

$$\int_a^b \mathbf{f}(x) \varphi_i(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \mathbf{f}(x) \left(\frac{x - x_{i-1}}{L_{i-\frac{1}{2}}} \right) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \mathbf{f}(x) \left(\frac{x_{i+1} - x}{L_{i+\frac{1}{2}}} \right) dx, \tag{3.16}$$

ou seja,

$$\int_a^b \mathbf{f}(x) \varphi_i(x) dx = h_i \bar{f}_i, \tag{3.17}$$

onde

$$\bar{f}_i := \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \mathbf{f}(x) \frac{x - x_{i-1}}{L_{i-\frac{1}{2}}} dx + \frac{1}{h_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \mathbf{f}(x) \frac{x_{i+1} - x}{L_{i+\frac{1}{2}}} dx, \quad 0 \leq i \leq N. \quad (3.18)$$

Assim, com as equações (3.10), (3.14) e (3.17) reescrevemos (3.7) obtendo, portanto, o método de elementos finitos de segunda ordem (FEM02) dado por

$$\boxed{-\frac{1}{h_i} \left(\bar{k}_{i+\frac{1}{2}} \frac{v_{i+1} - v_i}{L_{i+\frac{1}{2}}} - \bar{k}_{i-\frac{1}{2}} \frac{v_i - v_{i-1}}{L_{i-\frac{1}{2}}} \right) + (q * v)_i = \bar{f}_i, \quad 1 \leq i \leq N-1,} \quad (3.19)$$

onde $\bar{k}_{i-\frac{1}{2}}$, $(q * v)_i$ e \bar{f}_i são dados, respectivamente por (3.11), (3.15) e (3.18).

O método também pode ser escrito como

$$-\mathcal{D}(\bar{k} \cdot \mathcal{G}v)_i + (q * v)_i = \bar{f}_i, \quad (3.20)$$

onde

$$(\mathcal{G}v)_{i-\frac{1}{2}} := \frac{v_i - v_{i-1}}{L_{i-\frac{1}{2}}}, \quad 1 \leq i \leq N, \quad (3.21)$$

$$(\mathcal{D}w)_i := \frac{w_{i+\frac{1}{2}} - w_{i-\frac{1}{2}}}{h_i}, \quad 0 \leq i \leq N, \quad (3.22)$$

$w_{N+\frac{1}{2}} \equiv w_N$, $w_{-\frac{1}{2}} \equiv w_0$, e \bar{k} , $(q * v)$ e \bar{f} são dadas respectivamente por (3.11), (3.15) e (3.18).

A condição de contorno (3.2), $\alpha_0 \mathbf{u}(a) - \alpha_1 \mathbf{k}(a) \mathbf{u}'(a) = \gamma_a$, com $\alpha_1 > 0$, se fosse aproximada por

$$\alpha_0 \mathbf{v}(a) - \alpha_1 \mathbf{k}(a) \mathbf{v}'(a) = \gamma_a, \quad (3.23)$$

isto é,

$$\alpha_0 v_0 - \alpha_1 k_0 \frac{v_1 - v_0}{L_{\frac{1}{2}}} = \gamma_a, \quad (3.24)$$

produziria um método de primeira ordem apenas, aumentando significativamente os erros de aproximação. Por esta razão, no método de elementos finitos, (3.2) não é

discretizada desta forma. Para discretizar a condição de contorno (3.2) com $\alpha_1 > 0$, multipliquemos a EDO (3.1) por $\varphi_0(x)$ e integremos no intervalo $[a, b]$,

$$- \int_a^b \frac{d}{dx} \left(\mathbf{k}(x) \frac{d\mathbf{u}}{dx} \right) \varphi_0(x) dx + \int_a^b \mathbf{q}(x) \mathbf{u}(x) \varphi_0(x) dx = \int_a^b \mathbf{f}(x) \varphi_0(x) dx. \quad (3.25)$$

Pela definição (3.4), segue que

$$\begin{aligned} \mathbf{k}(a) \mathbf{u}'(a) + \int_{x_0}^{x_1} \mathbf{k}(x) \mathbf{u}'(x) \varphi_0'(x) dx + \int_{x_0}^{x_1} \mathbf{q}(x) \mathbf{u}(x) \varphi_0(x) dx \\ = \int_{x_0}^{x_1} \mathbf{f}(x) \varphi_0(x) dx, \end{aligned} \quad (3.26)$$

e por (3.2),

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_0}{\alpha_1} \mathbf{u}(a) - \frac{\gamma_a}{\alpha_1} + \int_{x_0}^{x_1} \mathbf{k}(x) \mathbf{u}'(x) \varphi_0'(x) dx + \int_{x_0}^{x_1} \mathbf{q}(x) \mathbf{u}(x) \varphi_0(x) dx \\ = \int_{x_0}^{x_1} \mathbf{f}(x) \varphi_0(x) dx. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Substituindo $\mathbf{u}(x)$ por $\mathbf{v}(x)$ dada em (3.5), obtemos portanto a discretização

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_0}{\alpha_1} v_0 + \int_{x_0}^{x_1} \mathbf{k}(x) [v_0 \varphi_0'(x) + v_1 \varphi_1'(x)] \varphi_0'(x) dx \\ + \int_{x_0}^{x_1} \mathbf{q}(x) [v_0 \varphi_0(x) + v_1 \varphi_1(x)] \varphi_0(x) dx = \frac{\gamma_a}{\alpha_1} + \int_{x_0}^{x_1} \mathbf{f}(x) \varphi_0(x) dx. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Analogamente, a condição de contorno (3.3), $\beta_0 \mathbf{u}(b) + \beta_1 \mathbf{u}'(b) = \gamma_b$, no caso de se ter $\beta_1 > 0$, não deve ser discretizada como

$$\beta_0 \mathbf{v}(b) + \beta_1 \mathbf{k}(b) \mathbf{v}'(b) = \gamma_b, \quad (3.29)$$

isto é,

$$\beta_0 v_N + \beta_1 k_N \frac{v_N - v_{N-1}}{L_{N-\frac{1}{2}}} = \gamma_b, \quad (3.30)$$

pois, novamente, tornaria o método de primeira ordem apenas. Para discretizar a condição de contorno (3.3) com $\beta_1 > 0$, multipliquemos a EDO (3.1) por $\varphi_N(x)$ e

integremos no intervalo $[a, b]$,

$$- \int_a^b \frac{d}{dx} \left(\mathbf{k}(x) \frac{d\mathbf{u}}{dx} \right) \varphi_N(x) dx + \int_a^b \mathbf{q}(x) \mathbf{u}(x) \varphi_N(x) dx = \int_a^b \mathbf{f}(x) \varphi_N(x) dx. \quad (3.31)$$

Pela definição (3.4), segue que

$$\begin{aligned} - \mathbf{k}(b) \mathbf{u}'(b) + \int_{x_{N-1}}^{x_N} \mathbf{k}(x) \mathbf{u}'(x) \varphi'_N(x) dx + \int_{x_{N-1}}^{x_N} \mathbf{q}(x) \mathbf{u}(x) \varphi_N(x) dx \\ = \int_{x_{N-1}}^{x_N} \mathbf{f}(x) \varphi_N(x) dx, \end{aligned} \quad (3.32)$$

e por (3.3),

$$\begin{aligned} \frac{\beta_0}{\beta_1} \mathbf{u}(b) - \frac{\gamma_b}{\beta_1} + \int_{x_{N-1}}^{x_N} \mathbf{k}(x) \mathbf{u}'(x) \varphi'_N(x) dx + \int_{x_{N-1}}^{x_N} \mathbf{q}(x) \mathbf{u}(x) \varphi_N(x) dx \\ = \int_{x_{N-1}}^{x_N} \mathbf{f}(x) \varphi_N(x) dx. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Substituindo $\mathbf{u}(x)$ por $\mathbf{v}(x)$ dada em (3.5), obtemos portanto a discretização

$$\begin{aligned} \frac{\beta_0}{\beta_1} v_N + \int_{x_{N-1}}^{x_N} \mathbf{k}(x) [v_{N-1} \varphi'_{N-1}(x) + v_N \varphi'_N(x)] \varphi'_N(x) dx \\ + \int_{x_{N-1}}^{x_N} \mathbf{q}(x) [v_{N-1} \varphi_{N-1}(x) + v_N \varphi_N(x)] \varphi_N(x) dx = \frac{\gamma_b}{\beta_1} + \int_{x_{N-1}}^{x_N} \mathbf{f}(x) \varphi_N(x) dx. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Vamos agora encontrar o erro de truncamento para o método FEM02, lembrando que $\mathbf{k}(x) \in C^3([a, b])$, $\mathbf{q}(x) \in C^2([a, b])$, $\mathbf{f}(x) \in C^2([a, b])$, e conseqüentemente, $\mathbf{u}(x) \in C^4([a, b])$. O erro de truncamento é dado por

$$- \mathcal{D}(\bar{k} \cdot \mathcal{G}u)_i + (q * u)_i = \bar{f}_i + \tau(\mathbf{u})_i, \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad (3.35)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} - \frac{1}{h_i} \left(\bar{k}_{i+\frac{1}{2}} \frac{u_{i+1} - u_i}{L_{i+\frac{1}{2}}} - \bar{k}_{i-\frac{1}{2}} \frac{u_i - u_{i-1}}{L_{i-\frac{1}{2}}} \right) + (q * u)_i \\ = \bar{f}_i + \tau(\mathbf{u})_i, \quad 1 \leq i \leq N-1. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Utilizando expansões de *Taylor* para $\mathbf{k}(x)$,

$$\mathbf{k}(x) = k_i + k'_i (x - x_i) + \frac{1}{2} k''_i (x - x_i)^2 + O((x - x_i)^3), \quad (3.37)$$

obtemos,

$$\begin{aligned} \bar{k}_{i-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{L_{i-\frac{1}{2}}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \mathbf{k}(x) dx \\ &= k_i - \frac{1}{2} k'_i L_{i-\frac{1}{2}} + \frac{1}{6} k''_i L_{i-\frac{1}{2}}^2 + O(L_{i-\frac{1}{2}}^3), \end{aligned} \quad (3.38)$$

e

$$\begin{aligned} \bar{k}_{i+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{L_{i+\frac{1}{2}}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \mathbf{k}(x) dx \\ &= k_i + \frac{1}{2} k'_i L_{i+\frac{1}{2}} + \frac{1}{6} k''_i L_{i+\frac{1}{2}}^2 + O(L_{i+\frac{1}{2}}^3). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Além disso, utilizando expansões de *Taylor* para a função $\mathbf{u}(x)$, obtemos que

$$\begin{aligned} u_{i+1} &= \mathbf{u}(x_i + L_{i+\frac{1}{2}}) \\ &= u_i + u'_i L_{i+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} u''_i L_{i+\frac{1}{2}}^2 + \frac{1}{6} u'''_i L_{i+\frac{1}{2}}^3 + O(L_{i+\frac{1}{2}}^4), \end{aligned} \quad (3.40)$$

e

$$\begin{aligned} u_{i-1} &= \mathbf{u}(x_i - L_{i-\frac{1}{2}}) \\ &= u_i - u'_i L_{i-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} u''_i L_{i-\frac{1}{2}}^2 - \frac{1}{6} u'''_i L_{i-\frac{1}{2}}^3 + O(L_{i-\frac{1}{2}}^4), \end{aligned} \quad (3.41)$$

e para as funções $\mathbf{q}(x)$ e $\mathbf{f}(x)$,

$$\mathbf{q}(x) = q_i + q'_i (x - x_i) + O((x - x_i)^2), \quad (3.42)$$

e

$$\mathbf{f}(x) = f_i + f'_i (x - x_i) + O((x - x_i)^2). \quad (3.43)$$

Por (3.42),

$$\begin{aligned}
\int_{x_{i-1}}^{x_i} \mathbf{q}(x) \varphi_{i-1}(x) \varphi_i(x) dx &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \mathbf{q}(x) \left(\frac{x_i - x}{L_{i-\frac{1}{2}}} \right) \left(\frac{x - x_{i-1}}{L_{i-\frac{1}{2}}} \right) dx \\
&= q_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{x_i - x}{L_{i-\frac{1}{2}}} \right) \left(\frac{x - x_{i-1}}{L_{i-\frac{1}{2}}} \right) dx \\
&+ q'_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_i) \left(\frac{x_i - x}{L_{i-\frac{1}{2}}} \right) \left(\frac{x - x_{i-1}}{L_{i-\frac{1}{2}}} \right) dx \\
&+ O(L_{i-\frac{1}{2}}^3).
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Utilizando integração por partes,

$$\begin{aligned}
\int_a^b \left(\frac{b-x}{L} \right) \left(\frac{x-a}{L} \right) dx &= \frac{1}{L^2} \int_a^b (b-x) \left(\frac{(x-a)^2}{2} \right)' dx \\
&= \frac{1}{2L^2} \int_a^b (x-a)^2 dx \\
&= \frac{1}{2L^2} \frac{L^3}{3} = \frac{L}{6},
\end{aligned} \tag{3.45}$$

onde $L = b - a$.

Da mesma forma,

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{L^2} \int_a^b (x-b)^2 (x-a) dx &= -\frac{1}{L^2} \int_a^b \left(\frac{(x-b)^3}{3} \right)' (x-a) dx \\
&= \frac{1}{3L^2} \int_a^b (x-b)^3 dx \\
&= \frac{1}{12L^2} (-L^4) = -\frac{L^2}{12},
\end{aligned} \tag{3.46}$$

para $L = b - a$.

Assim, (3.44) torna-se,

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \mathbf{q}(x) \varphi_{i-1}(x) \varphi_i(x) dx = \frac{1}{6} q_i L_{i-\frac{1}{2}} - \frac{1}{12} q'_i L_{i-\frac{1}{2}}^2 + O(L_{i-\frac{1}{2}}^3). \tag{3.47}$$

Agora,

$$\begin{aligned}
\int_{x_{i-1}}^{x_i} \mathbf{q}(x) \varphi_i(x) \varphi_i(x) dx &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \mathbf{q}(x) \frac{(x - x_{i-1})^2}{L_{i-\frac{1}{2}}^2} dx \\
&= q_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{(x - x_{i-1})^2}{L_{i-\frac{1}{2}}^2} dx \\
&+ q'_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_i) \frac{(x - x_{i-1})^2}{L_{i-\frac{1}{2}}^2} dx + O(L_{i-\frac{1}{2}}^3).
\end{aligned} \tag{3.48}$$

Observando que

$$\int_a^b \frac{(x - a)^2}{L^2} dx = \frac{L}{3}, \tag{3.49}$$

e que

$$\int_a^b (x - b) \left(\frac{x - a}{L} \right)^2 = -\frac{L^2}{12}, \tag{3.50}$$

segue que

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \mathbf{q}(x) \varphi_i(x) \varphi_i(x) dx = \frac{1}{3} q_i L_{i-\frac{1}{2}} - \frac{1}{12} q'_i L_{i-\frac{1}{2}}^2 + O(L_{i-\frac{1}{2}}^3). \tag{3.51}$$

Temos também que

$$\begin{aligned}
\int_{x_i}^{x_{i+1}} \mathbf{q}(x) \varphi_i(x) \varphi_i(x) dx &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \mathbf{q}(x) \frac{(x - x_{i+1})^2}{L_{i+\frac{1}{2}}^2} dx \\
&= q_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{(x - x_{i+1})^2}{L_{i+\frac{1}{2}}^2} dx \\
&+ q'_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i) \frac{(x - x_{i+1})^2}{L_{i+\frac{1}{2}}^2} dx \\
&+ O(L_{i+\frac{1}{2}}^3).
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Usando as observações (3.46) e (3.49) temos,

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \mathbf{q}(x) \varphi_i(x) \varphi_i(x) dx = \frac{1}{3} q_i L_{i+\frac{1}{2}} + \frac{1}{12} q'_i L_{i+\frac{1}{2}}^2 + O(L_{i+\frac{1}{2}}^3). \tag{3.53}$$

Por fim,

$$\begin{aligned}
\int_{x_i}^{x_{i+1}} \mathbf{q}(x) \varphi_{i+1}(x) \varphi_i(x) dx &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \mathbf{q}(x) \left(\frac{x - x_i}{L_{i+\frac{1}{2}}} \right) \left(\frac{x_{i+1} - x}{L_{i+\frac{1}{2}}} \right) dx \\
&= q_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{x - x_i}{L_{i+\frac{1}{2}}} \right) \left(\frac{x_{i+1} - x}{L_{i+\frac{1}{2}}} \right) dx \\
&+ q'_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i) \left(\frac{x - x_i}{L_{i+\frac{1}{2}}} \right) \left(\frac{x_{i+1} - x}{L_{i+\frac{1}{2}}} \right) dx \\
&+ O(L_{i+\frac{1}{2}}^3).
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Pelas observações (3.45) e (3.50) chegamos a

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \mathbf{q}(x) \varphi_{i+1}(x) \varphi_i(x) dx = \frac{1}{6} q_i L_{i+\frac{1}{2}} + \frac{1}{12} q'_i L_{i+\frac{1}{2}}^2 + O(L_{i+\frac{1}{2}}^3). \tag{3.55}$$

Usando as equações (3.47), (3.51), (3.53) e (3.55) em (3.15), obtemos

$$\begin{aligned}
h_i (q * v)_i &= v_{i-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \mathbf{q}(x) \varphi_{i-1}(x) \varphi_i(x) dx + v_i \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \mathbf{q}(x) \varphi_i^2(x) dx \\
&+ v_{i+1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \mathbf{q}(x) \varphi_{i+1}(x) \varphi_i(x) dx \\
&= v_{i-1} \left[\frac{1}{6} q_i L_{i-\frac{1}{2}} - \frac{1}{12} q'_i L_{i-\frac{1}{2}}^2 + O(L_{i-\frac{1}{2}}^3) \right] \\
&+ v_i \left[\frac{1}{3} q_i (L_{i-\frac{1}{2}} + L_{i+\frac{1}{2}}) + \frac{1}{12} q'_i (L_{i+\frac{1}{2}}^2 - L_{i-\frac{1}{2}}^2) + O(L_{i-\frac{1}{2}}^3) \right. \\
&\left. + O(L_{i+\frac{1}{2}}^3) \right] + v_{i+1} \left[\frac{1}{6} q_i L_{i+\frac{1}{2}} + \frac{1}{12} q'_i L_{i+\frac{1}{2}}^2 + O(L_{i+\frac{1}{2}}^3) \right].
\end{aligned} \tag{3.56}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
h_i (q * u)_i &= \mathbf{u}(x_i - L_{i-\frac{1}{2}}) \left[\frac{1}{6} q_i L_{i-\frac{1}{2}} - \frac{1}{12} q'_i L_{i-\frac{1}{2}}^2 + O(L_{i-\frac{1}{2}}^3) \right] \\
&+ \mathbf{u}(x_i) \left[\frac{1}{3} q_i L_{i-\frac{1}{2}} + \frac{1}{3} q_i L_{i+\frac{1}{2}} \right. \\
&\left. + \frac{1}{12} q'_i (L_{i+\frac{1}{2}}^2 - L_{i-\frac{1}{2}}^2) + O(L_{i-\frac{1}{2}}^3) + O(L_{i+\frac{1}{2}}^3) \right] \\
&+ \mathbf{u}(x_i + L_{i+\frac{1}{2}}) \left[\frac{1}{6} q_i L_{i+\frac{1}{2}} + \frac{1}{12} q'_i L_{i+\frac{1}{2}}^2 + O(L_{i+\frac{1}{2}}^3) \right].
\end{aligned} \tag{3.57}$$

Por (3.40) e (3.41) temos,

$$\begin{aligned}
h_i (q * u)_i &= u_i \left[\frac{1}{6} q_i L_{i-\frac{1}{2}} - \frac{1}{12} q'_i L_{i-\frac{1}{2}}^2 + \frac{1}{3} q_i L_{i-\frac{1}{2}} + \frac{1}{3} q_i L_{i+\frac{1}{2}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{12} q'_i L_{i+\frac{1}{2}}^2 - \frac{1}{12} q'_i L_{i-\frac{1}{2}}^2 + \frac{1}{6} q_i L_{i+\frac{1}{2}} + \frac{1}{12} q'_i L_{i+\frac{1}{2}}^2 \right] \\
&\quad + u'_i \left[-\frac{1}{6} q_i L_{i-\frac{1}{2}}^2 + \frac{1}{6} q_i L_{i+\frac{1}{2}}^2 \right] + O(L_{i-\frac{1}{2}}^3) + O(L_{i+\frac{1}{2}}^3) \quad (3.58) \\
&= u_i q_i \frac{L_{i-\frac{1}{2}} + L_{i+\frac{1}{2}}}{2} + \frac{1}{6} u_i q'_i \left(L_{i+\frac{1}{2}}^2 - L_{i-\frac{1}{2}}^2 \right) \\
&\quad + \frac{1}{6} u'_i q_i \left(L_{i+\frac{1}{2}}^2 - L_{i-\frac{1}{2}}^2 \right) + O(L_{i-\frac{1}{2}}^3) + O(L_{i+\frac{1}{2}}^3).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
(q * u)_i &= q_i u_i + \frac{1}{3} (q_i u'_i + q'_i u_i) \left(L_{i+\frac{1}{2}} - L_{i-\frac{1}{2}} \right) \\
&\quad + O(L_{i-\frac{1}{2}}^2) + O(L_{i+\frac{1}{2}}^2). \quad (3.59)
\end{aligned}$$

Por fim, de (3.43) temos,

$$\begin{aligned}
\int_a^b \mathbf{f}(x) \varphi_i(x) dx &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \mathbf{f}(x) \frac{x - x_{i-1}}{L_{i-\frac{1}{2}}} dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \mathbf{f}(x) \frac{x_{i+1} - x}{L_{i+\frac{1}{2}}} dx \\
&= f_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{x - x_{i-1}}{L_{i-\frac{1}{2}}} dx + f'_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_i) \frac{x - x_{i-1}}{L_{i-\frac{1}{2}}} dx \\
&\quad + O(L_{i-\frac{1}{2}}^3) + f_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{x_{i+1} - x}{L_{i+\frac{1}{2}}} dx \\
&\quad + f'_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i) \frac{x_{i+1} - x}{L_{i+\frac{1}{2}}} dx + O(L_{i+\frac{1}{2}}^3), \quad (3.60)
\end{aligned}$$

com $O(L_{i-\frac{1}{2}}^3)$ e $O(L_{i+\frac{1}{2}}^3)$ dependendo de $\mathbf{f}''(x)$ em $[x_{i-1}, x_{i+1}]$. Observando que

$$\int_a^b \frac{x - a}{L} dx = \frac{L}{2}, \quad (3.61)$$

$$\int_a^b (x - b) \frac{x - a}{L} dx = -\frac{L^2}{6}, \quad (3.62)$$

$$\int_a^b \frac{b - x}{L} dx = \frac{L}{2}, \quad (3.63)$$

e

$$\int_a^b (x - a) \frac{b - x}{L} dx = \frac{L^2}{6}, \quad (3.64)$$

segue que,

$$\int_a^b \mathbf{f}(x) \varphi_i(x) dx = f_i \frac{L_{i-\frac{1}{2}} + L_{i+\frac{1}{2}}}{2} + \frac{1}{6} f'_i \left(L_{i+\frac{1}{2}}^2 - L_{i-\frac{1}{2}}^2 \right) + O(L_{i-\frac{1}{2}}^3) + O(L_{i+\frac{1}{2}}^3). \quad (3.65)$$

Lembrando da relação (3.17) para \bar{f} , chegamos a

$$\begin{aligned} \bar{f}_i &= \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \mathbf{f}(x) \varphi_i(x) dx \\ &= f_i + \frac{1}{3} f'_i \left(L_{i+\frac{1}{2}} - L_{i-\frac{1}{2}} \right) + O(L_{i-\frac{1}{2}}^2) + O(L_{i+\frac{1}{2}}^2). \end{aligned} \quad (3.66)$$

Utilizando as equações (3.38), (3.39), (3.40), (3.41), (3.59) e (3.66) em (3.36),

$$\begin{aligned} -\frac{1}{h_i} \left(\bar{k}_{i+\frac{1}{2}} \frac{u_{i+1} - u_i}{L_{i+\frac{1}{2}}} - \bar{k}_{i-\frac{1}{2}} \frac{u_i - u_{i-1}}{L_{i-\frac{1}{2}}} \right) + (q * u)_i \\ = \bar{f}_i + \tau(\mathbf{u})_i, \quad 1 \leq i \leq N-1, \end{aligned} \quad (3.67)$$

obtemos,

$$\begin{aligned} \tau(\mathbf{u})_i &= -\frac{1}{h_i} \left[\left(k_i + \frac{1}{2} k'_i L_{i+\frac{1}{2}} + \frac{1}{6} k''_i L_{i+\frac{1}{2}}^2 + O(L_{i+\frac{1}{2}}^3) \right) \right. \\ &\quad \left(u'_i + \frac{1}{2} u''_i L_{i+\frac{1}{2}} + \frac{1}{6} u'''_i L_{i+\frac{1}{2}}^2 + O(L_{i+\frac{1}{2}}^3) \right) \\ &\quad - \left(k_i - \frac{1}{2} k'_i L_{i-\frac{1}{2}} + \frac{1}{6} k''_i L_{i-\frac{1}{2}}^2 + O(L_{i-\frac{1}{2}}^3) \right) \\ &\quad \left. \left(u'_i - \frac{1}{2} u''_i L_{i-\frac{1}{2}} + \frac{1}{6} u'''_i L_{i-\frac{1}{2}}^2 + O(L_{i-\frac{1}{2}}^3) \right) \right] \\ &\quad + \left[q_i u_i + \frac{1}{3} (q_i u'_i + q'_i u_i) \left(L_{i+\frac{1}{2}} - L_{i-\frac{1}{2}} \right) + O(L_{i-\frac{1}{2}}^2) + O(L_{i+\frac{1}{2}}^2) \right] \\ &\quad - \left[f_i + \frac{1}{3} f'_i \left(L_{i+\frac{1}{2}} - L_{i-\frac{1}{2}} \right) + O(L_{i-\frac{1}{2}}^2) + O(L_{i+\frac{1}{2}}^2) \right]. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\tau(\mathbf{u})_i &= -\frac{1}{h_i} \left[k_i u_i'' \frac{L_{i+\frac{1}{2}} + L_{i-\frac{1}{2}}}{2} + k'_i u'_i \frac{L_{i+\frac{1}{2}} + L_{i-\frac{1}{2}}}{2} \right. \\
&\quad + \frac{1}{6} k_i u_i''' \left(L_{i+\frac{1}{2}}^2 - L_{i-\frac{1}{2}}^2 \right) + \frac{1}{4} k'_i u_i'' \left(L_{i+\frac{1}{2}}^2 - L_{i-\frac{1}{2}}^2 \right) \\
&\quad \left. + \frac{1}{6} k''_i u'_i \left(L_{i+\frac{1}{2}}^2 - L_{i-\frac{1}{2}}^2 \right) + O(L_{i-\frac{1}{2}}^3) + O(L_{i+\frac{1}{2}}^3) \right] \\
&\quad + \left[q_i u_i + \frac{1}{3} (q_i u'_i + q'_i u_i) \left(L_{i+\frac{1}{2}} - L_{i-\frac{1}{2}} \right) + O(L_{i-\frac{1}{2}}^2) + O(L_{i+\frac{1}{2}}^2) \right] \\
&\quad - \left[f_i + \frac{1}{3} f'_i \left(L_{i+\frac{1}{2}} - L_{i-\frac{1}{2}} \right) + O(L_{i-\frac{1}{2}}^2) + O(L_{i+\frac{1}{2}}^2) \right] \\
&= \left[-k_i u_i'' - k'_i u'_i + q_i u_i - f_i \right] \\
&\quad + \frac{1}{3} \left(L_{i+\frac{1}{2}} - L_{i-\frac{1}{2}} \right) \left[-k_i u_i''' - 2k'_i u_i'' - k''_i u'_i + q_i u'_i + q'_i u_i - f'_i \right] \\
&\quad + \frac{1}{6} k'_i u_i'' \left(L_{i+\frac{1}{2}} - L_{i-\frac{1}{2}} \right) + O(L_{i-\frac{1}{2}}^2) + O(L_{i+\frac{1}{2}}^2).
\end{aligned} \tag{3.69}$$

Por (3.1) temos que $-k_i u_i'' - k'_i u'_i + q_i u_i - f_i = 0$ e $(-k_i u_i'' - k'_i u'_i + q_i u_i - f_i)' = 0$ e, portanto,

$$\boxed{\tau(\mathbf{u})_i = \frac{1}{6} k'_i u_i'' \left(L_{i+\frac{1}{2}} - L_{i-\frac{1}{2}} \right) + O(L_{i-\frac{1}{2}}^2) + O(L_{i+\frac{1}{2}}^2)}. \tag{3.70}$$

Além disso, o erro da solução e^h para FEM02 é dado por

$$e_i = v_i - u_i, \quad 0 \leq i \leq N, \tag{3.71}$$

e o erro da derivada E^h por

$$\begin{aligned}
E_{i-\frac{1}{2}} &= (\mathcal{G}v)_{i-\frac{1}{2}} - \mathbf{u}'(x_{i-\frac{1}{2}}) \\
&= (\mathcal{G}(v - u))_{i-\frac{1}{2}} + (\mathcal{G}u)_{i-\frac{1}{2}} - \mathbf{u}'(x_{i-\frac{1}{2}}) \\
&= (\mathcal{G}e^h)_{i-\frac{1}{2}} + (\mathcal{G}u)_{i-\frac{1}{2}} - \mathbf{u}'(x_{i-\frac{1}{2}}), \quad 1 \leq i \leq N,
\end{aligned} \tag{3.72}$$

onde

$$(\mathcal{G}v)_{i-\frac{1}{2}} = \frac{v_i - v_{i-1}}{L_{i-\frac{1}{2}}}, \quad 1 \leq i \leq N. \tag{3.73}$$

Assim,

$$E^h = \mathcal{G}e^h + \tau_{\mathcal{G}}(\mathbf{u}), \quad (3.74)$$

onde

$$\tau_{\mathcal{G}}(\mathbf{u})_{i-\frac{1}{2}} := \frac{u_i - u_{i-1}}{L_{i-\frac{1}{2}}} - \mathbf{u}'(x_{i-\frac{1}{2}}), \quad 1 \leq i \leq N. \quad (3.75)$$

Por expansão de *Taylor* temos,

$$\tau_{\mathcal{G}}(\mathbf{u})_{i-\frac{1}{2}} = \frac{1}{24} u'''_{i-\frac{1}{2}} L_{i-\frac{1}{2}}^2 + O(L_{i-\frac{1}{2}}^3), \quad 1 \leq i \leq N. \quad (3.76)$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \bar{k}_{i-\frac{1}{2}} (\mathcal{G}e^h)_{i-\frac{1}{2}} &= \bar{k}_{N-\frac{1}{2}} (\mathcal{G}e^h)_{N-\frac{1}{2}} - \sum_{j=i}^{N-1} \left(\bar{k}_{j+\frac{1}{2}} (\mathcal{G}e^h)_{j+\frac{1}{2}} - \bar{k}_{j-\frac{1}{2}} (\mathcal{G}e^h)_{j-\frac{1}{2}} \right) \\ &= \bar{k}_{N-\frac{1}{2}} (\mathcal{G}e^h)_{N-\frac{1}{2}} - \sum_{j=i}^{N-1} h_j \frac{\bar{k}_{j+\frac{1}{2}} (\mathcal{G}e^h)_{j+\frac{1}{2}} - \bar{k}_{j-\frac{1}{2}} (\mathcal{G}e^h)_{j-\frac{1}{2}}}{h_j}, \end{aligned} \quad (3.77)$$

isto é,

$$\bar{k}_{i-\frac{1}{2}} (\mathcal{G}e^h)_{i-\frac{1}{2}} = \bar{k}_{N-\frac{1}{2}} (\mathcal{G}e^h)_{N-\frac{1}{2}} - \sum_{j=i}^{N-1} h_j \mathcal{D}(\bar{k} \cdot \mathcal{G}e^h)_j, \quad 1 \leq i \leq N. \quad (3.78)$$

3.2 Análise dos Erros de Solução e de Derivada de Primeira Ordem para $\mathbf{q}(x) = 0$

Consideremos o problema de *Sturm-Liouville* com condições de contorno de *Dirichlet* em $x = a$ e $x = b$,

$$-\frac{d}{dx} \left(\mathbf{k}(x) \frac{d\mathbf{u}}{dx} \right) + \mathbf{q}(x) \mathbf{u}(x) = \mathbf{f}(x), \quad a < x < b, \quad (3.79)$$

$$\alpha_0 \mathbf{u}(a) = \gamma_a, \quad \beta_0 \mathbf{u}(b) = \gamma_b. \quad (3.80)$$

onde γ_a e γ_b são constantes dadas, $\alpha_0 > 0$, $\beta_0 > 0$, $\mathbf{k}(x) \in C^3([a, b])$, $\mathbf{q}(x) \in C^2([a, b])$, $\mathbf{f}(x) \in C^2([a, b])$, $\mathbf{k}(x) > 0$ em $[a, b]$, $\mathbf{q}(x) \geq 0$ em $[a, b]$ e $\mathbf{u}(x) \in C^4([a, b])$.

Da seção (3.1), sabemos que o problema discreto correspondente é dado por

$$-\frac{1}{h_i} \left(\bar{k}_{i+\frac{1}{2}} \frac{v_{i+1} - v_i}{L_{i+\frac{1}{2}}} - \bar{k}_{i-\frac{1}{2}} \frac{v_i - v_{i-1}}{L_{i-\frac{1}{2}}} \right) + (q * v)_i = \bar{f}_i, \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad (3.81)$$

$$v_0 = \frac{\gamma_a}{\alpha_0}, \quad v_N = \frac{\gamma_b}{\beta_0}, \quad (3.82)$$

onde,

$$\bar{k}_{i-\frac{1}{2}} = \frac{1}{L_{i-\frac{1}{2}}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \mathbf{k}(x) dx, \quad 1 \leq i \leq N, \quad (3.83)$$

$$\bar{f}_i = \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \mathbf{f}(x) \varphi_i(x) dx, \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad (3.84)$$

e

$$(q * v)_i = \frac{1}{h_i} \left[v_{i-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \mathbf{q}(x) \varphi_{i-1}(x) \varphi_i(x) dx + v_i \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \mathbf{q}(x) \varphi_i(x)^2 dx + v_{i+1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \mathbf{q}(x) \varphi_{i+1}(x) \varphi_i(x) dx \right], \quad 1 \leq i \leq N-1. \quad (3.85)$$

Notemos que $e_0 = v_0 - u_0 = 0$ e $e_N = v_N - u_N = 0$. Poderíamos escrever as equações (3.84) e (3.85) para $i = 0$ e $i = N$ na forma

$$\bar{f}_0 = \frac{1}{h_0} \int_{x_0}^{x_1} \mathbf{f}(x) \varphi_0(x) dx, \quad (3.86)$$

$$\bar{f}_N = \frac{1}{h_N} \int_{x_{N-1}}^{x_N} \mathbf{f}(x) \varphi_N(x) dx, \quad (3.87)$$

$$(q * v)_0 = \frac{1}{h_0} \left[v_0 \int_{x_0}^{x_1} \mathbf{q}(x) \varphi_0(x)^2 dx + v_1 \int_{x_0}^{x_1} \mathbf{q}(x) \varphi_1(x) \varphi_0(x) dx \right], \quad (3.88)$$

$$(q * v)_N = \frac{1}{h_N} \left[v_{N-1} \int_{x_{N-1}}^{x_N} \mathbf{q}(x) \varphi_{N-1}(x) \varphi_N(x) dx + v_N \int_{x_{N-1}}^{x_N} \mathbf{q}(x) \varphi_N(x)^2 dx \right], \quad (3.89)$$

mas estes valores não serão utilizados no caso do problema de *Sturm-Liouville* com condições de *Dirichlet*.

O FEM02 dado em (3.81) - (3.85) pode ser escrito como

$$- \mathcal{D}(\bar{k} \cdot \mathcal{G}v^h) + (q * v^h) = f, \quad (3.90)$$

onde

$$(\mathcal{D}z)_i := \frac{z_{i+\frac{1}{2}} - z_{i-\frac{1}{2}}}{h_i}, \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad (3.91)$$

e

$$(\mathcal{G}w)_{i-\frac{1}{2}} := \frac{w_i - w_{i-1}}{L_{i-\frac{1}{2}}}, \quad 1 \leq i \leq N. \quad (3.92)$$

Consideremos agora o caso $\mathbf{q}(x) = 0$. Subtraindo $-\mathcal{D}(\bar{k} \cdot \mathcal{G}u^h) + (q * u^h) = f + \tau(\mathbf{u})$ da equação (3.90), chegamos a

$$- \mathcal{D}(\bar{k} \cdot \mathcal{G}e^h) + (q * e^h) = -\tau(\mathbf{u}). \quad (3.93)$$

Utilizando $\mathbf{q}(x) = 0$ em (3.93), e levando o resultado na equação (3.78) obtemos,

$$\bar{k}_{i-\frac{1}{2}} (\mathcal{G}e^h)_{i-\frac{1}{2}} = \bar{k}_{N-\frac{1}{2}} (\mathcal{G}e^h)_{N-\frac{1}{2}} - \sum_{j=i}^{N-1} h_j \tau(\mathbf{u})_j, \quad 1 \leq i \leq N. \quad (3.94)$$

Usando a equação (3.70) para o erro de truncamento, o fato de que $h_j = \frac{L_{j+\frac{1}{2}} + L_{j-\frac{1}{2}}}{2}$ e definindo $\mathbf{w}(x) := \mathbf{k}'(x)\mathbf{u}''(x)$, temos que

$$\begin{aligned} \sum_{j=i}^{N-1} h_j \tau(\mathbf{u})_j &= \frac{1}{12} \sum_{j=i}^{N-1} w_j \left(L_{j+\frac{1}{2}}^2 - L_{j-\frac{1}{2}}^2 \right) + O(\hbar^2) \\ &= \frac{1}{12} \sum_{j=i}^{N-1} \left(w_{j+\frac{1}{2}} L_{j+\frac{1}{2}}^2 - w_{j-\frac{1}{2}} L_{j-\frac{1}{2}}^2 \right) \\ &\quad - \frac{1}{12} \sum_{j=i}^{N-1} (w_{j+\frac{1}{2}} - w_j) L_{j+\frac{1}{2}}^2 - \frac{1}{12} \sum_{j=i}^{N-1} (w_j - w_{j-\frac{1}{2}}) L_{j-\frac{1}{2}}^2 + O(\hbar^2). \end{aligned} \quad (3.95)$$

Como $(w_{j+\frac{1}{2}} - w_j) = O(L_{j+\frac{1}{2}})$ e $(w_j - w_{j-\frac{1}{2}}) = O(L_{j-\frac{1}{2}})$,

$$\sum_{j=i}^{N-1} h_j \tau(\mathbf{u})_j = \frac{1}{12} \left(w_{N-\frac{1}{2}} L_{N-\frac{1}{2}}^2 - w_{i-\frac{1}{2}} L_{i-\frac{1}{2}}^2 \right) + O(\hbar^2), \quad (3.96)$$

isto é,

$$\sum_{j=i}^{N-1} h_j \tau(\mathbf{u})_j = \frac{1}{12} k'_{N-\frac{1}{2}} u''_{N-\frac{1}{2}} L_{N-\frac{1}{2}}^2 - \frac{1}{12} k'_{i-\frac{1}{2}} u''_{i-\frac{1}{2}} L_{i-\frac{1}{2}}^2 + O(\hbar^2) \quad 1 \leq i \leq N-1. \quad (3.97)$$

Para computar $(\mathcal{G}e^h)_{N-\frac{1}{2}} = \frac{e_N - e_{N-1}}{L_{N-\frac{1}{2}}} = -\frac{e_{N-1}^{[0]}}{L_{N-\frac{1}{2}}}$, precisamos computar e_{N-1} :

$$\begin{bmatrix} a_1^{[0]} & -\bar{c}_{\frac{3}{2}} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ -\bar{c}_{\frac{3}{2}} & a_2^{[0]} & -\bar{c}_{\frac{5}{2}} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{c}_{\frac{5}{2}} & a_3^{[0]} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & a_{N-3}^{[0]} & -\bar{c}_{N-\frac{5}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & -\bar{c}_{N-\frac{5}{2}} & a_{N-2}^{[0]} & -\bar{c}_{N-\frac{3}{2}} \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -\bar{c}_{N-\frac{3}{2}} & a_{N-1}^{[0]} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1^{[0]} \\ e_2^{[0]} \\ e_3^{[0]} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_{N-3}^{[0]} \\ e_{N-2}^{[0]} \\ e_{N-1}^{[0]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}(\mathbf{u})_1^{[0]} \\ \mathbf{b}(\mathbf{u})_2^{[0]} \\ \mathbf{b}(\mathbf{u})_3^{[0]} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{b}(\mathbf{u})_{N-3}^{[0]} \\ \mathbf{b}(\mathbf{u})_{N-2}^{[0]} \\ \mathbf{b}(\mathbf{u})_{N-1}^{[0]} \end{bmatrix}, \quad (3.98)$$

onde

$$\bar{c}_{i-\frac{1}{2}} = \frac{\bar{k}_{i-\frac{1}{2}}}{L_{i-\frac{1}{2}}}, \quad 1 \leq i \leq N, \quad (3.99)$$

$$a_i^{[0]} = \bar{c}_{i-\frac{1}{2}} + \bar{c}_{i+\frac{1}{2}}, \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad (3.100)$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{u})_i = -h_i \tau(\mathbf{u})_i, \quad 1 \leq i \leq N-1. \quad (3.101)$$

Reduzindo à forma triangular superior pela eliminação Gaussiana, obtemos,

$$\begin{bmatrix} \hat{a}_1^{[0]} & -\bar{c}_{\frac{3}{2}} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{a}_2^{[0]} & -\bar{c}_{\frac{5}{2}} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{a}_3^{[0]} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \hat{a}_{N-3}^{[0]} & -\bar{c}_{N-\frac{5}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \hat{a}_{N-2}^{[0]} & -\bar{c}_{N-\frac{3}{2}} \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & \hat{a}_{N-1}^{[0]} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1^{[0]} \\ e_2^{[0]} \\ e_3^{[0]} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_{N-3}^{[0]} \\ e_{N-2}^{[0]} \\ e_{N-1}^{[0]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}}(\mathbf{u})_1^{[0]} \\ \hat{\mathbf{b}}(\mathbf{u})_2^{[0]} \\ \hat{\mathbf{b}}(\mathbf{u})_3^{[0]} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{\mathbf{b}}(\mathbf{u})_{N-3}^{[0]} \\ \hat{\mathbf{b}}(\mathbf{u})_{N-2}^{[0]} \\ \hat{\mathbf{b}}(\mathbf{u})_{N-1}^{[0]} \end{bmatrix}, \quad (3.102)$$

onde

$$\hat{a}_j^{[0]} = \bar{c}_{j+\frac{1}{2}} + \theta_j^{[0]} \bar{c}_{j-\frac{1}{2}}, \quad 1 \leq j \leq N-1, \quad (3.103)$$

$$\hat{\mathbf{b}}(\mathbf{u})_j^{[0]} = \sum_{l=1}^j \frac{\bar{c}_{j-\frac{1}{2}} \theta_j^{[0]}}{\bar{c}_{l-\frac{1}{2}} \theta_l^{[0]}} \mathbf{b}(\mathbf{u})_l, \quad 1 \leq j \leq N-1, \quad (3.104)$$

com $\theta_1^{[0]}, \theta_2^{[0]}, \dots, \theta_{N-1}^{[0]}$ dados por

$$\theta_1^{[0]} = 1, \quad (3.105)$$

$$\theta_j^{[0]} = \frac{\bar{c}_{j-\frac{3}{2}} \theta_{j-1}^{[0]}}{\bar{c}_{j-\frac{1}{2}} + \bar{c}_{j-\frac{3}{2}} \theta_{j-1}^{[0]}}, \quad 2 \leq j \leq N. \quad (3.106)$$

De (3.105) e (3.106) temos,

$$\frac{1}{\bar{c}_{j-\frac{1}{2}} \theta_j^{[0]}} = \sum_{l=1}^j \frac{L_{l-\frac{1}{2}}}{\bar{k}_{l-\frac{1}{2}}}. \quad (3.107)$$

Definindo

$$\bar{I}_j := \sum_{l=1}^j \frac{L_{l-\frac{1}{2}}}{\bar{k}_{l-\frac{1}{2}}}, \quad (3.108)$$

temos,

$$\hat{\mathbf{b}}(\mathbf{u})_j^{[0]} = - \sum_{l=1}^j \frac{\bar{c}_{j-\frac{1}{2}} \theta_j^{[0]}}{\bar{c}_{l-\frac{1}{2}} \theta_l^{[0]}} h_l \tau(\mathbf{u})_l = - \bar{c}_{j-\frac{1}{2}} \theta_j^{[0]} \sum_{l=1}^j \bar{I}_l h_l \tau(\mathbf{u})_l. \quad (3.109)$$

Em particular,

$$e_{N-1}^{[0]} = \frac{\hat{\mathbf{b}}(\mathbf{u})_{N-1}^{[0]}}{\hat{a}_{N-1}^{[0]}} = - \frac{\bar{c}_{N-\frac{3}{2}} \theta_{N-1}^{[0]}}{\bar{c}_{N-\frac{1}{2}} + \bar{c}_{N-\frac{3}{2}} \theta_{N-1}^{[0]}} \sum_{j=1}^{N-1} \bar{I}_j h_j \tau(\mathbf{u})_j. \quad (3.110)$$

Agora,

$$\begin{aligned} \frac{\bar{c}_{N-\frac{3}{2}} \theta_{N-1}^{[0]}}{\bar{c}_{N-\frac{1}{2}} + \bar{c}_{N-\frac{3}{2}} \theta_{N-1}^{[0]}} &= \frac{1}{1 + \frac{\bar{c}_{N-\frac{1}{2}}}{\bar{c}_{N-\frac{3}{2}} \theta_{N-1}^{[0]}}} = \frac{1}{\bar{c}_{N-\frac{1}{2}}} \frac{1}{\frac{1}{\bar{c}_{N-\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\bar{c}_{N-\frac{3}{2}} \theta_{N-1}^{[0]}}} \\ &= \frac{L_{N-\frac{1}{2}}}{\bar{k}_{N-\frac{1}{2}}} \frac{1}{\frac{L_{N-\frac{1}{2}}}{\bar{k}_{N-\frac{1}{2}}} + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{L_{j-\frac{1}{2}}}{\bar{k}_{j-\frac{1}{2}}}} = \frac{L_{N-\frac{1}{2}}}{\bar{k}_{N-\frac{1}{2}}} \frac{1}{\sum_{j=1}^N \frac{L_{j-\frac{1}{2}}}{\bar{k}_{j-\frac{1}{2}}}}, \end{aligned} \quad (3.111)$$

isto é,

$$\frac{\bar{c}_{N-\frac{3}{2}} \theta_{N-1}^{[0]}}{\bar{c}_{N-\frac{1}{2}} + \bar{c}_{N-\frac{3}{2}} \theta_{N-1}^{[0]}} = \frac{L_{N-\frac{1}{2}}}{\bar{k}_{N-\frac{1}{2}} \bar{I}_N}. \quad (3.112)$$

Além disso, pela equação (3.70) para o erro de truncamento, pelo fato de que $h_j = \frac{1}{2}(L_{j+\frac{1}{2}} + L_{j-\frac{1}{2}})$ e definindo $\mathbf{w}(x) := \mathbf{k}'(x)\mathbf{u}''(x)$, temos que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N-1} \bar{I}_j h_j \tau(\mathbf{u})_j &= \frac{1}{12} \sum_{j=1}^{N-1} \bar{I}_j w_j \left(L_{j+\frac{1}{2}}^2 - L_{j-\frac{1}{2}}^2 \right) + O(\hbar^2) \\ &= \frac{1}{12} \sum_{j=1}^{N-1} \left(\bar{I}_{j+1} w_{j+\frac{1}{2}} L_{j+\frac{1}{2}}^2 - \bar{I}_j w_{j-\frac{1}{2}} L_{j-\frac{1}{2}}^2 \right) \\ &\quad - \frac{1}{12} \sum_{j=1}^{N-1} \left(\bar{I}_{j+1} w_{j+\frac{1}{2}} - \bar{I}_j w_j \right) L_{j+\frac{1}{2}}^2 \\ &\quad - \frac{1}{12} \sum_{j=1}^{N-1} \bar{I}_j \left(w_j - w_{j-\frac{1}{2}} \right) L_{j-\frac{1}{2}}^2 + O(\hbar^2). \end{aligned} \quad (3.113)$$

Como $(\bar{I}_{j+1} w_{j+\frac{1}{2}} - \bar{I}_j w_j) = (\bar{I}_{j+1} - \bar{I}_j)w_{j+\frac{1}{2}} + \bar{I}_j(w_{j+\frac{1}{2}} - w_j)$, $(\bar{I}_{j+1} - \bar{I}_j) = \frac{L_{j+\frac{1}{2}}}{\bar{k}_{j+\frac{1}{2}}} = O(L_{j+\frac{1}{2}})$ e $(w_{j+\frac{1}{2}} - w_j) = O(L_{j+\frac{1}{2}})$, segue que

$$\sum_{j=1}^{N-1} \bar{I}_j h_j \tau(\mathbf{u})_j = \frac{1}{12} \left(\bar{I}_N w_{N-\frac{1}{2}} L_{N-\frac{1}{2}}^2 - \bar{I}_1 w_{\frac{1}{2}} L_{\frac{1}{2}}^2 \right) + O(\hbar^2). \quad (3.114)$$

Como $\bar{I}_1 w_{\frac{1}{2}} L_{\frac{1}{2}}^2 = O(L_{\frac{1}{2}}^3) = O(\hbar^2)$, temos

$$\sum_{j=1}^{N-1} \bar{I}_j h_j \tau(\mathbf{u})_j = \frac{1}{12} \bar{I}_N k'_{N-\frac{1}{2}} u''_{N-\frac{1}{2}} L_{N-\frac{1}{2}}^2 + O(\hbar^2). \quad (3.115)$$

Usando as equações (3.112) e (3.115) em (3.110), chegamos a

$$\begin{aligned} e_{N-1}^{[0]} &= - \frac{\bar{c}_{N-\frac{3}{2}} \theta_{N-1}^{[0]}}{\bar{c}_{N-\frac{1}{2}} + \bar{c}_{N-\frac{3}{2}} \theta_{N-1}^{[0]}} \sum_{j=1}^{N-1} \bar{I}_j h_j \tau(\mathbf{u})_j \\ &= - \frac{L_{N-\frac{1}{2}}}{\bar{k}_{N-\frac{1}{2}} \bar{I}_N} \left(\frac{1}{12} \bar{I}_N k'_{N-\frac{1}{2}} u''_{N-\frac{1}{2}} L_{N-\frac{1}{2}}^2 + O(\hbar^2) \right) \\ &= - L_{N-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{12} \frac{k'_{N-\frac{1}{2}} u''_{N-\frac{1}{2}}}{\bar{k}_{N-\frac{1}{2}}} L_{N-\frac{1}{2}}^2 + O(\hbar^2) \right). \end{aligned} \quad (3.116)$$

Finalmente,

$$(\mathcal{G}e^h)_{N-\frac{1}{2}} = - \frac{1}{L_{N-\frac{1}{2}}} \left(- L_{N-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{12} \frac{k'_{N-\frac{1}{2}} u''_{N-\frac{1}{2}}}{\bar{k}_{N-\frac{1}{2}}} L_{N-\frac{1}{2}}^2 + O(\hbar^2) \right) \right), \quad (3.117)$$

isto é,

$$\bar{k}_{N-\frac{1}{2}} \cdot (\mathcal{G}e^h)_{N-\frac{1}{2}} = \frac{1}{12} k'_{N-\frac{1}{2}} u''_{N-\frac{1}{2}} L_{N-\frac{1}{2}}^2 + O(\hbar^2). \quad (3.118)$$

Levando (3.97) e (3.118) na equação (3.94), obtemos

$$\begin{aligned} \bar{k}_{i-\frac{1}{2}} \cdot (\mathcal{G}e^{[0]})_{i-\frac{1}{2}} &= \bar{k}_{N-\frac{1}{2}} \cdot (\mathcal{G}e^{[0]})_{N-\frac{1}{2}} - \sum_{j=i}^{N-1} h_j \tau(\mathbf{u})_j \\ &= \left(\frac{1}{12} k'_{N-\frac{1}{2}} u''_{N-\frac{1}{2}} L_{N-\frac{1}{2}}^2 + O(\hbar^2) \right) \\ &\quad - \left(\frac{1}{12} k'_{N-\frac{1}{2}} u''_{N-\frac{1}{2}} L_{N-\frac{1}{2}}^2 - \frac{1}{12} k'_{i-\frac{1}{2}} u''_{i-\frac{1}{2}} L_{i-\frac{1}{2}}^2 + O(\hbar^2) \right), \end{aligned} \quad (3.119)$$

ou seja,

$$\bar{k}_{i-\frac{1}{2}} \cdot (\mathcal{G}e^{[0]})_{i-\frac{1}{2}} = \frac{1}{12} k'_{i-\frac{1}{2}} u''_{i-\frac{1}{2}} L_{i-\frac{1}{2}}^2 + O(\hbar^2), \quad 1 \leq i \leq N. \quad (3.120)$$

Determinemos agora o erro da derivada de primeira ordem. Das equações (3.76) e (3.120), segue que

$$\begin{aligned} \bar{k}_{i-\frac{1}{2}} \cdot E_{i-\frac{1}{2}}^{[0]} &= \bar{k}_{i-\frac{1}{2}} \cdot (\mathcal{G}e^h)_{i-\frac{1}{2}} + \bar{k}_{i-\frac{1}{2}} \cdot \tau_{\mathcal{G}}(\mathbf{u})_{i-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{12} k'_{i-\frac{1}{2}} u''_{i-\frac{1}{2}} L_{i-\frac{1}{2}}^2 + O(\hbar^2) + \frac{1}{24} \bar{k}_{i-\frac{1}{2}} u'''_{i-\frac{1}{2}} L_{i-\frac{1}{2}}^2 + O(L_{i-\frac{1}{2}}^2), \end{aligned} \quad (3.121)$$

isto é,

$$E_{i-\frac{1}{2}}^{[0]} = \frac{1}{12} \frac{k'_{i-\frac{1}{2}} u''_{i-\frac{1}{2}}}{\bar{k}_{i-\frac{1}{2}}} L_{i-\frac{1}{2}}^2 + \frac{1}{24} u'''_{i-\frac{1}{2}} L_{i-\frac{1}{2}}^2 + O(\hbar^2), \quad 1 \leq i \leq N, \quad (3.122)$$

onde

$$\bar{k}_{i-\frac{1}{2}} = \frac{1}{L_{i-\frac{1}{2}}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \mathbf{k}(x) dx = k_{i-\frac{1}{2}} + O(L_{i-\frac{1}{2}}^2), \quad (3.123)$$

ou, equivalentemente,

$$E_{i-\frac{1}{2}}^{[0]} = \frac{1}{12} \left(\frac{k'_{i-\frac{1}{2}} u''_{i-\frac{1}{2}}}{k_{i-\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2} u'''_{i-\frac{1}{2}} \right) L_{i-\frac{1}{2}}^2 + O(\hbar^2), \quad 1 \leq i \leq N. \quad (3.124)$$

Com esse resultado, estimemos o erro de solução $e^{[0]}$. Como

$$E_{i-\frac{1}{2}} = \frac{v_i - v_{i-1}}{L_{i-\frac{1}{2}}} - \mathbf{u}'(x_{i-\frac{1}{2}}), \quad (3.125)$$

segue que,

$$\begin{aligned} v_i &= v_{i-1} + u'_{i-\frac{1}{2}} L_{i-\frac{1}{2}} + E_{i-\frac{1}{2}} L_{i-\frac{1}{2}} \\ &= v_{i-2} + \left(u'_{i-\frac{3}{2}} L_{i-\frac{3}{2}} + u'_{i-\frac{1}{2}} L_{i-\frac{1}{2}} \right) + \left(E_{i-\frac{3}{2}} L_{i-\frac{3}{2}} + E_{i-\frac{1}{2}} L_{i-\frac{1}{2}} \right) \\ &= \dots = v_1 + \sum_{j=2}^i u'_{j-\frac{1}{2}} L_{j-\frac{1}{2}} + \sum_{j=2}^i E_{j-\frac{1}{2}} L_{j-\frac{1}{2}} \\ &= v_0 + \sum_{j=1}^i u'_{j-\frac{1}{2}} L_{j-\frac{1}{2}} + \sum_{j=1}^i E_{j-\frac{1}{2}} L_{j-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.126)$$

Como $\sum_{j=1}^i u'_{j-\frac{1}{2}} L_{j-\frac{1}{2}}$ é uma aproximação pelo ponto médio de $\int_{x_0}^{x_i} \mathbf{u}'(x) dx$, cujo erro é $O(\hbar^2)$, e como $E_{j-\frac{1}{2}} = O(L_{j-\frac{1}{2}}^2) + O(\hbar^2)$, obtemos

$$\begin{aligned} v_i &= v_0 + \sum_{j=1}^i u'_{j-\frac{1}{2}} L_{j-\frac{1}{2}} + \sum_{j=1}^i E_{j-\frac{1}{2}} L_{j-\frac{1}{2}} \\ &= v_0 + \left(\int_{x_0}^{x_i} \mathbf{u}'(x) dx + O(\hbar^2) \right) + O(\hbar^2) \\ &= v_0 - u_0 + u_i + O(\hbar^2), \end{aligned} \tag{3.127}$$

isto é,

$$e_i = e_0 + O(\hbar^2), \quad 1 \leq i \leq N. \tag{3.128}$$

Como $e_0 = 0$, temos que o erro de solução para $\mathbf{q}(x) = 0$ é,

$$\boxed{e_i = O(\hbar^2), \quad 1 \leq i \leq N-1.} \tag{3.129}$$

Notemos que, para este caso, $e_0 = 0$, $e_N = 0$, $e_1 = O(L_{\frac{1}{2}}^3)$ e $e_{N-1} = O(L_{N-\frac{1}{2}}^3)$.

Os demais casos correspondentes às outras condições de contorno são tratados de modo inteiramente análogo, ver [10] para uma discussão detalhada.

3.3 Análise dos Erros de Solução e de Derivada de Primeira Ordem para $\mathbf{q}(x) \geq 0$

Os resultados aqui são inteiramente análogos aos da *Seção 2.3* referente ao método mimético. Sendo $\mathbf{u}^{[\mathbf{q}]}(x)$ a solução do problema (3.1)-(3.3) para dada função $\mathbf{q}(x) \in C^0([a, b])$ não negativa e denotando por $v^{[\mathbf{q}]}$ a aproximação de elementos finitos correspondente, dada por (3.5), (3.19), (3.28) e (3.34), definimos os erros de solução

$$e_i^{[\mathbf{q}]} = v_i^{[\mathbf{q}]} - \mathbf{u}^{[\mathbf{q}]}(x_i), \quad 0 \leq i \leq N, \quad (3.130)$$

e de derivada

$$E_{i-\frac{1}{2}}^{[\mathbf{q}]} = \frac{v_i^{[\mathbf{q}]} - v_{i-1}^{[\mathbf{q}]}}{L_{i-\frac{1}{2}}} - \frac{d\mathbf{u}^{[\mathbf{q}]}}{dx}(x_{i-\frac{1}{2}}), \quad 1 \leq i \leq N, \quad (3.131)$$

obtendo-se o seguinte resultado cuja prova é análoga à prova do *Teorema 2.1*.

Teorema 3.1. *Na notação acima, tem-se*

$$e_i^{[\mathbf{q}]} = e_i^{[0]} + O(\hbar^2), \quad 0 \leq i \leq N, \quad (3.132)$$

e

$$E_{i-\frac{1}{2}}^{[\mathbf{q}]} = E_{i-\frac{1}{2}}^{[0]} + O(\hbar^2), \quad 1 \leq i \leq N, \quad (3.133)$$

uniformemente em i , onde $e^{[0]}$, $E^{[0]}$ denotam respectivamente os erros de solução e de derivada correspondentes ao caso $\mathbf{q}(x) = 0$.

3.4 Análise do Erro da Derivada de Segunda Ordem

Analisemos em primeiro lugar $\mathcal{D}(E)_i$, com $1 \leq i \leq N-1$. Sabemos que o erro da derivada de primeira ordem é dado por

$$E_{i-\frac{1}{2}} = (\mathcal{G}e)_{i-\frac{1}{2}} + \tau_{\mathcal{G}}(\mathbf{u})_{i-\frac{1}{2}}, \quad (3.134)$$

onde

$$\begin{aligned} \tau_{\mathcal{G}}(\mathbf{u})_{i-\frac{1}{2}} &= (\mathcal{G}u)_{i-\frac{1}{2}} - u'_{i-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{u_i - u_{i-1}}{L_{i-\frac{1}{2}}} - u'_{i-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{24} u'''_{i-\frac{1}{2}} L_{i-\frac{1}{2}}^2 + O(L_{i-\frac{1}{2}}^3). \end{aligned} \quad (3.135)$$

Multiplicando (3.134) por $\bar{k}_{i-\frac{1}{2}}$, obtemos

$$\bar{k}_{i-\frac{1}{2}} E_{i-\frac{1}{2}} = \bar{k}_{i-\frac{1}{2}} (\mathcal{G}e)_{i-\frac{1}{2}} + \bar{k}_{i-\frac{1}{2}} \tau_{\mathcal{G}}(\mathbf{u})_{i-\frac{1}{2}}, \quad (3.136)$$

e isto implica

$$\mathcal{D}(\bar{k} \cdot E)_i = \mathcal{D}(\bar{k} \cdot \mathcal{G}e)_i + \mathcal{D}(\bar{k} \cdot \tau_{\mathcal{G}}(\mathbf{u}))_i. \quad (3.137)$$

Esta última implicação é válida, pois subtraindo (3.136) da equação $\bar{k}_{i+\frac{1}{2}} E_{i+\frac{1}{2}} = \bar{k}_{i+\frac{1}{2}} (\mathcal{G}e)_{i+\frac{1}{2}} + \bar{k}_{i+\frac{1}{2}} \tau_{\mathcal{G}}(\mathbf{u})_{i+\frac{1}{2}}$, chegamos a

$$\begin{aligned} \frac{\bar{k}_{i+\frac{1}{2}} E_{i+\frac{1}{2}} - \bar{k}_{i-\frac{1}{2}} E_{i-\frac{1}{2}}}{h_i} &= \frac{\bar{k}_{i+\frac{1}{2}} (\mathcal{G}e)_{i+\frac{1}{2}} - \bar{k}_{i-\frac{1}{2}} (\mathcal{G}e)_{i-\frac{1}{2}}}{h_i} \\ &\quad + \frac{\bar{k}_{i+\frac{1}{2}} \tau_{\mathcal{G}}(\mathbf{u})_{i+\frac{1}{2}} - \bar{k}_{i-\frac{1}{2}} \tau_{\mathcal{G}}(\mathbf{u})_{i-\frac{1}{2}}}{h_i}, \end{aligned} \quad (3.138)$$

que é o mesmo que (3.137). Agora,

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(\bar{k} \cdot \tau_{\mathcal{G}}(\mathbf{u}))_i &= \frac{\bar{k}_{i+\frac{1}{2}} \tau_{\mathcal{G}}(\mathbf{u})_{i+\frac{1}{2}} - \bar{k}_{i-\frac{1}{2}} \tau_{\mathcal{G}}(\mathbf{u})_{i-\frac{1}{2}}}{h_i} \\
&= \frac{\bar{k}_{i+\frac{1}{2}} - \bar{k}_{i-\frac{1}{2}}}{h_i} \tau_{\mathcal{G}}(\mathbf{u})_{i+\frac{1}{2}} + \bar{k}_{i-\frac{1}{2}} \frac{\tau_{\mathcal{G}}(\mathbf{u})_{i+\frac{1}{2}} - \tau_{\mathcal{G}}(\mathbf{u})_{i-\frac{1}{2}}}{h_i} \\
&= \mathcal{D}(\bar{k})_i \cdot \tau_{\mathcal{G}}(\mathbf{u})_{i+\frac{1}{2}} + \bar{k}_{i-\frac{1}{2}} \cdot \mathcal{D}(\tau_{\mathcal{G}}(\mathbf{u}))_i \\
&= \left(k'_i + O(L_{i-\frac{1}{2}}) + O(L_{i+\frac{1}{2}}) \right) \left(\frac{1}{24} u'''_{i+\frac{1}{2}} L_{i+\frac{1}{2}}^2 + O(L_{i+\frac{1}{2}}^3) \right) \\
&\quad + \left(k_i - \frac{1}{2} k'_i L_{i-\frac{1}{2}} + O(L_{i-\frac{1}{2}}^2) \right) \\
&\quad \left(\frac{1}{12} u'''_i (L_{i+\frac{1}{2}} - L_{i-\frac{1}{2}}) + O(L_{i-\frac{1}{2}}^2) + O(L_{i+\frac{1}{2}}^2) \right),
\end{aligned} \tag{3.139}$$

visto que

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(\bar{k})_i &= \frac{\bar{k}_{i+\frac{1}{2}} - \bar{k}_{i-\frac{1}{2}}}{h_i} \\
&= \frac{1}{h_i} \left(\frac{1}{L_{i+\frac{1}{2}}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \mathbf{k}(x) dx - \frac{1}{L_{i-\frac{1}{2}}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \mathbf{k}(x) dx \right) \\
&= \frac{1}{h_i} \left(\left[k_i + \frac{1}{2} k'_i L_{i+\frac{1}{2}} + O(L_{i+\frac{1}{2}}^2) \right] - \left[k_i - \frac{1}{2} k'_i L_{i-\frac{1}{2}} + O(L_{i-\frac{1}{2}}^2) \right] \right) \\
&= k'_i + O(L_{i-\frac{1}{2}}) + O(L_{i+\frac{1}{2}}),
\end{aligned} \tag{3.140}$$

$$\bar{k}_{i-\frac{1}{2}} = \frac{1}{L_{i-\frac{1}{2}}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \mathbf{k}(x) dx = k_i - \frac{1}{2} k'_i L_{i-\frac{1}{2}} + O(L_{i-\frac{1}{2}}^2), \tag{3.141}$$

$$\bar{k}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{L_{i+\frac{1}{2}}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \mathbf{k}(x) dx = k_i + \frac{1}{2} k'_i L_{i+\frac{1}{2}} + O(L_{i+\frac{1}{2}}^2), \tag{3.142}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(\tau_{\mathcal{G}}(\mathbf{u}))_i &= \frac{1}{h_i} \left(\tau_{\mathcal{G}}(\mathbf{u})_{i+\frac{1}{2}} - \tau_{\mathcal{G}}(\mathbf{u})_{i-\frac{1}{2}} \right) \\
&= \frac{1}{h_i} \left[\left(\frac{1}{24} u_{i+\frac{1}{2}}''' L_{i+\frac{1}{2}}^2 + O(L_{i+\frac{1}{2}}^3) \right) - \left(\frac{1}{24} u_{i-\frac{1}{2}}''' L_{i-\frac{1}{2}}^2 + O(L_{i-\frac{1}{2}}^3) \right) \right] \\
&= \frac{1}{24} u_i''' \frac{L_{i+\frac{1}{2}}^2 - L_{i-\frac{1}{2}}^2}{h_i} + O(L_{i-\frac{1}{2}}^2) + O(L_{i+\frac{1}{2}}^2) \\
&= \frac{1}{12} u_i''' \left(L_{i+\frac{1}{2}} - L_{i-\frac{1}{2}} \right) + O(L_{i-\frac{1}{2}}^2) + O(L_{i+\frac{1}{2}}^2), \quad 1 \leq i \leq N-1.
\end{aligned} \tag{3.143}$$

Lembremos que $-\mathcal{D}(\bar{k} \cdot \mathcal{G}e) + q * e = -\tau(\mathbf{u})$, ou seja, $\mathcal{D}(\bar{k} \cdot \mathcal{G}e) = q * e + \tau(\mathbf{u})$, onde $q * e = O(\hbar^2)$, uma vez que $e_i = O(\hbar^2)$, e $\tau(\mathbf{u})_i = \frac{1}{6} k_i' u_i'' (L_{i+\frac{1}{2}} - L_{i-\frac{1}{2}}) + O(L_{i-\frac{1}{2}}^2) + O(L_{i+\frac{1}{2}}^2)$, com $1 \leq i \leq N-1$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(\bar{k} \cdot \mathcal{G}e)_i &= \frac{1}{6} k_i' u_i'' \left(L_{i+\frac{1}{2}} - L_{i-\frac{1}{2}} \right) \\
&\quad + O(L_{i-\frac{1}{2}}^2) + O(L_{i+\frac{1}{2}}^2) + O(\hbar^2), \quad 1 \leq i \leq N-1,
\end{aligned} \tag{3.144}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(\bar{k} \cdot \tau_{\mathcal{G}}(\mathbf{u}))_i &= \frac{1}{12} k_i u_i''' \left(L_{i+\frac{1}{2}} - L_{i-\frac{1}{2}} \right) \\
&\quad + O(L_{i-\frac{1}{2}}^2) + O(L_{i+\frac{1}{2}}^2), \quad 1 \leq i \leq N-1.
\end{aligned} \tag{3.145}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(\bar{k} \cdot E)_i &= \mathcal{D}(\bar{k} \cdot \mathcal{G}e)_i + \mathcal{D}(\bar{k} \cdot \tau_{\mathcal{G}}(\mathbf{u}))_i \\
&= \frac{1}{6} \left(k_i' u_i'' + \frac{1}{2} k_i u_i''' \right) \left(L_{i+\frac{1}{2}} - L_{i-\frac{1}{2}} \right) + O(L_{i-\frac{1}{2}}^2) + O(L_{i+\frac{1}{2}}^2) + O(\hbar^2),
\end{aligned} \tag{3.146}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(\bar{k} \cdot E)_i &= \frac{1}{6} \left(k_i' u_i'' + \frac{1}{2} k_i u_i''' \right) \left(L_{i+\frac{1}{2}} - L_{i-\frac{1}{2}} \right) \\
&\quad + O(L_{i-\frac{1}{2}}^2) + O(L_{i+\frac{1}{2}}^2) + O(\hbar^2), \quad 1 \leq i \leq N-1.
\end{aligned} \tag{3.147}$$

Como $\mathcal{D}(\bar{k} \cdot E)_i = \mathcal{D}(\bar{k})_i E_{i+\frac{1}{2}} + \bar{k}_{i-\frac{1}{2}} (\mathcal{D}E)_i$, com $\mathcal{D}(\bar{k})_i = O(1)$ e $E_{i+\frac{1}{2}} = O(L_{i+\frac{1}{2}}^2) + O(\hbar^2)$, obtemos

$$\begin{aligned} \bar{k}_{i-\frac{1}{2}} (\mathcal{D}E)_i &= \frac{1}{6} \left(k'_i u''_i + \frac{1}{2} k_i u'''_i \right) \left(L_{i+\frac{1}{2}} - L_{i-\frac{1}{2}} \right) \\ &\quad + O(L_{i-\frac{1}{2}}^2) + O(L_{i+\frac{1}{2}}^2) + O(\hbar^2), \quad 1 \leq i \leq N-1, \end{aligned} \quad (3.148)$$

e como $\bar{k}_{i-\frac{1}{2}} = k_i - \frac{1}{2} k'_i L_{i-\frac{1}{2}} + O(L_{i-\frac{1}{2}}^2)$, segue que

$$\boxed{\begin{aligned} (\mathcal{D}E)_i &= \frac{1}{6} \left(\frac{k'_i}{k_i} u''_i + \frac{1}{2} u'''_i \right) \left(L_{i+\frac{1}{2}} - L_{i-\frac{1}{2}} \right) \\ &\quad + O(L_{i-\frac{1}{2}}^2) + O(L_{i+\frac{1}{2}}^2) + O(\hbar^2), \quad 1 \leq i \leq N-1. \end{aligned}} \quad (3.149)$$

(Comparemos com o resultado $E_{i-\frac{1}{2}} = \frac{1}{12} \left(\frac{k'_{i-\frac{1}{2}}}{k_{i-\frac{1}{2}}} u''_{i-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} u'''_{i-\frac{1}{2}} \right) L_{i-\frac{1}{2}}^2 + O(\hbar^2)$, $1 \leq i \leq N$).

Notemos também que $\mathcal{D}(\bar{k} \cdot \mathcal{G}e)_i = \mathcal{D}(\bar{k})_i (\mathcal{G}e)_{i+\frac{1}{2}} + \bar{k}_{i-\frac{1}{2}} \mathcal{D}(\mathcal{G}e)_i$, com $\mathcal{D}(\bar{k} \cdot \mathcal{G}e)_i = \frac{1}{6} k'_i u''_i (L_{i+\frac{1}{2}} - L_{i-\frac{1}{2}}) + O(L_{i-\frac{1}{2}}^2) + O(L_{i+\frac{1}{2}}^2) + O(\hbar^2)$, $\mathcal{D}(\bar{k})_i = O(1)$, $(\mathcal{G}e)_{i+\frac{1}{2}} = O(L_{i+\frac{1}{2}}^2) + O(\hbar^2)$ e $\bar{k}_{i-\frac{1}{2}} = k_i + O(L_{i-\frac{1}{2}})$, e portanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathcal{G}e)_i &= \frac{1}{6} \frac{k'_i}{k_i} u''_i \left(L_{i+\frac{1}{2}} - L_{i-\frac{1}{2}} \right) \\ &\quad + O(L_{i-\frac{1}{2}}^2) + O(L_{i+\frac{1}{2}}^2) + O(\hbar^2), \quad 1 \leq i \leq N-1. \end{aligned} \quad (3.150)$$

Alternativamente, (3.150) pode ser mostrada da seguinte forma,

$$\begin{aligned} E_{i-\frac{1}{2}} &= (\mathcal{G}e)_{i-\frac{1}{2}} + \tau_{\mathcal{G}}(\mathbf{u})_{i-\frac{1}{2}} \Rightarrow \\ (\mathcal{D}E)_i &= \mathcal{D}(\mathcal{G}e)_i + \mathcal{D}(\tau_{\mathcal{G}}(\mathbf{u}))_i \Rightarrow \\ \mathcal{D}(\mathcal{G}e)_i &= (\mathcal{D}E)_i - \mathcal{D}(\tau_{\mathcal{G}}(\mathbf{u}))_i, \quad 1 \leq i \leq N-1. \end{aligned} \quad (3.151)$$

Por (3.143) e (3.149), chegamos à (3.150), ou seja,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathcal{G}e)_i &= \frac{1}{6} \frac{k'_i}{k_i} u''_i \left(L_{i+\frac{1}{2}} - L_{i-\frac{1}{2}} \right) \\ &\quad + O(L_{i-\frac{1}{2}}^2) + O(L_{i+\frac{1}{2}}^2) + O(\hbar^2), \quad 1 \leq i \leq N-1. \end{aligned} \quad (3.152)$$

Façamos agora a análise do erro da derivada de segunda ordem, $\mathbb{E}_i = \mathcal{D}(\mathcal{G}v)_i - u_i''$. Para $1 \leq i \leq N - 1$ temos,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_i &= \frac{1}{h_i} \left(\frac{v_{i+1} - v_i}{L_{i+\frac{1}{2}}} - \frac{v_i - v_{i-1}}{L_{i-\frac{1}{2}}} \right) - u_i'' \\
&= \frac{1}{h_i} \left((\mathcal{G}v)_{i+\frac{1}{2}} - (\mathcal{G}v)_{i-\frac{1}{2}} \right) - u_i'' \\
&= \mathcal{D}(\mathcal{G}v)_i - u_i'' \\
&= \mathcal{D}(\mathcal{G}(v - u) + \mathcal{G}u)_i - u_i'' \\
&= \mathcal{D}(\mathcal{G}e)_i + \mathcal{D}(\mathcal{G}u)_i - u_i'',
\end{aligned} \tag{3.153}$$

onde, por expansão de *Taylor*,

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(\mathcal{G}u)_i - u_i'' &= \frac{1}{h_i} \left[\left(u_i' + \frac{1}{2} u_i'' L_{i+\frac{1}{2}} + \frac{1}{6} u_i''' L_{i+\frac{1}{2}}^2 + O(L_{i+\frac{1}{2}}^3) \right) \right. \\
&\quad \left. - \left(u_i' - \frac{1}{2} u_i'' L_{i-\frac{1}{2}} + \frac{1}{6} u_i''' L_{i-\frac{1}{2}}^2 + O(L_{i-\frac{1}{2}}^3) \right) \right] - u_i'' \\
&= \frac{1}{3} u_i''' \left(L_{i+\frac{1}{2}} - L_{i-\frac{1}{2}} \right) + O(L_{i-\frac{1}{2}}^2) + O(L_{i+\frac{1}{2}}^2), \quad 1 \leq i \leq N - 1.
\end{aligned} \tag{3.154}$$

Utilizando (3.152) e (3.154), chegamos a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_i &= \mathcal{D}(\mathcal{G}e)_i + \mathcal{D}(\mathcal{G}u)_i - u_i'' \\
&= \left[\frac{1}{6} \frac{k_i'}{k_i} u_i'' \left(L_{i+\frac{1}{2}} - L_{i-\frac{1}{2}} \right) + O(L_{i-\frac{1}{2}}^2) + O(L_{i+\frac{1}{2}}^2) + O(\hbar^2) \right] \\
&\quad + \left[\frac{1}{3} u_i''' \left(L_{i+\frac{1}{2}} - L_{i-\frac{1}{2}} \right) + O(L_{i-\frac{1}{2}}^2) + O(L_{i+\frac{1}{2}}^2) \right],
\end{aligned} \tag{3.155}$$

isto é,

$$\boxed{
\begin{aligned}
\mathbb{E}_i &= \left(\frac{1}{6} \frac{k_i'}{k_i} u_i'' + \frac{1}{3} u_i''' \right) \left(L_{i+\frac{1}{2}} - L_{i-\frac{1}{2}} \right) \\
&\quad + O(L_{i-\frac{1}{2}}^2) + O(L_{i+\frac{1}{2}}^2) + O(\hbar^2), \quad 1 \leq i \leq N - 1.
\end{aligned}
} \tag{3.156}$$

3.5 Resultados Numéricos

Neste capítulo vimos que, utilizando a discretização pelo método de elementos finitos de segunda ordem para o problema de *Sturm-Liouville* com condições de contorno separáveis,

$$-\frac{d}{dx} \left(\mathbf{k}(x) \frac{d\mathbf{u}}{dx} \right) + \mathbf{q}(x) \mathbf{u}(x) = \mathbf{f}(x), \quad a < x < b, \quad (3.157)$$

$$\alpha_0 \mathbf{u}(a) - \alpha_1 \mathbf{k}(a) \mathbf{u}'(a) = \gamma_a, \quad (3.158)$$

$$\beta_0 \mathbf{u}(b) + \beta_1 \mathbf{k}(b) \mathbf{u}'(b) = \gamma_b, \quad (3.159)$$

onde $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, \gamma_a$ e γ_b são constantes dadas satisfazendo $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1 \geq 0$, $\alpha_0 + \alpha_1 > 0$, $\beta_0 + \beta_1 > 0$ e $\alpha_0 + \beta_0 > 0$, e onde $\mathbf{k}(x)$, $\mathbf{q}(x)$ e $\mathbf{f}(x)$ são funções suaves dadas, com $\mathbf{k}(x) > 0$ e $\mathbf{q}(x) \geq 0$ para todo x no intervalo $[a, b]$, chegamos aos seguintes resultados para os erros de solução, derivada de primeira ordem e derivada de segunda ordem, respectivamente,

$$e_i = O(\hbar^2), \quad 0 \leq i \leq N, \quad (3.160)$$

$$E_{i-\frac{1}{2}} = \frac{1}{12} \left(\frac{k'_{i-\frac{1}{2}}}{k_{i-\frac{1}{2}}} u''_{i-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} u'''_{i-\frac{1}{2}} \right) L_{i-\frac{1}{2}}^2 + O(\hbar^2), \quad 1 \leq i \leq N, \quad (3.161)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_i &= \left(\frac{1}{6} \frac{k'_i}{k_i} u''_i + \frac{1}{3} u'''_i \right) \left(L_{i+\frac{1}{2}} - L_{i-\frac{1}{2}} \right) \\ &+ O(L_{i-\frac{1}{2}}^2) + O(L_{i+\frac{1}{2}}^2) + O(\hbar^2), \quad 1 \leq i \leq N-1. \end{aligned} \quad (3.162)$$

Assim, as aproximações $\mathbf{v}(x_i)$ para os valores de solução $\mathbf{u}(x_i)$ são afetadas por erros globalmente relacionados com a distribuição dos pontos da malha. O erro da derivada de primeira ordem possui um termo local, determinado pelos comprimentos locais $L_{i-\frac{1}{2}}$, e um termo global. O erro da derivada de segunda ordem possui termos que dependem dos comprimentos locais $L_{i-\frac{1}{2}}$ e $L_{i+\frac{1}{2}}$, além de um termo global. Observemos que em malhas gerais o erro passa a ser de primeira ordem.

Vejamos alguns exemplos que ilustram estes resultados, utilizando malhas não-uniformes.

Exemplo 3.1. *Caso Dirichlet-Dirichlet*

Nas figuras (8a) e (8b) apresentamos os erros de solução e de derivada de primeira e segunda ordens para o problema de *Sturm-Liouville* (3.157), (3.158), (3.159), com $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 0$, $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 0$, $\mathbf{k}(x) = 1 + x^2$, $\mathbf{q}(x) = -5x^2$ e $\mathbf{u}(x) = 1 + \cos(x)$ no intervalo $[0, 1]$. Utilizamos uma malha não-uniforme, cujas células têm espaçamento $\frac{H}{(\frac{N}{2})^{0.5}}, \frac{H}{(\frac{N}{2}-1)^{0.5}}, \dots, \frac{H}{2^{0.5}}, H, H, \frac{H}{2^{0.5}}, \dots, \frac{H}{(\frac{N}{2}-1)^{0.5}}, \frac{H}{(\frac{N}{2})^{0.5}}$, onde $H = \frac{1}{N}$ e N é o número de células. Para uma malha de 100 células, os nodos são dados por

$$x_i = \begin{cases} 0 & \text{se } i = 0, \\ x_{i-1} + \frac{1}{100(51-i)^{0.5}} & \text{se } 1 \leq i \leq 50, \\ x_{i-1} + \frac{1}{100(i-50)^{0.5}} & \text{se } 51 \leq i \leq 100. \end{cases} \quad (3.163)$$

Nesta malha, $h^2 = 2.8099e - 004$.

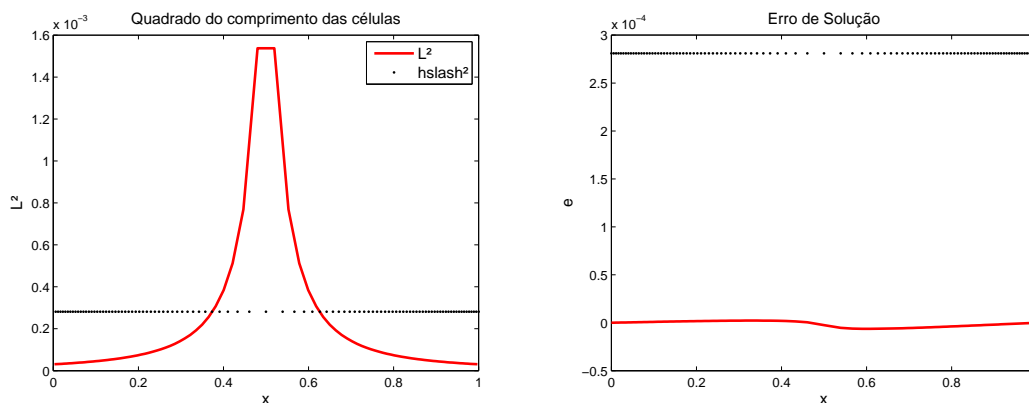


Figura 8a - Representação gráfica do erro de solução decorrente do FEM02 para o problema de *Sturm-Liouville* com condições de contorno de *Dirichlet-Dirichlet*.

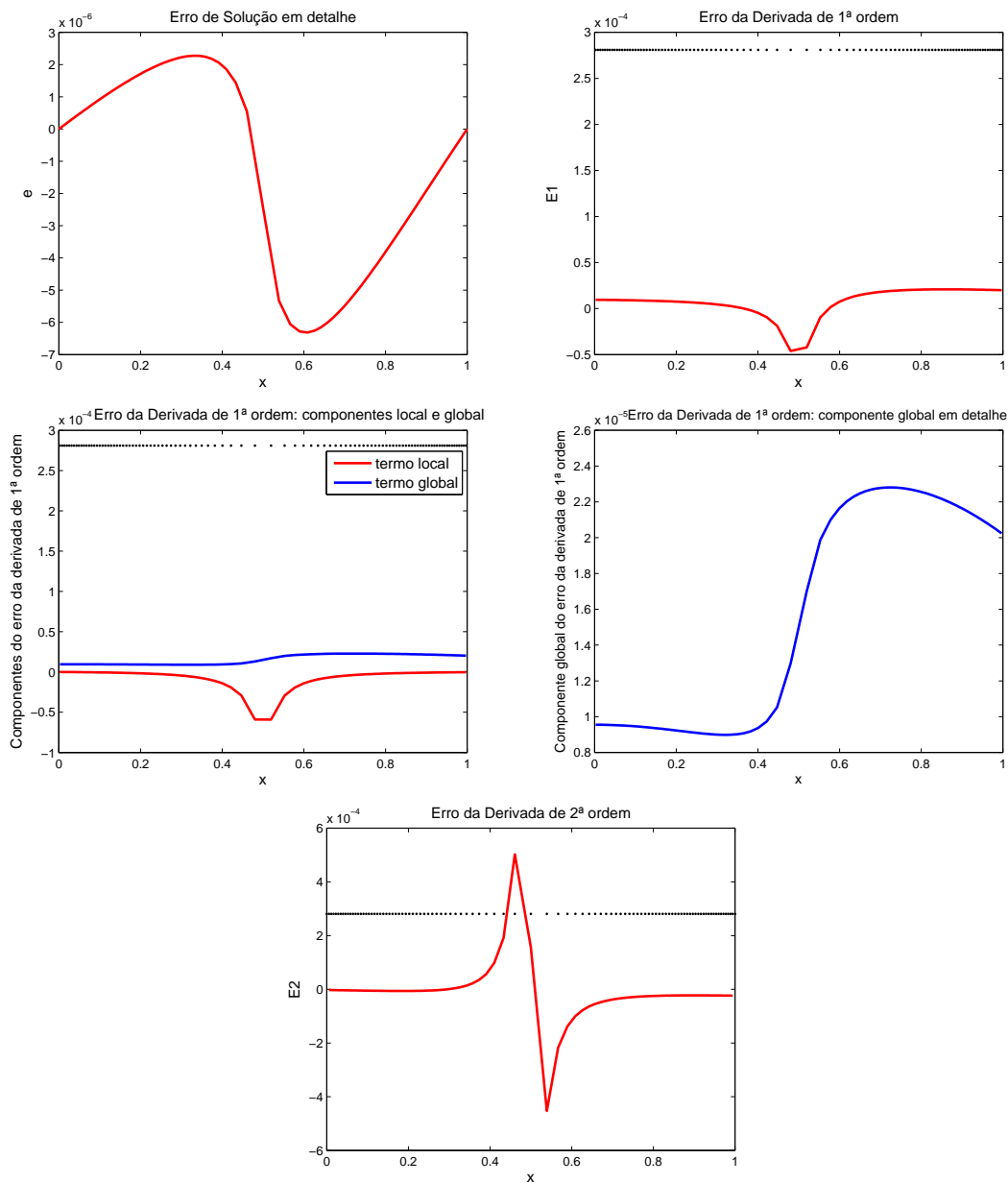


Figura 8b - Representação gráfica dos erros de solução e derivada de primeira e segunda ordens decorrentes do FEM02 para o problema de Sturm-Liouville com condições de contorno de Dirichlet-Dirichlet.

Para esta malha de 100 células, o algoritmo *fem02_dd.m* foi executado em 1.266681 segundos.

Exemplo 3.2. *Caso Dirichlet-Neumann*

Nas figuras (9a) e (9b) apresentamos os erros de solução e de derivada de primeira e segunda ordens para o problema de *Sturm-Liouville* (3.157), (3.158), (3.159), com $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 0$, $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = 1$, $\mathbf{k}(x) = 2 + \sin(x)$, $\mathbf{q}(x) = -\exp(x)$ e $\mathbf{u}(x) = x + \sin(x)$ no intervalo $[0, 1]$. Utilizamos uma malha não-uniforme, cujas células têm espaçamento $\frac{H}{(\frac{N}{2})^{0.9}}$, $\frac{H}{(\frac{N}{2}-1)^{0.9}}$, ..., $\frac{H}{2^{0.9}}$, H , H , $\frac{H}{2^{0.9}}$, ..., $\frac{H}{(\frac{N}{2}-1)^{0.9}}$, $\frac{H}{(\frac{N}{2})^{0.9}}$, onde $H = \frac{1}{N}$ e N é o número de células. Para este exemplo usamos $N = 100$, e os nodos são dados por

$$x_i = \begin{cases} 0 & \text{se } i = 0, \\ x_{i-1} + \frac{1}{100(51-i)^{0.9}} & \text{se } 1 \leq i \leq 50, \\ x_{i-1} + \frac{1}{100(i-50)^{0.9}} & \text{se } 51 \leq i \leq 100. \end{cases} \quad (3.164)$$

Nesta malha, $\bar{h}^2 = 0.0021$.

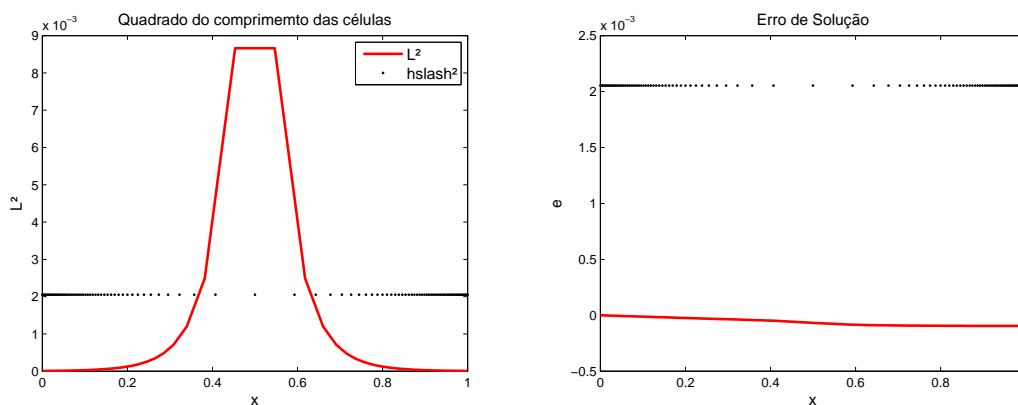


Figura 9a - Representação gráfica do erro de solução decorrente do FEM02 para o problema de *Sturm-Liouville* com condições de contorno de *Dirichlet-Neumann*.

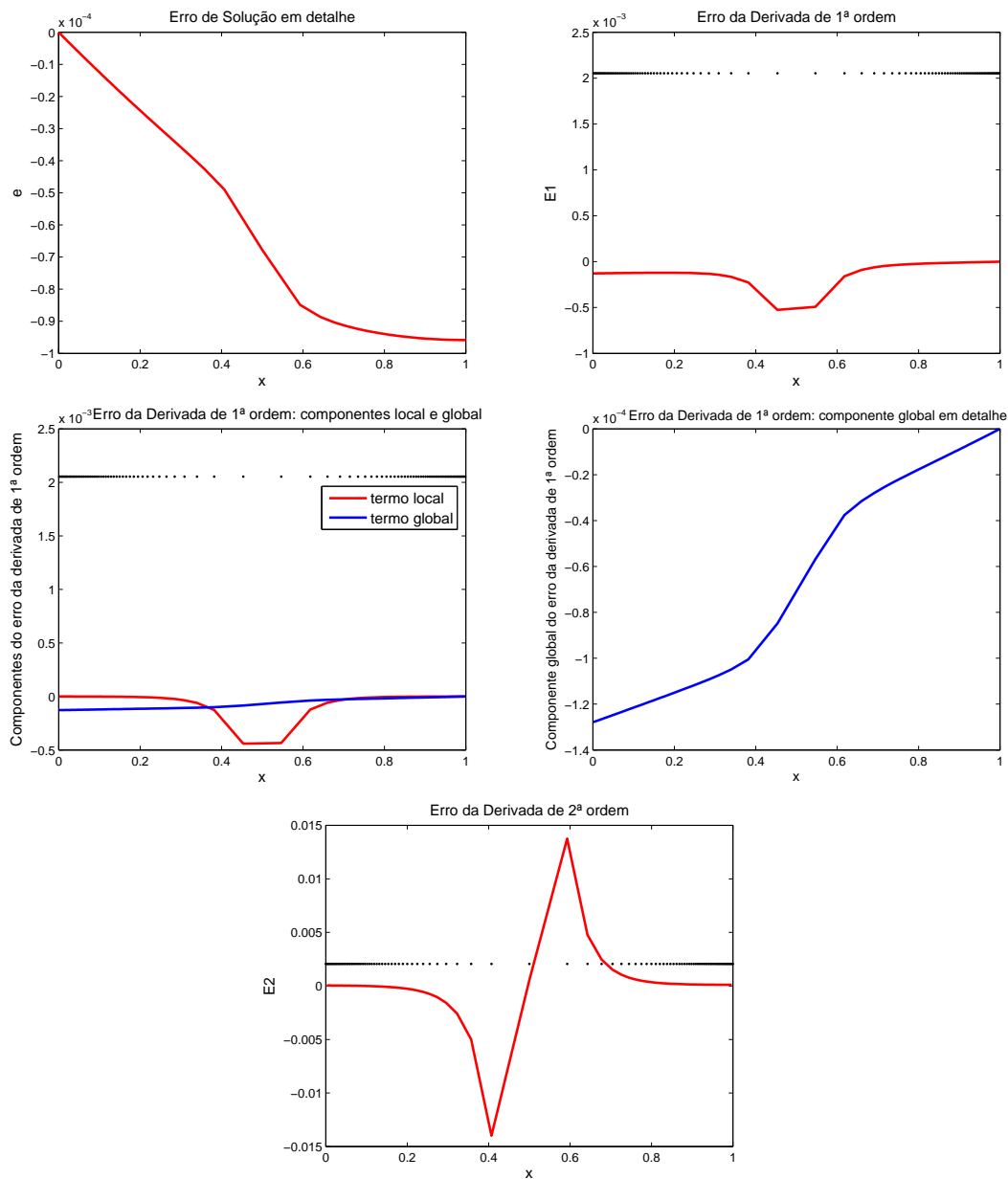


Figura 9b - Representação gráfica dos erros de solução e de derivada de primeira e segunda ordens decorrentes do FEM02 para o problema de Sturm-Liouville com condições de contorno de Dirichlet-Neumann.

Para esta malha de 100 células, o algoritmo *fem02_dr.m* foi executado em 1.280455 segundos.

Exemplo 3.3. *Caso Dirichlet-Robin*

Nas figuras (10a) e (10b) apresentamos os erros de solução e de derivada de primeira e segunda ordens para o problema de *Sturm-Liouville* (3.157), (3.158), (3.159), com $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 0$, $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 1$, $\mathbf{k}(x) = 3 + \cos(x)$, $\mathbf{q}(x) = -x^2$ e $\mathbf{u}(x) = 1 + \cos(x)$ no intervalo $[0, 1]$. Utilizamos uma malha não-uniforme, cujas células têm espaçamento $\frac{H}{(\frac{N}{4})^{0.5}}$, $\frac{H}{(\frac{N}{4}-1)^{0.5}}$, ..., H , H , ..., $\frac{H}{(\frac{N}{4}-1)^{0.5}}$, $\frac{H}{(\frac{N}{4})^{0.5}}$, $\frac{H}{(\frac{N}{4})^{0.5}}$, $\frac{H}{(\frac{N}{4}-1)^{0.5}}$, ..., H , H , ..., $\frac{H}{(\frac{N}{4}-1)^{0.5}}$, $\frac{H}{(\frac{N}{4})^{0.5}}$, onde $H = \frac{1}{N}$ e N é o número de células. Aqui $N = 100$ e os nodos são dados por

$$x_i = \begin{cases} 0 & \text{se } i = 0, \\ x_{i-1} + \frac{1}{100(26-i)^{0.5}} & \text{se } 1 \leq i \leq 25, \\ x_{i-1} + \frac{1}{100(i-25)^{0.5}} & \text{se } 26 \leq i \leq 50, \\ x_{i-1} + \frac{1}{100(76-i)^{0.5}} & \text{se } 51 \leq i \leq 75, \\ x_{i-1} + \frac{1}{100(i-75)^{0.5}} & \text{se } 76 \leq i \leq 100. \end{cases} \quad (3.165)$$

Nesta malha, $\tilde{h}^2 = 2.1482e - 004$.

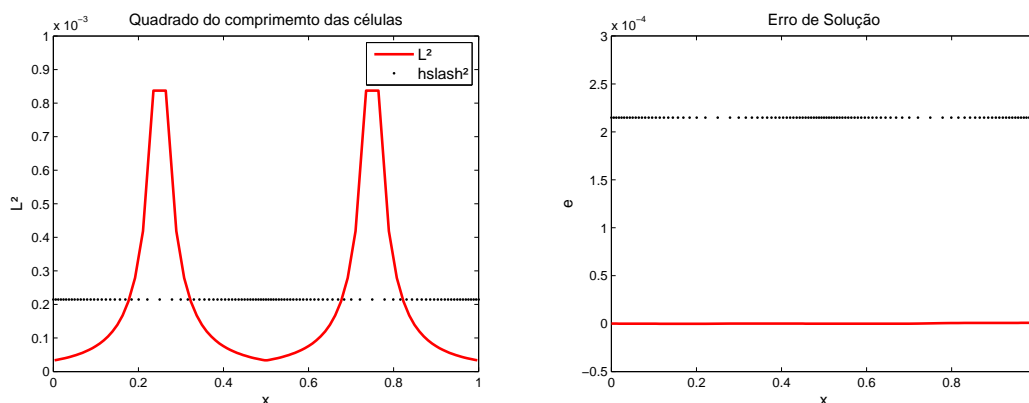


Figura 10a - Representação gráfica do erro de solução decorrente do FEM02 para o problema de *Sturm-Liouville* com condições de contorno de *Dirichlet-Robin*.

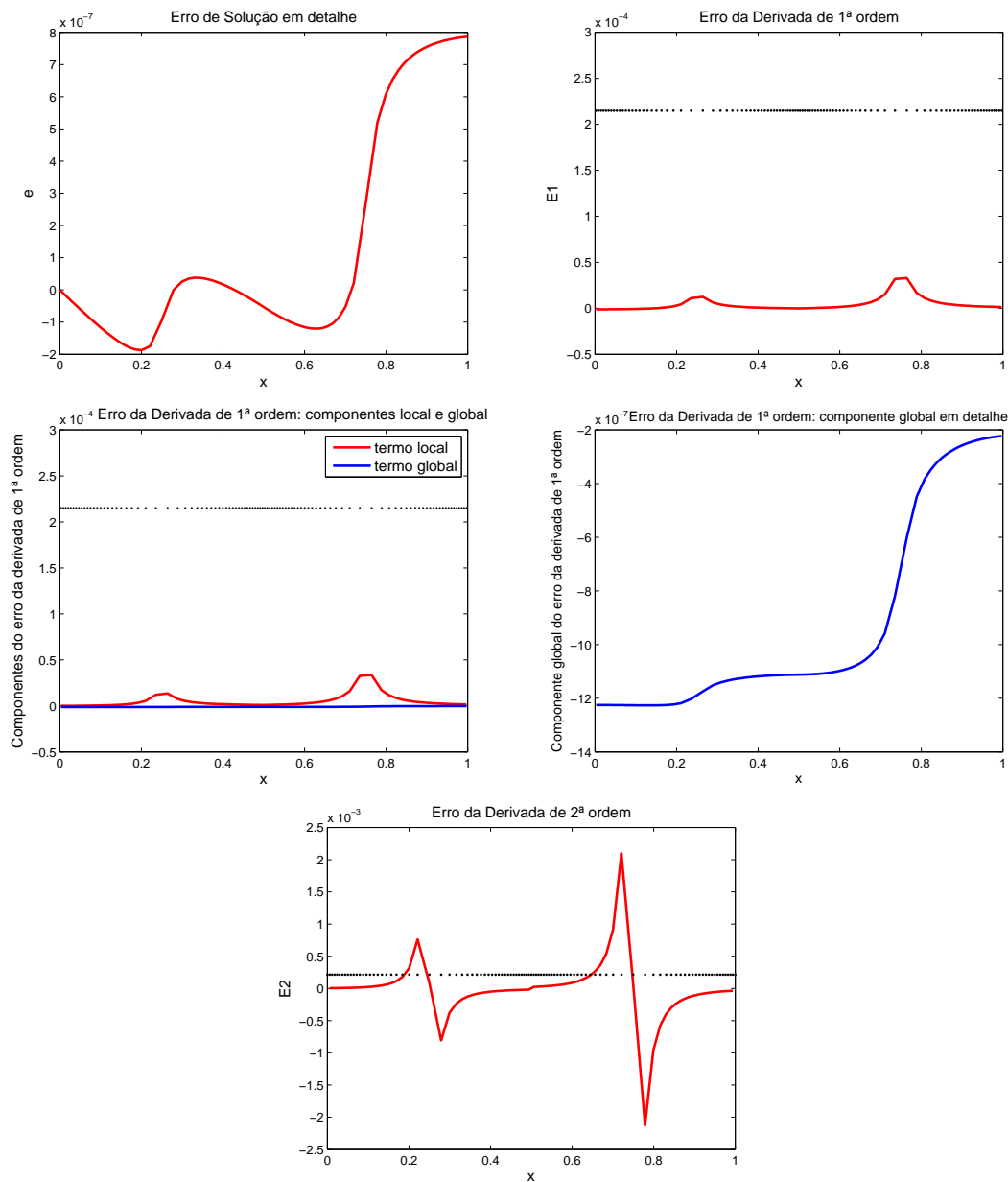


Figura 10b - Representação gráfica dos erros de solução e de derivada de primeira e segunda ordens decorrentes do FEM02 para o problema de Sturm-Liouville com condições de contorno de Dirichlet-Robin.

Para esta malha de 100 células, o algoritmo *fem02_dr.m* foi executado em 1.107904 segundos.

Exemplo 3.4. *Caso Neumann-Robin*

Nas figuras (11a) e (11b) apresentamos os erros de solução e de derivada de primeira e segunda ordens para o problema de *Sturm-Liouville* (3.157), (3.158), (3.159), com $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 1$, $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 1$, $\mathbf{k}(x) = 1 + x^2$, $\mathbf{q}(x) = -5x^2$ e $\mathbf{u}(x) = 3x + \cos(x)$ no intervalo $[0, 1]$. Utilizamos uma malha não-uniforme, cujas células têm espaçamento $\frac{H}{2}, \frac{H}{2}, 2H, \frac{H}{2}, \frac{H}{2}, 2H, \dots, \frac{H}{2}, \frac{H}{2}, 2H$, onde $H = \frac{1}{N}$ e N é o número de células. A malha utilizada aqui é de 100 células e os nodos são dados por

$$x_i = \begin{cases} 0 & \text{se } i = 0, \\ x_{i-1} + 2h & \text{se } i = 3j, \text{ com } 1 \leq j \leq 33, \\ x_{i-1} + \frac{h}{2} & \text{caso contrário, com } 1 \leq i \leq 100, \end{cases} \quad (3.166)$$

onde $h = \frac{1}{100}$. Nesta malha, $\hbar^2 = 2.7650e - 004$.

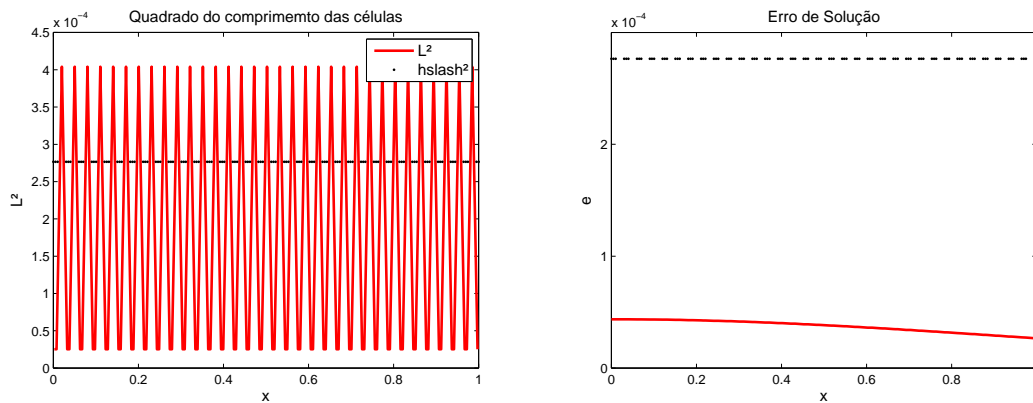


Figura 11a - Representação gráfica do erro de solução decorrente do FEM02 para o problema de *Sturm-Liouville* com condições de contorno de Neumann-Robin.

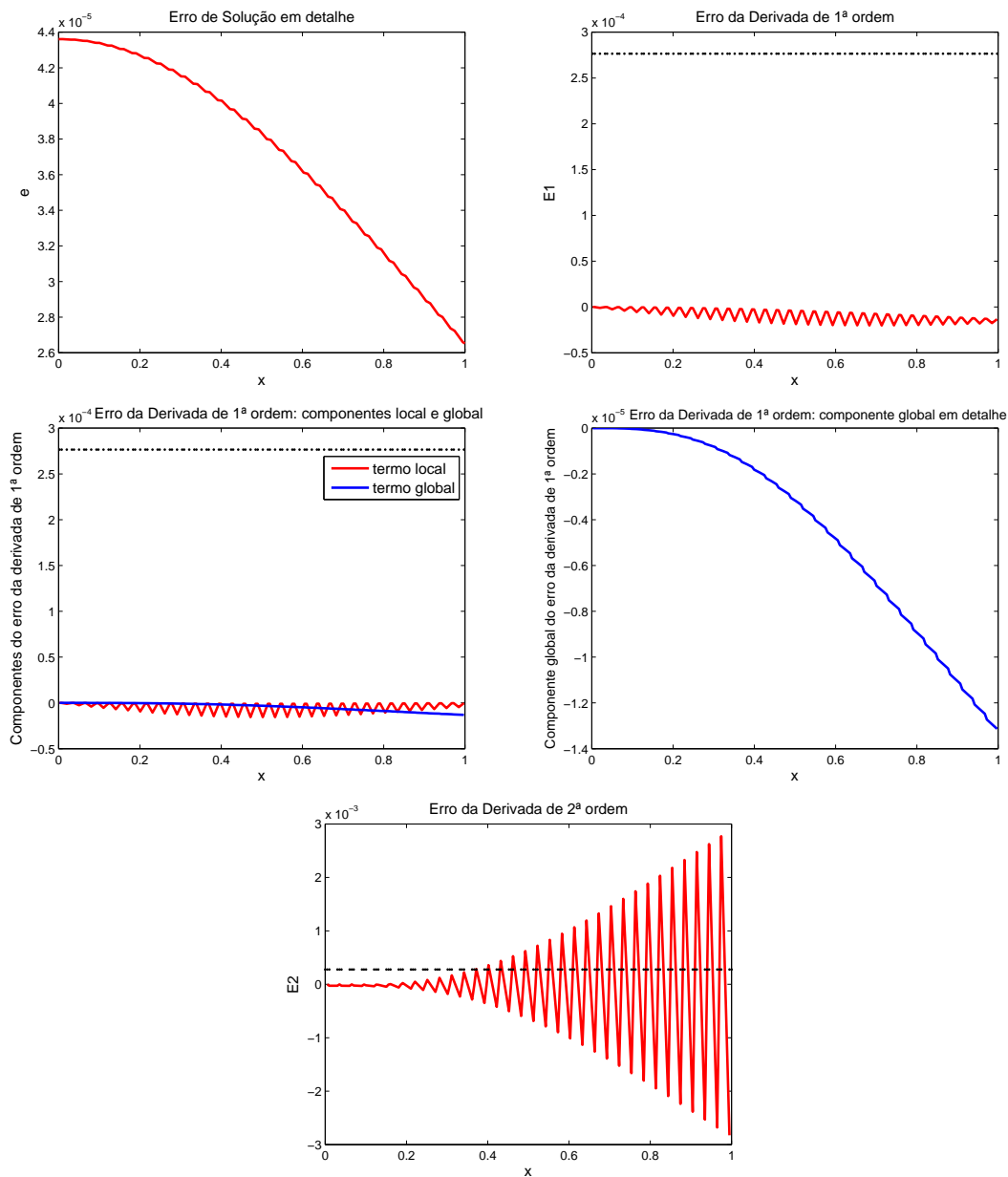


Figura 11b - Representação gráfica dos erros de solução e de derivada de primeira e segunda ordens decorrentes do FEM02 para o problema de Sturm-Liouville com condições de contorno de Neumann-Robin.

Para esta malha de 100 células, o algoritmo *fem02_rr.m* foi executado em 1.271416 segundos.

Exemplo 3.5. *Caso Robin-Robin*

Nas figuras (12a) e (12b) apresentamos os erros de solução e de derivada de primeira e segunda ordens para o problema de *Sturm-Liouville* (3.157), (3.158), (3.159), com $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 1$, $\mathbf{k}(x) = 1 + x^2$, $\mathbf{q}(x) = -x^3$ e $\mathbf{u}(x) = x + \cos(x)$ no intervalo $[0, 1]$. Utilizamos uma malha não-uniforme, cujas células têm espaçamento $H, H^2, H^2, H^2, H^2, H^2, H^2, H^2, H^2, H, H^2, H^2, H^2, H^2, H^2, H^2, H^2, H^2, \dots, H, H^2, H^2, H^2, H^2, H^2, H^2, H^2, H^2$, onde $H = \frac{1}{N}$ e N é o número de células. A malha utilizada aqui é de 500 células e os nodos são dados por

$$x_i = \begin{cases} 0 & \text{se } i = 0, \\ h & \text{se } i = 1, \\ x_{i-1} + h & \text{se } i = 10j, \text{ com } 1 \leq j \leq 50, \\ x_{i-1} + h^2 & \text{caso contrário, com } 2 \leq i < 500, \end{cases} \quad (3.167)$$

onde $h = \frac{1}{500}$. Nesta malha, $h^2 = 3.0418e - 004$.

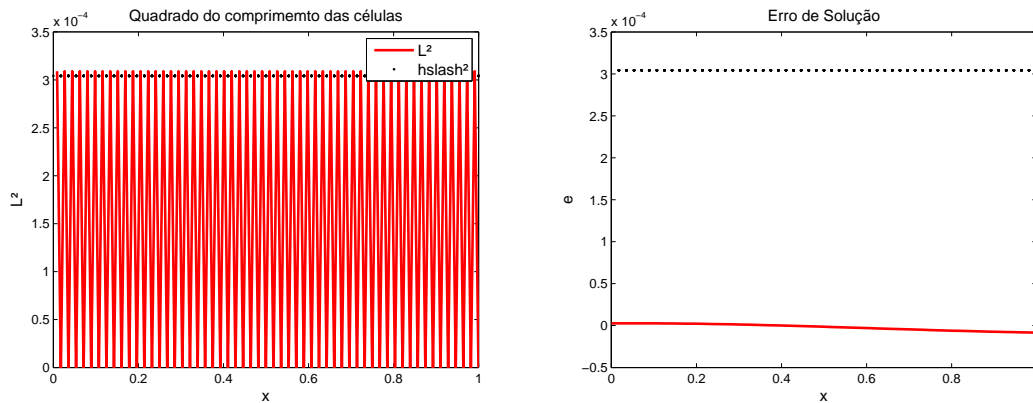


Figura 12a - Representação gráfica do erro de solução decorrente do FEM02 para o problema de *Sturm-Liouville* com condições de contorno de Robin-Robin.

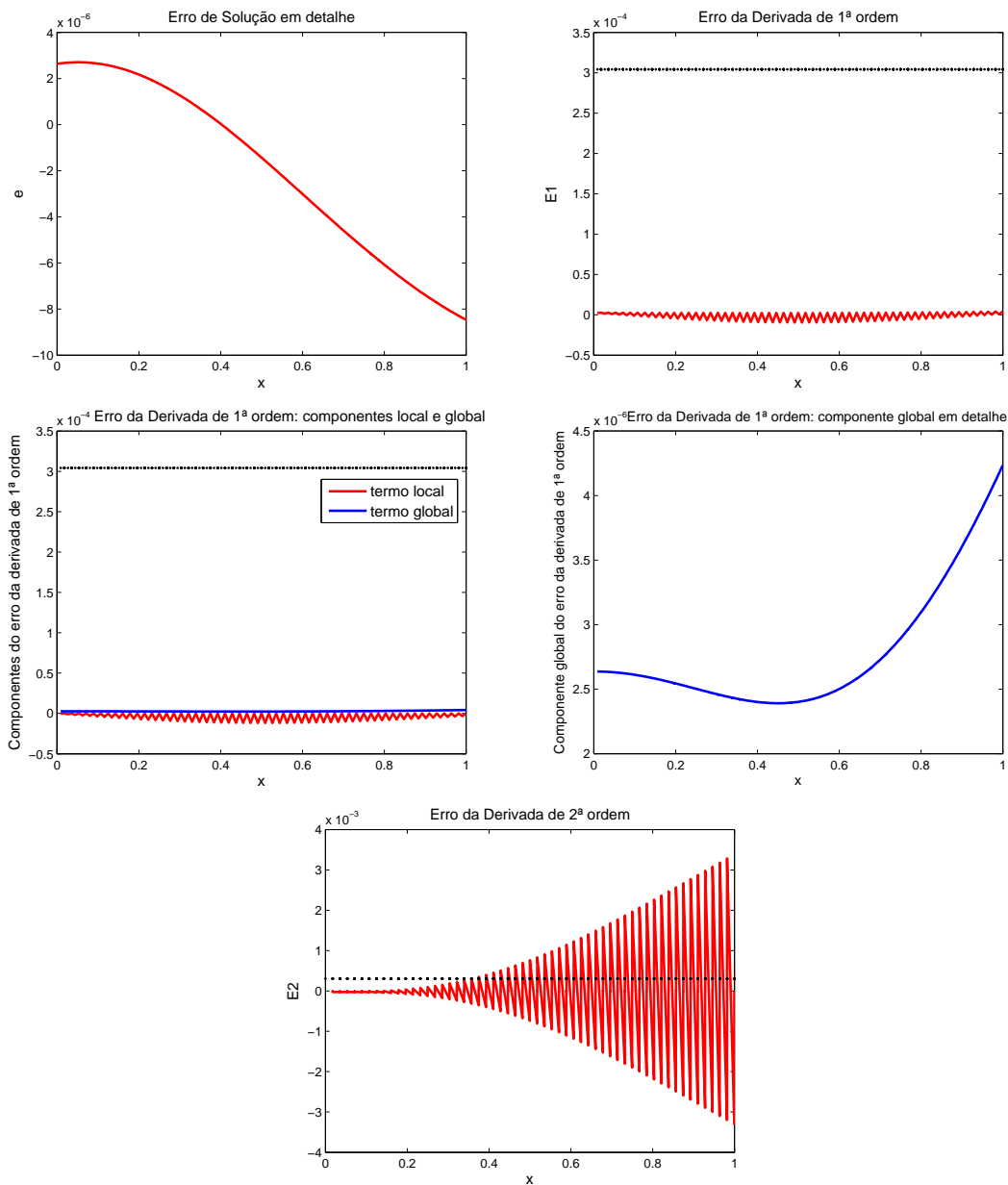


Figura 12b - Representação gráfica dos erros de solução e de derivada de primeira e segunda ordens decorrentes do FEM02 para o problema de Sturm-Liouville com condições de contorno de Robin-Robin.

Para esta malha de 500 células, o algoritmo *fem02_rr.m* foi executado em 5.866246 segundos.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo do texto, consideramos o problema regular de *Sturm-Liouville* com condições de contorno separáveis,

$$-\frac{d}{dx} \left(\mathbf{k}(x) \frac{d\mathbf{u}}{dx} \right) + \mathbf{q}(x) \mathbf{u}(x) = \mathbf{f}(x), \quad a < x < b, \quad (4.1)$$

$$\alpha_0 \mathbf{u}(a) - \alpha_1 \mathbf{k}(a) \mathbf{u}'(a) = \gamma_a, \quad (4.2)$$

$$\beta_0 \mathbf{u}(b) + \beta_1 \mathbf{k}(b) \mathbf{u}'(b) = \gamma_b, \quad (4.3)$$

com $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, \gamma_a$ e γ_b constantes dadas satisfazendo $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1 \geq 0$, $\alpha_0 + \alpha_1 > 0$, $\beta_0 + \beta_1 > 0$ e $\alpha_0 + \beta_0 > 0$, e onde $\mathbf{k}(x)$, $\mathbf{q}(x)$ e $\mathbf{f}(x)$ são funções suaves dadas, com $\mathbf{k}(x) > 0$ e $\mathbf{q}(x) \geq 0$ para todo x no intervalo $[a, b]$. Utilizando o divergente discreto (derivada primeira discreta)

$$(\mathcal{D}w)_{i-\frac{1}{2}} := \frac{w_i - w_{i-1}}{L_{i-\frac{1}{2}}}, \quad 1 \leq i \leq N, \quad (4.4)$$

e o gradiente discreto (derivada segunda discreta),

$$(\mathcal{G}z)_i := \frac{z_{i+\frac{1}{2}} - z_{i-\frac{1}{2}}}{h_i}, \quad 0 \leq i \leq N, \quad (4.5)$$

chegamos ao método mimético de segunda ordem (MIM02),

$$-\frac{k_{i-1}}{h_{i-1}} v_{i-\frac{3}{2}} + \left(\frac{k_{i-1}}{h_{i-1}} + \frac{k_i}{h_i} + q_{i-\frac{1}{2}} L_{i-\frac{1}{2}} \right) v_{i-\frac{1}{2}} - \frac{k_i}{h_i} v_{i+\frac{1}{2}} = L_{i-\frac{1}{2}} f_{i-\frac{1}{2}}, \quad (4.6)$$

cujos erro de truncamento é dado por

$$\begin{aligned} \tau(\mathbf{u})_{i-1/2} &= k_{i-1/2} u''_{i-1/2} \left(1 - \frac{h_i + h_{i-1}}{2L_{i-1/2}} \right) \\ &\quad - \frac{1}{6} K_{i-1/2} u'''_{i-1/2} \frac{h_i^2 - h_{i-1}^2}{L_{i-1/2}} \\ &\quad - \frac{1}{4} K'_{i-1/2} u''_{i-1/2} (h_i - h_{i-1}) \\ &\quad + O(L_{i-3/2}^2) + O(L_{i-1/2}^2) + O(L_{i+1/2}^2), \quad 1 \leq i \leq N, \end{aligned} \quad (4.7)$$

desde que $\mathbf{k} \in C^3([a, b])$ e $\mathbf{u} \in C^4([a, b])$.

Para este método encontramos que os erros de solução, de derivada de primeira ordem e de derivada de segunda ordem são dados, respectivamente, por

$$e_0 = O(\hbar^2), \quad e_N = O(\hbar^2), \quad (4.8)$$

$$e_{i-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{8} u''_{i-\frac{1}{2}} L_{i-\frac{1}{2}}^2 + O(\hbar^2), \quad 1 \leq i \leq N, \quad (4.9)$$

$$E_i = O(\hbar^2), \quad 0 \leq i \leq N, \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{i-\frac{1}{2}} &= O(L_{i-\frac{3}{2}}^2) + O(L_{i-\frac{1}{2}}^2) + O(L_{i+\frac{1}{2}}^2) + O(\hbar^2) \\ &+ \frac{L_{i+\frac{1}{2}}}{L_{i-\frac{1}{2}}} O(L_{i+\frac{1}{2}}^2) + \frac{L_{i-\frac{3}{2}}}{L_{i-\frac{1}{2}}} O(L_{i-\frac{3}{2}}^2) \quad 1 \leq i \leq N. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Por outro lado, para o método de elementos finitos de segunda ordem (FEM02),

$$-\frac{1}{h_i} \left(\bar{k}_{i+\frac{1}{2}} \frac{v_{i+1} - v_i}{L_{i+\frac{1}{2}}} - \bar{k}_{i-\frac{1}{2}} \frac{v_i - v_{i-1}}{L_{i-\frac{1}{2}}} \right) + (q * v)_i = \bar{f}_i, \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad (4.12)$$

tem-se que seu erro de truncamento é dado por

$$\tau(\mathbf{u})_i = \frac{1}{6} k'_i u''_i \left(L_{i+\frac{1}{2}} - L_{i-\frac{1}{2}} \right) + O(L_{i-\frac{1}{2}}^2) + O(L_{i+\frac{1}{2}}^2). \quad (4.13)$$

Para este método, os erros de solução, de derivada de primeira ordem e de derivada de segunda ordem são dados, respectivamente, por

$$e_i = O(\hbar^2), \quad 0 \leq i \leq N, \quad (4.14)$$

$$E_{i-\frac{1}{2}} = \frac{1}{12} \left(\frac{k'_{i-\frac{1}{2}}}{k_{i-\frac{1}{2}}} u''_{i-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} u'''_{i-\frac{1}{2}} \right) L_{i-\frac{1}{2}}^2 + O(\hbar^2), \quad 1 \leq i \leq N, \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_i &= \left(\frac{1}{6} \frac{k'_i}{k_i} u''_i + \frac{1}{3} u'''_i \right) \left(L_{i+\frac{1}{2}} - L_{i-\frac{1}{2}} \right) \\ &+ O(L_{i-\frac{1}{2}}^2) + O(L_{i+\frac{1}{2}}^2) + O(\hbar^2), \quad 1 \leq i \leq N-1. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Em ambos os casos, os termos $O(\hbar^2)$ tem tamanho limitado por $C\hbar^2$ para alguma constante positiva C que é dependente da solução $\mathbf{u}(x)$, mas é independente

de i ou da malha particular considerada, e onde \hbar é o parâmetro de espaçamento da malha dado por

$$\hbar = \sqrt{\sum_{j=1}^N L_{i-\frac{1}{2}}^3}. \quad (4.17)$$

Nas figuras 13a e 13b usamos $\mathbf{k}(x) = 1 + x^2$, $\mathbf{q}(x) = -5x^2$ e $\mathbf{u}(x) = 1 + \cos(x)$ no intervalo $[a, b]$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 0$, $\beta_0 = 1$ e $\beta_1 = 0$. No primeiro gráfico utilizamos uma malha uniforme onde, para $N = 100$, $\hbar^2 = e - 004$, para $N = 200$, $\hbar^2 = 2.5e - 005$, para $N = 400$, $\hbar^2 = 6.25e - 006$ e para $N = 800$, $\hbar^2 = 1.5625e - 006$. No segundo gráfico utilizamos uma malha não-uniforme, cujas células têm espaçamento $\frac{H}{(\frac{N}{2})^{0.5}}$, $\frac{H}{(\frac{N}{2}-1)^{0.5}}$, ..., $\frac{H}{2^{0.5}}$, H , H , $\frac{H}{2^{0.5}}$, ..., $\frac{H}{(\frac{N}{2}-1)^{0.5}}$, $\frac{H}{(\frac{N}{2})^{0.5}}$, onde $H = \frac{1}{N}$ e N é o número de células. Para $N = 100$, $\hbar^2 = 2.8099e - 004$, para $N = 241$, $\hbar^2 = 7.0124e - 005$, para $N = 600$, $\hbar^2 = 1.7044e - 005$ e para $N = 1490$, $\hbar^2 = 4.2284e - 006$. O número de células foi escolhido de forma que o \hbar^2 de um certo número de células fosse 4 vezes maior que o \hbar^2 de outro determinado número de células, podendo observar assim os resultados das equações (4.8) e (4.9). Tanto em malhas uniformes, quanto em malhas não-uniformes o erro de solução é da ordem de \hbar^2 nos extremos, e depende do espaçamento $L_{i-\frac{1}{2}}$ nos nodos internos.

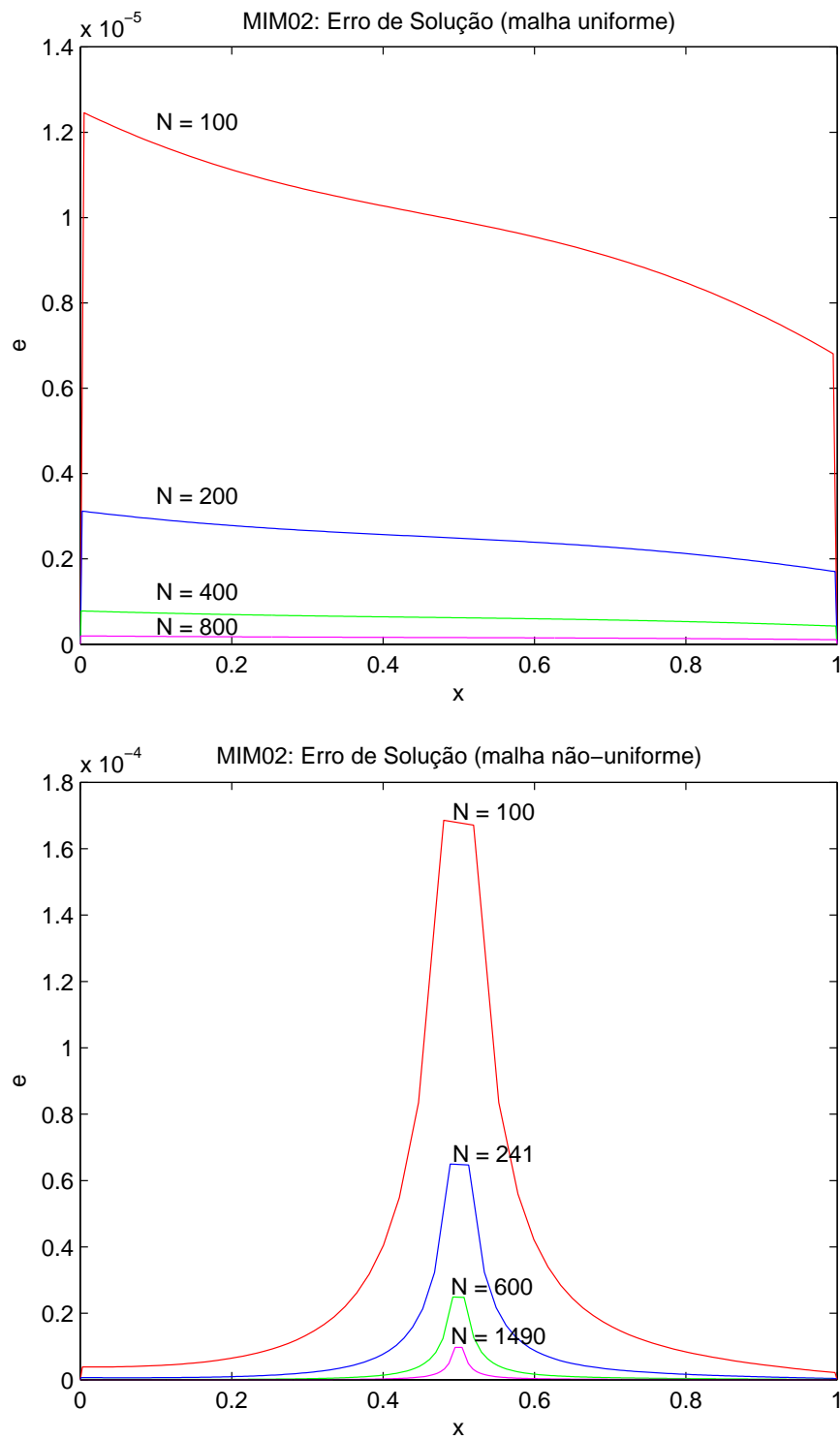


Figura 13a - Erro de solução do MIM02 para malhas uniforme e não-uniforme.

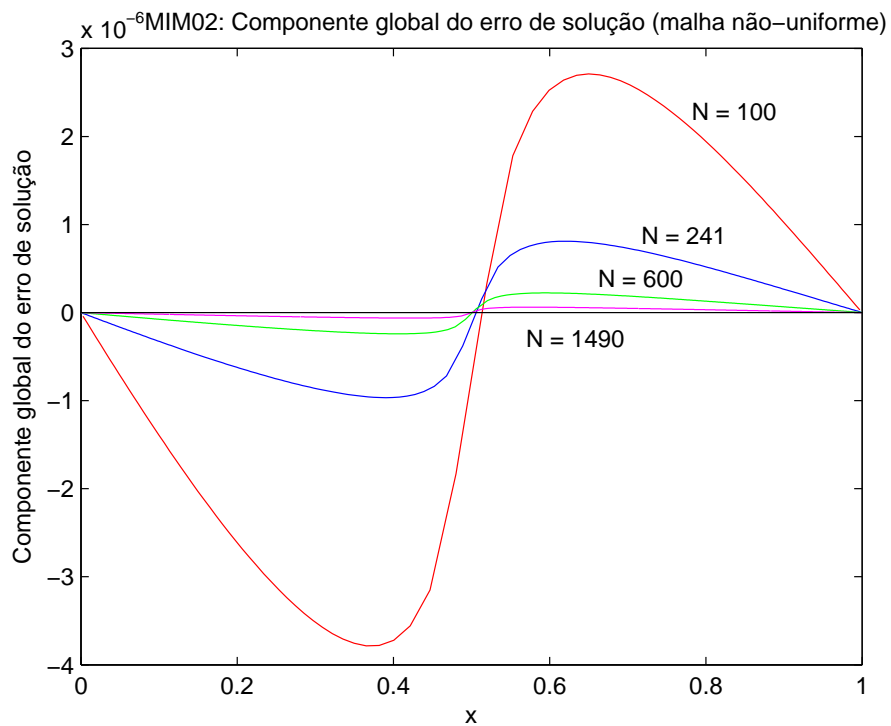


Figura 13b - Componente global do erro de solução do MIM02 para malha não-uniforme.

As mesmas funções e as mesmas malhas foram utilizadas na construção dos gráficos da *Fig. 14*, onde podemos analisar o resultado (4.14). Verificamos que tanto em malhas uniformes, quanto em malhas não-uniformes, o erro de solução é exatamente da ordem de h^2 .

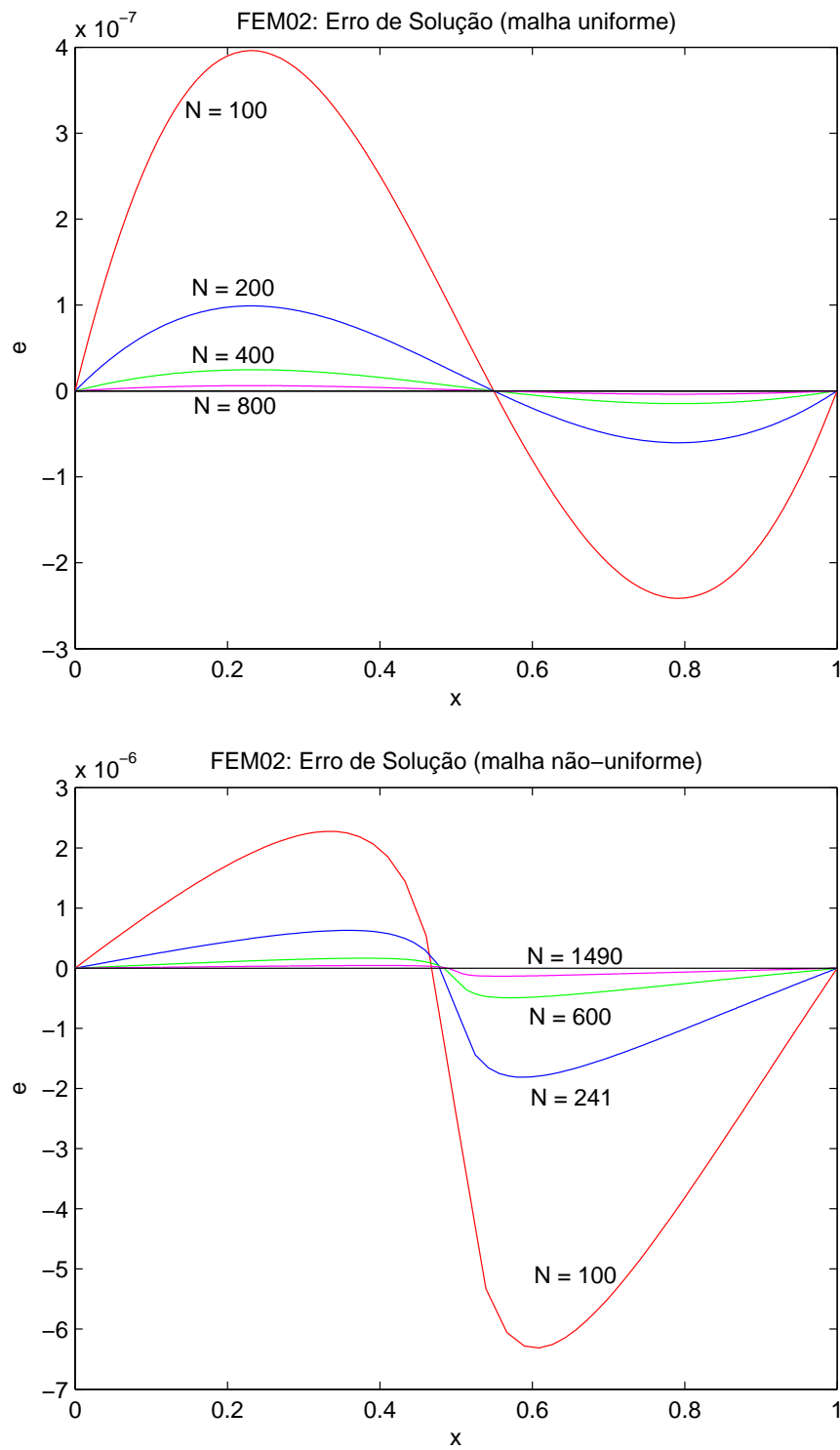


Figura 14 - Erro de solução do FEM02 para malhas uniforme e não-uniforme.

Nas figuras (15a) e (15b) observamos que as aproximações obtidas pelo FEM02 são melhores que as obtidas pelo MIM02 em malhas uniformes ou não-uniformes. Observemos que os erros de solução do MIM02 foram divididos por 10 para poderem aparecer integralmente na figura.

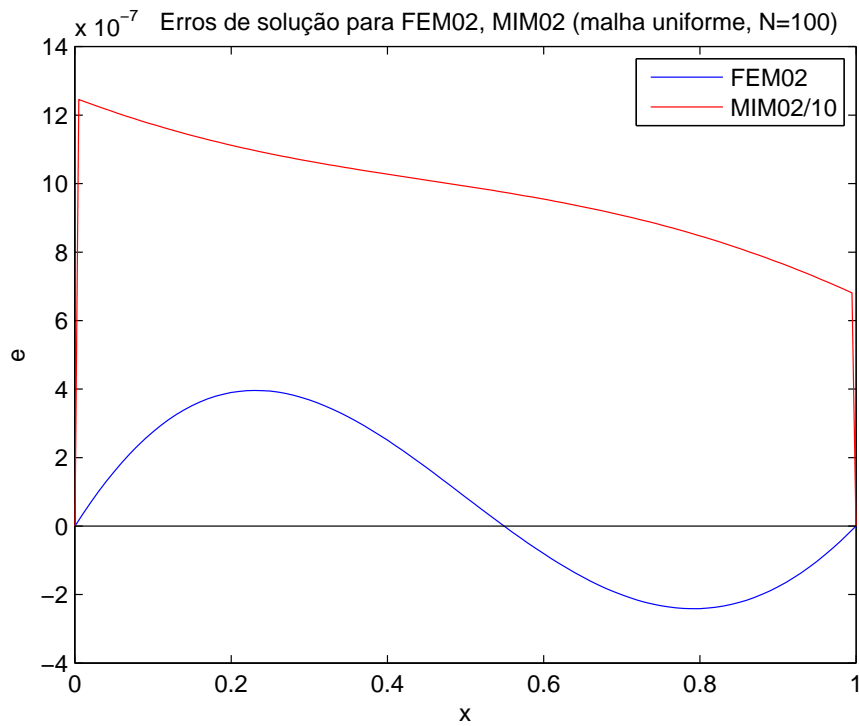


Figura 15a - Erro de solução: MIM02 \times FEM02.

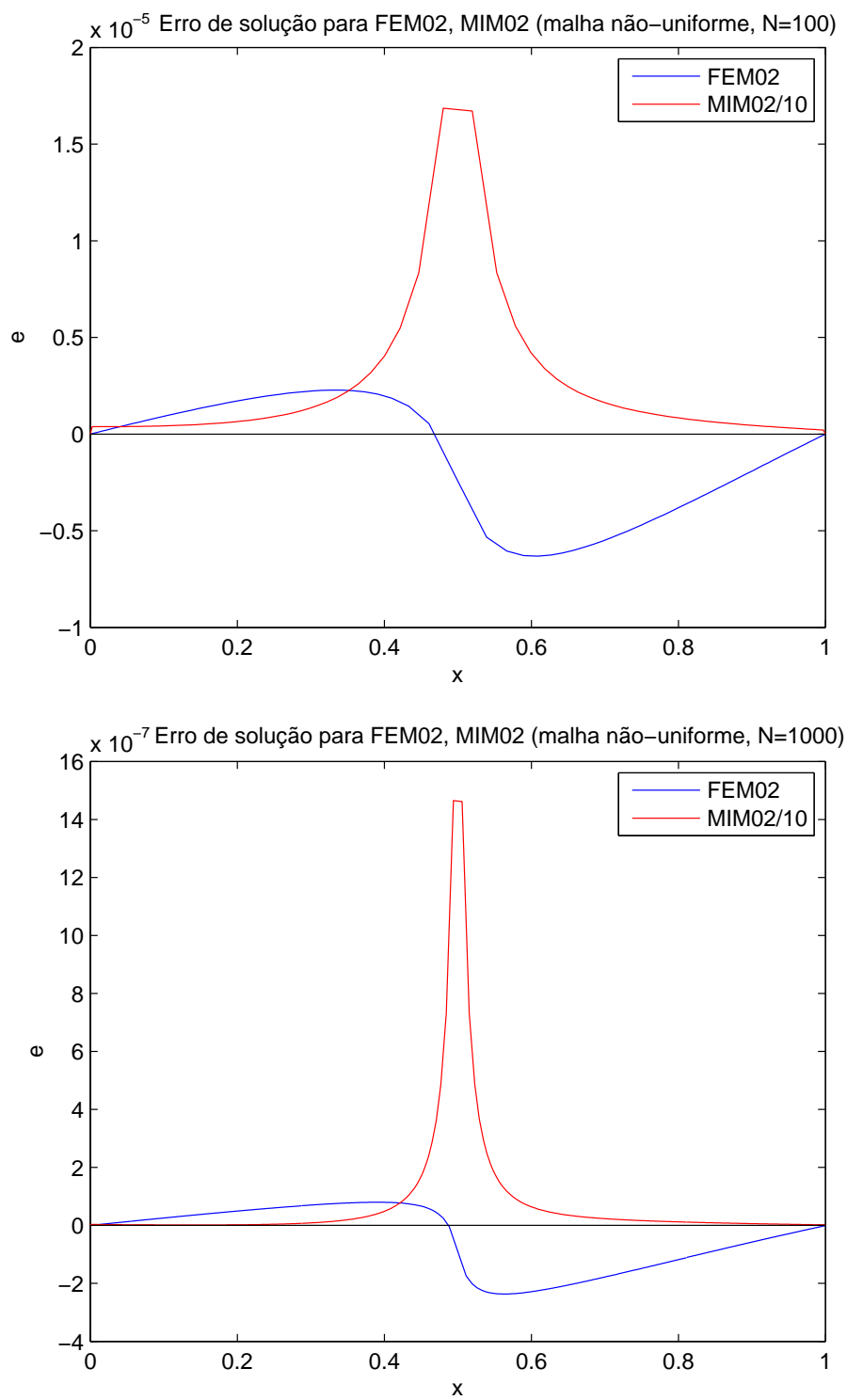


Figura 15b - Erro de solução: $MIM02 \times FEM02$.

Vemos claramente nos gráficos das figuras (16a) e (16b) os resultados das equações (4.10) e (4.15), ou seja, no MIM02 o erro da solução é exatamente da ordem de h^2 , enquanto que no FEM02 este erro possui uma parcela que depende do espaçamento $L_{i-\frac{1}{2}}$.

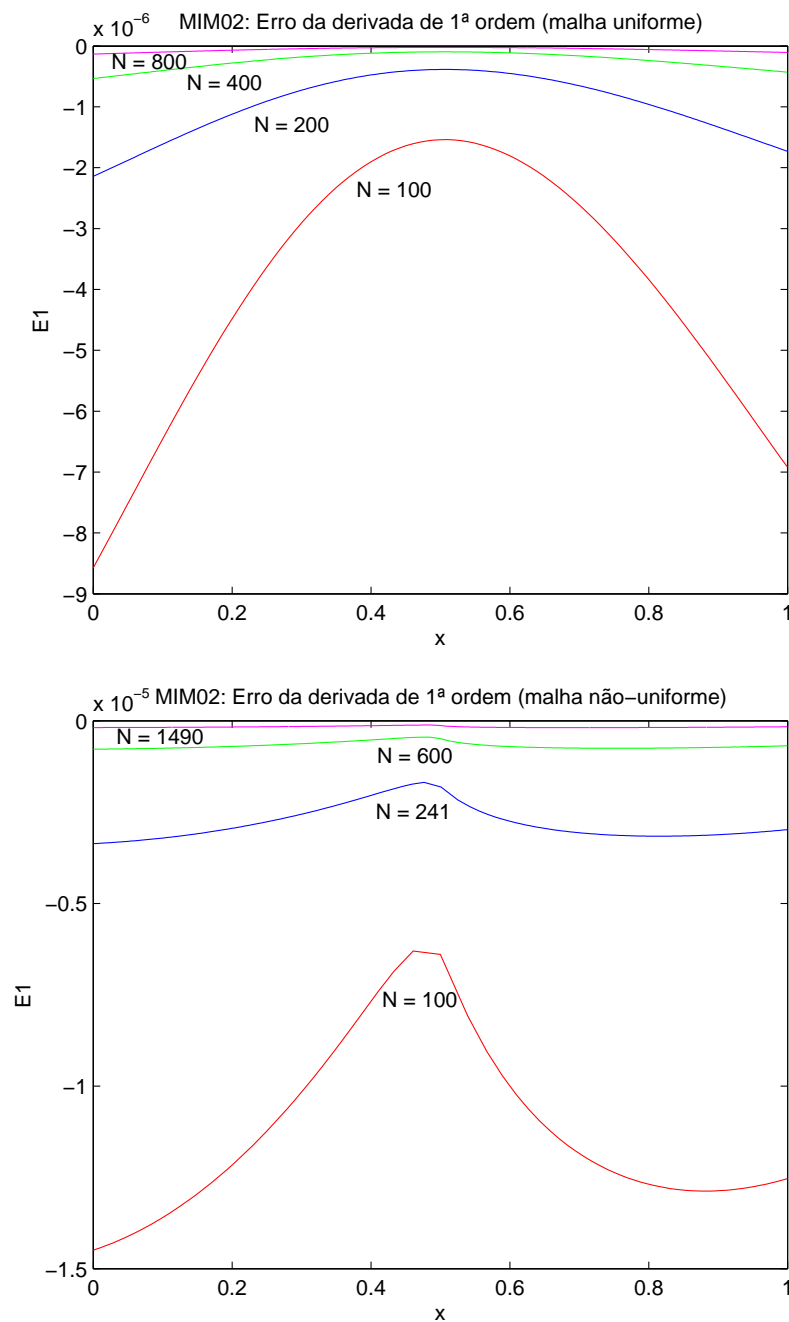


Figura 16a - MIM02: Erro da derivada de 1ª ordem.

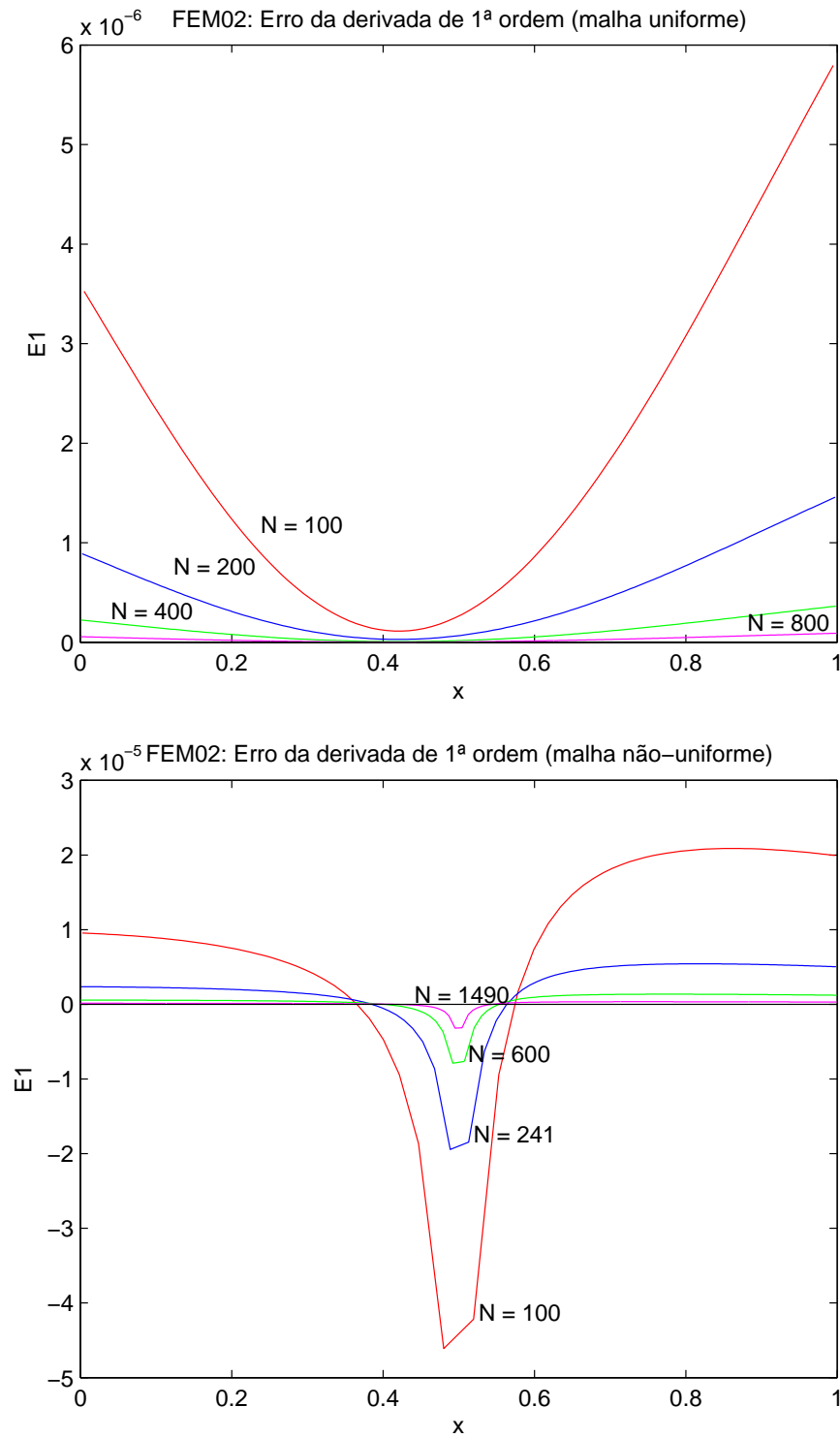


Figura 16b - FEM02: Erro da derivada de 1ª ordem.

Neste caso, o MIM02 comporta-se melhor que o FEM02 em malhas não-uniformes, conforme podemos observar na *Fig. 17*.

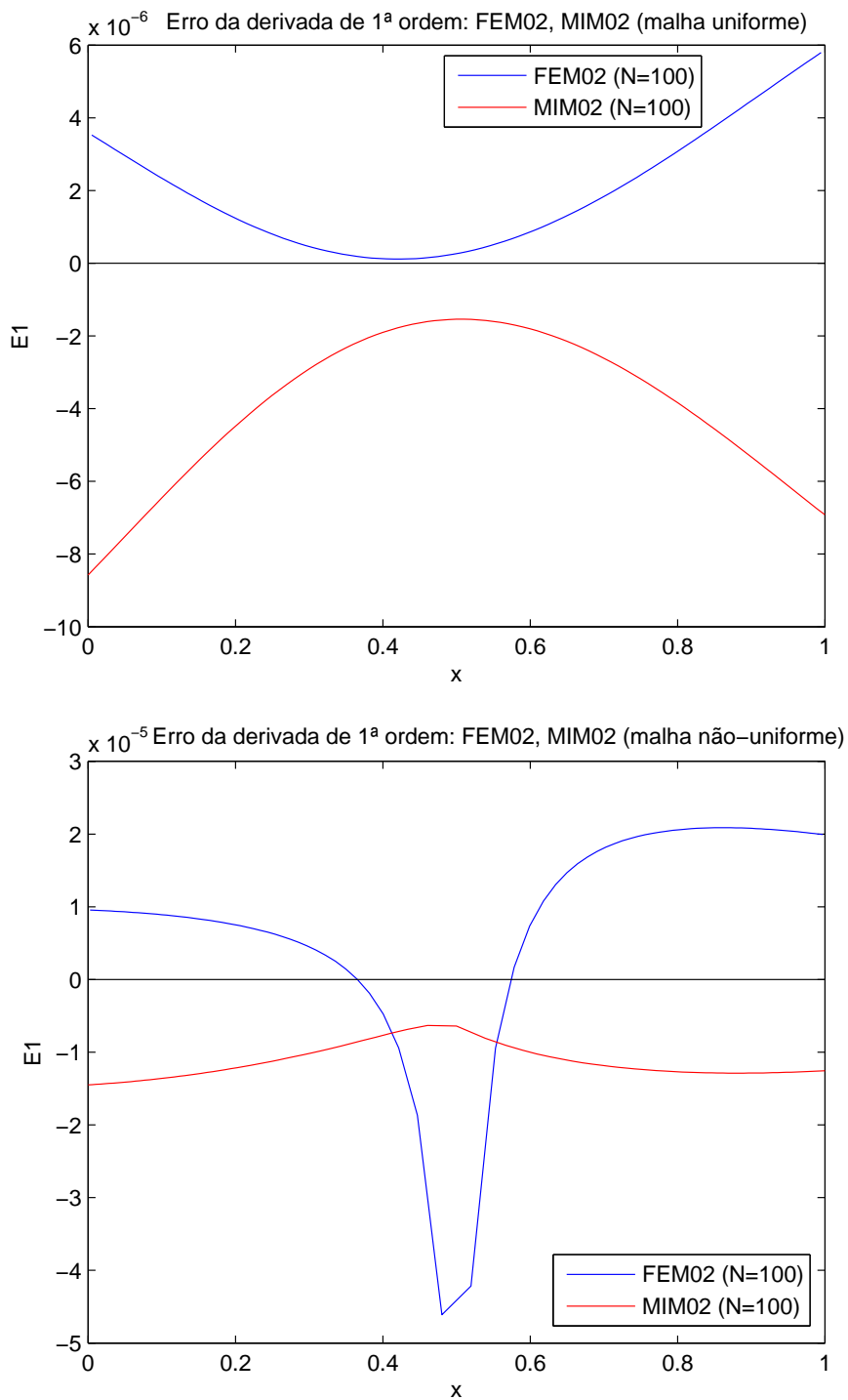


Figura 17 - Erro da derivada de 1ª ordem: MIM02 × FEM02.

As equações (4.11) e (4.16) são ilustradas nas figuras (18a) e (18b). Para o MIM02, em malhas uniformes, o erro da derivada de segunda ordem depende apenas dos espaçamentos $L_{i-\frac{3}{2}}$, $L_{i-\frac{1}{2}}$ e $L_{i+\frac{1}{2}}$. Para malhas não-uniformes, as razões $\frac{L_{i+\frac{1}{2}}}{L_{i-\frac{1}{2}}}$ e $\frac{L_{i-\frac{3}{2}}}{L_{i-\frac{1}{2}}}$ também influenciam este erro. Já para o FEM02, em malhas uniformes este erro depende apenas dos termos $L_{i-\frac{1}{2}}$ e $L_{i+\frac{1}{2}}$, conforme terceiro gráfico da *Fig. 40*. Para malhas não-uniformes existe a dependência da diferença $L_{i+\frac{1}{2}} - L_{i-\frac{1}{2}}$, e o erro passa a ser de primeira ordem.

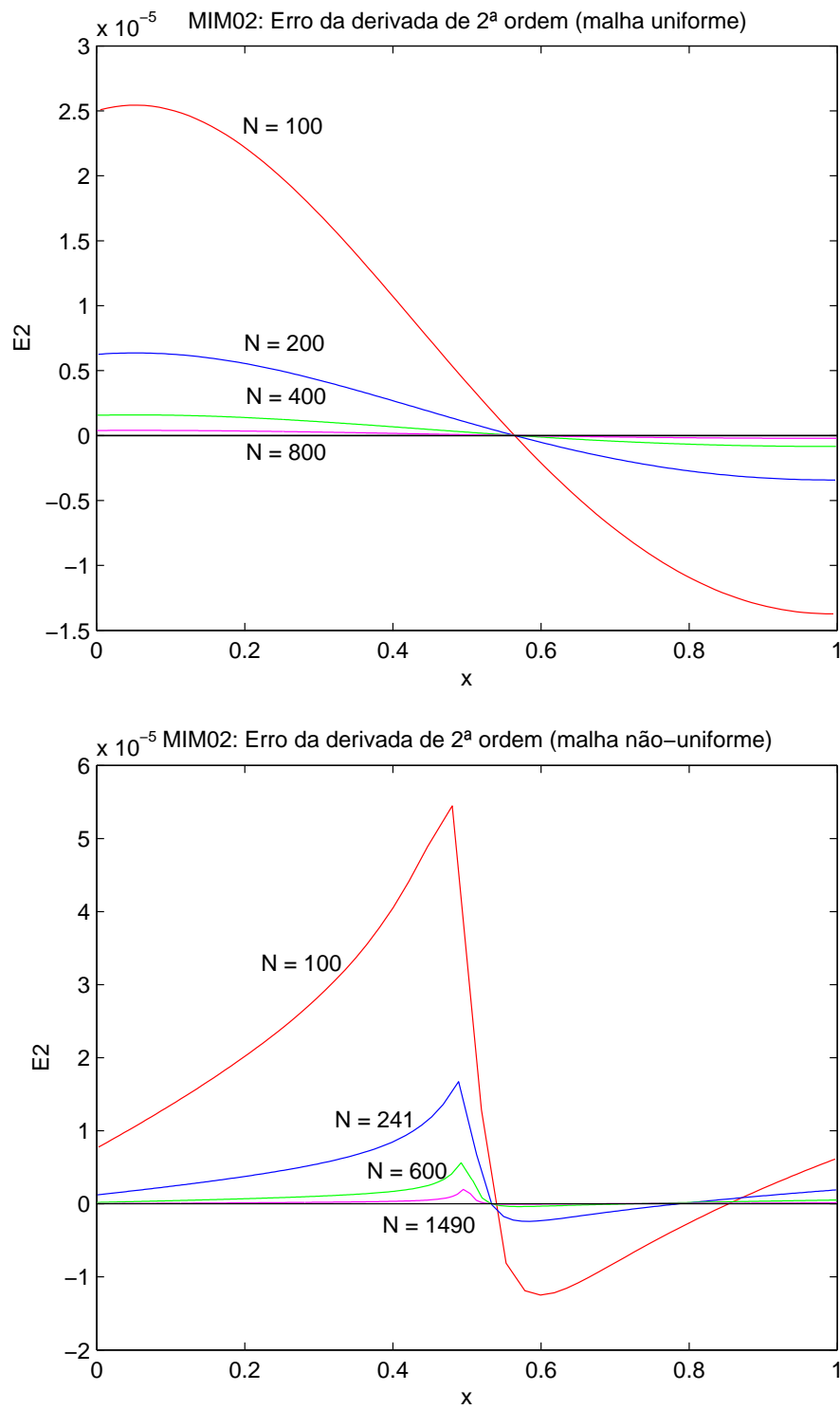


Figura 18a - MIM02: Erro da derivada de 2ª ordem.

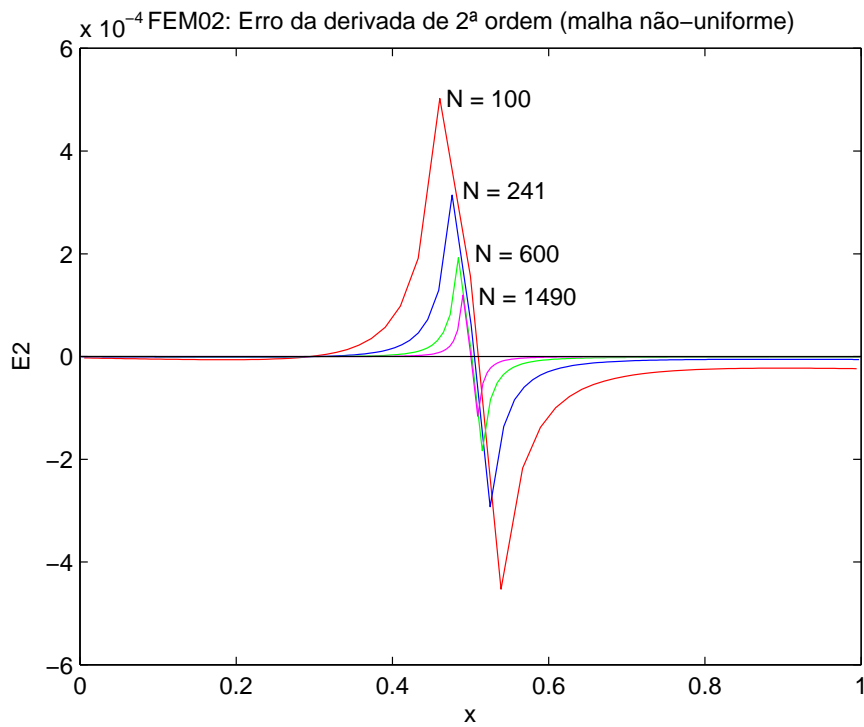
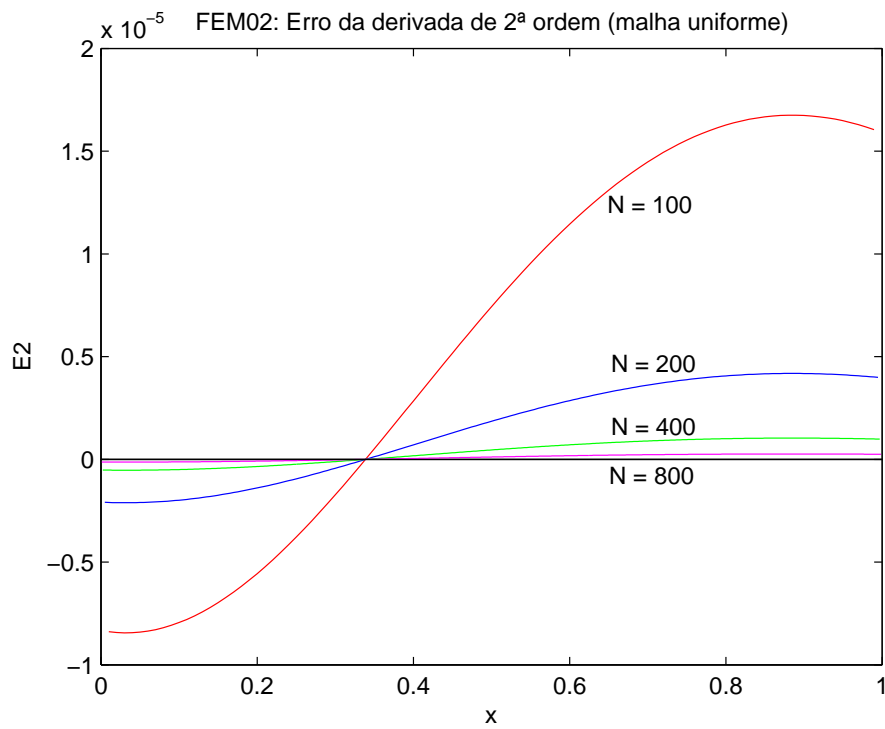


Figura 18b - FEM02: Erro da derivada de 2ª ordem.

No erro da derivada de segunda ordem, o MIM02 comporta-se melhor que o FEM02 em malhas não-uniformes, como podemos observar nas figuras (19a) e (19b).

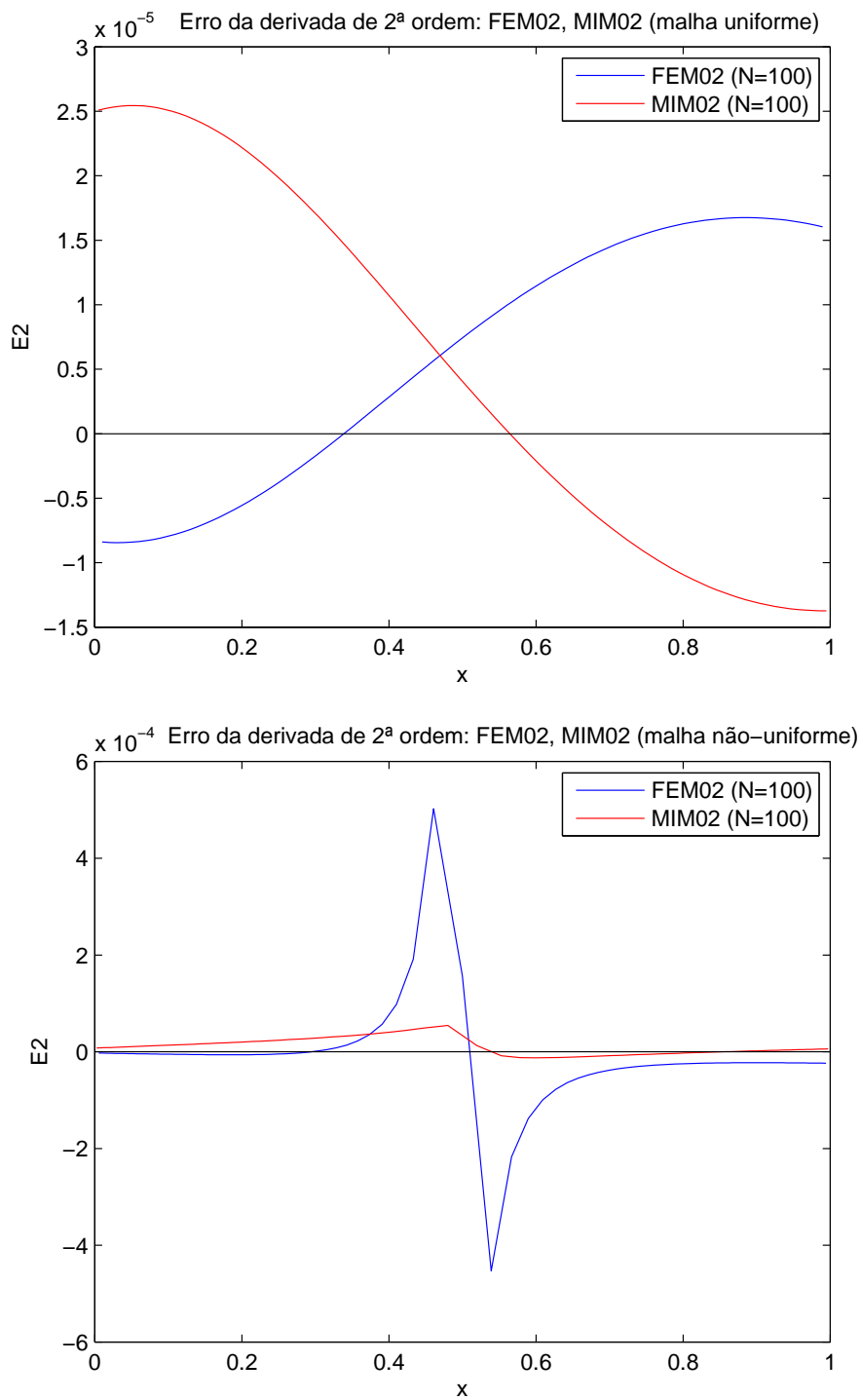


Figura 19a - Erro da derivada de 2ª ordem: $MIM02 \times FEM02$.

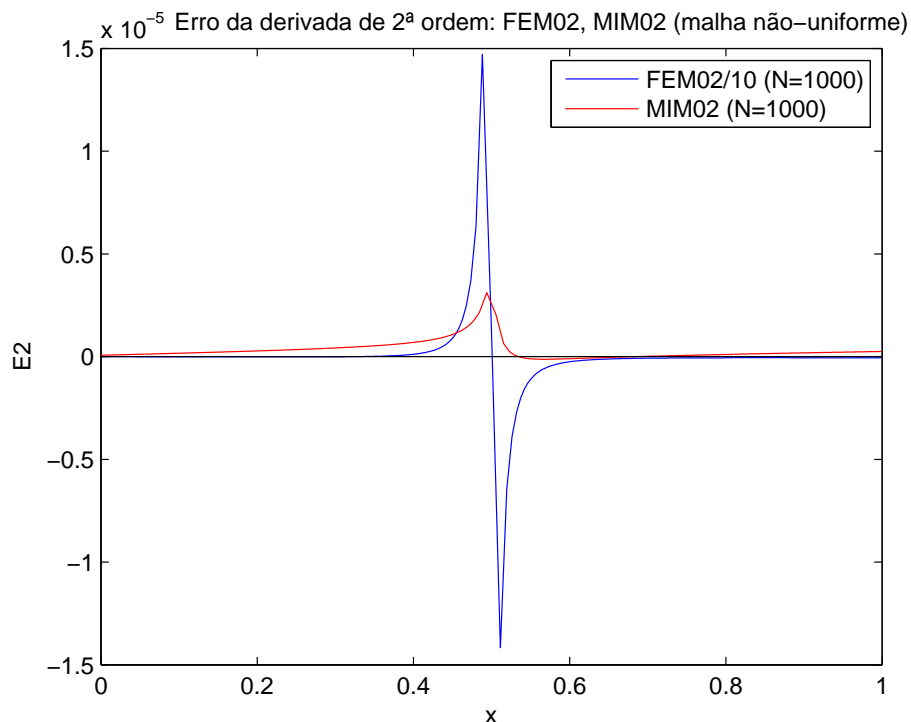


Figura 19b - Erro da derivada de 2ª ordem: $MIM02 \times FEM02$.

Como proposto inicialmente, apresentamos um procedimento de análise simples para a investigação dos erros de aproximação em malhas arbitrárias decorrentes de métodos de diferenças finitas, e elementos finitos, utilizados na discretização de problemas de *Sturm-Liouville* unidimensionais. O interesse fundamental em expor este tipo de procedimento foi a análise deficiente existente de métodos de análise clássicos, como por exemplo, princípios de máximo, teoria de *M-matrizes*, *Perron-Fröbenius*, estimativas sobre autovalores e operadores de *Green* discretos, que pode ser verificada em [5], [8], [15] e [16].

Quando trabalhamos com operadores de *Green* discretos, observamos que, garantindo consistência do método (ou seja, o erro de truncamento converge para zero ao se refinar a malha) e garantindo também estabilidade (isto é, para uma certa norma de operador, o operador de *Green* discreto é limitado, para qualquer

malha), chegamos na convergência do método, ou seja, o erro de solução vai a zero, ao refinarmos a malha. Além disso, para um esquema estável, se o erro de truncamento tem ordem p , então as estimativas obtidas para o erro de solução também tem ordem p , isto é, o erro de solução possui, no mínimo, a ordem do erro de truncamento. Neste resultado residem ao mesmo tempo o poder e deficiência das técnicas clássicas de análise. Em vários casos, especialmente quando usamos malhas uniformes ou suaves, o erro de solução tem a mesma ordem do erro de truncamento e a análise clássica fornece um procedimento simples capaz de identificar corretamente o comportamento do erro de solução. Em outros casos, porém, particularmente quando malhas não-suaves são empregadas, temos e^h com ordem superior a τ^h , fenômeno referido na literatura como *supraconvergência*¹. Mais ainda, problemas de contorno são diferentes de problemas evolutivos em que, para os primeiros, *consistência não é condição necessária para convergência*, ou sequer para estabilidade. Por exemplo, os *métodos de operadores de suporte* (ou *miméticos*) desenvolvidos por pesquisadores no LANL (Los Alamos National Laboratory, em Los Alamos, USA) são notoriamente *inconsistentes*, mesmo em malhas uniformes, e ainda assim convergem, mostrando excelente desempenho em problemas pouco regulares, isto é, coeficientes ou malhas de baixa regularidade, de tipo elíptico ou parabólico [7], [8]. Alternativas encontradas na literatura para análise mais fina de convergência nestes casos examinam em maior detalhe o operador de *Green* [15], estimando cuidadosamente seus elementos e derivadas discretas. Este é um procedimento laborioso que facilmente se torna inviável, particularmente em esquemas com mais de uma ordem de *supraconvergência*, como por exemplo para métodos miméticos em malhas pouco regulares, onde pode ocorrer $\tau^h \rightarrow \infty$ ao $h \rightarrow 0$.

¹Na literatura de elementos finitos, usamos o termo *superconvergência* para denotar a ocorrência de erros de ordem superior em determinados nodos ou regiões da malha, em comparação com os demais pontos [20].

Na análise que apresentamos, com esforço relativamente pequeno foi possível descrever muito detalhadamente o comportamento dos erros de solução e de primeira e segunda derivadas para esquemas diversos em malhas arbitrárias. Como vimos, estas técnicas dependem de se conseguir estimar suficientemente bem o erro E^h , o que requer menos conhecimento sobre o operador \mathbb{G}^h , se comparado com os métodos clássicos referidos acima para a análise de e^h . A extensão destas técnicas para problemas multidimensionais, caso se mostre possível, representaria um dos mais importantes avanços na análise numérica de problemas de contorno.

Como os erros e^h , E^h e \mathbb{E}^h são obtidos pontualmente em suficiente detalhe, podemos utilizar estes procedimentos para examinar efeitos de supraconvergência de métodos discretos em malhas não-suaves. Mais ainda, estas técnicas podem ser utilizadas para explorar efeitos de supraconvergência em métodos de ordem superior, em muitos casos observados apenas experimentalmente na literatura [17] (malhas não-uniformes).

Além dos problemas considerados acima, é útil observarmos que as técnicas de análise desenvolvidas no contexto de problemas de contorno em malhas arbitrárias podem ser modificadas para examinar erros em procedimentos numéricos similares como por exemplo métodos de ordem superior [17], *métodos de diferenciação compacta* ou *aproximação por splines* em malhas gerais, que é um problema de interesse visto que as estimativas conhecidas presentemente tendem a superestimar a magnitude dos erros em tais malhas.

Bibliografia

- [1] BURKILL, J. C.. *The Theory of Ordinary Differential Equations*. 2.ed., Oliver and Boyd, London, 1962.
- [2] CODDINGTON, Earl A.; LEVINSON, Norman. *Theory of Ordinary Differential Equations*. New York: McGraw-Hill, 1955.
- [3] FORSYTHE, George E.; WASOW, Wolfgang R.. *Finite-Difference Methods for Partial Differential Equations*. New York: John Wiley, 1960.
- [4] HACKBUSCH, W.. *Elliptic Differential Equations: theory and numerical treatment*. Springer, Berlin, 1987.
- [5] HEINRICH, B.. *Finite difference methods on irregular networks*. Birkhäuser, Berlin, 1987.
- [6] HIRSCH, Morris W.; SMALE, Stephen. *Differential Equations; Dynamical Systems and Linear Algebra*. New York: Academic Press, 1974.
- [7] HYMAN, J. M.; SHASHKOV, M.; STEINBERG, S. L.. *The numerical solution of diffusion problems in strongly heterogeneous non-isotropic materials*. Journal of Computational Physics, 132 (1997), p. 130-148.
- [8] HYMAN, J. M.; STEINBERG, S. L.. *The convergence of mimetic discretizations for rough grids*. Comput. Math. Appl., 47 (2004), p. 1565-1610.
- [9] KELLER, Herbert B.. *Numerical Methods for Two-Point Boundary-Value Problems*. Waltham: Blaisdell Publishing Company, 1968.
- [10] LORENZZETTI, Greice da Silva. *Análise Detalhada de Erros de Métodos Discretos para Problemas de Contorno em Malhas Arbitrárias*. PPGMAp/UFRGS, Porto Alegre, 2008. Disponível em: <<http://citeseerx.ist.psu.edu>>.

- [11] LORENZZETTI, Greice da Silva; ZINGANO, Janaína Pires; ZINGANO, Paulo Ricardo de Ávila. *Error analysis on general grids for finite difference discretizations of Sturm-Liouville problems*. To appear, TEMA - Tendências em Matemática Aplicada e Computacional, Seleta do XXX CNMAC, v. 8, 2008.
- [12] MANTEUFELL, T. A.; WHITE, A. B. Jr.. *The numerical solution of second-order boundary value problems on nonuniform meshes*. Math. Comp., 47 (1986), p. 511-535.
- [13] ROBERTS, Sanford M.; SHIPMAN, Jerome S.. *Two-Point Boundary Value Problems: Shooting Methods*. Modern Analytic and Computational Methods in Science and Mathematics, number 31. New York: American Elsevier Publishing Company, 1972.
- [14] ROBIDOUX, N.. *Numerical solution of the steady diffusion equation with discontinuous coefficients*. Ph.D. thesis, University of New Mexico, Albuquerque, NM, 2001.
- [15] SAMARSKII, A. A.. *The Theory of Difference Schemes*. Marcel Dekker, New York, 2001.
- [16] SHASHKOV, M.. *Conservative finite-difference methods on general grids*. CRC Press, Boca Raton, 1996.
- [17] STEINBERG, S. L.. *Applications of high-order discretizations to boundary-value problems*. Comput. Meth. Appl. Math., 4 (2004), p. 228-261.
- [18] STEINBERG, S. L.; ZINGANO, J. P.; ZINGANO, P. R.. *Error analysis of discrete methods on general grids*. Submitted (*SIAM J. Numer. Anal.*).
- [19] STRANG, Gilbert. *An analysis of the finite element method*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1973.

- [20] SWARTZ, B.; KREISS, H. O.; MANTEUFELL, T. A.; WENDROFF, B.; WHITE, A. B. Jr.. *Supraconvergent schemes on irregular grids*. Math. Comp., 47 (1986), p. 537-554.
- [21] ZINGANO, Janaína Pires. *Convergence of mimetic methods for Sturm-Liouville problems on general grids*. 2003. 133 f. Thesis (PhD Mathematics) - University of New Mexico, Albuquerque, NM, 2003.