

DIOGO VALDUGA POZZA

**CÚPULA DA CATEDRAL DE FLORENÇA:
ANÁLISE UTILIZANDO O
MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

Trabalho de Diplomação a ser apresentado ao Departamento de Engenharia Civil da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de Engenheiro Civil

Orientador: João Ricardo Masuero

Porto Alegre
dezembro 2015

DIOGO VALDUGA POZZA

**CÚPULA DA CATEDRAL DE FLORENÇA:
ANÁLISE UTILIZANDO O
MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

Porto Alegre, 04 de dezembro de 2015

Prof. João Ricardo Masuero
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil
Orientador

BANCA EXAMINADORA

Prof. João Ricardo Masuero (UFRGS)
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil

Prof. Jean Marie Désir (UFRGS)
Dr. pela COPPE/Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil

Profa. Virgínia Maria Rosito d'Avila (UFRGS)
Dra. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil

Dedico este trabalho aos meus pais, que nunca duvidaram da minha capacidade em seguir adiante.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais pelo suporte e carinho durante toda a minha vida, pelo apoio as minhas ideias, por me dar educação e crer em mim. Não os desapontei!

Agradeço a todos os professores que com alguma maestria conseguiram passar seus conhecimentos a mim. Espero ser digno o bastante de levar vossos ensinamentos para a vida e para a profissão.

Ao meu orientador, João Ricardo Masuero, pela infinita paciência e dedicação ao me auxiliar na elaboração desse trabalho, e por não desistir de mim, um muito obrigado.

Aos amigos, futuros colegas engenheiros que o CEUE me proporcionou, um muito obrigado pela parceria, pelas horas trabalhadas, pela dedicação em fazer o melhor pelos alunos dentro da Universidade.

Aos colegas da Engenharia Civil, agradeço pelas horas de estudos, pelas discussões produtivas sobre engenharia, ou não, mas que valeram cada minuto.

A meus familiares, agradeço pelos momentos célebres que tivemos, que teremos. Obrigado pelo apoio que me foi dado por vocês até hoje.

A minha mãe, Margarete Valduga Pozza, que sempre se fez presente e me auxiliou o melhor que pode, um muito obrigado. Te amo.

A meu pai, Ivo Diogo Pozza. Não poderia desejar um pai melhor. Muito obrigado pelas lições de vida. Obrigado por cada momento que tivemos. Obrigado.

A imaginação é mais importante que a ciência, porque a ciência é limitada, ao passo que a imaginação abrange o mundo inteiro.

Albert Einstein

RESUMO

Este trabalho versa sobre a análise em elementos finitos da cúpula da catedral de Florença, Itália. Primeiramente, contempla um pouco da história da catedral, seus avanços durante o tempo, além da história do próprio Brunelleschi, arquiteto/engenheiro construtor da cúpula. Após, parte para a parte de análise geométrica da mesma, e dos materiais constituintes. Levanta dados sobre altura, dimensões das cascas interna e externa, nervuras, além das propriedades mecânicas dos materiais utilizados nos modelos. Faz um breve resumo sobre o que são elementos finitos. Descreve os modelos em elementos finitos utilizados para modelagem, suas propriedades e resultados. Com base nisso, é realizada a análise dos resultados obtidos em forma gráfica de deslocamentos, de tensões tangenciais, circunferenciais e radiais. Apresenta primeiramente o modelo 1, axissimétrico e com uma casca somente. Após, apresenta o modelo 2, também axissimétrico, porém já no formato de dupla-casca. O terceiro e último modelo é um sólido tridimensional, em que constam todos os elementos estruturais da cúpula, como nervuras, anéis de arenito e de madeira. São indicados os valores maiores de tensão para cada modelo. Também analisa as etapas construtivas da cúpula em sete partes distintas, e compara os resultados. Analisa também a inexistência do anel sob o 3º nível de passagem, e compara com os valores obtidos do modelo que o considera. Faz um resumo das tensões máximas e mínimas em cada material, e calcula o coeficiente de segurança para os mesmos. Terminado, foi apresentada as considerações finais do trabalho.

Palavras-chave: Elementos Finitos. Análise Estrutural. Cúpula. Catedral de Florença. *Santa Maria del Fiore*. ANSYS.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Diagrama das etapas do trabalho	21
Figura 2 – <i>Sacrificio di Isacco</i>	23
Figura 3 – Santa Maria del Fiore, Campanário e Batistério de São João	25
Figura 4 – Projetos da Igreja Santa Maria del Fiore	26
Figura 5 – Tijolos dispostos como espinha de peixe na cúpula de Brunelleschi	28
Figura 6 – Mecanismo de elevação de materiais criado por Brunelleschi especialmente para a obra em questão	30
Figura 7 – <i>Cupolina</i> mostrando a base de arenito e o padrão da alvenaria da cúpula	31
Figura 8 – Dimensões características da cúpula	35
Figura 9 – Detalhamento das alvenarias e correntes de <i>macigno</i> utilizadas na cúpula	38
Figura 10 – Esquema 3D da estrutura	39
Figura 11 – Esquema de Corte Transversal da Cúpula	40
Figura 12 – Geometria Modelo 1	49
Figura 13 – Modelo Estrutural – Modelo 1	51
Figura 14 – Erro Estrutural – Modelo 1	51
Figura 15 – Geometria – Modelo 2	53
Figura 16 – Detalhe Topo – Geometria – Modelo 2	53
Figura 17 – Detalhe Nível 3 – Geometria – Modelo 2	54
Figura 18 – Detalhe Nível 2 – Geometria – Modelo 2	54
Figura 19 – Modelo Estrutural – Modelo 2.....	55
Figura 20 – Erro Estrutural – Modelo 2	55
Figura 21 – Geometria – Modelo 3	57
Figura 22 – Modelo Estrutural – Modelo 3	58
Figura 23 – Erro Estrutural – Modelo 3	59
Figura 24 – Nomenclatura e Representação dos Planos de Tensões	60
Figura 25 – Deformação Total – Modelo 1	61
Figura 26 – Tensão Tangencial – Modelo 1	63
Figura 27 – Tensão Circunferencial – Modelo 1	64
Figura 28 – Tensão Radial – Modelo 1	65
Figura 29 – Deformação Total – Modelo 1	67
Figura 30 – Tensão Tangenciais – Modelo 2	68
Figura 31 – Tensão Circunferencial – Modelo 2	69
Figura 32 – Tensão Radial – Modelo 2	70

Figura 33 – Deformação Total – Modelo 3	72
Figura 34 – Tensão Tangencial – Modelo 3	73
Figura 35 – Tensão Tangencial 2 – Modelo 3	74
Figura 36 – Tensão Tangencial – Corte 1 – Modelo 3	75
Figura 37 – Tensão Tangencial – Corte 2 – Modelo 3	76
Figura 38 – Tensão Tangencial – Corte 3 – Modelo 3	77
Figura 39 – Tensão Circunferencial – Modelo 3	78
Figura 40 – Tensão Circunferencial 2 – Modelo 3	79
Figura 41 – Tensão Circunferencial – Corte 1 – Modelo 3	80
Figura 42 – Tensão Circunferencial – Corte 2 – Modelo 3	81
Figura 43 – Tensão Circunferencial – Corte 3 – Modelo 3	82
Figura 44 – Tensão Radial 1 – Modelo 3	83
Figura 45 – Tensão Radial 2 – Modelo 3	84
Figura 46 – Tensão Radial – Corte 1 – Modelo 3	85
Figura 47 – Tensão Radial – Corte 2 – Modelo 3	86
Figura 48 – Tensão Radial – Corte 3 – Modelo 3	87
Figura 49 – Planos de Corte – Modelo 3.1	88
Figura 50 – Deformação Total – Etapa 1	89
Figura 51 – Deformação Total – Etapa 2	90
Figura 52 – Deformação Total – Etapa 3	90
Figura 53 – Deformação Total – Etapa 4	91
Figura 54 – Deformação Total – Etapa 5	91
Figura 55 – Deformação Total – Etapa 6	92
Figura 56 – Tensão Tangencial – Etapa 1	93
Figura 57 – Tensão Tangencial – Etapa 2	94
Figura 58 – Tensão Tangencial – Etapa 3	94
Figura 59 – Tensão Tangencial – Etapa 4	95
Figura 60 – Tensão Tangencial – Etapa 5	95
Figura 61 – Tensão Tangencial – Etapa 6	96
Figura 62 – Tensão Tangencial – Corte 1 – Etapa 1	97
Figura 63 – Tensão Tangencial – Corte 1 – Etapa 2	97
Figura 64 – Tensão Tangencial – Corte 1 – Etapa 3	98
Figura 65 – Tensão Tangencial – Corte 1 – Etapa 4	98
Figura 66 – Tensão Tangencial – Corte 1 – Etapa 5	99
Figura 67 – Tensão Tangencial – Corte 1 – Etapa 6	100

Figura 68 – Tensão Circunferencial – Etapa 1	101
Figura 69 – Tensão Circunferencial – Etapa 2	102
Figura 70 – Tensão Circunferencial – Etapa 3	102
Figura 71 – Tensão Circunferencial – Etapa 4	103
Figura 72 – Tensão Circunferencial – Etapa 5	104
Figura 73 – Tensão Circunferencial – Etapa 6	105
Figura 74 – Tensão Circunferencial – Corte 1 – Etapa 1	106
Figura 75 – Tensão Circunferencial – Corte 1 – Etapa 2	106
Figura 76 – Tensão Circunferencial – Corte 1 – Etapa 3	107
Figura 77 – Tensão Circunferencial – Corte 1 – Etapa 4	107
Figura 78 – Tensão Circunferencial – Corte 1 – Etapa 5	108
Figura 79 – Tensão Circunferencial – Corte 1 – Etapa 6	109
Figura 80 – Tensão Radial – Etapa 1	110
Figura 81 – Tensão Radial – Etapa 2	111
Figura 82 – Tensão Radial – Etapa 3	111
Figura 83 – Tensão Radial – Etapa 4	112
Figura 84 – Tensão Radial – Etapa 5	113
Figura 85 – Tensão Radial – Etapa 6	114
Figura 86 – Tensão Radial – Corte 1 – Etapa 1	115
Figura 87 – Tensão Radial – Corte 1 – Etapa 2	115
Figura 88 – Tensão Radial – Corte 1 – Etapa 3	116
Figura 89 – Tensão Radial – Corte 1 – Etapa 4	116
Figura 90 – Tensão Radial – Corte 1 – Etapa 5	117
Figura 91 – Tensão Radial – Corte 1 – Etapa 6	118
Figura 92 – Deformação Total – Modelo 3 sem 2º anel de arenito	120
Figura 93 – Tensão Tangencial – Modelo 3 sem 2º anel de arenito	121
Figura 94 – Tensão Tangencial 2 – Modelo 3 sem 2º anel de arenito	122
Figura 95 – Tensão Tangencial – Corte 1 – Modelo 3 sem 2º anel de arenito	123
Figura 96 – Tensão Tangencial – Corte 2 – Modelo 3 sem 2º anel de arenito	124
Figura 97 – Tensão Tangencial – Corte 3 – Modelo 3 sem 2º anel de arenito	125
Figura 98 – Tensão Circunferencial – Modelo 3 sem 2º anel de arenito	126
Figura 99 – Tensão Circunferencial 2 – Modelo 3 sem 2º anel de arenito	127
Figura 100 – Tensão Circunferencial – Corte 1 – Modelo 3 sem 2º anel de arenito	128
Figura 101 – Tensão Circunferencial – Corte 2 – Modelo 3 sem 2º anel de arenito	129
Figura 102 – Tensão Circunferencial – Corte 3 – Modelo 3 sem 2º anel de arenito	130

Figura 103 – Tensão Radial – Modelo 3 sem 2º anel de arenito	131
Figura 104 – Tensão Radial 2 – Modelo 3 sem 2º anel de arenito	132
Figura 105 – Tensão Radial – Corte 1 – Modelo 3 sem 2º anel de arenito	133
Figura 106 – Tensão Radial – Corte 2 – Modelo 3 sem 2º anel de arenito	134
Figura 107 – Tensão Radial – Corte 3 – Modelo 3 sem 2º anel de arenito	135

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Raios Interno e Externo e Espessuras	48
Tabela 2 – Raio Médio Interno e Externo	49
Tabela 3 – Raio Médio Ponderado Inferior e Superior	50
Tabela 4 – Tabela de Massa, Número de Nós e Elementos do Modelo 3.1	89

LISTA DE SIGLAS

FEM – *Finite Element Method*

MEF – Método dos Elementos Finitos

LISTA DE SÍMBOLOS

E – módulo de elasticidade longitudinal (Pa)

G – módulo de elasticidade transversal (Pa)

ν – coeficiente adimensional de Poisson

w – peso específico médio (kg/m^3)

σ_c – resistência média de compressão (Pa)

σ_t – resistência média de tração (Pa)

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	17
2 DIRETRIZES DA PESQUISA	19
2.1 QUESTÃO DE PESQUISA	19
2.2 OBJETIVOS DA PESQUISA	19
2.2.1 Objetivo principal.....	19
2.2.2 Objetivos secundários	19
2.3 PRESSUPOSTO.....	19
2.4 DELIMITAÇÕES.....	19
2.5 LIMITAÇÕES	20
2.6 DELINEAMENTO.....	20
3 CONTEXTO HISTÓRICO-CULTURAL.....	22
3.1 FILIPPO BRUNELLESCHI	22
3.2 SANTA MARIA DEL FIORE	24
3.3 MÉTODOS DE ANÁLISE DE ESTRUTURAS	31
4 CONCEPÇÃO ESTRUTURAL DA CÚPULA	34
4.1 GEOMETRIA DA CÚPULA.....	35
4.1.1 Tambor	36
4.1.2 Cascas Interna e Externa	36
4.1.3 Anéis Concêntricos	40
4.1.3.1 Anéis de Arenito.....	40
4.1.3.2 Anéis de Madeira.....	41
4.1.4 Lanterna	42
4.1.5 Resumo da Geometria Adotada	42
4.2 PROPRIEDADES DOS MATERIAIS UTILIZADOS	42
4.2.1 Alvenaria	43
4.2.2 Madeira	45
4.2.3 Arenito	45
4.2.4 Mármore.....	45
4.2.5 Ferro	46
4.2.1 Resumo das Propriedades Adotadas	47
5 MODELAGEM EM ELEMENTOS FINITOS	48
5.1 MODELO 1	48
5.2 MODELO 2	52

5.3 MODELO 3	56
6 ANÁLISE DOS RESULTADOS	60
6.1 MODELO 1	61
6.1.1 Deslocamentos	61
6.1.2 Tensões Tangenciais	62
6.1.3 Tensões Circunferenciais	64
6.1.4 Tensões Radiais.....	65
6.1.5 Considerações gerais sobre o Modelo 1	66
6.2 MODELO 2	66
6.2.1 Deslocamentos	66
6.2.2 Tensões Tangenciais	68
6.2.3 Tensões Circunferenciais	69
6.2.4 Tensões Radiais.....	70
6.2.5 Considerações gerais sobre o Modelo 2	71
6.3 MODELO 3	71
6.3.1 Deslocamentos	71
6.3.2 Tensões Tangenciais	73
6.3.3 Tensões Circunferenciais	78
6.3.4 Tensões Radiais.....	83
6.4 ETAPAS CONSTRUTIVAS.....	88
6.4.1 Deslocamentos	89
6.4.2 Tensões Tangenciais	93
6.4.3 Tensões Circunferenciais	101
6.4.4 Tensões Radiais.....	110
6.5 RESULTADOS DO MODELO 3 DESCONSIDERANDO O SEGUNDO ANEL DE ARENITO SOB O NIVEL 3	119
6.5.1 Deslocamentos	119
6.3.2 Tensões Tangenciais	120
6.5.3 Tensões Circunferenciais	126
6.5.4 Tensões Radiais.....	131
6.6 ESTIMATIVA DA SEGURANÇA DA ESTRUTURA	136
6.6.1 Alvenaria de Blocos de Arenito	136
6.6.2 Alvenaria de Tijolos Maciços	136
6.6.3 Anéis de Arenito e Base da Lanterna	136
6.6.4 Anel de Madeira	137

6.6.5 Considerações gerais sobre a segurança e o Modelo 3.....	137
7 CONSIDERAÇÕES FINAIS	138
REFERÊNCIAS	140

1 INTRODUÇÃO

Na idade média os conceitos que regem o dimensionamento de estruturas não eram claros ou relacionados de maneira analítica com os fenômenos físicos, visto que os métodos de resistência dos materiais como se conhece hoje foram desenvolvidos após o século XV, data da construção da Cúpula da Catedral *Santa Maria del Fiore*, projetada pelo arquiteto renascentista Filippo Brunelleschi. Dessa forma, muito do trabalho realizado pelos arquitetos-engenheiros renascentistas era empírico, baseado em suas próprias experiências, ou baseando-se em construções já existentes, como, por exemplo, o Panteão de Roma, ou a Acrópole, em Atenas.

Para qualquer padrão de carregamento, é possível vencer grandes vão utilizando-se um arco com o formato adequado que minimize os esforços de flexão e cisalhamento. Uma cúpula pode ser pensada como uma superfície de revolução obtida a partir de uma geratriz em forma de arco, sendo possível determinar um formato adequado para qualquer que seja o carregamento a ser suportado, de forma a igualmente minimizar os esforços de flexão e cisalhamento, de forma que apenas os esforços de membrana sejam significativos. Hoje, sabe-se que, para um carregamento de peso próprio, um arco sob a forma de uma catenária terá somente esforços de compressão devido às cargas verticais aplicadas sobre ele. Para um carregamento uniformemente distribuído ao longo do comprimento em projeção, um formato parabólico também resulta somente em compressão no arco. Mesmo sem teorias para comprovar, Brunelleschi intuitivamente sabia que seu domo somente permaneceria estável caso a geometria de seus arcos fosse correta.

Com a evolução do conhecimento e desenvolvimento teórico sobre materiais e análise estrutural, cada vez mais é cobrado um procedimento comprovado por método científico para dimensionamento de estruturas, buscando confiabilidade da edificação para todos os carregamentos possíveis. Assim, é interessante verificar as estruturas construídas antes da existência dessas teorias para comprovar sua segurança, para que, se necessário, sejam tomadas precauções quanto ao seu uso.

Baseado nisso, buscou-se analisar a cúpula da catedral Santa Maria del Fiore de Florença, numericamente, pelo Método dos Elementos Finitos (MEF), a fim de verificar as tensões

atuantes na estrutura em questão. A partir dessa análise, é possível estimar a segurança da mesma para os carregamentos analisados.

2 DIRETRIZES DA PESQUISA

As diretrizes para desenvolvimento do trabalho são descritas nos próximos itens.

2.1 QUESTÃO DE PESQUISA

A questão de pesquisa do trabalho é: considerando-se os detalhes construtivos conhecidos da cúpula da Catedral de Florença, quais as tensões que nela atuam?

2.2 OBJETIVOS DA PESQUISA

Os objetivos da pesquisa estão classificados em principal e secundários e são descritos a seguir.

2.2.1 Objetivo principal

O objetivo principal do trabalho é a análise das tensões atuantes na cúpula de *Santa Maria del Fiore*, em Florença, e, partir dessas, estimar a estabilidade e segurança da estrutura estudada.

2.2.2 Objetivos secundários

Os objetivos secundários do trabalho são:

- a) determinação da geometria e dos materiais da estrutura da cúpula;
- b) modelagem computacional da estrutura pelo método dos elementos finitos.

2.3 PRESSUPOSTO

O trabalho tem como pressuposto que, uma análise estática no regime elástico linear é adequada para prever, em linhas gerais, o comportamento da estrutura analisada sob a ação do seu peso próprio.

2.4 DELIMITAÇÕES

O trabalho delimita-se a análise estrutural da cúpula da Catedral de *Santa Maria del Fiore*, em Florença, Itália.

2.5 LIMITAÇÕES

São limitações do trabalho:

- a) a geometria da estrutura da cúpula, seus materiais e propriedades mecânicas atribuídas, que serão obtidos da literatura que os descreve;
- b) o software ANSYS, utilizado para realização da simulação numérica;
- c) a análise estrutural será restrita a ação de cargas verticais decorrente do peso próprio da cúpula e dos elementos arquitetônicos que ela suporta;
- d) não serão considerados efeitos de sismos ou ação do vento;
- e) as alvenarias de blocos de pedra e de blocos cerâmicos que constituem a maior parte da cúpula serão consideradas como materiais contínuos, isotrópicos e homogêneos.

2.6 DELINEAMENTO

O trabalho será realizado através das etapas apresentadas a seguir, que estão representadas na figura 1, e são descritas nos próximos parágrafos:

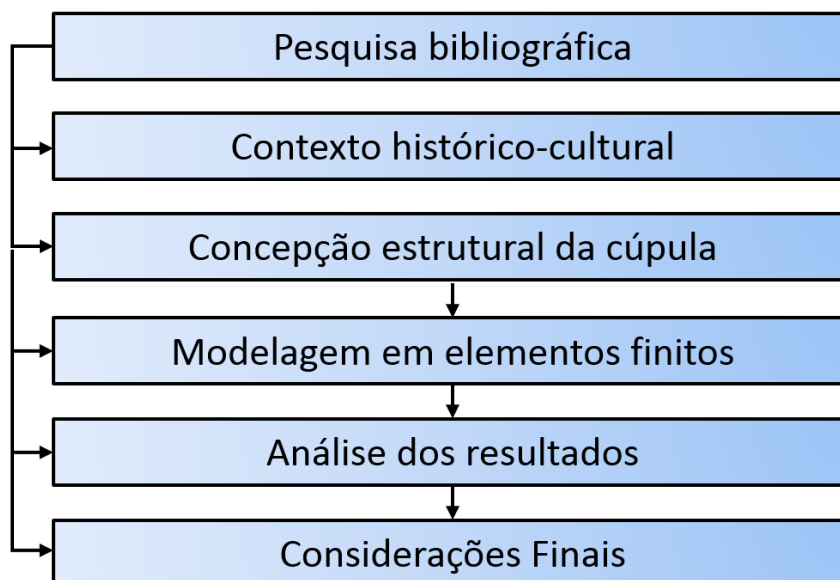
- a) pesquisa bibliográfica;
- b) contexto histórico-cultural;
- c) concepção estrutural da cúpula;
- d) modelagem em elementos finitos;
- e) análise dos resultados;
- f) considerações finais.

A etapa correspondente à pesquisa bibliográfica será essencial para o desenvolvimento do trabalho, tanto na parte de busca de informações sobre a cúpula, quanto na parte de simulação numérica. Dessa forma, serão utilizados livros e artigos disponíveis para a obtenção desses dados.

Dado que a Itália, no século XV, estava no início do período renascentista, a segunda etapa servirá para introduzir o contexto histórico-cultural em que a catedral se incluía, bem como do

arquiteto e engenheiro Filippo Brunelleschi, construtor da mesma. Entretanto, para dar base ao leitor, serão incluídas noções de alvenaria estrutural e também sobre elementos finitos.

Figura 1 – Diagrama das etapas do trabalho



(fonte: elaborado pelo autor)

Já a etapa seguinte – concepção estrutural da cúpula – também é fruto da pesquisa bibliográfica. Procurou-se obter as informações geométricas de forma precisa, de fontes confiáveis, como livros ou artigos, comparar seus valores e selecionar, seja por comparação, seja pela média dos valores obtidos, a geometria final, que seria mais tarde analisada em elementos finitos. Também é nessa etapa que serão levantados dados sobre os materiais constituintes da estrutura. A alvenaria, foi fabricada no século XV, e não existe dados sobre a resistência a compressão, nem sobre módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson. Assim, discute-se nesse capítulo, também, os valores utilizados no modelo, e o porquê destes valores.

Na modelagem em elementos finitos, descreve-se os passos tomados, as considerações realizadas para simular a estrutura. Realizado esse passo, e de posse dos resultados, é feita a análise destes resultados, verificando se a modelagem está de acordo com o esperado. Serão geradas representações gráficas das tensões nas diversas interfaces da estrutura, a fim de definir o comportamento da mesma e possibilitando uma estimativa da estabilidade e da segurança da estrutura.

Por fim, serão feitas as considerações finais, e recomendações para trabalhos futuros.

3 CONTEXTO HISTÓRICO-CULTURAL

Neste capítulo serão abordados, primeiramente, a história do arquiteto e engenheiro renascentista Filippo Brunelleschi. Após, a história da catedral de Florença, do início ao fim de sua construção. Posteriormente, a história da alvenaria estrutural e seus usos e, para finalizar, uma breve introdução ao método dos elementos finitos.

3.1 FILIPPO BRUNELLESCHI

Filippo Brunelleschi nasceu em 1377, em Firenze, Itália. Era filho de Giuliana Spini e Brunellesco di Lippo, um advogado. De acordo com A&E Television Networks (c2014, tradução nossa), começou a trabalhar como ourives e escultor, e fez parte da guilda da seda de Florença, que contava com ourives e metalúrgicos. Por volta da virada do século, ele foi considerado um mestre ourives.

Em 1401, participou de um concurso para construir a segunda porta do Batistério de São João, localizado também em Florença, em frente à Catedral, competindo com Lorenzo Ghiberti e outros cinco escultores. *Sacrifício di Isacco* (nome da obra de arte em bronze) foi a grande obra da pequena carreira dele como escultor. Public Broadcasting Service (2014) revela que foram dadas as mesmas quantidades de bronze para cada candidato. Como pode ser visto na figura 2, há um contraste entre os painéis exibidos por Ghiberti e Brunelleschi. O primeiro, carregado com a cultura classicista, mostra um Abraão imponente, pronto para assassinar seu filho, que espera pronto para ser esfaqueado, em uma cena bastante decorada. Já o de Brunelleschi, é cheio de humanismo, algo novo para época, e revela um Abraão preocupado com o sofrimento do filho. Isso pode ser notado pelo modo como ele segura a faca, e como pretende assassinar seu filho de modo rápido e indolor.

Entretanto foi Ghiberti quem ganhou o concurso. Após perdê-lo, o desapontamento de Brunelleschi foi tanto que isso pode tê-lo influenciado a alterar seu foco de trabalho de esculturas, para avançar seus estudos na arquitetura. Partiu a Roma para analisar e estudar as antigas obras, juntamente com Donatello (conhecido por suas formosas esculturas), contemporâneo de Brunelleschi.

Figura 2 – *Sacrifício de Isaque* (versão de Ghiberti à esquerda, de Brunelleschi à direita)



(fonte: PUBLIC BROADCASTING SERVICE, 2014)

Segundo A&E Television Networks (c2014, tradução nossa):

Cedo em sua carreira como arquiteto (1410-1415), Brunelleschi redescobriu os princípios da perspectiva linear, conhecido pelos antigos gregos e romanos, mas perdido durante a Idade Média. Com esses princípios, qualquer um pode pintar ou desenhar usando um único ponto de fuga em que todas as linhas tendem a convergir, com objetos parecendo menores com a distância. A perspectiva linear como ferramenta artística logo se expandiu para toda Itália e depois para o oeste europeu, e tem permanecido um marco na criação artística desde então.

Seu maior trabalho foi a construção da cúpula da Catedral de *Santa Maria del Fiore*, que teve início com um concurso realizado em 1418. Após ser aprovado seu projeto, foi iniciada a construção em 1420, terminando somente em 1436. Durante a construção da cúpula, Brunelleschi realizou outros trabalhos, como o *Palagio di Parte Guelfa*, e a *Cappella Barbadori*.

Brunelleschi também ficou conhecido por construir ou reconstruir fortificações militares em Pisa, Vicopisano e Rimini. Criou também vários dispositivos mecânicos, sendo um deles um mecanismo de içamento, que servia para fazer anjos voarem em performances religiosas nas igrejas florentinas.

Morreu em 15 de abril de 1446, em Florença, e foi enterrado primeiramente no *Campanile di Giotto*. Seis meses depois, foi transferido para a catedral. Perdida, a sua tumba foi reencontrada em 1972, durante escavações na *Chiesa di Santa Reparata* (igreja precedente à catedral cuja localização e tamanho podem ser vistos na figura 4). Ele será sempre lembrado como um dos grandes da arquitetura renascentista.

De acordo com A&E Television Networks (c2014, tradução nossa), a inscrição de seu túmulo sob a basílica diz: tanto a magnífica cúpula dessa famosa igreja e muitos outros dispositivos criados por Brunelleschi, o arquiteto, fazem jus à sua habilidade soberba. Por isso, em homenagem aos seus talentos excepcionais, um país grato que sempre se lembrará aqui o enterra no solo abaixo.

Ao contrário de Leonardo da Vinci, Brunelleschi não deixou esboços, plantas, nem esquemas dos projetos que criou, tornando os estudos de suas obras e mecanismos mais difíceis.

3.2 SANTA MARIA DEL FIORE

Segundo Opera di Santa Maria del Fiore di Firenze (2014, tradução nossa):

Santa Maria del Fiore [figura 3], projetada por Arnolfo di Cambio, é a terceira maior igreja do mundo, depois da Catedral de São Pedro, em Roma, e de São Paulo, em Londres, e era a maior igreja na Europa quando foi completada no século XV. Possui 153 metros de comprimento, 90 metros de largura no campanário, e 90 metros de altura, do chão ao topo da lanterna. Terceira e última catedral de Florença, foi dedicada a Santa Maria das Flores, a Virgem das Flores, em 1412, uma alusão ao lírio, o símbolo da cidade de Florença.

Arnolfo di Cambio trabalhou na igreja de 1296 a 1302, a pedido dos patriarcas de Florença. Seus objetivos eram de mostrar a riqueza econômica e cultural da cidade para as outras cidades europeias. Foi decidido posteriormente que a cúpula seria a maior já construída no mundo inteiro, assegurando que a igreja seria a mais utilizada e bela, mais imponente e honorável que já existiu, seguindo os passos da cidade de Florença. Após a morte de Arnolfo, em 1310, a obra foi somente retomada em 1332, quando os magistrados da *Arte della Lana*, guilda dos Manufatores e Mercadores de Lã, assumiram a responsabilidade sobre a igreja. Giotto foi nominado mestre da obra em 1334, e priorizou grande parte do seu tempo para construção da torre do sino, porém morreu 3 anos depois, em 1337. Seu posto foi assumido por Andrea Pisano

até 1348, ano da Peste Negra, que reduziu a população da cidade de 90 mil para 45 mil habitantes.

Francesco Talenti foi o mestre de obras de 1349 a 1359, e foi ele quem terminou a torre do sino (campanário). Preparou um novo projeto, juntamente com seu assistente, Giovanni di Lapo Ghini (de 1360 a 1369), que pode ser visto na figura 4 abaixo. A nave foi completa em 1378 e as paredes laterais em 1380. As tribunas e possivelmente também o tambor foram concluídos em 1380 e 1415.

Segundo Salvadori (1980, p. 233, tradução nossa), em 1417, a igreja estava concluída, restando somente a construção da cúpula. Assim, a *Comune di Firenze*, de posse de uma catedral que representava sua glória e cultura bastante imponente na época, decidiu iniciar a construção do domo. O autor cita que existiam duas limitações básicas a serem contempladas no projeto. A primeira era que o tambor da cúpula, ou seja, o anel inferior que suporta a cúpula e distribui os esforços para a estrutura abaixo, deveria ser octogonal, e era cercado, em três lados, por outras meias-cúpulas octogonais (as quais podem ser vistas em planta na figura 4). Em segundo lugar, o modelo de tijolos da igreja de 1367 mostrava que as oito nervuras de canto da cúpula seguiam um perfil específico, chamado de *quinto acuto*, ou como S. Duarte traduziu no livro de King (2013), quinto agudo.

Figura 3 – Santa Maria del Fiore, Campanário e Batistério de São João



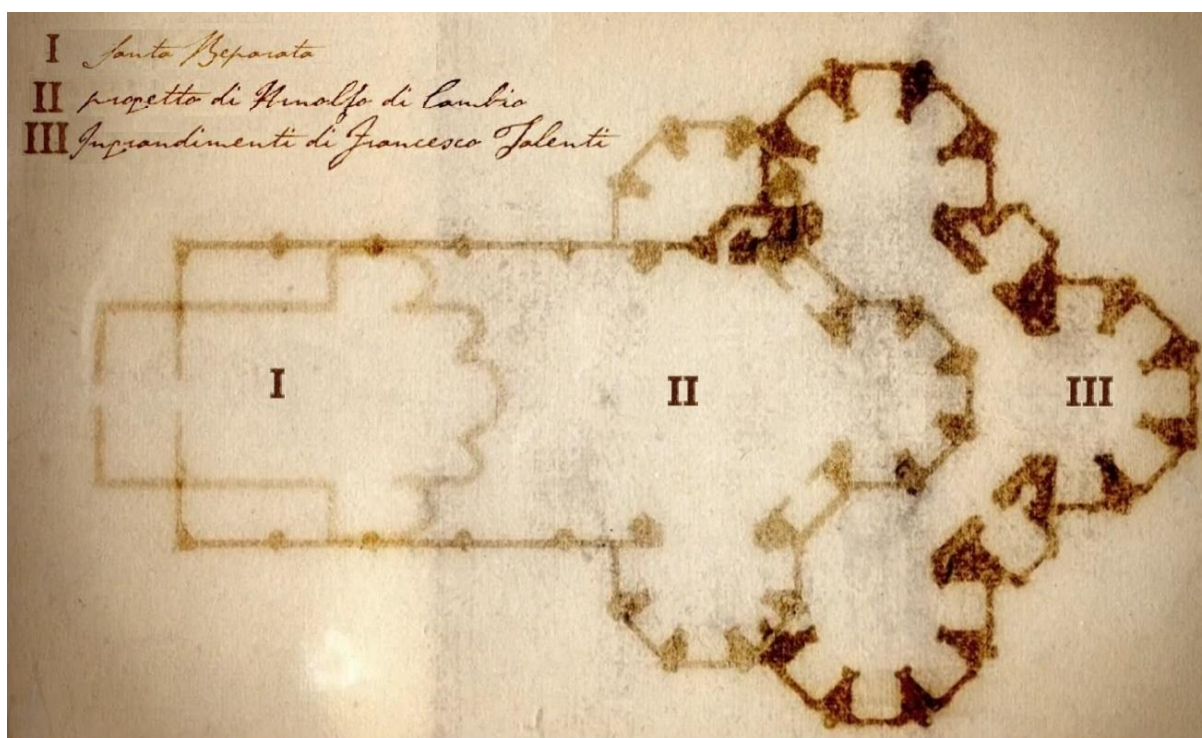
(fonte: Maria Patrícia Farfan, sem data)

O quinto agudo consiste em arcos circulares de raio iguais a quatro quintos do vão livre da estrutura. Salvadori (1980, tradução nossa) cita ainda que as meias-cúpulas existentes ao redor do tambor também possuíam formato octogonal. Assim, era inconcebível que o grande domo não possuísse essa forma.

Salvadori (1980, p. 233-234, tradução nossa) afirma:

As todo-poderosas guildas de construção de Florença, sob a direção da *Opera del Duomo* (o conselho que supervisionava a construção da igreja) tinham jurado aderir ao modelo de 1367, embora ninguém ainda tinha feito propostas sérias sobre a execução do projeto. Na verdade, soube-se que já em 1394, os especialistas da *Opera del Duomo* tinham expressado a opinião de que “a construção da cúpula era tão grande e em um estado tal que não poderia ser concluída” e que “deveriam ter sido ingênuos os mestres anteriores e quem mais teria deliberado sobre o assunto para ter acreditado que poderia ser feito.” A ideia de um andaime ou cimbre [escoramento e molde da estrutura] capaz de suportar uma estrutura tão monumental durante a sua construção sempre tinha parecido ultrajante para os especialistas da época, na verdade, a todos que tinham estudado o problema, já que a Catedral foi iniciada em 1294 por Arnolfo di Cambio e continuada por Francesco Talenti em 1349. Mesmo após a conclusão em 1413 do tambor octogonal em que a cúpula deveria ser apoiada – embora o tambor havia sido construído com 14 pés (4,2672 metros) de espessura, por uma questão de sábia precaução – somente o custo desta centralização teria sido um fator dissuasivo para o projeto.

Figura 4 – Projetos da Igreja Santa Maria del Fiore (I – Santa Reparata, II – Projeto de Arnolfo di Cambio, III – Extensão de Francesco Talenti)



(fonte: adaptado de PUBLIC BROADCASTING SERVICE, 2014)

Mueller (2014, p. 1, tradução nossa) afirma que, em 1418, foi realizado um concurso para a construção da cúpula, cujo ganhador receberia 200 florins de ouro, e a chance de fama eterna. Alguns dos maiores arquitetos da época participaram, mas nenhum vencedor foi escolhido.

Salvadori (1980, p. 234, tradução nossa) afirma que:

Em 1419, Filippo Brunelleschi, um membro da guilda de seda treinado como um ourives, pintor e escultor, fez uma proposta revolucionária para o conselho: a cúpula poderia ser construída sem um cimbramento de madeira. Ele apresentou um modelo de tijolo para provar isso. O conselho levou a sério o suficiente para pagar o modelo, mesmo que nenhuma grande cúpula tivesse sido construída até então sem um apoio temporário interior.

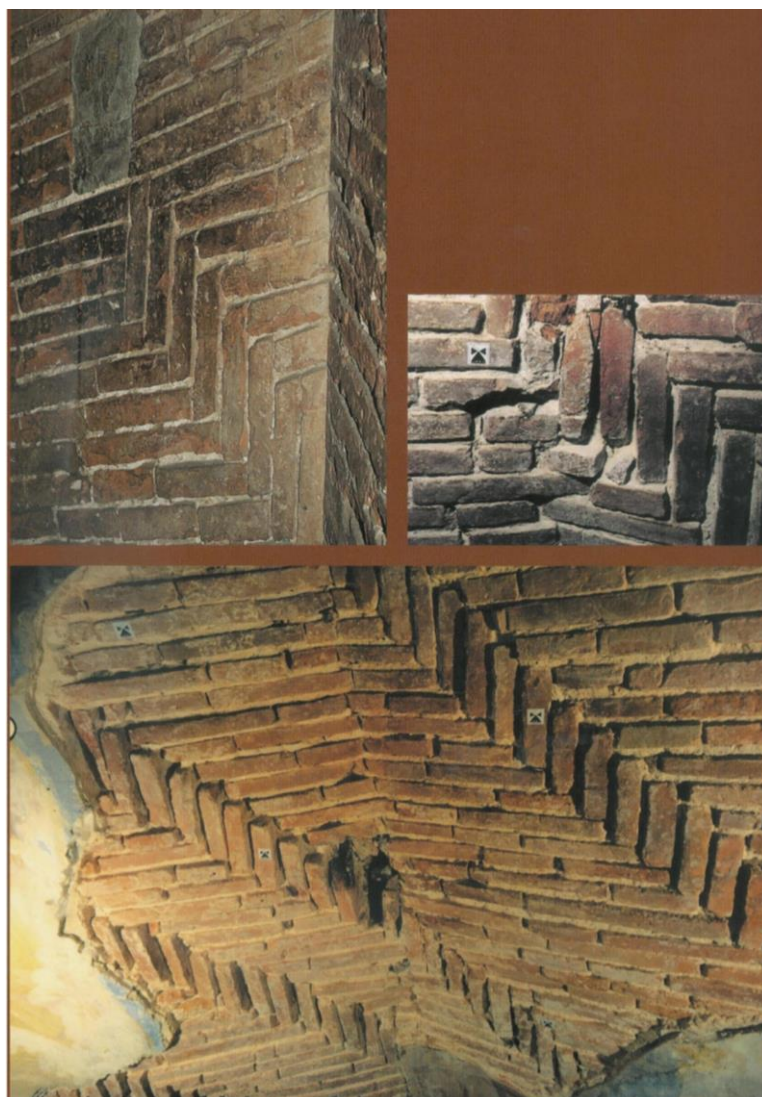
Esta foi uma época conservadora. Não muito longe, o povo de Siena tinha renunciado o grandioso conceito de fazer sua catedral no transepto de uma igreja muito maior. A Toscana tinha sido invadida e quase inteiramente conquistada pelos Visconti de Milão. A arte de construir estava nas mãos de guildas especializadas, opostas tanto a novas ideias quanto a liderança de um único homem. Mas Brunelleschi não foi facilmente derrotado. Apesar de ter apenas vinte e quatro anos de idade, ele já era bem conhecido em sua cidade como um escultor soberbo que havia ficado em segundo lugar na competição para as Portas do Batistério (as chamadas Portas do Paraíso) e tinha orgulhosamente recusado a colaborar com o vencedor, o grande Ghiberti, em sua execução (SALVADORI, 1980, p. 234, tradução nossa).

Assim, Brunelleschi saiu vencedor, não só pela arquitetura arrojada, mas também por suas ideias inovadoras, como a não utilização de escoramento vindo do solo, além da dupla-casca de alvenaria no formato de espinha-de-peixe, que pode ser vista na figura 5.

Em 1420 a diretoria da *Opera del Duomo* nomeou Brunelleschi e Ghiberti co-arquitetos da cúpula de *Santa Maria del Fiore*, e Battista d'Antonio mestre das obras. Brunelleschi aceitou a parceria. Posteriormente, a *Opera* empossou Brunelleschi ao comando completo do projeto (SALVADORI, 1980, tradução nossa).

King (2013, p. 126) cita, em seu livro, que “O ritmo médio de construção foi estimado em menos de uma camada [de alvenaria] por semana, o que significa que a cúpula era erguida à razão de aproximadamente 30 centímetros por mês.”

Figura 5 – Tijolos dispostos como espinha de peixe na cúpula de Brunelleschi



(fonte: CONTI, 2014)

Brunelleschi também se preocupava com seus operários, tanto que, para tranquilizar os pedreiros, construiu um parapeito na parte interna da abóboda, para que seus homens, ao assentarem os tijolos inclinados, não tivessem que se preocupar com a altitude. King (2013, p. 127) cita que essa estrutura:

[...] consistia em uma série de tábuas colocadas em ângulo reto nos andaimes transversais em relação às paredes. Era uma plataforma muito mais larga que as *ponti* [estreitas plataformas feitas de vara de salgueiro sustentadas por barras de madeira inseridas na alvenaria] e servia tanto de rede de proteção quanto – o que era mais vital – de anteparo. Segundo os documentos, a intenção era “impedir que os mestres olhassem para baixo”.

Brunelleschi também foi um exímio projetista de estruturas mecânicas. Para levantar os pesados blocos de arenito e mármore, bem como a alvenaria a uma altura superior à 50 metros, criou sistemas levadiços bastante engenhosos. De acordo com Mueller (2014, p. 2)¹:

O primeiro problema a ser resolvido foi estritamente técnico: nenhum mecanismo de elevação conhecido conseguia erguer a tais alturas materiais tão terrivelmente pesados, incluindo as vigas de arenito. Nesse domínio, o hábil relojoeiro que era Brunelleschi excedeu-se, inventando um cabrestante de três velocidades, equipado com um complexo sistema de engrenagens, roldanas, parafusos e eixos articulados, acionado por uma junta de bois que fazia girar um eixo de madeira [ver figura 6]. Funcionava com uma corda especial de 180 metros de comprimento e quase quinhentos quilogramas de peso, fabricada para o efeito nos estaleiros de Pisa, e estava equipado com um revolucionário sistema de embraiagem capaz de inverter a direção sem que fossem necessários que os bois invertissem o sentido do seu movimento.

Mais tarde, Brunelleschi concebeu outras máquinas elevatórias também inovadoras, entre as quais o *castello*, uma grua com cerca de vinte metros de altura, incorporando uma série de contrapesos e roldanas manuais, para deslocar lateralmente as cargas depois de alcançarem a altura adequada. As máquinas de Brunelleschi eram aparelhos tão avançados para o seu tempo que não tiveram rival até à chegada da Revolução Industrial, fascinando várias gerações de artistas e inventores – entre os quais um tal Leonardo, oriundo da vizinha localidade toscana de Vinci, que reproduziu os mecanismos no seu caderno de apontamentos.

Essa estrutura vista na figura 6, possuía eficiência muito superior a quaisquer outras já inventadas. Além da tração ser provida por animais, o fato dele ter projetado duas engrenagens horizontais ligadas ao eixo de tração animal, uma acima e outra abaixo do tambor onde está localizada a corda, faz com que, se necessário elevar os materiais, conecta-se a engrenagem inferior ao tambor. Caso contrário, era só alternar para a engrenagem superior, que subitamente a plataforma começaria a descer.

Isso fez com que os bois não precisassem alternar de lado (o que significaria desatrelar e reatrelar os bois ao mecanismo), aumentando a velocidade com que materiais fossem elevados ou trazidos para baixo.

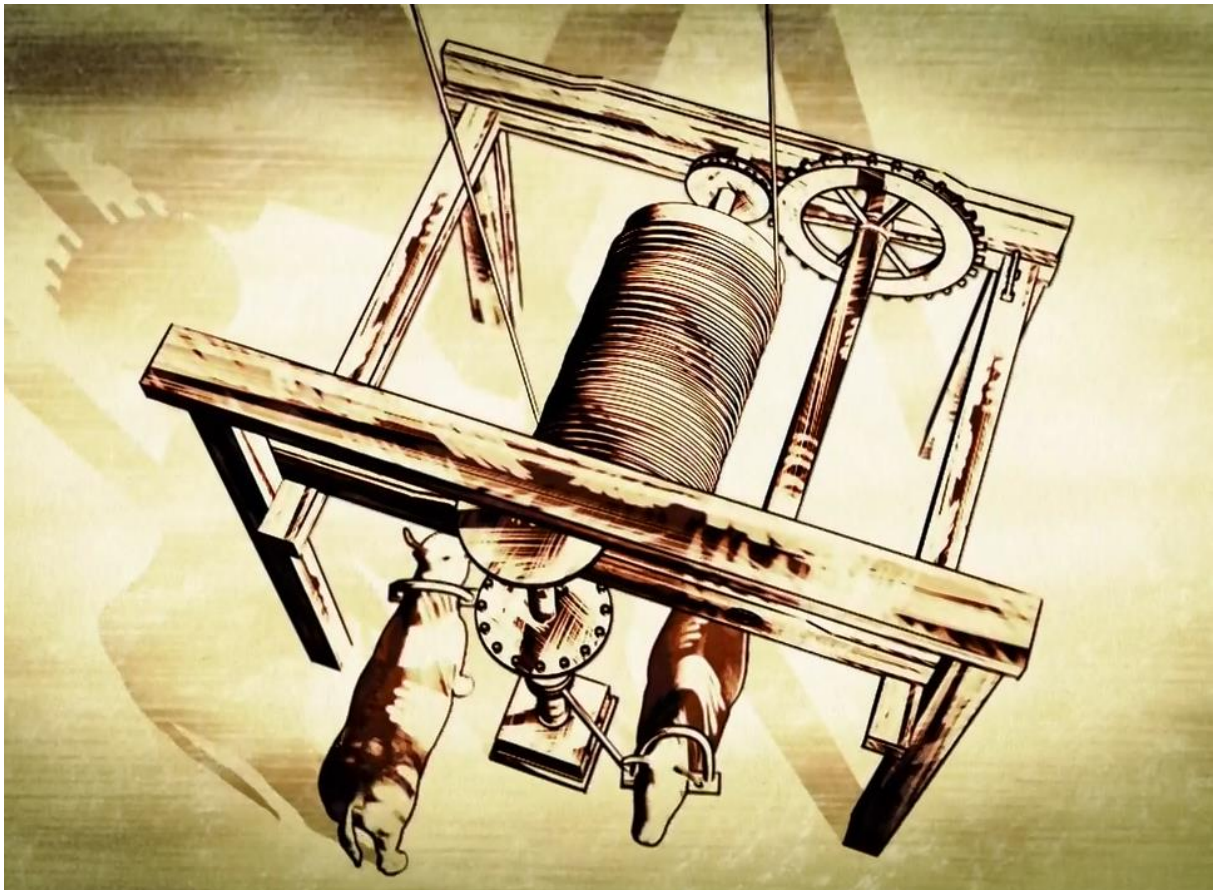
Em *Public Broadcasting Service* (2014), o arquiteto e professor italiano Massimo Ricci, que estuda os métodos de construção da cúpula de *Santa Maria del Fiore* há mais de 20 anos, cita que na época eram utilizadas cordas para marcar a correta posição das alvenarias, bem como a angulação correta das paredes para que se encontrassem no topo todas no mesmo nível. Para

¹ Adaptado ao português brasileiro da versão oficial em português de Portugal, em vez da referenciada, Norte-americana. Disponível em: <<http://www.nationalgeographic.pt/index.php/artigos-arquivados/arquivo/44-156/104-domo>>. Acesso em: 16 jun. 2014.

ele, esse é maior segredo de como Brunelleschi conseguiu erguer o domo sem a existência da tecnologia de que se possui hoje.

Em novembro de 2012, foi encontrado um provável modelo reduzido da estrutura da cúpula, que pode ser visto abaixo (figura 7), numa escavação nos arredores da catedral. Estudiosos creem que, para que a *Opera* concedesse ao arquiteto aprovação para a construção, foi necessário algum tipo de comprovação que o método de construção seria confiável. Dessa forma, Brunelleschi deve ter construído ele mesmo esse modelo reduzido, para satisfazer as curiosidades e anseios da *Opera*.

Figura 6 – Mecanismo de elevação de materiais criado por Brunelleschi especialmente para a obra em questão



(fonte: PUBLIC BROADCASTING SERVICE, 2014)

A ruína encontrada possui uma base sólida de pedras de arenito, com aproximadamente um terço da altura total da pequena cúpula, ou *cupolina*, nome de como ficou conhecido esse modelo. Acima desses anéis inferiores de pedra, foram construídas paredes de alvenaria, mas

seguindo o padrão espinha de peixe (*spinapesce*, em italiano), igual da estrutura da cúpula de Brunelleschi (PUBLIC BROADCASTING SERVICE, 2014).

Figura 7 – *Cupolina* mostrando a base de arenito e o padrão da alvenaria da cúpula (nota-se que ela é circular, e não octogonal)



(fonte: PUBLIC BROADCASTING SERVICE, 2014)

3.3 MÉTODOS DE ANÁLISE DE ESTRUTURAS

No século XV, muito do que se concebia e se projetava era imaginado da própria experiência pessoal do arquiteto/engenheiro, resultado de observações de outras estruturas, de trabalhos anteriores, de experimentos e protótipos criados.

Com o renascimento, entretanto, começou a se recriar uma busca pela ciência, ou seja, a busca pela razão de ser das coisas, muito perseguida pelos gregos na antiguidade. A partir desse período, muitos estudiosos passaram a publicar suas descobertas, e a divulgação da ciência cresceu em importância, o que não foi diferente para as teorias de análise estrutural e resistência dos materiais. Assim surgiram as contribuições de Hooke, de Newton, entre outros, que geraram avanços importantes à essa área do conhecimento.

Avançando ao século 20, chega-se ao Método dos Elementos Finitos (MEF). Desenvolvido a partir dos anos 50, devido ao avanço da computação, o MEF pode ser pensado como uma extensão das técnicas reticuladas usuais (modelagem de barras) para estruturas bi e

tridimensionais. Foi desenvolvido, primeiramente, para a indústria aeroespacial, visto que os modelos reticulados não eram precisos para analisar estruturas com formas geométricas complexas, tais como aeronaves ou espaçonaves. (Bonilha, 198-?).

Como nos modelos de análise matricial anteriores ao MEF, tem-se como conceito básico que a estrutura pode ser subdividida em elementos estruturais básicos, de geometria simples e definida, e que, ao se obedecer certos procedimentos, o resultado final é uma aproximação tão boa quanto se queira do comportamento da estrutura original.

Esses elementos da subdivisão da estrutura, em geral, são triângulos ou quadriláteros, quando trabalha-se no plano, e tetraedros ou paralelepípedos quando trabalhados no espaço, podendo assumir lados curvos, formando geometrias não regulares.

Define-se malha como a disposição dos elementos que, unidos, formam o modelo do sólido real. Para um mesmo sólido, existem infinitas malhas adequadas para uma boa modelagem, sendo que, quanto mais refinada for a malha, mais preciso serão os resultados obtidos. Em compensação, o custo computacional cresce, fazendo com que malhas extremamente refinadas exijam um grande custo computacional em termos de memória e tempo de processamento. Portanto, faz-se necessário atribuir um valor de erro máximo a ser tolerado, e refinar a malha o suficiente para que sejam atingidos valores de erro menores que o estipulado.

Pode-se, também, refinar a malha somente em uma área em que existam grandes gradientes de tensões, para que o erro nessas áreas diminua, enquanto em áreas mais bem-comportadas o tamanho dos elementos pode ser ligeiramente maior. Realizando esses processos, ganha-se velocidade na solução do sistema, não prejudicando a solução global da estrutura. Também pode-se mesclar elementos com formas distintas, para adaptar à geometria analisada.

Para se escolher um tamanho de elemento adequado, e assim uma malha razoável, pode-se basear em experiências prévias. Caso não seja possível, então, criam-se malhas sucessivamente mais refinadas e analisa-se a convergência do modelo. Quando os valores estiverem satisfatórios, e os erros, aceitáveis, pode-se dizer que foi atingido a solução do problema, e toma-se os valores simulados como representativos do comportamento real da estrutura.

Quanto ao comportamento das cargas externas, elas devem ser redistribuídas aos nós dos elementos, transformando-se o sistema real em um sistema equivalente de forças.

Em geral, para análises estruturais estáticas, e que a estrutura analisada não possua enorme dimensão e complexidade, pode-se trabalhar com malhas bastante finas e elementos complexos, que, apesar de grande custo computacional, as soluções são geradas com relativa velocidade.

Em análises dinâmicas, como por exemplo, incêndio, em que se trata a propagação do fogo como fluido, e que para cada elemento da malha é necessário resolver a equação diferencial de Navier-Stokes, o custo computacional é muitas vezes maior, podendo processar a solução por dias a fio, ou até semanas. Assim, a adequação da malha para otimizar a solução, juntamente com o tempo de processamento é um trabalho essencial ao engenheiro.

Ao modelar a estrutura, pode-se escolher entre vários modelos de elementos, não somente quanto aos formatos possíveis, mas sim as propriedades e equações de equilíbrio que estão sujeitos. Assim, existem elementos para simular estado plano de tensões e estado plano de deformações, para problemas em duas dimensões. Para problemas em três dimensões, pode-se adotar elementos que consideram válida a teoria de membranas, a teoria de cascas, ou então de modo mais completo, um sólido tridimensional.

A escolha de cada um dos elementos deve ser baseada na precisão que se espera obter do modelo, bem como os esforços que provocam deslocamentos relevantes para o problema. Pode-se escolher modelar os problemas pela teoria de membrana, que, de acordo com Bonilha (198-?), só os esforços normais e tangenciais contidos na superfície média resistem ao carregamento; ou pode-se modelar como casca, em que são considerados efeitos de flexão, além dos esforços normais. Caso a estrutura não cumpra os requisitos necessários para que se utilize alguma das teorias acima, deve-se simular a estrutura, então, como um sólido tridimensional.

4 CONCEPÇÃO ESTRUTURAL DA CÚPULA

Neste capítulo são comentadas e analisadas a geometria da cúpula em questão, encontradas na bibliografia, bem como os materiais utilizados, para determinação dos valores que serão utilizados na modelagem em elementos finitos.

Sabe-se que as estruturas arqueadas com formato adequado são extremamente favoráveis para vencer grandes vãos, visto que, para qualquer padrão de carregamento, os esforços de cisalhamento e flexão podem ser minimizados, ou até anulados, devido à distribuição das tensões ao longo da estrutura. Pensando que uma cúpula pode ser obtida como uma superfície de revolução a partir de uma geratriz em forma de arco. Caso o arco siga a geometria de uma parábola, sabe-se hoje que o mesmo só desenvolverá esforços de compressão, caso a carga aplicada seja vertical e constante ao longo do comprimento em projeção.

Isso é extremamente importante, visto que a alvenaria e pedras como arenito e mármore – os materiais utilizados na época – resistem bem a compressão, enquanto às outras solicitações, como tração e cisalhamento, o material não resiste de forma tão eficiente.

Salvadori (1980, p. 236-238, tradução nossa) afirma que:

A “incrível invenção de Filippo” tinha muitos componentes, o mais importante delas foi o seu domo-duplo de alvenaria [...]. Este domo-duplo consiste em uma casca grossa octogonal interior conectada por nervuras meridionais arqueadas em uma camada externa mais fina. A cúpula interna foi assim protegida das intempéries, e o exterior da cúpula dada uma forma mais imponente. Duas cúpulas aumentaram a resistência de toda a estrutura e permitiu a inspeção de ambas com escadas e galerias sinuosas através do espaço entre elas. O componente estrutural mais importante das cúpulas consiste em seus aros – seis anéis horizontais de arenito reforçados em sua superfície externa por correntes de ferro, o que poderia impedir o estouro das cúpulas sob as forças de tração enormes em seus paralelos. Enquanto o Panteão deve sua resistência ao peso bruto de sua espessa alvenaria, a cúpula construída com dois relativamente finos e leves domos, conta com a força de seus arcos de ferro e pedra para evitar o colapso em qualquer fase da construção.

Outro aspecto importante da construção da estrutura da cúpula é que verifica-se uma pequena inclinação dos tijolos no sentido da nervura para o centro dos lados octogonais. Dessa forma, tudo leva a crer que, ao erguer a alvenaria de cada lado da estrutura, Brunelleschi a construía

como um arco invertido entre as nervuras. Assim, primeiramente eram assentados os tijolos da nervura, seguindo posteriormente para os do centro.

4.1 GEOMETRIA DA CÚPULA

A estrutura do domo é composta de diversas partes, que serão estudadas nos subitens a seguir. De um modo geral, pode-se descrever o anel octogonal inferior que sustenta toda a parte arqueada da cúpula como o tambor da mesma. Acima do mesmo, sucede-se a alvenaria de tijolos maciços, em duas cascas, uma interna mais espessa, e outra externa, mais fina. A cada certa altura, existem anéis de madeira ou pedra, para aumentar a rigidez da casca e evitar seu abaulamento. No seu topo, existe um anel octogonal de compressão em que a lanterna é apoiada, além de ser o ponto de junção da casca externa com a interna. Além dessas estruturas, existem nervuras que ligam a casca interna à externa ao longo do comprimento da cúpula.

Segundo o vídeo publicado pela Public Broadcasting Service (2014), o vão interno livre é de aproximadamente 150 pés (45,72 metros) e sua altura é de 108 pés (32,92 metros), que pode ser visto da figura 8 abaixo. A altura da cúpula em relação ao solo é de cerca de 170 pés (51,82 metros).

Figura 8 – Dimensões características da cúpula



(fonte: PUBLIC BROADCASTING SERVICE, 2014)

4.1.1 Tambor

A cúpula possui como tambor (a base na qual se apoia), não uma circunferência, mas um octógono, que não é regular, pois os lados não possuem as mesmas dimensões, nem os mesmos ângulos internos. Possui uma altura de cerca de 4 metros, e em cada face do octógono, existe uma janela redonda. Já Salvadori (1980, p. 233, tradução nossa) afirma que o tambor havia sido construído com 14 pés (4,2672 metros). Para esse trabalho, entretanto, será considerado que o octógono é perfeito.

Para essa parte da estrutura, foram utilizadas pedras de arenito, para maior rigidez e resistência aos esforços. A ligação das rochas do tambor com a alvenaria da cúpula ocorre com o auxílio de um anel de arenito semelhante ao executado sob o 2º nível de passagem. Detalhes podem ser vistos na figura 10.

4.1.2 Cascas Interna e Externa

Como viu-se até agora, a cúpula projetada por Brunelleschi é diferente das demais estruturas construídas antes de seu tempo. Enquanto no Panteão de Roma, para diminuir o peso da casca, foram utilizados, vasos de cerâmica vazios, Brunelleschi resolveu criar uma dupla casca, reduzindo assim a quantidade de material utilizado, e conseqüentemente, o peso da estrutura, sem abrir mão de uma rigidez adequada para suportar a estrutura, que permanece intacta desde sua construção.

Para as estruturas da base, foram construídas vigas de arenito. King (2013, p. 97) cita que:

As dimensões e formas das pedras necessárias às cadeias de Brunelleschi eram altamente específicas. Cada uma das longas vigas para a circunferência tinha de ter 228,6 centímetros de comprimento e seção de 43,18 centímetros. Além disso, em cada viga haveria uma série de incisões na face inferior a fim de encaixar nas vigas transversais mais curtas que ficavam por baixo. A primeira cadeia de arenito utilizou mais de cem vigas longas e quase tantas outras curtas.

A respeito das nervuras, Salvadori (1980, p. 238, tradução nossa) cita:

O esqueleto da cúpula [...] consiste de oito nervuras de canto em forma de um *quinto acuto* e de duas nervuras adicionais menores localizados entre as nervuras de canto, em cada lado do octógono. As nervuras de canto têm 14 pés de largura [4,27 metros], as nervuras intermediárias 8 pés de largura [2,44 metros]. Ambas são suficientemente profundas para ligar o interior ao exterior da abóbada mas diminuem em

profundidade, embora não em largura, à medida que crescem a partir do octógono base para o topo octogonal.

De acordo com King (2013, p. 139), a espessura da casca interna, mais espessa, é de 2,1 metros na base, e 1,5 metros no topo, enquanto a casca externa, menos espessa, é de apenas sessenta e poucos centímetros na base, e trinta e poucos no topo. Já Salvadori (1980, p. 238, tradução nossa) cita que “A cúpula interna possui sete pés de espessura na parte inferior e cinco na parte superior; o exterior é de dois pés e meio na parte inferior e um e um-quarto pés no topo.”.

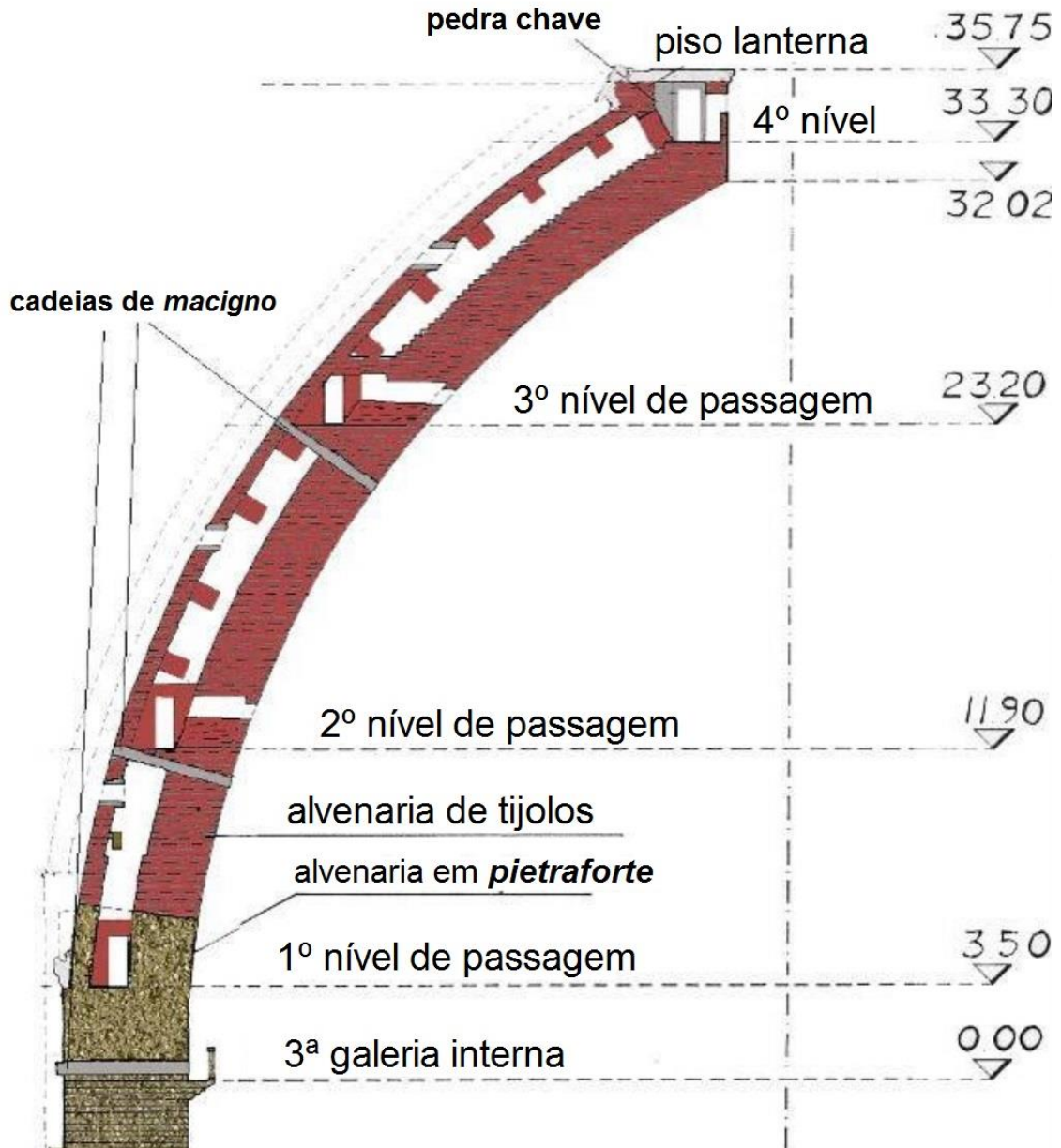
Apesar dos valores acima, foram obtidos dados da literatura científica, sendo esses adotados na execução do trabalho. Giuseppe Conti, do Departamento de Matemática da Universidade de Florença publicou, em 2014, um artigo com as dimensões da cúpula. Assim, foi tomado como base os valores por ele atribuídos.

Conti (2014, p. 1-2, tradução nossa) afirma:

A Cúpula do Duomo de Santa Maria das Flores de Florença, construída pelo Brunelleschi entre 1420 e 1436 sempre aguçou a fantasia dos visitantes e o interesse dos estudiosos; isso devido, seja pela sua beleza, seja pela sua inovadora (e misteriosa) técnica construtiva, seja pela suas dimensões: seu diâmetro interno mede 45 metros, o externo, 54 metros, a sua base se encontra a 55 metros do solo; a Cúpula alcança 91 metros e, com a Lanterna, que pesa cerca de 750 toneladas, chega a 116 metros; o seu peso é de cerca de 29.000 toneladas.

Dessa forma, foram utilizadas essas mesmas dimensões, de 45 e 54 metros de diâmetro para determinar a geometria inicial da cúpula, com um tambor de 4,5 metros. Tais dimensões coincidem com o corte da figura 9, que foi utilizada como base para os desenhos do modelo 2 e 3 criados.

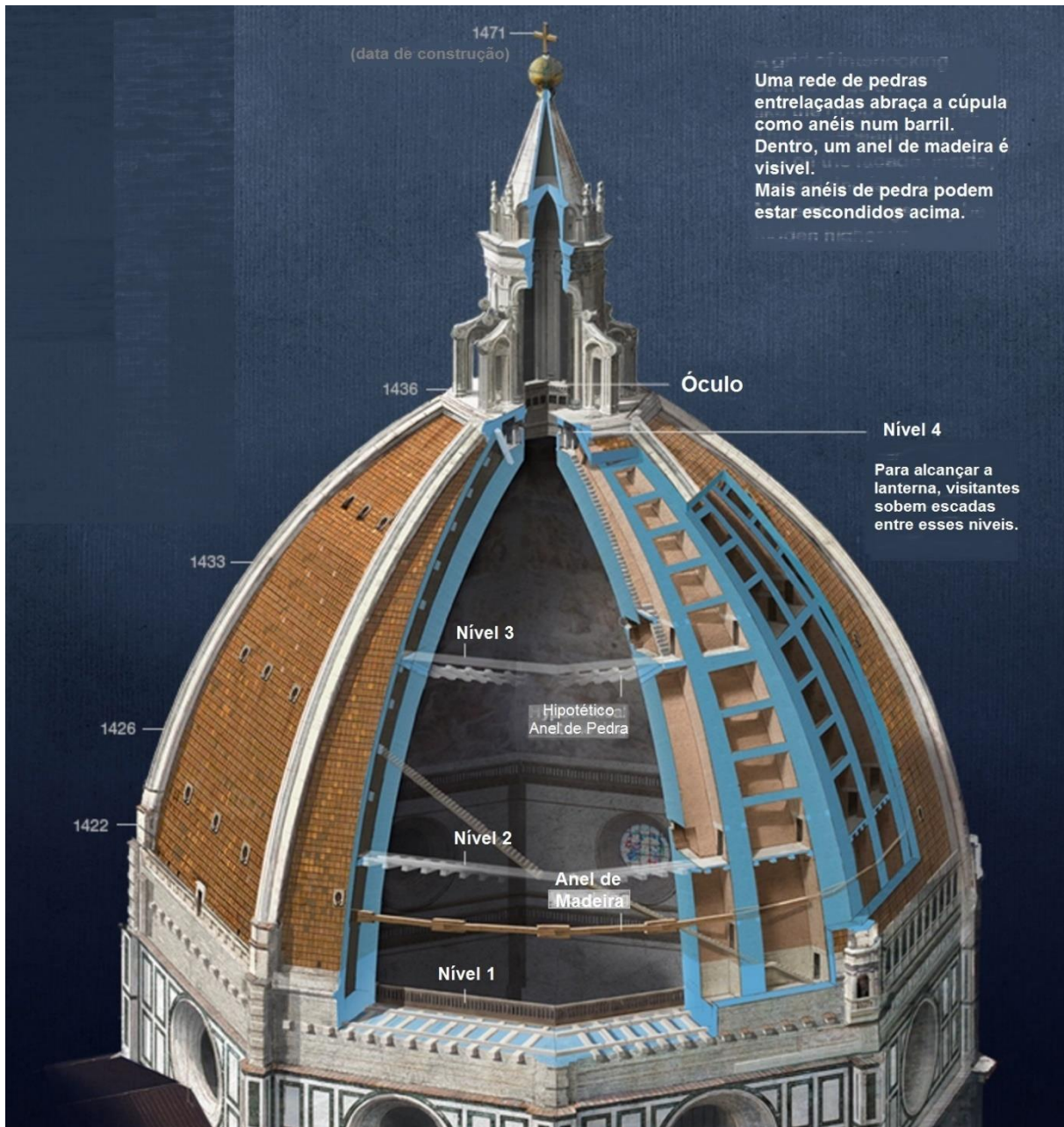
Figura 9 – Detalhamento das alvenarias e correntes de *macigno* utilizadas na cúpula.



(fonte: adaptado de *le pietre della cupola del Brunelleschi*, 2015)

Como descrito anteriormente, o arco interno é do tipo “quinto-agudo”, ou seja, possui dimensão de quatro quintos do diâmetro do vão, e o externo é um “quarto agudo”, ou seja, três quartos do vão. Isso faz com que os centros de curvatura sejam o mesmo.

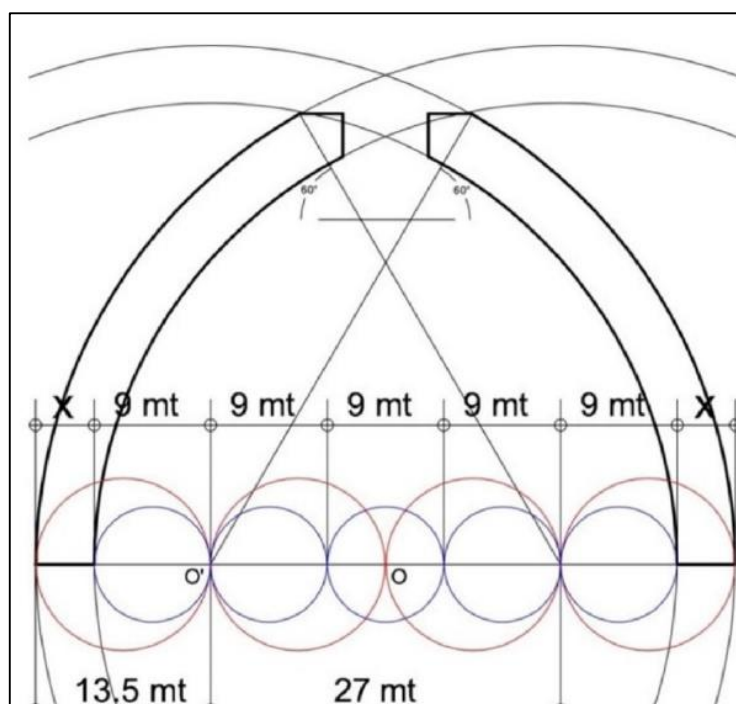
Figura 10 – Esquema 3D da estrutura,



(fonte: adaptado de national geographic, 2015)

Descrevendo duas circunferências no plano com o centro na origem, e diâmetros 45 e 54 metros, e realizando as operações descritas acima, obtém-se o centro de curvatura para os arcos da cúpula afastados 13,5 metros da origem. Esse ponto é o centro dos arcos da cúpula. Além disso, obtém-se o raio interno e o raio externo, cujas dimensões são respectivamente 36 e 40,5 metros.

Figura 11 – Esquema de Corte Transversal da Cúpula



(fonte: CONTI, 2014)

4.1.3 Anéis Concêntricos

Os anéis concêntricos são distribuídos transversalmente ao eixo da cúpula. São importantes pois impedem que a cúpula sofra grandes deslocamentos laterais, levando a tensões excessivas e fissurações indesejáveis. Também, como a estrutura apresenta esforços predominantemente de compressão somente após a conexão superior ser formada, tais anéis serviram para resistir aos esforços durante as etapas de serviço.

Foram utilizados anéis de arenito em, ao menos, dois locais distintos. O primeiro na ligação entre o tambor e a base da cúpula. O segundo logo abaixo do 2º nível de passagem. O terceiro, talvez exista, talvez não, e se localiza sob o 3º nível de passagem. Quanto aos de madeira, seriam cinco, porém somente um foi executado. Ele se encontra entre o primeiro e segundos níveis de passagem.

4.1.3.1 Anéis de Arenito

Sobre as dimensões dos mesmos, King (2013, p. 140) cita que:

Cada anel [interno da cúpula] tem aproximadamente 90 centímetros de largura e 60 centímetros de altura, e ele circundam a cúpula a intervalos de 2,4 metros, o primeiro logo acima da segunda camada de arenito. Visível em certos pontos para quem esteja nas plataformas internas, projetam-se em ângulo reto a partir da parte de dentro da casca externa, ligando os estribos dos cantos às nervuras intermediárias.

King (2013) ainda cita que tais anéis foram construídos a partir da altura de 36 *braccia* (uma *braccia fiorentina* é igual a 58,25 centímetros), acima do tambor octogonal, totalizando 21 metros de altura, ponto em que a curvatura da casca já ultrapassava o ângulo crítico de 30°. Esse ângulo crítico é o ângulo em que a alvenaria em execução não possuiria atrito suficiente e escorregaria da posição de assentamento, requerendo então uma fôrma, ou escora, para seu correto posicionamento.

4.1.3.2 Anéis de Madeira

Para as partes estruturais de madeira, King (2013, p. 99) afirma:

As cadeiras de arenito não eram as únicas amarras na circunferência da cúpula. Complementava-as uma quinta, feita de madeira e instalada em 1424 em volta da cúpula, a 7,62 metros acima da primeira camada de pedra. Originalmente haviam-se planejado quatro dessas cadeias de madeira, mas como o exemplo de que “na construção somente a experiência prática ensinará o que deve ser feito”, a penas a primeira foi construída.

A cadeia de madeira apresentou desde o início problemas para Brunelleschi. O programa de 1420 especificava que deveria ser confeccionada com vigas de carvalho de 6,09 metros de comprimento e 30 centímetros de largura. Porém um ano mais tarde, quando se verificou a dificuldade de conseguir quantidades suficientes de carvalho, escolheu-se em vez disso a nogueira. No total, seriam necessárias 24 traves, três de cada lado do octógono, unidas por meio de grampos feitos de carvalho.

King (2013) também cita que o arco de madeira pode ter servido, também, para absorver e distribuir melhor as tensões provenientes de excitações dinâmicas, como cargas sísmicas e cargas devido ao vento, já que às propriedades da madeira servem para este propósito, muito mais que a alvenaria ou pedras.

Sabe-se, entretanto, que dos 5 arcos previstos, somente um foi executado. Acredita-se que os anéis de madeira não cumpriram sua função de enrijecer a estrutura de forma adequada e por isso foram abandonados do projeto.

4.1.4 Lanterna

Sobre a lanterna, King (2013) exprime que, em junho de 1432, foi reduzido o diâmetro original de 12 *braccia* para 10 *braccia* e um ano depois, reduzido para pouco menos de 10 *braccia*. A plataforma que suporta a lanterna é feita em mármore, e também octogonal como a cúpula abaixo dela. Seus contrafortes são 8, feitos em arenito, e estão alinhados com as nervuras provenientes do domo abaixo dela. Sobre os contrafortes, nascem pilastras com 9,1 metros de altura, e entre as mesmas, 8 janelas com também 9,1 metros cada. O peso estimado das pedras é de mais de 453 toneladas, e seu peso total de cerca de 750 toneladas.

4.1.5 Resumo da Geometria Adotada

A geometria adotada como base para os cálculos foi definida pela compatibilização das informações anteriores, de diversas fontes. O diâmetro interno possui 36 metros, o externo 45 metros. O raio de curvatura da cúpula é de 36 metros para a casca interna e 40,50 metros para a casca externa. A casca interna possui 2,40 metros de espessura na parte baixa, e 2,20 metros na parte alta. A casca externa, por outro lado, possui 90 centímetros e 40 centímetros nas mesmas posições, respectivamente. A altura da parte baixa construída em arenito é de 5,50 metros, o restante é feito em alvenaria. O diâmetro da lanterna é de 6 metros.

Já para a espessura das costelas de canto, foram utilizadas as dimensões de 4,30 metros para a base, e aproximadamente 40 centímetros no topo. Para as costelas centrais, a espessura na base é de 2,40 metros, e no topo, cerca de 30 centímetros.

A figura 9 mostra, de acordo com a altura, as diversas composições de materiais da cúpula. Também pode-se consultar a figura 10. A única diferença entre elas é a certeza ou não da terceira corrente de *macigno*, no terceiro nível da cúpula.

4.2 PROPRIEDADES DOS MATERIAIS UTILIZADOS

Para a construção da cúpula, foram utilizados diversos materiais. Para a modelagem da estrutura em elementos finitos, é preciso, no mínimo, o valor do Módulo de Young e do Coeficiente de Poisson para cada um dos materiais, para que os mesmos possam ser tratados como materiais isotrópicos e homogêneos.

4.2.1 Alvenaria

Define-se alvenaria como uma forma de estrutura, formada de tijolos, blocos ou pedras unidos por uma camada de argamassa.

Uma das principais inovações, se não a maior, é o fato de que Brunelleschi criou um padrão para a alvenaria que foi utilizada nas cascas exterior e inferior, chamado de espinha de peixe, que pode ser visto na figura 5. Esse padrão consiste em colocar alguns tijolos na horizontal e um na vertical. Muitos autores descrevem essa como sendo sua principal marca e contribuição para a estrutura.

Assim, impede-se o deslizamento dos tijolos assentados devido à inclinação da cúpula, visto que não eram utilizadas fôrmas para escorar a alvenaria enquanto a argamassa endurecia. Outra vantagem, também, é que não se forma uma superfície de ruptura cisalhante preferencial, transmitindo os esforços de forma mais eficiente por toda a casca; pois, caso fossem todos os tijolos assentados da forma tradicional, a argamassa, que é menos resistente, poderia trincar, fazendo com que a parede girasse, ou até viesse a ruir.

Tom Mueller (2014, p. 2, tradução nossa) cita que Brunelleschi supervisionava a produção dos tijolos de várias dimensões e controlava a demanda de pedras e mármore oriunda das pedreiras, estabelecendo assim um controle de qualidade no recebimento dos materiais.

King (2013, p. 122) cita que, os tijolos, ou *mattoni*, em italiano, possuíam cerca de 25,4 centímetros de comprimento por 12,7 centímetros de largura. A cúpula, entretanto, necessitava também de tijolos com formatos especiais. Assim, Brunelleschi desenhava os moldes e os enviava para que fossem fabricados do formato exato em que seriam necessários na obra. Caso a remessa fosse contrária às especificações, o lote era rejeitado.

Para a argamassa, King (2013, p. 124) afirma que:

Brunelleschi também se interessava pessoalmente pela qualidade da argamassa, igualmente importante na construção da cúpula. Durante a Idade Média a argamassa era feita misturando areia e água com cal (óxido de cálcio), substância obtida pelo aquecimento de calcário num forno.

Apesar dos tijolos e argamassa fabricados na época seguirem controles rígidos de fabricação, e a supervisão do arquiteto, é impossível afirmar que todos possuem as mesmas propriedades mecânicas, dada a variabilidade de locais de extração de argila e das próprias olarias que

transformavam essas argilas em tijolos. Não foi possível obter dados relacionados aos tijolos e argamassas utilizados especificamente para esta obra.

Dessa forma, para simular o comportamento da alvenaria existente, assumem-se valores obtidos da literatura para módulo de elasticidade, coeficiente de Poisson, além de valores de resistência a tração e a compressão.

De acordo com a publicação do *Ministero Delle Infrastrutture e dei Trasporti* (2009, p. 403), a *Circolare* 617/2009, as propriedades mecânicas de alvenaria de tijolos maciços com argamassa de cal possuem valores típicos listados abaixo:

- a) Resistência Média de Compressão – 240 a 400 N/cm²;
- b) Resistência Média ao Cortante – 6 a 9,2 N/cm²;
- c) Módulo de Elasticidade Normal – 1200 a 1800 N/mm²;
- d) Módulo de Elasticidade Transversal – 400 a 600 N/mm²;
- e) Peso Específico Médio – 18 kN/m³.

Já para a base da cúpula, foi utilizada alvenaria de pedra, conhecida como *Pietraforte*, um tipo de arenito menos resistente comparado ao *macigno*, em vez de tijolos. Suas propriedades foram estimadas de acordo com a *Circolare* 617/2009, publicada pelo *Ministero Delle Infrastrutture e dei Trasporti* (2009, p. 403), e listada abaixo:

- a) Resistência Média de Compressão – 600 a 800 N/cm²;
- b) Resistência Média ao Cortante – 9 a 12 N/cm²;
- c) Módulo de Elasticidade Normal – 2400 a 3200 N/mm²;
- d) Módulo de Elasticidade Transversal – 780 a 940 N/mm²;
- e) Peso Específico Médio – 22 kN/m³.

Para valores de resistência à tração, segundo *Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica* (entre 2000 e 2015, p. 7) da *Università Degli Studi Di Genova*, foi encontrado, para *mattoni ordinari, deboli* (tijolos ordinários, débeis), o valor de 8 kg/cm² ou 0,8x10⁶ Pa. Para outro tipo de tijolo, bem cozido, o valor encontrado é de 1,9x10⁶ Pa. Segundo Cazzani (2006) o valor para tração em alvenarias varia de 0,29x10⁶ a 0,95x10⁶ Pa; e para compressão, 1,7x10⁶ a 6,2x10⁶ Pa. Não foram encontrados valores de comportamento à tração de alvenarias feitas com arenitos ou rochas, nem de alvenarias que possuam o padrão de espinha-de-peixe. Dessa

forma, optou-se por escolher o valor de $0,3 \times 10^6$ Pa para a alvenaria de tijolos e $0,5 \times 10^6$ Pa para a de blocos de arenito.

4.2.2 Madeira

Os arcos em madeira servem para aumentar a rigidez da estrutura, como aros em barris, a fim de impedir que a cúpula se expanda para fora. O projeto inicial previa vigas de carvalho, entretanto foi alterado para viga de nogueiras, devido à dificuldade em se encontrar tais árvores. Existe um anel de madeira, podendo ser visto inclusive por quem sobe ao topo da cúpula. Ele está localizado entre o primeiro e segundo nível, como explicita a figura 10.

De acordo com The Wood Database (2015), o valor típico de módulo de elasticidade para nogueiras europeias é de $10,81 \times 10^9$ Pa. De acordo com Larapedia (2015), o valor é de $11,24 \times 10^9$ Pa. A tensão de ruptura à tração é de 95×10^6 Pa, 62×10^9 Pa para compressão.

4.2.3 Arenito

Os arenitos usados em Florença, no século XV, para as obras do Renascimento, eram extraídos das minas localizadas nos Apeninos. King (2013, p. 96) transcreve que as colinas eram formadas de *macigno*, um arenito tão resistente que era preferido, na Idade Média, para pedras de moinhos. Esse arenito, também conhecido como *pietra serena*, foi utilizado para os reforços sob os três níveis da cúpula² e para os contrafortes da lanterna.

Segundo Anzani et al. (2008, p. 1171), os valores de módulo de elasticidade para as peças de arenito variam de $18,2 \times 10^9$ Pa a $23,3 \times 10^9$ Pa e coeficiente de Poisson, de 0,19 a 0,21. Assim, foram utilizados os valores médios de 20×10^9 Pa e 0,2 para o Módulo de Elasticidade e o Coeficiente de Poisson, respectivamente. O peso específico é de 2550 kg/m^3 . Para a resistência à compressão, foi obtido o valor de 89×10^6 Pa e de 6×10^6 Pa para tração.

4.2.4 Mármore

Para a construção da lanterna, bem como das coberturas externas das nervuras, foram utilizadas pedras de mármore. Entretanto, como a lanterna não faz parte da estrutura resistente da cúpula,

² A existência da corrente de arenito sob o terceiro nível é incerta.

nem o revestimento externo da cúpula, suas propriedades mecânicas não serão necessárias para a abordagem da solução do problema.

4.2.5 Ferro

Há algumas fontes que citam a utilização de reforços em ferro fundido recoberto por chumbo (para evitar a ferrugem), sem, entretanto, determinar suas posições específicas. Há também relatos de utilização de ferro para grampear os grandes blocos de arenito uns nos outros.

Estudiosos foram em busca de uma suposta corrente de ferro utilizando métodos eletromagnéticos como scanners, e, embora muito ferro fora encontrado na cúpula, não foi encontrada continuidade. Ao não saber a quantidade nem posição de tais elementos, eles não foram considerados no modelo de elementos finitos.

4.2.6 Resumo das Propriedades Adotadas

Foram convertidos os valores utilizados no trabalho dos valores obtidos nos itens 4.2.1 a 4.2.4, e agrupados por material. Tais valores são descritos abaixo.

Para a base, feita de alvenaria de rocha, foram utilizados os valores abaixo:

- a) Módulo de Elasticidade (E) – $2,8 \times 10^9$ Pa;
- b) Coeficiente de Poisson (ν) – 0,25;
- c) Peso Específico Médio (w) – 2250 kg/m^3 ;
- d) Resistência à Tração (σ_t) – 5×10^5 Pa;
- e) Resistência à Compressão (σ_c) – 7×10^6 Pa.

Para as demais partes, em alvenaria de tijolos maciços, foram utilizados os valores abaixo:

- a) Módulo de Elasticidade (E) – $1,4 \times 10^9$ Pa;
- b) Coeficiente de Poisson (ν) – 0,2;
- c) Peso Específico Médio (w) – 1840 kg/m^3 ;
- d) Resistência à Tração (σ_t) – 3×10^5 Pa;
- e) Resistência à Compressão (σ_c) – 3×10^6 Pa.

Para o anel de madeira de nogueira, foram utilizados os valores abaixo:

- a) Módulo de Elasticidade (E) – $1,1 \times 10^{10}$ Pa;
- b) Coeficiente de Poisson (ν) – 0,2;
- c) Peso Específico Médio (w) – 700 kg/m^3 ;
- d) Resistência à Tração (σ_t) – $9,5 \times 10^7$ Pa;
- e) Resistência à Compressão (σ_c) – $6,2 \times 10^7$ Pa.

Para os anéis de arenito e para a base da lanterna, foram utilizados os valores abaixo:

- a) Módulo de Elasticidade (E) – $2,0 \times 10^{10}$ Pa;
- b) Coeficiente de Poisson (ν) – 0,2;
- c) Peso Específico Médio (w) – 2550 kg/m^3 ;
- d) Resistência à Tração (σ_t) – 6×10^6 Pa;
- e) Resistência à Compressão (σ_c) – $8,9 \times 10^7$ Pa.

5 MODELAGEM EM ELEMENTOS FINITOS

A cúpula foi modelada em Elementos Finitos tanto como um sólido axissimétrico quanto como um sólido tridimensional.

5.1 MODELO 1

O modelo 1 foi utilizado como um modelo simplificado para entendimento do comportamento geral da cúpula. Para tanto, a cúpula octogonal em duas camadas foi aproximada por uma única casca axissimétrica. Para levar em conta a posição de início e fim da superfície, foi feita uma ponderação pelas espessuras dos raios interno e externo. Assim, determinou-se uma linha geratriz, e, posteriormente foi realizada a superfície, afastando da linha geratriz metade da espessura da casca para dentro e para fora, gerando a geometria final, que pode ser vista na figura 12.

Sabe-se que o centro do arco é localizado no ponto $(-13,5; 0)$. Sabe-se que a base da cúpula se localiza na posição $y = 0$, e seu topo, na posição $x = 3$, pois foi adotado que o raio da lanterna seria 3 metros. Portanto, precisa-se somente descobrir o raio que será adotado para que a geometria seja definida.

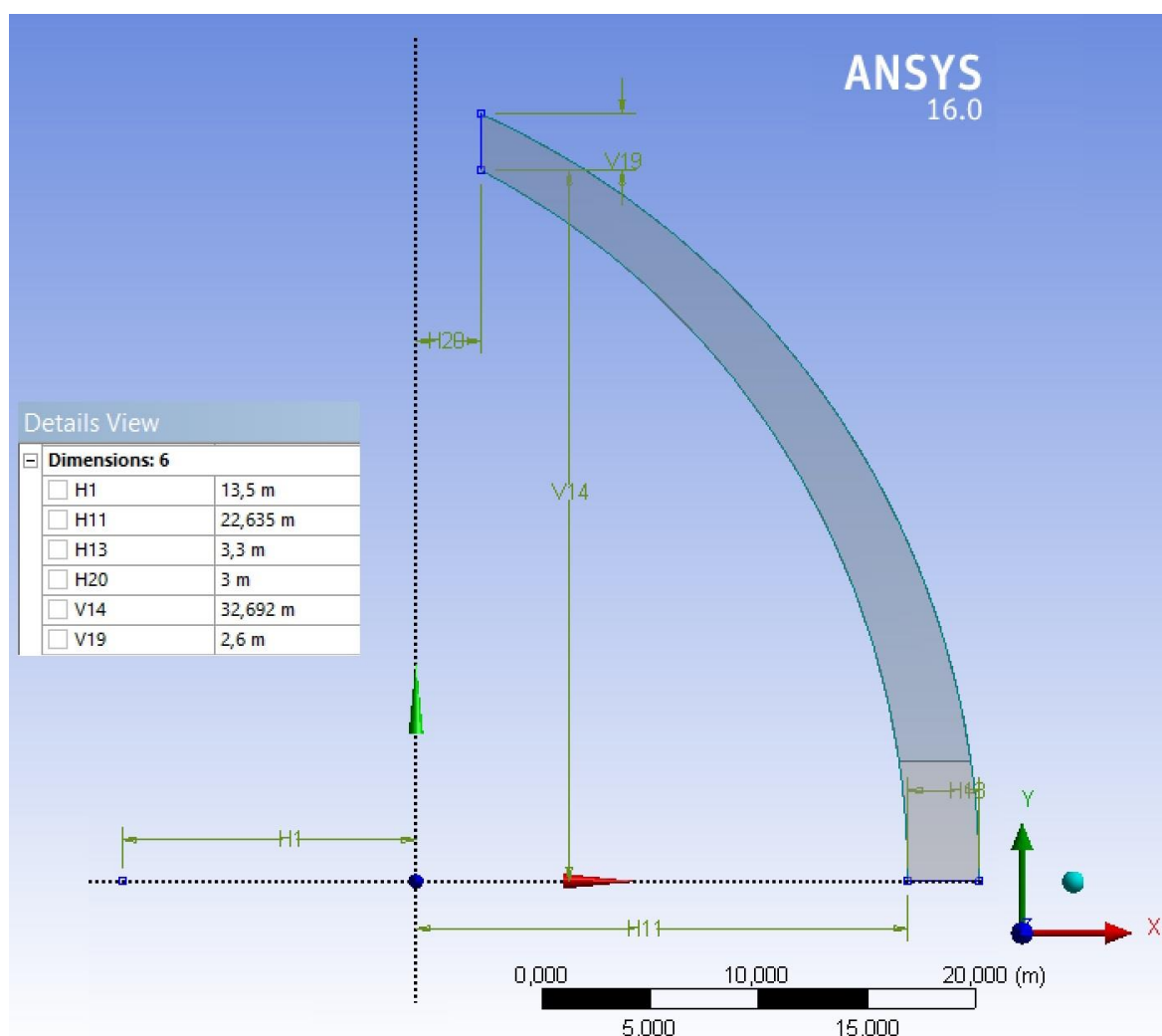
Muitas eram as possibilidades de escolha de raios, entretanto foi adotada como medida a ponderação pela espessura dos raios médios de ambas as cascas, desconsiderando-se as nervuras entre elas, que não são consideradas nesse primeiro modelo. Assim, foi necessário estipular, primeiramente, as espessuras das cascas. Como são distintas, foi realizada uma ponderação do raio pela espessura da casca.

Tabela 1 – Raios Interno e Externo e Espessuras

	Raio	Espessura	
		Inferior	Superior
Int	36	2,4	2,2
Ext	40,5	0,9	0,4

(fonte: elaborado pelo autor)

Figura 12 – Geometria Modelo 1



(fonte: ANSYS INC., 2015)

Tomando como base os valores da tabela 1, obtemos facilmente os valores médios para a casca interna somando o raio interno com metade da espessura, e os externos, diminuindo metade da espessura. Assim, chega-se aos valores obtidos na tabela 2.

Tabela 2 – Raio Médio Interno e Externo

	Raio Médio da Espessura	
	Inferior	Superior
Int	37,2	37,1
Ext	40,05	40,3

(fonte: elaborado pelo autor)

A seguir, realizou-se a ponderação dos valores de raios médios com os valores de suas espessuras, o que resultou nos valores demonstrados na tabela 3.

Tabela 3 – Raio Médio Ponderado Inferior e Superior

Raio Ponderado na linha	
Inferior	Superior
37,9773	37,5923

(fonte: elaborado pelo autor)

Como esperado, o raio ponderado é maior na base e menor no topo.

Como, entretanto, optou-se por fazer um modelo em que o arco seja uma circunferência (raio constante), decidiu-se realizar o estudo com a média entre os raios interno e externo ponderados, ou seja, com o valor igual a 37,875 metros. Em posse de todos os dados, pode-se agora realizar a modelagem do arco de circunferência para o estudo pretendido.

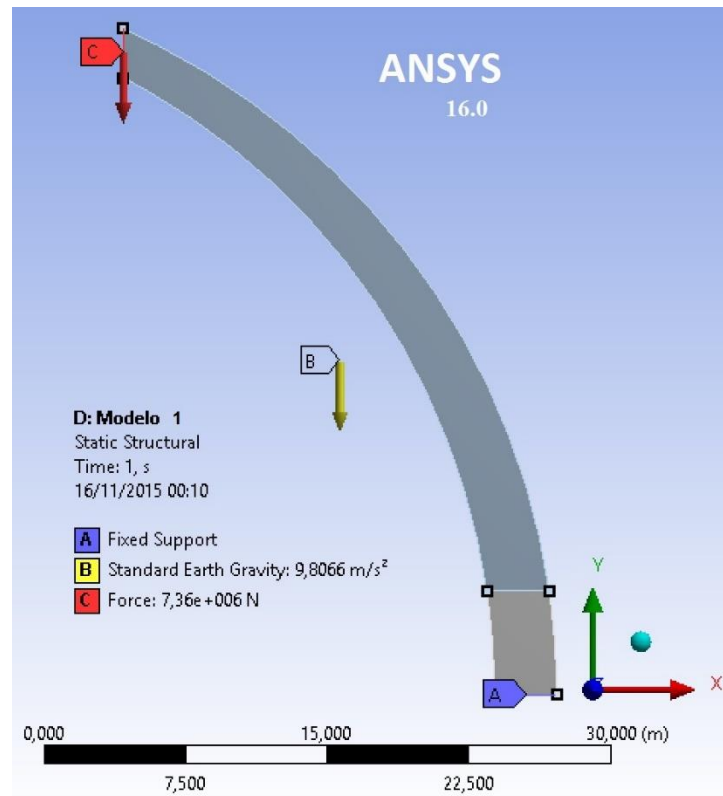
Foi considerado também nesse modelo, um corte horizontal na estrutura na altura de 6 metros para que fosse substituído o material da alvenaria de tijolos para a alvenaria de blocos de arenito.

Posteriormente à definição da geometria e dos materiais, foi feita a geração da malha. Para isso, foram utilizados elementos do tipo PLANE183 do programa comercial ANSYS. Tal elemento possui 8 nós, interpolação quadrática de deslocamentos entre nós (sendo 4 de canto, e 4 na metade do segmento de reta que une os cantos), sendo que, em cada nó, são permitidas as translações na direção X e Y. O tamanho dos elementos foi variável, com um máximo de 0,10m para o valor da face do elemento. A malha teve, no total, 45604 nós, formando 12538 elementos.

Foram aplicadas condições de contorno de restrição do movimento em X, Y na base da cúpula, considerando-se que o atrito entre a cúpula e o tambor é suficientemente grande para impedir o deslocamento relativo na direção radial. Foram aplicadas condições de gravidade para que fosse levada em consideração a massa atribuída, e o peso de 750 toneladas da Lanterna no topo. Tais considerações podem ser vistas na figura 13.

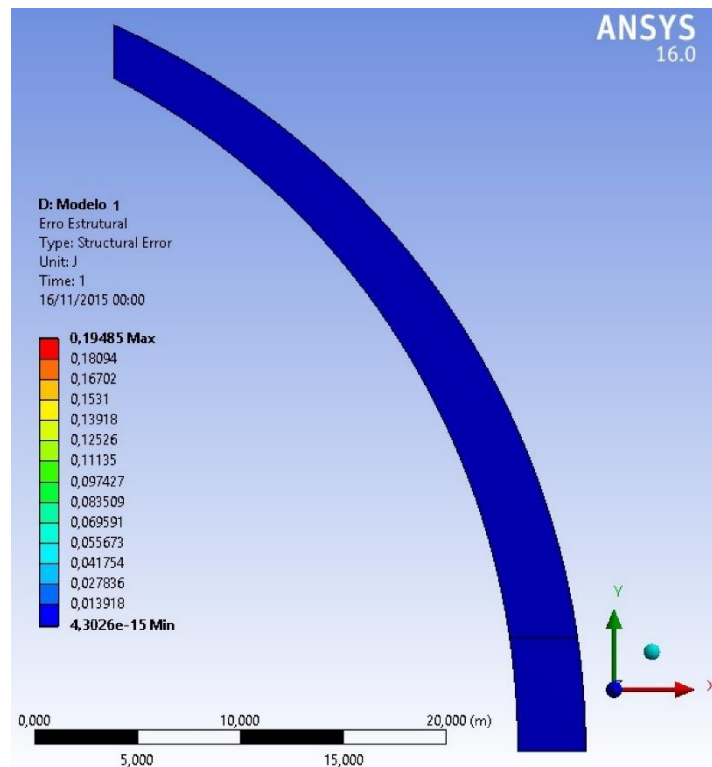
Para o modelo, além dos resultados de tensões e deslocamentos, foi medido também o erro estrutural, que pode ser visto na figura 14, para verificar se a malha gerada é adequada para a solução do problema. Sørensen (2013, p. 12, tradução nossa) diz que esse erro é a diferença entre a energia de deformação (*strain energy*), calculada das tensões dos elementos (*element stresses*) e a energia de deformação calculada das tensões nodais.

Figura 13 – Modelo Estrutural – Modelo 1



(fonte: ANSYS INC., 2015)

Figura 14 – Erro Estrutural – Modelo 1



(fonte: ANSYS INC., 2015)

5.2 MODELO 2

O modelo 2 foi idealizado como um modelo simplificado para estimar a influência da existência de 2 cascas e dos anéis no comportamento da estrutura da cúpula. É também axissimétrico, mas discretiza a geometria real da seção transversal da cúpula, ou seja, possui duas cascas, anéis, e o topo foi modelado de acordo com as figuras 8 e 9.

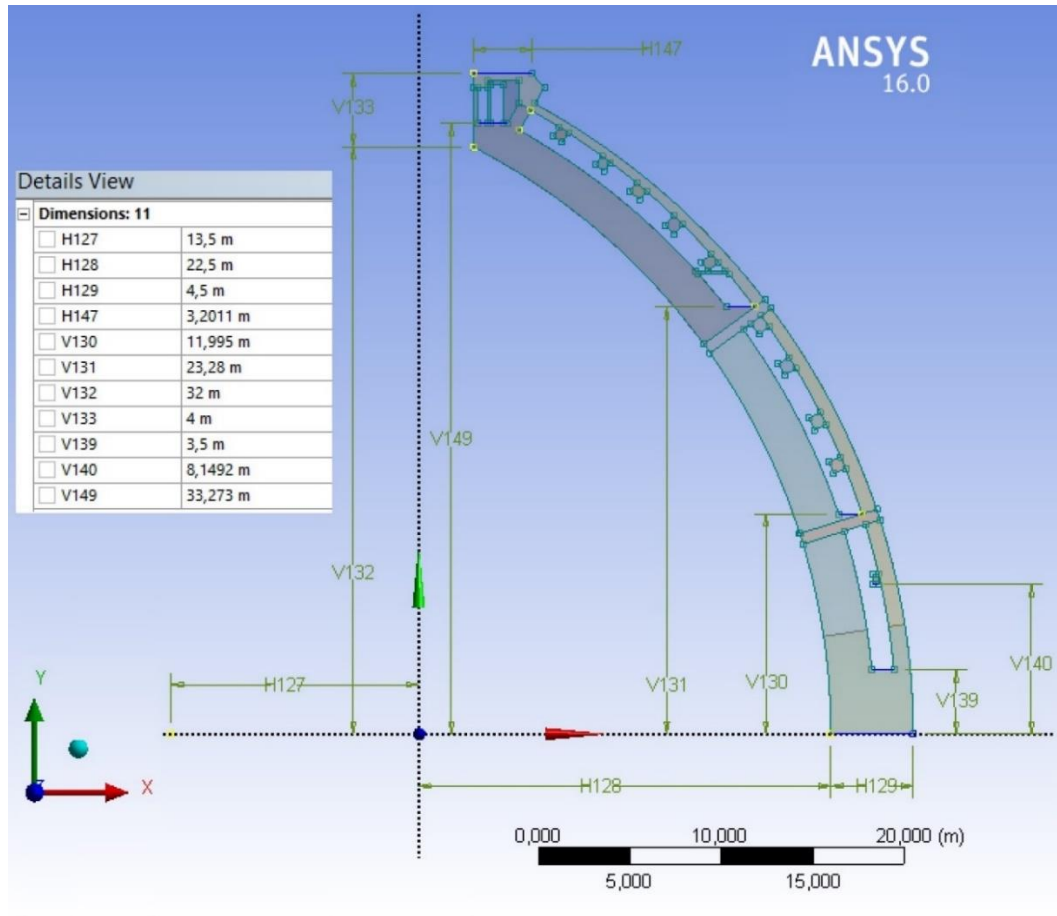
Os dados necessários para a criação desse modelo são as espessuras das cascas, que variam de 2,4 a 2,2 metros (casca interna) e 0,9 a 0,4 metros (casca externa), o vão entre elas (1,2 metros), as alturas dos níveis 2 e 3 (12 metros e 23,3 metros). Todos os detalhes sobre a geometria podem ser vistos nas figuras 15 a 18 que seguem.

Após a definição geométrica, definiu-se às áreas correspondentes seus materiais componentes. Também foi restringido o movimento na base em ambos os eixos, aplicadas condições de gravidade, e o peso de 750 toneladas no topo, igual ao realizado no modelo 1. Tais condições podem ser visualizadas na figura 19.

As propriedades da malha para esse modelo são as descritas a seguir. O tamanho máximo para face dos elementos é de 0,10 metros. Os elementos são quadrangulares do tipo PLANE183 do ANSYS, definido no item 5.1, com opção axissimétrica. Foram gerados 47640 nós e 15008 elementos.

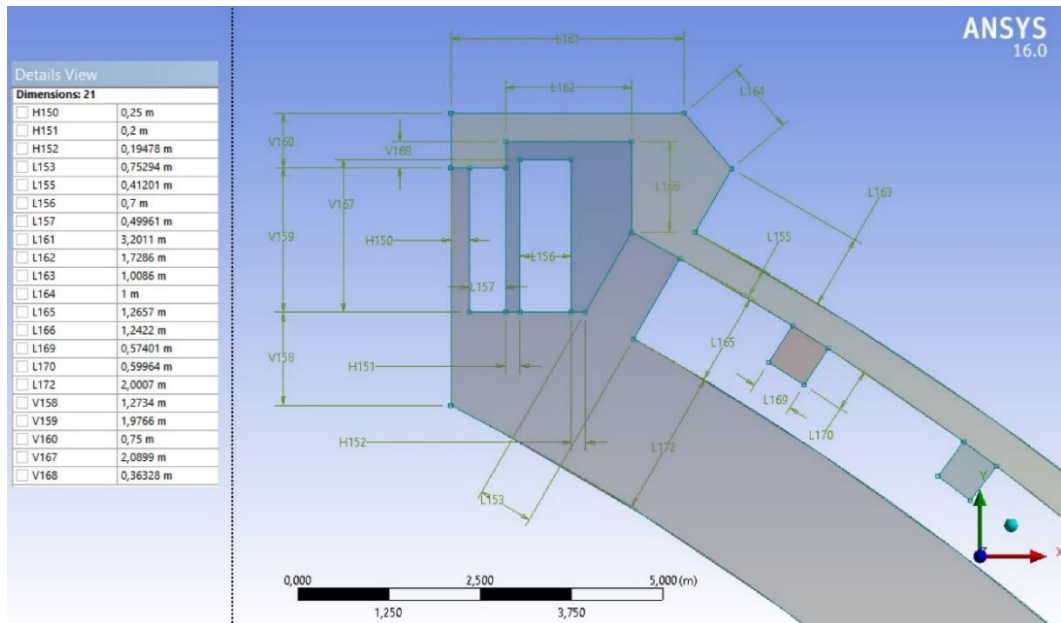
O modelo 2 demonstra ser bastante preciso, como pode ser visto na figura 20 abaixo, e possui erros pequenos, exceto nos cantos inferiores direito e esquerdo, devido a concentração de tensões e restrições de movimento da base.

Figura 15 – Geometria – Modelo 2



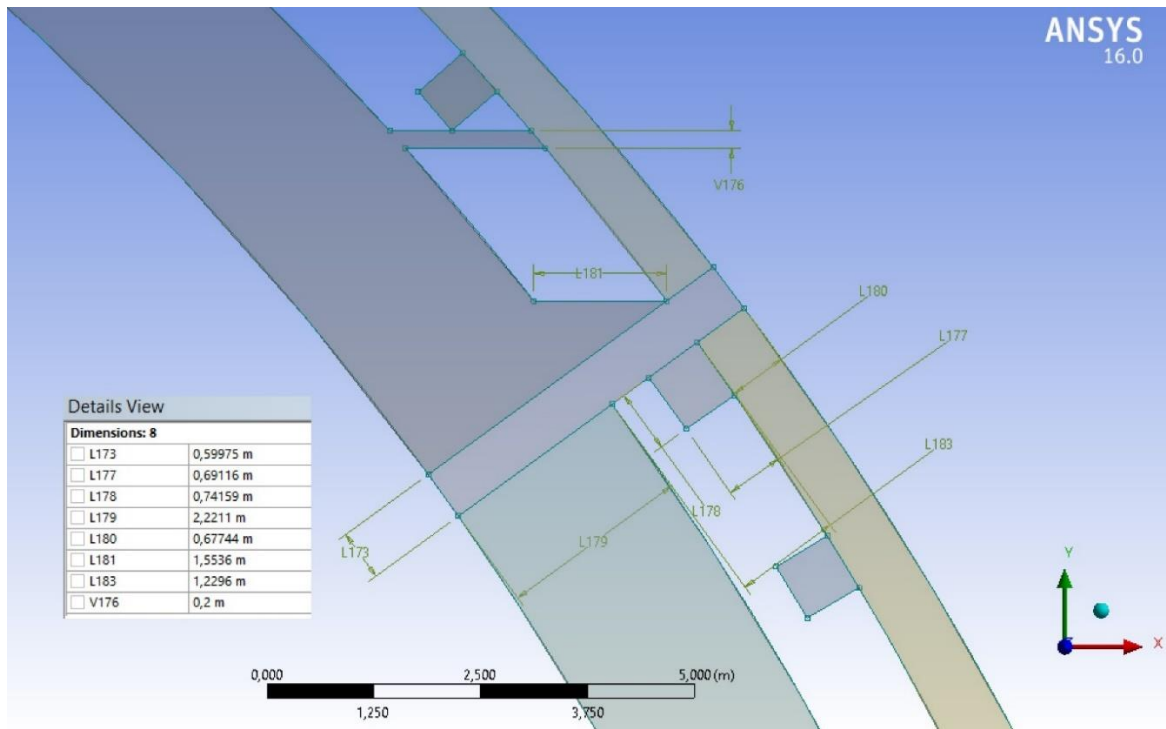
(fonte: ANSYS INC., 2015)

Figura 16 – Detalhe Topo - Geometria - Modelo 2



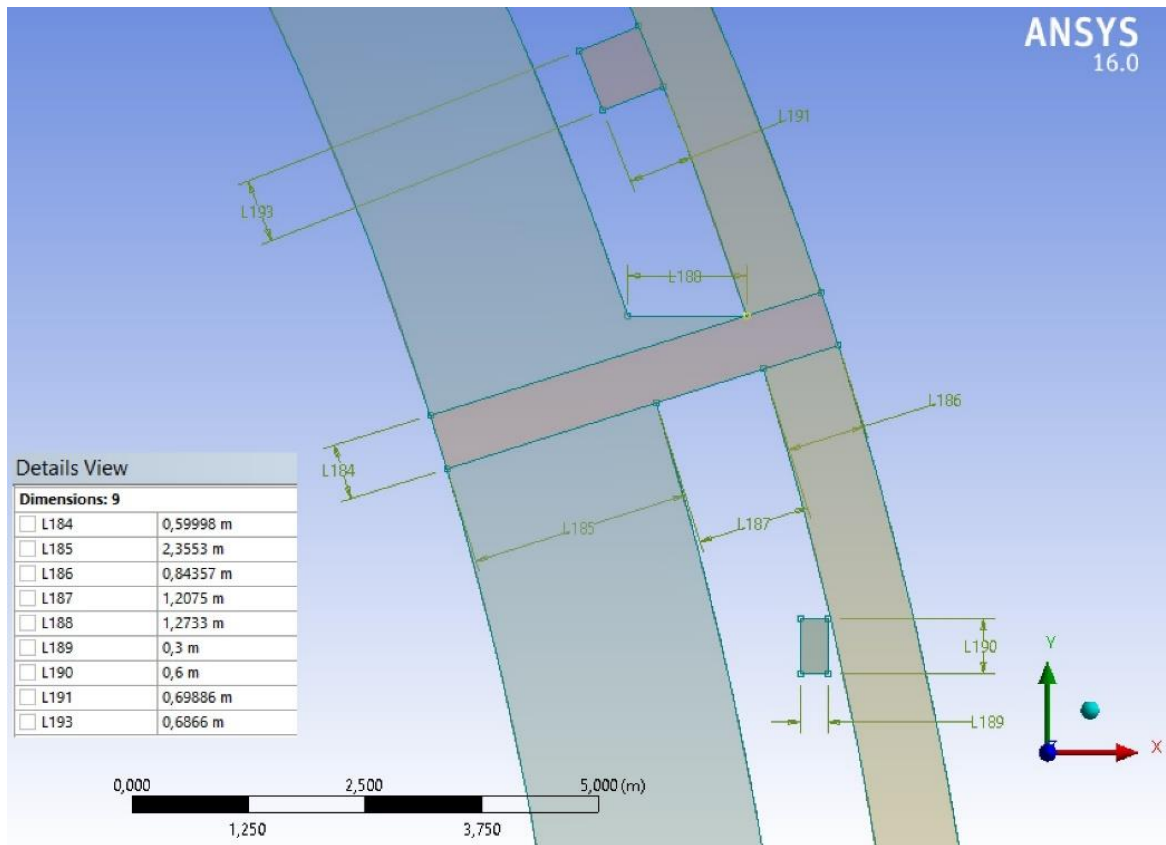
(fonte: ANSYS INC., 2015)

Figura 17 – Detalhe Nível 3 – Geometria – Modelo 2



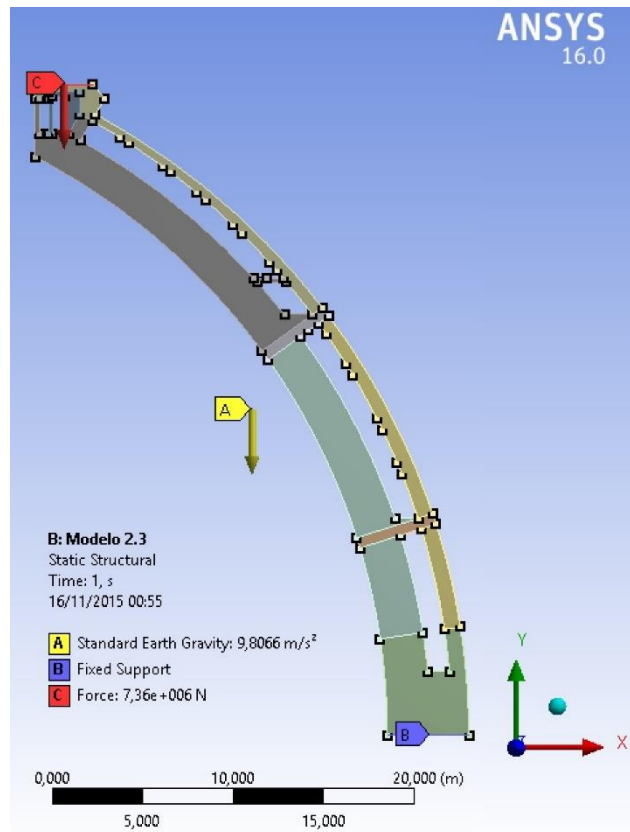
(fonte: ANSYS INC., 2015)

Figura 18 – Detalhe Nível 2 – Geometria – Modelo 2



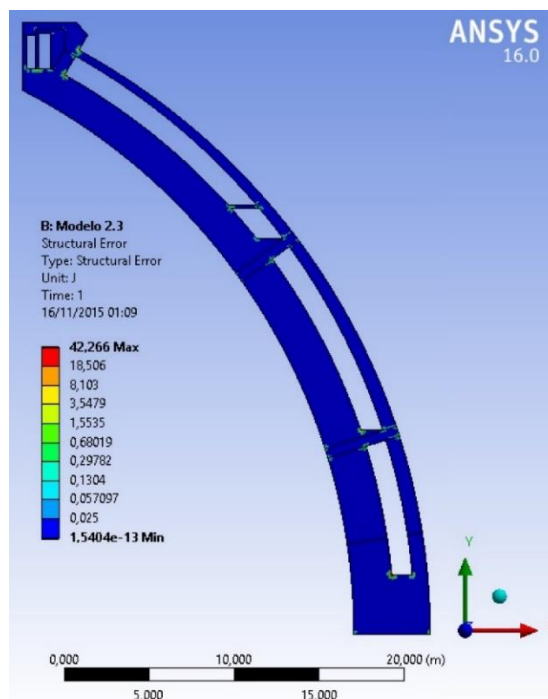
(fonte: ANSYS INC., 2015)

Figura 19 – Modelo Estrutural – Modelo 2



(fonte: ANSYS INC., 2015)

Figura 20 – Erro Estrutural – Modelo 2



(fonte: ANSYS INC., 2015)

5.3 MODELO 3

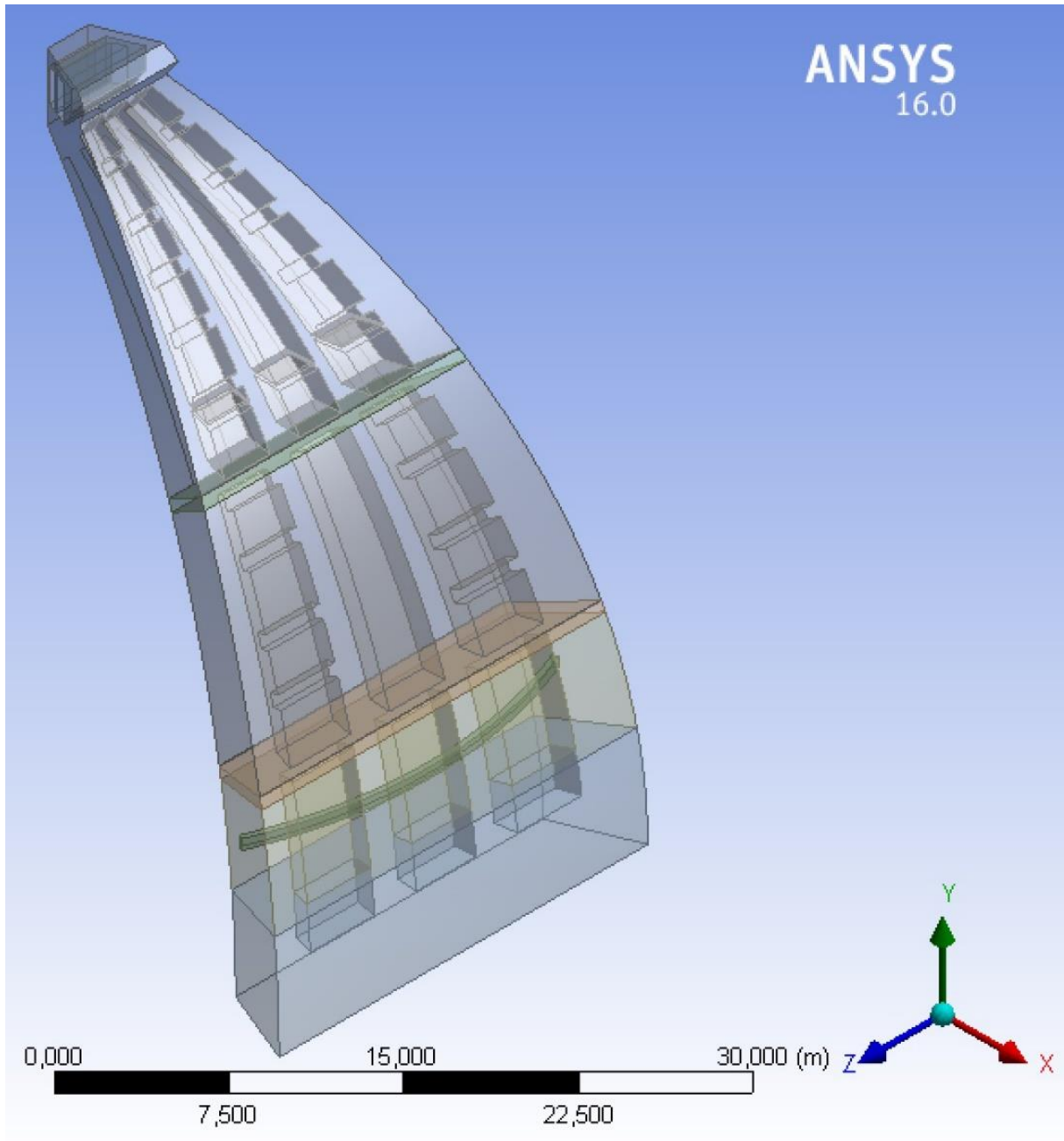
O modelo 3 é um modelo sólido tridimensional com formato de um-oitavo de cúpula, ou seja, um gomo completo entre nervuras ou costelas. Foram consideradas as costelas, o anel de madeira e os de arenito, e também as ligações entre as costelas de canto e as internas. As estruturas das cascas são as mesmas do modelo 2, portanto serão descritas somente as diferenças entre os modelos.

Para as costelas de canto, foram consideradas as espessuras de 2,15 metros na base (visto que é representada metade em cada gomo do octógono), sendo elas reduzidas a, aproximadamente, 40 centímetros no topo. Já as de centro, possuem a dimensão de 2,30 metros, e 45 centímetros no topo. Essas nervuras foram realizadas segundo cortes no plano XY tendo como base um sólido com a espessura total da cúpula. Os ângulos em que foram criados planos são respectivamente 4° , $9,5^\circ$, $17,6^\circ$ e $22,5^\circ$, gerando, aproximadamente, os valores médios das nervuras reais.

Também foi inserido nesse modelo o anel de madeira. Ele possui dimensões de 30x60 centímetros e gira ao redor da cúpula em uma circunferência. Assim, foi gerado como um sólido de revolução, atravessando as costelas que corta. Os detalhes finais da geometria podem ser visualizados na figura 21.

As costelas de canto possuem ligação com as suas imediatas nervuras centrais. Isso se deve aos 9 arcos distribuídos após o 2º nível da cúpula. Tais arcos possuem dimensões de 70x70 centímetros, exceto os últimos dois, que possuem 60x60 centímetros. Entre as costelas centrais não há ligação.

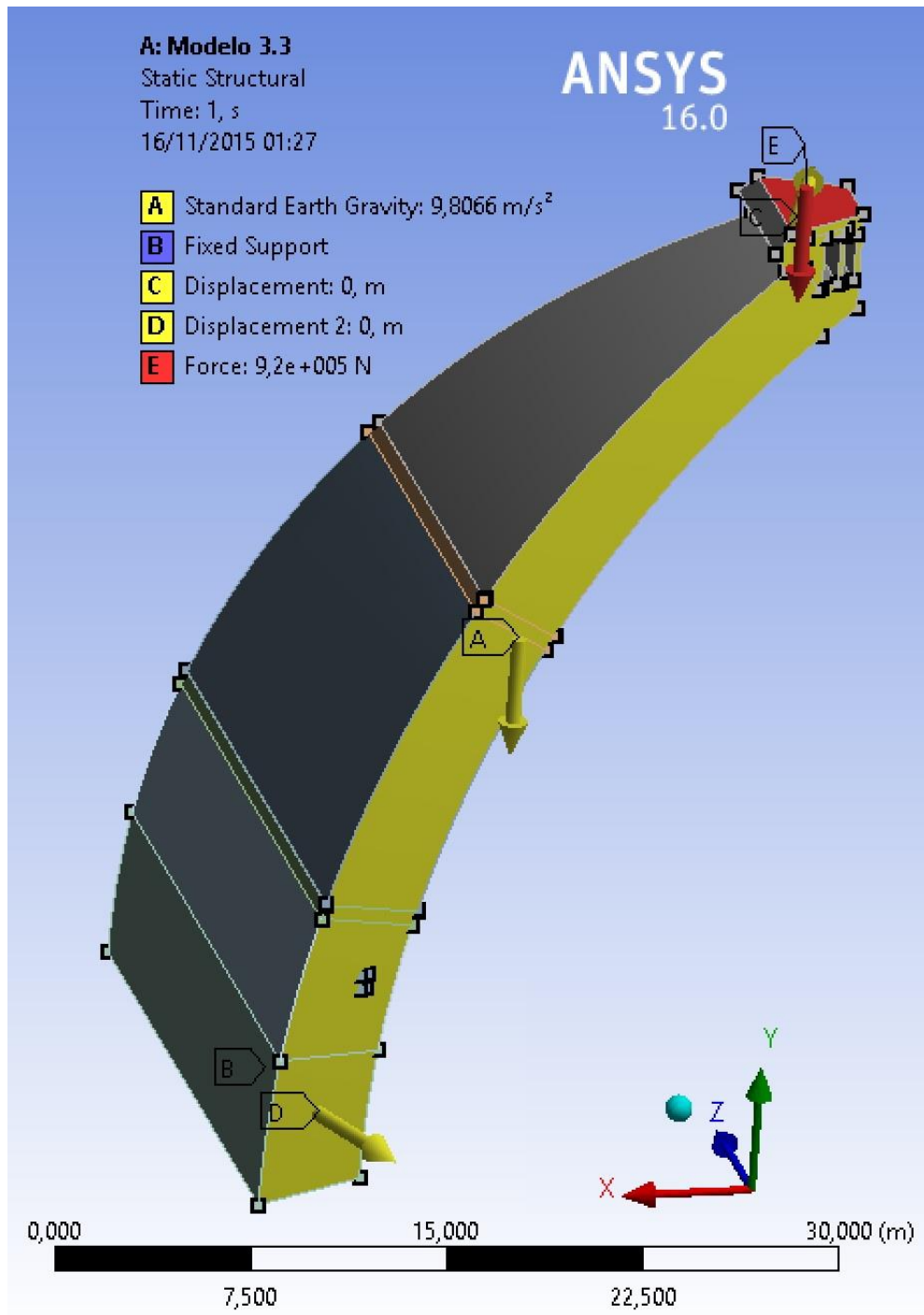
Figura 21 – Geometria – Modelo 3



(fonte: ANSYS INC., 2015)

As condições de contorno foram, então, aplicadas no modelo conforme a figura 22. Foi considerado um apoio fixo na base. Também foi restringido o deslocamento normal às faces laterais, além da aplicação de um-oitavo da carga correspondente à 750 toneladas, referente a lanterna, o que equivale a 93,75 toneladas, ou então, $9,2 \times 10^5$ N.

Figura 22 – Modelo Estrutural – Modelo 3



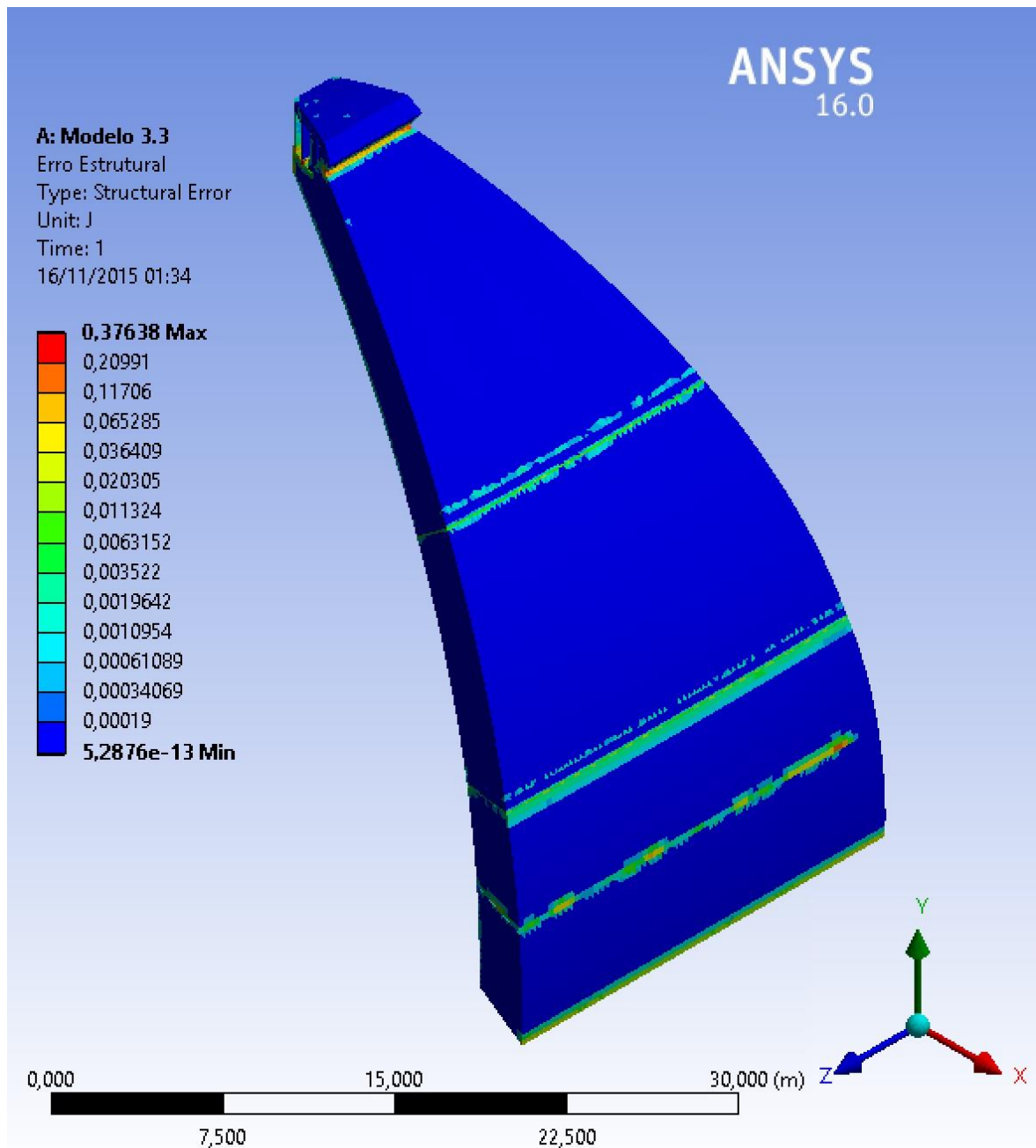
(fonte: ANSYS INC., 2015)

As propriedades da malha para esse modelo são as descritas a seguir. O tamanho máximo para as faces dos elementos é de 0,30 metros, sendo o máximo para o elemento de 0,50 metros. Os elementos são do tipo SOLID186 do ANSYS. Tal elemento possui 20 nós na sua forma hexaédrica, e 10 nós na forma tetraédrica. Possui, além dos nós de canto, um nó no centro de

cada segmento de reta formador do elemento. A interpolação dos deslocamentos entre os nós é feita por uma função quadrática. Possui três graus de liberdade, sendo eles a translação nos eixos X, Y e Z. Foram gerados 1433793 nós e 643532 elementos, alguns deles tetraédricos, outros hexaédricos.

Foi obtido o resultado do erro estrutural, definido no item 5.1 e exibido na figura 23.

Figura 23 – Erro Estrutural – Modelo 3



(fonte: ANSYS INC., 2015)

6 ANÁLISE DOS RESULTADOS

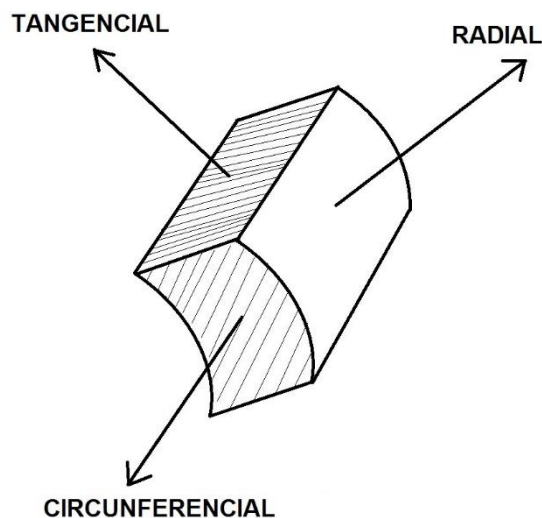
Após o processamento dos modelos 1, 2 e 3, foi possível obter resultados de tensões e deslocamentos para a cúpula gerada. Todos os resultados foram gerados com o ANSYS 16.0 e expressos em forma gráfica.

A análise do comportamento da cúpula foi feita através dos modelos 1, 2 e 3 em ordem crescente de complexidade.

No modelo 3, foram também simuladas fases de execução da cúpula, através de seis etapas construtivas parciais. Outra análise será feita substituindo o anel de arenito sob o nível 3 por alvenaria, visto que sua existência é incerta, e comparados os resultados obtidos.

As tensões atuam em três planos distintos, e diferentes dos eixos globais X, Y e Z. Define-se tais planos conforme a figura 24 abaixo, sendo que, para possibilitar tal visualização no ANSYS, definiu-se um novo sistema de coordenadas esféricas, centradas no ponto $(-13,5; 0; 0)$ (em coordenadas globais cartesianas). Tal ponto é o centro dos raios de curvatura das cascas. É importante ressaltar que, para a geometria adotada, tensão tangencial refere-se a tensões normais atuando na direção tangencial, e não a tensões de cisalhamento.

Figura 24 – Nomenclatura e Representação dos Planos de Tensões



(fonte: elaborado pelo autor)

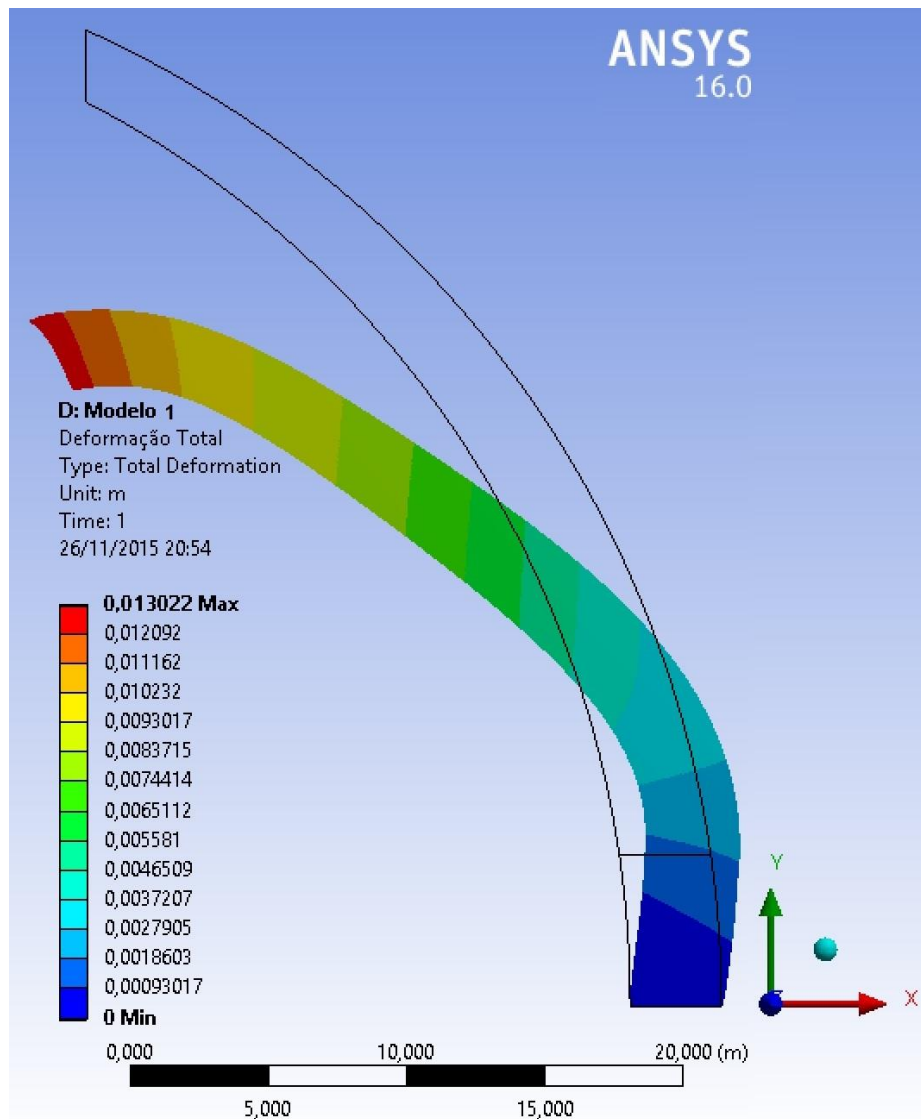
6.1 MODELO 1

O modelo 1 foi escolhido para ser apresentado por primeiro porque fornece uma visão geral do comportamento da cúpula como um todo, sendo mais fácil visualizar como as tensões são distribuídas pela estrutura.

6.1.1 Deslocamentos

Os valores de deslocamento total encontrado no modelo 1 são superiores aos valores dos modelos 2 e 3, e chegam a valores de, no máximo, 1,3 centímetros no topo da estrutura.

Figura 25 – Deformação Total – Modelo 1



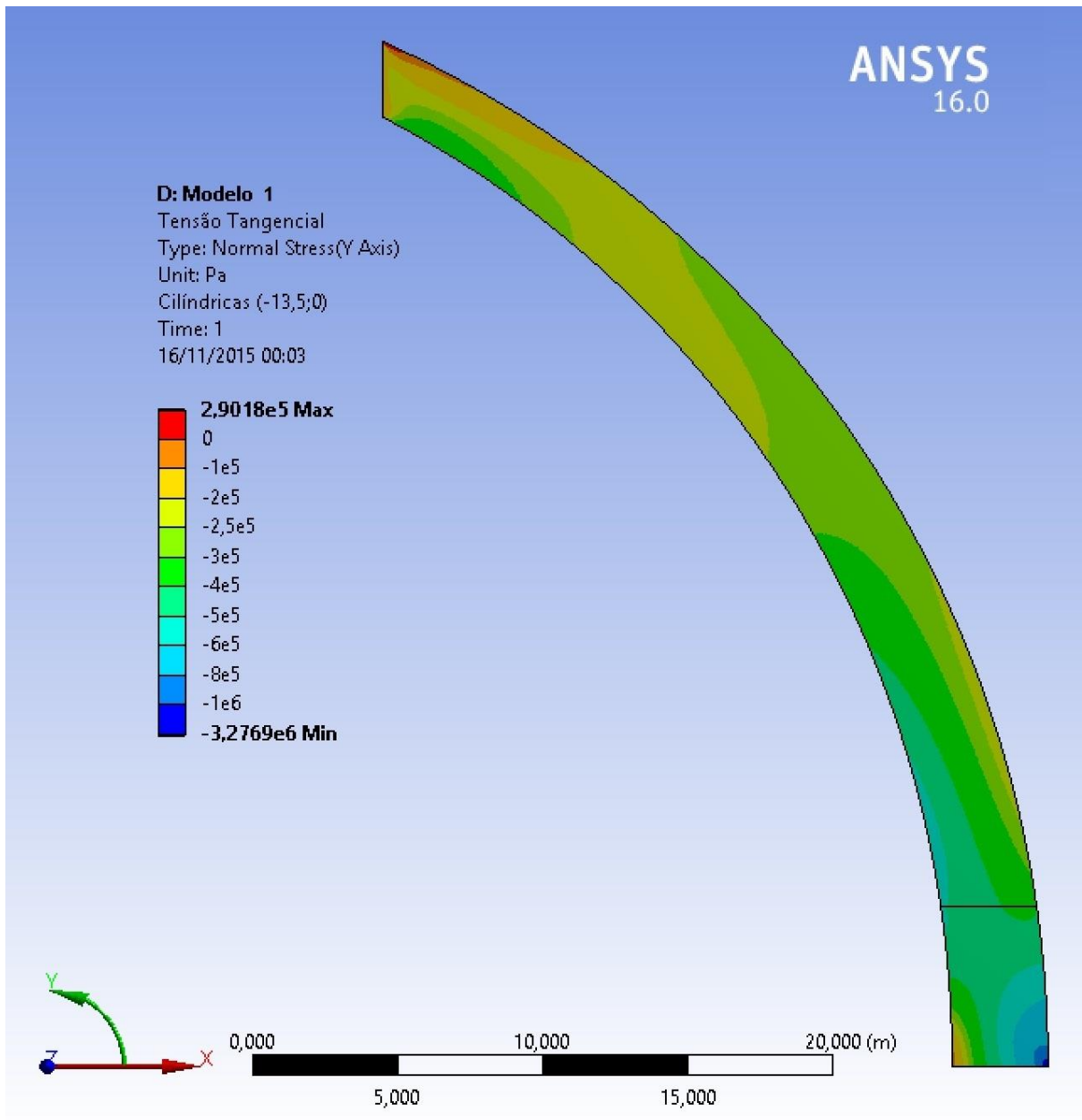
(fonte: ANSYS INC., 2015)

6.1.2 Tensões Tangenciais

Para esse modelo, é possível verificar a total compressão da casca da cúpula. Trações ocorrem somente no topo da estrutura da lanterna, devido à aplicação da carga concentrada na face do modelo. Na maior parte da casca, as tensões de compressão são inferiores a 1×10^6 Pa. Valores superiores a esse são encontrados somente na base da cúpula, no canto inferior direito, onde o valor chega ao máximo, equivalente a $3,3 \times 10^6$ Pa.

Tensões normais na direção tangente de intensidades diferentes junto a superfície interna e externa da casca denotam a existência de flexão atuando em conjunto com a compressão. Embora a flexão gere tração nas fibras longitudinais (tangentes) de um dos lados da casca e compressão no outro, o efeito conjunto com o esforço de compressão faz com que as tensões sejam sempre de compressão ao longo da casca, o que é altamente desejável para as alvenarias empregadas. Considerando como momento fletor positivo aquele que provocaria tração nas fibras internas da casca, percebe-se a existência de flexão negativa junto ao topo da casca. A dois terços da altura há uma inversão no sentido da flexão. A um terço da altura, há novamente uma inversão de maior intensidade, surgindo um momento negativo. Finalmente, junto ao tambor, ocorre o maior momento fletor, positivo.

Figura 26 – Tensão Tangencial – Modelo 1

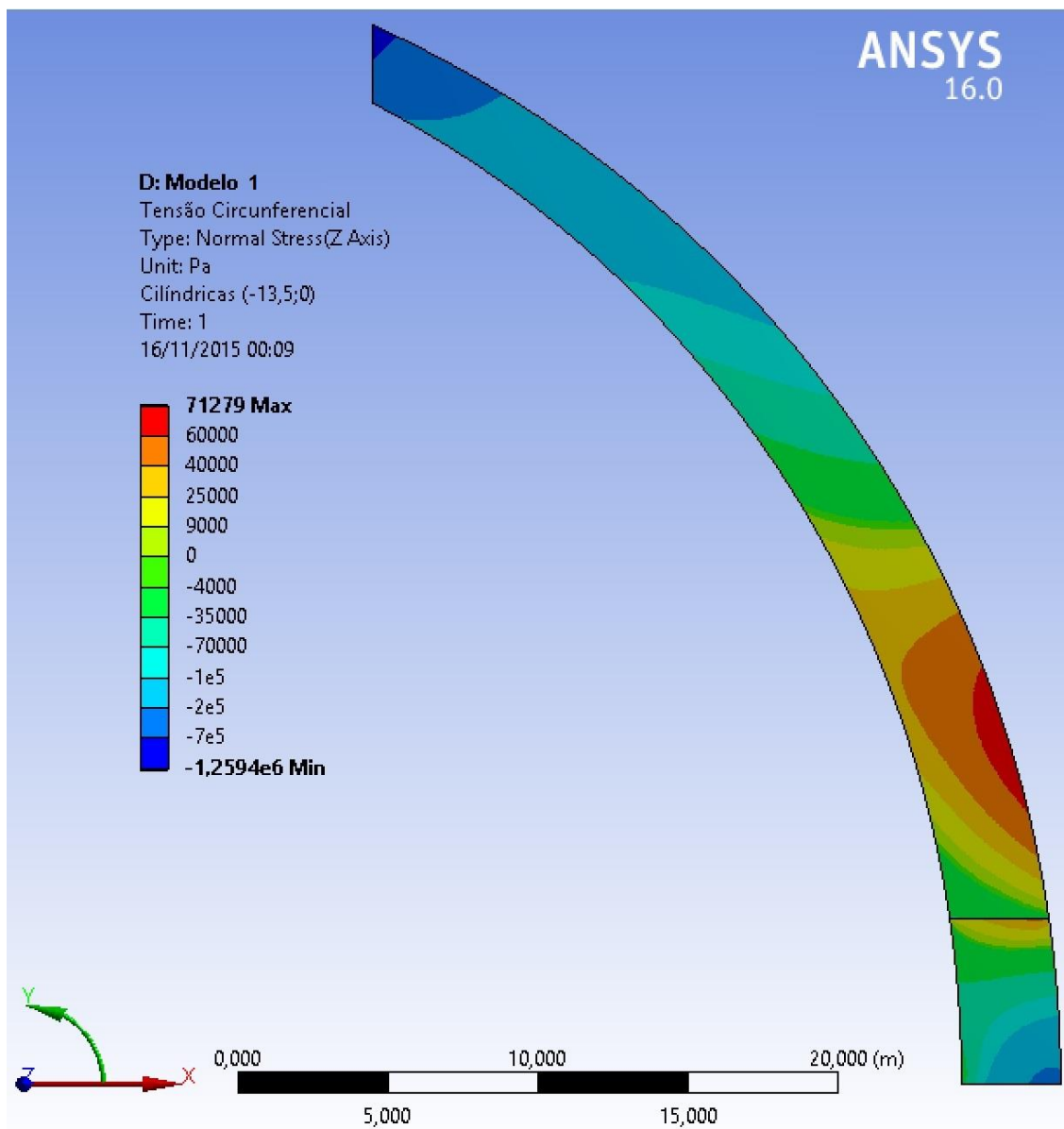


(fonte: ANSYS INC., 2015)

6.1.3 Tensões Circunferenciais

Em termos de tensões circunferenciais, é possível notar a existência de tração a um terço da altura da casca, coincidindo aproximadamente com o local onde foi executado um dos anéis destinados a impedir a abertura da casca. Apesar de não ser um valor muito elevado ($7,1 \times 10^4$ Pa), sabe-se que tensões de tração não são desejáveis em alvenaria, justificando, mesmo neste modelo básico, a preocupação de Brunelleschi com a execução de anéis de madeira e arenito para combater tais efeitos. A compressão atinge $1,25 \times 10^6$ Pa no topo da estrutura.

Figura 27 – Tensão Circunferencial – Modelo 1

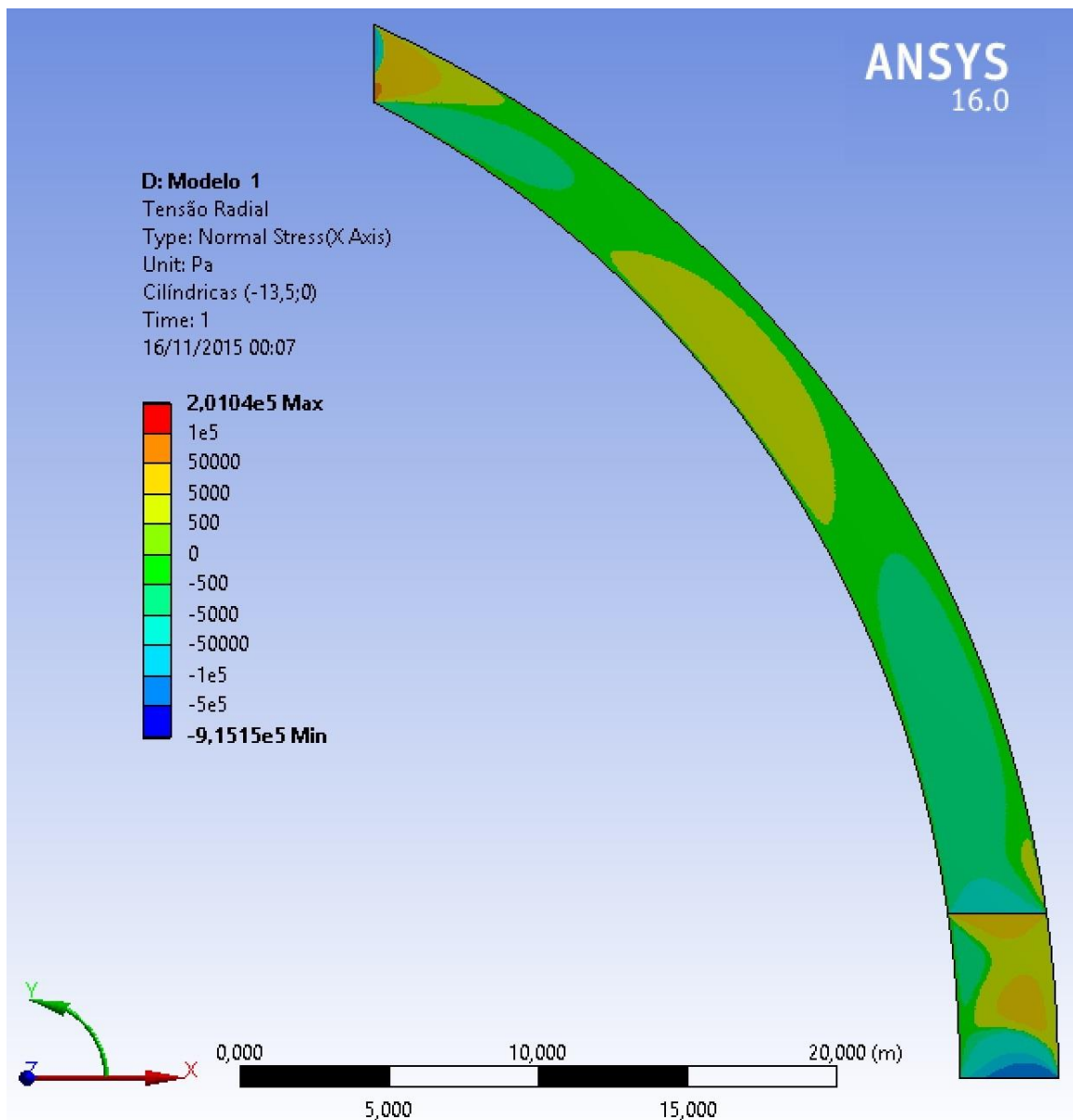


(fonte: ANSYS INC., 2015)

6.1.4 Tensões Radiais

Neste modelo, os valores de tensão radial são pequenos, exceto nos extremos da cúpula, onde atingem $0,2 \times 10^6$ Pa em tração e $0,9 \times 10^6$ Pa em compressão. Longe dos extremos, as tensões de tração estão limitadas a um máximo de $0,5 \times 10^5$ Pa, bastante baixas. Os valores maiores de tração nesse plano de tensões são visualizados no topo, devido a carga da lanterna, e na parte de alvenaria com blocos de arenito. Os valores de compressão são observados ao longo da cor verde, e próximos da base.

Figura 28 – Tensão Radial – Modelo 1



(fonte: ANSYS INC., 2015)

6.1.5 Considerações gerais sobre o Modelo 1

Apesar de ser bastante simples, o Modelo 1 permite visualizar o comportamento geral da cúpula. Na direção tangencial, há flexo-compressão sem a existência de tensões de tração. Na direção circunferencial, há uma região tracionada aproximadamente a um terço da altura da cúpula, justificando a existência de anéis de contenção e reforço nessa direção. Na direção radial, as tensões são, em geral, baixas, mas há a existência de tensões de tração, o que justifica a execução de transversais de arenito ao longo dos anéis de reforço.

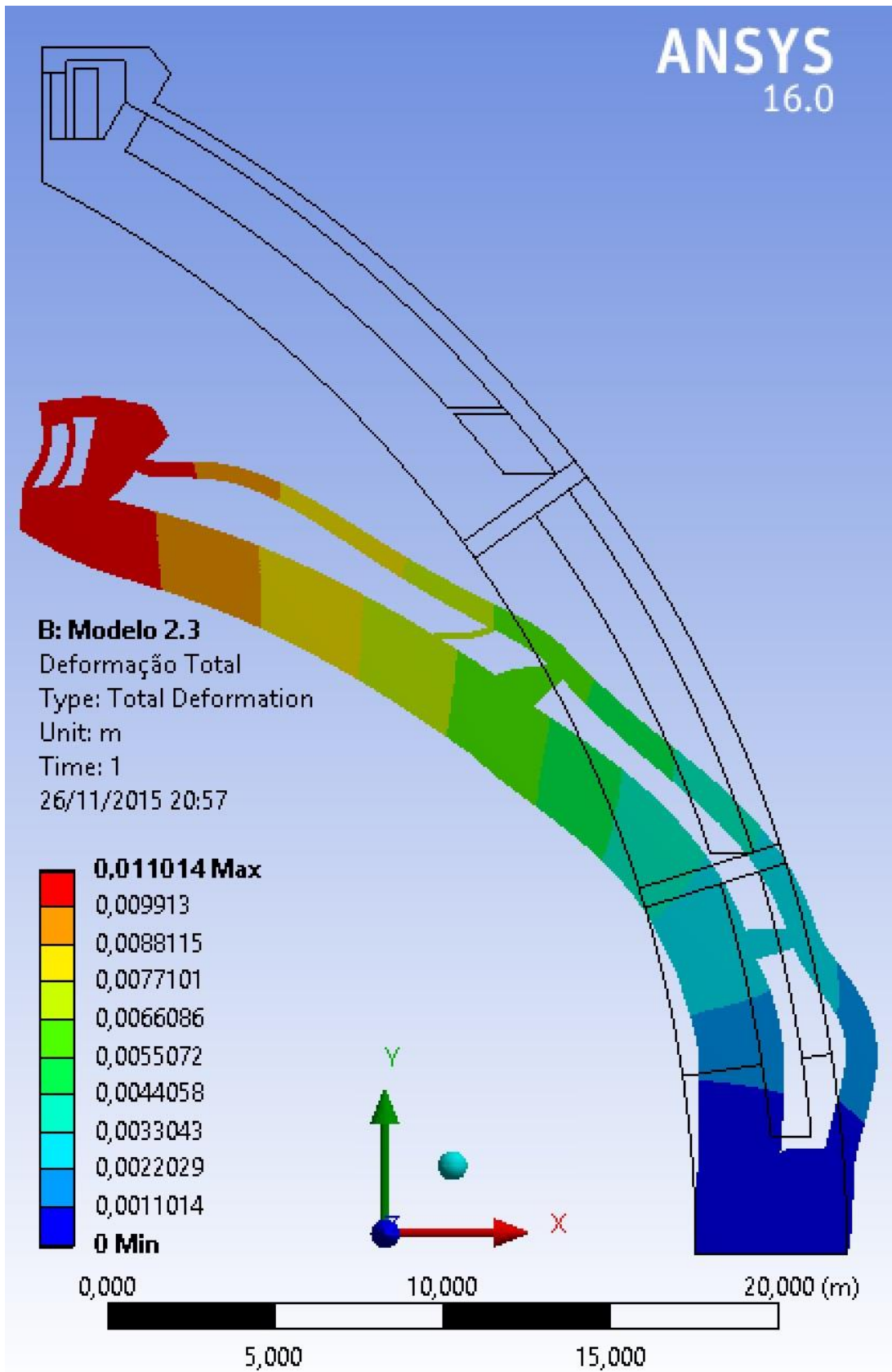
6.2 MODELO 2

O Modelo 2 visa representar de forma mais precisa o comportamento da cúpula, visto que, além da geometria ser muito similar à geometria real, foram incluídos também os anéis de arenito sob os níveis 2 e 3 da cúpula.

6.2.1 Deslocamentos

Os deslocamentos obtidos para esse modelo são menores dos observados no modelo anterior, porém ainda orbitam a casa dos 1,10 centímetros.

Figura 29 – Deformação Total – Modelo 2

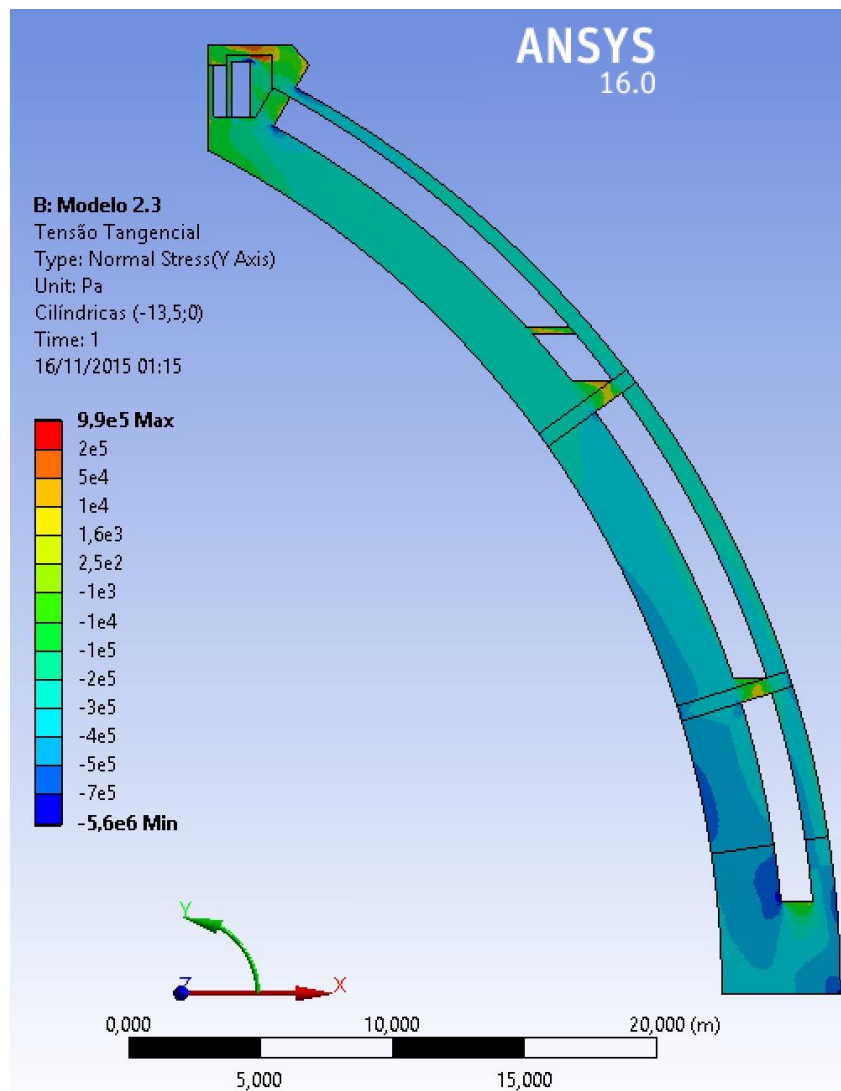


(fonte: ANSYS INC., 2015)

6.2.2 Tensões Tangenciais

Em relação ao Modelo 1, as tensões tangenciais se comportam de forma bastante diferente; pois, agora, é possível visualizar somente compressão ao longo de toda a extensão das cascas interna e externa. Valores de tração são observados nas partes inferiores dos níveis 2 e 3, ou seja, nas correntes de *macigno*, e no topo, onde há a aplicação das cargas verticais referentes à lanterna. Não é mais possível observar os efeitos de flexão de forma tão evidente como apareciam no Modelo 1, embora ainda seja possível perceber efeitos de flexão mais pronunciados a um terço da altura da cúpula, nas imediações do primeiro anel de arenito utilizado para reforçá-la.

Figura 30 – Tensão Tangenciais – Modelo 2

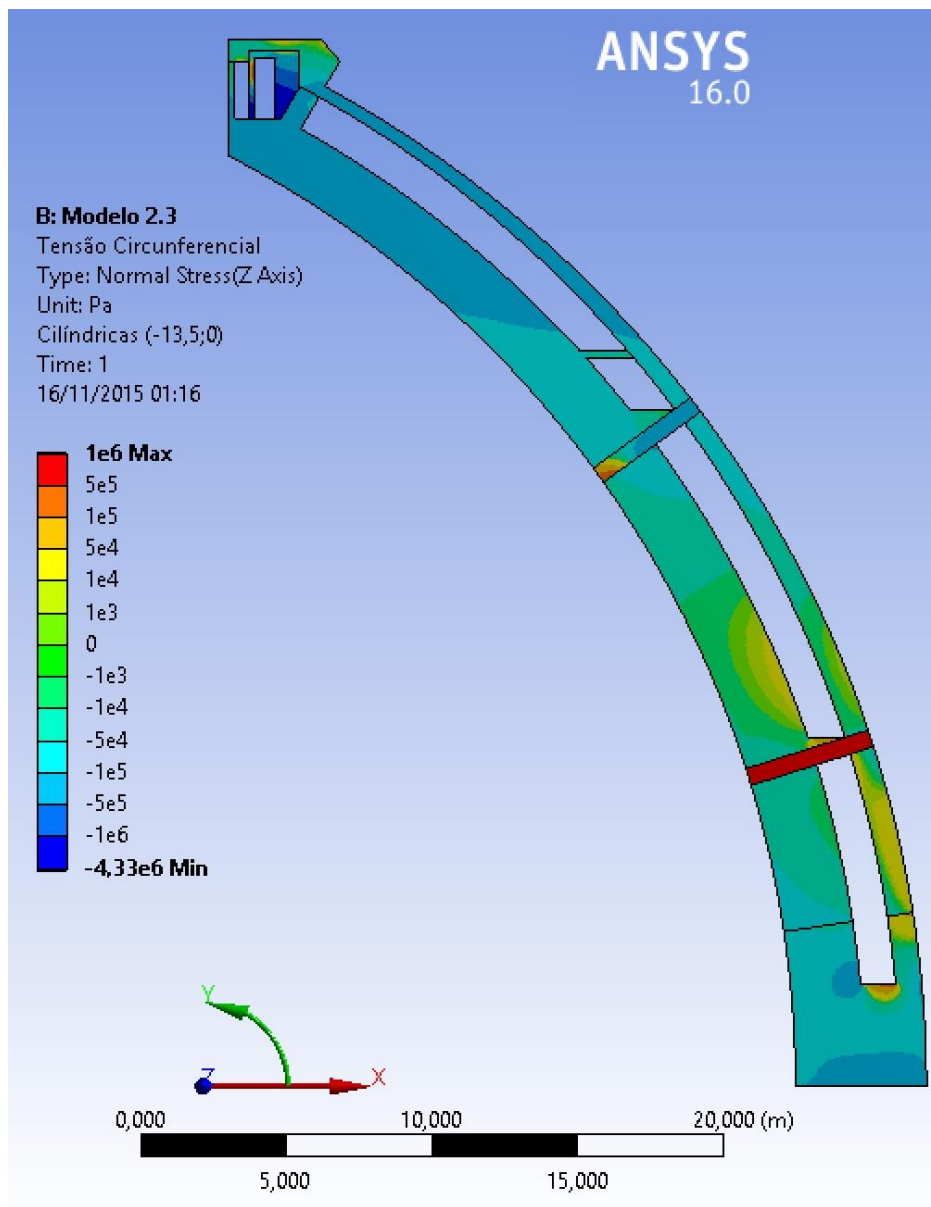


(fonte: ANSYS INC., 2015)

6.2.3 Tensões Circunferenciais

A maior diferença entre o Modelo 1 é que, ao incluir o anel de arenito sob o nível 2, é possível visualizar que ele responde pela quase totalidade dos efeitos de tração das cascas, decorrentes do efeito de expansão das mesmas naquele ponto, sendo possível visualizar que os valores agora orbitam valores máximos de até $0,50 \times 10^5$ Pa, próximos ao primeiro anel, enquanto que o anel de arenito está submetido a tensões de 1×10^6 Pa. Além disso, a parte superior da cúpula funciona como um anel de compressão, submetido a tensões de compressão de até $4,33 \times 10^6$ Pa.

Figura 31 – Tensão Circunferencial – Modelo 2

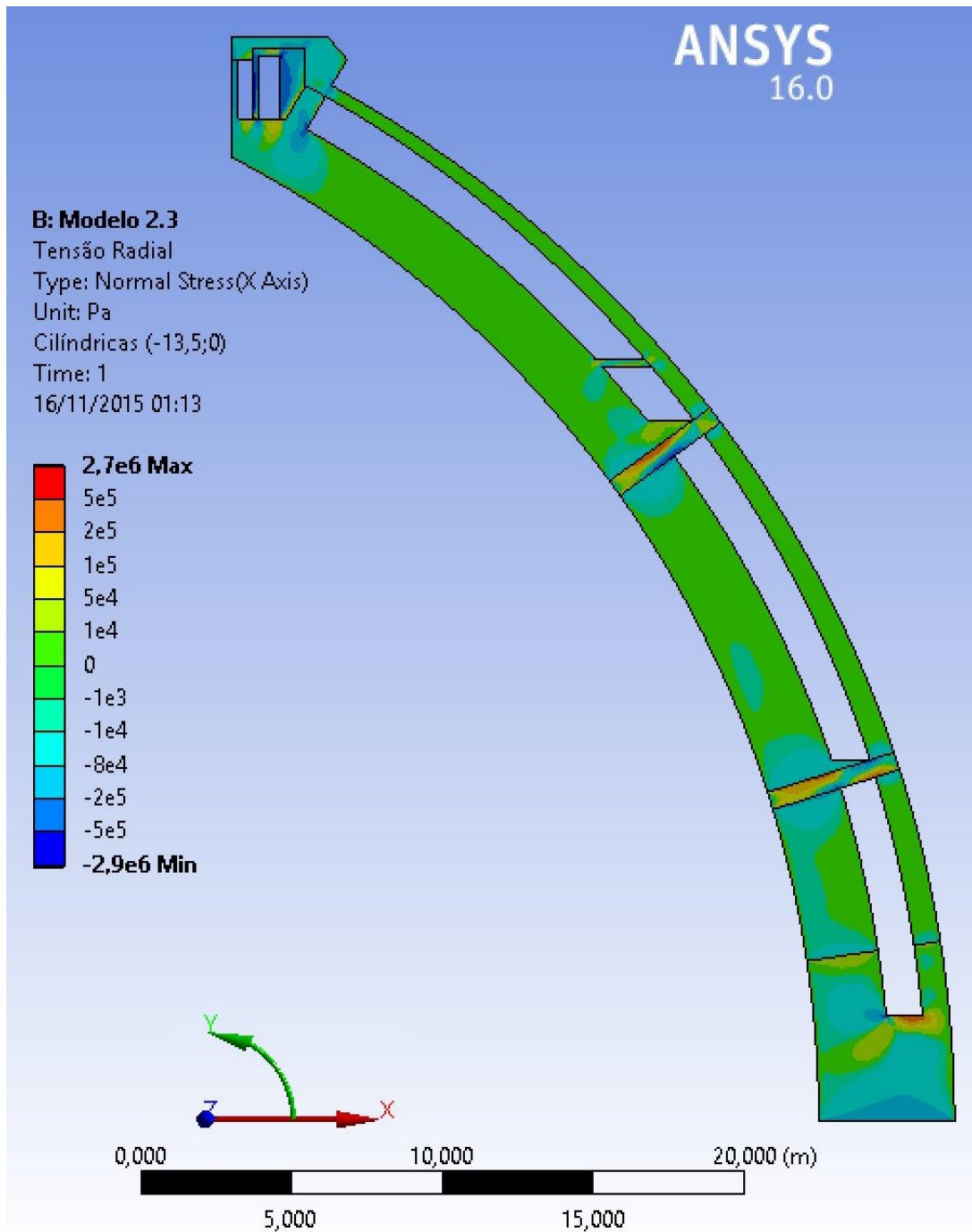


(fonte: ANSYS INC., 2015)

6.2.4 Tensões Radiais

Ao compararmos com o modelo anterior, é possível visualizar que os anéis agora absorvem as tensões de tração, deixando as cascas com valores próximos de zero. Tal constatação justifica a execução de transversais de arenito nos anéis de reforço por Brunelleschi.

Figura 32 – Tensão Radial – Modelo 2



(fonte: ANSYS INC., 2015)

6.2.5 Considerações gerais sobre o Modelo 2

Ao discretizar as duas cascas da cúpula e os anéis de reforço, o Modelo 2 permitiu visualizar melhor o comportamento da estrutura, principalmente os efeitos benéficos dos anéis de arenito no suporte aos esforços de tração circunferencial e contenção da expansão da casca nessa região.

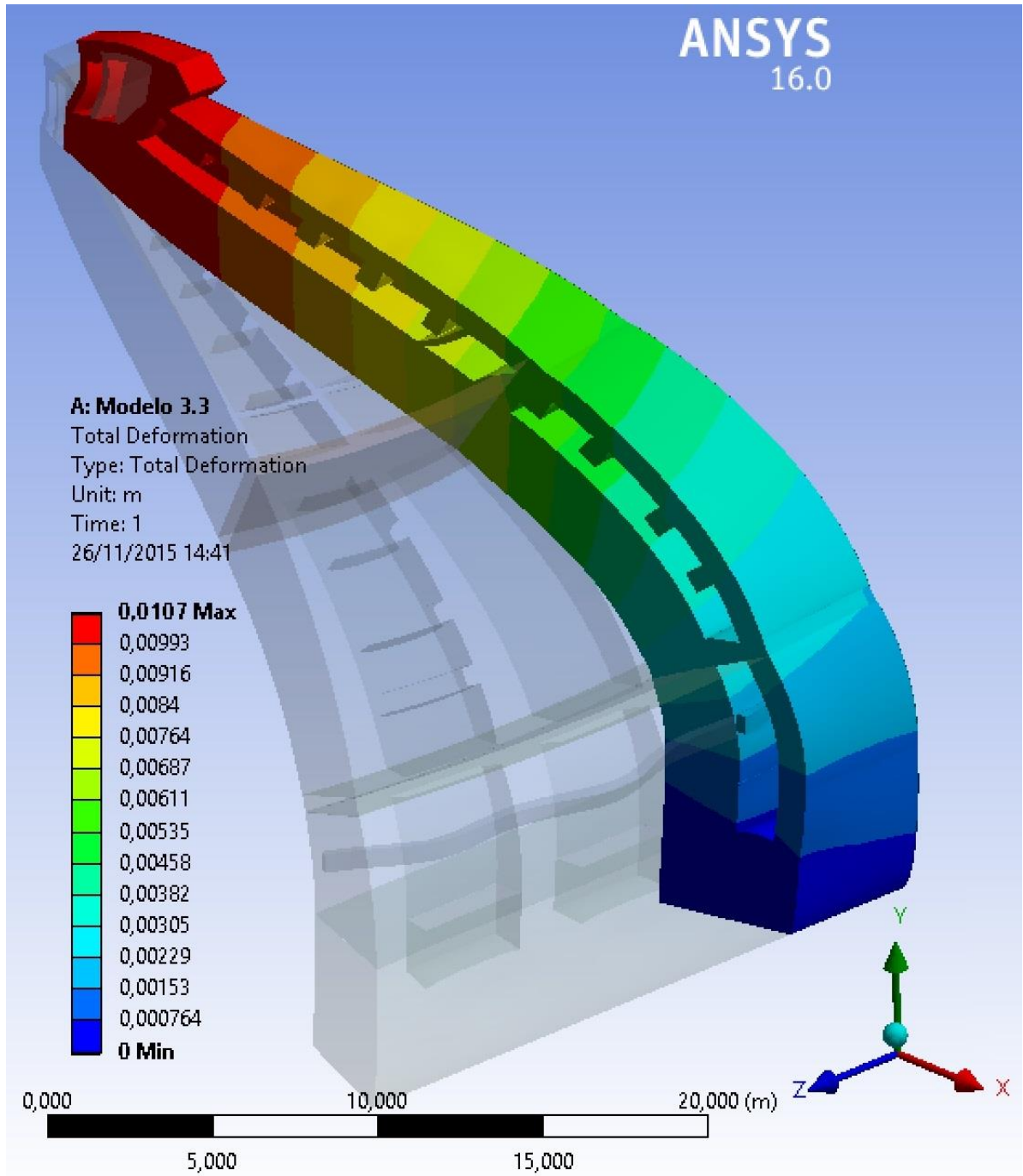
6.3 MODELO 3

Devido a existência de planos de simetria, o Modelo 3 discretiza apenas uma das seções de casca entre nervuras ou costelas da cúpula octogonal (um "gomo"). Para visualização das tensões, foram escolhidas as vistas externas da estrutura e três seções ou planos de corte. O primeiro deles, no plano central, dividindo ao meio o gomo. O segundo, cortando uma das costelas centrais. O último, entre as costelas de canto e central. Dessa forma, pode-se ver as distribuições de tensões nos diversos elementos.

6.3.1 Deslocamentos

Os deslocamentos infligidos na estrutura pelo modelo 3 são as menores obtidas dentre os três. O máximo valor obtido foi de 1,07 centímetro.

Figura 33 – Deformação Total – Modelo 3

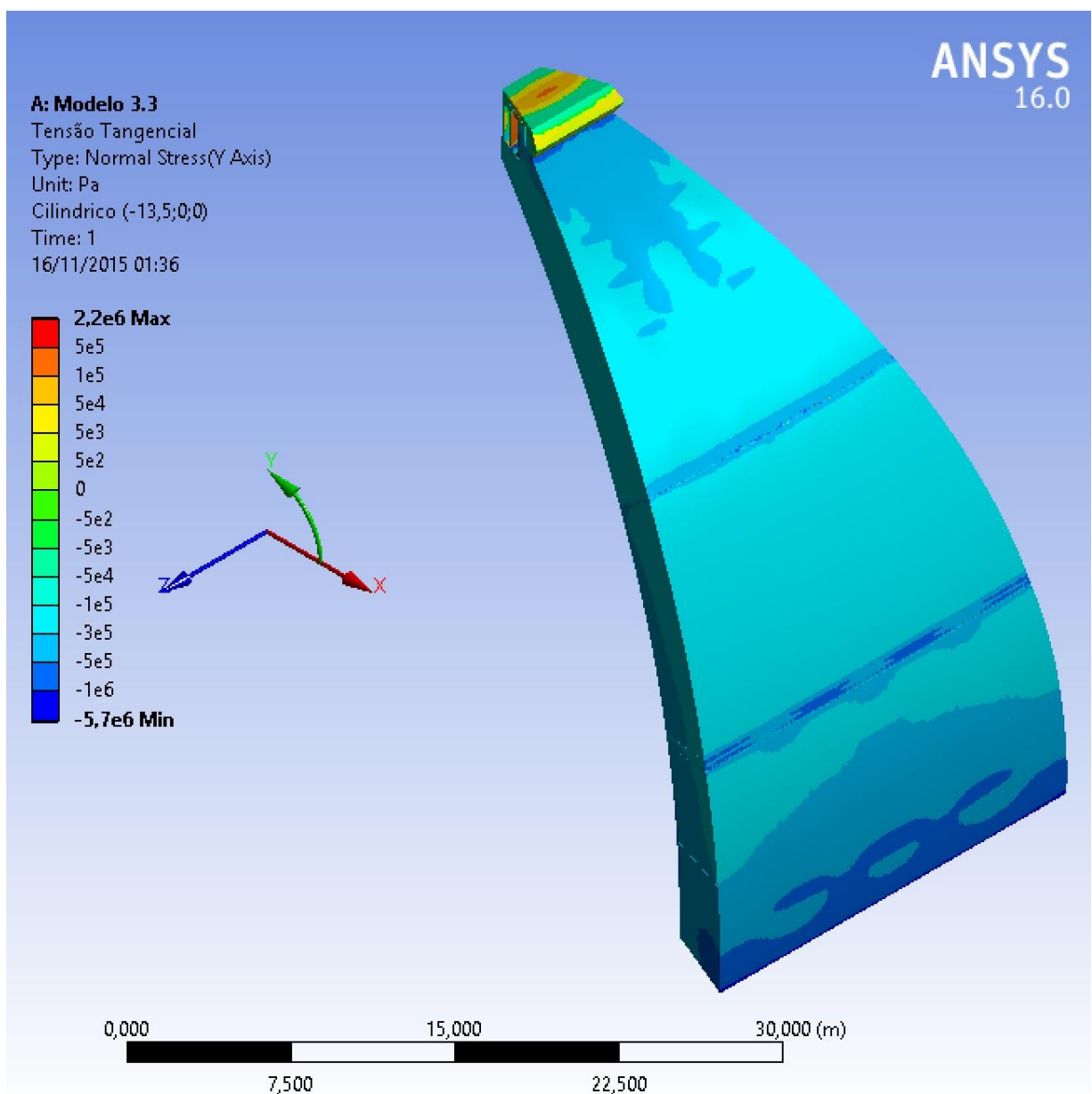


(fonte: ANSYS INC., 2015)

6.3.2 Tensões Tangenciais

A respeito das tensões tangenciais, é possível notar que toda a extensão das cascas está submetida a compressão. Valores de tração são visualizados no anel de madeira, nos arcos de ligação entre as costelas, e nos anéis de passagem (ou níveis de passagem), entretanto, valores maiores que $0,3 \times 10^6$ Pa (valor obtido para a resistência a tração da alvenaria) somente ocorrem nos anéis de arenito ou de madeira, e na estrutura também de arenito da base da lanterna.

Figura 34 – Tensão Tangencial – Modelo 3

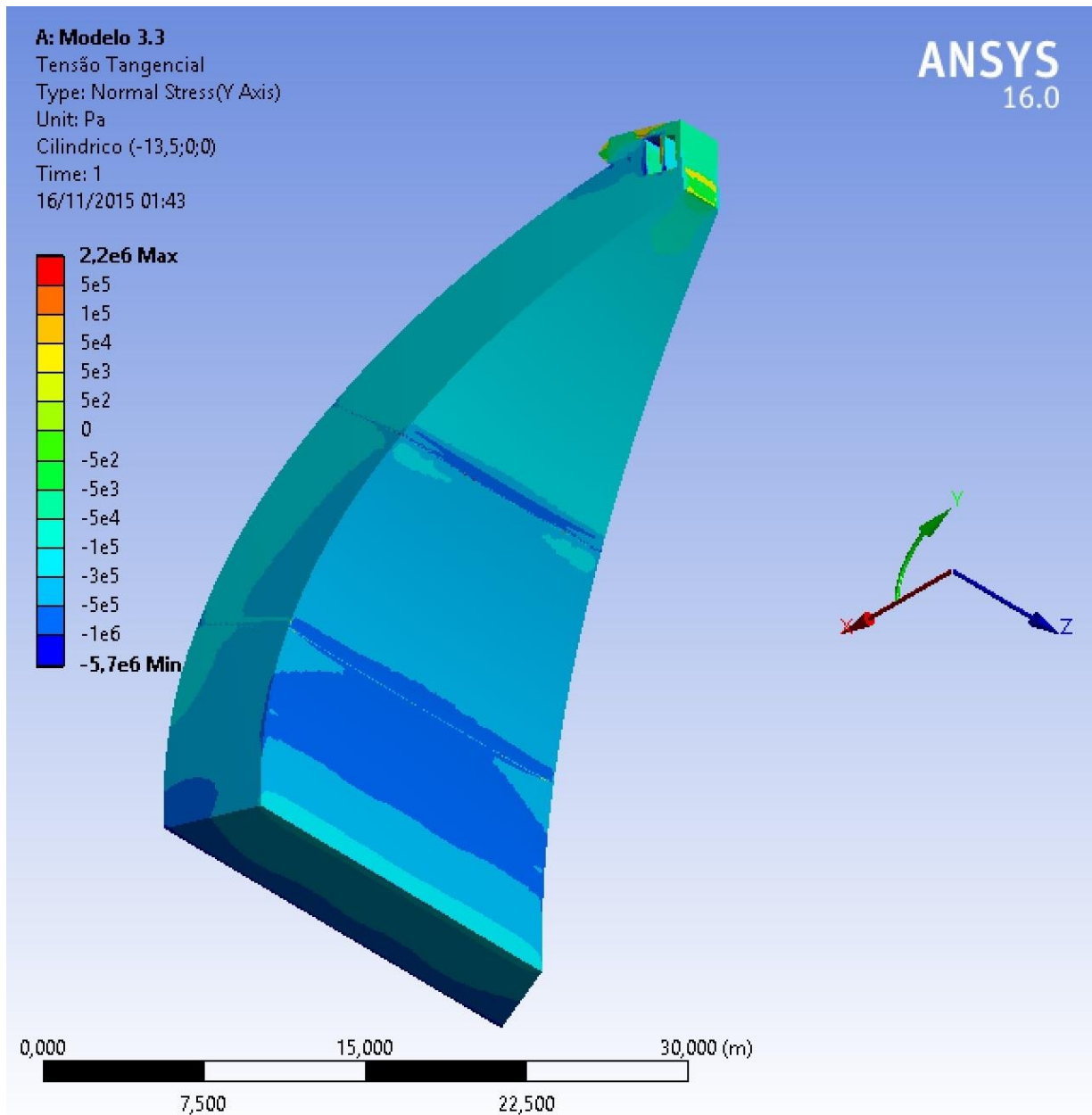


(fonte: ANSYS INC., 2015)

As cascas estão totalmente sob compressão, inclusive as nervuras, sendo que os valores não ultrapassam os 3×10^6 Pa de resistência a compressão da alvenaria. Valores maiores são obtidos somente na base da lanterna, porém os blocos de arenito que compõem a estrutura em tal ponto resistem facilmente aos esforços, visto que a resistência a compressão de tais blocos é de 89×10^6 Pa.

Os maiores efeitos de flexão estão na região entre a base e o primeiro anel de arenito.

Figura 35 – Tensão Tangencial 2 – Modelo 3



(fonte: ANSYS INC., 2015)

Figura 36 – Tensão Tangencial – Corte 1 – Modelo 3

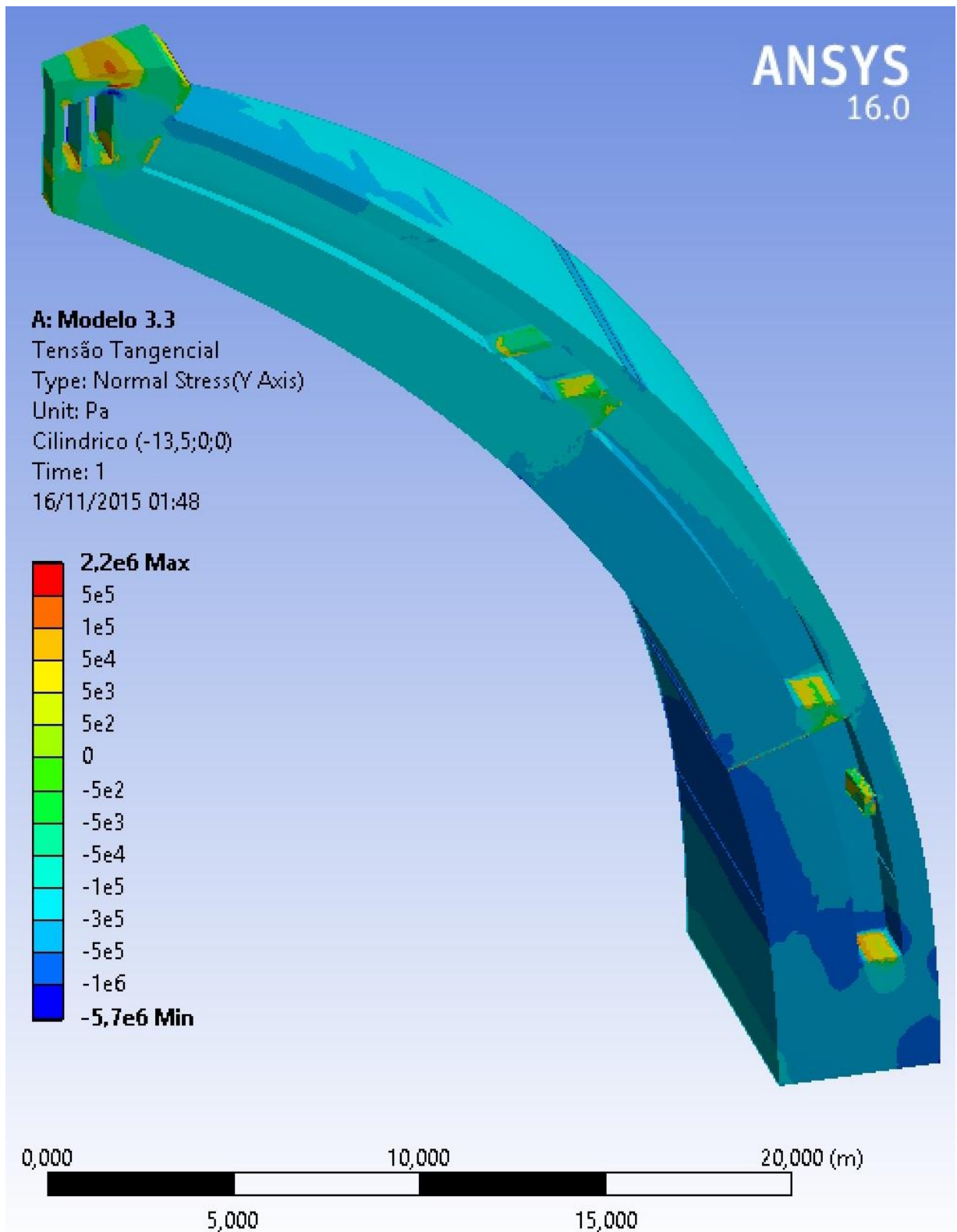
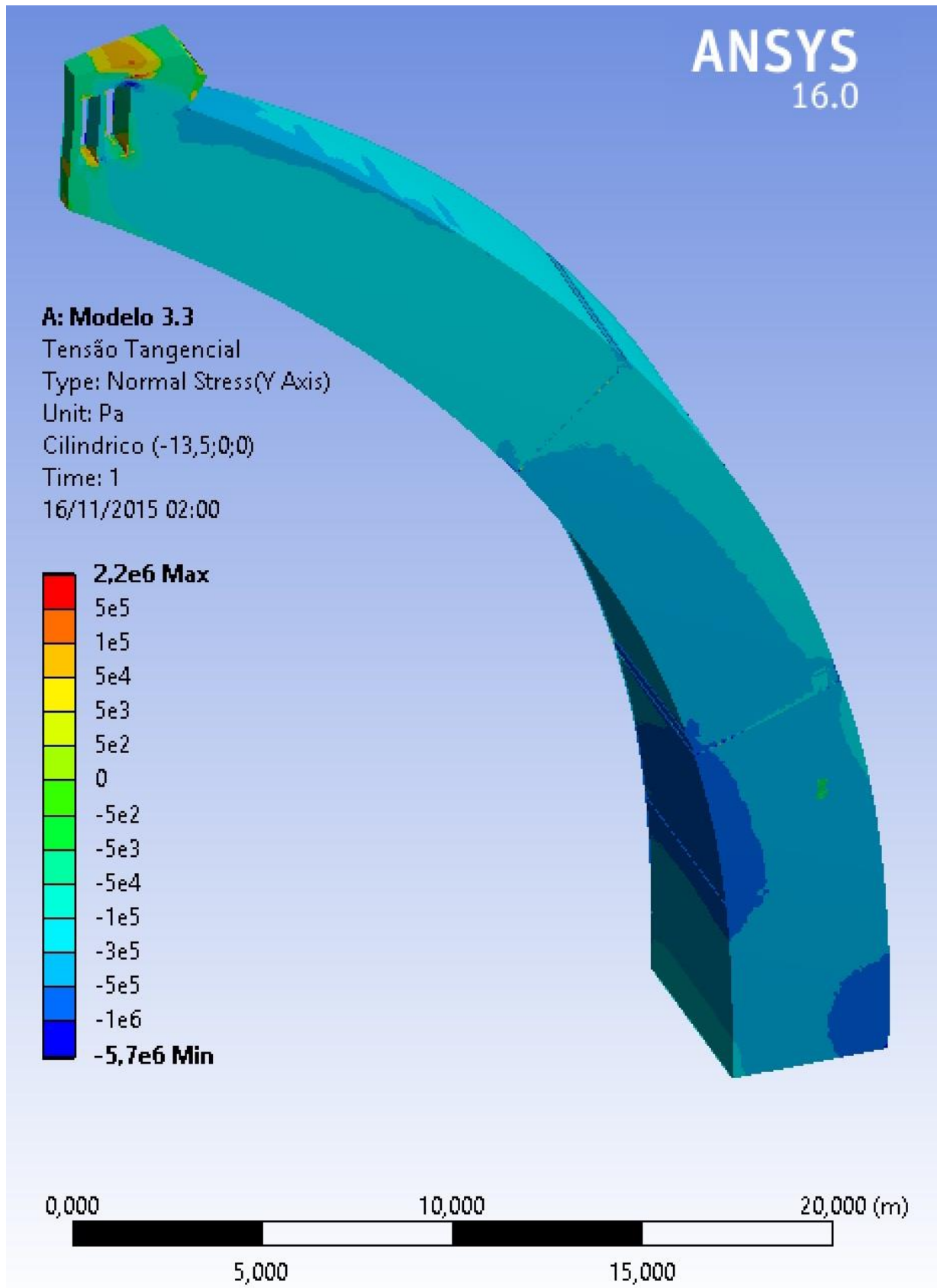
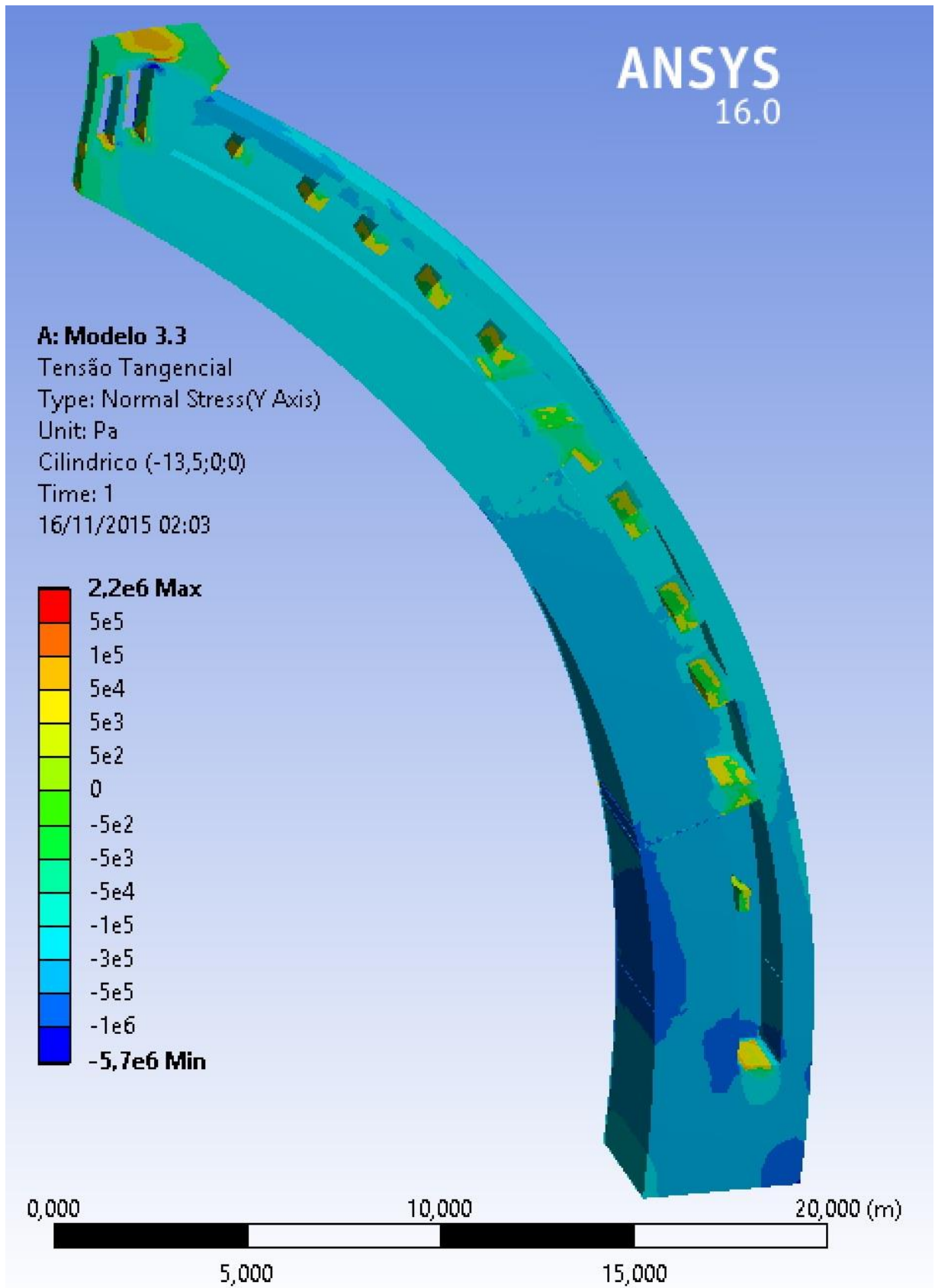


Figura 37 – Tensão Tangencial – Corte 2 – Modelo 3



(fonte: ANSYS INC., 2015)

Figura 38 – Tensão Tangencial – Corte 3 – Modelo 3

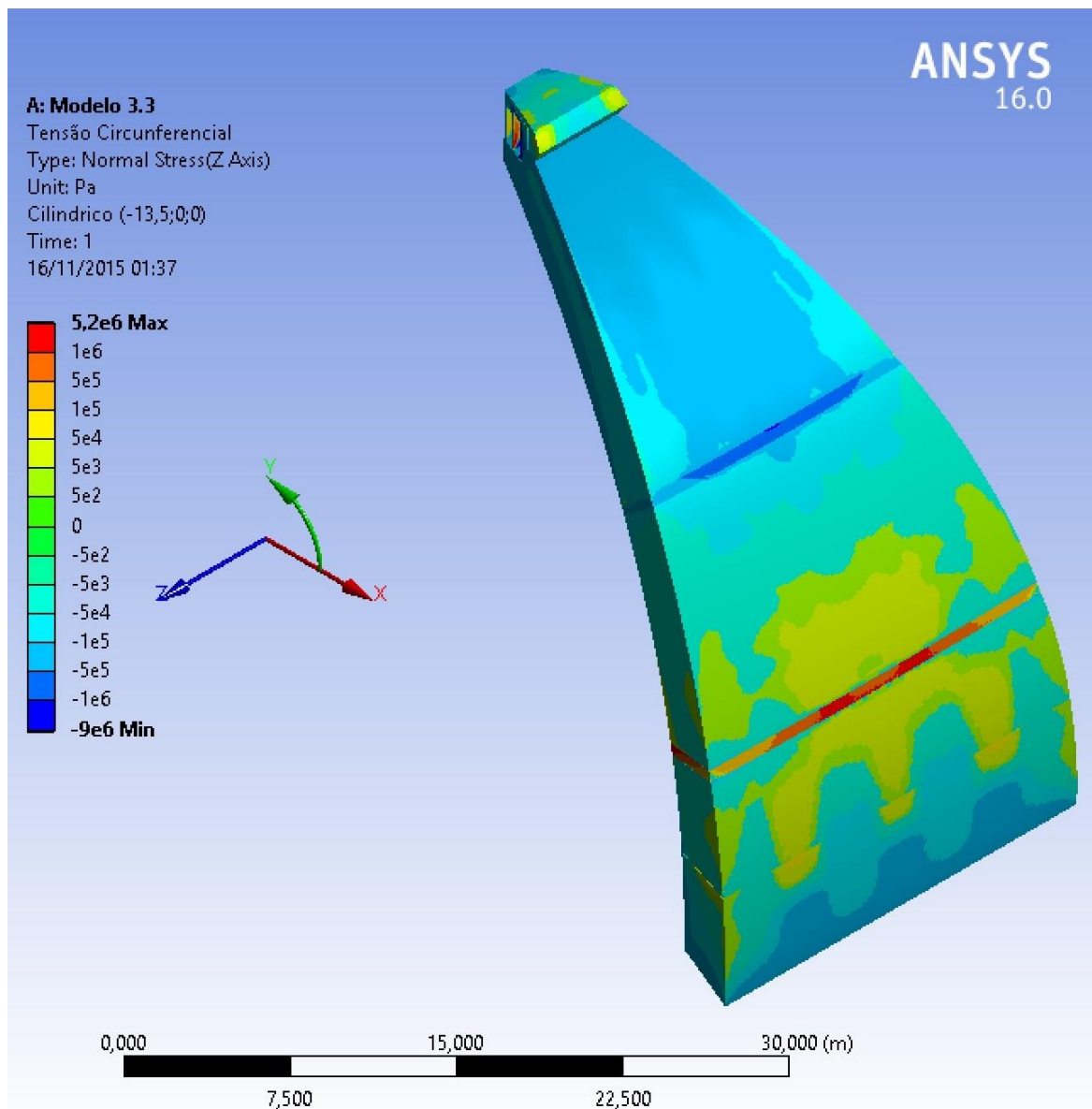


(fonte: ANSYS INC., 2015)

6.3.3 Tensões Circunferenciais

Em termos de tensões circunferenciais, é possível ver que ocorrem valores elevados de tração na altura do 2º nível de passagem. É sob esse nível que existe um anel de arenito, o qual absorve grande parte do esforço de tração existente nas regiões próximas. O valor máximo de tração observado é de $5,2 \times 10^6$ Pa, e ocorre no canto interno do anel, ponto de inflexão geométrica entre um gomo e outro da estrutura. Mesmo assim, o valor resistente é de 6×10^6 Pa, sendo possível concluir que o material suporta as tensões.

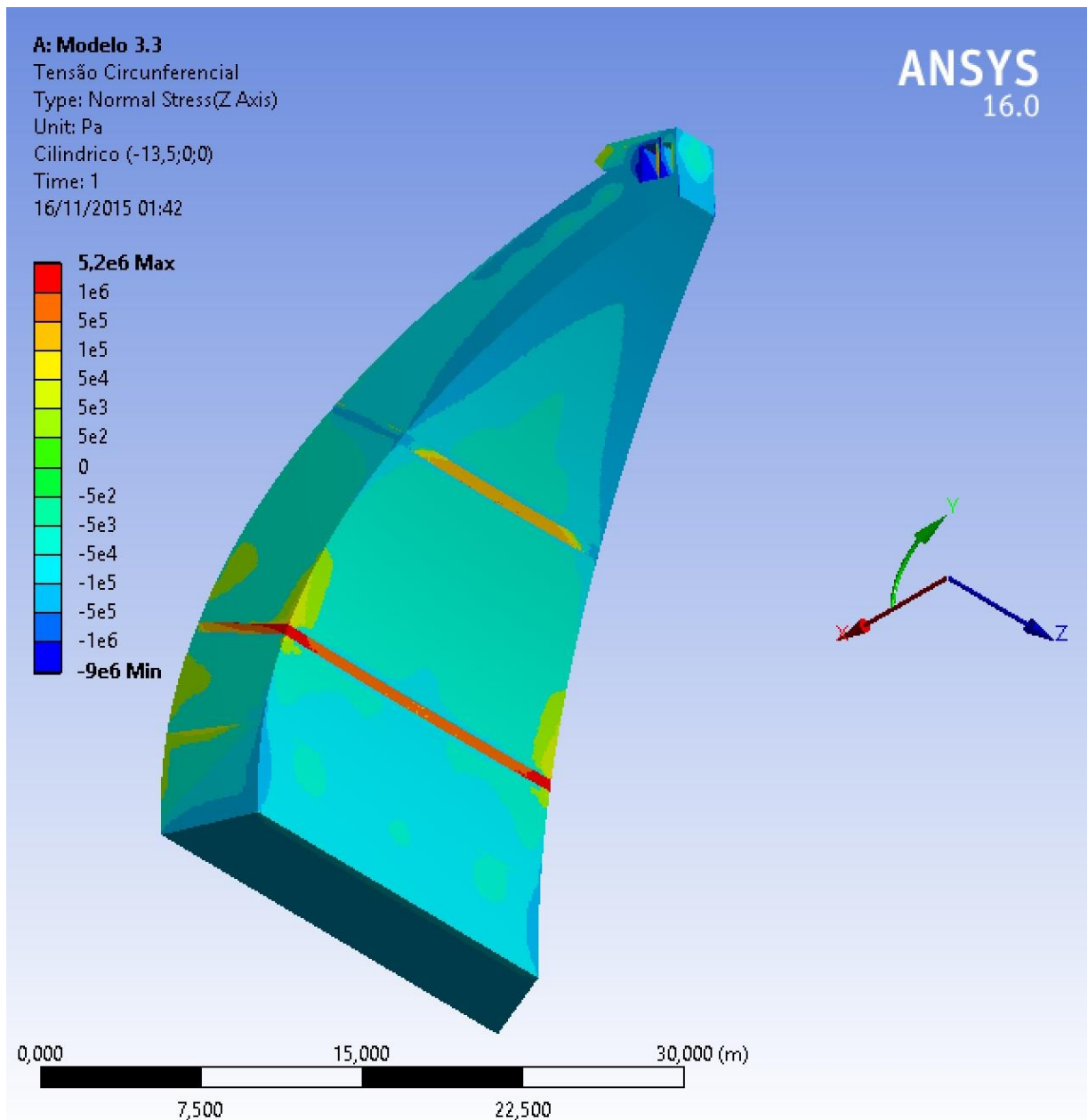
Figura 39 – Tensão Circunferencial – Modelo 3



(fonte: ANSYS INC., 2015)

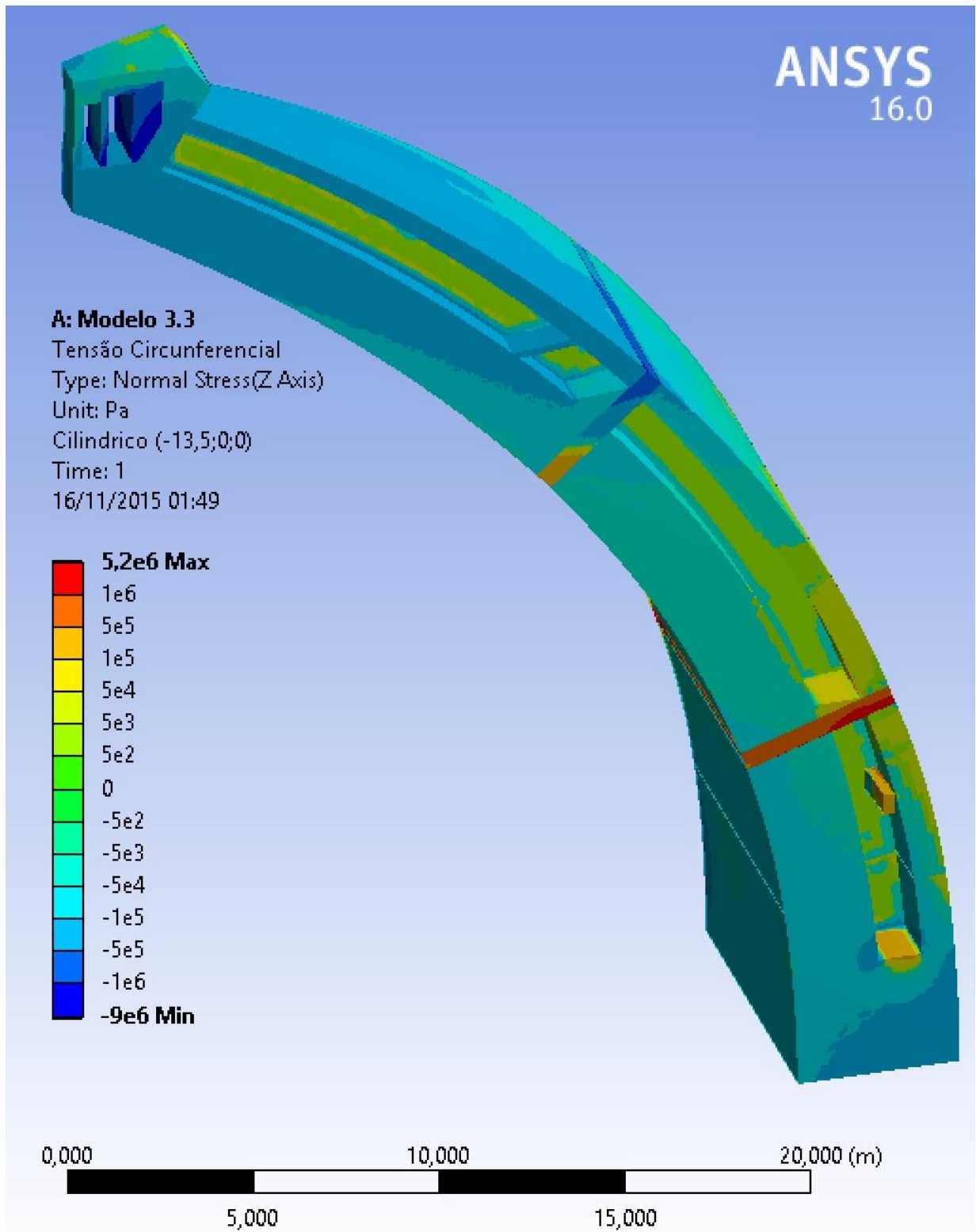
A casca em quase sua totalidade possui tensões de compressão, exceto em pontos próximos ao anel de tração do 2º nível de passagem. Valores máximos de compressão na casca não ultrapassam os valores resistentes da alvenaria, que é de 3×10^6 Pa. Valores superiores a esse são vistos somente na base da lanterna; que, como é feita de blocos de *macigno*, absorve os valores sem problema.

Figura 40 – Tensão Circunferencial 2 – Modelo 3



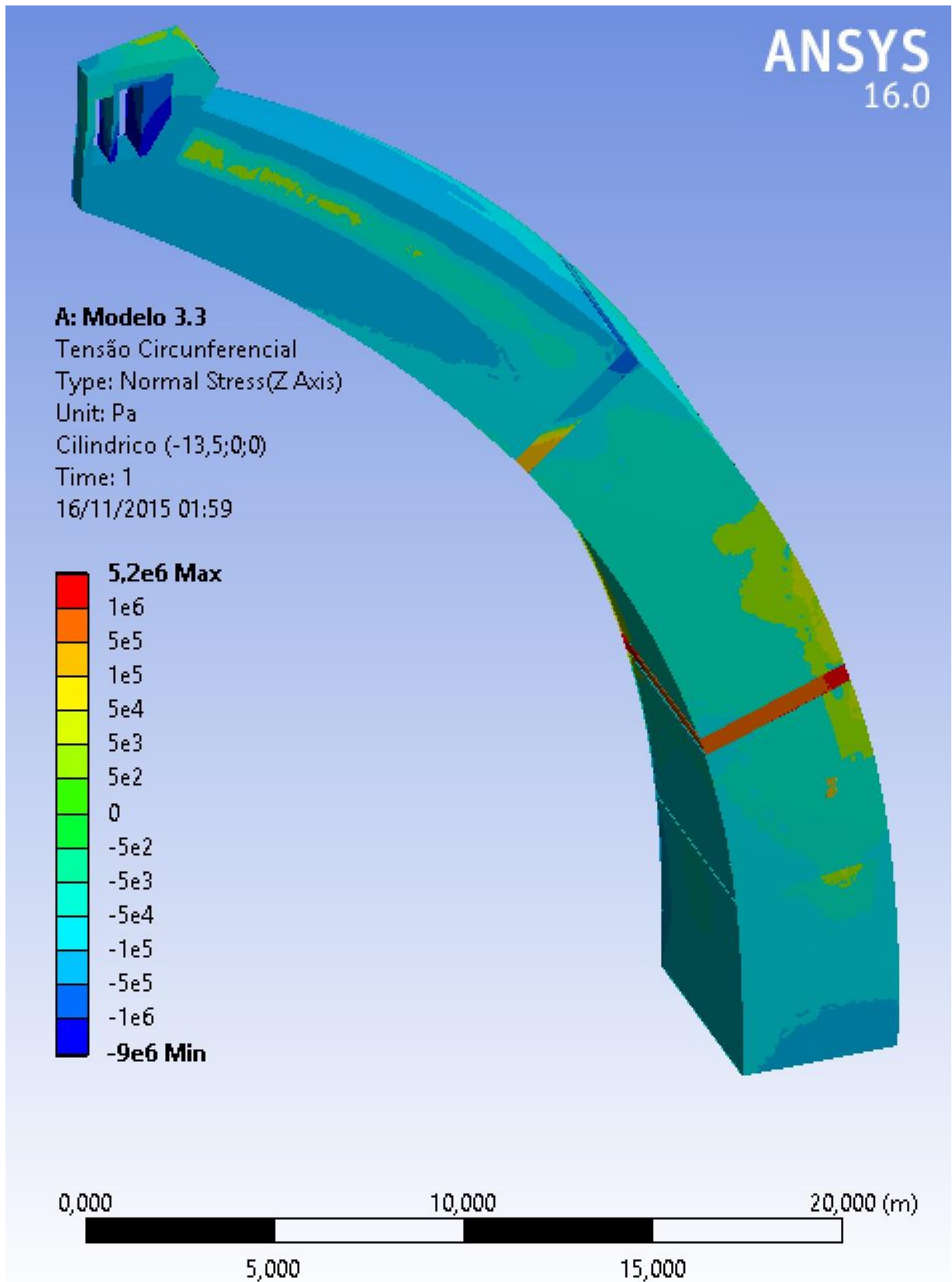
(fonte: ANSYS INC., 2015)

Figura 41 – Tensão Circunferencial – Corte 1 – Modelo 3



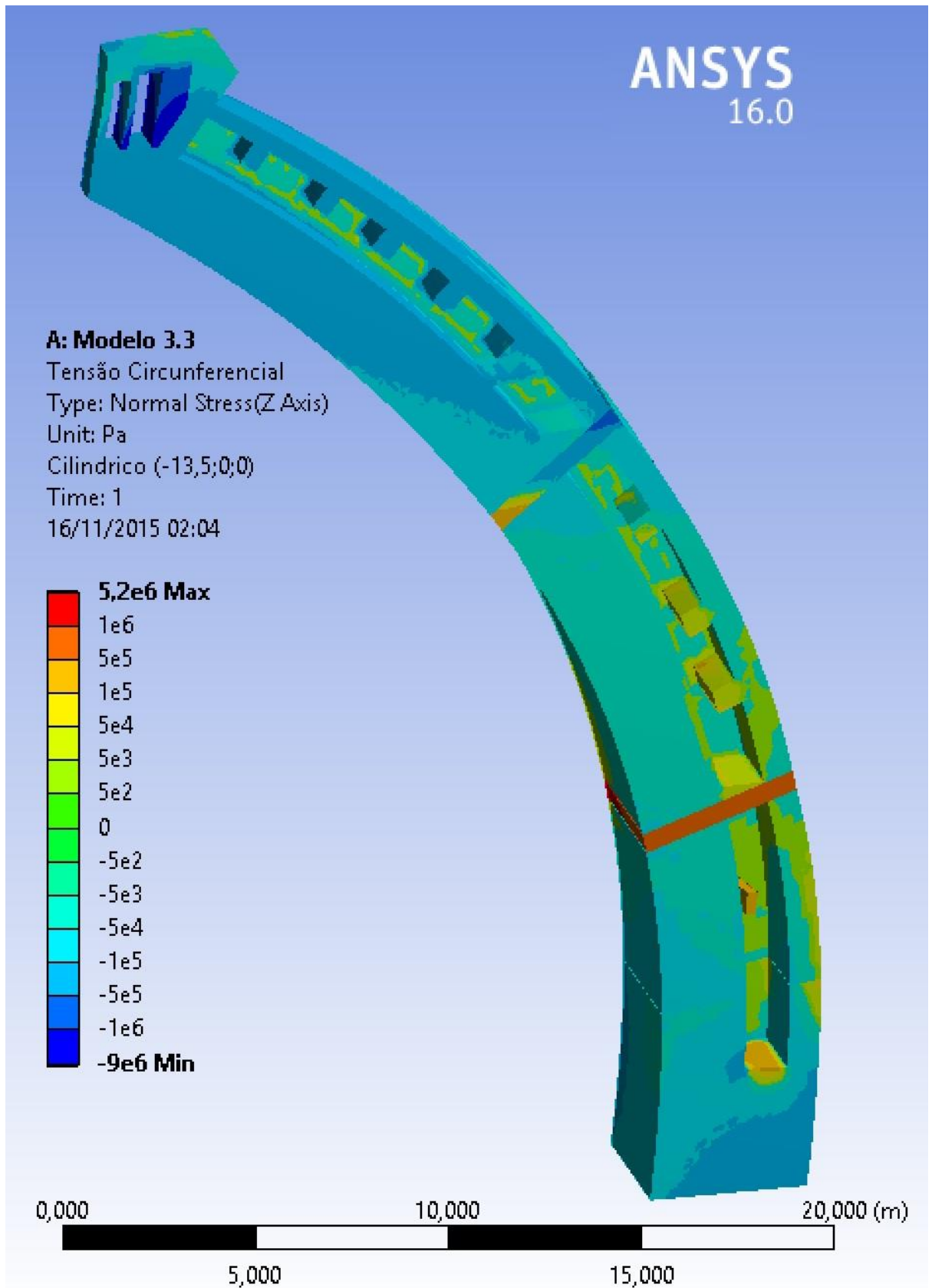
(fonte: ANSYS INC., 2015)

Figura 42 – Tensão Circunferencial – Corte 2 – Modelo 3



(fonte: ANSYS INC., 2015)

Figura 43 – Tensão Circunferencial – Corte 3 – Modelo 3

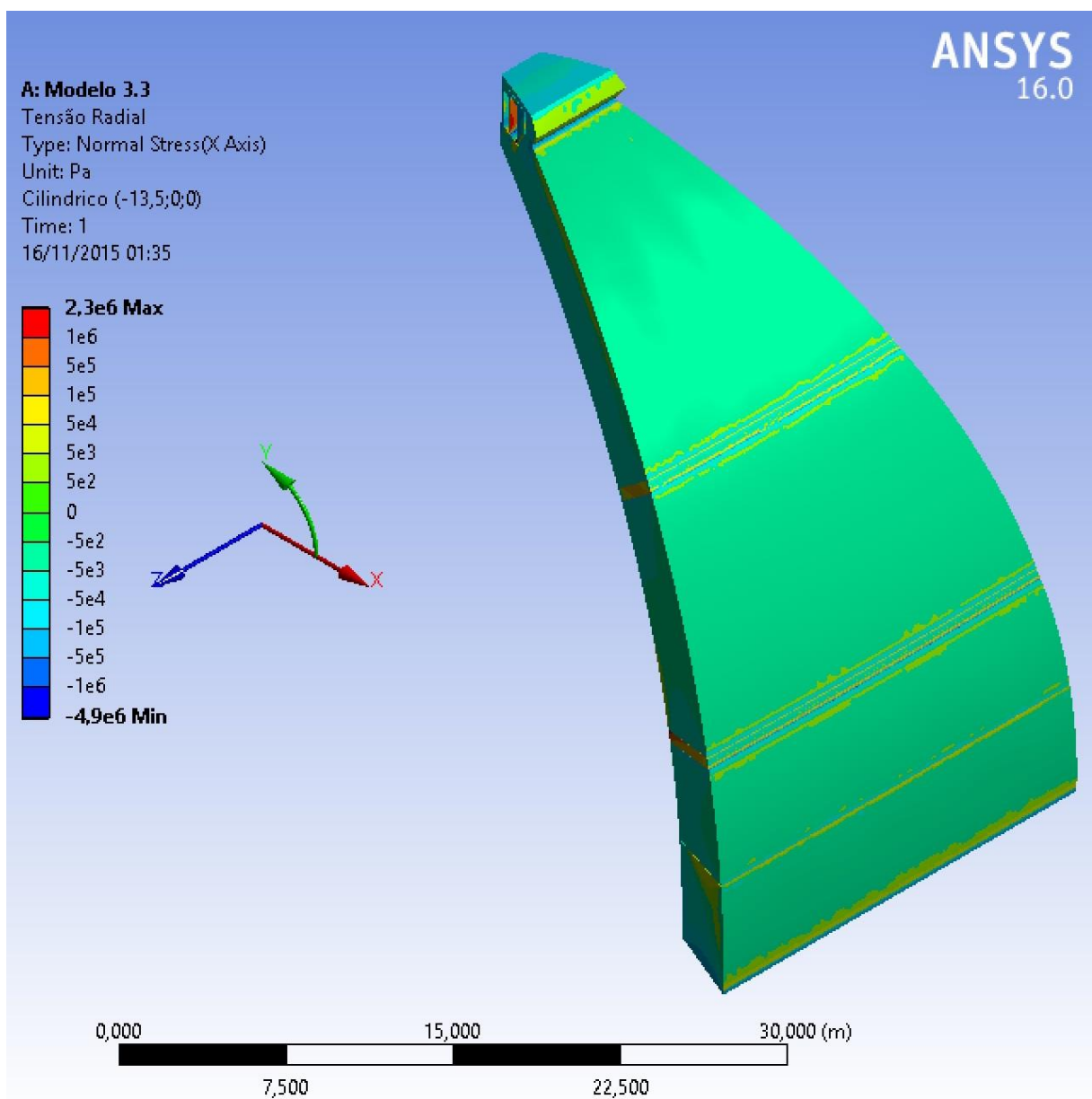


(fonte: ANSYS INC., 2015)

6.3.4 Tensões Radiais

A casca externa, em termos de tensões radiais, sofre em praticamente toda ela, uma leve compressão. Os valores de tração na extensão da casca, conforme figuras 44 a 48, não ultrapassam os valores limite de tração para alvenaria, que é de $0,3 \times 10^6$ Pa. Valores maiores que esse limite são observados nas partes de arenito, porém o limite a tração em tais partes é de 6×10^6 Pa, e os valores máximos observados são de até $2,3 \times 10^6$ Pa.

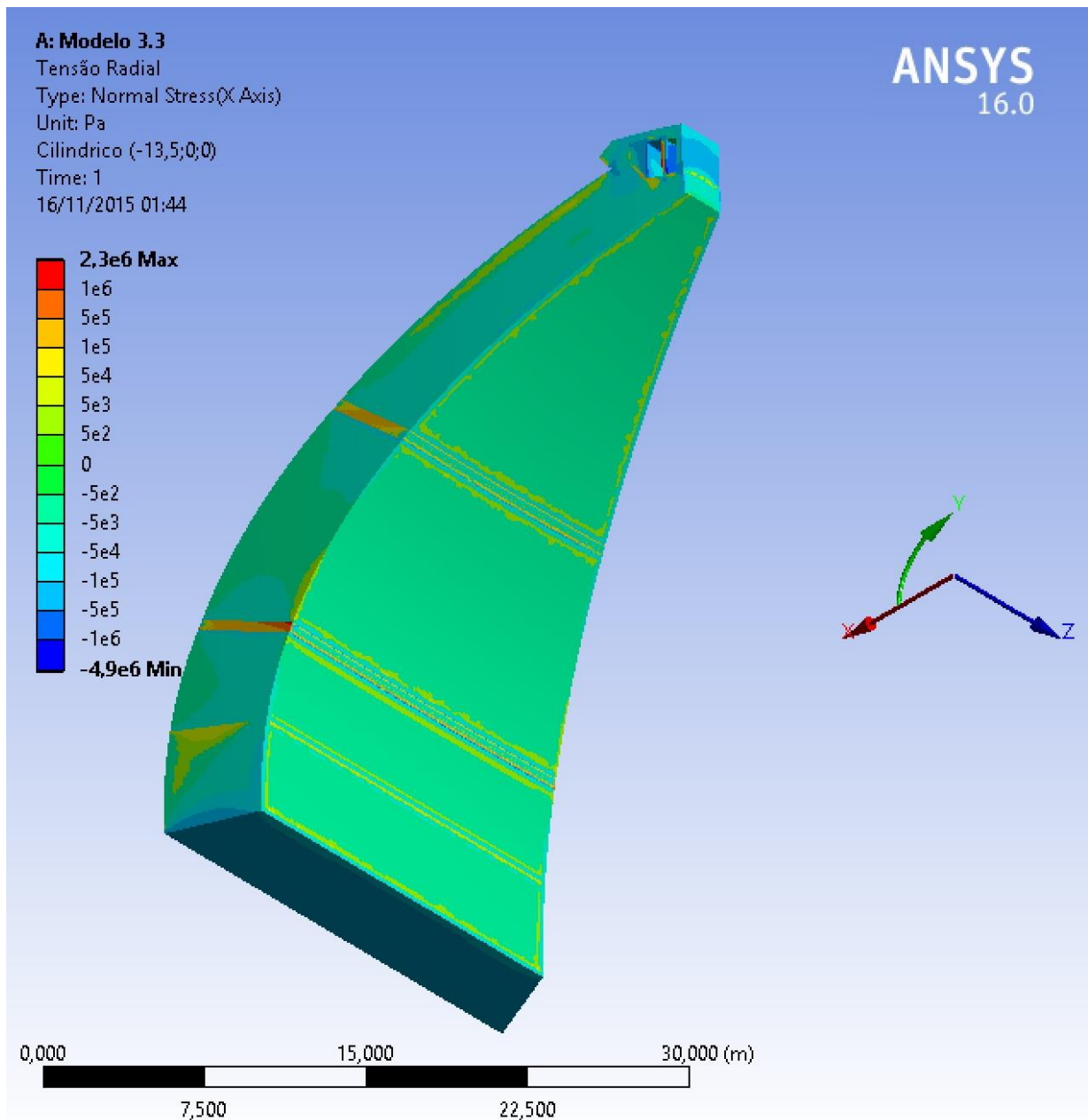
Figura 44 – Tensão Radial – Modelo 3



(fonte: ANSYS INC., 2015)

Analisando a compressão agora, temos que os valores na parte da alvenaria não são maiores que o limite a compressão, que vale 3×10^6 Pa para a de tijolos, e 7×10^6 Pa para a de blocos de arenito. Valores superiores a 3×10^6 Pa são observados na base da estrutura da lanterna. Naquele ponto, porém, o material resiste aos esforços pois é feito de arenito, sendo o valor de resistência a compressão 89×10^6 Pa.

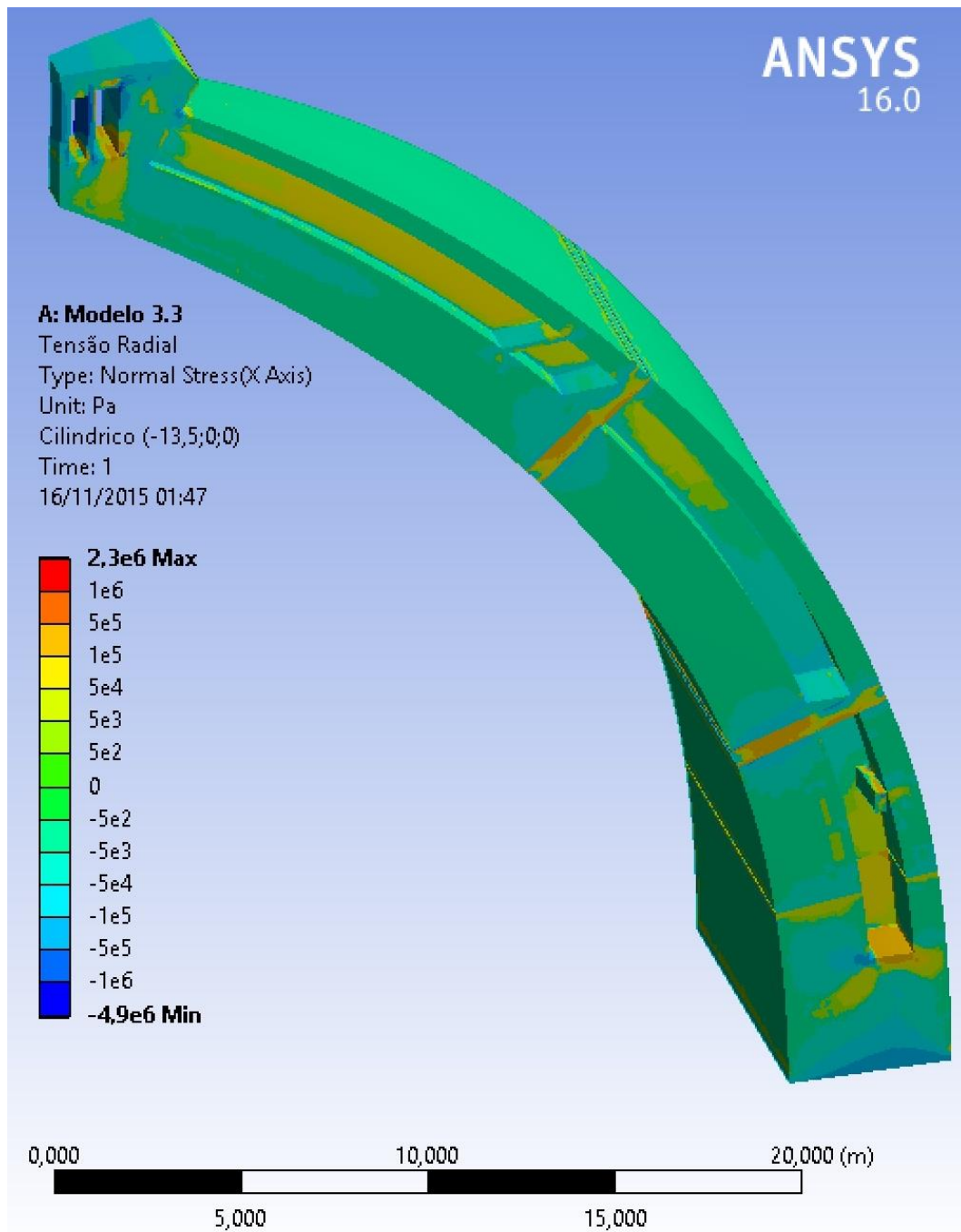
Figura 45 – Tensão Radial 2 – Modelo 3



(fonte: ANSYS INC., 2015)

Na figura 46 é possível visualizar tensões de até $0,5 \times 10^6$ Pa no piso do 1º nível de passagem (o valor máximo atingido nessa região é de $0,455 \times 10^6$ Pa), na cor amarelo escura. Visto que o material é alvenaria com blocos de arenito, que resiste a tais esforços, não ocorre problema. Caso fosse alvenaria de tijolos maciços, cuja resistência é inferior, poderíamos ter problemas locais devido a tração.

Figura 46 – Tensão Radial – Corte 1 – Modelo 3



(fonte: ANSYS INC., 2015)

Figura 47 – Tensão Radial – Corte 2 – Modelo 3

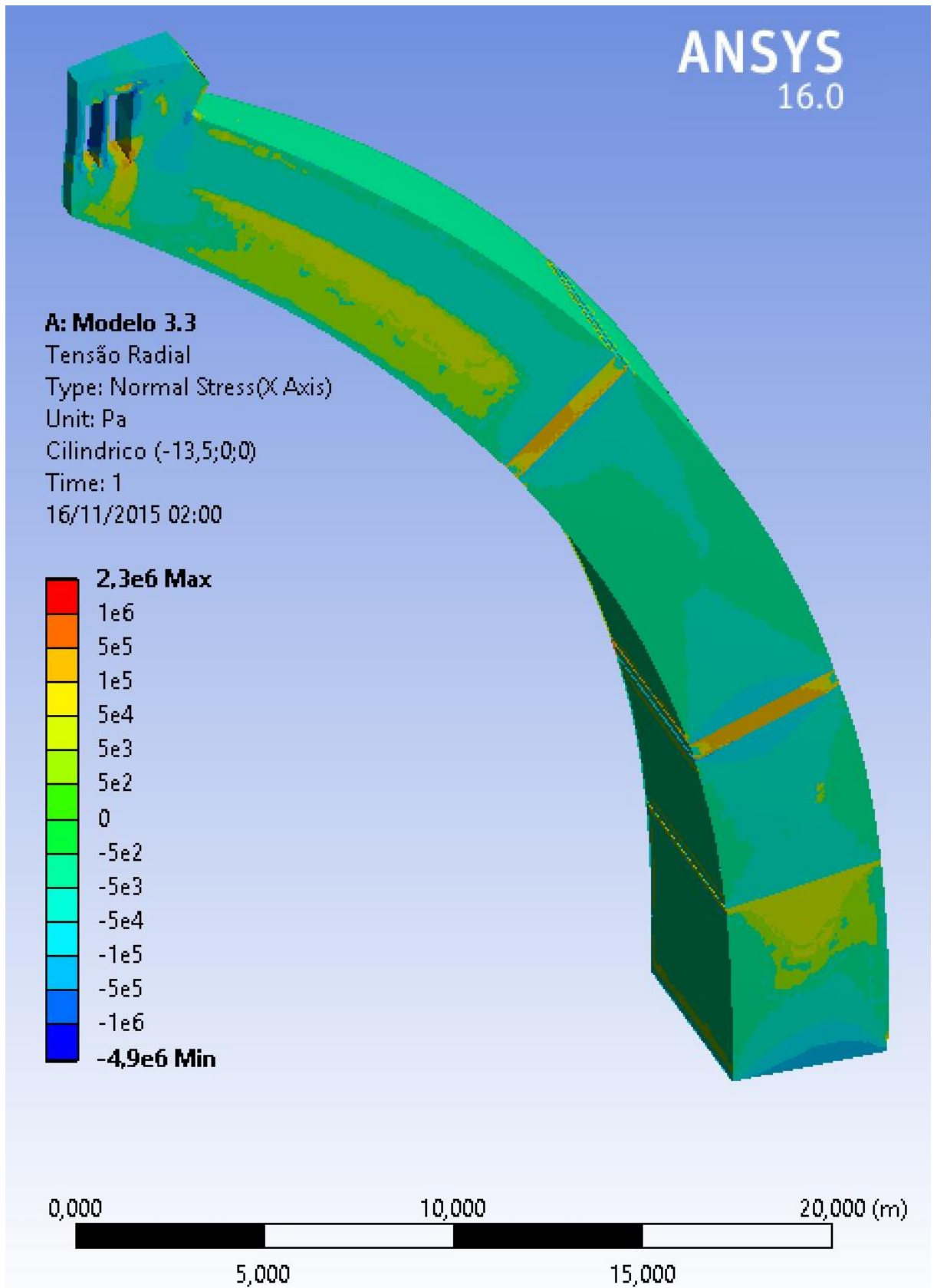
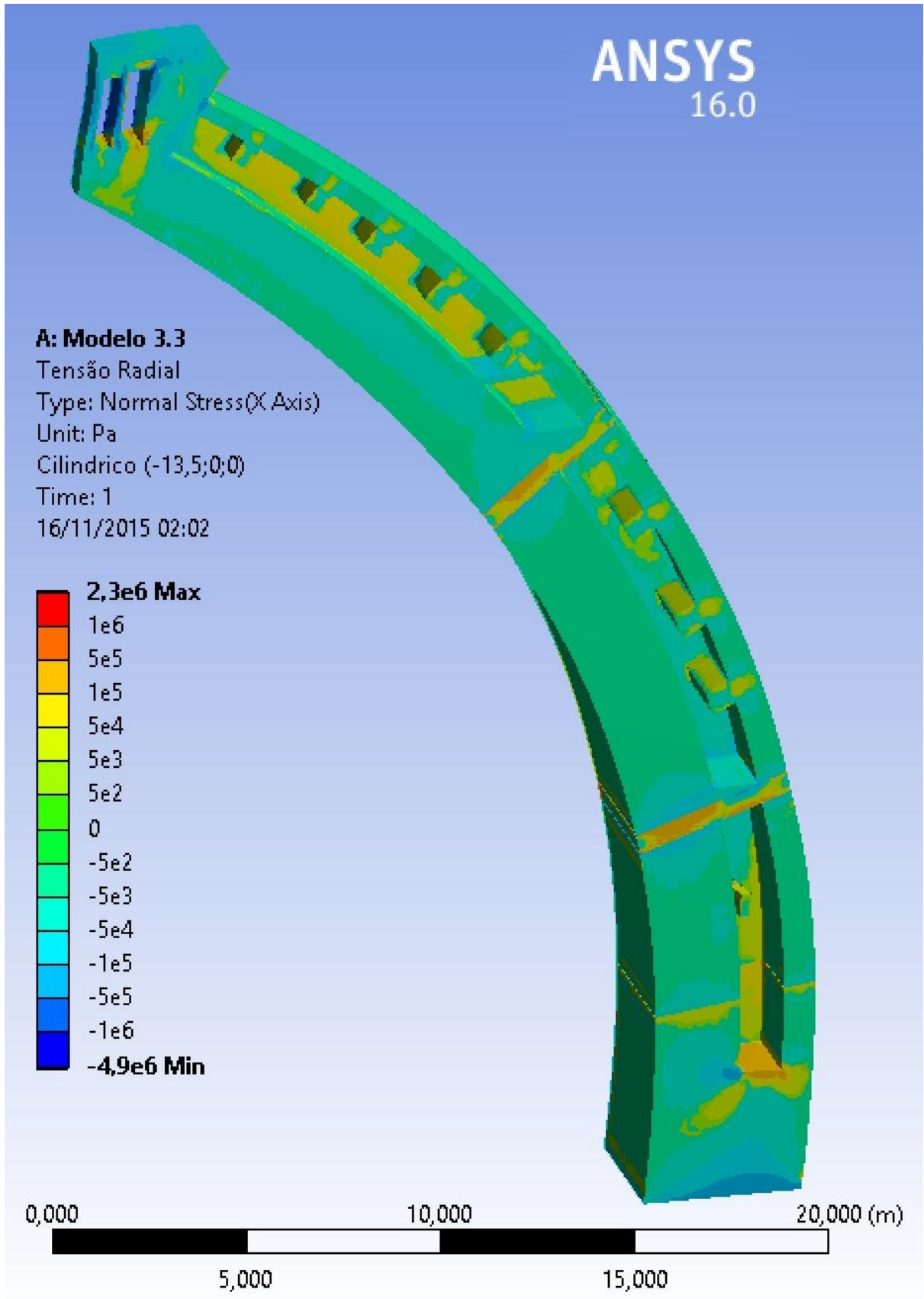


Figura 48 – Tensão Radial – Corte 3 – Modelo 3



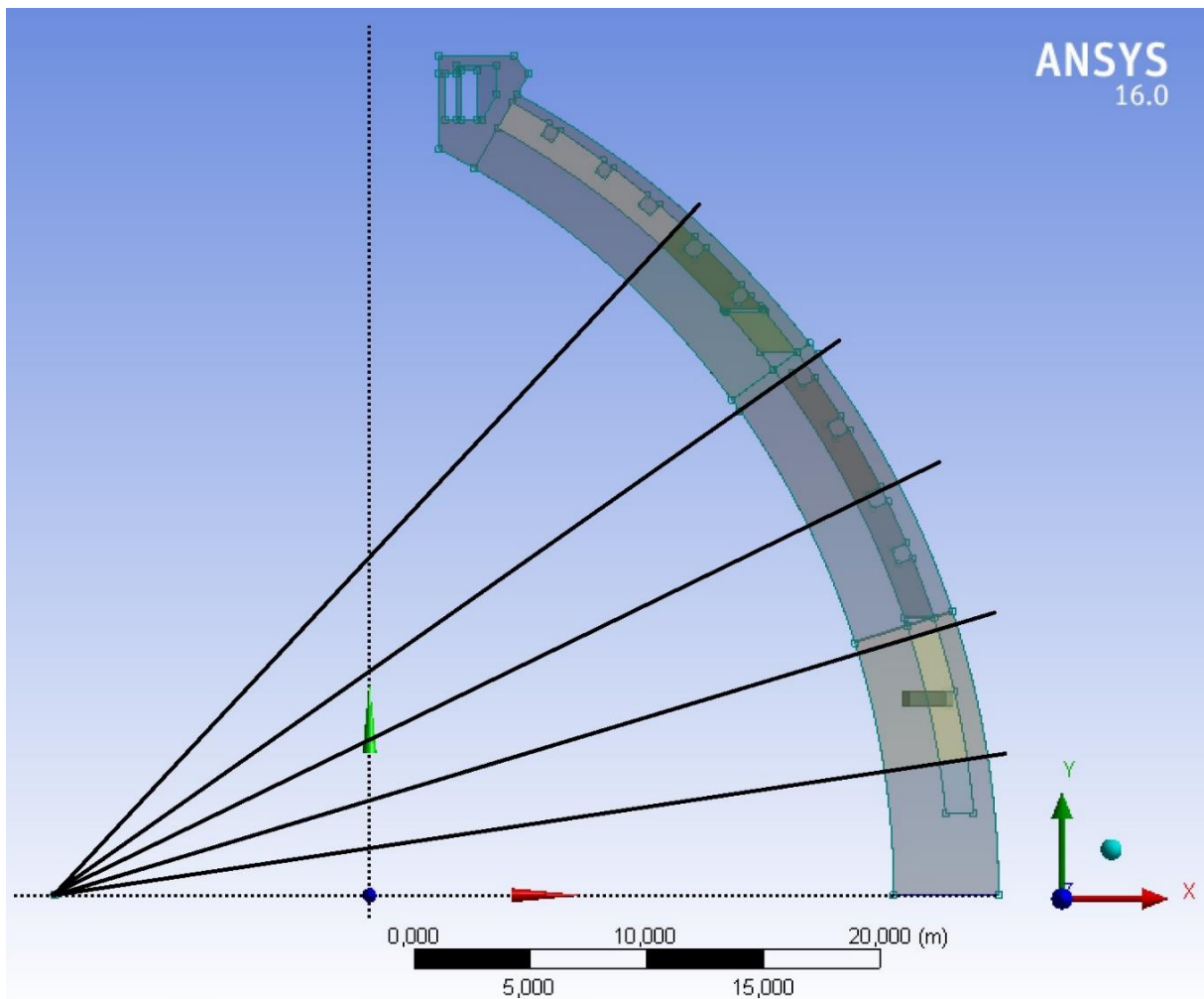
(fonte: ANSYS INC., 2015)

6.4 ETAPAS CONSTRUTIVAS

Nessa etapa discute-se a evolução da construção da cúpula, que ocorreu sem a execução de um cimbramento ou escoramento para sustentá-la. A simulação das etapas de construção, e as consequentes tensões geradas em cada uma delas, serão simuladas fazendo-se cortes na malha do Modelo 3. O primeiro é na altura da base, feita com alvenaria de blocos de arenito, sendo o ângulo do plano de corte de $8,5^\circ$. O segundo fica logo abaixo do primeiro anel de arenito. O terceiro, entre os dois anéis, sob o ângulo de 26° . O quarto, localiza-se logo abaixo do segundo anel de arenito. O quinto divide o último trecho no ângulo de 47° . O sexto é o modelo completo, porém sem o peso da lanterna incluso.

Os planos de corte podem ser vistos na figura 49.

Figura 49 – Planos de Corte – Modelo 3.1



(fonte: ANSYS INC., 2015)

Após o processamento, foram obtidos os valores expresso na tabela 4 para massa, número de nós e número de elementos, bem como a porcentagem representativa das partes perante o todo.

Tabela 4 – Tabela de Massa, Número de Nós e Elementos do Modelo 3.1³

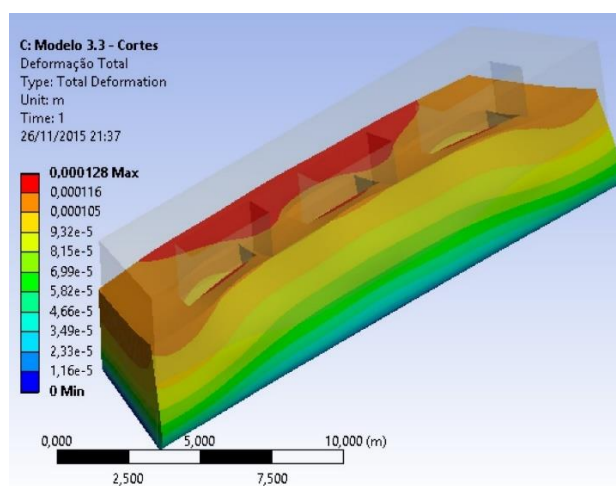
Corte	Massa		Nós		Elementos	
	kt	%	-	%	-	%
1	1,103	25%	109441	12%	75262	18%
2	1,859	42%	180655	19%	89718	22%
3	2,682	61%	527974	56%	211712	51%
4	3,334	75%	620596	66%	274111	66%
5	3,986	90%	874497	93%	368472	89%
6	4,416	100%	943210	100%	413822	100%

(fonte: elaborado pelo autor, 2015)

6.4.1 Deslocamentos

Analisando a evolução dos deslocamentos, é possível notar que a estrutura sofre deformações maiores na região das nervuras centrais. Assim, além do deslocamento vertical da estrutura (direção Y), é possível ver a formação de uma catenária entre as nervuras de canto, em especial nas figuras 50 e 53. Isso se deve a maior rigidez das costelas de canto, além das diversas ligações existentes entre as próprias nervuras de canto e centrais.

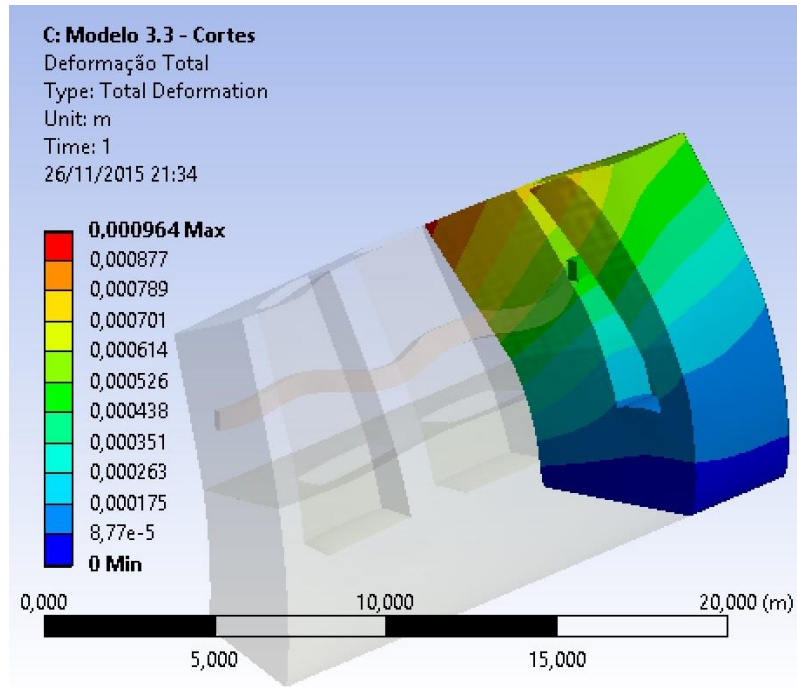
Figura 50 – Deformação Total – Etapa 1



(fonte: ANSYS INC., 2015)

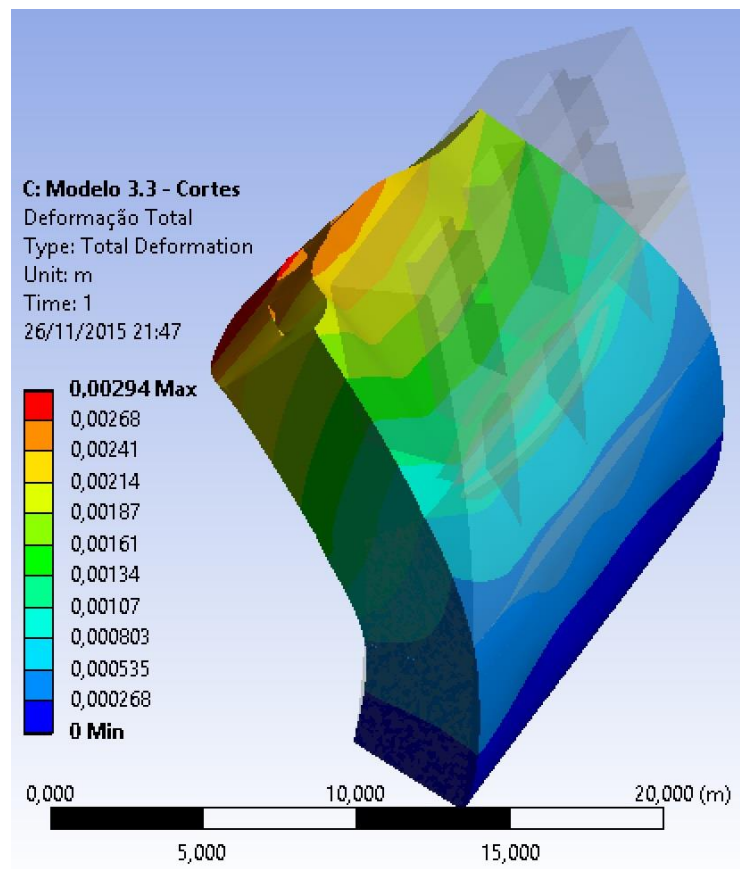
³ O Modelo 3.1 é idêntico ao 3, exceto pela malha utilizada. Foi utilizado somente para realizar as etapas de corte. Tais alterações devem-se à geração automática de malha, visto que, ao dividir a estrutura em mais partes; o arranjo, tamanho e posições são distintos do modelo 3 original.

Figura 51 – Deformação Total – Etapa 2



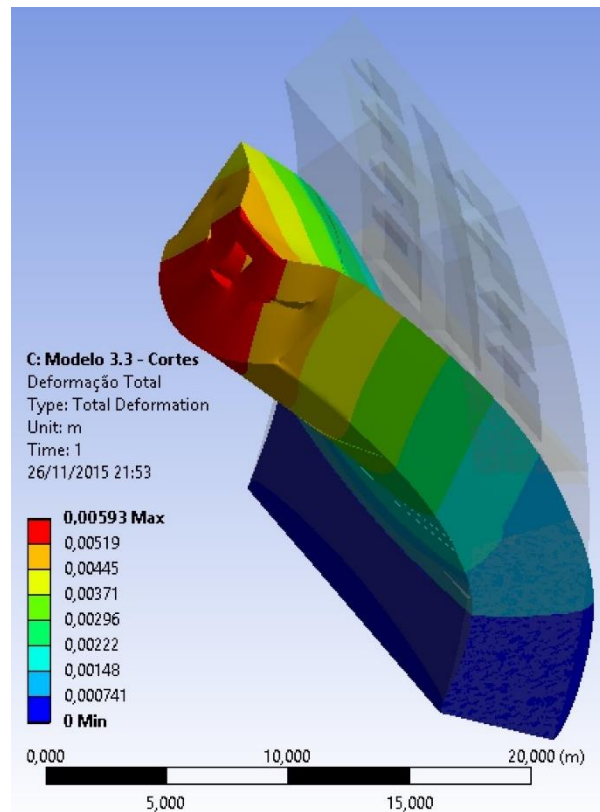
(fonte: ANSYS INC., 2015)

Figura 52 – Deformação Total – Etapa 3



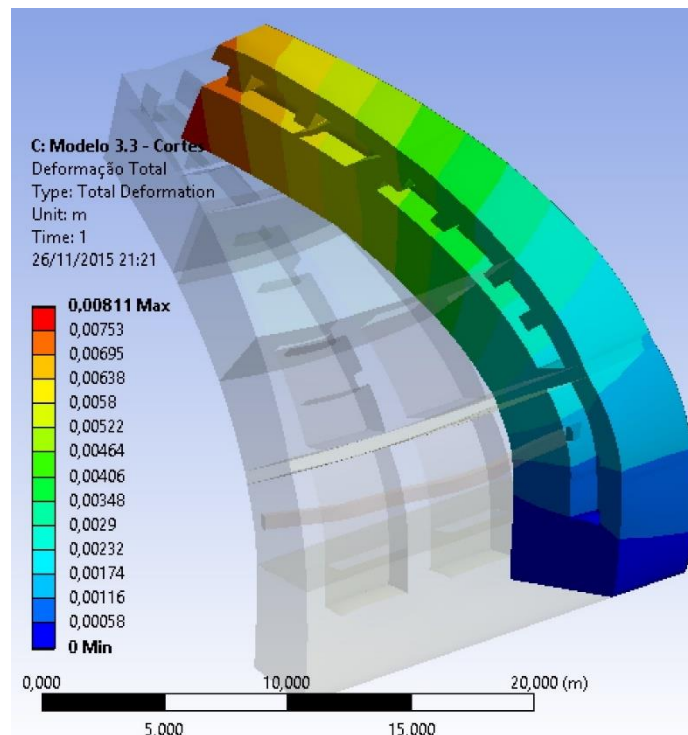
(fonte: ANSYS INC., 2015)

Figura 53 – Deformação Total – Etapa 4



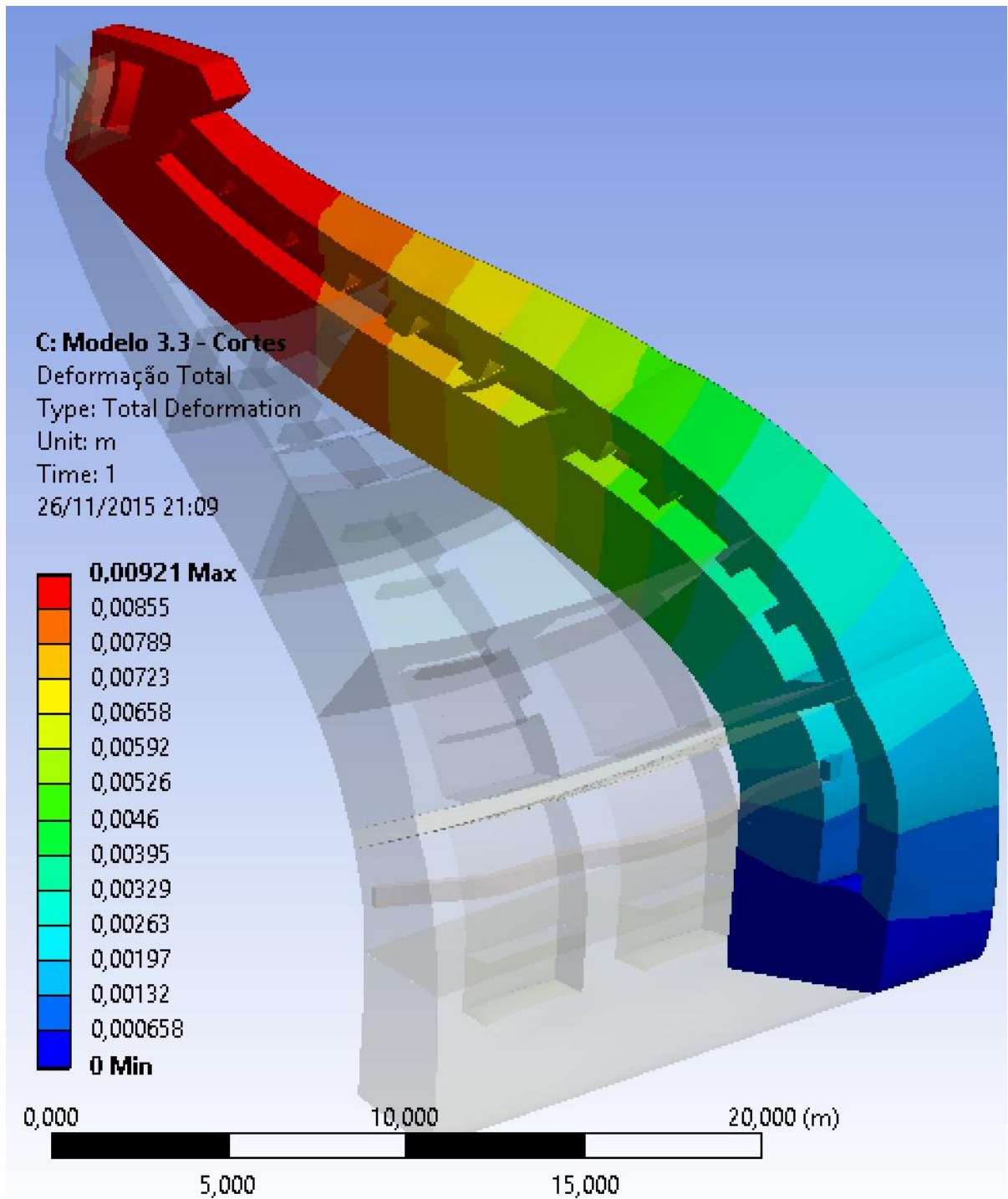
(fonte: ANSYS INC., 2015)

Figura 54 – Deformação Total – Etapa 5



(fonte: ANSYS INC., 2015)

Figura 55 – Deformação Total – Etapa 6



(fonte: ANSYS INC., 2015)

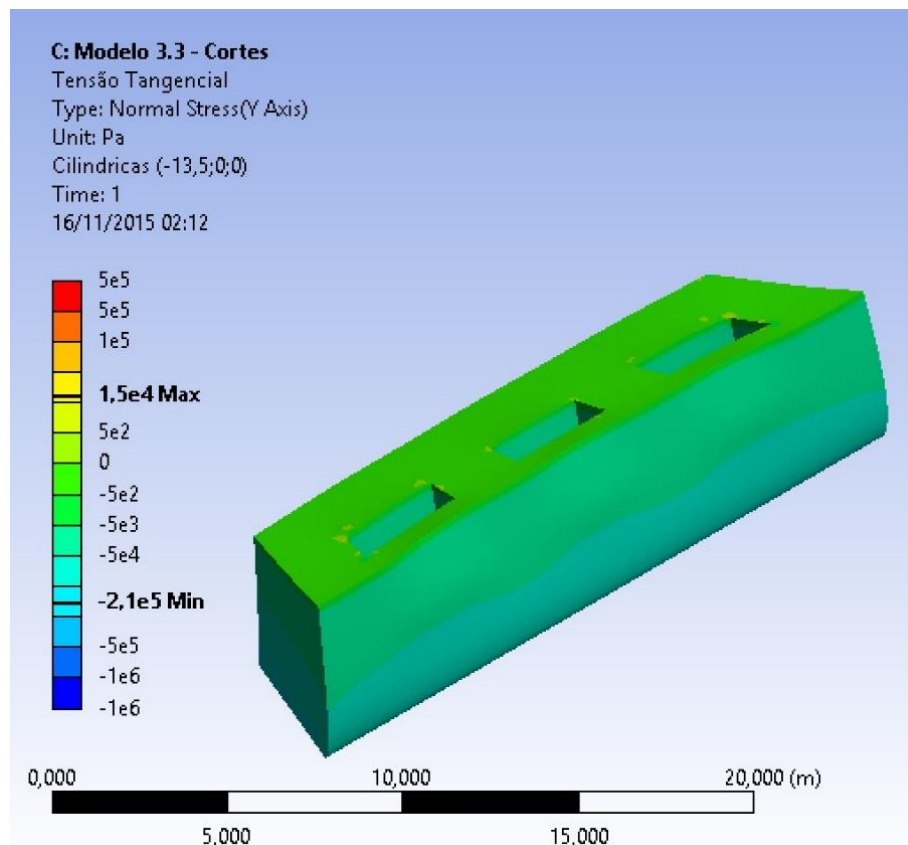
6.4.2 Tensões Tangenciais

As figuras a seguir demonstram a evolução das tensões tangenciais na estrutura como um todo. É possível notar que, ao longo de toda a extensão de ambas as cascas, o valor da tensão tangencial é negativa, ou seja, ocorre compressão na seção. Valores positivos são observados no topo dos modelos das etapas, em valores abaixo de $0,1 \times 10^6$ Pa.

Analisando os cortes, é possível ver que os arcos de ligação entre as costelas possuem tensões de tração na cor amarelo clara, os quais assumem valores de até $0,5 \times 10^5$ Pa. Também ocorrem valores positivos de tensão nos pisos dos níveis de passagem, os quais chegam a $0,11 \times 10^6$ Pa.

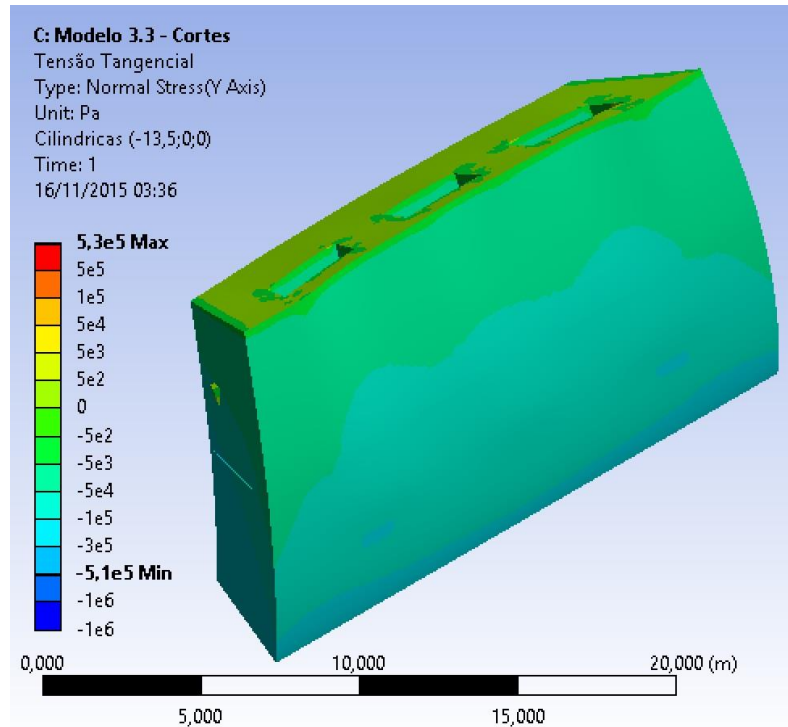
Os valores de compressão máximos atingidos na base da estrutura são de $1,77 \times 10^6$ Pa, nos cantos externos das nervuras de canto.

Figura 56 – Tensão Tangencial – Etapa 1



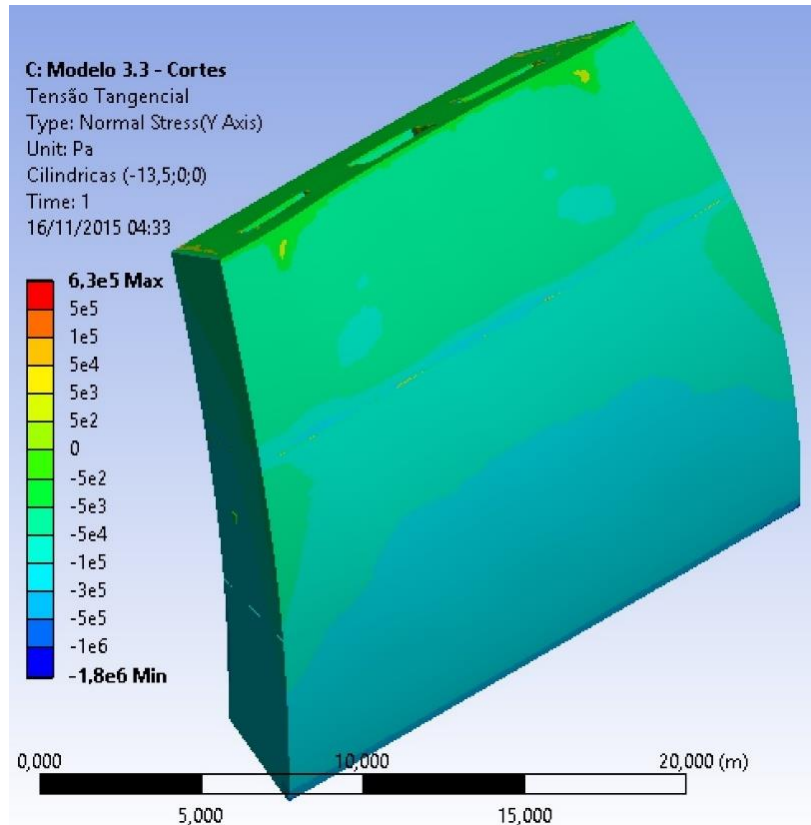
(fonte: ANSYS INC., 2015)

Figura 57 – Tensão Tangencial – Etapa 2



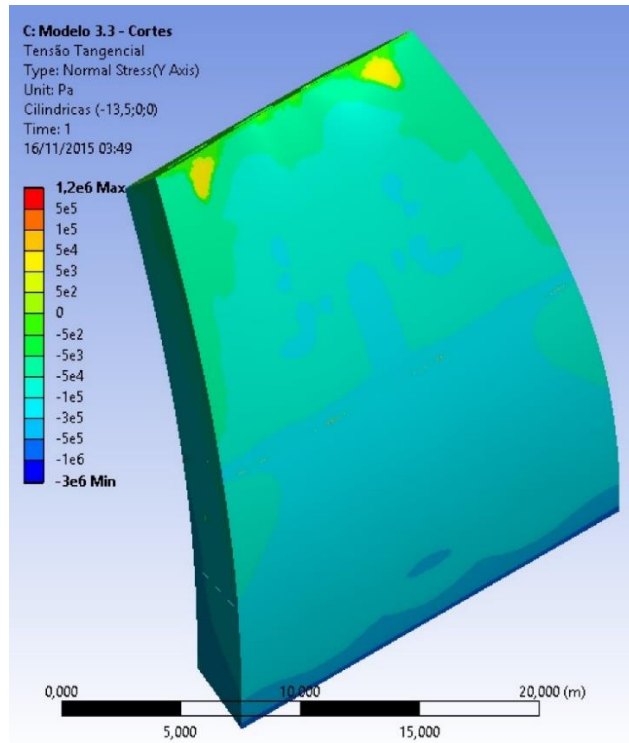
(fonte: ANSYS INC., 2015)

Figura 58 – Tensão Tangencial – Etapa 3



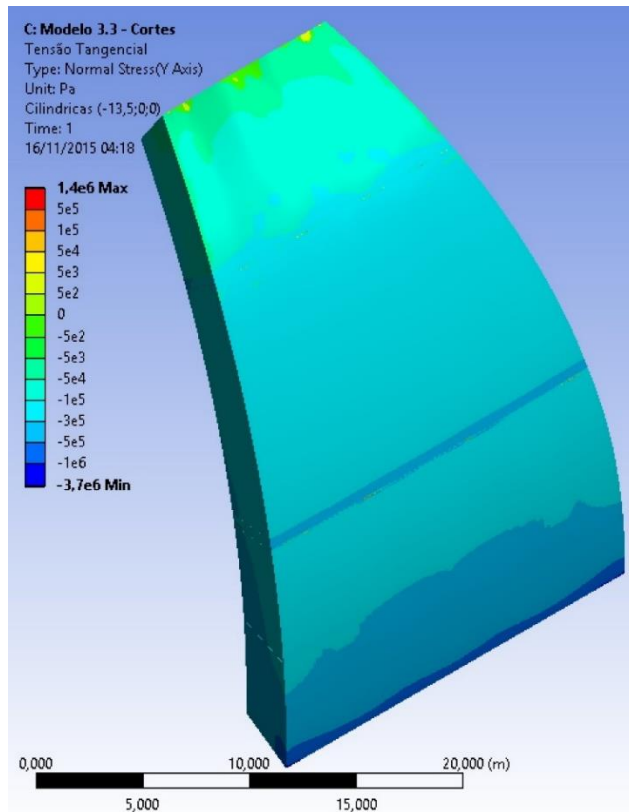
(fonte: ANSYS INC., 2015)

Figura 59 – Tensão Tangencial – Etapa 4



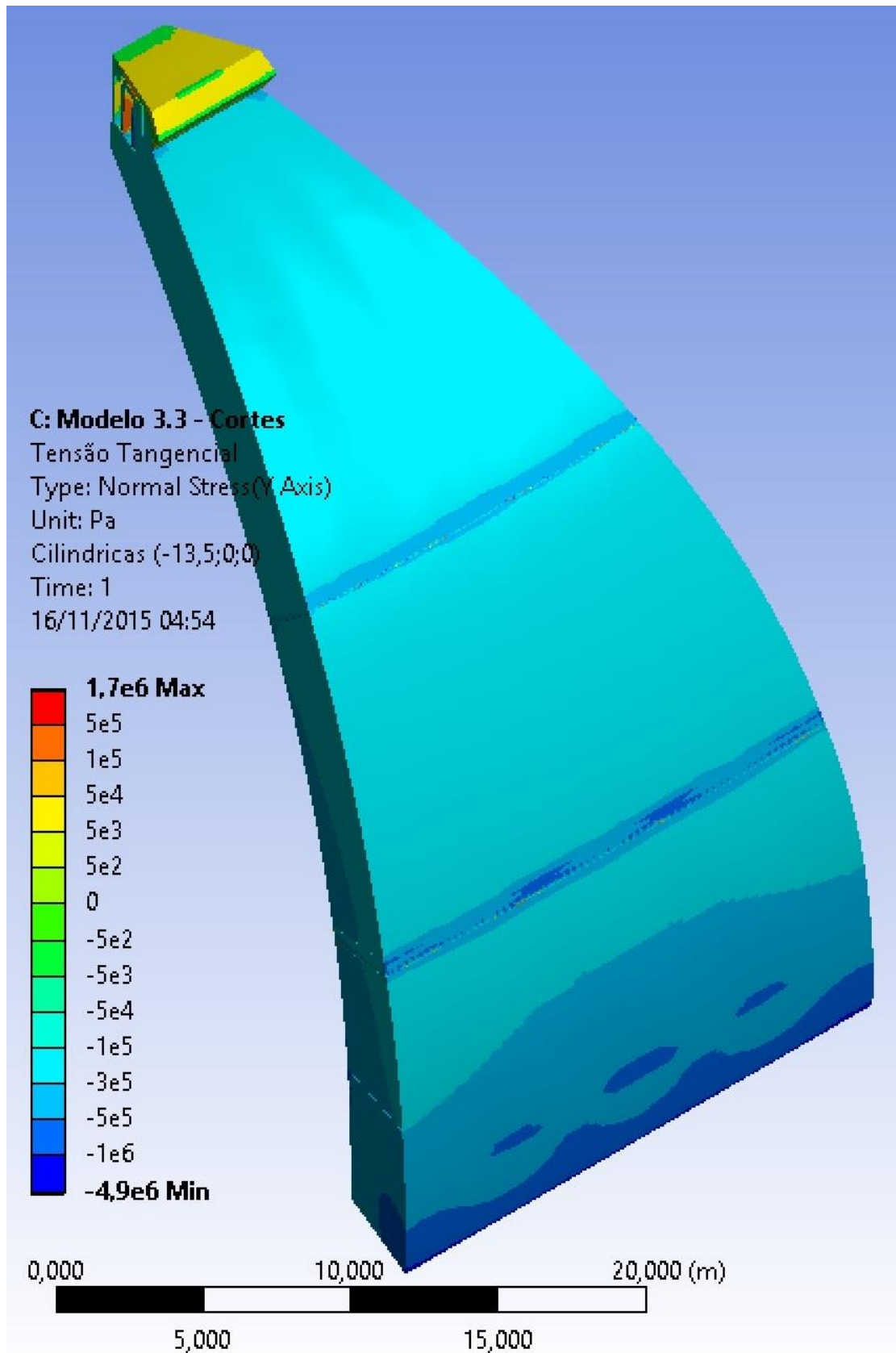
(fonte: ANSYS INC., 2015)

Figura 60 – Tensão Tangencial – Etapa 5



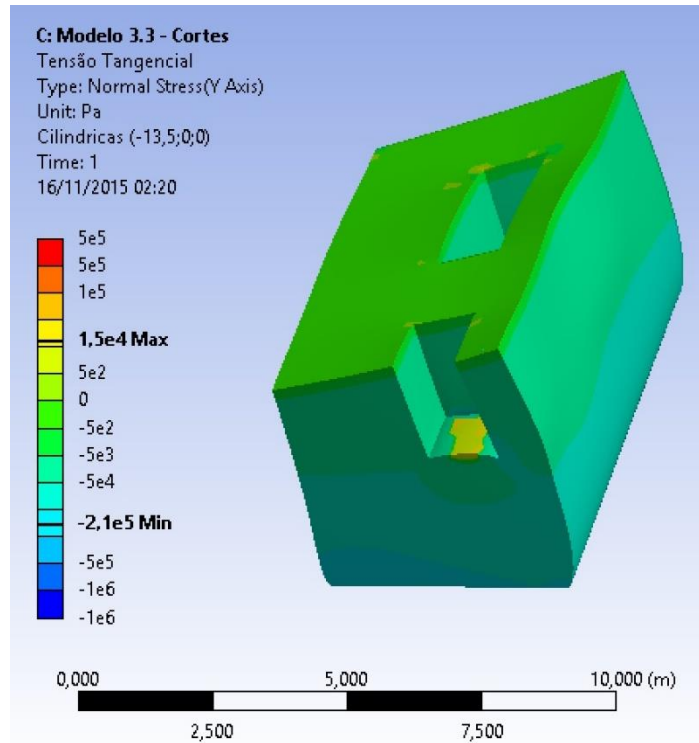
(fonte: ANSYS INC., 2015)

Figura 61 – Tensão Tangencial – Etapa 6



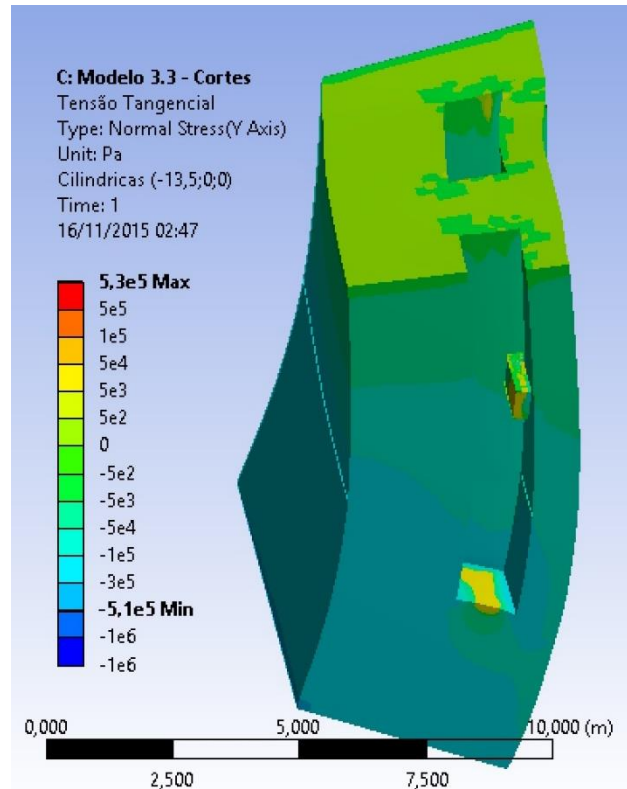
(fonte: ANSYS INC., 2015)

Figura 62 – Tensão Tangencial – Corte 1 – Etapa 1



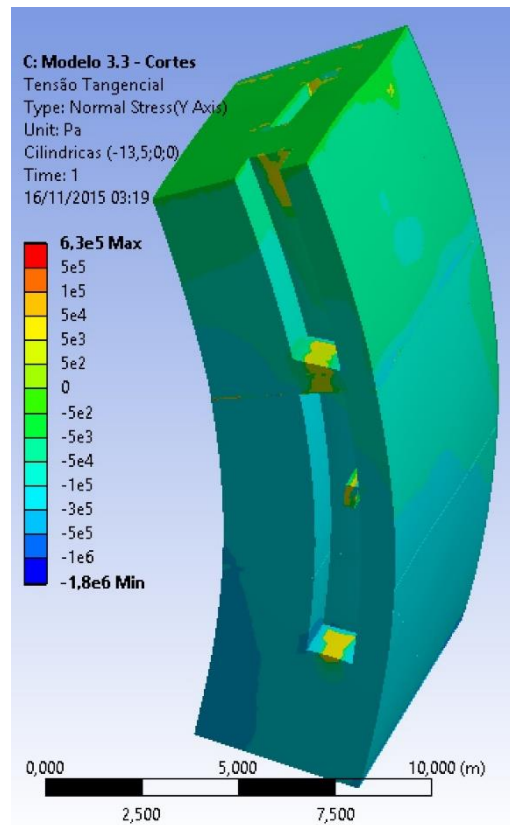
(fonte: ANSYS INC., 2015)

Figura 63 – Tensão Tangencial – Corte 1 – Etapa 2



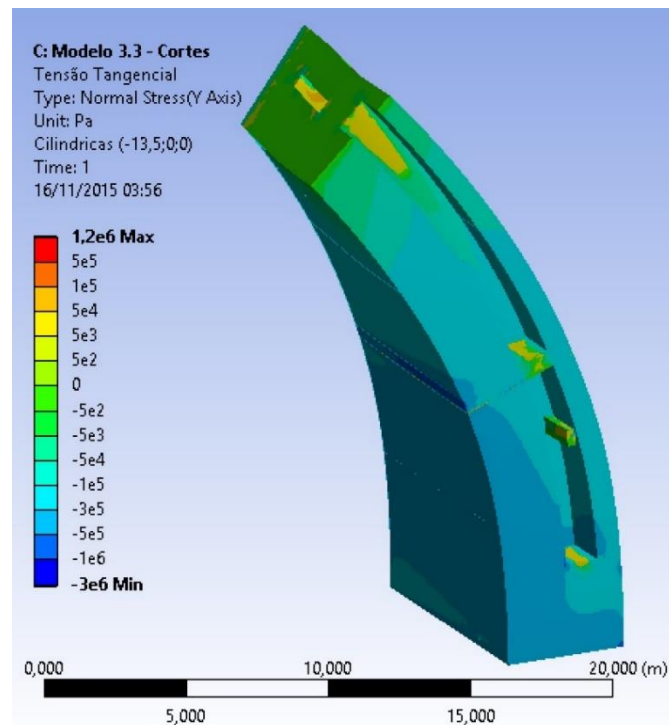
(fonte: ANSYS INC., 2015)

Figura 64 – Tensão Tangencial – Corte 1 – Etapa 3



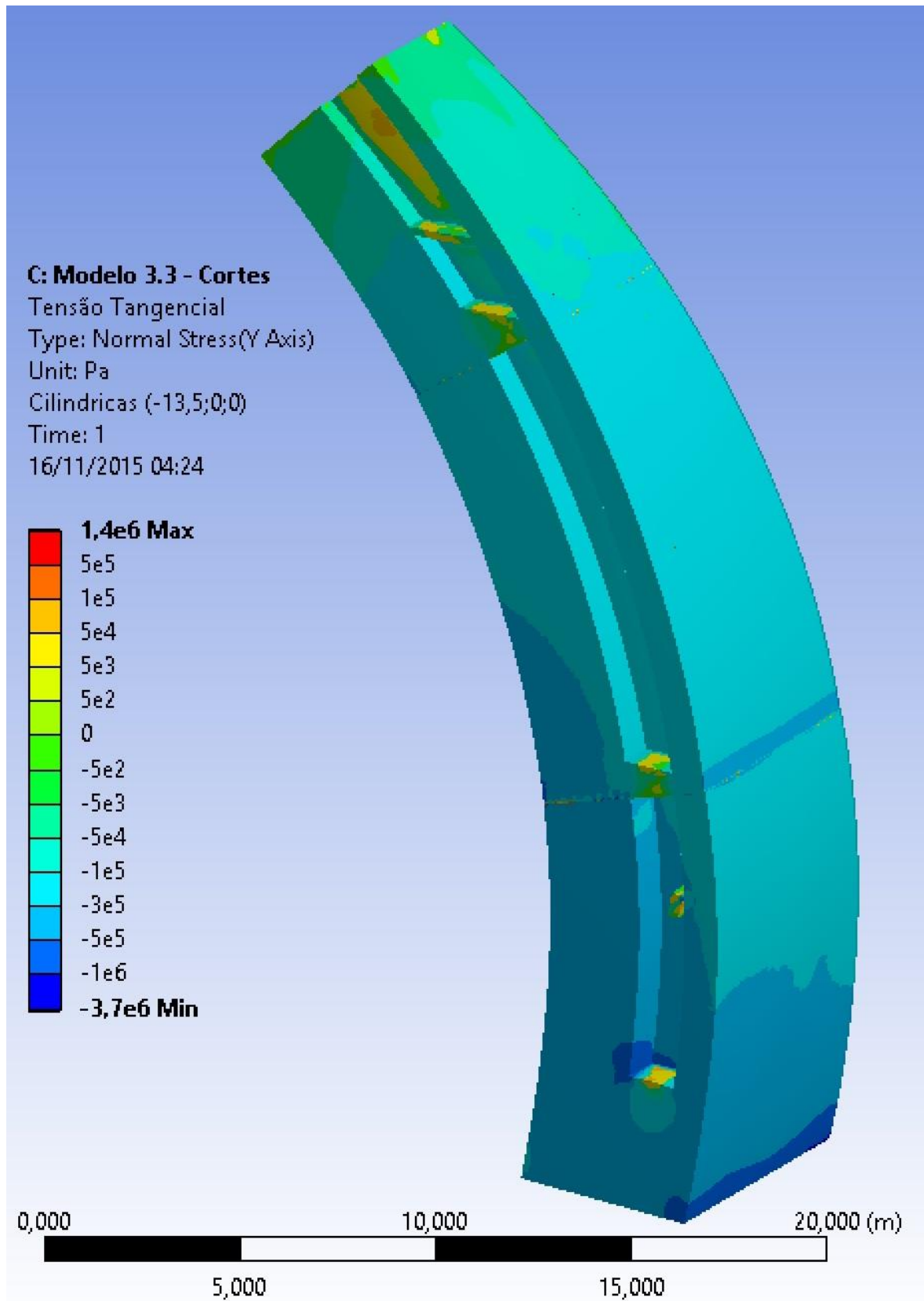
(fonte: ANSYS INC., 2015)

Figura 65 – Tensão Tangencial – Corte 1 – Etapa 4



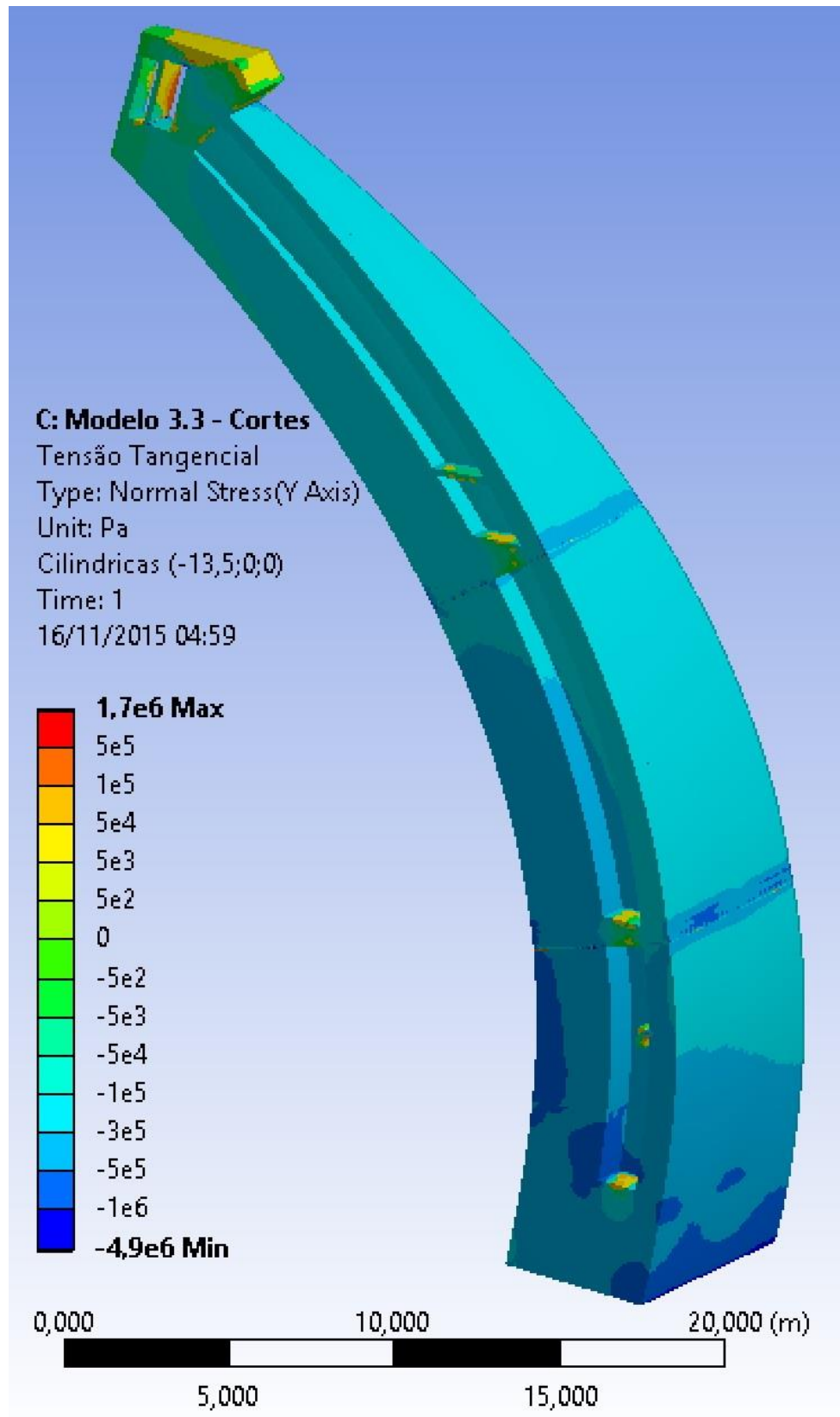
(fonte: ANSYS INC., 2015)

Figura 66 – Tensão Tangencial – Corte 1 – Etapa 5



(fonte: ANSYS INC., 2015)

Figura 67 – Tensão Tangencial – Corte 1 – Etapa 6



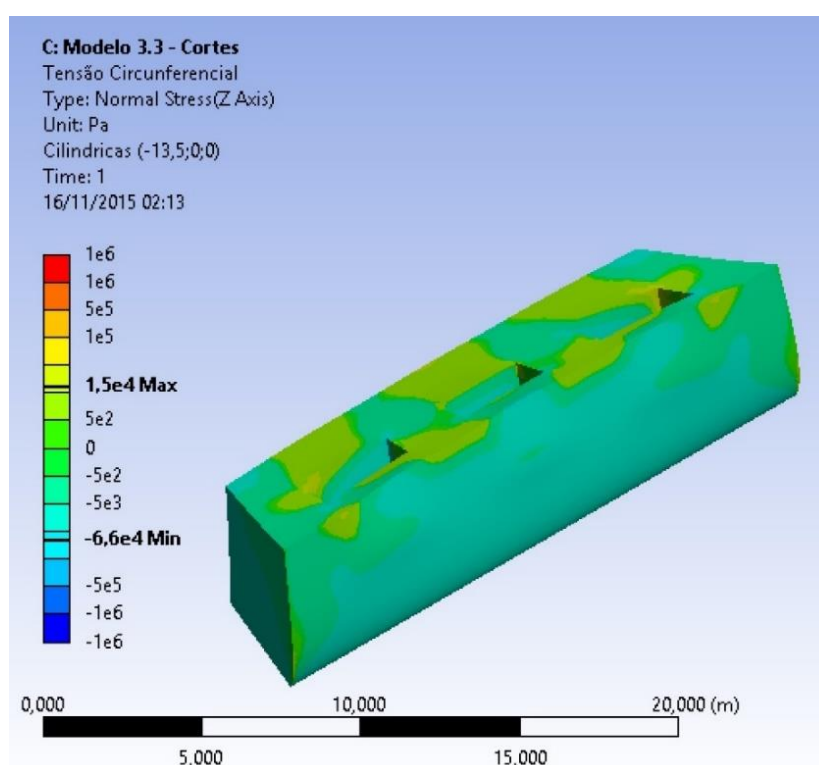
(fonte: ANSYS INC., 2015)

6.4.3 Tensões Circunferenciais

Para a tensão circunferencial, é possível notarmos que desde o início já ocorrem valores positivos, ou seja, tração nas seções. Embora comecem com valores pequenos, de $0,15 \times 10^5$ Pa na primeira etapa, assumem valores maiores já na etapa 2, onde o máximo de 1×10^6 Pa já ocorre no anel de madeira, embora valores maiores de $0,5 \times 10^5$ Pa já podem ser observados no 1º nível de passagem. Na conclusão da construção, as tensões nesse nível chegam a valores próximos de $0,2 \times 10^6$ Pa.

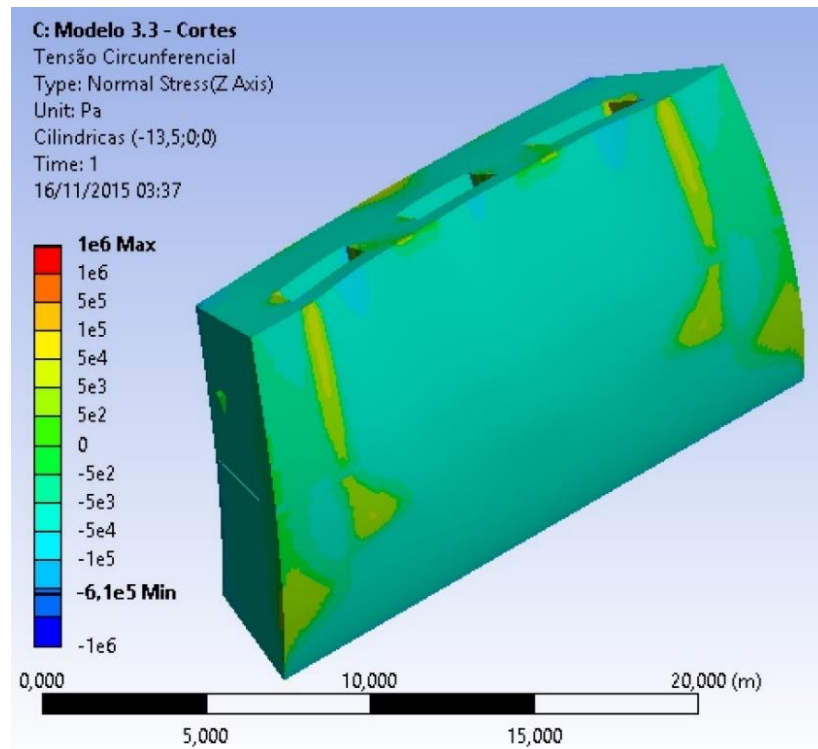
A análise mais importante para as tensões circunferenciais, entretanto, ocorre na altura do 2º nível de passagem, onde se concentram as tensões de tração, que podem ser vistas com facilidade no modelo 1, no item 6.1. É possível notar que as tensões positivas no anel de arenito surgem já na etapa 3, em valores menores de 1×10^6 Pa, próximo das nervuras de canto no lado externo, e na região central interna. Na região externa central, os valores são de compressão, nesse primeiro instante, em valores de até $3,5 \times 10^6$ Pa. É somente na etapa 5 que ocorre o completo tracionamento do anel inferior, que pode ser visto na figura 72 e 78.

Figura 68 – Tensão Circunferencial – Etapa 1



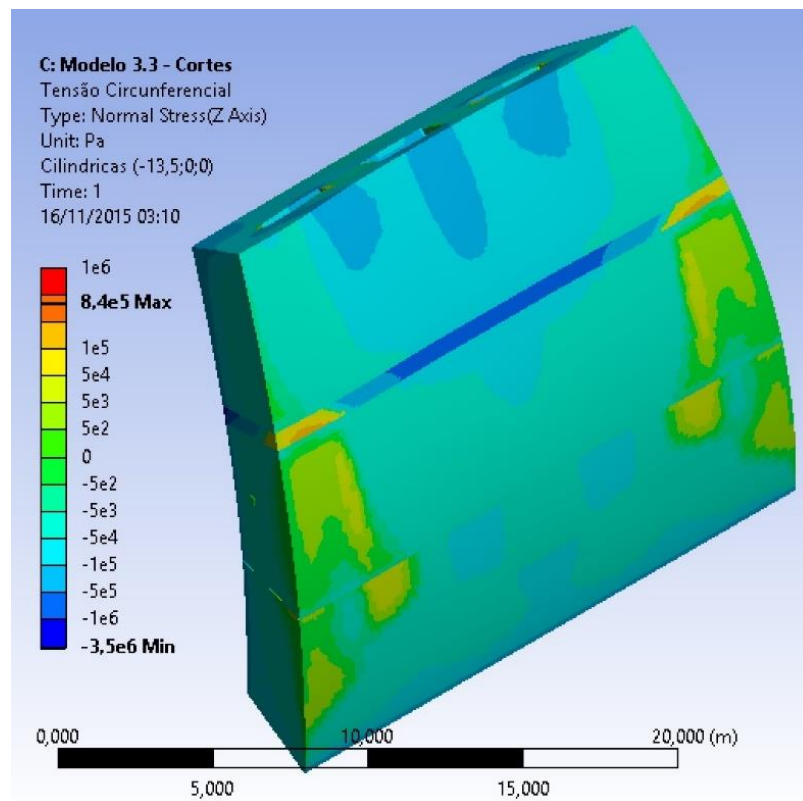
(fonte: ANSYS INC., 2015)

Figura 69 – Tensão Circunferencial – Etapa 2



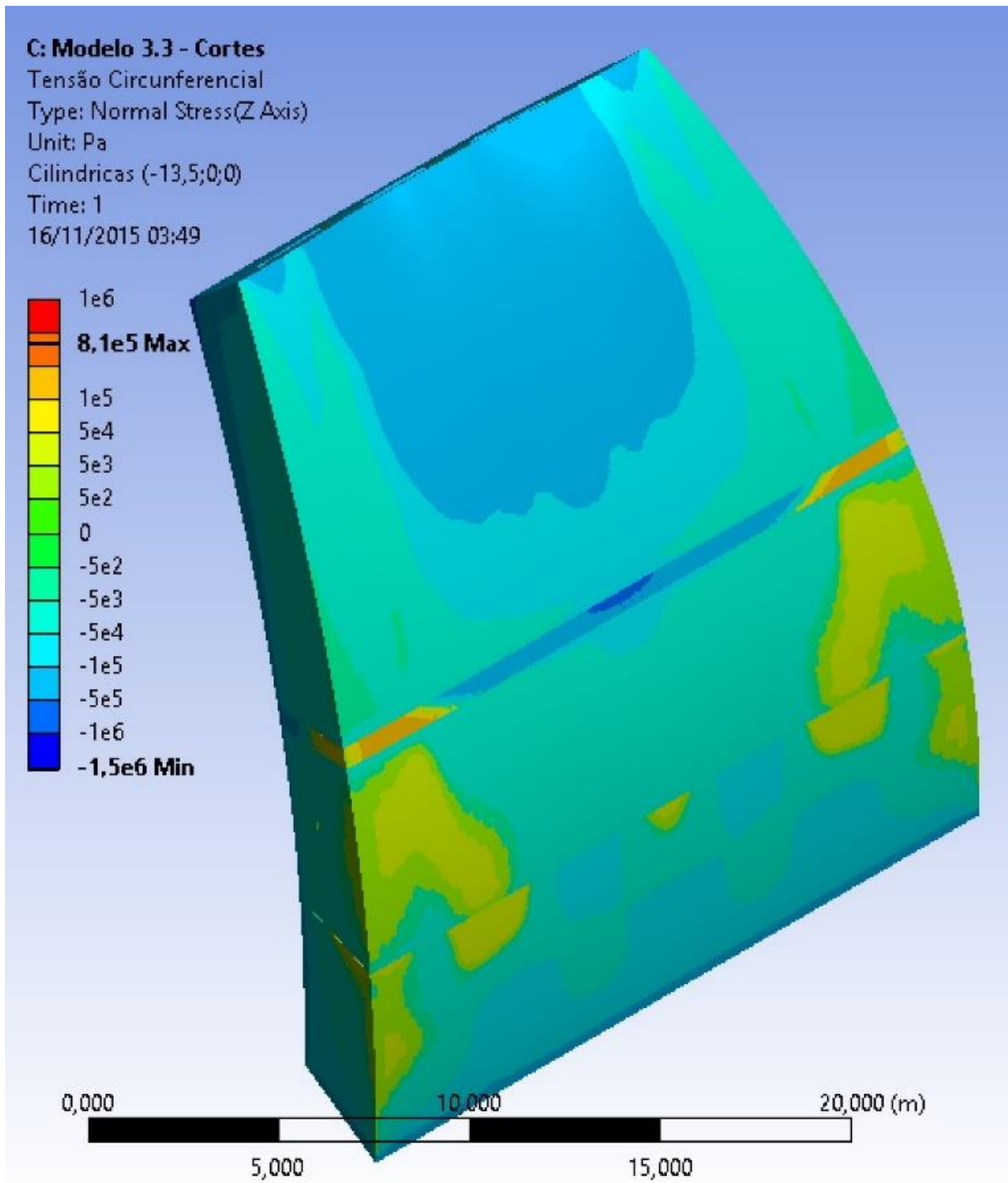
(fonte: ANSYS INC., 2015)

Figura 70 – Tensão Circunferencial – Etapa 3



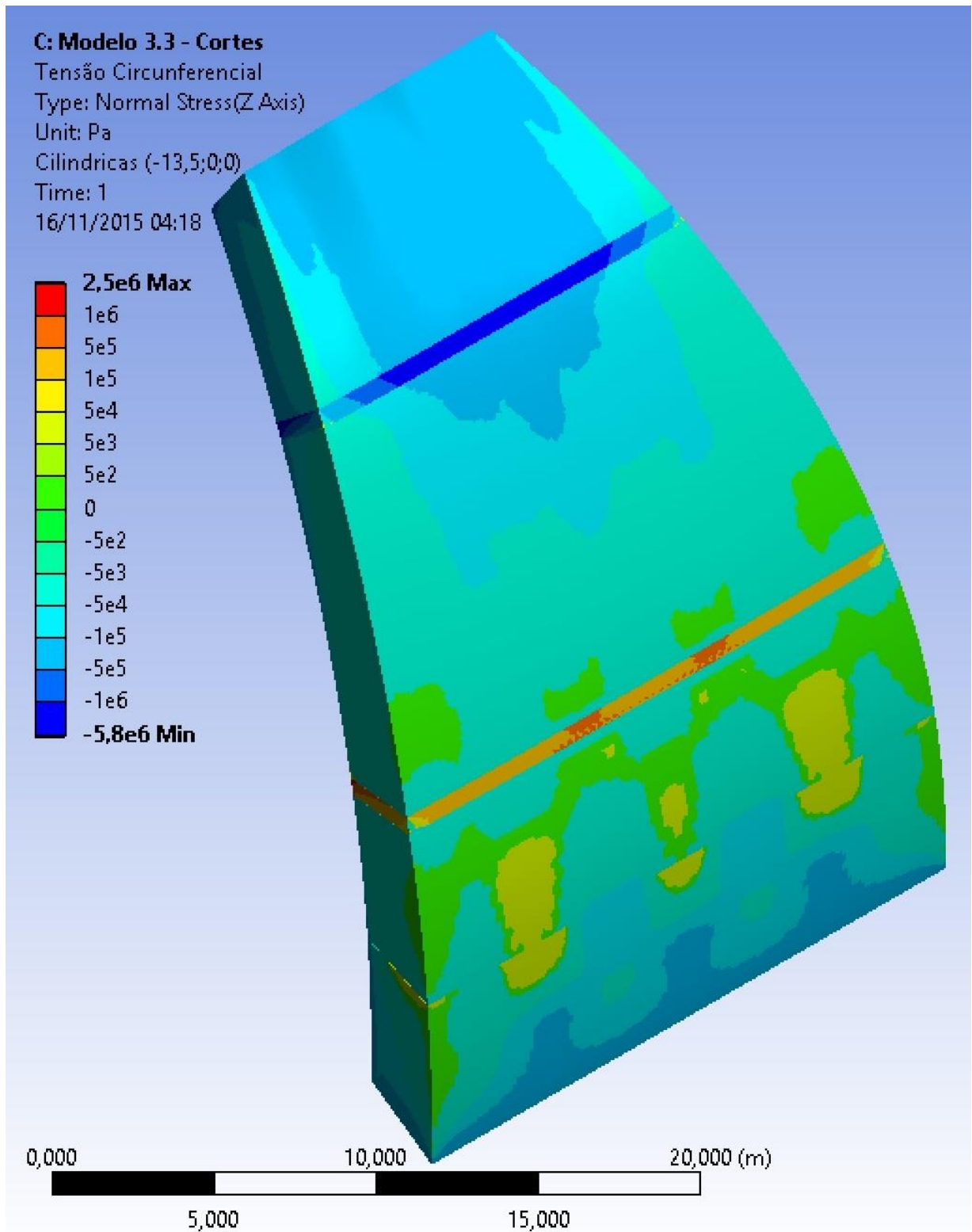
(fonte: ANSYS INC., 2015)

Figura 71 – Tensão Circunferencial – Etapa 4



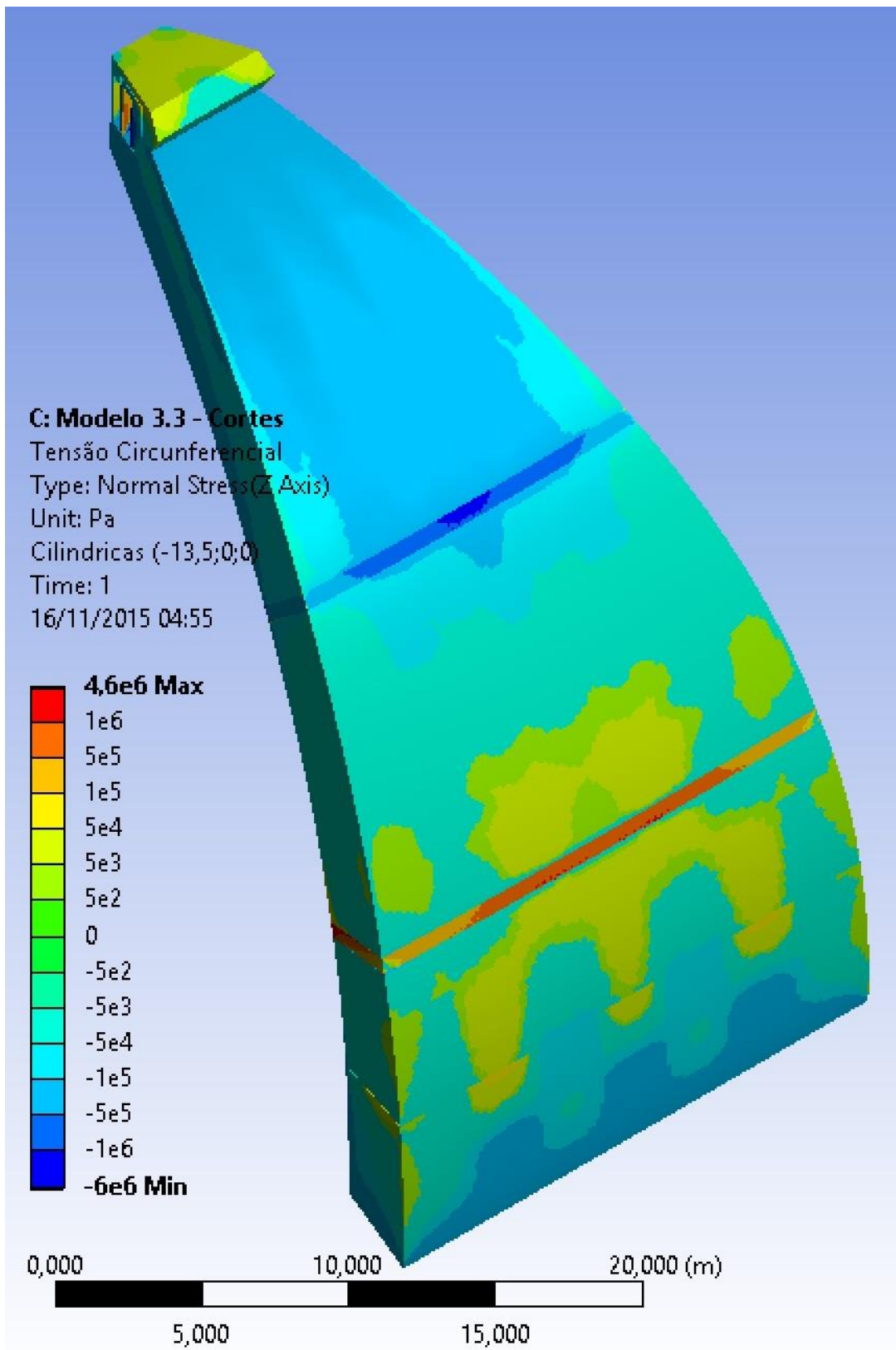
(fonte: ANSYS INC., 2015)

Figura 72 – Tensão Circunferencial – Etapa 5



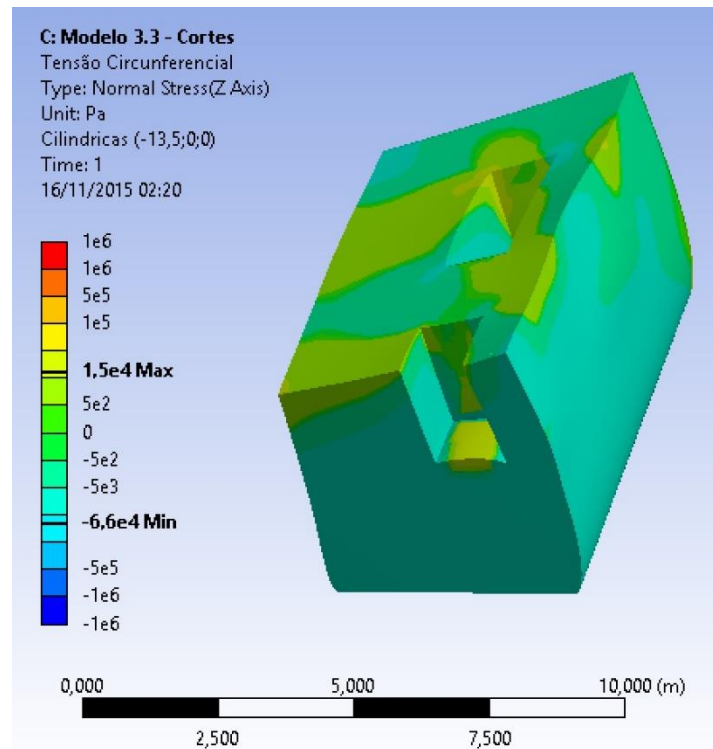
(fonte: ANSYS INC., 2015)

Figura 73 – Tensão Circunferencial – Etapa 6



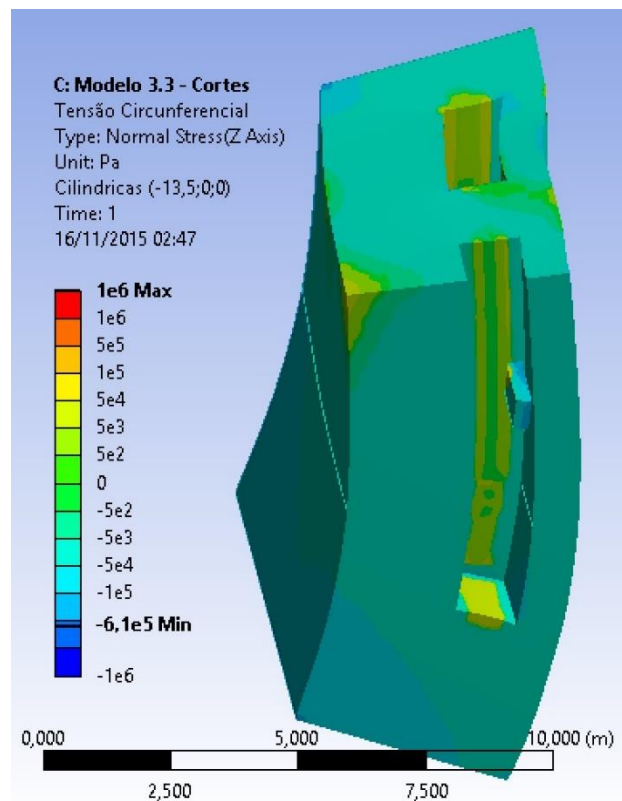
(fonte: ANSYS INC., 2015)

Figura 74 – Tensão Circunferencial – Corte 1 – Etapa 1



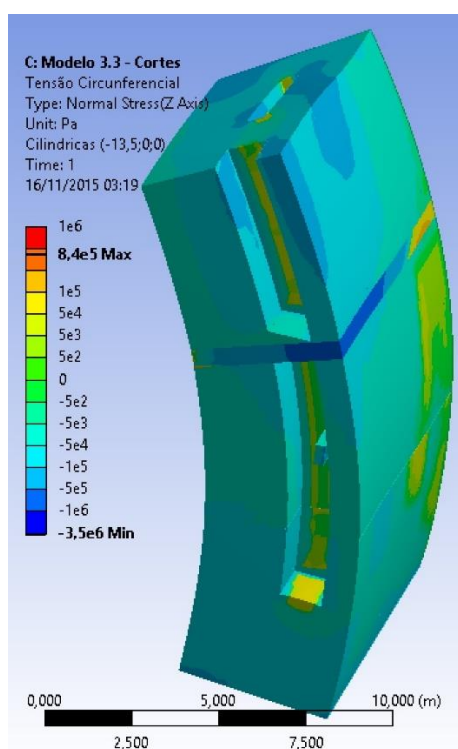
(fonte: ANSYS INC., 2015)

Figura 75 – Tensão Circunferencial – Corte 1 – Etapa 2



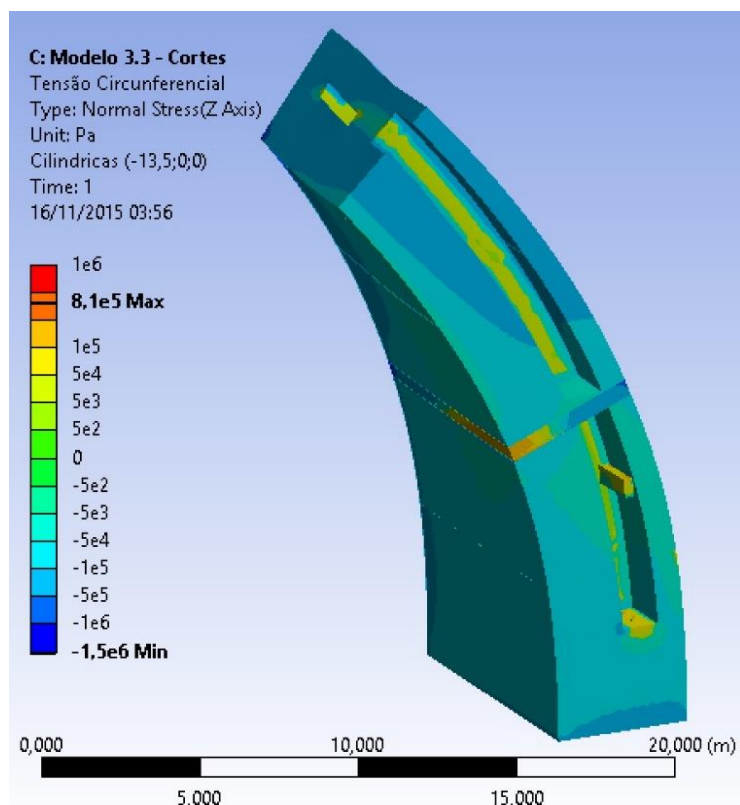
(fonte: ANSYS INC., 2015)

Figura 76 – Tensão Circunferencial – Corte 1 – Etapa 3



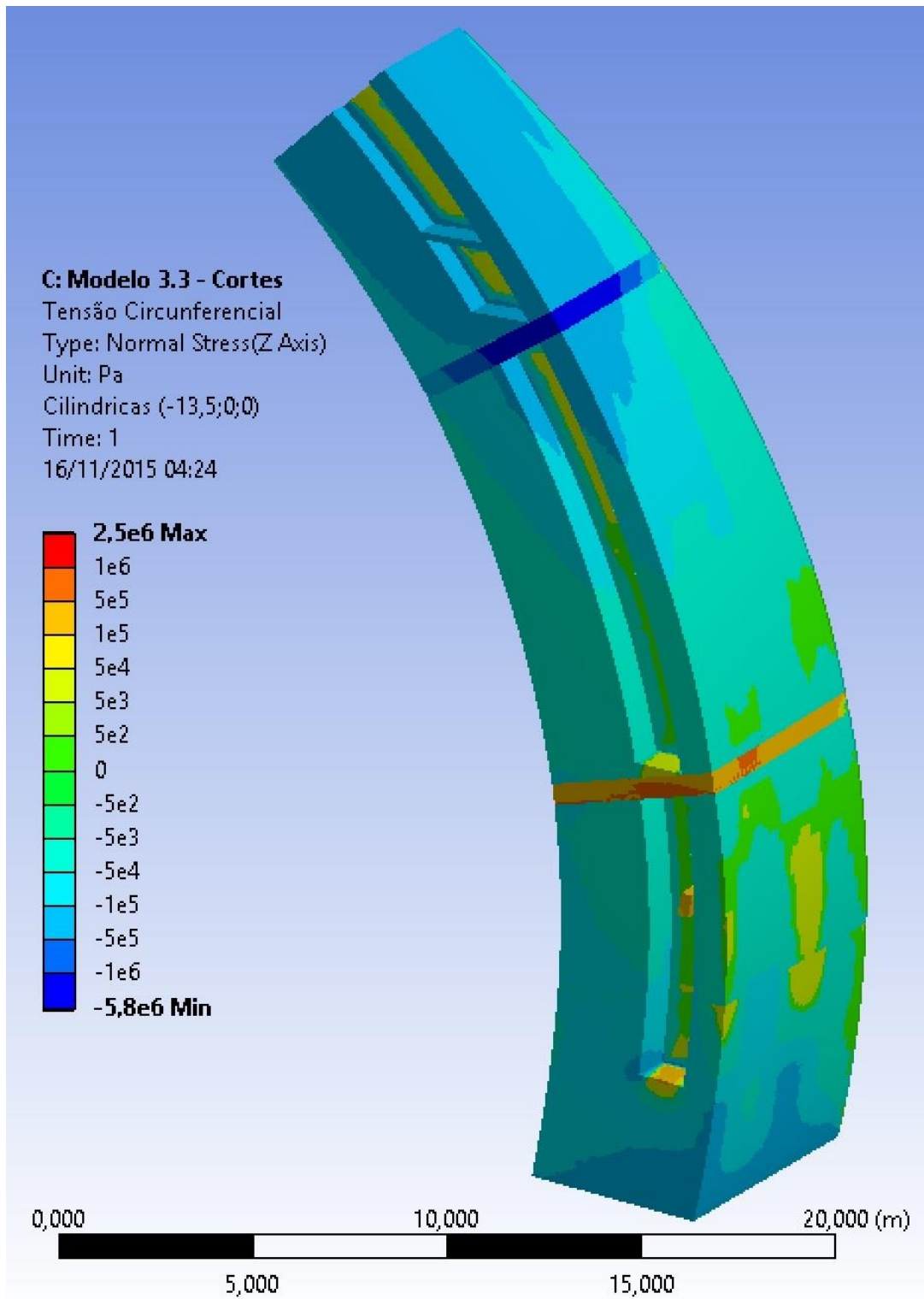
(fonte: ANSYS INC., 2015)

Figura 77 – Tensão Circunferencial – Corte 1 – Etapa 4



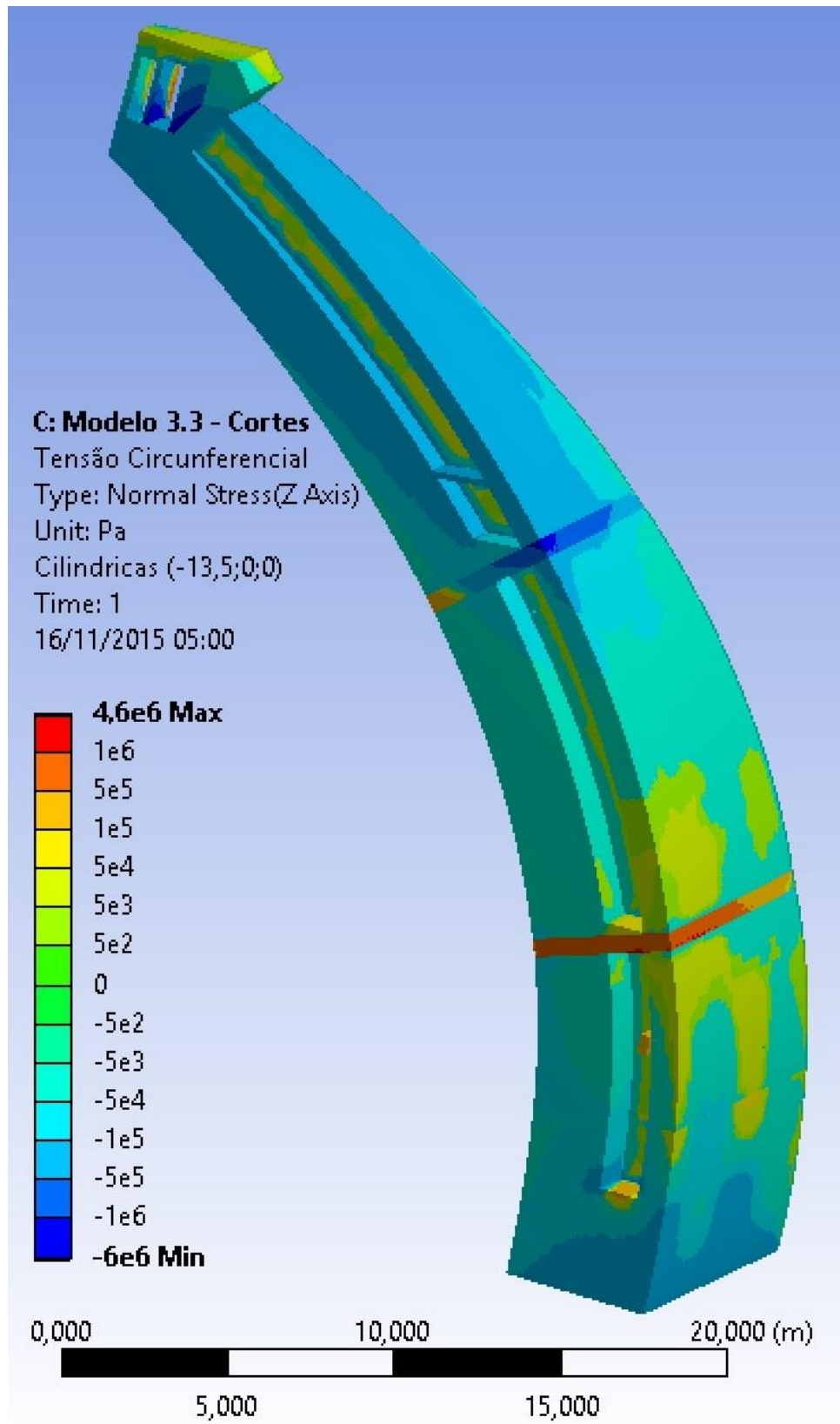
(fonte: ANSYS INC., 2015)

Figura 78 – Tensão Circunferencial – Corte 1 – Etapa 5



(fonte: ANSYS INC., 2015)

Figura 79 – Tensão Circunferencial – Corte 1 – Etapa 6



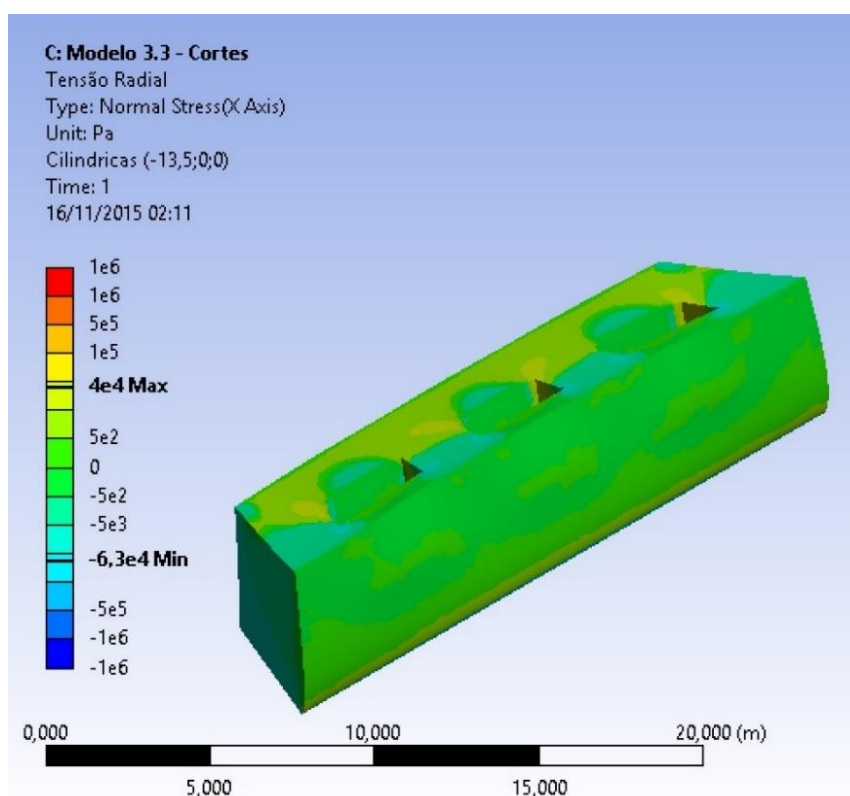
(fonte: ANSYS INC., 2015)

6.4.4 Tensões Radiais

Para tensões radiais, é possível ver que os valores de compressão estão dentro do limite de suporte dos materiais. O maior valor encontrado é de quase 5×10^6 Pa, que ocorre na região da base da lanterna, feita em arenito, que suporta tais esforços facilmente. Valores nas alvenarias não ultrapassam os 3×10^6 Pa na compressão.

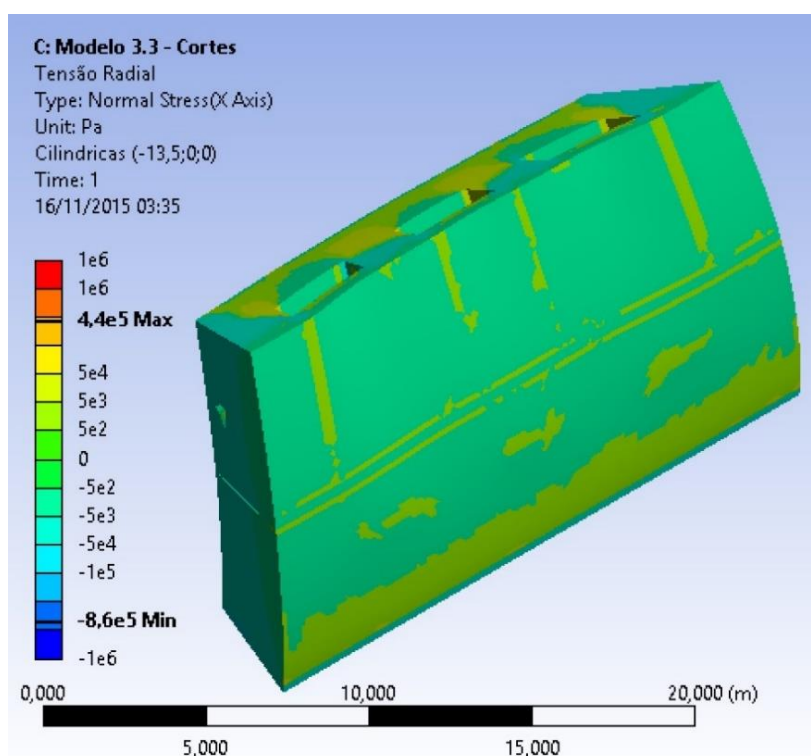
Para tração, é possível notar valores elevados, não na superfície interna ou externa da cúpula, mas nas interfaces internas, como no piso do 1º nível de passagem, ou nas laterais das nervuras, seja elas de centro ou de canto. É possível visualizar nas figuras 89 e 90, em marrom, que ocorrem tensões maiores que $0,1 \times 10^6$ Pa. Nota-se que, depois que ocorre o fechamento vertical das cascas, seja no 3º ou 4º nível, essas tensões nas superfícies laterais das nervuras são reduzidas. Entretanto, no piso do 1º nível de passagem as tensões aumentam, e chegam em valores próximos a $0,5 \times 10^6$ Pa.

Figura 80 – Tensão Radial – Etapa 1



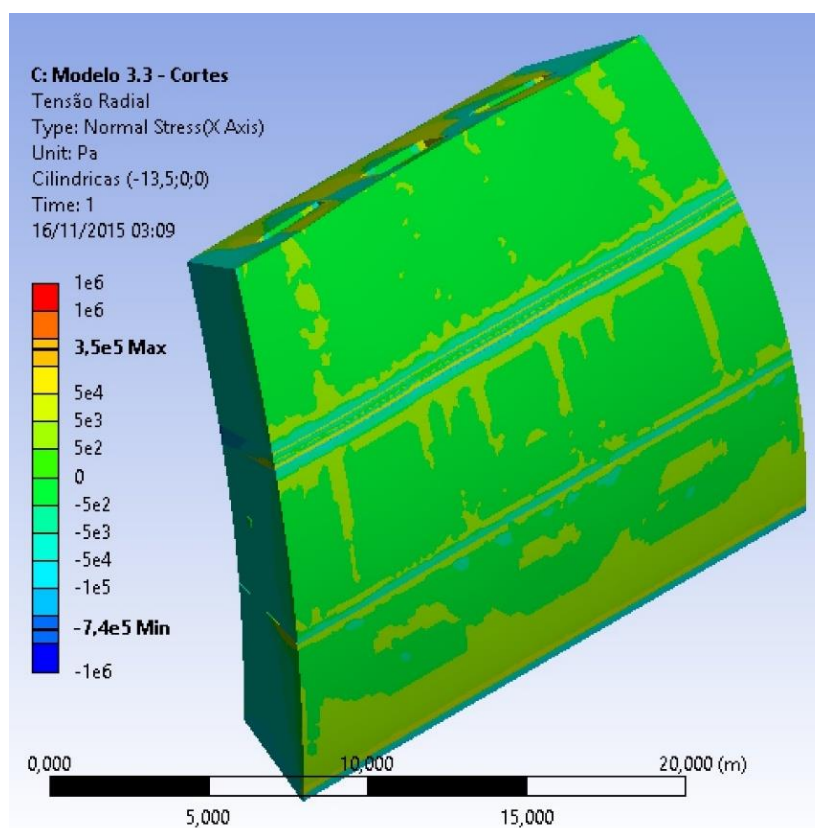
(fonte: ANSYS INC., 2015)

Figura 81 – Tensão Radial – Etapa 2



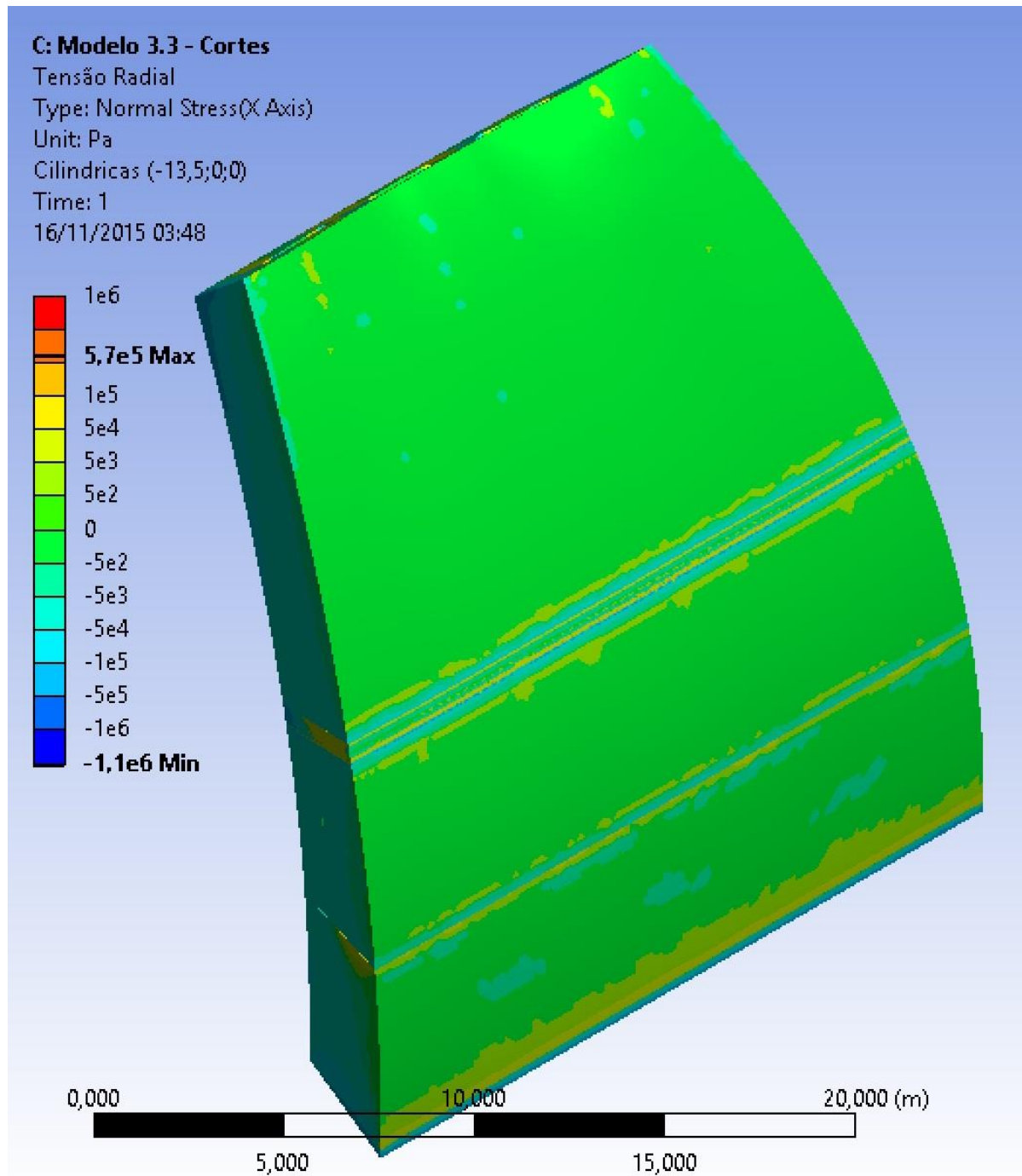
(fonte: ANSYS INC., 2015)

Figura 82 – Tensão Radial – Etapa 3



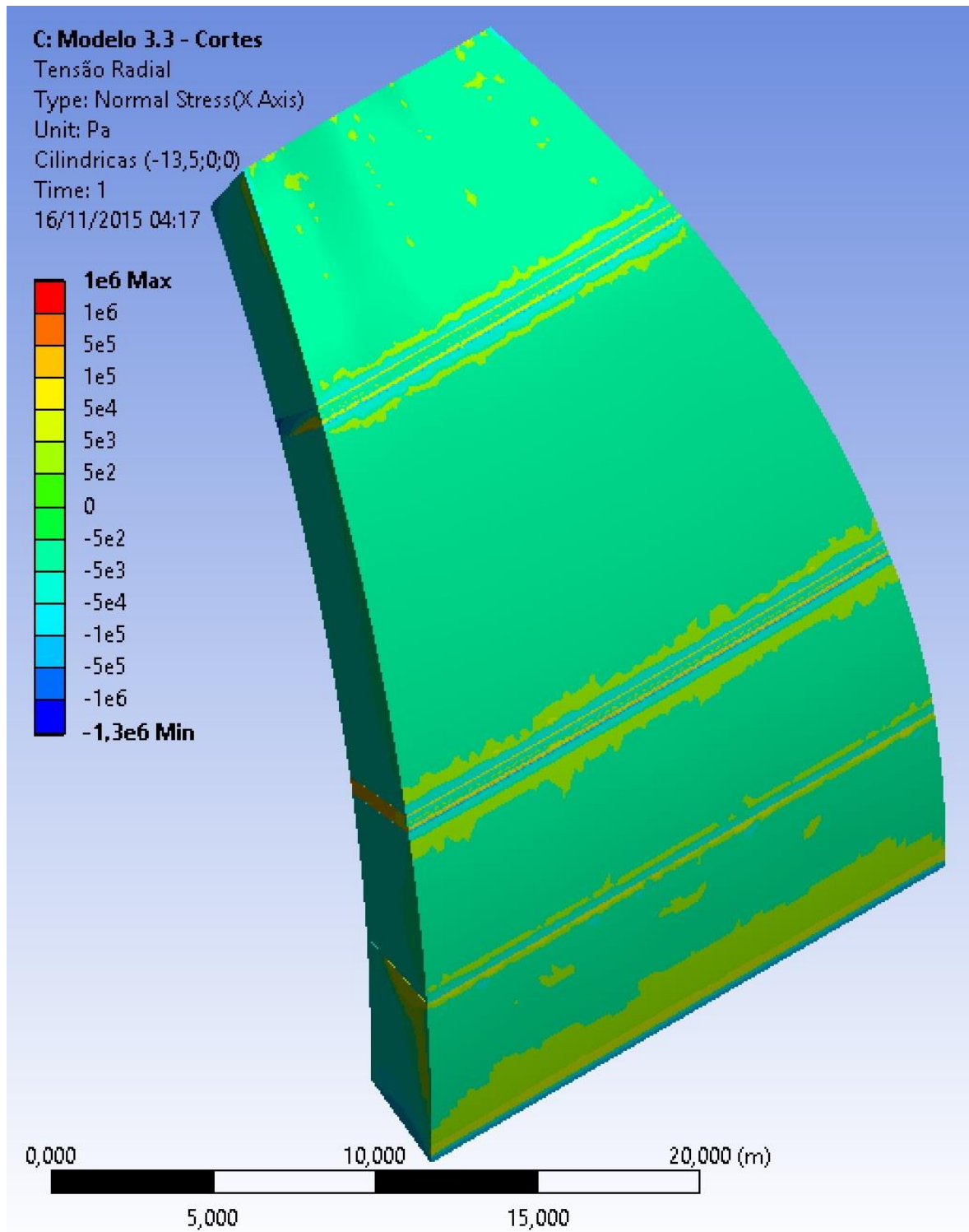
(fonte: ANSYS INC., 2015)

Figura 83 – Tensão Radial – Etapa 4



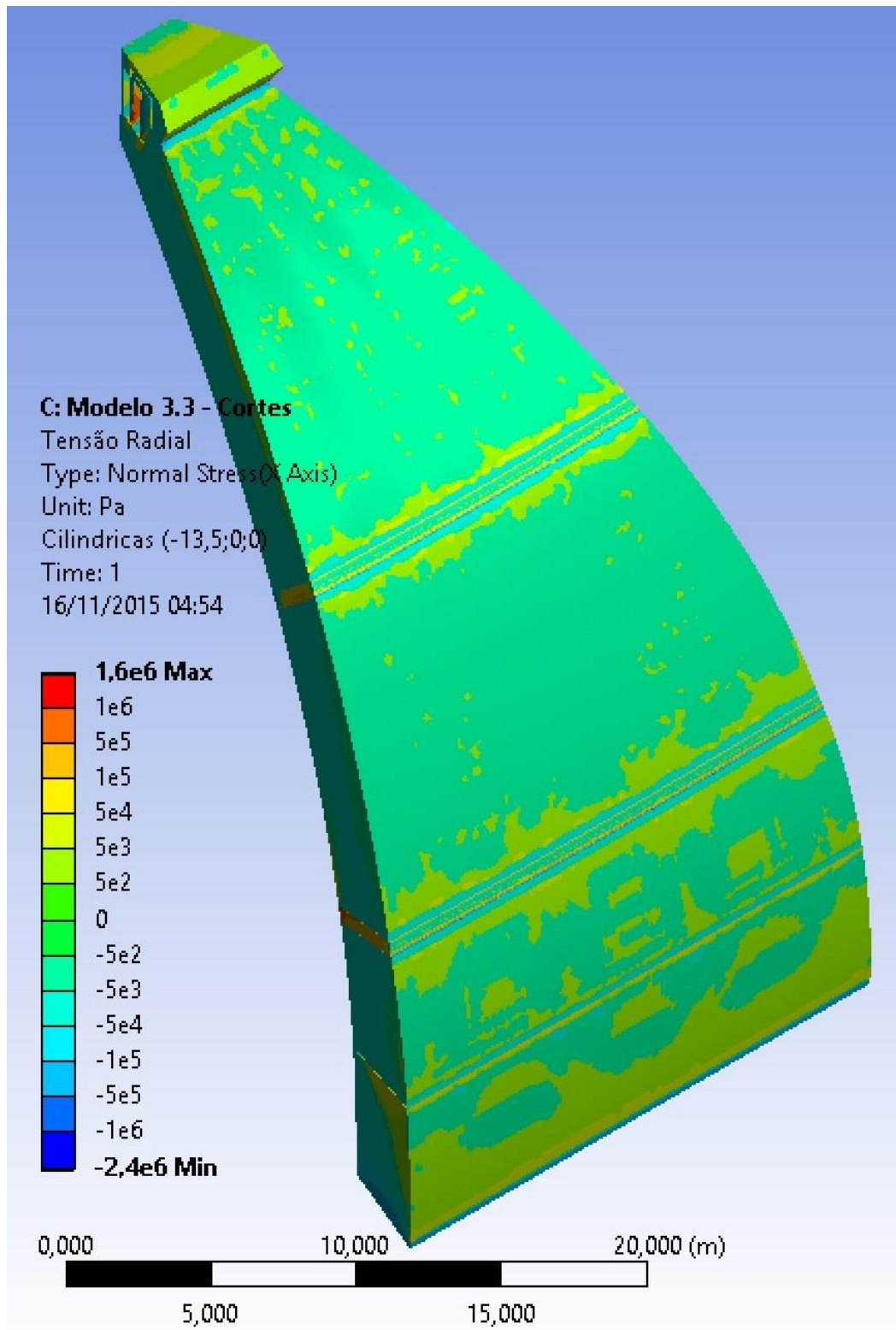
(fonte: ANSYS INC., 2015)

Figura 84 – Tensão Radial – Etapa 5



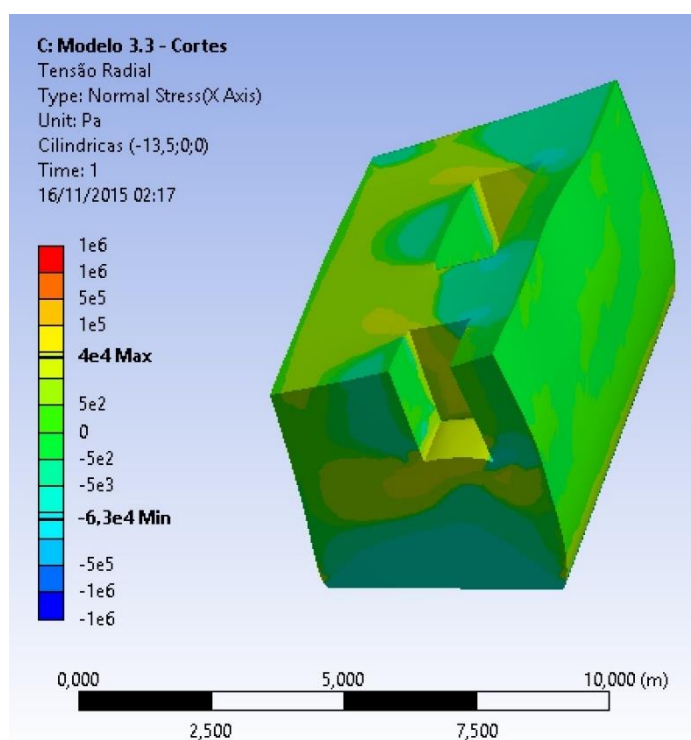
(fonte: ANSYS INC., 2015)

Figura 85 – Tensão Radial – Etapa 6



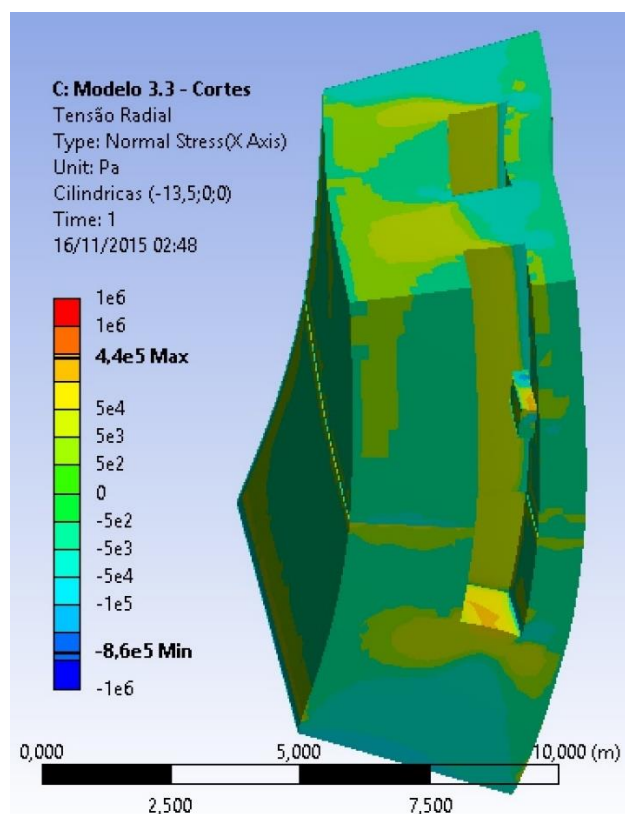
(fonte: ANSYS INC., 2015)

Figura 86 – Tensão Radial – Corte 1 – Etapa 1



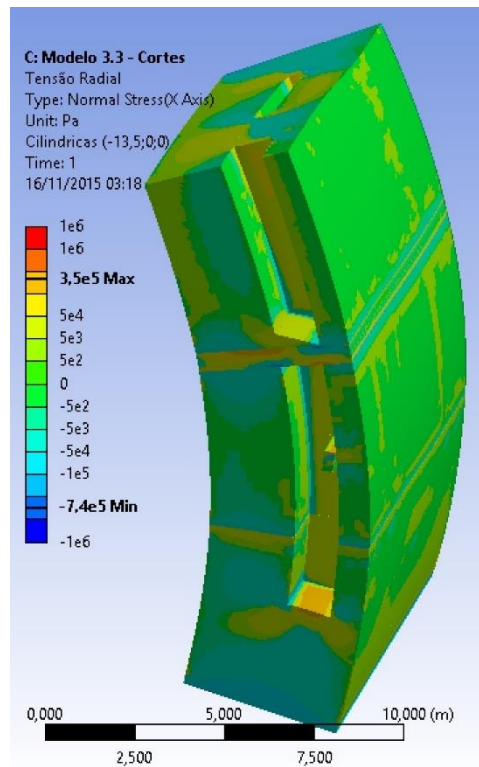
(fonte: ANSYS INC., 2015)

Figura 87 – Tensão Radial – Corte 1 – Etapa 2



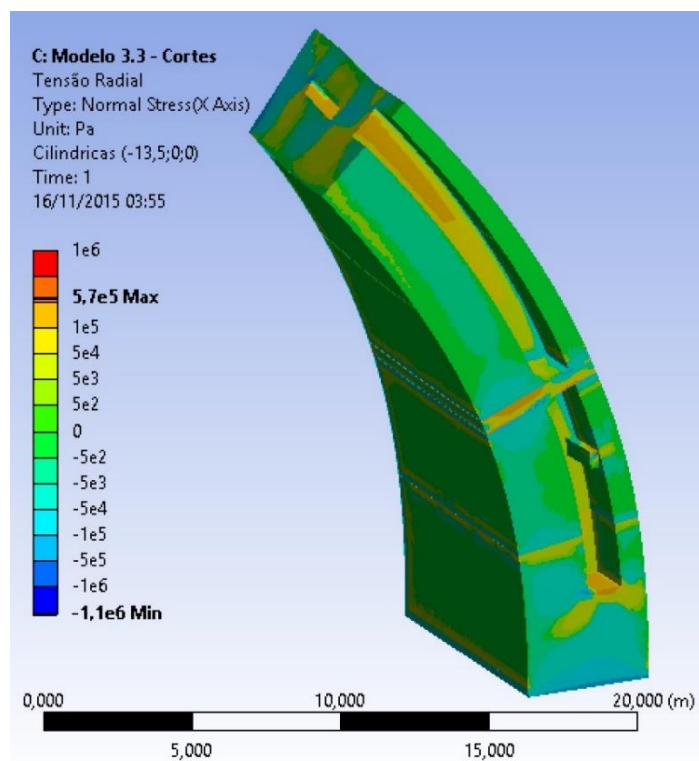
(fonte: ANSYS INC., 2015)

Figura 88 – Tensão Radial – Corte 1 – Etapa 3



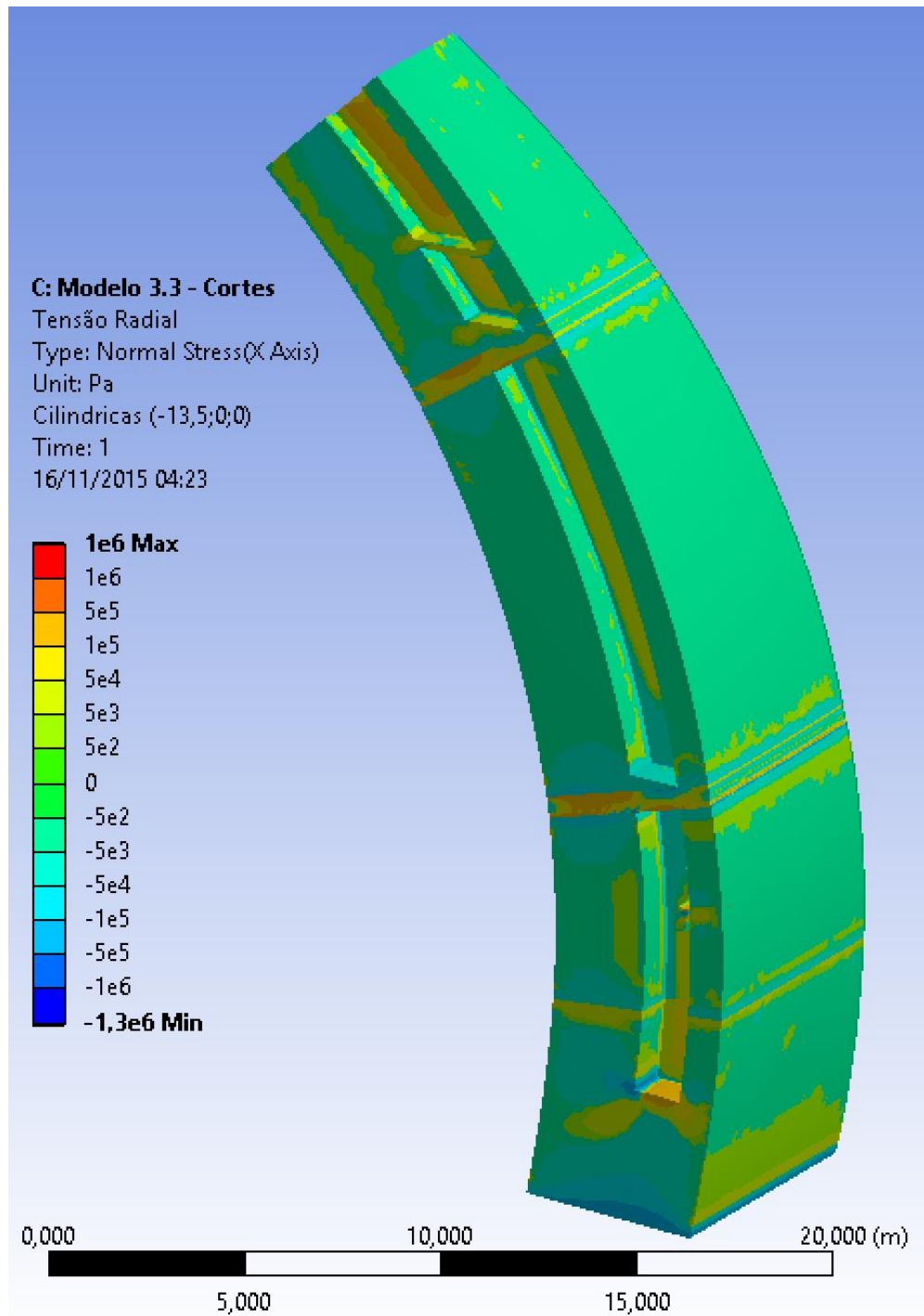
(fonte: ANSYS INC., 2015)

Figura 89 – Tensão Radial – Corte 1 – Etapa 4



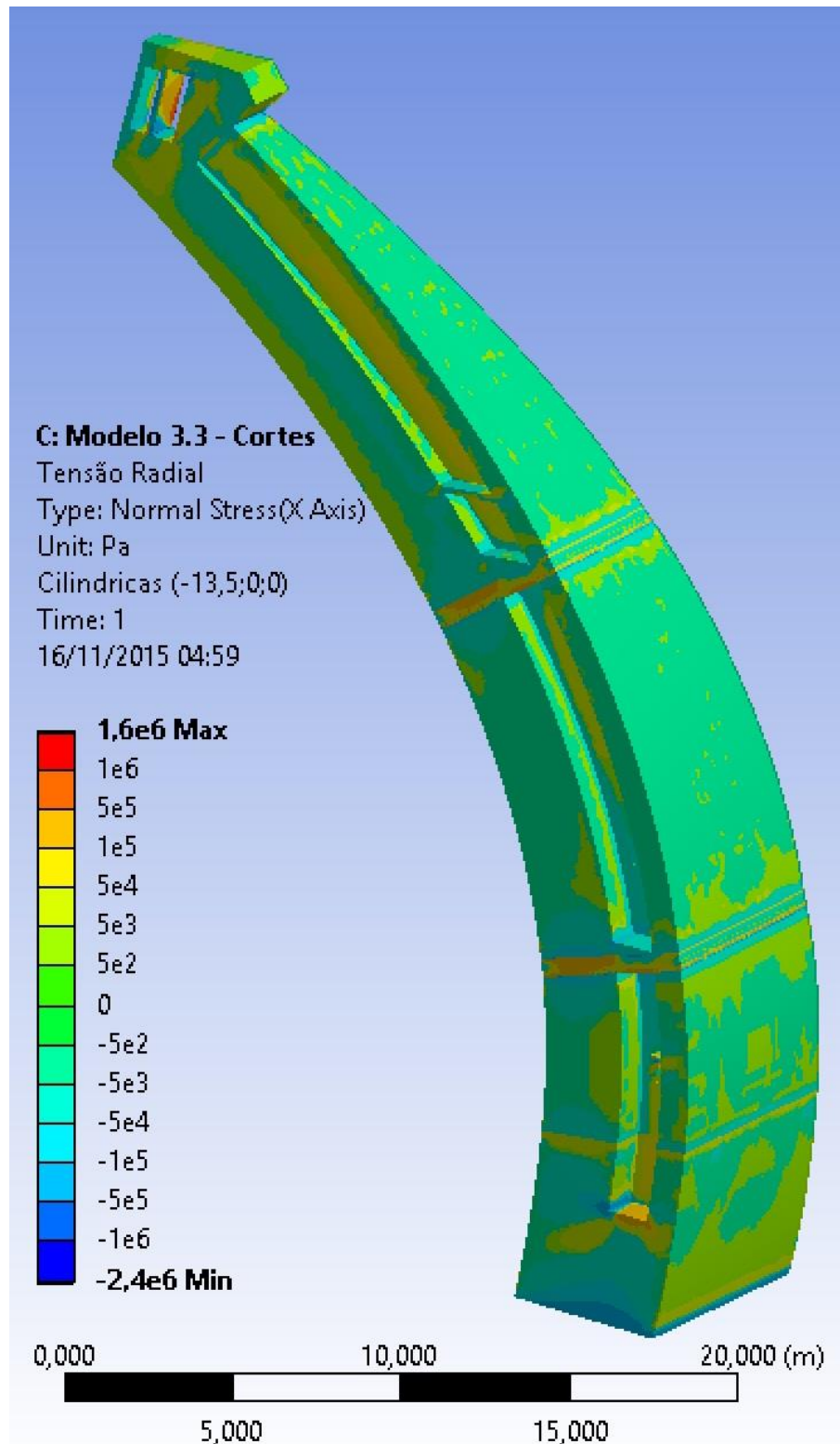
(fonte: ANSYS INC., 2015)

Figura 90 – Tensão Radial – Corte 1 – Etapa 5



(fonte: ANSYS INC., 2015)

Figura 91 – Tensão Radial – Corte 1 – Etapa 6



(fonte: ANSYS INC., 2015)

6.5 RESULTADOS DO MODELO 3 DESCONSIDERANDO O SEGUNDO ANEL DE ARENITO SOB O NÍVEL 3

Nessa etapa, analisaremos o comportamento estrutural das cascas considerando a inexistência do anel de arenito sob o terceiro nível de passagem, visto que é possível que o mesmo não exista. Os resultados exibidos seguem os modelos previamente apresentados, e serão comparados com os obtidos no item 6.3 para a estrutura completa.

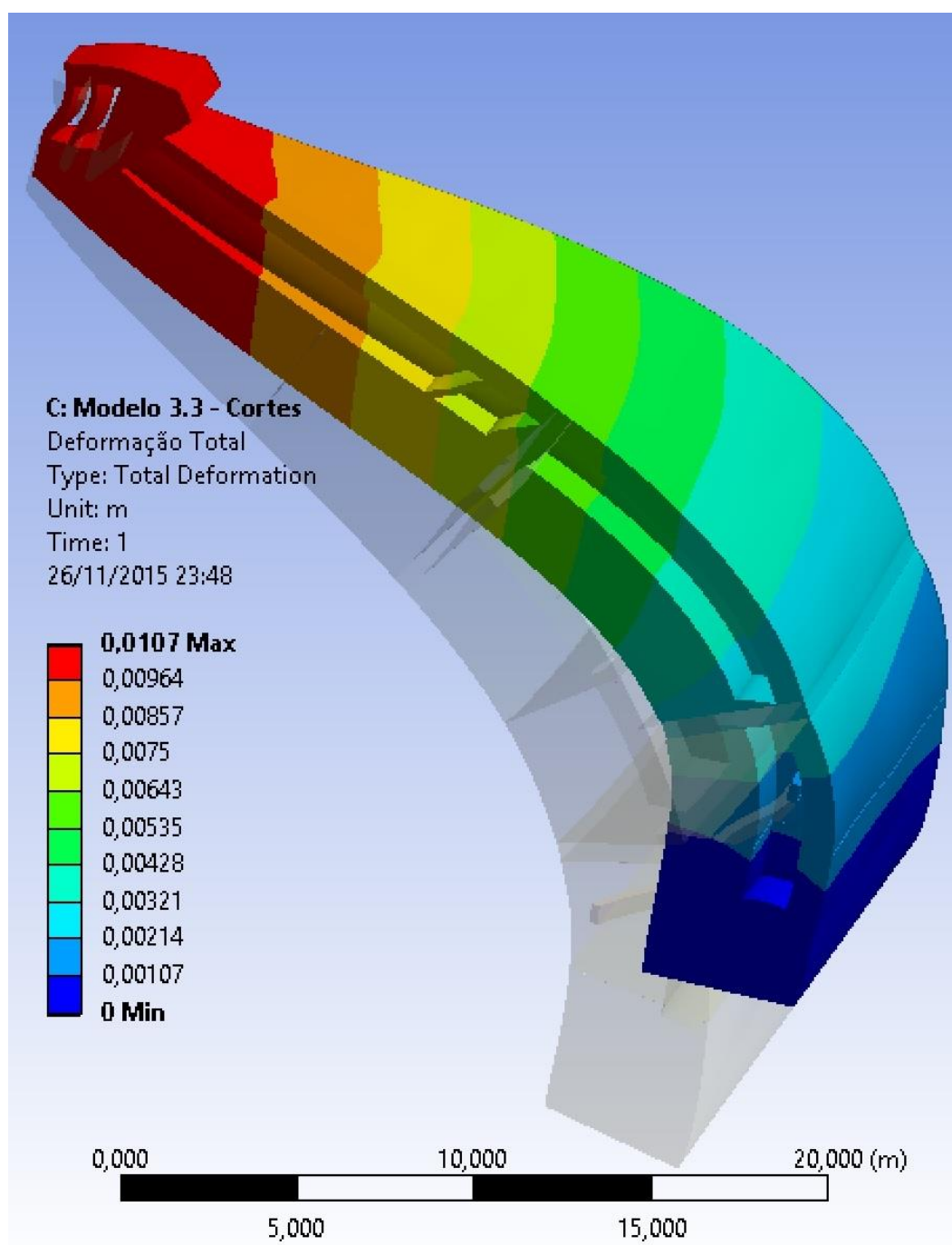
Da comparação entre as distribuições de tensões obtidas e as mostradas no item 6.3 é possível verificar que, caso possua ou não uma corrente de arenito, os elementos das cascas não sofrem grande alteração nas tensões atuantes, sendo que nenhum caso de tração elevada é observado na região das cascas.

Dessa forma, podemos concluir que é praticamente indiferente para as cascas a existência ou não do suposto anel, visto que a alvenaria tem a capacidade de absorver os esforços que surgem devido a essa alteração em ambos os modelos.

6.5.1 Deslocamentos

Os deslocamentos obtidos são da mesma ordem de grandeza do modelo 3 original. Isso significa que a existência ou não do anel sob o nível 3 altera pouco nos deslocamentos causados na estrutura como um todo.

Figura 92 – Deformação Total – Modelo 3 sem 2º anel de arenito



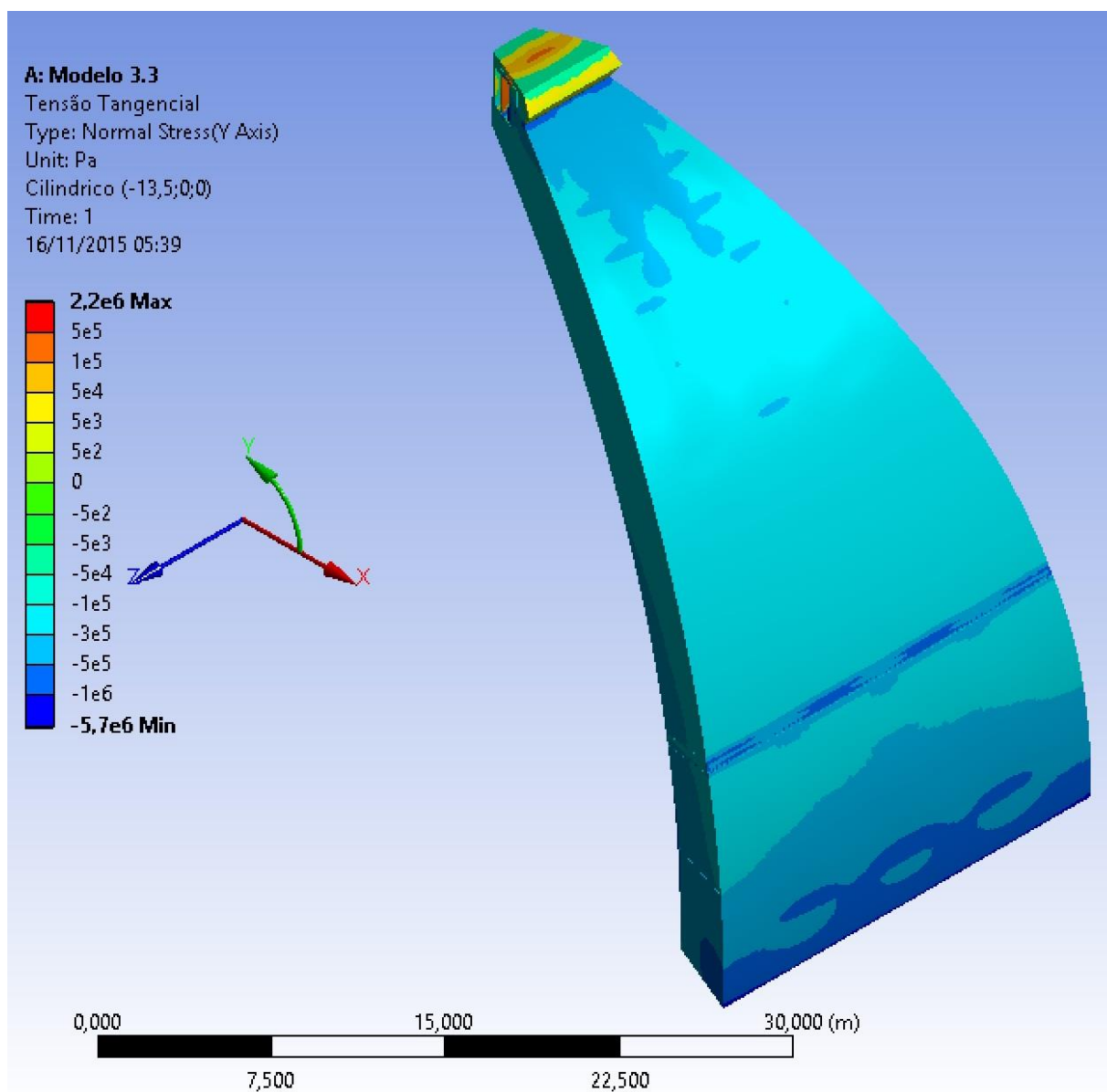
(fonte: ANSYS INC., 2015)

6.3.2 Tensões Tangenciais

As tensões tangenciais não sofrem, aparentemente, nenhuma mudança, exceto aos valores de tensões existentes no próprio anel. Os valores máximos e mínimos do modelo não são alterados, sendo esse um dos indicadores de pouca mudança.

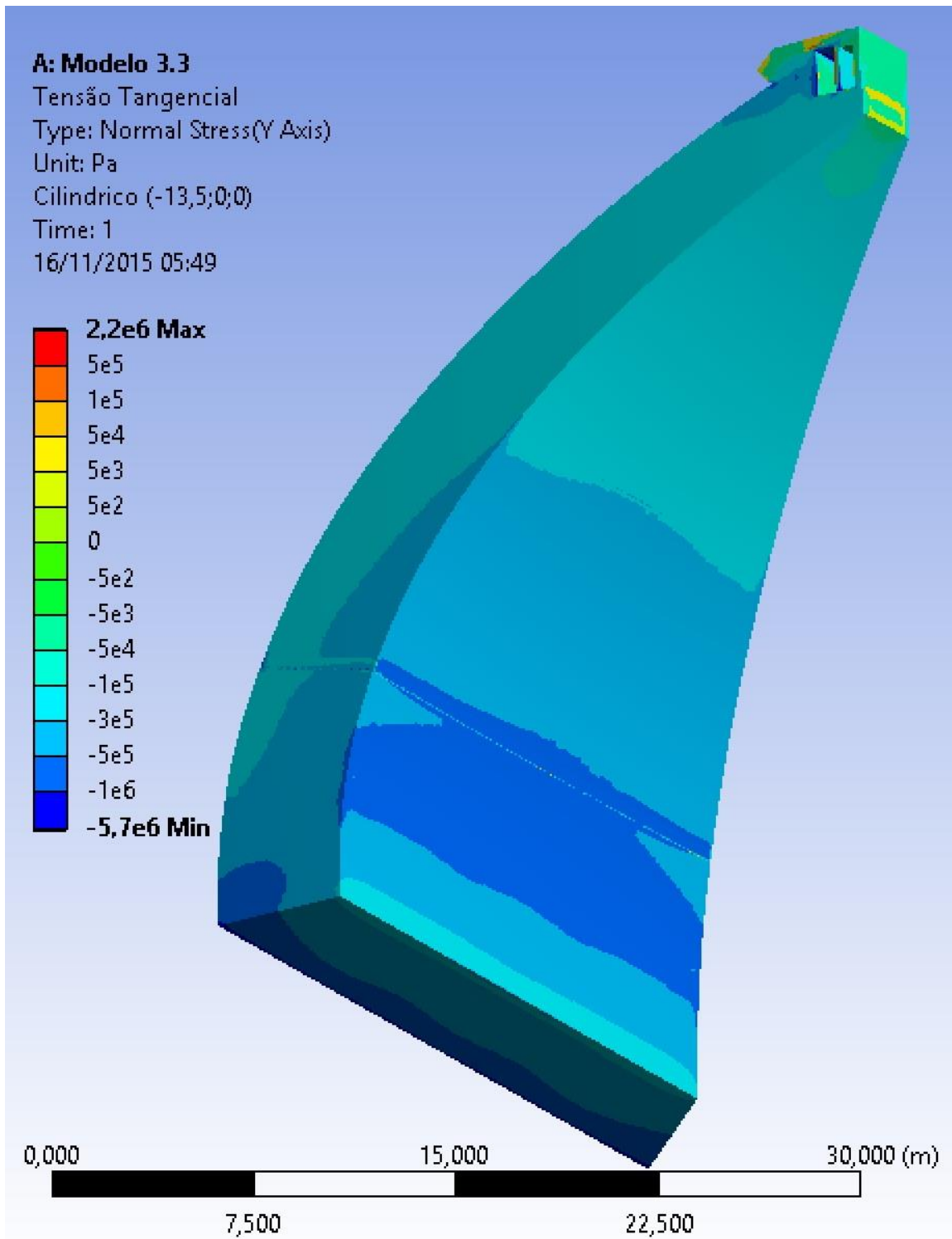
O único diferencial visual entre os modelos são valores de tensões um pouco mais elevados no anel, maiores de $0,5 \times 10^6$ Pa ou até próximos de 1×10^6 Pa, enquanto no modelo sem o anel os valores permanecem menores que $0,5 \times 10^6$ Pa.

Figura 93 – Tensão Tangencial – Modelo 3 sem 2º anel de arenito



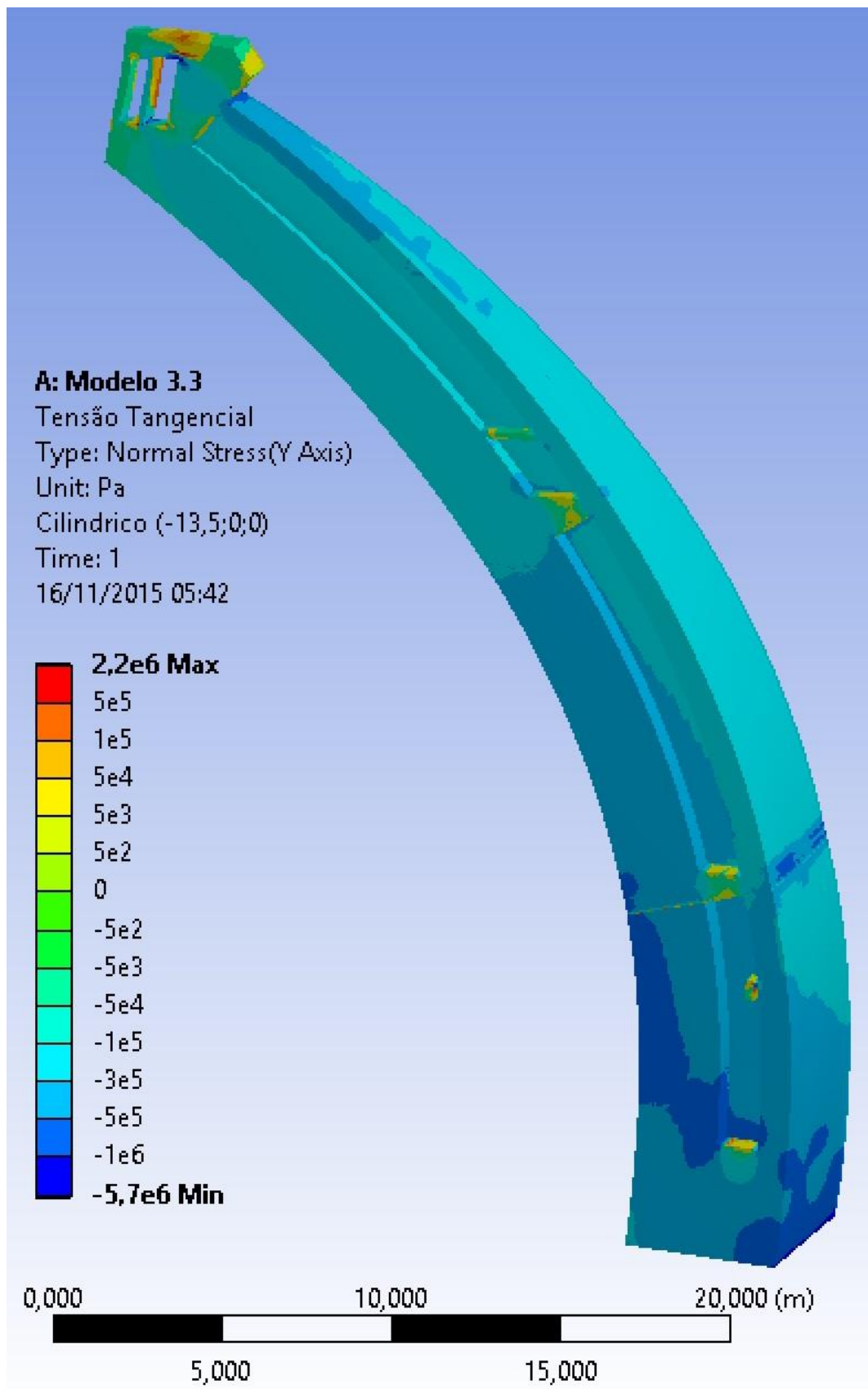
(fonte: ANSYS INC., 2015)

Figura 94 – Tensão Tangencial 2 – Modelo 3 sem 2º anel de arenito



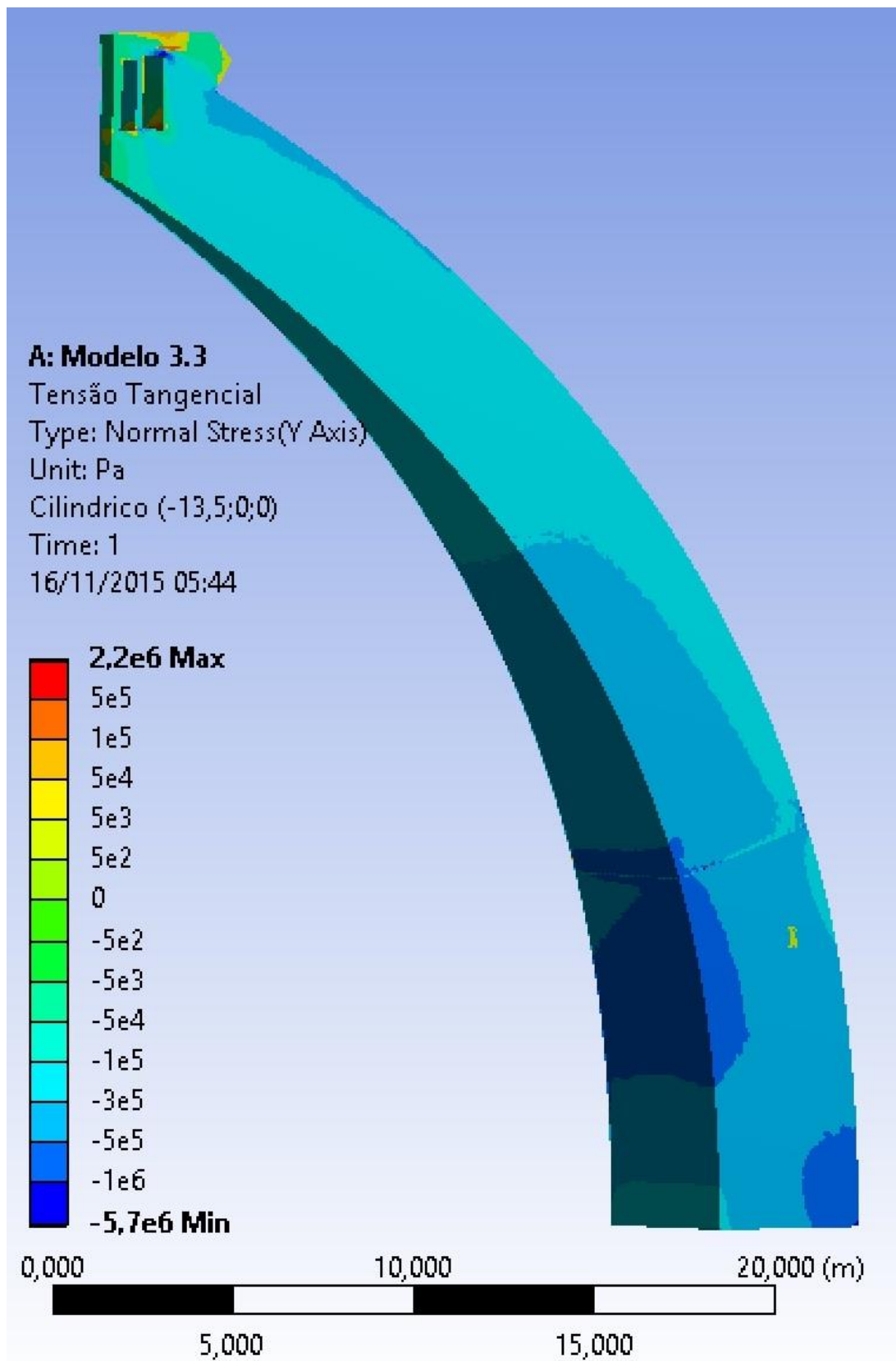
(fonte: ANSYS INC., 2015)

Figura 95 – Tensão Tangencial – Corte 1 – Modelo 3 sem 2º anel de arenito



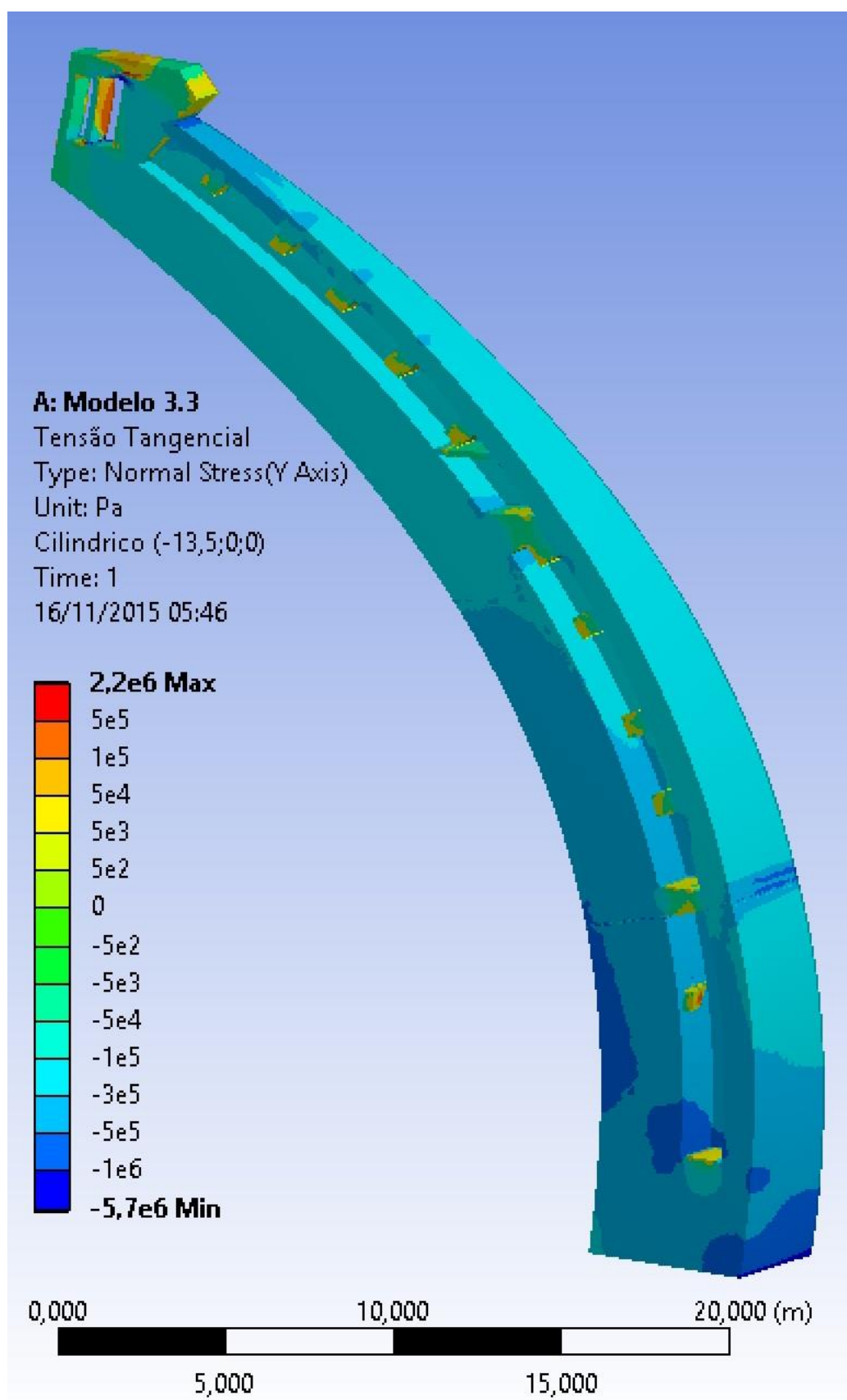
(fonte: ANSYS INC., 2015)

Figura 96 – Tensão Tangencial – Corte 2 – Modelo 3 sem 2º anel de arenito



(fonte: ANSYS INC., 2015)

Figura 97 – Tensão Tangencial – Corte 3 – Modelo 3 sem 2º anel de arenito

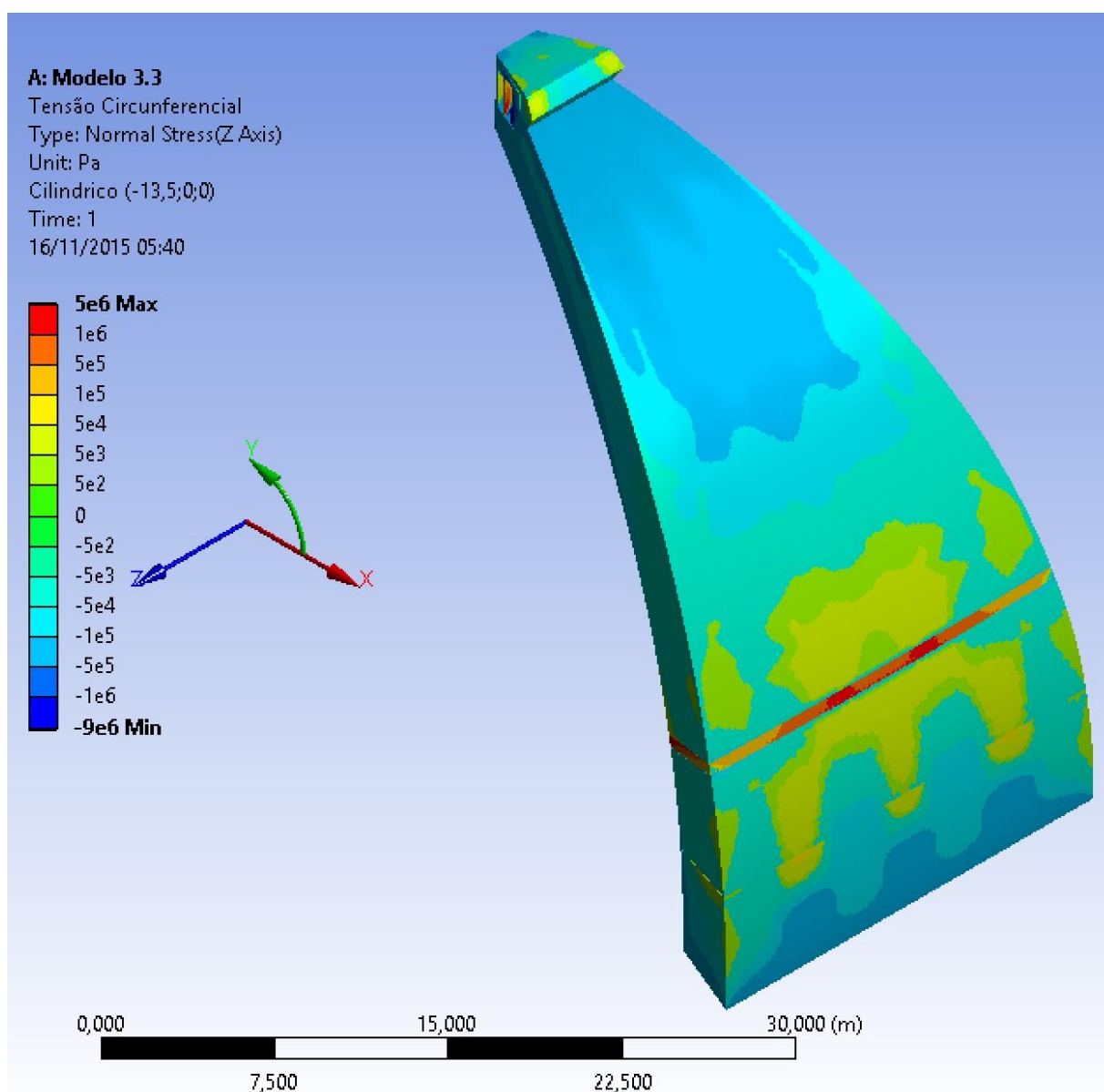


(fonte: ANSYS INC., 2015)

6.5.3 Tensões Circunferenciais

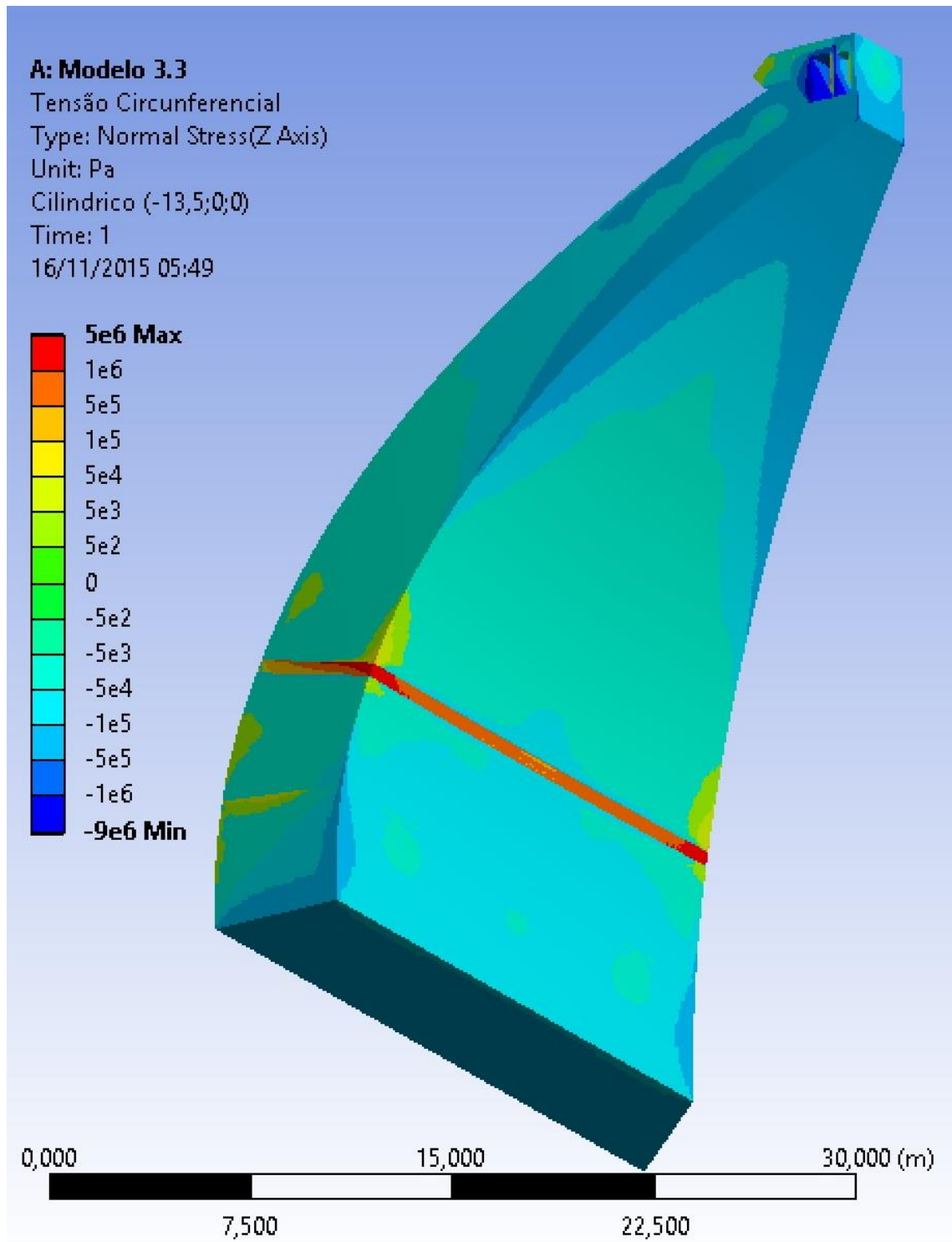
Tem-se para as cascas praticamente os mesmos valores de tensões circunferenciais obtidas com a simulação do mesmo modelo com o anel. Externamente inclusive os formatos de distribuições são muito próximos, sendo diferenças para esse modelo a ligeira diminuição dos esforços de tração próximos ao anel do 2º nível de passagem, sendo que a própria tensão no anel diminuiu de $5,2 \times 10^6$ Pa para 5×10^6 Pa.

Figura 98 – Tensão Circunferencial – Modelo 3 sem 2º anel de arenito



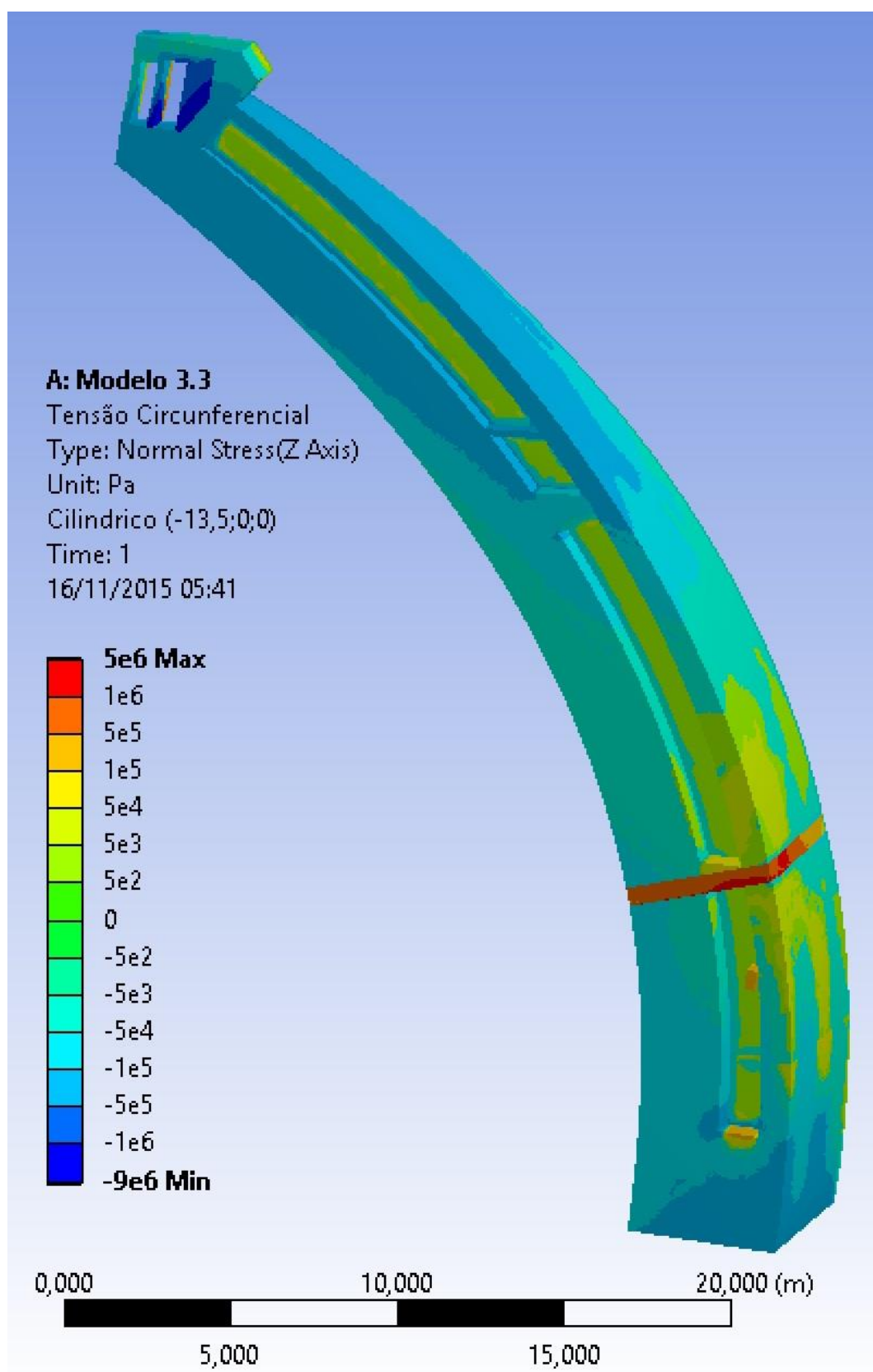
(fonte: ANSYS INC., 2015)

Figura 99 – Tensão Circunferencial 2 – Modelo 3 sem 2º anel de arenito



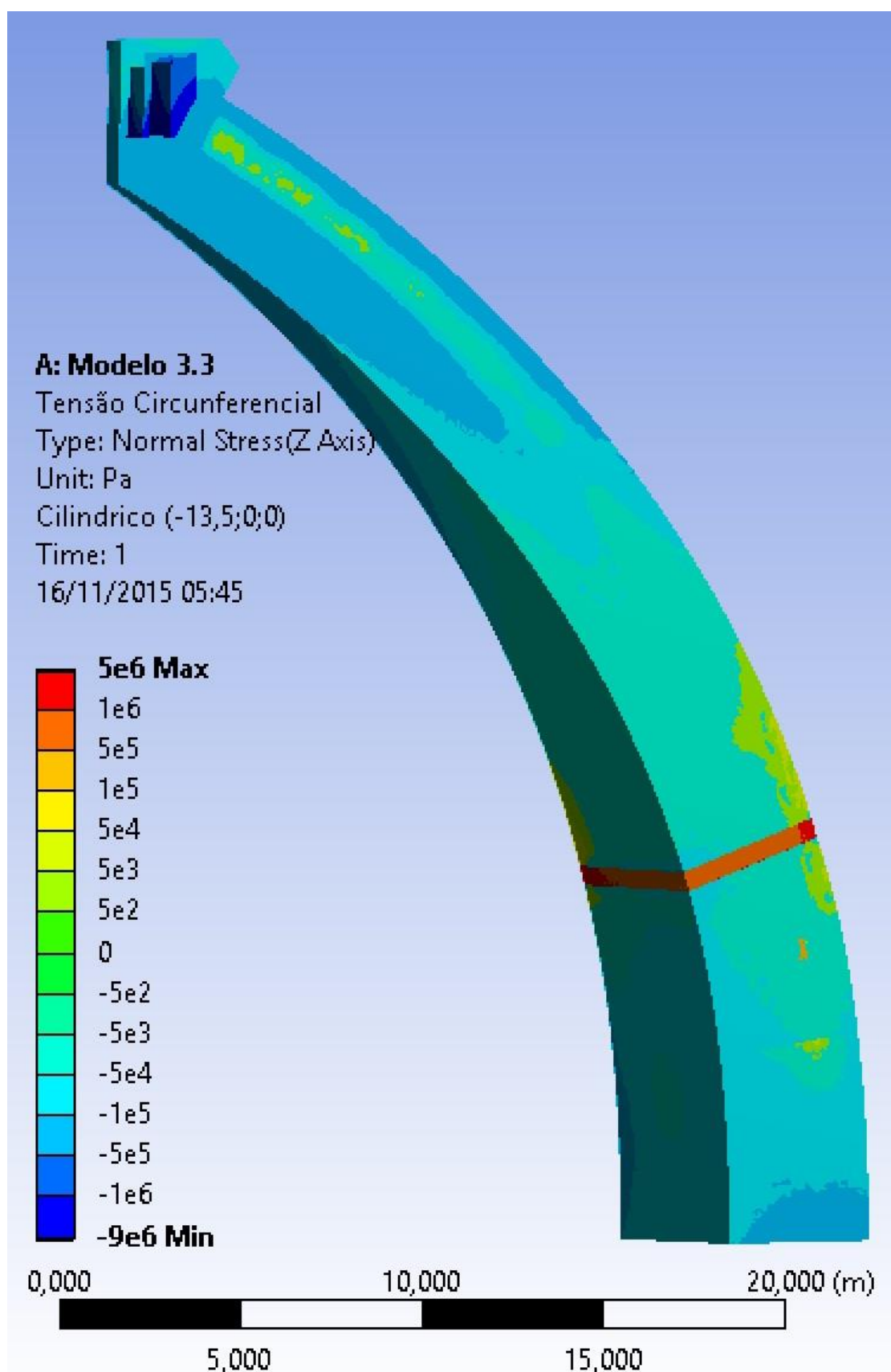
(fonte: ANSYS INC., 2015)

Figura 100 – Tensão Circunferencial – Corte 1 – Modelo 3 sem 2º anel de arenito



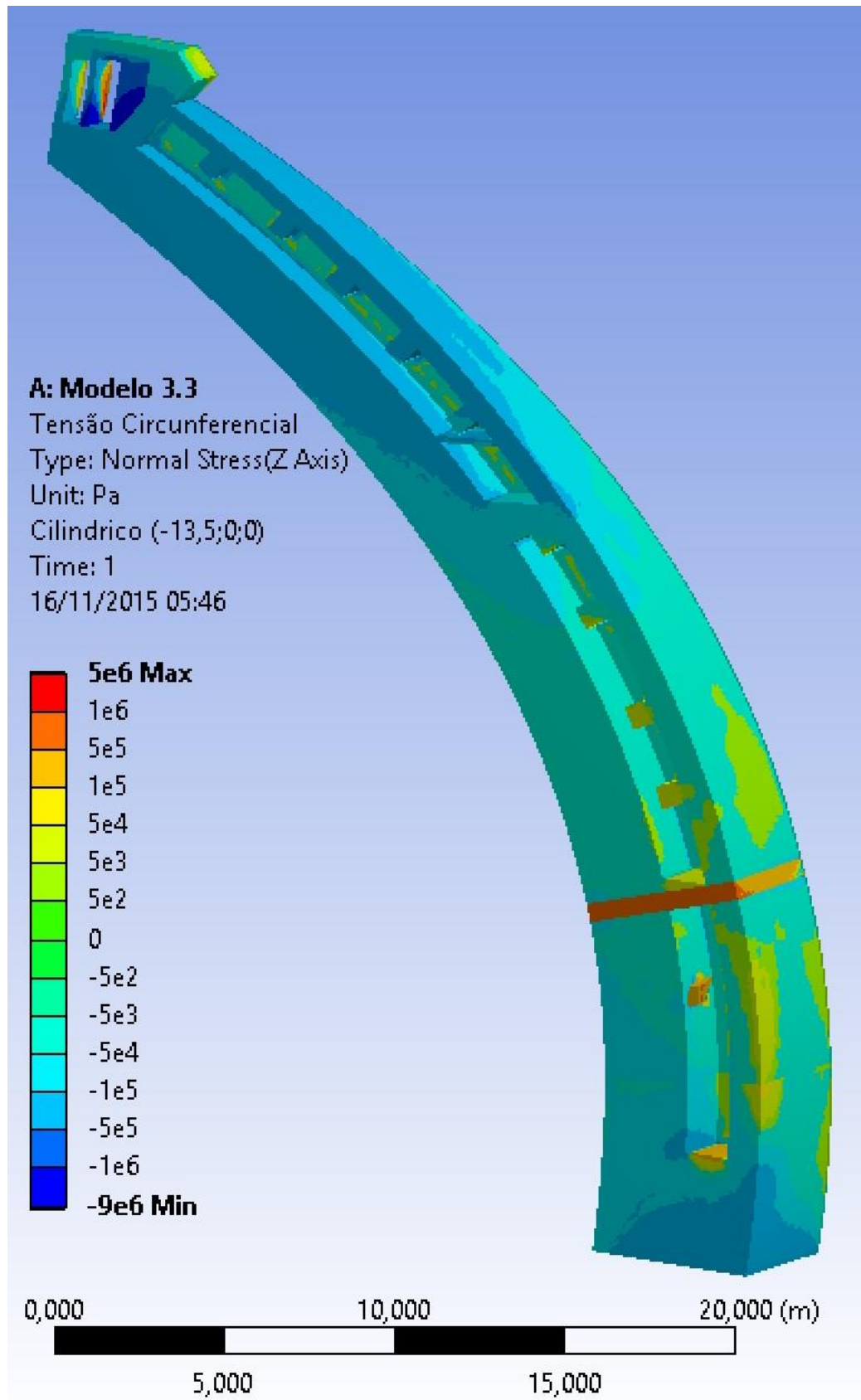
(fonte: ANSYS INC., 2015)

Figura 101 – Tensão Circunferencial – Corte 2 – Modelo 3 sem 2º anel de arenito



(fonte: ANSYS INC., 2015)

Figura 102 – Tensão Circunferencial – Corte 3 – Modelo 3 sem 2º anel de arenito

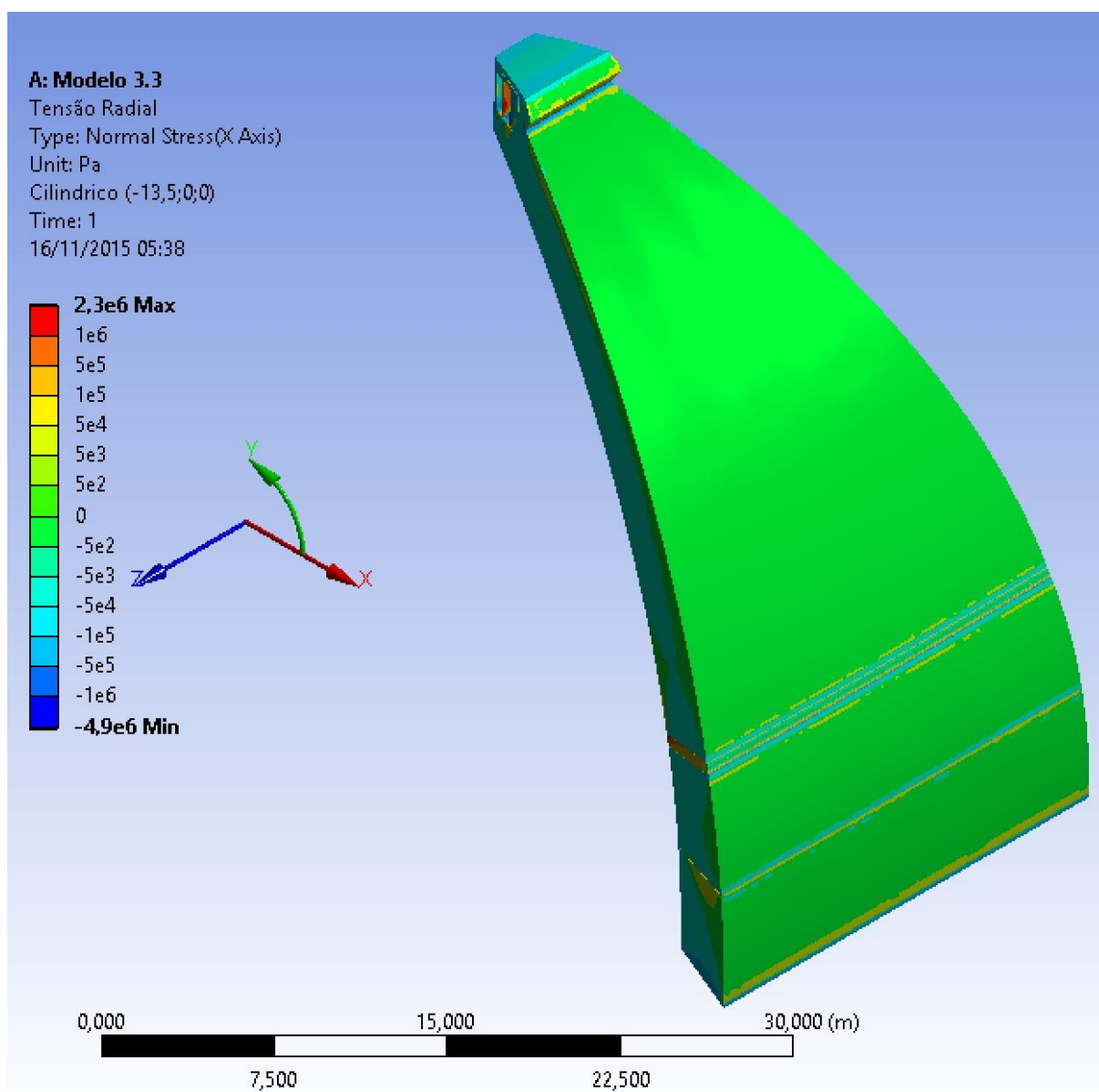


(fonte: ANSYS INC., 2015)

6.5.4 Tensões Radiais

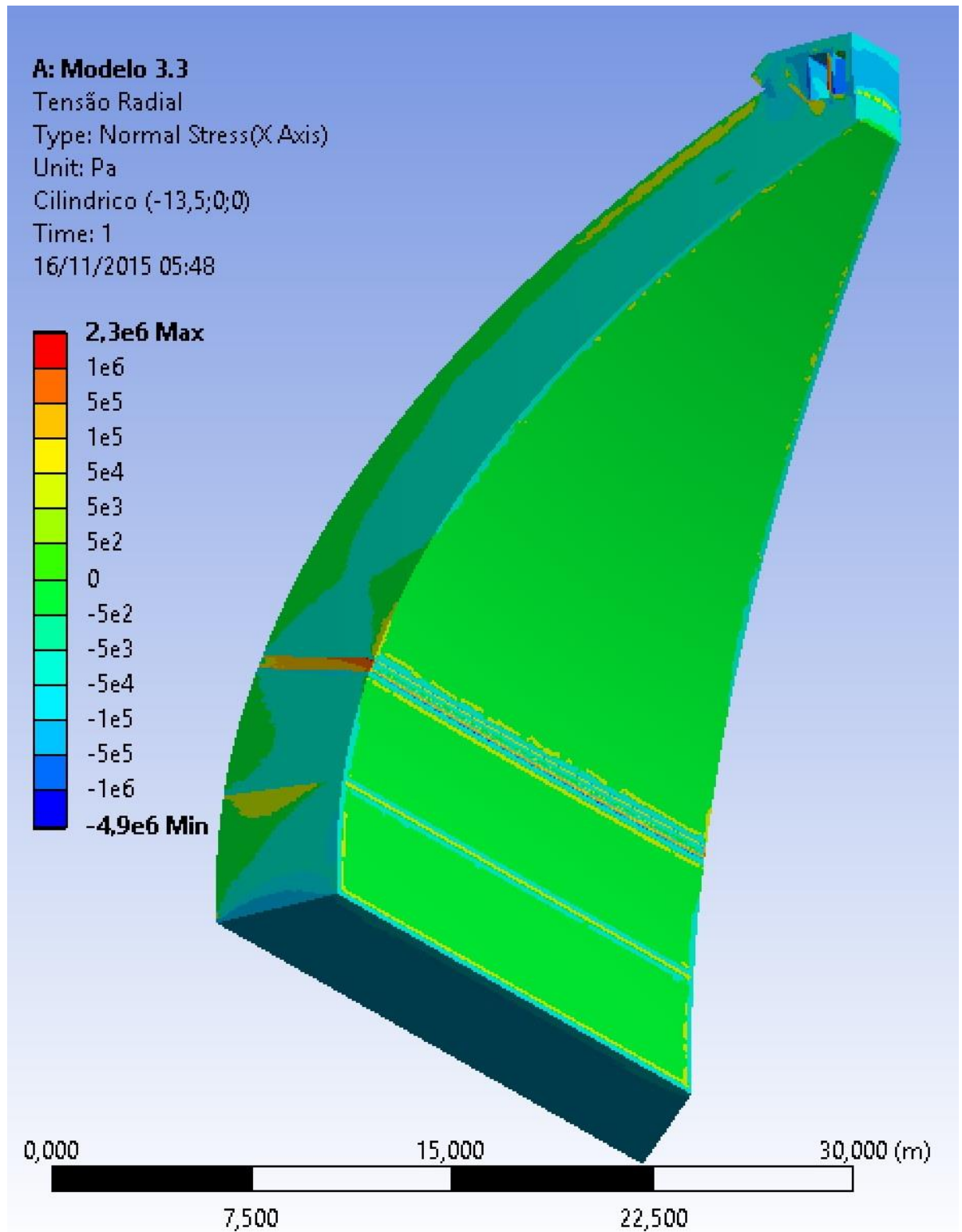
Para a tensão radial é possível visualizar um aumento em extensão na tensão de tração no corte 2, porém os valores são de, no máximo, 5×10^4 Pa.

Figura 103 – Tensão Radial – Modelo 3 sem 2º anel de arenito



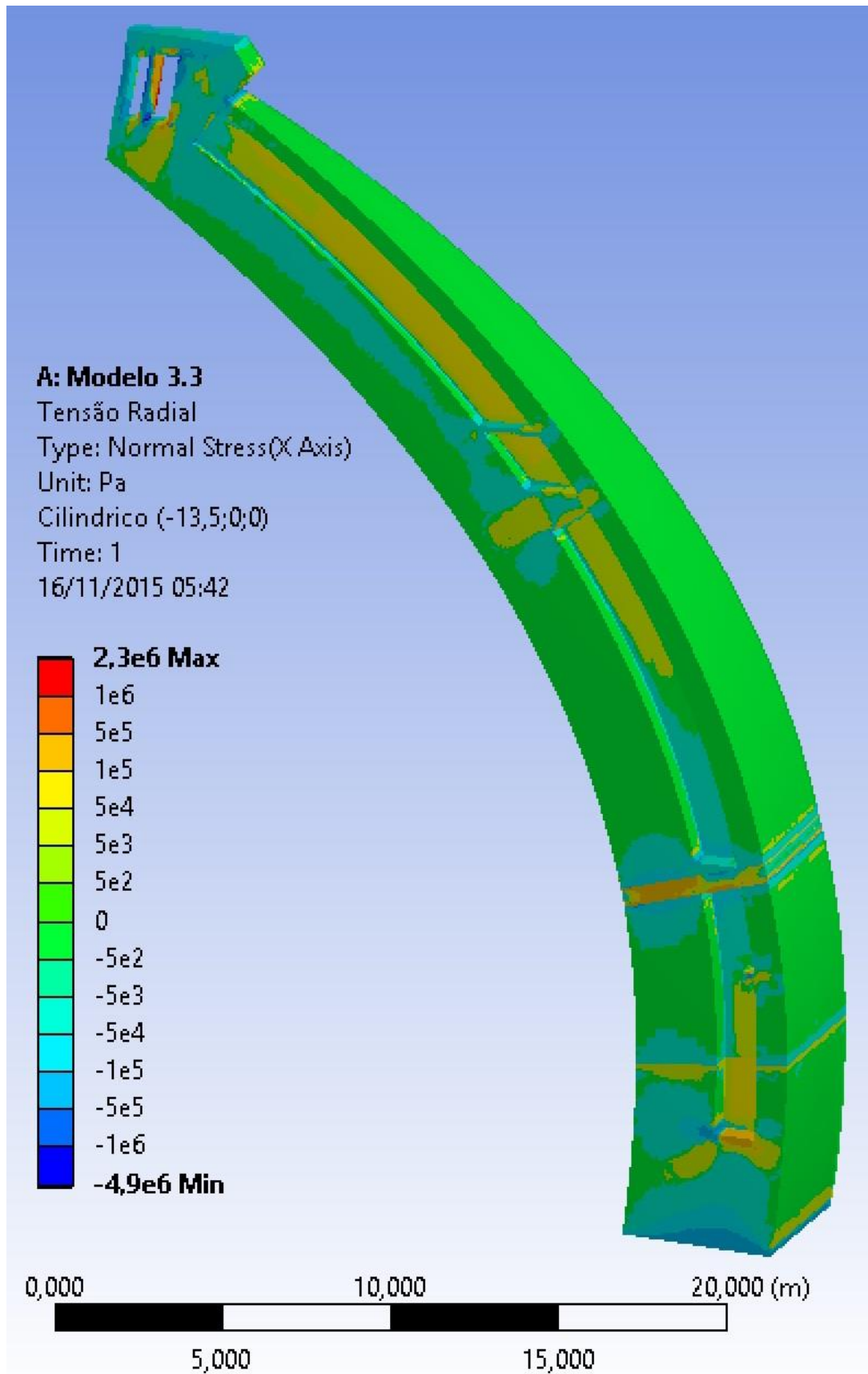
(fonte: ANSYS INC., 2015)

Figura 104 – Tensão Radial 2 – Modelo 3 sem 2º anel de arenito



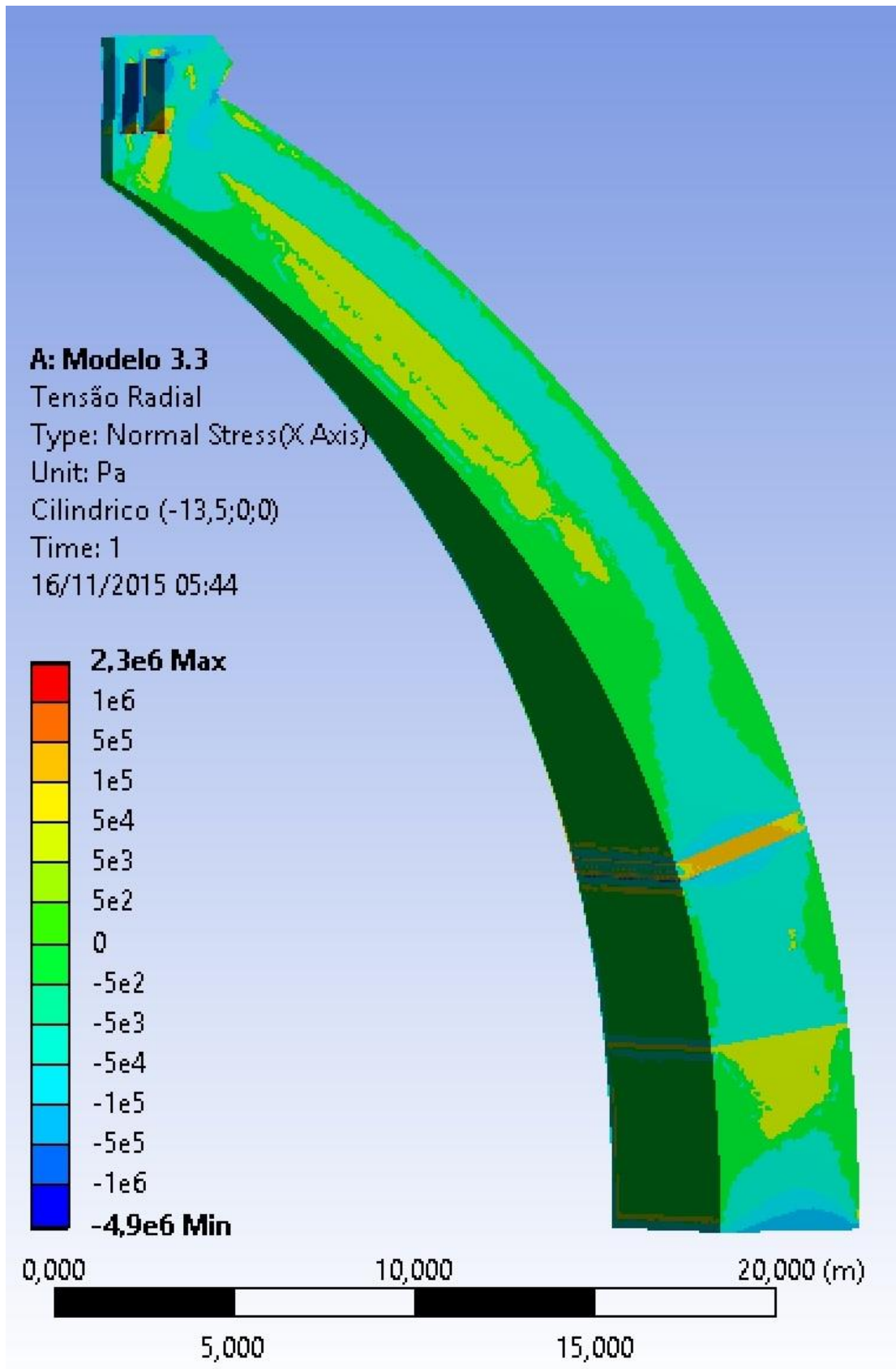
(fonte: ANSYS INC., 2015)

Figura 105 – Tensão Radial – Corte 1 – Modelo 3 sem 2º anel de arenito



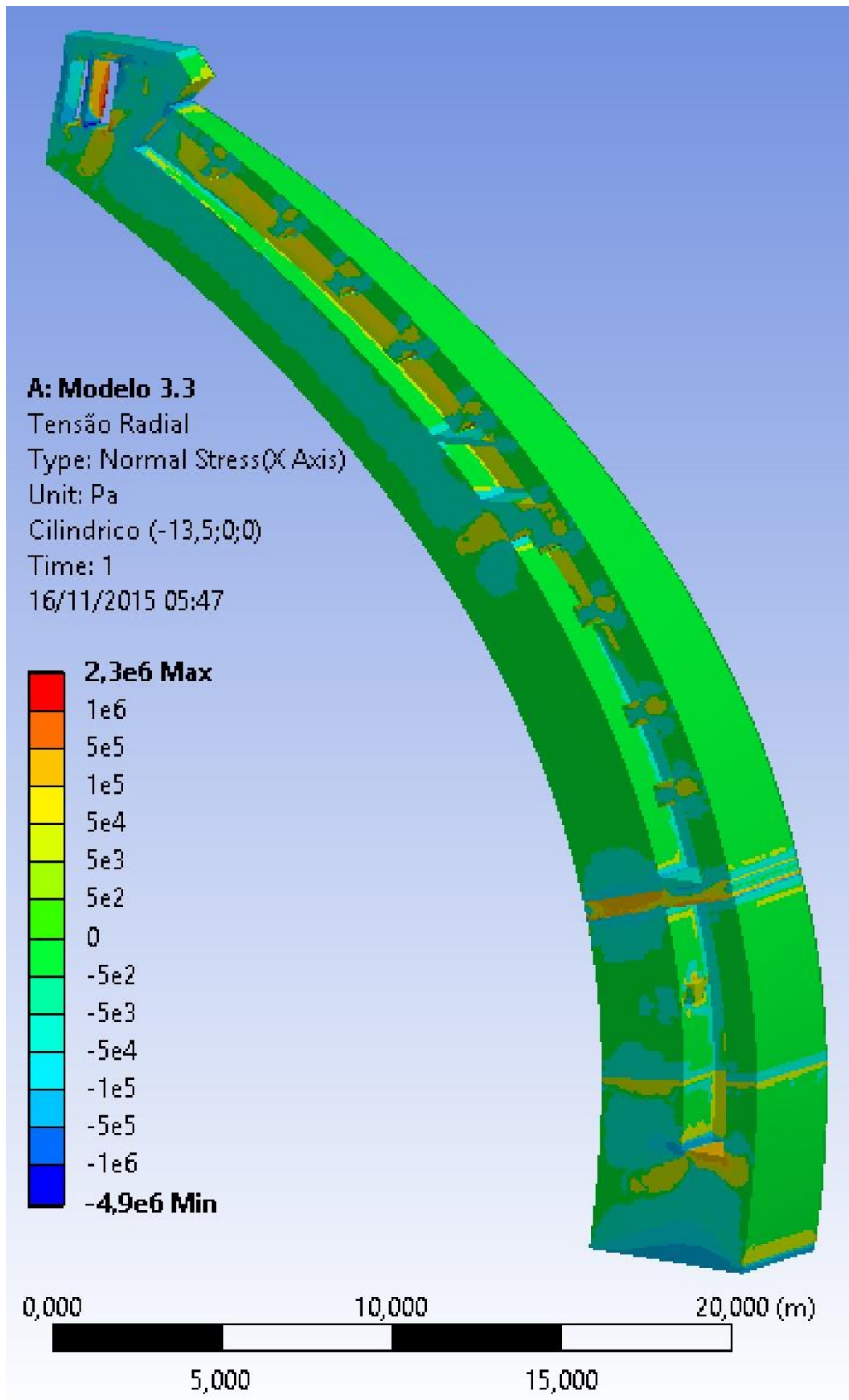
(fonte: ANSYS INC., 2015)

Figura 106 – Tensão Radial – Corte 2 – Modelo 3 sem 2º anel de arenito



(fonte: ANSYS INC., 2015)

Figura 107 – Tensão Radial – Corte 3 – Modelo 3 sem 2º anel de arenito



(fonte: ANSYS INC., 2015)

6.6 ESTIMATIVA DA SEGURANÇA DA ESTRUTURA

Após então modelarmos a cúpula em sua forma final, suas etapas construtivas e até com a retirada do anel de arenito sob o 3º nível, podemos ter uma estimativa inicial dos coeficientes de segurança da estrutura, tendo como base as resistências dos materiais obtidos no item 4.2 e as limitações de carregamento e comportamento do modelo utilizado.

Cada material foi tratado como isotrópico e homogêneo, e as estimativas de segurança são obtidas pela razão entre as tensões resistentes e atuantes.

6.6.1 Alvenaria de Blocos de Arenito

Sobre a superfície do 1º nível da cúpula foi observado o valor máximo atuante de $0,39 \times 10^6$ Pa de tração radial. Comparando com o valor máximo adotado nesse trabalho, $0,5 \times 10^6$ Pa, pode-se dizer que o coeficiente de segurança mínimo é de 1,28.

No canto inferior externo, foi observado o valor máximo atuante de $1,77 \times 10^6$ Pa de compressão tangencial. Ao comparar com o valor máximo adotado nesse trabalho, 8×10^6 Pa, pode-se dizer que o coeficiente de segurança mínimo é de 4,52.

6.6.2 Alvenaria de Tijolos Maciços

Foi observado, na alvenaria entre o 1º e 2º níveis, o valor máximo atuante de $0,25 \times 10^6$ Pa de tração circunferencial. Comparando com o valor máximo adotado nesse trabalho, $0,3 \times 10^6$ Pa, pode-se dizer que o coeficiente de segurança mínimo é de 1,20.

Na parte de alvenaria da base da lanterna, foi encontrado o valor máximo atuante de $0,82 \times 10^6$ Pa de compressão tangencial. Ao comparar com o valor máximo adotado nesse trabalho, 3×10^6 Pa, pode-se dizer que o coeficiente de segurança mínimo é de 3,66.

6.6.3 Anéis de Arenito e Base da Lanterna

Para esse material, pode-se observar o valor máximo atuante de $4,50 \times 10^6$ Pa de tração circunferencial no canto interno do anel sob o 2º nível de passagem. Ao comparar com o valor

máximo adotado nesse trabalho, 6×10^6 Pa, pode-se dizer que o coeficiente de segurança mínimo é de 1,33.

Já, para compressão, foi encontrado o valor máximo atuante de $8,96 \times 10^6$ Pa de compressão circunferencial na estrutura da base da lanterna, que, ao ser comparado com a tensão máxima resistente de 89×10^6 Pa, resulta em um valor de coeficiente de segurança igual a 9,93.

6.6.4 Anel de Madeira

Foi observado o valor de tração máximo de $2,16 \times 10^6$ Pa no anel, e o valor máximo de $3,65 \times 10^6$ Pa para compressão. Como os valores resistentes para esse material são de, 95×10^6 Pa e 62×10^6 Pa para tração e compressão, os coeficientes de segurança mínimo para tração é de 43,98, e para compressão, 16,98.

6.6.5 Considerações gerais sobre a segurança e o Modelo 3

Considerando-se que a estrutura se encontra íntegra após mais de 500 anos, as estimativas de segurança deveriam apontar para a inexistência de problemas estruturais. Neste sentido, os modelos utilizados, em especial o Modelo 3, mostraram-se adequados para a representação do comportamento da estrutura, dadas as limitações utilizadas na forma de análise e nos carregamentos contemplados.

Além disso, a análise das distribuições de tensões da estrutura demonstra o acerto do projeto de Brunelleschi, realizado de forma empírica e sem o conhecimento analítico necessário para o equacionamento do comportamento da estrutura. Estruturas antigas dimensionadas de forma incorreta ou incoerente com o funcionamento estrutural não sobreviveram à passagem do tempo para ser estudadas. Aquelas que o fizeram, embora tenham sido dimensionadas empiricamente, necessariamente tem suas opções de projeto justificadas em uma análise atual, e, neste sentido, os resultados obtidos apontam para uma concordância entre as análises computacionais efetuadas através do Método dos Elementos Finitos neste trabalho e o funcionamento real da cúpula da catedral de *Santa Maria del Fiore* em Florença, o Domo de Brunelleschi.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Sabe-se que a cúpula foi finalizada em 1436. Visto que ela existe há quase 600 anos, e provavelmente passou por tempestades, terremotos, inversões térmicas devido a frio ou calor extremo, entre outras situações desfavoráveis à estrutura, e continua em pé, sem qualquer dano estrutural (excluem-se aqui fissuras de pequeno porte), é óbvio que, em linhas gerais, a estrutura deve estar segura.

Muito disso se deve ao fato de utilizar materiais mais rígidos e capazes de suportar esforços maiores em posições de necessidade, como por exemplo o anel de arenito sob o 2º nível, ou a base da lanterna, no 4º nível de passagem.

Tomando como base os modelos da evolução da construção da cúpula, é possível acreditar que a geometria adotada é sensata, sendo viável a sua construção. De qualquer forma, construir tal cúpula em 1420, sem o auxílio de teorias modernas e sem cimbramento faz com que Brunelleschi seja considerado um gênio.

Caso exista interesse, é possível continuar e evoluir o trabalho. É possível modelar com maior precisão os anéis de arenito, e a estrutura da base da lanterna. Pode-se considerar carregamentos em situações limites, como vento, neve ou sismos. É possível também obter dados mais precisos sobre o comportamento mecânico dos materiais existentes na cúpula, bem como melhorar a geometria das ligações entre costelas, ou modelar os anéis de arenito como barras em meio à alvenaria. Pode-se inclusive adicionar as peças de mármore da lanterna e da cobertura das nervuras de canto na simulação, e também realizar verificações quanto ao esforço cortante.

Dos modelos criados, pode-se dizer que somente o terceiro e último é válido para representar fielmente as distribuições de esforços na cúpula. Isso de forma alguma inviabiliza o modelo 2, axissimétrico, pois ele serviu de base para entender o comportamento de dupla casca; nem o modelo 1, embora bastante limitado, indicou os esforços de tração na altura do 2º nível de passagem.

A fim de listar as principais conclusões, primeiramente deve-se notar as tensões de tração que ocorrem justamente na altura do anel de arenito sob o 2º nível, vistas já no modelo 1. Para o

modelo 2, pode-se notar os acréscimos de tensão nas superfícies internas da cúpula, ou seja, as que ficam sob os níveis de passagem.

Já para o modelo 3, temos o anel de madeira, que absorve alguns dos esforços antes repassados para as cascas. Temos as nervuras que aumentam a rigidez do modelo consideravelmente, além dos anéis de *macigno* absorvendo os esforços de tração circunferencial, que surgem em tal ponto.

REFERÊNCIAS

- A&E TELEVISION NETWORKS. New York, c2014. Não paginado. **Filippo Brunelleschi**. Disponível em: <<http://www.biography.com/people/filippo-brunelleschi-9229632>>. Acesso em: 15 jun. 2014.
- ANZANI, A.; BINDA, L.; CARPINTERI, A.; LACIDOGNA, G.; MANUELLO, A. Evaluation of the repair on multiple leaf stone masonry by acoustic emission. **Materials and Structures**, Amsterdam, v. 41, n. 12, p. 1169-1189, Jul. 2008. Disponível em: <http://staff.polito.it/alberto.carpinteri/papers/CARPINTERI_2008_N.497_MS.pdf>. Acesso em: 15 nov. 2015
- ANSYS INC. **ANSYS 16.0**. Software de Elementos Finitos.
- BONILHA, N. F. **Análise de Cascas Delgadas**: parte 1 – membranas de revolução. Porto Alegre, Escola de Engenharia/UFRGS, [198-?].
- CAZZANI, A. **Statica delle murature**. [Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Edile] Disponível em: <http://www.ing.unitn.it/~cazzani/didattica/SdM/Statica%20delle%20murature_02_b&n.pdf>. Acesso em: 18 nov. 2015.
- CONTI, G. La matematica nella Cupola di Santa Maria del Fiore a Firenze. **Ithaca**: Viaggio nella Scienza, Lecce, Itália, v. 2014, n. IV, p. 5-12, 2. Sem 2014. Disponível em: <http://ithaca.unisalento.it/nr-4_2014/articolo_Iip_02.pdf>. Acesso em: 01 out. 2015.
- DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA STRUTTURALE E GEOTECNICA. **Caratteristiche meccaniche della muratura**. Gênova, Itália, [entre 2000 e 2015]. Disponível em: <<http://www.pisante.com/corsi/documenti/documenti/muratura/gambarotta/parte%201%20-%20Caratteristiche%20meccaniche%20muratura.pdf>>. Acesso em: 15 nov. 2015.
- KING, R. **O Domo de Brunelleschi**: como um gênio da Renascença reinventou a arquitetura. Tradução de S. Duarte. 1. ed. Rio de Janeiro: Record, 2013.
- LARAPEDIA. Itália, c2015. Não paginado. **Comportamenti fisico meccanici del legno**. Disponível em: <http://www.larapedia.com/ingegneria_il_legno/comportamenti_fisico_meccanici_del_legno.html>. Acesso em: 15 nov. 2015.
- MINISTERO DELLE INFRASTRUTTURE E DEI TRASPORTI. **CIRCOLARE n. 617**. Itália, 2009. Disponível em <http://dsg.uniroma1.it/sylos/Circ.%20esplicativa%20NTC%202008%20n%C2%B0%20617%20del%2002_02_2009.pdf>
- MUELLER, T. Brunelleschi's Dome: how did a hot-tempered goldsmith with no formal architectural training create the most miraculous edifice of the Renaissance?. **national geographic magazine**. Washington. Feb. 2014. Disponível em: <<http://ngm.nationalgeographic.com/print/2014/02/il-duomo/mueller-text>>. Acesso em: 15 jun. 2014.

OPERA DI SANTA MARIA DEL FIORE DI FIRENZE. Firenze, 2014. Não paginado. **Cathedral**. Disponível em: <<http://www.museumflorence.com/en/monuments/1-cathedral>>. Acesso em: 12 jun. 2014.

PUBLIC BROADCASTING SERVICE. [s.l.], c2014. **Great Cathedral Mystery**. Disponível em: <<http://www.pbs.org/wgbh/nova/ancient/great-cathedral-mystery.html>>. Acesso em: 15 jun. 2014.

SALVADORI, M. **Why Buildings Stand Up: the strength of architecture**. 1st ed. New York: W. W. Norton, 1980.

SØRENSEN, R. K. **Evaluation of shear lag in standard H-/I-sections**. 2013. 72 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Aalborg University Esbjerg, Esbjerg, Dinamarca. 2013. Disponível em: <http://projekter.aau.dk/projekter/files/77785981/Evaluation_of_shear_lag_in_standard_H_I_sections.pdf>. Acesso em: 16 nov. 2015.

THE WOOD DATABASE. Estados Unidos, c2015. Não paginado. **English Walnut**. Disponível em: <<http://www.wood-database.com/lumber-identification/hardwoods/english-walnut/>>. Acesso em: 15 nov. 2015.