As injustas conseqüências das iguais oportunidades: correlações entre risco, riqueza e proteção

Gaspar Machado Caon

ORIENTADORES
Sebastián Gonçalves
Jose Roberto Iglesias

Sumário

1 Introdução

1.1 Breve histórico

Estudos empíricos da distribuição de renda de trabalhadores, empresas e países foram apresentados cerca de cem anos atrás pelo economista italiano Vilfredo Pareto. Essencialmente, ele tentou mostrar que a distribuição de renda segue uma mesma expressão matemática, uma lei de potências na região de alta renda, dada por $P(w) \propto w^{-(1+\alpha)}$, sendo α o expoente de Pareto. Cerca de duas décadas atrás, esse assunto passou a ser abordado por físicos que se voltaram para questões da economia sob uma nova abordagem, na qual princípios de mecânica estatística são aplicados a sistemas econômicos [2].

1.2 Abordagem

O uso de modelos simples de agentes econômicos interagentes são comuns no estudo da distribuição da riqueza em sociedades artificiais. Em geral, cada agente é caracterizado por uma conjunto de variáveis e parâmetros, como riqueza e fator de aversão ao risco. Trocas sucessivas de riqueza entre agentes vão conduzir o sistema a uma eventual configuração de equilíbrio, sendo possível então analisar a distribuição de riqueza. A idéia aqui não é investigar a expressão matemática da distribuição de riqueza, tampouco de analisar o expoente de Pareto associado[1], mas sim de apresentar as correlações entre os parâmetros que caracterizam o modelo quando a regra de troca é a chamada regra do mínimo, que será explicada em **2.4**. Procura-se então entender essas correlações e relacioná-las com possíveis eventos de uma economia real.

1.3 Modelos, métodos e regras

Os modelos que simulam a dinâmica de um sistema de agentes podem ser usualmente caracterizados pela regra que rege a troca de riqueza entre os agentes do sistema. Às vezes, é necessário definir alguns parâmetros adicionais para garantir que a regra seja aplicável, mas essencialmente o que é feito é promover um número suficientemente grande de encontros entre um número suficientemente grande de agentes para que a distribuição de riqueza inicial seja modificada. Eventualmente, a distribuição de riqueza atingirá um estado de equilíbrio, e então será possível buscar relações entre a regra de

[1] Um estudo mais voltado nesse sentido pode ser consultado na ref. [5].

troca e os demais parâmetros que caracterizam o modelo. Pode-se buscar, por exemplo, a relação entre a condição econômica inicial dos agentes com a sua situação final, o que verificará se a regra favorece ou não a melhora da situação econômica dos agentes mais pobres.

A forma como os agentes estão distribuídos no sistema também gera uma multiplicidade de modelos possíveis. Por exemplo, os agentes podem estar organizados em uma rede quadrada ou hexagonal, podendo trocar riqueza apenas com seus primeiros vizinhos. Mas também é possível arranjar os agentes em uma rede do tipo *mundo-pequeno,* na qual os agentes não necessariamente são vizinhos geográficos uns dos outros, mas mesmo assim podem trocar riqueza com agentes distantes, desde que exista uma conexão entre eles [8]. Nesse tipo de arranjo, agentes com muitas conexões têm mais chance de participar de trocas de riqueza do que outros[2]. Por fim, os agentes podem simplesmente não estar organizados de forma alguma, e os encontros entre eles são feitos unicamente por sorteio uniforme, tratando-se então do método de Monte Carlo.

As diferentes regras de troca de riqueza contribuem ainda mais para a variedade de modelos possíveis de se estudar. Em princípio, existe uma infinidade de regras de troca, e não raro recebem apelidos oportunos como, por exemplo, a *regra do casamento-e-divórcio* [2], a *regra do mínimo* e a *regra do perdedor.* Na primeira das três, dois agentes selecionados primeiro unem suas riquezas para, em seguida, repartir o todo entre si[3]. Na regra do mínimo (que é a regra empregada nesse trabalho, ver **2.4**), dois agentes arriscam uma quantidade definida de suas riquezas individuais, e o vencedor da transação recebe do perdedor uma quantia igual à menor das apostas. Na regra do perdedor, uma variante sutil da regra do mínimo, o vencedor da transação recebe do perdedor tudo o que o este arriscou.

Por fim, o desafio maior nesse tipo de estudo é o de interpretar o possível significado dos parâmetros do modelo, bem como os seus resultados [2]. O próprio contexto em que se trabalha pode reduzir muito o número de modelos passíveis de estudo. Em um contexto econômico, a regra do perdedor não

[2]Os sites de relacionamento como *Orkut e MySpace* são exemplos de redes mundo-pequeno, visto que usuários que não se conhecem estão usualmente ligados entre si por um número muito pequeno de conexões. Ver a ref. [4], que estuda um modelo com esse tipo de rede.

[3]Tanto na regra do casamento-e-divórcio como em outras regras, a analogia com um sistema gasoso é bastante imediata: agentes se encontram e trocam riqueza assim como moléculas colidem e trocam energia. Ver, por exemplo, a ref. [6].

tem muito interesse visto que o agente que arrisca menos está nitidamente mais favorecido do que os agentes radicais, o que nem sempre é condizente com a experiência cotidiana. Na próxima seção, será apresentado em detalhe o modelo, o método e a regra de troca estudados nesse trabalho.

2 Modelo investigado

2.1 Sistema econômico

O sistema que contém os agentes econômicos é um sistema fechado, no sentido de que a riqueza dentro do sistema é uma quantidade conservada. A riqueza, por seu turno, é representada apenas por uma variável real w, não existindo formas de riqueza distintas. Com isso, define-se w_i como sendo a riqueza do i-ésimo agente.

2.2 Dinâmica

As trocas de riqueza ocorrem sempre entre dois agentes, o i- e o j-ésimo, selecionados ao acaso no sistema. Isso significa que a dinâmica se dá pelo algoritmo de Monte Carlo. Uma vez sorteados, os dois agentes serão sujeitos à regra de troca (ver **2.4**), e a probabilidade de o agente mais pobre vencer a transação, seja ele o i- ou o j-ésimo, é calculada (ver **2.5**).

Como ocorrerá um número muito grande de transações, por conveniência, define-se o *passo Monte Carlo* (ou *passo de sistema*) da forma usual: um passo Monte Carlo é igual a um número de encontros entre pares de agentes igual ao tamanho do sistema (dado simplesmente pelo número de agentes nele contido).

2.3 Aversão ao risco

Por motivos que ficarão claros em **2.4**, a cada agente econômico é atribuído um fator de aversão ao risco $\beta \in [0, 1]$, que é mantido constante em cada simulação. Para o i-ésimo agente, β_i é o seu fator de aversão ao risco, e o complementar $(1 - \beta_i)$ vem a ser simplesmente o seu risco. Logo, quando o i-ésimo agente for sorteado, a fração *disponível* de sua riqueza para troca é apenas $(1 - \beta_i)w_i$, os restantes $\beta_i w_i$ sendo conservados. Essas definições permitem que os agentes sejam classificados genericamente como conservadores (β próximo de 1) e radicais (β próximo de 0). Essas definições também são necessárias para que a regra de troca empregada aqui, que é a regra do mínimo (ver **2.4**), tenha algum sentido. O fator de aversão ao risco, como descrito aqui, vem a ser uma primeira aproximação para representar diferentes tipos de estratégia econômica.

2.4 Regra de troca

A regra de troca empregada nessa simulação é a *regra do mínimo*. Quando dois agentes são selecionados para trocar riqueza, o montante Δw que será transferido do perdedor ao vencedor é definido como sendo a menor das quantidades arriscadas, ou seja,

$$\Delta w = min\,[(1-\beta_i)w_i; (1-\beta_j)w_j] \tag{1}$$

Vê-se de (1) que a regra do mínimo parece uma regra de troca justa, visto que se o agente que arriscou menos vencer, ele não receberá do perdedor tudo o que este arriscou, mas apenas uma parte menor, igual à que o primeiro arriscou[4].

2.5 Vitória $\times$ derrota e proteção

Em princípio, a probabilidade de o i- ou de o j-ésimo agente ser o vencedor de uma transação deveria ser 1/2 para ambos, já que é aparentemente a forma mais justa de decidir quem vence. Entretanto, o resultado de uma simulação com tal simetria na definição da probabilidade de vencer é conhecido [2]: toda a riqueza do sistema condensa em um único agente. Esse resultado é bastante impressionante pois contradiz totalmente a idéia de que a igualdade nas chances de melhorar uma situação econômica conduziria a uma maior igualdade econômica. Verifica-se, opostamente, uma catástrofe econômica! Por esse motivo, emprega-se uma fórmula de probabilidade [7] que favorece o agente mais pobre dada por

$$p(w_i, w_j, f) \equiv \frac{1}{2} + f\frac{|w_i - w_j|}{w_i + w_j} \tag{2}$$

[4]Agora é clara a razão pela qual a regra do perdedor não é tão interessante nesse sentido, conforme comentado em **1.3**. Nessa regra, $\Delta w = (1-\beta_{perdedor})w_{perdedor}$, de modo que os agentes conservadores têm incontestável vantagem sobre os agentes radicais: se um conservador perder para um radical, a quantidade recebida pelo radical será pequena, mas se ocorrer o contrário, será o conservador que receberá uma grande fração da riqueza do radical, o que aumenta o potencial de ganho de todos os agentes que formam a classes conservadora.

em que se vê um termo a mais, que depende da diferença de riqueza entre os agentes, modulado por um parâmetro adicional $f \in [0, 1/2]$. Tal parâmetro é denominado aqui de *parâmetro de proteção*, e assim como no caso da aversão ao risco, é uma primeira aproximação para representar a ação de um mecanismo externo de ajuda aos agentes mais pobres como, por exemplo, o efeito geral de um plano governamental que visa a diminuição da desigualdade econômica[5]. Como casos-limite de (2), vê-se que

$$\lim_{w_i \approx w_j} p = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{w_i \gg w_j} p = \frac{1}{2} + f \tag{3,4}$$

De (3), vê-se que se o i- e o j-ésimo agentes tiverem riquezas muito próximas, eles são indistinguíveis quanto às chances de vencer a transação. Já, em (4), fica claro que se a disparidade econômica entre os agentes for grande, as chances de o agente mais pobre vencer são máximas. Vê-se também de (2) que

$$\lim_{f \to 0} p = \frac{1}{2} \tag{5}$$

que representa o caso em que a ajuda externa é inexistente. Nessa situação, a riqueza do sistema condensa em um único agente, como será discutido em **4**, podendo ainda ser averiguado consultando o anexo **B**.

2.6 Medidas de desigualdade

Para fins de estimar o estado do sistema quanto à sua proximidade do estado de equilíbrio, é medida a desgualdade na riqueza do sistema a intervalos convenientes de passos Monte Carlo. A variância sobre a riqueza é calculada da forma usual

$$\sigma^2 = \langle w^2 \rangle - \langle w \rangle^2 \tag{6}$$

Também é calculado o chamado *índice Gini*, de uso comum em economia para estimar a desigualdade de renda em um sistema, ao traduzir essa informação em apenas um número entre 0 e 1. Quando todos os agentes de um sistema têm exatamente a mesma riqueza, o índice Gini assume valor 0. Opostamente, quando um agente concentra toda a riqueza de um sistema e

[5]Existem outras formas de implementar o favorecimento do agente mais pobre que não pela definição de probabilidade. Ver, por exemplo, a ref. [3], na qual a *dinâmica de otimização de extremos* é empregada. Nessa dinâmica, um dos dois agentes selecionados para troca de riqueza sempre é o agente na pior situação econômica do sistema.

todos os demais possuem nada, seu valor é 1. É usada aqui uma definição operacional para o índice Gini,

$$G \equiv \frac{1}{(N-1)\sum_{k=1}^{N} w_k} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} |w_i - w_j| \tag{7}$$

sendo N o número de agentes do sistema. Essencialmente, o que (7) apresenta é uma média normalizada sobre a diferença de riqueza entre todos os pares possíveis de agentes do sistema. Pelo acompanhamento dos valores de σ^2 e de G, estima-se a estabilidade da distribuição da riqueza[6].

2.7 Condições iniciais e classes de agentes

Tendo em vista a longa discussão feita até então, é oportuno fazer uma breve recapitulação de tudo o que foi apresentado. O sistema estudado nesse modelo é um sistema fechado contendo N agentes econômicos (**2.1**). Pares de agentes são selecionados de acordo com o algoritmo de Monte Carlo (**2.2**). Os agentes são caracterizados por sua riqueza w e por seu fator de aversão ao risco β (**2.3**), e trocam riqueza de acordo com a regra do mínimo (**2.4**). A probabilidade de o agente mais pobre vencer é então calculada levando-se em conta a riqueza de ambos os agentes, bem como algum parâmetro de proteção $f \in [0, 1/2]$ escolhido previamente (**2.5**). Por fim, calcula-se a variância e o índice Gini para fins de estimativa do estado da distribuição de riqueza (**2.6**).

Como configuração inicial, o sistema contém $N = 10^3$ agentes econômicos, e a riqueza inicial de cada agente é escolhida a partir de uma distribuição uniforme entre 0 e 1, assim como o fator de aversão ao risco. Os agentes econômicos não alteram o seu fator de aversão ao risco ao longo de uma simulação. O valor de f é escolhido previamente, e também é mantido fixo ao longo da simulação[7].

Antes de investigar os resultados, é conveniente definir-se o que é uma *classe de agentes* para melhor compreensão das distribuições apresentadas em **3**. Pode-se classificar os agentes tanto de acordo com o seu risco bem como com a sua condição inicial de riqueza (ou simplesmente *origem*). Nesse sentido existe, por exemplo, a classe dos agentes ultra-radicais, com fatores de

[6] Gráficos desses parâmetros são apresentados no anexo **A**.

[7] Descobriu-se posteriormente, através de variações de f ao longo de uma mesma simulação, que a distribuição de riqueza caminha para um estado que não pode ser revertido apenas reatribuindo antigos valores de f. Ver anexo **C**.

aversão ao risco entre 0 e 0.1 (correspondendo a cerca de $N/10$ dos agentes). Já, do ponto de vista da riqueza inicial tem-se, por exemplo, a classe dos agentes que iniciam a simulação com riqueza entre 0.3 e 0.4 (também cerca de $N/10$ agentes), ou seja, é a classe dos agentes que iniciam com riqueza entre 30% e 40% do máximo permitido inicialmente. A idéia de classes de agentes é importante porque permite averiguar o estado final dos agentes que vêm de classes mais ou menos favorecidas no início, bem como o desempenho de suas estratégias econômicas, que são classificadas segundo o fator de aversão ao risco. Finalmente, para diminuir ruído, são feitas médias de ensemble sobre um total de 10^4 simulações[8].

3 Correlações encontradas e discussão

No estado de equilíbrio (ou muito próximo deste, ver anexo **A**), as distribuições de riqueza são obtidas. Com o fim de discutir a influência do risco e da proteção na riqueza, procurou-se as distribuições que apresentassem correlações entre tais parâmetros ao invés da distribuição de riqueza usual (que mostram apenas o número de agentes como função de sua riqueza[9]). As distribuições apresentadas nas figuras 1 e 2 contemplam como a riqueza final de determinadas classes de agentes está distribuída. A riqueza apresentada é *normalizada*, ou seja, ela aparece nas distribuições como uma fração da riqueza total do sistema.

Das figuras de (a) a (e), é notável que, para $f \in [0.1; 0.5]$, a condição inicial de riqueza dos agentes é irrelevante para determinar a sua situação econômica final. Ao invés disso, percebe-se que o estado final depende única e exclusivamente da estratégia econômica do agente, existindo um máximo distinto na distribuição para cada valor de f. Para uma dada classe de risco, todas as barras coincidem no mesmo valor de riqueza. No caso extremo $f = 0.5$, o fato de que a riqueza continua existindo em todas as classes de risco sugere que há um rodízio constante de riqueza nas mãos dos agentes, o que faz sentido, visto que a ajuda externa é máxima, e nenhum agente permanece absolutamente pobre por muito tempo. Vê-se que o máximo da distribuição se desloca para classes mais conservadoras na medida em que f

[8]Uma média de ensemble sobre simulações implica sortear novamente, antes de iniciar cada simulação, todos os valores de riqueza inicial e aversão ao risco dos agentes. Entretanto, dentro de uma simulação específica, os fatores de aversão ao risco são mantidos fixos.

[9]Essas distribuições estão mostradas na ref. [5]

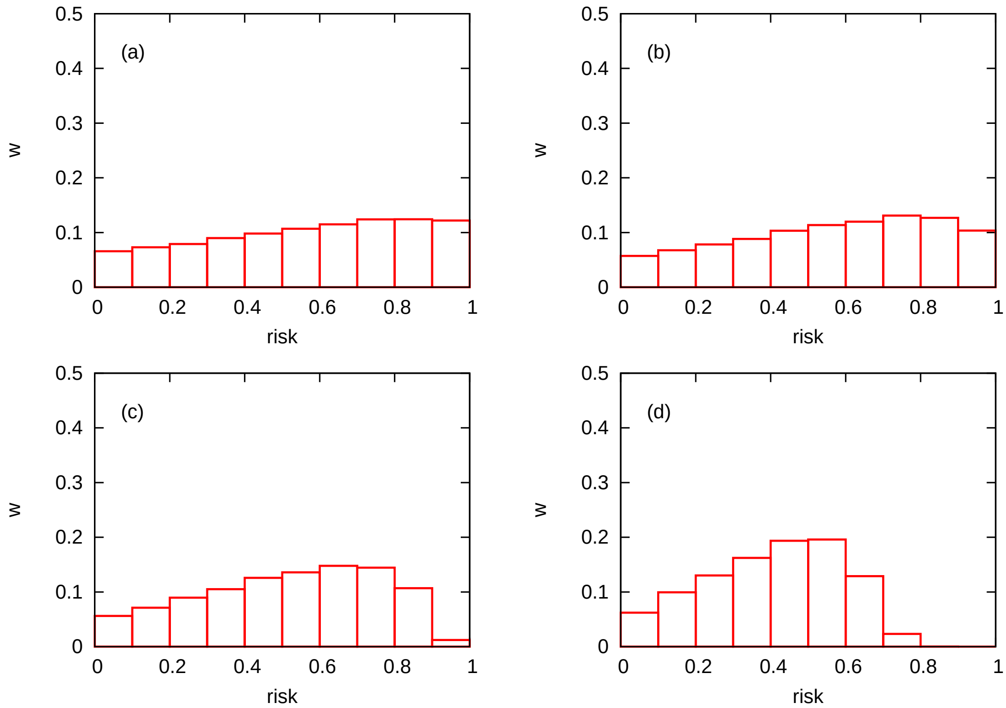

Figura 1: Distribuições normalizadas de riqueza (w) para diferentes classes de risco e riqueza inicial. Cada gráfico corresponde a um parâmetro de proteção diferente. (a) $f = 0.5$; (b) $f = 0.4$; (c) $f = 0.3$; (d) $f = 0.2$

é diminuído. Para $f = 0.2$, os agentes mais radicais terminam extremamente pobres[10]. Nesse caso, a riqueza que outrora fôra deles passa agora a circular apenas entre as classes mais conservadoras do que as suas. Para $f = 0.1$, vê-se um máximo de riqueza pronunciado: a classe de risco $(1-\beta) \in [0.2; 0.3]$ (que contém cerca de $N/10$, ou 10% dos agentes do sistema) concentra pouco mais de 35% da riqueza do sistema. Praticamente 60% dos agentes, quais sejam, aqueles com $(1 - \beta) > 0.4$, não possuem mais riqueza para realizar trocas, estando efetivamente marginalizados da dinâmica econômica do sistema.

À medida que a influência externa diminui ainda mais, a origem econômica dos agentes passa a ter relevância, o que pode ser visto nas distribuições de (f) a (j) da figura 2. Nessas distribuições, $f < 0.1$ e vê-se que os agentes de uma dada classe de risco que iniciam pobres em comparação com os demais

[10] A riqueza associada a esses agentes é nula na prática, e tudo se passa como se eles tivessem sido eliminados do sistema.

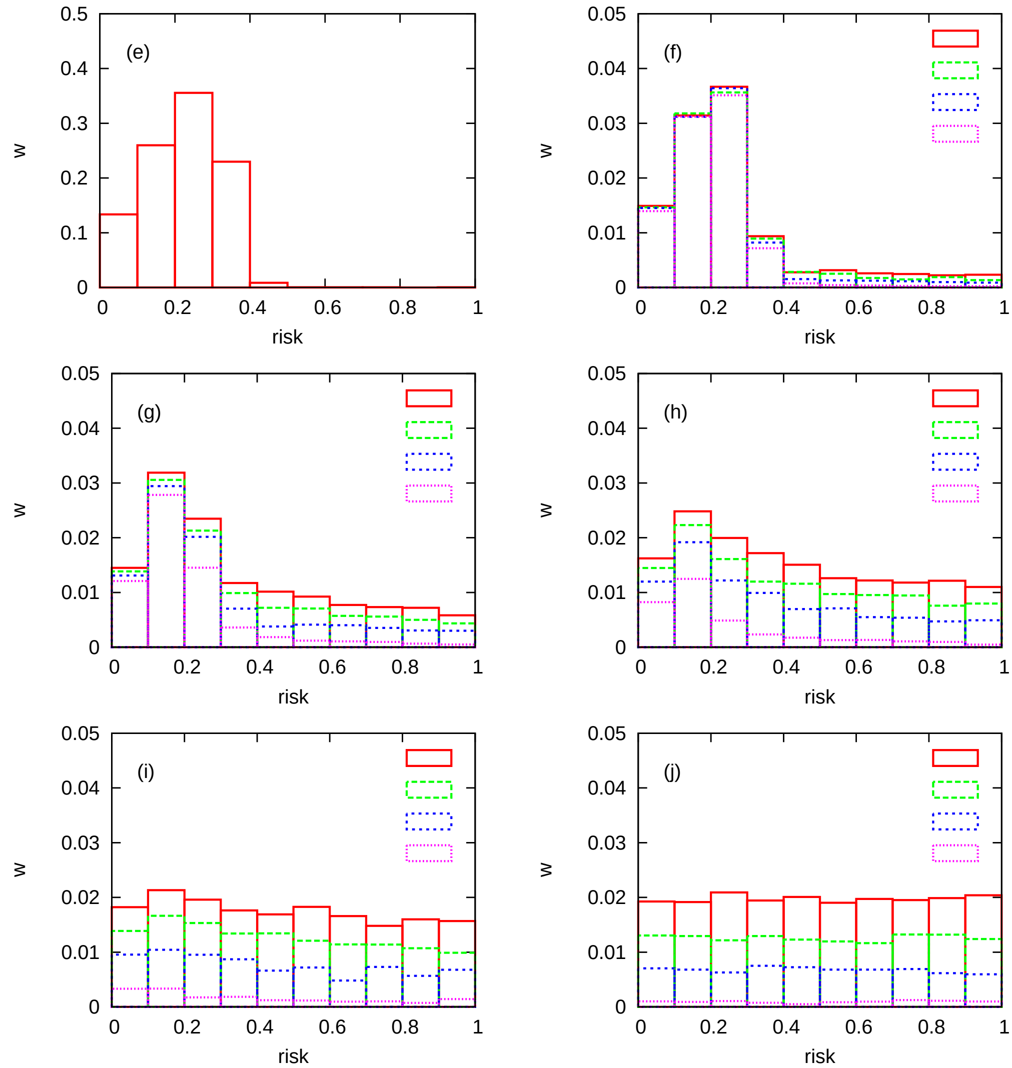

Figura 2: Distribuições normalizadas de riqueza (continuação). Cada tipo/cor de barra representa o estado final de riqueza de uma certa classe de riqueza inicial. Na legenda, de cima para baixo, os tipos/cores de barra representam respectivamente estas classes: 90—100%, 60—70%, 30—40% e 0—10%. Os parâmetros de proteção são: (e) $f = 0.1$; (f) $f = 0.08$; (g) $f = 0.06$; (h) $f = 0.04$ (i) $f = 0.02$; (j) $f = 0$

agentes dessa mesma classe de risco continuam pobres no final, quando comparados com os mesmos outros agentes da mesma classe de risco. Percebe-se que essa hierarquia se repete para todas as classes de risco (indicado pelo tipo/cor das barras), o que sugere uma estratificação da sociedade[11]. Entretanto, não parece óbvia a razão de todos aqueles agentes com $(1-\beta) > 0.4$ outrora marginalizados em um sistema com $f = 0.1$ agora apresentarem alguma riqueza, ainda que muito pequena. As distribuições continuam misteriosas de se compreender quando diminui-se ainda mais f. A seguir, é apresentada uma análise do caso extremo $f = 0$. Uma vez entendido esse caso, acredita-se ser mais simples entender o que se passa nas distribuições com $0 < f < 0.1$.

No caso extremo $f = 0$, a distribuição sugere à primeira vista que a riqueza está uniformemente distribuída entre os agentes de mesma origem econômica, independentemente da sua classe de risco. Entretanto, isso é contraditório com o resultado de que a riqueza, em um sistema sem influência externa, precisa condensar em um único agente (como já discutido em **2.5** e referido em [2]). Essa aparente contradição pode ser solucionada ao lembrar-se que essas distribuições são obtidas fazendo-se uma média de ensemble sobre 10^4 simulações independentes. Portanto, se a média aritmética de 10^4 simulações (às quais correspondem 10^4 distribuições) produz uma distribuição uniforme como em (j), isso significa simplesmente que o agente que termina por deter toda a riqueza do sistema pode ser *qualquer* agente, independentemente da sua classe de risco[12]. Por outro lado, a origem econômica de um agente influencia na probabilidade de este se tornar o agente dominante. Por motivos ainda desconhecidos, a distribuição (j) sugere que a probabilidade de um agente acumular toda a riqueza do sistema seja proporcional à sua riqueza de origem[13].

Para as distribuições de (f) a (i), com $0 < f < 0.1$, um efeito misto entre a análise feita para $f > 0.1$ e $f = 0$ deve ocorrer. O que na verdade acontece

[11] Na ref. [2], o autor faz um estudo similar a este, revelando que é necessário um número muito grande de passos para que um agente consiga ultrapassar o próximo agente com mais riqueza.

[12] Para as distribuições de (a) a (d), vê-se que os agentes que concentram a maior parte da riqueza *não são agentes quaisquer*, mas sim aqueles que pertencem a alguma classe de risco "ótima"!

[13] Isso pode não ser imediato de observar em (j), mas uma inspeção mais cuidadosa da figura indica que, em qualquer classe de risco, a altura das barras é proporcional à classe de riqueza de origem, confirmando a suspeita de que a probabilidade de se tornar o mais rico também seja proporcional à classe de riqueza de origem.

para essa faixa de f é que, de um lado, a distribuição se aproxima de um estado de condensação extrema da riqueza, mas como $f > 0$, a condensação nunca é total, sempre havendo um fração diminuta de agentes com alguma riqueza transferível. De outro lado, as classes de risco passam a ser cada vez menos relevantes para determinar qual será o agente condensador à medida que $f \to 0$, o que é verificado pela progressiva uniformização da distribuição. Esses dois efeitos — condensação da riqueza se intensificando e crescente indistinguibilidade quanto ao risco — é que geram esse tipo de distribuição transitória.

4 Conclusões

A facilidade em criar um modelo artificial de economia é usualmente compensada com a dificuldade em interpretar os seus resultados, bem como em obter correlações que façam sentido com elementos concretos de economia. O presente estudo revela que um modelo simples, com o emprego de poucos parâmetros para caracterizar uma economia mais complexa, conduz a resultados interessantes, no sentido de que é possível identificar conseqüências razoáveis dos efeitos de um fator de proteção externo em uma economia composta de agentes com diferentes níveis de aversão ao risco. Além disso, o fato de empregar uma regra de troca aparentemente justa não conduz a distribuições de riqueza mais igualitárias, mas eventualmente o contrário. Entende-se que, com esses resultados, uma sociedade mais justa não passa unicamente por igualdade de oportunidades, como sugere a regra do mínimo, mas que também é necessário uma ajuda considerável aos agentes menos favorecidos por parte de algum mecanismo externo. Não obstante, o fato de a dinâmica poder apresentar uma espécie de entropia (ver anexo **C**), impedindo que distribuições de riqueza mais igualitárias sejam revisitadas pelo sistema caso este for submetido a regimes de baixos f, sugere que em casos extremos de desigualdade, a ajuda externa torna-se insuficiente, não podendo apenas ser baseada em atitudes que repercutam como uma simples perturbação na probabilidade de vitória do agente mais pobre. Por fim, vale lembrar que embora o sistema aqui estudado seja conservativo, em oposição ao que se vê na realidade, pode-se especular que o fato de um sistema ser não-conservativo, com riqueza que aumenta no tempo, não pode mudar muito a situação dos agentes mais pobres, visto que os principais responsáveis pela extração de riquezas adicionais do sistema são usualmente os agentes mais ricos.

Anexos

A Índice Gini, variância e equilíbrio

A figura 3 apresenta os valores calculados para o índice Gini e para a variância, conforme visto em **2.6**. Todas as distribuições referentes a cada valor de f foram obtidas após o último passo Monte Carlo. Note-se que, efetivamente, $G \to 1$ para $f = 0$, o que indica que o sistema caminha para o estado de máxima desigualdade na distribuição, que é justamente a condensação da riqueza em um agente. A variância para o caso $f = 0$ foi traçada em um gráfico à parte, e pode-se observar uma lenta convergência para um valor limite. Esse valor pode ser facilmente calculado por meio da definição

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (w_i - \langle w \rangle)^2$$

Com apenas um agente concentrando toda a riqueza do sistema, pode-se retirar da soma o termo correspondente a esse agente, de modo que

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \left[\sum_{i \neq j}^{N} (0 - \langle w \rangle)^2 + (w_j - \langle w \rangle)^2 \right]$$

Usando o fato de que $\langle w \rangle = 1/2$ e que a riqueza do sistema é em média $N\langle w \rangle$ obtém-se, para $N = 1000$,

$$\sigma^2 = \frac{N-1}{4} \approx 250$$

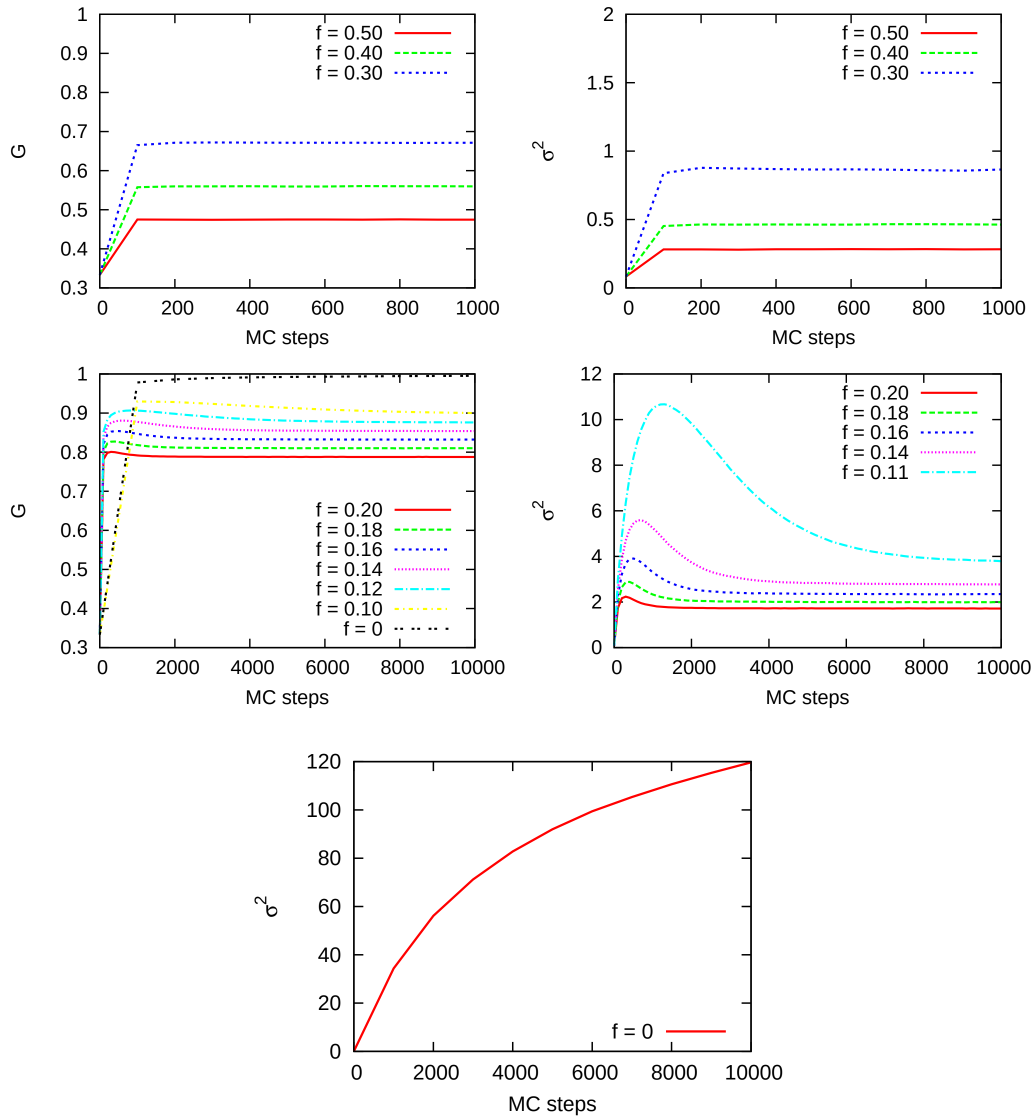

Figura 3: À esquerda, valor do índice Gini para diversos parâmetros de proteção. À direita, idem para a variância. No centro, a variância para $f = 0$.

B Verificação da condensação

Para verificar que a riqueza de um sistema condensa efetivamente em um único agente, foram feitas três simulações em um sistema pequeno com $N = 100$ apenas. Da figura 4, vê-se que a riqueza concentrada no agente é próxima de $N\langle w \rangle = 100 \times 1/2 = 50$, como esperado.

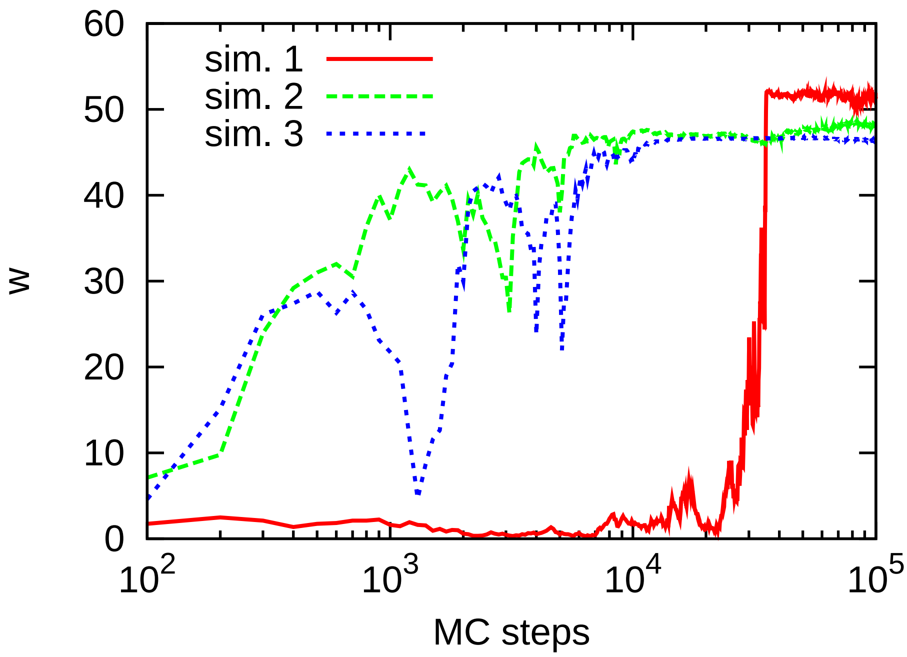

Figura 4: Três simulações ($f = 0$) nas quais acompanha-se o agente que acaba por acumular toda a riqueza do sistema.

C Irreversibilidade

Descobriu-se apenas posteriormente que, ao investigar a invariância das distribuições finais em função da distribuição inicial, a irreversibilidade pode aparecer no sistema. Isso está evidenciado na figura 5, na qual permite-se que o valor de f seja mudado periodicamente. Nesse teste, parte-se de $f = 0.5$ e, a cada 5000 passos Monte Carlo, muda-se abruptamente o valor de f. A seqüência de valores varridos é

$$f = \{0.5; 0.4; 0.3; 0.2; 0.1; 0.2; 0.3; 0.4; 0.5\}$$

O fato de tanto o índice Gini como a variância não retornarem a valores assumidos anterioremente implica que deve existir algum limite no valor de f além ou aquém do qual o(s) agente(s) mais ricos não podem ser mais ultrapassados. Esse regime, por enquanto desconhecido, possivelmente marcaria o início da decadência da economia do sistema, congelando os agentes econômicos em camadas sociais bem definidas. Infelizmente, essa é uma curiosidade motivadora, mas cuja investigação terá que ser considerada em outra ocasião.

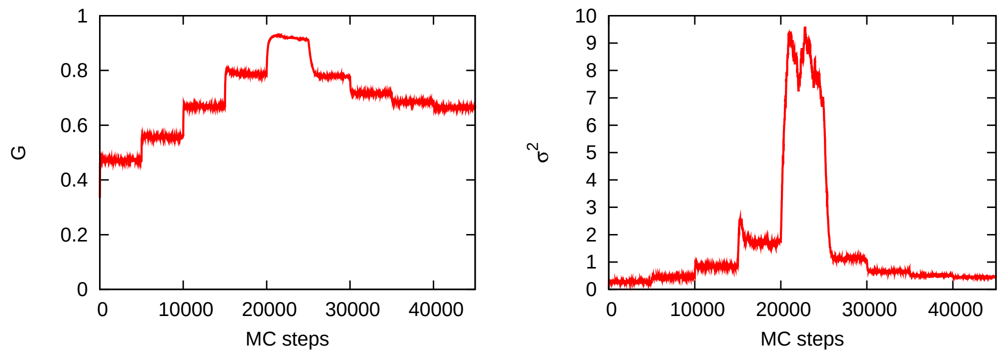

Figura 5: Irreversibilidade revelada pelo índice Gini e pela variância à medida que f é variado a cada 5000 passos Monte Carlo. Os valores de f são, na ordem: $f = (0.5; 0.4; 0.3; 0.2; 0.1; 0.2; 0.3; 0.4; 0.5)$

Bibliografia

[1] Gupta A K, **Models of wealth distributions: a perspective** (2006) arXiv:physics/0604161

[2] Hayes B, **Follow the Money** (2002) American Scientist, 90:400

[3] Pianegonda S, Iglesias J R, Abramson G e Vega J L, **Wealth redistribution with conservative exchanges** (2003) Physica A 322:667

[4] Iglesias J R, Gonçalves S, Pianegonda S, Vega JL e Abramson G, **Wealth redistribution in our small world** (2003) Physica A 327:12

[5] Caon G M, Iglesias J R e Gonçalves S, **The unfair consequences of equal opportunities: comparing exchange models of wealth distributions** (2007) Eur. Phys. J Special Topics 143:69

[6] Chakrabarti B K e Chatterjee A, **Ideal Gas-Like Distributions in Economics: Effects of Savings** (2003) arXiv:cond-mat/0302147

[7] Scafetta N, West B J e Picozzi S, **A Trade-Investment Model for Distribution of Wealth** (2003) arXiv:cond-mat/0306579v2

[8] http://en.wikipedia.org/wiki/Small-world_network (junho/2008)