UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação de Matemática

EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÃO PARA EQUAÇÕES SEMILINEARES ELÍPTICAS

Lucinéia Fabris

Porto Alegre, 03 de Junho de 2008.

Dissertação submetida por Lucinéia Fabris* como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:
Dr. Leonardo Prange Bonorino

Banca Examinadora:
Dr. Alexandre Tavares Baraviera (PPG-MAT/UFRGS)
Dr. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke (PPG-MAT/UFRGS)
Dr. Leonardo Guidi (PPGMAp/UFRGS)
Dr. Paulo Ricardo de Ávila Zíngano (PPGMAT/UFRGS)

Data da Defesa: 03 de Junho de 2008.

*Bolsista CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

Agradecimentos

Agradeço à Deus.

À minha mãe Erni Terezinha e ao Moisés. Aos meus irmãos Éder e Adilson e, assim, às cunhadas e sobrinhos. Família! Só eles conhecem a verdadeira batalha enfrentada para a obtenção deste grau.

À todos os tios. Em especial aos tios: Eldiro, Normélia, Vicente, Edir, Claudete, Alcimar e Nelvi. E, também aos primos, pelo interesse e apoio. Ao "Tio"Edézio.

Vários agradecimentos ao meu orientador Leonardo Prange Bonorino, sem ele o trabalho nem teria começado.

Aos professores da banca, Alexandre Tavares Baraviera, Eduardo Henrique de Mattos Brietzke, Leonardo Guidi e Paulo Roberto de Ávila Zíngano, pelas correções, parabenizações e incentivos.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação Luis Gustavo Doninelli Mendes, Miguel Angel Alberto Ferrero, Ivan Edgardo Pan Perez, Luiz Fernando Carvalho da Rocha, Paulo Ricardo de Ávila Zíngano e Alexandre Tavares Baraviera.

À CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

À amiga Rosane, secretária da Pós-Graduação em Matemática.

Aos amigos da Pós-Graduação. Em especial: Luciane, André, Hugo, Cleber, Flávia, Débora, Jairo, Jesus, Raquel, Lisandra, Edite, Fagner, Patrícia, Samuel, Vitalino, João e Adriana.

Aos demais e não menos importantes amigos e amores. Talvez, os mais importantes. Em especial ao Adilson, por ter perdido horas de sono assistindo os ensaios para a apresentação da dissertação!

Resumo

Neste trabalho estudamos a Existência e a Unicidade de Solução não nula do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) & \text{em } \Omega \\ u \geq 0 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio aberto limitado, com fronteira suave. Mostramos que se $\dfrac{f(x,t)}{t}$ é decrescente em t e satisfaz algumas condições de regularidade, então a solução do problema é única.

Abstract

In this work we study the existence and uniqueness of nontrivial solution of the Dirichlet problem

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(x,u) & \text{in} \quad \Omega \\ u &\geq 0 & \text{in} \quad \Omega \\ u &= 0 & \text{on} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ is a bounded domain with smooth boundary. We show that if $\dfrac{f(x,t)}{t}$ is decreasing and satisfies some regularity conditions, then the solution of the problem is unique.

Sumário

1 Introdução

Neste trabalho mostramos a existência e a unicidade de solução fraca limitada do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u &=& f(x,u) & \text{em} & \Omega \\ u &\geq& 0 & \text{em} & \Omega \\ u &\neq& 0 & \text{em} & \Omega \\ u &=& 0 & \text{em} & \partial\Omega \end{cases} \tag{1.1}$$

para um domínio qualquer $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, limitado e com fronteira suave, onde a função $f : \Omega \times [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, satisfaz as seguintes hipóteses:

$$(H_1) \begin{cases} \text{a função } t \longmapsto f(x,t) \text{ é contínua em } [0,\infty), \text{ para quase todo } x \in \Omega. \\ \text{a função } t \longmapsto \dfrac{f(x,t)}{t} \text{ é estritamente decrescente em } (0,\infty), \\ \qquad \text{para quase todo } x \in \Omega. \end{cases}$$

(H_2) para cada $t \geq 0$, a função $x \longmapsto f(x,t)$ está em $L^\infty(\Omega)$.

(H_3) $\exists C \geq 0$, tal que $f(x,t) \leq C(t+1)$, para quase todo $x \in \Omega$ e $\forall t \geq 0$.

Considere

$$a_0(x) := \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x,t)}{t} \quad \text{e} \quad a_\infty(x) := \lim_{t \to +\infty} \frac{f(x,t)}{t}.$$

Nosso resultado é o seguinte:

Teorema 1.1. Existe, no máximo, uma solução de (1.1). Além disso, a solução de (1.1) existe se e somente se

$$\lambda_1(-\Delta - a_0(x)) < 0 \tag{1.2}$$

e

$$\lambda_1(-\Delta - a_\infty(x)) > 0 \tag{1.3}$$

onde, $\lambda_1(-\Delta - a_0(x))$ denota o primeiro autovalor do operador $(-\Delta - a_0(x))$ e $\lambda_1(-\Delta - a_\infty(x))$ o primero autovalor do operador $(-\Delta - a_\infty(x))$ com condição de Dirichlet zero. Daremos, quando necessário, uma formulação explícita para estes autovalores.

Observação 1.1. No caso especial de $f(x,t) = f(t)$, isto é, quando a função f independe de x, os resultados (1.2) e (1.3) equivalem a

$$a_\infty < \lambda_1(-\Delta) < a_0.$$

De fato, se $f(x)$ independe de x, então $a_0(x) = c_1 I$ e $a_\infty(x) = c_2 I$, onde I é o operador identidade e c_1 e c_2 são constantes reais, assim, $\lambda_1(-\Delta - cI) = \lambda_1(-\Delta) - c$.
Portanto,

$$\begin{array}{rcl} \lambda_1(-\Delta - a_0(x)) & = & \lambda_1(-\Delta - c_1 I) < 0 \\ & \Leftrightarrow & \lambda_1(-\Delta) - c_1 < 0 \\ & \Leftrightarrow & \lambda_1(-\Delta) < c_1. \end{array}$$

Ou seja, $\lambda_1(-\Delta) < c_1$. E, por raciocínio análogo,

$$\begin{array}{rcl} \lambda_1(-\Delta - a_\infty(x)) & = & \lambda_1(-\Delta - c_2 I) > 0 \\ & \Leftrightarrow & \lambda_1(-\Delta) - c_2 > 0 \\ & \Leftrightarrow & \lambda_1(-\Delta) > c_2. \end{array}$$

Logo, $\lambda_1(-\Delta) > c_2$. Portanto, destes dois resultados, temos $a_\infty < \lambda_1(-\Delta) < a_0$. Dessa forma, concluímos a Observação.

De (H_1), temos que a função $t \longmapsto \dfrac{f(x,t)}{t}$ é estritamente decrescente em t. Então ao $t \to 0$ a função $\dfrac{f(x,t)}{t}$ cresce. Logo,

$$a_0(x) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x,t)}{t} > -\infty \qquad \text{e} \qquad a_0(x) \leq +\infty.$$

Ou seja,

$$-\infty < a_0(x) \leq +\infty.$$

Da mesma forma, ao $t \to +\infty$, a função $t \longmapsto \dfrac{f(x,t)}{t}$ decresce. Logo,

$$a_\infty(x) = \lim_{t \to +\infty} \frac{f(x,t)}{t} < +\infty \qquad \text{e} \qquad a_\infty(x) \geq -\infty.$$

Ou seja,

$$-\infty \leq a_\infty(x) < +\infty.$$

O resultado essencial que deve ser preservado é que a função $a(x)$ pode assumir os valores $+\infty$ e $-\infty$.

Este trabalho foi desenvolvido com base no artigo publicado por H. Brezis e L. Oswald [BO].

Na seção 2, temos as preliminares, onde damos alguns conceitos e resultados básicos para o decorrer deste trabalho. Na seção 3, mostramos a unicidade de solução fraca limitada do problema de Dirichlet 1.1. A unicidade de solução para o problema de Dirichlet com a equação $-\Delta_p u = f(x,u)$, onde $\dfrac{f(x,t)}{t^{p-1}}$ é decrescente, ou seja, uma generalização do problema que estamos tratando, está provada em [KB]. Na seção 4, mostramos a condição necessária do Teorema 1.1. Na seção 5, mostramos a condição suficiente do Teorema 1.1, ou seja, a existência de solução fraca limitada do problema de Dirichlet 1.1. Aliás, o resultado mostrado, devido a sua generalidade, implica na condição suficiente do Teorema 1.1.

Queremos ressaltar, ainda, que o Teorema 1.1 está fortemente relacionado a outros resultados. Destacamos alguns, como Keller e Cohen [KC], Cohen e Laetsch [CL], Krasnoselskii [KM], Teoremas 7.4, 7.15, Amann [AH], Amann [A], Hess [H], Figueiredo [F], Berestycki [BH], , Benguria [BR], Benguria, Brezis e Lieb [BB], Smoller e Wasserman [SW], Laetsch [L], Simpsom e Cohen [SC] e Keller [K].

2 Preliminares

Notação:

• Dizemos que $V \subset\subset \Omega$ quando o aberto V está fortemente incluído em Ω, ou seja, o fecho de V, $\overline{V}$, é compacto e $\overline{V} \subset \Omega$.

• Ω é um subconjunto do $\mathbb{R}^N$ aberto, limitado e com fronteira de classe C^1.

• *o-pequeno*. Dizemos que

$$f = o(g) \qquad \text{ao} \quad x \to x_0$$

sempre que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0$$

• Dizemos que f é *estritamente decrescente* para frisar esta propriedade da função em questão. Porém, queremos que fique claro que estritamente decrescente e decrescente são resultados equivalentes e, equivalem, ainda à definição

$$\text{Se} \quad x < y, \quad \text{então} \quad f(x) > f(y).$$

• Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}^N$. Definimos a oscilação de $g : A \to \mathbb{R}$ por

$$osc_{x \in A} g(x) = \max_{x \in A} g(x) - \min_{x \in A} g(x).$$

• Uma bola aberta de centro $x_0 \in \Omega$ e raio $R > 0$, será dada por

$$B_R(x_0) = \{x \in \Omega; d(x, x_0) < R\}.$$

• A derivada parcial de uma função $g : \Omega \to \mathbb{R}$ na direção do vetor normal n no ponto $x_0 \in \Omega$, será denotada por

$$\frac{\partial g}{\partial n}(x_0).$$

• Dizemos que um ponto $x_0 \in \Omega$ satisfaz a condição da bola interior, se e somente se, $\exists x \in \Omega$ e $B_r(x) \subset \Omega$, $r > 0$, tal que $x_0 \in \partial B_r(x)$.

Definição 2.1. Uma seqüência $(x_k)_k$ em um espaço métrico X, chama-se uma *seqüência de Cauchy* quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $j, k > k_0 \Rightarrow d(x_j, x_k) < \varepsilon$.

Definição 2.2. Um espaço métrico M é *completo* quando toda seqüência de Cauchy em M, é convergente.

Definição 2.3. Um *espaço de Banach* é um espaço normado completo (completo na métrica definida pela norma).

Definição 2.4. Um *espaço de Hilbert H* é um espaço de Banach com produto interno. Além disso, sua norma é gerada pelo produto interno.

Algumas das definições a seguir são encontradas em [B].

Definição 2.5. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto.

• Uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é dita *mensurável* se para todo aberto O de $\mathbb{R}$ tivermos $f^{-1}(O)$ um subconjunto mensurável em Ω.
• O espaço das funções contínuas em Ω é denotado por

$$C(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}, \text{ contínuas}\}$$

• O espaço das funções k vezes continuamente diferenciáveis em Ω, $k \geq 0$, é denotado por

$$C^k(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}; \quad k \text{ vezes continuamente diferenciáveis em } \Omega (k \geq 0)\}$$

• O espaço das funções contínuas a Hölder, com expoente α, é denotado por

$$C^\alpha(\Omega) = C^{0,\alpha}(\Omega) = \left\{ u \in C(\Omega); \sup_{x \in \Omega} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty \right\}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

• O espaço das funções k vezes continuamente diferenciáveis a Hölder, com expoente α, é denotado por

$$C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) = \left\{ u \in C^k(\Omega); D^i u \in C^{0,\alpha}(\Omega), \quad \forall i, \quad |i| \leq k \right\}.$$

• Denotamos $C^\infty(\Omega)$ como sendo o conjunto das funções infinitamente diferenciáveis em Ω.
• O espaço $C_0^\infty(\Omega)$ é o espaço das funções C^∞ com suporte compacto em Ω, ou seja,

$$C_0^\infty(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega); \{u(x) \neq 0\} \subset\subset \Omega\}.$$

• O espaço das funções *localmente somáveis* é o espaço definido por

$$L^1_{loc}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mensuráveis, tais que } \int_V |u| dx < \infty, \forall V \subset\subset \Omega \right\}.$$

• Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Definimos a *derivada parcial de u no sentido fraco*, $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, como sendo um funcional linear definido em $C_0^\infty(\Omega)$, dado por

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(\varphi) = -u\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) = -\int_\Omega u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx$$

para toda ϕ em $C_0^\infty(\Omega)$. Estas funções φ são conhecidas como *funções teste*.
• Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Definimos a *derivada de u no sentido fraco*, por

$$D^\alpha u(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} u(D^\alpha \varphi) = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u(x) D^\alpha (\varphi(x)) dx,$$

onde, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, com $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$ e

$$D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial^{\alpha_1}_{x_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial^{\alpha_2}_{x_2}} ... \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial^{\alpha_n}_{x_n}}.$$

Nesta notação, podemos representar o laplaciano por

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} = D^{(2,0,...,0)} + ... + D^{(0,...,0,2)}$$

Assim, dizemos que $D^\alpha u$ existe no sentido fraco, equivale a dizer que existe $v \in L^1_{loc}(\Omega)$, tal que

$$D^\alpha u(v) = \int_\Omega D^\alpha u(x) v(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u(x) D^\alpha v(x) dx = (-1)^{|\alpha|} u(D^\alpha v)$$

• O *espaço* L^p, $1 \leq p < \infty$, é definido por

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mensuráveis, tais que } \int_\Omega |u|^p dx < \infty \right\}$$

e sua norma é definida por

$$\| u \|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

• O *espaço* L^∞, é definido por

$$L^\infty(\Omega) = \{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mensuráveis, tais que } supess|u| < \infty \},$$

onde $supess \quad u = \inf\{c \in \mathbb{R}; |\{x \in \Omega; u(x) > c\}| = 0\}$. A norma é definida por

$$\| u \|_\infty = supess|u|.$$

• O *espaço de Sobolev*

$$W^{k,p}(\Omega)$$

consiste de todos as funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $u \in L^p$, tais que para cada multi-índice α, com $|\alpha| \leq k$, $D^\alpha u$ existe (no sentido fraco) em $L^p(\Omega)$. Ou seja,

$$W^{k,p}(\Omega) = \{ u \in L^p(\Omega); u \in L^p(\Omega) \text{ e } D^\alpha u \in L^p(\Omega), \text{ com } |\alpha| \leq k \}$$

Denifimos uma norma no espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ como sendo

$$\| u \|_{W^{k,p}(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^{\alpha} u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

para $1 \leq p < \infty$.

• Este trabalho é desenvolvido no espaço de Sobolev, com $k = 1$ e $p = 2$, então, a definição de espaço de Sobolev, resume-se a

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega); \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \quad \forall i \in \{1, ..., n\} \right\}$$

com norma H^1 dada por

$$\| u \|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\Omega} u^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Além disso, o espaço das funções em $H^1(\Omega)$ com suporte compacto em Ω, é defindo por

$$H_0^1(\Omega) = \overline{C_0^{\infty}(\Omega)}^{H^1(\Omega)}.$$

O espaço $H_0^1(\Omega)$ é de Hilbert em relação ao produto interno

$$< u, v > = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx$$

e a norma em $H_0^1(\Omega)$, que provém deste produto interno, é definida por

$$\| u \|_{H_0^1} = (< u, v >)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Intuitivamente, $H_0^1(\Omega)$ é o conjunto das funções em $H^1(\Omega)$ que se anulam na fronteira de Ω. Ou seja,

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega); u = 0 \text{ em } \partial\Omega \right\}.$$

• *Desigualade de Hölder.* Suponhamos que $1 \leq p, q \leq \infty$, onde p e q satisfazem $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Então, se $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^q(\Omega)$, temos

$$\int_{\Omega} |uv| dx \leq \| u \|_{L^p(\Omega)} \| v \|_{L^q(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |v|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Definição 2.6. Seja X um espaço de Banach real.
• Um operador linear limitado $l : X \to \mathbb{R}$ é chamado um funcional linear limitado em X.
• Escrevemos X' como sendo a coleção de todos os funcionais lineares limitados em X. X' é dito o espaço dual de X.

Definição 2.7. Seja X um espaço de Banach real. Dizemos que uma seqüência $(u_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ converge fracamente a $u \in X$ e denotamos por

$$u_n \rightharpoonup u,$$

se

$$l(u_n) \to l(u)$$

para cada funcional linear limitado $l \in X'$.

Definição 2.8. Dizemos que uma função $G[\cdot]$ é *fracamente semicontínua inferiormente* em $W_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$ se tivermos

$$G(u) \leq \liminf_{k \to +\infty} G(u_k)$$

sempre que $u_k \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$.

Teorema 2.1 (Divergência)**.** Se $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$ e Ω é um conjunto aberto, com fronteira suave, então,

$$\int_{\Omega} u \Delta v dx = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} dS - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx.$$

Teorema 2.2 (Convergência Dominada)**.** Seja $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ uma seqüência de funções integráveis convergindo quase sempre em Ω, para uma função f, dominadas por uma função g, integrável, então

$$\int_{\Omega} f_n(x) dx \longrightarrow \int_{\Omega} f(x) dx.$$

Por dominado, entende-se $|f(x)| \leq g(x)$, $\forall x \in \Omega$.

Teorema 2.3 (Convergência Monótona)**.** Seja $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$, uma seqüência de funções mensuráveis tal que

$$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots \leq f_n(x) \leq \ldots.$$

Então $f := \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \sup_{n \to +\infty} f_n(x)$, é uma função mensurável e

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \lim_{n \to +\infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx.$$

Lema 2.1 (Fatou)**.** Suponhamos que as funções $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ são não-negativas e somáveis. Então

$$\int_{\mathbb{R}^N} \liminf_{k\to\infty} f_k dx \leq \liminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} f_k dx.$$

Os Teoremas 2.4, 2.5 e 2.9 estão provados em [E].

Teorema 2.4. Seja Ω um subconjunto aberto e limitado $\mathbb{R}^N$, com fronteira suave, $N \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p \leq N$. Então, existe $C = C(N, p, \Omega) > 0$ tal que $\| u \|_{L^q(\Omega)} \leq C \| Du \|_{L^p(\Omega)}$, $\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $1 \leq q \leq p*$, onde, $p* = \dfrac{Np}{N-p}$.

Observação 2.1. Um caso particular deste Teorema é a *Desigualdade de Poincaré*, com $p = q = 2$

$$\| u \|_{L^2(\Omega)} \leq C \| \nabla u \|_{L^2(\Omega)}$$

Teorema 2.5 (Rellich-Kondrachov)**.** Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^N$ tal que $\partial\Omega$ é de classe C^1. Se $p < N$, então, a aplicação identidade,

$$Id : W^{1,p}(\Omega) \to L^q(\Omega)$$

é compacta para $1 \leq q < p* = \frac{Np}{N-p}$. Além disso, se $(u_n)_n \subset W^{1,p}(\Omega)$ é uma seqüência limitada, então, existe uma subseqüência $(u_{n_k})_k$ tal que

$$u_{n_k} \to u \text{ em } L^q, \quad \forall q < p*.$$

Alguns dos Teoremas a seguir estão provados em [TG]. O Teorema 2.6 corresponde ao Teorema 8.34 e o Teorema 2.7 corresponde ao Teorema 8.29.

Teorema 2.6. Para $0 < \alpha \leq 1$, seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio $C^{1,\alpha}$ e L um operador da forma

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{N} D^i(a_{ij}(x)D^j u + b_i(x)u) + \sum_{i=1}^{N} c_i(x)D^i u + d(x)u$$

satisfazendo

(i) $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2, \quad \forall x \in \Omega, \ \forall \xi \in \mathbb{R}^N,$ para algum $\lambda > 0$.

(ii) $\displaystyle\int_\Omega (dv - b_i D^i v)dx \leq 0, \quad \forall v \geq 0, \ v \in C_0^1(\Omega).$

(iii) $\displaystyle\max_{i,j=1,\ldots,N}\{|a_{ij}, b_i|_{0,\alpha;\Omega}, |c_i, d|_{0;\Omega}\} \leq K,$ com $K < \infty$.

Sejam $g \in L^\infty(\Omega)$, $f^i \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ e $\phi \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$. Então o problema de Dirichlet generalizado

$$Lu = g + D^i f^i \qquad \text{em } \Omega, \quad u = \phi \quad \text{em } \partial\Omega.$$

é unicamente solúvel em $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Teorema 2.7. Seja L um operador dado por

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{N} D^i(a_{ij}(x)D^j u + b_i(x)u) + \sum_{i=1}^{N} c_i(x)D^i u + d(x)u$$

uniformemente elíptico em Ω e com os coeficientes limitados em Ω, isto é, L satisfaz as condições

$$(i) \quad \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2, \quad \forall x \in \Omega, \ \ \xi \in \mathbb{R}^N, \text{ para algum } \lambda > 0.$$

$$(ii) \quad \sum_{i,j=1}^{N} |a_{ij}(x)|^2 \leq \Lambda^2, \quad \lambda^{-2}\sum_{i=1}^{N}(|b_i(x)|^2 + |c_i(x)|^2) + \lambda^{-1}|d(x)| \leq \nu^2.$$

Sejam $f_i \in L^q(\Omega)$, $i = 1, ..., N$, $g \in L^{\frac{q}{2}}(\Omega)$ para algum $q > N$, e suponha que Ω satisfaz a condição uniforme da bola interior em uma partição limitada T. Então, se $u \in W^{1,2}(\Omega)$ satisfaz a equação

$$Lu = g + D^i f^i$$

em Ω e existem constantes $K, \alpha_0 > 0$ tais que

$$osc_{\partial\Omega \cap B_R(x_0)} u \leq K R^{\alpha_0} \quad \forall x_0 \in T, \quad R > 0,$$

segue que $u \in C^\alpha(\Omega \cup T)$ para algum $\alpha > 0$ e para qualquer $\Omega' \subset\subset \Omega \cup T$,

$$\| u \|_{C^\alpha(\Omega')} \leq C\left(\sup_{\Omega}|u| + K + k\right)$$

e $\alpha = \alpha\left(N, \dfrac{\Lambda}{\lambda}, \nu d', V, q, \alpha_0\right)$, $C = C\left(N, \dfrac{\Lambda}{\lambda}, \nu, V, q, \alpha_0, d'\right)$, sendo que

$$d' = dist(\Omega', \partial\Omega - T) \quad \text{e} \quad k = \lambda^{-1}\left(\| f \|_{L^q(\Omega)} + \| g \|_{L^{\frac{q}{2}}(\Omega)}\right).$$

Se $\Omega = \Omega'$, d representa o $diam(\Omega)$.

- Neste trabalho (a_{ij}) é a matriz identidade, $\phi = 0$, g é L^∞ e $f = 0$.

Teorema 2.8 (Princípio Forte do Máximo)**.** Seja L um operador satisfazendo as mesmas condições (i), (ii) e (iii) do Teorema 2.6 e seja $u \in W^{1,2}(\Omega)$ tal que $Lu \geq 0$ em Ω. Se para alguma bola $B \subset\subset \Omega$, temos

$$\sup_B u = \sup_\Omega u \geq 0,$$

então, a função u é constante em Ω.

Lema 2.2 (Hopf)**.** Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tal que

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x) u_{x_i} + C(x) u \leq 0$$

$a)$ Suponhamos $C(x) = 0$ e que existe $x_0 \in \partial\Omega$ tal que $u(x) < u(x_0)$, $\forall x \in \Omega$. Se x_0 satisfaz a condição da bola interior, então, $\dfrac{\partial u}{\partial n}(x_0) > 0$.
$b)$ Suponhamos $C(x) \geq 0$, $u(x_0) \geq 0$ e $u(x_0) > u(x)$ para todo $x \in \Omega$, $x_0 \in \partial\Omega$ com a condição da bola interior, então, $\dfrac{\partial u}{\partial n}(x_0) > 0$.

Teorema 2.9 (Teorema da Solução de Euler-Lagrange)**.** Seja L um lagrangiano que satisfaz as condições de crescimento

$$\begin{aligned} |L(s,z,x)| &\leq C(|s|^q + |z|^q + 1) \\ |D_s L(s,z,x)| &\leq C(|s|^{q-1} + |z|^{q-1} + 1) \\ |D_z L(s,z,x)| &\leq C(|s|^{q-1} + |z|^{q-1} + 1) \end{aligned}$$

onde $C > 0$ é uma constante que independe de s, z e x. Se $u_0 \in W^{1,q}(\Omega)$ é um mínimo do funcional

$$J(u) = \int_\Omega L(\nabla u, u, x)\,dx$$

então, u_0 satisfaz

$$\int_\Omega D_s L(\nabla u_0, u_0, x) \nabla\varphi\, dx + \int_\Omega D_z L(\nabla u_0, u_0, x)\varphi\, dx = 0,$$

para toda $\varphi \in W_0^{1,q}(\Omega)$. Ou seja, u_0 é uma solução fraca de

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \left(L_{s_i}(\nabla u, u, x)\right)_{x_i} + L_z(\nabla u, u, x) = 0 & \text{em } \Omega \\ u = g & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Definição 2.9. Definimos a solução do problema (1.1) como sendo uma função $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, que é solução fraca do problema

$$\begin{cases} -\Delta u & = & f(x,u) & \text{em} & \Omega \\ u & \geq & 0 & \text{em} & \Omega \\ u & \neq & 0 & \text{em} & \Omega \\ u & = & 0 & \text{em} & \partial\Omega \end{cases}$$

isto é,

$$\int_\Omega \nabla u_0 \nabla \varphi dx = \int_\Omega f(x,u_0)\varphi(x)dx$$

$\forall \varphi \in H_0^1$ e $u_0 \geq 0$ e $u_0 \not\equiv 0$ em Ω.

Definição 2.10. Neste trabalho, $\lambda_1(-\Delta - a(x))$ denota o primeiro autovalor do operador $(-\Delta - a(x))$ com condição de Dirichlet zero, onde $a(x)$ representa $a_0(x)$ ou $a_\infty(x)$.

3 Unicidade

Nesta seção mostraremos a unicidade de solução do problema (1.1). Primeiro observe que das afirmações $(H_1), (H_2)$ e (H_3), a função $f(x,u)$ está em $L^{\infty}(\Omega)$, onde $u : \Omega \to (0,+\infty)$ é solução fraca limitada de (1.1). De fato, suponha $u > 0$ em Ω e tome $x \in \Omega$. Então,

$$\begin{aligned}
-\frac{\mid f(x, \| u \|_{\infty}) \mid}{\| u \|_{\infty}} &\leq \frac{f(x, \| u \|_{\infty})}{\| u \|_{\infty}} &\leq \frac{f(x,u(x))}{u(x)} \\
&\leq \frac{\mid f(x,u(x)) \mid}{u(x)} &\leq \frac{C(\mid u(x) \mid +1)}{u(x)}
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$-\frac{\mid f(x, \| u \|_{\infty}) \mid}{\| u \|_{\infty}} \leq \frac{f(x,u(x))}{u(x)} \leq \frac{C(\mid u(x) \mid +1)}{u(x)}.$$

Multiplicando estas desigualdades por $u(x) \in (0,+\infty)$, obtemos

$$-\frac{u(x)}{\| u \|_{\infty}} \mid f(x, \| u \|_{\infty}) \mid \leq f(x,u(x)) \leq C(\mid u(x) \mid +1).$$

Agora, como $\| u \|_{\infty} \geq u(x), \quad \forall u \in H_0^1$, segue que, $-1 \leq -\dfrac{u(x)}{\| u \|_{\infty}}$. Assim,

$$- \mid f(x, \| u \|_{\infty}) \mid \leq -\frac{u(x)}{\| u \|_{\infty}} \mid f(x, \| u \|_{\infty}) \mid .$$

Portanto,

$$- \mid f(x, \| u \|_{\infty}) \mid \leq f(x,u(x)) \leq C(\mid u(x) \mid +1)$$

Com isso, provamos que, $f(x,u)$ está em $L^{\infty}(\Omega)$.

Observação 3.1. A partir disso, $f \in L^p$ para $p \leq \infty$ e, pela Teoria de Regularidade, que trata da desigualdade de Calderon-Zygmund, (ver Teorema 9.15, [TG]), temos que $u \in W^{2,p}(\Omega)$ para cada $1 < p < \infty$. Logo, u tem derivada segunda em L^p e, portanto, Δu está definido quase sempre em Ω e $-\Delta u(x) = f(x,u(x))$ quase sempre em Ω. Queremos ressaltar que, ao longo do trabalho, ora omitiremos a terminologia "q.t.p."(quase todo ponto), para o laplaciano de u e ora o explicitaremos. Além disso, como $f(x,u) \in L^{\infty}(\Omega)$, então $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, conforme o Teorema 2.6.

Provaremos agora um Lema que será utilizado na prova da unicidade.

Lema 3.1. Suponhamos que,

. para quase todo $x \in \Omega$, a função $t \longmapsto f(x,t)$ é contínua em $[0,+\infty)$ e a função $t \longmapsto \dfrac{f(x,t)}{t}$ é estritamente decrescente em $(0,+\infty)$;

. para cada $t \geq 0$ a função $x \longmapsto f(x,t)$ está em $L^{\infty}(\Omega)$;

. $u = u(x)$ é solução do problema (1.1).

Então temos:

$$u > 0 \quad \text{em } \Omega \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial n} < 0 \quad \text{em } \partial\Omega.$$

Prova: Por hipótese, u é solução do problema (1.1), logo, $u \geq 0$. Pela definição de norma, temos, $u \leq \| u \|_{\infty}$, $\forall u \in H_0^1(\Omega)$. Logo, $\dfrac{f(x,u)}{u} \geq \dfrac{f(x, \| u \|_{\infty})}{\| u \|_{\infty}}$, já que a função $t \longmapsto \dfrac{f(x,t)}{t}$ é estritamente decrescente em $(0,+\infty)$. Por hipótese, para $t = \| u \|_{\infty} > 0$, temos que a função $x \mapsto f(x,t)$ é L^{∞}. Logo, $\exists \widetilde{M} > 0$ tal que $|f(x, \| u \|_{\infty})| \leq \widetilde{M}$. Daí, como $\| u \|_{\infty} > 0$, temos

$$\frac{|f(x, \| u \|_{\infty})|}{\| u \|_{\infty}} \leq \frac{\widetilde{M}}{\| u \|_{\infty}} =: M$$

Logo, pelas propriedades de módulo,

$$\frac{f(x, \| u \|_{\infty})}{\| u \|_{\infty}} \geq -M.$$

Com isso,

$$\frac{f(x,u)}{u} \geq -M \quad \Leftrightarrow \quad f(x,u) \geq -Mu.$$

Mas u é solução de (1.1), logo, u satisfaz $-\Delta u = f(x,u)$ em qtp Ω. Então, para $M \geq 0$,

$$-\Delta u \geq -Mu \quad \Leftrightarrow \quad -\Delta u + Mu \geq 0.$$

Considere o funcional $Lw = -\Delta w + Mw$ em Ω. Note que Ω é um domínio limitado com fronteira suave, logo Ω satisfaz a condição da bola interior para todos os pontos $x_0 \in \Omega$. Suponha, por contradição, que, para algum ponto x^* no interior de Ω, temos $u(x^*) = 0$. Logo, u assume um mínimo não-positivo em $\overline{\Omega}$, pelo Princípio Forte do Máximo para soluções fracas (ver [TG], Teorema 8.19) , com $M = C \geq 0$ e $Lu = -\Delta u + Mu \geq 0$ em Ω, resulta que u é constante dentro dos limites de Ω. Como $u(x^*) = 0$, para x^* no interior de Ω, então, $u \equiv 0$ em Ω, mas u é solução do problema (1.1). Logo, $u \not\equiv 0$ em Ω. Contradição! Portanto $u > 0$ em Ω.

Além disso, usando o Princípio do Máximo para soluções fracas, podemos demonstrar o Lema de Hopf para soluções fracas de classe C^1. Logo,

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x_0) < 0, \qquad \forall x_0 \in \partial\Omega.$$

Dessa forma, provamos o Lema 3.1. $\square$

Observação 3.2. Embora, originalmente o Lema de Hopf seja válido para $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ (ver [TG]), podemos estendê-lo para u em $C^1(\overline{\Omega})$, pelos Teoremas de aproximações existentes na Análise clásssica (ver [E]).

Prova: [Unicidade] Suponha, por contradição, que u_1 e u_2 são duas soluções distintas do problema (1.1). Pelo Lema 3.1, $u_1 > 0$ e $u_2 > 0$. Então, u_1 e u_2, satisfazem as seguintes identidades,

$$\frac{-\Delta u_1}{u_1} = \frac{f(x,u_1)}{u_1} \quad \text{e} \quad \frac{-\Delta u_2}{u_2} = \frac{f(x,u_2)}{u_2} \quad \text{q.t.p.} \quad \Omega,$$

com $u_1 = u_2 = 0$ em $\partial\Omega$. Fazendo a diferença das igualdades acima, obtemos,

$$-\frac{\Delta u_1}{u_1} + \frac{\Delta u_2}{u_2} \;=\; \frac{f(x,u_1)}{u_1} - \frac{f(x,u_2)}{u_2}.$$

Multiplicando esta igualdade por $(u_1^2 - u_2^2)$ e integrando em Ω, temos,

$$\int_\Omega (u_1^2 - u_2^2)\left(-\frac{\Delta u_1}{u_1} + \frac{\Delta u_2}{u_2}\right)dx = \int_\Omega (u_1^2 - u_2^2)\left(\frac{f(x,u_1)}{u_1} - \frac{f(x,u_2)}{u_2}\right)dx.$$

Usando a distributividade e organizando os fatores no lado esquerdo da igualdade, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (u_1^2 - u_2^2)\left(-\frac{\Delta u_1}{u_1} + \frac{\Delta u_2}{u_2}\right)dx &= \\
&= -\int_\Omega \frac{(u_1^2 - u_2^2)}{u_1}\Delta u_1 dx + \int_\Omega \frac{(u_1^2 - u_2^2)}{u_2}\Delta u_2 dx \\
&= -\int_\Omega \left(u_1 - \frac{u_2^2}{u_1}\right)\Delta u_1 dx + \int_\Omega \left(\frac{u_1^2}{u_2} - u_2\right)\Delta u_2 dx.
\end{aligned}$$

Note que se $\frac{u_1^2}{u_2}$ e $\frac{u_2^2}{u_1}$ estão em $H_0^1(\Omega)$, então o Teorema da Divergência aplicado a cada uma das integrais obtidas, implica

$$-\int_\Omega \left(u_1 - \frac{u_2^2}{u_1}\right)\Delta u_1 dx + \int_\Omega \left(\frac{u_1^2}{u_2} - u_2\right)\Delta u_2 dx =$$

$$= \int_\Omega \nabla\left(u_1 - \frac{u_2^2}{u_1}\right).\nabla u_1 dx - \int_\Omega \nabla\left(\frac{u_1^2}{u_2} - u_2\right).\nabla u_2 dx. \tag{3.1}$$

Veremos agora que $\dfrac{u_1^2}{u_2}$ e $\dfrac{u_2^2}{u_1}$ estão em H_0^1 e vale

$$\nabla\left(\frac{u_2^2}{u_1}\right) = \frac{2u_2(\nabla u_2)u_1 - u_2^2\nabla u_1}{u_1^2} = \frac{2u_2}{u_1}\nabla u_2 - \frac{u_2^2}{u_1^2}\nabla u_1$$

$$\nabla\left(\frac{u_1^2}{u_2}\right) = \frac{2u_1(\nabla u_1)u_2 - u_1^2\nabla u_2}{u_2^2} = \frac{2u_1}{u_2}\nabla u_1 - \frac{u_1^2}{u_2^2}\nabla u_2$$

Além disso, $\dfrac{u_1}{u_2}$ e $\dfrac{u_2}{u_1}$ estão em L^∞. Note que basta mostrar que $\dfrac{u_2}{u_1}$ e $\dfrac{u_1}{u_2}$ são limitados.

Suponhamos que $\dfrac{u_2}{u_1}$ não seja limitado em $\overline{\Omega}$. Logo, existe $x_n \in \overline{\Omega}$ tal que $\left(\dfrac{u_2}{u_1}\right)(x_n) \to +\infty$. Como $\overline{\Omega}$ é compacto, existe uma subseqüência $x_k := x_{n_k}$ tal que $x_k \to x_0 \in \overline{\Omega}$.

1º caso: $x_0 \in \Omega$.
Pela continuidade e positividade de u_1 e u_2 em Ω, então,

$$\frac{u_2(x_n)}{u_1(x_n)} \longrightarrow \frac{u_2(x_0)}{u_1(x_0)} < +\infty.$$

Contradizendo $\left(\dfrac{u_2}{u_1}\right)(x_n) \to +\infty$.

2º caso: $x_0 \in \partial\Omega$.
Seja y_n um ponto de $\partial\Omega$ tal que $d(x_n, y_n) = d(x_n, \partial\Omega)$. Note que, $d(x_n, y_n) = d(x_n, \partial\Omega) \le d(x_n, x_0)$. Como $x_n \to x_0$ e então $d(x_n, y_n) \to 0$ e $y_n \to x_0$. Além disso, $u_1(y_n) = u_2(y_n) = 0$, então, vale a igualdade

$$\left|\frac{u_2(x_n)}{u_1(x_n)}\right| = \left|\frac{u_2(x_n) - u_2(y_n)}{u_1(x_n) - u_1(y_n)}\right|. \tag{3.2}$$

Note que, podemos escrever

$$\begin{aligned} u_2(x_n) &= u_2(y_n) + \nabla u_2(y_n)(x_n - y_n) + r_{y_n}^2(x_n - y_n) = \\ &= u_2(y_n) - |\nabla u_2(y_n)||x_n - y_n| + r_{y_n}^2(x_n - y_n) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} u_1(x_n) &= u_1(y_n) + \nabla u_1(y_n)(x_n - y_n) + r^1_{y_n}(x_n - y_n) = \\ &= u_1(y_n) - |\nabla u_1(y_n)||x_n - y_n| + r^1_{y_n}(x_n - y_n), \end{aligned}$$

pois $x_n - y_n$ é um múltiplo de $\nabla u_2(y_n)$ e $\nabla u_1(y_n)$. Assim, substituindo em (3.2), temos

$$\begin{aligned} \frac{|u_2(x_n) - u_2(y_n)|}{|u_1(x_n) - u_1(y_n)|} &= \frac{\big|-|\nabla u_2(y_n)||x_n - y_n| + r^2_{y_n}(x_n - y_n)\big|}{\big|-|\nabla u_1(y_n)||x_n - y_n| + r^1_{y_n}(x_n - y_n)\big|} \\ &\leq \frac{|\nabla u_2(y_n)| + \dfrac{\big|r^2_{y_n}(x_n - y_n)\big|}{|x_n - y_n|}}{|\nabla u_1(y_n)| - \dfrac{\big|r^1_{y_n}(x_n - y_n)\big|}{|x_n - y_n|}}. \end{aligned}$$

Para um dado $0 < \varepsilon < \min\{|\nabla u_2|, |\nabla u_1|\}$, numa vizinhança de x_0, existe $\delta > 0$ tal que se $|x_n - y_n| < \delta$, temos

$$\begin{aligned} \frac{|\nabla u_2(y_n)| + \dfrac{\big|r^2_{y_n}(x_n - y_n)\big|}{|x_n - y_n|}}{|\nabla u_1(y_n)| - \dfrac{\big|r^1_{y_n}(x_n - y_n)\big|}{|x_n - y_n|}} &\leq \frac{|\nabla u_2(y_n)| + \dfrac{\varepsilon\,|x_n - y_n|}{|x_n - y_n|}}{|\nabla u_1(y_n)| - \dfrac{\varepsilon\,|x_n - y_n|}{|x_n - y_n|}} \\ &= \frac{|\nabla u_2(y_n)| + \varepsilon}{|\nabla u_1(y_n)| - \varepsilon} = \frac{\left|\dfrac{\partial u_2}{\partial n}(y_n)\right| + \varepsilon}{\left|\dfrac{\partial u_1}{\partial n}(y_n)\right| - \varepsilon} \\ &\leq K, \end{aligned}$$

numa vizinhança de x_0, visto que $\dfrac{\partial u_2}{\partial n}(x_0)$ e $\dfrac{\partial u_1}{\partial n}(x_0)$ são negativos pelo Lema 3.1. Logo,

$$\frac{|u_2(x_n) - u_2(y_n)|}{|u_1(x_n) - u_1(y_n)|} \leq K, \quad \text{numa vizinhança de} \quad x_0,$$

contradizendo $\left(\dfrac{u_2}{u_1}\right)(x_n) \to +\infty$, pois x_0. Logo $\dfrac{u_2}{u_1}$ é limitado. Assim, podemos aplicar o Teorema da Divergência em (3.1) obtendo

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \big(u_1^2 - u_2^2\big)\left(-\frac{\Delta u_1}{u_1} + \frac{\Delta u_2}{u_2}\right)dx = \\ &\qquad = \int_\Omega \nabla\left(u_1 - \frac{u_2^2}{u_1}\right)\cdot \nabla u_1 dx - \int_\Omega \nabla\left(\frac{u_1^2}{u_2} - u_2\right)\cdot \nabla u_2 dx \end{aligned}$$

Lembrando que o gradiente tem a propriedade $\nabla(a-b)=\nabla a-\nabla b$, temos

$$\int_\Omega \nabla\left(u_1-\frac{u_2^2}{u_1}\right)\cdot\nabla u_1dx-\int_\Omega\nabla\left(\frac{u_1^2}{u_2}-u_2\right)\cdot\nabla u_2dx=$$

$$=\int_\Omega\nabla u_1\cdot\nabla u_1-\nabla\left(\frac{u_2^2}{u_1}\right)\cdot\nabla u_1dx-\int_\Omega\nabla\left(\frac{u_1^2}{u_2}\right)\cdot\nabla u_2-\nabla u_2\cdot\nabla u_2dx.$$

Aplicando a regra da cadeia nas identidades obtidas, resulta

$$\int_\Omega\nabla u_1\cdot\nabla u_1-\nabla\left(\frac{u_2^2}{u_1}\right).\nabla u_1dx-\int_\Omega\nabla\left(\frac{u_1^2}{u_2}\right)\cdot\nabla u_2-\nabla u_2\cdot\nabla u_2dx=$$

$$\begin{aligned}
&= \int_\Omega|\nabla u_1|^2-\left(2\frac{u_2}{u_1}\nabla u_2-\frac{u_2^2}{u_1^2}\nabla u_1\right)\cdot\nabla u_1dx-\\
&\qquad -\int_\Omega\left(2\frac{u_1}{u_2}\nabla u_1-\frac{u_1^2}{u_2^2}\nabla u_2\right)\cdot\nabla u_2-|\nabla u_2|^2dx=\\
&= \int_\Omega|\nabla u_1|^2-2\frac{u_2}{u_1}\nabla u_2\cdot\nabla u_1+\left|\frac{u_2}{u_1}\nabla u_1\right|^2dx-\\
&\qquad -\int_\Omega 2\frac{u_1}{u_2}\nabla u_1.\nabla u_2-\left|\frac{u_1}{u_2}\nabla u_2\right|^2-|\nabla u_2|^2dx.
\end{aligned}$$

Note que, os domínios de integração são os mesmos. Portanto, podemos organizar as integrais de forma conveniente e obter polinômios quadráticos, que são quadrados perfeitos. Ou seja,

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega|\nabla u_1|^2-2\frac{u_2}{u_1}\nabla u_2\cdot\nabla u_1+\left|\frac{u_2}{u_1}\nabla u_1\right|^2dx-\\
&\qquad -\int_\Omega 2\frac{u_1}{u_2}\nabla u_1\cdot\nabla u_2-\left|\frac{u_1}{u_2}\nabla u_2\right|^2-|\nabla u_2|^2dx=\\
&= \int_\Omega|\nabla u_1|^2-2\frac{u_1}{u_2}\nabla u_1\cdot\nabla u_2+\left|\frac{u_1}{u_2}\nabla u_2\right|^2dx+\\
&\qquad +\int_\Omega|\nabla u_2|^2-2\frac{u_2}{u_1}\nabla u_2\cdot\nabla u_1+\left|\frac{u_2}{u_1}\nabla u_1\right|^2dx=\\
&= \int_\Omega\left|\nabla u_1-\frac{u_1}{u_2}\nabla u_2\right|^2+\left|\nabla u_2-\frac{u_2}{u_1}\nabla u_1\right|^2dx.
\end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$\int_\Omega (u_1^2 - u_2^2)\left(-\frac{\Delta u_1}{u_1} + \frac{\Delta u_2}{u_2}\right)dx = \int_\Omega (u_1^2 - u_2^2)\left(\frac{f(x,u_1)}{u_1} - \frac{f(x,u_2)}{u_2}\right)dx.$$

Então,

$$\int_\Omega \left(\frac{f(x,u_1)}{u_1} - \frac{f(x,u_2)}{u_2}\right)(u_1^2 - u_2^2)dx =$$

$$= \int_\Omega \left|\nabla u_1 - \frac{u_1}{u_2}\nabla u_2\right|^2 + \left|\nabla u_2 - \frac{u_2}{u_1}\nabla u_1\right|^2 dx \geq 0.$$

Assim,

$$\int_\Omega \left(\frac{f(x,u_1)}{u_1} - \frac{f(x,u_2)}{u_2}\right)(u_1^2 - u_2^2)dx \geq 0.$$

Suponhamos que para algum $x_0 \in \Omega$, $u_1(x_0) \neq u_2(x_0)$. Logo, ou $u_1(x_0) > u_2(x_0)$ ou $u_1(x_0) < u_2(x_0)$. Suponhamos $u_1(x_0) > u_2(x_0)$, assim temos $\left(u_1^2 - u_2^2\right)(x_0) > 0$ e, além disso, como pela hipótese (H_1), a função $t \longmapsto \dfrac{f(x,t)}{t}$ é estritamente decrescente em $(0,\infty)$, temos

$$\frac{f(x_0,u_1(x_0))}{u_1(x_0)} < \frac{f(x_0,u_2(x_0))}{u_2(x_0)} \quad \Rightarrow \quad \frac{f(x_0,u_1(x_0))}{u_1(x_0)} - \frac{f(x_0,u_2(x_0))}{u_2(x_0)} < 0.$$

Da mesma forma, se $u_1(x_0) < u_2(x_0)$, temos $\left(u_1^2 - u_2^2\right)(x_0) < 0$ e então,

$$\frac{f(x_0,u_1(x_0))}{u_1(x_0)} - \frac{f(x_0,u_2(x_0))}{u_2(x_0)} > 0.$$

Logo,

$$\int_\Omega \left(\frac{f(x,u_1)}{u_1} - \frac{f(x,u_2)}{u_2}\right)(u_1^2 - u_2^2)dx < 0$$

e, portanto, temos uma contradição! Ou seja, a solução é única. □

Observação 3.3. Se assumirmos, na hipótese (H_2) que a função $t \longmapsto \dfrac{f(x,t)}{t}$ é não-crescente em $(0,\infty)$ q.s. Ω, então a unicidade pode falhar. Considere, por exemplo, $f(x,t) = \lambda_1 t$, onde λ_1 é o primeiro autovalor de $-\Delta$ em Ω. Logo, as soluções são autofunções. Sejam u_1 e u_2 autofunções distintas e positivas ($u_2 = \alpha u_1,\ \ \alpha > 0,\ \ \alpha \neq 1$) de $-\Delta$ associados à λ_1. Logo, neste caso, o resultado é falso.

4 Condições (1.2) e (1.3) são Necessárias

Nesta seção, vamos mostrar que, se existe solução de (1.1), então (1.2) e (1.3) valem. Primeiro observe que, para quase todo $x \in \Omega$,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(x,t)}{t} \;=\; a_\infty(x) \;\leq\; f(x,1)$$

e

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x,t)}{t} \;=\; a_0(x) \;\geq\; f(x,1),$$

pois $\dfrac{f(x,t)}{t}$ é uma função estritamente decrescente em t. Portanto, se $t<1$ então $\dfrac{f(x,t)}{t} > \dfrac{f(x,1)}{1} = f(x,1)$ e, se $t>1$, então $\dfrac{f(x,t)}{t} < \dfrac{f(x,1)}{1} = f(x,1)$. Logo, existe uma constante C tal que $a_\infty(x) \leq C$ e $a_0(x) \geq -C$, quase sempre em Ω.

Daremos agora, a formulação explícita para o primeiro autovalor associado ao operador $(-\Delta - a(x))$. Pelo quociente de Rayleigh,

$$\lambda_1(-\Delta - a(x)) = \inf_{\substack{\phi \in H_0^1 \\ \|\phi\|_{L^2}=1}} \left\{ \int_\Omega |\nabla \phi|^2\, dx - \int_\Omega a(x)\phi^2 dx \right\}.$$

Note que, para que, $\displaystyle\int_\Omega a(x)\phi(x)^2 dx$, faça sentido, basta exigir que $a(x)$ seja qualquer função mensurável tal que ou $a(x) \leq C$ ou $a(x) \geq -C$, quase sempre em Ω. De fato,

- Se $a(x)$ é função mensurável limitada superiormente, ou seja, $a(x) \leq C$, quase sempre em Ω, então,

$$\begin{aligned}
\lambda_1(-\Delta - a(x)) &= \inf_{\substack{\phi \in H_0^1 \\ \|\phi\|_{L^2}=1}} \left\{ \int_\Omega |\nabla \phi(x)|^2\, dx - \int_\Omega a(x)\phi(x)^2 dx \right\} \\
&\geq \inf_{\substack{\phi \in H_0^1 \\ \|\phi\|_{L^2}=1}} \left\{ \int_\Omega |\nabla \phi(x)|^2\, dx - C\int_\Omega \phi(x)^2 dx \right\} \\
&= \inf_{\substack{\phi \in H_0^1 \\ \|\phi\|_{L^2}=1}} \left\{ \|\phi\|_{H_0^1}^2 - C\,\|\phi\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\} \\
&= \inf_{\substack{\phi \in H_0^1 \\ \|\phi\|_{L^2}=1}} \|\phi\|_{H_0^1}^2 - C \\
&\geq -k_1,
\end{aligned}$$

para alguma constante $k_1 \geq 0$. Assim, no caso de $a(x)$ ser limitada superiormente, temos que, $\lambda_1(-\Delta - a(x))$ é limitado inferiormente. Ou seja, $\lambda_1(-\Delta - a(x)) \in (-\infty, +\infty]$.

- Se $a(x)$ é uma função mensurável limitada inferiormente, ou seja, $a(x) \geq -C$, quase sempre em Ω, temos,

$$\begin{aligned}
\lambda_1(-\Delta - a(x)) &= \inf_{\substack{\phi \in H_0^1 \\ \|\phi\|^2 = 1}} \left\{ \int_\Omega |\nabla \phi|^2 \, dx - \int_\Omega a(x)\phi^2 dx \right\} \\
&\leq \inf_{\substack{\phi \in H_0^1 \\ \|\phi\|_{L^2} = 1}} \left\{ \int_\Omega |\nabla \phi|^2 \, dx + C \int_\Omega \phi^2 dx \right\} \\
&= \inf_{\substack{\phi \in H_0^1 \\ \|\phi\|_{L^2} = 1}} \left\{ \| \phi \|_{H_0^1}^2 + C \| \phi \|_{L^2(\Omega)}^2 \right\} \\
&= \inf_{\substack{\phi \in H_0^1 \\ \|\phi\|_{L^2} = 1}} \| \phi \|_{H_0^1}^2 + C \\
&\leq k_2,
\end{aligned}$$

para alguma constante $k_2 \geq 0$. Neste caso, se $a(x)$ é limitada inferiormente, então $\lambda_1(-\Delta - a(x))$ é limitado superiormente, isto é, $\lambda_1(-\Delta - a(x)) \in [-\infty, +\infty)$.

Sintetizando estes resultados, defina, $k := max\{k_1, k_2\}$. Assim,

$$\begin{aligned}
a(x) \leq C \quad &\Rightarrow \quad \lambda_1(-\Delta - a(x)) \geq -k \quad \Rightarrow \quad \lambda_1(-\Delta - a(x)) \in (-\infty, +\infty]. \\
a(x) \geq -C \quad &\Rightarrow \quad \lambda_1(-\Delta - a(x)) \leq k \quad \Rightarrow \quad \lambda_1(-\Delta - a(x)) \in [-\infty, +\infty).
\end{aligned}$$

Nossa intenção é obter resultados para $\lambda_1(-\Delta - a_0(x))$ e para $\lambda_1(-\Delta - a_\infty(x))$. Então, juntando os resultados que já mostramos, obtemos,

$$\begin{aligned}
a_\infty(x) \;\leq\; f(x,1) \;\leq\; C \quad &\Rightarrow \quad \lambda_1(-\Delta - a_\infty(x)) \in (-\infty, +\infty]. \\
a_0(x) \;\geq\; f(x,1) \;\geq\; -C \quad &\Rightarrow \quad \lambda_1(-\Delta - a_0(x)) \in [-\infty, +\infty).
\end{aligned}$$

O que é um bom sinal, pois a última inclusão nos mostra que temos, pelo menos, $\lambda_1(-\Delta - a_0(x)) \neq +\infty$ e $\lambda_1(-\Delta - a_\infty(x)) \neq -\infty$. Vamos mostrar, finalmente, que $\lambda_1(-\Delta - a_0(x)) < 0$ e que $\lambda_1(-\Delta - a_\infty(x)) > 0$. Para as próximas duas afirmações, vamos supor que existe solução fraca limitada, $u_0 \in H_0^1$, do problema (1.1), ou seja, u_0 satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(x,u) & \text{em} & \Omega \\ u &\geq 0 & \text{em} & \Omega \\ u &\neq 0 & \text{em} & \Omega \\ u &= 0 & \text{em} & \partial\Omega \end{cases}$$

no sentido fraco. Nestas condições, seguem os próximos dois resultados.

Afirmação 4.1. O primeiro autovalor associado ao operador $(-\Delta - a_0(x))$ é negativo. Ou seja, $\lambda_1(-\Delta - a_0(x)) < 0$.

Prova: Pela definição do primeiro autovalor associado ao operador $(-\Delta - a(x))$, temos, para o operador $(-\Delta - a_0(x))$,

$$\begin{aligned} \lambda_1(-\Delta - a_0(x)) &= \inf_{\substack{u \in H_0^1 \\ \|u\|_{L^2}=1}} \left\{ \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \int_\Omega a_0 u^2 dx \right\} \\ &\leq \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \int_\Omega a_0 u^2 dx}{\displaystyle\int_\Omega u^2 dx}, \end{aligned}$$

para todo u em H_0^1, não identicamente nulo. Note que, a desigualdade decorre, naturalmente, da definição de ínfimo. Como esta desigualdade vale para todo u em H_0^1, vale, em particular, para u_0 solução do problema (1.1). Ou seja,

$$\lambda_1(-\Delta - a_0(x)) \leq \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u_0|^2 \, dx - \int_\Omega a_0 u_0^2 dx}{\displaystyle\int_\Omega u_0^2 dx}. \tag{4.1}$$

Note que, o quociente está bem definido, pois $u_0 \neq 0$ em Ω. Além disso, da definição de solução fraca, temos

$$\int_\Omega |\nabla u_0|^2 \, dx = \int_\Omega f(x, u_0) u_0 dx. \tag{4.2}$$

Da hipótese (H_1), a função $\dfrac{f(x,t)}{t}$ é estritamente decrescente em t, logo,

$$a_0(x) = \lim_{u \to 0} \frac{f(x,u)}{u} > \frac{f(x,u)}{u}, \qquad \forall u(x) \in (0, +\infty).$$

Assim, em particular, vale para $u_0(x) \in (0, +\infty)$, portanto,

$$f(x, u_0) < a_0(x) u_0.$$

Substituindo este resultado em (4.2), temos

$$\int_\Omega | \nabla u_0 |^2 \, dx = \int_\Omega f(x, u_0) u_0 dx < \int_\Omega a_0(x) u_0^2 dx,$$

o que implica em

$$\int_\Omega | \nabla u_0 |^2 \, dx - \int_\Omega a_0(x) u_0^2 dx < 0.$$

Logo, o lado direito da desigualdade (4.1) é estritamente negativo, ou seja,

$$\lambda_1(-\nabla - a_0(x)) \leq \frac{\displaystyle\int_\Omega | \nabla u_0 |^2 \, dx - \int_\Omega a_0 u_0^2 dx}{\displaystyle\int_\Omega u_0^2 dx} < 0,$$

já que $\| u_0 \|_{L^2}^2 = \displaystyle\int_\Omega u_0^2 dx > 0$. Portanto, o primeiro autovalor associado ao operador $(-\Delta - a_0(x))$ é negativo, isto é,

$$\lambda_1(-\Delta - a_0(x)) < 0.$$

Concluímos, portanto, a Afirmação 4.1.

$\square$

Afirmação 4.2. O primeiro autovalor associado ao operador $(-\Delta - a_\infty(x))$ é positivo. Ou seja, $\lambda_1(-\Delta - a_\infty(x)) > 0$.

Prova: Defina

$$\widetilde{a}(x) := \frac{f(x, \| u \|_\infty + 1)}{\| u \|_\infty + 1}.$$

Observe que, $\widetilde{a}(x) \in L^\infty(\Omega)$, pois, pela hipótese (H_2), $\forall t \geq 0$, a função f é L^∞ em x e, neste caso, $t = \| u \|_\infty + 1$. Definimos, ainda, o primeiro autovalor associado ao operador $(-\Delta - \widetilde{a}(x))$ por

$$\mu := \lambda_1(-\Delta - \widetilde{a}(x)).$$

E, finalmente, definimos ψ como sendo uma autofunção correspondente a μ. Logo, μ e ψ, satisfazem

$$\begin{cases} (-\Delta - \widetilde{a})\psi &= \mu\psi \quad \text{em} \quad \Omega \\ \psi &> 0 \quad \text{em} \quad \Omega \\ \psi &= 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Por outro lado, multiplicando a equação, $-\Delta u_0 = f(x, u_0)$ por ψ e integrando em Ω, temos,

$$\int_\Omega -\Delta u_0 \psi dx = \int_\Omega f(x, u_0)\psi dx.$$

Aplicando o teorema da Divergência a

$$\int_\Omega -\Delta u_0 \psi dx \qquad \text{e} \quad \text{a} \qquad \int_\Omega u_0 \Delta \psi dx,$$

e lembrando que, u_0 e ψ satisfazem $u_0 = 0 = \psi$ em $\partial\Omega$, o que implica nas integrais de fronteira serem zero, temos

$$\int_\Omega -\Delta u_0 \psi dx \;=\; \int_\Omega \nabla u_0 \nabla \psi dx \quad \text{e} \quad \int_\Omega -u_0 \Delta \psi dx \;=\; \int_\Omega \nabla u_0 \nabla \psi dx.$$

Logo,

$$\int_\Omega \Delta u_0 \psi dx = \int_\Omega u_0 \Delta \psi dx.$$

Mas, ψ é autofunção associada ao autovalor μ. Então, μ e ψ satisfazem $-\Delta\psi - \widetilde{a}(x)\psi = (-\Delta - \widetilde{a}(x))\psi = \mu\psi$ em Ω. Ou seja, $-\Delta\psi = \widetilde{a}(x)\psi + \mu\psi$ em Ω. Assim,

$$\int_\Omega -\Delta u_0 \psi dx = \int_\Omega -u_0 \Delta \psi dx = \int_\Omega u_0(\widetilde{a}(x)\psi + \mu\psi)dx.$$

Aplicando a distributividade, as propriedades de integrais, e lembrando que $-\Delta u_0 = f(x, u_0)$ em Ω, temos

$$\int_\Omega f(x, u_0)\psi dx = \int_\Omega \widetilde{a}(x)\psi u_0 dx + \mu \int_\Omega u_0 \psi dx. \tag{4.3}$$

Note que $\| u \|_\infty + 1 > \| u \|_\infty \geq u(x)$, para todo $u \in H_0^1$ e, como a função $\dfrac{f(x,t)}{t}$ é estritamente decrescente em t, temos, para todo $u(x) \in (0, +\infty)$, que

$$\widetilde{a}(x) = \frac{f(x, \| u \|_\infty + 1)}{\| u \|_\infty + 1} < \frac{f(x, u)}{u}.$$

Logo, em particular, vale para $u_0(x) \in (0, +\infty)$. Ou seja,

$$f(x, u_0) > \widetilde{a}(x) u_0.$$

Assim, substituindo este resultado na igualdade (4.3), temos,

$$\int_\Omega \widetilde{a}(x)\psi u_0 dx + \mu \int_\Omega u_0\psi dx = \int_\Omega f(x,u_0)\psi dx > \int_\Omega \widetilde{a}(x) u_0 \psi dx.$$

Cancelando as integrais correspondentes, resulta

$$\mu \int_\Omega u_0 \psi dx > 0.$$

Mas, $u_0 > 0$ e $\psi > 0$ em Ω. Logo, devemos ter

$$\int_\Omega u_0\psi \;\; dx \;\; > \;\; 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mu \;\; > \;\; 0.$$

Portanto, o primeiro autovalor associado ao operador $-\Delta - \widetilde{a}(x)$ é positivo. Ou seja,

$$\lambda_1(-\Delta - \widetilde{a}(x)) = \mu > 0.$$

Queremos provar que $\lambda_1(-\Delta - a_\infty(x)) > 0$. Para isto, note que, como conseqüência da hipótese (H_1), temos,

$$a_\infty(x) = \lim_{u\to\infty} \frac{f(x,u)}{u} \leq \frac{f(x, \parallel u \parallel_\infty +1)}{\parallel u \parallel_\infty +1} = \widetilde{a}(x).$$

Aplicando este resultado na definição de $\lambda_1(-\Delta - a_\infty(x))$, temos,

$$\begin{aligned}
\lambda_1(-\Delta - a_\infty(x)) &= \inf_{\substack{\phi\in H_0^1 \\ \|\phi\|_2=1}} \left\{ \int_\Omega \mid \nabla\phi \mid^2 dx - \int_\Omega a_\infty(x)\phi^2 dx \right\} \\
&\geq \inf_{\substack{\phi\in H_0^1 \\ \|\phi\|_2=1}} \left\{ \int_\Omega \mid \nabla\phi \mid^2 dx - \int_\Omega \widetilde{a}(x)\phi^2 dx \right\} \\
&= \lambda_1(-\Delta - \widetilde{a}(x)) \\
&= \mu > 0.
\end{aligned}$$

Portanto, o primeiro autovalor associado ao operador $(-\Delta - a_\infty(x))$ é positivo, isto é,

$$\lambda_1(-\Delta - a_\infty(x)) > 0.$$

Concluímos, assim, a Afirmação 4.2.

□

Portanto, se o problema (1.1) tem solução, então, além de ser única, vale

$$\lambda_1(-\Delta - a_\infty(x)) > 0 \quad \text{e} \quad \lambda_1(-\Delta - a_0(x)) < 0.$$

5 Existência

Neste capítulo, vamos mostrar que existe solução fraca de problema (1.1), com hipóteses mais fracas que as exigidas na hipótese inicial (H_1), ou seja, nas hipóteses sobre a função f. Assumiremos, para quase todo $x \in \Omega$,

$$(H_1')\begin{cases} \text{a função } t \longmapsto f(x,t) \text{ é contínua em } [0,\infty). \\ \text{para cada } \delta > 0, \exists C_\delta \geq 0 \text{ tal que } f(x,t) \geq -C_\delta t, \quad \forall t \in [0,\delta]. \end{cases}$$

Observação 5.1. Note que, $(H_1) + (H_2) \quad \Rightarrow \quad (H_1')$.
De fato, fixe $x \in \Omega$, qualquer, que satisfaça a propriedade (H_1). Seja $\delta > 0$. Pela hipótese (H_2), $\exists K \geq 0$ tal que $f(x,\delta) \geq -K$. Assim, pela hipótese (H_1),

$$\frac{f(x,t)}{t} \quad \geq \quad \frac{f(x,\delta)}{\delta}, \quad \forall t \leq \delta.$$

Ou seja,

$$f(x,t) \quad \geq \quad f(x,\delta)\frac{t}{\delta} \quad \geq \quad \frac{-K}{\delta}t \quad = \quad -Ct.$$

Usando esta desigualdade e a continuidade em t, temos $f(x,0) \geq 0$. Então, o resultado vale $\forall t \in [0,\delta]$. Ou seja,

$$f(x,t) > -Ct, \qquad \forall t \in [0,\delta].$$

Lembre-se que, δ está pré-definido, logo, $C = C(\delta) = C_\delta$. Portanto, a hipótese (H_1') é verdadeira.

Nosso resultado se fortalece com a nova hipótese, pois daremos maior liberdade à função, conforme Observação 5.1. A partir de agora, vamos considerar

$$a_0(x) := \liminf_{t\to 0} \frac{f(x,t)}{t} \quad \text{ e } \quad a_\infty(x) := \limsup_{t\to\infty} \frac{f(x,t)}{t}.$$

Com a nova hipótese, (H_1'), e com a hipótese (H_3), segue que, existe uma constante C tal que $a_0(x) \geq -C$ e $a_\infty(x) \leq C$.

Vamos enunciar e demonstrar o resultado sobre a existência de soluções. Vale lembrar que este resultado implica na existência de soluções enunciada no Teorema 1.1, pois estamos dando maior liberdade a função f, tendo, com isso, um resultado mais geral.

Teorema 5.1. Suponha que f satisfaz as seguintes hipóteses:

(H_2) para cada $t \geq 0$, a função $x \longmapsto f(x,t)$ está em $L^\infty(\Omega)$.

(H_3) $\exists C \geq 0$ tal que $f(x,t) \leq C(t+1)$ para quase todo $x \in \Omega$ e $\forall t \geq 0$.

(H_4) a função $t \longmapsto f(x,t)$ é contínua em $[0,\infty)$, para quase todo $x \in \Omega$.

(H_5) $\left\{ \begin{array}{c} \text{para cada } \delta > 0, \quad \exists C_\delta \geq 0 \text{ tal que } f(x,t) \geq -C_\delta t, \\ \forall t \in [0,\delta], \text{ para quase todo } x \in \Omega. \end{array} \right.$

(H_6) $\lambda_1(-\Delta - a_0(x)) < 0$.

(H_7) $\lambda_1(-\Delta - a_\infty(x)) > 0$.

Então, o problema

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u & = & f(x,u) & \text{em} \quad \Omega \\ u & \geq & 0 & \text{em} \quad \Omega \\ u & \neq & 0 & \text{em} \quad \Omega \\ u & = & 0 & \text{em} \quad \partial\Omega \end{array} \right.$$

tem uma solução fraca.

Faremos algumas considerações para a prova deste Teorema. Considere o funcional $E : H_0^1 \rightarrow \mathbb{R}$, dado por

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \int_\Omega F(x,u)dx, \qquad u(x) \in H_0^1(\Omega),$$

onde,

$$F(x,u) = \int_0^u f(x,t)dt.$$

Considere a seguinte extensão de $f(x,u)$,

$$\widetilde{f}(x,u) = \left\{ \begin{array}{ll} f(x,u), & \text{para } u \geq 0. \\ f(x,0), & \text{para } u \leq 0. \end{array} \right.$$

Observe que, para quase todo $x \in \Omega$, as funções, $\widetilde{f}$ e f possuem as mesmas propriedades. Por isso, continuaremos a denotar $\widetilde{f}$ por f. Então, para esta extensão f, o funcional $E(u) \in (-\infty, +\infty]$ está bem definido, já que

$$F(x,u) \leq C\left(\frac{1}{2}u^2 + |u|\right), \qquad \forall u \in H_0^1.$$

De fato, para $u \geq 0$,

$$F(x,u) \;=\; \int_0^u f(x,t)dt \;\leq\; \int_0^u C(t+1)dt \;=\; C\Big(\frac{u^2}{2}+u\Big).$$

E, se $u \leq 0$,

$$F(x,u) \;=\; \int_0^u f(x,t)dt \;=\; \int_0^u f(x,0)dt \;=\; f(x,0)u \;\leq\; 0,$$

pois, pela hipótese (H_5), $f(x,0) \geq -C_\delta.0 = 0$. Mas $\left(\frac{u^2}{2}+|u|\right) \geq 0$ para todo $u(x) \in \mathbb{R}$, logo,

$$F(x,u) \leq C\left(\frac{1}{2}u^2 + \mid u \mid\right), \qquad \forall u(x) \in \mathbb{R}. \tag{5.1}$$

Observação 5.2. Esta observação contém um resultado clássico sobre funções polinomiais, que apenas enunciaremos. Porém, o caso particular $n = 2$, é um resultado muito utilizado em nossas estimativas. Considere o polinômio $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dado por $h(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$. Então, existem constantes, A e B, tais que

$$h(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 \quad\leq\quad Ax^n + B = \widetilde{h}(x)$$

$\forall x \in [0, +\infty)$. Usaremos o caso particular em que $n = 2$.

Os próximos três lemas têm grande importância na conclusão do Teorema 5.1. Por isso, as condições e nomenclaturas envolvidas estão de acordo com a teoria até agora desenvolvida.

Lema 5.1. O funcional E é coercivo em H_0^1, isto é,

$$E(u) \longrightarrow +\infty, \quad \text{quando } \parallel u \parallel_{H_0^1} \longrightarrow +\infty.$$

Lema 5.2. O funcional E é fracamente semicontínuo inferiormente na topologia fraca H_0^1.

Lema 5.3. Existe algum $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ tal que $E(\varphi) < 0$.

Seguem, agora, suas provas.

Prova: [Lema 5.1] Suponha, por contradição, que exista uma seqüência

$$(u_n)_n \subset H_0^1(\Omega), \quad n \in \mathbb{N}, \text{ tal que } \quad \| u_n \|_{H_0^1} \longrightarrow +\infty \quad \text{e} \quad E(u_n) \leq C_1,$$

para alguma constante $C_1 \geq 0$. Ou seja,

$$E(u_n) = \frac{1}{2} \int_\Omega | \nabla u_n |^2 \, dx - \int_\Omega F(x, u_n) dx \leq C_1.$$

Portanto,

$$\frac{1}{2} \int_\Omega | \nabla u_n |^2 \, dx \leq C_1 + \int_\Omega F(x, u_n) dx.$$

Deste resultado, da definição de norma em H_0^1 e de (5.1), temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \| u_n \|_{H_0^1}^2 &\leq C_1 \quad + \quad \int_\Omega F(x, u_n) dx \\ &\leq C_1 + C \int_\Omega \left(\frac{1}{2} u_n^2 + | u_n | \right) dx \\ &\leq C_2 \int_\Omega \left(\frac{1}{2} u_n^2 + | u_n | + 1 \right) dx \\ &\leq C_3 \int_\Omega \left(u_n^2 + 1 \right) dx, \end{aligned}$$

onde $C_2 = max\{C_1, C\}$ e C_3 é o máximo entre C_2 e a constante que satisfaz a propriedade das funções polinomiais enunciada na Observação 5.2. Logo, existe uma constante $D > 0$, a saber $D = 2C_3$, tal que

$$\int_\Omega | \nabla u_n |^2 \, dx = \| u_n \|_{H_0^1}^2 \leq D \int_\Omega \left(u_n^2 + 1 \right) dx,$$

ou, o equivalente,

$$\| u_n \|_{H_0^1}^2 \leq D \int_\Omega \left(u_n^2 + 1 \right) dx \leq D \big(\| u_n \|_{L^2}^2 + |\Omega| \big).$$

Como Ω é um domínio limitado, existe uma constante, que denotaremos C, positiva e que depende de Ω, tal que

$$\| u_n \|_{H_0^1}^2 \leq C \big(\| u_n \|_{L^2}^2 + 1 \big). \tag{5.2}$$

Considere as seqüências t_n e v_n, dadas por

$$t_n := \| u_n \|_{L^2} \quad \text{e} \quad v_n := \frac{u_n}{t_n}.$$

Por suposição, $\| u_n \|_{H_0^1} \to +\infty$. Assim, a desigualdade (5.2), implica em

$$t_n = \| u_n \|_{L^2} \longrightarrow +\infty.$$

Observe que $(v_n)_n$ é uma seqüência unitária em L^2. De fato, pela definição de v_n, temos,

$$\| v_n \|_{L^2} = \left\| \frac{u_n}{\| u_n \|_{L^2}} \right\|_{L^2} = \frac{\| u_n \|_{L^2}}{\| u_n \|_{L^2}} = 1.$$

Além disso, $(v_n)_n$ é uma seqüência limitada em H_0^1. De fato, utilizando a estimativa (5.2), temos

$$\| v_n \|_{H_0^1}^2 \;=\; \frac{\| u_n \|_{H_0^1}^2}{t_n^2} \;\leq\; C\left(\frac{\| u_n \|_{L^2}^2 + 1}{\| u_n \|_{L^2}^2}\right) \;=\; C\left(1 + \frac{1}{\| u_n \|_{L^2}^2}\right).$$

Como $t_n = \| u_n \|_{L^2} \longrightarrow +\infty$, temos que $\dfrac{1}{\| u_n \|_{L^2}^2} \longrightarrow 0$. Portanto,

$$\| v_n \|_{H_0^1(\Omega)} \leq C.$$

Assim, temos os resultados,

$$\begin{aligned} \| v_n \|_{L_2(\Omega)} &= 1 \\ \text{e} \qquad \| v_n \|_{H_0^1(\Omega)} &\leq C. \end{aligned}$$

Do segundo resultado, segue que, $(v_n)_n$, é uma seqüência limitada no espaço de Hilbert H_0^1. Logo, $(v_n)_n$ possui uma subseqüência $(v_{n_k})_k$ fracamente convergente em H_0^1, isto é, $\exists v \in H_0^1$ tal que

$$v_{n_k} \rightharpoonup v.$$

Além disso, pelo Teorema de Rellich Kondrachov, existe uma subseqüência $(v_{n_{k_j}})_j$ de $(v_{n_k})_k$ convergindo em L^2. Ou seja, existe $\overline{v} \in L^2$ tal que, ao $j \to \infty$,

$$v_{n_{k_j}} \longrightarrow \overline{v}.$$

Podemos, sem perda de generalidade, renomear a subseqüência $(v_{n_{k_j}})_j$ por $(v_j)_j$. Assim, temos os seguintes resultados,

$$\begin{array}{llll} (i) & v_j \rightharpoonup v & \text{em } H_0^1(\Omega). \\ (ii) & v_j \to \overline{v} & \text{em } L^2(\Omega). \end{array}$$

De (i) e de (ii), segue que $v = \overline{v}$. De fato, lembre-se que $(H_0^1)'$ é o espaço de todos os funcionais lineares limitados definidos no espaço normado H_0^1, ou seja, $(H_0^1)'$ é o espaço dual de H_0^1. Além disso, vale a propriedade $H_0^1 \subset L^2 \;\Rightarrow\; (L^2)' \subset (H_0^1)'$.
Segue, de (i) e da definição de convergência fraca, que

$$l(v_j) \rightarrow l(v), \quad \forall l \in (H_0^1)'.$$

Logo, restringindo aos funcionais lineares limitados de L^2, temos a convergência

$$l(v_j) \rightarrow l(v), \ \forall l \in (L^2)',$$

que é a definição de convergência fraca em L^2. Portanto,

$$v_j \rightharpoonup v \text{ em } L^2.$$

Por outro lado, de (ii), temos que $v_j \rightarrow \overline{v}$ em L^2, então, $v_j \rightharpoonup \overline{v}$ em L^2. Assim,

$$\begin{array}{ccccc} & v_j & \rightharpoonup & \overline{v} & \text{em} & L^2(\Omega), \\ \text{e} & v_j & \rightharpoonup & v & \text{em} & L^2(\Omega). \end{array}$$

Segue, então, da unicidade do limite que $\overline{v} = v$. Portanto,

$$\begin{array}{cccccc} & v_j & \rightharpoonup & v & \text{em} & H_0^1(\Omega), \\ \text{e} & v_j & \rightharpoonup & v & \text{em} & L^2(\Omega). \end{array}$$

Observação 5.3. Seja $(f_n)_n$ uma seqüência de funções em $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, onde Ω é um domínio limitado. Se $f_n \longrightarrow f$ em $L^p(\Omega)$, então, pela desigualdade triangular,

$$\| \mid f_n \mid - \mid f \mid \|_{L^p} \leq \| f_n - f \|_{L^p} .$$

Logo, vale a seguinte propriedade,

$$f_n \longrightarrow f \quad \text{em} \quad L^p \;\Rightarrow\; \mid f_n \mid \longrightarrow \mid f \mid \quad \text{em} \quad L^p.$$

Como podemos decompor cada elemento do espaço L^p na soma

$$f = f^+ - f^-, \quad \text{onde} \quad f^+ = \frac{\mid f \mid + f}{2} \quad \text{e} \quad f^- = \frac{\mid f \mid - f}{2}$$

e a soma de seqüências convergentes converge a soma dos limites das seqüências, pois os limites existem,

$$f_n^+ = \frac{\mid f_n \mid + f_n}{2} \quad \longrightarrow \quad \frac{\mid f \mid + f}{2} = f^+, \quad \text{em} \quad L^p.$$

Do mesmo modo,

$$f_n^- = \frac{\mid f_n \mid - f_n}{2} \quad \longrightarrow \quad \frac{\mid f \mid - f}{2} = f^-, \quad \text{em} \quad L^p.$$

Portanto, se $f_n \longrightarrow f$ em L^p, temos

$$\begin{array}{rcccc} & f_n^+ & \longrightarrow & f^+ & \text{em} \quad L^p. \\ \text{e} & f_n^- & \longrightarrow & f^- & \text{em} \quad L^p. \end{array}$$

Além disso, para $n \in \mathbb{N}$, seja $\Omega'_n = \{x \in \Omega; \;\; f_n(x) > 0\} =: \{f_n > 0\}$. Assim, para quase todo $x \in \Omega'_n$, temos $f_n^-(x) = 0$. Portanto, em Ω'_n, vale, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n = f_n^+ - f_n^- = f_n^+.$$

Terminamos, assim, a Observação 5.3.

Queremos concluir que o funcional E é coercivo. Para isso, vamos mostrar que

$$\limsup_{n\to\infty} \int_\Omega \frac{F(x, t_n v_n(x))}{t_n^2} dx \leq \frac{1}{2} \int_{\{v>0\}} a_\infty(x) v^2(x) dx. \tag{5.3}$$

Note que podemos escrever $\Omega = \{v_n \leq 0\} \cup \{v_n > 0\}$. Logo,

$$\int_\Omega F(x, t_n v_n) dx = \int_{\{v_n \leq 0\}} F(x, t_n v_n) dx + \int_{\{v_n > 0\}} F(x, t_n v_n) dx. \tag{5.4}$$

Segue, da Observação 5.3, que em $\{v_n > 0\}$ temos $v_n^-(x) = 0$. Assim,

$$\int_{\{v_n>0\}} F(x, t_n v_n) dx = \int_{\{v_n>0\}} F(x, t_n v_n^+) dx = \int_\Omega F(x, t_n v_n^+) dx \tag{5.5}$$

e, novamente, tomando o domínio Ω como união de dois domínios, a saber, $\Omega = \{v > 0\} \cup \{v \leq 0\}$, temos

$$\int_\Omega F(x, t_n v_n^+) dx = \int_{\{v>0\}} F(x, t_n v_n^+) dx + \int_{\{v\leq 0\}} F(x, t_n v_n^+) dx.$$

Assim, a equação (5.5) fica

$$\int_{\{v_n>0\}} F(x, t_n v_n) dx = \int_{\{v>0\}} F(x, t_n v_n^+) dx + \int_{\{v\leq 0\}} F(x, t_n v_n^+) dx.$$

Então, substituindo este resultado em (5.4), escrevemos,

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega F(x,t_nv_n)dx &= \int_{\{v_n\le 0\}} F(x,t_nv_n)dx + \int_{\{v_n>0\}} F(x,t_nv_n)\\
&= \int_{\{v_n\le 0\}} F(x,t_nv_n)dx + \int_{\{v>0\}} F(x,t_nv_n^+)dx\\
&+ \int_{\{v\le 0\}} F(x,t_nv_n^+)dx.
\end{aligned}
$$

Faremos uma estimativa de cada uma das três últimas integrais, e, para uma melhor compreensão, vamos identificá-las da seguinte forma:

$$
\underbrace{\int_{\{v_n\le 0\}} F(x,t_nv_n)dx}_{(I)} \qquad \underbrace{\int_{\{v>0\}} F(x,t_nv_n^+)dx}_{(II)} \qquad \underbrace{\int_{\{v\le 0\}} F(x,t_nv_n^+)dx}_{(III)}
$$

• Estimativa de (III):

Vamos mostrar que

$$
(III) = \int_{\{v\le 0\}} \frac{F(x,t_nv_n^+)}{t_n^2}dx \le o(1).
$$

Lembre-se, de (5.1) e da Observação 5.2, que

$$
F(x,t) \le C_1\left(\frac{1}{2}t^2 + \mid t\mid\right) \le C\left(\frac{1}{2}t^2+1\right), \qquad \forall t\in\mathbb{R}.
$$

Logo, vale

$$
\int_{\{v\le 0\}} F(x,t_nv_n^+)dx \le C\int_{\{v\le 0\}}\left(\frac{1}{2}t_n^2(v_n^+)^2+1\right)dx.
$$

Assim, dividindo por $t_n^2 = \parallel u_n \parallel^2_{H_0^1(\Omega)}$, obtemos

$$
\int_{\{v\le 0\}} \frac{F(x,t_nv_n^+)}{t_n^2}dx \le C\int_{\{v\le 0\}}\left(\frac{1}{2}\frac{t_n^2(v_n^+)^2}{t_n^2}+\frac{1}{t_n^2}\right)dx.
$$

Ou seja,

$$
\int_{\{v\le 0\}} \frac{F(x,t_nv_n^+)}{t_n^2}dx \le \frac{C}{2}\int_{\{v\le 0\}}(v_n^+)^2dx + C\int_{\{v\le 0\}}\frac{1}{t_n^2}dx. \tag{5.6}
$$

Como, $t_n \longrightarrow +\infty$, ao $n\to\infty$, temos,

$$\int_{\{v\leq 0\}} \frac{1}{t_n^2} \; dx \longrightarrow 0.$$

Decorre da Observação 5.3 e da convergência $v_n \to v$ em L^2 que $v_n^+ \to v^+$ em L^2. Além disso, estamos integrando em $\{v \leq 0\}$, ou seja, onde $v^+ = 0$. Logo,

$$\frac{C}{2}\int_{\{v\leq 0\}} (v_n^+)^2 dx \longrightarrow 0.$$

Portanto, substituindo estes dois resultados em (5.6), concluímos que, ao $n \to +\infty$,

$$(III) = \int_{\{v\leq 0\}} \frac{F(x, t_n v_n^+)}{t_n^2} dx \leq o(1).$$

Concluímos a estimativa (III).

• Estimativa de (I):

Mostraremos que

$$(I) = \int_{\{v_n\leq 0\}} F(x, t_n v_n) dx \leq o(1).$$

De fato, decorre da definição da função F e da definição de f, que, se $t \leq 0$, temos

$$F(x,t) = \int_0^t f(x,0) ds = f(x,0)\int_0^t \; ds \leq \| f(x,0) \|_{L^\infty(\Omega)} |t|.$$

Assim, para $C = \| f(x,0) \|_{L^\infty(\Omega)}$, temos

$$\int_{\{v_n\leq 0\}} F(x, t_n v_n) dx \leq C \int_{\{v_n\leq 0\}} t_n \mid v_n \mid dx \leq C \int_\Omega t_n |v_n| dx$$

já que a integral de uma função positiva, no domínio todo, é sempre maior ou igual do que a integral dessa função em qualquer restrição do domínio. Assim, dividindo os termos desta desigualdade por t_n^2, obtemos

$$\int_{\{v_n\leq 0\}} \frac{F(x, t_n v_n)}{t_n^2} dx \;\; \leq \;\; C\int_\Omega \frac{t_n \mid v_n \mid}{t_n^2} dx \;\; = \;\; C\int_\Omega \frac{\mid v_n \mid}{t_n} dx.$$

Como conseqüência da Desigualdade de Hölder, temos

$$\int_\Omega |v_n|\left|\frac{1}{t_n}\right|dx \leq \| v_n \|_{L^2(\Omega)} \left\|\frac{1}{t_n}\right\|_{L^2(\Omega)} = \| v_n \|_{L^2(\Omega)} \frac{\| 1 \|_{L^2(\Omega)}}{t_n}.$$

E, lembrando que, $\| v_n \|_{L^2(\Omega)} = 1$ e que $\| 1 \|_{L^2(\Omega)} = |\Omega|^{\frac{1}{2}}$, chegamos em

$$\int_{\{v_n \leq 0\}} \frac{F(x, t_n v_n)}{t_n^2} dx \leq C\frac{|\Omega|^{\frac{1}{2}}}{t_n} \longrightarrow 0 \text{ ao } n \to \infty,$$

pois Ω é um domínio limitado e $t_n = \| u_n \|_{H_0^1(\Omega)} \to +\infty$, quando $n \to +\infty$. Segue, então, a conclusão da estimativa (I), ou seja,

$$(I) = \int_{\{v_n \leq 0\}} \frac{F(x, t_n v_n)}{t_n^2} dx \leq o(1).$$

• Estimativa de (II)

Queremos obter alguma estimativa para

$$(II) = \int_{\{v > 0\}} \frac{F(x, t_n v_n^+)}{t_n^2} dx.$$

Pela definição de limite superior e pela definição de a_∞, temos, para cada $\varepsilon > 0$ dado, um $M > 0$ tal que $\dfrac{f(x,t)}{t} < a_\infty + \varepsilon$, se $t \geq M$. Logo,

$$f(x,t) < t(a_\infty + \varepsilon), \qquad \text{para} \quad t \geq M.$$

Assim,

$$F(x,t) = \int_0^t f(x,s)ds = \int_0^M f(x,s)ds + \int_M^t f(x,s)ds.$$

Mas, pela hipótese (H_4), para quase todo $x \in \Omega$, a função $t \mapsto f(x,t)$ é contínua. Logo,

$$\int_0^M f(x,s)ds = C, \text{ para alguma constante } C = C(x).$$

Então, para $t \geq M$,

$$\begin{aligned} F(x,t) &= C + \int_M^t f(x,s)ds \quad \leq \quad C + \int_M^t s(a_\infty + \varepsilon)ds \\ &= C + (a_\infty + \varepsilon)\frac{s^2}{2}\Big|_M^t \quad = \quad C + \frac{1}{2}(a_\infty + \varepsilon)(t^2 - M^2). \end{aligned}$$

Assim, como $\frac{1}{2}(a_\infty + \varepsilon)M^2$ é constante, considere $K = C - \frac{1}{2}(a_\infty + \varepsilon)M^2$. Logo,

$$F(x,t) \leq K + (a_\infty + \varepsilon)\frac{t^2}{2}.$$

Assim, dividindo esta desigualdade por t^2, obtemos,

$$\frac{F(x,t)}{t^2} \quad \leq \quad \frac{K}{t^2} \quad + \quad \frac{(a_\infty + \varepsilon)}{2}, \qquad \forall t \geq M.$$

Aplicando limite superior, com $t \to +\infty$, em ambos os lados da desigualdade, encontramos

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{F(x,t)}{t^2} \quad \leq \quad 0 + (a_\infty + \varepsilon)\frac{1}{2}.$$

Como ε é arbitrário, concluímos que

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{F(x,t)}{t^2} \quad \leq \quad \frac{1}{2}a_\infty(x), \qquad \text{para quase todo } x \in \Omega.$$

Note que, como, $v(x) > 0$ e $v_n^+(x) \to v(x)$, segue que, para n suficientemente grande, $v_n^+(x) > 0$ em $\{v > 0\}$. Assim, para estes $n's$, o quociente,

$$\frac{F\big(x, t_n v_n^+(x)\big)}{t_n^2 (v_n^+(x))^2},$$

está bem definido, para quase todo $x \in \{v > 0\}$. Além disso, $t_n v_n^+(x) \to +\infty$ em $\{v > 0\}$, já que $v_n^+(x) \to v(x) > 0$ e $t_n \to +\infty$. Com isso,

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{F(x, t_n v_n^+(x))}{t_n^2 (v_n^+(x))^2} \quad \leq \quad \frac{1}{2}a_\infty(x), \qquad \text{quase sempre em } \{v > 0\}.$$

Além disso, sendo n suficientemente grande, $(v_n^+(x))^2 > 0$, podemos multiplicar ambos os lados da desigualdade por $\lim_{n\to\infty}(v_n^+(x))^2$. Dessa forma,

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{F(x, t_n v_n^+(x))}{t_n^2 (v_n^+(x))^2} . \lim_{n\to+\infty}(v_n^+(x))^2 \quad \leq \quad \frac{1}{2}a_\infty(x). \lim_{n\to+\infty}(v_n^+(x))^2,$$

quase sempre em $\{v > 0\}$. Como, $\limsup a. \lim b = \limsup ab$, podemos simplificar os termos comuns no lado esquerdo da desigualdade, obtendo

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{F(x,t_n v_n^+(x))}{t_n^2} \quad \leq \quad \frac{1}{2} a_\infty(x). \lim_{n\to+\infty} (v_n^+(x))^2.$$

Lembre-se que, $v_n^+(x) \to v(x) > 0$. Assim,

$$\frac{1}{2} a_\infty(x). \lim_{n\to+\infty} (v_n^+(x))^2 = \frac{1}{2} a_\infty(x)(v(x))^2, \quad \text{quase sempre em } \{v > 0\}.$$

Portanto, temos para quase todo $x \in \{v > 0\}$,

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{F(x,t_n v_n^+(x))}{t_n^2} \quad \leq \quad \frac{1}{2} a_\infty(x)(v(x))^2. \tag{5.7}$$

Observação 5.4. Vamos mostrar uma variante do Lema de Fatou para o limite superior. Pela Observação 5.2 e pela equação (5.1), obtemos o seguinte resultado,

$$\frac{F(x,t_n v_n^+)}{t_n^2} \leq C\left((v_n^+)^2 + \frac{1}{t_n^2}\right).$$

Como, $v_n \to v$ em L^2, a menos de uma subseqüência, $v_n \to v$ $q.t.p$ em Ω. Seja $h_n = C\left((v_n^+)^2 + \frac{1}{t_n^2}\right)$. Logo, para todo n

$$\frac{F(x,t_n v_n^+)}{t_n^2} \leq h_n, \quad \text{quase sempre em } \Omega.$$

Assim,

$$h_n - \frac{F(x,t_n v_n^+)}{t_n^2} \geq 0, \quad \text{quase sempre em } \Omega, \ \ \forall n.$$

Aplicando o Lema de Fatou para $h_n - \frac{F(x,t_n v_n^+)}{t_n^2} \geq 0$,

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} \left(h_n - \frac{F(x,t_n v_n^+)}{t_n^2}\right) dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega \left(h_n - \frac{F(x,t_n v_n^+)}{t_n^2}\right) dx. \tag{5.8}$$

Trabalharemos, primeiro, com o lado esquerdo da desigualdade (5.8). Para isto, como h_n é convergente, então vale $\liminf(f_n + h_n) = \lim h_n + \liminf(f_n)$, onde $f_n = -\frac{F(x,t_n v_n^+)}{t_n^2}$. Então

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} \left(h_n - \frac{F(x,t_n v_n^+)}{t_n^2}\right) dx = \int_\Omega \left[\lim h_n + \liminf_{n\to\infty} \left(-\frac{F(x,t_n v_n^+)}{t_n^2}\right)\right] dx.$$

Usando isto e que $h_n \to C(v^+)^2$ em L^1,

$$\int_\Omega \left[C(v^+)^2 + \liminf_{n\to\infty} \left(-\frac{F(x,t_nv_n^+)}{t_n^2} \right) \right] dx =$$
$$\int_\Omega C(v^+)^2 dx + \int_\Omega \liminf_{n\to\infty} \left[-\frac{F(x,t_nv_n^+)}{t_n^2} \right] dx.$$

Mas $\liminf(-f) = -\limsup f$. Logo,

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} \left[-\frac{F(x,t_nv_n^+)}{t_n^2} \right] dx = \int_\Omega -\limsup_{n\to\infty} \frac{F(x,t_nv_n^+)}{t_n^2} dx.$$

Desse resultado temos que,

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} \left(h_n - \frac{F(x,t_nv_n^+)}{t_n^2} \right) dx = \int_\Omega C(v^+)^2 dx - \int_\Omega \limsup_{n\to\infty} \frac{F(x,t_nv_n^+)}{t_n^2} dx.$$

Trabalharemos, agora, com o lado direito da desigualdade (5.8). Utilizando a mesma propriedade de integrais citada acima, obtemos,

$$\liminf_{n\to\infty} \int_\Omega \left(h_n - \frac{F(x,t_nv_n^+)}{t_n^2} \right) dx = \liminf_{n\to\infty} \left[\int_\Omega h_n \quad dx - \int_\Omega \frac{F(x,t_nv_n^+)}{t_n^2} dx \right].$$

Como $h_n \to C(v^+)^2$ em $L^1(\Omega)$,

$$\liminf_{n\to\infty} \left[\int_\Omega h_n dx - \int_\Omega \frac{F(x,t_nv_n^+)}{t_n^2} dx \right]$$
$$= \int_\Omega C(v^+)^2 dx + \liminf_{n\to\infty} \left[-\int_\Omega \frac{F(x,t_nv_n^+)}{t_n^2} dx \right].$$

Como acima, $\liminf(-f) = -\limsup f$. Então,

$$\int_\Omega C(v^+)^2 dx + \liminf_{n\to\infty} \left[-\int_\Omega \frac{F(x,t_nv_n^+)}{t_n^2} \right] dx =$$
$$= \int_\Omega C(v^+)^2 dx - \limsup_{n\to\infty} \int_\Omega \frac{F(x,t_nv_n^+)}{t_n^2} dx.$$

Concluímos, assim, que

$$\liminf_{n\to\infty} \int_\Omega \left(h_n - \frac{F(x,t_nv_n^+)}{t_n^2} \right) dx = \int_\Omega C(v^+)^2 dx - \limsup_{n\to\infty} \int_\Omega \frac{F(x,t_nv_n^+)}{t_n^2} dx.$$

Juntando os dois resultados obtidos, em (5.8), chegamos a

$$\int_\Omega C(v^+)^2 dx - \int_\Omega \limsup_{n\to\infty} \frac{F(x,t_n v_n^+)}{t_n^2} dx \leq$$
$$\leq \int_\Omega C(v^+)^2 dx - \limsup_{n\to\infty} \int_\Omega \frac{F(x,t_n v_n^+)}{t_n^2} dx.$$

Cancelando o termo $\displaystyle\int_\Omega C(v^+)^2(x)dx$, temos

$$-\int_\Omega \limsup_{n\to\infty} \frac{F(x,t_n v_n^+)}{t_n^2} dx \leq -\limsup_{n\to\infty} \int_\Omega \frac{F(x,t_n v_n^+)}{t_n^2} dx.$$

Logo,

$$\limsup_{n\to\infty} \int_\Omega \frac{F(x,t_n v_n^+)}{t_n^2} dx \leq \int_\Omega \limsup_{n\to\infty} \frac{F(x,t_n v_n^+)}{t_n^2} dx, \tag{5.9}$$

concluindo a Observação 5.4.

Integrando, agora, a desigualdade (5.7) em $\{v > 0\}$ e utilizando (5.9), temos

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} \int_{\{v>0\}} \frac{F(x,t_n v_n^+)}{t_n^2} dx &\leq \int_{\{v>0\}} \limsup_{n\to\infty} \frac{F(x,t_n v_n^+)}{t_n^2} dx \\ &\leq \int_{\{v>0\}} \frac{1}{2} a_\infty(x)(v(x))^2 dx. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{\{v>0\}} \frac{F(x,t_n v_n^+)}{t_n^2} dx \leq \int_{\{v>0\}} \frac{1}{2} a_\infty(x)(v(x))^2 dx.$$

Sendo esta, uma estimativa importante para a integral (III).

Recorde-se da decomposição,

$$\begin{aligned} \int_\Omega F(x,t_n v_n) dx &= \int_{\{v_n \leq 0\}} F(x,t_n v_n) dx \quad + \\ &+ \int_{\{v>0\}} F(x,t_n v_n^+) dx \quad + \int_{\{v\leq 0\}} F(x,t_n v_n^+) dx. \end{aligned}$$

Multiplicando esta igualdade por $(t_n^2)^{-1}$ e aplicando limite superior, temos

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to+\infty}\int_\Omega \frac{F(x,t_nv_n)}{t_n^2}dx &= \limsup_{n\to+\infty}\Bigg[\int_{\{v_n\le 0\}}\frac{F(x,t_nv_n)}{t_n^2}dx\\ &+ \int_{\{v>0\}}\frac{F(x,t_nv_n^+)}{t_n^2}dx+\int_{\{v\le 0\}}\frac{F(x,t_nv_n^+)}{t_n^2}dx\Bigg].\end{aligned}$$

Como $\limsup(a+b)\le\limsup a+\limsup b$, segue que

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to+\infty}\int_\Omega \frac{F(x,t_nv_n)}{t_n^2}dx &\le \limsup_{n\to+\infty}\int_{\{v_n\le 0\}}\frac{F(x,t_nv_n)}{t_n^2}dx\\ &+ \limsup_{n\to+\infty}\int_{\{v>0\}}\frac{F(x,t_nv_n^+)}{t_n^2}dx\\ &+ \limsup_{n\to+\infty}\int_{\{v\le 0\}}\frac{F(x,t_nv_n^+)}{t_n^2}dx.\end{aligned}$$

Utilizando as estimativas obtidas para as integrais (I), (II) e (III), obtemos,

$$\limsup_{n\to+\infty}\int_\Omega \frac{F(x,t_nv_n)}{t_n^2}dx \le 0 + \int_{\{v>0\}}\frac{1}{2}a_\infty(x)(v(x))^2dx + 0.$$

Portanto, a afirmativa feita em (5.3) é verdadeira.

Recapitulando, queremos mostrar que o funcional E é coercivo. Obtemos, para cada termo da seqüência $(u_n)_n$, a desigualdade

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2\, dx\le C+\int_\Omega F(x,u_n)dx.$$

Dividindo-a por t_n^2 e fazendo o limite, com $n\to+\infty$, obtemos,

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\int_\Omega\frac{|\nabla u_n|^2}{t_n^2}dx &\le \limsup_{n\to+\infty}\int_\Omega\frac{F(x,u_n)}{t_n^2}dx+\lim_{n\to+\infty}\frac{C}{t_n^2}\\ &\le \frac{1}{2}\int_{\{v>0\}}a_\infty(x)v^2(x)dx.\end{aligned}$$

Sendo que, a última desigualdade, decorre da desigualdade (5.3) e do fato de a seqüência $t_n\to+\infty$, quando $n\to+\infty$.

Como $v_n \rightharpoonup v$ em H_0^1 e o funcional $w \mapsto \displaystyle\int_\Omega |\nabla w|^2 dx$ é fracamente semi-contínuo inferiormente, temos

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^2}{t_n^2}dx = \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{2} \| \nabla v_n \|_{L^2}^2 \geq \frac{1}{2} \| \nabla v \|_{L^2}^2 .$$

Logo, a estimativa anterior equivale a

$$\frac{1}{2} \| \nabla v \|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{2}\int_{\{v>0\}} a_\infty(x)v^2(x)dx.$$

Portanto, temos

$$\| \nabla v \|_{L^2}^2 - \int_{\{v>0\}} a_\infty(x)v^2(x)dx \leq 0. \tag{5.10}$$

Por outro lado, para simplificar a notação, se tomarmos $\alpha = \lambda_1(-\Delta - a_\infty(x)) > 0$, teremos,

$$\alpha = \inf_{\substack{\phi\in H_0^1 \\ \|\phi\|_{L^2}=1}} \left\{ \int_\Omega |\nabla\phi|^2 \, dx - \int_\Omega a_\infty(x)\phi^2 dx \right\}.$$

Agora, usando a definição de ínfimo e tomando $\phi = v^+$, obtemos,

$$\alpha \leq \left(\int_\Omega |\nabla v^+|^2 \, dx - \int_{\{v>0\}} a_\infty(x)(v^+)^2 dx \right) \frac{1}{\| v^+ \|_{L^2}^2}.$$

Note que, estamos integrando em $\{v > 0\}$, ou seja, onde $v = v^+$. Logo,

$$\alpha \quad \leq \quad \frac{1}{\| v^+ \|_{L^2}^2} \left[\int_\Omega |\nabla v^+|^2 \, dx - \int_{\{v>0\}} a_\infty(x)v^2(x)dx \right].$$

Assim, lembrando da estimativa (5.10), temos

$$\alpha \| v^+ \|_{L^2}^2 \quad \leq \quad \int_\Omega |\nabla v^+|^2 \, dx - \int_{\{v>0\}} a_\infty(x)v^2(x)dx \quad \leq \quad 0.$$

Mas, $\alpha > 0$, então devemos ter $\| v^+ \|_{L^2}^2 = 0$, ou seja, $v^+ = 0$. Logo,

$$\int_{\{v>0\}} a_\infty(x)v^2(x)dx = 0.$$

Assim, ao substituir este resultado na desigualdade (5.10), obtém-se

$$\| v \|_{H_0^1}^2 \;=\; \int_\Omega | \nabla v |^2 \, dx \;\leq\; 0.$$

Assim, das propriedades de norma, temos $v \equiv 0$. O que é uma contradição, pois $\| v \|_{L^2} = 1$, ou seja, $v \neq 0$. Esta contradição vem do fato de termos suposto que E não é coercivo. Portanto, E é coercivo. $\square$

Observação 5.5. Vamos mostrar que, se uma seqüência $(u_l)_l$ converge a u_0 em L^2, então

$$\lim_{l \to +\infty} \int_\Omega F(x, u_l) dx = \int_\Omega F(x, u_0) dx. \tag{5.11}$$

Usando argumentos análogos à prova de (5.9) da Observação 5.4, obtemos

$$\limsup_{l \to +\infty} \int_\Omega F(x, u_l) dx \leq \int_\Omega \limsup_{l \to +\infty} F(x, u_l) dx$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\limsup_{l \to +\infty} \int_\Omega F(x, u_l) dx &\leq \int_\Omega \limsup_{l \to +\infty} F(x, u_l) dx \\
&= \int_\Omega F(x, u_0) dx \\
&= \int_\Omega \liminf_{l \to +\infty} F(x, u_l) dx \\
&\leq \liminf_{l \to +\infty} \int_\Omega f(x, u_l) dx,
\end{aligned}$$

concluindo a Observação 5.5.

Prova: [Lema 5.2] Queremos mostrar que E é semicontínuo inferiormente para a topologia fraca $H_0^1(\Omega)$. Seja, então, $(u_n)_n \subset H_0^1$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em H_0^1. Para mostrar que o funiconal E é semicontínuo inferiormente, devemos mostrar que

$$E(u) \leq \liminf_{n \to +\infty} E(u_n).$$

Ou seja,

$$\frac{1}{2} \int_\Omega | \nabla u |^2 \, dx - \int_\Omega F(x, u) dx \leq \liminf_{n \to +\infty} \left[\frac{1}{2} \int_\Omega | \nabla u_n |^2 \, dx - \int_\Omega F(x, u_n) dx \right].$$

Como o funcional $w \mapsto \int_\Omega |\nabla w|^2 dx$ é fracamente semicontínuo inferiormente,

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx = \| \nabla u \|^2_{L^2(\Omega)} \leq \liminf_{n\to+\infty} \| \nabla u_n \|^2_{L^2(\Omega)} . \tag{5.12}$$

Observe ainda que

$$-\int_\Omega F(x,u)dx \leq \liminf_{n\to+\infty} -\int_\Omega F(x,u_n)dx. \tag{5.13}$$

De fato, seja $(u_{n_k})_k$ uma subseqüência de $(u_n)_n$ minimizante, ou seja, tal que

$$\lim_{n_k\to+\infty} \int_\Omega F(x,u_{n_k})dx = \limsup_{n\to+\infty} \int_\Omega F(x,u_n)dx.$$

Note que, $u_n \rightharpoonup u$ em H^1_0, logo, $(u_{n_k})_k$ é limitada em H^1_0. Pelo Teorema de Rellich Kondrachov, existe, $(u_{n_{k_l}})_l$, subseqüência de $(u_{n_k})_k$, convergente em $L^2(\Omega)$, isto é, $u_{n_{k_l}} \to u \in L^2$, ao $l \to +\infty$. Além disso, podemos tomar uma subseqüência tal que $u_{n_{k_l}} \to u$, *q.t.p.* Assim, renomeando $u_l = u_{n_{k_l}}$, temos os seguintes resultados

- $\displaystyle\lim_{l\to+\infty} \int_\Omega F(x,u_l)dx = \limsup_{n\to+\infty} \int_\Omega F(x,u_n)dx.$
- $u_l \rightharpoonup u$ em H^1_0.
- $u_l \to u$ em L^2.
- $F(x,u_l) \leq C(u_l^2+1)$
- $u_l \to u \quad q.t.p.$

Aplicando o Lema de Fatou a $C(u_l^2+1) - F(x,u_l) \geq 0$, temos

$$\int_\Omega \liminf_{l\to+\infty} \Big[C(u_l^2+1) - F(x,u_l) \Big] dx \leq \liminf_{l\to+\infty} \int_\Omega C(u_l^2+1) - F(x,u_l)dx.$$

Somando $-\int_\Omega \lim_{l\to+\infty} C(u_l^2+1)dx$ em ambos os lados da desigualdade, obtemos

$$\int_\Omega \liminf_{l\to+\infty} \Big[C(u_l^2+1) - F(x,u_l) \Big] dx - \int_\Omega \lim_{l\to+\infty} C(u_l^2+1)dx \tag{5.14}$$

$$\leq \liminf_{l\to+\infty} \int_\Omega C(u_l^2+1) - F(x,u_l)dx - \int_\Omega \lim_{l\to+\infty} C(u_l^2+1)dx.$$

Utilizando as propriedades de integrais sobre um mesmo domínio, limites inferior e limites no membro direito da desigualdade (5.14), obtemos

$$
\begin{aligned}
&\liminf_{l\to+\infty}\int_\Omega C(u_l^2+1)-F(x,u_l)dx-\int_\Omega \lim_{l\to+\infty} C(u_l^2+1)dx\\
&\quad= \liminf_{l\to+\infty}\int_\Omega C(u_l^2+1)-F(x,u_l)dx-\lim_{l\to+\infty}\int_\Omega C(u_l^2+1)dx\\
&\quad\leq \liminf_{l\to+\infty}\left[\int_\Omega C(u_l^2+1)-F(x,u_l)dx-C\int_\Omega (u_l^2+1)dx\right]\\
&\quad= \liminf_{l\to+\infty}\int_\Omega C(u_l^2+1)-F(x,u_l)-C(u_l^2+1)dx\\
&\quad= \liminf_{l\to+\infty}\int_\Omega -F(x,u_l)dx
\end{aligned}
$$

Note que, o limite $\lim\limits_{l\to+\infty} C(u_l^2+1)$ existe e vale $C(u^2+1)$. Isso torna verdadeira a primeira igualdade acima. Desenvolveremos, agora, o primeiro termo da desigualdade (5.14):

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \liminf_{l\to+\infty}\Big[C(u_l^2+1)-F(x,u_l)\Big]dx-\int_\Omega \lim_{l\to+\infty} C(u_l^2+1)dx\\
&\quad= \int_\Omega \liminf_{l\to+\infty}\Big[C(u_l^2+1)-F(x,u_l)\Big]-\lim_{l\to+\infty}\big(C(u_l^2+1)\big)dx\\
&\quad= \int_\Omega \liminf_{l\to+\infty}\Big[C(u_l^2+1)-F(x,u_l)-C(u_l^2+1)\Big]dx\\
&\quad= -\int_\Omega F(x,u)dx.
\end{aligned}
$$

Juntando em (5.14) os dois resultados, obtemos,

$$-\int_\Omega F(x,u)dx\leq \liminf_{l\to+\infty}-\int_\Omega F(x,u_l)dx.$$

Assim, conclui-se verdadeira a desigualdade (5.13). Pelas desigualdades (5.13) e (5.12), vale o seguinte raciocínio,

$$
\begin{aligned}
E(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega \mid \nabla u \mid^2 dx - \int_\Omega F(x,u)dx \\
&\leq \frac{1}{2}\liminf_{n\to+\infty} \parallel \nabla u_n \parallel^2_{L^2(\Omega)} + \liminf_{n\to+\infty}\int_\Omega -F(x,u_n)dx \\
&\leq \liminf_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\int_\Omega \mid \nabla u_n \mid^2 dx + \int_\Omega -F(x,u_n)dx\right] \\
&= \liminf_{n\to+\infty} E(u_n)
\end{aligned}
$$

Concluindo O Lema 5.2, ou seja, que o funcional E é semicontínuo inferiormente para a topologia fraca $H_0^1(\Omega)$. $\square$

Prova: [Lema 5.3] Queremos mostrar que existe pelo menos um $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, tal que $E(\varphi) < 0$.

Fixe $\phi \in H_0^1$, qualquer, satisfazendo

$$
\int_\Omega \mid \nabla\phi \mid^2 dx - \int_\Omega a_0(x)\phi^2 dx < 0. \tag{5.15}
$$

A existência de ϕ é garantida pela hipótese (H_6), pois $\lambda_1(-\Delta - a_0(x)) < 0$. Podemos supor que $\phi > 0$ e que $\phi \in L^\infty$ (caso contrário, tomaríamos $\min\{M, |\phi|\}$, para M grande). Além disso,

$$
\liminf_{t\to 0}\frac{F(x,t)}{t^2} \geq \frac{1}{2}a_0(x) = \frac{1}{2}\liminf_{t\to 0}\frac{f(x,t)}{t}.
$$

De fato, $a_0(x)$ foi definido como $a_0(x) = \liminf_{t\to 0}\dfrac{f(x,t)}{t}$. Logo, pela definição de ínfimo, para cada $\epsilon > 0$ dado, $\exists\delta > 0$ tal que $\dfrac{f(x,t)}{t} \geq (a_0(x) - \epsilon)$, $\forall \mid t \mid < \delta$. Então, $f(x,t) \geq t(a_0(x) - \epsilon)$. Assim,

$$
F(x,t) = \int_0^t f(x,s)ds \geq \int_0^t s\big(a_0(x) - \epsilon\big)ds = (a_0(x) - \epsilon)\,\frac{t^2}{2}, \text{ para } |t| < \delta.
$$

Ou, o equivalente,

$$
\frac{F(x,t)}{t^2} \quad \geq \quad \frac{1}{2}\big(a_0(x) - \epsilon\big), \quad \forall |t| < \delta.
$$

Pela arbitrariedade de ϵ, podemos fazê-lo tão pequeno quanto necessário. Assim,

$$\liminf_{t\to 0} \frac{F(x,t)}{t^2} \quad \geq \quad \frac{1}{2}a_0(x) \quad = \quad \frac{1}{2}\liminf_{t\to 0}\frac{f(x,t)}{t}.$$

Considere $t_\varepsilon = \phi(x)\varepsilon$, com $\varepsilon \to 0$. Logo, $t_\varepsilon \to 0$, já que ϕ está fixo. Assim,

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \frac{F(x,\varepsilon\phi(x))}{\varepsilon^2} \quad \geq \quad \frac{1}{2}a_0(x)\phi^2(x), \quad \text{q.s. } \Omega. \tag{5.16}$$

Por outro lado, da hipótese (H_5), temos, $\dfrac{f(x,\varepsilon\phi)}{\varepsilon\phi} \geq -C_\delta$, para cada $\delta > 0$ e para todo $\varepsilon\phi \in [0,\delta]$. Portanto, com essa mudança de variável e com essa estimativa, a desigualdade (5.16) fica

$$\begin{aligned}
\liminf_{\varepsilon\to 0} \frac{F(x,\varepsilon\phi(x))}{\varepsilon^2} \quad &\geq \quad \frac{1}{2}a_0(x)\phi^2(x) \quad = \quad \frac{1}{2}\phi^2(x)\liminf_{\varepsilon\to 0}\frac{f(x,\varepsilon\phi)}{\varepsilon\phi} \\
&\geq \quad -\frac{1}{2}\phi^2(x)C_\delta \quad \geq \quad -C,
\end{aligned}$$

para alguma constante $C > 0$. Aplicando o Lema de Fatou para a integral em Ω de

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \frac{F(x,\varepsilon\phi(x))}{\varepsilon^2} + C \geq 0,$$

temos

$$\int_\Omega \liminf_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{F(x,\varepsilon\phi(x))}{\varepsilon^2} + C\right)dx \leq \liminf_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \frac{F(x,\varepsilon\phi(x))}{\varepsilon^2} + Cdx.$$

Utilizando as propriedades de integrais e limite inferior nesta desigualdade, obtemos

$$\int_\Omega \liminf_{\varepsilon\to 0}\frac{F(x,\varepsilon\phi(x))}{\varepsilon^2}dx + \int_\Omega Cdx \leq \liminf_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \frac{F(x,\varepsilon\phi(x))}{\varepsilon^2}dx + \int_\Omega Cdx.$$

Cancelando os termos comuns, resulta

$$\int_\Omega \liminf_{\varepsilon\to 0}\frac{F(x,\varepsilon\phi(x))}{\varepsilon^2}dx \leq \liminf_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \frac{F(x,\varepsilon\phi(x))}{\varepsilon^2}dx. \tag{5.17}$$

Pela definição de limite inferior em (5.16), também temos

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega} a_0(x)\phi^2(x)dx \quad \leq \quad \int_{\Omega} \frac{F(x,\varepsilon\phi(x))}{\varepsilon^2}dx+\delta, \tag{5.18}$$

onde $\delta > 0$ é adequado e ε é suficientemente pequeno. Multiplicando (5.18) por (-1), adicionando $\frac{1}{2}\int_{\Omega} \mid \nabla u \mid^2 dx$ em ambos os lados da desigualdade e recordando do resultado (5.15), temos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{\Omega} \mid \nabla\phi \mid^2 dx - \int_{\Omega} \frac{F(x,\varepsilon\phi(x))}{\varepsilon^2}dx \\
&\qquad\qquad \leq \quad \frac{1}{2}\int_{\Omega} \mid \nabla\phi \mid^2 dx - \frac{1}{2}\int_{\Omega} a_0(x)\phi^2(x)dx + \delta
\end{aligned}$$

Tomando $\delta = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\int_{\Omega}|\nabla\phi|^2 dx - \frac{1}{2}\int_{\Omega} a_0(x)\phi(x)^2 dx\right) > 0$, temos

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega} \mid \nabla\phi \mid^2 dx - \int_{\Omega} \frac{F(x,\varepsilon\phi(x))}{\varepsilon^2}dx \quad < \quad 0.$$

Multiplicando, por ε^2 e observando que, $\varepsilon^2 \mid \nabla\phi \mid^2 = \mid \nabla\varepsilon\phi \mid^2$, temos,

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega} \mid \nabla\varepsilon\phi \mid^2 dx - \int_{\Omega} F(x,\varepsilon\phi)dx = \frac{\varepsilon^2}{2}\int_{\Omega} \mid \nabla\phi \mid^2 dx - \varepsilon^2\int_{\Omega} \frac{F(x,\varepsilon\phi)}{\varepsilon^2}dx < 0.$$

Considere $\varphi := \varepsilon\phi$ e note que

$$E(\varphi) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} \mid \nabla\varphi \mid^2 dx - \int_{\Omega} F(x,\varphi)dx < 0.$$

Ou seja, $\exists\varphi \in H_0^1$ tal que $E(\varphi) < 0$. Concluímos, portanto, o Lema 5.3. $\square$

Prova: [Teorema 5.1]Vamos provar que este Teorema é verdadeiro, usando os Lemas 5.1, 5.2 e 5.3. Ou seja,

(i) E é coercivo;

(ii) E é semicontínuo inferiormente;

(iii) $\exists\varphi \in H_0^1,$ tal que $E(\varphi) < 0$.

Note que, $E(u)$, é limitado inferiormente em $H_0^1(\Omega)$. De fato,

$$
\begin{aligned}
E(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - \int_\Omega F(x,u)dx \\
&\geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - C\int_\Omega u^2 + 1dx \\
&= \frac{1}{2}\| u \|^2_{H_0^1(\Omega)} - C\left(\| u \|^2_{L^2(\Omega)} + |\Omega|\right).
\end{aligned}
$$

Da Desigualdade de Poincaré temos, $\forall u \in H_0^1$,

$$
\begin{aligned}
E(u) &\geq \frac{1}{2}\| u \|^2_{H_0^1(\Omega)} - C\| u \|^2_{L^2(\Omega)} - C|\Omega| \\
&\geq \frac{1}{2}\| u \|^2_{H_0^1(\Omega)} - CC_1\| u \|^2_{H_0^1(\Omega)} - C|\Omega| \\
&= \left(\frac{1}{2} - CC_1\right)\| u \|^2_{H_0^1(\Omega)} - K \\
&\geq -D\| u \|^2_{H_0^1(\Omega)} - K,
\end{aligned}
$$

onde D e K são constantes positivas. De fato, se Ω é tal que $C_1 = C_1(N,p,\Omega) < \frac{1}{2C}$, então, tome $D = \left(\frac{1}{2} - CC_1\right) > 0$. Se Ω é tal que $C_1 > \frac{1}{2C}$, então, tome $D = -\left(\frac{1}{2} - CC_1\right) > 0$. Por outro lado, de (i) temos que o funcional E é coercivo, isto é, $\exists R > 0$ tal que $E(u) > 0$, sempre que $\| u \|_{H_0^1(\Omega)} \geq R$. Suponhamos $\| u \|_{H_0^1(\Omega)} \leq R$. Como $E(u) \geq -D\| u \|^2_{H_0^1(\Omega)} - K$, para qualquer u em H_0^1, então vale, em particular, para u em H_0^1 tal que $\| u \|_{H_0^1} \leq R$, que

$$
E(u) \geq -DR^2 - K = -D_1.
$$

para algum $D_1 > 0$. Portanto, o funcional E é limitado inferiormente. Além disso, pela condição (iii) seu ínfimo é estritamente negativo. Então, defina

$$
I := \inf_{u \in H_0^1(\Omega)} E(u).
$$

Afirmação 5.1. O funcional E assume seu ínfimo em $H_0^1(\Omega)$. Ou seja,

$$
\exists \; u_0 \in H_0^1, \quad \text{tal que} \quad E(u_0) = I.
$$

Prova: Vale observar que este ínfimo u_0 pode não ser único. Considere $(u_n)_n \subset H_0^1(\Omega)$, $n \in \mathbb{N}$, uma seqüência minimizante, isto é, tal que

$$
\lim_{n\to+\infty} E(u_n) \;=\; I \;=\; \inf_{u\in H_0^1(\Omega)} E(u) < 0.
$$

Assim, como E é coercivo, $\| u_n \|_{H_0^1(\Omega)}$ é limitado, senão $\lim\limits_{n\to+\infty} E(u_n) = +\infty$. Logo, pelo Teorema da Rellich-Kondrachov, existe uma subseqüência $(u_{n_k})_k \subset (u_n)_n$ convergindo a v em $L^2(\Omega)$. Além disso, sabemos que qualquer seqüência limitada em $H_0^1(\Omega)$, têm uma subseqüência $(u_{n_{k_l}})_l \subset (u_{n_k})_k$ fracamente convergente a u_0 em H_0^1. Renomeando $u_l = u_{n_{k_l}}$, temos

$$\begin{array}{llll} u_l & \to & v & \text{em} \quad L^2(\Omega). \\ u_l & \rightharpoonup & u_0 & \text{em} \quad H_0^1(\Omega). \end{array}$$

Por argumentos análogos aos usados durante a demonstração da unicidade, obtemos $v = u_0$, quase sempre em Ω. Assim,

$$\begin{array}{llll} u_l & \to & u_0 & \text{em} \quad L^2(\Omega). \\ u_l & \rightharpoonup & u_0 & \text{em} \quad H_0^1(\Omega). \end{array}$$

Note que, I é o ínfimo de $E(u)$ sobre todos os $u's$ em H_0^1. Logo, em particular, vale para $u_0 \in H_0^1$, ou seja,

$$E(u_0) \geq I. \tag{5.19}$$

Queremos mostrar que o ínfimo é assumido em algum $u_0 \in H_0^1$. Vamos mostrar, então, a desigualdade inversa, isto é, $E(u_0) \leq I$. De fato, como $u_l \rightharpoonup u_0$ em $H_0^1(\Omega)$ e E é fracamente semicontínuo inferiormente, temos

$$I = \liminf_{l\to+\infty} E(u_l) \geq E(u_0).$$

Portanto, existe $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ tal que E assume seu ínfimo. E isto conclui a Afirmação 5.1. $\square$

Observação 5.6. No que se segue, podemos supor $u_0 \geq 0$, caso contrário substituiríamos u_0 por u_0^+ e usaríamos o fato de que $F(x, u_0) \leq F(x, u_0^+)$, o que é verdade, já que $F(x, u_0) = f(x, 0)u_0 \leq 0$, para $u_0 \leq 0$.

Se soubermos, que além do fato de que u_0 é ponto de mínimo do funcional E, $u_0 \in L^\infty$, podemos facilmente concluir que u_0 é solução de (1.1). Vamos mostrar que, dentre os $u_0's$ que minimizam o funcional E em H_0^1, existe, pelo menos um u_0 que está em $L^\infty(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Para provar isto, trabalharemos com o problema truncado. Considere, para cada inteiro $k > 0$,

$$f^k(x,t) = \begin{cases} max\{f(x,t), -kt\}, & \text{se } t \geq 0. \\ f(x,0), & \text{se } t \leq 0. \end{cases}$$

Considere também

$$a_0^k(x) = \liminf_{t\to 0} \frac{f^k(x,t)}{t} \qquad \text{e} \qquad a_\infty^k(x) = \limsup_{t\to +\infty} \frac{f^k(x,t)}{t}.$$

Note que, $f^k(x,t)$ satisfaz as hipóteses $(H_2), (H_3), (H_4)$ e (H_5). Vamos mostrar que também valem as hipóteses (H_6) e (H_7).

1) $\lambda_1(-\Delta - a_0^k(x)) < 0$:
De fato,

$$f(x,t) \le f^k(x,t) \;\; \Rightarrow \;\; \frac{f(x,t)}{t} \le \frac{f^k(x,t)}{t} \text{ para } t > 0.$$

Logo, para quase todo x em Ω,

$$a_0(x) = \liminf_{t\to 0} \frac{f(x,t)}{t} \le \liminf_{t\to 0} \frac{f^k(x,t)}{t} = a_0^k(x).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\lambda_1(-\Delta - a_0^k(x)) \;\; &= \;\; \inf_{\substack{\phi\in H_0^1\\ \|\phi\|_{L^2}=1}} \left\{ \int_\Omega |\nabla\phi|^2 \, dx - \int_\Omega a_0^k(x)\phi^2(x)dx \right\} \\
&\le \;\; \inf_{\substack{\phi\in H_0^1\\ \|\phi\|_{L^2}=1}} \left\{ \int_\Omega |\nabla\phi|^2 \, dx - \int_\Omega a_0(x)\phi^2(x)dx \right\} \\
&= \;\; \lambda_1(-\Delta - a_0(x)) \;\; < \;\; 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $\lambda_1(-\Delta - a_0^k(x)) < 0$.

2) $\lambda_1(-\Delta - a_\infty^k(x)) > 0$:

De fato, ao $k \to +\infty$, temos $a_\infty^k \to a_\infty$, o que implica, como veremos, na seguinte convergência,

$$\lambda_1(-\Delta - a_\infty^k(x)) \;\; \longrightarrow \;\; \lambda_1(-\Delta - a_\infty(x)).$$

Note que

$$a_\infty(x) \le a_\infty^k(x) \le a_\infty^m(x) \text{ para } k \ge m.$$

Assim, pelo mesmo argumento feito para a_0, temos

$$\lambda_1(-\Delta - a_\infty^m(x)) \le \lambda_1(-\Delta - a_\infty^k(x)) \le \lambda_1(-\Delta - a_\infty(x)) \tag{5.20}$$

Ou seja, $\lambda_1(-\Delta - a_\infty^k(x))$ é uma seqüência crescente em k. Se

$$\lambda_1(-\Delta - a_\infty^k(x)) \to +\infty,$$

então $\lambda_1(-\Delta - a_\infty(x)) = +\infty$ e a convergência está provada. Assim, basta considerar

$$\lambda_1(-\Delta - a_\infty^k(x)) \to I \in \mathbb{R}.$$

Vamos provar que $I = \lambda_1(-\Delta - a_\infty(x))$. Por (5.20), é suficiente mostrar que $\lambda_1(-\Delta - a_\infty(x)) \leq I$. Pela definição de $\lambda_1(-\Delta - a_\infty^k(x))$, para cada k, seja ϕ_k tal que $\| \phi_k \|_{L^2(\Omega)} = 1$ e

$$\lambda_1(-\Delta - a_\infty^k(x)) \leq \int_\Omega |\nabla \phi_k|^2 - a_\infty^k(x)\phi_k^2 dx < \lambda_1(-\Delta - a_\infty^k(x)) + \frac{1}{k}.$$

Logo,

$$\lim_{k\to+\infty} \int_\Omega |\nabla \phi_k|^2 - a_\infty^k(x)\phi_k^2 dx = I. \tag{5.21}$$

Observe que

$$\int_\Omega |\nabla \phi_k|^2 - a_\infty^k(x)\phi_k^2 dx \leq \lambda_1(-\Delta - a_\infty^k(x)) + \frac{1}{k} \leq I + 1.$$

Isto implica em

$$\int_\Omega |\nabla \phi_k|^2 \, dx \leq I + 1 + \int_\Omega -a_\infty^k(x)\phi_k^2 dx.$$

Como $a_\infty^k(x) = a_\infty(x)$ se $a_\infty(x) > -k$ e $a_\infty^k(x) = -k$ se $a_\infty(x) < -k$, então $\sup a_\infty^k(x) = \sup a_\infty(x)$, para k grande. Logo, $\sup a_\infty^k(x) = \sup a_\infty(x) \leq C$. Assim,

$$\int_\Omega |\nabla \phi_k|^2 \, dx \leq I + 1 + \int_\Omega C\phi_k^2 dx \leq I + 1 + C.$$

Logo, ϕ_k é limitado em $H_0^1(\Omega)$ e, portanto, usando os mesmo argumentos anteriores, existe uma subseqüência ϕ_j tal que

$$\begin{array}{cccc} & \phi_j & \rightharpoonup & \phi_0 \quad \text{em} \quad H_0^1 \\ \text{e} & \phi_j & \to & \phi_0 \quad \text{em} \quad L^2. \end{array}$$

Portanto, como $v \mapsto \displaystyle\int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx$ é fracamente semicontínuo inferiormente, então

$$\int_{\Omega} |\nabla \phi_0|^2 \, dx \leq \liminf_{j \to +\infty} \int_{\Omega} |\nabla \phi_j|^2 \, dx. \tag{5.22}$$

Podemos supor s.p.g. que

$$\int_{\Omega} |\nabla \phi_j|^2 \, dx \to \liminf_{j \to +\infty} \int_{\Omega} |\nabla \phi_j|^2 \, dx, \tag{5.23}$$

tomando uma subseqüência se necessário. Logo, de (5.21) e (5.23), temos que existe o limite

$$\lim_{j \to +\infty} - \int_{\Omega} a_{\infty}^{j}(x) \phi_j^2(x) dx.$$

Seja $j_0 \in \mathbb{N}$. Note que

$$-a_{\infty}^{j_0}(x) \leq -a_{\infty}^{j}(x), \quad \text{para} \quad j \geq j_0.$$

Logo,

$$\int_{\Omega} -a_{\infty}^{j_0}(x) \phi_j^2(x) dx \leq \int_{\Omega} -a_{\infty}^{j}(x) \phi_j^2(x) dx.$$

Assim,

$$\lim_{j \to +\infty} \int_{\Omega} -a_{\infty}^{j_0}(x) \phi_j^2(x) dx \leq \lim_{j \to +\infty} \int_{\Omega} -a_{\infty}^{j}(x) \phi_j^2(x) dx$$

e, como $a_{\infty}^{j_0} \in L^{\infty}(\Omega)$ (pois $-j_0 \leq a_{\infty}^{j_0} \leq a_{\infty}(x)$) e $\phi_j \to \phi_0$ em L^2, então

$$\lim_{j \to +\infty} \int_{\Omega} -a_{\infty}^{j_0}(x) \phi_j^2(x) dx = \int_{\Omega} -a_{\infty}^{j_0}(x) \phi_0^2(x) dx$$

Portanto, para todo j_0, temos

$$\int_{\Omega} -a_{\infty}^{j_0}(x) \phi_0^2(x) dx \leq \lim_{j \to +\infty} \int_{\Omega} -a_{\infty}^{j}(x) \phi_j^2(x) dx \tag{5.24}$$

Como $a_{\infty}^{j_0}(x)$ converge a $a_{\infty}(x)$ e é crescente em j_0, então

$$-a_{\infty}^{j_0}(x) \phi_0^2(x) \to -a_{\infty}(x) \phi_0^2(x)$$

e é crescente. Logo, pelo Teorema da Convergência Monótona (ver Teorema 2.3),

$$\lim_{j_0 \to +\infty} \int_{\Omega} -a_{\infty}^{j_0}(x) \phi_0^2(x) dx = \int_{\Omega} -a_{\infty}(x) \phi_0^2(x) dx.$$

Assim, por (5.24),

$$\int_{\Omega} -a_{\infty}(x) \phi_0^2(x) dx \leq \lim_{j \to +\infty} \int_{\Omega} -a_{\infty}^{j}(x) \phi_j^2(x) dx. \tag{5.25}$$

Portanto, (5.22), (5.23) e (5.25) implicam que

$$\int_{\Omega} |\nabla \phi_0|^2 - a_{\infty}(x)\phi_0^2 dx \leq \lim_{j\to+\infty} \int_{\Omega} |\nabla \phi_j|^2 - a_{\infty}^j(x)\phi_j^2(x)dx = I,$$

com $\| \phi_0 \|_{L^2(\Omega)}= 1$. Logo,

$$\lambda_1(-\Delta - a_{\infty}(x)) \leq \int_{\Omega} |\nabla \phi_0|^2 - a_{\infty}(x)\phi_0^2 dx \leq I.$$

Ou seja,

$$\lambda_1(-\Delta - a_{\infty}^k(x)) \to I = \lambda_1(-\Delta - a_{\infty}(x)).$$

Assim, existe k_0 suficientemente grande, tal que, para todo $k \geq k_0$, temos

$$\lambda_1(-\Delta - a_{\infty}^k) \quad > \quad 0. \tag{5.26}$$

Seja,

$$E_k(u) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} | \nabla u |^2 \, dx - \int_{\Omega} F^k(x,u)dx, \qquad u \in H_0^1(\Omega),$$

onde, $F^k(x,u) = \displaystyle\int_0^u f^k(x,t)dt$. Com o mesmo argumento utilizado para provar que o funcional E assume seu ínfimo em algum $u_0 \in H_0^1$, mostra-se que o funcional E_k assume seu ínfimo em algum $u_k \in H_0^1(\Omega)$. Considere, então, $u_k \in H_0^1$, tal que

$$E_k(u_k) = \inf_{u\in H_0^1} E_k(u).$$

Observação 5.7. O lagrangiano associado ao funcional E_k é dado por

$$L(s,z,x) = \frac{1}{2}|s|^2 - F^k(x,z).$$

Além disso, L satisfaz,

$$\big|L(s,z,x)\big| \leq C\big(|s|^2 + |z|^2 + 1\big).$$

De fato,

$$\big|L(s,z,x)\big| \quad = \quad \left|\frac{1}{2}|s|^2 - F^k(x,z)\right| \quad \leq \quad \frac{1}{2}|s|^2 + \big|F^k(x,z)\big|.$$

E, por sua vez,

$$\left|F^k(x,z)\right| \;=\; \left|\int_0^z f^k(x,t)dt\right| \;\leq\; \int_0^z \left|f^k(x,t)\right|dt.$$

E, no entanto,

$$\left|f^k(x,t)\right| = \left|max\{f(x,t),-kt\}\right|.$$

Analisaremos cada caso.

. Suponha $t \geq 0$.

(i) Se $f(x,t) \geq 0$. Então, $\max\{f(x,t),-kt\} = f(x,t)$ e, usando a hipótese (H_3), segue que

$$\left|f^k(x,t)\right| = f(x,t) \leq C(t+1) = C(|t|+1), \quad \text{quase sempre em } \Omega.$$

(ii) Se $f(x,t) < 0$.

Há duas possibilidades:

1) $f(x,t) > -kt$.

Neste caso,

$$\left|f^k(x,t)\right| < \left|-kt\right| = kt \leq k(t+1) = C_k(t+1) = C_k(|t|+1).$$

E, assim $|f^k(x,t)| \leq C(|t|+1)$.

2) $f(x,t) < -kt = f^k(x,t)$.

Neste caso

$$|-kt| = |f^k(x,t)|, \quad \text{mas} \quad \left|f^k(x,t)\right| \leq \left|k(t+1)\right| \leq C_k(|t|+1).$$

Logo, $|f^k(x,t)| \leq C(|t|+1)$. Portanto, se $f(x,t) < 0$, temos

$$\left|f^k(x,t)\right| \leq C(|t|+1).$$

. Suponha $t \leq 0$. Então, $f(x,t) = f(x,0) \geq 0$. Assim,

$$\left|f^k(x,t)\right| = \left|f(x,0)\right| = f(x,0) \geq 0.$$

E, pela hipótese (H_3), $f(x,0) \leq C \leq C(|t|+1)$. Portanto,

$$\left|f(x,t)\right| \leq C(|t|+1).$$

Tomando a constante C como o máximo de todas as constantes envolvidas, obtemos, em todos os casos,

$$\big|f^k(x,t)\big| = \big|max\{f(x,t), -kt\}\big| \leq C_k(|t|+1) \tag{5.27}$$

Com isso,

$$\big|F^k(x,z)\big| \;\leq\; \int_0^z \big|f^k(x,t)\big|dt \;\leq\; C\int_0^z |t|+1dt \;\leq\; C\Big(\frac{|z|^2}{2}+|z|\Big).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\big|L(s,z,x)\big| &\leq \frac{1}{2}|s|^2 + |F^k(x,z)| \\
&\leq \frac{1}{2}|s|^2 + \frac{C_k}{2}|z|^2 + C_k|z| \\
&\leq C_1\big(|s|^2+|z|^2+|z|\big) \\
&\leq D(|s|^2+|z|^2+1).
\end{aligned}$$

Sendo que a última desigualdade ocorre devido a Observação 5.2. Além disso,

$$D_sL(s,z,x) = p \;\Rightarrow\; |D_sL(s,z,x)| = |s| \;\leq\; C(|s|+|z|+1).$$

Onde D_s é a derivada parcial do lagrangiano L com relação a variável s. Fazendo agora a derivada parcial de L, com relação a variável z, temos

$$D_zL(s,z,x) = \big(F^k(x,z)\big)_z = f^k(x,z) \leq C_k(|z|+1),$$

e a última desigualdade ocorre devido a estimativa (5.27). Portanto,

$$|D_zL(s,z,x)| \;\leq\; C(|z|+1) \;\leq\; C(|s|+|z|+1).$$

Assim, temos os seguintes resultados sobre o crescimento do lagrangiano L e, ainda, que u_k é um mínimo do funcional E,

$$\begin{aligned}
|L(s,z,x)| &\leq C(|s|^2+|z|^2+1) \\
|D_sL(s,z,x)| &\leq C(|s|+|z|+1) \\
|D_zL(s,z,x)| &\leq C(|s|+|z|+1) \\
E_k(u_k) &= \min_{u\in H_0^1} E_k(u).
\end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema da Solução de Euler-Lagrange, u_k é uma solução fraca de

$$\begin{cases} -\Delta u_k &= f^k(x, u_k) & \text{em} & \Omega \\ u_k &\geq 0 & \text{em} & \Omega \\ u_k &= 0 & \text{em} & \partial\Omega \end{cases}$$

Concluímos, assim, a Observação 5.7.

Vamos mostrar que $u_k \in L^\infty$, onde estes $k's$ satisfazem (5.26). Sabemos, pela observação 5.7, que u_k satisfaz

$$-\Delta u_k = f^k(x, u_k),$$

onde, pela estimativa (5.27), temos $\left|f^k(x,u)\right| \leq C_k\left(|u_k|+1\right) = C_k u_k + C_k$. Logo, $f^k(x, u_k) = g_k(x)u_k + g_k(x)$, onde

$$|g_k(x)| = \left|\frac{C_k f^k(x,u)}{C_k u_k + c_k}\right| \leq C_k.$$

Logo, $-\Delta u_k = f^k(x, u_k) = g_k(x)\left(u_k+1\right)$, onde $|g_k(x)| \leq C_k$. Ou seja,

$$-\Delta u_k - g_k(x)u_k = g_k(x), \qquad \text{onde} \quad |g_k(x)| \leq C_k$$

Assim, definimos o funcional L_k, como sendo

$$L_k(u_k) = -\Delta u_k - g_k(x)u_k$$

Logo, $L_k(u_k) = g_k(x)$. Agora, segue pelo Teorema 2.7, ver também [TG], que $u_k \in C^\alpha(\overline{\Omega})$. Logo, u_k é limitado superiormente em Ω, portanto, u_k está em $L^\infty(\Omega)$, já que $u_k \geq 0$ e, com isso, limitado inferiormente em Ω.

Defina $v_k = min\{u_0, u_k\}$, para k qualquer satisfazendo (5.26). Vamos mostrar que

$$E(v_k) \leq E(u_0). \tag{5.28}$$

Note que

$$E(v_k) - E(u_0) = \int_{\{u_k<u_0\}}\left[\frac{1}{2}\mid\nabla u_k\mid^2 - \frac{1}{2}\mid\nabla u_0\mid^2 - F(x,u_k) + F(x,u_0)\right]dx. \tag{5.29}$$

Lembre-se que, E_k assume seu ínfimo em u_k. Então, $E_k(u_k) \leq E_k(\phi)$, $\forall\phi \in H_0^1$. Ou seja,

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega} \mid \nabla u_k \mid^2 dx - \int_{\Omega} F^k(x,u_k)dx \quad \leq \quad \frac{1}{2}\int_{\Omega} \mid \nabla \phi \mid^2 dx - \int_{\Omega} F^k(x,\phi)dx,$$

para todo $\phi \in H_0^1$. Logo, em particular, vale para $\phi = max\{u_0, u_k\}$. Observe que, sobre o conjunto $\{u_k \geq u_0\}$, as integrais dos dois lados da desigualdade são iguais, pois, neste caso, $\phi = u_k$. Com isso, o caso interessante é quando $\phi = max\{u_0, u_k\} = u_0$. Assim, integrando em $\{u_k < u_0\}$, a desigualdade nos dá

$$\frac{1}{2}\int_{\{u_k<u_0\}} \mid \nabla u_k \mid^2 dx - \int_{\{u_k<u_0\}} F^k(x,u_k)dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_{\{u_k<u_0\}} \mid \nabla u_0 \mid^2 dx - \int_{\{u_k<u_0\}} F^k(x,u_0)dx.$$

De uma forma mais conveniente,

$$\frac{1}{2}\int_{\{u_k<u_0\}} \mid \nabla u_k \mid^2 - \mid \nabla u_0 \mid^2 dx \quad \leq \quad \int_{\{u_k<u_0\}} F^k(x,u_k) - F^k(x,u_0)dx. \tag{5.30}$$

Assim, substituindo (5.30) em (5.29), temos

$E(v_k) - E(u_0) =$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\{u_k<u_0\}} \frac{1}{2} \mid \nabla u_k \mid^2 - \frac{1}{2} \mid \nabla u_0 \mid^2 dx + \int_{\{u_k<u_0\}} -F(x,u_k) + F(x,u_0)dx \\
&\leq \int_{\{u_k<u_0\}} F^k(x,u_k) - F^k(x,u_0)dx + \int_{\{u_k<u_0\}} -F(x,u_k) + F(x,u_0)dx \\
&= \int_{\{u_k<u_0\}} F^k(x,u_k) - F^k(x,u_0) - F(x,u_k) + F(x,u_0)dx.
\end{aligned}$$

Observe, agora, que

$F^k(x,u_k) - F^k(x,u_0) - F(x,u_k) + F(x,u_0) =$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{u_k} f^k(x,t)dt - \int_0^{u_0} f^k(x,t)dt - \int_0^{u_k} f(x,t)dt + \int_0^{u_0} f(x,t)dt \\
&= \int_{u_0}^{u_k} f^k(x,t)dt - \int_{u_0}^{u_k} f(x,t)dt \\
&= \int_{u_0}^{u_k} f^k(x,t) - f(x,t)dt.
\end{aligned}$$

Assim, como $f^k \geq f$ q.s. em Ω, então também temos $f^k \geq f$ q.s. em $\{u_k < u_0\}$. Logo,

$$\int_{u_0}^{u_k} f^k(x,t) - f(x,t)dt \leq 0, \text{ para } u_k < u_0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} E(v_k) - E(u_0) &\leq \int_{\{u_k<u_0\}} F^k(x,u_k) - F^k(x,u_0) - F(x,u_k) + F(x,u_0)dx \\ &= \int_{\{u_k<u_0\}} \int_{u_0}^{u_k} f^k(x,t) - f(x,t)dt \ \ dx \ \ \leq \ \ 0. \end{aligned}$$

Portanto, para cada k, temos

$$E(v_k) \leq E(u_0). \tag{5.31}$$

Como $E(u_0) = \inf\limits_{u \in H_0^1} E(u)$ e $E(v_k) \leq E(u_0)$, então, devemos ter $E(v_k) = E(u_0)$. Portanto, v_k minimiza $E(u)$ e está em L^∞, já que $0 \leq v_k \leq u_k$ e $u_k \in L^\infty$. Podemos supor então que $u_0 \in L^\infty(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, onde u_0 satisfaz $E(u_0) = \inf\limits_{u \in H_0^1} E(u)$.

Afirmação 5.2. Se u_0 satisfaz, $E(u_0) = \inf\limits_{u \in H_0^1} E(u)$ e $u_0 \in L^\infty$, então u_0 é solução fraca de (1.1).

Prova: Para mostrar que u_0 é solução fraca de (1.1), devemos mostrar que u_0 satisfaz,

$$\int_\Omega \nabla u_0 \nabla \phi dx = \int_\Omega f(x,u_0)\phi dx, \quad \forall \phi \in H_0^1.$$

De fato, dado $\varepsilon \in \mathbb{R}$ e $\phi \in H_0^1 \cap L^\infty$, seja

$$u_\varepsilon := u_0 + \varepsilon\phi.$$

Logo, $u_\varepsilon \in H_0^1 \cap L^\infty$, pois H_0^1 e L^∞ são espaços vetorias. Lembre-se que u_0 é ponto de mínimo de E em H_0^1. Logo, $E(u_0) \leq E(u_\varepsilon)$. Portanto,

$$E(u_\varepsilon) - E(u_0) \geq 0.$$

Assim, para $\varepsilon > 0$, temos

$$\begin{aligned}
0 &\leq \frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2 dx - \int_\Omega F(x,u_\varepsilon)dx - \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx + \int_\Omega F(x,u_0)dx\right]\\
&= \frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2 - |\nabla u_0|^2 dx + \int_\Omega -F(x,u_\varepsilon) + F(x,u_0)dx\right]\\
&= \frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla u_0|^2 + 2\varepsilon \nabla u_0 \nabla\phi + \varepsilon^2|\nabla\phi|^2\right) - |\nabla u_0|^2 dx + \right.\\
&+ \left.\int_\Omega -F(x,u_\varepsilon) + F(x,u_0)dx\right]\\
&= \frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{1}{2}\int_\Omega \left(2\varepsilon \nabla u_0 \nabla\phi + \varepsilon^2|\nabla\phi|^2\right) dx + \int_\Omega -F(x,u_\varepsilon) + F(x,u_0)dx\right].
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$0 \leq \int_\Omega \left(\nabla u_0 \nabla\phi + \frac{\varepsilon}{2}|\nabla\phi|^2\right) dx + \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega -F(x,u_\varepsilon) + F(x,u_0)dx. \qquad (5.32)$$

Observe que,

$$\begin{aligned}
-F(x,u_\varepsilon) + F(x,u_0) &= -\int_0^{u_\varepsilon} f(x,t)dt + \int_0^{u_0} f(x,t)dt\\
&= -\int_0^{u_0+\varepsilon\phi} f(x,t)dt + \int_0^{u_0} f(x,t)dt\\
&= -\int_0^{u_0} f(x,t)dt - \int_{u_0}^{u_0+\varepsilon\phi} f(x,t)dt + \int_0^{u_0} f(x,t)dt\\
&= -\int_{u_0}^{u_0+\varepsilon\phi} f(x,t)dt.
\end{aligned}$$

Logo, a desigualdade (5.32) fica,

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_\Omega \left(\nabla u_0 \nabla\phi + \frac{\varepsilon}{2}|\nabla\phi|^2\right) dx + \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega \left(-\int_{u_0}^{u_0+\varepsilon\phi} f(x,t)dt\right) dx\\
&= \int_\Omega \left(\nabla u_0 \nabla\phi + \frac{1}{2}\varepsilon|\nabla\phi|^2\right) dx + \int_\Omega -\frac{1}{\varepsilon}\left(\int_{u_0}^{u_0+\varepsilon\phi} f(x,t)dt\right) dx.
\end{aligned}$$

Analisaremos o que ocorre, quando fazemos $\varepsilon \to 0$ com a integral

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{u_0}^{u_0+\varepsilon\phi} f(x,t)dt.$$

Seja $x_0 \in \Omega$ qualquer. Se $\phi(x_0) = 0$, então,

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{u_0}^{u_0+\varepsilon\phi(x_0)} f(x,t)dt \quad = \quad \frac{1}{\varepsilon}\int_{u_0}^{u_0} f(x,t)dt \quad = \quad 0.$$

Com esse resultado, não há mais nada o que fazer. O caso interessante ocorre quando $\phi(x_0) \neq 0$. Neste caso, temos

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{u_0}^{u_0+\varepsilon\phi(x_0)} f(x,t)dt \quad = \quad \phi(x_0)\frac{\displaystyle\int_{u_0}^{u_0+\varepsilon\phi(x_0)} f(x,t)dt}{\varepsilon\phi(x_0)}.$$

Note que, ao fazer $\varepsilon \to 0$ também temos $\varepsilon\phi(x_0) \longrightarrow 0$. Assim,

$$\frac{\displaystyle\int_{u_0}^{u_0+\varepsilon\phi(x_0)} f(x,t)dt}{\varepsilon\phi(x_0)} \quad \longrightarrow \quad f(x,u_0).$$

Portanto, ao $\varepsilon \to 0$,

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{u_0}^{u_0+\varepsilon\phi(x_0)} f(x,t)dt \quad \longrightarrow \quad \phi(x_0)f(x,u_0).$$

Porém, x_0 foi arbitrariamente escolhido em Ω. Então, podemos concluir que

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{u_0}^{u_0+\varepsilon\phi} f(x,t)dt \longrightarrow \phi(x)f(x,u_0). \tag{5.33}$$

Fazendo o limite com $\varepsilon \to 0$, em

$$0 \leq \int_\Omega \left(\nabla u_0 \nabla\phi + \frac{1}{2}\varepsilon|\nabla\phi|^2\right)dx + \int_\Omega -\frac{1}{\varepsilon}\left(\int_{u_0}^{u_0+\varepsilon\phi} f(x,t)dt\right)dx$$

e utilizando a convergência (5.33) e o Teorema da Convergência Dominada, temos

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_\Omega \nabla u_0 \nabla \phi dx + \frac{1}{2}\varepsilon \int_\Omega |\nabla \phi|^2 dx + \int_\Omega -\frac{1}{\varepsilon} \Big(\int_{u_0}^{u_0+\varepsilon\phi} f(x,t)dt \Big) dx \right] \\
&= \int_\Omega \nabla u_0 \nabla \phi dx \quad + \quad 0 \quad - \quad \int_\Omega \phi(x) f(x,u_0) dx.
\end{aligned}
$$

Concluímos, então, que

$$
0 \quad \leq \quad \int_\Omega \nabla u_0 \nabla \phi dx - \int_\Omega \phi(x) f(x,u_0) dx, \qquad \forall \phi \in H_0^1 \cap L^\infty.
$$

Queremos mostrar este resultado para todo ϕ em H_0^1. Sejam, então, $\varphi \in H_0^1$ e $\phi_n \in H_0^1 \cap L^\infty$, tais que $\phi_n \longrightarrow \varphi$ em $H_0^1 \subset L^2$. Logo,

$$
\int_\Omega \nabla u_0 \nabla \phi_n dx \longrightarrow \int_\Omega \nabla u_0 \nabla \varphi dx \tag{5.34}
$$

e

$$
\int_\Omega f(x,u_0)\phi_n(x) dx \longrightarrow \int_\Omega f(x,u_0)\varphi(x) dx. \tag{5.35}
$$

De fato, considere $\xi > 0$ real. Note que, $\phi_n \longrightarrow \varphi$ em $H_0^1 \subset L^2$. Assim, segue a convergência (5.34), ou seja,

$$
\begin{aligned}
&\left| \int_\Omega \nabla u_0 \nabla \phi_n dx - \int_\Omega \nabla u_0 \nabla \varphi dx \right| \\
&\qquad \leq \int_\Omega \big| \nabla u_0 \nabla \phi_n - \nabla u_0 \nabla \varphi \big| dx \\
&\qquad = \int_\Omega \big| \nabla u_0 \big(\nabla \phi_n - \nabla \varphi \big) \big| dx \\
&\qquad = \int_\Omega \big| \nabla u_0 \big| \big| \nabla \phi_n - \nabla \varphi \big| dx \\
&\qquad \leq \left(\int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla \phi_n - \nabla \varphi|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\qquad = \parallel u_0 \parallel_{H_0^1(\Omega)} \parallel \phi_n - \varphi \parallel_{H_0^1(\Omega)} \\
&\qquad \leq \xi,
\end{aligned}
$$

já que $\parallel u_0 \parallel_{H_0^1(\Omega)} < \infty$ e $\phi_n \to \varphi$ em $H_0^1(\Omega)$. Portanto,

$$
\left| \int_\Omega \nabla u_0 \nabla \phi_n dx - \int_\Omega \nabla u_0 \nabla \varphi dx \right| \leq \xi, \quad \forall \xi > 0.
$$

A segunda convergência, (5.35), também decorre da convergência de ϕ_n, só que agora em L^2. De fato

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega f(x,u_0)\phi_n(x)dx - \int_\Omega f(x,u_0)\varphi(x)dx\right| & \\
&\leq \int_\Omega |f(x,u_0)||\phi_n(x)-\varphi(x)|dx \\
&\leq \left(\int_\Omega |f(x,u_0)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\phi_n(x)-\varphi(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C \parallel \phi_n(x) - \varphi(x) \parallel_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \xi.
\end{aligned}$$

Logo, para n suficientemente grande, as convergêncais (5.34) e (5.35) implicam em

$$\int_\Omega \nabla u_0 \nabla \phi_n dx - \int_\Omega f(x,u_0)\phi_n dx \quad \longrightarrow \quad \int_\Omega \nabla u_0 \nabla \varphi dx - \int_\Omega f(x,u_0)\varphi dx.$$

Portanto, como

$$\int_\Omega \nabla u_0 \nabla \phi_n dx - \int_\Omega f(x,u_0)\phi_n dx \quad \geq \quad 0, \qquad \forall \phi_n \in H_0^1 \cap L^\infty$$

e φ é qualquer em $H_0^1(\Omega)$, temos

$$\int_\Omega \nabla u_0 \nabla \varphi dx - \int_\Omega f(x,u_0)\varphi dx \quad \geq \quad 0, \qquad \forall \varphi \in H_0^1. \tag{5.36}$$

Procedendo da mesma forma, só que com $\varepsilon < 0$, obtemos

$$\int_\Omega \nabla u_0 \nabla \varphi dx - \int_\Omega f(x,u_0)\varphi dx \quad \leq \quad 0, \qquad \forall \varphi \in H_0^1. \tag{5.37}$$

Portanto, de (5.36) e de (5.37) vale a seguinte igualdade,

$$\int_\Omega \nabla u_0 \nabla \varphi dx = \int_\Omega f(x,u_0)\varphi dx, \qquad \forall \varphi \in H_0^1.$$

Portanto, $u_0(x) \in H_0^1(\Omega)$ é solução fraca do problema (1.1), o que conclui a Afirmação 5.2. $\square$

Assim, sob as hipóteses (H_1), (H_2), (H_3), (H_4), (H_5), (H_6) e (H_7) concluímos que existe pelo menos uma solução do problema (1.1). Concluímos assim, o Teorema 5.1.

$\square$

Referências

[A] H. Amann, "*On the existence of positive solutions of nonlinear elliptic boundary value problems,*" Indiana Univ. Math. J.21, 125-146 (1971).

[AH] H. Amann, "*Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces,*" SIAM Rev. 18, 620-709 (1976).

[B] H. Brezis, "*Análisis Funcional Teoría y aplicationes,*" Versão espanhola de Juan Ramón Esteban, Alianza Editorial, S.A., Madrid (1984).

[BB] R. Benguria, H. Brezis & E. Lieb, "*The Thomas-Fermi-von Weizsäcker theory of atoms and molecules,*"Communs Math. Phys. 79, 167-180 (1981).

[BH] H. Berestycki, "*Le nombre de solutions de certains problèmes semi-linéaires élliptiques,*" J. funct. Analysis 40, 1-29 (1981).

[BO] H. Brezis and L. Oswald, "*Remarks on sublinear elliptic equations*" Nonlinear Analysis, Theory, Methodos & Applications, V. 10, No.1, pp. 55-64 (1986).

[BR] R. Benguria, "*The von Weizsäcker and exchange corrections in the Thomas-Fermi theory,*" dissertation, Princeton University, unpublished (1979).

[CL] D. Cohen & T. Laetsch, "*Nonlinear boundary value problems suggested by chemical reactor theory,*" J. diff. Eqns 7, 217-226 (1970).

[E] L. C. Evans, "*Partial Differential Equations,*" Graduate Studies in Mathematics, vol. 19, American Mathematical Society, (1998).

[F] D. Figueiredo, "*Positive solutions of semilinear elliptic problems,*" Lectures Notes, São Paulo (1981).

[H] P. Hess, "*On uniqueness of positive soluctions of nonlinear elliptic boundary value problems,*" Math, Z. 154, 17-18 (1977).

[K] H. Keller, "*Positive soluctions of some nonlinear eigenvalue problems,*" J. Math. Mach. 19,0279-296 (1969).

[KB] B. Kawohl, M. Belloni, "*A direct uniqueness proof for equations involving the p-Laplace operator,*" Manuscripta Math. 109, Springer-Verlag, pp 229-231, (2002).

[KC] H. Keller & D. Cohen, "*Some positone problems suggested by nonlinear heat generation,*" J. Math. Mech. 16, 1361-1376 (1967).

[KM] M. Krasnoselskii, "*Positive Solutions of Operator Equations,* " Noordhoff, Groningen (1964).

[L] T. Laetsch, "*Uniqueness for sublinear boundary value problems,*" J. diff. Eqns 13, 13-23, (1973).

[R] H. L. Royden, "*Real Analysis,*" Stanford University, Second Edition, The Macmillan Company Collier-Macmillan Limited, London, (1971).

[SC] R. B. Simpson & D. Cohen, "*Positive Soluctions of nonlinear elliptic eigenvalue problems,*" J. Math. Mech. 19, 895-910 (1970).

[SW] J. Smoller & A. Wasserman, "*Existence, iniqueness and nondegeneracy of positive solutions of semilinear elliptic equations,*" Communs Math. Phys. 95, 129-159 (1984).

[TG] D. Gilbert, N.S. Trudinger, "*Elliptic Partial Differential Equations of Second Order,*" Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York (1977).