

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL**

Isaltino Avelino de Oliveira Júnior

**CÁLCULO DE LAJES EM CONCRETO ARMADO PELA
TEORIA DAS LINHAS DE RUPTURA: DESENVOLVIMENTO
DE FERRAMENTA COMPUTACIONAL**

Porto Alegre
dezembro 2015

ISALTINO AVELINO DE OLIVEIRA JÚNIOR

**CÁLCULO DE LAJES EM CONCRETO ARMADO PELA
TEORIA DAS LINHAS DE RUPTURA: DESENVOLVIMENTO
DE FERRAMENTA COMPUTACIONAL**

Trabalho de Diplomação apresentado ao Departamento de
Engenharia Civil da Escola de Engenharia da Universidade Federal
do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do
título de Engenheiro Civil

Orientador: João Ricardo Masuero
Coorientador: Fábio Gonçalves Teixeira

Porto Alegre
dezembro 2015

ISALTINO AVELINO DE OLIVEIRA JÚNIOR

**CÁLCULO DE LAJES EM CONCRETO ARMADO PELA
TEORIA DAS LINHAS DE RUPTURA: DESENVOLVIMENTO
DE FERRAMENTA COMPUTACIONAL**

Este Trabalho de Diplomação foi julgado adequado como pré-requisito para a obtenção do título de ENGENHEIRO CIVIL e aprovado em sua forma final pelo Professor Orientador e pelo Coordenador da disciplina Trabalho de Diplomação Engenharia Civil II (ENG01040) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, dezembro de 2015

Prof. João Ricardo Masuero
Dr. pelo PPGEC/UFRGS
Orientador

Prof. Fábio Gonçalves Teixeira
Dr. pelo PROMEC/UFRGS
Coorientador

BANCA EXAMINADORA

Prof. João Ricardo Masuero
(UFRGS)
Dr. pela UFRGS

Prof. Fábio Gonçalves Teixeira
(UFRGS)
Dr. pela UFRGS

Profa. Virgínia M. Rosito d'Ávila Bessa
(UFRGS)
Dra. pela UFRGS

Prof. Américo Campos Filho
(UFRGS)
Dr. pela USP

Dedico este trabalho a minha família e minha namorada,
que sempre me apoiaram nesta caminhada, e
especialmente durante os períodos difíceis do meu Curso
de Graduação estiveram ao meu lado.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Prof. João Ricardo Masuero, orientador deste trabalho, pela dedicação, paciência e entusiasmo para que esse trabalho pudesse ser concluído.

Agradeço ao Prof. Fábio Teixeira, coorientador deste trabalho, pelas dicas valiosas para a implementação de melhorias no trabalho.

Agradeço a todos os professores que fizeram parte da minha formação acadêmica, pela transferência de conhecimento que eles proporcionaram e pelo empenho em educar.

Agradeço à minha família, em especial a meus tios, minha mãe, meu padrasto e meu avô, que foram imprescindíveis para que meu caminho pudesse ser trilhado até aqui.

Agradeço a minha namorada, que participou da minha formação, auxiliando emocionalmente e também me fazendo crescer como pessoa.

Agradeço aos amigos que fiz nessa caminhada pela universidade, que, seja nos trabalhos ou nos momentos de lazer, proporcionaram momentos de diversão e alegria.

Os que se encantam com a prática sem a ciência são como os timoneiros que entram no navio sem timão nem bússola, nunca tendo certeza do seu destino.

Leonardo da Vinci

RESUMO

Este trabalho visa apresentar, de forma concisa, um algoritmo que trata sobre o cálculo do momento de ruptura em lajes com formato poligonal qualquer, totalmente apoiadas sobre vigas ou paredes e que estejam submetidas a carregamentos distribuídos. Como aplicação do algoritmo desenvolveu-se um programa que automatiza o processo apresentado no algoritmo. Maximizando a solução pelo método do máximo ativo, o programa constitui ferramenta importante no cálculo e projeto de lajes de concreto armado, uma vez que os cálculos de lajes, na prática, são realizados considerando que o comportamento das mesmas, em seu estado limite último, ainda se encontra no regime elástico. A verificação do programa deu-se utilizando resultados encontrados para determinadas configurações segundo alguns autores, e algumas configurações mais complexas que, de alguma forma podem ser analisadas na ferramenta computacional que neste trabalho foi desenvolvida, carecem de soluções analíticas. Sendo assim, o programa serve como ferramenta inicial no cálculo das solicitações, cabendo ao projetista a sua aplicação com cautela e tendo consciência das limitações inerentes à teoria trabalhada.

Palavras-chave: Lajes em concreto armado. Teoria das linhas de ruptura.
Equação dos trabalhos virtuais

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Delineamento da pesquisa	17
Figura 2 – Notação utilizada	20
Figura 3 – Momentos positivos	21
Figura 4 – Regra da mão direita para as rotações das regiões rígidas.....	21
Figura 5 – Esforços solicitantes em um elemento infinitesimal de laje	22
Figura 6 – Comportamento rígido-plástico do concreto no estado limite último	24
Figura 7 – Mecanismos de ruptura frequentes em lajes de concreto armado	24
Figura 8 – Linhas de momento principal	26
Figura 9 – Critério de escalonamento de Johansen	27
Figura 10 – Região rígida de uma laje	30
Figura 11 – Rotação entre duas regiões rígidas de uma laje	35
Figura 12 – Rotação negativa de uma região rígida	35
Figura 13 – Eixos orientados	37
Figura 14 – Detecção dos pontos prováveis.....	44
Figura 15 – Pontos falsos eliminados.....	45
Figura 16 – Busca pelos pontos de intersecção prováveis e início do algoritmo.....	46
Figura 17 – Pontos verdadeiros, expressos dentro dos balões azuis.....	47
Figura 18 – Fechamento das regiões triangulares e busca por novos pontos de intersecção.....	47
Figura 19 – Fechamento de outra região e continuação do processo de busca por novos pontos de intersecção.....	48
Figura 20 – Fechamento de nova região rígida e continuação do processo de busca.....	48
Figura 21 – Fechamento de outra região rígida e continuação do processo de busca.....	49
Figura 22 – Fechamento de região subsequente.....	49
Figura 23 – Busca por novos pontos de intersecção na sequência.....	50
Figura 24 – Fechamento da região rígida definida a partir do ponto do passo anterior....	50
Figura 25 – Determinação da configuração final.....	51
Figura 26 – Exemplo de região rígida com apoio contínuo e linha de ruptura negativa...	57
Figura 27 – Descrição gráfica do método do aclave máximo.....	61
Figura 28 – Fluxograma para cálculo do momento de ruptura.....	62
Figura 29 – Fluxograma para a maximização do valor do momento de ruptura.....	63
Figura 30 – Exemplo de saída gráfica da ferramenta computacional.....	66
Figura 31 – Simbologia para cálculo de laje retangular.....	69

Figura 32 – Simbologia para cálculo de laje triangular.....	70
Figura 33 – Simbologia para cálculo de laje trapezoidal.....	71
Figura 34 – Laje circular estudada e aproximações por polígonos.....	74
Figura 35 – Solução convergente para Laje L.....	75
Figura 36 – Solução divergente para Laje L com aba estreita.....	76
Figura 37 – Solução convergente para Laje T.....	77
Figura 38 – Caso 1.....	78
Figura 39 – Caso 2.....	79
Figura 40 – Configuração de falha encontrada para o Caso 2.....	79

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Resultados encontrados para laje retangular.....	69
Tabela 2 – Resultados encontrados para laje triangular.....	71
Tabela 3 – Resultados encontrados para laje trapezoidal.....	72
Tabela 4 – Momento de ruptura para laje circular e aproximações por polígonos.....	73
Tabela 5 – Comparativo de resultados para laje armada em uma direção.....	80

LISTA DE SÍMBOLOS

m – momento de ruptura positivo por unidade de comprimento (kNm/m)

m' – momento de ruptura negativo por unidade de comprimento (kNm/m)

μ – proporção entre armaduras ortogonais

θ – giro efetuado sobre um eixo de rotação (rad)

m_{ns} – momento de torção em uma linha de ruptura (kNm/m)

m_n – momento normal atuante em uma linha de ruptura (kNm/m)

ϕ – ângulo entre uma linha de ruptura e a linha de momento principal (°)

L – comprimento da linha de ruptura (m)

p – carga uniformemente distribuída sobre a laje (kN/m²)

τ_E – trabalho realizado pelas cargas externas (J)

τ_I – trabalho realizado pelos esforços internos (J)

δ – deslocamento vertical de um ponto laje (m)

P – carga concentrada sobre a laje (kN)

Δ – deslocamento vertical da laje no ponto de aplicação da carga concentrada (m)

q – carga linear aplicada sobre a laje (kN/m)

δ – deslocamento vertical da laje no ponto de aplicação da carga linear (m)

h – distância de um ponto qualquer da região rígida da laje a seu respectivo eixo de giro (m)

A – área (m²)

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	13
2 DIRETRIZES DA PESQUISA	15
2.1 QUESTÃO DE PESQUISA	15
2.2 OBJETIVOS DA PESQUISA	15
2.2.1 Objetivo principal	15
2.2.2 Objetivos secundários	15
2.3 PRESSUPOSTOS	16
2.4 DELIMITAÇÃO	16
2.5 LIMITAÇÕES	16
2.6 DELINEAMENTO	16
3 TEORIA DAS LINHAS DE RUPTURA	19
3.1 SIMBOLOGIA E DEFINIÇÕES	20
3.1.1 Simbologia	20
3.1.2 Lajes	22
3.1.3 Premissas para a teoria das linhas de ruptura	23
3.1.4 Mecanismos de ruptura	24
3.1.5 Momentos principais	25
3.2 MÉTODO DOS TRABALHOS VIRTUAIS	28
3.2.1 Trabalho realizado pelas cargas externas	30
3.2.2 Trabalho realizado pelas cargas internas	33
3.3 MÉTODO DO EQUILÍBRIO	38
3.4 PRINCÍPIOS DE ANÁLISE LIMITE	40
4 ALGORITMO DE CÁLCULO	42
4.1 CÁLCULO DA INTERSECÇÃO ENTRE REGIÕES RÍGIDAS.....	42
4.2 CÁLCULO DAS PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DAS REGIÕES RÍGIDAS.	51
4.3 DESCRIÇÃO DO PROCESSO PARA SE RESOLVER A EQUAÇÃO DOS TRABALHOS VIRTUAIS.....	56
4.4 MAXIMIZAÇÃO DO MOMENTO DE FALHA.....	58
4.5 FLUXOGRAMAS PARA ETAPAS DE CÁLCULO DO MOMENTO.....	61
4.6 FERRAMENTA COMPUTACIONAL.....	64
4.6.1 Função 1: cálculo do momento de ruptura	64
4.6.2 Função 2: maximização do momento de falha	67
5 ANÁLISE E RESULTADOS	68

5.1 VALIDAÇÃO DA METODOLOGIA APLICADA NO PROGRAMA.....	68
5.1.1 Laje retangular.....	68
5.1.2 Laje triangular.....	70
5.1.3 Laje trapezoidal.....	71
5.1.4 Laje circular – aproximação por polígonos.....	72
5.2 POTENCIALIDADE DA METODOLOGIA EMPREGADA.....	74
5.2.1 Laje L.....	75
5.2.2 Laje T.....	77
5.2.3 Abordagens de lajes com outros formatos poligonais.....	78
6 CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	81
REFERÊNCIAS	82

1 INTRODUÇÃO

O cálculo das estruturas moldadas em concreto armado atualmente é feito quase que em sua totalidade com o auxílio de softwares. Esses programas auxiliam o engenheiro na tomada de decisões, uma vez que o tempo necessário para que seja feita a análise de uma determinada solução estrutural é pequeno, sendo possível o teste de diversos modelos. A forma com que esses softwares calculam as estruturas geralmente se dá em duas etapas: na primeira, os elementos planos (lajes) têm suas solicitações calculadas empregando-se um dos seguintes métodos:

- a) elementos finitos;
- b) pórticos equivalentes;
- c) aproximação da laje por grelha;
- d) entre outros métodos.

Na segunda etapa, os elementos lineares (vigas e pilares) são calculados ou como pórticos planos ou como pórticos espaciais, ficando a critério do engenheiro calculista a escolha de qual modelo utilizar.

Entretanto, a maior parte desses métodos para o cálculo dos esforços solicitantes nos elementos citados o faz em regime elástico linear, sendo que esse fato que não é verídico para o concreto armado, já que o material se encontra em regime de ruptura. Para o caso dos elementos lineares, tem-se boa aceitação pelos métodos elásticos, desde que sejam feitas redistribuições nos esforços em função da fissuração do concreto armado. Porém, nas lajes, esses métodos de análise requerem uma série de cuidados quanto à sua aplicação, além do fato de que o comportamento das lajes em concreto armado, no estado limite último, destoa em muito do comportamento elástico do material, tornando os resultados encontrados pelos métodos elásticos conservadores e antieconômicos. É nesse ponto que a teoria das linhas de ruptura vem como um modelo de análise vantajoso, pois o cálculo das solicitações nos elementos planos é feito considerando que os mesmos se encontram próximos à sua ruína, sendo um método mais adequado para a realidade das lajes em concreto armado. Este fato tem corroboração prática feita através de ensaios, nos quais os valores encontrados para as cargas últimas em lajes resultaram muito próximos de valores encontrados teoricamente.

A teoria das linhas de ruptura é um método para se encontrar a carga última de lajes, não sendo um método exato para se estimar o seu comportamento em serviço (deslocamento e deformações). A teoria supõe que, estando a laje próxima do colapso, surgirão, na mesma, linhas ou charneiras (dobradiças) plásticas, como também são chamadas, que indicarão um caminho através do qual as fissuras irão aparecer. Considerando-se que, próximo ao colapso da laje, as armaduras escoam, consideram-se as linhas de ruptura como linhas de plastificação em torno das quais as partes da laje sofrem rotações de muito maior magnitude que nos demais pontos, fazendo com que a deformação da laje possa ser aproximada por um modelo rígido-plástico no qual partes planas (rígidas) da laje giram em torno de eixos de rotação, que são os apoios da laje. Porém, o caminho de fissuras representados pelas linhas de ruptura não necessariamente é uma representação real da situação da laje em ruptura, devido a imperfeições físicas e/ou geométricas.

O objetivo deste trabalho é o desenvolvimento de uma ferramenta computacional que auxilie o engenheiro no cálculo das solicitações em lajes de concreto armado, funcionando como um complemento na verificação e dimensionamento feitos pelos softwares comerciais comumente utilizados pelos engenheiros calculistas. Pretende-se fazer um programa que, utilizando como linguagem de programação o Scilab, calcule lajes maciças com formato poligonal qualquer, totalmente apoiadas sobre vigas ou paredes, pela teoria das linhas de ruptura.

2 DIRETRIZES DA PESQUISA

As diretrizes para o desenvolvimento do trabalho são descritas nos próximos itens.

2.1 QUESTÃO DE PESQUISA

A questão de pesquisa do trabalho é: qual ferramenta computacional pode ser proposta para o cálculo das solicitações nas lajes maciças de concreto armado, com formato poligonal qualquer, pela teoria das linhas de ruptura?

2.2 OBJETIVOS DA PESQUISA

Os objetivos da pesquisa estão classificados em principal e secundários e são descritos a seguir.

2.2.1 Objetivo principal

O objetivo principal do trabalho é o desenvolvimento de um algoritmo computacional que calcule as solicitações de lajes maciças de formato poligonal qualquer de concreto armado pela teoria das linhas de ruptura, e que possa depois ser implementado computacionalmente através de uma linguagem/ambiente de programação, como por exemplo o Scilab.

2.2.2 Objetivos secundários

Os objetivos secundários do trabalho são:

- a) desenvolvimento de um algoritmo de geração de configurações de ruptura cinematicamente compatíveis, a partir dos dados de contorno da laje e inclinação dos seus contornos rígidos;
- b) descrição de algoritmo para o cálculo de lajes utilizando a teoria das linhas de ruptura;
- c) validação dos resultados obtidos no programa desenvolvido com resultados obtidos por outros autores.

2.3 PRESSUPOSTOS

O trabalho tem por pressupostos:

- a) a teoria das linhas de ruptura obtém resultados válidos, corroborados na prática através de ensaios;
- b) as vigas e paredes que servem de apoio para as lajes têm resistência suficiente para garantir que as lajes rompam primeiro;
- c) a ruptura considerada é a ocasionada por rotação da laje sobre seus apoios, sendo assim uma ruptura global da laje.

2.4 DELIMITAÇÃO

O trabalho delimita-se ao desenvolvimento de software que calcule solicitações em lajes maciças de concreto armado, com formato poligonal qualquer, apoiadas em sua totalidade sobre vigas ou paredes.

2.5 LIMITAÇÕES

São limitações do trabalho:

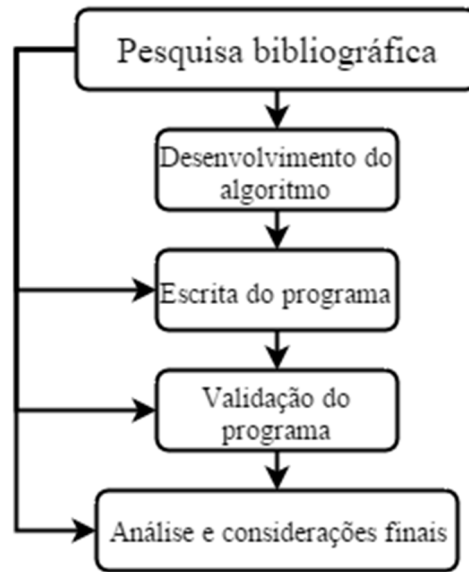
- a) o carregamento das lajes será constituído apenas por cargas uniformemente distribuídas;
- b) serão considerados apenas apoios lineares para as lajes, não sendo previstas situações com apoios pontuais;
- c) não será considerada a possibilidade de bordos livres;
- d) não será considerada a existência de furos.

2.6 DELINEAMENTO

O trabalho será realizado através das etapas apresentadas abaixo, ilustradas na figura 1, e descritas nos próximos parágrafos:

- a) pesquisa bibliográfica;
- b) desenvolvimento de algoritmo;
- c) implementação do programa;
- d) validação do programa;
- e) análise e considerações finais.

Figura 1 – Delineamento da pesquisa



(fonte: elaborada pelo autor)

A pesquisa bibliográfica fornece a base teórica para a formulação do trabalho e validação dos resultados, e corresponde à coleta de dados em artigos, normas, livros, trabalhos acadêmicos, entre outros.

Através da pesquisa bibliográfica será estabelecido um algoritmo que permita o cálculo do momento de ruptura em lajes maciças de concreto armado, com formato qualquer. Este algoritmo é formado por três partes principais: uma primeira parte, que estabelece uma configuração de ruptura cinematicamente compatível, gerada a partir de dados de contorno da laje e das rotações de cada um dos contornos rígidos que forma essa configuração; uma segunda parte, que calcula o momento de falha decorrente do carregamento e das condições de contorno da laje; e uma terceira etapa, que realiza o processo de otimização para a busca do momento de ruptura máximo que define a configuração de ruptura final, utilizando como variável do processo a rotação estabelecida para cada contorno rígido. Essa etapa incluíra o cálculo manual de problemas, para teste do algoritmo proposto, através da verificação de resultados encontrados com solução apresentada na bibliografia sobre o tema.

A implementação do programa consiste da etapa na qual será feita a tradução do algoritmo para uma linguagem de programação em que será implementada a ferramenta computacional, que nesse caso é o Scilab.

A validação do programa será feita através da solução de problemas de lajes de formato poligonal qualquer na ferramenta computacional, e comparar-se-á esses resultados com os encontrados na literatura.

A última etapa consiste da análise dos dados e considerações finais acerca do trabalho. Aqui o que foi feito inicialmente é revisitado, de modo a se determinar se o objetivo e a questão de pesquisa foram atendidos. Além disso, são fornecidas nessa etapa sugestões para trabalhos futuros, com base na experiência que o autor adquiriu no decorrer do trabalho.

3 TEORIA DAS LINHAS DE RUPTURA

A teoria das linhas de ruptura é uma teoria utilizada para a determinação da capacidade última de lajes, sendo que esta ocorre quando da formação de um mecanismo de ruptura válido, composto por linhas nas quais ocorre o escoamento do aço da armadura (JONES; WOOD, 1967, p. 11, tradução nossa). Essa teoria apresenta como vantagens a forma de aplicação mais simples quando comparada a métodos elásticos e a existência de valores para as cargas últimas encontradas em ensaios que comprovam os valores teóricos.

O desenvolvimento teórico da teoria das linhas de ruptura teve seu início em 1931, com a publicação da tese de doutorado do professor Knud Winstруп Johansen. Entretanto, antes dessa data alguns trabalhos foram desenvolvidos, podendo ser citados aqui os trabalhos de: Bach¹ (1890), que propôs uma teoria de ruptura para lajes; Mörsch² (1916) e Suenson³ (1916), que apresentaram um método de cálculo para placas de concreto armado; e Ingerslev⁴ (1921), que lançou a teoria técnica de linhas de ruptura, mas que possuía uma série de limitações comparadas ao método que será apresentado a seguir (JOHANSEN, 1962, p. 18).

O desenvolvimento proposto por Johansen (1962, p. 52) baseia-se no princípio de que, para se determinar a figura de ruptura que apresente o valor máximo para a relação entre a solitação atuante na laje e a carga à qual a mesma deve suportar, deve ser feito o equilíbrio das partes isoladas da laje que se encontram divididas pelas linhas de ruptura. Esse equilíbrio é feito para cada parte isoladamente, sendo feita uma comparação entre os valores encontrados em cada um dos mesmos e verificando a sua igualdade. Também chamado de método do equilíbrio, para sua utilização é necessária a determinação de forças nodais, que são estaticamente equivalentes aos esforços de cisalhamento ao longo da linha de ruptura e são aplicadas em seus nós, processo que possui algumas restrições.

Também em seu trabalho, Johansen (1962, p. 70) expressa as condições de equilíbrio pelo princípio dos trabalhos virtuais. Esse método analisa a laje como um todo e, ao se fazer assim, as forças nodais apresentadas anteriormente não executam trabalho algum, uma vez que elas

¹ No trabalho “Elasticität und Festigkeit”.

² No trabalho “Deutsche Bauzeitung”.

³ Em trabalho publicado na revista Ingeniøren de 1916.

⁴ Em trabalho publicado na revista Ingeniøren de 1921.

são auto equilibradas entre si. Assim sendo, somente os momentos nas linhas de ruptura exercem trabalho sobre a placa. A aplicação desse método tem como vantagem a não necessidade da determinação das forças nodais, fato que torna a utilização da abordagem por trabalhos virtuais quase que ilimitada.

Nos próximos itens, serão apresentados os métodos discutidos, sinalizando as vantagens que cada um apresenta. Junto a isso, aspectos relativos à simbologia e premissas para a teoria também serão introduzidos.

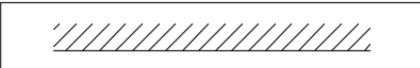

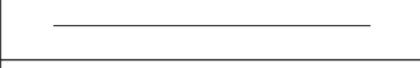
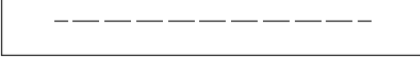
3.1 SIMBOLOGIA E DEFINIÇÕES

As notações e definições que serão utilizadas no trabalho são apresentadas nos itens subsequentes.

3.1.1 Simbologia

A convenção geral adotada para a indicação dos tipos de apoio e de linhas de ruptura é representada na figura 2.

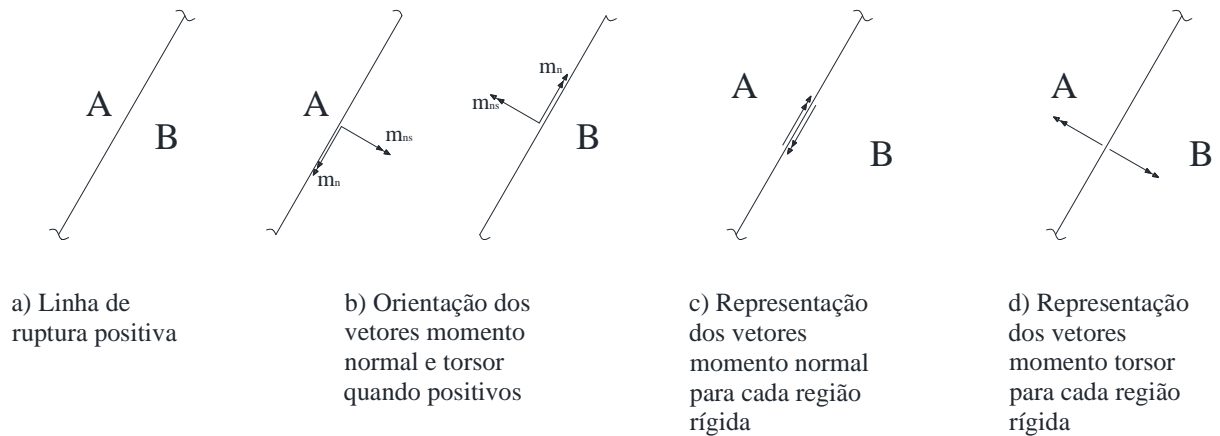
Figura 2 – Notação utilizada

	Apoio Simples
	Apoio contínuo (engaste)
	Linha de ruptura positiva
	Linha de ruptura negativa

(fonte: adaptado de JONES e WOOD, 1967, p. 37)

Os momentos serão representados na sua forma vetorial, e estão indicados na figura 3 os momentos positivos, conforme adotados por Jones e Wood (1967, p. 35, tradução nossa).

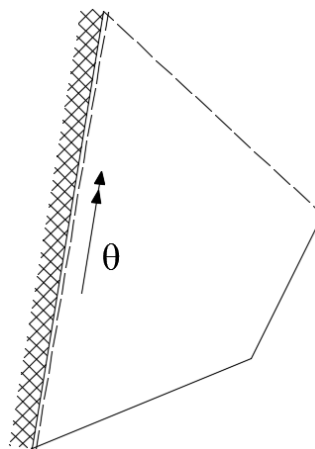
Figura 3 – Momentos positivos



(fonte: adaptado de JONES; WOOD, 1967, p. 35)

Pelas figuras 3c e 3d, os momentos positivos atuantes em uma região rígida, quando desenhados na sua respectiva região, seguem a regra da mão esquerda, isto é, ao se apontar o polegar da mão esquerda na direção do vetor momento e se impuser uma rotação no sentido anti-horário, essa será a rotação à qual o momento está resistindo. Já as rotações seguem a regra da mão direita, ou seja, fazendo o que foi exposto para a regra da mão esquerda no caso dos momentos, e tomando como exemplo a Figura 4, a rotação será positiva quando estiver agindo no sentido horário.

Figura 4 – Regra da mão direita para as rotações das regiões rígidas



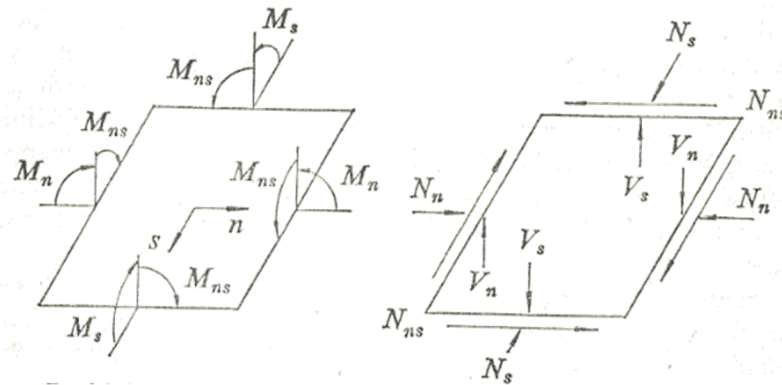
(fonte: elaborado pelo autor)

3.1.2 Lajes

De acordo com a NBR 6118, lajes são “Elementos de superfície plana, sujeitos principalmente a ações normais a seu plano.” (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2014, p. 84). Os carregamentos que podem surgir nestes elementos são os devidos ao peso próprio da estrutura, peso próprio do revestimento e dos sistemas que de alguma forma aplicam carga na laje, carregamentos devidos à utilização, eventuais cargas de paredes e, em alguns casos, cargas concentradas.

As solicitações às quais uma laje está sujeita são mostradas na figura 5. Conforme Jones e Wood (1967, p. 23, tradução nossa), caso se deseje encontrar uma solução que envolva todas as variáveis do problema, é necessário o conhecimento dos estados de tensão e deformação em toda a laje, além de ter que se resolver equações diferenciais de equilíbrio para as quais, muitas vezes, não é possível de se encontrar solução exata. Uma alternativa proposta pelos autores é a consideração apenas de algumas dessas solicitações.

Figura 5 – Esforços solicitantes positivos em um elemento infinitesimal de laje



(fonte: JONES; WOOD, 1967, p. 22)

As armaduras das lajes podem ser dispostas construtivamente de diversas maneiras. Porém, pela facilidade de execução, algumas soluções são mais comumente utilizadas, sendo que a solução de maior aplicação é a disposição das armaduras ortogonais entre si. Com base nessa solução, pode-se classificar a laje como sendo armada isotropicamente ou ortotropicamente.

Conforme Johansen (1962, p. 52), uma laje com armadura isotrópica é aquela que “[...] possui a mesma armadura segundo duas direções ortogonais.”. Seguindo esse raciocínio, chega-se à conclusão que o momento de plasticidade será o mesmo em qualquer direção.

Já uma laje com armadura ortótropa é aquela onde a armadura está disposta ortogonalmente e em proporção constante ao longo de toda a laje (COPE; CLARK, 1984, p. 261, tradução nossa). Logo, os momentos de plastificação em cada uma das linhas de momento terá a proporção de $1:\mu$, *i.e.* os momentos de ruptura serão m e $\mu.m$, com $\mu \leq 1$ (JOHANSEN, 1962, p. 58).

3.1.3 Premissas para a teoria das linhas de ruptura

Em seu trabalho, Johansen (1962, p. 47) admitiu as seguintes premissas para a aplicação da teoria:

O que se disser nos próximos parágrafos será válido para placas que satisfaçam determinadas condições de plasticidade, tais como placas de concreto armado, cuja armadura seja suficientemente fraca, a fim de que a ruptura ocorra por escoamento da armadura e não por esmagamento do concreto na zona comprimida.

O momento positivo de ruptura, denominado m , corresponde à armadura inferior e o negativo m' à superior. Para placas de aço teremos $m' = m$, de modo que podemos considerá-las como um caso especial das placas de concreto armado, com armaduras inferior e superior idênticas.

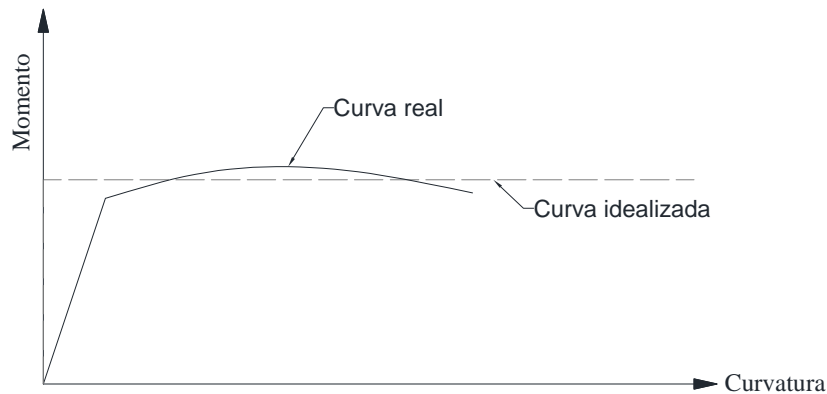
No regime de ruptura, o aço da armadura entra em escoamento ao longo das linhas de ruptura, enquanto as partes intermediárias da laje, compreendidas entre aquelas linhas, mantêm-se ainda no regime elástico. Podemos então desprezar as deformações das partes em fase elástica, em presença das deformações plásticas das linhas de ruptura. Nestas condições, a configuração da superfície média da laje rompida será poliédrica e as linhas de ruptura serão retas.

As únicas deformações existentes serão, portanto, rotações relativas de partes adjacentes a uma linha de ruptura em torno desta. As partes não rompidas executam giros em torno de certos eixos, cuja posição depende das condições de apoio da laje.

Ao se fazer essas considerações, fica estabelecido de início que o material concreto armado é considerado como tendo um comportamento rígido-plástico no Estado Limite Último (Figura 6). Além de se definir o comportamento do material, regras com relação ao comportamento das linhas de ruptura foram estabelecidas por Jones e Wood (1967, p. 38, tradução nossa), sendo elas:

- a) linhas de ruptura são normalmente retas.
- b) linhas de ruptura devem terminar no contorno da laje.
- c) uma linha de ruptura entre duas regiões rígidas adjacentes deve passar pelo ponto de interseção dos eixos de rotação destas.
- d) os eixos de giro geralmente situam-se sobre as linhas de apoio e passam sobre pilares.

Figura 6 – Comportamento rígido-plástico do concreto no estado limite último



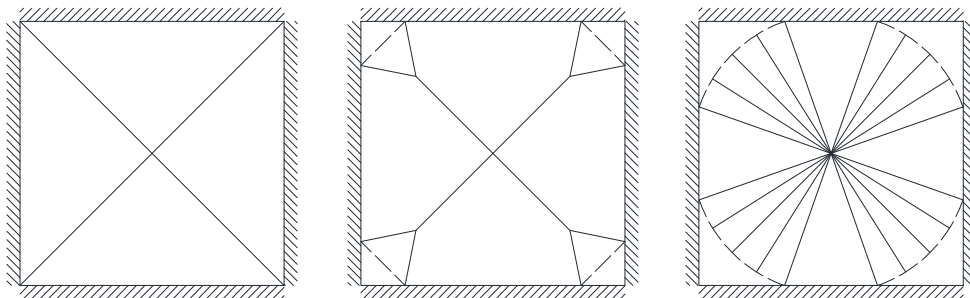
(fonte: JONES; WOOD, 1967, p. 31)

Os ângulos de rotação são pequenos a ponto de se considerar a validade da equação $\text{tg } \theta = \theta$. Devido a esse fator, a configuração e as dimensões das linhas de ruptura serão medidas no plano da laje.

3.1.4 Mecanismos de ruptura

Ao se fazer uma análise plástica de uma laje de concreto armado, deve-se levar em conta os mecanismos de falha que ocorrem, de modo que se possa idealizar o mecanismo de cálculo que seja mais realista. De um modo geral, os mecanismos de ruptura encontrados na literatura são três (Figura 7): ruptura pela rotação dos corpos rígidos em torno de seus respectivos eixos de giro; mecanismo denominado *corner levers*, que surge junto aos cantos da laje; e formação de leques circulares em regiões com carga concentrada.

Figura 7 – Mecanismos de ruptura frequentes em lajes de concreto armado



(fonte: adaptado de JONES; WOOD, 1967, p. 15)

O mecanismo onde a ruptura ocorre em torno dos eixos, também denominado mecanismo de ruptura global, ocorre para cargas distribuídas uniformemente sobre a laje somente, e possui estrita dependência com as condições de apoio e a quantidade de armadura nos mesmos. Caso exista armadura suficiente de modo a garantir que o apoio se comporte da maneira como foi idealizado, essa ruptura irá ocorrer. Caso a armadura seja insuficiente ou o ângulo entre os apoios seja agudo, pode ocorrer o surgimento de *corner levers*, mecanismo que reduz a capacidade resistente da laje (COPE; CLARK, 1984, p. 255, tradução nossa).

Kennedy e Goodchild (2004, p. 10), citam que “[...] lajes sujeitas a cargas concentradas de valores altos podem vir a falhar por um mecanismo de leque, com linhas de ruptura positivas partindo radialmente a partir da carga e uma linha de ruptura circular negativa com centro na carga pontual.”. Os autores recomendam que esse mecanismo seja verificado em casos onde ocorre o risco de cargas concentradas ou em lajes lisas, cujo suporte das mesmas se dá sobre os pilares.

O conhecimento dos mecanismos de ruptura é de extrema importância, uma vez que, para que o cálculo pela teoria das linhas de ruptura seja efetuado, um mecanismo de colapso válido deve ser proposto. Aqui entende-se que um mecanismo de falha válido é aquele que, onde se tenha a interseção de duas regiões rígidas, a mesma deve ter os mesmos deslocamentos verticais em todos os pontos, e ainda levando em conta que os sedimentos horizontais do apoio são ignorados. (JONES; WOOD, 1967, tradução nossa)

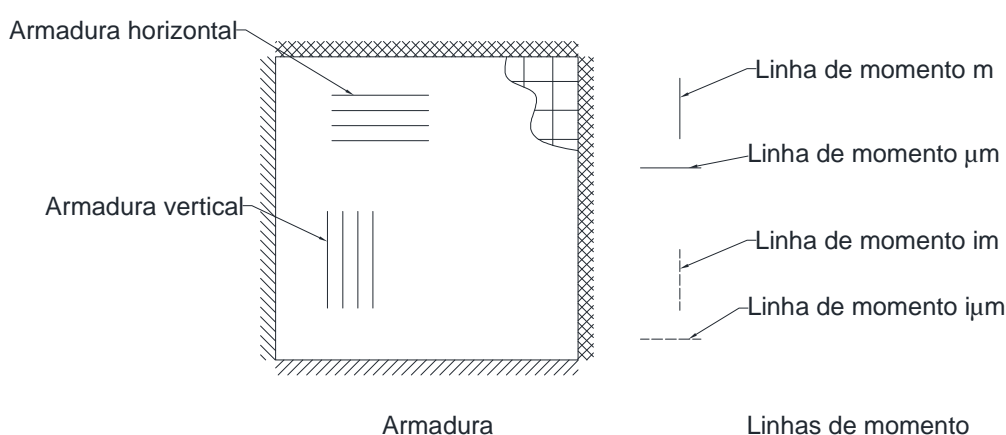
3.1.5 Momentos principais

É usual expressar o momento de ruptura da laje em termos de comprimento unitário. A adoção dessa forma leva a simplificações no dimensionamento da laje, uma vez que se calcula a quantidade de armadura necessária para aquele comprimento unitário. Jones e Wood (1967, p. 36) adotam o conceito de linhas de momento principal, que são linhas que indicam o sentido dos momentos de ruptura principais e são ortogonais à direção da armadura (Figura 8).

A representação das linhas de momento tem validade tanto para quando o momento for positivo quanto para quando for negativo, devendo salientar que, quando da ocorrência de linhas de ruptura negativas na laje, um coeficiente i é inserido na fórmula. Esse coeficiente, que é a relação entre o valor médio do momento no apoio (uma vez que, em uma laje, a distribuição de

momentos não é constante) com relação aos momentos no vão central, pode ser determinado através de uma solução elástica, ou ser estimado grosseiramente. Quando o projetista não tiver valores determinados para i , recomenda-se que o valor a se utilizar para esse coeficiente esteja entre 1 e 2, sendo que o valor que tende a equalizar a quantidade de armadura na laje, além de garantir que, no Estado Limite Último, a laje venha a ter uma ruptura dútil, é de 1,5. (JONES; WOOD, 1964, p. 71)

Figura 8 – Linhas de momento principal



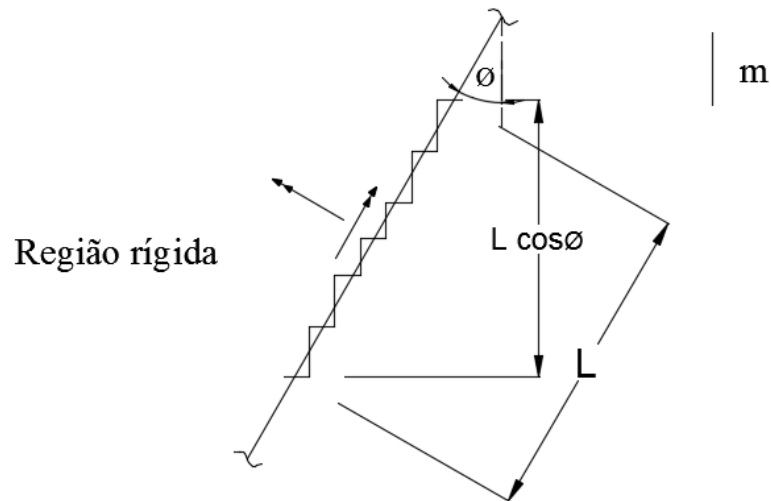
(fonte: adaptado de JONES; WOOD, 1967, p. 36)

Logo, se uma linha de ruptura tem o sentido de um momento principal m , o momento atuante na mesma também será m . Para se chegar ao cálculo do valor de m , Johansen estabeleceu um critério de ruptura para o seu cálculo, cujas premissas são como seguem (JONES; WOOD, 1967, p. 38, tradução nossa):

- a) os momentos normal e torsor em uma linha de ruptura podem ser calculados considerando cada direção de armadura por vez, sendo o efeito total a soma dos efeitos isolados;
- b) para cada direção de armadura considerada, a linha de ruptura é considerada como sendo dividida em pequenos pedaços, paralelos e perpendiculares às armaduras, conforme figura [...] [9];
- c) toda armadura que cruza uma linha de ruptura é considerada como em regime de escoamento;
- d) assume-se que todas as barras de armadura permaneçam em sua direção reta original quando o aço escoar, i.e. não ocorre encurvamento da barra, ou mudança na direção horizontal do aço ao cruzar a linha de ruptura;

- e) quando cada direção de armadura é considerada separadamente, nos pequenos pedaços perpendiculares à armadura existirá somente momento normal/unidade de comprimento m [...] enquanto que nos pedaços que são paralelos à direção da armadura não há nem momento normal nem momento torsor;
- f) os valores para o momento normal e o momento torsor nas linhas de ruptura são equivalentes às componentes de momento normal nos pedaços.

Figura 9 – Critério de escalonamento de Johansen



(fonte: adaptado de JONES; WOOD, 1967, p. 39)

Considere a linha de ruptura de comprimento L mostrada na figura 9, que possui um ângulo ϕ com a linha de momento principal m , medido no sentido horário. A projeção da linha de ruptura sobre a linha de momento será $L \cos \phi$ e, por consequência, o momento total atuante na linha de ruptura será $mL \cos \phi$. Sejam m_n e m_{ns} os momentos normal e torsor, respectivamente correspondentes à linha de ruptura. Então a parcela do momento total que contribuirá ao momento normal é $m \cos^2 \phi$, enquanto que a parcela do momento total que corresponde ao momento torsor é $m \cos \phi \sin \phi$. Para o caso onde há várias barras de armadura em direções diferentes, pode-se generalizar as equações de momento normal e de momento torsor para as seguintes equações (JONES; WOOD, 1967, tradução nossa):

$$m_n = \sum_{i=1}^n m_i \cos^2 \phi_i \quad (\text{fórmula 1})$$

$$m_{ns} = \sum_{i=1}^n m_i \cos \phi_i \sin \phi_i \quad (\text{fórmula 2})$$

Onde:

m_n é o momento normal atuante em uma linha de ruptura;

m_{ns} é o momento torsor correspondente à linha de ruptura;

m_i é o momento de ruptura correspondente à i -ésima linha de momento principal;

ϕ_i é o ângulo entre a linha de ruptura e a i -ésima linha de momento principal.

Conforme Jones e Wood (1967, p. 40, tradução nossa), “[...] quando do uso das equações acima descritas, somente as linhas de momento que tenham o mesmo sinal que a linha de ruptura devem ser levadas em conta.”. Sendo assim, para o caso em que se arme uma laje para que a mesma possa resistir a momentos fletores positivos quanto a momentos fletores negativos em seu vão central, por exemplo, as linhas de momento positivo têm um determinado valor para o momento normal e para momento torsor, enquanto que as linhas de momento negativo têm outro.

3.2 MÉTODO DOS TRABALHOS VIRTUAIS

A análise pelo método dos trabalhos virtuais, também conhecido como método da energia, se dá quando, proposto um mecanismo de ruptura, é feito o balanço, para a laje como um todo, entre o trabalho realizado pelas cargas externas para deformar a laje com o trabalho realizado pelas forças internas na laje. Nesse caso, como só ocorrem deformações nas linhas de ruptura, as únicas forças internas atuantes são os momentos nas mesmas.

Proposto um mecanismo de ruptura válido, é dado um deslocamento virtual para a laje e a energia despendida pelas cargas externas é igualada à energia dissipada nas linhas de ruptura. A equação a que se chega fazendo esse processo é chamada equação dos trabalhos virtuais e permite obter a relação entre o momento resistente e a carga aplicada à laje, para um determinado mecanismo de falha proposto (JONES; WOOD, 1967, p. 48, tradução nossa).

Este método é bastante eficiente quando se deseja encontrar o momento que será ocasionado por uma determinada carga a um mecanismo proposto. Entretanto, quando o que se deseja encontrar é o *layout* que, para um determinado padrão de ruptura, seja o mais crítico, a análise pelo método dos trabalhos virtuais pode ser feita de duas formas. Na primeira, a análise é feita de forma aritmética, sendo que, para um mecanismo principal, são feitas pequenas mudanças nas dimensões das charneiras e é feito o equacionamento para cada um dos casos. Na segunda forma de análise, também conhecida como forma algébrica de análise, as dimensões das linhas de ruptura são tratadas como variáveis, montando-se assim uma equação que torna o momento uma função dessas variáveis. De modo a se obter o valor que será crítico, utilizam-se os processos do cálculo diferencial e numérico para computar as magnitudes dessas variáveis que maximizam a equação (JONES; WOOD, 1967).

Ao se utilizar a forma aritmética para determinar o momento máximo atuante em determinado mecanismo de colapso, deve-se levar em conta que, quanto mais se refinar o problema, maior será o tempo despendido para se chegar ao mecanismo crítico. Já quando se utiliza a forma algébrica de análise, cuidados devem ser tomados no que diz respeito à forma do gráfico m/p *versus* as variáveis das linhas de ruptura. Só se aconselha o uso deste método quando esse gráfico apresentar um momento máximo estacionário, *i.e.* a região próxima do momento crítico deve ser abatida, sem nenhuma descontinuidade. Quando existirem descontinuidades na laje, esse processo não é recomendado (JONES; WOOD, 1967).

Para a construção da equação dos trabalhos virtuais, deve-se aplicar ao mecanismo proposto um deslocamento virtual e calcular a energia dissipada pelas cargas externas, igualando-a à energia despendida pelos esforços internos para evitar a rotação da laje, de maneira que a equação dos trabalhos virtuais será:

$$\tau_E = \tau_I \quad \text{(fórmula 3)}$$

Sendo:

τ_E a energia despendida ou trabalho realizado pelas forças externas;

τ_I a dissipação interna de energia.

A forma a partir da qual se chega aos termos da equação 3 é apresentada nos subitens a seguir.

3.2.1 Trabalho realizado pelas forças externas

Para analisar o trabalho realizado pelas cargas externas, deve-se analisar um elemento infinitesimal de uma região rígida da laje, cujas dimensões são dx e dy , conforme figura 10a. Supondo que nesse elemento esteja aplicada uma carga uniformemente distribuída p e que, devido ao mecanismo de ruptura, o mesmo tenha um deslocamento δ , tem-se que o trabalho realizado pela carga externa em toda a região rígida da laje é:

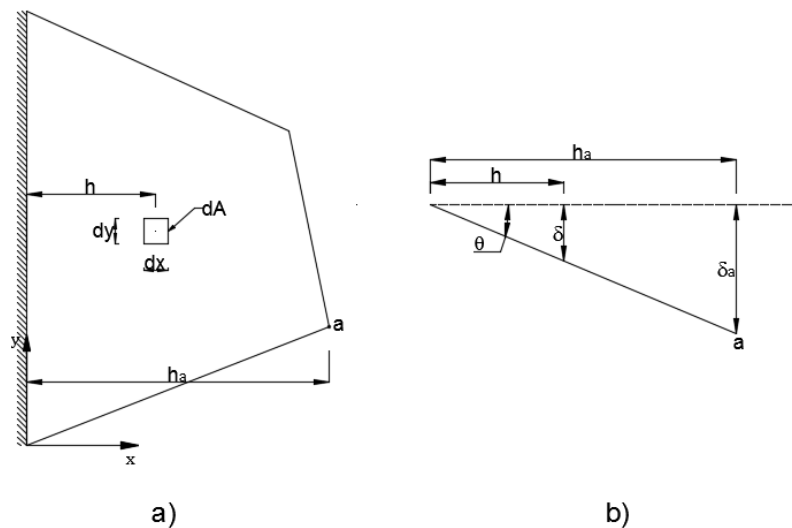
$$\tau_E = \sum_{\text{cada região}} \iint p \delta \, dx \, dy \quad (\text{fórmula 4})$$

Onde:

p é a carga uniformemente distribuída;

δ é o deslocamento em cada ponto da região considerada.

Figura 10 – Região rígida de uma laje



(fonte: adaptado de JONES; WOOD, 1967, p. 54)

Essa integração deve ser feita em toda a região rígida considerada. O trabalho total é a soma dessas integrações em cada elemento.

Caso existam outros tipos de carregamentos, como por exemplo cargas pontuais ou cargas lineares, a equação dos trabalhos externos deve ser acrescida das parcelas de trabalho realizadas por esses carregamentos. Logo, de uma forma mais generalista, pode-se apresentar a equação do trabalho realizado pelas cargas externas da seguinte forma:

$$\tau_E = \sum_{\text{cada região}} \iint p \delta \, dx \, dy + \sum_{j=1}^m P_j \Delta_j + \sum_{\text{cada carga linear}} \int q \varrho \, ds \quad (\text{fórmula 5})$$

Onde:

P_j é a carga pontual aplicada em um ponto qualquer da laje;

Δ_j é o deslocamento no ponto de aplicação da carga P_j ;

q é a carga linear aplicada na laje considerada;

ϱ é o deslocamento no elemento de linha ds

O primeiro termo da equação acima pode ser calculado de outra forma, que evita a integração em cada região. Suponha uma região rígida qualquer de uma laje, limitada pelas linhas de ruptura e pelo eixo de rotação. Uma vez que a rotação é pequena, é válida a relação:

$$\text{tg } \theta_i = \theta_i \quad (\text{fórmula 6})$$

Por sua vez, tem-se que, pela figura 9b:

$$\theta_i = \text{tg } \theta_i = \frac{\delta_a}{h_a} \quad (\text{fórmula 7})$$

Onde:

θ_i é a rotação da região rígida sobre seu eixo;

δ_a é o deslocamento do ponto a a uma distância h_a do eixo de rotação.

Essa equação é válida para calcular a rotação em qualquer ponto da laje. Com um termo a mais nessa equação, se torna possível o cálculo do deslocamento em qualquer ponto da região rígida, dado o deslocamento em um ponto conhecido. Esse ponto conhecido, onde são aplicados os deslocamentos virtuais são os nós onde ocorre a interseção entre linhas de ruptura. Considerando esse nó como sendo o ponto a da figura 9a, e sabendo que h é a distância ortogonal, de um ponto qualquer da laje, em relação ao eixo de rotação, tem-se:

$$\delta = \frac{\delta_a}{h_a} h = h\theta_i \quad (\text{fórmula 8})$$

A equação do trabalho pela carga distribuída atuando sobre uma região i fica:

$$\tau_{Ei} = \iint p\delta \, dx \, dy = \iint ph\theta_i \, dx \, dy = \theta_i \iint ph \, dx \, dy \quad (\text{fórmula 9})$$

Além disso, sabe-se que a distância do centroide da i -ésima região rígida a seu apoio é:

$$\bar{h}_i = \frac{\iint ph \, dx \, dy}{\iint p \, dx \, dy} \quad (\text{fórmula 10})$$

$$\iint ph \, dx \, dy = \bar{h}_i \iint p \, dx \, dy \quad (\text{fórmula 11})$$

Onde \bar{h}_i é a distância do centro de gravidade da região considerada ao eixo de rotação

Substituindo [11] em [9], tem-se:

$$\tau_{Ei} = \theta_i \iint p h \, dx \, dy = \theta_i \bar{h}_i \iint p \, dx \, dy \quad (\text{fórmula 12})$$

Porém, como p , na maior parte dos problemas envolvendo lajes de concreto armado para edifícios é constante, ele pode sair do integrando. Só sobra a integral dupla sobre todo o elemento, que equivale à área do mesmo. Logo, o trabalho realizado pelas cargas externas na i -ésima região rígida da laje fica igual a:

$$\tau_{Ei} = \theta_i \bar{h}_i p A_i \quad (\text{fórmula 13})$$

Onde A_i é a área da região rígida i da laje.

Finalmente, a equação do trabalho realizado pelas cargas externas na laje fica:

$$\tau_E = \sum_{i=1}^n \theta_i \bar{h}_i p A_i + \sum_{j=1}^m P_j \Delta_j + \sum_{\text{cada carga linear}} \int q \varrho \, ds \quad (\text{fórmula 14})$$

3.2.2 Trabalho realizado pelas forças internas

No que tange o trabalho realizado pelas forças internas para equilibrar os esforços externos, sabe-se que, devido às considerações iniciais de que as deformações plásticas estão concentradas nas linhas de ruptura, somente os momentos normais atuantes nas mesmas realizam trabalho. Sendo assim, conforme a carga aplicada faz com que a laje deforme, surgem, na mesma, rotações normais às linhas de ruptura que serão resistidas pelos momentos normais que atuam na linha de ruptura (JONES; WOOD, 1967, tradução nossa). Logo, a equação que resulta no trabalho realizado pelas forças internas fica:

$$\tau_I = \sum_{k=1}^{\kappa} \theta_{nk} \int m_{nk} ds \quad (\text{fórmula 15})$$

Onde:

k é o número de linhas de ruptura na configuração considerada;

θ_{nk} é a rotação medida perpendicularmente à linha de ruptura considerada e tem valor constante;

m_{nk} é o momento normal por unidade de comprimento na linha de ruptura, conforme definido anteriormente.

Essa integração é feita em cada linha de ruptura e depois, para se obter o valor para a laje, é feita a soma de todos os valores obtidos. Levando em conta que o momento ao longo da linha de ruptura é considerado constante, conforme considerações iniciais, a equação para a dissipação da energia interna se torna igual a:

$$\tau_I = \sum_{k=1}^{\kappa} \theta_{nk} m_{nk} l_k \quad (\text{fórmula 16})$$

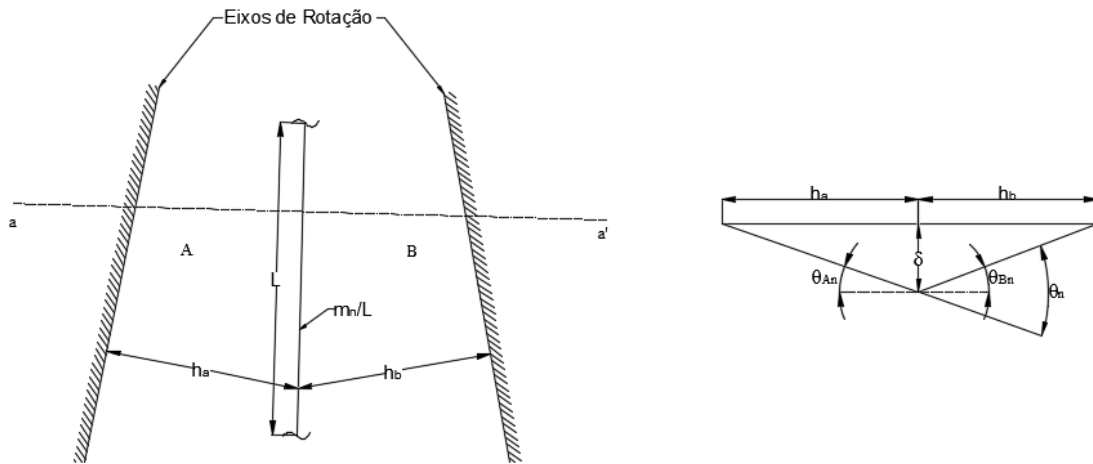
Com l_k sendo o comprimento da k -ésima linha de ruptura.

Vale ressaltar aqui que, devido ao fato de os deslocamentos verticais nas linhas de ruptura não sofrerem descontinuidades, isto é, as regiões rígidas, nas linhas de ruptura, não apresentam “dentes”, o trabalho realizado pelo momento tissor atuante na linha de ruptura é nulo.

Para se encontrar o valor de θ_{nk} , uma linha perpendicular à linha de ruptura deve ser traçada, de modo que ela tenha seu fim em um eixo de rotação, pois nos eixos o deslocamento da região rígida é nulo. Com essa condição sendo atendida (Figura 11), a rotação θ_{nk} da linha de ruptura pode ser calculada como sendo a soma das rotações normais das regiões rígidas θ_{ni} que fazem fronteira com ela. Vale notar que, uma vez que o momento de ruptura sempre atua de modo a resistir à abertura de fissuras e consequente ruptura da laje, a equação que calcula a dissipação de energia em uma linha de ruptura sempre terá valor positivo. Porém, nem sempre o valor de

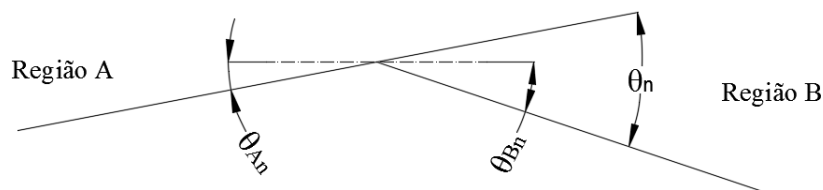
θ_{ni} é positivo, como pode ser visto na figura 12. Sendo assim, se torna necessário estabelecer uma notação onde seja possível identificar quando θ_{ni} é positivo ou negativo (JONES; WOOD, 1967, p. 60).

Figura 11 – Rotação normal entre duas regiões rígidas



(fonte: adaptado de JONES; WOOD, 1967, p. 60)

Figura 12 – Rotação negativa em uma linha de ruptura



(fonte: adaptado de JONES; WOOD, 1967, p. 61)

Uma vez que o vetor momento foi definido como sendo positivo quando apontando no sentido anti-horário na região rígida considerada e o vetor da rotação da parte rígida é positivo quando agindo no sentido horário (a rotação em todas as regiões rígidas será positiva caso as linhas de ruptura sejam positivas), e que o trabalho realizado pelo momento visa a resistir a rotação da linha ruptura, chega-se à conclusão que, quando os vetores momento e rotação apontam na mesma direção, o termo da soma do trabalho interno ao qual a rotação considerada está se referindo será positivo. Caso contrário, *i.e* caso o vetor momento e o vetor rotação apontem em

direções opostas, o seu termo correspondente da soma do trabalho será negativa (JONES; WOOD, 1967). Com base nessa prerrogativa, o sinal dos termos da equação do trabalho interno fica então condicionado ao sinal da rotação normal na linha de ruptura, podendo a [16] ser representada por:

$$\tau_I = \sum_{k=1}^{\kappa} \left[m_{nk} l_k \sum_{i=1}^n \theta_{ni} \right] \quad (\text{fórmula 17})$$

Sendo θ_{ni} a rotação da i -ésima região rígida sobre seu apoio correspondente.

Ao se analisar a fórmula 16, percebe-se que os valores $m_{nk} l_k$ e θ_{nk} são vetores e, devido a essa característica, podem ser decompostos conforme determinados eixos de orientação escolhidos. Isso tende a facilitar o cálculo da dissipação de energia, uma vez que os eixos podem ter a orientação das linhas de momento principal, caso a laje seja armada iso ou ortotropicamente. Uma vez que o trabalho realizado pelo momento para resistir à rotação é o produto escalar desses dois vetores, ao se utilizar o conceito apresentado para os eixos de orientação, a expressão mais geral para a dissipação de energia nas linhas de ruptura deve ser utilizada, que é (JONES; WOOD, 1967, tradução nossa):

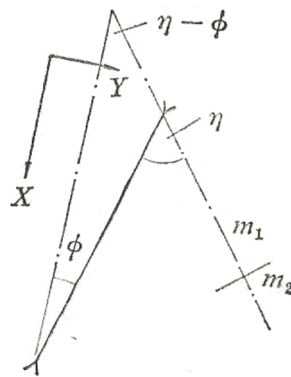
$$\tau_I = \overrightarrow{\theta_{nk}} \cdot \overrightarrow{m_{nk} l_k} = |\theta_{nk}| |m_{nk} l_k| \cos \beta \quad (\text{fórmula 18})$$

Onde β é o ângulo entre o vetor momento e o vetor rotação.

Examinando agora a fórmula 17, os valores de θ_{ni} , por também serem interpretados como vetores, já que representam a rotação que se dá no apoio da i -ésima região rígida, podem ser projetados sobre os eixos de orientação que se desejar. Porém, ao se fazer a projeção dessas rotações sobre os eixos orientados, e levando em conta que θ_{ni} é a rotação de uma região rígida com respeito ao eixo de rotação, os momentos atuantes nas linhas de ruptura (momento normal e momento torsor) são tratados como forças externas atuantes na região rígida. Logo, por mais que o momento torsor não execute trabalho sobre a laje, ele deve ser considerado para o cálculo por esse método (JONES; WOOD, 1967). Com isso, considerando o caso geral da figura 13,

onde as linhas de momento principal m_1 e m_2 são perpendiculares entre si, que a linha de momento m_1 possui um ângulo η com a linha de ruptura e que o eixo de orientação Y arbitrado possui um ângulo $(\eta - \phi)$ com a linha de momento principal m_1 , se chega à fórmula dos momentos m_x e m_y resultantes da projeção dos momentos normal e tissor em uma linha de ruptura sobre os eixos X e Y arbitrados.

Figura 13 – Eixos orientados



(fonte: JONES; WOOD, 1967, p. 115)

$$m_x = m_1 \cos^2(\eta - \phi) + m_2 \sin^2(\eta - \phi) \quad (\text{fórmula 19})$$

$$m_y = m_1 \sin^2(\eta - \phi) + m_2 \cos^2(\eta - \phi) \quad (\text{fórmula 20})$$

Sendo:

m_x e m_y os momentos projetados sobre os eixos orientados X e Y;

m_1 e m_2 os momentos principais relacionados à disposição das armaduras;

η é o ângulo entre o momento principal m_1 e a linha de ruptura;

ϕ o ângulo entre a linha de ruptura e um dos eixos orientados (nesse caso, o eixo Y).

Para uma região rígida, o trabalho realizado pelas forças internas, com a possibilidade de projeção sobre os eixos orientados, fica então:

$$\tau_{li} = \sum m_x l_x \theta_x + \sum m_y l_y \theta_y \quad (\text{fórmula 21})$$

Sendo:

l_x e l_y são as projeções do comprimento da linha de ruptura sobre os eixos X e Y, respectivamente;

θ_x e θ_y as projeções das rotações da região rígida sobre os eixos orientados X e Y.

Levando em conta que o trabalho realizado pelas forças internas é a soma do trabalho realizado em todas as regiões rígidas da laje, então:

$$\tau_I = \sum_{i=1}^n \tau_{li} = \sum_{j=1}^m \left[\sum m_x l_x \theta_x + \sum m_y l_y \theta_y \right] \quad (\text{fórmula 22})$$

A fórmula 22 é a fórmula que possibilita o cálculo da dissipação da energia nas linhas de ruptura de forma fácil, rápida e automática.

3.3 MÉTODO DO EQUILÍBRIO

O método do equilíbrio é uma forma diferente de se expressar a equação dos trabalhos virtuais. Jones e Wood (1967, p. 144, tradução nossa) apresentam uma definição que diz que “[...] na configuração através da qual o momento de ruptura encontrado é um momento estacionário máximo, certas forças denominadas forças nodais deverão ser acrescentadas nas interseções entre linhas de ruptura de modo a se garantir o equilíbrio global da laje.”.

O conceito de forças nodais introduzido por Johansen (1962, p. 52) é o de forças, estaticamente equivalentes entre si, e que são a representação dos esforços de corte ao longo das linhas de ruptura. Fica claro assim que a distribuição desses esforços ao longo das linhas de ruptura não interessa, bastando apenas que as forças nodais sejam equivalentes a eles, e que estejam aplicadas nos pontos terminais de uma linha de ruptura. A determinação do valor dessas forças nodais é expressa por Wood e Jones (1967, p. 150, tradução nossa) e descrito a seguir:

De forma a se avaliar a força nodal entre duas linhas de ruptura primeiro é necessário considerar o equilíbrio de uma pequena região triangular entre essas linhas. Essa região triangular abd , chamada A' , é limitada pela linha de ruptura ab ; também por bd , que é uma parte da linha de ruptura bc ; e pela linha (não uma linha de ruptura) ad em um pequeno ângulo $\delta\phi$ com ab .

É necessário adicionar alguns comentários sobre a linha ad , uma vez que o que se considera estar acontecendo na linha ad governa toda a prova. Estritamente falando, em uma solução de limite superior não há uma razão para o aço escoar em uma região próxima da linha ad . Entretanto, isso pode ser considerado como uma posição alternativa, pouco deslocada, da linha de ruptura ab , de maneira que a quantidade de armadura necessária fosse a mesma caso o método dos trabalhos virtuais fosse utilizado independentemente para se analisar os dois *layouts*. Fica óbvio de se ver que se o equilíbrio da região A' é examinado, com o aço escoando em ab e ad simultaneamente, já é um teste suficiente.

Com base nessas premissas, Johansen (1962) estabeleceu os valores para as forças nodais nas linhas de ruptura. De maneira a evitar os cálculos por ele realizados, são mostrados a seguir os axiomas que ele estabeleceu para alguns casos especiais de linhas de ruptura, cuja validade estende-se tanto a lajes com armadura isótropa quanto a lajes com armadura ortótropa:

- a) num ponto onde convergem linhas de ruptura do mesmo sinal, são nulas todas as forças nodais
- b) em um nó onde convergem linhas de ruptura de sinal diferente, poderá haver no máximo linhas de ruptura em três direções diferentes.

Em seu trabalho, Jones e Wood (1967) acrescentam um embasamento mais matemático para se chegar à determinação dos valores das forças nodais que juntamente trazem mais restrições ao emprego do método, mostrando que seu uso é permitido para o cálculo do valor de forças nodais apenas em nós que podem se mover para se procurar a solução de momento máximo estacionário, e também mostrando que, não se pode determinar o valor da força nodal que esteja entre uma linha de ruptura e uma região de contorno, .

De modo que já se sabe como determinar o valor das forças nodais, parte-se agora para a conceituação sobre o método do equilíbrio. Quando este é utilizado para se calcular o valor do momento de ruptura m , a análise é feita nas seguintes etapas (JONES; WOOD, 1967, p. 163, tradução nossa):

- a) postula-se um mecanismo de falha;
- b) calcular o valor de quaisquer forças nodais necessárias;
- c) avaliar as equações de equilíbrio para cada região rígida;

- d) eliminar das equações de equilíbrio quaisquer parâmetros variáveis que definem o mecanismo e então encontrar o valor de m .

Esse método, além de ter mais fácil aplicação quando comparado ao método dos trabalhos virtuais, faz o problema convergir à uma solução mais rapidamente. Porém, dadas as dificuldades e limitações de se poder avaliar as forças nodais, o método do equilíbrio não é mais tão utilizado.

3.4 PRINCÍPIOS DE ANÁLISE LIMITE

Um problema que acontece quando da utilização do método da energia ou do método do equilíbrio é a possibilidade de sempre ser possível refinar o problema, de modo a se chegar em uma configuração crítica cada vez mais aprimorada. Esse problema foi parcialmente resolvido quando Prager⁵ estabeleceu as regras que regem a análise limite (WOOD; JONES, 1965, p. 15, tradução nossa).

A análise limite, conforme definida por Nielsen e Hoang (2010, p. 8, tradução nossa), é “A teoria do colapso por escoamento [...]” de uma laje. Com base nesse conceito, Jones e Wood (1967, p. 16, tradução nossa) concluem que “[...] a carga mínima que levará a laje ao colapso será obtida quando as soluções encontradas para o limite superior e o limite inferior coincidirem, *i.e.* o mesmo valor para a carga de colapso for encontrado por uma técnica de limite superior e outra de limite inferior.”.

De acordo com Nielsen e Hoang (2010, p. 10, tradução nossa), o teorema do limite superior, o qual uma solução de limite superior deve atender, “[...] pode ser usado para encontrar valores de carga que são maiores ou iguais à carga de colapso.”. As condições necessárias para que determinada solução seja de limite superior são (JONES; WOOD, 1967, p. 16, tradução nossa):

- a) um mecanismo de ruptura válido que satisfaça as condições mecânicas de contorno deve ser encontrado;
- b) a dissipação interna de energia nas linhas de ruptura deve ser igual ao trabalho realizado pelas cargas externas;
- c) ou o material permanece rígido ou o mesmo se deforma plasticamente;
- d) onde ocorrem deslocamentos a direção das deformações é definida pelo mecanismo. A direção das deformações deve então definir as tensões de ruptura

⁵ PRAGER, W.; HODGE, P. G. Theory of perfectly plastic solids. New York: Dover, 1951.

necessárias para se calcular a dissipação de energia. (Isso também é conhecido como critério de ruptura).

Já uma solução de limite inferior é aquela que “[...] **apresenta uma distribuição de tensões estaticamente admissível e segura.**” (NIELSEN; HOANG, 2010, p. 8, grifo do autor). Para que essa sentença seja válida, as condições necessárias para que uma técnica seja de limite inferior são (JONES; WOOD, 1967, p. 16, tradução nossa):

- a) um campo de tensões para toda a laje deve ser encontrado, satisfazendo as equações diferenciais do equilíbrio;
- b) as forças e momentos nas bordas devem satisfazer às condições de contorno;
- c) em nenhum ponto da laje as tensões principais podem violar o critério de ruptura do material.

Conforme foi apresentado, chega-se à conclusão de que uma solução de limite inferior é uma forma de se fazer o equilíbrio da laje. Porém, não se pode assumir o método do equilíbrio proposto por Johansen como sendo uma técnica de limite inferior pois, no método do equilíbrio, o estado de tensões é definido apenas nas linhas de ruptura, não satisfazendo assim à condição a) para uma solução de limite inferior (JONES; WOOD, 1967, p. 16). Além disso, outra conclusão a que se chega é a de que o método dos trabalhos virtuais é, por si só, uma técnica de limite superior para a solução de lajes. Como a parcela de momento torsor não efetua trabalho quando do cálculo pelo método dos trabalhos virtuais, avalia-se a carga última somente em termos do momento normal. Jones e Wood (1967, p. 31) citam que essa consideração, por não considerar a interação entre o momento normal e as outras componentes de tensões atuantes no material, leva a valores conservativos de momento de ruptura, quando comparados com ensaios. Isso mostra que, mesmo sendo uma solução de limite superior, o método dos trabalhos virtuais calcula valores para o momento último com segurança.

4 ALGORITMO DE CÁLCULO

Conforme Jones e Wood (1964, p. 96-97), o processo de cálculo do momento crítico pela teoria das linhas de ruptura pode ser realizado de duas formas. A primeira consiste na busca da equação que coloca o momento como função das rotações nos apoios, para assim maximizar essa função. Como visto anteriormente, esse processo pode ser tedioso e custoso para o caso de lajes com formatos diferentes das retangulares. Já a segunda forma de se calcular o momento consiste em, através de pequenas perturbações no sistema que se quer estudar, buscar o valor de momento que é o máximo. Esse método, do ponto de vista de implementação computacional, pode demandar um grande processamento por parte da máquina, porém é implementado com mais facilidade. Esse trabalho optou por utilizar o segundo método de cálculo.

De acordo com a teoria das linhas de ruptura, é necessária a definição de um mecanismo provável de falha. Para tal, um algoritmo que, a partir de um ângulo de rotação dos lados fornecido, possa calcular a configuração de ruptura teve de ser desenvolvido e seu funcionamento é explicado na próxima seção. Além disso, uma rotina que calculasse as propriedades das regiões rígidas também teve de ser desenvolvida e seu funcionamento se dá através do cálculo das mesmas por integrais de Green. Tendo as propriedades das regiões rígidas calculadas, a rotina que efetuava o cálculo do momento de ruptura pôde ser facilmente aplicada. Basicamente, são calculados os trabalhos efetuados pelas cargas externas e pelos esforços internos e verifica-se qual o valor do momento de ruptura para tal solicitação. Calculado esse momento, é causada uma perturbação no sistema de maneira tal a se chegar a uma nova configuração de falha. O processo se repete e se calcula um novo momento de ruptura, até que ocorra a sua maximização utilizando derivação numérica e métodos gradiente.

4.1 CÁLCULO DA INTERSECÇÃO ENTRE REGIÕES RÍGIDAS

Para se calcular os pontos que caracterizam as regiões rígidas, deve-se levar em conta a premissa de que em todo o contorno da laje é um apoio linear (apoio simples ou engaste) e o número de regiões rígidas da laje coincide com o número de arestas de seu contorno, sendo que cada região rígida sofre rotação em torno da aresta pertencente ao contorno. Sendo assim, conhecendo os vértices da laje, é possível caracterizar cada lado que contém uma região rígida através da equação geral do plano. Levando em conta que no estado inicial, o vetor normal à região rígida é o vetor unitário \mathbf{k} , ao se aplicar uma rotação θ à mesma, o vetor tomará uma

nova configuração e assim a equação que descreve a geometria da região rígida mudará. Para se escrever a equação da parte rígida é necessário que se tenha um ponto pertencente à mesma e um vetor normal. Sendo assim, cada região rígida fica assim afixada ao vértice que é atribuído ao lado que se está calculando, obtendo-se a seguinte equação (STEINBRUCH; WINTERLE, 2012, p.144):

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \quad (\text{fórmula 23})$$

Onde:

a, b e c são os valores dos cossenos diretores do vetor normal à região rígida, já rotacionado; x_0, y_0, z_0 são as coordenadas do vértice da laje ao qual a região rígida está amarrada.

Como processo de partida, calculam-se os vetores que orientam as retas que se interseccionam entre dois lados adjacentes. Esse cálculo pode ser feito através do produto vetorial entre os dois vetores normais às regiões rígidas que são consideradas, conforme Steinbruch e Winterle(2012, p. 176).

Após o cálculo dos vetores que orientam as retas intersecção entre dois planos, calcula-se, novamente para lados adjacentes, o ponto que caracteriza a intersecção entre essas duas retas. O processo de cálculo para essa etapa consiste em igualar os valores de x e y das equações paramétricas das duas retas envolvidas no processo e encontrar os valores dos parâmetros t e t' de cada uma das retas. Esse processo se dá ao resolver um sistema de duas equações, que toma a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} a_1 & -a_2 \\ b_1 & -b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{0,2} - x_{0,1} \\ y_{0,2} - y_{0,1} \end{bmatrix} \quad (\text{fórmula 24})$$

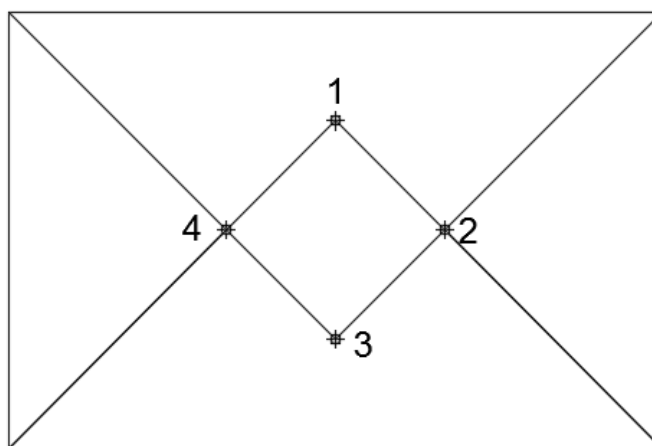
Onde:

a_1, b_1 e a_2, b_2 são os valores das coordenadas do vetor normal ao lado que se está analisando e seu lado adjacente anterior, respectivamente.

$x_{0,1}, y_{0,1}$ e $x_{0,2}, y_{0,2}$ são as coordenadas dos pontos que dão origem à reta intersecção, que tem origem nos vértices da laje.

Uma vez que a configuração de ruptura se constitui não somente da interação entre três regiões rígidas e sim entre todos os lados envolvidos no processo (os lados da laje), alguns pontos calculados ao se verificar a intersecção entre três lados adjacentes não são verdadeiros, isto é, não são pontos pertencentes ao contorno da região rígida que se pretende definir. Para se desfazer dos mesmos, quando é identificada a existência de mais de um ponto de intersecção na reta de intersecção entre planos considerada, os de maior valor do parâmetro t são eliminados, permanecendo apenas o ponto de menor valor. Esse caso de identificação do ponto verdadeiro é exemplificado na Figura 14, onde para uma laje retangular, utilizando o processo de busca pelos pontos de intersecção, foram encontrados 4 pontos prováveis. A numeração adotada visa a mostrar a ordem na qual os pontos foram sendo encontrados pelo algoritmo.

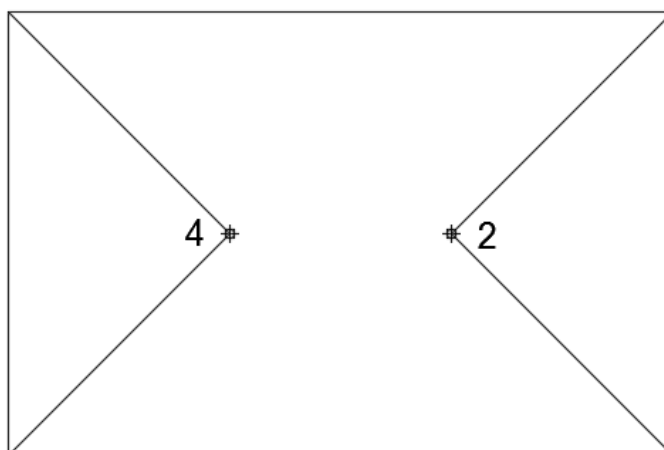
Figura 14 – Detecção dos pontos prováveis



(fonte: elaborado pelo autor)

Conforme dito anteriormente, a eliminação dos pontos falsos ocorria quando se descobria o ponto calculado que possuísse o menor valor de parâmetro t , ou seja, o ponto que, quando calculado, fosse o menos distante ao vértice que originou a reta intersecção na qual ele se encontra era o ponto real. Tomando a Figura 14 como exemplo, tem-se que os pontos 1 e 3 são os pontos falsos, uma vez que, em relação aos pontos 2 e 4, esses pontos estão mais distantes dos vértices que dão origem às retas intersecção entre planos. Logo, os pontos 2 e 4 fechavam os contornos rígidos triangulares, como mostra a Figura 15.

Figura 15 – Pontos falsos eliminados



(fonte: elaborado pelo autor)

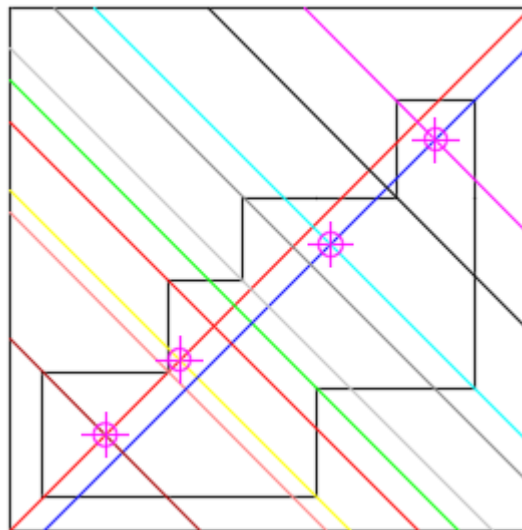
Após a eliminação dos pontos falsos, pode-se perceber que esse processo inicial resulta por encontrar as regiões rígidas cujo formato é triangular, de maneira tal que os pontos encontrados nessa etapa podem ser registrados como novos pontos e que, portanto, devem também pertencer a uma reta que caracteriza a intersecção entre dois planos, uma vez que, desse ponto tem-se origem uma reta que dá continuidade ao contorno. Esse processo tem semelhança com a árvore binária, onde, através de ramificações que partem de um nó inicial, se chega a uma solução final (WÜST; WAGNER, 2008).

A reta intersecção que passa por esses pontos é encontrada ao se levar em conta que, dos três planos envolvidos na etapa anterior, um deles é uma região rígida que já tem todos os seus pontos definidos, sobrando assim dois planos que se interceptam. O processo de cálculo é o mesmo que já foi citado anteriormente, à exceção de que agora as intersecções entre retas não são calculadas para três lados adjacentes, mas entre os dois planos que se interceptam e todos os demais planos correspondentes a lados cujos contornos rígidos ainda não tenham todos os seus pontos definidos.

A partir dessa etapa, o processo se torna, de uma maneira geral, mais automatizado, uma vez que, dentro de uma lista de nós que já foram calculados, faz-se a verificação da intersecção da reta intersecção que tem origem no nó atual com os nós restantes, e escolhe-se como verdadeiro aquele ponto que possuir menor valor de parâmetro t (deve-se ressaltar que o valor de t deve ser comparado em termos absolutos) em relação ao ponto atual (ou seja, o ponto mais próximo ao ponto anterior).

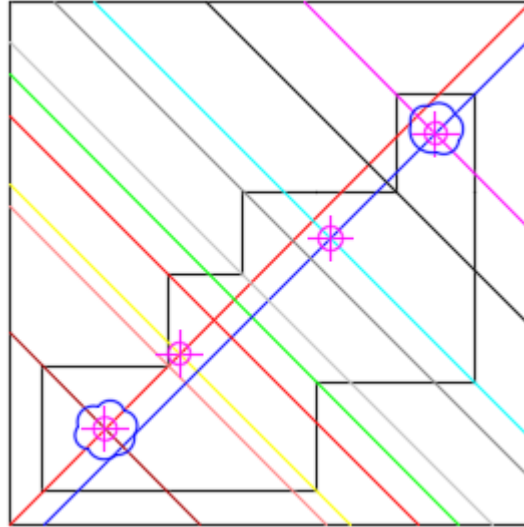
Esse processo segue até que se calculem todos os pontos que caracterizam as regiões rígidas. Porém, de maneira a se evitar que esse processo se repita indefinidamente, uma opção de fechamento das regiões rígidas tem que ser feita como condição de término do algoritmo. Para isso, um contador de regiões rígidas que ainda não foram fechadas é utilizado, onde, quando o contador for menor ou igual a 2, um processo diferente do automatizado deve ser realizado. Para se saber o número de nós que caracterizam as regiões rígidas, utiliza-se a fórmula apresentada por Wüst e Wagner (2008, p. 2082), que diz que esse número é igual ao número de vértices da laje subtraído de 2. Entretanto, deve ser levado em conta que esse é o número máximo de pontos e que algumas configurações são definidas apenas com um ponto, como é o caso de lajes quadradas e polígonos regulares. O processo de fechamento consiste na alocação dos nós restantes às listas de regiões rígidas e encerramento do algoritmo como um todo, uma vez que se chegou a uma configuração de falha provável. O processo de busca e fechamento das regiões rígidas é ilustrado nas Figuras 16 a 19, onde é mostrado o processo de busca e fechamento supracitado aplicado a uma laje com formato poligonal, e as linhas coloridas que aparecem nas imagens são as retas intersecção entre dois planos.

Figura 16 – Busca pelos pontos de intersecção prováveis e início do algoritmo



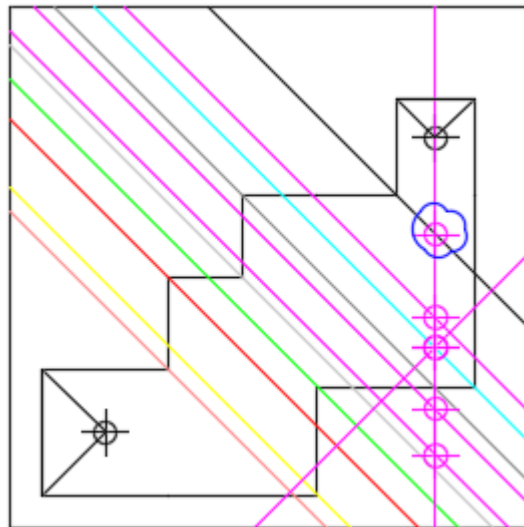
(fonte: elaborado pelo autor)

Figura 17 – Pontos verdadeiros, expressos dentro dos balões azuis



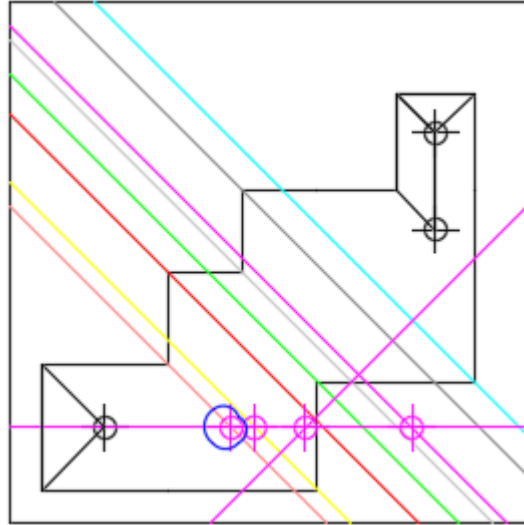
(fonte: elaborado pelo autor)

Figura 18 – Fechamento das regiões triangulares e busca por novos pontos de intersecção



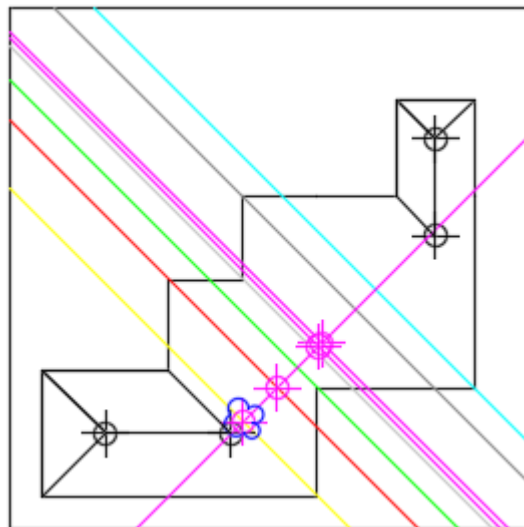
(fonte: elaborado pelo autor)

Figura 19 – Fechamento de outra região e continuação do processo de busca por novos pontos de intersecção



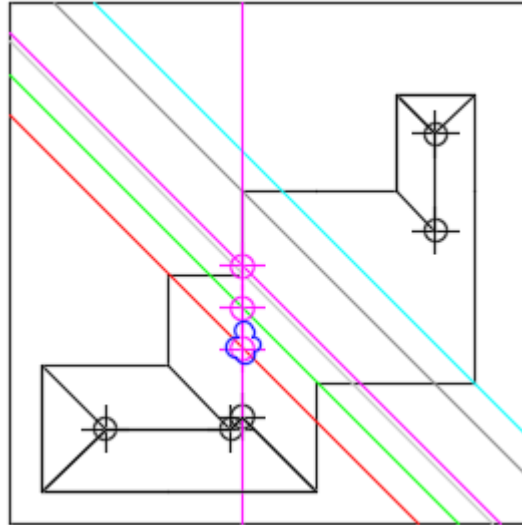
(fonte: elaborado pelo autor)

Figura 20 – Fechamento de nova região rígida e continuação do processo de busca



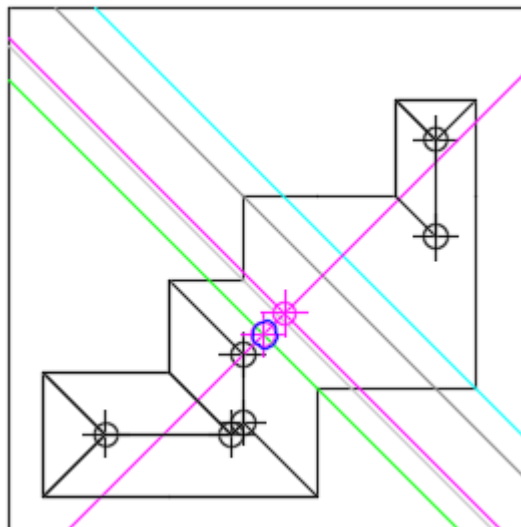
(fonte: elaborado pelo autor)

Figura 21 – Fechamento de outra região rígida e continuação do processo de busca



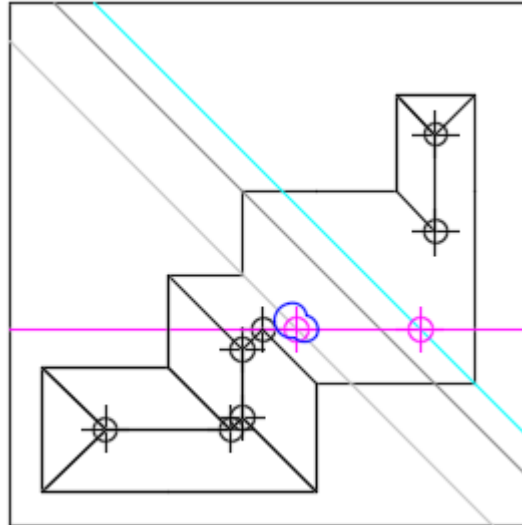
(fonte: elaborado pelo autor)

Figura 22 – Fechamento de região subsequente



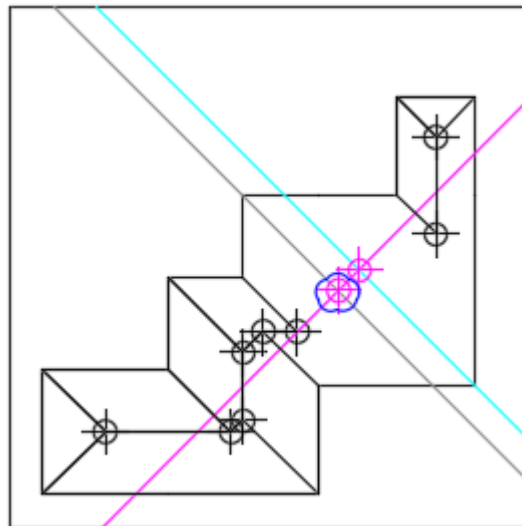
(fonte: elaborado pelo autor)

Figura 23 – Busca por novos pontos de intersecção na seqüência



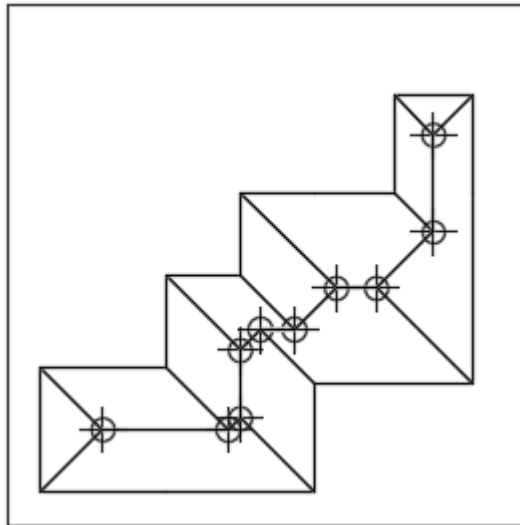
(fonte: elaborado pelo autor)

Figura 24 – Fechamento da região rígida definida a partir do ponto do passo anterior



(fonte: elaborado pelo autor)

Figura 25 – Determinação da configuração final



(fonte: elaborado pelo autor)

4.2 CÁLCULO DAS PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DAS REGIÕES RÍGIDAS

O cálculo de algumas propriedades importantes para a determinação do momento de ruptura pode ser feito com o auxílio das integrais de Green⁶. Conforme Spiegel (1969, p. 149), as integrais de Green são expressas através da seguinte fórmula:

$$\oint_{Curva} M dx + N dy = \iint_{Região} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy \quad (\text{fórmula 25})$$

Considerando $dx dy$ um operador de área dA , tem-se que do lado esquerdo da equação a integração é feita ao longo de uma curva com uma integral de linha, enquanto que no lado direito a integral é sobre uma região. Sendo assim, e sabendo-se que (SPIEGEL, 1969, p. 152):

⁶ A informação utilizada para a abordagem do cálculo das propriedades geométricas das seções foi obtida da apostila da disciplina de Mecânica Vetorial, ministrada pelo prof. Inácio B. Morsch, no curso de Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, semestre 2011/1.

$$\oint_{Curva} M dx = - \iint_{Região} \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} dA \quad (\text{fórmula 26})$$

$$\oint_{Curva} N dy = \iint_{Região} \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} dA \quad (\text{fórmula 27})$$

Pode-se então, utilizando uma das fórmulas supracitadas, realizar o cálculo das propriedades de uma dada região rígida, sabendo-se somente as coordenadas dos pontos que caracterizam essa região.

Uma vez que $A = \iint dA$, tem-se pela equação 27 que $\partial N / \partial x = 1$. Sendo assim, integrando-se com respeito a x , chega-se à conclusão que $N(x, y) = x$. Logo, a fórmula 27 torna-se:

$$A = \iint dA = \oint_{\substack{\text{Curvas de} \\ \text{contorno}}} x dy \quad (\text{fórmula 28})$$

Como a região rígida é definida por uma série de retas, essa integração, que está expressa para um contorno contínuo, torna-se um somatório de integrais para cada trecho contínuo, ou seja, realiza-se a integração entre os pontos que são o contorno da região rígida. Agora, para cada trecho reto, define-se uma equação paramétrica da seguinte forma:

$$P(x, y) = P_0(x, y) + t(P_1(x, y) - P_0(x, y)), \text{ onde } 0 \leq t \leq 1 \quad (\text{fórmula 29})$$

Onde:

$P_0(x, y)$ e $P_1(x, y)$ são as coordenadas x e y dos pontos de contorno da região rígida a se analisar, sendo que o índice 0 refere-se ao ponto inicial e o índice 1 refere-se ao ponto final; t é o parâmetro que faz a varredura no comprimento da aresta.

ou

$$x = x_0 + t(x_1 - x_0), 0 \leq t \leq 1 \quad (\text{fórmula 30})$$

$$y = y_0 + t(y_1 - y_0), 0 \leq t \leq 1 \quad (\text{fórmula 31})$$

Uma vez que a integração se dá ao longo dos contornos, tem-se que:

$$A = \oint x dy = \sum_{i=1}^n \int_{t=0}^1 x dy \quad (\text{fórmula 32})$$

sendo que i é a numeração de cada trecho do contorno que se está calculando.

Derivando-se a equação 31 com respeito ao parâmetro t , tem-se:

$$dy = (y_1 - y_0) dt \quad (\text{fórmula 33})$$

Logo, substituindo o resultado encontrado na equação 33 na fórmula 32, o resultado fica:

$$A = \sum_{i=1}^n \int_{t=0}^1 [x_i + t(x_{i+1} - x_i)](y_{i+1} - y_i) dt \quad (\text{fórmula 34})$$

Essa equação pode ser resolvida analiticamente, chegando-se ao seguinte resultado:

$$A = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_{i+1} + x_i)(y_{i+1} - y_i) \quad (\text{fórmula 35})$$

Outra propriedade necessária para se realizar o cálculo do momento crítico são os momentos estáticos de primeira ordem, com respeito tanto a x quanto a y. A fórmula para o cálculo do momento estático é a seguinte:

$$S_x = \iint y \, dA \quad (\text{fórmula 36})$$

$$S_y = \iint x \, dA \quad (\text{fórmula 37})$$

Sendo S_x e S_y os momentos estáticos de primeira ordem com respeito a x e a y, respectivamente.

Analogamente ao que foi feito na fórmula 27, tem-se que a função $N(x,y)$, para cada um dos casos supracitados, é igual a xy e $x^2/2$, respectivamente.

Da mesma forma que para o cálculo da área de cada região rígida, o cálculo dos momentos estáticos pode ser feito através de um somatório para cada trecho reto. Após realizar-se o cálculo da integral e efetuarem-se manipulações algébricas nas equações, chega-se às seguintes fórmulas:

$$S_x = \oint xy \, dy = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n (y_{i+1} - y_i) [6x_i y_i + 3x_i (y_{i+1} - y_i) + (x_{i+1} - x_i) (3y_i + (y_{i+1} - y_i))] \quad (\text{fórmula 38})$$

$$S_y = \oint \frac{x^2}{2} dy = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n (y_{i+1} - y_i) [3x_i^2 + (x_{i+1} - x_i)(3x_i + 2(x_{i+1} - x_i))] \quad (\text{fórmula 39})$$

Agora, de posse dessas equações, pode-se calcular as coordenadas do centro geométrico de cada região rígida, dadas pelas seguintes equações:

$$x_c = \frac{S_y}{A} \quad (\text{fórmula 40})$$

$$y_c = \frac{S_x}{A} \quad (\text{fórmula 41})$$

Onde:

x_c e y_c são as coordenadas do centroide da região rígida que se está considerando.

Com a posição do centro geométrico calculada, pode-se determinar o valor de \bar{h}_i , que é a distância do centroide da região rígida ao seu apoio, ou seja, a distância do centro geométrico da região rígida considerada à borda da laje. Essa distância pode ser calculada conforme segue (STEINBRUCH; WINTERLE, 2012, p. 192):

$$\bar{h}_i = \frac{|\vec{v} \times \overrightarrow{P_C P_0}|}{|\vec{v}|} \quad (\text{fórmula 42})$$

Onde:

\vec{v} é o vetor diretor da aresta que serve de apoio para a laje;

$\overrightarrow{P_C P_0}$ é o vetor que aponta na direção do centro geométrico da região rígida e tem origem no ponto inicial da aresta.

Outro dado que é importante para o cálculo do momento de ruptura são os comprimentos das linhas de ruptura. Esse processo, porém, será abordado no item seguinte, visto que o cálculo do comprimento exige uma interpretação vetorial, não tanto mecânica.

4.3 DESCRIÇÃO DO PROCESSO PARA SE RESOLVER A EQUAÇÃO DOS TRABALHOS VIRTUAIS

Para se resolver a equação dos trabalhos virtuais, deve-se levar em conta que todas as variáveis envolvidas no processo são dependentes das rotações dos apoios. Desta forma, o processo de maximização da equação, que envolve a diferenciação da equação dos trabalhos virtuais e cálculo do máximo por um método de otimização, terá de ser feito numericamente. Sendo assim, e sabendo que a equação dos trabalhos virtuais é dada pela seguinte equação:

$$\tau_E = \tau_I \quad (\text{fórmula 43})$$

E, conforme visto no capítulo 3, os termos dessa equação são:

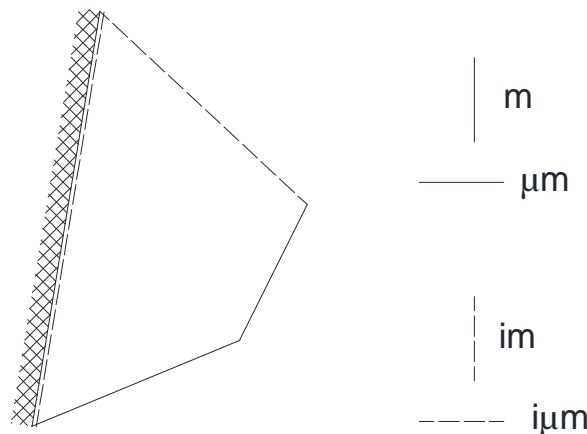
$$\tau_E = \sum_{i=1}^n \theta_i \bar{h}_i p A_i \quad (\text{fórmula 44})$$

$$\tau_I = \sum_{i=1}^n \tau_{Ii} = \sum_{i=1}^n \left[\sum m_x l_x \theta_x + \sum m_y l_y \theta_y \right] \quad (\text{fórmula 45})$$

Vale ressaltar que, em ambas as equações, os somatórios são feitos para cada região rígida, o que permite, ao se escrever a equação dos trabalhos virtuais, aglomerar os dois somatórios e simplificar a equação. Além disso, deve-se ter em mente que, pelo fato da equação do trabalho ser um produto escalar entre dois vetores que podem ter direções diferentes, como quando é o caso de uma configuração de falha que apresenta uma linha de ruptura negativa, o sinal do produto escalar deve ser levado em conta no somatório dos comprimentos das linhas de ruptura.

Conforme Wood e Jones (1964, p. 116), para se realizar o cálculo quando se tem armadura ortótropa, os eixos que serão utilizados para o cálculo devem seguir a mesma orientação que as linhas de momento da armadura. Sendo assim, m_x e m_y expressos na fórmula 45 tornam-se ou $\mu_1.m$ ou $\mu_2.m$ (também valendo quando surgem linhas de ruptura negativas, onde ter-se-á $i_1.\mu_1.m$ e $i_2.\mu_2.m$), sendo o índice 1 referente à linha de momento cuja direção é a mesma que o eixo X e o índice 2 à linhas de momento que têm mesma direção que o eixo Y. Com base na informação anterior, o usuário do algoritmo deve tomar cuidado ao informar as coordenadas dos vértices da laje que se deseja calcular, uma vez que uma rotação aplicada aos vértices (e por conseguinte, uma laje que estaria rotacionada) acarretaria numa configuração de armadura que não seria condizente com o que poderia acontecer na prática.

Figura 26 – Exemplo de região rígida com apoio contínuo e linha de ruptura negativa



(fonte: elaborada pelo autor)

A figura 26 mostra um exemplo de região rígida que aborda o caso mais geral para o cálculo da dissipação interna de energia, pois no apoio surge uma linha de ruptura negativa devido ao engaste que ocorre no mesmo, além de uma das linhas de ruptura ser negativa. Considerando ainda as linhas de momento expressas na mesma, a equação 43, tomando-se como base as equações 44 e 45, pode ser simplificada para:

$$m = \frac{\sum_{i=1}^n \theta_i \bar{h}_i p A_i}{\sum_{j=1}^m \mu_1 l_x \theta_x + \sum_{k=1}^s i_1 \mu_1 l_x \theta_x + \sum_{l=1}^p \mu_2 l_y \theta_y + \sum_{t=1}^q \mu_2 i_2 l_y \theta_y} \quad (\text{fórmula 46})$$

Onde:

μ_1 e μ_2 expressam as relações de ortotropia em x e em y, respectivamente;

i_1 e i_2 são os coeficientes para momento negativo em x e em y, respectivamente;

l_x e l_y são as projeções dos comprimentos das linhas de ruptura em x e em y, e são calculadas de maneira simples: como o sistema de coordenadas está referenciado a x e a y, a projeção do comprimento de uma determinada linha de ruptura sobre um dos eixos será simplesmente a diferença entre as coordenadas x e y do nó inicial da linha de ruptura com as coordenadas x e y do nó final da charneira.

O sinal obtido ao se realizar o cálculo de [46] depende estritamente do sinal das projeções do comprimento da charneira plástica e da rotação da região rígida. Ao se realizar a varredura e determinação desses parâmetros no sentido anti-horário, que é o proposto nesse trabalho, chega-se a um valor negativo para o momento de ruptura. Portanto, para se garantir o sinal positivo do valor do momento, a equação 46 deve ser multiplicada por -1. Essa multiplicação por -1 também poderia ser evitada ao se considerar como regra para a determinação do sinal do momento a regra da mão direita.

4.4 MAXIMIZAÇÃO DO MOMENTO DE FALHA

Uma vez expresso o momento de ruptura em função das variáveis envolvidas no seu cálculo, e sabendo que essas variáveis são pertinentes à configuração de falha proposta, pode ser desenvolvida uma ferramenta que, com o auxílio dos algoritmos apresentados nos itens anteriores, permita efetuar a maximização do momento de falha.

Para se realizar essa etapa, diversos algoritmos de cálculo podem ser utilizados, podendo ser citados os métodos gradiente, que são métodos que, segundo Chapra e Canale (2008, p. 310), “usam explicitamente informação sobre a derivada para localizar o ponto ótimo.”. Esses métodos têm como vantagem a facilidade na aplicação e a rápida convergência à solução final. As desvantagens aparecem no esforço computacional demandado, uma vez que o gradiente e derivadas da função precisam ser recalculados diversas vezes.

O método gradiente proposto nesse algoritmo foi o método do aclave máximo, que, através de um ponto inicial, realiza o cálculo do gradiente naquele ponto e busca um máximo local na direção daquele. Ao se encontrar um máximo local, o gradiente é recalculado e o processo de busca por um máximo local é repetido, buscando-se a nova direção que irá otimizar a solução. O processo termina quando a solução atingir uma tolerância estabelecida. (CHAPRA; CANALE, 2008, p.315).

O método do aclave máximo se utiliza do cálculo do gradiente da função para otimizar a solução. Conforme Chapra e Canale (2008, p.311), o gradiente de uma função de múltiplas variáveis é um vetor que aponta na direção do máximo da função. O vetor gradiente é representado por:

$$\nabla f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (\text{fórmula 47})$$

Sendo x_i as variáveis intervenientes no problema.

Sabendo que a função que calcula o momento de falha possui uma derivada analítica cujo cálculo é impraticável, torna-se necessária a aplicação de métodos numéricos para o cálculo da derivada parcial da função momento. Para esse algoritmo, escolheu-se o método de diferenças finitas centrais, que, conforme Chapra e Canale (2008), é um método que possui um erro muito pequeno quando comparado aos métodos de diferenças finitas progressivas ou regressivas. Sendo assim, a fórmula para o cálculo da derivada de uma função em um ponto i por diferenças finitas centrais é:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_i - h, \dots, x_n)}{2h} \quad (\text{fórmula 48})$$

Onde h é o tamanho do passo com que se pretende avaliar a função.

Feito o cálculo numérico da derivada e do gradiente, caminha-se com a solução na direção do gradiente, uma vez que, localmente, essa é a direção que aponta para o valor máximo da função momento. A Figura 27 expressa de forma bidimensional como essa busca ocorre. O caminhar descrito anteriormente é o método do aclave máximo, e a fórmula utilizada para realiza-lo é dada por:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{bmatrix} + p * \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (\text{fórmula 49})$$

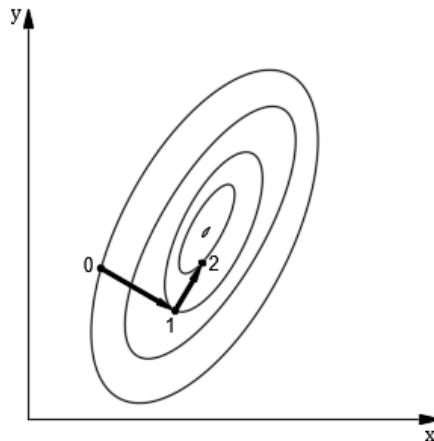
Onde:

O vetor \mathbf{x}_i é o vetor que contém as coordenadas atualizadas;

O vetor \mathbf{x}_i^0 é o vetor de coordenadas da posição anterior;

p é o passo de avanço da solução.

Figura 27 – Descrição gráfica do método do aclave máximo



(fonte: adaptado de CHAPRA; CANALE, 2008, p. 316)

Com base no exposto na fórmula 49, percebe-se que o problema de se maximizar o momento de ruptura, que inicialmente era multidimensional, agora consiste em um problema unidimensional, o que é vantajoso para se aplicar computacionalmente, já que o passo é aplicado unicamente à nova variável gradiente, que aglutinou as múltiplas variáveis em uma só. (CHAPRA; CANALE, 2008, p. 317)

Para o problema de otimização que se está analisando, a função f que se pretende otimizar é a função momento, cuja variável são as rotações θ_i dos contornos rígidos associados aos lados i da laje. Sendo assim, o vetor \mathbf{x} é composto por essas rotações

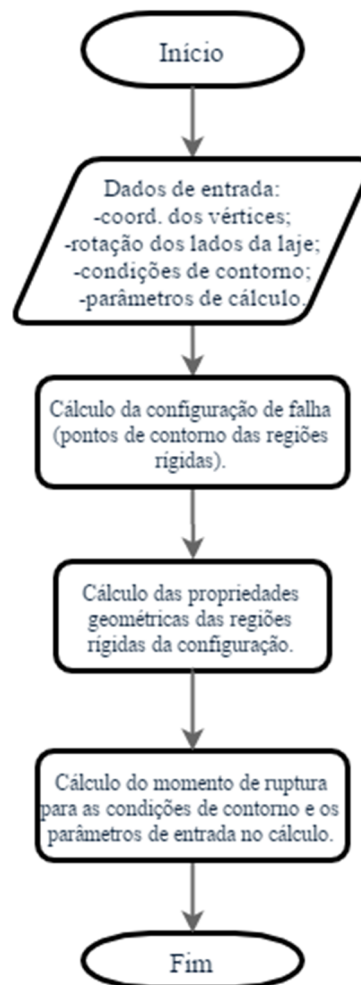
A escolha pela utilização do método do aclave máximo se deu pela sua fácil implementação computacional e convergência linear, o que garante sua utilização com confiabilidade. Entretanto, uma desvantagem quando da utilização desse método é a sua lenta convergência quando da presença de muitas cristas na função, o faz com que sejam necessários muitos passos pequenos para que se chegue ao ponto de máximo. (CHAPRA; CANALE, 2008, p. 319)

4.5 FLUXOGRAMAS PARA ETAPAS DE CÁLCULO DO MOMENTO

Com base no exposto nos itens anteriores, um fluxograma para o algoritmo que realiza o cálculo do momento e outro para o algoritmo de maximização são a seguir apresentados, de modo a facilitar a compreensão da contribuição que cada etapa traz ao cálculo do momento máximo de ruptura da laje que se deseja analisar.

Inicialmente, deve-se levar em conta que, um algoritmo para o cálculo dos pontos de intersecção entre os contornos rígidos descrevendo uma possível configuração de ruptura em função da inclinação ou giro de cada plano em relação ao correspondente lado do contorno da laje deve ser desenvolvido. Com base nos pontos que caracterizam cada região rígida, são calculadas as propriedades geométricas de cada uma das partes da configuração de falha e que são pertinentes ao cálculo do momento de ruptura (área e posição do centroide da região rígida). Após a determinação das propriedades das regiões rígidas constituintes da configuração de falha, é feita uma rotina para a determinação do momento de ruptura atuante na mesma, com os parâmetros e condições de contorno estabelecidos pelo usuário na entrada de dados. Com base nisso, o fluxograma da Figura 28 é apresentado, onde pode-se ver a relação de dependência de uma etapa com a seguinte para se efetuar o cálculo do momento de falha.

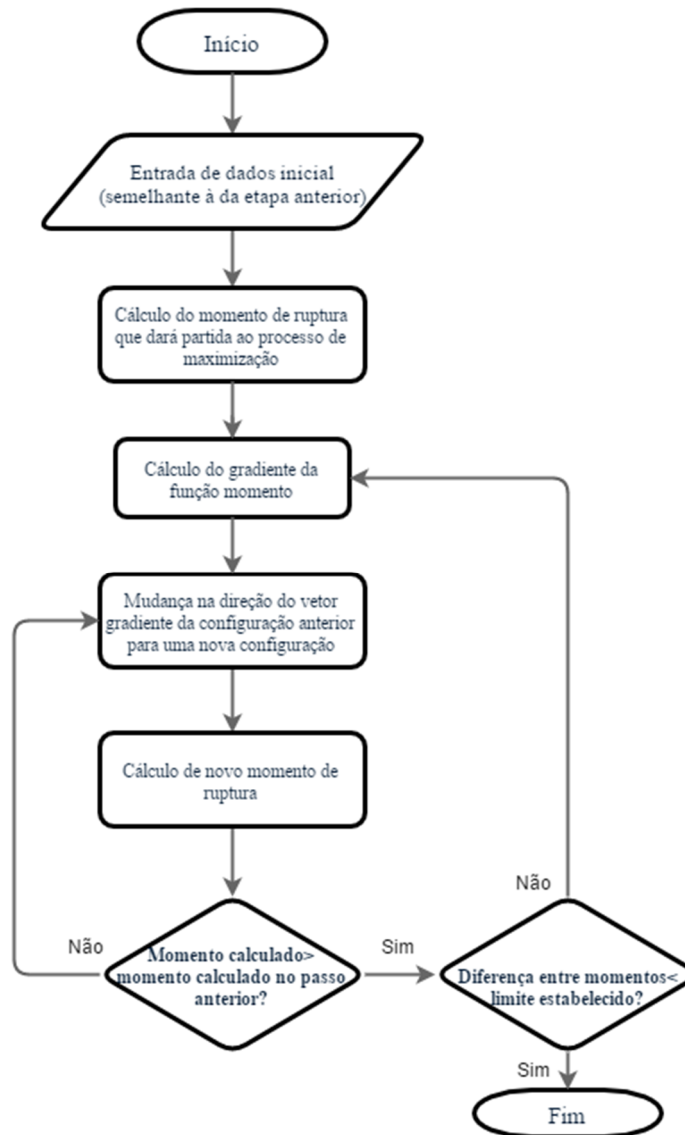
Figura 28 – Fluxograma para o cálculo do momento de ruptura



(fonte: elaborada pelo autor)

Conseguindo executar essa rotina, o usuário pode então inserir a rotina de maximização do momento de falha, que se utiliza do processo anterior para, a cada iteração, calcular novo momento de ruptura e assim maximizar o valor do mesmo. A Figura 29 apresenta o fluxograma utilizado de modo tal a se otimizar o momento de falha.

Figura 29 – Fluxograma para a maximização do valor do momento de ruptura



(fonte: elaborada pelo autor)

4.6 FERRAMENTA COMPUTACIONAL

De posse dos algoritmos de cálculo e maximização do momento de falha, partiu-se para a implementação do mesmo no ambiente de programação Scilab, que é uma linguagem interpretada, e que permite, através de matrizes, executar funções designadas pelo usuário.

Uma vez que o programa que realiza o cálculo do momento de ruptura foi escrito, um outro programa foi desenvolvido, com o objetivo de, através do uso de diferenças finitas centrais e do método do aclave máximo, poder realizar a maximização e busca do momento crítico.

4.6.1 Função 1: cálculo do momento de ruptura

O processo para o cálculo do momento seguiu a lógica apresentada no algoritmo citado anteriormente, tendo a seguinte estrutura:

- a) cálculo dos pontos de intersecção entre as regiões rígidas;
- b) determinação das propriedades geométricas de cada parte rígida da configuração de falha e;
- c) cálculo do momento de ruptura atuando na configuração proposta para o sistema.

Dentro da primeira sub-rotina, uma série de cálculos é realizada de maneira tal que, aplicando uma rotação de lados estabelecida pelo usuário, pode-se chegar na configuração de ruptura ocasionada por essa condição inicial. Essa sub-rotina baseia-se no que foi explicado anteriormente, apenas aplicado à linguagem utilizada no Scilab.

Sendo assim, conforme apresentado no item 4.1, a determinação dos pontos de contorno das regiões rígidas teve como base o cálculo inicial dos pontos que caracterizavam regiões com formato triangular. Com esses pontos, realizava-se o cálculo do vetor normal ao mesmo, de maneira tal que se guiava a nova linha de ruptura no sentido deste vetor. Calculado esse vetor, verificava-se, através de equações paramétricas de reta, a sua intersecção com as outras retas orientadas pelos vetores intersecção que as definiam. Com esse processo, chegavam-se a novos pontos, que deveriam ter seus vetores normais calculados e suas intersecções com os outros planos verificadas.

Vale ressaltar que os dados que iam sendo calculados no programa e eram pertinentes ao cálculo do momento de ruptura iam sendo guardados em matrizes, sendo que as matrizes mais

importantes eram duas: uma, onde através do andamento da sub-rotina, eram alocados os dados referentes aos nós; e a segunda, que guardava os pontos que constituíam o contorno das regiões rígidas que iam se formando. Essas duas matrizes constituíram base para a sub-rotina seguinte, que calculava as propriedades de cada região rígida.

Como exemplos de aplicação do código para o cálculo das intersecções entre as regiões rígidas, foram testadas algumas configurações para uma laje retangular, variando-se os ângulos com que rotacionavam as regiões rígidas, de modo a se verificar a robustez e a versatilidade do código nesse processo, que é fundamental para o cálculo de momento e sua maximização.

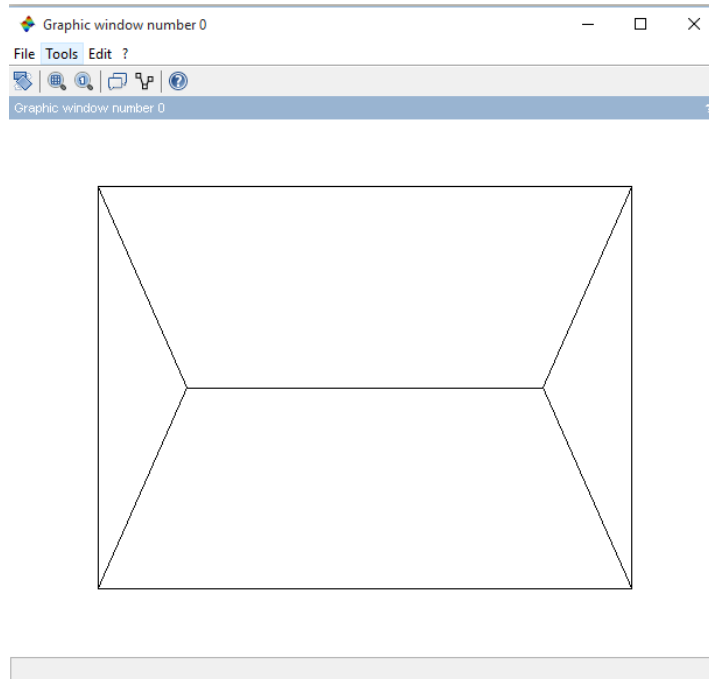
A sub-rotina que se desenvolveu a seguir teve o objetivo de realizar o cálculo das propriedades geométricas das regiões rígidas, que como dados de entrada necessitava do formato das regiões rígidas e também das coordenadas dos nós de contorno das mesmas. Com base nas fórmulas apresentadas no item 4.2, pôde-se calcular os dados necessários para que se pudesse prosseguir ao cálculo do momento decorrente da configuração que se estabeleceu inicialmente. Novamente, o cálculo do momento seguiu o que foi exposto anteriormente, valendo ressaltar que, aqui, o cálculo dos comprimentos das linhas de ruptura em x e em y (l_x e l_y) foi feito no sentido anti-horário, de maneira a manter uma superfície regradada ao se realizar o cálculo. Somado a isso, como as condições de contorno podem definir se surge ou não uma linha de ruptura nos apoios engastados, ao declarar que a condição de contorno de determinada aresta da laje analisada fosse 0, essa aresta funcionaria, no modelo matemático implementado, como apoio simples. Caso o valor da condição de contorno fosse 1, essa aresta seria um engaste e assim surgiria uma charneira negativa no apoio.

Para se calcular o momento de ruptura, somente foi necessário calcular os comprimentos das charneiras plásticas em cada parte rígida, considerando que depois esse valor fosse multiplicado por -1. Esse processo é bastante simples, e consiste em uma subtração das coordenadas de extremidade de cada linha de ruptura para que se tenha assim as projeções das mesmas sobre os eixos x e y . Finda essa etapa, um valor para o momento pode ser calculado e então a configuração final das charneiras plásticas é apresentada na tela.

A saída gráfica para a configuração de ruptura que se estabeleceu para o cálculo do momento deu-se com o uso da função no Scilab que realiza a plotagem de polilinhas em uma janela gráfica do programa (vide Figura 30), onde, com o auxílio das matrizes que tinham alocados o

pontos de contorno e suas coordenadas, se realizava a impressão de cada região rígida na janela gráfica.

Figura 30 – Exemplo de saída gráfica da ferramenta computacional



(fonte: Scilab, 2015)

Podendo-se calcular o momento de ruptura a partir uma configuração inicial, essa série de sub-rotinas foi fechada em uma função que tinha como saída o momento de ruptura e que, graficamente, apresentava a configuração de falha apenas, uma vez que as variáveis intermediárias no processo não eram interessantes. Feito isso, essa função poderia ser utilizada quando se desejasse para calcular o momento de uma configuração pré-estabelecida, devendo o usuário levar em conta que essa configuração deve ser a crítica ou estar nas vizinhanças da mesma para que se chegue a um valor plausível de momento e também cuidar para que os dados sejam inseridos corretamente. Porém, como o desejo é de que o momento de ruptura calculado seja o crítico, essa função tem de ser utilizada como uma ferramenta para a função que maximiza o momento de falha, abordada no item seguinte.

4.6.2 Função 2: maximização do momento de falha

Considerando que essa rotina computacional é a mais importante para se obter o resultado final, é através do código fonte desta que o usuário insere os dados necessários para se efetuar a análise, sendo eles:

- a) coordenadas x e y dos vértices da laje que se deseja calcular;
- b) condições de contorno relativas aos apoios, sendo que 0 é contorno com rotação livre e 1 é para lado engastado;
- c) relações de ortotropia μ_1 e μ_2 , devendo o usuário levar em conta que sempre um desses coeficientes deve ser igual a 1, e as avaliação deve ser feita conforme postulado na figura 13;
- d) relações para o momento no centro da laje e no apoio i_1 e i_2 , que são utilizadas quando um dos lados da laje é engastado e se referem aos lados x e y , respectivamente.

Partindo-se de uma rotação inicial para todos os lados da laje, estipulada no código como sendo de 0,003 rad (aproximadamente $0,17^\circ$ ou $10'$), inferia-se à primeira aresta da laje uma perturbação de 0,000003 rad e calculava-se o momento de ruptura ocasionado por essa configuração. A seguir a rotação nessa aresta era reduzida de 0,000006 rad e novamente calculava-se o momento para a configuração obtida. Esse processo tinha por objetivo realizar o cálculo da derivada numérica da função momento através do uso de diferenças finitas centrais. Com o valor da derivada da função momento decorrente da variação da rotação em um dos apoios da laje determinado, fazia-se a sua alocação em uma matriz que ia guardando os valores das derivadas (matriz gradiente). Após essa etapa, o valor da rotação na aresta em questão voltava ao ser valor inicial, e aos lados seguintes era aplicado o mesmo método de análise.

Calculado o gradiente no ponto considerado, o programa fazia uma busca na direção do mesmo, utilizando a fórmula 47 e aplicando passos p de 0,0001. Um máximo local era identificado quando havia uma inversão no sinal do incremento de momentos em relação ao incremento anterior. Verificado que o momento era um máximo local naquela direção, o gradiente era recalculado nesse novo ponto e realizava-se o processo de busca novamente. O processo de busca era finalizado quando se atingia uma tolerância (diferença do momento calculado na etapa atual subtraído do momento calculado na etapa anterior) de 0,5% do momento calculado em um passo anterior.

5 ANÁLISE E RESULTADOS

Realizada a implementação do algoritmo em uma ferramenta computacional, torna-se necessária a verificação dos resultados encontrado pelo programa com resultados encontrados na bibliografia. Para tal, os resultados encontrados para alguns casos existentes na literatura foram resolvidos pelo programa e comparados. Além disso, uma outra etapa de verificação foi feita, com o objetivo de verificar o quão robusta a ferramenta desenvolvida pode ser.

5.1 VALIDAÇÃO DO METODOLOGIA APLICADA NO PROGRAMA

Para garantir que os resultados encontrados no programa eram confiáveis, uma verificação foi realizada com os resultados encontrados teoricamente por Johansen (1972). Foram testadas as configurações de lajes retangulares, triangulares e trapezoidais, que possuem fórmulas fechadas para seu cálculo, sendo que para todos os casos estudados variaram-se as condições de contorno às quais as lajes estavam apoiadas. Além disso, como curiosidade, testou-se a aproximação de uma laje circular por polígonos, de maneira a comparar o erro nas respostas.

5.1.1 Laje retangular

Para o caso de laje retangular, Johansen (1972, p. 5), com base na Figura 31 chegou na seguinte formulação para se calcular o momento de ruptura:

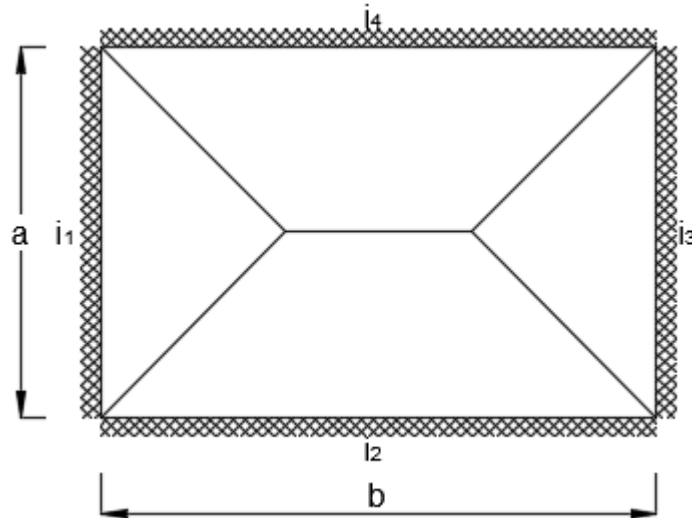
$$m = \frac{pa_r^2}{24} \left(\sqrt{3 + \left(\frac{a_r}{b_r}\right)^2} - \frac{a_r}{b_r} \right)^2 \quad (\text{fórmula 50})$$

Onde a_r e b_r são os comprimentos reduzidos da laje, calculados pelas relações de afinidade, cujos valores podem ser calculados como segue:

$$a_r = \frac{2a}{\sqrt{1 + i_2} + \sqrt{1 + i_4}} \quad (\text{fórmula 51})$$

$$b_r = \frac{2b}{\sqrt{1+i_1} + \sqrt{1+i_3}} \quad (\text{fórmula 52})$$

Figura 31 – Simbologia para cálculo de laje retangular



(fonte: adaptado de JOHANSEN, 1972, p. 5)

Vale ressaltar que a aplicação da fórmula 50 só é válida quando $b_r \geq a_r$. Respeitado isso, a na Tabela 1 podem ser visualizados os resultados encontrados utilizando a fórmula de Johansen e utilizando o programa para uma laje com $a = b = 5\text{m}$. Percebe-se que, para 3 casas depois da vírgula, os resultados encontrados praticamente coincidem.

Tabela 1 – Resultados encontrados para laje retangular

Casos	i1	i2	i3	i4	ar	br	ar/br	m (Johansen)	m (programa)
1	1,5	1,5	1,5	1,5	3,162	3,162	1,000	2,083	2,083
2	0	1,5	0	1,5	3,162	5,000	0,632	3,058	3,057
3	0	1,5	1,5	0	3,874	3,874	1,000	3,127	3,127
4	0	1,5	1,5	1,5	3,162	3,874	0,816	2,514	2,513
5	0	0	0	0	5,000	5,000	1,000	5,208	5,208

(fonte: elaborada pelo autor)

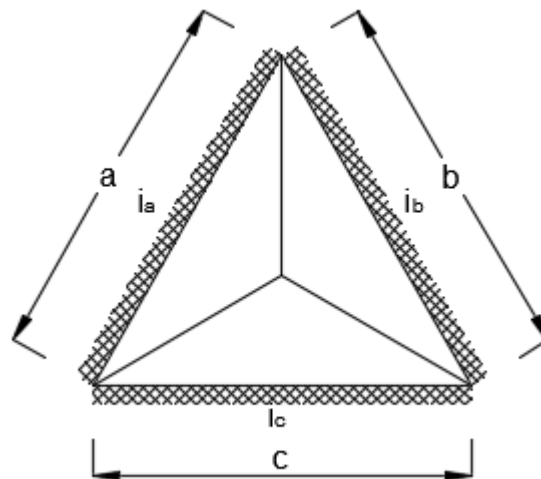
5.1.2 Laje triangular

Esse tipo de laje, de acordo com Johansen (1972, p.65), tem mais importância prática que teórica, uma vez que os mecanismos do tipo *corner lever* possuem maior significância na determinação do valor do momento de ruptura, tendo em vista que os cantos de lajes triangulares possuem uma rigidez elevada. Entretanto, os cálculos do momento teórico podem ser feitos para que se obtenha um valor aproximado do mesmo. Sendo assim, a fórmula a seguir apresentada é a proposta para se realizar o cálculo do momento de falha (JOHANSEN, 1972, p. 65):

$$m = \frac{2pA^2}{3(a\sqrt{1+i_a} + b\sqrt{1+i_b} + c\sqrt{1+i_c})^2} \quad (\text{fórmula 53})$$

Sendo A a área da laje triangular, p a carga distribuída aplicada e os outros termos expostos na Figura 32.

Figura 32 – Simbologia para cálculo de laje triangular



(fonte: adaptado de JOHANSEN, 1972, p. 65)

Com base nisso, a Tabela 2 foi montada, de modo a apresentar os resultados encontrados com a fórmula e os resultados encontrados com o programa desenvolvido nesse trabalho.

Tabela 2 – Resultados encontrados para laje triangular

Caso	A	a	b	c	ia	ib	ic	m (Johansen)	m (programa)
1	8	4,47	4,47	4	1,5	1,5	1,5	0,509	0,509
2	8	4,47	4,47	4	0	1,5	0	0,883	0,883
3	8	4,47	4,47	4	1,5	0	1,5	0,668	0,668
4	8	4,47	4,47	4	0	1,5	1,5	0,668	0,668
5	8	4,47	4,47	4	1,5	1,5	0	0,648	0,648
6	8	4,47	4,47	4	0	0	0	1,273	1,273

(fonte: elaborada pelo autor)

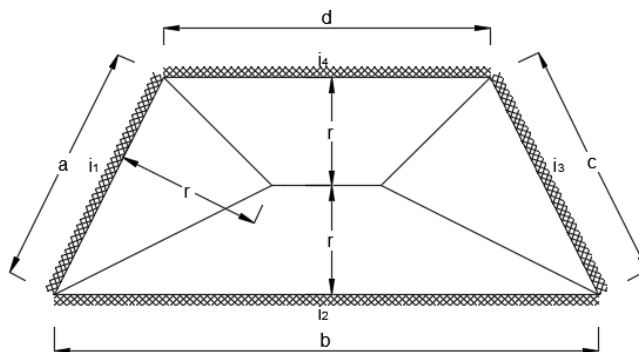
5.1.3 Laje trapezoidal

Seguiu-se a mesma metodologia utilizada nos outros tipos de laje para o cálculo de uma laje trapezoidal. Johansen (1972, p.58) propôs uma fórmula que apresenta o valor aproximado para o valor do momento de falha em uma laje desse tipo. Para tal, ele supôs que as linhas de ruptura partiam da bissetriz do entre dois lados adjacentes, da mesma forma que foi realizado para as lajes retangulares, e que deram valores muito próximos dos calculados no programa. Essa fórmula é expressa a seguir:

$$m = \frac{pr^2(3b + 3d - a - c)}{6(a(1 + i_a) + b(1 + i_b) + c(1 + i_c) + d(1 + i_d))} \quad (\text{fórmula 54})$$

Onde os itens da fórmula 54 são apresentados na Figura 33.

Figura 33 – Simbologia para cálculo de laje trapezoidal



(fonte: adaptado de JOHANSEN, 1972, p. 59)

Pela fórmula 54, pôde-se calcular o momento de ruptura de uma laje trapezoidal e comparar com os resultados apresentados pelo programa. Sendo assim, montou-se a Tabela 3 para melhor apresentar esses resultados encontrados.

Tabela 3 – Resultados encontrados para laje trapezoidal

Caso	a	b	c	d	i1	i2	i3	i4	r	m (Johansen)	m (programa)
1	5,66	10	5,66	2	1,5	1,5	1,5	1,5	2	1,412	1,412
2	5,66	10	5,66	2	1,5	0	1,5	0	2	2,043	2,128
3	5,66	10	5,66	2	0	1,5	0	1,5	2	1,992	2,055
4	5,66	10	5,66	2	1,5	0	0	0	2	2,588	2,705
5	5,66	10	5,66	2	0	1,5	1,5	0	2	1,758	2,258
6	5,66	10	5,66	2	0	1,5	1,5	1,5	2	1,652	1,695
7	5,66	10	5,66	2	0	0	0	0	2	3,530	3,531

(fonte: elaborada pelo autor)

Como pode ser visualizado na Tabela 3, os valores encontrados no programa, à exceção dos casos em que a laje estava apoiada ou engastada, apresentam uma discrepância da ordem 5% em relação aos valores encontrados utilizando a fórmula de Johansen. Isso se deve ao fato de Johansen ter considerado, para a formulação da equação 54, que as linhas de ruptura saíam da bissetriz dos ângulos entre dois lados adjacentes, o que é real somente para os casos de laje totalmente engastada ou totalmente apoiada.

5.1.4 Laje Circular – aproximação por polígonos

O caso de laje circular também foi proposto por Johansen em 1972, e aparece nesse trabalho apenas como forma de se testar o quão próximo do resultado encontrado analiticamente uma aproximação desse tipo de laje por uma laje poligonal regular pode ser. Para tal, tem-se que a fórmula proposta por Johansen (1972, p. 76) é:

$$m = \frac{1}{6} p \rho^2 \quad (\text{fórmula 55})$$

Sendo p a carga aplicada na laje e ρ dado pela seguinte fórmula:

$$\rho = R \sqrt{\frac{1}{1+i}} \quad (\text{fórmula 56})$$

Onde R é o raio da laje circular e i é a relação entre os momentos no vão central e no apoio.

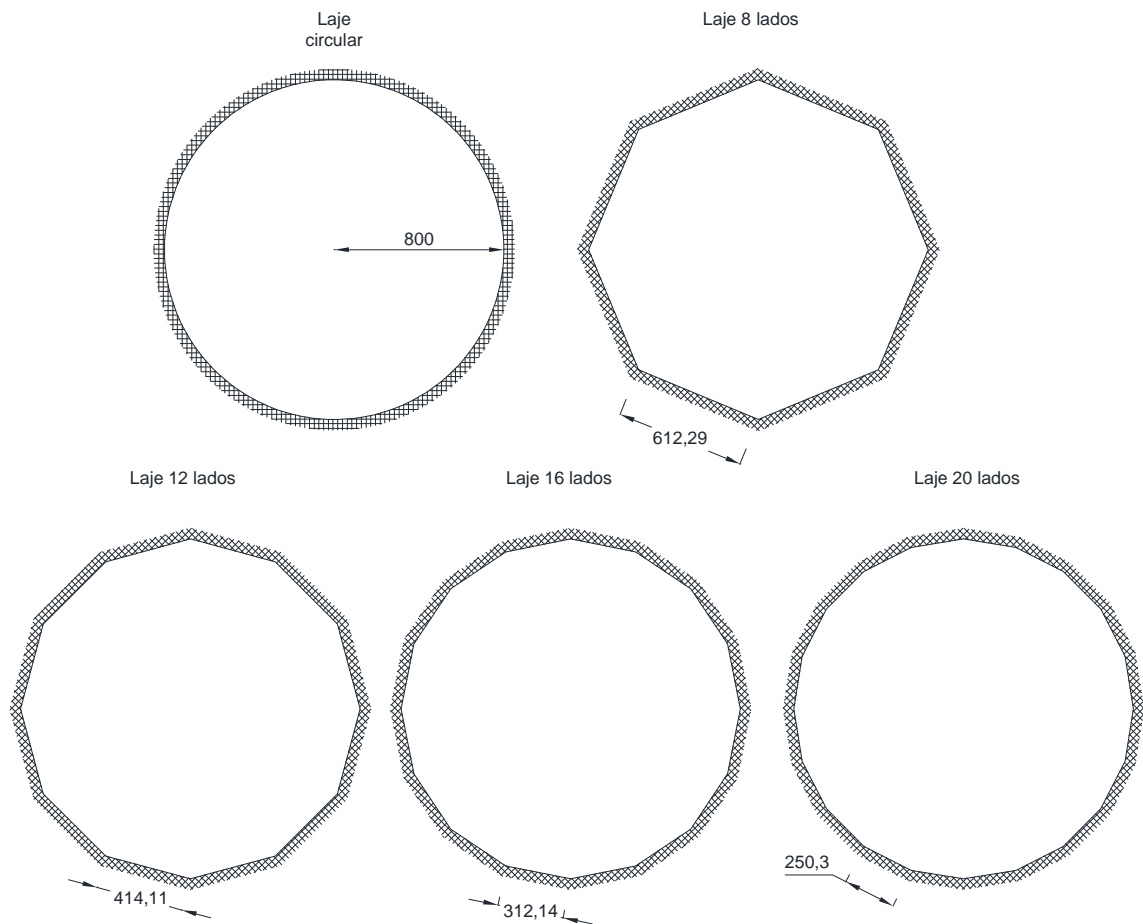
Então, tendo a fórmula para se efetuar o cálculo de uma laje circular, realizou-se a aproximação do círculo por uma poligonal fechada. Para essa etapa, fez-se a aproximação do círculo por polígonos de 8, 12, 16 e 20 lados, conforme expresso na Figura 34, e os resultados encontrados, juntamente com o resultado teórico, estão apresentados na Tabela 4. A laje circular que foi analisada foi considerada como tendo um raio de 8 metros, totalmente engastada e com coeficiente de engastamento $i=1,5$, com uma carga atuante de 5 kN/m^2 .

Tabela 4 – Momento de ruptura para laje circular e aproximações por polígonos

Momento de ruptura				
Johansen	8 lados	12 lados	16 lados	20 lados
21,333	17,989	19,904	20,389	20,809

(fonte: elaborada pelo autor)

Figura 34 – Laje circular estudada e aproximações por polígonos



(fonte: AutoCAD, 2015)

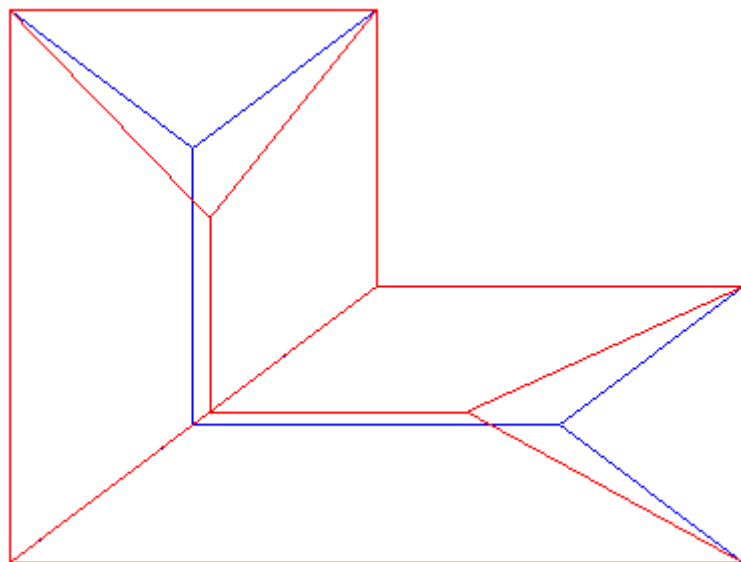
5.2 POTENCIALIDADE DA METODOLOGIA EMPREGADA

Como pode ser visto para o caso em que se tem resultados teóricos para alguns formatos de lajes, o programa apresentou resultados que se mostraram muito próximos dos obtidos de forma analítica. Sendo assim, abre-se precedente para que se realize a análise de casos mais complexos de lajes que não possuam uma solução na bibliografia, como é o caso de lajes em L e lajes com formatos poligonais diversos. Para exemplificar isso, foram feitos os cálculos para alguns desses formatos, valendo dizer que os valores encontrados servem como base inicial de dimensionamento, mas que necessitam de uma comprovação experimental e teórica para que possam ser utilizados.

5.2.1 Laje L

A laje com formato em L foi escolhida devido ao fato de ser uma laje comumente utilizada em escritórios de projetos estruturais e que tem seu cálculo ou simplificado através da sua divisão em duas lajes retangulares, ou através da utilização da solução obtida por outros processos numéricos. Sendo assim, alguns casos de lajes L foram testados, sendo que dois casos merecem uma apresentação. O primeiro caso, exposto na Figura 35, foi o caso que apresentou rápida convergência no resultado, onde as linhas em azul mostram a configuração inicial, arbitrada como solução inicial do problema, e as linhas em vermelho, a configuração final encontrada pelo programa.

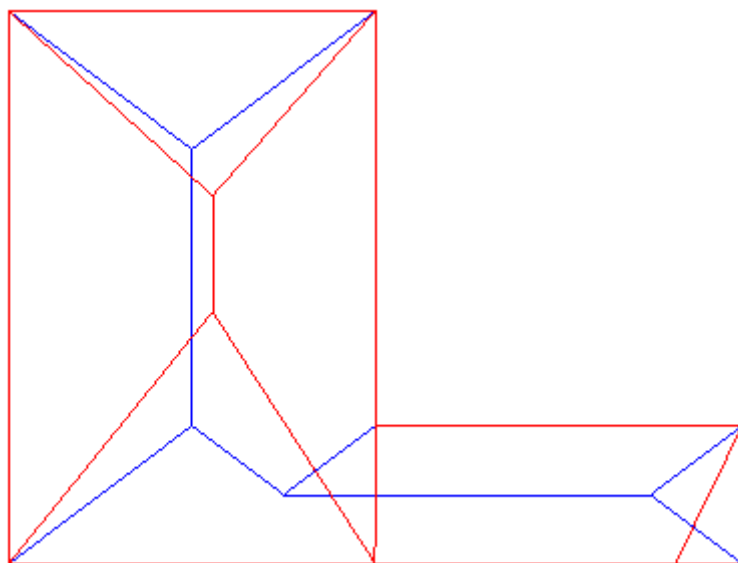
Figura 35 – Solução convergente para Laje L



(fonte: Scilab, 2015)

O segundo caso é o de uma laje L com uma aba muito estreita quando comparada com a outra aba. Para esse caso, o programa encontra uma configuração de falha e converge, entretanto, deve ser observado que a solução apresentada pelo programa diverge totalmente de uma configuração possível, e pode ser visualizado também que a solução tenta se aproximar de uma solução com mecanismo do tipo *corner lever*, como pode ser visto na Figura 36.

Figura 36 – Solução divergente para Laje L com aba estreita



(fonte: Scilab, 2015)

Esse caso de divergência se mostrou bastante interessante, uma vez que foi calculado um momento de ruptura e se apresentou uma configuração de falha “convergente”. Acredita-se que esse problema de se tentar simular um mecanismo de *corner lever* tenha ocorrido na ferramenta de maximização, já que testes operados no software LimitState:SLAB mostraram que esse mecanismo ocorre para uma laje com essas dimensões.

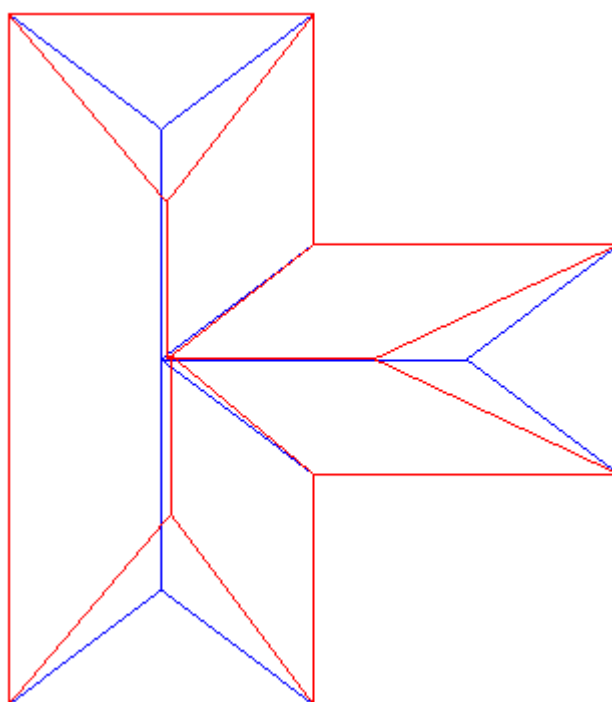
Uma forma interessante de se analisar nos casos da Laje com formato em L, são os casos onde a análise pode ser feita considerando apenas a parte da laje maior, sendo assim uma laje em L analisada como laje retangular. Isso acontece para lajes que possuem uma desigualdade muito grande entre as larguras das abas da laje. Como exemplificação, foi estudado no programa a partir de que relação entre a menor largura da laje e a maior largura. Essa análise foi feita alterando-se a largura de uma aba e mantendo-se a outra. Fazendo-se isso, para a laje estudada, que possuía abas iguais com largura de 4m e comprimento de aba de 8m, chegou-se que a relação onde ocorria a divergência nos resultados encontrados girou em 70%. Vale ressaltar que a divergência não necessariamente ocorria por erros no processo de maximização, mas também por erros de lógica na ferramenta utilizada, devendo essa relação ser estudada numérica e experimentalmente, já que o comportamento mecânico real, obtido através de ensaios, pode esclarecer melhor o engenheiro e o pesquisador acerca de quando se deve analisar uma laje com esse formato de maneira mais simplificada.

5.2.2 Laje T

A motivação por trás da escolha deste tipo de laje foi a mesma que levou ao estudo de uma laje com formato em L, ou seja, a sua comum utilização em projetos estruturais. Aqui, novamente, encontraram-se dois casos que mereciam análise: um convergente e outro divergente.

O caso que convergia era o de uma laje T que possuía áreas bem distribuídas entre as abas da laje, e a convergência ocorreu rapidamente, com uma configuração muito próxima da configuração inicial, e pode ser vista na Figura 37.

Figura 37 – Solução convergente para Laje T



(fonte: Scilab, 2015)

A solução que apresentou divergência novamente foi o caso em que uma aba era muito estreita quando comparada às outras. Diferentemente do caso de divergência encontrado na laje com formato em L, que convergiu para uma dada configuração, esse caso de laje T não apresentou convergência para um resultado final, não sendo possível identificar para este caso uma explicação para a divergência diferente daquela identificada para a laje “L”. O algoritmo de solução convergia para uma configuração de ruptura não prevista pelo algoritmo gerador de configurações de ruptura. Conforme a análise ia ocorrendo, o programa apresentava diversas

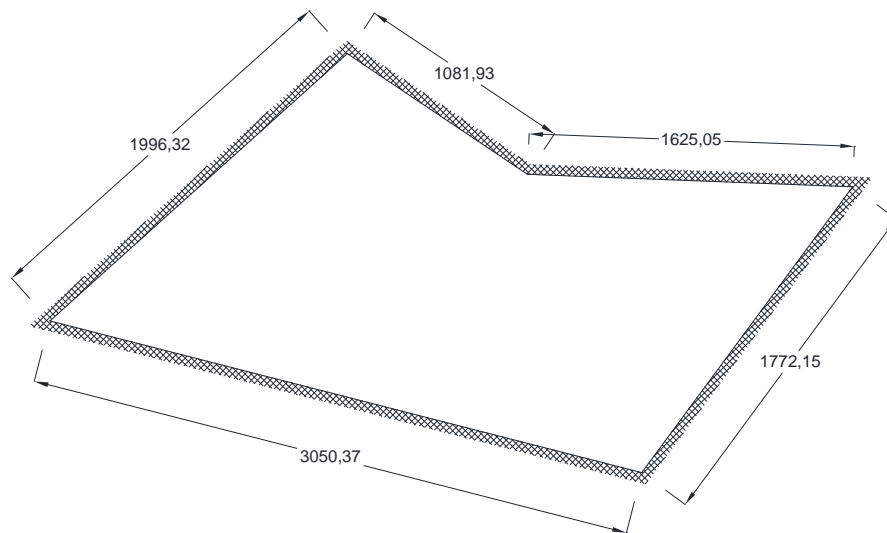
configurações, sendo que aos poucos ocorria a divergência. Esse caso é ilustrado nas Figuras a seguir, sendo possível assim ver algumas falhas no algoritmo aplicado no programa, que permitia a sobreposição de duas regiões rígidas.

5.2.3 Abordagens de lajes com outros formatos poligonais

Essa abordagem foi realizada com objetivo de se verificar a robustez do programa quando do fornecimento de dados de lajes mais complexas. Sendo assim, alguns formatos foram testados e dois deles serão apresentados nesse item.

O primeiro formato, apresentado na Figura 38, foi analisado na ferramenta computacional. Foi considerada armadura isotropa para a mesma e uma carga atuante de 10 kN/m^2 . Além disso, a constante de engastamento foi considerada como tendo seu valor igual a 1,5. Com base nisso, foi executado o programa e não houve convergência, novamente pelo mesmo problema visualizado para a laje com formato em T com uma aba estreita.

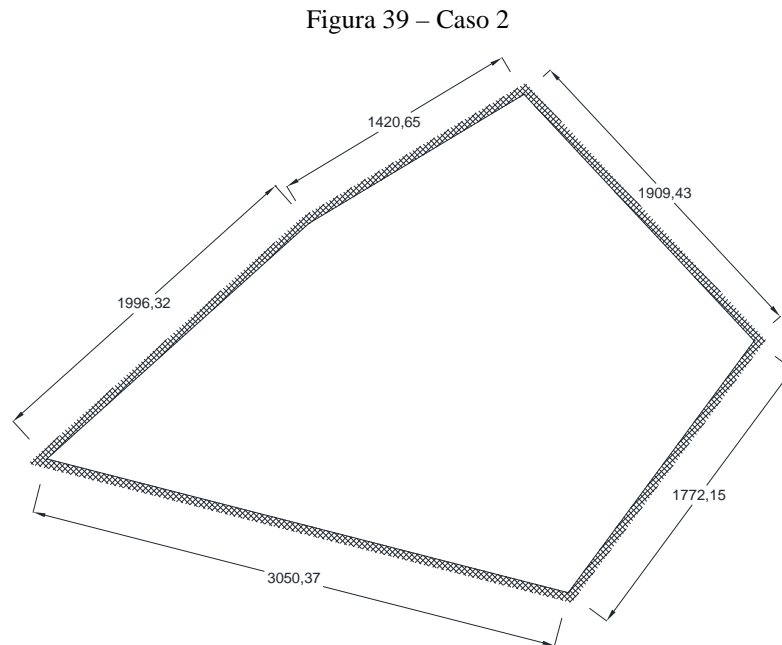
Figura 38 – Caso 1



(fonte: elaborado pelo autor)

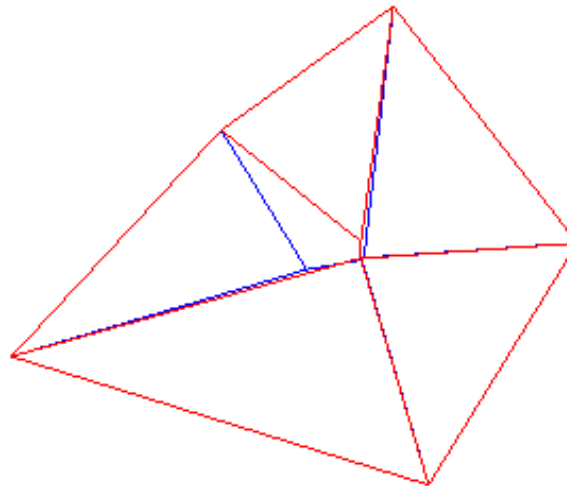
Um segundo caso, baseado no caso anterior, foi testado. A geometria da laje foi alterada, chegando-se à geometria apresentada na Figura 39. A carga atuante, a distribuição de armadura e condições de engastamento foram as mesmas utilizadas no caso 1. Para esse caso, o programa

convergiu e apresentou para o momento de ruptura um valor de 0,933 kN.m/m e a sua configuração de falha é dado na Figura 40.



(fonte: elaborado pelo autor)

Figura 40 – Configuração de falha encontrada para o caso 2



(fonte: Scilab, 2015)

Outro caso que pode ser estudado para se compreender melhor a ferramenta é o caso das lajes armadas em uma direção, que são as lajes cuja relação entre os lados maior e menor é maior ou

igual a 2. Esse tipo de laje, pode ser calculado simplesmente considerando o mesmo como uma viga biapoiada de largura unitária. Com base no exposto, no programa foram estudados casos onde a relação entre os lados eram 3, 7 e 15. A tabela 5 apresenta os resultados encontrados pelo programa e pela solução no regime rígido plástico como se a laje fosse uma viga, onde b/a é a relação entre o lado maior e o lado menor. Além disso, considerou-se uma carga atuante de 5 kN/m^2 e que a laje estava simplesmente apoiada.

Tabela 5 – Comparativo de resultados para laje armada em uma direção

	b	b/a = 2	b/a = 3	b/a = 7	b/a = 10	b/a = 15	b/a = 20
Rígido-plástico	10	15,625	6,944	1,275	0,625	0,278	0,156
Programa		8,838	4,736	1,081	0,557	0,257	0,147

(fonte: elaborada pelo autor)

Pela Tabela 5, pode-se perceber que os valores calculados inicialmente, para uma laje com relação entre lado maior e menor de até 7, a diferença entre os resultados era relativamente alta. A partir de uma relação da ordem de 10, essa diferença nos resultados começou a diminuir, chegando, para uma relação entre lados de 20, a menos de 10%. Mais uma vez, os resultados encontrados pelo software podem não ser condizentes com o comportamento de uma laje armada em uma direção na prática, sendo então que somente a partir de uma relação entre lados maior que 10 que o programa começa a apresentar valores mais coerentes para o momento de ruptura de uma laje desse tipo.

6 CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Conforme foi exposto nos subitens anteriores, a potencialidade do software desenvolvido nesse trabalho é muito grande, e seu uso como ferramenta de apoio para o cálculo de lajes de concreto armado foi demonstrado, através da verificação dos resultados encontrados no software com resultados de outros autores. Tomando isso como base, pode-se chegar à conclusão de que os resultados com outras configurações de lajes podem ser próximos de valores reais. Entretanto, se faz necessária uma série de testes para que seja feita a comprovação dos valores encontrados pelo software, uma vez que a convergência em alguns casos não ocorreu devido a configurações que possuíam mecanismos onde se formavam *corner levers*, ou devido a problemas na ferramenta de maximização.

Sobre os problemas de convergência apresentados, o autor acredita que suas causas estão relacionadas às ferramentas de determinação da configuração e de maximização do valor do momento. Como visto para os casos de laje L e laje T, além da laje poligonal apresentada no caso 1. Uma característica comum a todas essas geometrias de lajes era o fato de algum dos cantos ser côncavo. O problema de cantos côncavos foi dito por Kwan (2004) como sendo de difícil solução numérica, uma vez que em cantos com essa concavidade surgem tanto linhas de ruptura positivas quanto negativas, tornando difícil a determinação da configuração de falha.

Uma vez que o programa apresentou resultados confiáveis para casos com solução analítica corroborada, tem-se que o mesmo pode constituir-se de ferramenta de auxílio nos escritórios de cálculo estrutural, desde que alguns cuidados sejam tomados, uma vez que a ferramenta ainda possui algumas limitações, como o caso citado anteriormente de cantos côncavos.

Com base nos problemas de convergência encontrados na ferramenta computacional desenvolvida nesse trabalho, sugere-se a melhoria e aplicação de correções nas ferramentas de determinação da configuração de falha com base nas rotações e da ferramenta de maximização. Além disso, o autor também sugere algum estudo relacionado com a determinação de quando um mecanismo do tipo *corner lever* irá ocorrer, por saber-se que esse mecanismo é uma limitante na análise pelo programa.

REFERÊNCIAS

- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: Projeto de estrutura de concreto – Procedimento. Rio de Janeiro, 2014.
- COPE, R. J.; CLARK, L. A. **Concrete slabs analysis and design**. London and New York: Elsevier Applied Science Publishers, 1984.
- JONES, L. L.; WOOD, R. H. **Yield-line analysis of slabs**. London: Thames and Hudson, Chatto and Windus, 1967.
- JOHANSEN, K. W. **Linhas de ruptura**: teoria e prática. Rio de Janeiro: Ao livro técnico S.A., 1962.
- KENNEDY G.; GOODCHILD C. H. **Practical yield line design**: an introduction to the practical yield line theory in the design of economic reinforced concrete slabs, including examples of design of flat slabs, raft foundations and refurbishments. London: The concrete centre, 2004.
- NIELSEN, M. P.; HOANG, L. C. **Limit analysis and concrete plasticity**. 3rd ed. Boca Raton: CRC Press, 2010.
- SPIEGEL, M. R. **Análise Vetorial**: com introdução à análise tensorial. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico S. A., 1966.
- STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. **Geometria analítica**. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012.
- WÜST, J; WAGNER, W. Systematic prediction of yield-line configurations for arbitrary polygonal plates. **Engineering Structures**, Philadelphia, v. 30, n. 7, p. 2081-2093, July 2008.
- CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. **Métodos numéricos para engenharia**. São Paulo: McGraw-Hill, 2008.
- JOHANSEN, K. W. **Yield-Line formulae for slabs**. London, Cement and Concrete Association, 1972.
- KWAN, A. K. H. Dip and strike angles method for yield line analysis os reinforced concrete slabs. **Magazine of Concrete Research**, Hong Kong, v. 56, n. 8, p. 487-498, October 2004.