

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA

COSMOLOGIA
Da Grécia Antiga ao Século XXI

NEY BITTENCOURT PEREIRA

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Porto Alegre, Brasil
2008

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA

COSMOLOGIA
A Humanidade Decifra seus Enigmas

NEY BITTENCOURT PEREIRA

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Thaisa Storchi Bergmann

A apresentação deste trabalho é exigência do Curso de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), como requisito para obtenção do título de Bacharel em Física.

Porto Alegre, Brasil
2008

À minha família, com carinho.

Agradecimentos

À Prof^a. Dr^a. Naira Maria Balzaretti, Coordenadora e representante da COMGRAD/FIS na Banca Examinadora;

À minha orientadora, Prof^a. Dr^a. Thaisa Storchi Bergmann, pelo inestimável auxílio nesta importante caminhada;

À Prof^a. Dr^a. Maria de Fátima Oliveira Saraiva, que, gentilmente, aceitou nosso convite para participar da Banca Examinadora;

Aos meus filhos, Denise, Marcelo, Daniela, Patrícia, Daniel e Ricardo, que com seu precioso estímulo me encorajaram a prosseguir em busca deste almejado propósito.

Ao Amir e ao Bruno, pelo valioso assessoramento que me proporcionaram.

A todos os professores com quem convivi durante esta jornada importante, pelo zelo que revelaram neste, essencial, ofício.

À Rosi Isabel Bergamaschi, que prestou imprescindível auxílio para que este trabalho tivesse início.

À minha falecida esposa, Stela, que, presente no início do percurso, espargiu otimismo sobre minhas apreensões.

Ao Supremo Criador, por ter-me permitido aqui estar.

O NÃO DITO

Vaticinara o oráculo:
De Andrômeda, virã a princesa.
Num âtimo, o infinito será transposto,
Distâncias se anularão.

A Lua dançou inebriada,
Estrelas erraram pela vastidão azul do Universo,
Rosas flôreas tomaram o espaço-tempo.

Profetizara o oráculo:
De Andrômeda, surgirá a princesa.
Galáxias, constelações, perpassadas num momento,
O espaço-tempo se curvarã.

Astros bailaram ditosos,
Carinhosa, a Terra beijou o mar.
De repente, aproxima-se a sombra,

Planetas se retraem,
O Cosmo, desolado, se resguarda,
Pássaros, sumidos,

Raios, trovões,
Gélida atmosfera apodera-se do vazio,
A princesa já não é vista.

O reino inexistente,
Súditos perambulam desvairados,
O não dito, o que restou,
Oráculo, oráculo, onde te guardas?

Sumário

1	INTRODUÇÃO	10
1.1	Objetivo	11
1.2	Metodologia	11
1.3	Sobre os Ombros de Gigantes	12
2	FÍSICA E A MATEMÁTICA DESCREVEM O COSMO	20
2.1	O Geocentrismo	20
2.2	O Heliocentrismo	21
2.3	O Universo é Isotrópico e Homogêneo	23
2.4	A Lei de Hubble	23
2.5	O Princípio da Equivalência	27
2.6	O Espaço-Tempo é Curvo	28
2.7	A Métrica de Robertson-Walker	30
2.8	Distância Própria	32
2.9	A Equação de Friedmann	34
2.10	Equações do Fluido e da Aceleração	38
2.11	Equações de Estado	39
2.12	A Constante Cosmológica	40
2.13	A Densidade de Energia	41
2.14	Os Possíveis Universos	43
2.14.1	Exclusivamente Curvatura	43
2.14.2	O Universo Plano	44
2.14.3	Universo Plano Contendo Apenas Matéria	45
2.14.4	Universo Plano Contendo Apenas Radiação	45
2.14.5	O Universo Plano Contendo Apenas Constante Cosmológica	46
2.15	O Universo Em Uma Aproximação Realística	46
2.15.1	Universo Plano Composto por Matéria e Curvatura	47
2.15.2	Universo Plano Constituído Por Matéria e Constante Cosmológica	48
2.15.3	Universo Formado Por Matéria, Curvatura e Constante Cosmológica	48
2.15.4	Universo Plano Composto Por Radiação e Matéria	49
2.15.5	O Nosso Universo	49
2.16	Determinação dos Parâmetros do Cosmo	51
2.16.1	O Parâmetro de Desaceleração e a Constante de Hubble	51
2.16.2	A Distância de Luminosidade	53
2.16.3	Distância de Diâmetro Angular	55
2.17	Matéria Escura	56
2.17.1	Influência Gravitacional da Matéria Escura	56
2.17.2	A Matéria Escura em Aglomerados de Galáxias	58
2.17.3	Lentes Gravitacionais	60

2.17.4	Matéria Escura Bariônica	62
2.17.5	Matéria Escura Não Bariônica	63
2.18	A Radiação Cósmica De Fundo	64
2.18.1	Recombinação e Desacoplamento	66
2.18.2	Flutuações de Temperatura	67
2.19	A Nucleossíntese Primordial	68
2.19.1	Nêutrons e Prótons	68
2.19.2	A Síntese do Deutério	71
2.19.3	A Assimetria Matéria Antimatéria	74
2.20	A Inflação	74
2.20.1	O Problema da Planaridade	75
2.20.2	O Problema do Horizonte	76
2.20.3	O Problema do Monopolo	77
2.20.4	A Inflação Como Resposta	78
2.21	Formação de Estruturas	81
2.21.1	Instabilidade Gravitacional	82
2.21.2	O Comprimento de Jeans	83
2.22	A Energia Escura	86
2.22.1	O Que É a Constante Cosmológica Ω_Λ ?	88
2.22.2	A Energia do Vácuo	88
2.23	Conjeturas	90
3	CONCLUSÕES	91
4	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	92

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo mostrar os caminhos escolhidos pela humanidade na inesgotável busca de respostas a fundamentais questionamentos que perduram no inconsciente humano.

Desta forma, procuraremos examinar a trajetória que o ser humano descreveu na direção de um futuro que lhe apontasse rumos esclarecedores de indagações tais como: Quem somos? De onde viemos? Para onde iremos? Onde estamos?

Veremos, então, a Cosmologia em seu desenvolvimento histórico desde os filósofos gregos até a atualidade. Em seguida, numa seqüência temporal, enfocaremos a análise matemática e física das teorias cosmológicas elaboradas pela mente humana.

Iniciaremos com o Geocentrismo, veremos o Heliocentrismo, a Cosmologia Newtoniana, a Equação de Friedmann, a Cosmologia e Relatividade Geral de Einstein, o *Big-Bang*, a Radiação de Fundo em Microondas, a Criação de Matéria no Vácuo, o Universo Inflacionário, a Matéria Escura no Universo, a Constante Cosmológica, a Energia Escura e o Universo Acelerado.

Finalmente, propomos em *Conjeturas* a hipótese que sugere para o Universo o formato de uma galáxia em expansão. Embora, pudesse assumir quaisquer das estruturas galácticas conhecidas, haveria uma probabilidade maior de que este Universo apresentasse o aspecto de uma galáxia espiral.

Palavras-chave: Cosmologia, *Big-Bang*, Universo, Matéria Escura, Energia Escura.

ABSTRACT

This work has for objective to show to the ways chosen for the humanity in the eternal search of answers the basic questionings that last in the unconscious human being.

In such a way, we will look for to examine the trajectory that the human being described in the direction of a future that pointed it enlightening routes of investigations such as: Who we are? Of where we came? For where we will go? Where we are?

We will see, then, Cosmology in its historical development since the Greek philosophers until the present time. After that, in a secular sequence, we will focus the mathematical and physical analysis of the cosmological theories elaborated by the mind human being.

We will initiate with the Geocentrism, we will see the Heliocentrism, Newtonian Cosmology, the Equation of Friedmann, the Cosmology and General Relativity of Einstein, the Big-Bang, the Cosmic Microwave Background, the Creation of Substance in the Vacuum, the Inflationary Universe, and the Dark Matter in the Universe, the Cosmological Constant, the Dark Energy and the Sped up Universe.

Finally, we consider in *Conjectures* the hypothesis that suggests for the Universe the format of a galaxy in expansion. Although, it could assume any of the known galactic structures, would have a bigger probability of that this Universe presented the aspect of a galaxy spiral.

Keywords: Cosmology, Big-Bang, Universe, Dark Matter, Dark Energy.

COSMOLOGIA

Este é um pequeno passo para um homem, mas um salto gigante para a humanidade.
Neil Armstrong, comandante da missão Apollo 11, primeiro homem a pisar na Lua (1969)

1 INTRODUÇÃO

A humanidade tem-se preocupado, ao longo dos séculos, com perguntas que poderão satisfazer seu permanente desejo de autoconhecimento: Quem somos? De onde viemos? Para onde iremos? Onde estamos?

Os diversos caminhos percorridos para a obtenção de respostas a essas indagações passaram e passam, invariavelmente, por questões levadas à ciência, à religião, ou mesmo à mitologia.

Muitas vezes, ciência e religião se entrelaçaram – outras, o conflito tornou-se o resultado natural.

Atualmente, novas questões estão clamando por mais esclarecedoras respostas. Embora, a massa de informações de que dispomos, seja, consideravelmente, superior a todas as etapas por que passaram os que nos precederam, nossas indagações aumentaram exponencialmente.

Desta forma, ainda não sabemos qual a origem da **Matéria Escura**¹, responsável por efeitos gravitacionais importantes evidenciados no movimento de rotação das galáxias; como se origina o potencial acelerativo da **Energia Escura**², proporcionando um efeito de aceleração gravitacional negativa.

Outras questões que poderemos levantar são:

Houve um **Big-Bang**? Modelo que concebe o Universo se expandindo, originário de uma grande explosão, a partir de um estado extremamente denso e quente, há cerca de 13,7 bilhões de anos.

¹ **Matéria Escura** – É uma hipotética forma de matéria que não emite ou reflete radiação eletromagnética, interagindo, apenas, gravitacionalmente com a matéria visível.

² **Energia Escura** – Hipotética forma de energia que permeia todo o espaço, provocando aumento na taxa de expansão do Universo. Provoca um efeito de pressão negativa, semelhante à de uma força que se contraponha à força da gravidade

Haverá um **Big-Crunch**? Um possível cenário futurístico, em que a densidade de matéria superaria a densidade crítica, fazendo com que o Universo desabasse sobre si mesmo, transformando-se em um excepcional *buraco negro*.

A **Radiação de Fundo de Microondas**, uma forma de radiação eletromagnética presente na totalidade do Universo, possuindo um espectro térmico de corpo negro na temperatura de 2,725 K, representa, verdadeiramente, um registro das etapas iniciais de criação do Universo?

Que perturbações importantes foram responsáveis pela criação das **Galáxias**?

Como se realiza a interação entre a cosmologia e a física de partículas?

Haverá uma **Teoria do Tudo**?

1.1 Objetivo

O objetivo principal deste trabalho é o de buscar respostas aos questionamentos feitos acima. Onde encontrar explicações a perguntas que estão gravadas em nossos inconscientes?

Quem somos? Para onde iremos? Onde estamos? De onde viemos?

1.2 Metodologia

Utilizaremos, para consulta, os livros *Introdução à Cosmologia* de Ronaldo E. de Souza e *Introduction to Cosmology* de Barbara S. Ryden, como bibliografia inicial. Buscaremos, igualmente, outros autores, na medida das solicitações do trabalho, para complementação dos conceitos e teorias discutidos.

A Cosmologia, em seu desenvolvimento histórico desde os filósofos gregos até a atualidade, terá abordagem de abertura. A seguir, em seqüência temporal, passaremos a enfocar a análise matemática e física das teorias cosmológicas elaboradas pelo gênio humano.

Iniciaremos pelo Geocentrismo, com Platão, veremos o Heliocentrismo com Nicolau Copérnico e Galileu Galilei, a Cosmologia Newtoniana, a Equação de Friedmann, Cosmologia e Relatividade Geral de Einstein, o Big Bang, o Fundo de Microondas, a Criação de Matéria no Vácuo, o Universo Inflacionário, o Modelo Bariônico, a Matéria Escura no Universo, a Constante Cosmológica e a Energia Escura, o Universo Acelerado.

Neste trabalho, procuraremos estudar as hipóteses, atualmente, aceitas, e, dentro das limitações temporais que sofre, buscar resultados e análises que estarão sendo efetuados pelo LHC (The Large Hadron Collider).

Com perímetro circular, e 27 km de comprimento, irá permitir a realização de colisões entre prótons, numa energia que poderá atingir a 14 TeV, tendo iniciado suas operações em 14 de Maio de 2008.

Lá, acredita-se sejam produzidos os *bósons de Higgs* (a partícula de Deus), que viriam complementar as lacunas no Modelo Padrão, além de promover a GUT (Grand Unified Theory), ou Teoria da Unificação das Forças, permitindo entender melhor a Força da Gravidade e o porquê é, comparativamente, muito mais fraca que as demais forças da natureza.

Pretendo, ao final, apresentar algumas hipóteses acerca da Matéria Escura, Energia Escura, Expansão Cósmica Acelerada, e outras Forças da Natureza, que desejo desenvolver em trabalhos posteriores de pesquisa.

1.3 Sobre os Ombros de Gigantes

Da mitologia à época presente, veremos como o ser humano, em busca de novos conhecimentos, descreveu importante trajetória, na qual o progresso científico foi o resultado, naturalmente, previsível.

Começando pela Grécia antiga nos depararemos, inicialmente, com Hesíodo, que por volta do século VIII a.C. descreveu os princípios da Teogonia, segundo os gregos.

Estes povos acreditavam que a natureza como um todo seria uma estrutura análoga a de um corpo vivo. Tudo teria se originado de um estado inicial denominado caos. Após este processo, o Universo foi dividido em domínios: Terra, Inferno e Céu. Surge Eros, que une os princípios cósmicos recém-criados para formar o que hoje entendemos como Universo. A Terra era governada por Gaia. Urano reinava no domínio celeste. Urano e Gaia motivados por Eros geraram doze Titãs, identificados com as forças da natureza. Seis do sexo masculino – Oceanus, Céos, Crio, Hipérion, Jápeto (pai de Prometeu) e Cronos – e seis do sexo feminino - Téia, Réia (mãe dos deuses do Olimpo), Têmis (a justiça), Minemósine (a memória), Febe (deusa da Lua cheia) e Tétis (deusa do mar).

Gaia descontente com Urano instigou entre os filhos a revolta. Cronos, ou Saturno, assumiu a liderança da luta contra Urano, e, com uma foice que lhe foi oferecida por Gaia castrou o pai. O sangue de Urano ao espalhar-se pela terra gerou gigantes; da espuma que se formou no mar, nasceu Afrodite.

Assim, iniciou-se o domínio de Cronos, que alertado pela profecia de que seria deposto por um filho, Zeus, passou a engolir todos os seus descendentes, gerados com Réia,

sua irmã – uma forma de os gregos visualizarem o tempo que destrói implacavelmente as criaturas por ele geradas.

Os grandes filósofos gregos procuraram adequar as concepções anteriores sobre o Universo, de forma a impor vínculos, ajustes e testes às teorias e crenças existentes.

Uma das questões mais estudadas consistia em saber se a natureza era guiada a um propósito definido, devendo obedecer às *leis de causalidade* que geram a ordem. Terá sido a natureza constituída em nosso benefício exclusivo? Ou haverá algum outro propósito não bem definido?

Anaxágoras (500-428 a.C.) acreditava que o Universo sempre existiu. No princípio formado por partículas infinitesimais. Uma espécie de *mente cósmica* as organizaria para se tornarem no Universo que conhecemos hoje. Esta espécie de *mente cósmica* erradicou o caos e harmonizou o todo.

Parmênides (480 a.C.) acreditava que deveriam existir múltiplas interpretações da natureza, todas igualmente válidas.

Já, Platão (427 – 347 a.C.) acreditava que a natureza não somente se originava de uma *mente cósmica*, como também, era permanentemente velada por ela. Ele percebia um Universo gerado por Deus com propósitos bem definidos: criar condições para o crescimento pessoal da humanidade. O Criador nos proporcionou condições que nos levassem ao entendimento da *inteligência cósmica*, e com isso, aplicar os conhecimentos obtidos ao nosso crescimento intelectual. Poderíamos, desta forma, imitar a perfeição divina, e sermos livres para efetuarmos as opções que nos levassem a novos caminhos.

A idéia do *geocentrismo* é-lhe atribuída. Neste modelo, a Terra seria o centro do Universo, ocupando o círculo mais interno, mais acima estaria a água; o ar e o fogo ocupariam círculos exteriores. A esfera celeste estaria bem mais acima destes quatro elementos fundamentais. As estrelas seriam orifícios na esfera celeste. Seu brilho era explicado pelo fogo que existiria mais além.

Aristóteles (384-322 a.C.), discípulo de Platão, também supunha que a Terra fosse o centro do Universo. Concebia uma natureza provida de inteligência, onde cada momento é decorrente de prévia programação. Haveria causas explicando a existência do Universo. Uma *causa formal* mostraria o relacionamento entre partes do universo microscópico para gerar um ente específico; uma *causa efetiva*, que seria o agente de produção do objeto; uma *causa final*, indicando a finalidade do ser. Para Aristóteles a natureza deveria ser eterna e imutável. Uma natureza estacionária.

Aristarco de Samos (310-230 a.C.) foi o primeiro filósofo a apresentar uma alternativa ao geocentrismo. Tal era a aceitabilidade do modelo geocêntrico, que sua tese heliocêntrica foi deixada adormecida no leito da história.

Apesar de o modelo geocêntrico ser defendido pela maioria dos estudiosos da antiguidade, algumas evidências de que havia falhas foram sendo notadas à medida que os meios de observação eram melhorados.

O movimento do planeta Marte era emblemático – periodicamente executa um movimento de laço durante sua trajetória. Outros planetas também possuíam movimentos incompatíveis com órbitas circulares em torno da Terra.

Hiparco (190-120 a.C) apresentou um modelo geométrico para corrigir tais anomalias nos movimentos da Lua e do Sol, que além de suas órbitas circulares realizadas em torno de nosso planeta, apresentariam, ainda, um movimento de epiciclo. Com esta solução, as trajetórias estariam corrigidas em primeira ordem, oferecendo resultados mais precisos.

Para Cícero (106-43 a.C) nada no Universo seria casual, não planejado, variável. Acreditava numa motivação divina para a existência da natureza. O Cosmo não teria acontecido por acaso. Imaginar outra maneira seria equivalente a compor uma grande obra literária apenas juntando letras de maneira aleatória.

Ptolomeu (87-150 d.C.) aperfeiçoou a versão do modelo geocêntrico, corrigindo as deficiências daquele sugerido por Hiparco. As previsões das órbitas dos astros passaram a se realizar com notável precisão, incluindo aí, os eventos a elas ligados: o calendário anual, o número de dias do ano, as festas móveis, a duração das estações, etc.

Estas idéias foram mantidas até o final da Idade Média. O modelo Ptolomaico era fortemente apoiado, já que conseguia prever eventos astronômicos com notável correção. Além disso, os teólogos também apoiavam este enfoque geocêntrico da mecânica celeste, visto que a Bíblia, de certa maneira, o confirmava, centrando no homem a exclusiva finalidade da criação divina.

Tomás de Aquino (1225-1274) acreditava que o funcionamento harmônico da natureza é uma prova incontestável de que Deus existe. A matéria não poderia organizar-se, a menos que uma *inteligência superior* assim determinasse.

Com o Renascimento, iniciou-se um extraordinário período de progresso para a humanidade. A natureza é a expressão da vontade divina. Seus mecanismos são perfeitos. O Criador a controla.

Nicolau Copérnico (1473-1543) apresentou o *heliocentrismo*, modelo que se contrapõe ao *geocentrismo*, apresentando o Sol como centro do sistema planetário. Neste

modelo, a Terra percorrendo sua trajetória circular em torno do Sol explicaria o movimento retrógrado dos planetas, de uma forma simples e elegante, em oposição à teoria afetada dos epípiclos. Entretanto, apesar de toda sua simplicidade, não se impôs frente ao modelo geocêntrico, já que as previsões dos epípiclos desfrutavam de bastante credibilidade, sobejamente, comprovada. Com estas idéias, contrariou círculos religiosos, que fundados nos ensinamentos bíblicos³, apresentavam o homem como o centro do Universo. Seu livro⁴, publicado no ano de sua morte, foi incluído no *index*.

O modelo *heliocêntrico* instigou a separação entre *cosmologia* e *teologia*.

Tycho Brahe (1546-1601), embora contrário ao *heliocentrismo*, realizou medidas astronômicas que favoreceram sua comprovação.

Johannes Kepler (1571-1630) utilizou-se das precisas anotações de Tycho Brahe, para comprovar o movimento dos planetas em torno do Sol, e estabelecer importantes leis para o estudo da Astronomia:

- a) Primeira Lei de Kepler⁵: Lei das órbitas;
- b) Segunda Lei de Kepler⁶: Lei das áreas;
- c) Terceira Lei de Kepler⁷: Lei harmônica.

Giordano Bruno (1548-1600), embora não tenha defendido a teoria *heliocêntrica*, se apresenta como exemplo de conflito entre ciência e religião. Sua idéia básica era muito avançada para seu tempo. Um dos pontos-chaves de sua teoria é a *cosmologia*, segundo a qual o Universo seria infinito, contendo inumeráveis sistemas solares e planetas. A vida inteligente permearia estes outros universos naturalmente. E, por suas idéias heterodoxas, foi queimado na fogueira da Inquisição.

Galileu Galilei (1564-1642), com observações do planeta Júpiter e do planeta Vênus, encontrou provas evidentes de que o *heliocentrismo* seria o modelo correto para explicar o movimento dos astros, ao invés do *geocentrismo*. Descobriu as fases de Vênus – fenômeno incompatível com a teoria geocêntrica, já que se o Sol ocupasse órbita circular além da de Vênus, este efeito não seria possível. Além disto, descobriu quatro luas girando em torno do planeta Júpiter, formando com ele um sistema planetário independente.

³ Em Josué 10:13 “E o Sol se deteve, e a Lua parou, até que o povo se vingou de seus inimigos.”

⁴ *De revolutionibus orbium coelestium* (“Da revolução de esferas celestes”),

⁵ “O planeta em órbita em torno do Sol descreve uma elipse em que o Sol ocupa um dos focos”.

⁶ “A linha que liga o planeta ao Sol varre áreas iguais em tempos iguais”.

⁷ “Os quadrados dos períodos de revolução dos planetas são proporcionais aos cubos dos eixos máximos de suas órbitas”.

Vislumbramos aqui, num movimento que se repete, o embate entre ciência e religião. Galileu foi chamado a Roma para explicar suas opiniões (1611-1615). O Tribunal do Santo Ofício (Inquisição) declarou que a afirmação de que o Sol é o centro do Universo é uma heresia e a de que a Terra se move é teologicamente errada. Galileu foi estimulado a abandonar suas idéias sobre a Teoria Heliocêntrica, deixando-a, apenas, como ferramenta matemática. Tendo, em 1623 sido empossado um novo papa, Urbano VIII, seu amigo pessoal, sentiu-se encorajado para publicar um novo livro, *Saggiatore* (Experimentador), no qual combatia a física Aristotélica, estabelecendo a matemática como fundamento para as ciências exatas. Galileu, agora, foi convocado a Roma para ser julgado. Depois de longo julgamento foi condenado a abjurar publicamente suas idéias e à prisão domiciliar, provavelmente, salvo da fogueira pelo seu relacionamento afetivo com o papa Urbano VIII. Diz-se que, ao sair do tribunal, após ser condenado, pronunciou a conhecida frase: *Eppur si muove*, “contudo, ela se move”. Morreu cego e condenado pela Igreja. Teve suas obras inscritas no “*Index Librorum Prohibitorum*”. Em 1983, 341 anos após sua morte, teve seu processo revisto pela Igreja Católica, sendo, em 1999, considerado inocente de todas as acusações.

Isaac Newton (1642-1727), conquanto fosse um investigador que se empenhasse em aplicar os vários conhecimentos científicos na explicação do funcionamento da natureza, julgava que as leis físicas não seriam suficientes para entendê-la. Deveria existir um *Autor Supremo*, responsável pela harmonia a ela inerente.

A partir do *heliocentrismo*, iniciou-se nova era para a humanidade. Agora, não seríamos mais o centro da criação divina, mas parte dela. O Universo passou a ser entendido como preenchido por estrelas semelhantes ao Sol, onde poderiam existir planetas semelhantes à Terra girando em seu entorno. Utilizando-nos de telescópios cada vez melhores, passamos a conhecer o Cosmo com mais exatidão.

Charles Messier (1730-1813) elaborou uma lista contendo 103 objetos não estelares. Sabemos, atualmente, que alguns são galáxias, como M31 (Andrômeda), outros aglomerados globulares, como M15, e há, também, nebulosas galácticas.

Immanuel Kant (1724-1804) imaginava a matéria condicionada por leis cósmicas. Um *Primeiro Princípio* extraordinariamente sábio a governaria. Deveria existir uma inteligência suprema, um Deus, que planeja, controla, dispõe, dirige coordena tudo. Introduzindo, no caos, a ordem. Juntamente com Thomas Wright (1711-1786), conseguiu visualizar a estrutura discoidal da Via-Láctea, composta por milhares de estrelas. Desenvolveu o conceito de *universos-ilhas*, segundo o qual as nebulosas catalogadas por

Messier seriam sistemas semelhantes à nossa galáxia. A comprovação observacional de suas idéias verificou-se, apenas, no século XX.

William Herschel (1738-1822), utilizando-se de telescópios que ele mesmo construía, conseguiu identificar em torno de mil nebulosas. Organizou o catálogo NGC (New General Catalog). Propôs que a Via Láctea devesse ter a forma de disco.

Em 1838, Friedrich W. Bessel (1784-1846) anunciou a detecção com sucesso da paralaxe⁸ de algumas estrelas.

No final do século XIX, o desenvolvimento da fotografia veio em auxílio dos astrônomos em suas pesquisas do Universo. O espectrógrafo, também, assumiu papel muito importante nos trabalhos em Astronomia.

Em 1828, Fraunhofer mostrou as célebres linhas do espectro solar, que passaram a usar seu nome.

Em 1859, Robert W. Bunsen juntamente com Gustav R. Kirchhoff mostraram o uso da espectroscopia na análise dos materiais.

Em 1868, William Huggins (1824-1910), utilizando-se do efeito Doppler, calculou a alteração que as diversas linhas do espectro passariam a ter, como resultado de movimento relativo entre fonte e receptor.

No final do século XIX, o espectrógrafo já era amplamente utilizado no estudo das características físico-químicas das estrelas.

Henrietta S. Leavitt (1868-1921), no início do século XX, apresentou encaminhamento da solução para a existência dos *universos-ilhas*. Utilizou-se de observações de estrelas tipo Cefeida⁹, na Pequena Nuvem de Magalhães.

Em 1913, Ejnar Hertzsprung (1873-1967), estudou algumas Cefeidas para calibrar o ponto zero, que nos dá o valor da luminosidade dessas estrelas. Assim, conseguiu estimar a distância das Nuvens de Magalhães, comprovando serem de natureza extragaláctica.

Pierre S. Laplace (1749-1827) teorizava que o sistema solar teria se formado pela contração de uma nebulosa. Naquele momento, especulava-se que as nebulosas espirais poderiam fazer parte do processo de formação das estrelas e planetas.

⁸ É a alteração da posição angular de dois pontos estacionários relativos um ao outro como vistos por um observador em movimento. De forma simples, paralaxe é a alteração aparente da posição de um objeto contra um fundo devido ao movimento do observador. (WIKIPEDIA)

⁹ **Cefeida** é uma estrela gigante ou supergigante amarela, de 4 a 15 vezes mais massiva que o Sol e de 100 a 30 000 vezes mais luminosa, cuja luminosidade varia de 0,1 a 2 magnitudes segundo um período bem definido, compreendido entre 1 e 100 dias, de onde ela tira seu nome de estrela variável. Elas foram chamadas segundo o protótipo de estrela δ da constelação de Cepheus. (WIKIPEDIA)

Edwin Hubble (1889-1953) em 1925 descobriu que a nebulosa de Andrômeda era, na realidade, uma galáxia vizinha da Via Láctea. No Observatório de Monte Wilson, Hubble pode estudar melhor as Cefeidas em Andrômeda, calculando a distância da nebulosa em 930 mil anos-luz, metade da distância aceita atualmente. De qualquer maneira, estava provado que seria um objeto extragaláctico. Os *universos-ilhas* de Kant, realmente, existiam. Hubble demonstrou, também, que o Universo não era estático e sim, que estava em expansão. As galáxias estão se afastando entre si com velocidades diretamente proporcionais à sua distância.

Albert Einstein (1879-1955) teve um papel relevante em cosmologia, projetando-se de forma incisiva até o presente. A Teoria da Relatividade Restrita (1905) demarcou o início de uma extraordinária revolução na Física, mexendo no âmago de suas estruturas. O tempo e o espaço deixaram de ser absolutos. Já em 1907, apresentou o princípio da equivalência, segundo o qual, observadores seriam incapazes de distinguir os efeitos de um campo gravitacional dos de um referencial acelerado. Em 1911, apresentou a possibilidade de ocorrência do *redshift gravitacional*, sofrido pelos fótons afastando-se de um campo gravitacional de grande intensidade. Em 1915, publicou a Teoria da Relatividade Geral, apresentando-nos a geometria do espaço-tempo.

Edward A. Milani (1896-1950) introduziu o *Princípio Cosmológico*, segundo o qual o Universo é homogêneo e isotrópico em grandes escalas.

Continuando, poderemos citar, ainda, muitos outros físicos que contribuíram de forma notável para o avanço da ciência, como por exemplo:

Wilhelm Conrad Röntgen (1845-1923), descobridor dos raios-X;

Hendrik Lorentz (1853-1928), pesquisando o magnetismo;

Antoine Henri Becquerel (1852-1908), descobridor da radiatividade, Pierre Curie (1859-1906) e Marie Curie (1867-1934), intensificando as pesquisas nesse campo;

Max Karl Ernst Ludwig Planck (1858-1947), que nos apresentou a teoria quântica;

Niels Henrik David Bohr (1865-1962), desvendando a estrutura do átomo;

Louis de Broglie (1892-1987), que apresentou a dualidade onda partícula, representada pela conhecida expressão $\lambda = h / p$, sendo λ , o comprimento de onda, h , a constante de Planck e p , o momentum linear;

Chandrasekhara Venkata Raman (1888-1970), com pesquisas sobre o espalhamento molecular da luz, descobridor do *Efeito Raman*;

Werner Karl Heisenberg (1901-1976), criador da mecânica quântica;

Erwin Rudolf Josef Alexander Schrödinger (1887-1961) e Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984), apresentando novas modalidades para a teoria atômica;

James Chadwick (1891-1974), descobridor do nêutron;

Enrico Fermi (1901-1954), que cooperou na construção do primeiro reator nuclear. Teve participação significativa no desenvolvimento da física nuclear, mecânica quântica e física de partículas;

Wolfgang Ernst Pauli (1900-1958), que divulgou importantes trabalhos sobre o spin, descobrindo o *Princípio da Exclusão*;

Max Born (1882-1970), realizando pesquisas em mecânica quântica, especialmente, quanto aos aspectos estatísticos da função de onda;

Rudolf Ludwig Mössbauer (1929), que estudou a absorção ressonante dos raios gama, descobridor do *Efeito Mossbauer*;

Lev Davidovich Landau (1908-1968), estudando a matéria condensada, apresentou importantes trabalhos sobre o hélio líquido;

Richard Phillips Feynman (1918-1988), que realizou pesquisas fundamentais em eletrodinâmica quântica, contribuindo, decisivamente, no desenvolvimento da física de partículas;

Hans Albrecht Bethe (1906-2005) estudando as reações nucleares que ocorrem no interior estelar;

Murray Gell-Mann (1929), que realizou pesquisas sobre partículas elementares. Por seus trabalhos, recebeu o prêmio Nobel de 1969.

Louis Eugene Félix Néel (1904-2000), desenvolvendo estudos sobre ferrimagnetismo e antiferromagnetismo conduzindo a importantes aplicações em física do estado sólido;

Subrahmanyan Chandrasekhar (1910-1995), que recebeu o prêmio Nobel de 1983 por seus estudos teóricos sobre a estrutura e evolução das estrelas;

John Bardeen (1908-1991), Leon Neil Cooper (1930) e John Robert Schrieffer (1931), que efetuaram estudos sobre supercondutividade, desenvolvendo a teoria BCS;

Raymond Davis Jr. (1914-2006) e Masatoshi Koshiba (1926) desenvolvendo trabalhos para a detecção de neutrinos cósmicos;

Stephen William Hawking (1942), que efetuou importantes pesquisas em cosmologia e gravidade quântica. Em seus estudos sobre *buracos-negros*, defendeu a possibilidade de que emitam radiação, hoje, chamada de *Radiação de Hawking*.

2 FÍSICA E A MATEMÁTICA DESCREVEM O COSMO

Se as portas da percepção fossem descerradas, todas as coisas apareceriam para o homem como são, infinitas.
William Blake – *The Marriage of Heaven and Hell* (1793).

2.1 O Geocentrismo

Este modelo privilegia a importância da Terra frente aos demais corpos celestes, colocando-a no centro do Universo. Acredita-se que Platão (427-347 a.C.) tenha sido seu idealizador. Aristóteles¹⁰ (384-322 a.C) e Ptolomeu¹¹ (87-150 d.C), também, entendiam que o Universo teria um centro em que a Terra seria o referencial.

Porém, Ptolomeu aperfeiçoou este modelo de forma a torná-lo mais preciso, englobando em sua formulação o movimento retrógrado dos planetas.

Corrigiu imperfeições do modelo de Hiparco para o movimento da Lua.

Os planetas se movimentariam em órbitas múltiplas, compostas por referenciais inter-relacionados. Em um primeiro momento, descrevem uma trajetória de *epiciclo* sobre um círculo chamado *deferente*, cujo centro ocupa meia distância entre a Terra e outro ponto designado *equante*. Assim, a Terra apresenta ligeira excentricidade relativa à órbita dos planetas, o que foi considerado não uma violação, mas flexibilização da teoria do Geocentrismo. Os planetas realizam um movimento uniforme em relação ao *equante* (Fig.1).

¹⁰ **Aristóteles** (em grego **Αριστοτέλης**) nasceu em Estagira, na Calcídica (384 a.C. - 322 a.C.). Filósofo grego, aluno de Platão e professor de Alexandre, o Grande, é considerado um dos maiores pensadores de todos os tempos e criador do pensamento lógico. (WIKIPEDIA – 16.03.2008)

¹¹ **Claudius Ptolemaeus** (em grego: **Κλαύδιος Πτολεμαεος**; cerca de 87 – 150 d.C.), em português dito **Cláudio Ptolomeu** ou **Ptolomeu**, foi um cientista grego que viveu durante o período helenista, provavelmente, em Alexandria, na então província romana do Egito. Ele é reconhecido pelos seus trabalhos em matemática, astrologia, astronomia, geografia e cartografia. Realizou também trabalhos importantes em ótica e teoria musical. A sua obra mais conhecida é o *Almagesto* (que significa "O grande tratado"), um tratado de astronomia. Esta obra é uma das mais importantes e influentes da Antiguidade Clássica. Nela está descrito todo o conhecimento astronômico babilônico e grego e nela se basearam as astronomias de Árabes, Indianos e Europeus até o aparecimento da teoria heliocêntrica de Copérnico. (Wikipedia – 16.03.2008).

Este modelo contava com apoio dos teólogos, entre eles, Tomás de Aquino¹² (1225-1274), já que, em consonância com a Bíblia, punha a Terra e o ser humano no centro dos propósitos divinos.

Esta metodologia foi fundamental na previsão dos fenômenos celestes, e durou até a Idade Média. Em 1543, com a publicação *De revolutionibus orbium coelestium* por Copérnico, o Geocentrismo passou a apresentar o declínio gradual e irreversível que o levou a, em poucos anos, ser deslocado por uma nova concepção cosmológica em que a Terra já não coordenaria o movimento dos demais astros do Universo, e sim, seria apenas uma coparticipante eventual.

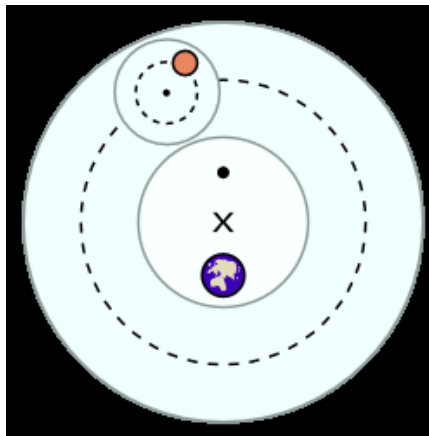


Figura 1 Sistema Ptolomaico, mostrando o epiciclo, o deferente e o equante.

(Wikipedia)

2.2 O Heliocentrismo

A humanidade, com o Renascimento, descreveu novos e instigantes caminhos em sua evolução. Não somente o progresso artístico, mas o científico foi notável. A natureza se submete aos desígnios divinos. Seus mecanismos são perfeitos.

Nicolau Copérnico (1473-1543), abraçando idéias de Aristarco de Samos, apresentou novo modelo destinado a descrever o Cosmo.

¹² **Tomás de Aquino** foi chamado o mais sábio dos santos e o mais santo dos sábios. Seu maior mérito foi a síntese do cristianismo com a visão aristotélica do mundo, introduzindo o aristotelismo, sendo redescoberto na Idade Média, na escolástica anterior, compaginou um e outro, de forma a obter uma sólida base filosófica para a teologia e retificando o materialismo de Aristóteles. Em suas duas "*Summae*", sistematizou o conhecimento teológico e filosófico de sua época : são elas a "*Summa Theologiae*", a "*Summa Contra Gentiles*". (Wikipedia – 17.03.2008)

Encontrou resistências provindas de círculos católicos e protestantes, já que sua teoria vinha em desprivilegio do homem, e em desacordo com o estabelecido pela Bíblia.

Seu livro *De revolutionibus orbium coelestium* (Da revolução de esferas celestes), publicado durante o ano de sua morte, em 1543, deu novos rumos à cosmologia, situando a Terra na condição periférica, e o Sol como intérprete principal.

O Universo deslocava-se de uma interpretação geocêntrica, ou antropocêntrica, para outra mais modesta, a heliocêntrica.

As idéias básicas do modelo copernicano eram:

- O movimento dos astros é uniforme, circular, eterno, podendo ser composição de diversos outros (epiciclos);
- O centro do Universo situa-se nas proximidades do Sol;
- Em torno do Sol giram Mercúrio, Vênus, Terra, Lua, Marte, Júpiter, Saturno e as estrelas fixas;
- A Terra possui três movimentos: rotação, translação e inclinação de seu eixo;
- O movimento retrógrado dos planetas é explicado pela translação da Terra em torno do Sol;
- A distância entre o Sol e a Terra é pequena, se comparada à distância das estrelas.

Apesar da elegância do modelo de Copérnico, sua teoria sofreu forte oposição, já que não havia evidências experimentais que confirmassem o previsto, e, além de não contrariar a Escritura Sagrada, o modelo geocêntrico demonstrara ser muito útil e preciso.

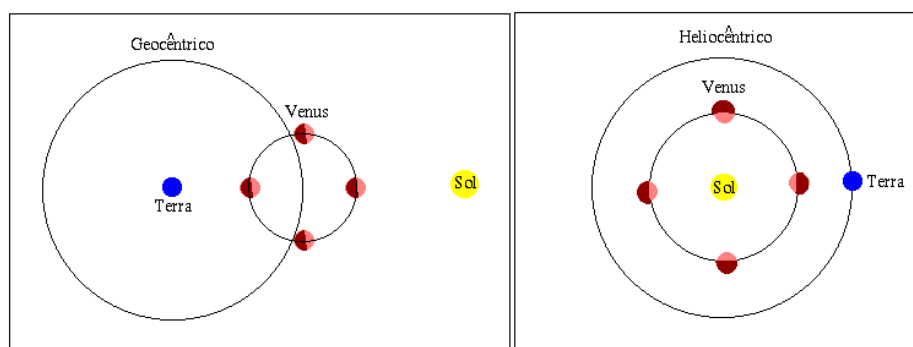


Figura 2 Fundamentos de Astronomia e Astrofísica – FILHO, Kepler de Souza Oliveira e SARAIVA, Maria de Fátima Oliveira.

2.3 O Universo é Isotrópico e Homogêneo

Em larga escala, na ordem de 100 Mpc, poderemos considerar o Universo isotrópico e homogêneo.

Já em distâncias menores, a não homogeneidade e a anisotropia são características comuns. Podemos, aí, situar os superaglomerados de galáxias com dimensões de 10 a 30 Mpc.

Os quasares, com *redshift* superior ao das galáxias, nos indicam, em volumes ainda maiores, distâncias em torno de 1300 Mpc, que o cosmo apresenta homogeneidade e isotropia consideráveis

2.4 A Lei de Hubble

Observando linhas espectrais de absorção em uma galáxia típica, encontramos um desvio entre os comprimentos de onda emitidos e os que se obtêm em laboratório.

Assim, definiu-se o *redshift*:

$$z \equiv \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}} \quad (2.1)$$

Sendo λ_{ob} , comprimento de onda observado, e λ_{em} comprimento de onda da luz emitida.

Com $z < 0$, haverá *blueshift*, ou seja, o desvio para o azul. Para $z > 0$, observaremos o *redshift*, desvio para o vermelho.

Edwin Powell Hubble (1889-1953), trabalhando dados obtidos por Milton La Salle Humason sobre linhas espectrais de galáxias, descobriu, em 1929, que as galáxias se afastavam com velocidades proporcionais à distância, ou seja, quanto mais distante estivesse a galáxia, maior seria sua velocidade de afastamento. Hubble publicou suas conclusões efetuando estudo comparativo do movimento de 24 galáxias.

Com isto, estabeleceu a conhecida **Lei de Hubble**:

$$H_o = \frac{v}{r} \quad (2.2)$$

A Figura 3 é a expressão gráfica desta lei:

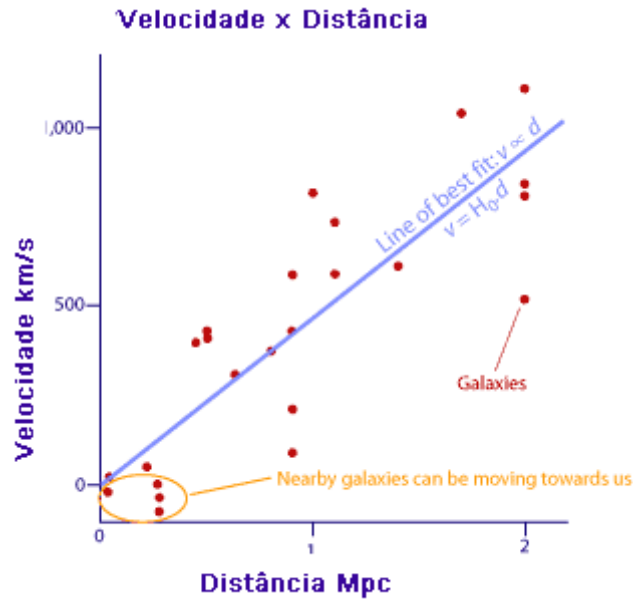


Figura 3 Australia Telescope Outreach and Education-
<http://outreach.atnf.csiro.au/education/senior/cosmicengine/hubble.htm>

H_0 é a constante de Hubble, r , a distância. Os dados mais recentes obtidos pela equipe do HST (Hubble Space Telescope) apontam para um valor de $H_0 = 72 \pm 5 \text{ km.s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$.

Para velocidades muito menores do que a velocidade da luz, a expressão do efeito Doppler¹³ é $z = v/c$, sendo v a velocidade radial da fonte de luz. A **Lei de Hubble** poderá, desta forma, ser escrita:

$$z = \frac{H_0 r}{c} \quad (2.3)$$

e a sua interpretação é que as galáxias se afastam porque o Universo está se expandindo.

Indagamo-nos de que forma se iniciou a expansão do Universo, e, se o meio é homogêneo e isotrópico, como observadores inerciais em diferentes pontos o perceberiam.

Podemos fazer uma analogia entre o Universo em expansão e um bolo de passas. Se todo o volume do bolo se expande, as passas estarão se afastando entre si. Haverá um parâmetro igual para todas elas, representando o quanto aumentou sua distância relativa. A este parâmetro, denominamos de *fator de escala*.

Seja, portanto, $a(t)$ o fator de escala a que estão submetidos três observadores em galáxias distintas:

¹³ A fórmula, considerado o efeito relativístico, que deve ser utilizada para velocidades não desprezíveis em relação à velocidade da luz, é: $\frac{v}{c} = \frac{(z+1)^2 - 1}{(z+1)^2 + 1}$

Vamos considerar r_{12} a distância entre as galáxias 1 e 2, r_{23} , entre as galáxias 2 e 3, e r_{31} a distância entre as galáxias 3 e 1.

Poderemos escrever:

$$r_{12} = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \quad (2.4)$$

$$r_{23} = |\vec{r}_2 - \vec{r}_3| \quad (2.5)$$

$$r_{31} = |\vec{r}_3 - \vec{r}_1| \quad (2.6)$$

O formato triangular unindo as galáxias permanecerá invariável, já que a expansão se dá pelo mesmo fator $a(t)$. Poderemos escrever, então:

$$r_{12}(t) = a(t)r_{12}(t_0) \quad (2.7)$$

$$r_{23}(t) = a(t)r_{23}(t_0) \quad (2.8)$$

$$r_{31}(t) = a(t)r_{31}(t_0) \quad (2.9)$$

No presente momento ($t = t_0$), o fator de escala $a(t)$ é igual a um. Sendo o Universo isotrópico e homogêneo, tem o mesmo valor, independentemente, dos observadores. O fator de escala diz-nos como a contração ou a expansão do Cosmo dependem do tempo.

No exemplo acima para as galáxias, poderemos calcular suas velocidades relativas:

$$v_{12}(t) = \frac{dr_{12}}{dt} = \dot{a}(t)r_{12}(t_0) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}r_{12}(t) \quad (2.10)$$

$$v_{23} = \frac{dr_{23}}{dt} = \dot{a}(t)r_{23}(t_0) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}r_{23}(t) \quad (2.11)$$

$$v_{31}(t) = \dot{a}(t)r_{31}(t_0) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}r_{31}(t) \quad (2.12)$$

Sabemos que a constante de Hubble é $H = \frac{v}{r}$. Comparando com as expressões

acima, podemos escrever $H = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$.

Sejam duas galáxias separadas por uma distância r e dotadas de velocidade relativa $v = H_0 r$, na época atual.

Considerando que a lei de Hubble significa que as galáxias estão se separando devido à expansão do Universo, somos levados a concluir que, num passado equivalente ao tempo de Hubble, a matéria ocupava um volume muito reduzido. Assim, surgiu a idéia do *Big-Bang*. A matéria teria evoluído de um estado com alta densidade, no início do Universo, para o atual, com densidade bem mais baixa.

Assumindo que a taxa de expansão, H_0 , é constante, podemos calcular há quanto tempo atrás as galáxias estavam juntas:

$$t_0 = \frac{r}{v} = \frac{r}{H_0 r} = H_0^{-1} \quad (2.13)$$

H_0^{-1} é o tempo de Hubble. Tomando $H_0 = 70 \pm 7 \text{ kms}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, o tempo de Hubble será: $H_0^{-1} = 14,0 \pm 1,4 \text{ Ga}$.

A existência da aceleração gravitacional através de sua força atrativa deveria atuar frenando a expansão cósmica. A velocidade atual de uma galáxia participando da expansão deveria ser menor que no passado, entretanto, de acordo com as observações da radiação de fundo do Universo, e das supernovas distantes, o Universo parece estar em expansão acelerada. Isto é explicado como sendo devido à presença de uma “energia escura”, associada à constante cosmológica de Einstein, resultando em uma “força repulsiva” que leva a um Universo maior do que o previsto se somente houvesse a força gravitacional atrativa.

Definimos *Distância de Hubble*, como sendo a distância percorrida pelo fóton no tempo de Hubble, H_0^{-1} , portanto, igual a $d_H = \frac{c}{H_0} = 4300 \pm 400 \text{ Mpc}$. Esta seria a distância do Horizonte se a taxa de expansão do Universo tivesse sido sempre constante e igual a H_0 . Um melhor valor depende da exata determinação de H_0 , que por sua vez, se sujeita ao histórico de expansão.

Uma questão que tem sido muito discutida desde o século XVI, com Johannes Kepler (1571-1630), até o momento atual, é conhecida como o *Paradoxo de Olbers*.

Por que o céu é escuro à noite?

Ao imaginarmos que as estrelas se distribuam uniformemente em um espaço infinito, devemos considerar que o acréscimo de volume, dV , ocupado por uma distribuição

uniforme aumenta com o quadrado do raio ($dV = 4\pi r^2 dr$), enquanto que a luminosidade diminui proporcionalmente.

Logo, é razoável concluirmos que sempre haverá alguma estrela interceptando nosso raio de visão, e o céu seria brilhante à noite. E por que isto não ocorre?

A explicação, atualmente, mais aceita, é a que considera o Universo finito no tempo, embora possa ser infinito no espaço. A luz das estrelas mais distantes ainda está se deslocando até nós. Considerando a distância média entre estrelas de 1 pc, e raio médio de cada estrela 700.000 km, o Cosmo seria tão brilhante quanto a superfície solar, somente se tempo de Hubble fosse da ordem de $6,6 \times 10^6$ bilhões de anos, muito maior que a idade do Universo.

2.5 O Princípio da Equivalência

Para um observador em um referencial acelerado, torna-se impossível distinguir os efeitos relativos ao seu movimento, dos que ocorrem em presença de um campo gravitacional. A *Massa Gravitacional* e a *Massa Inercial* se equivalem. Sejam, $F_g = -\frac{GM_g m_g}{r^2}$, a força de atração gravitacional, M_g e m_g , massas gravitacionais; $F_i = m_i a$, a força que atua sobre a massa inercial m_i , poderemos escrever que:

$$F_g = F_i \quad (2.14)$$

$$m_g = m_i \quad (2.15)$$

$$a_g = -\frac{GM_g}{r^2} \quad (2.16)$$

Aqui, a_g é a aceleração gravitacional.

Partindo deste princípio, Einstein formulou sua mais abrangente teoria sobre o Universo: a Teoria da Relatividade Geral, publicada em 1915. Em 1911, demonstrou a possibilidade da existência do *redshift gravitacional*: Os fótons, ao se afastarem de campos gravitacionais intensos, sofrem em seu comprimento de onda um deslocamento para o vermelho. A presença de um *Buraco Negro*, por exemplo, fará com que certa quantidade de energia, expressa pela equação $E = hv$, seja absorvida. E, como consequência, observaremos o desvio para o vermelho.

Einstein inferiu que o espaço não é Euclidiano. A presença de massa poderá curvar a trajetória de um raio luminoso. Espaço e tempo passam a se constituir numa nova entidade, o *Espaço-Tempo*, em quatro dimensões.

Temos, assim, dois modos de analisarmos efeitos gerados pela ação da gravidade: Na versão Newtoniana, a massa gravitacional atua no sentido de gerar uma força atrativa, $F = -GMm/r^2$, enquanto que a massa inercial sofre uma aceleração provocada pela força $F = m_i a$ a que foi submetida. Já, para Einstein, as massas curvam o *espaço-tempo*, enquanto que descrevem uma geodésica¹⁴ caso ali se desloquem.

2.6 O Espaço-Tempo é Curvo

A Relatividade Geral revolucionou nossa concepção de espaço e tempo. Agora, não mais entes absolutos, mas integrantes de um novo conceito, o *Espaço-Tempo*. Massas e energias são associadas à geometria *Riemanniana*¹⁵ para descrever suas trajetórias.

Einstein, ao desenvolver sua teoria revolucionária, entre 1905 e 1915, quando a apresentou, necessitava de recursos matemáticos que descrevessem a curvatura do espaço. Vamo-nos deter a exemplos bidimensionais, que, no momento oportuno, serão estendidos a dimensões superiores.

No espaço Euclidiano, a geodésica é uma linha reta. Os ângulos internos de um triângulo somam:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi \quad (2.17)$$

A distância entre dois pontos (x, y) e $(x + dx, y + dy)$, em coordenadas Cartesianas poderá ser escrita:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \quad (2.18)$$

¹⁴ Geodésica é a curva de menor comprimento que une dois pontos numa geometria *Riemanniana*. Em relatividade geral, são linhas de mundo de uma partícula em queda livre.

¹⁵ Geometria Riemanniana – é um ramo da Geometria Diferencial, voltada para espaços curvos, com ampla utilização em Relatividade Geral. Emprega uma métrica especial, em que o produto escalar de dois vetores em um plano tangente varia ponto a ponto. Curvatura do espaço e geodésicas são seus conceitos fundamentais.

Já, em coordenadas polares, a distância entre os pontos (r, θ) e $(r + dr, \theta + d\theta)$ será:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 \quad (2.19)$$

Quando o espaço é curvo, a geodésica acompanhará sua curvatura. Se tomarmos para exemplo uma superfície esférica, na qual desenhamos um triângulo, a soma de seus ângulos internos poderá ser escrita:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + A / R^2 \quad (2.20)$$

A é a área do triângulo, e R , o raio da esfera. Observa-se que a soma dos ângulos internos é $> \pi$. Neste caso, diz-se que o espaço é curvo positivamente. É, também, homogêneo e isotrópico. A distância entre dois pontos (r, θ) e $(r + dr, \theta + d\theta)$ na superfície esférica, considerando θ o ângulo azimutal e r a distância ao pólo norte da esfera sobre a geodésica ligando os pólos é:

$$ds^2 = dr^2 + R^2 \text{sen}^2(r / R) d\theta^2 \quad (2.21)$$

Para o caso em que o somatório dos ângulos internos é $< \pi$, observaremos uma curvatura negativa. O hiperbolóide, em seu formato de sela, é um exemplo deste modelo. Considerando-se a curvatura com raio R e, a área do triângulo ali construído, A , teremos:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi - A / R^2 \quad (2.22)$$

A distância entre os pontos (r, θ) e $(r + dr, \theta + d\theta)$ será:

$$ds^2 = dr^2 + R^2 \text{senh}^2(r / R) d\theta^2 \quad (2.23)$$

Para que o espaço seja homogêneo e isotrópico, nos depararemos com três situações especiais, observando que $\alpha + \beta + \gamma = \pi + \kappa A / R^2$:

- É uniformemente plano. A *Constante de Curvatura* tem valor $\kappa = 0$;
- Possui curvatura uniformemente positiva, e $\kappa = +1$;
- Possui curvatura uniformemente negativa, e $\kappa = -1$.

Os resultados obtidos para duas dimensões poderão ser estendidos ao espaço tridimensional. Desta forma, em um espaço com $\kappa = 0$, poderemos escrever:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \text{ ou} \quad (2.24)$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 [d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2] \quad (2.25)$$

Para $\kappa = +1$ e $\kappa = -1$, respectivamente,

$$ds^2 = dr^2 + R^2 \text{sen}^2(r/R) [d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2] \quad (2.26)$$

$$ds^2 = dr^2 + R^2 \text{senh}^2(r/R) [d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2] \quad (2.27)$$

Podemos, ainda, escrever as expressões acima da forma:

$$ds^2 = dr^2 + S_k(r)^2 d\Omega^2 \quad (2.28)$$

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2 \quad (2.29)$$

$S_k(r)$, assumindo os valores:

$$R \text{sen}(r/R), \text{ para } (\kappa = +1)$$

$$r, \text{ para } (\kappa = 0) \quad (2.30)$$

$$R \text{senh}(r/R), \text{ para } (\kappa = -1)$$

2.7 A Métrica de Robertson-Walker

No espaço-tempo quadridimensional, a distância entre dois eventos (t, r, θ, ϕ) e $(t + dt, r + dr, \theta + d\theta, \phi + d\phi)$ é dada na métrica de *Minkowski* pela equação:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (2.31)$$

A componente espacial na equação supra é Euclidiana, ou seja, descreve um espaço plano. Observe-se a equação (2.25).

Sejam P e Q eventos de emissão e recepção de um fóton, respectivamente. Se (ct_q, x_q, y_q, z_q) e (ct_p, x_p, y_p, z_p) são suas coordenadas em um referencial S , pode-se escrever, já que o pulso desloca-se de P a Q na velocidade da luz:

$$c^2(t_q - t_p)^2 = (x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2 + (z_q - z_p)^2, \text{ ou} \quad (2.32)$$

$$-c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0 \quad (2.33)$$

Na equação (2.31), ds^2 exprime a *distância quadrada invariante* entre dois eventos quaisquer no espaço-tempo. Percebemos, desta forma, que eventos que sinalizam a emissão e recepção de um pulso de luz caracterizam-se por uma *distância quadrada invariante* nula:

$$ds^2 = 0, \text{ logo}$$

$$0 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (2.34)$$

Minkowski pressupõe um espaço plano e estático, seu domínio, a relatividade especial. Quando consideramos efeitos da gravitação, a relatividade geral torna-se o caminho necessário, e, talvez, suficiente para descrevermos a métrica do espaço-tempo.

Howard Robertson e Arthur Walker derivaram uma expressão para a distância quadrada invariante em um Universo isotrópico e homogêneo em expansão, observando o efeito gravitacional sobre a curvatura do espaço-tempo:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dx^2}{1 - \kappa x^2 / R_0^2} + x^2 d\Omega^2 \right] \quad (2.35)$$

É a métrica Robertson-Walker, que ainda poderá tomar a forma:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 \left[dr^2 + S_\kappa(r)^2 d\Omega^2 \right] \quad (2.36)$$

Sendo, $a(t)$ o fator de escala, κ a constante de curvatura $(+1, 0, -1)$ e R_0 , raio de curvatura do espaço. As variáveis (x, θ, ϕ) ou (r, θ, ϕ) , são conhecidas por *coordenadas comóveis*, enquanto que a variável t é o *tempo próprio cosmológico*, medido por um observador no Universo em expansão.

2.8 Distância Própria

Para um Universo isotrópico, homogêneo e que se expande, a métrica de Robertson-Walker deve ser usada no cálculo de distâncias espaciais.

A *distância própria* entre dois pontos é definida pelo comprimento da geodésica entre eles corrigido pelo fator de escala $a(t)$, portanto,

$$ds^2 = a(t)^2 \left[dr^2 + S_k(r)^2 d\Omega^2 \right] \quad (2.37)$$

Ao calcularmos, por exemplo, a distância até uma galáxia qualquer, os ângulos θ e ϕ são constantes na direção radial. Assim,

$$ds = a(t) dr \quad (2.38)$$

A *distância própria* será então:

$$d_p(t) = a(t) \int_0^r dr = a(t)r \quad (2.39)$$

Poderemos, também, utilizar coordenadas espaciais (x, θ, ϕ) , ao invés de (r, θ, ϕ) , com $x = S_k(r)$, conforme equação (2.30). Escrevemos, então, para:

- $\kappa = +1$, a distância própria será:

$$d_p(t) = a(t)r(x) = a(t)R_0 \operatorname{sen}^{-1}(x/R_0) \quad (2.40)$$

- $\kappa = 0$, a distância própria será:

$$d_p(t) = a(t)x \quad (2.41)$$

- $\kappa = -1$, esta distância será:

$$d_p = a(t)R_0 \operatorname{senh}^{-1}(x/R_0) \quad (2.42)$$

Como a coordenada comóvel r é constante no tempo, a taxa de variação da distância própria $d_p(t) = a(t)r$ poderá ser escrita: $\dot{d}_p = \dot{a}r = \frac{\dot{a}}{a}d_p$ (2.43)

$$\text{Ou seja, em um tempo } t = t_0, \quad v_p(t_0) = H_0 d_p(t_0) \quad (2.44)$$

A equação acima expressa a *Lei de Hubble* $v = H_0 r$, com $H_0 = (\dot{a}/a)_{t=t_0}$. Se em (2.44) substituirmos $v_p(t_0)$ pela velocidade da luz, teremos: $d_H(t_0) = c/H_0$. A esta expressão denominou-se *Distância de Hubble*. Este é um parâmetro crítico, já que distâncias próprias maiores implicarão em velocidades superiores à da luz. Para um valor de $H_0 = 70 \pm 7 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, a distância de Hubble será: $d_H(t_0) = 4300 \pm 400 \text{ Mpc}$.

Embora um corpo massivo não possa ter velocidades superiores à velocidade da luz em um Universo estático, no espaço em expansão a relatividade geral nos afirma que isto é possível, só que não poderemos vê-lo.

Como vimos em (2.34), eventos que se caracterizam por emissão e recepção de um pulso de luz, tem a *distância quadrada invariante* nula. Ou, ainda, deslocam-se sobre uma geodésica nula. Como os ângulos (θ, ϕ) são constantes na direção radial, de (2.36):

$$0 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 \left[dr^2 + S_k(r)^2 d\Omega^2 \right] = -c^2 dt^2 + a(t)^2 dr^2 \quad (2.45)$$

Portanto,

$$c \frac{dt}{a(t)} = dr \quad (2.46)$$

Vamos supor que ocorra em um tempo t_e , a emissão de luz por uma galáxia em um comprimento de onda λ_e . Quando da detecção, em t_0 , observando (2.46):

$$c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^r dr = r \quad (2.47)$$

A seguinte crista de onda estará sendo emitida em um tempo $t_e + \lambda_e/c$, e sendo

$$\text{detectada em } t_0 + \lambda_0/c, \quad \text{logo, } c \int_{t_e + \lambda_e/c}^{t_0 + \lambda_0/c} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^r dr = r, \quad (2.48)$$

Assim,

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e + \lambda_e/c}^{t_0 + \lambda_0/c} \frac{dt}{a(t)}. \quad \text{Subtraindo de ambos os lados } \int_{t_e + \lambda_e/c}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}, \quad \text{encontraremos:}$$

$$\int_{t_e}^{t_e+\lambda_e/c} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_0}^{t_0+\lambda_0/c} \frac{dt}{a(t)} \quad (2.49)$$

Como entre a emissão de duas sucessivas frentes de onda, o Universo permanece praticamente estático, poderemos considerar na solução de (2.49), a constância do fator de

$$\text{escala: } \frac{1}{a(t_e)} \int_{t_e}^{t_e+\lambda_e/c} dt = \frac{1}{a(t_0)} \int_{t_0}^{t_0+\lambda_0/c} dt, \text{ que enseja concluirmos } \frac{\lambda_e}{a(t_e)} = \frac{\lambda_0}{a(t_0)} \quad (2.50)$$

$$\text{De (2.50) obtemos: } \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{a(t_0) - a(t_e)} = \frac{\lambda_e}{a(t_e)} = \frac{\lambda_0}{a(t_0)}, \quad \text{ou seja,}$$

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{a(t_0) - a(t_e)}{a(t_e)}, \quad \text{e sendo } a(t_0) = 1, \text{ conclui-se que: } z + 1 = \frac{1}{a(t_e)} \quad (2.51)$$

O *redshift* depende, apenas, do fator de escala no momento da emissão.

2.9 A Equação de Friedmann

Enquanto que a equação de Poisson $\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$ é utilizada na mecânica Newtoniana, as equações de campo de Einstein, relacionando massas e energias com a métrica espacial, dão-nos a descrição de como o Universo se comporta em grandes escalas. No microcosmo, precisamos usar outra teoria. O futuro, quiçá no século XXII, trará a tão esperada e necessária unificação das teorias.

Alexander Alexandrovich Friedmann, em 1922, partindo da teoria da relatividade geral, que liga $a(t)$, κ e R_0 , representando a métrica do espaço-tempo, com $\varepsilon(t)$ sendo a densidade de energia, e $P(t)$, a pressão, derivou uma equação que descreve a evolução do fator de escala do Universo.

Vamos, inicialmente, ver como chegar à equação de Friedmann, utilizando-nos de conceitos puramente clássicos. Considere-se, então, uma esfera possuindo massa M_s constante no tempo e raio R_s . A esfera expande-se ou se contrai isotropicamente no tempo. Uma massa m , na superfície, é atraída gravitacionalmente por uma força:

$$F = -\frac{GM_s m}{R_s(t)^2}. \quad \text{A aceleração gravitacional é então: } a_g = \frac{d^2 R_s(t)}{dt^2} = -\frac{GM_s}{R_s(t)^2} \quad (2.52)$$

Integrando, obteremos como resultado:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dR_s}{dt} \right)^2 = \frac{GM_s}{R_s(t)} + U \quad (2.53)$$

sendo, $E_c = \frac{1}{2} \left(\frac{dR_s}{dt} \right)^2$, energia cinética por unidade de massa e $E_p = -\frac{GM_s}{R_s(t)}$, energia

potencial gravitacional por unidade de massa e U , a constante de integração. A equação (2.53) nos mostra que a energia total permanece constante no processo de expansão/contração do Universo. Podemos expressar a massa como:

$$M_s = (4\pi/3)\rho(t)R_s(t)^3 \quad (2.54)$$

e, para uma expansão isotrópica,

$$R_s(t) = a(t)r_s \quad (2.55)$$

onde r_s é o raio comóvel da esfera. A equação (2.54) passa a incorporar valores da densidade $\rho(t)$ e também do fator de escala $a(t)$. Substituindo M_s e R_s na equação (2.53):

$$\frac{1}{2}r_s^2\dot{a}^2 = \frac{4\pi}{3}G\rho(t)a(t)^2r_s^2 + U \quad (2.56)$$

Dividindo-se ambos os lados de (2.56) por $r_s a^2(t)/2$:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(t) + \frac{2U}{r_s^2} \frac{1}{a(t)^2} \quad (2.57)$$

A equação (2.57) acima é a **Equação de Friedmann**, na análise Newtoniana.

Para uma esfera em expansão, ou o Universo, poderemos considerar três casos:

- $U > 0 \rightarrow$ A expressão (2.57) será sempre positiva, $\dot{a}^2 > 0$;
- $U < 0 \rightarrow$ Ela se anulará para um máximo valor do parâmetro de escala. De (2.57),

$$\left(\frac{\dot{a}_{máx}}{a_{máx}} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(t) + \frac{2U}{R_s(t)^2} = 0 \quad (2.58)$$

$$a(t)_{máx} = \frac{R_s}{r_s} = -G \frac{M_s}{Ur_s} \quad (2.59)$$

- $U = 0 \rightarrow$ Observaremos, com $t \rightarrow \infty$, $\rho(t) \rightarrow 0$ e $\dot{a}(t) \rightarrow 0$.

O emprego das equações de campo de Einstein ajusta a equação de Friedmann à curvatura do espaço-tempo. A energia e não a massa passa a ter maior importância em sua

expressão. Densidade de energia ε ao invés de densidade de massa ρ : Relaciona-se a métrica do espaço-tempo com o tensor energia-momentum. O tensor energia-momentum é da forma $T^{\mu\nu} = \rho_0 U^\mu U^\nu$, onde U é a velocidade da matéria em expansão e $T_{\mu\nu} = \text{diag}(0,0,0,c^4\rho)$ é o único componente que não se anula (RINDLER, 1977). O tensor de Einstein,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \quad (2.60)$$

onde,

$$\frac{G_{11}}{g_{11}} = \frac{G_{22}}{g_{22}} = \frac{G_{33}}{g_{33}} = -\frac{2\ddot{R}}{Rc^2} - \frac{\dot{R}}{R^2c^2} - \frac{\kappa}{R^2} + \Lambda, \text{ e,} \quad (2.61)$$

$$\frac{G_{44}}{g_{44}} = -\frac{3\dot{R}^2}{R^2c^2} - \frac{3\kappa}{R^2} + \Lambda \quad (2.62)$$

Sendo, R_{ik} o tensor de curvatura de Ricci, Λ , constante cosmológica, e, sendo

$$G_{\mu\nu} = 0, \text{ para } \mu \neq \nu, \text{ podemos escrever: } G_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (2.63)$$

Ou, ainda:

$$\frac{2\ddot{R}}{Rc^2} + \frac{\dot{R}^2}{R^2c^2} + \frac{\kappa}{R^2} - \Lambda = 0 \rightarrow \left(= -\frac{8\pi G\rho}{c^4} \right), \text{ e,} \quad (2.64)$$

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2c^2} + \frac{\kappa}{R^2} - \frac{\Lambda}{3} = \frac{8\pi G\rho}{3c^2} \quad (2.65)$$

De (2.64) e (2.65):

$$\frac{\ddot{R}}{R} = \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{4\pi G\rho}{3} \left(-\frac{4\pi G\rho}{c^2} \right) \quad (2.66)$$

Multiplicando (2.65) por R^3 e diferenciando, encontraremos:

$$\frac{8}{3}\pi G\rho R^3 = C = \text{cte.} \rightarrow \text{A massa é constante (2.54).} \quad (2.67)$$

A equação (2.67) é o equivalente relativístico da equação da continuidade.

Substituindo-a na equação (2.65), poderemos escrever:

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G \epsilon}{3c^2} - \frac{\kappa c^2}{R^2} + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad (2.68)$$

A expressão (2.68) é a *Equação de Friedmann*, considerando os aspectos relativísticos. A *Equação de Friedmann* é, também, apresentada na forma:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \epsilon(t) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2} \frac{1}{a(t)^2} \quad (2.69)$$

E como $\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = H(t)$, o *parâmetro de Hubble* será:

$$H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \epsilon(t) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2} \frac{1}{a(t)^2} \quad (2.70)$$

Aqui, $a(t)$ é o fator de escala; $\epsilon(t)$ a densidade de energia.

De (2.70) e (2.58), $\frac{2U}{r_s^2} = -\frac{\kappa c^2}{R_0^2}$, assim, se $U > 0 \rightarrow \kappa = -1$,

$U < 0 \rightarrow \kappa = +1$, e se $U = 0 \rightarrow \kappa = 0$.

A equação de Friedmann no momento atual poderá ser escrita:

$$H_0^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \epsilon_0 - \frac{\kappa c^2}{R_0^2} \quad (2.71)$$

Em um Universo desprovido de energia com $\epsilon = 0$, a curvatura $\kappa = -1$, o raio de curvatura será dado por: $R_0(\text{min}) = c / H_0$ (2.72)

No Universo real, com $\kappa > 0$ e $\epsilon_0 > 0$, o raio de curvatura será, necessariamente, maior que a distância de Hubble. Em um Universo plano, $\kappa = 0$, escreve-se:

$$H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \epsilon(t) \quad (2.73)$$

Então,
$$\epsilon_c(t) \equiv \frac{3c^2}{8\pi G} H(t)^2 \quad (2.74)$$

É definida como densidade crítica de energia.

Caso: $\epsilon(t) > \epsilon_c(t)$, então, $\kappa = +1$, e se $\epsilon(t) < \epsilon_c(t)$, então, $\kappa = -1$

Os atuais valores para a densidade crítica são:

$$\epsilon_{c,0} = \frac{3c^2}{8\pi G} H_0^2 = (8,3 \pm 1,7) \times 10^{-10} \text{ Jm}^{-3} = 5200 \pm 1000 \text{ MeVm}^{-3} \quad (2.75)$$

Definiu-se o **Parâmetro de Densidade**, como sendo:

$$\Omega(t) \equiv \frac{\epsilon(t)}{\epsilon_c(t)} \quad (2.76)$$

Atualmente, o *parâmetro de densidade* situa-se no intervalo: $0,1 < \Omega_0 < 2$. A *Equação de Friedmann*, então, poderá ser expressa:

$$1 - \Omega(t) = - \frac{\kappa c^2}{R_0^2 a(t)^2 H(t)^2} \quad (2.77)$$

2.10 Equações do Fluido e da Aceleração

Os comportamentos do *fator de escala*, bem como, da *densidade de energia*, numa dimensão temporal, complementam informações que podemos recolher da *Equação de Friedmann*.

O Universo, homogêneo e isotrópico, se expande em um processo adiabático. Podemos escrever que a entropia $dS = dQ/T = 0$. A *Primeira Lei da Termodinâmica*,

$$dQ = dE + PdV \rightarrow \dot{E} + P\dot{V} = 0 \quad (2.78)$$

Considerando-se uma esfera de raio comóvel r_s , o raio próprio $R_s(t) = a(t)r_s$.

Assim,

$$V(t) = \frac{4\pi}{3} r_s^3 a(t)^3 \rightarrow \dot{V} = \frac{4\pi}{3} r_s^3 (3a^2 \dot{a}) = 3V \frac{\dot{a}}{a} \quad (2.79)$$

$$\text{A energia interna } E(t) = V(t)\epsilon(t) \rightarrow \dot{E}(t) = V\dot{\epsilon} + \dot{V}\epsilon = V(\dot{\epsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}\epsilon) \quad (2.80)$$

$$\text{De (2.78) e (2.80): } V(\dot{\epsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}\epsilon + 3\frac{\dot{a}}{a}P) = 0 \rightarrow \dot{\epsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\epsilon + P) = 0 \rightarrow \text{Eq.Fluido} \quad (2.81)$$

Da *Equação de Friedmann* (2.69), juntamente com a *Equação do Fluido*, chega-se à **Equação da Aceleração**: Multiplica-se por a^2 e deriva-se:

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \epsilon a^2 - \frac{\kappa c^2}{R_0^2} \rightarrow 2\ddot{a}a = \frac{8\pi G}{3c^2} (\dot{\epsilon}a^2 + 2\epsilon a\dot{a}) \quad (2.82)$$

Divide-se por $2\ddot{a}a$, e considerando a *Equação do Fluido* (2.81):

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2} (\epsilon + 3P) \quad (2.83)$$

Para $\epsilon > 0 \rightarrow \ddot{a} < 0$, provocando redução da velocidade relativa entre dois referenciais no Universo.

A pressão P , em geral, tem valor positivo: $P > 0$. Isto podemos observar na matéria bariônica comum que permeia o Cosmo, bem como no gás de fótons e de neutrinos. Este comportamento faz com que a expansão do Universo seja contida.

Por outro lado, pressão negativa: $P < 0$ é também, observável. Vamos supor que tenhamos $P < -\epsilon/3$. Em (2.83), a aceleração será positiva $\ddot{a} > 0$. O Universo estará sendo acelerado em sua expansão.

2.11 Equações de Estado

As equações, de *Friedmann* (2.69), de *Fluido* (2.81) e de *Aceleração* (2.83), não são suficientes para descreverem as incógnitas que completam as informações acerca do Cosmo. Desta forma, para conhecermos o parâmetro de escala $a(t)$, a densidade de energia $\epsilon(t)$ e a pressão $P(t)$, temos que utilizar uma equação de estado da forma $P = P(\epsilon)$. Sendo ω um número adimensional, poderemos escrever:

$$P = \omega \epsilon \quad (2.84)$$

Para um gás não relativístico:

$$P = \frac{\rho}{\mu} kT \approx \frac{kT}{\mu c^2} \epsilon = \frac{\langle v^2 \rangle}{3c^2} \epsilon \rightarrow \omega \approx \frac{\langle v^2 \rangle}{3c^2} \ll 1 \quad (2.85)$$

Já um gás de fótons,

$$P_{relat} = \frac{1}{3} \epsilon_{relat} \quad (2.86)$$

No caso em que $\omega > 0$, a velocidade do som expressa por $c_s = \sqrt{\omega} c$, limita os valores para ω : $\omega \leq 1$. Existem três valores para ω significativos:

- $\omega = 0 \rightarrow$ Existência de partículas não relativísticas (matéria);
- $\omega = \frac{1}{3} \rightarrow$ O Universo contém fótons e outras partículas relativísticas (radiação);

- $\omega = -\frac{1}{3} \rightarrow \ddot{a} > 0 \rightarrow$ Predominância da energia escura, ou a pressão $P < 0$.
- $\omega = -1 \rightarrow P = -\varepsilon \rightarrow$ Constante cosmológica Λ ou Energia Escura.

2.12 A Constante Cosmológica

Einstein acreditava em um Universo estático. As evidências, naquele momento, apontavam para esta visão. Mas, a partir da equação de Poisson, defrontava-se com incongruências importantes. Considerando a densidade de massa ρ , o *potencial gravitacional*, descrito por Poisson é:

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho \quad (2.87)$$

A aceleração gravitacional correspondente:

$$\vec{a} = -\vec{\nabla} \Phi \quad (2.88)$$

No Universo estático:

$$\vec{a} = -\vec{\nabla} \Phi = 0 \rightarrow \rho = \frac{1}{4\pi G} \nabla^2 \Phi = 0 \quad (2.89)$$

O Cosmo seria desprovido de matéria. Para corrigir esta anomalia, Einstein introduziu uma constante Λ :

$$\nabla^2 \Phi + \Lambda = 4\pi G \rho \quad (2.90)$$

A, agora denominada, *constante cosmológica* Λ , tem a dimensão de $(t)^{-2}$. O Universo torna-se estático para $\Lambda = 4\pi G \rho$. E a equação de Friedmann (2.69):

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon - \frac{\kappa c^2}{R_0^2 a^2} + \frac{\Lambda}{3} \quad (2.91)$$

Enquanto que a *equação do fluido* (2.81) permanece inalterada, a *equação da aceleração* (2.83) incorpora Λ :

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2} (\varepsilon + 3P) + \frac{\Lambda}{3} \quad (2.92)$$

$$\text{Da equação (2.91), vemos que } \Lambda \equiv \frac{8\pi G}{c^2} \varepsilon_\Lambda \rightarrow \varepsilon_\Lambda \equiv \Lambda \frac{c^2}{8\pi G} \quad (2.93)$$

Define-se, aí, nova densidade de energia para o Universo, ε_Λ . Caso Λ seja constante no tempo, a densidade de energia ε_Λ também o será, e de (2.81):

$$P_\Lambda = -\varepsilon_\Lambda = -\frac{c^2}{8\pi G}\Lambda \quad (2.94)$$

Partindo-se da equação da aceleração (2.92) e, desde que $\dot{a} = \ddot{a} = 0$ podemos escrever:

$$0 = -\frac{4\pi G}{3c^2}\varepsilon + \frac{\Lambda}{3} = -\frac{4\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} \quad (2.95)$$

Portanto, a *constante cosmológica* é $\Lambda = 4\pi G\rho$. A equação de Friedmann será

escrita:

$$0 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{\kappa c^2}{R_0^2} + \frac{4\pi G\rho}{3} = 4\pi G\rho - \frac{\kappa c^2}{R_0^2} \quad (2.96)$$

O raio de curvatura deste Universo estacionário com a constante $\kappa = +1$ é:

$$R_0 = \frac{c}{2(\pi G\rho)^{1/2}} = \frac{c}{\Lambda^{1/2}} \quad (2.97)$$

2.13 A Densidade de Energia

A densidade de energia total ε é obtida pelo somatório das componentes:

$$\varepsilon = \sum_{\omega} \varepsilon_{\omega} \quad (2.98)$$

Da mesma forma, encontra-se a pressão total P :

$$P = \sum_{\omega} P_{\omega} = \sum_{\omega} \omega \varepsilon_{\omega} \quad (2.99)$$

Partindo da *equação do fluido* (2.81), $\dot{\varepsilon}_{\omega} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\varepsilon_{\omega} + P_{\omega}) = 0$ (2.100)

Ou, ainda, $\dot{\varepsilon}_{\omega} + 3\frac{\dot{a}}{a}(1 + \omega)\varepsilon_{\omega} = 0 \rightarrow \frac{d\varepsilon_{\omega}}{\varepsilon_{\omega}} = -3(1 + \omega)\frac{da}{a}$ (2.101)

Assim, $\ln \varepsilon_{\omega} = -3(1 + \omega)\ln a \rightarrow \varepsilon_{\omega}(a) = \varepsilon_{\omega,0}a^{-3(1+\omega)}$ (2.102)

Na a equação (2.102) considerou-se $a(t=0) = a_0 = 1$. A densidade de energia para a matéria não relativística responde inversamente à expansão cósmica, se $\omega = 0$:

$$\varepsilon_m(a) = \varepsilon_{m,0} / a^3 \quad (2.103)$$

Já, na radiação, com $\omega = 1/3$:

$$\varepsilon_r(a) = \varepsilon_{r,0} / a^4 \quad (2.104)$$

A *Radiação C3smica de Fundo* apresenta uma densidade de energia:

$$\varepsilon_{RCF,0} = \alpha T_0^4 = 4,17 \times 10^{-14} \text{ Jm}^{-3} = 0,260 \text{ MeVm}^{-3} \quad (2.105)$$

Em conseqüência, o parâmetro de densidade $\Omega_{RCF,0}$, atual:

$$\Omega_{RCF,0} = \frac{\varepsilon_{RCF,0}}{\varepsilon_{c,0}} = \frac{0,260 \text{ MeVm}^{-3}}{5200 \text{ MeVm}^{-3}} = 5,0 \times 10^{-5} \quad (2.106)$$

A densidade de energia emitida pelas estrelas, durante todo o tempo de exist4ncia do Universo, $t_0 \approx H_0^{-1} \approx 14 \text{ Ga} \approx 4,4 \times 10^{17} \text{ s}$, sendo a atual densidade de luminosidade das galáxias: $nL \approx 2 \times 10^8 L_\odot \text{ Mpc}^{-3} \approx 2,6 \times 10^{-33} \text{ Wm}^{-3}$, é aproximadamente: (2.107)

$$\varepsilon_* \approx nL t_0 \approx (2,6 \times 10^{-33} \text{ Wm}^{-3}) (4,4 \times 10^{17} \text{ s}) \approx 10^{-15} \text{ Jm}^{-3} \approx 0,007 \text{ MeVm}^{-3} \quad (2.108)$$

Esta densidade corresponde a aproximadamente 3% da densidade de energia da *Radiação C3smica de Fundo*.

O parâmetro de densidade para os neutrinos é:

$$\Omega_{\nu,0} = 0,681 \Omega_{RCF,0} = 0,681 \times 5,0 \times 10^{-5} = 3,4 \times 10^{-5} \quad (2.109)$$

Com isto, o parâmetro atual para a radiação é:

$$\Omega_{r,0} = \Omega_{RCF,0} + \Omega_{\nu,0} = 5,0 \times 10^{-5} + 3,4 \times 10^{-5} = 8,4 \times 10^{-5} \quad (2.110)$$

Pode-se calcular o momento, ou o fator de escala, em que as densidades de energia se equivaleram. Assim, como a densidade de energia para Λ é constante, já que, por (2.102): $\varepsilon_\Lambda(a) = \varepsilon_{\Lambda,0} a^{-3(1+\omega)} = \varepsilon_{\Lambda,0}$, e de (2.103):

$$\frac{\varepsilon_\Lambda(a)}{\varepsilon_m(a)} = \frac{\varepsilon_{\Lambda,0}}{\varepsilon_{m,0} / a^3} = \frac{\varepsilon_{\Lambda,0}}{\varepsilon_{m,0}} a^3 = 1 \rightarrow a_{m,\Lambda} = \left(\frac{\varepsilon_{m,0}}{\varepsilon_{\Lambda,0}} \right)^{1/3} = \left(\frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{\Lambda,0}} \right)^{1/3} \approx 0,75 \quad (2.111)$$

O mesmo se verifica para a relação entre as densidades de matéria e radiação:

$$\frac{\varepsilon_m(a)}{\varepsilon_r(a)} = \frac{\varepsilon_{m,0} / a^3}{\varepsilon_{r,0} / a^4} = \frac{\varepsilon_{m,0}}{\varepsilon_{r,0}} a = \frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{r,0}} a = 1 \rightarrow a_{r,m} = \frac{\Omega_{r,0}}{\Omega_{m,0}} = \frac{8,4 \times 10^{-5}}{0,3} \approx \frac{1}{3600} = 2,8 \times 10^{-4} \quad (2.112)$$

2.14 Os Possíveis Universos

2.14.1 Exclusivamente Curvatura

A *Equação de Friedmann*, considerando que o Universo possui muitas componentes, poderá ser escrita da forma:
$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \sum_{\omega} \epsilon_{\omega,0} a^{-(1+3\omega)} - \frac{\kappa c^2}{R_0^2} \quad (2.113)$$

Em um Universo vazio, estático, não possuindo radiação, matéria, nem *constante cosmológica*, a *Equação de Friedmann* toma a forma:
$$\dot{a}^2 = -\frac{\kappa c^2}{R_0^2}. \quad (2.114)$$

Uma solução para (2.114) é tomar-se $\dot{a} = 0 \leftrightarrow \kappa = 0$. O espaço vazio é solução.

Outra resposta é considerar-se $\kappa = -1$. Teremos, então:
$$\dot{a} = \pm \frac{c}{R_0} \quad (2.115)$$

Integrando,
$$\frac{da}{dt} = \pm \frac{c}{R_0} = \pm \frac{1}{t_0} \rightarrow a(t) = \frac{t}{t_0} \quad (2.116)$$

Em um Universo assim considerado, a luz emitida por uma galáxia distante num momento t_e e detectada em t_0 , apresenta a relação:

$$1+z = \frac{1}{a(t_e)} = \frac{t_0}{t_e} \rightarrow t_e = \frac{t_0}{1+z} = \frac{H_0^{-1}}{1+z} \quad (2.117)$$

Considerando (2.39) e (2.47), a distância própria atual para aquela galáxia será:

$$d_p(t_0) = a(t_0) \int_0^r dr = c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^r dr = r \quad (2.118)$$

E, por (2.116) e (2.117):

$$d_p(t_0) = ct_0 \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{t} = ct_0 \ln \left(\frac{t_0}{t_e} \right) = \frac{c}{H_0} \ln(1+z) \quad (2.119)$$

A distância própria, no momento da emissão, calcula-se corrigindo o fator de escala, desta forma:
$$d_p(t_e) = a(t_e) \int_0^r dr \rightarrow d_p(t_0) = a(t_0) \int_0^r dr \quad (2.120)$$

$$\frac{d_p(t_e)}{d_p(t_0)} = \frac{a(t_e)}{a(t_0)}, \text{ logo, } d_p(t_e) = a(t_e) d_p(t_0) = \frac{1}{1+z} d_p(t_0) = \frac{c}{H_0} \frac{\ln(1+z)}{1+z} \quad (2.121)$$

2.14.2 O Universo Plano

Neste caso, a equação de Friedmann (2.113), toma a forma, para $\omega = cte$:

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \epsilon_0 a^{-(1+3\omega)} \quad (2.122)$$

Se fizermos, $a \propto t^q$, então, $t^{(2q-2)} \propto t^{-(1+3\omega)q}$, logo, $q = \frac{2}{3+3\omega}$ (2.123)

A solução de (2.122) para o fator de escala $a(t)$ é:

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2/(3+3\omega)} \quad (2.124)$$

Pode-se, então, calcular t_0 e a constante de Hubble H_0 :

$$t_0 = \frac{1}{1+\omega} \left(\frac{c^2}{6\pi G \epsilon_0} \right)^{1/2} \rightarrow H_0 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)_{t=t_0} = \frac{2}{3(1+\omega)} t_0^{-1} \rightarrow t_0 = \frac{2}{3(1+\omega)} H_0^{-1} \quad (2.125)$$

A densidade de energia é (2.102): $\epsilon(a) = \epsilon_0 a^{-3(1+\omega)} \rightarrow \epsilon(t) = \epsilon_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{-2}$ (2.126)

Da Equação de Friedmann, $\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = H_0^2 = \frac{8\pi G \epsilon_0}{3c^2}$, que implica em: $\epsilon_0 = \frac{3c^2}{8\pi G} H_0^2$

e de $t_0 = \frac{2}{3(1+\omega)} H_0^{-1}$, pode-se escrever:

$$\epsilon(t) = \frac{1}{6\pi(1+\omega)} \frac{c^2}{G} t^{-2} \quad (2.127)$$

A partir dos dados obtidos acima, vamos determinar alguns parâmetros cósmicos:

- Cálculo do tempo t_e de emissão da luz por uma galáxia distante:

$$1+z = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} = \left(\frac{t_0}{t_e} \right)^{2/(3(1+\omega))}, \text{ logo, } t_e = \frac{t_0}{(1+z)^{3(1+\omega)/2}} = \frac{2}{3(1+\omega)H_0} \frac{1}{(1+z)^{3(1+\omega)/2}} \quad (2.128)$$

- A distância própria atual:

$$d_p(t_0) = c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = ct_0 \frac{3(1+\omega)}{1+3\omega} [1 - (t_e/t_0)^{(1+3\omega)/(3+3\omega)}] = \frac{c}{H_0} \frac{2}{1+3\omega} [1 - (1+z)^{-(1+3\omega)/2}] \quad (2.129)$$

- Distância do Horizonte é a distância própria atual calculada desde o início em $t_e = 0$

$$d_{hor}(t_0) = c \int_0^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = c \int_0^{t_0} \frac{dt}{(t/t_0)^{2/(3+3\omega)}} = ct_0 \frac{3(1+\omega)}{1+3\omega} = \frac{c}{H_0} \frac{2}{1+3\omega} \quad (2.130)$$

2.14.3 Universo Plano Contendo Apenas Matéria

Sendo $\omega = \kappa = 0$, poderemos escrever, observando (2.124), (2.125) e (2.130):

$$a_m(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3}, \text{ portanto, } t_0 = \frac{2}{3(1+\omega)H_0} = \frac{2}{3H_0}, \text{ e } d_{hor} = 3ct_0 = \frac{2c}{H_0} \quad (2.131)$$

A distância própria, neste caso:

$$d_p(t_0) = c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{(t/t_0)^{2/3}} = 3ct_0 \left[1 - \left(\frac{t_e}{t_0}\right)^{1/3} \right] = \frac{2c}{H_0} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}} \right] \quad (2.132)$$

E, por (2.121), a distância própria no momento em que a luz foi emitida:

$$d_p(t_e) = a(t_e)d_p(t_0) = \frac{1}{1+z} d_p(t_0) = \left(\frac{1}{1+z}\right) 3ct_0 \left[1 - \left(\frac{t_e}{t_0}\right)^{1/3} \right] = \left(\frac{1}{1+z}\right) \frac{2c}{H_0} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}} \right] \quad (2.133)$$

2.14.4 Universo Plano Contendo Apenas Radiação

Este Universo possui $\kappa = 0$ e $\omega = 1/3$. De (2.124), (2.125) e (2.127):

$$a_r(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/2} \rightarrow t_0 = \frac{1}{2H_0} \rightarrow d_{hor} = 2ct_0 = \frac{c}{H_0} \quad (2.134)$$

Alguns parâmetros importantes neste modelo:

- A distância própria no momento atual (2.118):

$$d_p(t_0) = c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{(t/t_0)^{1/2}} = 2ct_0 \left[1 - \left(\frac{t_e}{t_0}\right)^{1/2} \right] = \frac{c}{H_0} \frac{z}{(1+z)} \quad (2.135)$$

- Esta mesma distância na época da emissão da luz:

$$d_p(t_e) = a_r(t_e)d_p(t_0) = \frac{2ct_0}{(1+z)} \left[1 - a_r(t_e) \right] = \frac{c}{H_0(1+z)} \left[1 - \frac{1}{(1+z)} \right] = \frac{c}{H_0} \frac{z}{(1+z)^2} \quad (2.136)$$

- A densidade de energia neste cenário, observando (2.102) e (2.134):

$$\varepsilon(a) = \varepsilon_0 a(t)^{-3(1+\omega)} = \varepsilon_0 a(t)^{-4} = \varepsilon_0 \left[\left(\frac{t}{t_0} \right)^{1/2} \right]^{-4} = \varepsilon_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{-2} \quad (2.137)$$

2.14.5 O Universo Plano Contendo Apenas Constante Cosmológica

Neste Universo $\omega = -1 \rightarrow P = -\varepsilon$. A *Equação de Friedmann* será da forma:

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G \varepsilon_\Lambda}{3c^2} a^2 \quad (2.138)$$

A densidade de energia $\varepsilon_\Lambda = \frac{c^2}{8\pi G} \Lambda$ é constante. Reescrevendo a equação acima:

$$\dot{a} = \left(\frac{8\pi G \varepsilon_\Lambda}{3c^2} \right)^{1/2} a, \text{ assim, } H_0 = \left(\frac{8\pi G \varepsilon_\Lambda}{3c^2} \right)^{1/2} \text{ e, } \dot{a} = H_0 a \quad (2.139)$$

A solução para (2.139) é da forma:

$$a(t) = e^{H_0(t-t_0)} \quad (2.140)$$

A seguir, calcularemos os parâmetros mais significativos para este modelo:

- Distância própria no tempo atual. Observando (2.51) e (2.118):

$$d_p(t_0) = c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{e^{H_0(t-t_0)}} = \frac{c}{H_0} [e^{H_0(t_0-t_e)} - 1] = \frac{c}{H_0} \left[\frac{1}{a(t)} - 1 \right] = \frac{c}{H_0} z \quad (2.141)$$

- Distância própria no momento da emissão da luz, conforme (2.121):

$$d_p(t_e) = a(t_e) d_p(t_0) = \frac{1}{1+z} \frac{c}{H_0} z \quad (2.142)$$

2.15 O Universo Em Uma Aproximação Realística

Para obtermos resultados próximos aos do Universo real, nas épocas apropriadas, torna-se necessário que se leve em consideração o efeito dos diversos componentes do mesmo.

Iremos derivar equações que expressem os efeitos da radiação, da matéria, da constante cosmológica no comportamento do Cosmo.

Considerando (2.69), (2.70) e (2.77):

$$H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon(t) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2 a(t)^2}, \text{ implica em: } \frac{\kappa}{R_0^2} = \frac{H_0^2}{c^2} (\Omega_0 - 1) \quad (2.143)$$

E, com $\varepsilon_{c,0} \equiv \frac{3c^2 H_0^2}{8\pi G},$

$$H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon(t) - \frac{H_0^2}{a(t)^2} (\Omega_0 - 1), \text{ assim, } \frac{H(t)^2}{H_0^2} = \frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon_{c,0}} + \frac{1 - \Omega_0}{a(t)^2} \quad (2.144)$$

No Universo contendo matéria ($\omega=0$), radiação ($\omega=1/3$) e a constante cosmológica ($\omega=-1$), de acordo com (2.102):

$$\varepsilon_m = \varepsilon_{m,0} a^{-3}, \text{ assim, } \varepsilon_r = \varepsilon_{r,0} a^{-4}, \text{ e, } \varepsilon_\Lambda = \varepsilon_{\Lambda,0} \quad (2.145)$$

A *Equação de Friedmann* (2.144), então pode ser escrita da forma:

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_{r,0}}{a^4} + \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + \Omega_{\Lambda,0} + \frac{1 - \Omega_0}{a^2} \quad (2.146)$$

Sabemos que:

$$\Omega_{r,0} = \varepsilon_r / \varepsilon_{c,0}, \quad \Omega_{m,0} = \varepsilon_{m,0} / \varepsilon_{c,0}, \quad \Omega_{\Lambda,0} = \varepsilon_{\Lambda,0} / \varepsilon_{c,0}, \text{ e, } \Omega_0 = \Omega_{r,0} + \Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0} = 1 \quad (2.147)$$

Desde que $H = \dot{a} / a$, a equação (2.146) poderá ser escrita:

$$H_0^{-1} \dot{a} = \left[\frac{\Omega_{r,0}}{a^2} + \frac{\Omega_{m,0}}{a} + \Omega_{\Lambda,0} a^2 + (1 - \Omega_0) \right]^{1/2} \quad (2.148)$$

Para calcularmos a idade do Universo, integramos a equação acima:

$$t = \frac{1}{H_0} \int_0^a \frac{da}{[\Omega_{r,0} / a^2 + \Omega_{m,0} / a + \Omega_{\Lambda,0} a^2 + (1 - \Omega_0)]^{1/2}} \quad (2.149)$$

2.15.1 Universo Plano Composto por Matéria e Curvatura

A *Equação de Friedmann* passa a ser escrita:

$$\frac{H(t)^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_0}{a^3} + \frac{1-\Omega_0}{a^2} \quad (2.150)$$

A expansão máxima em um Universo assim descrito se verifica para:

$$H(t) = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right) = 0 \rightarrow 0 = \frac{\Omega_0}{a_{máx}^3} + \frac{1-\Omega_0}{a_{máx}^2} \rightarrow a_{máx} = \frac{\Omega_0}{\Omega_0 - 1} \quad (2.151)$$

A matéria atingirá um fator de escala máximo, para em seguida colapsar até um *Big-Cruch*, caso $\Omega_0 > 1$, e, $\kappa = +1$, tendo em vista (2.143).

Para $\Omega_0 < 1$, e, $\kappa = -1$ (2.143), em (2.150), o fator de escala se expandirá continuamente: $\dot{a}(t)^2 = \Omega_0 / a^3 + (1-\Omega_0) / a^2 > 0$.

Caso $\Omega_0 = 1$, e, $\kappa = 0$, a equação (2.150):

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2 \frac{1}{a^3}, \text{ assim, } \dot{a} = H_0 a^{-1/2}, \text{ logo, } a(t) = \left(\frac{2}{3} H_0 t\right)^{2/3} \quad (2.152)$$

Haverá expansão contínua.

2.15.2 Universo Plano Constituído Por Matéria e Constante Cosmológica

Neste Universo singular, a *Equação de Friedmann*, será escrita,

sabendo-se que $\Omega_{\Lambda,0} = 1 - \Omega_{m,0}$, logo, $\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + (1 - \Omega_{m,0})$ (2.153)

Caso $\Omega_{m,0} < 1$, e, $\Omega_{\Lambda,0} > 0$, o Cosmo se expandirá para sempre. Mas se

$\Omega_{m,0} > 1$, e, $\Omega_{\Lambda,0} < 0$, o Universo cessará a expansão para $a_{máx} = \left(\frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{m,0} - 1}\right)^{1/3}$ (2.154)

O tempo de colapso (*Crunch*) para $a = 0$ é:

$$t_{colapso} = \frac{2\pi}{3H_0} \frac{1}{\sqrt{\Omega_{m,0} - 1}} \quad (2.155)$$

2.15.3 Universo Formado Por Matéria, Curvatura e Constante Cosmológica

Em um Universo não necessariamente plano, a *Equação de Friedmann* que o

descreve é: $\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + \frac{1-\Omega_{m,0}-\Omega_{\Lambda,0}}{a^2} + \Omega_{\Lambda,0}$ (2.156)

Na solução de (2,156), os diversos parâmetros envolvidos nos trarão múltiplas características para o Universo. Assim, encontraremos Universos com curvaturas $\kappa=0$, $\kappa=1$, e $\kappa=-1$, levando a um *Big Chill* (esfriamento) com $a \rightarrow \infty$ e $t \rightarrow \infty$; a um *Big Crunch* (colapso), para $a \rightarrow 0$ e $t \rightarrow t_{crunch}$, havendo, portanto, diferentes combinações de expansão e contração.

2.15.4 Universo Plano Composto Por Radiação e Matéria

Para um Universo em que exista somente radiação e matéria (2.112), temos $a_{rm} = \Omega_{r,0} / \Omega_{m,0} \approx 2,8 \times 10^{-4}$, ou seja, $a \sim a_{rm}$, a *Equação de Friedmann* é:

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_{r,0}}{a^4} + \frac{\Omega_{m,0}}{a^3}, \text{ ou seja, } H_0 dt = \frac{ada}{\Omega_{r,0}^{1/2}} \left[1 + \frac{a}{a_{r,m}} \right]^{-1/2} \quad (2.157)$$

Integrando-se, obtemos:

$$H_0 t = \frac{4a_{r,m}^2}{3\sqrt{\Omega_{r,0}}} \left[1 - \left(1 - \frac{a}{2a_{r,m}} \right) \left(1 + \frac{a}{a_{r,m}} \right)^{1/2} \right] \quad (2.158)$$

O tempo em que matéria e radiação se equivaliam ($\epsilon_m = \epsilon_r$):

$$t_{r,m} = \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \frac{a_{r,m}^2}{\sqrt{\Omega_{r,0}}} H_0^{-1} \quad (2.159)$$

2.15.5 O Nosso Universo

Este Cosmo, com o qual interagimos, é plano, dotado de matéria, radiação e se expande aceleradamente.

A *Equação de Friedmann* $\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_{r,0}}{a^4} + \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + \Omega_{\Lambda,0} + \frac{1-\Omega_0}{a^2}$ nos conduz à

determinação dos diversos parâmetros que o descrevem. Na Tabela 2.1 estão relacionadas algumas de suas propriedades:

	Parâmetros Modelo Padrão	
Fótons	$\Omega_{\gamma,0}$	$5,0 \times 10^{-5}$
Neutrinos	$\Omega_{\nu,0}$	$3,4 \times 10^{-5}$
Radiação Total	$\Omega_{r,0}$	$8,4 \times 10^{-5}$
Matéria Bariônica	Ω_{bar}	0,04
Matéria Escura	$\Omega_{\text{me},0}$	0,26
Total Matéria	$\Omega_{\text{m},0}$	0,30
Constante Cosmológica	$\Omega_{\Lambda,0}$	0,70

Tabela 2.1 – Componentes atuais do Universo

Este modelo para o Universo é o mais aceito atualmente. As múltiplas medidas efetuadas de seus parâmetros com o envio de sondas espaciais e telescópios, reforçam suas hipóteses básicas.

Satélites na Pesquisa Espacial

Nome	Agência	Lançamento	Pesquisa
Swift Gamma Ray Burst Explorer	NASA	Nov. 2004	Raios γ
AGILE	ISA	Abr.2007	Raios X
Chandra	NASA	Jul.1999	Raios X
Hubble Space Telescope	NASA	Abr.1999	Ultravioleta/Luz visível
Spitzer Space Telescope	NASA	Ago.2003	Infravermelho
Cosmic Background Explorer (COBE)	NASA	Nov.1989	Microondas
Astromag Free-Flyer	NASA	Jan.2005	Partículas
ISO	ESA	Nov.1995	Infravermelho
IRAS	NASA	Jan.1983	Infravermelho

Tabela 2.2 - Satélites e a Pesquisa Espacial

Neste modelo, primeiramente, houve um período em que a radiação foi dominante com $a(t) \propto t^{1/2}$, após, a matéria predominou, sendo $a(t) \propto t^{2/3}$. No futuro, com o domínio da constante cosmológica $a(t) \propto e^{kt}$. O fator de escala é obtido resolvendo-se a *Equação de Friedmann* (2.146).

Com as equações (2.118), (2.120) e (2.121) calculamos a distância própria no momento da emissão $d_p(t_e)$, na observação $d_p(t_0)$ e a distância do horizonte d_{hor} . No limite em que $z \rightarrow \infty \rightarrow a(t) \rightarrow 0$, a distância do horizonte é:

$$d_{hor} = 3,24c / H_0 = 3,12ct_0 = 14Gpc \quad (2.160)$$

2.16 Determinação dos Parâmetros do Cosmo

A *Equação de Friedmann*, embora nos descreva a evolução de $a(t)$, depende de valores assumidos para Ω_m , Ω_r e Ω_Λ .

Assim, buscaremos obter valores para $a(t)$ em função de H_0 (*constante de Hubble*) e para q_0 (*parâmetro de desaceleração*).

2.16.1 O Parâmetro de Desaceleração e a Constante de Hubble

Expandindo-se $a(t)$ em série de Taylor em torno de seu valor atual, e tomando apenas os três primeiros termos:

$$a(t) \approx a(t_0) + \left(\frac{da}{dt} \right)_{t=t_0} (t-t_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2a}{dt^2} \right)_{t=t_0} (t-t_0)^2 \quad (2.161)$$

Dividindo-se por $a(t_0)$:

$$\frac{a(t)}{a(t_0)} \approx 1 + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)_{t=t_0} (t-t_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\ddot{a}}{a} \right)_{t=t_0} (t-t_0)^2 \quad (2.162)$$

Ou ainda,

$$a(t) \approx 1 + H_0 (t-t_0) - \frac{1}{2} q_0 H_0^2 (t-t_0)^2 \quad (2.163)$$

Como a *Constante de Hubble* é:

$$H_0 = \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)_{t=t_0} \quad (2.164)$$

E o *Parâmetro de Desaceleração*, por sua vez, é definido por:

$$q_0 \equiv -\left(\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2}\right)_{t=t_0} = -\left(\frac{\ddot{a}}{aH^2}\right)_{t=t_0} \quad (2.165)$$

A equação da aceleração para um Universo com múltiplas componentes se escreve:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2} \sum_{\omega} \epsilon_{\omega} (1+3\omega), \text{ assim, } -\frac{\ddot{a}}{aH^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{8\pi G}{3c^2 H^2} \right] \sum_{\omega} \epsilon_{\omega} (1+3\omega) \quad (2.166)$$

Sendo $\left[\frac{8\pi G}{3c^2 H^2} \right] = \frac{1}{\epsilon_c}$, a equação acima passa a ser representada:

$$-\frac{\ddot{a}}{aH^2} = \frac{1}{2} \sum_{\omega} \Omega_{\omega} (1+3\omega), \text{ logo, } q_0 = \frac{1}{2} \sum_{\omega} \Omega_{\omega,0} (1+3\omega) \quad (2.167)$$

Atualmente, no Universo acelerado, composto por matéria, radiação e constante cosmológica, o *parâmetro de desaceleração* seria expresso:

$$q_0 = \frac{1}{2} \sum_{\omega} \Omega_{\omega,0} (1+3\omega), \text{ logo, } q_0 = \Omega_{r,0} + \frac{1}{2} \Omega_{m,0} - \Omega_{\Lambda,0} \quad (2.168)$$

O valor para q_0 no modelo contemporâneo de Universo é: $q_0 \approx -0,55$.

A *constante de Hubble* é determinada a partir da relação:

$$cz = H_0 d \quad (2.169)$$

A distância própria encontra-se através da expressão:

$$d_p(t_0) = c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \quad (2.170)$$

Poderemos escrever a equação (2.163), também, da seguinte forma:

$$\frac{1}{a(t)} \approx 1 - H_0(t-t_0) + \left(\frac{1+q_0}{2}\right) H_0^2(t-t_0)^2, \text{ logo, } d_p(t_0) \approx c(t_0-t_e) + \frac{cH_0}{2}(t_0-t_e)^2 \quad (2.171)$$

Em (2.171), o termo $c(t_0-t_e)$ seria a distância própria para um Universo estático, conforme alguns cosmologistas em passado recente imaginavam, inclusive Einstein.

Já, a expressão $\frac{cH_0}{2}(t_0-t_e)^2$, corresponde à correção desta distância considerando a expansão do Universo e o intervalo no tempo em que a luz foi emitida.

Como o intervalo $(t_0 - t_e)$ é de difícil determinação, utilizamo-nos de dados referentes ao *redshift* galáctico para o cálculo da distância própria $d_t(t_0)$:

$$\frac{1}{a(t_e)} = 1 + z \quad (2.172)$$

Partindo de (2.171):
$$z \approx H_0(t_0 - t_e) + \left(\frac{1+q_0}{2}\right) H_0^2(t_0 - t_e)^2 \quad (2.173)$$

Em conseqüência,

$$(t_0 - t_e) \approx H_0^{-1} \left[z - \left(\frac{1+q_0}{2}\right) z^2 \right] \quad (2.174)$$

E a distância própria (2.171) em função do *redshift* será:

$$d_p(t_0) \approx \frac{c}{H_0} \left[z - \left(\frac{1+q_0}{2}\right) z^2 \right] + \frac{cH_0}{2} \frac{z^2}{H_0^2} = \frac{c}{H_0} z \left[1 - \frac{1+q_0}{2} z \right] \quad (2.175)$$

Esta expressão somente é válida para pequenos valores de z , já que o fator de escala $a(t)$, foi obtido a partir de uma expansão em série de Taylor (2.161), tomados os três primeiros termos: $z \ll 2/(1+q_0)$.

2.16.2 A Distância de Luminosidade

Conhecendo-se a luminosidade L de um objeto, podemos, através da medição do fluxo f recebido, calcular a *Distância de Luminosidade*, que é definida:

$$d_L \equiv \left(\frac{L}{4\pi f} \right)^{1/2} \quad (2.176)$$

Em um Universo Euclidiano, a luz se propaga de forma inversamente proporcional ao quadrado da distância: $f = L/4\pi d^2$.

Já para um Cosmo descrito pela métrica de Robertson-Walker (2.36):

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 \left[dr^2 + S_k(r)^2 d\Omega^2 \right] \quad (2.177)$$

$$S_k = r, \text{ para, } (\kappa = 0)$$

Com: $S_k = R_0 \text{sen}(r/R_0), \text{ para, } (\kappa = +1) \quad (2.178)$

$$S_k = R_0 \text{senh}(r/R_0), \text{ para, } (\kappa = -1)$$

Fótons emitidos por uma fonte luminosa num instante t_e , percorreram até o presente momento uma distância $d_p(t_0) = r$. Se o espaço é plano, $\kappa = 0$, a área da superfície esférica abrangida será: $A_p(t_0) = 4\pi d_p(t_0)^2 = 4\pi r^2$. Generalizando,

$$A_p(t_0) = 4\pi S_k(r)^2 \quad (2.179)$$

Devido à expansão do Universo, a energia desses fótons decresce:

$$E_e = hc / \lambda_e, \text{ e, } \lambda_e = a(t_e) \lambda_0 = \frac{\lambda_0}{(1+z)}, \text{ assim, } E_e = \frac{hc}{\lambda_0} (1+z) = E_0 (1+z), \text{ e, } E_0 = \frac{E_e}{(1+z)} \quad (2.180)$$

Por esta mesma expansão, a distância própria e o tempo entre dois eventos de emissão de luz aumentam:

$$c(\delta t_e) = c[a(t_e)(\delta t_0)] = c[(1/(1+z))(\delta t_0)] \rightarrow \delta t_0 = (1+z)\delta t_e \quad (2.181)$$

Por conseguinte, o fluxo medido sofrerá uma redução equivalente a $1/(1+z)^2$, tendo em vista que a energia diminui num fator $(1/(1+z))$ enquanto que o tempo e a distância própria são multiplicados por $(1+z)$:

$$f = \frac{\text{Energia}}{\text{Área.Tempo}} = \left(\frac{L}{1+z}\right) \left(\frac{1}{4\pi S_k(r)^2}\right) \left(\frac{1}{1+z}\right) = \frac{L}{4\pi S_k(r)^2 (1+z)^2} \quad (2.182)$$

A *Distância de Luminosidade* (2.176) será:

$$d_L = S_k(r)(1+z) \quad (2.183)$$

Em um Universo plano com $R_0 > d_{hor}(t_0)$, $r \ll R_0$, e, $S_k(r) \approx r$, a *Distância de Luminosidade* e a *Distância Própria* atual são descritos:

$$d_L = r(1+z) = d_p(t_0)(1+z) \rightarrow d_p(t_0) = \frac{1}{1+z} d_L = a(t_e) d_L \quad (2.184)$$

Numa aproximação com $z \ll 1$, a *distância própria* (2.175):

$$d_p(t_0) \approx \frac{c}{H_0} z \left(1 - \frac{1+q_0}{2} z\right) \quad (2.185)$$

A *distância de luminosidade* em um Universo plano:

$$d_L \approx \frac{c}{H_0} z \left(1 - \frac{1+q_0}{2} z \right) (1+z) \approx \frac{c}{H_0} z \left(1 + \frac{1-q_0}{2} z \right) \quad (2.186)$$

Caso o *redshift* $z \rightarrow 0$:

$$d_p(t_0) \approx d_L \approx \frac{c}{H_0} z \quad (2.187)$$

2.16.3 Distância de Diâmetro Angular

Na observação de corpos celestes, poderemos utilizar como padrão uma distância conhecida, ao invés de recolhermos dados através do fluxo recebido e a correspondente *distância de luminosidade*.

Conhecendo, portanto, seu comprimento próprio l , determinaremos a distância até esse objeto através do ângulo $\delta\theta$ entre suas extremidades e o ponto de observação. Com $\delta\theta \ll 1$, a *Distância de Diâmetro Angular* é definida por:

$$d_A = \frac{l}{\delta\theta} \quad (2.188)$$

Vamos escolher nossa amostra padrão de comprimento l situada numa distância comóvel r . As duas extremidades do padrão têm coordenadas (r, θ_1, ϕ) e (r, θ_2, ϕ) . A luz emitida no instante t_e é captada em t_0 . A trajetória sobre a geodésica faz-se por ângulos (θ, ϕ) constantes. A amplitude $\delta\theta = \theta_2 - \theta_1$. A extensão l é obtida conforme (2.177):

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t_e)^2 \left[dr^2 + S_k(r)^2 d\Omega^2 \right], \text{ como, } cdt_e = 0, \text{ então, } a(t_e) dr = 0 \quad (2.189)$$

Assim, o modelo utilizado como padrão possui um comprimento l :

$$l = ds = a(t_e) S_k(r) \delta\theta = \frac{S_k(r)}{1+z} \delta\theta \quad (2.190)$$

A *Distância de Diâmetro Angular* é:

$$d_A \equiv \frac{l}{\delta\theta} = \frac{S_k(r)}{1+z} \quad (2.191)$$

Comparando com a equação (2.183), e com $(\kappa = 0)$:

$$\frac{d_A}{d_L} = \frac{1}{(1+z)^2}, \text{ portanto, } d_A(1+z) = d_p(t_0) = \frac{d_L}{1+z}, \text{ e, } d_A = \frac{d_p(t_0)}{1+z} = dp(t_e) \quad (2.192)$$

Para $z \ll 1$:

$$d_A = \frac{c}{H_0} z \left(1 - \frac{3+q_0}{2} z \right) \quad (2.193)$$

Devemos notar, também, que:

$$d_L(z \rightarrow \infty) \approx z d_{hor}(t_0) \rightarrow \frac{d_A}{d_L} = \frac{1}{(1+z)^2} \rightarrow d_A(z \rightarrow \infty) \approx \frac{d_{hor}(t_0)}{z} \quad (2.194)$$

2.17 Matéria Escura

Jan Hendrik Oort (1900-1992), estudando aglomerados globulares na Via-Láctea percebeu, já, em 1922, que estes se moviam mais rapidamente do que se poderia esperar por influência da atração gravitacional da matéria luminosa. Seus cálculos apontavam para a necessidade de que a galáxia fosse duzentas vezes mais massiva que as estrelas nela contidas.

Fritz Zwicky (1898-1974), em 1933, estudando o aglomerado de Coma encontrou uma divergência significativa entre as massas luminosa e gravitacional desse objeto. De acordo com seus cálculos, o aglomerado de Coma conteria mais de cinquenta vezes a massa luminosa conhecida, levando-o a concluir que esse aglomerado deveria estar saturado com matéria não luminosa.

O aglomerado de Coma estaria impregnado com outra forma de matéria: a Matéria Escura.

Em 1936, *Sinclair Smith*, no observatório de Monte Wilson, chegou a resultados semelhantes para o superaglomerado de Virgem: deveria existir cerca de cem vezes mais matéria escura que luminosa. Este material, provavelmente, seria encontrado entre as galáxias.

2.17.1 Influência Gravitacional da Matéria Escura

Se considerarmos apenas o sistema solar e arredores, o efeito da matéria escura não tem muita influência na sua dinâmica.

Estudos do movimento das estrelas, no plano ortogonal ao disco da galáxia, indicam que o potencial gravitacional do próprio disco é o fator decisivo no deslocamento.

Cálculos apontam para uma densidade de massa total da ordem de $0,18M_{\odot}pc^{-3}$, portanto, somente a contribuição da massa luminosa seria suficiente para justificar os movimentos.

A matéria escura tem sua influência significativa ao nos afastarmos da circunvizinhança solar.

A velocidade de rotação dos discos das galáxias espirais se mantém aproximadamente constante ao nos afastarmos de seu centro. Esta velocidade é uma resposta ao potencial gravitacional originado pela distribuição de massa.

Vamos considerar o gás interestelar existente no plano do disco numa distância R do centro da galáxia. Sua velocidade é v . A sua aceleração centrípeta será:

$$a = \frac{v^2}{R} \quad (2.195)$$

Por outro lado, a aceleração promovida pela atração gravitacional é:

$$a = \frac{GM(R)}{R^2} \quad (2.196)$$

Sendo $M(R)$ a massa contida em uma esfera de raio R , cujo centro é o da galáxia. Assim:

$$\frac{v^2}{R} = \frac{GM(R)}{R^2} \rightarrow v = \sqrt{\frac{GM(R)}{R}} \quad (2.197)$$

Na região central, a densidade de massa é aproximadamente constante, assim, $M \propto r^3$, tendo como consequência, $v \propto R$, resultado coincidente com a observação. Uma vez toda a massa da galáxia fosse envolvida, esperava-se que $v \propto M / \sqrt{R}$, tendo a rotação atingido a fase Kepleriana.

Na realidade, o que se observou a partir dos anos 1970, contrariava estas previsões de forma contundente. A velocidade permanecia constante, mesmo quando todas as estrelas já haviam sido consideradas. Observações efetuadas da linha espectral de 21 cm, correspondente ao hidrogênio neutro existente entre as estrelas também apontavam nesta direção.

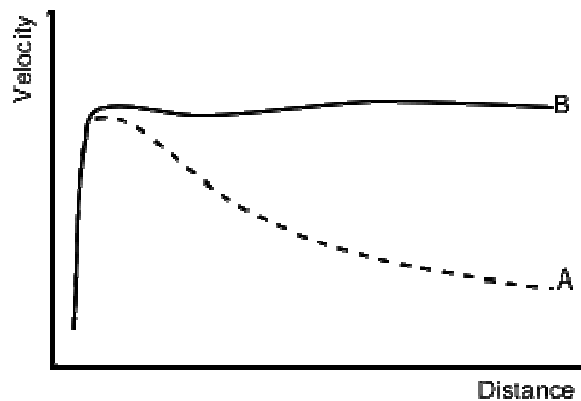


Figura 4 Curvas de rotação de uma galáxia espiral típica: (A) de acordo com a teoria; (B) Observado. (Wikipedia)

2.17.2 A Matéria Escura em Aglomerados de Galáxias

Vamos considerar um aglomerado composto por N galáxias, cujas massas são m_i ($i = 1, 2, \dots, N$), suas posições \vec{x}_i , e suas velocidades $\dot{\vec{x}}_i$.

Tendo em vista que estes objetos formam estruturas ligadas, não sofrendo os efeitos da expansão cósmica, e, além disto, suas velocidades são sub-relativísticas, poderemos utilizar a mecânica Newtoniana na análise da dinâmica envolvida no processo.

A aceleração da i -ésima galáxia será então:

$$\ddot{\vec{x}}_i = -G \sum_{j \neq i} m_j \frac{\vec{x}_j - \vec{x}_i}{|\vec{x}_j - \vec{x}_i|^3} \quad (2.198)$$

A energia potencial gravitacional, em consequência:

$$W = -\frac{G}{2} \sum_{i, j, j \neq i} \frac{m_i m_j}{|\vec{x}_j - \vec{x}_i|} \quad (2.199)$$

Podemos, também, expressar a energia potencial desta forma:

$$W = -\alpha \frac{GM^2}{r_h} \quad (2.200)$$

Sendo $M = \sum m_i$, equivalente ao total da massa do aglomerado, α um fator adimensional que depende de sua densidade, enquanto que r_h é o *raio de meia massa*, correspondendo ao raio de uma esfera cujo centro coincide com o do aglomerado e possuindo massa $M/2$. Para boa parte dos aglomerados, o valor de $\alpha \approx 0,4$.

A energia cinética vinculada ao movimento dessas galáxias é:

$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{x}}_i^2 \quad (2.201)$$

Também poderá ser escrita:

$$K = \frac{1}{2} M \langle v^2 \rangle \rightarrow \langle v^2 \rangle \equiv \frac{1}{M} \sum_i m_i \dot{\vec{x}}_i^2 \quad (2.202)$$

Aqui $\langle v^2 \rangle$ é a velocidade quadrática média das galáxias do aglomerado.

O momento de inércia relativo será:

$$I \equiv \sum_i m_i \vec{x}_i^2 \quad (2.203)$$

A segunda derivada do momento de inércia é:

$$\ddot{I} = 2 \sum_i m_i (\vec{x}_i \cdot \ddot{\vec{x}}_i + \dot{\vec{x}}_i \cdot \dot{\vec{x}}_i) \quad (2.204)$$

Utilizando-nos da equação (2.201), poderemos escrever:

$$\ddot{I} = 2 \sum_i m_i (\vec{x}_i \cdot \ddot{\vec{x}}_i) + 4K \quad (2.205)$$

Da equação (2.198):

$$\sum_i m_i (\vec{x}_i \cdot \ddot{\vec{x}}_i) = -G \sum_{i,j,j \neq i} m_i m_j \frac{\vec{x}_i \cdot (\vec{x}_j - \vec{x}_i)}{|\vec{x}_j - \vec{x}_i|^3} \quad (2.206)$$

A equação acima é, igualmente, válida com os subscritos permutados. Em consequência, escrevemos:

$$\sum_i m_i (\vec{x}_i \cdot \ddot{\vec{x}}_i) = \frac{1}{2} \left[\sum_i m_i (\vec{x}_i \cdot \ddot{\vec{x}}_i) + \sum_j m_j (\vec{x}_j \cdot \ddot{\vec{x}}_j) \right] = -\frac{G}{2} \sum_{i,j,j \neq i} \frac{m_i m_j}{|\vec{x}_j - \vec{x}_i|} = W \quad (2.207)$$

E, portanto, (2.205) poderá assumir a forma:

$$\ddot{I} = 2W + 4K, \quad (2.208)$$

que define o *Teorema do Virial*.

Para o aglomerado, formando uma estrutura coesa, cujo centro de massa está em repouso em seu sistema inercial, o momento de inércia é constante, logo:

$$0 = W + 2K \rightarrow K = -\frac{W}{2} \quad (2.209)$$

Isto é, em um sistema gravitacional em repouso, a energia cinética K é igual a $-\frac{1}{2}$ vezes a energia potencial W .

Se substituirmos (2.200) e (2.202) na equação (2.209):

$$\frac{1}{2}M \langle v^2 \rangle = \frac{\alpha GM^2}{2 r_h} \quad (2.210)$$

Assim, a massa do aglomerado poderá ser calculada:

$$M = \frac{\langle v^2 \rangle r_h}{\alpha G} \quad (2.211)$$

Calculando-se a massa com esta fórmula, obtêm-se um valor, expressivamente, maior do que o observado através da luz emitida, constituindo-se em importante evidência da matéria escura.

2.17.3 Lentes Gravitacionais

A distorção do espaço pela presença de objetos massivos é prevista na *Teoria da Relatividade Geral*, de Einstein. A geometria do espaço se altera, portanto, fazendo com que corpos que se desloquem em suas proximidades fiquem presos a trajetórias descritas pelas geodésicas locais.

O mesmo deverá ocorrer com os fótons, já que matéria e energia se inter-relacionam estreitamente através da relação $E = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2}$, ou $E = mc^2$, para corpos em repouso.

Esta propriedade apresentada pelo espaço poderá ser empregada na detecção da matéria escura em galáxias e aglomerados.

Boa parte dessa matéria é constituída por objetos compactos e massivos, tais como anãs brancas, anãs marrons, estrelas de nêutrons e buracos-negros. Coletivamente, são denominados de MACHO's (Massive Compact Halo Objects).

Estudos realizados com milhões de estrelas na Grande Nuvem de Magalhães sugerem que, aproximadamente, 20% da massa componente do Halo da Via-Láctea poderia ser na forma desses objetos.

Consideremos um fóton passando nas proximidades de um objeto massivo M , com *parâmetro de impacto* b , e sendo deflexionado por um ângulo α :

$$\alpha = \frac{4GM}{c^2 b} \quad (2.212)$$

No caso de uma estrela que tem sua luz desviada pelo sol, o ângulo $\alpha = 1,7$ segundo de arco.

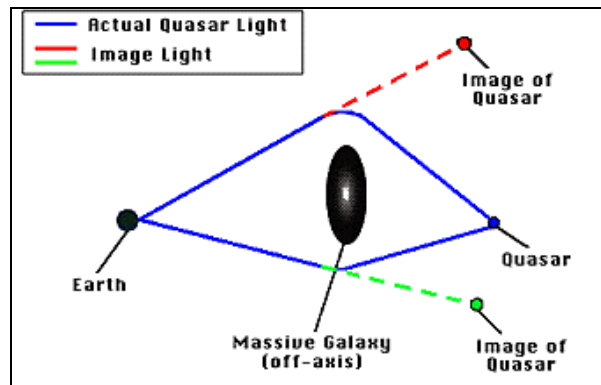


Figura 5 Dupla imagem de um Quasar por efeito de Lente Gravitacional. (WAMBSGANSS, Joachim **Gravitational Lensing in Astronomy**-Astrophysikalisches Institut Potsdam)

Conhecido o desvio α , poderemos, a partir de (2.212), calcular a massa M do aglomerado, e, portanto, detectar a existência de matéria escura no mesmo.

No caso particular em que um objeto massivo se encontra exatamente na linha de visada do observador, a imagem se apresentará na forma de um anel, o *Anel de Einstein*:

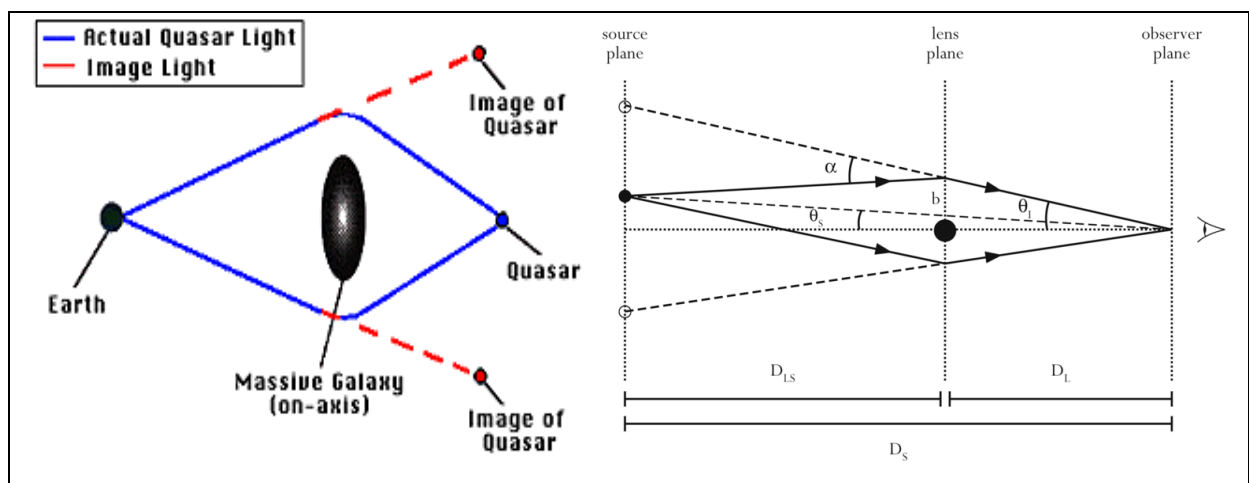


Figura 6 Quasar alinhado com o observador formando o anel de Einstein. (WAMBSGANSS, Joachim **Gravitation Lensing in Astronomy**-Astrophysikalisches Institut Potsdam) (Wikipedia)

O formato do anel de Einstein é estabelecido pelo *Raio de Einstein* θ_E :

$$\theta_E = \left(\frac{4GM}{c^2} \frac{d_{LS}}{d_L d_S} \right)^{1/2} \text{ rad} \quad (2.213)$$

Sendo:

G a constante gravitacional;

M a massa da lente gravitacional;

c a velocidade da luz;

d_L a distância de diâmetro angular até a lente;

d_S a distância de diâmetro angular até a fonte;

d_{LS} a distância de diâmetro angular entre a lente e a fonte emissora.

2.17.4 Matéria Escura Bariônica

Alguns candidatos a matéria escura na forma bariônica tem sido estudados exaustivamente, outros, nem tanto.

Os Buracos-Negros, entre os objetos que mais despertaram nosso interesse, apresentam-se com grande probabilidade de contribuir significativamente no montante da matéria escura do Universo. Invariavelmente, os núcleos ativos de galáxias contêm um. Estes são conhecidos por Buracos-Negros Massivos. No entanto, em galáxias com núcleos não ativos, eles têm sido encontrados também. No centro de nossa galáxia há um Buraco-Negro com massa equivalente a $2,7 \times 10^6 M_{\odot}$.

É muito provável que se encontrem Buracos-Negros em regiões fora do centro das galáxias. Estes objetos teriam se formado em fases iniciais do Universo e poderiam ter suas dimensões bem menores, da ordem de $1 \times 10^3 M_{\odot}$.

Outro provável candidato à matéria escura bariônica é a nuvem de gás frio e denso que ocuparia o halo das galáxias. Estrelas de nêutrons também se encontram entre prováveis constituintes da matéria escura.

Embora as estrelas anãs marrons tenham sido por longo período consideradas componentes importantes da matéria escura, o que se tem observado é que não estão em número suficiente no halo para que sua influência seja significativa.

Estrelas existentes nos aglomerados, entre as galáxias, porém, com luminosidade insuficiente para serem notadas, têm contribuição importante. Da mesma forma, o gás que

permeia o aglomerado entre as galáxias poderá representar parcela expressiva de matéria escura.

2.17.5 Matéria Escura Não Bariônica

As partículas constituintes do Universo não bariônico têm sua existência proposta apenas em teoria.

O neutrino, a mais popular, apesar de possuir massa, interage fracamente com a matéria.

Sabemos que no *Big-Bang* podem ter sido criadas, além da matéria bariônica, uma grande quantidade de partículas exóticas, que se forem massivas o suficiente, poderão se constituir na porção desconhecida de matéria no Universo.

A matéria escura é classificada em dois tipos: Matéria Escura Quente (HDM), cujas partículas possuem velocidades relativísticas, e Matéria Escura Fria (CDM), composta por partículas que se deslocam em velocidades muito menores que a da luz.

Há três principais tipos de partículas candidatas a não bariônicas: O *neutrino*, que é produzido em estrelas e explosões de supernovas, as *WIMP* (Weakly Interacting Massive Particle), incluindo, aí, grande família de partículas ainda hipotéticas: neutrinos pesados, neutralinos (higgsinos, fotinos e zinos) e gravitinos. Por fim, há os *axions*.

Os neutrinos formam a matéria escura quente. Há três tipos: neutrino do elétron, neutrino do muon e neutrino do tau, intercambiáveis entre si. Sua massa ainda não foi detectada.

Experimentos realizados no *Super Kamioka Neutron Decay Experiment*, ou *Superkamiokande* tentam determinar a massa do neutrino. No entanto, há dois problemas com os neutrinos como fonte de matéria escura: primeiro, possuindo velocidades próximas à da luz, as galáxias não poderão reter bom número dessas partículas; segundo, o Universo não é grande o suficiente para acomodá-las na quantidade necessária.

Observações recentes indicam que eles nem são suficientemente massivos, nem existem em número suficiente.

As WIMPs se constituem na matéria escura fria, interagindo fracamente com a matéria comum. Deverão ser partículas massivas, geradas com velocidades não relativísticas desde o *Big-Bang*. Ainda não foram detectadas.

O neutralino é o mais popular dessas partículas. Como seriam bastante massivos, tornam-se candidatos importantes à matéria escura fria.

Quanto aos axions, sua existência é puramente especulativa. Foram criados para resolver um problema teórico na física de partículas. Caso existam, sua massa será extremamente pequena, da ordem de 10^{-6} a $10^{-4} eV$. É um bóson. Se eles, de fato, existirem, terão sido produzidos durante a transição de fase QCD (Quantum Chromodynamic) do *Big-Bang*. Os axions poderão converter-se em fótons. Experimentos têm sido conduzidos nesta direção, mas até o momento não foram detectados.

2.18 A Radiação Cósmica De Fundo

A radiação cósmica de fundo apresenta um espectro térmico de radiação de corpo negro, possuindo uma temperatura de $2,725 \pm 0,001^\circ K$. Sua frequência de pico é de $160,2 GHz$.

Levantamentos efetuados pelo *Cosmic Background Explorer (COBE)*, e pelo *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP)* mostram esta característica:

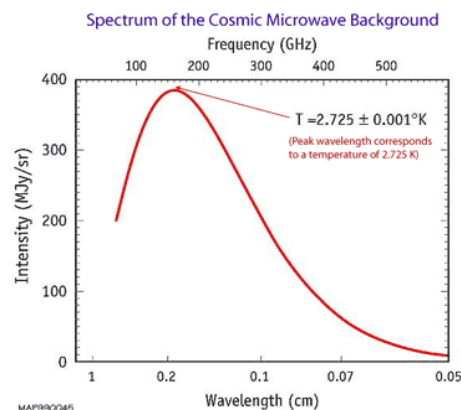


Figura 7 Espectro do fundo de microondas levantado pelo satélite WMAP. (NASA, WMAP)

A elevada isotropia e homogeneidade apresentadas apontam para uma origem cósmica que remonta a períodos muito próximos ao *Big-Bang*.

Graças à forte interação entre matéria e radiação, todo o meio se encontraria em equilíbrio termodinâmico com os fótons. Com rápida expansão que este gás estava sofrendo, houve um resfriamento permitindo que prótons e elétrons se recombinassem. Com isto, houve o desacoplamento da matéria, originando-se o fundo de fótons de baixa energia que permeia o Universo. Este fundo de radiação foi proposto por George Gamow (1904-1968) em 1948.

Mas apenas em 1964, este fundo de radiação foi descoberto por acaso por Arno Penzias (1933) e Robert Wilson (1936), quando testavam o desempenho de antenas de

comunicação, tendo percebido, pela uniformidade, que esta radiação deveria ter origem externa ao local do experimento.

O pico dessa emissão ocorre para um comprimento de onda aproximado de $0,2\text{cm}$.

Com o satélite *COBE*, lançado em 1989, conseguiu-se levantar com precisão dados da radiação de fundo. O satélite *WMAP*, lançado em 2001, corrigindo efeitos de anisotropia de dipolo, mostrou que este fundo de microondas é bastante uniforme, com flutuações de temperatura da ordem de $\Delta T / T \approx 10^{-5}$.

O Universo primordial era, portanto, muito homogêneo.

O *espalhamento Compton* por parte do material ionizado existente no meio intergaláctico é capaz de provocar distorção considerável no espectro da radiação de fundo.

Este efeito, denominado de *efeito Sunyaev-Zel'dovich*, aparece quando um fóton percorre em um intervalo de tempo dt um intervalo cdt , interagindo com elétrons aquecidos do meio. Nesta interação, os elétrons energéticos transferem energia da ordem de $k(T_e - T_r)$, sendo T_e e T_r as temperaturas dos elétrons e do gás de fótons respectivamente. E como a temperatura dos elétrons na região central dos aglomerados de galáxias é maior ($> 10^6\text{K}$) que a temperatura da radiação de fundo, o gás de fótons absorve energia do meio. Sendo a densidade de elétrons $n_e(z)$, a secção de choque de Thompson σ_T , o número de interações será $\sigma_T n_e(z) cdt$. Logo, os fótons estarão recebendo um montante líquido de energia:

$$E = \int_{t_1}^{t_2} k(T_e - T_r) \sigma_T n_e(z) cdt \quad (2.214)$$

Esta energia corresponde a uma fração y da energia de repouso dos elétrons:

$$y = \int_{t_1}^{t_2} \frac{k(T_e - T_r)}{m_e c^2} \sigma_T n_e(z) cdt \quad (2.215)$$

Portanto, o gás quente que existe nos aglomerados de galáxias pode provocar alterações notáveis no espectro da radiação de fundo.

Por outro lado, dois observadores quaisquer que observem a radiação de fundo medirão exatamente a mesma temperatura. Contudo, qualquer movimento de sua parte provocará uma alteração nessa distribuição. Um observador que não esteja em repouso relativamente a esse fluxo energético deverá medir um *redshift* ou um *blueshift* dos fótons da radiação de fundo da ordem de:

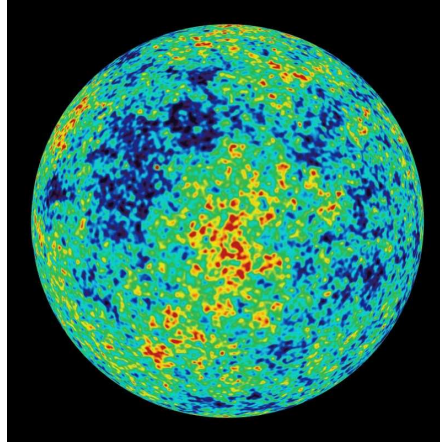


Figura 8 Flutuações de temperatura na radiação de fundo. (WMAP, NOAA Research Laboratories)

$\lambda = \lambda_0(1 - v/c)$, devido ao efeito Doppler que surge como consequência do movimento relativo do referencial do fundo de microondas. Assim, se este observador examinar uma região do céu numa direção θ em relação a seu movimento, perceberá uma temperatura dada por:

$$T = \frac{T_0}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta} \approx T_0(1 + \frac{v}{c} \cos \theta) \quad (2.215a)$$

Esta alteração no valor da temperatura é conhecida por *anisotropia de dipolo*.

Nosso referencial de repouso se movimenta numa velocidade de $370 \pm 10 \text{ km s}^{-1}$, na direção $(\alpha, \delta) = (11, 2^h, -7^\circ)$ em relação ao referencial da radiação de fundo. O Sol se movimenta em relação ao centro de nossa Galáxia, que por sua vez o faz em relação ao Grupo Local, considerado como nosso sistema local de repouso. Efetuadas todas as correções, encontramos uma velocidade de aproximadamente 600 km s^{-1} na direção, $(\alpha, \delta) = (13, 3^h, -26^\circ)$, da constelação do Centauro.

A radiação de fundo aparecerá ligeiramente mais aquecida na direção do movimento, que na direção oposta.

2.18.1 Recombinação e Desacoplamento

A recombinação ocorre quando a matéria bariônica se torna neutra. Podemos defini-la como sendo o momento em que a densidade de íons se iguala à densidade de átomos neutros.

Já, o desacoplamento dos fótons é o momento em que a taxa de espalhamento por elétrons se torna menor do que o parâmetro de Hubble (que nos remete à taxa de expansão do

Universo). Quando desacoplam, os fótons não interagem mais com elétrons permitindo que o Universo se torne transparente.

Neste caso, quando os fótons têm o *último espalhamento* pelos elétrons, estarão configurando a *superfície de último espalhamento*. A partir deste instante, a radiação de fundo passará a ser percebida, já que os fótons se deslocarão livremente.

A probabilidade de que o fóton seja novamente espalhado por um elétron é muito pequena, pois a taxa de expansão do Universo é bem maior do que a taxa de espalhamento.

2.18.2 Flutuações de Temperatura

A flutuação de temperatura na radiação de fundo possui uma dimensão angular $\delta\theta$, que se relaciona com a dimensão linear na superfície de último espalhamento pela relação:

$$d_A = \frac{l}{\delta\theta} \quad (2.216)$$

Sendo d_A a distância de diâmetro angular da superfície de último espalhamento e l uma dimensão espacial naquela superfície. Como o *redshift* daquele período é $z_{ls} = 1100 \gg 1$, poderemos utilizar a equação (2.194):

$$d_A = \frac{d_{hor}(t_0)}{z_{ls}}, \text{ assim, } d_A \approx \frac{14000Mpc}{1100} \approx 13Mpc \quad (2.217)$$

Portanto, flutuações de temperatura na superfície de último espalhamento, observadas num ângulo $\delta\theta$, possuem uma dimensão de:

$$l = d_A(\delta\theta) = 13Mpc \left(\frac{\delta\theta}{1rad} \right) = 0,22Mpc \left(\frac{\delta\theta}{1^\circ} \right) \quad (2.218)$$

Medições efetuadas pelo *COBE* mostraram flutuações da ordem de $\delta\theta > 7^\circ$, correspondendo a uma dimensão própria $l > 1,6Mpc$. Considerando a expansão cósmica, teremos, então, $l_0 = l(1+z_{ls}) > 1700Mpc$, maior que os superaglomerados conhecidos atualmente. Experimentos de alta resolução, como MAXIMA, DASI, e BOOMERANG, mediram flutuações correspondentes a $l \approx 0,04Mpc$ no último espalhamento, ou seja, para $l_0 = l(1+z_{ls}) \approx 40Mpc$, da ordem dos atuais superaglomerados de galáxias.

2.19 A Nucleossíntese Primordial

O Universo primordial não se encontrava em equilíbrio termodinâmico. Vários processos estavam acontecendo criando instabilidades. No entanto, para nossos propósitos, vamos considerar que existia um estado de estabilidade relativa.

Vamos, então, comparar a taxa de expansão do Universo com a taxa de interação entre as partículas. Como a temperatura $T \propto 1/a$, teremos: $T/\dot{T} = -H$, logo, a taxa de variação da temperatura se iguala à taxa de expansão cosmológica expressa pelo parâmetro de Hubble.

Caso interações microscópicas que estejam se realizando ocorram em taxas mais rápidas que a expansão cosmológica, serão atingidos estados em equilíbrio térmico aproximado.

Se considerarmos essa taxa de interação por partícula $\Gamma = n\sigma v$, com σ sendo a seção de choque, n , a densidade espacial de partículas, e v , a velocidade quadrática média, a condição de equilíbrio aproximado ocorre para $\Gamma > H$. A taxa de reação apresenta uma proporcionalidade da ordem de $\Gamma \propto T^n$. Assim, o número de interações por partícula, a partir de um determinado instante é (SOUZA, 2004):

$$N_{\text{int}} = \int_t^{\infty} \Gamma(t') dt', \text{ desta maneira, } N_{\text{int}} = (\Gamma/H)_t / (n-2) \quad (2.219)$$

Inicialmente, com as interações entre prótons e elétrons começou a surgir grande quantidade de nêutrons. O equilíbrio estatístico entre prótons e nêutrons se manteve estável através das reações: $p + e^- \rightleftharpoons n + \nu_e$, $p + \bar{\nu}_e \rightleftharpoons n + e^+$ e $n \rightleftharpoons p + e^- + \bar{\nu}_e$ (2.220)

Nessa etapa, o Universo passou a sintetizar elementos leves como o D , ${}^3\text{He}$, ${}^4\text{He}$ e ${}^7\text{Li}$, através de um processo de fusão nuclear, semelhante ao que ocorre no interior das estrelas. No entanto, em virtude da rápida expansão, não chegaram a ser formados elementos pesados ao contrário do que acontece no interior estelar.

2.19.1 Nêutrons e Prótons

Os principais atores da nucleossíntese são nêutrons e prótons. A energia de repouso de um nêutron é ligeiramente superior à do próton:

$$Q_n = (m_n - m_p)c^2 = 1,293MeV \quad (2.221)$$

O nêutron decai via reação:

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \quad (2.222)$$

A taxa de decaimento para o nêutron é: $f = \exp(-t/\tau_n)$, decaindo em $\tau_n = 890s$; sua meia vida é $t_{1/2} = \tau_n \ln 2 = 617s$.

Já que a energia Q_n liberada no decaimento é maior que a energia de repouso do elétron, $0,51 MeV$, parte dela é utilizada para aumentar a energia cinética dos elétrons, e parte se soma à energia do antineutrino do elétron.

Em poucos minutos, a quantidade de nêutrons livres é próxima de zero. Hoje, os encontraremos nos núcleos dos diversos elementos químicos existentes.

Vamos imaginar o estado do Universo para $t=0,1s$. Naquele momento, a temperatura era $T \approx 3 \times 10^{10} K$, e a energia média por fóton, $E_{med} \approx 10MeV$, bem superior à energia de repouso do elétron ou do pósitron, sendo criados pela reação:

$$\gamma + \gamma \rightleftharpoons e^- + e^+ \quad (2.223)$$

Nêutrons e prótons se encontravam em equilíbrio pelas interações:

$$n + \nu_e \rightleftharpoons p + e^-, \quad e^- + n + e^+ \rightleftharpoons p + \bar{\nu}_e \quad (2.224)$$

A relação das densidades de nêutrons e prótons é estabelecida pela equação de Maxwell-Boltzmann:

$$n_n = g_n \left(\frac{m_n kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_n c^2}{kT}\right) \quad \text{e} \quad n_p = g_p \left(\frac{m_p kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_p c^2}{kT}\right) \quad (2.225)$$

E, para os pesos estatísticos de prótons e nêutrons de $g_p = g_n = 2$:

$$\frac{n_n}{n_p} = \left(\frac{m_n}{m_p} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{(m_n - m_p)c^2}{kT}\right), \quad \text{portanto,} \quad \frac{n_n}{n_p} = \exp\left(-\frac{Q_n}{kT}\right) \quad (2.226)$$

Para temperatura da ordem de $T \gg 1,5 \times 10^{10} K$, equivalendo a $t \ll 1s$, o número de nêutrons é, aproximadamente, igual ao de prótons. No entanto, em temperaturas menores que esse limite, seu número cairia exponencialmente, e a relação $n_n/n_p \sim 1/10^6$. Porém, isto não acontece.

Nêutrons e prótons interagem, conforme descrito pela equação (2.224), com neutrinos. Esta interação se faz através da força nuclear fraca. A seção de choque correspondente envolve dependência da temperatura $\sigma_{\omega} \propto T^2$. Uma seção de choque típica para um neutrino interagindo com outra partícula através da força nuclear fraca é:

$$\sigma_{\omega} = 10^{-47} m^2 \left(\frac{kT}{1MeV} \right)^2 \quad (2.227)$$

No Universo dominado pela radiação, a temperatura cai a uma taxa $T \propto a(t)^{-1} \propto t^{-1/2}$, assim, a seção de choque se reduz numa taxa $\sigma_{\omega} \propto t^{-1}$, a densidade de neutrinos cai em uma taxa $n_{\nu} \propto a(t)^{-3} \propto t^{-3/2}$, logo a taxa de interações Γ de neutrinos com prótons e nêutrons diminui: $\Gamma = n_{\nu} \sigma_{\omega} c \propto t^{-5/2}$ (2.228)

O parâmetro de Hubble decresce em taxa consideravelmente menor: $H \propto t^{-1}$. Quando as taxas se igualam, isto é: $\Gamma \approx H$, os neutrinos desacoplam de nêutrons e prótons, “congelando” a razão n_n / n_p , até o próximo decaimento dos nêutrons em $t \sim \tau_n$.

Cálculos da *temperatura de congelamento* a situam em valores bastante altos: $kT_{cong} = 0,8MeV$, ou $T_{cong} = 9 \times 10^9 K$, apontando para um Universo com $t_{cong} \sim 1s$. A relação n_n / n_p congelada, para um tempo $t_{cong} < t \ll \tau_n$, poderá ser escrita:

$$\frac{n_n}{n_p} = \exp\left(-\frac{Q_n}{kT_{cong}}\right) \approx \exp\left(-\frac{1,293MeV}{0,8MeV}\right) \approx 0,2 \quad (2.229)$$

A importante carência de nêutrons justifica a predominância absoluta de prótons na Nucleossíntese Primordial. Nêutrons combinam com prótons mais facilmente que prótons entre si. Na fusão de dois prótons para formar o deutério, um pósitron é emitido, para conservar a carga. Em conseqüência, um neutrino do elétron deverá ser emitido, para que o número quântico seja conservado. A fusão próton-próton se realiza pela reação:



Esta é uma interação que envolve a força nuclear forte, pois neutrinos não são criados, necessitando de seção de choque bem superior às que acontecem em ambiente de força nuclear fraca. As reações próton-próton são mais lentas que as nêutron-próton, já que, além da barreira coulombiana, a seção de choque é bem menor.

$$\text{A reação de fusão nêutron-nêutron é: } n + n \rightarrow D + e^- + \bar{\nu}_e \quad (2.231)$$

O antineutrino do elétron indica que esta interação se realiza em ambiente de força nuclear fraca. Embora, não havendo barreira coulombiana, a taxa da reação acima é muito pequena, tanto pela escassez de nêutrons, quanto pela sua reduzida seção de choque.

Considerando Y_p , a fração de massa bariônica na forma de ${}^4\text{He}$, poderemos calcular o seu valor máximo, supondo que cada nêutron restante após o congelamento próton-nêutron, foi capturado por um núcleo ${}^4\text{He}$. Dada a relação $n_n / n_p = 0,2$, havia, portanto, para cada 2 nêutrons, 10 prótons. A relação Y_p fica então: $Y_{p\text{max}} = 4/12 = 1/3 = 0,33$ (2.232)

Sendo $f \equiv n_n / n_p$ com $0 \leq f \leq 1$, então, $Y_{p\text{max}} = 2f / (1 + f)$. Embora o valor observado para $Y_{p\text{max}} = 0,24$ esteja em desacordo com o teórico, $Y_{p\text{max}} = 0,33$ algumas causas poderão ter contribuído: A Nucleossíntese não teria começado imediatamente após o congelamento, permitindo que os nêutrons decaíssem, reduzindo a relação n_n / n_p ; Alguns nêutrons acabariam em núcleos mais leves que o ${}^4\text{He}$, como o D ou o ${}^3\text{He}$, e, portanto, não estariam contribuindo para Y_p .

2.19.2 A Síntese do Deutério

Ao tempo aproximado de $t \approx 2s$, já ao final do congelamento próton-nêutron, a razão $n_n / n_p = 0,2$. Os neutrinos não estão interagindo mais com a matéria bariônica. Os fótons continuam, ainda, acoplados aos prótons e nêutrons. A Nucleossíntese prossegue, dando origem a núcleos mais pesados. A fusão próton e nêutron forma o deutério:



Na reação acima, a energia liberada e convertida na forma de raios γ , corresponde à energia de ligação do núcleo do deutério:

$$B_D = (m_n + m_p - m_D)c^2 = 2,22\text{MeV} \quad (2.234)$$

Por outro lado, um fóton cuja energia $E_f \geq B_D$, poderá dividir o núcleo de deutério em seus componentes básicos, próton e nêutron.

A recombinação do hidrogênio tem a mesma forma estrutural:



Em ambas as reações vemos que um fóton é emitido. Na formação do deutério, a fusão entre próton e nêutron ocorre através da força nuclear forte, com a liberação de um fóton de raios γ , já na formação do hidrogênio, a força eletromagnética é a responsável pela ocorrência da reação, sendo emitido um fóton ultravioleta. A grande diferença entre essas reações se encontra no montante da energia liberada em forma de fótons: $2,22 \text{ MeV}$ na síntese do deutério, contra $13,6 \text{ eV}$ para o hidrogênio.

As relações $n_D / n_p n_n$, deutério/nêutron, próton e n_D / n_n , deutério/nêutron são expressas:

$$\frac{n_D}{n_p n_n} = 6 \left(\frac{m_n kT}{\pi \hbar^2} \right)^{-3/2} \exp\left(\frac{B_D}{kT}\right), \text{ e } \frac{n_D}{n_n} \approx 6,5\eta \left(\frac{kT}{m_n c^2} \right)^{3/2} \exp\left(\frac{B_D}{kT}\right) \quad (2.236)$$

sendo η a relação bárions/fótons.

A temperatura T_{nuc} da nucleossíntese do deutério poderá ser calculada, considerando em (2.236) $n_D = n_n$:

$$1 \approx 6,5\eta \left(\frac{kT_{nuc}}{m_n c^2} \right)^{3/2} \exp\left(\frac{B_D}{kT_{nuc}}\right) \quad (2.237)$$

Assim, $kT_{nuc} \approx 0,066 \text{ MeV}$, ou seja, $T_{nuc} \approx 7,6 \times 10^8 \text{ K}$, e $t_{nuc} \approx 200 \text{ s}$.

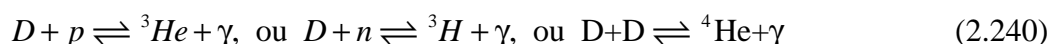
A idade aproximada do Universo é obtida através das relações:

$$T(t) \approx 10^{10} \text{ K} \left(\frac{t}{1 \text{ s}} \right)^{-1/2}, \text{ ou, } kT(t) \approx 1 \text{ MeV} \left(\frac{t}{1 \text{ s}} \right)^{-1/2} \text{ ou, } E_{\text{fóton}}^{\text{média}} \approx 2,7 kT(t) \approx 3 \text{ MeV} \left(\frac{t}{1 \text{ s}} \right)^{-1/2} \quad (2.238)$$

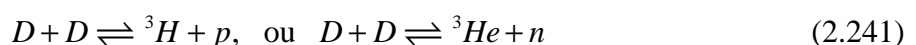
No tempo $t_{nuc} \approx 200 \text{ s}$, a relação n_n / n_p se torna:

$$\frac{n_n}{n_p} \approx \frac{\exp(-200/890)}{5 + [1 - \exp(-200/890)]} \approx 0,15, \text{ e a fração de } {}^4\text{He}: Y_p = \frac{2 \times 0,15}{1 + 0,15} = 0,26 \quad (2.239)$$

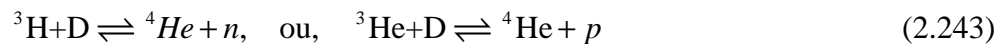
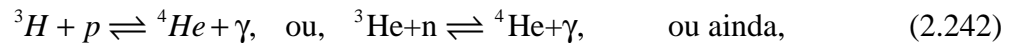
A concentração de deutério, n_D / n_n , tende a alterar-se no tempo, já que outras interações passam a existir. Assim, poderemos observar reações do tipo:



Na fusão de dois núcleos de deutério, a maior probabilidade de ocorrência acontece com:



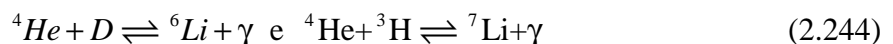
Entretanto, nem 3H , nem 3He estão presentes na nucleossíntese em quantidade apreciável. Isto acontece porque eles são convertidos em 4He por reações do tipo:



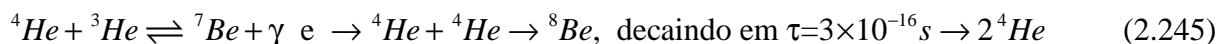
Estas interações acontecem em ambiente de força nuclear forte (não envolvem neutrinos), possuindo, portanto, grandes seções de choque e altas taxas de reação.

Assim, D , 3H , e 3He são rapidamente convertidos em 4He .

O 4He não reage facilmente com prótons e nêutrons, para formar o 5He ou o 5Li . Porém dois isótopos estáveis de lítio são originados:



Também, uma pequena quantidade de 7Be e 8Be é sintetizada:



Num tempo $t \sim 10 \text{ min}$, com a temperatura tendo caído para $T \sim 4 \times 10^8 K$, a nucleossíntese cessa. A maioria dos bárions está na forma de prótons livres ou em núcleos de 4He . O resíduo de nêutrons decai em prótons. Pequenas quantidades de D , 3He e 3H ainda restarão, como resultado de uma nucleossíntese incompleta.

A quantidade de deutério tende a diminuir com o tempo. Quando uma nuvem de gás colapsa para formar uma estrela, a primeira reação é a que funde deutério em hélio. A relação deutério/hidrogênio $D/H \approx (3,0 \pm 0,4) \times 10^{-5}$, corresponde a uma relação bárion/fóton $\eta = (5,5 \pm 0,5) \times 10^{-10}$, ou $n_{\text{bárião},0} = \eta n_{\gamma,0} = 0,23 \pm 0,02 m^{-3}$.

Já que a maioria de bárions é constituída por prótons, poderemos escrever:

$$\varepsilon_{\text{bárião},0} = (m_p c^2) n_{\text{bárião},0} = 210 \pm 20 \text{ MeV} m^{-3} \quad (2.246)$$

O parâmetro de densidade dos bárions será então:

$$\Omega_{\text{bárião},0} = \frac{\varepsilon_{\text{bárião},0}}{\varepsilon_{c,0}} = \frac{210 \pm 20 \text{ MeV} m^{-3}}{5200 \pm 1000 \text{ MeV} m^{-3}} = 0,04 \pm 0,01 \quad (2.247)$$

2.19.3 A Assimetria Matéria Antimatéria

Um dos importantes enigmas com que nos defrontamos, ainda, é a significativa divergência entre matéria e a quantidade de antimatéria.

Antiprótons, contendo dois quarks *anti-up* e um *anti-down*, antinêutrons, possuindo um quark *anti-up* e dois *anti-down*, embora previstos em teoria, são raríssimos.

Prótons e nêutrons predominam no Universo.

Na nucleossíntese, a densidade de antibárions, era insignificante comparada à densidade de bárions, e a presença destes, muito pequena em relação à de fótons: $n_{antibar} \ll n_{bar} \ll n_\gamma$. Durante os primeiros microssegundos do Universo, numa temperatura $kT \approx 150 \text{ MeV}$, quarks e antiquarks eram, constantemente, criados e destruídos:



O processo que levou à tamanha assimetria é, ainda, totalmente desconhecido.

Supõe-se tenha havido leve assimetria nos momentos iniciais do Universo, da forma:

$$\delta_q \equiv \frac{n_q - n_{\bar{q}}}{n_q + n_{\bar{q}}} \ll 1 \quad (2.249)$$

À medida que o Universo se expandiu, a sopa de quarks esfriou, impedindo a criação de mais pares quarks-antiquarks. Como, em hipótese, haveria um pequeno excesso de quarks, o resíduo de quarks teria uma densidade:

$$\delta_q \sim \frac{n_q}{n_\gamma} \quad (2.250)$$

2.20 A Inflação

Ao estudarmos o modelo de *Big-Bang*, nos deparamos com três importantes problemas.

Primeiramente, a questão da *planaridade*: o Universo é, praticamente, plano hoje, e foi bem mais no passado.

Outro problema é o do *horizonte*: o Universo é isotrópico e homogêneo atualmente, embora não houvesse contato causal entre dois pontos distantes no passado.

O último problema é o do *monopolo*: aparentemente, não existem monopolos magnéticos

Vamos, portanto, estudar com mais detalhes cada uma destas questões.

2.20.1 O Problema da Planaridade

A partir das equações de Friedmann:

$$1 - \Omega(t) = -\frac{\kappa c^2}{R_0^2 a(t)^2 H(t)^2}, \quad \text{e} \quad 1 - \Omega_0 = -\frac{\kappa c^2}{R_0^2 H_0^2} \quad (2.251)$$

Poderemos escrever o parâmetro de densidade em função do tempo:

$$1 - \Omega(t) = \frac{H_0^2 (1 - \Omega_0)}{H(t)^2 a(t)^2}, \quad (2.252)$$

Para um Universo dominado pela radiação e matéria, em $t \ll t_{m\Lambda} \approx 10 \text{ Ga}$:

$$\frac{H(t)^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_{r,0}}{a^4} + \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} \quad (2.253)$$

Assim,

$$1 - \Omega(t) = \frac{(1 - \Omega_0) a^2}{\Omega_{r,0} + a \Omega_{m,0}} \quad (2.254)$$

Observações de supernova tipo 1a e medições da anisotropia da radiação de fundo revelam um valor:

$$|1 - \Omega_0| \leq 0,2 \quad (2.255)$$

Perguntamo-nos por que $\Omega_0 \approx 1$?

O desvio no parâmetro de densidade do valor ~ 1 foi, gradualmente, crescendo no tempo: na época em que a radiação predominava:

$$|1 - \Omega|_r \propto a^2 \propto t \quad (2.256)$$

No domínio da matéria:

$$|1 - \Omega|_m \propto a \propto t^{2/3} \quad (2.257)$$

Por outro lado, se retrocedermos, profundamente, no espaço e no tempo, deveremos encontrar na época do equilíbrio matéria-radiação:

$$|1 - \Omega_{r,m}| \leq 2 \times 10^{-4} \quad (2.258)$$

Na nucleossíntese:

$$|1 - \Omega_{mic}| \leq 3 \times 10^{-14} \quad (2.259)$$

Já, no tempo de Planck:

$$|1 - \Omega_p| \leq 1 \times 10^{-60} \quad (2.260)$$

Percebe-se, então, extrema planaridade no princípio do Universo. Uma parte em 10^{60} . E, caso não fosse desta forma, já poderia ter colapsado em um *Big-Crunch*, ou congelado totalmente no *Big-Chill*.

2.20.2 O Problema do Horizonte

Por que o Universo é isotrópico e homogêneo em grandes escalas?

Este é um resultado inesperado no modelo do *Big-Bang*. Vamos, para nossa conveniência, considerar dois pontos opostos na superfície de último espalhamento. A distância própria atual àquela superfície é:

$$d_p(t_0) = c \int_{t_{ue}}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = 0,98 d_{hor}(t_0) \quad (2.261)$$

Portanto, os pontos estarão separados por uma distância própria de $1,96 d_{hor}(t_0)$. E como esta distância é superior à do horizonte, estarão desconectados. Entretanto, sua temperatura difere somente de uma parte em 10^5 . Por quê?

No cenário do *Big-Bang* o Universo era dominado pela matéria ao tempo do último espalhamento. A distância do horizonte naquele momento era de aproximadamente:

$$d_{hor}(t_{ue}) = 2 \frac{c}{H(t_{ue})} \quad (2.262)$$

A distância de Hubble na época do último espalhamento era de: $c / H(t_{ue}) \approx 0,2$ Mpc. Portanto, a distância do horizonte: $d_{hor}(t_{ue}) \approx 0,4$ Mpc. Assim, pontos com distância maior que 0,4 Mpc não possuíam contato causal nesse cenário. A distância de

diâmetro angular para a superfície de último espalhamento é de $d_A \approx 13$ Mpc . A distância do horizonte, então, corresponde a: $\theta_{hor} = \frac{d_{hor}(t_{ue})}{d_A} \approx \frac{0,4 \text{ Mpc}}{13 \text{ Mpc}} \approx 0,03 \text{ rad} \approx 2^\circ$ (2.263)

conforme vemos hoje. E, por conseguinte, pontos na superfície de último espalhamento separados por um ângulo maior que $\sim 2^\circ$ estarão desconectados.

O que terá causado a grande homogeneidade?

Que fatores fizeram com que o Universo apresentasse surpreendente isotropia?

2.20.3 O Problema do Monopolo

A inexistência de monopolos magnéticos se constitui em outro enigma a ser revelado.

Reside, na unificação das forças da natureza: gravitacional, eletromagnética, nuclear fraca e nuclear forte, a expectativa de equacionamento deste problema que tem inquietado cientistas há décadas. Einstein dedicou trinta anos de sua vida na busca de uma teoria unificatória.

Uma importante contribuição, neste campo, foi apresentada pelos físicos Steven Weinberg (1933), Abdus Salam (1926-1996) e Sheldon Glashow (1932).

Eles demonstraram que para uma partícula com energia da ordem de $E_{ef} \sim 1 \text{ TeV}$, correspondendo a uma temperatura de $T_{ef} = E_{ef} / k \sim 10^{16} \text{ K}$, as forças eletromagnética e nuclear fraca são unificadas sob a forma da *força eletrofraca*.

A essa temperatura, a idade do Universo era: $t_{ef} \sim 10^{-12} \text{ s}$, e as forças fundamentais, apenas três.

A unificação da força eletrofraca com a nuclear forte, é o passo seguinte aguardado pelos físicos de partículas. A *GUT (Grand Unified Theory)* prevê que numa energia $E_{GUT} \sim 10^{12} \rightarrow 10^{13} \text{ TeV}$, essas forças seriam unificadas. Tal energia equivale a uma temperatura $T_{GUT} \sim 10^{28} \text{ K}$, numa idade para o Universo de $t_{GUT} \sim 10^{-36} \text{ s}$.

Finalmente, a *TOE (Theory of Everything)* reuniria a Força Gravitacional com a *GUT*, no nível da energia de Planck: $E_p \sim 10^{16} \text{ TeV}$.

Para temperaturas menores que T_{GUT} , prevê a teoria que o Universo passe por uma transição de fase, associada à perda de simetria, originando a falhas conhecidas como defeitos

topológicos, que agem como monopolos magnéticos. A densidade de monopolos magnéticos criados seria da ordem de:

$$n_M(t_{GUT}) \sim 1/(2ct_{GUT})^3 \sim 10^{82} m^{-3}. \quad (2.264)$$

$$\text{E a densidade de energia: } \epsilon_M(t_{GUT}) \sim (m_M c^2) n_M \sim 10^{94} \text{ TeV} m^{-3} \quad (2.265)$$

A densidade de energia da radiação naquela época era:

$$\epsilon_\gamma \approx \alpha T_{GUT}^4 \sim 10^{104} \text{ TeV} m^{-3} \quad (2.266)$$

Assim, os monopolos não poderiam ter desaparecido de um Universo dominado pela radiação. No entanto, sendo massivos, rapidamente, se tornariam não relativísticos, com densidade de energia $\epsilon_M \propto a^{-3}$, enquanto que a densidade da radiação teria uma relação $\epsilon_\gamma \propto a^{-4}$. Os monopolos magnéticos dominariam, caso o fator de escala tivesse um crescimento significativo.

Caso tenham existido, onde se encontrarão?

2.20.4 A Inflação Como Resposta

De forma hipotética, a inflação se caracteriza pela expansão, extraordinariamente, acelerada do Universo. Em conseqüência, o fator de escala possuiria uma aceleração $\ddot{a} > 0$.

Percebemos, na equação da aceleração:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\epsilon + 3P), \quad (2.267)$$

que para que $\ddot{a} > 0$, $P < -\epsilon/3$. Ou seja, o parâmetro da equação de estado $\omega < -1/3$. Tratar-se-ia de um Universo dominado pela constante cosmológica $\Lambda_i > 0$. A equação da aceleração

$$\text{seria, nesse caso, } \frac{\ddot{a}}{a} = \frac{\Lambda_i}{3} > 0 \quad (2.268)$$

E a equação de Friedmann, seria:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\Lambda_i}{3} \quad (2.269)$$

Assim, a constante de Hubble e o fator de escala desse período serão:

$$H_i = (\Lambda_i / 3)^{1/2}, \quad e, \quad a(t) \propto e^{H_i t} \quad (2.270)$$

Vamos supor que houve um crescimento exponencial quando a radiação era dominante no Universo, entre os tempos t_i (*início*) e t_f (*final*). O fator de escala seria então:

$$a(t) = \begin{cases} (t/t_i)^{1/2} & t < t_i \\ e^{H_i(t-t_i)} & t_i < t < t_f \\ e^{H_i(t_f-t_i)} (t/t_f)^{1/2} & t > t_f \end{cases} \quad (2.271)$$

Logo, entre t_i (*início*) e t_f (*final*), o fator de escala aumentou exponencialmente:

$$\frac{a(t_f)}{a(t_i)} = e^N \quad \rightarrow \quad N \equiv H_i (t_f - t_i) \quad (2.278)$$

O modelo atual para a inflação situa o tempo $t_i \approx t_{GUT} \approx 10^{-36} s$. Por conseguinte, o parâmetro de Hubble $H_i \approx 10^{36} s^{-1}$. No caso particular em que $N \sim 100$, $(t_f - t_i) = 10^{-34} s$:

$$\frac{a(t_f)}{a(t_i)} \sim e^{100} \sim 10^{43} \quad (2.279)$$

Para que se produzisse tal expansão, a constante cosmológica deveria ter um valor significativamente maior do que o atualmente conhecido. Portanto:

$$\varepsilon_{\Lambda_i} = \frac{c^2}{8\pi G} \Lambda_i = \frac{3c^2}{8\pi G} H_i^2 \sim 10^{105} TeVm^{-3}, \quad (2.280)$$

enquanto que $\varepsilon_{\Lambda,0} \approx 0,7\varepsilon_{c,0} \approx 4 \times 10^{-3} TeVm^{-3}$.

Uma vez tendo existido a inflação, de que forma poderá ter contribuído no equacionamento dos problemas cosmológicos enumerados anteriormente?

A equação (2.251) descrevendo o comportamento de $\Omega(t)$ poderá ser reescrita:

$$|1 - \Omega(t)| = \frac{c^2}{R_0^2 a(t)^2 H(t)^2}, \quad \kappa \neq 0 \quad (2.281)$$

Caso o Universo esteja dominado por um simples componente, cuja equação de estado seja $P \neq -\varepsilon$, e, portanto, $\omega \neq -1$, então:

$$a \propto t^{2/3(1+\omega)}, \quad H \propto t^{-1} \quad \text{e} \quad |1-\Omega(t)| \propto t^{2(1+3\omega)/3(1+\omega)} \quad (2.282)$$

Assim, se $\omega < -1/3$, $\Omega(t)$ aproxima-se da unidade.

Já, na eventualidade em que o Universo estiver se expandindo exponencialmente:

$$|1-\Omega(t)| \propto e^{-2H_i t}, \quad (2.283)$$

$\Omega(t)$, convergirá, também, de forma exponencial à unidade.

Se tomarmos o fator de escala $a(t)$, entre o início t_i e o final t_f : $a(t) \propto e^{H_i(t_f-t_i)}$,

e a relação (2.278): $\frac{a(t_f)}{a(t_i)} = e^N$, teremos: $|1-\Omega(t_f)| \sim e^{-2N} \sim e^{-200} \sim 10^{-87}$.

Ou, ainda, supondo que em t_i o Universo fosse fortemente curvo, com $|1-\Omega(t_i)| \sim 1$, e para $N \sim 100$, podemos escrever:

$$|1-\Omega(t_f)| \propto \frac{1}{a(t_f)^2}, \quad \text{e} \quad |1-\Omega(t_i)| \propto \frac{1}{a(t_i)^2}, \quad \text{então:} \quad (2.284)$$

$$\frac{|1-\Omega(t_f)|}{|1-\Omega(t_i)|} \propto \frac{a(t_i)^2}{a(t_f)^2} = e^{-2N} \rightarrow |1-\Omega(t_f)| \sim e^{-2N} \sim e^{-200} \sim 10^{-87} \quad (2.285)$$

Após o período inflacionário, $\Omega(t_f) \sim 1$, revelando um Universo, extremamente, plano, consistente com as atuais observações.

Acima, foi esclarecido o problema da planaridade. Quanto ao problema do horizonte, a inflação, também, consegue gerar uma justificativa convincente:

$$\text{Em um tempo } t_i, \text{ a distância do horizonte é: } d_{hor}(t_i) = c \int_0^{t_i} \frac{dt}{a(t)} \quad (2.286)$$

Neste mesmo tempo, o fator de escala $a(t) = \left(\frac{t}{t_i}\right)^{2/3(1+\omega)}$. E, como no período

imediatamente anterior ao inflacionário, a radiação era predominante, com $\omega=1/3$, a

$$\text{distância do horizonte} \quad d_{hor}(t_i) = c \int_0^{t_i} \frac{dt}{\left(\frac{t}{t_i}\right)^{1/2}} = 2ct_i \quad (2.287)$$

Ao final desse período, o fator de escala para um tempo $t_i \leq t \leq t_f$ será, conforme visto em (2.271): $a(t) = e^{H_i(t-t_i)}$, e a distância do horizonte será:

$$d_{hor}(t_f) = \int_0^{t_f} \frac{cdt}{a(t)} = \int_0^{t_i} \frac{cdt}{a(t)} + \int_{t_i}^{t_f} \frac{cdt}{a(t)} = 2ct_i + \int_{t_i}^{t_f} \frac{cdt}{e^{H_i(t-t_i)}}, \text{ assim,} \quad (2.288)$$

$$d_{hor}(t_f) = 2ct_i - c \left[\frac{e^{-H_i(t-t_i)}}{H_i} \right]_{t_i}^{t_f} = 2ct_i - c \left[\frac{1}{H_i e^{H_i(t_f-t_i)}} - \frac{1}{H_i} \right] \approx 2ct_i e^N + c \left[\frac{e^N}{H_i} \right], \text{ ou,} \quad (2.289)$$

$$d_{hor}(t_f) \approx 3ct_i e^N \approx 2 \times 10^{16} m \approx 0,8 pc \approx 2,61 al \quad (2.290)$$

A distância do horizonte em t_i era:

$$d_{hor}(t_i) = 2ct_i \approx 6 \times 10^{-28} m \approx 6 \times 10^{-18} \text{ \AA} \quad (2.291)$$

Portanto, no período inflacionário, a distância do horizonte aumentou $3,33 \times 10^{43}$ vezes, num tempo da ordem de $10^{-34} s$.

Com este crescimento extraordinário, toda a superfície de último espalhamento estaria em contato causal.

E por último, o problema dos monopolos. Como a solução inflacionária resolveria esta questão?

Se esses monopolos magnéticos foram criados no período em questão, sua densidade ficou muito reduzida. Enquanto que o Universo se expandia de forma exponencial, com $a \propto e^{H_i t}$, a densidade de monopolos decrescia, igualmente, de forma exponencial: $n_M \propto e^{-3H_i t}$.

Deste modo, sua aparente inexistência nos dias atuais, estaria justificada.

2.21 Formação de Estruturas

Como se formam as grandes estruturas do Universo, galáxias, aglomerados, superaglomerados?

Que mecanismos atuam em sua formação?

Qual a importância das flutuações de densidade?

Estas questões nos conduzem ao cenário em que se realizam as transformações por que tem passado o Cosmo.

Sabemos que flutuações de densidade ocorreram no tempo do último espalhamento, pelas informações que nos chegam através da radiação de fundo.

Assim, quando o Universo era dominado pela matéria, as regiões mais densas se expandiam mais lentamente, e, caso sua densidade fosse expressiva, colapsariam gerando os diversos objetos cósmicos que conhecemos.

Um mecanismo básico, responsável pela geração de grandes estruturas, é a *instabilidade gravitacional*.

2.21.1 Instabilidade Gravitacional

Vamos considerar um determinado volume do Universo cuja densidade de energia é $\varepsilon(\vec{r}, t)$. Portanto, a densidade de energia média, é:

$$\bar{\varepsilon}(t) = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon(\vec{r}, t) d^3r \quad (2.292)$$

O volume V deverá possuir dimensão compatível com as grandes estruturas existentes no Universo.

Define-se *flutuação de densidade* o número adimensional:

$$\delta(\vec{r}, t) \equiv \frac{\varepsilon(\vec{r}, t) - \bar{\varepsilon}(t)}{\bar{\varepsilon}(t)} \quad (2.293)$$

Caso $\delta < 0$, a região observada será pouco densa; se $\delta > 0$, a região será, por conseguinte, mais densa.

Numa região do Universo, aproximadamente, estática e homogênea, consideremos uma esfera de raio R dotada de pequena massa. A densidade na esfera é $\bar{\rho}(1 + \delta)$, com $\delta \ll 1$. Se δ é uniforme na esfera, então a aceleração gravitacional na superfície, devida ao excesso de massa é:

$$\ddot{R} = -\frac{G(\Delta M)}{R^2} = -\frac{G}{R^2} \left(\frac{4\pi}{3} R^3 \bar{\rho} \delta \right), \quad \text{ou,} \quad \frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G \bar{\rho}}{3} \delta(t) \quad (2.294)$$

Para $\delta > 0$, a esfera colapsará, já que $\ddot{R} < 0$.

A massa da esfera permanecerá constante durante o colapso. Deste modo, se:

$$M = \frac{4\pi}{3} \bar{\rho} [1 + \delta(t)] R(t)^3, \quad (2.295)$$

poderemos escrever:

$$R(t) = R_0 [1 + \delta(t)]^{-1/3}, \text{ com, } R_0 \equiv \left(\frac{3M}{4\pi\rho} \right)^{1/3}, \quad (2.296)$$

e, para $\delta \ll 1$:

$$R(t) \approx R_0 \left[1 - \frac{1}{3} \delta(t) \right], \text{ assim sendo,} \quad (2.297)$$

$$\ddot{R} \approx -\frac{1}{3} R_0 \ddot{\delta}, \text{ logo: } \frac{\ddot{R}}{R} \approx -\frac{1}{3} \ddot{\delta} \quad (2.298)$$

De (2.294) e (2.298) obtém-se a relação:

$$\ddot{\delta} = 4\pi G \bar{\rho} \delta, \quad (2.299)$$

com solução:

$$\delta(t) = A_1 e^{t/t_{din}} + A_2 e^{-t/t_{din}} \quad (2.300)$$

sendo t_{din} , o tempo dinâmico para o colapso, dado por:

$$t_{din} = \frac{1}{(4\pi G \bar{\rho})^{1/2}} = \left(\frac{c^2}{4\pi G \bar{\epsilon}} \right)^{1/2} \quad (2.301)$$

A aceleração da gravidade tende a provocar pequenas flutuações na densidade do meio, crescendo exponencialmente com o tempo.

2.21.2 O Comprimento de Jeans

Um gás não relativístico tem o parâmetro ω da equação de estado da forma:

$$\omega \approx \frac{\kappa T}{\mu c^2} \quad (2.302)$$

sendo T a temperatura do gás e μ , a massa média por partícula. Por conseguinte, $\omega > 0$, fazendo com que a pressão, apenas, se aproxime de zero, para $T \rightarrow 0$.

Quando um volume de gás é comprimido pela força da gravidade, há o aparecimento de um gradiente de pressão contrabalançando este efeito. O equilíbrio hidrostático, entretanto, não pode de ser atingido.

Considerando uma esfera densa, de raio R , em meio despressurizado, o tempo dinâmico para o colapso seria:

$$t_{din} \sim \frac{1}{(4\pi G\bar{\rho})^{1/2}} \sim \left(\frac{c^2}{4\pi G\bar{\epsilon}} \right)^{1/2} \quad (2.303)$$

Por outro lado, no caso em que a pressão é diferente de zero, o colapso gravitacional será contido por um importante gradiente de pressão. Este gradiente ocorre em um tempo inversamente proporcional à velocidade do som no gás:

$$t_{pre} \sim \frac{R}{2\pi c_s}, \quad (2.304)$$

sendo c_s , a velocidade do som:

$$c_s = c \left(\frac{dP}{d\epsilon} \right)^{1/2} = \sqrt{\omega} c \quad (2.305)$$

Para que não ocorra o colapso, será necessário que o tempo para o gradiente de pressão seja menor que o tempo dinâmico: $t_{pre} < t_{din}$ (2.306)

Comparando (2.303) com (2.304), poderemos escrever:

$$R < 2\pi c_s t_{din} = \lambda_J = 2\pi c_s \left(\frac{c^2}{4\pi G\bar{\epsilon}} \right)^{1/2} = c_s \left(\frac{\pi c^2}{G\bar{\epsilon}} \right) \quad (2.307)$$

Reportamo-nos à variável acima descrita, λ_J , por *Comprimento de Jeans*, homenagem ao astrofísico inglês James Hopwood Jeans (1877-1946).

Regiões densas, maiores do que λ_J colapsarão, ao passo que, se menores, apenas, oscilarão, sob a forma de ondas de som estáveis. Outra expressão para λ_J :

$$\lambda_J = \left(\frac{15k_B T}{4\pi G m \rho} \right)^{1/2} \quad (2.308)$$

sendo, T , a temperatura, ρ , a densidade e m , a massa das partículas componentes do gás.

Vamos, agora, verificar como se comportam as flutuações de densidade em escala cosmológica, com oscilações de amplitude $|\delta| \ll 1$, em um Universo espacialmente plano, com a energia média $\bar{\epsilon}$. Tomemos o tempo de Hubble como referência:

$$H^{-1} = \left(\frac{3c^2}{8\pi G\bar{\epsilon}} \right)^{1/2} \quad (2.309)$$

Ao confrontarmos este resultado com a equação (2.301), percebemos que o tempo de Hubble é comparável ao tempo dinâmico:

$$H^{-1} = \left(\frac{3}{2} \right)^{1/2} t_{din} \approx 1,22 t_{din} \quad (2.310)$$

O comprimento de Jeans em um Universo que se expande é:

$$\lambda_J = 2\pi c_s t_{din} = 2\pi \left(\frac{2}{3} \right)^{1/2} \frac{c_s}{H} = 2\pi \left(\frac{2}{3} \right)^{1/2} \sqrt{\omega} \frac{c}{H} \quad (2.311)$$

No domínio da radiação, com $\omega = 1/3$, e velocidade do som $c_s = c/\sqrt{3} = 0,58c$, o comprimento de Jeans será:

$$\lambda_J = \frac{2\pi\sqrt{2}}{3} \frac{c}{H} \approx 3,0 \frac{c}{H} \quad (2.312)$$

Na época do desacoplamento, o comprimento de Jeans era de:

$$\lambda_J (antes) \approx 3c / H(z_{des}) \approx 0,6 Mpc \quad (2.313)$$

A massa de Jeans, M_J , definida como sendo a massa contida em uma esfera com raio igual a λ_J é:

$$M_J \equiv \rho_{bar} \left(\frac{4\pi}{3} \lambda_J^3 \right) \quad (2.314)$$

Deste modo, imediatamente antes do desacoplamento, a massa de Jeans era:

$$M_J (antes) \approx 5,0 \times 10^{-19} \text{ kg m}^{-3} \left(\frac{4\pi}{3} \right) (1,9 \times 10^{22} \text{ m})^3 \approx 7 \times 10^{18} M_{\odot}, \quad (2.315)$$

após o desacoplamento, a velocidade do som na matéria bariônica era:

$$c_s (bar) \approx \left(\frac{kT}{mc^2} \right)^{1/2} c \approx \left(\frac{0,26}{1140 \times 10^6 \text{ eV}} \right)^{1/2} c \approx 1,5 \times 10^{-5} c \quad (2.316)$$

Desta forma, o comprimento de Jeans decresceu por um fator F :

$$F = \frac{c_s(\text{bar})}{c_s(\text{fóton})} \approx \frac{1,5 \times 10^{-5}}{0,58} \approx 2,6 \times 10^{-5} \quad (2.317)$$

A massa de Jeans, M_J , decresceu proporcionalmente a F^3 :

$$M_J(\text{depois}) = F^3 M_J(\text{antes}) \approx 1 \times 10^5 M_\odot \quad (2.318)$$

Observamos, portanto, que após o desacoplamento houve um extraordinário decréscimo na massa de Jeans, levando-a ao nível de galáxias anãs.

Este momento marca um importante período na formação de estruturas cósmicas, quando, de escalas ao nível de superaglomerados, as perturbações na densidade de matéria conduziram à formação de regiões notavelmente menores.

E, à medida que a temperatura caiu, a massa de Jeans reduziu-se ainda mais.

2.22 A Energia Escura

Supernovas, ultimamente, têm sido utilizadas como padrões na observação do Cosmo. Quando uma supernova explode, seu brilho é tão intenso quanto o de centenas de bilhões de estrelas, ou seja, de uma galáxia inteira.

Este processo explosivo decorre de importantes desequilíbrios existentes em uma estrela nos estágios finais de sua evolução.

Neste momento, ela é composta por um caroço e por uma envoltória com elementos leves.

O caroço, tendo massa superior ao limite de Chandrasekhar¹⁶, se contrai e essa contração provoca o aumento da temperatura e densidade do sistema, deixando-o em condições propícias para que se iniciem reações ultra-rápidas (como a captura eletrônica).

A estrela estará na iminência de colapso. Esta fase é conhecida como *pré-supernova*.

Os estágios seguintes ainda não estão suficientemente conhecidos. Vamo-nos deter num dos prováveis.

A estrela entra em colapso, induzido por reações de captura eletrônica, resultando em rápida neutronização do material estelar, com abundante emissão de nêutrons livres.

¹⁶ O **Limite de Chandrasekhar** representa a máxima massa possível, para uma estrela do tipo anã branca (um dos estágios finais das estrelas que consumiram toda a sua energia), suportada pela pressão da degeneração de elétrons, e é, aproximadamente 3×10^{30} kg, cerca de 1,44 vezes a massa do Sol.

Assim, no centro da estrela, há a formação de um caroço de nêutrons livres, e, em decorrência da queda das camadas externas sobre as internas, formam-se ondas de choque, tendo como consequência a reversão do movimento implosivo em explosivo.

Haverá extraordinária liberação de energia, da ordem de 10^{43} a 10^{45} J, propiciando uma luminosidade de cerca de $10^{10} L_{\odot}$.

Entretanto, este fenômeno é de pouca duração. Dentro de algumas semanas, sua luminosidade se reduzirá substancialmente. Ao monitorá-lo, os astrônomos poderão determinar seu tipo, estabelecendo a luminosidade, e, a partir daí, calculando a distância da galáxia em que se encontra com precisão.

A *Supernova Tipo Ia*, dada suas características peculiares, é utilizada de modo preferencial. Trata-se de um sistema binário composto por uma estrela anã branca¹⁷ e outra estrela da seqüência principal, geralmente, uma gigante vermelha. A anã branca, possuindo maior massa que a sua parceira, atrai o gás que a envolve. Ao superar o *Limite de Chandrasekhar*, a anã branca inicia o colapso, provocando o aumento da temperatura do caroço, até ser atingido o ponto em que ocorre a fusão nuclear, com a consequente liberação de quantidades fantásticas de energia, da ordem de $1-2 \times 10^{44}$ J.

Como sua luminosidade é conhecida, visto também sabermos sua massa, torna-se possível determinar com precisão sua distância até nós.

Comparações com o *redshift* permitirão avaliar a taxa de expansão do Universo, já que o parâmetro de Hubble é dado por:

$$H(t) = \frac{v}{d} = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \quad (2.318a)$$

Em 1997, observações levadas a efeito no Observatório Inter-Americano de Cerro Tololo, passaram a ser divulgadas internacionalmente. Uma equipe de astrônomos liderada por Saul Perlmutter (1959), do *Lawrence Berkeley Laboratory in California*, estudou o espectro de supernovas distantes 5 milhões de anos-luz da Terra, chegando à conclusão de que a taxa de expansão do Universo estaria aumentando. Alguma energia desconhecida deveria estar causando este resultado.

Michael Turner, em 1998, chamou-a de Energia Escura.

¹⁷ **Anã Branca** é o objeto celeste que resulta do processo evolutivo de estrelas com até $10 M_{\text{sol}}$. Não são massivas o suficiente para que o aumento de sua temperatura, por eventual colapso, possa fundir o carbono em reações de nucleossíntese. O colapso gravitacional de uma anã branca é barrado, apenas, pela pressão de degenerescência eletrônica.

Uma das propostas para esta energia exótica é que seja um potencial repulsivo identificável com a constante cosmológica proposta por Einstein com parâmetro de densidade Ω_Λ .

2.22.1 O Que É a Constante Cosmológica Ω_Λ ?

Ainda não existe uma explicação satisfatória para essa constante.

A energia do vácuo é a mais aceita como responsável pela expansão acelerada do Cosmo. Uma das razões, é que promove uma aproximação da Teoria da Relatividade Geral com a física de partículas. É um parâmetro originário da Relatividade Geral, enquanto que a energia do vácuo é puramente quântica.

A questão permanece:

Que partículas poderão favorecer este mecanismo?

2.22.2 A Energia do Vácuo

Trata-se de uma energia de fundo existente no espaço, independentemente, da presença de matéria. É deduzida a partir do conceito de partículas virtuais, e do princípio da incerteza de Werner Heisenberg,

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar / 2 \quad (2.319)$$

Seus efeitos são observados em diversos fenômenos: Efeito Casimir, ligações de Van-Der Waals, emissão espontânea, etc.

A teoria quântica de campos nos assegura que regiões energéticas deverão ser quantizadas. Portanto, cada ponto do espaço poderá ser entendido como pertencente a uma vastíssima rede constituída por osciladores harmônicos interconectados.

Vibrações nessa rede serão governadas pelas apropriadas equações de onda. Todo o conjunto se comportará como um oscilador harmônico, e assim, excitações corresponderão a partículas elementares previstas pela física de partículas. Na média, todas as propriedades dessas partículas se cancelarão. Apenas o valor esperado para a energia do vácuo não se

cancelará:

$$E = \frac{1}{2} \hbar \omega \quad (2.320)$$

A soma sobre todos os possíveis osciladores, conduzirá a uma energia infinita. Este é um problema que ainda está sendo tratado pela teoria da renormalização.

O efeito Casimir, proposto pelo físico holandês Hendrik Casimir (1909-2000), em 1948, é outra forma de explicar a energia do vácuo.

Colocando-se, no vácuo, duas placas de metal muito próximas entre si, pares de partículas virtuais estarão se formando e se aniquilando tanto fora das placas quanto entre as mesmas. Essas partículas possuem comprimentos de onda diversos, chamados de comprimentos de onda de Schrödinger. As partículas, cujo número de comprimentos de onda entre as placas não são inteiros, não existirão entre as mesmas, provocando uma pressão menor entre as placas do que fora delas. Por conseguinte, a pressão do vácuo entre as placas será menor que a pressão fora das mesmas, e, em consequência, elas se aproximarão. É um efeito quântico.

Quanto maior for o Universo, maior será a energia do vácuo, ao contrário da matéria normal, cuja densidade vai se tornando diluída, à proporção em que o Universo se expande.

2.23 Conjeturas

- O Universo poderia ter a forma de uma galáxia que se expande. Esta característica não foi até agora notada pelo fato de o horizonte observacional nos impedir;
- Esse *Universo-Galáctico* apresentaria o formato espiral, elíptico ou mesmo irregular, existindo maior probabilidade de que seja na forma espiral, já que esta é a aparência predominante das galáxias no Universo conhecido;
- A Matéria Escura seria, provavelmente, melhor entendida em um Universo assim estruturado.

3 CONCLUSÕES

Pudemos observar, ao longo deste trabalho, a grandiosa jornada empreendida pela humanidade até aqui.

Principiando das cavernas, quando seu principal anseio era a obtenção de alimentos e a manutenção de sua integridade física, vimos, já ao início deste escrito, numa época bem mais recente, por volta do século VIII a.C., a preocupação de filósofos gregos quanto ao entendimento da natureza, impondo vínculos e ajustes às incipientes teorias e crenças conhecidas.

Posteriormente, acompanhamos esta marcha de três milênios até nossos dias.

E, temos o privilégio de sermos testemunhas do excepcional desenvolvimento científico alcançado pelo espécime humano.

Dada esta progressão com características geométricas, estamos convencidos de que bem antes que o próximo século se inicie, deveremos ter desvendado alguns dos grandes mistérios que ainda nos inquietam.

Desta forma, é, facilmente, previsível que questionamentos sobre a *Matéria Escura*, *Energia Escura*, a ocorrência, ou não de um *Big-Bang*, ou, mesmo, se nos defrontaremos com o Apocalipse na forma de um *Big-Crunch*, deverão estar completamente respondidos.

Questões maiores como: *Quem somos? De onde viemos? Para onde iremos? continuarão* a exigir considerável esforço por parte do ser humano nesta sua permanente caminhada em direção a um futuro provido de mais sabedoria.

De qualquer modo, encontramos-nos no limiar de uma nova era em que teremos solucionado um dos grandes enigmas que até então nos desassossegavam: *Onde Estamos?*

4 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BETZ, Michel E. Marcel. 2005. Princípios da Relatividade Restrita - Notas de Aula. 2005.

CHUNG, K. C. 2001. *Introdução à Física Nuclear*. Rio de Janeiro : Universidade do Estado do Rio de Janeiro, 2001.

FILHO, Kepler de Souza Oliveira e SARAIVA, Maria de Fátima Oliveira. 2008. *Astronomia e Astrofísica*. [Online] 29 de Maio de 2008.

Fundamentos de Astronomia e Astrofísica. Porto Alegre : Departamento de Astronomia do Instituto de Física da UFRGS, 1999.

FREEMAN, Ken e MCNAMARA, Geoff. 2006. *In Search of Dark Matter*. Berlim : Praxis Publishing Ltd., 2006.

MARION, Jerry B. e THORNTON, Stephen T. 1995. *Classical Dynamics of Particles and Systems*. s.l. : Saunders College Publishing, 1995.

RINDLER, Wolfgang. 1977. *Essential, General and Cosmological*. s.l. : Springer-Verlag, 1977.

RYDEN, Barbara Sue. 2003. *Introduction to Cosmology*. s.l. : Addison Wesley, 2003.

SOUZA, Ronaldo E. de. 2004. *Introdução à Cosmologia*. São Paulo : Editora da Universidade de São Paulo - EDUSP, 2004.

WIKIPEDIA. 2008. WIKIPEDIA. *WIKIPEDIA*. [Online] Maio de 2008.