



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

PRINCÍPIOS DE GRANDES DESVIOS: PARA O MÉTODO DA ENTROPIA
PENALIZADA NA TEORIA DE AUBRY-MATHER E PARA CADEIAS DE MARKOV A
ESTADO CONTÍNUO

Tese de Doutorado

JOANA MOHR

Porto Alegre, 28 de Julho de 2008.

Tese submetida por Joana Mohr¹ como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:

Dr. Artur Oscar Lopes

Banca Examinadora:

Dr. Elismar da Rosa Oliveira

Dr. Mário Jorge Dias Carneiro (UFMG)

Dr. Rafael Oswaldo Ruggiero Rodriguez (PUC-RJ)

Data da Defesa: 28 de Julho de 2008.

¹Bolsista do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPQ

Ao Rafael,
e a minha família.

Agradecimentos:

Ao meu orientador, Artur Lopes, pelos quase 10 anos de orientação, especialmente nestes 4 últimos, pelo apoio e incentivo.

Ao professor Diogo Aguiar Gomes do Instituto Superior Técnico de Lisboa pela troca de idéias e pelo trabalho conjunto durante minha estada em Lisboa em Janeiro de 2008 que resultaram em outro artigo.

Ao professor Philippe Thieullen da Universidade de Bordeaux 1 pelos convites para visitar a universidade de Bordeaux, pelas sugestões e pelo interesse mostrado por este trabalho.

Ao Rafael pelo amor e compreensão e por todos os momentos de alegria que passamos juntos.

Aos meus pais e irmãos que sempre me apoiaram e acreditaram em mim.

Aos amigos pelo companheirismo e pelos bons momentos de descontração.

Ao CNPQ pelo apoio financeiro.

Resumo

Este trabalho será dividido em dois capítulos. Em ambos exibiremos a função de desvio e um princípio de grandes desvios para uma sequência de medidas que convergem, para uma medida minimizante no primeiro problema e para uma medida maximizante no segundo.

O primeiro capítulo trata de aspectos da teoria de Aubry-Mather. Para um Lagrangiano $L(x, v) : \mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, satisfazendo algumas hipóteses naturais, e sob hipótese de genericidade, estamos interessados em mostrar um princípio de grandes desvios para uma sequência de medidas que convergem para a medida de Mather. D. Gomes e E. Valdinoci mostraram, para ϵ, h fixados, a existência de uma medida absolutamente contínua $\mu_{\epsilon, h}$ que minimiza o problema de A-M discreto com entropia:

$$\min_{\mathcal{M}_h} \left\{ \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N} L(x, v) d\mu(x, v) + \epsilon S[\mu] \right\}$$

onde $\mathcal{M}_h = \left\{ \mu \in \mathcal{M} : \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N} \varphi(x + hv) - \varphi(x) d\mu = 0, \forall \varphi \in C(\mathbb{T}^N) \right\}$

e $S[\mu] = \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N} \mu(x, v) \ln \frac{\mu(x, v)}{\int_{\mathbb{R}^N} \mu(x, w) dw} dx dv$.

Foi provado por D. Gomes e E. Valdinoci que $\mu_{\epsilon, h} \rightarrow \mu$, onde μ é a única medida de Mather. Para tais medidas mostraremos um princípio de grandes desvios do tipo $\lim_{\epsilon, h \rightarrow 0} \epsilon \ln \mu_{\epsilon, h}(A)$, onde $A \subset \mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N$.

Também analisaremos o problema discreto de Aubry-Mather, onde introduziremos o conceito de sub-ação e mostraremos, sob hipótese do Lagrangiano ser genérico, a unicidade de um certo tipo de sub-ação que chamaremos de calibradas. E finalmente mostraremos a existência de um outro tipo de sub-ação ditas separantes.

No segundo capítulo analisaremos propriedades das medidas maximizantes de Markov estacionárias no espaço de Bernoulli $\Omega = [0, 1]^{\mathbb{N}}$, o que significa que consideraremos cadeias de Markov com espaço de estados $S = [0, 1]$, onde $[0, 1] = \{x \mid 0 \leq x \leq 1\} \subset \mathbb{R}$. Vamos considerar um potencial $A(x, y)$, onde $A : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ (um potencial $A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que depende apenas das duas primeiras coordenadas de Ω). Estamos interessados em encontrar probabilidades de Markov estacionárias μ_∞ em $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ que maximizem o valor $\int A(x, y) d\mu$, entre todas as probabilidades estacionárias de Markov μ em $\Omega = [0, 1]^{\mathbb{N}}$. O principal resultado deste capítulo é mostrar um princípio de grandes desvios para uma família de probabilidades absolutamente contínuas de Markov μ_β que convergem para μ_∞ , onde μ_β são medidas que satisfazem um princípio variacional.

Como o potencial A depende apenas das duas primeiras coordenadas, em vez da probabilidade μ em $\Omega = [0, 1]^{\mathbb{N}}$, podemos considerar sua projeção ν em $[0, 1]^2$. Se μ_∞ é uma medida maximizante em Ω , também temos que sua projeção ν_∞ é maximizante para A . Sob hipótese A ser C^2 e satisfazer a condição twist, ou seja, $\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y}(x, y) \neq 0$, para todo $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$, vamos mostrar que, genericamente, a medida maximizante ν em $[0, 1]^2$ é única e está suportada em um gráfico. Ainda, o gráfico é monótono. Finalizaremos mostrando a existência de uma sub-ação separante.

Abstract

This work will be divided in two chapters. In both cases we present the rate function and a large deviation principle for a sequence of measures converging, to a minimizing measure in the first problem and to a maximizing measure in the second one.

In the first chapter the setting will be the Aubry-Mather theory. For a Lagrangian $L(x, v) : \mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, satisfying some natural hypothesis, and for a generic Lagrangian (it is known that in this case the Mather measure μ is unique and the support of μ is the Aubry set), we will show a large deviation principle for a sequence of measures that converge to the Mather measure. It follows from a result by D. Gomes and E. Valdinoci that, for ϵ, h fixed, there exists an absolutely continuous measure $\mu_{\epsilon, h}$ that minimize the entropy penalized A-M problem:

$$\min_{\mathcal{M}_h} \left\{ \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N} L(x, v) d\mu(x, v) + \epsilon S[\mu] \right\}$$

where $\mathcal{M}_h = \left\{ \mu \in \mathcal{M} : \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N} \varphi(x + hv) - \varphi(x) d\mu = 0, \forall \varphi \in C(\mathbb{T}^N) \right\}$ and

$$S[\mu] = \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N} \mu(x, v) \ln \frac{\mu(x, v)}{\int_{\mathbb{R}^N} \mu(x, w) dw} dx dv.$$

Also by the result of D. Gomes and E. Valdinoci we have that $\mu_{\epsilon, h} \rightarrow \mu$, where μ is the unique Mather measure. For this sequence we will show a large deviation principle of the kind $\lim_{\epsilon, h \rightarrow 0} \epsilon \ln \mu_{\epsilon, h}(A)$, where $A \subset \mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N$.

Also we will analyze the discrete A-M problem, where we introduce the concept of subaction and we will show, under the hypothesis of generic Lagrangian, the uniqueness of a kind of subaction, that we will call calibrated. And finally we will show the existence of another kind of subactions, a separating subaction.

In the second chapter we analyze some properties of maximizing stationary Markov probabilities on the Bernoulli space $\Omega = [0, 1]^{\mathbb{N}}$, which means we consider stationary Markov chains with state space $S = [0, 1]$, where $[0, 1] = \{x \mid 0 \leq x \leq 1\} \subset \mathbb{R}$. More precisely, we consider a continuous potential $A(x, y)$, where $A : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ (a potential $A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ which depends only on the two first coordinates of Ω). We are interested in finding stationary Markov probabilities μ_{∞} on $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ that maximize the value $\int A(x, y) d\mu$, among all stationary Markov probabilities μ on $\Omega = [0, 1]^{\mathbb{N}}$.

The main purpose of this paper is to show, under the hypothesis of uniqueness of the maximizing probability, a Large Deviation Principle for a family of absolutely continuous Markov probabilities μ_{β} which weakly converges to μ_{∞} , where μ_{β} are measures that satisfy a variational principle similar to the pressure in Thermodynamic Formalism.

As the potential A depends only on the first two coordinates, instead of the probability μ on $\Omega = [0, 1]^{\mathbb{N}}$, we can consider its projection ν on $[0, 1]^2$. We say ν is the projection of μ on $[0, 1]^2$. If μ_{∞} is the maximizing probability on Ω , we also have that its projection ν_{∞} is maximizing for A . Under the hypothesis of A being C^2 and the twist condition, that is, $\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y}(x, y) \neq 0$, for all $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$, we show the graph property of the maximizing probability ν on $[0, 1]^2$. Moreover, the graph is monotonous. We also show that, in the sense of Mañé, the maximizing probability is unique. Finally, we exhibit a separating sub-action for A .

Índice

1	P.G.D. para a medida de Mather e o problema de A-M discreto	1
1.1	Introdução	1
1.2	Preliminares	4
1.2.1	Princípio de grandes desvios	4
1.2.2	A teoria de Aubry-Mather:	4
1.2.3	Soluções de viscosidade:	6
1.2.4	O semigrupo de Lax-Oleinik e soluções KAM fracas	7
1.2.5	Soluções de viscosidade versus KAM fracas	9
1.2.6	Funções semicôncavas, superdiferencial:	10
1.2.7	Um teorema de ponto fixo	11
1.2.8	Problema de Aubry-Mather discreto:	12
1.2.9	Lagrangianos Genéricos	13
1.3	O problema de Aubry-Mather discreto com entropia	14
1.4	Princípio de Grandes Desvios: para h fixo e $\epsilon \rightarrow 0$	26
1.5	Princípio de Grandes Desvios: $\epsilon, h \rightarrow 0$	31
1.6	O problema de Aubry-Mather discreto	39
1.6.1	Unicidade de sub-ações calibradas	39
1.6.2	Existência de uma sub-ação separante	50
2	P.G.D. para Cadeias de Markov Estacionárias em $[0, 1]$	54
2.1	Introdução	54
2.2	Medidas de Markov Estacionárias	58
2.3	O Problema de Maximização	62
2.4	Unicidade de medidas maximizantes e Sub-ações	71
2.5	Princípio de Grandes Desvios	81
2.6	Monotonicidade do Gráfico e sub-ações separantes	87

1

P.G.D. para a medida de Mather e o problema de A-M discreto

1.1 Introdução

Recentemente apareceram vários resultados sobre princípio de grandes desvios (e limites assintóticos) relacionados com medidas de Mather (veja, [A1], [A2], [AIPS], [BLT]).

Neste trabalho vamos generalizar as hipóteses que D. Gomes e E. Valdinoci fazem em [GV] para o Lagrangiano $L : \mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N$, também encontraremos medidas minimizantes para o problema de Aubry-Mather discreto com entropia, a ser explicitado a seguir.

Em analogia com o caso contínuo, vamos definir o conjunto das medidas holonômicas discretas, para $h > 0$ fixado, como

$$\mathcal{M}_h := \left\{ \mu \in \mathcal{M}; \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N} \varphi(x + hv) - \varphi(x) d\mu = 0, \forall \varphi \in C(\mathbb{T}^N) \right\} \quad (1.1)$$

onde \mathcal{M} denota o conjunto das probabilidades em $\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N$. Vamos denotar por $\mathcal{M}_h^{a.c.}$ as densidades em \mathcal{M}_h .

O problema de Aubry-Mather discreto com entropia, para $\epsilon > 0$ e $h > 0$ fixados, consiste em

$$\min_{\mathcal{M}_h^{a.c.}} \left\{ \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N} L(x, v) d\mu(x, v) + \epsilon S[\mu] \right\},$$

onde a entropia S é dada por

$$S[\mu] = \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N} \mu(x, v) \ln \frac{\mu(x, v)}{\int_{\mathbb{R}^N} \mu(x, w) dw} dx dv,$$

Esta é a versão com entropia do problema de Aubry-Mather discreto, veja [Gom], onde procura-se medidas de probabilidade $\mu \in \mathcal{M}_h$ que minimizam a ação

$$\int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N} L(x, v) d\mu(x, v) \quad (1.2)$$

Teremos de supor que a medida de Mather para tempo contínuo é única, o que por um resultado de Mañé é uma hipótese natural, dado que os Lagrangianos que satisfazem esta hipótese são genéricos (o sentido desta afirmação ficará claro mais tarde).

Mostraremos, para cada ϵ e h , a existência de uma densidade de probabilidade $\mu_{\epsilon,h}$ em $\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N$ que é uma solução do problema de A-M discreto com entropia.

Quando h está fixado mostraremos que $\mu_{\epsilon,h}$ converge em subsequência para μ_h , uma medida de Mather discreta, i.e., uma medida que minimiza (1.2) entre todas as medidas holonômicas \mathcal{M}_h .

Por um resultado de D. Gomes (veja [Gom]), para um Lagrangiano satisfazendo algumas hipóteses a serem explicitadas na seção 1.3, a sequência de medidas μ_h converge, para uma subsequência, para a única medida de Mather μ . Portanto $\mu_{\epsilon,h}$ converge, em subsequência, a μ .

Para estas duas sequências de medidas vamos mostrar um princípio de grandes desvios.

Primeiro, para h fixado, como $\mu_{\epsilon,h} \rightarrow \mu_h$, vamos mostrar a existência de uma função I_h tal que,

(a) Se $A \subset \mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N$ é um conjunto fechado (resp. aberto) e limitado, então

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \ln \mu_{\epsilon,h}(A) \leq - \inf_A I_h(x, v) \quad (\text{resp. } \geq)$$

Segundo, como $\mu_{\epsilon,h} \rightarrow \mu$, e estamos assumindo que a Medida de Mather é única e o suporte é o conjunto de Aubry, sabemos que existe uma única solução de viscosidade, digamos ϕ_0 , da equação de Hamilton-Jacobi $H(\nabla\phi(x), x) = -\bar{H}_0$.

Temos outro princípio de grandes desvios:

(b) Se $A \subset \mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N$ é um conjunto fechado (resp. aberto) e limitado tal que $\pi_1(A) \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$, onde \mathcal{A} é o conjunto de Aubry projetado, então existe uma função $I(x, v)$ tal que

$$\lim_{\epsilon, h \rightarrow 0} \epsilon \ln \mu_{\epsilon,h}(A) \leq - \inf_A I(x, v) \quad (\text{resp. } \geq)$$

Neste caso o funcional de desvio I é dado por

$$I(x, v) = L(x, v) + \nabla\phi_0(x)(v) - \bar{H}_0,$$

onde \bar{H}_0 é o valor crítico de Mañé.

Ainda temos um terceiro princípio de grandes desvios:

(c) Se $A \subset \mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N$ é um conjunto fechado (resp. aberto) e limitado tal que $\pi_1(A) \cap \mathcal{A} = \emptyset$ vamos mostrar um p.g.d. do tipo

$$\lim_{\epsilon, h \rightarrow 0} \epsilon h \ln \mu_{\epsilon,h}(A).$$

Na seção 1.6 estudaremos o problema de Aubry-Mather discreto sob o ponto de vista de sub-ações, i.e., funções contínuas que satisfazem

$$u(x) - u(x + hv) \leq h(L(x, v) - \bar{H}_h) \quad \forall (x, v) \in \mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N \quad (1.3)$$

para cada $h > 0$ fixado. Onde \bar{H}_h é o análogo ao valor crítico de Mañé, i.e.,

$$\bar{H}_h = \min_{\mathcal{M}_h} \left\{ \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N} L(x, v) d\mu(x, v) \right\}$$

Existem dois tipos de sub-ações que nos interessam, as sub-ações calibradas, que são aquelas que para cada $x \in \mathbb{T}^N$ existe pelo menos um $v(x)$ tal que para $(x, v(x))$ temos

a igualdade na equação (1.3). E o outro tipo são as sub-ações ditas separantes, que são aquelas que a igualdade só é atingida para x em um certo conjunto, ou seja, para x que não estão neste conjunto e para todo v temos que (x, v) dá desigualdade estrita em (1.3).

Introduziremos o conceito de caminhos discretos entre dois pontos, em analogia às curvas diferenciáveis por parte que aparecem na teoria de Aubry-Mather com tempo contínuo.

Sob a hipótese do Lagrangiano ser genérico, mostraremos que só existe uma sub-ação calibrada a menos de soma por constante, isto nos permitirá obter a unicidade da função de taxa I_h .

Também mostraremos a existência de uma sub-ação separante, que pode ser considerado um análogo discreto do resultado principal de [FS].

1.2 Preliminares

1.2.1 Princípio de grandes desvios

Seja uma família de probabilidades $\{\mu_\xi\}$ tal que $\mu_\xi \rightarrow \mu$. Queremos estudar Princípio de Grandes Desvios para esta família de probabilidades.

Definição 1.1. $\{\mu_\xi\}$ satisfaz o Princípio de Grandes Desvios com função de taxa I se, para todo conjunto fechado F vale que

$$\limsup_{\xi \rightarrow 0} \xi \ln \mu_\xi(F) \leq - \inf_{z \in F} I(z)$$

e para todo conjunto aberto A vale que

$$\liminf_{\xi \rightarrow 0} \xi \ln \mu_\xi(A) \geq - \inf_{z \in A} I(z)$$

Estamos interessados no comportamento quando $\xi \rightarrow 0$ da família de medidas. Seja $\text{supp}(\mu)$ o suporte da medida limite μ , então podemos perguntar o que acontece, quando fixamos um conjunto B tal que $B \cap \text{supp}(\mu) = \emptyset$, com $\mu_\xi(B)$ quando $\xi \rightarrow 0$? É de se esperar que $\mu_\xi(B) \rightarrow 0$, mas com que velocidade?

O que o Princípio dos Grandes Desvios nos diz é que quando temos $\inf_B I > 0$ então esta velocidade será exponencial.

1.2.2 A teoria de Aubry-Mather:

Na teoria de Aubry-Mather um Lagrangiano é uma função $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$, C^r diferenciável ($r \geq 3$), onde M é uma variedade diferenciável, que satisfaz as seguintes propriedades:

(a) Superlinearidade uniforme: Para todo $K \geq 0$ existe $C \in \mathbb{R}$ tal que

$$L(x, v) > K|v| - C$$

(b) Convexidade: A matrix Hessiana $\frac{\partial^2 L}{\partial v_i \partial v_j}(x, v)$ é positiva definida.

(c) Limitação uniforme nas fibras: Para todo $K > 0$ vale que

$$l(K) = \sup\{L(x, v); \|v\| \leq K\} < \infty$$

No presente trabalho vamos considerar $M = \mathbb{T}^N$ o toro N -dimensional. Portanto o lagrangiano será uma função $L : \mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, com as propriedades acima.

A equação de Euler-Lagrange (E-L) associada ao Lagrangiano L é (em coordenadas locais)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v}(x, \dot{x}) = \frac{\partial L}{\partial x}(x, \dot{x})$$

O fluxo de Euler-Lagrange associado a L

$$\varphi_t : \mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N, \quad t \in \mathbb{R}$$

é definido por $\varphi_t(x_0, v_0) = (x_w(t), \dot{x}_w(t))$ onde $x_w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^N$ é a solução da equação (E-L), com $x_w(0) = x_0$ e $\dot{x}_w(0) = v_0$, onde $w = (x_0, v_0)$.

Definição 1.2. (Ação sobre curvas) A ação sobre uma curva C^1 por partes $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{T}^N$ é definida por

$$A_L(\gamma) = \int_0^T L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt$$

Definição 1.3. (Potencial do Mañé, Barreira de Peierls) Seja $t > 0$ fixado, definimos a função $h_t : \mathbb{T}^N \times \mathbb{T}^N \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$h_t(x, y) = \inf_{\gamma} \int_0^t L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as funções contínuas C^1 por partes $\gamma : [0, t] \rightarrow \mathbb{T}^N$ tais que $\gamma(0) = x$ e $\gamma(t) = y$.

O Potencial do Mañé é a função $S : \mathbb{T}^N \times \mathbb{T}^N \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$S(x, y) = \inf_{t > 0} h_t(x, y) - \bar{H}_0 t$$

A barreira de Peierls é a função $h : \mathbb{T}^N \times \mathbb{T}^N \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definida por

$$h(x, y) = \liminf_{t \rightarrow \infty} h_t(x, y) - \bar{H}_0 t$$

onde \bar{H}_0 é uma constante que será definida a seguir.

Definição 1.4. (Conjunto de Aubry projetado) O conjunto

$$\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{T}^N : h(x, x) = 0\}$$

é chamado de conjunto de Aubry projetado.

Para outras definições deste conjunto referimos [CI] ou [Fa].

No nosso caso (Lagrangiano genérico) será válido que $\mathcal{A} = \pi_1(\text{supp}(\mu))$ onde μ é a única medida de Mather.

Seja \mathcal{M} o conjunto das medidas de probabilidade μ sobre $\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N$. Dizemos que $\mu \in \mathcal{M}$ é invariante para o fluxo Lagrangiano associado a $L(x, v)$, se para qualquer subconjunto $X \subset \mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N$ vale para todo $t \in \mathbb{R}$ que

$$\mu(X) = \mu(\varphi_t(X))$$

Denotaremos por $\mathcal{M}(L) \subset \mathcal{M}$ o conjunto das medidas de probabilidade invariantes pelo fluxo de Euler-Lagrange.

Definição 1.5. (Ação da medida) Para $\mu \in \mathcal{M}$, definimos a ação da medida de probabilidade μ como

$$A(\mu) = \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N} L(x, v) d\mu(x, v)$$

Definição 1.6. (Medida minimizante, \overline{H}_0) Dizemos que uma medida invariante $\nu \in \mathcal{M}(L)$ é minimizante, ou de Mather, se

$$A(\nu) = \inf\{A(\mu) : \mu \in \mathcal{M}(L)\} =: \overline{H}_0$$

a constante \overline{H}_0 é chamada valor crítico de Mañé.

Definição 1.7. (Medidas Holonômicas) $\mathcal{M}_0 = \{\mu \in \mathcal{M} : \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N} |v| d\mu < \infty \text{ e } \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N} \nabla\phi(x)(v) d\mu = 0, \text{ para toda } \phi : \mathbb{T}^N \rightarrow \mathbb{R} \text{ de classe } C^1\}$. Chamaremos tais medidas de medidas holonômicas.

Observação: As medidas holonômicas foram definidas por Mañé [Man] de uma maneira diferente (veja [CI]), mas para nosso trabalho a definição acima será mais adequada.

Teorema 1.1. (Mañé) Seja \mathcal{M}_0 o conjunto das medidas holonômicas. Então $\overline{H}_0 = \inf\{A(\mu) : \mu \in \mathcal{M}_0\}$, e se $\mu \in \mathcal{M}_0$, tal que $\int L d\mu = \overline{H}_0$ então μ é invariante pelo fluxo de Euler-Lagrange de L e portanto é uma medida minimizante.

Uma demonstração deste teorema pode ser encontrada em [FS] ou em [CI].

Obs.: Como $\mathcal{M}(L) \subset \mathcal{M}_0$, o que o teorema acima afirma é que tanto faz se tomamos o ínfimo em $\mathcal{M}(L)$ ou em \mathcal{M}_0 .

Logo o problema de Aubry-Mather com tempo contínuo consiste em

$$\min_{\mathcal{M}_0} \left\{ \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N} L(x, v) d\mu(x, v) \right\},$$

1.2.3 Soluções de viscosidade:

Seja $H : \mathbb{R}^N \times \mathbb{T}^N \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua que chamaremos de Hamiltoniano.

Definição 1.8. A equação de Hamilton-Jacobi (H-J) associada ao Hamiltoniano H , é a equação

$$H(\nabla\phi(x), x) = c,$$

onde c é uma constante.

Uma solução clássica da equação de (H-J) em um aberto U de \mathbb{T}^N é uma função C^1 $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $H(\nabla\phi(x), x) = c$ para todo $x \in U$. O problema é que em geral não conseguimos encontrar soluções globais C^1 para a equação (H-J). Podemos procurar soluções generalizadas. Com este intuito vamos definir soluções de viscosidade.

Definição 1.9. Uma função $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada sub-solução de viscosidade da equação $H(\nabla\phi(x), x) = c$, no conjunto aberto U , se para toda função C^1 $\eta : U \rightarrow \mathbb{R}$ e todo ponto $x_0 \in U$ tal que $\phi - \eta$ tem um ponto de máximo em x_0 , vale que

$$H(\nabla\eta(x_0), x_0) \leq c.$$

Uma função $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada super-solução de viscosidade da equação

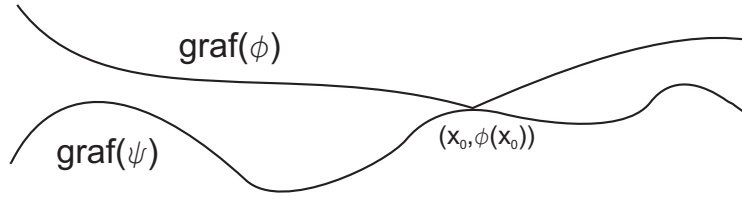


Fig. 1.1: super-solução: $\psi \leq \phi$, $\psi(x_0) = \phi(x_0) \Rightarrow H(\nabla\psi(x), x) \geq c$

$H(\nabla\phi(x), x) = c$, no conjunto aberto U , se para toda função C^1 $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}$ e todo ponto $x_0 \in U$ tal que $\phi - \psi$ tem um ponto de mínimo em x_0 , vale que

$$H(\nabla\psi(x_0), x_0) \geq c.$$

Uma função $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada solução de viscosidade da equação $H(\nabla\phi(x), x) = c$, no conjunto aberto U , se ϕ é tanto uma sub-solução quanto uma supersolução de viscosidade.

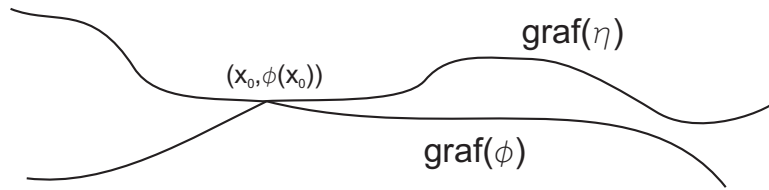


Fig. 1.2: sub-solução: $\eta \geq \phi$, $\eta(x_0) = \phi(x_0) \Rightarrow H(\nabla\eta(x), x) \leq c$

Proposição 1.1. Seja $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma solução de viscosidade da equação $H(\nabla\phi(x), x) = c$. Então para todo x ponto de diferenciabilidade da função ϕ vale a igualdade $H(\nabla\phi(x), x) = c$ no sentido clássico.

Veja corolário 4.4.13 de [Fa].

1.2.4 O semigrupo de Lax-Oleinik e soluções KAM fracas

Vamos introduzir um semigrupo de operadores não lineares $(T_t^-)_{t \geq 0} : C(\mathbb{T}^N) \rightarrow C(\mathbb{T}^N)$. Onde $C(\mathbb{T}^N)$ são as funções contínuas de \mathbb{T}^N tomando valores nos reais. Este é conhecido como semigrupo de Lax-Oleinik, e é muito importante em cálculo das variações.

Definição 1.10. Fixados $u \in C(\mathbb{T}^N)$ e $t > 0$, para cada $x \in \mathbb{T}^N$ definimos

$$T_t^- u(x) = \inf_{\gamma} \left\{ u(\gamma(0)) + \int_0^t L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds \right\}$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as curvas absolutamente contínuas $\gamma : [0, t] \rightarrow \mathbb{T}^N$ tal que $\gamma(t) = x$.

As demonstrações dos seguintes fatos podem ser encontrados em [Fa].

Proposição 1.2. O semigrupo de Lax-Oleinik tem as seguintes propriedades:

1. (propriedade de semigrupo) $\forall t, t' > 0: T_{t+t'}^- = T_t^- \circ T_{t'}^-$
2. (monotonicidade) $\forall u, v \in C(\mathbb{T}^N), \forall t > 0: u \leq v \Rightarrow T_t^- u \leq T_t^- v$
3. $\forall u \in C(\mathbb{T}^N), c \in \mathbb{R}: T_t^-(u + c) = T_t^- u + c$
4. (não expansividade) $\forall u, v \in C(\mathbb{T}^N), \forall t > 0: \|T_t^- u - T_t^- v\|_\infty \leq \|u - v\|_\infty$.

Proposição 1.3. Dados $t > 0, u \in C(\mathbb{T}^N), x \in \mathbb{T}^N$ existe uma curva extremal $\gamma: [0, t] \rightarrow \mathbb{T}^N$ tal que $\gamma(t) = x$ e

$$T_t^- u(x) = u(\gamma(0)) + \int_0^t L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds$$

tal curva γ minimiza a ação entre todas as curvas $\gamma_1: [0, t] \rightarrow \mathbb{T}^N$ tais que $\gamma_1(0) = \gamma(0)$ e $\gamma_1(t) = x$.

Teorema 1.2. (KAM fraca negativa) Existe uma função Lipschitz $u_-: \mathbb{T}^N \rightarrow \mathbb{R}$ e uma constante c tal que

$$T_t^- u_- + c t = u_-$$

para cada $t \in [0, \infty)$. Ainda vale que $c = -\bar{H}_0$.

Definição 1.11. Fixado um Lagrangiano $L: \mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ podemos definir o seu Lagrangiano simétrico $\check{L}: \mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\check{L}(x, v) = L(x, -v).$$

Se $\gamma: [0, t] \rightarrow \mathbb{T}^N$ é uma curva definimos a curva $\check{\gamma}: [0, t] \rightarrow \mathbb{T}^N$ por $\check{\gamma}(s) = \gamma(t - s)$. Note que a curva $\check{\gamma}$ corresponde a "voltar" pela curva γ . É fácil ver que $\dot{\check{\gamma}}(s) = -\dot{\gamma}(t - s)$. E portanto $A_{\check{L}}(\check{\gamma}) = A_L(\gamma)$. Logo γ é uma curva extremal de L se e somente se $\check{\gamma}$ é uma curva extremal de \check{L} .

Agora queremos expressar o semigrupo de Lax-Oleinik \check{T}_t^- associado a \check{L} , em termos de L apenas. Para tanto note que quando γ varia entre as curvas tais que $\gamma(0) = x$ então $\check{\gamma}$ varia entre as curvas tais que $\check{\gamma}(t) = x$ e também vale que $\check{\gamma}(0) = \gamma(t)$. Então temos que

$$\begin{aligned} \check{T}_t^- u(x) &= \inf_{\check{\gamma}} \{u(\check{\gamma}(0)) + \int_0^t \check{L}(\check{\gamma}(s), \dot{\check{\gamma}}(s)) ds\} \\ &= \inf_{\gamma} \{u(\gamma(t)) + \int_0^t L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds\} \end{aligned}$$

onde $\gamma: [0, t] \rightarrow \mathbb{T}^N$ satisfazem $\gamma(0) = x$.

Isto nos permite introduzir o semigrupo $(T_t^+)_{t \geq 0}: C(\mathbb{T}^N) \rightarrow C(\mathbb{T}^N)$ definido por $T_t^+(u) = -T_t^-(-u)$. Note que

$$T_t^+ u(x) = \sup_{\gamma} \{u(\gamma(t)) - \int_0^t L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds\}$$

onde o supremo é tomado entre todas as curvas $\gamma: [0, t] \rightarrow \mathbb{T}^N$ tais que $\gamma(0) = x$.

Teorema 1.3. (KAM fraca positiva) Existe uma função Lipschitz $u_+ : \mathbb{T}^N \rightarrow \mathbb{R}$ e uma constante c tal que

$$T_t^+ u_+ - c t = u_+$$

para cada $t \in [0, \infty)$. Também vale que $c = -\overline{H}_0$.

Agora estamos em condições de definir os conjuntos de soluções KAM fracas dos dois tipos.

Definição 1.12. (Os conjuntos $\mathcal{S}_-, \mathcal{S}_+$) Denotamos por \mathcal{S}_- (resp. \mathcal{S}_+) o conjunto de soluções KAM fracas do tipo u_- (resp. u_+), i.e., as funções contínuas $u : \mathbb{T}^N \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $T_t^- u - \overline{H}_0 t = u$, (resp. $T_t^+ u + \overline{H}_0 t = u$).

Definição 1.13. (Funções conjugadas) Um par de funções (u_-, u_+) é dito conjugado se $u_- \in \mathcal{S}_-, u_+ \in \mathcal{S}_+$ e $u_- = u_+$ em $\pi_1(\overline{\cup_\mu \text{supp}(\mu)})$ onde a união é tomada em todas as medidas de probabilidades invariantes pelo fluxo de Euler-Lagrange e tais que $\int L d\mu = \overline{H}_0$.

Teorema 1.4 (Fathi). Para cada $x, y \in \mathbb{T}^N$ temos que

$$h(x, y) = \sup_{(u_-, u_+)} u_-(y) - u_+(x)$$

o supremo sendo tomado sobre todos os pares de funções conjugadas, onde h é a barreira de Peierls.

Teorema 1.5. Seja $u_- \in \mathcal{S}_-$ (resp. u_+). O mapa gradiente $x \mapsto (x, \nabla u_-)$ (resp. $x \mapsto (x, \nabla u_+)$) é contínuo no domínio de definição de ∇u_- (resp. ∇u_+).

Veja teorema 4.9.2 de [Fa].

1.2.5 Soluções de viscosidade versus KAM fracas

O teorema a seguir mostra que soluções KAM fracas e soluções de viscosidade são a mesma coisa.

Isto será importante pois poderemos usar o teorema 1.4 para soluções de viscosidade, que são as soluções que aparecem ao longo do texto. E portanto, no caso do Lagrangiano genérico, a barreira de Peierls será dada a partir de um par de soluções de viscosidade.

Teorema 1.6. Seja $L : \mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ um Lagrangiano. Seja $H : \mathbb{R}^N \times \mathbb{T}^N \rightarrow \mathbb{R}$ o Hamiltoniano associado, no sentido de mecânica clássica, i.e.,

$$H(p, x) = \sup_v (p \cdot v - L(x, v))$$

Uma função contínua $u : \mathbb{T}^N \rightarrow \mathbb{R}$ é uma solução de viscosidade da equação $H(\nabla u(x), x) = -\overline{H}_0 \Leftrightarrow u$ é Lipschitz e satisfaz $u = T_t^- u - \overline{H}_0 t$, para todo $t > 0$, i.e., u é KAM fraca negativa.

A demonstração deste teorema é bastante elaborada e pode ser encontrada em [Fa].

Corolário 1.1. $u_+ \in \mathcal{S}_+$ se, e somente se $\check{u}_- := -u_+$ é uma solução de viscosidade para equação

$$\check{H}(\nabla \check{u}_-(x), x) = -\overline{H}_0$$

onde

$$\check{H}(p, x) = \sup_v (p \cdot v - \check{L}(x, v)) = \sup_v (p \cdot v - L(x, -v)) = \sup_v (-p \cdot v - L(x, v))$$

Demonstração : Seja uma função $u_+ \in \mathcal{S}_+$, então vale que $T_t^+ u_+ + \overline{H}_0 t = u_+$, lembre que pela definição de T_t^+ temos que

$$T_t^+(u_+) = -\check{T}_t^-(-u_+)$$

portanto

$$-\check{T}_t^-(-u_+) + \overline{H}_0 t = u_+$$

daí

$$\check{T}_t^-(\check{u}_-) - \overline{H}_0 t = \check{u}_-.$$

Logo pelo teorema anterior \check{u}_- é uma solução de viscosidade para equação

$$\check{H}(\nabla \check{u}_-(x), x) = -\overline{H}_0$$

Analogamente, se \check{u}_- é uma solução de viscosidade para equação

$$\sup_v [-\nabla \check{u}_-(x) \cdot v - L(x, v)] = \check{H}(\nabla \check{u}_-(x), x) = -\overline{H}_0$$

então $u_+ = -\check{u}_-$ é solução KAM fraca positiva, i.e., $- \check{u}_- \in \mathcal{S}_+$. □

Observação: Estas considerações serão importantes pois na seção 1.3 definiremos o Hamiltoniano não como em mecânica clássica mas como em teoria de controle ótimo.

1.2.6 Funções semicôncavas, superdiferencial:

Os resultados desta seção serão úteis para provar que dada uma sequência de funções, que denotaremos por $\{\phi_{\epsilon, h}\}$, tais que $\phi_{\epsilon, h} \rightarrow \phi_0$. Então nos pontos de diferenciabilidade de ϕ_0 vale que

$$\lim_{\epsilon, h \rightarrow 0} \frac{\phi_{\epsilon, h}(x + hv) - \phi_{\epsilon, h}(x)}{h} = \nabla \phi_0(x)(v) \quad \forall v$$

Note que isto não é válido em geral, pois as funções estão variando com ϵ e h . Mas como será visto no lema 1.3 este resultado é verdadeiro para funções semicôncavas.

Definição 1.14. Seja $A \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto. Dizemos que uma função $u : A \rightarrow \mathbb{R}$ é semicôncava se ela é contínua em A e existe $C \geq 0$ tal que

$$u(x+y) + u(x-y) - 2u(x) \leq C|y|^2$$

Para todos $x, y \in \mathbb{R}^N$ tais que $[x-y, x+y] \subset A$, a constante C é chamada de constante de semiconcavidade de u .

Exemplo: Um exemplo típico de função semicôncava é $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $u(x, y) = (4x^2 + 3y^2)^{1/2} - |x|$.

Proposição 1.4. Sejam $A \subset \mathbb{R}^N$, e $u : A \rightarrow \mathbb{R}$ uma função semicôncava, então u é localmente Lipschitz no interior de A .

Proposição 1.5. Dada $u : A \rightarrow \mathbb{R}$, com $A \subset \mathbb{R}^N$ conjunto aberto convexo, e dado $C \geq 0$ as seguintes propriedades são equivalentes:

- (i) u é semicôncava em A com constante de semiconcavidade C .
- (ii) a função $x \rightarrow u(x) - C/2|x|^2$ é côncava em A .

Definição 1.15. Sejam $A \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto e $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, o conjunto

$$D^+u(x) := \left\{ p \in \mathbb{R}^N : \limsup_{y \rightarrow x} \frac{u(y) - u(x) - \langle p, y - x \rangle}{|y - x|} \leq 0 \right\}$$

É chamado de superdiferencial de u em x .

Proposição 1.6. Seja $u : A \rightarrow \mathbb{R}$ uma função semicôncava, então $D^+u(x) \neq \emptyset$ para todo $x \in A$.

Proposição 1.7. Seja $u : \mathbb{T}^N \rightarrow \mathbb{R}$ uma função localmente Lipschitz. Dados $x, y \in \mathbb{T}^N$ existe $\xi \in]x, y[$ e $p \in D^+u(\xi)$ tal que $u(y) - u(x) = p \cdot (y - x)$, onde $D^+u(x)$ é o superdiferencial de u em x .

Proposição 1.8. Seja $u : \mathbb{T}^N \rightarrow \mathbb{R}$ uma função semicôncava com constante de semiconcavidade C , e seja $x \in \mathbb{T}^N$. Então, um vetor $p \in \mathbb{R}^N$ pertence a $D^+u(x)$ se e somente se

$$u(y) - u(x) \leq p \cdot (y - x) + \frac{C}{2}|y - x|^2$$

para qualquer ponto $y \in \mathbb{T}^N$.

A demonstração destes fatos pode ser encontradas em [CS].

1.2.7 Um teorema de ponto fixo

Vamos apresentar um teorema que é uma variação do teorema de Banach-Caccioppoli que garante a existência e unicidade de pontos fixos para contrações estritas.

Teorema 1.7. Seja S um subconjunto fechado de um espaço de Banach, munido da norma $\|\cdot\|$. Assuma que $g : S \rightarrow S$ é tal que

$$\|g(x) - g(y)\| \leq (1 - \alpha\|x - y\|^\beta)\|x - y\|$$

para todos $x, y \in S$ e constantes $\alpha, \beta > 0$. Então existe um único $x^* \in S$ tal que $g(x^*) = x^*$. Ainda, dado qualquer $x_0 \in S$ temos que

$$x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} g^n(x_0).$$

Uma demonstração deste teorema pode ser encontrada no apêndice de [GV].

Este teorema será útil para provarmos a existência de pontos fixos para um certo operador \mathcal{G} que age sobre as funções semicôncavas com constante de semiconcavidade limitada.

1.2.8 Problema de Aubry-Mather discreto:

Podemos definir medidas holonômicas no caso discreto como:

$$\mathcal{M}_h := \left\{ \mu \in \mathcal{M} : \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N} \varphi(x + hv) - \varphi(x) d\mu = 0, \forall \varphi \in C(\mathbb{T}^N) \right\} \quad (1.4)$$

onde \mathcal{M} é o conjunto de medidas de probabilidade $\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N$ (chamamos $\mu \in \mathcal{M}_h$ uma medida holonômica por analogia ao caso contínuo).

E denotaremos por $\mathcal{M}_h^{a.c.}$ o conjunto das medidas holonômicas discretas absolutamente contínuas com relação a medida de Lebesgue.

D. Gomes e E. Valdinoci consideraram o seguinte problema, que chamaremos de problema de Aubry-Mather discreto com entropia:

$$\min_{\mathcal{M}_h^{a.c.}} \left\{ \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N} L(x, v) d\mu(x, v) + \epsilon S[\mu] \right\},$$

onde o termo de entropia S é dado por

$$S[\mu] = \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N} \mu(x, v) \ln \frac{\mu(x, v)}{\int_{\mathbb{R}^N} \mu(x, w) dw} dx dv, \quad (1.5)$$

Foi provado em [GV] que, para cada ϵ, h fixados, a medida que minimiza o funcional acima é única e pode ser obtida através de pontos fixos de operadores que aparecerão na seção seguinte.

Esta é a versão com entropia do problema de Aubry-Mather discreto estudado em [Gom], onde minimiza-se a ação

$$\int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N} L(x, v) d\mu(x, v) \quad (1.6)$$

restrito as medidas holonômicas discretas, i.e.,

$$\min_{\mathcal{M}_h} \left\{ \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N} L(x, v) d\mu(x, v) \right\}$$

D. Gomes provou, sob certas hipóteses sobre o Lagrangiano, que medidas que minimizam o funcional acima convergem a medida de Mather com tempo contínuo. Também foi provado (veja teorema 2.4 de [Gom]) que pelo princípio de dualidade

$$- \min_{\mathcal{M}_h} \left\{ \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N} L(x, v) d\mu(x, v) \right\} = \inf_{\psi} \sup_{(x, v)} \left[\frac{\psi(x + hv) - \psi(x)}{h} - L(x, v) \right]$$

A parte da direita da equação acima será estudada na seção 1.6. Uma medida que minimiza a parte da esquerda da equação acima é o que chamaremos de medida minimizante (ou de Mather) para tempo discreto, foi provado em [GV] que tais medidas podem ser obtidas como limites das medidas que minimizam o problema discreto com entropia se considerarmos h fixado e fizermos $\epsilon \rightarrow 0$.

1.2.9 Lagrangianos Genéricos

Definição 1.16. Uma propriedade P é dita genérica para o Lagrangiano L se existe um conjunto genérico \mathcal{O} , i.e., uma interseção enumerável de abertos densos, subconjunto de $C^\infty(\mathbb{T}^N)$ tal que se $\psi \in \mathcal{O}$ então $L + \psi$ tem a propriedade P .

Teorema 1.8. Dado um Lagrangiano L existe um conjunto genérico $\mathcal{O} \subset C^\infty(\mathbb{T}^N)$ tal que

- (a) Se $\psi \in \mathcal{O}$ então existe uma única medida minimizante para $L + \psi$, tal medida μ é unicamente ergódica.
- (b) $\text{supp}(\mu) = \hat{\mathcal{A}}(L + \psi)$, onde $\hat{\mathcal{A}}$ é o conjunto de Aubry.

Veja [CI] para a demonstração deste fato e a definição de $\hat{\mathcal{A}}(L)$.

Notação: Diremos, por abuso de linguagem, que o Lagrangiano é genérico se existe única μ medida minimizante entre as medidas holonômicas e $\text{supp}(\mu) = \hat{\mathcal{A}}(L)$.

Hipótese: A partir de agora vamos supor que o Lagrangiano é genérico.

A seguinte proposição é um corolário de um teorema mais geral que pode ser encontrado em [CI], não enunciaremos o resultado geral pois seria necessário definir classe estática o que não poder ser feito em poucas linhas. E como na proposição que precisamos a única classe estática é o suporte da medida de Mather temos o seguinte

Proposição 1.9. Seja μ medida ergódica tal que $\hat{\mathcal{A}}(L) = \text{supp}(\mu)$ então \mathcal{S}_- e \mathcal{S}_+ são unitários a menos de constantes aditivas.

1.3 O problema de Aubry-Mather discreto com entropia

Nesta seção vamos descrever brevemente o problema de Aubry-Mather discreto com entropia e mostrar que a teoria desenvolvida em [GV] pode ser aplicada a Lagrangianos mais gerais do que os que aparecem no trabalho citado. Referimos ao leitor [CS] para resultados na teoria de funções semicôncavas.

O método utilizado em [GV] pode ser visto como um meio de aproximar medidas de Mather por medidas absolutamente contínuas (em relação à Lebesgue) obtidas a partir dos pontos fixos de certo operador $\mathcal{G}_{\epsilon,h}$ e do operador reverso $\bar{\mathcal{G}}_{\epsilon,h}$.

Em [GV] o Lagrangiano $L(x, v) : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ é da forma

$$L(x, v) = K(v) - U(x), \quad \text{para } v \in \mathbb{R}^N, x \in \mathbb{R}^N,$$

onde K é superlinear e estritamente convexo em v , e o potencial U é limitado, \mathbb{Z}^N -periódico (portanto podemos considerar $L : \mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$) e semiconvexo, i.e., existe $C_U > 0$ tal que

$$\inf_{x,y \in \mathbb{R}^N, y \neq 0} \frac{U(x+y) + U(x-y) - 2U(x)}{|y|^2} \geq -C_U. \quad (1.7)$$

Ainda, K é semicôncava, i.e., existe C_K tal que

$$\sup_{v,w \in \mathbb{R}^N, w \neq 0} \frac{K(v+w) + K(v-w) - 2K(v)}{|w|^2} \leq C_K. \quad (1.8)$$

Vamos generalizar estas hipóteses.

Vamos assumir até o final deste capítulo que o Lagrangiano $L : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, é \mathbb{Z}^N -periódico e satisfaz as seguintes estimativas:

(1) Superlinearidade uniforme:

$$\lim_{|v| \rightarrow \infty} \frac{L(x, v)}{|v|} = +\infty, \quad \text{uniformemente em } x \in \mathbb{T}^N.$$

(2) Convexidade em v : a matriz Hessiana $\frac{\partial^2 L}{\partial v_i \partial v_j}(x, v)$ é positiva definida.

(3) Existem constantes uniformes $C, \Gamma > 0$ tais que se $\theta > 0, \eta > 0$

$$L(x + \theta y, v - \eta y) + L(x - \theta y, v + \eta y) - 2L(x, v) \leq (C\theta^2 + \Gamma\eta^2)|y|^2$$

Note que a hipótese (3) é uma generalização das hipóteses consideradas em [GV]. Também o Lagrangiano dado por $L(x, v) = K(v) - U(x) + Pv$, $v \in \mathbb{R}^N, x \in \mathbb{R}^N, P \in \mathbb{R}^N$, U e K satisfazendo as equações (1.7) e (1.8) satisfaz a hipótese (3).

Observação: Como o Lagrangiano $L : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ é \mathbb{Z}^N -periódico. Passamos a denotá-lo, a partir de agora, $L : \mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$. Note que as contas são feitas no espaço de recobrimento de $\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N$, ou seja, $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$.

Vamos considerar, como na teoria de controle otimal

$$H(p, x) = \sup_v (-p \cdot v - L(x, v))$$

Observação: Na mecânica clássica usualmente define-se o Hamiltoniano de uma maneira diferente,

$$H(p, x) = \sup_v (p \cdot v - L(x, v))$$

Note que estas duas definições diferem por um sinal em $p \cdot v$. Esta diferença é irrelevante pois vamos trabalhar tanto com o Lagrangiano $L(x, v)$ quanto com seu simétrico, i.e., $\check{L}(x, v) = L(x, -v)$.

E portanto se ao invés de $L(x, v)$ consideramos o Lagrangiano simétrico, $\check{L}(x, v)$, então

$$\check{H}(p, x) = \max_v \{p \cdot v - \check{L}(x, v)\} = \max_v \{-p \cdot v - L(x, v)\}$$

e então obtemos a definição que é usada em controle otimal.

E tomando o Lagrangiano simétrico de $\check{L}(x, v)$, obtemos o Lagrangiano $L(x, v)$ e a definição do Hamiltoniano é a usual de mecânica clássica.

Para cada $\epsilon > 0$ e $h > 0$ pequenos definimos os operadores $\mathcal{G}_{\epsilon, h}$ e $\bar{\mathcal{G}}_{\epsilon, h}$:
seja $\phi \in C(\mathbb{T}^N)$, função contínua no toro

$$\mathcal{G}_{\epsilon, h}[\phi](x) := -\epsilon h \ln \left[\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{hL(x, v) + \phi(x + hv)}{\epsilon h}} dv \right],$$

e

$$\bar{\mathcal{G}}_{\epsilon, h}[\phi](x) := -\epsilon h \ln \left[\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{hL(x + hv, -v) + \phi(x + hv)}{\epsilon h}} dv \right].$$

Note que o ϵ na definição do operador em [GV] corresponde aqui a ϵh .

Observação: Seja \bar{L} o Lagrangiano dado por $\bar{L}(x, v) = L(x + hv, -v)$, temos que $\bar{\mathcal{G}}$ é o operador \mathcal{G} para o Lagrangiano \bar{L} . Portanto, se mostrarmos que \bar{L} também satisfaz as hipóteses (1) a (3) então é suficiente provarmos as propriedades que precisamos para o operador \mathcal{G} .

Basta mostrar que \bar{L} satisfaz a hipótese (3) acima.

$$\begin{aligned} & \bar{L}(x + \theta y, v - \eta y) + \bar{L}(x - \theta y, v + \eta y) - 2\bar{L}(x, v) = \\ & = L(x + hv + \theta y - h\eta y, -v + \eta y) + L(x + hv - \theta y + h\eta y, -v - \eta y) - L(x + hv, -v) \leq \\ & \leq C|\theta - h\eta|^2|y|^2 + \Gamma|\eta|^2|y|^2 \leq C|\theta|^2|y|^2 + (\Gamma + C|h|^2)|\eta|^2|y|^2. \end{aligned}$$

Portanto \bar{L} satisfaz a hipótese(3) com constantes $\bar{C} = C$ e $\bar{\Gamma} = \Gamma + C|h|^2$.

Vamos agora enunciar o teorema 9 de [GV], que será necessário na prova do teorema a seguir. A demonstração é bastante elaborada, e não utiliza a hipótese do Lagrangiano ser da forma $L(x, v) = K(v) - U(x)$ com as hipóteses acima. Não vamos reproduzi-la aqui.

Teorema 1.9. Suponha que ϕ e ϕ_* são funções \mathbb{Z}^N -periódicas e Lipschitz com constante de Lipschitz limitada por Λ , então existe uma constante $\alpha > 0$, possivelmente dependendo em h, ϵ e Λ tal que

$$\|\mathcal{G}[\phi] - \mathcal{G}[\phi_*]\|_{\#} \leq (1 - \alpha \|\phi - \phi_*\|_{\#}^N) \|\phi - \phi_*\|_{\#}$$

onde a norma

$$\|\psi\|_{\#} := \inf_{\zeta \in \mathbb{R}} \|\psi + \zeta\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}.$$

O seguinte teorema generaliza o teorema 26 de [GV]:

Teorema 1.10. Suponha que L satisfaz as hipóteses (1) a (3) acima.

Então para ϵ e h fixados existem $\lambda_{\epsilon,h}, \bar{\lambda}_{\epsilon,h} \in \mathbb{R}$ e funções Lipschitz $\phi_{\epsilon,h}, \bar{\phi}_{\epsilon,h}$ tal que

$$\mathcal{G}[\phi_{\epsilon,h}] = \phi_{\epsilon,h} + \lambda_{\epsilon,h}, \quad (1.9)$$

e

$$\bar{\mathcal{G}}[\bar{\phi}_{\epsilon,h}] = \bar{\phi}_{\epsilon,h} + \bar{\lambda}_{\epsilon,h}. \quad (1.10)$$

Ainda, existe uma constante \bar{C} tal que o módulo de semiconcavidade de $\phi_{\epsilon,h}$ e $\bar{\phi}_{\epsilon,h}$ é limitado por \bar{C} para todo ϵ e h .

Demonstração : Vamos generalizar a prova do teorema 13 de [GV]. Lembramos que a prova em [GV] supõe-se que $L(x, v) = K(v) - U(x)$, com constantes de semiconcavidade/semiconvexidade em K e U respectivamente.

Se $\phi_{\epsilon,h}$ é uma solução de $\mathcal{G}[\phi_{\epsilon,h}] = \phi_{\epsilon,h} + \lambda_{\epsilon,h}$, então ela pode ser obtida através de iterações do operador \mathcal{G} .

Suponha que u é uma função com constante de semiconcavidade menor que σ . Vamos mostrar que para um σ conveniente, a imagem $\mathcal{G}(u)$ também tem constante de semiconcavidade menor que σ .

Considere

$$u_1(x) := \mathcal{G}[u](x) = -\epsilon h \ln \int e^{-\frac{hL(x,v)+u(x+hv)-\lambda_{\epsilon,h}}{\epsilon h}} dv,$$

$$u_1(x + hy) = -\epsilon h \ln \int e^{-\frac{hL(x+hy,v)+u(x+hy+hv)-\lambda_{\epsilon,h}}{\epsilon h}} dv,$$

e

$$u_1(x - hy) = -\epsilon h \ln \int e^{-\frac{hL(x-hy,v)+u(x-hy+hv)-\lambda_{\epsilon,h}}{\epsilon h}} dv.$$

Introduzimos agora $0 < \theta < 1$, onde $t = 1 - \theta$.

Desta forma, usando a mudança de coordenadas $v \rightarrow v - \theta y$, podemos escrever a segunda equação como

$$u_1(x + hy) = -\epsilon h \ln \int e^{-\frac{hL(x+hy,v-\theta y)+u(x+t hy+hv)-\lambda_{\epsilon,h}}{\epsilon h}} dv,$$

e fazendo a mudança de coordenadas $v \rightarrow v + \theta y$

obtemos pela terceira equação que

$$u_1(x - hy) = -\epsilon h \ln \int e^{-\frac{hL(x-hy, v+\theta y)+u(x-thy+hv)-\lambda_{\epsilon, h}}{\epsilon h}} dv.$$

Usando a hipótese sobre o Lagrangiano, temos que

$$L(x + hy, v - \theta y) + L(x - hy, v + \theta y) - 2L(x, v) \leq Ch^2|y|^2 + \Gamma\theta^2|y|^2$$

Queremos estimar a constante de semiconcavidade de u_1 sabendo que

$$u(x + hty) + u(x - hty) - 2u(x) \leq \sigma_u h^2 t^2 |y|^2.$$

Também vale que

$$u(x + hty + hv) + u(x - hty + hv) - 2u(x + hv) \leq \sigma_u h^2 t^2 |y|^2.$$

Daí, usando Taylor e a estimativa de concavidade de u , podemos escrever

$$\begin{aligned} u_1(x) &= -\epsilon h \ln \int e^{-\frac{hL(x, v)+u(x+hv)-\lambda_{\epsilon, h}}{\epsilon h}} dv \geq \\ &-\epsilon h \ln \int e^{-\frac{[hL(x+hy, v-\theta y)+u(x+hty+hv)-\lambda_{\epsilon, h}]+[hL(x-hy, v+\theta y)+u(x-hty+hv)-\lambda_{\epsilon, h}]+[-Ch^3-h\Gamma\theta^2-\sigma_u h^2 t^2]|y|^2}{2\epsilon h}} dv \\ &\geq -\epsilon h \ln \int e^{-\frac{[\frac{1}{2}(hL(x+hy, v-\theta y)+u(x+hty+hv)-\lambda_{\epsilon, h})+\frac{1}{2}(hL(x-hy, v+\theta y)+u(x-hty+hv)-\lambda_{\epsilon, h})]}{\epsilon h}} dv - \\ &\quad -\left[\frac{Ch}{2} + \frac{\sigma_u t^2}{2}\right] h^2 |y|^2 - \frac{\Gamma}{2} \theta^2 |y|^2 h. \end{aligned}$$

Por Cauchy-Schwartz sabemos que dadas duas funções a, b vale que

$\int ab \leq (\int a^2)^{\frac{1}{2}} (\int b^2)^{\frac{1}{2}}$, portanto usando as expressões de $u_1(x + hy)$ e $u_1(x - hy)$ obtemos que

$$u_1(x) \geq \frac{1}{2} (u_1(x + hy) + u_1(x - hy)) - \left[\frac{Ch}{2} + \frac{\sigma_u t^2}{2}\right] h^2 |y|^2 - \frac{\Gamma}{2} \theta^2 |y|^2 h.$$

Portanto a constante de semiconcavidade de u_1 é $\sigma_{u_1} = Ch + \sigma_u t^2 + \Gamma\theta^2/h$.

Queremos escolher uma cota superior para a constante de semiconcavidade de u de tal forma que a constante de semiconcavidade de u_1 é também menor do que a cota superior fixada. Afirmamos que $\bar{C} = (C + \Gamma)$ é a cota que procuramos. De fato, supondo que $\sigma_u < (C + \Gamma)$, fazendo $\theta = h$, e tomando h pequeno temos que

$$\sigma_{u_1} = Ch + \sigma_u t^2 + \Gamma h \leq (C + \Gamma)h + (C + \Gamma)(1 - h)^2 \leq C + \Gamma$$

Vamos considerar o espaço quociente $Y := C^0(\mathbb{R}^N)/\mathbb{R}$, i.e., identificamos duas funções contínuas se elas diferem por um número real. Então Y é um espaço de Banach, com a norma $\|\cdot\|_{\#}$ definida acima, (veja teorema 3.14-A de [Tay]). Note que a definição de semiconcavidade passa ao quociente Y : portanto vamos tomar S a classe de funções em Y com constante de semiconcavidade limitada por $(C + \Gamma)$, S é fechado em Y . Como

o operador \mathcal{G} comuta com constantes, ele está bem definido em Y e pelo que acabamos de mostrar $\mathcal{G} : S \rightarrow S$. Note que pela proposição 1.4 temos que as funções em S são Lipschitz com constante de Lipschitz limitada. Logo podemos aplicar os teoremas 1.9 e 1.7 para concluir que o operador \mathcal{G} tem um único ponto fixo em $\phi_{\epsilon,h} \in S \subset Y$, desfazendo o quociente encontramos $\lambda_{\epsilon,h}$, e portanto

$$\mathcal{G}[\phi_{\epsilon,h}] = \phi_{\epsilon,h} + \lambda_{\epsilon,h}$$

como queríamos. A prova da existência de $\bar{\phi}_{\epsilon,h}$ e $\bar{\lambda}_{\epsilon,h}$ é análoga. □

Nos teoremas que seguem até o fim desta seção vamos dar apenas uma idéia da prova dos resultados, pois as provas destes teoremas em [GV] não utilizam o fato do Lagrangiano ser da forma $L(x, v) = K(v) - U(x)$, com $K(v)$ semiconvexa e $U(x)$ semicôncava. Portanto as mesmas demonstrações se aplicam no caso em que estamos considerando, ou seja, o Lagrangiano satisfazendo as hipóteses (1) a (3).

Lema 1.1. Sejam $\phi_{\epsilon,h}$ e $\lambda_{\epsilon,h}$ satisfazendo o teorema 1.10, então existe $\theta_{\epsilon,h} \in L^1(\mathbb{T}^N)$ tal que

$$\theta_{\epsilon,h} \geq 0,$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} \theta_{\epsilon,h}(x - hv) e^{-\frac{hL(x-hv,v) + \phi_{\epsilon,h}(x) - \phi_{\epsilon,h}(x-hv) - \lambda_{\epsilon,h}}{\epsilon h}} dv = \theta_{\epsilon,h}(x)$$

e

$$\int_{\mathbb{T}^N} \theta_{\epsilon,h}(x) dx = 1.$$

Idéia da demonstração: (veja lema 31 de [GV])

Note que pela definição de \mathcal{G} vale que

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{hL(x,v) + \phi_{\epsilon,h}(x+hv) - \phi_{\epsilon,h}(x) - \lambda_{\epsilon,h}}{\epsilon h}} dv = 1, \quad (1.11)$$

Assim podemos definir para $\vartheta \in L^1(\mathbb{T}^N)$,

$$\mathcal{F}[\vartheta](x) := \int_{\mathbb{R}^N} \vartheta(x - hv) e^{-\frac{hL(x-hv,v) + \phi_{\epsilon,h}(x) - \phi_{\epsilon,h}(x-hv) - \lambda_{\epsilon,h}}{\epsilon h}} dv. \quad (1.12)$$

Vale que

$$\int_{\mathbb{T}^N} \mathcal{F}[\vartheta] = \int_{\mathbb{T}^N} \vartheta$$

Denotando por $\theta_0 = 1$ e definindo recursivamente $\theta_{n+1} = \mathcal{F}[\theta_n]$, temos que $d\theta_n(x) = \theta_n(x)dx$ são probabilidades tais que

$$\int_{\mathbb{T}^N} d\theta_n = 1$$

A menos de subsequência podemos supor que tal sequência de medidas converge fracamente para uma medida $d\theta$ em \mathbb{T}^N . Na prova do lema 31 de [GV] mostra-se que a medida $d\theta$ é absolutamente contínua em relação a Lebesgue e que satisfaz a equação

$$\int_{\mathbb{R}^N} \theta(x - hv) e^{-\frac{hL(x-hv,v) + \phi_{\epsilon,h}(x) - \phi_{\epsilon,h}(x-hv) - \lambda_{\epsilon,h}}{\epsilon h}} dv = \theta(x).$$

Também foi mostrado no teorema 36 de [GV] que tal θ é única. Definimos então $\theta_{\epsilon,h} := \theta$.
 \square

Note que para neste teorema não usamos a função $\bar{\phi}_{\epsilon,h}$, pois para a existência de tal $\theta_{\epsilon,h}$ basta o operador \mathcal{G} . A seguir vamos mostrar que $\theta_{\epsilon,h}$ é dado por uma fórmula explícita que envolve tanto $\phi_{\epsilon,h}$ como $\bar{\phi}_{\epsilon,h}$.

Teorema 1.11. (i) A medida de probabilidade

$$\mu_{\epsilon,h}(x, v) = \theta_{\epsilon,h}(x) e^{-\frac{hL(x,v) + \phi_{\epsilon,h}(x+hv) - \phi_{\epsilon,h}(x) - \lambda_{\epsilon,h}}{\epsilon h}}$$

minimiza o funcional

$$\int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N} L(x, v) d\mu(x, v) + \epsilon S[\mu],$$

entre as medidas holonômicas (1.1) e absolutamente contínuas.

(ii)

$$\int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N} L(x, v) d\mu_{\epsilon,h}(x, v) + \epsilon S[\mu_{\epsilon,h}] = \frac{\lambda_{\epsilon,h}}{h}.$$

(iii)

$$\frac{\lambda_{\epsilon,h}}{h} = \min_{\mathcal{M}_h^{a.c.}} \left\{ \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N} L d\mu + \epsilon S[\mu] \right\}$$

Idéia da demonstração: (i) (veja teorema 32 de [GV], ou a prova do teorema 2.2 a seguir). Basta mostrar que para qualquer outra densidade de probabilidade μ que satisfaz a condição de holonomia e todo $0 \leq \tau \leq 1$ temos que a função

$$I[\tau] = \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N} L d\mu_\tau + \epsilon S[\mu_\tau]$$

com $\mu_\tau := (1 - \tau)\mu_{\epsilon,h} + \tau\mu$ é convexa e $I'(0) = 0$.

(ii) Substituindo a expressão de $\mu_{\epsilon,h}$ na equação que aparece no enunciado do item (ii), e lembrando que a entropia é dada por (1.5), obtemos que

$$\int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N} L(x, v) d\mu_{\epsilon,h}(x, v) + \epsilon S[\mu_{\epsilon,h}] = \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N} \frac{\phi_{\epsilon,h}(x) - \phi_{\epsilon,h}(x + hv) + \lambda_{\epsilon,h}}{h} dx dv$$

E como $\mu_{\epsilon,h}$ é holonômica, temos o resultado.

(iii) Segue imediatamente de (i) e (ii). \square

Lema 1.2.

$$\lambda_{\epsilon,h} = \bar{\lambda}_{\epsilon,h}$$

Demonstração : Primeiramente note que trocando $L(x, v)$ por $\bar{L}(x, v) = L(x + hv, -v)$ pelo item (iii) do teorema 1.11 temos que

$$\bar{\lambda}_{\epsilon,h} = \min_{\mathcal{M}_h^{a.c.}} \left\{ \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N} h \bar{L} d\mu + \epsilon h S[\mu] \right\}$$

Seja $\mu \in \mathcal{M}_h^{a.c.}$ uma medida que satisfaz

$$\lambda_{\epsilon,h} = \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N} hL d\mu + \epsilon h S[\mu]$$

Por abuso de notação escrevemos $d\mu(x, v) = \mu(x, v) dx dv$, definimos então a medida $\bar{\mu}(x, v) = \mu(x + hv, -v)$, claramente $\bar{\mu} \in \mathcal{M}_h^{a.c.}$ e portanto

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_{\epsilon,h} &\leq \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N} h\bar{L}(x, v) d\bar{\mu}(x, v) + \epsilon h S[\bar{\mu}(x, v)] \\ &= \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N} hL(x + hv, -v) d\mu(x + hv, -v) + \epsilon h S[\mu(x + hv, -v)] \\ &= \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N} hL(y, w) d\mu(y, w) + \epsilon h S[\mu(y, w)] = \lambda_{\epsilon,h} \end{aligned}$$

Da mesma forma podemos mostrar que $\lambda_{\epsilon,h} \leq \bar{\lambda}_{\epsilon,h}$. \square

Observação: Pela definição dos operadores \mathcal{G} e $\bar{\mathcal{G}}$ vemos que se somarmos uma constante em cada $\phi_{\epsilon,h}$ e $\bar{\phi}_{\epsilon,h}$, as equações (1.9) e (1.10) também são satisfeitas. Portanto, para cada ϵ e h , vamos escolher um par de funções $\phi_{\epsilon,h}$ e $\bar{\phi}_{\epsilon,h}$ e definiremos um novo par de funções que são uniformemente limitadas: $\tilde{\phi}_{\epsilon,h} := \phi_{\epsilon,h} - \phi_{\epsilon,h}(0)$ e $\tilde{\bar{\phi}}_{\epsilon,h} := \bar{\phi}_{\epsilon,h} + c_{\epsilon,h}$ tal que

$$\int_{\mathbb{T}^N} e^{-\frac{\tilde{\bar{\phi}}_{\epsilon,h}(x) + \tilde{\phi}_{\epsilon,h}(x)}{\epsilon h}} dx = 1 \quad (1.13)$$

Como as funções $\tilde{\phi}_{\epsilon,h}, \tilde{\bar{\phi}}_{\epsilon,h}$ são uniformemente Lipschitz em ϵ e h temos que $\tilde{\phi}_{\epsilon,h}$ é uniformemente limitada. E já que $\tilde{\bar{\phi}}_{\epsilon,h}$ satisfaz a equação (1.13) vemos que $\tilde{\bar{\phi}}_{\epsilon,h}$ também é uniformemente limitada em ϵ e h .

Teorema 1.12. Sejam $\phi_{\epsilon,h}, \bar{\phi}_{\epsilon,h}$ e $\lambda_{\epsilon,h}$ satisfazendo o teorema 1.10. Também supomos que $\phi_{\epsilon,h}$ e $\bar{\phi}_{\epsilon,h}$ são uniformemente limitadas e satisfazem (1.13).

Definimos $\theta_{\epsilon,h}$ como

$$\theta_{\epsilon,h}(x) = e^{-\frac{\bar{\phi}_{\epsilon,h}(x) + \phi_{\epsilon,h}(x)}{\epsilon h}}.$$

Então $\theta_{\epsilon,h}$ satisfaz

$$\int_{\mathbb{R}^N} \theta_{\epsilon,h}(x - hv) e^{-\frac{hL(x-hv,v) + \phi_{\epsilon,h}(x) - \phi_{\epsilon,h}(x-hv) - \lambda_{\epsilon,h}}{\epsilon h}} dv = \theta_{\epsilon,h}(x)$$

Demonstração : $\theta_{\epsilon,h}$ satisfaz

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N} \theta_{\epsilon,h}(x - hv) e^{-\frac{hL(x-hv,v) + \phi_{\epsilon,h}(x) - \phi_{\epsilon,h}(x-hv) - \lambda_{\epsilon,h}}{\epsilon h}} dv = \\ &\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{\bar{\phi}_{\epsilon,h}(x-hv) + \phi_{\epsilon,h}(x-hv)}{\epsilon h}} e^{-\frac{hL(x-hv,v) + \phi_{\epsilon,h}(x) - \phi_{\epsilon,h}(x-hv) - \lambda_{\epsilon,h}}{\epsilon h}} dv = \\ &e^{-\frac{\phi_{\epsilon,h}(x)}{\epsilon h}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{\bar{\phi}_{\epsilon,h}(x-hv)}{\epsilon h}} e^{-\frac{hL(x-hv,v) - \lambda_{\epsilon,h}}{\epsilon h}} dv = \\ &e^{-\frac{\phi_{\epsilon,h}(x)}{\epsilon h}} e^{-\frac{\bar{\phi}_{\epsilon,h}(x)}{\epsilon h}} = \theta_{\epsilon,h}(x). \end{aligned}$$

Onde, na penúltima igualdade foi usado o lema 1.2 e que $\bar{\phi}_{\epsilon,h}$ é tal que

$$\bar{\mathcal{G}}[\bar{\phi}_{\epsilon,h}] = \bar{\phi}_{\epsilon,h} + \lambda_{\epsilon,h}.$$

□

Uma interessante relação entre o operador \mathcal{G} e a minimização da ação do Lagrangiano com entropia, entre as medidas holonômicas é a que aparece no teorema a seguir:

Teorema 1.13.

$$\inf_{\mu \in \mathcal{M}_h^{a.c.}} \int L(x,v) d\mu + \epsilon S[\mu] = - \inf_{\psi \in C(\mathbb{T}^N)} \sup_{x \in \mathbb{T}^N} \epsilon \ln \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{hL(x,v) + \psi(x+hv) - \psi(x)}{h}} dv$$

Idéia da demonstração: Temos que

$$\begin{aligned} & \inf_{\psi \in C(\mathbb{T}^N)} \sup_{x \in \mathbb{T}^N} \epsilon h \ln \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{hL(x,v) + \psi(x+hv) - \psi(x)}{\epsilon h}} dv \\ & \leq \sup_{x \in \mathbb{T}^N} \epsilon h \ln \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{hL(x,v) + \phi_{\epsilon,h}(x+hv) - \phi_{\epsilon,h}(x)}{\epsilon h}} dv = -\lambda_{\epsilon,h}, \end{aligned} \quad (1.14)$$

já que vale (1.9). Então dividindo por h ambos os lados temos que

$$\inf_{\psi \in C(\mathbb{T}^N)} \sup_{x \in \mathbb{T}^N} \epsilon \ln \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{hL(x,v) + \psi(x+hv) - \psi(x)}{\epsilon h}} dv \leq -\frac{\lambda_{\epsilon,h}}{h}$$

Por outro lado, pela definição do operador \mathcal{G} , vemos que,

$$\begin{aligned} & \inf_{\psi \in C(\mathbb{T}^N)} \sup_{x \in \mathbb{T}^N} \epsilon h \ln \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{hL(x,v) + \psi(x+hv) - \psi(x)}{\epsilon h}} dv \\ & = \inf_{\psi \in C(\mathbb{T}^N)} \sup_{x \in \mathbb{T}^N} \psi - \mathcal{G}[\psi]. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Portanto, seja $\psi \in C(\mathbb{T}^N)$ e escolhamos x_0 tal que $\psi - \phi_{\epsilon,h}$ tem um máximo. Definimos $\hat{\phi} := \phi_{\epsilon,h} - \phi_{\epsilon,h}(x_0) + \psi(x_0)$, tal que $\hat{\phi} \geq \psi$. Daí, como \mathcal{G} é monótona e comuta com a adição de constantes

$$\mathcal{G}[\phi_{\epsilon,h}] - \phi_{\epsilon,h}(x_0) + \psi(x_0) = \mathcal{G}[\hat{\phi}] \geq \mathcal{G}[\psi].$$

Logo,

$$\sup_{x \in \mathbb{T}^N} \psi - \mathcal{G}[\psi] \geq \psi(x_0) - \mathcal{G}[\psi](x_0) \geq \phi_{\epsilon,h}(x_0) - \mathcal{G}[\phi_{\epsilon,h}](x_0) = -\lambda_{\epsilon,h}.$$

Então tomando o ínfimo entre todas as funções $\psi \in C(\mathbb{T}^N)$, obtemos

$$- \inf_{\psi \in C(\mathbb{T}^N)} \sup_{x \in \mathbb{T}^N} \epsilon h \ln \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{hL(x,v) + \psi(x+hv) - \psi(x)}{\epsilon h}} dv = \lambda_{\epsilon,h}.$$

E portanto o resultado segue pelo item (iii) do teorema 1.11. □

Definimos

$$\bar{H}_{\epsilon,h}(L) := \min_{\mathcal{M}_h^{a.c.}} \left\{ \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N} L d\mu + \epsilon S[\mu] \right\} = \frac{\lambda_{\epsilon,h}}{h}$$

Note que constante $\overline{H}_{\epsilon,h}$ (não escreveremos a dependência em L) é, a menos de sinal, o análogo do valor crítico de Mañé (chamado por vezes de $c(L)$, veja [CI], ou de $c[0]$ veja [Fa]), que estamos denotando por \overline{H}_0 .

Lembramos aqui que o problema de Aubry-Mather discreto, estudado em [Gom], consiste em minimizar

$$\int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N} L d\mu,$$

entre todas as medidas holonômicas discretas $\mu \in \mathcal{M}_h$.

Seja

$$\overline{H}_h := \min_{\mathcal{M}_h} \left\{ \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N} L(x, v) d\mu(x, v) \right\}$$

Foi provado em [Gom] que

$$\overline{H}_h = - \inf_{\psi \in C(\mathbb{T}^N)} \sup_{(x,v)} \left[\frac{\psi(x + hv) - \psi(x)}{h} - L(x, v) \right]$$

e que existem funções otimizadas ϕ_h tal que

$$\overline{H}_h = \inf_{v \in \mathbb{R}^N} \left[\frac{\phi_h(x + hv) - \phi_h(x)}{h} + L(x, v) \right] \quad (1.16)$$

para todo $x \in \mathbb{T}^N$. Na seção 1.6 vamos tratar de aspectos dinâmicos deste tipo de funções.

Teorema 1.14.

$$\overline{H}_{\epsilon,h} \rightarrow \overline{H}_h \quad \text{quando } \epsilon \rightarrow 0.$$

Idéia da demonstração: Seja ϕ_h como em (1.16), pelo teorema 1.13 temos que

$$-\overline{H}_{\epsilon,h} \leq \sup_{x \in \mathbb{T}^N} \epsilon \ln \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{hL(x,v) + \phi_h(x+hv) - \phi_h(x)}{h}} dv$$

Vamos usar o seguinte resultado: se $f \in C(\mathbb{R}^N)$ é superlinear, então

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{f(v)}{\epsilon}} dv \right)^\epsilon = e^{-\inf_{\mathbb{R}^N} f}. \quad (1.17)$$

Portanto temos que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} -\overline{H}_{\epsilon,h} \leq -\overline{H}_h.$$

A prova da desigualdade contrária é um tanto técnica, referimos ao leitor o teorema 38 de [GV]. \square

Teorema 1.15. Sejam $\phi_{\epsilon,h}$, $\bar{\phi}_{\epsilon,h}$ e $\lambda_{\epsilon,h}$ satisfazendo o teorema 1.10. Também supomos que $\phi_{\epsilon,h}$ e $\bar{\phi}_{\epsilon,h}$ são uniformemente limitadas e satisfazem (1.13).

Então, através de uma subsequência, $\phi_{\epsilon,h} \rightarrow \phi_h$ e $\bar{\phi}_{\epsilon,h} \rightarrow \bar{\phi}_h$ uniformemente quando $\epsilon \rightarrow 0$, ϕ_h e $\bar{\phi}_h$ também são semicôncavas. Ainda ϕ_h satisfaz

$$\phi_h(x) = \inf_{v \in \mathbb{R}^N} \{ \phi_h(x + hv) + hL(x, v) - h\overline{H}_h \} \quad (1.18)$$

e $\bar{\phi}_h$ satisfaz

$$\bar{\phi}_h(x) = \inf_{v \in \mathbb{R}^N} \{ \bar{\phi}_h(x - hv) + hL(x - hv, v) - h\bar{H}_h \} \quad (1.19)$$

Idéia da demonstração: Para esta demonstração convém explicitarmos a dependência em ϵ, h de \mathcal{G} denotamos o operador por $\mathcal{G}_{\epsilon, h}$ e definimos \mathcal{G}_h o operador dado por

$$\mathcal{G}_h[\psi](x) := \inf_v hL(x, v) + \psi(x + hv).$$

Note que pelo teorema 1.14 temos que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \lambda_{\epsilon, h} = h\bar{H}_h. \quad (1.20)$$

Ainda pelo teorema 1.10 sabemos que $\phi_{\epsilon, h}$ é uniformemente Lipschitz e semicôncava e como $\phi_{\epsilon, h}$ está normalizada, ela converge uniformemente a uma função ϕ_h , que é Lipschitz e semicôncava com constante de semiconcavidade uniformemente limitada. Também pode-se mostrar que da definição de $\mathcal{G}_{\epsilon, h}$ vale

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \|\mathcal{G}_{\epsilon, h}[\phi_{\epsilon, h}] - \mathcal{G}_{\epsilon, h}[\phi_h]\|_{L^\infty(\mathbb{T}^N)} \leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \|\phi_{\epsilon, h} - \phi_h\|_{L^\infty(\mathbb{T}^N)} = 0. \quad (1.21)$$

Usando (1.17) e a continuidade de ϕ_h , temos que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{G}_{\epsilon, h}[\phi_h](x) = \mathcal{G}_h[\phi_h](x), \quad (1.22)$$

para todo $x \in \mathbb{T}^N$.

Portanto, juntando (1.20), (1.21) e (1.22) deduzimos que

$$\begin{aligned} h\bar{H}_h &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \lambda_{\epsilon, h} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{G}_{\epsilon, h}[\phi_{\epsilon, h}] - \phi_{\epsilon, h} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{G}_{\epsilon, h}[\phi_h] + \left(\mathcal{G}_{\epsilon, h}[\phi_{\epsilon, h}] - \mathcal{G}_{\epsilon, h}[\phi_h] \right) - \phi_h + \left(\phi_h - \phi_{\epsilon, h} \right) \\ &= \mathcal{G}_h[\phi_h] + 0 - \phi_h + 0 \\ &= \mathcal{G}_h[\phi_h] - \phi_h, \end{aligned}$$

e portanto ϕ_h satisfaz a equação do enunciado. O mesmo vale para $\bar{\phi}_h$. \square

Teorema 1.16. Quando $\epsilon \rightarrow 0$, $\mu_{\epsilon, h}$ converge fracamente para μ_h uma medida de Mather discreta, i.e., uma probabilidade em $\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N$ que minimiza

$$\int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N} L(x, v) d\mu,$$

entre todas $\mu \in \mathcal{M}_h$.

Idéia da demonstração: Sabemos que

$$\mu_{\epsilon,h}(x, v) = \theta_{\epsilon,h}(x) e^{-\frac{hL(x,v) + \phi_{\epsilon,h}(x+hv) - \phi_{\epsilon,h}(x) - \lambda_{\epsilon,h}}{\epsilon h}}$$

com $\int_{\mathbb{R}^N} \mu_{\epsilon,h}(x, v) dv = \theta_{\epsilon,h}(x)$. Como $\phi_{\epsilon,h} \rightarrow \phi_h$ uniformemente e $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \lambda_{\epsilon,h} = h \bar{H}_h$ temos que $\|\phi_{\epsilon,h}\|_{L^\infty}$ e $|\lambda_{\epsilon,h}|$ são uniformemente limitadas em ϵ . E portanto, pelo fato de L ser superlinear tem-se que,

$$\begin{aligned} \mu_\epsilon(\mathbb{T}^N \times (\mathbb{R}^N \setminus B_R)) &= \int_{\mathbb{T}^N \times (\mathbb{R}^N \setminus B_R)} \theta_\epsilon(x) e^{-\frac{hL(x,v) + \phi_{\epsilon,h}(x+hv) - \phi_{\epsilon,h}(x) - \lambda_{\epsilon,h}}{\epsilon h}} \\ &\leq e^{\frac{c_0 - c_1 h R}{\epsilon h}} \int_{\mathbb{T}^N \times (\mathbb{R}^N \setminus B_R)} \theta_\epsilon(x) e^{-\frac{c_2 |v|}{\epsilon}} dx dv \\ &\leq c_3 \epsilon^N e^{-\frac{c_0}{\epsilon h}} \int_{\mathbb{T}^N} \theta_\epsilon(x) dx \\ &= c_3 \epsilon^N e^{-\frac{c_0}{\epsilon h}}, \end{aligned} \tag{1.23}$$

desde que $R \geq 4c_0/(c_1 h)$, onde c_i são constantes independentes de ϵ . Como $\mu_{\epsilon,h}$ são probabilidades, para uma subsequência, sabemos que $\mu_{\epsilon,h} \rightarrow \mu_h$ onde μ_h é uma medida em $\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N$. Tem-se que

$$\mu_h(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N) \leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \mu_{\epsilon,h}(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N) = 1.$$

Por outro lado,

$$\mu_h(\mathbb{T}^N \times B_R) \geq \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \mu_{\epsilon,h}(\mathbb{T}^N \times B_R) \geq \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \left(1 - c_3 \epsilon^N e^{-\frac{c_0}{\epsilon h}}\right) = 1,$$

se R é suficientemente grande de modo que valha (1.23). Portanto, μ_h é uma probabilidade com suporte compacto.

Também $\mu_h \in \mathcal{M}_h$ já que $\mu_{\epsilon,h} \in \mathcal{M}_h$.

Afirmção: se (x, v) é um ponto do suporte de μ_h , então v é um minimizante da função

$$v \mapsto hL(x, v) + \phi_h(x + hv) - \phi_h(x).$$

Para a prova desta afirmação veja o teorema 40 de [GV].

Então segue de (1.16) e da afirmação que

$$L(x, v) + \frac{\phi_h(x + hv) - \phi_h(x)}{h} = \bar{H}_h,$$

para quaisquer (x, v) no suporte de μ_h . Logo, integrando e usando que $\mu_h \in \mathcal{M}_h$, obtemos que

$$\int L d\mu_h = \int \left[L(x, v) + \frac{\phi_h(x + hv) - \phi_h(x)}{h} \right] d\mu_h = \bar{H}_h.$$

□

Teorema 1.17. Suponhamos que o Lagrangiano L é genérico e satisfaz as hipóteses (1) a (3) acima. Para cada h fixado, sejam: $\phi_h, \bar{\phi}_h$ as funções dadas no teorema 1.15, μ_h a medida de Mather discreta dada no teorema 1.16 e \bar{H}_h definida acima. Então, quando $h \rightarrow 0$ temos que

(a) $\bar{H}_h \rightarrow \bar{H}_0 = \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N} L(x, v) d\mu,$

(b) Através de uma subsequência, $\phi_h \rightarrow \phi_0$ e $\bar{\phi}_h \rightarrow \bar{\phi}_0$, uniformemente,

(c) $\mu_h \rightarrow \mu.$

Demonstração: (a) Veja [Gom].

Para podermos aplicar os teoremas 7.2, 7.3 e 7.4 de [Gom] precisamos fazer a seguinte observação: como o Lagrangiano satisfaz a hipótese (3) temos, pelo teorema 1.15, que ϕ_h e $\bar{\phi}_h$ são uniformemente semicôncavas em h . Seja Λ a constante de Lipschitz uniforme. Afirmamos que cada $v(x)$ que satisfaz o ínfimo na equação (1.18) é uniformemente limitado em h . De fato,

$$|L(x, v(x)) + \bar{H}_h| = \left| \frac{u(x) - u(x + hv)}{h} \right| \leq \Lambda |v(x)|,$$

então, como o Lagrangiano é superlinear e vale (a), concluímos que $|v(x)| \leq K$ para alguma constante K que depende apenas do Lagrangiano L .

(b) Basta notar que ϕ_h e $\bar{\phi}_h$ são uniformemente limitadas, já que são limites das funções $\phi_{\epsilon, h}$ e $\bar{\phi}_{\epsilon, h}$ que são uniformemente limitadas em ϵ e h . Então podemos aplicar o teorema 7.2 de [Gom].

(c) Veja teoremas 7.3 e 7.4 de [Gom]. □

1.4 Princípio de Grandes Desvios: para h fixo e $\epsilon \rightarrow 0$

Vamos definir,

$$f_{\epsilon,h}(x, v) = \frac{\bar{\phi}_{\epsilon,h}(x) + \phi_{\epsilon,h}(x)}{h} + L(x, v) + \frac{\phi_{\epsilon,h}(x + hv) - \phi_{\epsilon,h}(x)}{h} - \bar{H}_{\epsilon,h},$$

Pelos teoremas 38 e 39 de [GV] sabemos que

$$\phi_{\epsilon,h} \rightarrow \phi_h, \quad \bar{\phi}_{\epsilon,h} \rightarrow \bar{\phi}_h$$

uniformemente, quando $\epsilon \rightarrow 0$.

Pelo teorema 1.14

$$\bar{H}_{\epsilon,h} \rightarrow \bar{H}_h \quad \text{quando } \epsilon \rightarrow 0.$$

Logo definimos

$$I_h(x, v) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_{\epsilon,h}(x, v) = \frac{\bar{\phi}_h(x) + \phi_h(x)}{h} + L(x, v) + \frac{\phi_h(x + hv) - \phi_h(x)}{h} - \bar{H}_h$$

Note que por [Gom] temos que

$$L(x, v) + \frac{\phi_h(x + hv) - \phi_h(x)}{h} = \bar{H}_h \quad \text{se } (x, v) \in \text{supp}(\mu_h)$$

portanto segue do mesmo argumento que será usado para provar o teorema 1.21, que $\frac{\bar{\phi}_h(x) + \phi_h(x)}{h} = 0$ se $x \in \pi_1(\text{supp}(\mu_h))$. Daí $I_h(x, v) = 0$ se $(x, v) \in \text{supp}(\mu_h)$.

Será mostrado na seção (1.6) que sob hipóteses razoáveis ϕ_h e $\bar{\phi}_h$ são únicas a menos de soma por constante. E portanto I_h fica bem definida.

Podemos então mostrar um princípio de grandes desvios para a sequência de medidas $\mu_{\epsilon,h} \rightarrow \mu_h$.

Teorema 1.18. Para todo conjunto $F \subset \mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N$ fechado e limitado, vale que

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \ln \mu_{\epsilon,h}(F) \leq - \inf_{(x,v) \in F} I_h(x, v)$$

Para todo conjunto $A \subset \mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N$ aberto e limitado, vale que

$$\liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \ln \mu_{\epsilon,h}(A) \geq - \inf_{(x,v) \in A} I_h(x, v)$$

Demonstração :

Seja $F \subset \mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N$ um conjunto fechado e limitado, então $F \subset \mathbb{T}^N \times B_R$, onde $B_R = \{v \in \mathbb{R}^N; |v| \leq R\}$, para algum $R > 0$

$$\begin{aligned} \mu_{\epsilon,h}(F) &= \int_F e^{-\frac{f_{\epsilon,h}(x,v)}{\epsilon}} dx dv \\ &\leq e^{-\inf_F \frac{f_{\epsilon,h}(x,v)}{\epsilon}} \int_F dx dv \leq c_1 R^N e^{-\inf_F \frac{f_{\epsilon,h}(x,v)}{\epsilon}} \end{aligned}$$

Portanto

$$\epsilon \ln \mu_{\epsilon,h}(F) \leq \epsilon \ln c_1 R^N - \inf_F f_{\epsilon,h}$$

Daí

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \ln \mu_{\epsilon,h}(F) \leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(- \inf_F \frac{\bar{\phi}_{\epsilon,h}(x) + \phi_{\epsilon,h}(x + hv)}{h} + L(x, v) - \bar{H}_{\epsilon,h} \right) \quad (1.24)$$

Agora como a convergência de $\phi_{\epsilon,h}$ e $\bar{\phi}_{\epsilon,h}$, com $\epsilon \rightarrow 0$, para respectivamente, ϕ_h e $\bar{\phi}_h$, é uniforme, então

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} - \inf_F f_{\epsilon,h} = - \inf_F \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_{\epsilon,h}$$

Logo

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \ln \mu_{\epsilon,h}(F) \leq - \inf_F \left(\frac{\bar{\phi}_h(x) + \phi_h(x + hv)}{h} + L(x, v) - \bar{H}_h \right) = - \inf_F I_h(x, v)$$

Seja $A \subset \mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto e limitado. Fixamos $\delta > 0$ podemos encontrar um conjunto fechado $A_\delta \subset A$ tal que

$$\inf_A I_h(x, v) \leq I_h(x, v) \leq \inf_{A_\delta} I_h(x, v) + \delta \quad \text{para todo } (x, v) \in A_\delta$$

Daí

$$\mu_{\epsilon,h}(A) \geq \mu_{\epsilon,h}(A_\delta) \geq e^{-\sup_{A_\delta} \frac{f_{\epsilon,h}(x,v)}{\epsilon}} \int_{A_\delta} dx dv$$

Note que, como $f_{\epsilon,h}(x, v) \rightarrow I_h(x, v)$ quando $\epsilon \rightarrow 0$ temos que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sup_{A_\delta} f_{\epsilon,h} \leq \inf_A I_h + \delta$$

Portanto

$$\begin{aligned} \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \ln \mu_{\epsilon,h}(A) &\geq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \left(- \sup_{A_\delta} \frac{f_{\epsilon,h}(x, v)}{\epsilon} + \ln \int_{A_\delta} dx dv \right) \\ &\geq - \inf_A I_h + \delta + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \left(\ln \int_{A_\delta} dx dv \right) = - \inf_A I_h(x, v) + \delta \end{aligned}$$

Finalmente fazendo $\delta \rightarrow 0$ obtemos que

$$\liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \ln \mu_{\epsilon,h}(A) \geq - \inf_A I_h(x, v)$$

□

Teorema 1.19. Seja L um Lagrangiano genérico que satisfaz as hipóteses (1) a (3) acima. Suponha também que $\phi_{\epsilon,h}$ e $\bar{\phi}_{\epsilon,h}$ dadas no teorema 1.10 são uniformemente limitadas e satisfazem a equação (1.13). Então, através de uma subsequência,

$$\phi_{\epsilon,h} \rightarrow \phi_0 \quad \text{e} \quad \bar{\phi}_{\epsilon,h} \rightarrow \bar{\phi}_0,$$

onde ϕ_0 é a única solução de viscosidade de

$$H(\nabla\phi_0(x), x) = -\bar{H}_0$$

e $\bar{\phi}_0$ é a única solução de viscosidade da equação

$$H(-\nabla\bar{\phi}_0(x), x) = -\bar{H}_0.$$

Demonstração :

Pelo item (b) do teorema 1.17 qualquer coleção $\{\overline{\phi_h}\}_{h \in [0,1]}$ de soluções do problema com $\epsilon = 0$ é um conjunto compacto, portanto se fixarmos uma sequência $\{\phi_{h_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ existe uma subsequência que converge a uma função ϕ_0 , i.e., existe um conjunto \mathcal{H} tal que

$$\lim_{h_i \in \mathcal{H}} \phi_{h_i} = \phi_0.$$

Em [Gom] foi mostrado que tal ϕ_0 é uma solução de viscosidade da equação de Hamilton-Jacobi (descrita no enunciado do teorema).

Pelo teorema 1.15 sabemos que $\{\phi_{\epsilon,h_i}\}_{\epsilon \in [0,1]}$ é um conjunto compacto para cada $h_i \in \mathcal{H}$. Portanto se fixarmos $h_1 \in \mathcal{H}$ e uma sequência $\{\phi_{\epsilon_i,h_1}\}_{i \in \mathbb{N}}$, então existe um conjunto \mathcal{E}_{h_1} tal que

$$\lim_{\epsilon_i \in \mathcal{E}_{h_1}} \phi_{\epsilon_i,h_1} = \phi_{h_1}.$$

Agora, se fixarmos $h_2 \in \mathcal{H}$, a sequência $\{\phi_{\epsilon_i,h_2}\}_{\epsilon_i \in \mathcal{E}_{h_1}}$ tem uma subsequência que converge para uma função ϕ_{h_2} , e portanto encontramos um conjunto $\mathcal{E}_{h_2} \subset \mathcal{E}_{h_1}$ tal que

$$\lim_{\epsilon_i \in \mathcal{E}_{h_2}} \phi_{\epsilon_i,h_2} = \phi_{h_2}.$$

Procedendo da mesma forma para cada $h_i \in \mathcal{H}$, podemos encontrar um conjunto $\mathcal{E}_{h_i} \subset \dots \subset \mathcal{E}_{h_2} \subset \mathcal{E}_{h_1}$. Então podemos definir um conjunto \mathcal{E} tal que o i -ésimo elemento de \mathcal{E} é o i -ésimo elemento de \mathcal{E}_i . O conjunto \mathcal{E} tem a propriedade que

$$\lim_{\epsilon_i \in \mathcal{E}} \phi_{\epsilon_i,h_j} = \phi_{h_j} \text{ for each } h_j \in \mathcal{H}.$$

Finalmente, temos que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \phi_{\epsilon_i,h_i} = \phi_0,$$

e portanto, $\phi_{\epsilon,h}$ converge (em subsequência) para a única solução de viscosidade de $H(\nabla\phi_0(x), x) = -\bar{H}_0$.

Da mesma forma pode-se mostrar que $\bar{\phi}_0$ é solução de viscosidade da equação

$$H(-\nabla\bar{\phi}_0(x), x) = -\bar{H}_0.$$

□

Sabemos que $\phi_{\epsilon,h}$ e $\bar{\phi}_{\epsilon,h}$ são uniformemente semicôncavas e Lipschitz, portanto ϕ_0 e $\bar{\phi}_0$ também são semicôncavas e Lipschitz, daí ϕ_0 e $\bar{\phi}_0$ são λ -q.t.p. diferenciáveis em \mathbb{T}^N , onde λ é a medida de Lebesgue \mathbb{T}^N .

Vamos denotar por $\text{dom}(\nabla\phi_0)$ o domínio de definição de $\nabla\phi_0$, i.e., o conjunto dos pontos x onde o gradiente de ϕ_0 existe.

Como ϕ_0 é solução de viscosidade para a equação

$$H(\nabla\phi_0(x), x) = -\bar{H}_0$$

Temos pela proposição 1.1 que

$$\sup_v [-\nabla\phi_0(x)(v) - L(x, v)] = -\bar{H}_0, \text{ para todo } x \in \text{dom}(\nabla\phi_0). \quad (1.25)$$

Ainda sabemos que ϕ_0 é diferenciável em todos os pontos $\pi_1(\text{supp } \mu)$, onde π_1 é a projeção canônica na coordenada x , e μ é a única medida de Mather.

Portanto por (1.25),

$$\nabla\phi_0(x)(v) + L(x, v) \geq \bar{H}_0 \text{ para } x \in \pi_1(\text{supp } \mu) \text{ e para todo } v \in \mathbb{R}^N. \quad (1.26)$$

Proposição 1.10. Se $(x, v) \in \text{supp}(\mu)$ então $\nabla\phi_0(x)(v) + L(x, v) = \bar{H}_0$.

Demonstração : Por (1.26) já temos uma desigualdade. Suponha, por absurdo, que existe $(x, v) \in \text{supp}(\mu)$ e $\epsilon > 0$ tal que

$$\nabla\phi_0(x)(v) + L(x, v) > \bar{H}_0 + \epsilon.$$

Então existe uma vizinhança V de (x, v) tal que para todo $(y, w) \in V$ temos que

$$\nabla\phi_0(y)(w) + L(y, w) > \bar{H}_0.$$

Lembramos que $\int \nabla\phi_0(x)(v) d\mu = 0$, então

$$\int \nabla\phi_0(x)(v) + L(x, v) d\mu > \bar{H}_0,$$

pois (1.26) é válido em qualquer ponto $(x, v) \in \pi_1(\text{supp } \mu) \times \mathbb{R}^N$ e nos pontos $(x, v) \in V$ temos desigualdade estrita.

Isto implica que

$$\int L(x, v) d\mu > \bar{H}_0,$$

mas isto dá uma contradição. □

Vamos agora mostrar uma propriedade das funções ϕ_0 e $\bar{\phi}_0$ que será muito importante na próxima seção. Lembre que h é a barreira de Peierls.

Proposição 1.11. $(\phi_0 + \bar{\phi}_0)(x) = h(x, x)$

Demonstração : Note que como foi dito anteriormente ϕ_0 é solução de viscosidade para a equação

$$H(\nabla\phi_0(x), x) = -\bar{H}_0$$

Aqui cabe lembrar que definimos o Hamiltoniano como em controle ótimo, i.e.,

$$H(p, x) = \sup_v(-p \cdot v - L(x, v))$$

então pela observação após o teorema 1.6 teremos que $-\phi_0$ é solução KAM fraca positiva.

Afirmo que $\bar{\phi}_0$ é solução KAM fraca negativa. De fato, como $\bar{\phi}_0$ é solução de viscosidade de

$$H(-\nabla\bar{\phi}_0(x), x) = -\bar{H}_0$$

e como

$$H(-\nabla\bar{\phi}_0(x), x) = \sup_v[\nabla\bar{\phi}_0(x) \cdot v - L(x, v)]$$

pelo teorema 1.6 segue que $\bar{\phi}_0$ é KAM fraca negativa.

Pela proposição 1.9, já que o Lagrangiano é genérico só existe uma solução KAM fraca positiva (a menos de soma por constante) $-\phi_0$ e uma solução de KAM fraca negativa $\bar{\phi}_0$. Portanto $\bar{\phi}_0$ e $-\phi_0$ é o único par de soluções KAM fracas conjugadas, logo pela proposição 1.4 , temos que

$$(\phi_0 + \bar{\phi}_0)(x) = h(x, x).$$

□

1.5 Princípio de Grandes Desvios: $\epsilon, h \rightarrow 0$

Note que $\phi_{\epsilon, h}$ e $\bar{\phi}_{\epsilon, h}$ estão determinadas a menos de soma por constante. Vamos fixar uma $\phi_{\epsilon, h}$ e consideramos $\bar{\phi}_{\epsilon, h}$ a única possível tal que

$$\int \theta_{\epsilon, h}(x) dx = \int e^{-(\frac{\bar{\phi}_{\epsilon, h} + \phi_{\epsilon, h}}{h\epsilon})(x)} dx = 1.$$

Note que pelo teorema 1.10 temos que $\phi_{\epsilon, h}$ e $\bar{\phi}_{\epsilon, h}$ são uniformemente semicôncavas. Denotamos por $x^* = x_{\epsilon, h}^*$, um ponto realizando o mínimo de $\phi_{\epsilon, h} + \bar{\phi}_{\epsilon, h}$, este ponto pode ser também expresso como $x^* \in \operatorname{argmin}(\phi_{\epsilon, h} + \bar{\phi}_{\epsilon, h})$.

Então, para qualquer x

$$(\phi_{\epsilon, h} + \bar{\phi}_{\epsilon, h})(x) \leq \min(\phi_{\epsilon, h} + \bar{\phi}_{\epsilon, h}) + c|x - x^*|^2.$$

Portanto,

$$1 = \int e^{-\frac{(\phi_{\epsilon, h} + \bar{\phi}_{\epsilon, h})(x)}{\epsilon h}} dx \geq \int e^{-\frac{c|x - x^*|^2}{\epsilon h}} dx e^{-\frac{\min(\phi_{\epsilon, h} + \bar{\phi}_{\epsilon, h})}{\epsilon h}}.$$

Disto, segue que

$$e^{\frac{\min(\phi_{\epsilon, h} + \bar{\phi}_{\epsilon, h})}{\epsilon h}} \geq \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{c|x - x^*|^2}{\epsilon h}} \sim (\epsilon h)^{n/2}.$$

Logo,

$$\min(\phi_{\epsilon, h} + \bar{\phi}_{\epsilon, h}) \geq c\epsilon h \ln(\epsilon h).$$

Por conveniência vamos escrever $\lim_{\epsilon, h \rightarrow 0}$ quando queremos dizer $\lim_{\epsilon_i, h_i \rightarrow 0}$, onde $\{\epsilon_i, h_i\}$ é uma sequência tal que $\lim_{\epsilon_i, h_i \rightarrow 0} \phi_{\epsilon_i, h_i} = \phi_0$, e $\lim_{\epsilon_i, h_i \rightarrow 0} \bar{\phi}_{\epsilon_i, h_i} = \bar{\phi}_0$.

E lembre que $\phi_{\epsilon, h} + \bar{\phi}_{\epsilon, h} \rightarrow \phi_0 + \bar{\phi}_0$ uniformemente quando $\epsilon, h \rightarrow 0$.

Portanto da desigualdade acima obtemos que

$$\min_x(\phi_0 + \bar{\phi}_0)(x) = \lim_{\epsilon, h \rightarrow 0} \min_{x \in \mathbb{T}^N}(\phi_{\epsilon, h} + \bar{\phi}_{\epsilon, h})(x) \geq 0$$

Teorema 1.20. Sejam ϕ_0 e $\bar{\phi}_0$ os limites, quando $\epsilon, h \rightarrow 0$, de $\phi_{\epsilon, h}$ e $\bar{\phi}_{\epsilon, h}$ respectivamente, dados pelo teorema 1.19 e seja μ a única medida de Mather para L .

Então,

$$\pi_1(\operatorname{supp}(\mu)) = \{x \mid \phi_0(x) + \bar{\phi}_0(x) = 0\},$$

onde π_1 é a projeção na coordenada x .

Demonstração :

Isto segue da hipótese que o Lagrangiano é genérico, i.e., só existe uma medida de Mather e que $\hat{\mathcal{A}} = \operatorname{supp}(\mu)$. Pela definição do conjunto de Aubry projetado temos que

$\{x \mid h(x, x) = 0\} = \mathcal{A} = \pi_1(\operatorname{supp}(\mu))$, e portanto o teorema segue da proposição 1.11.

□

Vamos agora fixar $x \in \operatorname{dom}(\nabla \phi_0)$, vamos precisar do seguinte lema:

Lema 1.3. Se $x \in \text{dom}(\nabla\phi_0)$, então temos que

$$\lim_{\epsilon, h \rightarrow 0} \frac{\phi_{\epsilon, h}(x + hv) - \phi_{\epsilon, h}(x)}{h} = \nabla\phi_0(x)(v),$$

uniformemente em cada conjunto fechado e limitado de $\text{dom}(\nabla\phi_0) \times \mathbb{R}^N$.

Para provar este lema precisaremos de algumas propriedades de funções semicôncavas, enunciadas na seção 1.2.6.

Demonstração do lema 1.3: Pelo teorema 1.10 $\phi_{\epsilon, h}$ é uma função semicôncava com constante de semiconcavidade uniformemente limitado por uma constante \bar{C} . Seja $\{\phi_{\epsilon_i, h_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ uma subsequência de $\phi_{\epsilon, h}$, tal que $\phi_{\epsilon_i, h_i} \rightarrow \phi_0$.

Seja K um conjunto fechado de $\text{dom}(\nabla\phi_0) \times \mathbb{R}^N$. Portanto, pela proposição 1.7 para cada $(x, v) \in K$, e cada ϵ_i e h_i existe $\xi_{\epsilon_i, h_i}(x, v) \in]x, x + h_i v[$ e $p_{\epsilon_i, h_i} \in D^+\phi_{\epsilon_i, h_i}(\xi_{\epsilon_i, h_i}(x, v))$, tais que

$$\frac{\phi_{\epsilon_i, h_i}(x + h_i v) - \phi_{\epsilon_i, h_i}(x)}{h_i} = p_{\epsilon_i, h_i} \cdot v$$

Então, para provar o lema é suficiente mostrar que

$$\lim_{\epsilon_i, h_i \rightarrow 0} p_{\epsilon_i, h_i} \cdot v = \nabla\phi_0(x)(v) \quad \text{for all } (x, v) \in K,$$

i.e., dado $\zeta > 0$ precisamos encontrar $i_0 > 0$ tal que para cada $i > i_0$ temos que $|p_{\epsilon_i, h_i} \cdot v - \nabla\phi_0(x)(v)| < \zeta$ for all $(x, v) \in K$, e esta desigualdade pode ser escrita como um par de desigualdades

- (i) $\nabla\phi_0(x)(v) \leq p_{\epsilon_i, h_i} \cdot v + \zeta$
- (ii) $\nabla\phi_0(x)(-v) \leq -p_{\epsilon_i, h_i} \cdot v + \zeta$

Vamos mostrar que existe i_0 , tal que a primeira desigualdade vale para todo $i > i_0$, e todo $(x, v) \in K$. Argumentando por contradição, suponhamos que não existe $i_0 > 0$, com as propriedades especificadas. Então existe uma sequência $\{(x_n, v_n)\}$, e subsequências $\{h_n\}, \{\epsilon_n\}$ de $\{h_i\}, \{\epsilon_i\}$, tais que

$$\nabla\phi_0(x_n)(v_n) > p_{\epsilon_n, h_n} \cdot v_n + \zeta \tag{1.27}$$

onde $p_{\epsilon_n, h_n} \in D^+\phi_{\epsilon_n, h_n}(\xi_n)$ e $\xi_n := \xi_{\epsilon_n, h_n}(x_n, v_n) \in]x_n, x_n + h_n v_n[$ são dados pela proposição 1.7. Passando a uma subsequência se necessário, podemos supor que a sequência $\{(x_n, v_n)\}$ converge a um ponto (x, v) de K , então $\{\xi_n\}$ converge para x . Agora pela proposição 1.8 temos que, para qualquer $\lambda > 0$

$$p_{\epsilon_n, h_n} \cdot v_n \geq \frac{\phi_{\epsilon_n, h_n}(\xi_n + \lambda v_n) - \phi_{\epsilon_n, h_n}(\xi_n)}{\lambda} - \frac{\bar{C}}{2} \lambda |v_n|^2 \tag{1.28}$$

Acima usamos o fato que existe uma constante uniforme de semiconcavidade.

Note que $\phi_{\epsilon_n, h_n} \rightarrow \phi_0$ quando $n \rightarrow \infty$ uniformemente, $\xi_n \rightarrow x$. Como $-\phi_0 \in \mathcal{S}_+$, pelo teorema 1.5 $\nabla\phi_0$ é contínua em $\text{dom}(\nabla\phi_0)$, então pelas equações (1.27) e (1.28), temos que

$$\lim_n \nabla\phi_0(x_n)(v_n) \geq \lim_n \inf p_{\epsilon_n, h_n} \cdot v_n + \zeta \geq \lim_n \frac{\phi_{\epsilon_n, h_n}(\xi_n + \lambda v_n) - \phi_{\epsilon_n, h_n}(\xi_n)}{\lambda} - \frac{\bar{C}}{2} \lambda |v_n|^2 + \zeta$$

portanto

$$\nabla\phi_0(x)(v) \geq \frac{\phi_0(x + \lambda v) - \phi_0(x)}{\lambda} - \frac{\bar{C}}{2}\lambda|v|^2 + \zeta, \quad \text{for all } \lambda > 0$$

Logo

$$\nabla\phi_0(x)(v) \geq \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{\phi_0(x + \lambda v) - \phi_0(x)}{\lambda} - \frac{\bar{C}}{2}\lambda|v|^2 + \zeta = \nabla\phi_0(x)(v) + \zeta$$

e isto é um absurdo. \square

Teorema 1.21.

$$(a) \quad \lim_{\epsilon, h \rightarrow 0} \frac{\bar{\phi}_{\epsilon, h}(x) + \phi_{\epsilon, h}(x)}{h} = 0 \quad \text{se } x \in \pi_1(\text{supp}(\mu))$$

e

$$(b) \quad \lim_{\epsilon, h \rightarrow 0} \frac{\bar{\phi}_{\epsilon, h}(x) + \phi_{\epsilon, h}(x)}{h} = \infty \quad \text{se } x \notin \pi_1(\text{supp}(\mu))$$

Demonstração : Vamos fixar duas seqüências $\{\epsilon_n\}, \{h_n\}$, tais que: $\mu_{\epsilon_n, h_n} \rightharpoonup \mu$, $\bar{H}_{\epsilon_n, h_n} \rightarrow \bar{H}_0$, $\phi_{\epsilon_n, h_n} \rightarrow \phi_0$ e $\bar{\phi}_{\epsilon_n, h_n} \rightarrow \bar{\phi}_0$. Para simplificar a notação vamos denotar por $\mu_n = \mu_{\epsilon_n, h_n}$, $\bar{H}_n = \bar{H}_{\epsilon_n, h_n}$, $\phi_n = \phi_{\epsilon_n, h_n}$ e $\bar{\phi}_n = \bar{\phi}_{\epsilon_n, h_n}$. Como $\int_{\mathbb{T}^N} e^{-\frac{1}{\epsilon_n} \frac{\bar{\phi}_n(x) + \phi_n(x)}{h_n}} dx = 1$ temos, para todo $x \in \mathbb{T}^N$, que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{\phi}_n(x) + \phi_n(x)}{h_n} \geq 0. \quad (1.29)$$

De fato, suponhamos por absurdo que existe $x \in \mathbb{T}^N$ tal que, para uma subsequência

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\bar{\phi}_{n_j}(x) + \phi_{n_j}(x)}{h_{n_j}} = c < 0, \quad \text{então para uma vizinhança } V \text{ de } x \text{ temos que}$$

$e^{-\frac{c}{2\epsilon_{n_j}}} \int_V dx \leq \int_V e^{-\frac{1}{\epsilon_{n_j}} \frac{\bar{\phi}_{n_j}(x) + \phi_{n_j}(x)}{h_{n_j}}} dx < 1$. Quando $\epsilon_{n_j} \rightarrow 0$ obtemos uma contradição, já que $c < 0$.

(a) Segue da equação (1.29) e do teorema 1.20.

(b) Seja (x_0, v_0) um ponto do suporte de μ e B uma vizinhança pequena no espaço de fase. Como $\mu_n \rightharpoonup \mu$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$ então

$$1 > \int_B e^{-\frac{1}{\epsilon_n} \left(\frac{\bar{\phi}_n(x) + \phi_n(x)}{h_n} + \frac{h_n L(x, v) + \phi_n(x + h_n v) - \phi_n(x) - h_n \bar{H}_n}{h_n} \right)} dx dv > \delta_B > 0 \quad (1.30)$$

para algum $\delta_B > 0$.

Afirmção: Dado $\zeta > 0$ existem $\bar{n} \in \mathbb{N}$ e uma vizinhança B de (x_0, v_0) tal que, se $(x, v) \in B$ e $n > \bar{n}$ então $L(x, v) + \frac{\phi_n(x + h_n v) - \phi_n(x)}{h_n} - \bar{H}_n > -\zeta$.

Suponhamos provada a afirmação. Suponhamos por absurdo que $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{\phi}_n(x_0) + \phi_n(x_0)}{h_n} = c > 0$, então existe uma subsequência tal que $\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\bar{\phi}_{n_j}(x_0) + \phi_{n_j}(x_0)}{h_{n_j}} = c$. Agora usamos a

afirmação com $\zeta < c/4$, então quando $\epsilon_{n_j} \rightarrow 0$ temos uma contradição com a desigualdade (1.30). Portanto usando (1.29) provamos (b).

Prova da afirmação: Seja \bar{C} a constante de semiconcavidade das funções $\phi_{\epsilon,h}$. Para $\zeta > 0, \eta > 0$ existe $\lambda > 0$ tal que

$$\frac{\bar{C}}{2}(|v_0| + \eta)^2 \lambda < \zeta \quad \text{e} \quad \left| \frac{\phi_0(x_0 + \lambda v_0) - \phi_0(x_0)}{\lambda} - \nabla \phi_0(x_0)(v_0) \right| < \zeta.$$

Já que $\phi_n \rightarrow \phi_0$ uniformemente em x existe n_2 tal que se $n > n_2$ temos que $|\phi_0(x) - \phi_n(x)| < \zeta \lambda$ para todo $x \in \mathbb{T}^N$. Também existe uma vizinhança B_λ de (x_0, v_0) tal que se $(x, v) \in B_\lambda$ and $n > n_2$ então

$$\left| \frac{\phi_n(x + \lambda v) - \phi_n(x) - \phi_0(x_0 + \lambda v_0) + \phi_0(x_0)}{\lambda} \right| < 6\zeta.$$

Existe n_3 tal que se $n > n_3$ e $(x, v) \in B_\lambda$ (escolhendo B_λ menor se necessário) tal que $|L(x_0, v_0) - L(x, v) - \bar{H}_0 + \bar{H}_n| < \zeta$ and $|v - v_0| < \eta$.

Pelas proposições 1.7 e 1.8 temos que

$$\frac{\phi_n(x + h_n v) - \phi_n(x)}{h_n} = p_n(x_n) \cdot v \geq \frac{\phi_n(x_n + \lambda v) - \phi_n(x_n)}{\lambda} - \frac{\bar{C}}{2} \lambda |v|^2,$$

onde $x_n \in]x, x + h_n v[$, portanto existe n_4 tal que se $n > n_4$ então $(x_n, v) \in B_\lambda$.

Agora, definimos $\bar{n} = \max\{n_2, n_3, n_4\}$, juntando todas as desigualdades acima, para todo $n > \bar{n}$ e $(x, v) \in B_\lambda$, obtemos que

$$L(x, v) + \frac{\phi_n(x + h_n v) - \phi_n(x)}{h_n} - \bar{H}_n > L(x_0, v_0) + \nabla \phi_0(x_0)(v_0) - \bar{H}_0 - 9\zeta > -9\zeta,$$

o que prova a afirmação. □

Vamos dar uma motivação para o próximo teorema:

Seja $A \subset D \times \mathbb{R}^N$ um conjunto limitado onde $D \cap \pi_1(\text{supp}(\mu)) = \emptyset$.

Note que como $\mu_{\epsilon,h}$ são absolutamente contínuas em relação a medida de Lebesgue λ e ϕ_0 é diferenciável λ -q.t.p., podemos nos restringir (quando calcularmos $\mu_{\epsilon,h}(A)$) aos pontos de A que estão contidos em $\text{dom}(\nabla \phi_0) \times \mathbb{R}^N$.

Lembrando que

$$f_{\epsilon,h}(x, v) = \frac{\bar{\phi}_{\epsilon,h}(x) + \phi_{\epsilon,h}(x)}{h} + L(x, v) + \frac{\phi_{\epsilon,h}(x + hv) - \phi_{\epsilon,h}(x)}{h} - \bar{H}_{\epsilon,h}$$

Pelo lema 1.3, temos que $x \in \text{dom}(\nabla \phi_0)$

$$\lim_{\epsilon, h \rightarrow 0} L(x, v) + \frac{\phi_{\epsilon,h}(x + hv) - \phi_{\epsilon,h}(x)}{h} - \bar{H}_{\epsilon,h} = L(x, v) + \nabla \phi_0(x)(v) - \bar{H}_0$$

E pela hipótese $D \cap \pi_1(\text{supp}(\mu)) = \emptyset$ segue do teorema 1.21

$$\lim_{\epsilon, h \rightarrow 0} \frac{\bar{\phi}_{\epsilon,h}(x) + \phi_{\epsilon,h}(x)}{h} = +\infty$$

Portanto se calculamos, como no teorema 1.18

$$\limsup_{\epsilon, h \rightarrow 0} \epsilon \ln \mu_{\epsilon, h}(A) \leq \lim_{\epsilon, h \rightarrow 0} \left(- \inf_A f_{\epsilon, h}(x, v) \right) \rightarrow -\infty$$

E como para $x \notin \pi_1(\text{supp}(\mu))$ temos que $\bar{\phi}_0(x) + \phi_0(x) > 0$ logo podemos calcular o limite de $\epsilon h \ln \mu_{\epsilon, h}$ quando $\epsilon, h \rightarrow 0$ como a seguir.

Teorema 1.22. Seja $A \subset D \times \mathbb{R}^N$ tal que $D \cap \pi_1(\text{supp}(\mu)) = \emptyset$. Se A é um conjunto fechado e limitado então

$$\limsup_{\epsilon, h \rightarrow 0} \epsilon h \ln \mu_{\epsilon, h}(A) \leq - \inf_{x \in D} \{ \bar{\phi}_0(x) + \phi_0(x) \}$$

Se A é um conjunto aberto e limitado

$$\liminf_{\epsilon, h \rightarrow 0} \epsilon h \ln \mu_{\epsilon, h}(A) \geq - \inf_{x \in D} \{ \bar{\phi}_0(x) + \phi_0(x) \}$$

Demonstração :

Lembre que $\bar{\phi}_{\epsilon, h} \rightarrow \bar{\phi}_0$ e $\phi_{\epsilon, h} \rightarrow \phi_0$, onde $\bar{\phi}_0$ e ϕ_0 são soluções de viscosidade.

Seja $A \subset D \times \mathbb{R}^N$, então $A \subset D \times B_R$, onde $B_R = \{v \in \mathbb{R}^N; |v| \leq R\}$, para algum $R > 0$, e

$$\mu_{\epsilon, h}(A) = \int_A e^{-\left(\frac{\bar{\phi}_{\epsilon, h}(x) + \phi_{\epsilon, h}(x)}{h\epsilon} + \frac{hL(x, v) + \phi_{\epsilon, h}(x + hv) - \phi_{\epsilon, h}(x) - h\bar{H}_{\epsilon, h}}{\epsilon h} \right)} dx dv.$$

Então

$$\mu_{\epsilon, h}(A) \leq e^{-\inf_A \left(\frac{\bar{\phi}_{\epsilon, h}(x) + \phi_{\epsilon, h}(x)}{h\epsilon} + \frac{hL(x, v) + \phi_{\epsilon, h}(x + hv) - \phi_{\epsilon, h}(x) - h\bar{H}_{\epsilon, h}}{\epsilon h} \right)} \int_A dx dv$$

Daí

$$\begin{aligned} \ln \mu_{\epsilon, h}(A) &\leq \\ &\leq - \inf_A \left(\frac{\bar{\phi}_{\epsilon, h}(x) + \phi_{\epsilon, h}(x)}{h\epsilon} + \frac{hL(x, v) + \phi_{\epsilon, h}(x + hv) - \phi_{\epsilon, h}(x) - h\bar{H}_{\epsilon, h}}{\epsilon h} \right) + \ln c_1 R^N \end{aligned}$$

Note que o termo

$$\frac{hL(x, v) + \phi_{\epsilon, h}(x + hv) - \phi_{\epsilon, h}(x) - h\bar{H}_{\epsilon, h}}{\epsilon h}$$

tem uma contribuição da forma $\frac{c}{\epsilon}$ onde c é uma constante.

E pelo teorema 1.21 esta contribuição é muito menor do que a do termo

$$\frac{1}{\epsilon} \frac{\inf_{x \in D} \{ \bar{\phi}_{\epsilon, h}(x) + \phi_{\epsilon, h}(x) \}}{h}$$

Portanto o que devemos estimar neste caso é $\epsilon h \ln \mu_{\epsilon, h}(A)$,

Note que pela mesma argumentação feita no teorema 1.18, obtemos que

$$\limsup_{\epsilon, h \rightarrow 0} \epsilon h \ln \mu_{\epsilon, h}(A) \leq - \inf_{x \in D} \{ \bar{\phi}_0(x) + \phi_0(x) \}$$

se A é fechado, e a desigualdade contrária se A é aberto. □

Podemos agora definir o funcional de desvio I por

$$I(x, v) = L(x, v) + \nabla\phi_0(x)(v) - \bar{H}_0$$

Se fixamos x , temos que

$$-\inf_v I(x, v) = \sup_v (-I(x, v)) = H(\nabla\phi_0(x), x) + \bar{H}_0 \quad (1.31)$$

Sabemos, pela proposição 1.10, que se $x \in \pi_1(\text{supp}(\mu))$ então $H(\nabla\phi_0(x), x) + \bar{H}_0 = 0$, e pela hipótese que o Lagrangiano é estritamente convexo em v obtemos que existe um único v que satisfaz o supremo em (1.31). E já que sabemos que $(x, v) \in \text{supp}(\mu)$ implica $I(x, v) = 0$ concluímos que $I(x, v) > 0$ para todo $(x, v) \notin \text{supp}(\mu)$ com $x \in \pi_1(\text{supp}(\mu))$.

Só faz sentido procurarmos desigualdades, superior e inferior, de grandes desvios se $\inf_A I(x, v) > 0$, pois caso contrário não podemos deduzir que a convergência seja exponencial. Note que se $A \subset D \times \mathbb{R}^N$ é tal que $D \subset \pi_1(\text{supp}(\mu))$ e $A \cap \text{supp}(\mu) = \emptyset$ então $\inf_A I(x, v) > 0$.

Vamos agora mostrar uma desigualdade superior de grandes desvios.

Teorema 1.23. Se $A \subset D \times \mathbb{R}^N$ é um conjunto fechado e limitado onde $D \cap \pi_1(\text{supp}(\mu)) \neq \emptyset$, mas $A \cap \text{supp}(\mu) = \emptyset$ então quando $\epsilon, h \rightarrow 0$

$$\limsup_{\epsilon, h \rightarrow 0} \epsilon \ln \mu_{\epsilon, h}(A) \leq - \inf_{(x, v) \in A} I(x, v)$$

Demonstração : Seja $A \subset D \times \mathbb{R}^N$, então $A \subset D \times B_R$, onde $B_R = \{v \in \mathbb{R}^N; |v| \leq R\}$, para algum $R > 0$, e

$$\mu_{\epsilon, h}(A) = \int_A e^{-\left(\frac{\bar{\phi}_{\epsilon, h}(x) + \phi_{\epsilon, h}(x)}{h\epsilon} + \frac{hL(x, v) + \phi_{\epsilon, h}(x + hv) - \phi_{\epsilon, h}(x) - h\bar{H}_{\epsilon, h}}{\epsilon h}\right)} dx dv.$$

Então

$$\mu_{\epsilon, h}(A) \leq e^{-\inf_A \left(\frac{\bar{\phi}_{\epsilon, h}(x) + \phi_{\epsilon, h}(x)}{h\epsilon} + \frac{hL(x, v) + \phi_{\epsilon, h}(x + hv) - \phi_{\epsilon, h}(x) - h\bar{H}_{\epsilon, h}}{\epsilon h}\right)} \int_A dx dv$$

Portanto

$$\begin{aligned} & \epsilon \ln \mu_{\epsilon, h}(A) \leq \\ & \leq -\inf_A \left(\frac{\bar{\phi}_{\epsilon, h}(x) + \phi_{\epsilon, h}(x)}{h}\right) - \inf_A \left(L(x, v) + \frac{\phi_{\epsilon, h}(x + hv) - \phi_{\epsilon, h}(x)}{h} - \bar{H}_{\epsilon, h}\right) + \epsilon \ln c_1 R^N \end{aligned}$$

Pelo teorema 1.21 a contribuição do termo

$$\inf_{x \in A} \frac{\{\bar{\phi}_{\epsilon, h}(x) + \phi_{\epsilon, h}(x)\}}{h},$$

vai assintoticamente a zero pois $D \cap \pi_1(\text{supp}(\mu)) \neq \emptyset$.

O termo dominante é

$$L(x, v) + \frac{\phi_{\epsilon, h}(x + hv) - \phi_{\epsilon, h}(x)}{h} - \bar{H}_{\epsilon, h}$$

Desta maneira temos decaimento exponencial da medida deste conjunto e é estimado pelo ínfimo dos valores de

$$I(x, v) = L(x, v) + \nabla \phi_0(x)(v) - \bar{H}_0$$

no conjunto A .

□

Vamos agora provar uma desigualdade inferior de grandes desvios.

Teorema 1.24. Se $A \subset D \times \mathbb{R}^N$ é um conjunto aberto e limitado onde $D \cap \pi_1(\text{supp}(\mu)) \neq \emptyset$, mas $A \cap \text{supp}(\mu) = \emptyset$, então

$$\liminf_{\epsilon, h \rightarrow 0} \epsilon \ln \mu_{\epsilon, h}(A) \geq -\inf_{A_1} I(x, v) \quad (1.32)$$

onde $A = A_1 \cup A_2$, com $\pi_1(A_1) \subset \pi_1(\text{supp}(\mu))$, $\pi_1(A_2) \cap \pi_1(\text{supp}(\mu)) = \emptyset$

Demonstração :

O resultado segue facilmente pelo que foi visto acima. Os pontos x que não estão na projeção do suporte da medida de Mather são responsáveis por uma convergência a zero com velocidade muito maior por causa do termo $\frac{\phi_{\epsilon, h}(x) + \bar{\phi}_{\epsilon, h}(x)}{h} \rightarrow \infty$ (veja teorema (1.21)).

Nos pontos x em $\pi_1(\text{supp}(\mu))$, ϕ_0 é diferenciável, e pelo lema 1.3, a convergência de $\frac{\phi_{\epsilon, h}(x + hv) - \phi_{\epsilon, h}(x)}{h}$ é uniforme.

Formalmente, seja $A \subset \mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto e limitado. Fixamos $\delta > 0$ podemos encontrar um conjunto fechado $A_\delta \subset A_1$ tal que

$$\inf_{A_1} I(x, v) \leq I(x, v) \leq \inf_{A_1} I(x, v) + \delta \quad \text{para todo } (x, v) \in A_\delta$$

Daí

$$\mu_{\epsilon, h}(A) \geq \mu_{\epsilon, h}(A_1) \geq \mu_{\epsilon, h}(A_\delta) \geq e^{-\sup_{A_\delta} \frac{f_{\epsilon, h}(x, v)}{\epsilon}} \int_{A_\delta} dx dv$$

Note que, como $f_{\epsilon, h}(x, v) \rightarrow I(x, v)$ quando $\epsilon, h \rightarrow 0$ temos que

$$\lim_{\epsilon, h \rightarrow 0} \sup_{A_\delta} f_{\epsilon, h} \leq \inf_{A_1} I + \delta$$

Portanto

$$\begin{aligned} \liminf_{\epsilon, h \rightarrow 0} \epsilon \ln \mu_{\epsilon, h}(A) &\geq \liminf_{\epsilon, h \rightarrow 0} \epsilon \ln \mu_{\epsilon, h}(A_1) \geq \liminf_{\epsilon, h \rightarrow 0} \epsilon \left(-\sup_{A_\delta} \frac{f_{\epsilon, h}(x, v)}{\epsilon} + \ln \int_{A_\delta} dx dv \right) \\ &\geq -\inf_{A_1} I + \delta + \lim_{\epsilon, h \rightarrow 0} \epsilon \left(\ln \int_{A_\delta} dx dv \right) = -\inf_{A_1} I(x, v) + \delta \end{aligned}$$

Finalmente fazendo $\delta \rightarrow 0$ obtemos que

$$\liminf_{\epsilon, h \rightarrow 0} \epsilon \ln \mu_{\epsilon, h}(A) \geq -\inf_{A_1} I(x, v)$$

□

Exemplo: Um exemplo interessante é o que segue:
 Considere $L(x, v) = \frac{v^2}{2}$.

$$\mathcal{G}[\phi](x) := -\epsilon h \ln \left[\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{h \frac{v^2}{2} + \phi(x+hv)}{\epsilon h}} dv \right],$$

satisfaz

$$\mathcal{G}[0](x) = -\epsilon h \ln \left(\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{h \frac{v^2}{2}}{\epsilon h}} dv \right) = -\epsilon h \ln \sqrt{2\pi\epsilon} + 0 = \lambda_{\epsilon, h}.$$

portanto $\theta_{\epsilon, h} = 1$ e

$$\mu_{\epsilon, h}(x, v) = e^{-\frac{v^2 - \bar{H}_{\epsilon, h}}{\epsilon}},$$

Neste caso,

$$\begin{aligned} S[\mu_{\epsilon, h}] &= \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N} \mu_{\epsilon, h}(x, v) \ln \frac{\mu_{\epsilon, h}(x, v)}{\int_{\mathbb{R}^N} \mu_{\epsilon, h}(x, w) dw} dx dv = \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{h \frac{v^2}{2} - \lambda_{\epsilon, h}}{\epsilon h}} \ln \left(e^{-\frac{h \frac{v^2}{2} - \lambda_{\epsilon, h}}{\epsilon h}} \right) dv = \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{h \frac{v^2}{2} - \lambda_{\epsilon, h}}{\epsilon h}} \left(-\frac{h \frac{v^2}{2} - \lambda_{\epsilon, h}}{\epsilon h} \right) dv = \\ &= -\ln \sqrt{2\pi\epsilon} - \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon}} \int \frac{v^2}{2\epsilon} e^{-\frac{v^2}{2\epsilon}} dv = -\ln \sqrt{2\pi\epsilon} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Portanto, $\epsilon S(\mu_{\epsilon, h})$ vai a 0 quando $\epsilon \rightarrow 0$. Note que $S(\mu_{\epsilon, h})$ vai a ∞ quando $\epsilon \rightarrow 0$.
 Ainda,

$$\bar{H}_0 = \lim_{\epsilon, h \rightarrow 0} \frac{\lambda_{\epsilon, h}}{h} = 0$$

E daí

$$I(x, v) = L(x, v) + \nabla \phi_0(x)(v) - \bar{H}_0 = \frac{v^2}{2},$$

e a equação $I(x, v) = 0$, implica, $v = 0$. O conjunto de Aubry, como é sabido, neste caso é o conjunto de pontos da forma $(x, 0)$, para qualquer $x \in \mathbb{T}^N$.

O lema integral de Varadhan (veja [DZ]) afirma que: suponha que $I(x, v) = I(v)$ é o funcional de desvio para $\mu_{\epsilon, h}$ como acima, então, se $g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua $g(v)$, então

$$\lim_{\epsilon, h \rightarrow 0} \epsilon \ln \int e^{g(v)} \mu_{\epsilon, h}(v) = \sup_v \{g(v) - I(v)\} = \sup_v \left\{g(v) - \frac{v^2}{2}\right\}$$

Um exemplo interessante é quando p está fixo e consideramos $g(v) = \langle p, v \rangle$. Neste caso, $\sup\{g(v) - \frac{v^2}{2}\} = p^2$.

1.6 O problema de Aubry-Mather discreto

1.6.1 Unicidade de sub-ações calibradas

Nesta seção vamos mostrar algumas propriedades dinâmicas do problema de Aubry-Mather discreto (veja [Gom]) com o objetivo de mostrar unicidade do funcional de desvio I_h obtido anteriormente.

Fixado $h > 0$, lembre que

$$\mathcal{M}_h = \left\{ \mu \in \mathcal{M} : \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N} \varphi(x + hv) - \varphi(x) d\mu = 0, \forall \varphi \in C(\mathbb{T}^N) \right\} \quad (1.33)$$

e que

$$\bar{H}_h = \min_{\mathcal{M}_h} \left\{ \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N} L(x, v) d\mu(x, v) \right\}$$

Uma medida μ_h que atinge este ínfimo é chamada de medida de Mather com tempo discreto para L .

Pode-se mostrar, através do teorema de dualidade de Fenchel-Rockafellar, que

$$\inf_{\psi \in C(\mathbb{T}^N)} \sup_{(x, v) \in \mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N} - [hL(x, v) + \psi(x + hv) - \psi(x)] = -h\bar{H}_h. \quad (1.34)$$

Veja [Gom] para uma prova deste fato.

Note que \bar{H}_h (a menos de um sinal) é o análogo discreto do valor crítico de Mañé.

Definição 1.17. Uma função contínua $u : \mathbb{T}^N \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada

(a) uma sub-ação para frente se

$$u(x) \leq u(x + hv) + hL(x, v) - h\bar{H}_h \quad \forall (x, v) \in \mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N,$$

(b) uma sub-ação para trás se

$$u(x) \leq u(x - hv) + hL(x - hv, v) - h\bar{H}_h \quad \forall (x, v) \in \mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N.$$

Definição 1.18. Fixado $h > 0$, uma função contínua $u : \mathbb{T}^N \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada sub-ação calibrada para frente (chamaremos de sub-ação calibrada) se, para qualquer x temos que

$$u(x) = \inf_{v \in \mathbb{R}^N} \{u(x + hv) + hL(x, v) - h\bar{H}_h\}$$

Para cada x este ínfimo é atingido por algum (e pode ser mais de um) $v(x)$.

Da equação (1.34) concluímos que existem sub-ações calibradas.

Definição 1.19. Fixado $h > 0$, uma função contínua $u : \mathbb{T}^N \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada sub-ação calibrada para trás se, para qualquer x temos que

$$u(x) = \inf_{v \in \mathbb{R}^N} \{u(x - hv) + hL(x - hv, v) - h\bar{H}_h\}$$

Pelo teorema 1.15, qualquer limite de uma subsequência $\lim_{\epsilon_i \rightarrow 0} \phi_{\epsilon_i, h} = \phi_h$, é uma sub-ação calibrada para L . Em geral não é verdade que ϕ_h seja única (a menos de soma por constante). No teorema 1.26 vamos mostrar uma condição para tal unicidade.

Propriedades similares são válidas para o problema "para trás", ou seja, se $\lim_{\epsilon_i \rightarrow 0} \bar{\phi}_{\epsilon_i, h} = \bar{\phi}_h$, então $\bar{\phi}_h$ é uma sub-ação calibrada, etc...

Proposição 1.12. Seja u uma sub-ação calibrada para o Lagrangiano L . Seja x ponto de diferenciabilidade de u então

$$\nabla u(x) = hL_x(x, v(x)) - L_v(x, v(x)).$$

Este teorema pode ser demonstrado aplicando o mesmo argumento usado na prova do teorema 4.1 de [Gom].

Hipótese: Vamos supor também que o Lagrangiano é tal que L_x tem constante de Lipschitz limitada em v . Pois neste caso a equação $p = hL_x(x, v(x)) - L_v(x, v(x))$ tem uma única solução diferenciável, quando h é suficientemente pequeno. Portanto pelo mesmo argumento usado na prova do teorema 5.5 de [Gom] obtemos que qualquer medida minimizante μ_h está suportada em um gráfico.

Nas próximas definições fixaremos um valor de $h > 0$, suficientemente pequeno tal que a propriedade de gráfico seja satisfeita.

Em analogia às curvas ligando dois pontos no caso contínuo vamos definir caminhos discretos.

Definição 1.20. Dados $k \in \mathbb{N}$, $x, z \in \mathbb{T}^N$ um caminho de tamanho k ligando x a z é uma sequência ordenada de pontos

$$(x_0, x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^N \times \dots \times \mathbb{R}^N$$

satisfazendo $x_0 = x$, $x_k = z$.

Vamos denotar por $\mathcal{P}_k^h(x, z) = \mathcal{P}_k^h(x, z)$ o conjunto dos caminhos de tamanho k .

Para cada x_j vamos associar um $v_j \in \mathbb{R}^N$, dado por

$$v_j = \frac{x_{j+1} - x_j}{h}, \quad \text{for } 0 \leq j < k$$

Definição 1.21. Fixado (x_0, \dots, x_k) definimos a ação deste caminho como:

$$A_{L-\bar{H}_h}(x_0, \dots, x_k) := h \sum_{i=0}^{k-1} (L - \bar{H}_h)(x_i, v_i).$$

Observação: Seja $(x_0, \dots, x_k) \in \mathcal{P}_k(x + s, z)$ um caminho, onde $x, z \in \mathbb{R}^N$ e $s \in \mathbb{Z}^N$. Como o Lagrangiano é \mathbb{Z}^N -periódico temos que o caminho $(\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_k) \in \mathcal{P}_k(x, z - s)$ dado por $\tilde{x}_i = x_i - s$ é tal que $A_{L-\bar{H}_h}(x_0, \dots, x_k) = A_{L-\bar{H}_h}(\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_k)$.

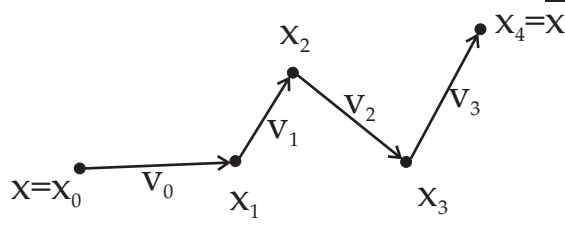


Fig. 1.3: Representação gráfica de um caminho em $\mathcal{P}_4(x, \bar{x})$, com $h = 1$.

Definição 1.22. Um ponto $x \in \mathbb{T}^N$ é chamado não errante com respeito a L se, dado $\epsilon > 0$ existem $k \geq 1$, $s_k \in \mathbb{Z}^N$ e um caminho $(x_0, \dots, x_k) \in \mathcal{P}_k(x + s_k, x)$ tal que

$$|A_{L-\bar{H}_h}(x_0, \dots, x_k)| < \epsilon.$$

Vamos denotar por $\Omega_h(L)$ o conjunto dos pontos não-errantes para L .

Observação: $\Omega_h(L)$ é um conjunto fechado. De fato, seja $x_k \in \Omega_h(L)$ tal que $x_k \rightarrow x$. Para cada x_k e $\epsilon = \frac{1}{n}$ existem j_n , s_{j_n} e $(x_0, \dots, x_{j_n}) \in \mathcal{P}_{j_n}(x_k + s_{j_n}, x_k)$ tais que $|A_{L-\bar{H}_h}(x_0, x_1, \dots, x_{j_n})| \leq \frac{1}{n}$. Portanto o caminho $(x + s_{j_n}, x_1, \dots, x_{j_n-1}, x)$ também tem ação pequena, daí quando $n \rightarrow \infty$ obtemos que $x \in \Omega_h(L)$.

As provas dos resultados a seguir são similares as que aparecem em [GL] onde uma versão discreta da teoria de Aubry-Mather para dinâmica simbólica é considerada.

Proposição 1.13. Seja μ_h uma medida de Mather discreta, então

$$\pi_1(\text{supp}(\mu_h)) \subset \Omega_h(L).$$

Demonstração : Pela hipótese que fizemos para o Lagrangiano (e veja teorema 5.5 de [Gom]) sabemos que μ_h está suportada em um gráfico Lipschitz, portanto podemos definir $\psi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$, tal que $\psi(x) = x + hv(x)$. E definimos $\bar{\psi} : \mathbb{T}^N \rightarrow \mathbb{T}^N$ por $\bar{\psi}(x) = \psi(x) \text{ mod } \mathbb{Z}^N$. Afirmamos que $\mu \circ \pi_1^{-1}$ é $\bar{\psi}$ -invariante.

De fato, por μ_h ser holonômica e pela definição de ψ temos que para toda $\phi : \mathbb{T}^N \rightarrow \mathbb{R}$ vale

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^N} \phi \circ \psi(x) d(\mu_h \circ \pi_1^{-1}) &= \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N} \phi(x + hv(x) \text{ mod } \mathbb{Z}^N) d\mu_h = \\ &= \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N} \phi(x) d\mu_h = \int_{\mathbb{T}^N} \phi(x) d(\mu_h \circ \pi_1^{-1}) \end{aligned}$$

Podemos agora mostrar que $\pi_1(\text{supp}(\mu_h)) \subset \Omega_h(L)$, seja $(x, v) \in \text{supp}(\mu_h)$ e B uma bola aberta centrada em x , então $\mu \circ \pi_1^{-1}(B) > 0$, portanto pelo teorema de recorrência de Poincaré, existe $x_0 \in B \cap \text{dom}(\nabla u)$ tal que $\bar{\psi}^j(x_0)$ retorna infinitas vezes a B , i.e., existe $s_j \in \mathbb{Z}^N$ tal que $\psi^j(x_0) - s_j \in B$. Seja u é uma sub-ação calibrada para L , podemos escrever $u(x_0) - u(x_j) = h \sum_{i=0}^{j-1} (L - \bar{H}_h)(x_i, v_i)$, onde $x_i := \psi^i(x_0)$. Dados $\delta > 0$ e $x_j - s_j \in B$ podemos construir o seguinte caminho $(\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_j) = (x, x_1, \dots, x_{j-1}, x + s_j)$ tal que

$$A_{L-\bar{H}_h}(\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_j) \leq \delta.$$

De fato,

$$\begin{aligned} & A_{L-\overline{H}_h}(x_0, \dots, x_j) = \\ & = u(x_0) - u(x_j) + h[L(x, \frac{x_1 - x}{h}) - L(x_0, v_0) + L(x_{j-1}, \frac{x + s_j - x_{j-1}}{h}) - L(x_{j-1}, v_{j-1})] \leq \delta, \end{aligned}$$

se B é suficientemente pequeno. Portanto $x \in \Omega_h(L)$. □

Definição 1.23. Definimos o potencial de Mañé como sendo a função $S_h : \mathbb{T}^N \times \mathbb{T}^N \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$S_h(x, z) = \inf_k S_h^k(x, z),$$

E a barreira de Peierls como sendo a função $\mathbf{h}_h : \mathbb{T}^N \times \mathbb{T}^N \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ definida por

$$\mathbf{h}_h(x, z) = \liminf_{k \rightarrow \infty} S_h^k(x, z),$$

onde

$$S_h^k(x, z) = \inf_{s \in \mathbb{Z}^N} \inf_{(x_0, \dots, x_k) \in \mathcal{P}_k(x+s, z)} A_{L-\overline{H}_h}(x_0, \dots, x_k)$$

As funções S_h e \mathbf{h}_h tem as seguintes propriedades:

- (i) $S_h(x, y) \leq S_h(x, z) + S_h(z, y) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{T}^N$,
- (ii) $\mathbf{h}_h(x, y) \leq \mathbf{h}_h(x, z) + \mathbf{h}_h(z, y) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{T}^N$.
- (iii) $\mathbf{h}_h(x, y) \leq S_h(x, z) + \mathbf{h}_h(z, y) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{T}^N$.

Observação: É claro que $S_h(x, z) \leq \mathbf{h}_h(x, z)$. Segue de (i) que $S_h(x, x) \geq 0$, logo se $\mathbf{h}_h(x, x) = 0$ temos que $S_h(x, x) = 0$. Por outro lado se $S_h(x, x) = 0$ então existe sequência de caminhos com $S_h^k(x + s_k, x)$ tendendo a 0, assim, pela observação após a definição 1.21, temos que $S_h^{nk}(x + ns_k, x) = nS_h^k(x + s_k, x)$ que também tende a 0, daí $\mathbf{h}_h(x, x) = 0$, logo $S_h(x, x) = 0 \iff \mathbf{h}_h(x, x) = 0$.

Portanto da definição conjunto não errante e da observação obtemos que

$$\Omega_h(L) = \{x \in \mathbb{T}^N : \mathbf{h}_h(x, x) = S_h(x, x) = 0\}$$

Cabe aqui ressaltar a diferença entre o problema de Mather contínuo onde o potencial do Mañé S (definido de maneira similar, veja [Fa] ou [CI]) é tal que $S(x, x) = 0$ para todo x . Isto acontece porque no caso do tempo contínuo podemos considerar trajetórias com tempo tão pequeno quanto quisermos.

Proposição 1.14. As funções $S_h(\cdot, z)$ e $\mathbf{h}_h(\cdot, z)$ são sub-ações para frente.

Demonstração : Segue de (i) que

$$S_h(x, y) - S_h(x + hv, y) \leq S(x, x + hv) \leq h(L(x, v) - \overline{H}_h).$$

E por (iii)

$$\mathbf{h}_h(x, y) - \mathbf{h}_h(x + hv, y) \leq S(x, x + hv) \leq h(L(x, v) - \overline{H}_h).$$

□

Observação: Se $z \in \Omega_h(L)$ então $S_h(\cdot, z) = \mathbf{h}_h(\cdot, z)$.

De fato, dados $\epsilon > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ grande, seja $(x_0, \dots, x_k) \in \mathcal{P}_k(x + s, z)$, $s \in \mathbb{Z}^N$ tal que

$$|A_{L-\overline{H}_h}(x_0, \dots, x_k) - S_h(x, z)| < \frac{\epsilon}{2}$$

Como $z \in \Omega_h(L)$ existe caminho $(\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_n) \in \mathcal{P}_n(z, z + t)$, $t \in \mathbb{Z}^N$ com $n > n_0$ tal que $|A_{L-\overline{H}_h}(\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_n)| \leq \frac{\epsilon}{2}$, daí concatenando estes dois caminhos obtemos um novo caminho $(\hat{x}_0, \dots, \hat{x}_{k+n}) \in \mathcal{P}_{k+n}(x + s, z + t)$ tal que

$$|A_{L-\overline{H}_h}(\hat{x}_0, \dots, \hat{x}_{k+n}) - S_h(x, z)| \leq \epsilon.$$

Portanto o ínfimo na definição de $S_h(x, z)$ é atingido para k grande, logo $S_h(x, z) = \mathbf{h}_h(x, z)$.

Para provarmos que $\mathbf{h}_h(\cdot, z)$ é uma sub-ação calibrada precisamos do seguinte lema.

Lema 1.4. Seja $(x_0, \dots, x_k) \in \mathcal{P}_k(x + s, z)$ um caminho tal que $A_{L-\overline{H}_h}(x_0, \dots, x_k) = S_h^k(x, z)$. Então existe uma constante K tal que $|v_i| < K$ para todo $0 \leq i < k$. Ainda, K é independente de $x, z \in \mathbb{T}^N$.

Demonstração : Seja $R = 2 \max_{x, y \in \mathbb{T}^N} d(x, y)$, definimos $A(R) = \max\{L(x, v) : |v| \leq R\}$.

Como L é superlinear existe uma constante K tal que se $|v| \geq K$ então $L(x, v) > A(R)$.

Vamos mostrar o lema por indução. Primeiro vamos provar que $|v_0| < K$: suponha por absurdo que $|x_1 - x_0| > K$. Podemos escolher $s_0 \in \mathbb{Z}^N$ tal que $|x_0 + s_0 - x_1| < R$, daí o caminho $(\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_k) = (x_0 + s_0, x_1, \dots, x_k)$ é tal que $A_{L-\overline{H}_h}(\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_k) < A_{L-\overline{H}_h}(x_0, \dots, x_k) = S_h^k(x, z)$, o que é um absurdo. Suponhamos que tenhamos provado que $|v_i| < K$ para todo $0 \leq i < j$ e suponhamos por absurdo que $|v_j| > K$, escolhamos $s_{j-1} \in \mathbb{Z}^N$ tal que $|x_{j-1} + s_{j-1} - x_j| < R$, então o caminho $(\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_k) = (x_0 + s_{j-1}, \dots, x_{j-1} + s_{j-1}, x_j, \dots, x_k)$ é tal que $A_{L-\overline{H}_h}(\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_k) < A_{L-\overline{H}_h}(x_0, \dots, x_k)$, o que não pode acontecer. Portanto $|v_i| < K$, para todo $0 \leq i \leq j$. \square

Proposição 1.15. Fixado $z \in \mathbb{T}^N$ a função $u(\cdot) = \mathbf{h}_h(\cdot, z)$ é uma sub-ação calibrada.

Demonstração : Fixado $x \in \mathbb{T}^N$, queremos encontrar $v \in \mathbb{R}^N$ tal que

$$\mathbf{h}_h(x, z) - \mathbf{h}_h(x + hv, z) = hL(x, v) - h\overline{H}_h.$$

Pela definição da barreira de Peierls existe sequência $j_n \rightarrow \infty$ e uma sequência de caminhos minimais $(x_0^n, \dots, x_{j_n}^n) \in \mathcal{P}_{j_n}(x + s_n, z)$, $s_n \in \mathbb{Z}^N$, tais que

$$A_{L-\overline{H}_h}(x_0^n, \dots, x_{j_n}^n) = S_h^{j_n}(x, z) \rightarrow \mathbf{h}_h(x, z).$$

Como, pelo lema 1.4, $|v_0^n| = \left| \frac{x + s_n - x_1^n}{h} \right| \leq K$, a sequência $\{x_1^n - s_n\}$ tem um ponto de acumulação, digamos x_1 , tomando uma subsequência se necessário, podemos supor que $x_1 = \lim_n (x_1^n - s_n)$ e definimos $v = \lim_n \left(\frac{x_1^n - x - s_n}{h} \right)$. Portanto

$$\mathbf{h}_h(x_1, z) \leq S_h^{j_n-1}(x_1, z) \leq A_{L-\overline{H}_h}(x_1 + s_n, x_2^n, \dots, x_{j_n}^n).$$

Daí

$$hL(x, v) - h\overline{H}_h + \mathbf{h}_h(x_1, z) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} [hL(x + s_n, \frac{x_1^n - x - s_n}{h}) - h\overline{H}_h +$$

$$\begin{aligned}
& +hL(x_1, \frac{x_2^n - x_1 - s_n}{h}) - hL(x_1^n, v_1^n) + A_{L-\overline{H}_h}(x_1^n, \dots, x_{j_n}^n)] \\
& = \lim_{n \rightarrow \infty} A_{L-\overline{H}_h}(x_0^n, \dots, x_{j_n}^n) = \mathbf{h}_h(x, z).
\end{aligned}$$

Então

$$hL(x, v) - h\overline{H}_h \leq \mathbf{h}_h(x, z) - \mathbf{h}_h(x + hv, z).$$

Como $\mathbf{h}_h(\cdot, z)$ é uma sub-ação temos a outra desigualdade. Logo

$$hL(x, v) - h\overline{H}_h = \mathbf{h}_h(x, z) - \mathbf{h}_h(x + hv, z).$$

□

Teorema 1.25. Se u é uma sub-ação calibrada, então para qualquer x temos que

$$u(x) = \inf_{p \in \Omega(L)} \{u(p) + \mathbf{h}_h(x, p)\}.$$

Demonstração : Primeiro vamos mostrar que

$$u(x) \leq \inf_{p \in \Omega_h(L)} \{u(p) + \mathbf{h}_h(x, p)\} :$$

Sejam x, z dois pontos em \mathbb{T}^N , e $(x_0, x_1, \dots, x_k) \in \mathcal{P}_k(x + s, z)$, $s \in \mathbb{Z}^N$.

Pela definição de sub-ação temos que

$$u(x_j) \leq u(x_{j+1}) + hL(x_j, v_j) - h\overline{H}_h \quad \text{for } 0 \leq j < k.$$

Portanto

$$u(x_0) \leq u(x_k) + h \sum_{j=0}^{k-1} (L - \overline{H}_h)(x_j, v_j)$$

Então

$$u(x) \leq u(z) + \mathbf{h}_h(x, z)$$

Logo

$$u(x) \leq \inf_{p \in \Omega_h(L)} \{u(p) + \mathbf{h}_h(x, p)\}.$$

Agora vamos mostrar que

$$u(x) \geq \inf_{p \in \Omega_h(L)} \{u(p) + \mathbf{h}_h(x, p)\} :$$

Por hipótese temos que

$$u(x) = \inf_{v \in \mathbb{R}^N} \{u(x + hv) + hL(x, v) - h\overline{H}_h\}$$

Fixado $x \in \mathbb{T}^N$, vamos denotar por $x_0 = x$. Como u é uma sub-ação calibrada existe v_0 tal que

$$u(x_0) = u(x_0 + hv_0) + hL(x_0, v_0) - h\overline{H}_h.$$

Seja $x_1 := x_0 + hv_0$, assim podemos construir a seguinte sequência $(x_0, x_1, \dots, x_j, \dots)$ tal que para cada $j > 0$, $x_{j+1} = x_j + hv_j$, e $u(x_j) = u(x_{j+1}) + hL(x_j, v_j) - h\overline{H}_h$. Projetamos tais pontos em \mathbb{T}^N , i.e., escolhemos $s_j \in \mathbb{Z}^N$ tais que $\bar{x}_j = x_j + s_j \in \mathbb{T}^N$.

Seja $p \in \mathbb{T}^n$ um ponto de acumulação da sequência $\{\tilde{x}_j\}$, afirmamos que $p \in \Omega_h(L)$. De fato, suponha que $\tilde{x}_{j_m} \rightarrow p$ podemos construir, para $n > m$, o seguinte caminho: $(\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_{j_n-j_m}) =: (p - s_{j_m}, x_{j_m+1}, \dots, x_{j_n-1}, p - s_{j_n})$, daí

$$A_{L-\overline{H}_h}(\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_{j_n-j_m}) = A_{L-\overline{H}_h}(x_{j_m}, \dots, x_{j_n}) + h(L(p - s_{j_m}, \frac{x_{j_m+1} - p + s_{j_m}}{h}) - L(x_{j_m}, v_{j_m}) + L(x_{j_n-1}, \frac{p - s_{j_n} - x_{j_n-1}}{h}) - L(x_{j_n-1}, v_{j_n-1})).$$

Como $A_{L-\overline{H}_h}(x_{j_m}, \dots, x_{j_n}) = u(x_{j_m}) - u(x_{j_n})$, dado $\epsilon > 0$, se m é suficientemente grande, então

$$|A_{L-\overline{H}_h}(\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_{j_n-j_m})| < \epsilon,$$

i.e., $p \in \Omega_h(L)$. Para este p vamos mostrar que

$$S_h(x, p) \leq u(x) - u(p).$$

De fato, consideramos o seguinte caminho: $(\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_{j_m}) = (x_0, \dots, x_{j_m-1}, p - s_{j_m})$, então

$$\begin{aligned} A_{L-\overline{H}_h}(\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_{j_m}) - u(x) + u(p) &= \\ &= u(p) - u(x_{j_m}) - hL(x_{j_m-1}, v_{j_m-1}) + hL(x_{j_m-1}, \frac{p - s_{j_m} - x_{j_m-1}}{h}). \end{aligned}$$

Logo, dado $k > 0$ existe $m_k \in \mathbb{N}$ tal que se $m > m_k$ então

$$A_{L-\overline{H}_h}(\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_{j_m}) < u(x) - u(p) + 1/k.$$

Finalmente, quando $k \rightarrow \infty$ obtemos que

$$S_h(x, p) \leq u(x) - u(p),$$

e

$$u(x) \geq \inf_{p \in \Omega_h(L)} \{u(p) + S_h(x, p)\}.$$

□

Vamos mostrar agora sob hipótese do Lagrangiano ser genérico obteremos que as subações calibradas são únicas a menos de constantes.

Definição 1.24. Seja \mathcal{M}_0^h o conjunto das medidas de Mather discretas, i.e., medidas tais que $\int L d\mu_h = \overline{H}_h$ e $\int \varphi(x + hv) - \varphi(x) d\mu_h = 0 \quad \forall \varphi \in C(\mathbb{T}^N)$.

Fixado h definimos a propriedade P_h : O conjunto $\mathcal{M}_0^h(L) = \{\mu_h\}$ é unitário e $\pi_1(\text{supp}(\mu_h)) = \Omega_h(L + \psi)$.

Proposição 1.16. $\mathcal{O}^h := \{\psi \in C^\infty(\mathbb{T}^N, \mathbb{R}) : \mathcal{M}_0^h(L + \psi) = \{\mu_h\} \text{ e } \pi_1(\text{supp}(\mu_h)) = \Omega_h(L + \psi)\}$ é uma interseção de conjuntos abertos e densos em $\psi \in C^\infty(\mathbb{T}^N, \mathbb{R})$.

Demonstração : A prova de que $\mathcal{O}_1^h := \{\psi \in C^\infty(\mathbb{T}^N, \mathbb{R}) : \mathcal{M}_0^h(L + \psi) = \{\mu_h\}\}$ é muito semelhante a demonstração do teorema 1 de [BC].

Seja $\psi_0 \in \mathcal{O}_1^h$, e $\psi_1 \in C^\infty(\mathbb{T}^N, \mathbb{R})$ tais que $\psi_1 \geq 0$ e $\{x : \psi_1(x) = 0\} = \pi_1(\text{supp}(\mu_h))$. Então $\pi_1(\text{supp}(\mu_h)) \subset \Omega_h(L + \psi_0 + \psi_1)$.

Afirmação: Se $x_0 \notin \pi_1(\text{supp}(\mu_h))$ então $x_0 \notin \Omega_h(L + \psi_0 + \psi_1)$. De fato, $\psi_1(x_0) > 0$, e

$$\mathbf{h}_h^{(L+\psi_0+\psi_1)}(x_0, x_0) = \liminf_{k \rightarrow \infty} \left(\inf_{s \in \mathbb{Z}^N} \inf_{\mathcal{P}_k(x_0+s, x_0)} \sum_{i=0}^{k-1} (L + \psi_0 + \psi_1 - \overline{H}_h)(x_i, v_i) \right) \geq$$

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \left(\inf_{s \in \mathbb{Z}^N} \inf_{\mathcal{P}_k(x_0+s, x_0)} \sum_{i=0}^{k-1} (L + \psi_0 + -\overline{H}_h)(x_i, v_i) + \psi_1(x_0) \right) = \mathbf{h}_h^{(L+\psi_0)}(x_0, x_0) + \psi_1(x_0).$$

Daí $\pi_1(\text{supp}(\mu_h)) = \Omega_h(L + \psi_0 + \psi_1)$. \square

Por abuso de notação dizemos que o Lagrangiano é genérico já que existe um conjunto residual de funções $\psi \in C^\infty(\mathbb{T}^N, \mathbb{R})$ tais que $L + \psi$ tem a propriedade P_h .

Observação: Note que a definição do Lagrangiano ser genérico depende da propriedade P que estamos considerando. Como vemos acima temos que considerar para cada h uma propriedade P_h diferente. Podemos escolher uma sequência de $h_n \rightarrow 0$ e considerar propriedades P_n , onde para cada P_n existe um conjunto genérico $\mathcal{O}^n \in C^\infty(\mathbb{T}^N, \mathbb{R})$ tal que P_n vale.

Definindo por

$$\mathcal{O} = \bigcap_{n \geq 0} \mathcal{O}^n$$

Fica claro que se $\psi \in \mathcal{O}$ então $L + \psi$ tem as propriedades P_n para todo n .

Para ver que a função ϕ_h definida acima (limite de uma subsequência) é única (a menos de soma por constante), vamos precisar do seguinte resultado.

Proposição 1.17. Existe uma correspondência bijetiva entre o conjunto das funções $f \in C(\Omega_h(L))$ satisfazendo $f(x) - f(z) \leq S_h(x, z)$, para todos os pontos x, z em $\Omega_h(L)$, e o conjunto das sub-ações calibradas .

Demonstração : Vamos definir o mapa por

$$f \mapsto u_f(x) := \inf_p \{f(p) + S_h(x, p)\}$$

Vejam que u_f é uma sub-ação calibrada: Primeiro vejamos que u_f é uma sub-ação: sejam (x, v) e $\epsilon > 0$ então existe $p \in \Omega_h(L)$ tal que

$$f(p) + S_h(x + hv, p) \leq u_f(x + hv) + \epsilon$$

então

$$u_f(x) - u_f(x + hv) \leq S_h(x, p) - S_h(x + hv, p) - \epsilon \leq h(L(x, v) - \overline{H}_h) - \epsilon,$$

fazendo $\epsilon \rightarrow 0$ obtemos o que queríamos. Mostremos agora que u_f é calibrada. Seja $x \in \mathbb{T}^N$, dado $\epsilon = 1/j$ podemos encontrar $p_j \in \Omega_h$ tal que

$$f(p_j) + S_h(x, p_j) \leq u_f(x) + 1/j$$

para cada j escolhemos v_j tal que

$$S_h(x, p_j) = S_h(x + v_j, p_j) + hL(x, v_j) - h\bar{H}_h.$$

Note que pela prova da proposição 1.15, temos que $|v_j| < K$, portanto seja v um ponto de acumulação de $\{v_j\}$. Como

$$u_f(x + hv_j) \leq f(p_j) + S_h(x + hv_j, p_j)$$

temos que

$$u_f(x + hv_j) + hL(x, v_j) - h\bar{H}_h \leq f(p_j) + S_h(x, p_j) \leq u_f(p_j) + 1/j$$

fazendo $j \rightarrow \infty$ obtemos que

$$u_f(x + hv) + hL(x, v) - h\bar{H}_h \leq u_f(x)$$

como u_f é sub-ação vale a igualdade.

Injetividade: Seja $x \in \Omega_h(L)$, então $S_h(x, x) = 0$, daí

$$u_f(x) = \inf_p \{f(p) + S_h(x, p)\} \leq f(x) \leq f(p) + S_h(x, p) \quad \forall p \in \Omega_h(L)$$

Portanto $u_f(x) = f(x)$ para $x \in \Omega_h(L)$. Então $f \neq \tilde{f}$ implica $u_f \neq u_{\tilde{f}}$.

Sobrejetividade: seja u sub-ação calibrada, defina $f = u|_{\Omega_h(L)}$, f satisfaz $f(x) - f(z) \leq S_h(x, z)$. Pelo teorema 1.25 (lembre que se $p \in \Omega_h(L)$ então $S_h(\cdot, p) = \mathbf{h}_h(\cdot, p)$),

$$u_f(x) = \inf_p \{u(p) + S_h(x, p)\} = u(x)$$

□

Proposição 1.18. Se $\mu_h \circ \pi_1^{-1}$ é ergódica, sejam u, u' duas sub-ações calibradas para L , então $u - u'$ é constante em $\pi_1(\text{supp}(\mu_h))$.

Demonstração : Foi mostrado em [Gom] que os pontos do suporte da medida μ_h são da forma $(x, v) = (x_0 + hv_0, v)$ com (x_0, v_0) no suporte de μ_h . Seja $x \in \pi_1 \text{supp}(\mu_h)$, então $x = x_0 + hv_0$ daí

$$u(x_0) - u(x_0 + hv_0) = hL(x_0, v_0) - h\bar{H}_h = u'(x_0) - u'(x_0 + hv_0)$$

(pois para toda sub-ação calibrada vale que $u(x + hv) - u(x) + L(x, v) = -h\bar{H}_h$ nos pontos $(x, v) \in \text{supp}(\mu_h)$, veja [Gom]). Portanto $u - u' = (u - u') \circ \psi$ em $\pi_1(\text{supp}(\mu_h))$ e como $\mu_h \circ \pi_1^{-1}$ é ergódica segue que $u - u'$ é constante em $\pi_1(\text{supp}(\mu_h))$. □

Lema 1.5. Suponha L genérico e seja μ_h a única medida minimizante, então a medida $\mu_h \circ \pi_1^{-1}$ é unicamente ergódica para a aplicação ψ (definida na demonstração da proposição 1.13).

Demonstração : Já foi provado na proposição 1.13 que $\mu_h \circ \pi_1^{-1}$ é $\bar{\psi}$ -invariante. Vamos mostrar que $\bar{\psi}$ é unicamente ergódica. Seja η uma medida nos Borelianos de $\Omega_h(L) = \pi_1(\text{supp}(\mu_h))$, invariante pela $\bar{\psi} : \Omega_h(L) \rightarrow \Omega_h(L)$. Definimos, em cada B Boreliano de

$\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N$, $\mu(B) = \eta(\pi_1(B \cap \text{supp}(\mu_h)))$, então μ é uma probabilidade em $\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N$, tal que

(i) $\text{supp}(\mu) \subset \text{supp}(\mu_h)$,

(ii) $\mu \circ \pi_1^{-1} = \eta$,

(iii) $\mu \in \mathcal{M}_h$.

(i) e (ii) são facilmente verificadas. Para provarmos (iii), seja $\varphi \in C(\mathbb{T}^N)$. Temos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N} \varphi(x + hv) d\mu(x, v) &= \int_{\mathbb{T}^N} \varphi \circ \bar{\psi}(x) d\eta(x) = \\ &= \int_{\mathbb{T}^N} \varphi(x) d\eta(x) = \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N} \varphi(x) d\mu(x, v). \end{aligned}$$

Seja u uma sub-ação calibrada, pelo teorema 5.4 de [Gom] para todo pontos $(x, v) \in \text{supp}(\mu_h)$ vale que

$$hL(x, v) = u(x) - u(x + hv) + h\bar{H}_h$$

Por (i) e (iii) temos que

$$\int hL(x, v) d\mu(x, v) = \int (u(x) - u(x + hv) + h\bar{H}_h) d\mu(x, v) = h\bar{H}_h.$$

Portanto μ é uma medida minimizante, mas como estamos supondo que a medida minimizante é única segue que $\mu = \mu_h$, portanto $\eta = \mu_h \circ \pi_1^{-1}$, o que mostra que só existe uma medida invariante para $\bar{\psi}$, logo esta é unicamente ergódica. \square

Teorema 1.26. Se L é genérico no sentido de Mañé, então conjunto das sub-ações calibradas é unitário (a menos de soma por constantes).

Demonstração : Como estamos supondo que o Lagrangiano é genérico, $\pi_1(\text{supp}(\mu_h)) = \Omega_h(L)$. Sejam $f, f' : \Omega_h(L) \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas satisfazendo $f(x) - f(z) \leq S_h(x, z)$, $f'(x) - f'(z) \leq S_h(x, z)$. Assim como na proposição 1.17, construímos $u_f, u_{f'}$ sub-ações calibradas, tais que $f - f' = u_f - u_{f'}$ em $\Omega_h(L)$, agora pela proposição 1.18 $u_f - u_{f'}$ é constante em $\pi_1(\text{supp}(\mu_h)) = \Omega_h(L)$. Logo o conjunto $\{f \in C(\Omega_h(L)) : f(x) - f(z) \leq S_h(x, z)\}$ é unitário, pela proposição 1.17 concluímos que o conjunto das sub-ações calibradas é unitário. \square

E portanto obtivemos a unicidade da ϕ_h .

A seguir vamos mostrar a unicidade de $\bar{\phi}_h$.

Seja $\bar{L}(x, v) = L(x + hv, -v)$, e lembre que \bar{u} é sub-ação calibrada para trás se satisfaz

$$\bar{u}(x) = \inf_{v \in \mathbb{R}^N} \{\bar{u}(x - hv) + hL(x - hv, v) - h\bar{H}_h\}$$

o que é equivalente a

$$\bar{u}(x) = \inf_{v \in \mathbb{R}^N} \{\bar{u}(x + hv) + hL(x + hv, -v) - h\bar{H}_h\}$$

e portanto

$$\bar{u}(x) = \inf_{v \in \mathbb{R}^N} \{ \bar{u}(x + hv) + h\bar{L}(x, v) - h\bar{H}_h \}$$

i.e., \bar{u} é sub-ação calibrada para frente para \bar{L} .

Note que

$$\begin{aligned} \bar{S}_h(x, z) &= \inf_{s \in \mathbb{Z}^N} \inf_k \inf_{\mathcal{P}_k(x+s, z)} \left[h \sum_{j=0}^{k-1} (\bar{L} - \bar{H}_h)(x_j, v_j) \right] = \\ &= \inf_{s \in \mathbb{Z}^N} \inf_k \inf_{\mathcal{P}_k(x+s, z)} \left[h \sum_{j=0}^{k-1} (L - \bar{H}_h)(x_j + hv_j, -v_j) \right] \end{aligned}$$

Seja $(\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_k)$ um caminho tal que $\bar{x}_0 = x + s, \bar{x}_k = z$, definimos $(x_0, \dots, x_k) := (\bar{x}_k, \dots, \bar{x}_0)$. Um cálculo simples mostra que

$$\sum_{i=0}^k (L - \bar{H}_h)(\bar{x}_i + h\bar{v}_i, -\bar{v}_i) = \sum_{i=0}^k (L - \bar{H}_h)(x_i, v_i)$$

Logo fica claro que $S_h(z, x) = \bar{S}_h(x, z)$ e portanto

$$\Omega_h(\bar{L}) = \Omega_h(L) = \{x \in \mathbb{T}^N : S_h(x, x) = \bar{S}_h(x, x) = 0\}$$

Aplicando a proposição 1.17 para \bar{L} :

Existe uma correspondência bijetiva entre o conjunto das funções $f \in C(\Omega_h(L))$ satisfazendo $f(x) - f(z) \leq \bar{S}_h(x, z) = S_h(x, z)$, para todos os pontos x, z em $\Omega_h(L)$, e o conjunto das sub-ações calibradas.

Da mesma forma que definimos $\mu_{\epsilon, h}$, podemos definir $\bar{\mu}_{\epsilon, h}$ a medida associada ao Lagrangiano $\bar{L}(x, v) = L(x + hv, -v)$. Então

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_{\epsilon, h}(x, v) &= \theta_{\epsilon, h}(x) e^{-\frac{h\bar{L}(x, v) + \bar{\phi}_{\epsilon, h}(x + hv) - \bar{\phi}_{\epsilon, h}(x) - \lambda_{\epsilon, h}}{\epsilon h}} = e^{-\frac{\phi_{\epsilon, h}(x) + \bar{\phi}_{\epsilon, h}(x + hv)}{\epsilon h}} e^{-\frac{h\bar{L}(x, v) - \lambda_{\epsilon, h}}{\epsilon h}} \\ &= e^{-\frac{\phi_{\epsilon, h}(x) + \bar{\phi}_{\epsilon, h}(x + hv)}{\epsilon h}} e^{-\frac{hL(x + hv, -v) - \lambda_{\epsilon, h}}{\epsilon h}} \end{aligned}$$

Portanto $\bar{\mu}_{\epsilon, h}(x, v) = \mu_{\epsilon, h}(x + hv, -v)$.

Também podemos definir $\bar{\mu}_h$ por $\bar{\mu}_{\epsilon_n, h} \rightarrow \bar{\mu}_h$ para alguma subsequência $\epsilon_n \rightarrow 0$. Então $(x, v) \in \text{supp}(\bar{\mu}_h) \iff (x + hv, -v) \in \text{supp}(\mu_h)$.

Logo só existe uma $\bar{\mu}_h$, e portanto podemos aplicar a proposição 1.18, segue do teorema 1.26 que $\bar{\phi}_h$ é única.

Isto nos garante que o funcional de desvio I_h está bem definido.

1.6.2 Existência de uma sub-ação separante

Nesta última parte estamos interessados em analisar o análogo discreto de [FS], i.e., a existência de uma sub-ação separante, como em [GLT]. Os resultados a seguir permitem um melhor entendimento do problema de Aubry-Mather discreto.

Para tanto teremos que considerar a definição do Hamiltoniano como em mecânica clássica:

Definição 1.25. Seja $L(x, v) : \mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, definimos

$$H(p, x) = \max_v \{p \cdot v - L(x, v)\}$$

A equação

$$\max_v \left\{ \frac{u(x + hv) - u(x)}{h} - L(x, v) \right\} \leq -\bar{H}_h$$

pode ser vista como um análogo discreto da equação de Hamilton-Jacobi

$$\max_v \{\nabla u(x) \cdot v - L(x, v)\} = H(\nabla u(x), x) \leq -\bar{H}_0$$

A definição de sub-ação neste caso é dada por:

Definição 1.26. Fixado $h > 0$, uma função contínua $u : \mathbb{T}^N \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada sub-ação se para todo $x \in \mathbb{T}^N$ vale

$$\max_v \left\{ \frac{u(x + hv) - u(x)}{h} - L(x, v) \right\} \leq -\bar{H}_h$$

Ou equivalentemente

$$u(x + hv) - u(x) \leq h(L(x, v) - \bar{H}_h) \quad \forall (x, v) \in \mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N$$

Vamos supor que $h = 1$ para simplificar a notação, aqui não precisaremos da propriedade da medida estar suportada em um gráfico.

Definição 1.27. Dizemos que uma sub-ação u é separante se

$$\max_v \{u(x + v) - u(x) - L(x, v)\} = -\bar{H} \iff x \in \Omega(L).$$

O resultado principal desta última parte é o que segue.

Teorema 1.27. Existe uma sub-ação separante.

Lema 1.6. Para toda sub-ação u e todo $x \in \Omega(L)$ vale que

$$\max_v \{u(x + v) - u(x) - L(x, v)\} = -\bar{H}.$$

Antes de provarmos o teorema precisaremos de alguns resultados.
 Note que a definição de sub-ação

$$\max_v \{u(x+v) - u(x) - L(x, v)\} \leq -\bar{H}$$

é equivalente a

$$u(x_k) - u(x_0) \leq \sum_{i=0}^{k-1} (L - \bar{H})(x_i, v_i) \quad \text{para todo caminho } (x_0, \dots, x_k) \quad (1.35)$$

Observe que desta nova caracterização das sub-ações segue facilmente que $\mathbf{h}_x = \mathbf{h}(x, \cdot)$ e $S_x = S(x, \cdot)$ são sub-ações.

Proposição 1.19. Se $x \in \Omega(L)$ então existe um raio $(x_0, x_1, \dots, x_k, \dots)$ tal que $x_0 = x$ e

$$\mathbf{h}(x_k, x_0) \leq -\sum_{i=0}^{k-1} (L - \bar{H})(x_i, v_i)$$

Demonstração : Como $x \in \Omega(L)$ existe uma seqüência de caminhos $\{(x_0^n, \dots, x_{j_n}^n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $x_0^n = x$, $x_{j_n}^n = x + s_{j_n}$, $s_{j_n} \in \mathbb{Z}^N$ and $j_n \rightarrow \infty$ satisfazendo

$$A_{L-\bar{H}}(x_0^n, \dots, x_{j_n}^n) \rightarrow 0. \quad (1.36)$$

Como $|v_j^n| < K$ existe uma seqüência (x_0, \dots, x_k, \dots) que é limite dos caminhos acima, e a convergência é uniforme em cada parte compacta.

Fixado $k \in \mathbb{N}$, para $j_n > k$ temos que

$$S^{j_n-k}(x_k, x_0) \leq L(x_k, x_{k+1}^n - x_k) - \bar{H} + A_{L-\bar{H}}(x_{k+1}^n, \dots, x_{j_n}^n),$$

e também

$$S^{j_n-k}(x_k, x_0) - A_{L-\bar{H}}(x_0^n, \dots, x_{j_n}^n) \leq L(x_k, x_{k+1}^n - x_k) - \bar{H} - A_{L-\bar{H}}(x_0^n, \dots, x_{k+1}^n).$$

Portanto tomando o $\lim_{n \rightarrow \infty}$ e usando (1.36) obtemos que

$$\mathbf{h}(x_k, x_0) \leq -A_{L-\bar{H}}(x_0, \dots, x_k).$$

□

Demonstração do lema (1.6):

Afirmção: Se u é sub-ação, então $u(\bar{y}) - u(y) \leq \mathbf{h}(y, \bar{y})$.

De fato, seja (y_0, \dots, y_n) caminho tal que $y_0 = y$, $y_n = \bar{y}$, então vale que

$$u(\bar{y}) - u(y) = u(y_n) - u(y_0) \leq A_{L-\bar{H}}(y_0, \dots, y_n),$$

como vale para qualquer caminho temos que $u(\bar{y}) - u(y) \leq \mathbf{h}(y, \bar{y})$.

Seja $x \in \Omega(L)$ e (x_0, \dots, x_k, \dots) o raio que existe pela proposição (1.19).

Seja u sub-ação, por (1.35) temos que

$$u(x_k) - u(x_0) \leq A_{L-\overline{H}}(x_0, \dots, x_k)$$

e

$$u(x_0) - u(x_k) \leq \mathbf{h}(x_k, x_0) \leq -A_{L-\overline{H}}(x_0, \dots, x_k)$$

Donde a segunda desigualdade vem da proposição (1.19), e a primeira vem da afirmação.

Portanto

$$u(x_k) - u(x_0) = \sum_{j=0}^{k-1} (L - \overline{H})(x_j, v_j)$$

e em particular para $k = 1$

$$u(x_0 + v_0) - u(x_0) = L(x_0, v_0) - \overline{H}$$

e então

$$\sup_v [u(x + v) - u(x) - L(x, v)] \leq -\overline{H}$$

□

Lema 1.7. A função $S_x(\cdot) = S(x, \cdot)$ é uniformemente Lipschitz em x .

Demonstração : Fixe $x \in \mathbb{T}^N$, $\epsilon > 0$ e sejam $y, z \in \mathbb{T}^N$. Por definição de S existe um caminho $(x_0, \dots, x_k) \in \mathcal{P}_k(x + s, y)$, $s \in \mathbb{Z}^N$ tal que

$$|A_{L-\overline{H}}(x_0, \dots, x_k)| \leq S(x, y) + \epsilon,$$

construímos o seguinte caminho $(\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_k) = (x_0, \dots, x_{k-1}, z) \in \mathcal{P}_k(x + s, z)$, a ação neste caminho é dada por

$$A_{L-\overline{H}}(\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_k) = A_{L-\overline{H}}(x_0, \dots, x_k) + L(x_{k-1}, z - x_{k-1}) - L(x_{k-1}, y - x_{k-1}),$$

Note que $|y - x_{k-1}| \leq K$ e como $y, z \in \mathbb{T}^N$, para qualquer $\theta \in (0, 1)$, temos que $|z - x_{k-1} + \theta(y - z)| < K_1$, para todo x_{k-1} , portanto

$$|L(x_{k-1}, z - x_{k-1}) - L(x_{k-1}, y - x_{k-1})| \leq \max_{(x,v) \in \mathbb{T}^N \times K_1} |L_v(x, v)| |z - y| = C|z - y|$$

Logo para todo $\epsilon > 0$ temos que

$$S(x, z) \leq A_{L-\overline{H}}(\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_k) \leq S(x, y) + \epsilon + C|z - y|.$$

O que implica $S(x, z) - S(x, y) \leq C|z - y|$.

Trocando os papéis de y e z obtemos $S(x, y) - S(x, z) \leq C|z - y|$.

Logo $|S_x(y) - S_x(z)| \leq C|z - y|$, note que a constante Lipschitz independe de x . □

Demonstração do teorema 1.27: Lembre que a função $S_x(\cdot) = S(x, \cdot)$ é uma sub-ação.

Pela definição do S temos que

$$S(x, x+v) \leq L(x, v) - \bar{H} \quad \forall v$$

Seja $x \notin \Omega(L)$, então $S(x, x) > 0$. Logo

$$S_x(x+v) - S_x(x) < L(x, v) - \bar{H} \quad \forall v$$

Como $\Omega(L)$ é fechado, para cada $x \notin \Omega(L)$ podemos encontrar uma vizinhança V_x de x tal que para todo $y \in V_x$

$$S_x(y+v) - S_x(y) < L(y, v) - \bar{H} \quad \forall v$$

Podemos extrair, da família destas vizinhanças $\{V_x\}_{x \notin \Omega(L)}$, uma subcobertura enumerável $\{V_{x_j}\}_{j=1}^\infty$. E definimos

$$\tilde{S}_{x_j}(z) = S_{x_j}(z) - S_{x_j}(0)$$

como S_{x_j} é uniformemente Lipschitz obtemos que $|\tilde{S}_{x_j}(z)| \leq C|z|$, portanto a série dada por

$$u(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\tilde{S}_{x_j}(z)}{2^j}$$

está bem definida e é uniformemente convergente pois \mathbb{T}^N é compacto.

u é uma sub-ação, pois

$$\begin{aligned} u(x+v) - u(x) &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\tilde{S}_{x_j}(x+v) - \tilde{S}_{x_j}(x)}{2^j} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{S_{x_j}(x+v) - S_{x_j}(x)}{2^j} \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{L(x, v) - \bar{H}}{2^j} = L(x, v) - \bar{H} \end{aligned}$$

Portanto pelo teorema (1.6)

$$\max_v \{u(x+v) - u(x) - L(x, v)\} = -\bar{H} \quad \text{se } x \in \Omega(L)$$

e para $x \notin \Omega(L)$, existe $k \geq 1$ tal que $x \in V_{x_k}$, portanto

$$S_{x_k}(x+v) - S_{x_k}(x) < L(x, v) - \bar{H} \quad \forall v.$$

Dai

$$\begin{aligned} u(x+v) - u(x) &= \left(\sum_{j \neq k} \frac{S_{x_j}(x+v) - S_{x_j}(x)}{2^j} + \frac{S_{x_k}(x+v) - S_{x_k}(x)}{2^k} \right) \\ &< \left(\sum_{j \neq k} \frac{L(x, v) - \bar{H}}{2^j} + \frac{L(x, v) - \bar{H}}{2^k} \right) = L(x, v) - \bar{H} \quad \forall v \end{aligned}$$

i.e.,

$$\max_v \{u(x+v) - u(x) - L(x, v)\} < -\bar{H} \quad \text{se } x \notin \Omega(L).$$

□

2

P.G.D. para Cadeias de Markov Estacionárias em $[0, 1]$

2.1 Introdução

Vamos analisar algumas propriedades das medidas de probabilidades de Markov maximizantes no espaço de Bernoulli $\Omega = [0, 1]^{\mathbb{N}}$, o que significa que vamos considerar cadeias de Markov estacionárias com espaço de estados $S = [0, 1]$, onde $[0, 1] = \{x \mid 0 \leq x \leq 1\} \subset \mathbb{R}$.

Mais precisamente, vamos considerar um potencial contínuo $A(x, y)$, onde $A : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ (um potencial $A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que depende apenas das duas primeiras coordenadas de Ω).

Estamos interessados em encontrar probabilidades de Markov estacionárias μ_{∞} em $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ que maximizem o valor

$$\int A(x, y) d\mu,$$

entre todas as probabilidades de Markov estacionárias μ em $\Omega = [0, 1]^{\mathbb{N}}$.

Chamaremos de probabilidade de Markov estacionária uma medida μ obtida através de uma probabilidade inicial $d\theta$ em $[0, 1]$, e um kernel de transição Markoviano $dP_x(y)$, onde θ é invariante para o kernel definido por P (definições mais precisas serão dadas posteriormente). Desta maneira, por exemplo,

$$\begin{aligned} \mu([0.3, 0.6] \times [0.3, 0.7] \times [0.1, 0.4] \times [0, 1]^{\mathbb{N}}) = \\ \int_{0.3}^{0.6} \int_{0.3}^{0.7} \int_{0.1}^{0.4} dP_{x_2}(x_3) dP_{x_1}(x_2) d\theta(x_1). \end{aligned}$$

A sigma-álgebra que estamos considerando em Ω é a gerada pelos cilindros.

As medidas maximizantes μ_{∞} , são invariantes pelo shift, mas em geral não são positivas em todos os abertos de Ω .

Vamos considerar um método de penalização por entropia (veja [GV] para o caso de medidas de Mather) pelo qual poderemos mostrar que a probabilidade maximizante μ_{∞} pode ser aproximada por probabilidades de Markov estacionárias (absolutamente contínuas) μ_{β} , $\beta > 0$, obtidas através de $\theta_{\beta}(x)$ e $P_{\beta}(x, y)$ que são contínuas. As funções θ_{β} e P_{β} (algumas vezes chamaremos de K_{β} a função P_{β}) são obtidas (de maneira semelhante

ao caso descrito por F. Spitzer em [Sp] para o espaço de Bernoulli $\Omega = \{1, 2, \dots, d\}^{\mathbb{N}}$, veja também [PP]) como $\theta_\beta(x) = \frac{\varphi_\beta(x)\bar{\varphi}_\beta(x)}{\int \varphi_\beta(x)\bar{\varphi}_\beta(x)dx}$, $P_\beta(x, y) = K_\beta(x, y) = \frac{e^{\beta A(x, y)}\bar{\varphi}_\beta(y)}{\bar{\varphi}_\beta(x)\lambda_\beta}$ onde $\varphi_\beta, \bar{\varphi}_\beta$ são as autofunções e λ_β o autovalor dos operadores de Perron $\mathcal{L}_\beta, \bar{\mathcal{L}}_\beta$ dados por

$$\mathcal{L}_\beta\varphi(y) = \int e^{\beta A(x, y)} \varphi(x)dx \quad \text{e} \quad \bar{\mathcal{L}}_\beta\varphi(x) = \int e^{\beta A(x, y)} \varphi(y)dy$$

(que mostraremos usando o teorema de Krein-Ruthman). Mostraremos também que

$$V(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_n} \ln \varphi_{\beta_n} \text{ é uma sub-ação calibrada para frente, i.e.,}$$

$$V(y) = \max_x [A(x, y) + V(x) - m], \text{ onde } m = \max \int A d\mu.$$

Quando o espaço é $[0, 1]$, portanto, não enumerável, acontece uma coisa estranha: no problema variacional de pressão temos entropia negativa. Entropias negativas aparecem em problemas físicos quando os spins estão em um espaço contínuo (veja [Lu], [Cv], [Ni], [Ni] e [W]).

Entropias negativas são controversas, mas podemos citar [BBNg]: "The negativity of the entropy change is counterintuitive, but does not violate thermodynamics as one would be inclined to conclude at first."

Do ponto de vista de mecânica estatística estamos analisando um sistema de iteração entre vizinhos descrito por $A(x, y)$ com temperatura zero, onde o spin x toma valores em $[0, 1]$. Este é outro ponto de vista para o significado do conceito de probabilidade maximizante para A . Um exemplo bem conhecido é quando $A(x, y) = xy$, e $x, y \in [-1, 1]$ (veja [Th] para referências), que pode ser analisado usando os métodos descritos aqui através de uma mudança de coordenadas. No modelo chamado 'XY spin model', temos que $A(x, y) = \cos(x - y)$, onde $x, y \in (0, 2\pi]$ (veja [V]). Quando existe um termo magnético podemos considerar $A(x, y) = \cos(x - y) + l \cos(x)$, onde l é uma constante. Outro conjunto de exemplos aparece em [A] seção 9.4.: O modelo de Ising contínuo pode ser descrito por $A(x, y) = \frac{1}{4}(x - y)^2 + \frac{m^2}{2}x^2$. O primeiro termo $\frac{1}{2}(x - y)^2$ descreve a iteração e o segundo termo $\frac{m^2}{2}x^2$ é o termo magnético. Mais geralmente podemos considerar $A(x, y) = \frac{1}{2}(x - y)^2 + f(x)$, onde f descreve o termo magnético. Vamos mostrar, entre outras coisas que para tal modelo, dada uma função f genérica (no sentido de Mañé [Man]), a probabilidade maximizante para A é única. Desta forma, considerando fixado o termo $\frac{1}{2}(x - y)^2$, para um conjunto denso de funções f , temos que o estado com temperatura zero para $A(x, y) = \frac{1}{2}(x - y)^2 + f(x)$ é único.

Deixamos para os físicos a questão: o problema variacional de pressão para o potencial βA (onde $\beta = \frac{1}{T} > 0$ é grande e T é a temperatura), que trata de uma entropia negativa, é apenas uma ferramenta para conseguirmos uma boa aproximação μ_β da probabilidade maximizante μ_∞ para A , ou se μ_β tem algum sentido físico de ser um estado de Gibbs com temperatura finita.

Ressaltamos que a análise do caso em que A depende de infinitas coordenadas em $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ esbarra na questão de que a entropia natural a ser considerada neste caso é infinita. Assim nos restringimos ao caso em que A depende apenas das duas primeiras coordenadas.

A seguir daremos algumas definições a fim de podermos enunciar o resultado principal deste capítulo.

Vamos denotar por \mathbf{x} um ponto no conjunto $[0, 1]^{\mathbb{N}}$, i.e., $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots)$.

$[0, 1]^{\mathbb{N}}$ pode ser munido com a topologia produto, e então $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ torna-se um espaço

topológico metrizável compacto (pelo teorema de Tychonoff). Definimos uma distância em $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ por

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j \geq 1} \frac{|x_j - y_j|}{2^j}.$$

Definição 2.1. (a) o mapa shift em $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ é definido como $\sigma((x_1, x_2, \dots)) = (x_2, x_3, \dots)$.

(b) Seja A_1, A_2, \dots, A_k intervalos de $[0, 1]$ não degenerados (de comprimento estritamente positivo). Vamos chamar de cilindro de tamanho k o subconjunto de \mathbb{R}^k dado por $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$, e denotaremos ele por $A_1 \dots A_k$.

(c) Denote por $\mathcal{M}_{[0,1]^{\mathbb{N}}}$ o conjunto de probabilidades nos borelianos de $[0, 1]^{\mathbb{N}}$. Chamaremos de medidas holonômicas o subconjunto de $\mathcal{M}_{[0,1]^{\mathbb{N}}}$ definido por

$$\mathcal{M}_0 := \left\{ \mu \in \mathcal{M}_{[0,1]^{\mathbb{N}}} : \int (f(x_1) - f(x_2)) d\mu(\mathbf{x}) = 0, \quad \forall f \in C([0, 1]) \right\}. \quad (2.1)$$

Observação:

(i) Um cilindro pode também ser visto como um subconjunto de $[0, 1]^{\mathbb{N}}$: neste caso, temos que

$$A_1 \dots A_k = \left\{ \mathbf{x} \in [0, 1]^{\mathbb{N}} : x_i \in A_i, \forall 1 \leq i \leq k \right\}.$$

(ii) \mathcal{M}_0 contém todas as medidas σ -invariantes. Isto é uma consequência do fato que medidas invariantes pelo shift podem ser caracterizadas como as medidas μ tais que $\int f d\mu = \int (f \circ \sigma) d\mu$ para todas as funções contínuas definidas em $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ tomando valores em \mathbb{R} . Ainda o conjunto das medidas σ -invariantes contém o conjunto das probabilidades de Markov estacionárias.

Queremos resolver o seguinte problema

$$\max_{\mu \in \mathcal{M}_0} \left\{ \int A d\mu \right\}. \quad (2.2)$$

Que é mais geral do que o problema de maximização sobre as probabilidades estacionárias.

Veremos que os dois problemas são equivalentes pois o valor do máximo desde último problema é o mesmo que o valor do máximo entre todas as probabilidades de Markov estacionárias, ou seja existe uma medida de Markov estacionária tal que a integral do potencial em relação a esta medida realiza o valor do máximo, evidentemente podem existir medidas maximizantes que não são estacionárias.

O resultado principal deste capítulo pode ser expresso pelo seguinte teorema:

Teorema 2.1. Sejam $A : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$, i.e., um observável que depende das duas primeiras coordenadas de $[0, 1]^{\mathbb{N}}$, e

$$m := \max_{\mathcal{M}_0} \int A d\mu$$

Então

(a) Existem uma medida $\mu_\infty \in \mathcal{M}_0$ tal que $\int A d\mu_\infty = m$, e uma sequência de medidas $\mu_\beta, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$\mu_\beta \rightarrow \mu_\infty,$$

μ_β é definida através de $\theta_\beta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, K_\beta : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definidas acima, como

$$\mu_\beta(A_1 \dots A_n) := \int_{A_1 \dots A_n} K_\beta(x_{n-1}, x_n) \dots K_\beta(x_1, x_2) \theta_\beta(x_1) dx_n \dots dx_1$$

onde A_1, A_2, \dots, A_n são intervalos de $[0, 1]$.

(b) Se ainda $\frac{\partial^2 A}{\partial_x \partial_y}(x, y) \neq 0$, então existe um conjunto genérico $\mathbf{G} \in C^2([0, 1])$ tal que para toda $\psi \in \mathbf{G}$ existe $\mu_\infty \in \mathcal{M}_0$ tal que $\int A + \psi d\mu_\infty = m_{(A+\psi)}$ e que pode ser aproximada por medidas μ_β como no item (a), e ainda se $\tilde{\mu}_\infty$ é outra medida maximizante então $\nu_\infty = \tilde{\nu}_\infty$, onde $\nu_\infty(B) = \mu_\infty(\Pi^{-1}(B)), \tilde{\nu}_\infty(B) = \tilde{\mu}_\infty(\Pi^{-1}(B)), B$ é um boreliano de $[0, 1]^2$ e $\Pi : [0, 1]^\mathbb{N} \rightarrow [0, 1]^2$ é a projeção nas duas primeiras coordenadas.

(c) Nas hipóteses do item (b), seja $D = A_1 \dots A_k$ um cilindro de tamanho k qualquer. Então o seguinte limite existe

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \ln \mu_\beta(D) = - \inf_{\mathbf{x} \in D} I(\mathbf{x}).$$

Onde

$I : [0, 1]^\mathbb{N} \rightarrow [0, +\infty]$ é a função definida por

$$I(\mathbf{x}) := \sum_{i \geq 1} V(x_{i+1}) - V(x_i) - (A - m)(x_i, x_{i+1}).$$

e V é uma sub-ação calibrada para frente.

Sob a hipótese de A ser twist, i.e., $\frac{\partial^2 A}{\partial_x \partial_y}(x, y) \neq 0$ para todo $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ vamos provar que a probabilidade ν_∞ em $[0, 1] \times [0, 1]$ está suportada em um gráfico. A condição twist é essencial na teoria de Aubry para mapas twist [Ban] [Go]. Ela corresponde, na teoria de Mather, a hipótese de convexidade do Lagrangiano [Mat] [CI] [Fa] [Man]. Ela também é considerada em problemas de otimização como em [Ba]. Aqui vários resultados podem ser obtidos sem esta hipótese. Mas para obtermos a propriedade de gráfico, ela é realmente necessária.

2.2 Medidas de Markov Estacionárias

Definição 2.2. Uma função $P : [0, 1] \times \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ é chamada de transição em $[0, 1]$, onde \mathcal{A} é a σ -álgebra de Borel em $[0, 1]$, se

- (i) para todo $x \in [0, 1]$, $P(x, \cdot)$ é uma medida de probabilidade em $([0, 1], \mathcal{A})$,
- (ii) para todo $B \in \mathcal{A}$, $P(\cdot, B)$ é uma função \mathcal{A} -mensurável de $([0, 1], \mathcal{A}) \rightarrow [0, 1]$.

Algumas vezes vamos usar a notação $P_x(B)$ para $P(x, B)$.

Definição 2.3. Uma medida de probabilidade θ em $([0, 1], \mathcal{A})$ é chamada estacionária para uma transição $P(\cdot, \cdot)$, se

$$\theta(B) = \int P_x(B) d\theta(x) \quad \text{para todo } B \in \mathcal{A}.$$

Dadas uma probabilidade inicial θ e uma transição P , como acima, podemos definir um processo de Markov $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ com espaço de estados $S = [0, 1]$ (veja [AL] seção 14.2 para uma referência). Se θ é estacionária para P , então, X_n é um processo estocástico estacionário. A probabilidade associada μ em $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ é chamada probabilidade estacionária de Markov definida por θ e P . Mais especificamente temos a seguinte definição:

Definição 2.4. Uma medida de probabilidade $\mu \in \mathcal{M}_{[0,1]^{\mathbb{N}}}$ será chamada uma medida de Markov estacionária se existem θ e P como na definição 2.3, e μ é dada por

$$\mu(A_1 \dots A_n) := \int_{A_1 \dots A_n} dP_{x_{n-1}}(x_n) \dots dP_{x_1}(x_2) d\theta(x_1), \quad (2.3)$$

onde A_1, A_2, \dots, A_n são intervalos de $[0, 1]$.

Definição 2.5. Vamos denotar por $\mathcal{M}_{[0,1]^2}$ o conjunto de medidas de probabilidades nos Borelianos de $[0, 1]^2$.

$\mathcal{M}_{[0,1]^2}$ pode ser munido com a topologia fraca- \star , onde uma sequência $\nu_n \rightharpoonup \nu$, se e somente se $\int f d\nu_n \rightarrow \int f d\nu$, para todas as funções contínuas $f : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Com isso temos um espaço topológico compacto (pelo teorema de Banach-Alaoglu).

Teorema 2.2. (Desintegração de medidas) Sejam X, Y espaços métricos separáveis de Radon. Seja $\hat{\mu}$ medida em Y e seja $\pi : Y \rightarrow X$ Borel mensurável e $\bar{\mu} = \pi_* \hat{\mu}$. Então existe uma família de probabilidades de Borel $\{\hat{\mu}_x\}_{x \in X}$ em Y unicamente determinada $\bar{\mu}$ -q.t.p. tal que:

- 1) $\hat{\mu}_x(Y \setminus \pi^{-1}(x)) = 0$, $\bar{\mu}$ -q.t.p.
- 2) $\int_Y f(z) d\hat{\mu}_x(z) = \int_X \int_{\pi^{-1}(x)} f(z) d\hat{\mu}_x(z) d\bar{\mu}(x)$.

Veja [Del], Pg 78, (70-III). Um espaço de Radon é um espaço métrico separável onde qualquer medida de probabilidade μ é "inner-regular", ou seja, para todo boreliano A verifica-se $\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \text{ compacto}, K \subset A\}$. Pode-se provar que espaços métricos compactos são espaços de Radon. Veja [AGS].

Usando o teorema 2.2, concluímos que qualquer probabilidade ν em $[0, 1]^2$ pode ser desintegrada como $d\nu(x, y) = d\theta(x) dP_x(y)$, vamos utilizar a notação mais reduzida $\nu = \theta P$, onde θ é uma probabilidade em $([0, 1], \mathcal{A})$.

Definição 2.6. (a) Uma medida de probabilidade $\nu \in \mathcal{M}_{[0,1]^2}$ será chamada medida de Markov estacionária induzida se a sua desintegração $\nu = \theta P$ for tal que θ é estacionária para P , i.e.,

$$\int_B d\theta(x) = \int_{[0,1]} \int_B dP_x(y) d\theta(x) \quad \text{para todo } B \in \mathcal{A}.$$

Neste caso, para cada conjunto $(a, b) \times (c, d) \in [0, 1]^2$ temos que

$$\nu((a, b) \times (c, d)) = \int_{(a,b)} \int_{(c,d)} dP_x(y) d\theta(x).$$

(b) Denotaremos por $\widehat{\mathbf{M}}$ o conjunto das medidas de Markov estacionárias induzidas.

Definição 2.7. (a) Uma medida de probabilidade ν será chamada uma medida de Markov estacionária induzida absolutamente contínua, se ν pertence a $\widehat{\mathbf{M}}$ e pode ser desintegrada como $\nu = \theta K$, onde θ é uma medida absolutamente contínua dada por uma densidade contínua, i.e., $d\theta(x) = \theta(x)dx$, e para cada $x \in [0, 1]$ a medida $dK_x(y)$ é uma medida absolutamente contínua dada por uma densidade contínua, i.e., $dK_x(y) = K(x, y)dy$. Note que neste caso estamos utilizando a letra K no lugar de P para representar a função de transição.

(b) Denotaremos por \mathbf{M} o conjunto das medidas de Markov estacionárias induzidas absolutamente contínuas.

Observação: Vamos fazer o seguinte abuso de linguagem: quando a medida ν for absolutamente contínua, ou seja, admite uma densidade vamos denotar $d\nu(x, y) = \nu(x, y)dxdy$. Portanto $\nu = \theta K$ pode denotar tanto a medida desintegrada como apenas a densidade da medida, no contexto ficará claro qual das duas está sendo usada.

Pode-se mostrar que as densidades $K : [0, 1]^2 \rightarrow [0, +\infty)$ e $\theta : [0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$ da definição acima satisfazem as seguintes equações:

$$\int K(x, y) dy = 1, \quad \forall x \in [0, 1], \quad (2.4)$$

$$\int \theta(x) K(x, y) dxdy = 1, \quad (2.5)$$

$$\int \theta(x) K(x, y) dx = \theta(y), \quad \forall y \in [0, 1]. \quad (2.6)$$

Ainda: Qualquer par de funções contínuas não negativas satisfazendo as três equações acima definem uma medida de Markov estacionária induzida absolutamente contínua.

Lema 2.1.

$$(a) \widehat{\mathbf{M}} = \left\{ \nu \in \mathcal{M}_{[0,1]^2} : \int f(x) - f(y) d\nu(x, y) = 0, \forall f \in C[0, 1] \right\}.$$

(b) $\widehat{\mathbf{M}}$ é um conjunto fechado na topologia fraca- \star .

Demonstração : Basta provarmos o item (a), pois o item (b) segue imediatamente. Para provarmos o item (a) no sentido \subset , notamos que, para um boreliano B , vale

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]} \int_{[0,1]} \chi_B(x) dP_x(y) d\theta(x) &= \int_{[0,1]} \chi_B(x) \int_{[0,1]} dP_x(y) d\theta(x) = \int_{[0,1]} \chi_B(x) d\theta(x) = \\ &= \int_B d\theta(x) = \int_{[0,1]} \int_B dP_x(y) d\theta(x) = \int_{[0,1]} \int_{[0,1]} \chi_B(y) dP_x(y) d\theta(x). \end{aligned}$$

Basta agora usarmos o argumento usual de aproximarmos qualquer função contínua por funções-escada e temos o resultado desejado.

Vamos agora provar \supset . Seja $\nu = \theta P$ a desintegração da medida ν . Note que basta provarmos que $\int_B d\theta(x) = \int_{[0,1]} \int_B dP_x(y) d\theta(x)$ se B for um intervalo, visto que os intervalos geram a σ -álgebra de Borel.

Portanto, seja B um intervalo, e $f_n \in C[0, 1]$ uma sequência crescente de funções contínuas e não-negativas que converge a χ_B . Então, pelo teorema da convergência monótona temos que

$$\begin{aligned} \int_B d\theta(x) &= \int_{[0,1]} \chi_B(x) d\theta(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[0,1]} f_n(x) d\theta(x) = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[0,1]} \int_{[0,1]} f_n(x) dP_x(y) d\theta(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[0,1]} \int_{[0,1]} f_n(y) dP_x(y) d\theta(x) = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[0,1]} \varphi_n(x) d\theta(x), \end{aligned}$$

onde $\varphi_n(x) \equiv \int_{[0,1]} f_n(y) dP_x(y) \rightarrow \int_{[0,1]} \chi_B(y) dP_x(y) \equiv \varphi(x)$ novamente pelo teorema da convergência monótona. Portanto a função φ_n converge pontualmente, é uniformemente limitada, e o teorema da convergência dominada nos permite dizer que

$$\begin{aligned} \int_B d\theta(x) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[0,1]} \varphi_n(x) d\theta(x) = \int_{[0,1]} \varphi(x) d\theta(x) = \\ &= \int_{[0,1]} \int_{[0,1]} \chi_B(y) dP_x(y) d\theta(x) = \int_{[0,1]} \int_B dP_x(y) d\theta(x). \end{aligned}$$

□

Esta nova formulação do conjunto $\widehat{\mathbf{M}}$ será mais conveniente para utilizarmos o teorema de dualidade de duality of Fenchel-Rockafellar que será necessário na proposição 2.4 . Este conjunto também pode ser visto como o conjunto das medidas que tem ambas as marginais, nas coordenadas x e em y , iguais.

A informação importante é dada por θ e P . Algumas vezes vamos considerar μ como medida em $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ e outras vezes vamos considerar a sua projeção ν sobre $[0, 1]^2$.

Observação: Note que, para facilitar a leitura, estamos utilizando a notação: ν para nos referirmos a medidas em $[0, 1]^2$ e μ para nos referirmos a medidas em $[0, 1]^{\mathbb{N}}$.

No caso que estamos analisando, onde o observável depende apenas das duas primeiras coordenadas, vamos estabelecer algumas conexões entre as medidas em $[0, 1]^2$ e as medidas em $[0, 1]^{\mathbb{N}}$, e veremos que o problema de maximização pode ser analisado como um problema de maximização entre as medidas de Markov induzidas de $[0, 1]^2$.

Proposição 2.1. Seja $A : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ um observável, estamos supondo que A depende apenas das duas primeiras coordenadas de $[0, 1]^{\mathbb{N}}$. Então valem os seguintes itens:

(a) Existe uma aplicação, não necessariamente sobrejetiva, de $\widehat{\mathbf{M}}$ em \mathcal{M}_0 .

(b) Existe uma aplicação, não necessariamente injetiva, de \mathcal{M}_0 em $\widehat{\mathbf{M}}$.

$$(c) \max_{\mu \in \mathcal{M}_0} \int A d\mu = \max_{\nu \in \widehat{\mathbf{M}}} \int A d\nu$$

Demonstração : (a) toda medida $\nu \in \widehat{\mathbf{M}}$ pode ser desintegrada como $\nu = \theta P$, e portanto pode ser estendida a um medida $\mu \in \mathcal{M}_0$ por

$$\mu(A_1 \dots A_n) := \int_{A_1 \dots A_n} dP_{x_{n-1}}(x_n) \dots dP_{x_1}(x_2) d\theta(x_1), \quad (2.7)$$

onde A_1, A_2, \dots, A_n são intervalos de $[0, 1]$. E ainda, temos que

$$\int_{[0,1]^{\mathbb{N}}} A d\mu = \int_{[0,1]^2} A d\nu.$$

(b) toda medida $\mu \in \mathcal{M}_0$ pode ser projetada em uma medida $\nu \in \mathcal{M}_{[0,1]^2}$, definida como, para cada boreliano B de $[0, 1]^2$,

$$\nu(B) = \mu(\Pi^{-1}(B)),$$

onde $\Pi : [0, 1]^{\mathbb{N}} \rightarrow [0, 1]^2$ é a projeção nas duas primeiras coordenadas. Note que, pelo lema 2.1, $\nu \in \widehat{\mathbf{M}}$. Também temos que $\int_{[0,1]^{\mathbb{N}}} A d\mu = \int_{[0,1]^2} A d\nu$.

(c) Seja $\bar{\mu} \in \mathcal{M}_0$ tal que $\int A d\bar{\mu} = \max_{\mathcal{M}_0} \int A d\mu$, por (b) existe $\bar{\nu} \in \widehat{\mathbf{M}}$ tal que $\int A d\bar{\mu} = \int A d\bar{\nu}$, portanto $\max_{\mathcal{M}_0} \int A d\mu = \int A d\bar{\nu} \leq \max_{\widehat{\mathbf{M}}} \int A d\nu$. Por outro lado seja $\tilde{\nu} \in \widehat{\mathbf{M}}$ tal que $\int A d\tilde{\nu} = \max_{\widehat{\mathbf{M}}} \int A d\nu$, então por (a) existe $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}_0$ tal que $\int A d\tilde{\mu} = \int A d\tilde{\nu}$, daí $\max_{\widehat{\mathbf{M}}} \int A d\nu \leq \max_{\mathcal{M}_0} \int A d\mu$. \square

Observação: Note que no item (a), no caso particular em que $\nu \in \mathbf{M}$, temos que ν pode ser desintegrada como $\nu = \theta K$, e portanto a medida de Markov estacionária μ é dada por

$$\mu(A_1 \dots A_n) := \int_{A_1 \dots A_n} K(x_{n-1}, x_n) \dots K(x_1, x_2) \theta(x_1) dx_n \dots dx_1, \quad (2.8)$$

onde A_1, A_2, \dots, A_n são intervalos de $[0, 1]$. E μ é uma medida de Markov estacionária absolutamente contínua em $[0, 1]^{\mathbb{N}}$.

2.3 O Problema de Maximização

Estamos interessados em encontrar medidas de probabilidade de Markov μ_∞ em $[0, 1]^\mathbb{N}$ (definidas por uma distribuição inicial θ e uma transição P) que maximize o valor

$$\int A(x, y) d\mu,$$

entre todas as medidas μ em $\Omega = [0, 1]^\mathbb{N}$ invariantes para o shift.

Note que podemos considerar o problema de maximizar $\int A(x, y) d\mu$ entre as medidas holonômicas (veja equação 2.1) que contém todas as medidas estacionárias (não somente as Markov) para o shift em $[0, 1]^\mathbb{N}$.

Como estamos considerando potenciais da forma $A(x, y)$, neste caso, não é possível termos unicidade, (nas medidas em $[0, 1]^\mathbb{N}$). Pois só levamos em consideração a medida de cilindros de tamanho dois.

$$\text{Pelo item (c) da proposição 2.1: } \max_{\mu \in \mathcal{M}_0} \int A d\mu = \max_{\nu \in \widehat{\mathbf{M}}} \int A d\nu.$$

Portanto o problema de maximização é equivalente a encontrarmos ν_∞ maximizante para $\int A d\nu$, entre todas $\nu \in \widehat{\mathbf{M}}$. Pois a partir de ν_∞ , pelo item (a) da proposição 2.1, obtemos uma medida de Markov μ_∞ maximizante entre todas as medidas holonômicas.

Desta forma o problema que estamos analisando pode ser pensado como considerando probabilidades ν em $[0, 1] \times [0, 1]$ definidas por

$$\nu([a, b] \times [c, d]) = \int_a^b \int_c^d dP_x(y) d\theta(x),$$

em vez de probabilidades μ em Ω definidas por θ e o Kernel $P_x(y)$ correspondente. Dizemos que ν é a projeção de μ em $[0, 1] \times [0, 1]$.

Vamos nos concentrar no problema de maximização em $[0, 1]^2$.

Seja $A : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, que será chamada um observável. Denotaremos por

$$\mathfrak{M}_0 := \left\{ \nu \in \widehat{\mathbf{M}} : \int A(x, y) d\nu(x, y) = m \right\}$$

onde

$$m = \max_{\nu \in \widehat{\mathbf{M}}} \left\{ \int A(x, y) d\nu(x, y) \right\}.$$

Uma medida em \mathfrak{M}_0 será chamada uma medida maximizante em $\widehat{\mathbf{M}}$.

A fim de encontrarmos uma medida maximizante de Markov teremos de analisar o seguinte problema variacional (em que vamos nos restringir às medidas $\nu \in \mathbf{M}$, lembre que tais medidas podem ser desintegradas como $\nu = \theta K$) :

$$\max_{\theta K \in \mathbf{M}} \left\{ \int \beta A(x, y) \theta(x) K(x, y) dx dy - \int \theta(x) K(x, y) \ln(K(x, y)) dx dy \right\}. \quad (2.9)$$

Observação: Em um certo sentido o problema acima é um problema de pressão (veja [PP]). O problema de pressão consiste em maximizar, entre todas as medidas invariantes por uma determinada aplicação, a integral do observável somada a entropia métrica da medida.

A razão pela qual multiplicamos o observável pela constante β é que, se o termo $\int \theta K \ln(K) dx dy$ for limitado superiormente, quando fazemos $\beta \rightarrow \infty$ o que importa é a integral do observável. Assim no limite obteremos uma medida que maximiza a integral do observável, entre todas as medidas de Markov induzidas.

Definição 2.8. Definimos o termo de entropia de uma medida de probabilidade absolutamente contínua $\nu \in \mathcal{M}_{[0,1]^2}$, dada pela densidade $\nu(x, y) dx dy$, como

$$S[\nu] = - \int \nu(x, y) \ln \left(\frac{\nu(x, y)}{\int \nu(x, z) dz} \right) dx dy. \quad (2.10)$$

Para toda $\nu = \theta K \in \mathbf{M}$ temos que

$$S[\theta K] = - \int \theta(x) K(x, y) \ln(K(x, y)) dx dy. \quad (2.11)$$

Podemos também chamar $S[\nu] = S[\theta K]$ a penalização por entropia da probabilidade $\nu = \theta K \in \mathbf{M}$.

Observação: Vemos que o termo de entropia é o análogo a entropia métrica de uma medida de Markov no caso do sub-shift de tipo finito, veja o exemplo 3 da seção 8.3 de [PY].

Lema 2.2. Se $\nu = \theta K \in \mathbf{M}$ e K é estritamente positiva, então $S[\nu] \leq 0$.

Demonstração : Como \ln é uma função côncava, pela desigualdade de Jensen, temos que

$$\begin{aligned} - \int \theta(x) K(x, y) \ln(K(x, y)) dx dy &= \int \theta(x) K(x, y) \ln \left(\frac{1}{K(x, y)} \right) dx dy \leq \\ &\leq \ln \int \theta(x) K(x, y) \frac{1}{K(x, y)} dx dy = \ln(1) = 0. \end{aligned}$$

□

Para cada β fixado, vamos exibir uma medida ν_β em \mathbf{M} que maximiza (2.9). E após mostraremos que tal ν_β aproxima na convergência fraca probabilidades ν_∞ que são maximizantes para A no conjunto $\widehat{\mathbf{M}}$.

Para encontrarmos tais medidas precisamos definir os operadores a seguir, definidos no espaço de Banach $C([0, 1])$ das funções definidas em $[0, 1]$ tomando valores reais com a norma do sup:

Definição 2.9. Sejam $\mathcal{L}_\beta, \bar{\mathcal{L}}_\beta : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$ dados por

$$\mathcal{L}_\beta \varphi(y) = \int e^{\beta A(x,y)} \varphi(x) dx, \quad (2.12)$$

$$\bar{\mathcal{L}}_\beta \varphi(x) = \int e^{\beta A(x,y)} \varphi(y) dy. \quad (2.13)$$

Veja [Ka] e [Sch] capítulo IV para a teoria de operadores positivos integrais.

Teorema 2.3. Os operadores \mathcal{L}_β e $\bar{\mathcal{L}}_\beta$ tem o mesmo autovalor maximal estritamente positivo λ_β , que é simples e isolado. As autofunções associadas são estritamente positivas.

Demonstração : Inicialmente vamos mostrar que \mathcal{L}_β é um operador compacto. Note que a imagem por \mathcal{L}_β da bola unitária fechada de $C([0, 1])$ é uma família equicontínua em $C([0, 1])$: de fato, sabemos que $e^{\beta A}$ é uma função uniformemente contínua, e portanto, se φ está na bola unitária fechada, temos que

$$|\mathcal{L}_\beta \varphi(y) - \mathcal{L}_\beta \varphi(z)| \leq \int |e^{\beta A(x,y)} - e^{\beta A(x,z)}| |\varphi(x)| dx \leq |e^{\beta A(x,y)} - e^{\beta A(x,z)}| < \delta,$$

se, y e z estão suficientemente próximos. Logo, podemos usar o teorema de Arzela-Ascoli para provar a compacidade de \mathcal{L}_β (veja também [Sch] capítulo IV seção 1).

Agora, lembramos que o espectro de um operador compacto é uma seqüência de autovalores que convergem para zero, possivelmente contendo o zero. Isto implica que qualquer autovalor não-zero de \mathcal{L}_β é isolado (i.e. não existe seqüência no espectro de \mathcal{L}_β que converge para algum autovalor não-zero).

A definição de \mathcal{L}_β nos mostra que o operador preserva o cone das funções positivas em $C([0, 1])$, de fato, um ponto do cone é levado no interior do cone. Isto significa que \mathcal{L}_β é um operador estritamente positivo.

O teorema de Krein-Ruthman (teorema 19.3 de [De]) implica que existe um autovalor estritamente positivo λ_β , que é maximal (i.e. $\lambda_\beta > |\lambda|$, se λ está no espectro de \mathcal{L}_β) e simples (i.e. o autoespaço associado a λ_β é unidimensional), e está associado a uma autofunção estritamente positiva φ_β .

Se procedermos da mesma forma, obtemos os mesmos resultados para o operador $\bar{\mathcal{L}}_\beta$, sejam $\bar{\lambda}_\beta$ o respectivo autovalor e $\bar{\varphi}_\beta$ a respectiva autofunção.

Para provarmos que $\bar{\lambda}_\beta = \lambda_\beta$, vamos usar o fato que φ_β e $\bar{\varphi}_\beta$ são positivas e que $\bar{\mathcal{L}}_\beta$ é o adjunto de \mathcal{L}_β (aqui notamos que nossos operadores podem ser definidos no espaço de Hilbert $L^2([0, 1])$, que contém $C([0, 1])$). Logo temos que $\langle \varphi_\beta, \bar{\varphi}_\beta \rangle = \int \varphi_\beta(x) \bar{\varphi}_\beta(x) dx > 0$, e

$$\lambda_\beta \langle \varphi_\beta, \bar{\varphi}_\beta \rangle = \langle \mathcal{L}_\beta \varphi_\beta, \bar{\varphi}_\beta \rangle = \langle \varphi_\beta, \bar{\mathcal{L}}_\beta \bar{\varphi}_\beta \rangle = \bar{\lambda}_\beta \langle \varphi_\beta, \bar{\varphi}_\beta \rangle .$$

□

Vamos denotar por $\varphi_\beta, \bar{\varphi}_\beta$ as autofunções estritamente positivas para \mathcal{L}_β e $\bar{\mathcal{L}}_\beta$ associadas a λ_β , que satisfazem $\int \varphi_\beta(x) dx = 1$ e $\int \bar{\varphi}_\beta(x) dx = 1$. é fácil ver que φ_β e $\bar{\varphi}_\beta$ são funções contínuas.

Vamos definir uma densidade $\theta_\beta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\theta_\beta(x) := \frac{\varphi_\beta(x) \bar{\varphi}_\beta(x)}{\pi_\beta},$$

onde $\pi_\beta = \int \varphi_\beta(x) \bar{\varphi}_\beta(x) dx$, e uma transição $K_\beta : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$K_\beta(x, y) := \frac{e^{\beta A(x, y)} \bar{\varphi}_\beta(y)}{\bar{\varphi}_\beta(x) \lambda_\beta}.$$

Seja $\nu_\beta \in \mathbf{M}$ definida por

$$d\nu_\beta(x, y) := \theta_\beta(x) K_\beta(x, y) dx dy. \quad (2.14)$$

Proposição 2.2. A medida $\nu_\beta = \theta_\beta K_\beta$ definida acima maximiza

$$\int \beta A(x, y) \theta(x) K(x, y) dx dy - \int \theta(x) K(x, y) \ln(K(x, y)) dx dy$$

entre todas as medidas em \mathbf{M} . Ainda

$$\ln \lambda_\beta = \int \beta A \theta_\beta K_\beta dx dy + S[\theta_\beta K_\beta].$$

Demonstração : Pela definição das funções θ_β, K_β , temos que

$$S[\theta_\beta K_\beta] = - \int (\beta A(x, y) + \ln \bar{\varphi}_\beta(y) - \ln \bar{\varphi}_\beta(x) - \ln \lambda_\beta) d\nu_\beta$$

Então

$$\int \beta A \theta_\beta K_\beta dx dy + S[\theta_\beta K_\beta] = \ln \lambda_\beta + \int (\ln \bar{\varphi}_\beta(x) - \ln \bar{\varphi}_\beta(y)) \theta_\beta(x) K_\beta(x, y) dx dy,$$

e a última integral é zero pois $\nu_\beta = \theta_\beta K_\beta \in \widehat{\mathbf{M}}$.

Para mostrar que ν_β é maximizante tomamos ν uma medida qualquer em \mathbf{M} e $0 \leq \tau \leq 1$. Afirmamos que a função

$$I[\tau] := \int \beta A d\nu_\tau + S[\nu_\tau]$$

onde $\nu_\tau = (1 - \tau)\nu_\beta + \tau\nu$, é côncava e $I'(0) = 0$

Primeiramente vamos provar que $I'(0) = 0$:

Aqui fazemos o seguinte abuso de notação: denotamos por ν_τ a densidade da probabilidade $d\nu_\tau$, i.e., $d\nu_\tau = \nu_\tau(x, y) dx dy$.

Note que $\nu'_\tau := \frac{\partial \nu_\tau}{\partial \tau} = \nu - \nu_\beta$ e que

$$I'[\tau] = \int \left[\beta A \nu'_\tau(x, y) - \nu'_\tau(x, y) \ln \left(\frac{\nu_\tau(x, y)}{\int \nu_\tau(x, z) dz} \right) - \int \nu_\tau(x, z) dz \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\nu_\tau(x, y)}{\int \nu_\tau(x, z) dz} \right) \right] dx dy =$$

$$\int \left[\beta A \nu'_\tau(x, y) - \nu'_\tau(x, y) \ln \left(\frac{\nu_\tau(x, y)}{\int \nu_\tau(x, z) dz} \right) - \nu'_\tau(x, y) + \frac{\nu_\tau(x, y) \int \nu'_\tau(x, z) dz}{\int \nu_\tau(x, z) dz} \right] dx dy$$

Temos que $\int \nu'_\tau(x, y) dx dy = 1 - 1 = 0$ e que o último termo da equação acima é igual a $\int \left(\int \frac{\nu_\tau(x, y)}{\int \nu_\tau(x, z) dz} dy \int \nu'_\tau(x, z) dz \right) dx = 1 - 1 = 0$.

Portanto $I'[\tau] = \int \left[\beta A(x, y) - \ln \left(\frac{\nu_\tau(x, y)}{\int \nu_\tau(x, z) dz} \right) \right] \nu'_\tau(x, y) dx dy$,
daí

$$\begin{aligned} I'[0] &= \int \left[\beta A(x, y) - \ln \left(\frac{\nu_\beta(x, y)}{\int \nu_\beta(x, z) dz} \right) \right] (\nu(x, y) - \nu_\beta(x, y)) dx dy \\ &= \int [\beta A(x, y) - \ln(K_\beta(x, y))] (\nu(x, y) - \nu_\beta(x, y)) dx dy \end{aligned}$$

agora usando a definição de K_β e o fato de $\nu, \nu_\beta \in \widehat{\mathbf{M}}$, obtemos que $I'[0] = 0$.

Vejam agora que $I''[\tau] \leq 0$:

$$\begin{aligned} I''[\tau] &= - \int \left(\frac{\nu'_\tau(x, y)}{\nu_\tau(x, y)} - \frac{\int \nu'_\tau(x, z) dz}{\int \nu_\tau(x, z) dz} \right) \nu'_\tau(x, y) dx dy + \\ &+ \int \left[\int \nu'_\tau(x, z) dz \frac{\nu'_\tau(x, y) \int \nu_\tau(x, z) dz - \nu_\tau(x, y) \int \nu'_\tau(x, z) dz}{(\int \nu_\tau(x, z) dz)^2} \right] dx dy \\ &= - \int \nu_\tau(x, y) \left(\frac{\nu'_\tau(x, y)^2}{\nu_\tau(x, y)^2} - 2 \frac{\nu'_\tau(x, y) \int \nu'_\tau(x, z) dz}{\nu_\tau(x, y) \int \nu_\tau(x, z) dz} + \frac{(\int \nu'_\tau(x, z) dz)^2}{(\int \nu_\tau(x, z) dz)^2} \right) dx dy \\ &= - \int \nu_\tau(x, y) \left(\frac{\nu'_\tau(x, y)}{\nu_\tau(x, y)} - \frac{\int \nu'_\tau(x, z) dz}{\int \nu_\tau(x, z) dz} \right)^2 dx dy \leq 0. \end{aligned}$$

□

Lema 2.3. (a) Existe uma constante $c > 0$ tal que para todo $x \in [0, 1]$

$$e^{-\beta c} \leq \varphi_\beta(x) \leq e^{\beta c} \quad e^{-\beta c} \leq \bar{\varphi}_\beta(x) \leq e^{\beta c}.$$

Também as sequências

$$\frac{1}{\beta} \ln \pi_\beta \quad \text{e} \quad \frac{1}{\beta} \ln \lambda_\beta$$

tem pontos de acumulação quando $\beta \rightarrow \infty$.

(b) Os conjuntos

$$\left\{ \frac{1}{\beta} \ln(\varphi_\beta) \mid \beta > 1 \right\} \quad \text{e} \quad \left\{ \frac{1}{\beta} \ln(\bar{\varphi}_\beta) \mid \beta > 1 \right\}$$

são equicontínuos, e relativamente compactos na norma do supremo.

Demonstração :

(b) Apenas precisamos provar a equicontinuidade dos dois conjuntos. Pois tendo isto, e usando o fato que ambos os conjuntos são conjuntos de funções definidas no conjunto compacto $[0, 1]$, usamos o item (a) e o teorema de Arzela-Ascoli para garantir a compacidade relativa do dois conjuntos.

Para obtermos a equicontinuidade do primeiro conjunto, sejam $y \in [0, 1]$, $\beta > 1$ e $\epsilon > 0$. Vamos usar o fato que A é um mapa uniformemente contínuo: sabemos que existe

$\delta > 0$, tal que $|y - z| < \delta$, implica $|A(x, y) - A(x, z)| < \epsilon$, $\forall x \in [0, 1]$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $\varphi_\beta(y) \geq \varphi_\beta(z)$. e portanto:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\beta} \ln(\varphi_\beta(y)) - \frac{1}{\beta} \ln(\varphi_\beta(z)) \right| = \\ & = \frac{1}{\beta} \left(\ln \left(\frac{1}{\lambda_\beta} \int e^{\beta A(x, y)} \varphi_\beta(x) dx \right) - \ln \left(\frac{1}{\lambda_\beta} \int e^{\beta A(x, z)} \varphi_\beta(x) dx \right) \right) = \\ & = \frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{\int e^{\beta A(x, y)} \varphi_\beta(x) dx}{\int e^{\beta A(x, z)} \varphi_\beta(x) dx} \right) \leq \frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{\int e^{\beta(A(x, z) + \epsilon)} \varphi_\beta(x) dx}{\int e^{\beta A(x, z)} \varphi_\beta(x) dx} \right) = \\ & = \frac{1}{\beta} \ln \left(e^{\beta \epsilon} \frac{\int e^{\beta A(x, z)} \varphi_\beta(x) dx}{\int e^{\beta A(x, z)} \varphi_\beta(x) dx} \right) = \epsilon. \end{aligned}$$

Podemos provar a equicontinuidade do segundo conjunto da mesma forma. \square

O lema acima nos permite encontrar $\beta_n \rightarrow \infty$ tal que $\frac{1}{\beta_n} \ln \varphi_{\beta_n}$ tenha pontos de acumulação.

Vamos fixar uma subsequência β_n tal que $\beta_n \rightarrow \infty$ e tal que os três limites a seguir existem:

$$\begin{aligned} V(x) &:= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_n} \ln \varphi_{\beta_n}(x) \quad , \quad \bar{V}(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_n} \ln \bar{\varphi}_{\beta_n}(x) \\ \tilde{m} &:= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_n} \ln \lambda_{\beta_n} \end{aligned}$$

Note que nos limites que definem V e \bar{V} a convergência é uniforme em $x \in [0, 1]$. A princípio, as funções V dependem das sequências β_n que escolhermos.

Proposição 2.3 (Método de Laplace). Seja $f_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ uma sequência de funções que convergem uniformemente, quando k tende a ∞ , a uma função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Então

$$\lim_k \frac{1}{k} \ln \int_0^1 e^{k f_k(x)} dx = \sup_{x \in [0, 1]} f(x).$$

Lema 2.4.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_n} \ln \pi_{\beta_n} = \max_{x \in [0, 1]} (V(x) + \bar{V}(x))$$

Demonstração : Por definição

$$\pi_{\beta_n} = \int_0^1 \varphi_{\beta_n}(x) \bar{\varphi}_{\beta_n}(x) dx = \int_0^1 e^{\beta_n (\frac{1}{\beta} \ln \varphi_{\beta_n}(x) + \frac{1}{\beta} \ln \bar{\varphi}_{\beta_n}(x))} dx.$$

Como $\frac{1}{\beta_n} \ln \varphi_{\beta_n}(x) \rightarrow V(x)$, $\frac{1}{\beta_n} \ln \bar{\varphi}_{\beta_n}(x) \rightarrow \bar{V}(x)$ uniformemente, podemos aplicar o método de Laplace, o que demonstra o lema. \square

Também como consequência do método de Laplace temos o seguinte lema.

Lema 2.5.

$$V(y) = \max_{x \in [0,1]} (V(x) + A(x, y) - \tilde{m})$$

e

$$\bar{V}(x) = \max_{y \in [0,1]} (\bar{V}(y) + A(x, y) - \tilde{m}).$$

Para alguma subsequência (da subsequência $\{\beta_n\}$ fixada logo após a prova do lema 2.3, que vamos continuar denotando por $\{\beta_n\}$), as medidas ν_{β_n} definidas em (2.14) convergem fracamente para uma medida $\nu_\infty \in \widehat{\mathbf{M}}$. Então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int A d\nu_{\beta_n} = \int A d\nu_\infty$$

Teorema 2.4.

$$\int A(x, y) d\nu_\infty(x, y) = m$$

i.e., ν_∞ é uma medida maximizante em $\widehat{\mathbf{M}}$.

A fim de provarmos o teorema precisaremos de alguns resultados, semelhantes a resultados obtidos por [Gom] e [GL].

Proposição 2.4. Dado um potencial $A \in C([0, 1]^2)$, temos que

$$\sup_{\nu \in \widehat{\mathbf{M}}} \int A d\nu = \inf_{f \in C([0,1])} \max_{(x,y)} (A(x, y) + f(x) - f(y))$$

Esta proposição será demonstrada como uma consequência do teorema de dualidade de Fenchel-Rockafellar. Vamos fixar a notação que será necessária para provar a proposição 2.4.

Seja $C([0, 1]^2)$ o conjunto de funções contínuas em $[0, 1]^2$ com a norma do supremo, é sabido que \mathcal{S} , o conjunto de medidas com sinal sobre os borelianos de $[0, 1]^2$, é o espaço dual às funções contínuas.

Definimos a seguinte correspondência convexa: $H : C([0, 1]^2) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $H(\phi) = \max(A + \phi)$ e

$$\mathcal{C} := \{\phi \in C([0, 1]^2) : \phi(x, y) = f(x) - f(y) \text{ , para alguma } f \in C([0, 1])\}$$

E a seguinte correspondência côncava: $G : C([0, 1]^2) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ por $G(\phi) = 0$ se $\phi \in \mathcal{C}$ e $G(\phi) = -\infty$ caso contrário.

Portanto as transformadas de Fenchel correspondentes

$H^* : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $G^* : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, são dadas por

$$H^*(\nu) = \sup_{\phi \in C([0,1]^2)} \left[\int \phi(x, y) d\nu(x, y) - H(\phi) \right]$$

e

$$G^*(\nu) = \inf_{\phi \in C([0,1]^2)} \left[\int \phi(x, y) d\nu(x, y) - G(\phi) \right]$$

Definimos $\mathcal{S}_0 := \{\nu \in \mathcal{S} : \int f(x) - f(y) d\nu(x, y) = 0 \quad \forall f \in C[0, 1]\}$, note que $\mathcal{S}_0 \cap \mathcal{M}_{[0,1]^2} = \widehat{\mathbf{M}}$.

Lema 2.6. Dados H e G como acima, temos que

$$H^*(\nu) = \begin{cases} -\int A(x, y)d\nu(x, y) & \text{se } \nu \in \mathcal{M}_{[0,1]^2} \\ +\infty & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$G^*(\nu) = \begin{cases} 0 & \text{se } \nu \in \mathcal{S}_0 \\ -\infty & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Demonstração : Suponha que $\nu \in \mathcal{S}$ é uma medida não-positiva, i.e., ν associa valor negativo para algum boreliano. Portanto podemos encontrar uma seqüência de funções $\{\phi_k\} \subset C([0, 1]^2)$ tomando valores negativos e tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} \int \phi_k(x, y)d\nu(x, y) = +\infty$. E como $H(\phi_k) \leq H(0) < +\infty$, temos que $H^*(\nu) = +\infty$.

Suponha agora que $\nu \in \mathcal{S}$, $\nu \geq 0$, e $\nu([0, 1]^2) \neq 1$. Temos então que

$$\sup_{\phi \in C([0,1]^2)} \left[\int \phi(x, y)d\nu(x, y) - H(\phi) \right] \geq \sup_{a \in \mathbb{R}} \left[\int a d\nu(x, y) - H(a) \right]$$

$$= \sup_{a \in \mathbb{R}} [a(\nu([0, 1]^2) - 1) - H(0)] = +\infty$$

Finalmente, se $\nu \in \mathcal{M}_{[0,1]^2}$, da definição de H temos que $A(x, y) + \phi(x, y) \leq H(\phi)$, portanto integrando em $[0, 1]^2$ obtemos a seguinte desigualdade

$$\int A(x, y)d\nu(x, y) + \int \phi(x, y)d\nu(x, y) \leq H(\phi)$$

e daí

$$-\int A(x, y)d\nu(x, y) \geq \sup_{\phi \in C([0,1]^2)} \left[\int \phi(x, y)d\nu(x, y) - H(\phi) \right].$$

E como $H(-A) = 0$, obtemos que $H^*(\nu) = -\int A(x, y)d\nu(x, y)$.

Vamos agora nos ocupar de $G^*(\nu)$. Se $\nu \notin \mathcal{S}_0$, então existe uma função $f \in C([0, 1])$ tal que $\int f(x)d\nu(x, y) - \int f(y)d\nu(x, y) \neq 0$, note que $\phi_a(x, y) = a(f(x) - f(y)) \in \mathcal{C}$ portanto temos que

$$G^*(\nu) = \inf_{\phi \in \mathcal{C}} \int \phi(x, y)d\nu(x, y) \leq \inf_{a \in \mathbb{R}} a \left[\int f(x)d\nu(x, y) - \int f(y)d\nu(x, y) \right] = -\infty.$$

E finalmente, se $\nu \in \mathcal{S}_0$ temos que $\int \phi(x, y)d\nu(x, y) = 0$ para toda $\phi \in \mathcal{C}$, e como para toda função $\bar{\phi} \in \bar{\mathcal{C}}$ existe uma seqüência de funções $\phi_n \rightarrow \bar{\phi}$ e a convergência é uniforme obtemos que $\int \bar{\phi}(x, y)d\nu(x, y) = 0$. Logo $G^*(\nu) = 0$. \square

Demonstração da proposição 2.4: O teorema de dualidade de Fenchel-Rockafellar garante que

$$\sup_{\phi \in C([0,1]^2)} [G(\phi) - H(\phi)] = \inf_{\nu \in \mathcal{S}} [H^*(\nu) - G^*(\nu)]$$

Portanto, pelo lema 2.6 e usando que a convergência é uniforme, vemos que

$$\inf_{\nu \in \widehat{\mathbf{M}}} \left[- \int A(x, y) d\nu(x, y) \right] = \sup_{\phi \in \mathcal{C}} \left[- \max_{(x, y)} (A + \phi)(x, y) \right] = \sup_{\phi \in \mathcal{C}} \left[- \max_{(x, y)} (A + \phi)(x, y) \right]$$

Usando a definição de \mathcal{C} obtemos

$$\sup_{\nu \in \widehat{\mathbf{M}}} \int A d\nu = \inf_{f \in C([0,1])} \max_{(x, y)} (A(x, y) + f(x) - f(y)).$$

□

Lema 2.7. $\tilde{m} = m$.

Demonstração : Note que pela proposição 2.4 e pelo lema 2.5 temos que $m \leq \tilde{m}$. Para mostrar a outra desigualdade, lembre que

$$\ln \lambda_{\beta_n} = \int \beta_n A d\nu_{\beta_n} + S[\nu_{\beta_n}].$$

Portanto

$$\tilde{m} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int A d\nu_{\beta_n} + \frac{1}{\beta_n} S[\nu_{\beta_n}].$$

Note que $\nu_{\beta_n} \in \widehat{\mathbf{M}}$, o que implica $\int A d\nu_{\beta_n} \leq m$.

Como $S[\nu_{\beta_n}] \leq 0$, temos que

$$\int A d\nu_{\beta_n} + \frac{1}{\beta_n} S[\nu_{\beta_n}] \leq m \quad \forall n$$

Logo $\tilde{m} \leq m$.

□

Demonstração do teorema 2.4: Lembre que $\nu_{\beta_n} \rightarrow \nu_\infty$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int A d\nu_{\beta_n} = \int A d\nu_\infty$$

pelos lema 2.7

$$m = \lim_{n \rightarrow \infty} \int A d\nu_{\beta_n} + \frac{1}{\beta_n} S[\nu_{\beta_n}] \leq \int A d\nu_\infty.$$

□

2.4 Unicidade de medidas maximizantes e Sub-ações

Note que vários resultados (e definições) que aparecerão a seguir são adaptações de resultados (e definições) da teoria de Aubry-Mather com tempo discreto, que foram provados, uns em [Gom], outros na seção 1.6 do capítulo 1. Mesmo assim vamos escrever as demonstrações para que a leitura torne-se independente e clara.

Definição 2.10. (a) Uma função contínua $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada uma sub-ação para frente se, para quaisquer $x, y \in [0, 1]$ temos que

$$u(y) \geq A(x, y) + u(x) - m. \quad (2.15)$$

(b) Uma função contínua $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada uma sub-ação para trás se, para quaisquer $x, y \in [0, 1]$ temos que

$$u(x) \geq A(x, y) + u(y) - m. \quad (2.16)$$

Observação: Sejam $A : [0, 1]^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\sigma : [0, 1]^{\mathbb{N}} \rightarrow [0, 1]^{\mathbb{N}}$ tal que $\sigma(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$. Então, neste caso mais geral, uma sub-ação (para frente) é uma função contínua $u : [0, 1]^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$A(\mathbf{x}) \leq u \circ \sigma(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x}) - m(A).$$

Note que esta definição no caso em que A depende apenas das duas primeiras coordenadas de \mathbf{x} se traduz como

$$A(x_1, x_2) \leq u(x_2) - u(x_1) - m(A),$$

e portanto o item (a) da definição acima está de acordo com a definição geral.

Definição 2.11. (a) Uma função contínua $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada uma sub-ação calibrada para frente se, para qualquer y temos que

$$u(y) = \max_x [A(x, y) + u(x) - m], \quad (2.17)$$

(b) Uma função contínua $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada uma sub-ação calibrada para trás se, para qualquer x temos que

$$u(x) = \max_y [A(x, y) + u(y) - m], \quad (2.18)$$

Observação : Note que V e \bar{V} definidos no lema 2.5 são, respectivamente, sub-ação calibradas para frente e sub-ação calibradas para trás (lembre que $\tilde{m} = m$ pelo lema 2.7).

Seja u uma sub-ação calibrada para trás, usando o fato que $[0, 1]$ é compacto, existe $y(x)$ (não necessariamente único) tal que

$$u(x) = A(x, y(x)) + u(y(x)) - m. \quad (2.19)$$

Proposição 2.5. Seja $\nu \in \mathfrak{M}_0$ uma medida maximizante, e u uma sub-ação calibrada para trás. Então ν -q.t.p.

$$u(x) = A(x, y) + u(y) - m.$$

Demonstração : Note que $u(x) \geq A(x, y) + u(y) - m$ para todo $y \in [0, 1]$, como $\nu \in \mathfrak{M}_0$ então $\int Adv = m$, e como $\int (u(x) - u(y)) d\nu = 0$, obtemos a proposição. \square

No próximo lema precisaremos da definição do superdiferencial e do subdiferencial de uma função.

Definição 2.12. (a) O superdiferencial de uma função u no ponto x é definido por

$$D^+u(x) = \{p \in \mathbb{R} : \limsup_{|v| \rightarrow 0} \frac{u(x+v) - u(x) - pv}{|v|} \leq 0\}.$$

(b) O subdiferencial de uma função u no ponto x é definido por

$$D^-u(x) = \{p \in \mathbb{R} : \liminf_{|v| \rightarrow 0} \frac{u(x+v) - u(x) - pv}{|v|} \geq 0\}.$$

Para as propriedades principais de $D^-u(x)$ e $D^+u(x)$ veja [EvG], [Gom] e [Gom1].

Lembramos que uma propriedade importante é a seguinte: se $D^-u(w) \neq \emptyset$ e $D^+u(w) \neq \emptyset$ então u é diferenciável em w .

Lema 2.8. Para qualquer sub-ação calibrada para trás u , e $(x, y(x))$ satisfazendo a equação (2.19), temos que

$$D^-u(x) \neq \emptyset \quad \forall x, \quad \text{e} \quad \frac{\partial A}{\partial x}(x, y(x)) \in D^-u(x)$$

e

$$D^+u(y(x)) \neq \emptyset \quad \text{e} \quad -\frac{\partial A}{\partial y}(x, y(x)) \in D^+u(y(x)).$$

Demonstração : Seja $(x, y(x))$ satisfazendo a equação (2.19), então para qualquer $w \in [0, 1]$ temos que

$$u(x+w) \geq A(x+w, y(x)) + u(y(x)) - m$$

usando a equação (2.19), vemos que

$$u(x+w) - u(x) - A(x+w, y(x)) + A(x, y(x)) \geq 0,$$

portanto

$$\liminf_{|w| \rightarrow 0} \frac{u(x+w) - u(x) - \left(\frac{\partial A}{\partial x}(x, y(x)) w + r(w)\right)}{|w|} \geq 0,$$

logo $\frac{\partial A}{\partial x}(x, y(x)) \in D^-u(x)$.

Ainda para $(x, y(x))$ satisfazendo (2.19) e qualquer $w \in [0, 1]$ temos que

$$u(x) \geq A(x, y(x) + w) + u(y(x) + w) - m,$$

usando a equação (2.19), obtemos

$$u(y(x) + w) - u(y(x)) + A(x, y(x) + w) - A(x, y(x)) \leq 0$$

daí

$$\limsup_{|w| \rightarrow 0} \frac{u(y(x) + w) - u(y(x)) - \left(-\frac{\partial A}{\partial y}(x, y(x)) w + r(w)\right)}{|w|} \leq 0$$

portanto $-\frac{\partial A}{\partial y}(x, y(x)) \in D^+u(y(x))$.

□

Lema 2.9. Para qualquer medida $\nu \in \widehat{\mathbf{M}}$, temos que para quase todo ponto $(x, y) \in \text{supp}(\nu)$, existe z tal que $(z, x) \in \text{supp}(\nu)$.

Demonstração : Defina o conjunto

$$R = \{(x, y) \in \text{supp}(\nu) : x \neq w, \forall (z, w) \in \text{supp}(\nu)\}$$

Suponha, por contradição, que $\nu(R) = \epsilon > 0$.

Seja $\pi_j : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ a projeção na j -ésima coordenada, $j \in \{1, 2\}$.

Seja ν_2 a medida nos borelianos de $[0, 1]$ dada por $\nu_2(B) = \nu(\pi_2^{-1}(B))$, onde B é qualquer boreliano de $[0, 1]$.

Defina $R_1 = \pi_1(R)$. Temos que

$$R_1 = \{x \in \pi_1(\text{supp}(\nu)) : x \neq w \forall (z, w) \in \text{supp}(\nu)\}.$$

Afirmamos que

$$\nu_2(R_1) = \int_{\text{supp}(\nu)} \chi_{R_1}(y) d\nu(x, y) = 0.$$

De fato, a primeira igualdade é imediata. Para provarmos a segunda igualdade, seja $(x, y) \in \text{supp}(\nu)$, temos duas possibilidades: Se $y \notin \pi_1(\text{supp}(\nu))$, então $y \notin R_1$. E se $y \in \pi_1(\text{supp}(\nu))$ temos que $(x, y) \in \text{supp}(\nu)$ e portanto $y \notin R_1$, o que demonstra a afirmação.

Por outro lado, note que $\pi_1^{-1}(R_1) \cap \text{supp}(\nu) = R$, e daí

$$\int_{\text{supp}(\nu)} \chi_{R_1}(x) d\nu(x, y) = \int_{\text{supp}(\nu)} \chi_{\pi_1^{-1}(R_1)}(x, y) d\nu(x, y) = \nu(R) = \epsilon.$$

Agora seja U um aberto de $[0, 1]$ que contém R_1 e tal que $\nu_2(U) < \nu_2(R_1) + \epsilon/2 = \epsilon/2$. Tomamos uma sequência de funções contínuas f_j tal que $f_j \uparrow \chi_U$. Usando o teorema da convergência monótona e $\nu \in \widehat{\mathbf{M}}$, obtemos:

$$\begin{aligned} \epsilon/2 > \nu_2(U) &= \int \chi_U(y) d\nu(x, y) = \lim_j \int f_j(y) d\nu(x, y) = \\ &= \lim_j \int f_j(x) d\nu(x, y) = \int \chi_U(x) d\nu(x, y) \geq \int \chi_{R_1}(x) d\nu(x, y) = \epsilon \end{aligned}$$

o que é uma contradição.

□

Teorema 2.5. Seja $\nu \in \mathfrak{M}_0$ uma medida maximizante qualquer. Se o observável A é C^2 , e $\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} \neq 0$, então a medida ν está suportada em um gráfico.

Demonstração : Seja u uma sub-ação calibrada para trás. Note que, para quaisquer p e x fixados, a equação $p = \frac{\partial A}{\partial x}(x, y)$ tem uma única solução $y(x, p)$ pois $\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} > 0$.

Fixamos $(x_0, y_0) \in \text{supp}(\nu)$, então (x_0, y_0) satisfaz a equação (2.19). Pelo lema 2.9 existe z_0 tal que $(z_0, x_0) \in \text{supp}(\nu)$, isto significa que $x_0 = y(z_0)$, e portanto podemos aplicar o lema 2.8 e obtemos que u é diferenciável em x_0 . Logo

$$Du(x_0) = \frac{\partial A}{\partial x}(x_0, y_0)$$

e portanto y_0 na equação acima fica definido unicamente. \square

Lema 2.10. Se o observável A é C^2 , e $\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} \neq 0$ então $\cup_{\nu \in \mathfrak{M}_0} \text{supp}(\nu)$ está contido em um gráfico.

Demonstração : Sejam ν_1 e ν_2 duas medidas maximizantes. Suponha que exista $x \in \pi_1(\text{supp}(\nu_1)) \cap \pi_1(\text{supp}(\nu_2))$. Sejam y_1 e y_2 os (únicos) pontos tais que $(x, y_1) \in \text{supp}(\nu_1)$ e $(x, y_2) \in \text{supp}(\nu_2)$, e seja u uma sub-ação calibrada para trás. Pela proposição 2.5, temos que

$$u(x) = A(x, y_1) + u(y_1) - m \quad \text{e} \quad u(x) = A(x, y_2) + u(y_2) - m.$$

Agora seguindo a demonstração do teorema 2.5, obtemos $y_1 = y_2$. \square

Definição 2.13. Dados k e $x, y \in [0, 1]$, vamos chamar de um caminho de tamanho k começando em x e terminando em y uma sequência ordenada de pontos

$$(x_1, \dots, x_k) \in [0, 1] \times \dots \times [0, 1]$$

satisfazendo $x_1 = x, x_k = y$.

Vamos denotar por $\mathcal{P}_k(x, y)$ o conjunto de tais caminhos de tamanho k .

Observação: Cabe aqui ressaltar as diferenças entre os problemas do capítulo 1 e o deste capítulo.

1) Seja $N = 1, L : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, note que por hipótese $L(x, v) \rightarrow +\infty$ quando $|v| \rightarrow \infty$, portanto não podemos considerar $A : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ como caso particular do problema de A-M.

2) Um caminho no capítulo 1 é uma sequência ordenada de pontos $(x_0, \dots, x_k) \in \mathbb{T}^N \times \dots \times \mathbb{T}^N$, e tal que para cada x_j associamos uma velocidade $v_j = x_{j+1} - x_j, 0 \leq j < k$, desta forma através dos pares (x_j, v_j) podemos calcular a ação do caminho (x_0, \dots, x_k) . Enquanto que no presente capítulo não existe a noção de velocidade, os pontos de um caminho não tem ligação alguma entre si e a ação é calculada usando apenas os pontos do caminho.

Definição 2.14. Um ponto $x \in [0, 1]$ é chamado não errante com respeito a A se, para cada $\epsilon > 0$, existe $k \geq 1$ e um caminho de tamanho k (x_1, \dots, x_k) em $\mathcal{P}_k(x, x)$ tal que

$$\left| \sum_{i=1}^{k-1} (A - m)(x_i, x_{i+1}) \right| < \epsilon.$$

Vamos denotar por $\Omega(A)$ o conjunto dos pontos não errantes com respeito a A .

Lema 2.11. Suponha que o observável A é C^2 , e $\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} \neq 0$. Seja $\nu \in \mathfrak{M}_0$ uma medida maximizante, então $\pi_1(\text{supp}(\nu)) \subset \Omega(A)$.

Demonstração : Seja u sub-ação calibrada para trás. Seja $Y : \text{dom}(Du) \rightarrow [0, 1]$, onde $\text{dom}(Du)$ são os pontos onde u é diferenciável, o mapa definido por $Y(x) = y$ onde y é o único ponto tal que (x, y) satisfaz (2.19). Como veremos na da proposição 2.12 a seguir, este mapa é monótono, portanto podemos definir um mapa mensurável $Y : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, tomando o limite a esquerda. Note que $\nu_\infty \circ \pi_1^{-1}$ -q.t.p. $\pi_1(\text{supp} \nu_\infty) \subset \text{dom}(Du)$.

Vejamus que $\nu_\infty \circ \pi_1^{-1}$ é uma medida invariante para Y . De fato, seja $f \in C^0(\Omega(A))$, temos que:

$$\begin{aligned} \int f \circ Y(x) d\nu_\infty \circ \pi_1^{-1}(x) &= \int f \circ Y(x) d\nu_\infty(x, y) = \int f(y) d\nu_\infty(x, y) = \\ &= \int f(x) d\nu_\infty(x, y) = \int f(x) d\nu_\infty \circ \pi_1^{-1}(x). \end{aligned}$$

Sejam $(x, y) \in \text{supp} \nu_\infty$ e B uma bola centrada em x , como $\text{supp} \nu_\infty$ está contido em um gráfico, $\nu_\infty \circ \pi_1^{-1}(B) > 0$. Logo, pelo teorema de recorrência de Poincaré, existe $x_1 \in B \cap \text{dom}(Du)$ tal que $Y^j(x_1) =: x_{j+1}$ retornam infinitas vezes a B . Note que temos que os pontos x_j satisfazem a seguinte equação:

$$u(x_j) - u(x_{j+1}) = A(x_j, x_{j+1}) - m$$

pois, pelo lema 2.8, u é diferenciável em cada ponto x_j e portanto só existe um $y(x_j)$ (que coincide com x_{j+1}) que satisfaz a equação (2.19).

Fixados $\epsilon > 0$ e $x_j \in B$ podemos construir o seguinte caminho: $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_j) = (x, x_2, \dots, x_{j-1}, x)$, e temos que

$$\sum_{i=1}^{j-1} (A - m)(\tilde{x}_i, \tilde{x}_{i+1}) = u(x_1) - u(x_j) + A(x, x_2) - A(x_1, x_2) + A(x_{j-1}, x) - A(x_{j-1}, x_j) \leq \epsilon$$

se B é suficientemente pequena, pois u é Lipschitz (já que A é C^2). \square

Definição 2.15. Chamamos de potencial de Mañé a função $S : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$S(x, y) = \inf_k S_k(x, y),$$

E a barreira de Peierls a função $h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definida por

$$h(x, y) = \liminf_{k \rightarrow \infty} S_k(x, y),$$

onde

$$S_k(x, y) = \inf_{(x_1, \dots, x_k) \in \mathcal{P}_k(x, y)} \left[- \sum_{i=1}^{k-1} (A - m)(x_i, x_{i+1}) \right].$$

As funções S e h tem as seguintes propriedades

(a) se $x, y, z \in [0, 1]$ então $S(x, z) \leq S(x, y) + S(y, z)$.

(b) $S(\cdot, y)$ é uma sub-ação para frente e $S(x, \cdot)$ é uma sub-ação para trás.

(c) $h(\cdot, y)$ é uma sub-ação calibrada para frente e $h(x, \cdot)$ é uma sub-ação calibrada para trás.

(d) $\Omega(A) = \{x \in [0, 1] : S(x, x) = h(x, x) = 0\}$

Definição 2.16. Uma propriedade P é dita genérica para A , no sentido de Mañé, se existe um conjunto genérico \mathcal{O} (interseção enumerável de abertos densos) de funções em $C^2([0, 1])$ tal que se f está em \mathcal{O} então $A + f$ tem a propriedade P .

Observação: Note que para fins de encontrar medidas maximizantes para uma perturbação do observável $A(x, y)$ é irrelevante o fato de $f \in C^2([0, 1])$ ser uma função que dependa da variável x ou da variável y . Já que se $\nu \in \widehat{\mathbf{M}}$ temos que $\int f(x)d\nu(x, y) = \int f(y)d\nu(x, y)$, daí

$$\int A(x, y) + f(x)d\nu(x, y) = \int A(x, y) + f(y)d\nu(x, y).$$

Vamos supor que f é uma função da variável x .

Queremos provar, que quando A é genérico no sentido de Mañé, então V e \bar{V} são únicas (a menos de constantes).

Para tanto primeiro vamos provar que genericamente a medida maximizante é única, como veremos no teorema a seguir.

Proposição 2.6. Se o observável A é C^2 , e $\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} \neq 0$. Então o conjunto

$$G_2 = \{f \in C^2([0, 1]) : \mathfrak{M}_0(A + f) = \{\nu\} \text{ e } \pi_1(\text{supp}(\nu)) = \Omega(A + f)\}$$

é genérico em $C^2([0, 1])$.

Primeiro vamos provar que

$$G_1 = \{f \in C^2([0, 1]) : \mathfrak{M}_0(A + f) = \{\nu\}\} \quad (2.20)$$

é genérico. Vamos usar um resultado de [BC] para provarmos este fato.

Observação: Se considerarmos na definição de G_2 , potenciais da forma $A(x, y) + l x$, onde l é uma constante, em vez de $A(x, y) + f(x)$, o mesmo resultado é verdadeiro para um conjunto genérico de $l \in \mathbb{R}$. Este fato é natural (e significa algo interessante) uma vez que é comum considerarmos o termo magnético como uma função desta forma. Deste modo, por exemplo, fixando o termo $\frac{1}{2}(x - y)^2$, para um conjunto denso de $l \in \mathbb{R}$, temos que o estado de temperatura zero para $A(x, y) = \frac{1}{2}(x - y)^2 + l x$ é único.

Vamos fixar a notação necessária para aplicarmos o resultado de [BC]: sejam $C([0, 1]^2)$ o conjunto de funções contínuas em $[0, 1]^2$, $F = C([0, 1]^2)^*$ o espaço vetorial dos funcionais contínuos $\nu : C([0, 1]^2) \rightarrow \mathbb{R}$, $E = C^2([0, 1])$ com a topologia C^2 , e G o espaço das medidas de Borel finitas com sinal em $[0, 1]$. $K \subset G$ é o conjunto das probabilidades de Borel em $[0, 1]$, e note que $\widehat{\mathbf{M}} \subset F$. Denotaremos por $F_A : \widehat{\mathbf{M}} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcional linear definido por $F_A(\nu) = \int A d\nu$. Note que $\mathfrak{M}_0(A)$ é o conjunto de pontos de $\nu \in \widehat{\mathbf{M}}$ que maximiza $F_A|_{\widehat{\mathbf{M}}}$, e seja $\pi : F \rightarrow G$ a projeção induzida por $\pi_1 : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$.

Lema 2.12. Existe um conjunto genérico no sentido de Baire $\mathcal{O} \subset C^2([0, 1])$ tal que, para toda $f \in \mathcal{O}$, temos que

$$\#\pi(\mathfrak{M}_0(A + f)) = 1.$$

Demonstração : Apenas notamos que F_A é um sub-espço de dimensão 0 de $\widehat{\mathbf{M}}^*$, então a proposição segue pelo teorema 5 de [BC]. \square

Note que para obtermos (2.20), precisamos provar que $\#\mathfrak{M}_0(A + f) = 1$.

Lema 2.13. Se o observável A é C^2 , e $\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} \neq 0$ então temos que $\#\mathfrak{M}_0(A) = \#\pi(\mathfrak{M}_0(A))$.

Demonstração : Pelo lema 2.10 sabemos que a restrição a $\cup_{\nu \in \mathfrak{M}_0} \text{supp}(\nu)$ da projeção $[0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ é um mapa injetivo. Portanto o mapa linear $\pi : \mathfrak{M}_0(A) \rightarrow G$ é injetivo, e $\#\pi(\mathfrak{M}_0(A)) = \#\mathfrak{M}_0(A)$. \square

Demonstração da proposição 2.6: Observe que pelos lemas 2.12, e 2.13 temos que o conjunto G_1 dado em (2.20) é genérico, logo só existe uma medida maximizante.

Seja $f_0 \in G_1$, e $f_1 \in C^2([0, 1])$ tal que $f_1 \geq 0$ e $\{x : f_1(x) = 0\} = \pi_1(\text{supp}(\nu))$. Então $\pi_1(\text{supp}(\nu)) \subset \Omega(A + f_0 + f_1)$.

Afirmção: Se $x_1 \notin \pi_1(\text{supp}(\nu))$ então $x_1 \notin \Omega(A + f_0 + f_1)$.

De fato, , $f_1(x_1) > 0$, e

$$\begin{aligned} h^{(A+f_0+f_1)}(x_1, x_1) &= \liminf_{k \rightarrow \infty} \left(\inf_{\mathcal{P}_k(x_1, x_1)} \sum_{i=1}^{k-1} (A + f_0 + f_1 - m)(x_i, x_{i+1}) \right) \geq \\ &= \liminf_{k \rightarrow \infty} \left(\inf_{\mathcal{P}_k(x_1, x_1)} \sum_{i=1}^{k-1} (A + f_0 + -m)(x_i, x_{i+1}) + f_1(x_1) \right) = \\ &= h^{(A+f_0)}(x_1, x_1) + f_1(x_1) > 0. \end{aligned}$$

Logo $\pi_1(\text{supp}(\nu)) = \Omega(A + f_0 + f_1)$. \square

Observação: Cabe aqui dizer que se consideramos o problema de maximização entre as medidas de Markov estacionárias, i.e., probabilidades nos caminhos em $[0, 1]^{\mathbb{N}}$, então, sob as mesmas hipóteses, teremos os mesmos resultados. Ou seja, a medida maximizante é única. Embora para o problema de maximização entre as medidas invariantes para o shift, não há unicidade.

Proposição 2.7. Se u é uma sub-ação calibrada para trás, então para qualquer x temos que

$$u(x) = \sup_{p \in \Omega(A)} \{u(p) - h(x, p)\}.$$

Demonstração : Vamos inicialmente provar que

$$u(x) \geq \sup_{p \in \Omega(A)} \{u(p) - h(x, p)\}.$$

Seja $(x_1, \dots, x_k) \in \mathcal{P}_k(x, z)$, então

$$u(x_i) - u(x_{i+1}) \geq A(x_i, x_{i+1}) - m$$

e

$$u(x_k) - u(x_1) \leq - \sum_{i=1}^{k-1} A(x_i, x_{i+1}) - m$$

daí $u(z) - u(x) \leq h(x, z)$ e portanto $u(x) \geq \sup_{p \in \Omega(A)} \{u(p) - h(x, p)\}$.

Mostraremos agora a outra desigualdade. Como u é uma sub-ação calibrada para trás, denotamos por $x_1 = x$, existe x_2 tal que $u(x_1) = u(x_2) + A(x_1, x_2) - m$, recursivamente podemos construir $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ tal que $u(x_n) = u(x_{n+1}) + A(x_n, x_{n+1}) - m$.

Seja p um ponto de acumulação da sequência $\{x_n\}$, afirmamos que $p \in \Omega$. De fato, se $x_{n_j} \rightarrow p$, seja $j > i$, construímos $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n_j - n_i}) = (p, x_{n_{i+1}}, \dots, x_{n_{j-i}}, p)$ e portanto

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n_j - n_i - 1} (A - m)(\tilde{x}_i, \tilde{x}_{i+1}) \\ = & \sum_{k=n_i}^{n_j - 1} (A - m)(x_k, x_{k+1}) + A(p, x_{n_{i+1}}) - A(x_{n_i}, x_{n_{i+1}}) + A(x_{n_{j-1}}, p) - A(x_{n_{j-1}}, x_{n_j}) \\ & = u(x_{n_j}) - u(x_{n_i}) + A(p, x_{n_{i+1}}) - A(x_{n_i}, x_{n_{i+1}}) + A(x_{n_{j-1}}, p) - A(x_{n_{j-1}}, x_{n_j}) \end{aligned}$$

Logo fixado $\epsilon > 0$ para i suficientemente grande temos que

$$\left| \sum_{i=1}^{n_j - n_i - 1} (A - m)(\tilde{x}_i, \tilde{x}_{i+1}) \right| \leq \epsilon$$

e daí $p \in \Omega$.

Seja agora $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n_j}) = (x_1, x_2, \dots, x_{n_j-1}, p)$ então

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=1}^{n_j - 1} (A - m)(\tilde{x}_i, \tilde{x}_{i+1}) + u(x) - u(p) \\ = & - \sum_{i=1}^{n_j - 1} (A - m)(x_i, x_{i+1}) + A(x_{n_j-1}, x_{n_j}) - A(x_{n_j-1}, p) + u(x) - u(p) \\ & = u(x_{n_j}) - u(p) + A(x_{n_j-1}, x_{n_j}) - A(x_{n_j-1}, p) \end{aligned}$$

Logo dado $k > 0$ existe n_k tal que

$$- \sum_{i=1}^{n_k - 1} (A - m)(\tilde{x}_i, \tilde{x}_{i+1}) \leq u(p) - u(x) + \frac{1}{k}$$

fazendo $k \rightarrow \infty$ obtemos que

$$h(x, p) \leq u(p) - u(x)$$

daí

$$u(x) = \sup_{p \in \Omega} \{u(p) - h(x, p)\}.$$

□

Proposição 2.8. Existe uma correspondência bijetiva entre o conjunto das sub-ações calibradas para trás e o conjunto de funções $f \in C^0(\Omega(A))$ satisfazendo $f(y) - f(x) \leq h(x, y)$, para todos os pontos x, y em $\Omega(A)$.

Demonstração : Suponha que f satisfaz $f(y) - f(x) \leq h(x, y)$. Definimos o mapa $f \mapsto u_f(x) := \sup_{p \in \Omega} \{f(p) - h(x, p)\}$. Vamos mostrar que u_f é sub-ação calibrada para trás.

Primeiro mostraremos que é uma sub-ação: dados $\epsilon > 0$ e $y \in [0, 1]$ temos que existe $p \in \Omega(A)$ tal que

$$u_f(y) - \epsilon \leq f(p) - h(y, p)$$

daí usando que $h(\cdot, p)$ é uma sub-ação calibrada para frente, obtemos que

$$u_f(y) - u_f(x) \leq f(p) - h(y, p) + \epsilon - f(p) + h(x, p) \leq S(x, y) + \epsilon$$

fazendo $\epsilon \rightarrow 0$ obtemos que

$$u_f(y) - u_f(x) \leq -A(x, y) + m.$$

Vejamos agora que u_f é calibrada: dados $x \in [0, 1]$ e $\epsilon = \frac{1}{j}$ existe $p_j \in \Omega(A)$ tal que

$$u_f(x) - \epsilon \leq f(p_j) - h(x, p_j)$$

e para cada j escolhemos y_j tal que

$$h(x, p_j) = h(y_j, p_j) + A(x, y_j) - m$$

seja y ponto de acumulação de $\{y_j\}$, como

$$f(p_j) - h(y_j, p_j) \leq u_f(y_j)$$

temos que

$$u_f(x) - \epsilon \leq f(p_j) - h(x, p_j) \leq u_f(y_j) - A(x, y_j) + m$$

fazendo $j \rightarrow \infty$ concluímos que

$$u_f(x) \leq u_f(y) - A(x, y) + m$$

e como u_f é uma sub-ação vale a outra desigualdade e portanto temos igualdade.

Por fim vamos mostrar que o mapa é uma bijeção:

Injetividade: Seja $f \in C^0(\Omega(A))$ satisfazendo $f(y) - f(x) \leq h(x, y)$, para $x \in \Omega(A)$ temos que $h(x, x) = 0$ portanto para todo $p \in \Omega(A)$ temos que

$$f(p) - h(x, p) \leq f(x) \leq \sup_{p \in \Omega} \{f(p) - h(x, p)\} = u_f(x)$$

daí $u_f(x) = f(x), \forall x \in \Omega(A)$. Então $f \neq \tilde{f}$ implica $u_f \neq u_{\tilde{f}}$.

Sobrejetividade: Seja u sub-ação calibrada, defina $f = u|_{\Omega}$, pela proposição 2.7 temos que f satisfaz $f(y) - f(x) \leq h(x, y)$ e $u_f(x) = \sup_{p \in \Omega} \{f(p) - h(x, p)\} = u(x)$. \square

Vamos supor que A tem uma única medida maximizante ν_∞ e que $\pi_1(\text{supp}(\nu_\infty)) = \Omega(A)$.

Como foi visto na demonstração da proposição 2.11 existe um mapa mensurável $Y : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Tal que para $x \in \text{dom} Du$ para alguma sub-ação calibrada para trás u então $Y(x) = y(x)$ o único ponto que atinge a igualdade em (2.19).

Lema 2.14. Se A é genérico no sentido de Mañé, então a medida $\nu_\infty \circ \pi_1^{-1}$ é uma medida ergódica invariante para Y .

Demonstração : Por argumento análogo ao utilizado no lema 2.11, a medida $\nu_\infty \circ \pi_1^{-1}$ é invariante para Y . Precisamos apenas provar que Y é unicamente ergódica: Seja η uma medida nos borelianos de $\Omega(A)$ que é invariante para Y . Se definimos, para cada boreliano A de $[0, 1]^2$, $\nu(A) = \eta(\pi_1(A \cap \text{supp}(\nu_\infty)))$, temos que ν é a única medida de probabilidade em $[0, 1]^2$ tal que

- (1) $\text{supp}(\nu) \subset \text{supp}(\nu_\infty)$
- (2) $\pi_1(\nu) = \eta$.
- (3) $\nu \in \widehat{\mathbf{M}}$.

Vamos provar (3), seja $f \in C([0, 1])$, temos que

$$\int f(y) d\nu(x, y) = \int f(Y(x)) d\nu(x, y) = \int f(Y(x)) d\nu(x) = \int f(x) d\nu(x) = \int f(x) d\nu(x, y)$$

onde usamos, em sequência: (1); (2) ; η é Y -invariante ; (2).

Note que para qualquer sub-ação calibrada para trás u temos que

$$\int A(x, y) d\nu(x, y) = \int (u(x) - u(y) + m) d\nu(x, y) = m,$$

onde na segunda igualdade usamos (1) e a proposição 2.5, e, na terceira igualdade usamos (3). Portanto temos que ν é uma medida maximizante, e por unicidade $\nu = \nu_\infty$. Isto implica que $\eta = \pi_1(\nu_\infty)$, o que mostra a existência de uma única medida invariante para Y , esta portanto é ergódica. \square

Proposição 2.9. Se $\nu \circ \pi_1^{-1}$ é uma medida ergódica em $[0, 1]$, e u, u' são duas sub-ações calibradas para trás para A , então $u - u'$ é constante em $\pi_1(\text{supp}(\nu))$.

Demonstração : Pelo lema 2.9 vemos que se $x \in \pi_1(\text{supp} \nu)$ então existe z tal que $(z, x) \in \text{supp} \nu$, logo pela proposição 2.5 temos que

$$u(z) - u(x) = A(z, x) - m = u'(z) - u'(x).$$

Portanto $u - u' = (u - u') \circ Y$ em $\pi_1(\text{supp} \nu)$ e como $\nu \circ \pi_1^{-1}$ é uma medida ergódica segue que $u - u'$ é constante em $\pi_1(\text{supp} \nu)$. \square

Teorema 2.6. Se A é genérico no sentido de Mañé, então o conjunto das sub-ações calibradas para trás é unitário.

Demonstração : Por hipótese ν_∞ é única medida maximizante, portanto $\nu_\infty \circ \pi_1^{-1}$ é ergódica, e $\pi_1(\text{supp}(\nu_\infty)) = \Omega(A)$.

Seja $f, f' : \Omega(A) \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas satisfazendo a hipótese da proposição 2.8, então usando esta proposição e obtemos duas sub-ações calibradas $u_f, u_{f'}$ tais que $f - f' = u_f - u_{f'}$ em $\Omega(A)$, portanto pela proposição 2.9 $u_f - u_{f'}$ é constante em $\Omega(A)$, e outra vez, pela proposição 2.8, vemos que o conjunto das sub-ações calibradas para trás é unitário. \square

Isto mostra que a função \bar{V} que aparece no lema 2.5 é única, ou seja, no lema 2.5 mostramos a existência de sub-ações calibradas para trás e sob as hipóteses acima mostramos a unicidade. Para provar que V é única os argumentos são muito semelhantes.

2.5 Princípio de Grandes Desvios

Vamos voltar a considerar o problema de maximização

$$\max_{\mu \in \mathcal{M}_0} \left\{ \int A d\mu \right\}. \quad (2.21)$$

A proposição a seguir nos permite concluir que, genericamente no sentido de Mañé, a projeção nas duas primeiras coordenadas das medidas maximizantes é única.

Proposição 2.10. Suponha que A tem uma única medida maximizante $\nu_\infty \in \widehat{\mathbf{M}}$. Então

(i) toda medida maximizante em \mathcal{M}_0 é projetada por Π em ν_∞ .

(ii) ν_∞ pode ser estendida para uma medida maximizante $\mu_\infty \in \mathcal{M}_0$ que é uma medida de Markov estacionária.

(iii) se ν_β é a família de medidas dada por (2.14), então estas podem ser estendidas a medidas de Markov estacionárias absolutamente contínuas μ_β , que convergem fracamente para a medida maximizante μ_∞ .

Demonstração : O item (i) segue do item (b) e (c) da proposição 2.1 e da proposição 2.6, o item (ii) segue do item (a) da proposição 2.1, e o item (iii) segue da observação após a prova da proposição 2.1. \square

Portanto mostramos a existência de uma medida maximizante μ_∞ que pode ser aproximada por medidas de Markov estacionárias μ_β , que são explicitamente calculadas. Para esta sequência $\{\mu_\beta\}$ vamos mostrar um princípio de grandes desvios.

Também vamos mostrar um princípio de grandes desvios para as medidas bidimensionais ν_β que, pelo que foi visto anteriormente, converge para ν_∞ .

De agora em diante vamos supor que a medida maximizante $\nu_\infty \in \widehat{\mathbf{M}}$, e as funções V e \bar{V} são únicas. Como já foi dito anteriormente esta propriedade é genérica no sentido de Mañé.

Lema 2.15. Suponha que $k \geq 2$. Seja $F_k : [0, 1]^k \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por

$$F_k(x_1, \dots, x_k) := \max(V + \bar{V}) - V(x_1) - \bar{V}(x_k) - \sum_{i=1}^{k-1} (A - m)(x_i, x_{i+1}).$$

Seja $D_k = A_1 \dots A_k$ um cilindro de tamanho k . Então, existe o limite

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \ln \mu_\beta(D_k) = - \inf_{(x_1, \dots, x_k) \in D_k} F_k(x_1, \dots, x_k).$$

Demonstração : Definimos

$$f_{k,\beta}(x_1, \dots, x_k) := \frac{1}{\beta} \ln \pi_\beta + \frac{k-1}{\beta} \ln \lambda_\beta - \sum_{i=1}^{k-1} A(x_i, x_{i+1}) - \frac{1}{\beta} \ln \varphi_\beta(x_1) - \frac{1}{\beta} \ln \bar{\varphi}_\beta(x_k).$$

Como consequência da unicidade de V e \bar{V} temos que $f_{k,\beta} \rightarrow F_k$ uniformemente quando $\beta \rightarrow \infty$.

Começamos provando a seguinte afirmação:

Afirmação: Seja $C_k = A_1 \dots A_k$ um cilindro de tamanho k . Temos que

$$\limsup_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \ln \mu_\beta(C_k) \leq - \inf_{(x_1, \dots, x_k) \in C_k} F_k(x_1, \dots, x_k).$$

Para provar a *afirmação*, note que

$$\begin{aligned} \mu_\beta(C_k) &= \int_{A_1} \dots \int_{A_k} \frac{e^{\beta A(x_{k-1}, x_k)} \bar{\varphi}_\beta(x_k)}{\bar{\varphi}_\beta(x_{k-1}) \lambda_\beta} \dots \frac{e^{\beta A(x_1, x_2)} \bar{\varphi}_\beta(x_2)}{\bar{\varphi}_\beta(x_1) \lambda_\beta} \frac{\varphi_{\beta(x_1)} \bar{\varphi}_{\beta(x_1)}}{\pi_\beta} dx_k \dots dx_1 = \\ &= \int_{A_1} \dots \int_{A_k} e^{-\beta f_{k, \beta}(x_1, \dots, x_k)} dx_k \dots dx_1 \leq e^{-\beta \inf_{C_k} f_{k, \beta}(x_1, \dots, x_k)} |C_k|, \end{aligned} \quad (2.22)$$

onde $|C_k|$ denota a medida de Lebesgue de C_k . Portanto

$$\frac{1}{\beta} \ln \mu_\beta(C_k) \leq - \inf_{C_k} f_{k, \beta}(x_1, \dots, x_k) + \frac{1}{\beta} \ln |C_k|,$$

e então, pela convergência uniforme, temos que:

$$\limsup_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \ln \mu_\beta(C_k) \leq - \inf_{C_k} F_k(x_1, \dots, x_k),$$

o que termina a prova da *afirmação*.

Agora vamos provar o lema: Fixamos $\delta > 0$, usando a continuidade de F_k podemos encontrar um ponto $(x_1, \dots, x_k) \in D_k^0$ (no interior de D_k) tal que

$$\inf_{D_k} F_k \leq F_k(x_1, \dots, x_k) < \inf_{D_k} F_k + \delta. \quad (2.23)$$

Seja D_δ um cilindro de tamanho k , tal que $(x_1, \dots, x_k) \in D_\delta \subset D_k^0$, e

$$\inf_{D_k} F_k \leq F_k(y_1, \dots, y_k) < \inf_{D_k} F_k + 2\delta \quad \forall (y_1, \dots, y_k) \in D_\delta. \quad (2.24)$$

Temos que

$$\mu_\beta(D_k) \geq \mu_\beta(D_\delta) \geq e^{-\beta \sup_{D_\delta} f_{k, \beta}(y_1, \dots, y_k)} |D_\delta|,$$

onde a última desigualdade vem de (2.22). Agora usamos outra vez a convergência uniforme de $f_{k, \beta}$ a F_k para obter

$$\liminf_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \ln \mu_\beta(D_k) \geq - \sup_{D_\delta} F_k.$$

Pela equação (2.24), vemos que

$$\liminf_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \ln \mu_\beta(D_k) \geq - \inf_{D_k} F_k - 2\delta \quad (2.25)$$

Fazendo $\delta \rightarrow 0$, e usando a *afirmação*, terminamos a prova do lema. \square

Note que se fixarmos $k = 2$ acima, obtemos um princípio de grandes desvios para a família $\nu_\beta \rightarrow \nu_\infty$.

Teorema 2.7. Seja $I : [0, 1]^{\mathbb{N}} \rightarrow [0, +\infty]$ a função definida por

$$I(\mathbf{x}) := \sum_{i \geq 1} V(x_{i+1}) - V(x_i) - (A - m)(x_i, x_{i+1}).$$

Seja $D = A_1 \dots A_k$ um cilindro de tamanho arbitrário k . Então, existe o limite

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \ln \mu_{\beta}(D) = - \inf_{\mathbf{x} \in D} I(\mathbf{x}).$$

Note que pelo lema 2.5 e pelo fato que a sequência de somas parciais da série que define $I(\mathbf{x})$ é uma sequência não decrescente, para cada \mathbf{x} , temos que $I(\mathbf{x})$ está bem definida.

Para provarmos o teorema 2.7 precisaremos de alguns resultados e definições.

Para cada $N \geq 2$, estendemos a função F_N ao espaço $[0, 1]^{\mathbb{N}}$:

$$F_N(\mathbf{z}) := F_N(z_1, \dots, z_N) = \sup(V + \bar{V}) - V(z_1) - \bar{V}(z_N) - \sum_{i=1}^{N-1} (A - m)(z_i, z_{i+1}).$$

Lema 2.16. $\forall \mathbf{z} \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$, Temos que

$$F_N(\mathbf{z}) \geq \max(V + \bar{V}) - (V(z_1) + \bar{V}(z_1)) \geq 0.$$

Demonstração : Pelo lema 2.5

$$\bar{V}(x) - \bar{V}(y) \geq A(x, y) - m, \quad \forall x, y,$$

então

$$- \sum_{i=1}^{N-1} (A - m)(z_i, z_{i+1}) \geq \bar{V}(z_N) - \bar{V}(z_1).$$

Portanto, pela definição de F_N

$$F_N(\mathbf{z}) \geq \max(V + \bar{V}) - (V(z_1) + \bar{V}(z_1)).$$

□

Lema 2.17. (a) para um ponto $\mathbf{x} \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$ fixado, temos que

$$V(x_1) + \sum_{i=1}^{k-1} (A - m)(x_i, x_{i+1}) + \bar{V}(x_k)$$

é decrescente com respeito a k .

(b) Se $I(\mathbf{x}) < +\infty$, então existe o limite

$$L(\mathbf{x}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} (V(\sigma^k(\mathbf{x})) + \bar{V}(\sigma^k(\mathbf{x}))).$$

Demonstração : (a) Isto segue do lema 2.5 (lembre que $\tilde{m} = m$).

(b) Temos que

$$\begin{aligned} I(\mathbf{x}) &= \sum_{i \geq 1} V(x_{i+1}) - V(x_i) - (A - m)(x_i, x_{i+1}) = \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} V(x_k) + \bar{V}(x_k) - \lim_{k \rightarrow \infty} \left(V(x_1) + \sum_{i=1}^{k-1} (A - m)(x_i, x_{i+1}) + \bar{V}(x_k) \right) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Portanto, se $I(\mathbf{x}) < +\infty$, segue, pelo item (a), que $V(x_k) + \bar{V}(x_k) = V(\sigma^k(\mathbf{x})) + \bar{V}(\sigma^k(\mathbf{x}))$ tem que convergir. \square

Lema 2.18. Suponha que $I(\mathbf{x}) < +\infty$. Então, se definimos, para cada $M \in \mathbb{N}$, a medida de probabilidade

$$\mu_M = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{M-1} \delta_{\sigma^j(\mathbf{x})},$$

temos que $\Pi(\mu_M) \rightarrow \nu_\infty$ na topologia fraca- \star (onde Π é a projeção nas duas primeiras coordenadas).

Demonstração : Dado $\epsilon > 0$, existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $N \geq N_\epsilon$, e todo $M > N$,

$$\sum_{i=N}^{M-1} V(x_{i+1}) - V(x_i) - (A - m)(x_i, x_{i+1}) < \epsilon.$$

então

$$V(x_M) - V(x_N) + (M - N)m < \sum_{i=N}^{M-1} A(\sigma^i(\mathbf{x})) + \epsilon,$$

e

$$\frac{1}{M - N} \sum_{i=N}^{M-1} A(\sigma^i(\mathbf{x})) > m + \frac{V(x_M) - V(x_N)}{M - N} - \frac{\epsilon}{M - N},$$

e daí obtemos que

$$\liminf_{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M-1} A(\sigma^i(\mathbf{x})) \geq m.$$

Agora lembre que

$$\frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M-1} A(\sigma^i(\mathbf{x})) = \int A d\mu_M \leq m,$$

e finalmente obtemos que

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \int A d\mu_M = \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M-1} A(\sigma^i(\mathbf{x})) = m.$$

Usando a compacidade da bola fechada de raio 1 na topologia fraca- \star , temos que $\{\mu_M\}$ tem subsequências convergentes. Qualquer limite de uma destas subsequências convergentes é uma medida estacionária (uma medida σ -invariante) e é uma medida maximizante, pela última igualdade. Como qualquer medida maximizante é projetada em ν_∞ por Π , provamos o lema. \square

Proposição 2.11. Se $I(\mathbf{x}) < +\infty$, então

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} V(\sigma^k(\mathbf{x})) + \bar{V}(\sigma^k(\mathbf{x})) = \max(V + \bar{V}).$$

Demonstração : Seja $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3, \dots) \in \text{supp}(\mu_\infty)$. Temos que $(z_1, z_2) \in \text{supp}(\nu_\infty)$. Portanto, pelo lema 2.18 existe uma subsequência tal que $\Pi(\sigma^{k_l}(\mathbf{x})) \rightarrow (z_1, z_2)$.

Fixado $\epsilon > 0$. Seja

$$B_{k_l, \epsilon}(\mathbf{x}) := \{\mathbf{y} \in [0, 1]^{\mathbb{N}} : |y_j - x_{j+k_l}| \leq \epsilon, \forall 1 \leq j \leq 2\}$$

um cilindro fechado de tamanho 2 'centrado' em $\sigma^{k_l}(\mathbf{x})$.

Se l é suficientemente grande, temos que

$$B_{k_l, \epsilon}(\mathbf{x}) \subset \{\mathbf{y} \in [0, 1]^{\mathbb{N}} : |y_j - z_j| \leq 2\epsilon, \forall 1 \leq j \leq 2\}.$$

Note que $\mu_\infty(B_{k_l, \epsilon}(\mathbf{x})) = \nu_\infty(B_{k_l, \epsilon}(\mathbf{x})) > 0$, e usando o lema 2.15 para $k = 2$, segue que existe um ponto $(z_{1, \epsilon}, z_{2, \epsilon}, z_{3, \epsilon}, z_{4, \epsilon}, \dots) \in B_{k_l, \epsilon}(\mathbf{x})$, tal que $F_2((z_{1, \epsilon}, z_{2, \epsilon})) = 0$.

Portanto, podemos usar o fato que F_2 depende somente nas duas coordenadas para obtermos que $F_2(\mathbf{w}_\epsilon) = 0$, onde $\mathbf{w}_\epsilon = (z_{1, \epsilon}, z_{2, \epsilon}, z_3, z_4, \dots)$ é definido como o ponto em $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ cujas primeiras duas coordenadas são iguais as de $(z_{1, \epsilon}, z_{2, \epsilon})$, enquanto que as outras coordenadas são iguais as de \mathbf{z} .

Agora, fazendo $\epsilon \rightarrow 0$, temos que $\mathbf{w}_\epsilon \rightarrow \mathbf{z}$. Logo podemos usar a continuidade de F_N para obter que $F_2(\mathbf{z}) = 0$.

Usando outra vez a continuidade de F_2 , temos que $F_2(\sigma^{k_l}(\mathbf{x})) \rightarrow 0$.

O lema 2.16 mostra que

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} V(\sigma^{k_l}(\mathbf{x})) + \bar{V}(\sigma^{k_l}(\mathbf{x})) = \max(V + \bar{V}),$$

e finalmente usando o lema 2.17(b) provamos a proposição 2.11. \square

Demonstração do teorema 2.7: Primeiro vamos mostrar a seguinte afirmação.

Afirmação:

$$I(\mathbf{x}) = \max(V + \bar{V}) - \lim_{k \rightarrow \infty} \left(V(x_1) + \sum_{i=1}^{k-1} (A - m)(x_i, x_{i+1}) + \bar{V}(x_k) \right).$$

Para provar a *afirmação*, temos que considerar duas possibilidades: se $I(\mathbf{x}) < +\infty$, então (2.26) pode ser combinada com a proposição 2.11 para obtermos a *afirmação*. Se $I(\mathbf{x}) = +\infty$, basta usar a expressão

$$I(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(V(x_k) - V(x_1) - \sum_{i=1}^{k-1} (A - m)(x_i, x_{i+1}) \right).$$

Pelo lema 2.15, apenas precisamos provar que

$$- \inf_{(x_1, \dots, x_k) \in D} F_k(x_1, \dots, x_k) = - \inf_{\mathbf{x} \in D} I(\mathbf{x}).$$

Começamos por provar que

$$- \inf_{(x_1, \dots, x_k) \in D} F_k(x_1, \dots, x_k) \leq - \inf_{\mathbf{x} \in D} I(\mathbf{x}).$$

Dado $\delta > 0$, existe um ponto $(y_1, \dots, y_k) \in D$ tal que

$$F_k(y_1, \dots, y_k) < \inf_{(x_1, \dots, x_k) \in C} F_k(x_1, \dots, x_k) + \delta.$$

Pela definição de F_k ,

$$F_k(y_1, \dots, y_k) = \max(V + \bar{V}) - V(y_1) - \bar{V}(y_k) - \sum_{i=1}^{k-1} (A - m)(y_i, y_{i+1}).$$

Para cada $j \geq k$ escolhamos um y_{j+1} que satisfaz $\bar{V}(y_j) = \bar{V}(y_{j+1}) + A(y_j, y_{j+1}) - m$. então definimos $\mathbf{y} := (y_1, \dots, y_k, y_{k+1}, \dots)$.

Segunda afirmação: $I(\mathbf{y}) = F_k(y_1, \dots, y_k)$. De fato,

$$\begin{aligned} F_k(y_1, \dots, y_k) &= \max(V + \bar{V}) - \left(V(y_1) + \bar{V}(y_k) + \sum_{i=1}^{k-1} (A - m)(y_i, y_{i+1}) \right) = \\ &= \max(V + \bar{V}) - \left(V(y_1) + \bar{V}(y_j) + \sum_{i=1}^{j-1} (A - m)(y_i, y_{i+1}) \right), \quad \forall j \geq k. \end{aligned}$$

então, pelo raciocínio acima e a forma que escolhemos \mathbf{y} , obtemos que $F_k(y_1, \dots, y_k)$ é igual a

$$\max(V + \bar{V}) - \lim_{j \rightarrow \infty} \left(V(y_1) + \bar{V}(y_j) + \sum_{i=1}^{j-1} (A - m)(y_i, y_{i+1}) \right) = I(\mathbf{y}).$$

Isto implica que

$$- \inf_{(x_1, \dots, x_k) \in D} F_k(x_1, \dots, x_k) < -I(\mathbf{y}) + \delta \leq - \inf_{\mathbf{x} \in D} I(\mathbf{x}) + \delta.$$

Fazendo $\delta \rightarrow 0$, temos a primeira desigualdade.

Agora, vamos provar a segunda desigualdade:

$$- \inf_{\mathbf{x} \in D} I(\mathbf{x}) \leq - \inf_{(x_1, \dots, x_k) \in D} F_k(x_1, \dots, x_k).$$

Para provarmos isto, vamos usar o lema 2.17(a), e então, pela *afirmação*, temos que

$$\begin{aligned} I(\mathbf{x}) &= \max(V + \bar{V}) - \lim_{j \rightarrow \infty} \left(V(x_1) + \sum_{i=1}^{j-1} (A - m)(x_i, x_{i+1}) + \bar{V}(x_j) \right) \geq \\ &\geq \max(V + \bar{V}) - \left(V(x_1) + \sum_{i=1}^{k-1} (A - m)(x_i, x_{i+1}) + \bar{V}(x_k) \right) = F_k(x_1, \dots, x_k). \end{aligned}$$

□

2.6 Monotonicidade do Gráfico e sub-ações separantes

Suponha que A é C^2 e satisfaz

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y}(x, y) \neq 0.$$

Suponhamos sem perda de generalidade que $\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y}(x, y) > 0$.

Então, para todo $x < x', y < y'$ temos que

$$A(x, y) + A(x', y') > A(x, y') + A(x', y). \quad (2.27)$$

Seja \bar{V} a sub-ação calibrada para trás definida acima.

Como A é C^2 , então \bar{V} é Lipschitz, portanto \bar{V} é diferenciável λ -q.t.p., onde λ é a medida de Lebesgue. Seja $\text{dom}D\bar{V}$ os pontos onde \bar{V} é diferenciável.

Seguindo a prova do teorema 2.5 temos que para $x \in \text{dom}D\bar{V}$, existe um único $y(x)$ tal que

$$\bar{V}(x) = A(x, y(x)) + \bar{V}(y(x)) - m. \quad (2.28)$$

Proposição 2.12. A função $Y : \text{dom}D\bar{V} \rightarrow [0, 1]$, definida por $Y(x) = y(x)$, $y(x)$ satisfazendo (2.28), é monótona não decrescente.

Demonstração : Seja $x < x'$, chamaremos de $z = Y(x), z' = Y(x')$, suponha que $z > z'$. Sabemos que

$$\bar{V}(x) = A(x, z) + \bar{V}(z) - m \quad , \quad \bar{V}(x') = A(x', z') + \bar{V}(z') - m,$$

e

$$\bar{V}(x) \geq A(x, z') + \bar{V}(z') - m \quad , \quad \bar{V}(x') \geq A(x', z) + \bar{V}(z) - m.$$

Somando as duas primeiras equações e comparando com a soma das duas últimas, obtemos que

$$A(x, z) + A(x', z') \geq A(x, z') + A(x', z),$$

for $x < x', z' < z$, o que é uma contradição com (2.27). \square

Se assumimos que $\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y}(x, y) < 0$, então uma função $Y(x)$ como acima pode ser definida, e será monótona não crescente.

Agora vamos mostrar a existência de uma sub-ação separante (veja [GLT] e seção 1.6 do capítulo 1). A idéia é: dado um potencial A encontrar uma sub-ação u tal que na equação de cohomologia temos igualdade somente nos pontos x que estão em $\Omega(A)$ (onde isto tem que acontecer, de qualquer maneira). Desta forma, temos um critério para separar os pontos de $\Omega(A)$ dos outros pontos. Podemos considerar um novo potencial $\tilde{A} = A(x, y) + u(x) - u(y)$ onde o máximo de \tilde{A} é exatamente atingido em $\Omega(\tilde{A})$.

Definição 2.17. Dizemos que uma sub-ação u é separante para frente se

$$\max_x [A(x, y) + u(x) - u(y)] = m \iff x \in \Omega(A),$$

e uma sub-ação u é separante para trás se

$$\max_y [A(x, y) + u(y) - u(x)] = m \iff y \in \Omega(A).$$

Vamos mostrar a existência de uma sub-ação separante para trás.

Lema 2.19. Se $x \in \Omega(A)$ existe $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k, \dots) \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$ tal que $x_1 = x$ e

$$h(x_k, x_1) \leq \sum_{i=1}^{k-1} (A - m)(x_i, x_{i+1}).$$

Demonstração : Se $x \in \Omega(A)$, então existe uma sequência de caminhos $\{(x_1^n, \dots, x_{j_n}^n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $x_1^n = x_{j_n}^n = x$ e $j_n \rightarrow \infty$ satisfazendo

$$\sum_{j=1}^{j_n-1} (A - m)(x_j^n, x_{j+1}^n) \rightarrow 0. \quad (2.29)$$

Já que $|x_j^n| \leq 1$, existe um raio (x_1, \dots, x_k, \dots) que é o limite dos caminhos acima, a convergência sendo uniforme em cada parte compacta.

Fixado $k \in \mathbb{N}$, para $j_n > k$, temos que

$$S^{j_n-k}(x_k, x_1) \leq -A(x_k, x_{k+1}^n) + m - \sum_{j=k+1}^{j_n-1} (A - m)(x_j^n, x_{j+1}^n),$$

e

$$\begin{aligned} S^{j_n-k}(x_k, x_1) + \sum_{j=1}^{j_n-1} (A - m)(x_j^n, x_{j+1}^n) &\leq \\ -A(x_k, x_{k+1}^n) + m + \sum_{j=1}^k (A - m)(x_j^n, x_{j+1}^n). \end{aligned}$$

Portanto tomando o limite $\liminf_{n \rightarrow \infty}$ e usando (2.29) obtemos

$$h(x_k, x_1) \leq \sum_{j=1}^{k-1} (A - m)(x_j, x_{j+1}).$$

□

Lema 2.20. Seja u uma sub-ação para trás, então para todo $x \in \Omega(A)$ temos que

$$\max_y \{u(y) - u(x) + A(x, y)\} = m.$$

Demonstração : Como u satisfaz a equação (2.16), para qualquer $(x_1, \dots, x_k) \in \mathcal{P}_k(x, y)$ temos que $u(y) - u(x) \leq -\sum_{j=1}^{k-1} (A - m)(x_j, x_{j+1})$, portanto $u(y) - u(x) \leq h(x, y)$.

Sejam $x \in \Omega(A)$ e $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k, \dots)$ o ponto em $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ que existe pela proposição (2.19).

Pelo lema (2.19) temos que

$$u(x_1) - u(x_k) \leq h(x_k, x_1) \leq \sum_{j=1}^{k-1} (A - m)(x_j, x_{j+1}),$$

e, como u é uma sub-ação para trás,

$$u(x_k) - u(x_1) \leq - \sum_{j=0}^{k-1} (A - m)(x_j, x_{j+1}),$$

em particular, para $k = 1$,

$$u(x_2) - u(x_1) = -A(x_1, x_2) + m.$$

Isto implica

$$\max_y \{u(y) - u(x) + A(x, y)\} = m.$$

□

Lema 2.21. Se o observável A é Holder, então a função $S_x(\cdot) := S(x, \cdot)$ é uniformemente Holder e tem a mesma constante de Holder de A .

Demonstração : Fixamos x , $\epsilon > 0$ e $y, z \in [0, 1]$, então existe $(x_1, \dots, x_k) \in \mathcal{P}_k(x, y)$ tal que

$$\left| - \sum_{i=1}^{k-1} (A - m)(x_i, x_{i+1}) \right| \leq S(x, y) + \epsilon.$$

Considere agora o seguinte caminho: $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) = (x_1, \dots, x_{k-1}, z) \in \mathcal{P}_k(x, z)$, então

$$- \sum_{i=1}^{k-1} (A - m)(\tilde{x}_i, \tilde{x}_{i+1}) = - \sum_{i=1}^{k-1} (A - m)(x_i, x_{i+1}) + A(x_{k-1}, y) - A(x_{k-1}, z),$$

portanto,

$$S(x, z) \leq - \sum_{i=1}^{k-1} (A - m)(\tilde{x}_i, \tilde{x}_{i+1}) \leq S(x, y) + \epsilon + \text{Hol}_\alpha(A) |z - y|^\alpha, \quad \forall \epsilon,$$

i.e., $S(x, y) - S(x, z) \leq \text{Hol}_\alpha(A) |z - y|^\alpha$. Trocando os papéis de y e z obtemos que $|S(x, y) - S(x, z)| \leq \text{Hol}_\alpha(A) |z - y|^\alpha$, o que nos dá a Holder continuidade de S_x , independente de x . □

Teorema 2.8. Se o observável A é Holder, então existe uma sub-ação separante para trás.

Demonstração : Por definição,

$$S(x, y) \leq -A(x, y) + m \quad \forall y \in [0, 1]$$

Se $x \notin \Omega(A)$, então $S(x, x) > 0$. Portanto

$$S_x(y) - S_x(x) < -A(x, y) + m \quad \forall y \in [0, 1]$$

Como $\Omega(A)$ é um conjunto fechado, então para cada $x \notin \Omega(A)$ podemos encontrar uma vizinhança $V_x \subset [0, 1] \setminus \Omega(A)$ de x tal que

$$S_x(y) - S_x(z) < -A(z, y) + m, \quad \forall y \in [0, 1], \forall z \in V_x.$$

Podemos extrair, da família de vizinhanças $\{V_x\}_{x \notin \Omega(A)}$, uma família enumerável $\{V_{x_j}\}_{j=1}^\infty$ que ainda é uma cobertura de $[0, 1] \setminus \Omega(A)$.

Definimos

$$\tilde{S}_{x_j}(z) = S_{x_j}(z) - S_{x_j}(0)$$

como S_{x_j} é uniformemente Holder, isto implica que $|\tilde{S}_{x_j}(z)| \leq \text{Hol}_\alpha(A)z^\alpha$, $\forall x_j$, logo a série

$$u(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\tilde{S}_{x_j}(z)}{2^j}$$

está bem definida e é uniformemente convergente, pois $[0, 1]$ é compacto. Note que u é uma combinação convexa infinita de sub-ações para trás \tilde{S}_{x_j} , e portanto u é também uma sub-ação para trás.

Fixado $x \in [0, 1] \setminus \Omega(A)$, existe $k \geq 1$ tal que $x \in V_{x_k}$. Agora, $\forall y \in [0, 1]$ temos que

$$\begin{aligned} u(y) - u(x) &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{S_{x_j}(y) - S_{x_j}(x)}{2^j} = \frac{S_{x_k}(y) - S_{x_k}(x)}{2^k} + \sum_{j \neq k} \frac{S_{x_j}(y) - S_{x_j}(x)}{2^j} < \\ &\frac{-A(x, y) + m}{2^k} + \sum_{j \neq k} \frac{-A(x, y) + m}{2^j} < -A(x, y) + m. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\max_y \{u(y) - u(x) + A(x, y)\} < m, \quad \text{se } x \notin \Omega(A),$$

e, como u é uma sub-ação para trás, temos pelo lema 2.20 que

$$\max_y \{u(y) - u(x) + A(x, y)\} = m, \quad \text{se } x \in \Omega(A).$$

□

Referências

- [A] S. Adams. *Mathematical Statistical Mechanics*. Max-Planck-Institut für Math , 2006.
- [A1] N. Anantharaman. *On the zero-temperature or vanishing viscosity limit for certain Markov processes arising from Lagrangian dynamics*. J. Eur. Math. Soc., 6 (2): 207-276, 2004.
- [A2] N. Anantharaman. *Counting geodesics which are optimal in homology*. Erg. Theo. and Dyn. Syst., 23 (2): 353-388, 2003.
- [AIPS] N. Anantharaman, R. Iturriaga, P. Padilla, H. Sánchez-Morgado, *Physical solutions of the Hamilton-Jacobi equation*. Disc. Contin. Dyn. Syst. Ser. B 5 (3) 513-528 (2005).
- [AL] K. Athreya and S. Lahiri. *Measure Theory and Probability Theory*. Springer Verlag, 2006.
- [AGS] Ambrosio, L., Gigli, N. and Savaré, G. *Gradient Flows in Metric Spaces and in the Space of Probability Measures*. Basel: ETH Zürich, Birkhäuser Verlag. (2005).
- [Ba] P. Bhattacharya and M. Majumdar. *Random Dynamical Systems*. Cambridge Univ. Press, 2007.
- [Ban] V. Bangert. *Mather sets for twist maps and geodesics on tori*, Dynamics Reported 1, 1-56, 1988.
- [BBNg] I. Brevik, J-M Borven, and S. Ng. *Viscous Brane Cohomology with a Brane-Bulk energy interchange term*, General Relativity and Gravitation, V. 38, N. 5, 907-915(9) 2006
- [BC] P. Bernard, G. Contreras. *A Generic Property of Families of Lagrangians Systems*. Preprint CIMAT 2006.
- [BLT] A. Baraviera, A. O. Lopes and Ph. Thieullen. *A Large Deviation Principle for equilibrium states of Holder potentials: the zero temperature case*. Stoch. and Dyn.(6): 77-96, 2006.
- [Bousch1] T. Bousch. *Le poisson n'a pas d'arêtes*, Annales de l'Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques, Vol 36, 489-508 (2000).
- [CI] G. Contreras, R. Iturriaga. *Global minimizers of autonomous Lagrangians*, 22° Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 1999.

- [CG] J. P. Conze, Y. Guivarc'h. *Croissance des sommes ergodiques et principe variationnel*, manuscript circa 1993.
- [CLT] G. Contreras, A. O. Lopes, Ph. Thieullen. *Lyapunov minimizing measures for expanding maps of the circle*, Ergodic Theory and Dynamical Systems Vol 21, 1379-1409 (2001).
- [CP] G. Contreras and G. Paternain. *Connecting orbits between static classes for generic Lagrangian systems*. Topology 41, pp 645-666, 2002.
- [CS] P. Cannarsa and C. Sinestrari. *Semiconcave functions, Hamilton-Jacobi equations, and optimal control*. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 58. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2004.
- [Cv] M. Cvetic, S. Nojiri and S. D. Odintsov, *Black hole thermodynamics and negative entropy in de Sitter and anti-de Sitter Einstein Gauss Bonnet gravity*, Nuclear Physics B, V. 628, Issues 1-2, 295-330, , 2002
- [De] K. Deimling. *Nonlinear Functional Analysis*, Springer Verlag, 1985
- [Del] C. Dellacherie. *Probabilities and potential*. North-Holland, 1978
- [DZ] A. Dembo and O. Zeitouni. *Large Deviations Techniques and Applications*. Springer Verlag, 1998.
- [EvG] L. C. Evans and R. F. Gariepy. *Measure Theory and Fine Properties of Functions* CRC Press, 1991
- [Ev] L. C. Evans. *Weak Convergence Methods for Nonlinear Partial Differential Equations*. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, 1990.
- [Fa] A. Fathi. *Weak KAM Theorem and Lagrangian Dynamics*. Cambridge University Press 2004. To appear.
- [FS] A. Fathi and A. Siconolfi. *Existence of C^1 critical subsolutions of the Hamilton-Jacobi equations*. Inv. Math. 155, pp 363-388, 2004.
- [GL] E. Garibaldi and A. O. Lopes. *On Aubry-Mather theory for symbolic Dynamics*. Erg Theo and Dyn Systems, Vol 28 , Issue 3, 791-815, 2008.
- [GL1] D. A. Gomes and A. O. Lopes. *Exponential Decay of correlation for the Stochastic Process associated to the Entropy Penalized method*. Preprint 2007. To appear in São Paulo Journal of Mathematical Sciences.
- [GLT] E. Garibaldi, A. O. Lopes and P. Thieullen. *On separating sub-actions*. Preprint 2006. To appear.
- [GLM] D. Gomes and A. O. Lopes. and J. Mohr. *The Mather measure and a Large Deviation Principle for the Entropy Penalized Method*. Preprint 2007. To appear.
- [Go] C. Gole. *Symplectic twist maps*. World Sci. Pub Co Inc, 1998.

- [Gom] D. A. Gomes. *Viscosity Solution methods and discrete Aubry-Mather problem*. Discrete Contin. Dyn. Syst., 13(1): 103-116, 2005.
- [Gom1] D. A. Gomes. *Calculus of Variations*. 2006
- [GV] D. A. Gomes, E. Valdinoci. *Entropy Penalization Methods for Hamilton-Jacobi Equations*. to appear in Advances in Math.
- [Hop] E. Hopf. *An inequality for Positive Linear Integral Operators*, Journal of Mathematics and Mechanics, V. 12. N.5, 683-692, 1963
- [Ka] S. Karlin *Total Positivity*. Stanford Univ. Press, 1968.
- [Lu] E. Lubkin. *Negative entropy, energy, and heat capacity in connection with surface tension: Artifact of a model or real?*, Inter. Journal of Theoretical Physics, V. 26, N. 5, 1987
- [Man] R. Mañé. *Generic properties and problems of minimizing measures of Lagrangian systems*, Nonlinearity, Vol 9, 273-310. 1996
- [Mat] J. Mather. *Action minimizing invariant measures for positive definite Lagrangian Systems*, Math. Z., 207 (2), pp 169-207, 1991
- [Ni] R. K. Niven. *Cost of s-fold Decisions in Exact Maxwell-Boltzmann, Bose-Einstein and Fermi-Dirac Statistics*, Physica A, Volume 365, Issue 1, p. 142-149, 2006
- [Os] A. Ostrowski. *On positive matrices*, Math. Annalen, V. 150, 276-284, 1963
- [PP] W. Parry and M. Pollicott. *Zeta functions and the periodic orbit structure of hyperbolic dynamics*, Astérisque Vol 187-188 1990.
- [PY] M. Pollicott. and M. Yuri *Dynamical Systems and Ergodic Theory*, London Mathematical Society Students Texts 40, 1998.
- [Ra] S. Rachev and L. Ruschendorf. *Mass transportation problems, Vol I and II*. Springer Verlag, 1998.
- [Sch] H. H. Schaefer. *Banach Lattices and Positive Operators*, Springer Verlag, 1974
- [Sp] F. Spitzer. *A Variational characterization of finite Markov chains*. The Annals of Mathematical Statistics. (43): N.1 303-307, 1972.
- [Th] C. Thompson. *Infinite-Spin Ising Model in one dimension*. Journal of Mathematical Physics. (9): N.2 241-245, 1968.
- [V] A. van Enter, S. Romano and V. Zagrebnov. *First-order transitions for some generalized XY models*. J. Phys. A 39, no. 26, 439-445, 2006.
- [Tay] Angus E. Taylor, Introduction to Functional Analysis, Wiley, New York, 1958.
- [W] W. F. Wreżinski and E. Abdalla. *A precise formulation of the third law of thermodynamics with applications to statistical physics and black holes*. Preprint USP 2007.