

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Escola de Engenharia
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

**Abordagem Micromecânica da Propagação
de Fraturas em Meios Elásticos e Viscoelásticos**

Cássio Barros de Aguiar

Porto Alegre
2016

Ficha Catalográfica

- A282a Aguiar, Cássio Barros de
Abordagem micromecânica da propagação de fraturas em meios elásticos e viscoelásticos / Cássio Barros de Aguiar. – 2016.
180 f. : il. color.
Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Escola de Engenharia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Porto Alegre, BR-RS, 2016.
Orientador: Samir Maghous.
1. Fraturas. 2. Viscoelasticidade. 3. Micromecânica. I. Maghous, Samir, orient. II. Título.

CDU: 620.191(043)

CÁSSIO BARROS DE AGUIAR

**ABORDAGEM MICROMECAÂNICA DA PROPAGAÇÃO DE
FRATURAS EM MEIOS ELÁSTICOS E VISCOELÁSTICOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul,
como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em
Engenharia.

Orientador: Prof. Dr. Samir Maghous

Porto Alegre
2016

CÁSSIO BARROS DE AGUIAR

**ABORDAGEM MICROMECAÂNICA DA PROPAGAÇÃO DE
FRATURAS EM MEIOS ELÁSTICOS E VISCOELÁSTICOS**

Esta dissertação de mestrado foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA, Área de Concentração Estruturas, e aprovada em sua forma final pelo professor orientador e pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, 18 de março de 2016

Prof. Samir Maghous
Dr. Em Engenharia pela Ecole Nationale des
Ponts et Chaussées
orientador

Prof. Carlos Torres Formoso
Coordenador do PPGEC/UFRGS

BANCA EXAMINADORA

Prof. Armando Miguel Awruch (PPGEC – UFRGS)
Dr. Pela COPPE/UFRJ

Prof. Eduardo Bittencourt (PPGEC – UFRGS)
Dr. Pela UFRGS

Prof. Rodrigo Rossi (PROMEC – UFRGS)
Dr. Pela UFSC

Dedico este trabalho a minha namorada Aline, cujos esforços me incentivaram a dedicação e estudo ao longo deste trabalho e de nossas vidas.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao CNPq e a CAPES pela bolsa de estudos que possibilitou a minha total dedicação aos meus estudos para alcançar o título adquirido com este trabalho.

Agradeço ao Prof. Samir Maghous, orientador deste trabalho, pela paciência e empenho que teve me incentivando no desenvolver deste trabalho bem como por todo auxílio, indispensável, que requisitei ao longo do meu mestrado.

Agradeço a UFRGS por ter me fornecido um curso com excelente qualidade, possibilitando que tal trabalho apresente um nível satisfatório.

Agradeço, por fim, a minha família, amigos e a minha namorada, que sempre que possível me afastaram da minha dissertação para que eu não enlouquecesse a aproveitasse alguns dias tranquilo.

A essência do conhecimento consiste em aplica-lo, uma
vez possuído.

K'ung Chung-ni – Confúcio

RESUMO

AGUIAR, C. B. **Abordagem Micromecânica da Propagação de Fraturas em Meios Elásticos e Viscoelásticos**. 2016. 180 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

Fraturas são descontinuidades físicas, presentes em diversos materiais utilizados na engenharia, e são responsáveis pela redução da resistência e da rigidez global dos materiais. Tratando-se de fraturas de pequena dimensão, é possível definir a existência de duas escalas: a escala microscópica, onde as fraturas são visíveis, e a escala macroscópica, onde o material fraturado é homogêneo. Maghous et al. (2010) utilizaram a micromecânica para expor o tensor de rigidez homogeneizado para materiais elásticos fraturados, fazendo a ressalva de que fraturas transmitem esforços por suas faces. Utilizando os conceitos formulados por Maghous, Lorenci (2013) ampliou sua aplicação, estendendo à distribuição aleatória das fraturas. Utilizando o mesmo procedimento realizado por Lorenci, determinou-se os tensores de rigidez homogeneizados para materiais elásticos fraturados, os quais foram empregados para formular as condições de propagação de fraturas para materiais elásticos. Conceitualmente, a condição de propagação de fraturas em meios elásticos é formulada com base em conceitos clássicos da termodinâmica, baseados na dissipação de energia. Tratando-se de meios viscoelásticos, a dissipação de energia adquire um novo termo denominado de dissipação viscosa. Nguyen (2010) estabeleceu uma condição de propagação de fissuras em meios viscoelásticos, entretanto, as fissuras admitidas por Nguyen não são responsáveis pela transferência de esforços. Para estender a análise de Nguyen ao caso de fraturas, foi necessário determinar os tensores de relaxação do material viscoelástico fraturado, estes tensores foram obtidos combinando-se os tensores elásticos homogeneizados com os conceitos da transformada de Carson-Laplace, admitindo que as fraturas não se propagam ao longo do tempo. Com base no tensor de relaxação isótropo homogeneizado, determinou-se um modelo reológico equivalente que represente o material viscoelástico fraturado assumindo diferentes modelos reológicos para a matriz e para fraturas. Por fim, analisou-se as condições de propagação de fraturas em meios viscoelásticos de duas formas: de forma aproximada (apurando os estudos realizados por Nguyen) e de forma homogeneizada (admitindo que a propagação de fraturas se dá na escala macroscópica).

Palavras-chave: *fraturas; propagação; viscoelasticidade; micromecânica.*

ABSTRACT

AGUIAR, C. B. **Abordagem Micromecânica da Propagação de Fraturas em Meios Elásticos e Viscoelásticos**. 2016. 180 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

Fractures are physical discontinuities, present in many materials used in engineering, and are responsible for reducing the overall strength and stiffness of the material. In the case of small fractures, is possible set two scales: a microscopic scale, where fractures are visible, and the macroscopic scale, where the fractured material is homogeneous. Maghous et al. (2010) used the micromechanics to expose the homogenized stiffness tensor for fractured elastic materials, making the observation that fractures transmit efforts by their faces. Using the concepts formulated by Maghous, Lorenci (2013) expanded its application, extending to a random distribution of fractures. Using the same procedure performed by Lorenci, the homogenized stiffness tensor was determined for fractured elastic materials, which were employed to formulate the fracture propagation conditions for elastic materials. Conceptually, the fracture propagation conditions for elastic means is made based on classical concepts of thermodynamics, based on the energy dissipation. In the case of viscoelastic means, the energy dissipation acquires a new term called viscous dissipation. Nguyen (2010) established a condition of crack propagation in viscoelastic means, however, the Nguyen's cracks are not responsible for the transfer of efforts. To extend Nguyen analysis to the case of fractures, was necessary to determine the relaxation tensor for viscoelastic fractured materials, these tensors are obtained by combining the homogenized elastic tensor to the concepts of the Carson-Laplace transform, assuming that the fractures are not propagate over time. Based on the isotropic homogenized relaxation tensors, was determined an equivalent rheological model representing the fractured viscoelastic material assuming different rheological models for matrix and fractures. Finally, was analyzed the fracture propagation conditions in viscoelastic means in two ways: in an approximate way (improving the studies conducted by Nguyen) and homogenized form (assuming that the propagation of fractures occurs at the macroscopic scale).

Key-words: *fractures; propagation; viscoelasticity; micromechanics.*

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	18
1.1 OBJETIVOS	19
1.2 DELINEAMENTO	20
2 MEIOS ROCHOSOS	21
2.1 MACIÇOS ROCHOSOS	21
2.1.1 Comportamento Mecânico dos Maciços Rochosos	22
2.1.1.1 Índice RQD	23
2.1.1.2 Índice RMR	23
2.1.1.3 Índice Q	24
2.1.1.4 Índice GSI	24
2.1.2 Reologia dos Maciços Rochosos	25
2.1.3 Critério de Ruptura de Um Maciço Rochoso	27
2.1.3 Modelagem descontínua ou Discreta	27
2.1.3 Modelagem contínua	27
2.2 MATRIZ ROCHOSA	27
2.2.1 Critério de Ruptura de Murrell	28
2.2.1 Critério de Ruptura de Hoek	29
2.3 DESCONTINUIDADES	29
2.3.1 Natureza das Descontinuidades	30
2.3.2 Parâmetros Geométricos	31
2.3.3 Comportamento Mecânico das Descontinuidades	21
2.3.3.1 Comportamento em Compressão	33
2.3.3.1 Comportamento em Cisalhamento	34
2.3.4 Critérios de Ruptura de Uma Descontinuidade	35
2.3.4.1 Critério do tipo Coulomb	35
2.3.4.2 Critério de Barton	36
2.3.4.3 Critério de Hoek	36

3 FUNDAMENTOS DA MICROMECAÂNICA	38
3.1 VER – VOLUME ELEMENTAR REPRESENTATIVO	40
3.2 REGRA DAS MÉDIAS	42
3.3 LEMA DE HILL	44
3.4 PROCESSOS DE HOMOGENEIZAÇÃO EM ELASTICIDADE	44
3.4.1 Tensão Homogênea Aplicada no Contorno	45
3.4.2 Deformação Homogênea Aplicada no Contorno	46
3.5 DETERMINAÇÃO DAS PROPRIEDADES MACROSCÓPICAS ELÁSTICAS DE MEIOS FRATURADOS	48
3.5.1 Resolução Analítica	48
3.5.2 Limites Variacionais	49
3.5.2.1 Limites Variacionais de Reuss e Voigt	49
3.5.2.2 Limites Variacionais de Hashin-Strikman	50
3.5.3 Determinação Numérica	51
3.5.3 Problema da Inclusão de Eshelby e Estimativas Associadas	51
3.5.3.1 Problema da Inclusão de Eshelby	52
3.5.3.2 Estimativa Diluída	53
3.5.3.3 Estimativa de Mori-Tanaka	54
3.5.3.4 Estimativa Auto Consistente	54
3.6 CASO PARTICULAR DE UM MEIO FRATURADO	55
3.6.1 Lema de Hill para Meios com Descontinuidades	56
3.6.2 Tensor de Concentração de Deformações	57
4 ABORDAGEM MICROMECAÂNICA DA ELASTICIDADE DE UM MEIO FRATURADO	59
4.1 TENSOR DE RIGIDEZ ELÁSTICO HOMOGENEIZADO	59
4.1.1 Fraturas Orientadas Paralelamente	60
4.1.2 Fraturas Orientadas Aleatoriamente	63
4.1.3 Representação Gráfica das componentes elásticas da Rigidez	67

4.2 PROPAGAÇÃO DE FRATURAS EM MEIOS ELÁSTICOS	69
4.2.1 Deformação Prescrita – Fraturas Orientadas Paralelamente	73
4.2.1.1 Deformação Isótropa	74
4.2.1.2 Deformação Uniaxial	75
4.2.1.3 Deformação de Cisalhamento	75
4.2.1.3 Representação Gráfica das Deformações Críticas	75
4.2.2 Deformação Prescrita – Fraturas Orientadas Aleatoriamente	76
4.2.2.1 Deformação Isótropa	77
4.2.2.2 Deformação Uniaxial	77
4.2.2.3 Deformação de Cisalhamento	78
4.2.2.3 Representação Gráfica das Deformações Críticas	78
4.2.3 Tensão Prescrita – Fraturas Orientadas Paralelamente	79
4.2.3.1 Tensão Isótropa	79
4.2.3.2 Tensão Uniaxial	80
4.2.3.3 Tensão de Cisalhamento	80
4.2.3.3 Representação Gráfica das Tensões Críticas	81
4.2.4 Tensão Prescrita – Fraturas Orientadas Aleatoriamente	82
4.2.4.1 Tensão Isótropa	82
4.2.4.2 Tensão Uniaxial	83
4.2.4.3 Tensão de Cisalhamento	83
4.2.4.3 Representação Gráfica das Tensões Críticas	84
4.3 FORMULAÇÃO ALTERNATIVA DO CRITÉRIO DE PROPAGAÇÃO	84
4.3.1 Propagação de Fraturas: Abordagem em Tensões	85
4.3.2 Propagação de Fraturas: Abordagem em Deformações	86
4.3.2.1 Deformação Isótropa – Modelo de Distribuição de Fraturas Aleatório	88
4.3.2.2 Deformação Uniaxial – Modelo de Distribuição de Fraturas Aleatório	88
4.3.2.3 Deformação de Cisalhamento – Modelo de Distribuição de Fraturas Aleatório .	89
4.3.2.4 Representação gráfica das condições alternativas	89
5 FUNDAMENTOS DA VISCOELASTICIDADE	91
5.1 VISCOELASTICIDADE UNIDIMENCIONAL	91
5.1.1 Ensaio de Fluência e de Relaxação	91

5.1.2	Viscolasticidade Linear	92
5.1.3	Viscolasticidade Não Envelhescente	93
5.1.4	Modelos Reológicos Clássicos	94
5.1.4.1	Modelos Básicos: Mola Simples e Amortecedor	94
5.1.4.2	Modelos de Maxwell e Kelvin	95
5.1.4.3	Modelos Sólidos Lineares Padrão	96
5.2	MODELO VISCOELÁSTICO TENSORIAL TRIDIMENSIONAL	97
5.3	LEI DE COMPORTAMENTO NO ESPAÇO DE CARSON-LAPLACE	99
5.4	PROPAGAÇÃO DE FRATURAS EM MEIOS VISCOELÁSTICOS ..	100
6	COMPORTAMENTO HOMOGENEIZADO DE UM MEIO VISCOELÁSTICO FRATURADO	104
6.1	DETERMINAÇÃO DOS TENSORES DE FLUÊNCIA E DE RELAXAÇÃO	104
6.1.1	Inversa da Transformada de Carson-Laplace	104
6.1.2	Fraturas Orientadas Paralelamente	107
6.1.2.1	Aplicação 1 – Matriz (Kelvin-Voigt) e Fratura (Mola)	109
6.1.2.2	Aplicação 2 – Matriz (Burger) e Fratura (Maxwell)	114
6.1.2.3	Aplicação 3 – Matriz (Mola) e Fratura (Maxwell)	118
6.1.3	Tensores de Fluência	121
6.1.4	Fraturas Orientadas Aleatórias	125
6.1.4.1	Aplicação 4 – Matriz (Kelvin-Voigt) e Fratura (Mola)	126
6.1.4.2	Aplicação 5 – Matriz (Burger) e Fratura (Maxwell)	128
6.1.4.3	Aplicação 6 – Matriz (Mola) e Fratura (Maxwell)	129
6.1.5	Tensores de Fluência	130
6.2	ILUSTRAÇÃO DO COMPORTAMENTO VISCOELÁSTICO: EXPERIÊNCIA DE RELAXAÇÃO EM COMPRESSÃO SIMPLES	133
6.3	MODELO REOLÓGICO EQUIVALENTE PARA O MATERIAL VISCOELÁSTICO FRATURADO	135

7 PROPAGAÇÃO DE FRATURAS EM MEIOS VISCOELÁSTICOS	140
7.1 AVALIAÇÃO NUMÉRICA DA CONDIÇÃO DE PROPAGAÇÃO ...	141
7.2 AVALIAÇÃO SIMPLIFICADA DA CONDIÇÃO DE PROPAGAÇÃO	142
7.2.1 Aplicação de Uma Taxa de Deformação Constante	145
7.2.2 Aplicação de Uma Tensão Constante	149
7.2.1 Aplicação de Uma Deformação Constante	151
7.3 PROPAGAÇÃO DE FRATURAS EM MEIOS VISCOELÁSTICOS HOMOGENEIZADOS: APROXIMAÇÃO POR MODELO DE BURGER	152
7.3.1 Determinação do Modelo de Burger Homogeneizado	153
7.3.2 Determinação da Energia Livre Para o Modelo Homogeneizado de Burger	160
7.3.3 Aplicação da Energia Livre para Modelos Homogeneizados	164
7.3.3.1 Aplicação da Energia Livre: Modelo Homogeneizado de Burger ...	164
7.3.3.2 Aplicação da Energia Livre: Modelo Homogeneizado Pleno	168
8 CONSIDERAÇÕES FINAIS E SUGESTÕES PARA OUTROS TRABALHOS	172
REFERÊNCIAS	175
ANEXO A: COEFICIENTES DE M_0^0 E M_1^0	179
ANEXO B: COEFICIENTES DE M_0^∞ E M_1^∞	180

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1: Maciço rochoso composto por blocos rochosos e descontinuidades	21
Figura 2.3: Curva Tensão-Deformação de uma rocha genérica	26
Figura 2.7: Teste de compressão sobre uma descontinuidade	33
Figura 2.8: Teste de cisalhamento sobre uma descontinuidade	34
Figura 2.9: Valores de JRC com base no perfil da descontinuidade	35
Figura 2.10: Critério de Barton para uma descontinuidade	36
Figura 2.11: Critério de Hoek para uma descontinuidade	37
Figura 3.1: Volume elementar representativo	41
Figura 3.2: Célula unitária representativa	41
Figura 3.3: Representação do processo de homogeneização	42
Figura 3.4: Inclusão de Eshelby em um meio infinito	52
Figura 3.5: Modelo diluído	54
Figura 3.6: Modelo Mori-Tanaka	54
Figura 3.7: Modelo Auto Consistente	55
Figura 3.8: Representação de uma fratura	56
Figura 4.1: Distribuição de fraturas	59
Figura 4.2: Geometria oblata das fraturas	60
Figura 4.3: Componentes normal e tangenciais do tensor de rigidez de uma fraturas	61
Figura 4.4: Vetor normal ao plano das fraturas	63
Figura 4.5: Componentes “ $iiii$ ” do Tensor de Rigidez	68
Figura 4.6: Componentes “ ijj ” do Tensor de Rigidez	68
Figura 4.7: Componentes “ ijj ” do Tensor de Rigidez	69
Figura 4.8: Comparação entre as deformações críticas admitindo distribuição paralela de fraturas	76
Figura 4.9: Comparação entre as deformações críticas admitindo distribuição aleatória de fraturas	78

Figura 4.10: Comparação entre as tensões críticas admitindo distribuição paralela de fraturas	81
Figura 4.11: Comparação entre as tensões críticas admitindo distribuição aleatória de fraturas	84
Figura 4.12: Comparação entre as condições de propagação alternativas admitindo distribuição aleatória de fraturas	90
Figura 5.1: Modelo de mola simples e amortecedor	94
Figura 5.2: Modelo de Maxwell e modelo de Kelvin	95
Figura 5.3: Modelo Kelvin-Voigt e modelo de Zenez	96
Figura 5.4: Modelo reológico de Burger	97
Figura 5.5: Definição das deformações atuantes no modelo de Burger	101
Figura 6.1: Fraturas orientadas paralelamente	107
Figura 6.2: Modelos reológicos utilizados na aplicação 1	108
Figura 6.3: Comparação das funções de relaxação em compressão isótropa e em cisalhamento da matriz e da fratura na aplicação 1	111
Figura 6.4: Evolução temporal das componentes R_{1111}^{hom} e R_{3333}^{hom} normalizadas na aplicação 1	113
Figura 6.5: Evolução temporal das componentes R_{1122}^{hom} e R_{1133}^{hom} normalizadas na aplicação 1	113
Figura 6.6: Evolução temporal das componentes R_{1212}^{hom} e R_{2323}^{hom} normalizadas na aplicação 1	113
Figura 6.7: Modelos reológicos utilizados na aplicação 2	114
Figura 6.8: Comparação entre as funções de relaxação em compressão isótropa da matriz e da fratura para as aplicações 1 e 2	115
Figura 6.9: Comparação das funções de relaxação em compressão isótropa e em cisalhamento da matriz e da fratura na aplicação 2	116
Figura 6.10: Evolução temporal das componentes R_{1111}^{hom} e R_{3333}^{hom} normalizadas na aplicação 2	117
Figura 6.11: Evolução temporal das componentes R_{1122}^{hom} e R_{1133}^{hom} normalizadas na aplicação 2	117
Figura 6.12: Evolução temporal das componentes R_{1212}^{hom} e R_{2323}^{hom} normalizadas na aplicação 2	117

Figura 6.13: Modelos reológicos utilizados na aplicação 3	118
Figura 6.14: Evolução temporal das componentes R_{1111}^{hom} e R_{3333}^{hom} normalizadas na aplicação 3	119
Figura 6.15: Evolução temporal das componentes R_{1122}^{hom} e R_{1133}^{hom} normalizadas na aplicação 3	120
Figura 6.16: Evolução temporal das componentes R_{1212}^{hom} e R_{2323}^{hom} normalizadas na aplicação 3	120
Figura 6.17: Evolução temporal das componentes J_{1111}^{hom} e J_{3333}^{hom} normalizadas na aplicação 1	122
Figura 6.18: Evolução temporal das componentes J_{1122}^{hom} e J_{1133}^{hom} normalizadas na aplicação 1	122
Figura 6.19: Evolução temporal das componentes J_{1212}^{hom} e J_{2323}^{hom} normalizadas na aplicação 1	122
Figura 6.20: Evolução temporal das componentes J_{1111}^{hom} e J_{3333}^{hom} normalizadas na aplicação 2	123
Figura 6.21: Evolução temporal das componentes J_{1122}^{hom} e J_{1133}^{hom} normalizadas na aplicação 2	123
Figura 6.22: Evolução temporal das componentes J_{1212}^{hom} e J_{2323}^{hom} normalizadas na aplicação 2	123
Figura 6.23: Evolução temporal das componentes J_{1111}^{hom} e J_{3333}^{hom} normalizadas na aplicação 3	124
Figura 6.24: Evolução temporal das componentes J_{1122}^{hom} e J_{1133}^{hom} normalizadas na aplicação 3	124
Figura 6.25: Evolução temporal das componentes J_{1212}^{hom} e J_{2323}^{hom} normalizadas na aplicação 3	124
Figura 6.26: VER da distribuição de fraturas aleatórias	125
Figura 6.27: Evolução temporal dos módulos k_{hom} e μ_{hom} normalizados na aplicação 4	128
Figura 6.28: Evolução temporal dos módulos k_{hom} e μ_{hom} normalizados na aplicação 5	129
Figura 6.29: Evolução temporal dos módulos k_{hom} e μ_{hom} normalizados na aplicação 6	130
Figura 6.30: Evolução temporal dos módulos $\frac{1}{k_{hom}}$ e $\frac{1}{\mu_{hom}}$ normalizados na aplicação 4	131

Figura 6.31: Evolução temporal dos módulos $\frac{1}{k_{hom}}$ e $\frac{1}{\mu_{hom}}$ normalizados na aplicação 5	132
Figura 6.32: Evolução temporal dos módulos $\frac{1}{k_{hom}}$ e $\frac{1}{\mu_{hom}}$ normalizados na aplicação 6	132
Figura 6.33: Solicitação na experiência de relaxação em compressão simples	133
Figura 6.34: Evolução das componentes de tensão na experiência de relaxação considerando $T_0 = 5.10^{10}$	134
Figura 6.35: Modelo reológico para o k_{hom}^* no espaço virtual	136
Figura 6.36: Modelo reológico para o k_{hom} admitindo matriz Padrão e fraturas elásticas	136
Figura 6.37: Modelo reológico para o μ_{hom}^* no espaço virtual	137
Figura 6.38: Evolução do coeficiente de Poisson homogeneizado	138
Figura 7.1: Evolução de \mathcal{F}^∞ segundo o parâmetro de dano ϵ_∞	146
Figura 7.2: Evolução de $f(\epsilon_\infty)$ segundo o parâmetro de dano ϵ_∞	147
Figura 7.3: Evolução de \dot{E} segundo o parâmetro de dano ϵ_∞	148
Figura 7.4: Evolução de Σ_{11}^{crit} segundo o parâmetro de dano ϵ	149
Figura 7.5: Comparação entre tensões críticas	150
Figura 7.6: Evolução temporal da força termodinâmica	152
Figura 7.7: Modelo de Burger homogeneizado	161
Figura 7.8: Evolução temporal das energias no material	168
Figura 7.9: Evolução temporal das energias no material	170

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.5: Propriedades mecânicas de rochas intactas	28
Tabela 4.1: Propriedades do Material Admitido	67
Tabela 6.1: Parâmetros sugeridos na aplicação 1	110
Tabela 6.2: Parâmetros sugeridos na aplicação 2	115
Tabela 6.3: Parâmetros sugeridos na aplicação 3	119
Tabela 7.1: Valores para os parâmetros do modelo assumido	167

1 INTRODUÇÃO

Como resultado de pesquisas, cada vez mais tem-se desenvolvido modelos matemáticos para descrever o comportamento de materiais mais complexos. Compósitos desenvolvidos industrialmente frequentemente são tema destas pesquisas, pois muitas vezes os modelos existentes não descrevem toda a complexibilidade destes materiais, seja termomecânica ou outras propriedades. Contudo, nem sempre estas pesquisas têm como alvo um material novo, muitas vezes materiais já existentes, os quais já possuem modelos estabelecidos, recebem modelos revisados, visando obter ora um comportamento mais completo ora um fenômeno específico não observado nos modelos já existentes.

Neste âmbito, análises mais complexas no campo da mecânica da fratura e na caracterização reológica tem sido desenvolvidas com a finalidade de obter uma descrição mais completa de diversos materiais. No entanto, pesquisas que abordam ambos os temas simultaneamente – mecânica da fratura aplicada em materiais com reologia viscoelástica – começaram a ser apresentados, em maior número, recentemente. Tais pesquisas, em geral realizadas visando geomateriais, obtêm um comportamento diferente dos atuais modelos existentes, os quais geralmente consideram estes fenômenos isoladamente.

Embora a propagação de fraturas em meios viscoelásticos já tenha sido estudada, possibilitando ajustes nas teorias conhecidas, os modelos adotados por Nguyen (2010) desconsideram a interação existente entre as faces das fissuras, as quais são responsáveis por transmitir esforços. Estender os estudos a uma abordagem que admita a transmissão de esforços torna-se um objetivo importante para melhor representar a propagação de fraturas nestes meios.

Neste trabalho foram abordados materiais elástico lineares e viscoelástico lineares não envelhescentes com microfraturas, admitindo a transmissão de esforços provenientes da interação entre as faces destas fraturas. Tal modelo foi elaborado através da teoria da homogeneização, com finalidade de simplificar a aplicação do modelo. Os modelos aqui apresentados são retratados de forma genérica, sendo aplicáveis a quaisquer materiais que se enquadrem nas restrições estabelecidas, desta forma somente as aplicações são desenvolvidas com ênfase em solos rochosos.

1.1 OBJETIVOS

Uma vez que solos rochosos apresentam um comportamento com grande variação de quantidade, posição e dimensão de fraturas a análise utilizando a mecânica do contínuo torna-se uma ferramenta ineficiente quando aplicada sob tais condições de descontinuidades. Para manter esta ferramenta operacional, necessita-se utilizar algum processo que englobe as fraturas nas propriedades mecânicas do material. A teoria da homogeneização adequa-se perfeitamente ao processo mencionado, desenvolvendo-se como uma ferramenta essencial na análise de materiais descontínuos. Sob esta ótica e admitindo que o material em questão apresenta um comportamento viscoelástico ao longo de um período suficientemente longo, admite-se os seguintes objetivos para este trabalho:

- a) Utilizar as ferramentas da micromecânica para determinar a rigidez efetiva do material elástico fraturado e comparar com os resultados obtidos por Lorenci (2013);
- b) Utilizar as ferramentas da mecânica da fratura para determinar as condições de propagação em um material frágil elástico fraturado;
- c) Obter expressões capazes de representar o material viscoelástico fraturado sob um modelo reológico específico, expandindo os estudos já conhecidos para materiais descontínuos com transmissão de esforços entre faces de fraturas;
- d) Utilizar as ferramentas da micromecânica e da viscoelasticidade sem envelhecimento para determinar as propriedades viscoelásticas homogeneizadas para o material fraturado;
- e) Utilizar as ferramentas da mecânica da fratura e da viscoelasticidade para formular condições de propagação para o material frágil viscoelástico fraturado.

1.2 DELINEAMENTO

Uma vez que o presente trabalho é dedicado a geomateriais rochosos, tais materiais e seu comportamento típico são temas do capítulo 2. Embora algumas bibliografias apresentadas ao longo deste trabalho sejam baseadas no concreto, o modelo reológico aplicado pode ser estendido a rochas sem perda de qualidade no resultado. No entanto, a consideração de viscosidade em solos rochosos torna-se complicada visto que, grande parte das vezes, o tempo

característico destes fenômenos tem ordem muito maior do que o período de observação humano. Por este motivo, para estudar estes materiais é necessário observar depósitos do mesmo material, com características físicas semelhantes, formados em épocas diferentes, efetuando-se ensaios de descompressão.

O capítulo 3 aborda a micromecânica e homogeneização, explicando os conceitos, leis de determinação das propriedades e o lema de Hill para corpos com descontinuidades. Também neste capítulo é apresentado o tensor de rigidez elástico fraturado homogeneizado. Este modelo será utilizado, posteriormente, para elaborar o modelo viscoelástico fraturado homogeneizado.

O capítulo 4 apresenta algumas aplicações admitindo materiais elásticos. Neste capítulo são apresentados os tensores de rigidez admitindo distribuição de fraturas aleatório e paralelo, cujos resultados são comparados com aqueles obtidos por Lorenci (2013), bem como a teoria da propagação de fraturas e condições de propagação de fraturas para algumas aplicações.

No capítulo 5 estão descritos os fundamentos básicos da viscoelasticidade. Tais fundamentos são essenciais para a adequada compreensão deste trabalho visto que estão presentes conceitos de fluência e relaxação, modelos reológicos, definição do espaço de Carson-Laplace e as expressões incrementais de viscoelasticidade. Além disso, consta neste capítulo o critério de propagação de fraturas para estes materiais.

No capítulo 6 apresentam-se algumas aplicações, as quais são responsáveis por determinar os tensores de relaxação e de fluência para diferentes reologias para a matriz e para as fraturas. Além disso, este capítulo apresenta o modelo reológico resultante no processo de homogeneização e condições de propagação de fraturas.

Finalmente, no capítulo 7, são apresentadas as considerações finais deste trabalho, juntamente com propostas para estudos posteriores que visem a complementação deste trabalho.

2 MEIOS ROCHOSOS

O presente capítulo foi escrito sob o âmbito da caracterização mecânica e geométrica de maciços rochosos e seus constituintes: a matriz rochosa e as fraturas ou descontinuidades no geral.

2.1 MACIÇOS ROCHOSOS

Os maciços rochosos são meios heterogêneos formados por um conjunto justaposto de blocos de rochas sãs, separados por descontinuidades físicas. As descontinuidades existentes podem apresentar grande variação nas dimensões, fazendo com que os blocos de rochas sãs apresentem dimensões que vão da ordem de centímetros até dezena de metros.



Figura 2.1: Maciço rochoso composto por blocos e descontinuidades.

Jeager *et alli* (2007) explicam que zonas rochosas são formadas por grandes maciços e que as descontinuidades são, em geral, caracterizadas por fraturas, poros, falhas e demais tipos de defeitos, os quais podem ficar preenchidos – ou não – por fluidos pressurizados.

Atta (2004) afirma que a diferença de escalas de descontinuidades é uma característica importante das rochas. Neste contexto, as descontinuidades são quaisquer tipos de interrupção

ou modificação abrupta nas propriedades físico mecânicas da matriz rochosa. Geralmente as descontinuidades são classificadas em famílias, as quais são definidas conforme a dimensão, orientação e comportamento mecânico.

Pode-se admitir que as menores heterogeneidades que podem ser estudadas – de forma a manter as propriedades das rochas – são os cristais, os quais apresentam em geral dimensões muito pequenas. A interface existente entre dois cristais justapostos é, por si só, uma descontinuidade e, portanto, um ponto de fragilidade do material. Atta (2004), no entanto, observa que a menor escala utilizada na engenharia corresponde as fraturas e, portanto, estas passam a ser admitidas como as únicas heterogeneidades existentes dentro da chamada escala do engenheiro. É nesta escala que a modelagem experimental é realizada, admitindo-se que todas as demais heterogeneidades de escalas menores passaram por um processo prévio de homogeneização.

2.1.1 Comportamento Mecânico dos Maciços Rochosos

As propriedades mecânicas do maciço rochoso são de difícil determinação devido à anisotropia e descontinuidade apresentada nestas estruturas. Para se obter estas propriedades, examina-se experimentalmente blocos de rocha com dimensões significativas. Utilizando este procedimento, a resistência dos maciços é superestimada enquanto a deformabilidade é subestimada (POUYA; GHOREYCHI, 2001). Tratando-se das fraturas, embora estejam presentes em proporção reduzida, são regiões com baixa resistência e alta deformabilidade, sendo possível que interfiram significativamente na resistência do maciço como um todo.

Quando submetidas a um estado de tensão ou pressão de fluidos, as juntas podem interromper a continuidade dos deslocamentos no maciço. Em casos onde estas perturbações são pequenas em relação às dimensões do maciço, o meio pode ainda ser tratado como contínuo, mesmo que algumas propriedades do meio se modifiquem. Por outro lado, quando tais perturbações têm dimensões significativas, elas devem ser tratadas como parte da estrutura ou como um limite (JAEGER et al., 2007).

A determinação das propriedades mecânicas dos maciços rochosos é de grande complexidade, sendo necessária a utilização de diferentes abordagens, dependendo do tipo de maciço e dos objetivos da análise. Por outro lado, o acúmulo de experiências permitiu a elaboração dos sistemas empíricos para a classificação dos maciços rochosos, permitindo uma caracterização dos parâmetros mecânicos.

Usualmente a caracterização de maciços rochosos é feita com base em índices de classificação. O objetivo destes índices é indicar valores aproximados para as propriedades da matriz rochosa para que seja possível realizar uma tomada de decisão racional em projetos de engenharia. Os índices mais conhecidos são: RQD, RMR, Q e GSI, os quais estão apresentados nas seções seguintes.

2.1.1.1 Índice RQD

O índice RQD foi proposto por Deere em 1964 e é baseado na quantidade de fraturas e na alteração da rocha. Estes elementos são obtidos com base em testemunhos de sondagem. O cálculo do índice consiste em somar os comprimentos de fragmentos com mais de 10 centímetros e dividir esta soma pelo comprimento total da amostra. O resultado é dado em percentagem:

$$\text{RQD} = \frac{\sum L_i}{L_T} * 100 \quad (2.1)$$

Onde L_i é o comprimento dos fragmentos maiores de 10 centímetros e L_T é o comprimento total da amostra. Baseado no índice RQD, foi proposta a classificação de maciços rochosos, a qual varia desde a classificação muito ruim, até excelente.

2.1.1.2 Índice RMR

Desenvolvido por Bieniawski (1976), o cálculo do índice RMR é um método de classificação superior ao RQD. Esta melhoria de desempenho, no entanto, requer a utilização de seis parâmetros: resistência da rocha intacta, índice RQD, propriedades hidráulicas, espaçamento das juntas, orientação das juntas e características das juntas.

A resistência da rocha intacta é caracterizada pela resistência a compressão uniaxial da rocha intacta e é determinada com base em testes de carga pontual, mas pode-se determiná-la, também, com base em ensaios de laboratórios em um corpo de prova obtido por meio de sondagem previamente preparada.

As propriedades hidráulicas também podem interferir no comportamento do maciço rochoso. Para avaliar este parâmetro é necessário um túnel piloto ou uma escavação a fim de efetuar a mensuração do fluxo de água ou da pressão intersticial das falhas.

O espaçamento das juntas deve ser obtido com base em sondagens. Para a determinação da orientação das juntas em função das solicitações da escavação, Bieniawski recomenda o ajuste da soma dos cinco outros parâmetros com base na orientação favorável ou desfavorável das descontinuidades.

2.1.1.3 Índice Q

Proposto originalmente por Barton, Lien e Lunde (1974), este índice utiliza seis parâmetros com ação multiplicativa, formando-se três fatores racionais que se multiplicam. Cada um destes fatores expressa um determinado comportamento ou característica: $\left(\frac{RQD}{J_n}\right)$ representa a probabilidade de formação de blocos instáveis; $\left(\frac{J_r}{J_a}\right)$ define a resistência ao cisalhamento da interface entre blocos; $\left(\frac{J_w}{SRF}\right)$ representa tensões ativas.

$$Q = \frac{RQD}{J_n} \frac{J_r}{J_a} \frac{J_w}{SRF} \quad (2.2)$$

O valor de Q pode variar de 10^3 para uma rocha excelente, quase sem descontinuidades, até 10^{-3} para uma rocha com qualidade muito ruim. Dentro da expressão (2.2), J_n representa o número de famílias de juntas e seu valor é crescente segundo o aumento da degradação da rocha, variando entre 0,5 – para uma rocha quase intacta – até 20 para uma rocha branda. J_r refere-se a rugosidade da descontinuidades e J_a ao grau de alteração destas. J_w é o fator de redução devido a presença de água nas juntas, valendo 1 para uma rocha seca. Para rochas com grandes fluxos de água, J_w assume um valor muito baixo. Por fim, SRF representa o fator de redução de tensões. Este parâmetro deve ser avaliado quando há argila presente no maciço rochoso e leva em consideração o nível de tensão atuando no maciço estudado.

2.1.1.3 Índice GSI

Diferentemente dos índices Q e RMR, que foram desenvolvidos para dimensionar o suporte de uma escavação, o índice GSI – proposto por Hoek em 1995 – tem como objetivo adequar o critério empírico de Hoek e Brown para maciços fraturados e servir de base para projetos de escavações subterrâneas em rochas. O índice GSI pode ser expresso com base no índice Q ou RMR.

$$GSI = 9.\log Q' + 44 \quad (2.3a)$$

$$\text{com } Q' = \frac{RQD J_r}{J_n J_a}$$

ou

$$\text{GSI} = \text{RMR} \quad (2.3b)$$

2.1.2 Reologia de Maciços Rochosos

Do ponto de vista mecânico, a deformabilidade dos maciços é um dos parâmetros mais importantes com relação a seu comportamento (VALLEJO et al., 2002), ela representa a alteração das formas geométricas da rocha com base na ação de esforços ao corpo. Dependendo da intensidade destes carregamentos e das características mecânicas da rocha, a deformação será permanente ou temporária.

Geralmente, rochas apresentam comportamento não linear entre tensões aplicadas e deformações correspondentes. Farmer (1968) assume que é possível a distinção deste comportamento em três grupos:

- a) **comportamento quase elástico:** Apresentam um comportamento quase linear entre tensões aplicadas e deformações correspondentes até próximo ao ponto de ruptura. Este comportamento é mais comum em rochas maciças compactas com grãos finos;
- b) **comportamento semi-elástico:** Uma vez incrementada a tensão, apresentam um decréscimo das inclinações na curva tensão-deformação. Este é um comportamento típico de rochas ígneas de grãos grossos e sedimentares compactas de grãos finos com porosidade baixa e coesão razoável;
- c) **comportamento não elástico:** Uma vez aplicado um carregamento, a rocha passa por um estágio de compactação e fechamento de poros e fraturas antes de iniciar as deformações lineares. Tal mecanismo é comum em rochas pouco coesivas e com alto teor de poros.

Generalizando o comportamento em tensão-deformação das rochas pode ser dado na forma de uma curva semelhante à figura 2.3, composta por um trecho aproximadamente linear com uma inclinação máxima e quase constante, o segundo trecho é plástico não linear onde se situa a resistência máxima de pico e em um último trecho frágil, onde a rocha romperá.

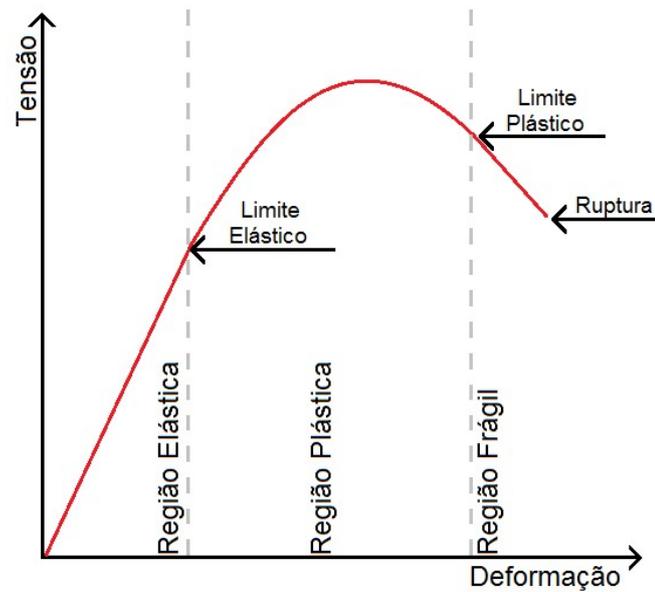


Figura 2.2: Curva Tensão-Deformação de uma rocha genérica

O módulo de elasticidade E é definido como a constante de proporcionalidade entre tensões e deformações na região elástica linear, onde as relações entre tensões e deformações podem ser aproximadas como lineares. Uma vez que as deformações permaneçam nesta região, o material pode retornar a sua configuração inicial com a retirada das tensões. Ao ingressar no regime plástico, a curvatura já não pode ser aproximada de forma linear, excluindo-se a noção de proporcionalidade linear entre tensões e deformações. Nesta região a rocha não retorna a sua configuração inicial mesmo após o descarregamento.

A temperatura e os efeitos devidos a vibrações de ações sísmicas também podem afetar o módulo de elasticidade dos maciços. A água também é considerada fator condicionante no comportamento mecânico. Farmer (1968) afirma que a água diminui significativamente o módulo de elasticidade, principalmente nas rochas porosas. Esta diminuição pode chegar em até 40% do valor em estado seco no caso de arenitos e calcários. De forma resumida, pode-se dizer que a presença da água no interior dos poros afeta a estrutura coesiva da rocha, enfraquecendo-a. Como a deformação, a formação das falhas é fortemente influenciada pela coesão, tal redução torna-se, então, compreensível. As tabelas 2.3 e 2.4 visam apresentar alguns parâmetros comuns para maciços rochosos na região elástica.

2.1.3 Critérios de Ruptura de Maciços Rochosos

A descrição da capacidade de resistência do maciço rochoso fraturado depende das aproximações consideradas para a análise de sua estabilidade. Pode-se, então, realizar uma modelagem contínua ou discreta das fraturas, as quais são apresentadas aqui.

2.1.3.1 Modelagem Descontínua ou Discreta

Nos casos onde o material rochoso é examinado na escala das fraturas, a análise de estabilidade do maciço é realizada distinguindo geometricamente as descontinuidades e a matriz rochosa. Esta é a abordagem média descontínua, considera-se em cada ponto do maciço o critério de ruptura da descontinuidade ou da rocha, de acordo se o ponto geométrico pertence a matriz ou às fraturas. Estes critérios são apresentados nas seções seguintes. Este tipo de abordagem é eficiente ainda que a rede de fraturas seja muito pouco densa, mas fica mais complexa e dispendiosa computacionalmente a medida que a rede se densifica.

2.1.3.1 Modelagem Contínua

Esta abordagem é melhor adaptada ao estudo de maciços fortemente fraturados pois ela consiste em observar o material em uma escala onde não se distinguem mais as descontinuidades da matriz rochosa. Observa-se então que o modelo do material rochoso fraturado é admitido como um material homogêneo. O critério de ruptura não depende mais, então, do ponto considerado. O critério de ruptura mais conhecido para este tipo de abordagem foi proposto por Hoek et Brown (1980) e se expressa da seguinte forma:

$$\sigma_1 = \sigma_3 + (m \sigma_3 \sigma_c + s \sigma_c^2)^{\frac{1}{2}} \quad (2.4)$$

Onde m é uma constante determinada empiricamente a partir das propriedades da rocha sã e da estimativa de resistência de compressão da mesma. σ_1 e σ_3 representam respectivamente as tensões principais máximas e mínimas e σ_c é a compressão uniaxial. Este critério é isótropo e é especialmente pertinente quando a distribuição das descontinuidades é perfeitamente aleatória.

2.2 MATRIZ ROCHOSA

A matriz rochosa é definida como a porção não fraturada da rocha, situada entre as descontinuidades do maciço rochoso. Seu comportamento geralmente é elásto-plástico isótropo

e homogêneo. Dentro do âmbito da homogeneização as matrizes são elementos essenciais para obtenção de parâmetros mecânicos. A tabela 2.5 apresenta alguns exemplos de parâmetros para rochas intactas durante a fase elástico-linear de carregamento:

	σ_c (MPa)	σ_t (MPa)	E_r (GPa)	ν
Norito	300	20	100	0,24
Granito	166	12	45	0,23
Quartzito	250	25	90	0,16
Pedra de Grès	100	6	22	0,24
Dolerito	280	20	70	0,20
Calcário	102	14	48	0,25

Tabela 2.1: Propriedades mecânicas rochas intactas
(BIENIAWSKI, 1974)

Geralmente as características pós-elásticas se reduzem à valores da resistência a compressão σ_c e a tração σ_t . Tabela-se na figura 2.5 que a resistência à compressão é cerca de uma ordem de grandeza superior a resistência à tração.

Na prática não existe um valor único para a resistência destes materiais, diversos autores propõem critérios de rupturas que contemplam compressão e tração combinados em direções diferentes. Os principais critérios utilizados para a matriz rochosa são: Mohr-Coulomb e os critérios propostos por Murrell (1965) e Hoek (1968). Independentemente do critério admitido, deve-se saber que são critérios empíricos baseados em resultados experimentais, os quais se adaptam melhor a determinados tipos de rochas. Uma vez que a natureza dos critérios é muito semelhante, geralmente escolhe-se o critério que pode ser mais facilmente utilizado no problema estudado. Estes critérios permitem descrever a resistência de um grande grupo de rochas, tal como argilitos, noritos, quartzitos, arenitos, entre outros.

2.2.1 Critério de Ruptura de Murrell (1965)

Este critério descreve a resistência para a rocha sã por meio da seguinte expressão:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_c} = k \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right)^A + 1 \quad (2.5)$$

Onde σ_1 e σ_3 designam respectivamente as tensões principais máximas e mínimas e σ_c representa a resistência a compressão uniaxial. A e k são duas constantes determinadas experimentalmente. Diversas experiências foram realizadas sobre cinco tipos de rochas com a finalidade de identificar estes valores (BIENIAWSKI, 1974). Junto aos pontos experimentais apresenta-se uma curva obtida através de uma correlação com os pontos. Esta curva é responsável por definir os valores de A e k. Nota-se que k é um valor que altera a inclinação da curva de forma constante a passo que A (o qual varia muito pouco para as rochas) altera a inclinação segundo o acréscimo das tensões.

2.2.1 Critério de Ruptura de Hoek (1968)

Similarmente ao critério de ruptura de Murrell, o critério de Hoek também descreve a resistência para rochas sãs e pode ser representado pela seguinte expressão:

$$\frac{\tau_m}{\sigma_c} = B \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_c} \right)^C + 0,1 \quad (2.6)$$

Onde $\tau_m = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$ e $\sigma_m = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$, os quais designam respectivamente a tensão de cisalhamento máxima e a tensão normal média, Novamente σ_c é a resistência a compressão uniaxial. B e C são coeficientes empíricos, determinados a partir de resultados de experiências realizadas sobre diferentes rochas. Algumas curvas de ruptura, com os pontos obtidos experimentalmente, são apresentadas na figura 2.5. Observa-se a mesma influência dos materiais estudados por Murrell sobre B e C, B aumenta a resistência a compressão e C é quase constante.

2.3 DESCONTINUIDADES

O termo descontinuidade representa uma região de pequena espessura responsável pela mudança abrupta nas propriedades físico-mecânicas de uma rocha. Esta região deve ser responsável por uma fragilidade no meio e é proveniente de diversos fatores tal como degradação, mudança de material, separação dos blocos rochosos ou outros. Percebe-se, então, que o comportamento mecânico destes elementos deve apresentar propriedades inferiores aos blocos de rocha, tornando a inclusão destes elementos essenciais na modelagem.

Segundo Jaeger et al. (2007), as descontinuidades são o tipo mais comum de estrutura geológica e representam um fenômeno comum a todas rochas ígneas e sedimentares. Elas são definidas

como fraturas na rocha, ao longo das quais houve pouco ou nenhum deslocamento transversal e geralmente ocorrem em grupos onde são dispostas mais ou menos paralelas e regularmente espaçadas. São comuns os conjuntos orientados em diferentes direções, de modo a dividir o maciço em uma estrutura de blocos.

Em muitos casos, a distribuição das descontinuidades não é perfeitamente aleatória, provocando anisotropias nas propriedades do maciço, sendo a principal destacada a anisotropia de resistência. A anisotropia também é encontrada em rochas com estruturas contínuas, isso se deve à orientação preferencial de cristais e minerais ou ao histórico de tensões. Deste modo, o comportamento mecânico do maciço também é anisotrópico.

Segundo Bandis et al. (1983), em um maciço rochoso fraturado, a deformação das descontinuidades é um componente fundamental de seu comportamento, mesmo sob diferentes condições de tensão. Em níveis de tensão relativamente baixos, típicos de escavações superficiais, a deformação das juntas domina a deflexão elástica da rocha intacta. Mesmo para altos níveis de tensão, associados a grandes estruturas, o deslizamento e o fechamento das juntas constituem a parte principal do assentamento da rocha.

2.3.1 Natureza das Descontinuidades

As descontinuidades são geralmente classificadas de acordo com o modo de sua formação. Descontinuidades com mesma origem geológica possuem propriedades similares no que diz respeito às dimensões e às propriedades de resistência ao deslizamento. As descontinuidades podem ser classificadas segundo quatro grandes grupos:

- a) **superfície de estratificação (*bedding*)**: resultam de processos de formação sedimentar, são paralelas à superfície de deposição dos sedimentos. Possuem uma grande extensão e pouca ondulação. São pontos onde há depósito de sedimentos finos de xisto ou de argila, que os tornam perigosos para a estabilidade;
- b) **diaclasses**: são, muitas vezes, perpendiculares ou oblíquas aos planos de estratificação ou foliação do maciço. Não demonstram nenhum vestígio de movimento e têm uma extensão limitada;

- c) **trincas ou fraturas de expansão:** são formadas sob o efeito da tração originada em grandes movimentos tectônicos. Muitas vezes são preenchidas por calcita ou quartzo;
- d) **falhas (*fault*):** são resultados da zona de ruptura do maciço que sofreu um grande esforço cisalhante (deslocamento tangencial importante). Representam descontinuidades que separam duas entidades maiores do maciço e possuem grande extensão. Raramente são unidades planas singulares, pois normalmente constituem famílias de descontinuidades paralelas.

2.3.2 Parâmetros Geométricos

Percebe-se que as falhas, em geral, podem apresentar diversas escalas. Jeager et al. (2007) admitem que o conjunto de fissuras mais importante são as de grandes dimensões, com dimensão da ordem de dezena ou centena de metros, sendo praticamente planas e paralelas umas às outras. O conjunto de falhas que atravessa grandes fraturas têm, geralmente, menor importância, apresentando-se com espaçamento mais irregular e forma menos plana. O espaçamento entre estas falhas é da ordem de centímetros a dezena de metros. Descontinuidades de grandes dimensões podem ser preenchidas com minerais solúveis ou podem permanecer abertas, propiciando o acúmulo e transporte de fluidos.

Além das falhas com grandes dimensões, fraturas de pequenas dimensões também expõem um comportamento descontínuo ao material, no entanto, esta descontinuidade apresenta menores valores de modo que, quase sempre, é possível analisar o material por meio da teoria da homogeneização.

Por fim destaca-se os seguintes parâmetros necessários para descrever completamente uma determinada descontinuidade:

- a) **orientação:** trata-se do ângulo formado entre o eixo – normal ou paralelo – da falha e um eixo de referência;
- b) **número de famílias:** uma família de descontinuidades é caracterizada por uma orientação e região comum no espaço;
- c) **persistência:** definida como a extensão exposta da superfície da falha;

- d) **alteração das paredes:** trata-se do grau de alteração da rocha e da espessura que tal alteração apresenta. As alterações ocorrem em afloramentos rochosos e em descontinuidades com percolação de fluidos;
- e) **rugosidade:** caracteriza-se pelas irregularidades dos planos que compõem as descontinuidades;
- f) **abertura:** corresponde a menor distância entre duas faces opostas da descontinuidade;
- g) **preenchimento:** termo utilizado para designar a presença de materiais no interior das descontinuidades;
- h) **espaçamento:** o espaçamento entre descontinuidades é a distância média entre duas descontinuidades. Admite-se como o espaçamento da família a distância média entre descontinuidades subsequentes. De modo geral, determina-se o espaçamento como a quantidade de descontinuidades em uma determinada unidade de medida;
- i) **grau de fraturamento:** expressa a quantidade de fraturas em relação a determinado volume de rocha;
- j) **resistência das paredes:** trata-se da resistência a compressão da rocha – alterada ou não – que compõem as paredes de uma descontinuidade.

2.3.3 Comportamento Mecânico das Descontinuidades

As propriedades mecânicas das descontinuidades geralmente são identificadas ao estudar seu comportamento sobre tensão normal e tangencial. O comportamento mecânico de uma descontinuidade é definido pela relação entre os esforços aplicados e os deslocamentos relativos entre as duas faces da descontinuidade. Muitos trabalhos experimentais, especialmente de Goodman (1974) e Bandis et al. (1983), evidenciaram o comportamento típico de uma descontinuidade nas direções normais e tangenciais. Modelada como uma interface, o comportamento de uma descontinuidade é usualmente descrito por uma relação do tipo $\underline{T} = f\left(\left[\underline{\xi}\right]\right)$, onde \underline{T} designa o vetor de forças agindo sobre a descontinuidade e $\left[\underline{\xi}\right]$ representa o salto de deslocamento através da descontinuidade. O comportamento depende de diversos fatores, como a rugosidade, o grau de alteração e as propriedades do material de enchimento.

2.3.3.1 Comportamento em Compressão

Sobre uma compressão normal, é medido o fechamento da descontinuidade (deslocamento relativo normal). O comportamento da descontinuidade sobre compressão é definido pela relação entre seu deslocamento e a tensão de compressão aplicada. Esta relação não linear é representada na figura 2.3. Ela geralmente é modelada por uma lei hiperbólica entre tensões normais $\sigma_n (\geq 0)$ e o fechamento normal $u_n (\geq 0)$, tomando a seguinte forma:

$$\sigma_n = \frac{u_n k_{n0} V_m}{V_m - u_n} \quad (2.7)$$

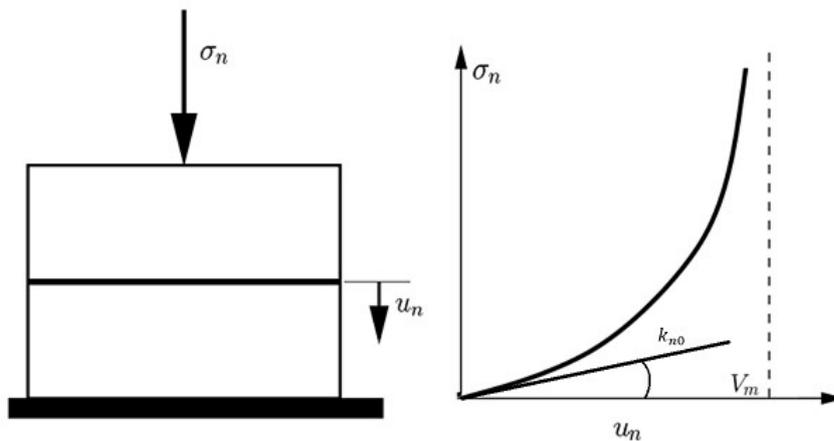


Figura 2.3: Teste de compressão sobre uma descontinuidade (ATTA, 2004)

onde V_m designa o fechamento máximo da descontinuidade, medida experimentalmente:

$$V_m = \lim_{\sigma_n \rightarrow \infty} u_n \quad (2.8)$$

E k_{n0} a inclinação na origem da curva, igualmente obtida experimentalmente:

$$k_{n0} = \left. \frac{d\sigma_n}{du_n} \right|_{u_n=0} \quad (2.9)$$

Durante esta análise, o deslocamento relativo na direção tangencial à descontinuidade é, geralmente, negligenciado.

2.3.3.1 Comportamento em Cisalhamento

Apresenta-se agora o comportamento quando uma amostra é submetida a um esforço de cisalhamento. O comportamento, na figura 2.4, é descrito por uma relação entre o cisalhamento τ e o deslocamento tangencial relativo u_t . Se observa um crescimento rápido junto ao valor de pico τ_p e depois um decréscimo até uma tensão residual τ_r , onde o cisalhamento se estabiliza. τ_p corresponde ao ponto de resistência máxima das asperezas existentes na descontinuidade. As amostras são progressivamente esmagadas, de forma a conduzir o valor de τ a estabilidade sobre o valor residual da tensão de cisalhamento.

Contrariamente ao carregamento normal apresentado anteriormente, o deslocamento normal relativo, perpendicular a direção de carregamento, não pode ser desconsiderado. É justamente devido ao deslizamento, que afasta as faces da descontinuidade, que o deslocamento tangencial se produz. Os deslocamentos normais e tangenciais são interligados por um ângulo dilatante d , da seguinte forma:

$$d = \arctan\left(\frac{du_n}{du_t}\right) \quad (2.10)$$

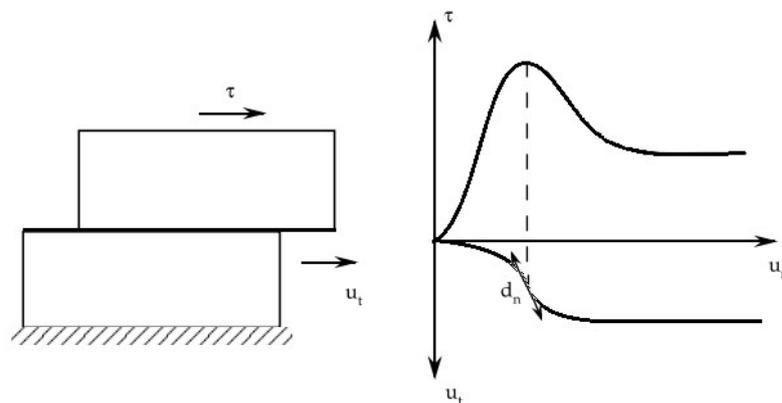


Figura 2.4: Teste de cisalhamento sobre uma descontinuidade
(Adaptado de ATTA, 2004)

O ângulo d máximo, denominado de d_n , afeta o pico de resistência e foi definido por Barton (1973) como:

$$d_n = JRC \log_{10}\left(\frac{JCS}{\sigma_n}\right) \quad (2.11)$$

Onde *JRC* (*Joint Roughness Coefficient*) e *JCS* (*Joint Wall Compressive Strength*) são parâmetros qualitativos que permitem caracterizar mecanicamente a descontinuidade. O *JRC*, expresso em graus ($0 \leq JRC \leq 20^\circ$), define a rugosidade da descontinuidade e permite determinar a variação do ângulo de dilatação e o atrito mobilizado. Alguns valores de *JRC* são representados na figura 2.5 com base no perfil da descontinuidade. O *JCS* caracteriza a alteração da parede da descontinuidade através de um ângulo de resistência em compressão simples, comparado à resistência da rocha sã.

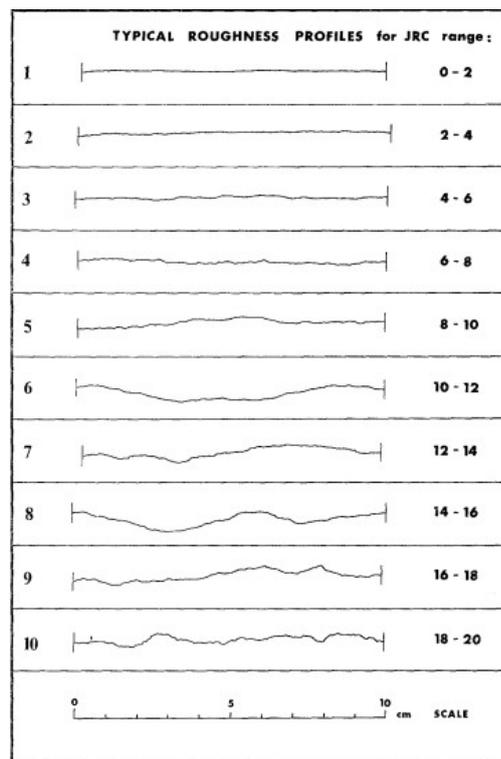


Figura 2.5: Valores de *JRC* com base no perfil da descontinuidade (ATTA, 2004)

2.3.4 Critérios de Ruptura de Uma Descontinuidade

Para descrever a capacidade de resistência de uma descontinuidade natural, três critérios são tradicionalmente utilizados. O critério da interface de Coulomb adaptado para as descontinuidades e mais dois critérios formulados especificamente para descontinuidades rochosas, são eles os critério de Barton e critério de Hoek.

2.3.4.1 Critério do tipo Coulomb

A forma deste critério é definida por duas expressões dependendo do nível de tensões aplicadas. Para as tensões normais fracas, o critério se escreve com uma coesão nula:

$$|\tau| = \sigma_n \tan(\varphi^i + d_j) \quad (2.12)$$

onde d_j e φ^i são os ângulos de dilatação e de atrito. Para os valores de tensão normal forte, a dilatação é negligenciada enquanto a coesão não pode mais ser nula e escreve-se:

$$|\tau| = C_j + \sigma_n \tan(\varphi^i) \quad (2.13)$$

2.3.4.2 Critério de Barton (1973)

O critério de Barton é formulado a partir do critério de Coulomb, de modo que o ângulo de dilatação d é substituído por seu valor máximo d_n definido na expressão (2.9):

$$|\tau| = \sigma_n \tan\left(\varphi^i + JRC \log_{10}\left(\frac{JCS}{\sigma_n}\right)\right) \quad (2.14)$$

Este critério apresenta um problema de definição quando a tensão normal é nula. Além disso, sua expressão não é mais válida quando σ_n excede o valor de JCS da descontinuidade estudada. A figura 2.6 apresenta um gráfico da evolução do critério de Barton.

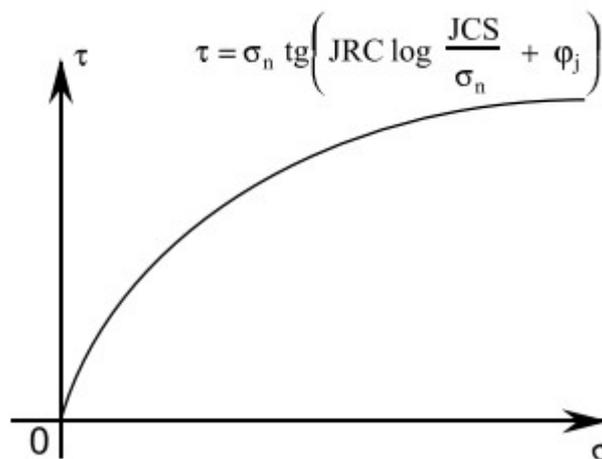


Figura 2.6: Critério de Barton (1973) para uma descontinuidade (ATTA, 2004)

2.3.4.3 Critério de Hoek (1983)

Este critério foi construído a partir de sua formulação para rochas intactas. Ele corresponde ao envelopamento dos círculos de ruptura no plano de Mohr e se escreve em termos de tensão normal e tangencial aplicados a descontinuidade. Este critério assume a seguinte forma:

$$|\tau| = (\cot\Phi'_i - \cos\Phi'_i) \frac{m \sigma_c}{8} \quad \text{com} \quad \tan\Phi'_i = \frac{d\tau}{d\sigma_n} \quad (2.15)$$

onde Φ'_i se denomina de ângulo instantâneo de atrito e define a inclinação da tangente a curva τ :

$$\Phi'_i = \arctan \left[4h \cos^2 \left(30 + \frac{1}{3} + \arcsin \left(h^{-\frac{3}{2}} \right) \right) - 1 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (2.16)$$

Com $h = 1 + \frac{16(m \sigma + s \sigma_c)}{3 m^2 \sigma_c}$

onde os coeficientes m e s são valores adimensionais empíricos ligados a características mecânicas da rocha constituinte das faces da fratura. A figura 2.7 apresenta o critério de Hoek.

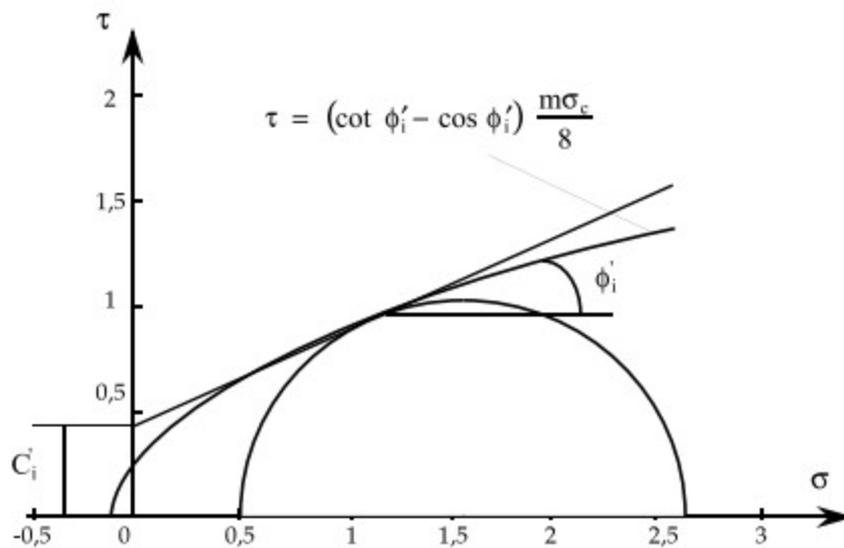


Figura 2.7: Critério de Hoek (1983) para uma descontinuidade (ATTA, 2004)

3 FUNDAMENTOS DA MICROMECAÂNICA

Conceitualmente a micromecânica é uma ferramenta utilizada pela ciência dos materiais a qual permite a análise de materiais heterogêneos compostos de duas ou mais fases. Sendo utilizada tanto em geomateriais naturais quanto em compósitos sintéticos, esta ferramenta transforma o modelo do material heterogêneo em um modelo homogêneo equivalente. Uma vez que esta ferramenta apresenta grande importância na análise de materiais, ela é amplamente utilizada nas engenharias em geral.

A micromecânica pressupõe a existência de duas escalas: a microscópica, a qual as fases são claramente heterogêneas e a escala macroscópica, a qual as fases não são distinguíveis e o material é considerado homogêneo. Ressalta-se, contudo, que cada uma destas escalas devem ser previamente definidas, sendo possível a consideração de escalas microscópicas dentro de uma ou mais fases do material ainda heterogêneo.

Para que a micromecânica possa ser aplicada, devem ser cumpridas algumas condições, dentre elas o fato de que a análise dos modelos heterogêneos e homogeneizados devem apresentar resultados médios iguais. Além disso, deve ser possível determinar um volume elementar que contenha todas as informações necessárias sobre o material, sejam as heterogeneidades periódicas ou não, este volume é denominado de VER (Volume elementar representativo). Partindo-se da condição que deve existir um VER, intui-se que a micromecânica não é aplicada quando existe um número discreto de inclusões ou se estas apresentem grandes dimensões frente ao tamanho da peça em análise, impedindo que se observe tal volume elementar representativo.

Materiais passíveis de homogeneização podem apresentar diversas formas de distribuição das heterogeneidades tal como periódicas – mais comum em compósitos artificialmente construídos em que o VER, aqui denominado de célula unitária representativa, se repete espacialmente – ou aleatórias – normalmente observado em geomateriais, no qual é necessária uma abordagem estatística. Também pode-se considerar a existência de materiais com graduação funcional de distribuição na qual, embora apresente uma distribuição aleatória, existe uma tendência de

modificar a função de probabilidade de distribuição das heterogeneidades segundo um caminho definido por uma determinada função.

Hori, M. e Nemat-Nasser, S. (1983) consideram duas abordagens básicas para obter os resultados de um meio heterogêneo:

- a) **Teoria dos campos médios:** Esta teoria é baseada no fato de que as propriedades mecânicas efetivas medidas em experimentos são relacionadas com o volume médio da tensão e da deformação das amostras heterogêneas microscópicas. Assim, macro campos são definidos como o volume médio dos microcampos correspondentes e as propriedades efetivas são determinadas como relações entre os micro campos médios;
- b) **Teoria matemática da Homogeneização:** Esta teoria estabelece relações matemáticas entre os micro e macro campos usando o método da perturbação multiescalar. As propriedades efetivas naturalmente surgem como consequência destas relações, sem depender de medições físicas específicas.

Destaca-se, contudo, que no processo de homogeneização podem ocorrer mudanças de comportamento no material homogeneizado em relação ao comportamento original de suas fases. Desta forma, nem sempre é possível admitir que determinadas características, tais como a isotropia material eventualmente presente nas fases, seja transmitida ao material homogeneizado. Em determinadas situações este comportamento pode ser mais facilmente observado, como visto em compósitos estratificados ou com fibras longas, mas também é possível observá-lo em materiais com distribuição aleatória quando existe uma distribuição preferencial das fases.

Para exemplificar o comportamento apresentado anteriormente pode-se imaginar um solo com duas camadas, a superior de argila e a inferior de areia. Facilmente se percebe que a condutividade hidráulica é menor perpendicularmente as camadas, isso por que solos argilosos geralmente apresentam uma maior dificuldade a infiltração de fluidos. Ao abordar a condutividade paralela em relação às camadas, visualiza-se uma condutividade média muito maior, pois embora a argila conduza um volume pequeno de fluido, a areia conduz um volume muito mais elevado.

No presente trabalho, são as fraturas que constituem a fase que modifica as características originais do material. Supondo-se a existência de uma distribuição perfeitamente aleatória das fraturas dentro de um meio rochoso, é possível constatar que o comportamento do material homogeneizado será isotrópico como a matriz. No entanto, supondo que as fraturas apresentam funções de probabilidade que privilegiem determinadas direções em detrimento de outras ou que as fraturas apresentam todas as mesmas direções, o comportamento do meio homogeneizado deixará de ter o comportamento isotrópico da rocha sã.

3.1 VER – VOLUME ELEMENTAR REPRESENTATIVO

Seja o meio em questão aleatório ou periódico, todo material que faça uso da teoria da homogeneização deve admitir a existência de um volume em que se possa obter todas as informações do material para que o processo de homogeneização seja válido. Este volume representativo apresenta diferentes exigências caso este venha a ser aleatório ou periódico. Estas condições e outras características destes volumes são o tema desta seção.

Tratando-se de um meio aleatório, a representação estatística do material homogeneizado pelo VER é implícita. Embora seja possível definir uma infinidade de VER's para meios aleatórios, os resultados da análise de cada um deles devem ser estatisticamente iguais aos demais. Para que um determinado VER definido ofereça resultados matematicamente corretos é necessário que este cumpra com a condição de separação de escalas. Para meios aleatórios esta condição define três dimensões características: **L** para estrutura, **l** para o VER e **d** para as heterogeneidades. A figura 5.1 auxilia a visualização da condição anunciada acima. As três dimensões citadas são relacionadas da seguinte forma:

- a) **l** \ll **L**: a dimensão do VER deve ser pequena em relação a estrutura de forma a garantir que, no processo de homogeneização, as ferramentas do cálculo diferencial sejam válidas para a descrição contínua da estrutura, permitindo a determinação de campos tensões e deformações;
- b) **d** \ll **l**: a dimensão das heterogeneidades deve ser pequena em relação ao VER de forma a possibilitar um tratamento estatisticamente confiável do VER durante o processo de homogeneização.

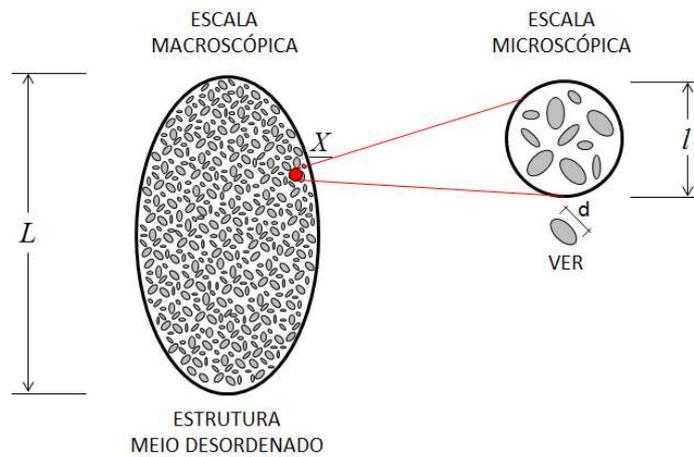


Figura 3.1: Volume elementar representativo.
(fonte: LORENCI, 2013)

Tratando-se agora de um meio periódico, supõem-se que o VER – agora denominado de CUR – repete-se periodicamente na estrutura, sendo assim não é necessário um tratamento estatístico do CUR, visto que este volume será suposto idêntico aos demais volumes. Mesmo que ainda seja possível definir diferentes CUR's, todos eles devem conduzir a um mesmo comportamento da estrutura. Assim como no caso dos materiais aleatórios, o CUR deve cumprir determinadas condições para a validade do processo. Visto que meios periódicos não necessitam de tratamento estatístico, o tamanho d das heterogeneidades não é mais restringido pela dimensão do VER, obviamente limitando-se a dimensão de l , sendo apenas a condição **a)** necessária. A figura 3.2 auxilia a visualização da condição sobre o CUR.

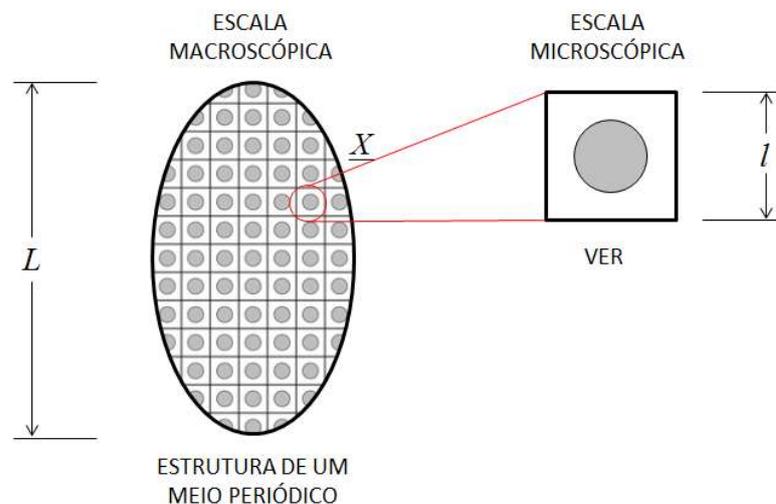


Figura 3.2: Célula Unitária Representativa.
(fonte: LORENCI, 2013)

Tratando-se das heterogeneidades como fraturas, estas apresentam um comportamento fortemente aleatório. Embora algumas vezes fraturas possam estar orientadas preferencialmente segundo alguma direção, o VER continua sendo aleatório e, portanto, as microfissuras devem cumprir a condição de ser pequenas frente ao VER.

Simplificadamente, a abordagem micromecânica consiste em substituir o material heterogêneo por um material homogêneo equivalente cujas propriedades foram obtidas com base nos resultados fornecidos pela análise matemática do VER com condições de contorno apropriadas. A figura 3.3 representa este processo. Basicamente a função do VER é semelhante à um corpo de prova, onde se obtém uma solução e extrapola-se para o restante da estrutura.

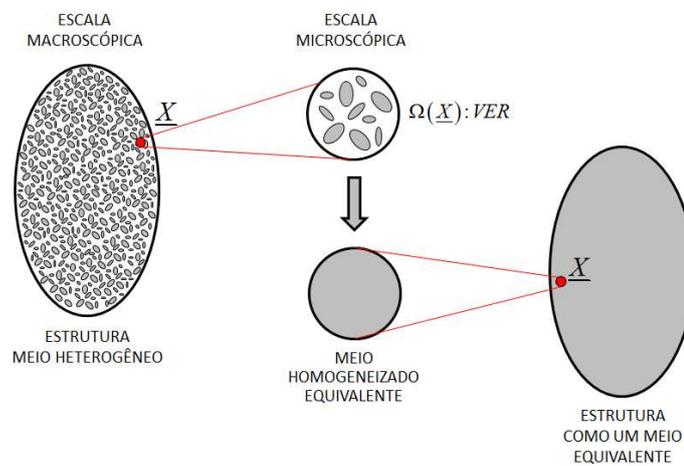


Figura 3.3: Representação do processo de homogeneização.
(fonte: LORENCI, 2013)

3.2 REGRA DAS MÉDIAS

A regra das médias é o caminho mais natural de conexão entre as propriedades nas micro e macro escalas, sendo portanto o caminho preferido para se determinar propriedades efetivas de materiais heterogêneos. Ao se aplicar técnicas de média no VER é possível aproximar campos de quantidades físicas do meio heterogêneo por campos médios volumétricos representativos do meio homogêneo. Aplicando-se este comportamento exclusivamente a propriedades mecânicas, pode-se explicitar campos de tensão e deformação microscópicos em campos médios macroscópicos equivalentes (DORMIEUX, L. KONDO, D. ULM, F. 2006b). De forma heurística, uma quantidade física \mathcal{J} pode ter sua média, definida no volume $\Omega(\underline{x})$, determinada por meio da seguinte expressão:

$$\bar{J} = \langle J \rangle_{\Omega} = \frac{1}{|\Omega(\underline{x})|} \int_{\Omega(\underline{x})} J dV \quad (3.1)$$

No caso específico das propriedades mecânicas mencionadas, a flutuação dos microcampos é significativa e ocasionada, principalmente, devido as heterogeneidades. Entretanto, é possível considerar os macrocampos – resultantes da média dos microcampos – como campos constantes. Tal comportamento só é possível devido a aproximação que o gradiente destes macrocampos são desprezíveis, na escala de análise do VER, visto que este é considerado muito pequeno frente a estrutura, possibilitando o uso das ferramentas do cálculo diferencial. Formalmente escrevendo, tem-se a seguinte expressão para um campo $\underline{m}(\underline{x})$ genérico:

$$\underline{m}(\underline{x}) = \langle \underline{m} \rangle_{\Omega} + \underline{m}'(\underline{x}) \quad (3.2)$$

Onde:

$\underline{m}(\underline{x})$: micro campo mecânico considerado;

$\langle \underline{m} \rangle_{\Omega}$: macro campo mecânico, média de $\underline{m}(\underline{x})$;

$\underline{m}'(\underline{x})$: flutuação microscópicas cuja média é nula.

Sendo assim, especificando as propriedades mecânicas de tensão e de deformação, pode-se definir a relação entre seus macro e micro campos como a média volumétrica da expressão (3.1):

$$\underline{\epsilon} = \langle \underline{\epsilon} \rangle_{\Omega} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \underline{\epsilon}(\underline{x}) dV \quad (3.3)$$

$$\underline{\Sigma} = \langle \underline{\sigma} \rangle_{\Omega} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \underline{\sigma}(\underline{x}) dV \quad (3.4)$$

No entanto, estas relações de média entre as solicitações e os campos locais não permitem definir um problema de contorno único sobre o VER, sendo necessário definir condições de contorno do VER que sejam compatíveis com as relações de média apresentadas acima. Mais explicações encontram-se na seção 3.4.

3.3 LEMA DE HILL

O lema de Hill é um princípio baseado em energia, o qual compara a energia de deformação macroscópica com a microscópica. De forma simplista, o lema de Hill enuncia que a média volumétrica da energia de deformação microscópica deve ser igual à energia de deformação macroscópica. Desta forma pode-se escrever o lema de Hill, para materiais elástico-lineares, como:

$$\langle \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_{\Omega} = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_{\Omega} : \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_{\Omega} = \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (3.5)$$

Cabe ressaltar que o lema de Hill é válido para quaisquer campos de tensão e de deformação microscópicos respectivamente estática e cinematicamente admissíveis. Devido a esta relação, o lema de Hill é uma ferramenta essencial na micromecânica, permitindo uma formulação matemática mais robusta, válida tanto para meios aleatórios quanto para meios periódicos.

3.4 PROCESSO DE HOMOGENEIZAÇÃO EM ELASTICIDADE

Como já mencionado, o processo de homogeneização consiste em transformar o material heterogêneo em um meio equivalente homogêneo que conduza a um comportamento macroscópico idêntico para estrutura, utilizando ferramentas matemáticas. No entanto, a abordagem utilizada durante o processo de homogeneização pode ser diferente segundo as condições de contorno de cada problema. Basicamente existem três condições de contorno explicada, duas aplicadas a meios aleatórios e uma aplicada a meios periódicos.

Uma vez que, como mencionado na seção 3.2, as relações de média apresentadas não permitem definir o problema de contorno de forma única – para os meios aleatórios – é necessário definir quais as condições de contorno serão aplicadas sobre o VER. As escolhas mais comuns são as de aplicação de tensão e deformação homogêneas no contorno do VER. Sendo o material passível de homogeneização percebe-se que, independentemente da escolha das condições de contorno, a solução deve ser rigorosamente igual. Sob esta ótica percebe-se que tanto soluções baseadas em tensão ou deformação homogênea no contorno do VER produzem os mesmos resultados.

Já para meios periódicos, as relações de periodicidade impõem uma maneira única de aplicação às condições de contorno. Estas condições são diferentes do modo clássico de aplicação de condições de contorno em tensões e deformações e são apresentadas na seção 3.4.3.

3.4.1 Tensão Homogênea Aplicada no Contorno

Esta condição de contorno sobre o VER emerge intuitivamente com um raciocínio básico para meios aleatórios. Nesta abordagem de homogeneização se aplica uma tensão homogênea no contorno do VER. A tensão em questão deve respeitar as condições básicas de campos de tensão, sendo assim a tensão homogênea admitida deve ser estaticamente admissível. Representando-se matematicamente esta condição tem-se:

$$\underline{\underline{\sigma}} \in E.A. \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \underline{0} \text{ em } \Omega \\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) = \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{n}(\underline{x}) \text{ em } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.6)$$

na qual $\underline{n}(\underline{x})$ é um vetor unitário, normal a superfície no ponto admitido, \underline{x} assume o lugar do vetor de posição e $\operatorname{div}(\cdot)$ é caracterizado como o operador divergente. Desta forma, a resolução elástica do problema se resume ao seguinte conjunto de expressões:

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \mathbb{C}(\underline{x}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) \text{ em } \Omega \\ \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \underline{0} \text{ em } \Omega \\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) = \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{n}(\underline{x}) \text{ em } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.7)$$

Em seguida, define-se o tensor de concentração de tensões \mathbb{B} , que conecta as tensões locais microscópicas as tensões macroscópicas. \mathbb{B} é, então, definido da seguinte maneira:

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \mathbb{B}(\underline{x}) : \underline{\underline{\Sigma}} \quad (3.8)$$

\mathbb{B} representa um tensor que, basicamente, distribui as tensões microscópicas no VER sem que altere o valor macroscópico da tensão, sendo assim é necessário que a média de \mathbb{B} no volume produza a identidade de quarta ordem:

$$\langle \mathbb{B} \rangle_{\Omega} = \mathbb{I} \quad (3.9)$$

Além desta propriedade, o tensor \mathbb{B} apresenta simetria parcial nas suas componentes, apresentando as igualdades de componentes na seguinte forma:

$$B_{ijkl} = B_{jikl} = B_{ijlk} \quad (3.10)$$

Embora, aparentemente, o tensor resultante de $\mathbb{B}(\underline{\chi}) : \underline{\Sigma}$ pareça não ser simétrico, é possível provar que a simetria é satisfeita e ainda que:

$$\langle \mathbb{C} : \mathbb{B} \rangle_{\Omega} = \mathbb{C}_{hom} = \langle \mathbb{B}^T : \mathbb{C} : \mathbb{B} \rangle_{\Omega} \quad (3.11)$$

Com a expressão (3.8), pode-se calcular a deformação equivalente:

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle_{\Omega} = \langle \mathbb{S} : \underline{\underline{\sigma}} \rangle_{\Omega} = \langle \mathbb{S} : \mathbb{B} : \underline{\underline{\Sigma}} \rangle_{\Omega} = \langle \mathbb{S} : \mathbb{B} \rangle_{\Omega} : \underline{\underline{\Sigma}} \quad (3.12)$$

Desta forma tem-se:

$$\underline{\underline{E}} = \mathbb{S}_{hom} : \underline{\underline{\Sigma}} \quad (3.13)$$

com

$$\mathbb{S}_{hom} = \langle \mathbb{S} : \mathbb{B} \rangle_{\Omega} \quad (3.14)$$

Sendo assim, verifica-se que a solução do problema passa a ser definida com a determinação de \mathbb{B} . A expressão (3.13) define a lei de comportamento mecânico do material elástico linear homogeneizado. Lembra-se, contudo, que nas expressões anteriores, os tensores \mathbb{C} e \mathbb{S} caracterizam cada uma das fases do material heterogêneo. Explicitando-se \mathbb{S}_{hom} para um meio bifásico e usando-se das propriedades de \mathbb{B} pode-se escrever \mathbb{S}_{hom} como:

$$\mathbb{S}_{hom} = f_1 \mathbb{S}_1 : \langle \mathbb{B} \rangle_{\Omega_1} + \mathbb{S}_2 : (\mathbb{I} - f_1 \langle \mathbb{B} \rangle_{\Omega_1}) = \mathbb{S}_2 - f_1 (\mathbb{S}_1 - \mathbb{S}_2) : \langle \mathbb{B} \rangle_{\Omega_1} \quad (3.15)$$

Onde f_i representa a fração volumétrica da fase admitida. Explicitando-se para o caso do meio poroso, com $\mathbb{S}_2 = \mathbb{0}$ e com a fase principal sendo denominada de matriz, obtém-se:

$$\mathbb{S}_{hom} = f_s \mathbb{S}_s : \langle \mathbb{B} \rangle_{\Omega_s} \quad (3.16)$$

3.4.2 Deformação Homogênea Aplicada no Contorno

Semelhante a tensão homogênea e tão intuitiva quanto, a deformação homogênea de contorno consiste em aplicar uma deformação homogênea no contorno do VER. Analogamente ao caso

anterior, os campos de deslocamentos $\underline{\xi}$ prescritos devem ser cinematicamente admissíveis e, com isso, o problema microscópico se resume as seguintes equações:

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}} = \mathbb{C}(\underline{\underline{x}}) : \underline{\underline{\varepsilon}} \text{ em } \Omega \\ \text{div } \underline{\underline{\sigma}} = 0 \text{ em } \Omega \\ \underline{\underline{\xi}} = \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{\underline{x}} \text{ em } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.17)$$

Onde $\underline{\underline{\xi}}$ é o vetor de deslocamentos. Assim como realizado no caso anterior, define-se o tensor de concentração de deformações \mathbb{A} . O tensor \mathbb{A} apresenta as mesmas propriedades que o tensor \mathbb{B} e é definido como:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{x}}) = \mathbb{A}(\underline{\underline{x}}) : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (3.18)$$

Analogamente, pode-se explicitar as tensões homogêneas:

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_{\Omega} = \langle \mathbb{C} : \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_{\Omega} = \langle \mathbb{C} : \mathbb{A} : \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_{\Omega} = \langle \mathbb{C} : \mathbb{A} \rangle_{\Omega} : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (3.19)$$

Desta forma tem-se:

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \mathbb{C}_{hom} : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (3.20)$$

com

$$\mathbb{C}_{hom} = \langle \mathbb{C} : \mathbb{A} \rangle_{\Omega} \quad (3.21)$$

Novamente a solução do problema passa a ser definida pela determinação de \mathbb{A} . Neste caso, a expressão (3.20) define a lei de comportamento mecânico do material elástico linear homogeneizado. Especificando, novamente, para um material bifásico poroso temos:

$$\mathbb{C}_{hom} = f_s \mathbb{C}_s : \langle \mathbb{A} \rangle_{\Omega_s} \quad (3.22)$$

Lembra-se, contudo, que este resultado não compreende a transmissão de esforços pelas fraturas, a qual será abordada mais a diante. Como visto, a abordagem por meio de \mathbb{B} fornece o valor de \mathbb{S}_{hom} enquanto a abordagem por meio de \mathbb{A} fornece \mathbb{C}_{hom} . Na elasticidade tradicional estes tensores são correlacionados pela expressão:

$$\mathbb{C} : \mathbb{S} = \mathbb{I} \quad (3.23)$$

No entanto, na homogeneização existe um erro associado a esta igualdade. Pode-se escrever, então:

$$\mathbb{C}_{hom} : \mathbb{S}_{hom} = \mathbb{I} + \mathbb{E}(\alpha^3) \quad (3.24)$$

Onde \mathbb{E} é um tensor de resíduos – ou erro – da ordem α^3 , Sendo $\alpha = d/l$. Desta forma, pode-se verificar que se o VER adotado não respeitasse a condição de separação entre as escalas o resíduo envolvido no processo seria grande e, portanto, os resultados não seriam confiáveis. No entanto, respeitando esta condição, o resíduo é pequeno e pode-se dizer que \mathbb{C}_{hom} e \mathbb{S}_{hom} são inversos.

3.5 DETERMINAÇÃO DAS PROPRIEDADES MACROSCÓPICAS ELÁSTICAS DE MEIOS FRATURADOS

Entende-se como determinação das propriedades elásticas do meio homogeneizado a determinação do tensor \mathbb{C}_{hom} , o qual contém todas as informações elásticas do material. Existem diversas formas de se determinar o tensor \mathbb{C}_{hom} porém, tradicionalmente, recai-se sobre uma das quatro formas seguintes:

- a) resolução analítica;
- b) limites variacionais;
- c) determinação numérica;
- d) estimativas.

Todas estas formas de determinação de \mathbb{C}_{hom} acima são apresentadas nos itens seguintes:

3.5.1 Resolução Analítica

Utilizando resolução analítica é possível resolver um número limitado de problemas de forma exata. No entanto, muitas vezes a dificuldade em fazê-lo torna tal solução inviável. Não obstante, diversos problemas de homogeneização não apresentam uma solução analítica, configurando-se mais uma dificuldade de implementação desta metodologia.

Na prática apenas problemas muito simples, tal como compósitos estratificados ou com fibras longas distribuídas periodicamente, são resolvidos por meio analítico. Em contraponto, a resolução analítica fornece, sempre que possível, a solução exata em função dos parâmetros do problema em questão, diferentemente das outras formas mencionadas.

3.5.2 Limites Variacionais

A utilização de limites variacionais não é utilizada apenas na homogeneização, muitas outras disciplinas, tal como análise limite, utilizam este procedimento. Limites variacionais aplicados na homogeneização fornecem, como o próprio nome diz, limites teóricos entre os quais alguma propriedade do material deve ser encontrada.

Aplicando-se a determinação do C_{ho} , utiliza-se o princípio do mínimo em deformação de forma que torna-se possível a obtenção de um limite superior para a propriedade desejada. De forma semelhante, utilizando-se o princípio do mínimo em tensões é possível se obter um limite inferior. Uma vez que ambos os limites coincidam, o valor da propriedade está estabelecido de forma exata.

Embora seja um método aparentemente simples, na prática é muito difícil e trabalhoso melhorar a solução a ponto de se obter limites coincidentes e, portanto, costuma-se utilizar limites gerais previamente estabelecidos, tal como os limites de Voigt, Reuss e Hashin-Strikman.

Uma vez que a variação entre os limites pode ser muito elevada e nem sempre a propriedade desejada encontra-se em uma condição limite, este método de determinação é, preferencialmente, utilizado em conjunto com outros métodos de forma a indicar se os resultados obtidos por outros métodos são confiáveis. Lembra-se, contudo, que a utilização de limites variacionais não é capaz de caracterizar adequadamente a morfologia do material, conduzindo a um resultado que nem sempre é verídico.

3.5.2.1 Limites variacionais de Reuss e Voigt

Tratando-se do limite de Voigt, obtêm-se resultados derivados do princípio de mínimo em deformações e, portanto, obtêm-se um limite superior. Para estabelecer este limite, Voigt admitiu um campo de deslocamentos particular sobre o VER que faz com que todo o VER – incluindo todas as fases deste – apresente-se sobre a mesma deformação. Embora este campo de deformação possa não estar presente no material, ela conduz a um campo de deslocamentos

cinematicamente admissíveis e, portanto, não contradiz nenhuma equação de estado. Desta forma é possível definir a expressão para o limite de Voigt como:

$$\mathbb{C}_{hom} \leq \langle \mathbb{C} \rangle \quad (3.25)$$

Uma vez que o tensor de rigidez elástico do material fica definido como a média dos tensores de rigidez elástico de cada uma das fases, pode-se explicitar esta equação para materiais fraturados:

$$\mathbb{C}_{hom} \leq f_s \mathbb{C}_s \quad (3.36)$$

na qual f_s é a fração volumétrica do material da matriz. Tratando-se agora do limite de Reuss, compreendido como análogo ao limite de Voigt, utiliza-se uma abordagem através do princípio de mínimo em tensões conduzindo, portanto, a um limite inferior. Assim como Voigt, Reuss definiu um campo de tensões – estaticamente admissíveis – particular. O campo adotado também é constante sobre todo o VER. Da mesma forma que o realizado anteriormente, é possível definir a expressão do limite variacional de Reuss como:

$$\langle \mathbb{S} \rangle^{-1} = \langle \mathbb{C}^{-1} \rangle^{-1} \leq \mathbb{C}_{hom} \quad (3.27)$$

Definido desta forma, pode-se explicitar para o caso de materiais fraturados:

$$0 \leq \mathbb{C}_{hom} \quad (3.28)$$

3.5.2.1 Limite variacionais de Hashin-Strikman

Voigt e Reuss admitiram um campo de deformação/tensão constante. Embora os campos adotados sejam admissíveis, eles não caracterizam muito bem os campos formados, levando a resultados mais afastados do que aqueles que geralmente se formam. Para melhorar estes resultados, Hashin-Strikman propuseram o uso de campos auxiliares, os quais representam uma variação de uma dada solução de referência, apresentando a melhor estimativa possível na ausência de informações sobre a morfologia. A abordagem empregada conduz a expressão da energia complementar a qual, quando maximizada, fornece o limite superior de Hashin-Strikman e, quando minimizada, fornece o limite inferior de Hashin-Strikman.

Para um material bifásico onde uma das fases assume o papel da matriz, os limites de Hashin-Strikman são definidos por:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_s + f_i [(\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_s)^{-1} + (1 - f_i) \mathbb{S}^s : (\mathbb{C}_s)^{-1}]^{-1} &\leq \mathbb{C}_{hom} \\ \mathbb{C}_{hom} &\leq \mathbb{C}_i + (1 - f_i) [(\mathbb{C}_s - \mathbb{C}_i)^{-1} + f_i \mathbb{S}^i : (\mathbb{C}_i)^{-1}]^{-1} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Onde \mathbb{S}^m e \mathbb{S}^i são os tensores de Eshelby e \mathbb{C}_s e \mathbb{C}_i são os tensores de rigidez da matriz e da inclusão, respectivamente.

3.5.3 Determinação Numérica

Mesmo que esta seja uma técnica capaz de determinar as propriedades do material de forma muito eficiente, este método apresenta algumas limitações e dificuldades. Dificilmente a determinação numérica pode ser estendida a outras frações volumétricas e morfologias, restringindo o estudo apenas a um caso específico. Além disso, para meios periódicos é necessário a utilização de condições de contorno especiais sobre o VER e para meios aleatórios é necessário a utilização de técnicas de geração de distribuição aleatória das heterogeneidades.

Todas estas limitações fazem da determinação numérica um processo muito enrijecido, dificultando uma abordagem mais geral. No entanto, a determinação sistemática de \mathbb{C}_{hom} – quando a microestrutura é prescrita – pode ser preferível em diversas situações.

Para realizar a abordagem numérica, pode-se utilizar a técnica de elementos finitos ou outras com finalidades semelhantes. O método consta, basicamente, em detalhar um VER específico, admitindo todos os materiais e inclusões presentes, e aplicar condições de contorno. Desta forma a solução média obtida corresponde a solução do meio homogeneizado.

3.5.4 Problema da Inclusão de Eshelby e Estimativas Associadas

Embora as estimativas não forneçam, em geral, o resultado exato do problema, elas podem fornecer resultados mais adequados que os métodos anteriores. Diferentemente de limites variacionais, as estimativas não apresentam máximo ou mínimo o que implica que estimativas mal sucedidas possam retornar propriedades as quais o material de modo algum poderia apresentar. Devido a este motivo é muito recomendado a utilização de algum outro método juntamente com a determinação por meio de estimativas.

Embora existam incontáveis formas de realizar estimativas de propriedades dos materiais, as estimativas mais comumente realizadas são aquelas baseadas nos resultados obtidos por

Eshelby. Eshelby resolveu analiticamente o problema de uma inclusão elipsoidal em um meio infinito. A maioria das estimativas utilizam os resultados encontrados por Eshelby a fim de obter resultados para um número maior de inclusões.

3.5.4.1 Problema da Inclusão de Eshelby

Eshelby (1957) desenvolveu uma solução analítica para uma inclusão elipsoidal I em um meio infinito 0 . Esta inclusão fica definida por seus eixos principais, cujo raio é definido como a_i . Estes resultados obtidos por Eshelby são de elevada importância para a micromecânica. A figura 3.6 apresenta a inclusão em um meio infinito, definida por Eshelby.

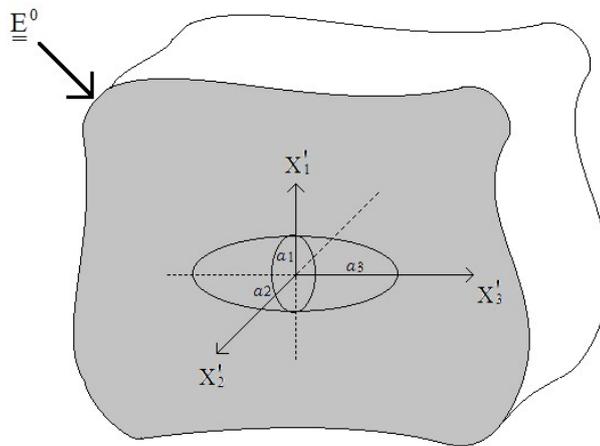


Figura 3.4: Inclusão de Eshelby em um meio infinito

Lembra-se, contudo, que esta solução é válida apenas para elipsoides, não contemplando outras formas geométricas. Neste contexto, aplica-se uma deformação constante $\underline{\underline{E}}^0$ no contorno deste meio infinito. Eshelby demonstrou que, sob estas circunstâncias, a deformação da inclusão presente no meio também é constante e fica definida pela seguinte expressão:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{x}}) = \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_I = \mathbb{A}_E(\underline{\underline{x}}) : \underline{\underline{E}}^0 \quad \forall \underline{\underline{x}} \in I \quad (3.30)$$

Onde I define a inclusão e \mathbb{A}_E é um tensor de quarta ordem, denominado de tensor de localização de deformações de Eshelby. Este tensor descreve a relação entre a deformação da inclusão e o carregamento externo $\underline{\underline{E}}^0$ e pode ser definido como:

$$\mathbb{A}_E(\underline{\underline{x}}) = \langle \mathbb{A}_E \rangle_I = [\mathbb{I} + \mathbb{P}^{0,I} : (\mathbb{C}_I - \mathbb{C}_0)]^{-1} \quad \forall \underline{\underline{x}} \in I \quad (3.31)$$

onde \mathbb{C}_I e \mathbb{C}_0 são os tensores elásticos com as propriedades da inclusão e do meio infinito adjacente a inclusão, respectivamente. $\mathbb{P}^{0,I}$ é denominado de tensor de Hill, o qual pode ser relacionado com $\mathbb{S}^{0,I}$, denominado de tensor de Eshelby, através da seguinte expressão:

$$\mathbb{S}^{0,I} = \mathbb{P}^{0,I} : \mathbb{C}_0 \quad (3.32)$$

O tensor de Eshelby $\mathbb{S}^{0,I}$ pode ser encontrado para diversas configurações de inclusão no trabalho de Mura (1987). Percebe-se que o tensor de Eshelby é função da forma e orientação das inclusões e das propriedades elásticas do meio onde as inclusões estão inseridas. Uma vez que o volume onde as inclusões são inseridas é infinito, a dimensão das inclusões não é relevante na determinação deste tensor.

Em relação a uma base ortonormal, o tensor de Eshelby apresenta isotropia transversal, isso é, simetria entre o primeiro e segundo par de índices, mas em geral não apresenta simetria de troca destes pares.

$$S_{ij\,kl} = S_{ij\,lk} = S_{ji\,kl} \quad e \quad S_{ij\,kl} \neq S_{kl\,ij} \quad (3.33)$$

Com o intuito de ampliar a solução de Eshelby para meios com mais inclusões foram propostas estimativas, dentre as mais comuns estão as estimativas: diluída, Mori-Tanaka e auto consistente.

3.5.4.2 Estimativa diluída

Basicamente a estimativa diluída considera que existe um número muito pequeno de inclusões no meio a ponto de admitir $f_m \approx 1$. Desta forma se considera que a modificação nos campos de deformação – proveniente da presença de uma determinada inclusão – não é perceptível pelas demais inclusões. Pode-se considerar que o material predominante da matriz é o material do problema auxiliar. A figura 3.5 explica o modelo diluído. Desta forma o tensor de rigidez homogeneizado fica determinado pela seguinte equação:

$$\mathbb{C}_{hom}^d = \mathbb{C}_s + \sum_{i=1}^n f_i (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_s) : [\mathbb{I} + \mathbb{P}^{s,i} : (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_s)]^{-1} \quad (3.34)$$

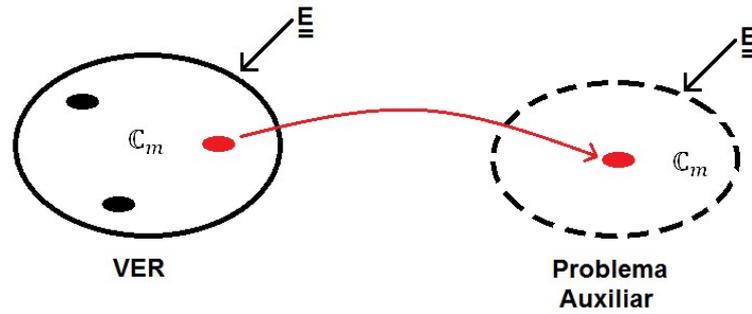


Figura 3.5: Modelo diluído

3.5.4.3 Estimativa de Mori-Tanaka

Basicamente a estimativa de Mori-Tanaka é a generalização da estimativa diluída de modo a permitir a consideração de qualquer fração volumétrica de inclusões. Desta forma modifica-se a condição de contorno do problema auxiliar para que este passe a perceber as demais inclusões do problema. Percebe-se, contudo, que ainda existe um material com a característica de matriz. A figura 3.6 apresenta a estimativa de Mori-Tanaka. Agindo desta forma o tensor de rigidez homogeneizado é dado por:

$$\mathbb{C}_{hom}^{MT} = \mathbb{C}_s + \sum_{i=1}^n f_i (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_s) : [\mathbb{I} + \mathbb{P}^{s,i} : (\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^s)]^{-1} : \langle [\mathbb{I} + \mathbb{P}^{s,i} : (\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^s)]^{-1} \rangle_{\Omega}^{-1} \quad (3.35)$$

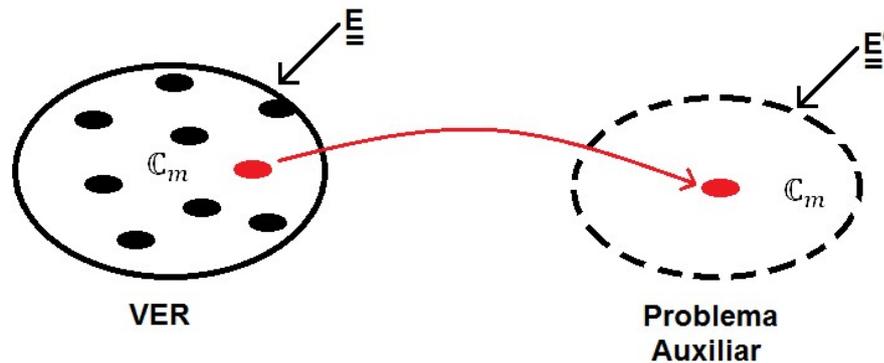


Figura 3.6: Modelo Mori-Tanaka

3.5.4.4 Estimativa Auto Consistente

Por fim, a estimativa auto consistente não considera a existência de um material na posição de matriz, admitindo que cada uma das inclusões percebe um meio completamente homogeneizado no problema auxiliar. Esta forma de estimativa permite observar problemas de fluxo de fluidos

de forma mais precisa, visto que não existe um material que envolve todas as inclusões. A estimativa auto consistente é muito utilizada em geomateriais e policristais. A figura 3.7 apresenta este modelo. Da forma mencionada, a determinação do tensor de rigidez homogeneizado é realizada de forma iterativa por meio expressão (3.40).

$$\mathbb{C}_{hom}^{as} = \sum_{i=1}^n f_i \mathbb{C}_i : [\mathbb{I} + \mathbb{P}^{as,i} : (\mathbb{C}^i - \mathbb{C}_{hom}^{as})]^{-1} : \langle [\mathbb{I} + \mathbb{P}^{as,i} : (\mathbb{C}^i - \mathbb{C}_{hom}^{as})]^{-1} \rangle_{\Omega}^{-1} \quad (3.36)$$

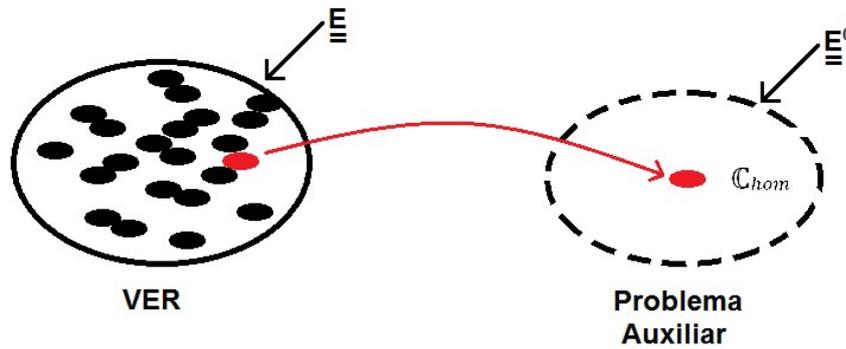


Figura 3.7: Modelo auto consistente

3.6 CASO PARTICULAR DE UM MEIO FRATURADO

Uma vez que no trabalho em questão estão sendo utilizadas fraturas, é necessário determinar um tensor de rigidez elástico homogeneizado que contemple as propriedades de transmissão de esforços destes elementos. Tal modelo já foi estabelecido por Lorenci (2013) e tem por finalidade a comparação com o modelo viscoelástico, tema deste trabalho. Para materiais clássicos, a lei de comportamento pode ser expressa da seguinte forma:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\mathbb{C}}} : \underline{\underline{\epsilon}} \quad (3.37)$$

No entanto, a transmissão de esforços entre faces opostas de uma determinada fratura não apresenta um caráter volumétrico pois tais esforços atuam diretamente sobre as faces das fraturas. Este comportamento é, então, responsável por uma lei de comportamento conhecida, porém diferente do habitual:

$$\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{\mathbb{K}}} : \underline{\underline{\xi}} \quad (3.38)$$

onde \underline{T} é o tensor de primeira ordem que representa os esforços transmitidos entre as faces das fraturas, $[\underline{\xi}]$ é a abertura da fratura em uma determinada posição e \underline{K} é o tensor de rigidez de segunda ordem da fratura. A figura 3.8 representa uma fratura presente no VER.

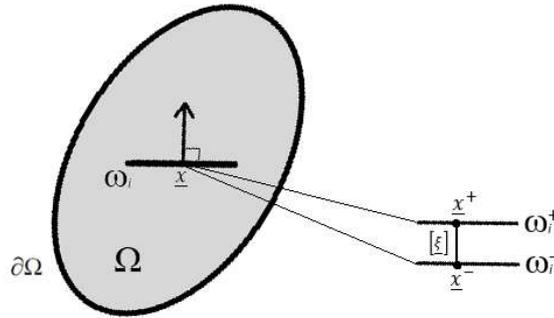


Figura 3.8: Representação de uma fratura

Para continuar esta seção, ressalta-se que a matriz – a fase sólida – está sendo considerado previamente homogeneizado e admite-se o comportamento elástico linear. Lembra-se também que o comportamento individual das fraturas permanece linear dentro do intervalo destas, sendo a distância entre as faces opostas de uma fratura sempre positiva.

3.6.1 Lema de Hill para Meios com Descontinuidades

Diferentemente de heterogeneidades tradicionais, fraturas apresentam um comportamento descontínuo o qual é responsável por modificar algumas características do tensor de rigidez. Desta forma, o tensor de rigidez elástico homogeneizado tradicional deve ser adaptado segundo a condição de descontinuidade das fissuras. Esta condição é incluída através da adaptação do lema de Hill a meios descontínuos a qual, segundo Maghous et al. (2011) é dada por:

$$\langle \underline{\underline{\sigma'}} \rangle : \underline{\underline{\epsilon}} = \langle \underline{\underline{\sigma'}} : \underline{\underline{\epsilon'}} \rangle + \frac{1}{|\Omega_0|} \int_{\omega} \underline{T}^m \cdot [\underline{\xi}'] dS \quad (3.39)$$

onde, por definição:

$\omega = \sum_{i=1}^N \omega_i$ é o conjunto de todas fissuras, com N igual ao número de fissuras.

$\underline{T}^m = \underline{\underline{\sigma'}} \cdot \underline{n}$ é qualquer força estaticamente admissível no contorno da fissura i.

$[\underline{\xi}'] = \underline{\xi}'(\underline{x}^+) - \underline{\xi}'(\underline{x}^-)$ é qualquer abertura cinematicamente admissível para cada fissura i na posição \underline{x} .

$\underline{\sigma}'$ e $\underline{\varepsilon}'$ são quaisquer campos de tensão estaticamente admissível e deformação cinematicamente admissível.

Uma vez que o lema de Hill é apresentado para qualquer tensão microscópica estaticamente admissível, pode-se aplicar tal expressão para um tensor \underline{a} uniforme e simétrico pertencente a S . Desta forma pode-se escrever a seguinte expressão $\omega \Omega \xi$:

$$\underline{\varepsilon} = \langle \underline{\varepsilon}' \rangle + \frac{1}{|\Omega_0|} \int_{\omega} [\underline{\xi}'] \otimes^s \underline{n} dS \quad (3.40)$$

Onde \otimes^s representa a parte simétrica do produto tensorial: $(\underline{u} \otimes^s \underline{v})_{ij} = (u_i v_j + u_j v_i)/2$. A relação acima permite observar que a deformação homogeneizada é composta por duas partes, sendo o segundo termo inexistente quando os meios em questão apresentam comportamento contínuo.

3.6.2 Tensor de Concentração das Deformações

Independentemente da consideração ou não da descontinuidade, a definição do tensor de concentração das deformações permanece a mesma, sendo apresentada por:

$$\underline{\varepsilon}(\underline{x}) = \mathbb{A}(\underline{x}) : \underline{\varepsilon} \quad (3.41)$$

Pode-se extrair a média da expressão acima e, considerando que $\underline{\varepsilon}$ é constante, obtendo-se:

$$\langle \underline{\varepsilon} \rangle = \langle \mathbb{A} : \underline{\varepsilon} \rangle = \langle \mathbb{A} \rangle : \underline{\varepsilon} \quad (3.42)$$

Por fim, combinando as expressões (3.41) e (3.42), obtém-se:

$$\langle \mathbb{A} \rangle : \underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon} - \frac{1}{|\Omega_0|} \int_{\omega} [\underline{\xi}'] \otimes^s \underline{n} dS \quad (3.43)$$

Esta expressão pode ser simplificada ao utilizar a decomposição de $[\underline{\xi}']$ na seguinte forma:

$$\underline{\underline{[\xi]}} = (\underline{\underline{a^n}} : \underline{\underline{\epsilon}}) \underline{\underline{n}} + (\underline{\underline{a^t}} : \underline{\underline{\epsilon}}) \underline{\underline{t}} + (\underline{\underline{a^{t'}}} : \underline{\underline{\epsilon}}) \underline{\underline{t'}} \quad (3.44)$$

Por fim determina-se:

$$\langle \mathbb{A} \rangle = \mathbb{I} - \frac{1}{|\Omega_0|} \int_{\omega} \left(\underline{\underline{n}} \otimes \underline{\underline{n}} \otimes \underline{\underline{a^n}} + \underline{\underline{t}} \otimes \underline{\underline{s}} \otimes \underline{\underline{n}} \otimes \underline{\underline{a^t}} + \underline{\underline{t'}} \otimes \underline{\underline{s}} \otimes \underline{\underline{n}} \otimes \underline{\underline{a^{t'}}} \right) dS \quad (3.45)$$

Observa-se que a média do tensor \mathbb{A} deixa de ser o tensor unitário de quarta ordem, passando a contemplar um fator que o diferencia de tal. Conhecendo-se \mathbb{A} , é possível obter o tensor de rigidez homogeneizado:

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \langle \mathbb{C}_s : \mathbb{A} : \underline{\underline{\epsilon}} \rangle = \langle \mathbb{C}_s : \mathbb{A} \rangle : \underline{\underline{\epsilon}} \quad (3.46)$$

Portanto:

$$\mathbb{C}_{hom} = \langle \mathbb{C}_s : \mathbb{A} \rangle \quad (3.47)$$

4 ABORDAGEM MICROMECAÂNICA DA ELASTICIDADE DE UM MEIO FRATURADO

Neste capítulo são aplicadas as teorias apresentadas neste trabalho com a finalidade de apresentá-las de forma menos geral e mais práticas. Este capítulo é dividido em seções, cada qual apresenta a aplicação de um determinado conceito apresentado ao longo deste trabalho. Por vezes alguns desenvolvimentos utilizam resultados provenientes de aplicações anteriores e, portanto, todas aplicações se fazem necessárias.

4.1 TENSOR DE RIGIDEZ ELÁSTICO HOMOGENEIZADO

Para realizar a determinação do tensor de rigidez homogeneizado, deve-se inicialmente determinar a orientação das fraturas. Visto que se pode escolher uma infinidade de distribuições de orientação das fraturas admitiu-se apenas duas que foram consideradas como mais importantes: fissuração orientada paralelamente e fissuração orientada aleatoriamente. Ambas distribuições são apresentadas nos capítulos seguintes. A figura 4.1 apresenta o VER admitido nas duas situações:

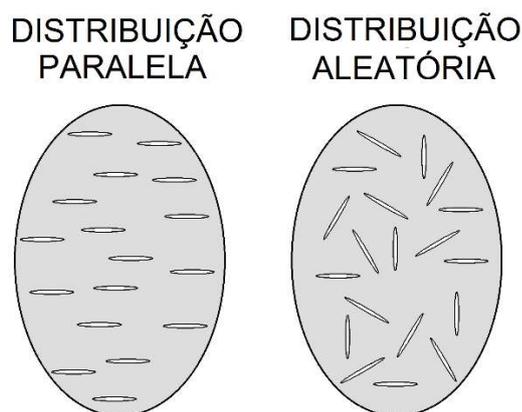


Figura 4.1: distribuição de fraturas

Além da distribuição de orientação das fraturas, é necessário determinar a forma destas. Uma vez que será empregada uma solução baseada na solução de Eshelby, admitiu-se fraturas exclusivamente oblatas – em forma de esfera achatada – mas lembra-se que a utilização de

fraturas prolatas – em forma de esfera alongada – também pode ser desenvolvida com este método, alterando-se apenas o tensor de Eshelby.

As fraturas foram adotadas como oblatas, pois esta é a forma mais comum de micro fraturas existentes em geomateriais. Adotando-se esta geometria de fratura admite-se que um eixo do esferoide é menor que os idênticos restantes. A figura 4.2 exhibe a geometria admitida das fraturas com a sendo o raio médio das fraturas.

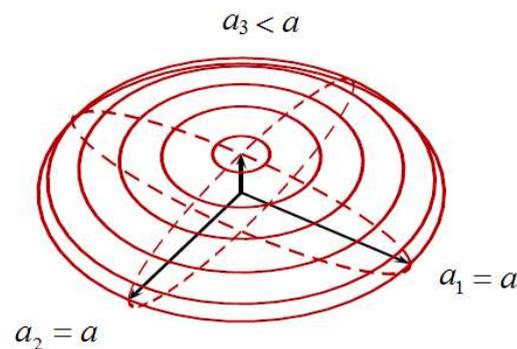


Figura 4.2: Geometria oblata das fraturas (LORENCI, 2013)

4.1.1 Fraturas Orientadas Paralelamente

Embora a expressão (3.49) apresente o tensor $\langle \mathbb{A} \rangle$, sua determinação analítica em casos menos específicos é muito difícil. Devido a isso, é muito comum utilizar estimativas para explicitar este tensor. Sendo uma das mais tradicionais, a estimativa de Mori-Tanaka, baseada nos trabalhos de Eshelby, pode ser apresentada da seguinte forma para meios fraturados:

$$\mathbb{C}^{hom} = \lim_{X \rightarrow 0} \left\{ \mathbb{C}_s + f \mathbb{C}_j : [\mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}_s - \mathbb{C}_j)]^{-1} \right\} : \left\{ \mathbb{I} + f [\mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}_s - \mathbb{C}_j)]^{-1} \right\}^{-1} \quad (4.1)$$

Onde, f é a fração volumétrica de fraturas presente no meio e pode ser definida da seguinte forma:

$$f = \frac{4}{3} \pi \epsilon X \quad (4.2)$$

com $X = a_3/a$ sendo o fator de aspecto e ϵ é o parâmetro de dano denominado de densidade de fraturas, considerando-se um conjunto de fraturas paralelas, introduzido por Budiansky e O'Connel (1975), o qual pode ser expresso como:

$$\epsilon = \mathcal{N} a^3 \quad (4.3)$$

sendo \mathcal{N} o número de fraturas por unidade de volume e a o raio médio da fratura. Seguindo desta forma e conforme se admitiu anteriormente – considerando a matriz como isotrópica linear – pode-se definir o tensor de rigidez da matriz na seguinte forma:

$$\mathbb{C}^s = 3k_s \mathbb{J} + 2\mu_s \mathbb{K} \quad (4.4)$$

Com k_s sendo o módulo de compressão da matriz e μ_s o módulo de cisalhamento desta. Sendo os tensores \mathbb{J} e \mathbb{K} os tensores esférico e desviador, definidos como:

$$\mathbb{J} = \frac{1}{3} \underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{1}} \quad ; \quad \mathbb{K} = \mathbb{I} - \mathbb{J} \quad (4.5)$$

Considera-se para as micro fraturas o seguinte tensor de rigidez, admitindo a transferência de esforços entre suas faces:

$$\underline{\underline{K}} = k_n \underline{\underline{n}} \otimes \underline{\underline{n}} + k_t (\underline{\underline{t}} \otimes \underline{\underline{t}} + \underline{\underline{t}}' \otimes \underline{\underline{t}}') \quad (4.6)$$

onde k_n e k_t são respectivamente as rigidezes normal e tangencial, obtidas em laboratório aplicando-se as sollicitações apresentadas na seção 2.3.3.1 e 2.3.3.2, e são responsáveis pela transferência de esforços nas direções $\underline{\underline{n}}$ normal, $\underline{\underline{t}}$ e $\underline{\underline{t}}'$ tangenciais perpendiculares. A figura 4.3 ilustra as direções mencionadas.

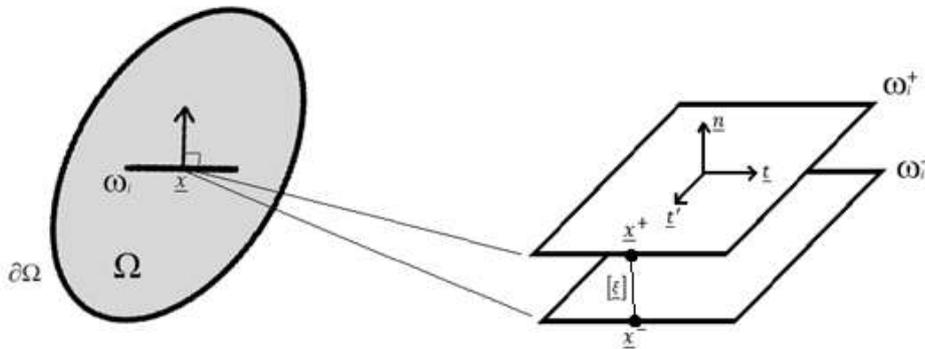


Figura 4.3: Componentes normal e tangenciais do tensor de rigidez de uma fratura

Com os termos do tensor de rigidez da expressão (4.6) pode-se escrever o tensor \mathbb{C}^f o qual fica dado pela seguinte expressão:

$$\mathbb{C}^j = 3 X a \left(k_n - \frac{4}{3} k_t \right) \mathbb{J} + 2 X a k_t \mathbb{K} \quad (4.7)$$

Desta forma apenas resta conhecer o tensor de Hill \mathbb{P} para se caracterizar o tensor de rigidez homogeneizado. Sabe-se, por meio da expressão (3.36), que o tensor de Hill \mathbb{P} se relaciona com o tensor de Eshelby \mathbb{S}^h segundo a seguinte equação:

$$\mathbb{S}^h = \mathbb{P} : \mathbb{C}^s \quad (4.8)$$

Pode-se retirar o tensor de Eshelby \mathbb{S}^h de handbooks (MURA, 1987). Segundo Dormieux et al. (2006), para $X \ll 1$ já é suficiente expandir os termos do tensor de Eshelby segundo os valores de X em primeira ordem. Com isso tem-se as seguintes componentes, não nulas, do tensor de Eshelby (considerando a fratura normal ao eixo 3):

$$\begin{aligned} S_{1111}^h = S_{2222}^h &= \frac{13 - 8\nu_s}{32(1 - \nu_s)} \pi X & S_{3333}^h &= 1 - \left(\frac{1 - 2\nu_s}{1 - \nu_s} \right) \frac{\pi}{4} X \\ S_{1122}^h = S_{2211}^h &= \frac{8\nu_s - 1}{32(1 - \nu_s)} \pi X & S_{1133}^h = S_{2233}^h &= \frac{8\nu_s - 4}{32(1 - \nu_s)} \pi X \\ S_{3311}^h = S_{3322}^h &= \frac{\nu_s}{(1 - \nu_s)} \left[1 - \left(\frac{4\nu_s + 1}{8\nu_s} \right) \pi X \right] \\ S_{1212}^h &= \frac{7 - 8\nu_s}{32(1 - \nu_s)} \pi X & S_{1313}^h = S_{2323}^h &= \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{\nu_s - 2}{1 - \nu_s} \right) \frac{\pi}{4} X \right] \end{aligned} \quad (4.9)$$

Onde ν_s define o coeficiente de Poisson para a matriz. Resolvendo-se a expressão (4.1) do tensor de rigidez homogeneizado apresenta as seguintes componentes não nulas:

$$\begin{aligned} C_{1111}^{hom} = C_{2222}^{hom} &= \left(k_s + \frac{4}{3} \mu_s \right) \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1} \\ C_{3333}^{hom} &= \left(k_s + \frac{4}{3} \mu_s \right) \frac{\alpha_1 - \alpha_3}{\alpha_1} \\ C_{1122}^{hom} = C_{2211}^{hom} &= \left(k_s - \frac{2}{3} \mu_s \right) \frac{\alpha_1 - \alpha_4}{\alpha_1} \\ C_{1133}^{hom} = C_{2233}^{hom} = C_{3311}^{hom} = C_{3322}^{hom} &= \left(k_s - \frac{2}{3} \mu_s \right) \frac{\alpha_1 - \alpha_3}{\alpha_1} \end{aligned} \quad (4.10a)$$

$$C_{2323}^{hom} = C_{3131}^{hom} = 2\mu_s \frac{\alpha_5 - \alpha_6}{\alpha_5} \quad ; \quad C_{1212}^{hom} = 2\mu_s \quad (4.10b)$$

Onde os parâmetros adimensionais α_i são definidos por:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (36 k_s^2 \epsilon \pi + 96 k_s \mu_s \epsilon \pi + 64 \mu_s^2 \epsilon \pi + 27 k_s \mu_s \pi + 9 \mu_s^2 \pi + 27 k_s k_n a \\ &\quad + 36 k_n \mu_s a) \\ \alpha_2 &= (36 k_s^2 \epsilon \pi - 48 k_s \mu_s \epsilon \pi + 16 \mu_s^2 \epsilon \pi) \\ \alpha_3 &= (36 k_s^2 \epsilon \pi + 96 k_s \mu_s \epsilon \pi + 64 \mu_s^2 \epsilon \pi) \\ \alpha_4 &= (36 k_s^2 \epsilon \pi + 24 k_s \mu_s \epsilon \pi - 32 \mu_s^2 \epsilon \pi) \\ \alpha_5 &= (48 k_s \mu_s \epsilon \pi + 64 \mu_s^2 \epsilon \pi + 27 k_s \mu_s \pi + 18 \mu_s^2 \pi + 36 k_s k_t a + 48 k_t \mu_s a) \\ \alpha_6 &= (48 k_s \mu_s \epsilon \pi + 64 \mu_s^2 \epsilon \pi) \end{aligned} \quad (4.11)$$

As expressões (4.10) e (4.11) podem ser comparadas com aquelas obtidas por Lorenci (2013) para distribuição paralela de fraturas. Uma vez que o procedimento realizado ao longo deste trabalho foi similar ao procedimento realizado por Lorenci (2013), é natural obter expressões que coincidam de forma plena com suas expressões.

4.1.2 Fraturas Orientadas Aleatoriamente

Considerando uma situação diferente da anterior, onde as fissuras eram paralelas, a presente situação considera que as fissuras são perfeitamente aleatórias, não existindo direções ou regiões privilegiadas. Uma vez que as fraturas são consideradas como elipsoidais – oblatas com fator de forma quase nulo – pode-se definir um vetor normal ao plano da fratura, de orientação \underline{p} , tal como consta na figura 4.4.

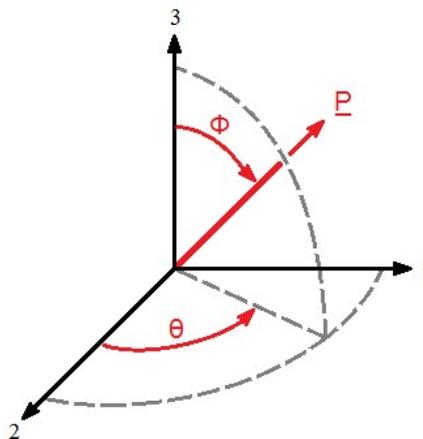


Figura 4.4: Vetor normal ao plano da fratura

Definido desta forma, o conjunto de todas as orientações possíveis de \underline{p} corresponde a uma esfera unitária. A integração I de uma determinada quantidade \mathcal{J} sobre a superfície desta esfera é definida como:

$$I = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\phi=0}^{\pi} \mathcal{J}(\theta, \phi) \sin\phi \, d\phi \, d\theta \quad (4.12)$$

Sob este aspecto, é possível definir uma função de probabilidade de distribuição de orientação das fissuras $\psi(\theta, \phi)$, Esta função define a probabilidade do vetor \underline{p} estar orientado entre os ângulos $(\theta_a) - (\theta_a + d\theta)$ e $(\phi_a) - (\phi_a + d\phi)$, sendo apresentada da seguinte forma:

$$P(\theta_a \leq \theta \leq \theta_a + d\theta ; \phi_a \leq \phi \leq \phi_a + d\phi) = \psi(\theta_a, \phi_a) \quad (4.13)$$

Segundo Advani S. G. e Tucker III, C. L. (1987), a função de probabilidade $\psi(\theta, \phi)$ deve satisfazer certas condições físicas. A primeira é que as orientações (θ, ϕ) e $(\pi - \theta, \phi + \pi)$ devem ser indistinguíveis. Em outras palavras esta condição afirma que a função de probabilidade $\psi(\theta, \phi)$ deve ser periódica:

$$\psi(\underline{p}) = \psi(-\underline{p}) \quad (4.14)$$

A segunda condição é a de normalização da função, fazendo com que a função caracterize exclusivamente a orientação das fissuras, não alterando as dimensões:

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\phi=0}^{\pi} \psi(\theta, \phi) \sin\phi \, d\phi \, d\theta = 1 \quad (4.15)$$

A terceira condição, denominada de condição de continuidade, descreve a variação temporal da orientação das fraturas. Tal condição é apresentada como:

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{d}{d\phi}(\dot{\phi}\psi) - \frac{1}{\sin(\phi)} \frac{d}{d\theta}(\dot{\theta}\psi) = -\frac{d}{d\underline{p}} \cdot (\psi \dot{\underline{p}}) \quad (4.16)$$

Onde $d/(\underline{dp})$ representa o operado gradiente na superfície da esfera unitária.

Para o caso específico em que todas as inclusões apresentam a mesma geometria, dimensões e apresentam distribuição de orientações perfeitamente aleatória a função distribuição $\psi(\theta, \phi)$ possui valor constante:

$$\psi(\theta, \phi) = \frac{1}{4\pi} \quad (4.17)$$

Adotando, então, o seguinte modelo escreve-se a fração volumétrica de fraturas aleatórias como:

$$f_f = \frac{4}{3}\pi\epsilon X \quad (4.18)$$

Uma vez estabelecidas as hipóteses acima, admite-se que a estimativa de Mori-Tanaka – fazendo-se a consideração de juntas curtas e com distribuição perfeitamente aleatória – é dada pela integração sobre todas as orientações das fissuras ou seja, sobre a esfera unitária. Sendo assim, a expressão para a estimativa de Mori-Tanaka é dada por:

$$\mathbb{C}^{hom} = \lim_{X \rightarrow 0} \left\{ \mathbb{C}_s + \overline{\mathbb{C}_j : [\mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}_s - \mathbb{C}_j)]^{-1}} \right\} : \left\{ \mathbb{I} + \overline{[\mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}_s - \mathbb{C}_j)]^{-1}} \right\}^{-1} \quad (4.19)$$

Sendo a quantidade $\overline{\mathcal{J}(\theta, \phi)}$ definida como:

$$\overline{\mathcal{J}(\theta, \phi)} = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\phi=0}^{\pi} f_f \psi(\theta, \phi) \mathcal{J}(\theta, \phi) \sin(\phi) d\phi d\theta \quad (4.20)$$

Lembra-se que \mathbb{C}_s e \mathbb{C}_j são isotrópicos e, portanto, são independentes dos ângulos θ e ϕ , desta forma podem ser utilizados as mesmas expressões descritas para fraturas paralelas:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^s &= 3k_s \mathbb{J} + 2\mu_s \mathbb{K} \\ \mathbb{C}^j &= 3X a \left(k_n - \frac{4}{3}k_t \right) \mathbb{J} + 2X a k_t \mathbb{K} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Quanto ao tensor de Eshelby \mathbb{S}^h – relacionado com o tensor de Hill \mathbb{P} – este é definido em coordenadas locais. Tal fato não interfere na distribuição paralela onde todas as fraturas apresentam o mesmo sistema de coordenadas, de forma que consideramos o sistema de coordenadas global idêntico ao local. No entanto, na distribuição aleatória cada fratura

apresenta um sistema coordenado que pode ser diferente do global e, portanto, devemos transformar cada um destes sistemas coordenados locais em sistemas globais escritos em termos dos ângulos θ e ϕ . Para fazer este procedimento faz-se uma mudança de coordenadas do sistema local ao sistema global. Esta mudança de coordenadas é expressa pela seguinte expressão:

$$S_{ijkl} = q_{mi}q_{nj}q_{ok}q_{pl}S'_{mnop} \quad (4.22)$$

Onde S_{ijkl} são os termos do tensor de Eshelby em coordenadas globais e S'_{mnop} é o recíproco em coordenadas locais. Quanto aos termos q_{ji} , estes são provenientes da matriz de rotação de transferência de coordenadas deduzida com base na seguinte expressão, na base ortonormal:

$$e_j = q_{ij}e'_i \quad (4.23)$$

Desta forma, para o sistema coordenado apresentado, o tensor \underline{q} fica definido como:

$$\underline{q} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta \cos \phi & \cos \theta \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Desta forma, resolvendo-se a expressão 4.19 obtém-se o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} C_{1111}^{hom} = C_{2222}^{hom} = C_{3333}^{hom} &= \left(k_s + \frac{4}{3}\mu_s\right) \frac{\beta_1}{\beta_2\beta_4} (3\beta_4 + 6480k_s^2\mu_s^2\pi^2\epsilon - 864k_s\mu_s^3\pi^2\epsilon - \\ &2304\mu_s^4\pi^2\epsilon - 3456k_s k_n \mu_s^2 \pi \alpha \epsilon - 4608k_n \mu_s^3 \pi \alpha \epsilon + 8640k_s^2 k_t \mu_s \pi \alpha \epsilon + \\ &9216k_s k_t \mu_s^2 \pi \alpha \epsilon - 3072k_t \mu_s^3 \pi \alpha \epsilon) \\ C_{1122}^{hom} = C_{2211}^{hom} = C_{1133}^{hom} = C_{2233}^{ho} = C_{3311}^{hom} = C_{3322}^{ho} &= \frac{\beta_1}{\beta_2\beta_4} \left(\left(k_s - \frac{2}{3}\mu_s\right) (3\beta_4 - \right. \\ &3240k_s^2\mu_s^2\pi^2\epsilon - 6048k_s\mu_s^3\pi^2\epsilon - 2304\mu_s^4\pi^2\epsilon - 34992k_s^3k_n\pi\alpha\epsilon - \\ &23328k_s^2k_n\mu_s\pi\alpha\epsilon - 13824k_s k_n \mu_s^2 \pi \alpha \epsilon - 4608k_n \mu_s^3 \pi \alpha \epsilon + 34992k_s^3 k_t \pi \alpha \epsilon + \\ &19008k_s^2 k_t \mu_s \pi \alpha \epsilon + 2304k_s k_t \mu_s^2 \pi \alpha \epsilon - 3072k_t \mu_s^3 \pi \alpha \epsilon) + (k_n - \\ &k_t)(34992k_s^4\pi\alpha\epsilon) \left. \right) \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$C_{2323}^{hom} = C_{3131}^{hom} = C_{1212}^{hom} = \mu_s \frac{90\beta_1\beta_3}{\beta_4}$$

Cujos coeficientes β_i são dados pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= 3 k_s \pi \mu_s + 3 k_s a k_n + 4 \mu_s a k_n + \pi \mu_s^2 \\
\beta_2 &= 12 k_s^2 \varepsilon \pi + 16 k_s \varepsilon \pi \mu_s + 12 a \mu_s k_n + 9 k_s a k_n + 3 \pi \mu_s^2 + 9 k_s \pi \mu_s \\
\beta_3 &= 9 k_s \pi \mu_s + 12 k_s a k_t + 16 \mu_s a k_t + 6 \pi \mu_s^2 \\
\beta_4 &= (288\beta_1 k_s \mu_s \varepsilon \pi + 384\beta_1 \mu_s^2 \varepsilon \pi + 48\beta_3 k_s \mu_s \varepsilon \pi + 64\beta_3 \mu_s^2 \varepsilon \pi + 45\beta_1 \beta_3)
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Levando-se em consideração a aleatoriedade perfeita da distribuição das fraturas, observa-se que o tensor de rigidez \mathbb{C}^{hom} resultante é isotrópico e, portanto, pode ser escrito como:

$$\mathbb{C}^{hom} = 3 k_{hom} \mathbb{J} + 2 \mu_{hom} \mathbb{K} \tag{4.27}$$

Desta forma os valores de k_{hom} e μ_{hom} são dados pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
k_{hom} &= 3 k_s \frac{\beta_1}{\beta_2} \\
\mu_{hom} &= \mu_s \frac{45\beta_1\beta_3}{\beta_4}
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Novamente, comparando as expressões (4.25), (4.26) e (4.28) com os resultados obtidos por Lorenci (2013), observa-se uma correlação plena. Esta relação foi esperada a partir do momento em que se usou o mesmo procedimento para determinação e sinaliza que os resultados obtidos estão corretos.

4.1.3 Representação Gráfica das Componentes Elásticas da Rigidez

Uma vez que as expressões anteriores foram determinadas analiticamente, torna-se necessário determinar o material cujas propriedades devem ser utilizadas. Uma vez que algumas das propriedades são de difícil obtenção, foi necessário escolher dois materiais cujas propriedades fossem semelhantes. Desta forma admitiu-se as rochas Diabásio e Norito cujas propriedades relevantes encontram-se na tabela 4.1. Estes materiais foram utilizados em todas aplicações referentes ao presente capítulo.

E_S	85	GPa	k_n	25	GPa/m
ν_S	0,28	-	k_t	10	GPa/m
μ_S	33,2	GPa	\mathcal{F}_t	735	Pa.m
k_s	64,4	GPa			

Tabela 4.1: Propriedades do Material Admitido

Ressalta-se que o valor de k_t foi admitido com base em k_n da seguinte forma: $k_n = 2,5 k_t$. Além disso, o valor \mathcal{N} foi admitido unitário, de forma a significar uma fratura por elemento de volume. Obtendo-se todos os parâmetros da matriz em questão, é possível representar graficamente as componentes dos tensores de rigidez para cada uma das distribuições sugeridas. Neste aspecto, as figuras 4.5, 4.6 e 4.7 representam comparação dos valores obtidos para as componentes do tensor de rigidez admitindo cada uma das distribuições de fraturas (aleatória e paralela). Observa-se, contudo, que os valores se encontram normalizados pelo valor da componente admitindo que não existem fraturas.

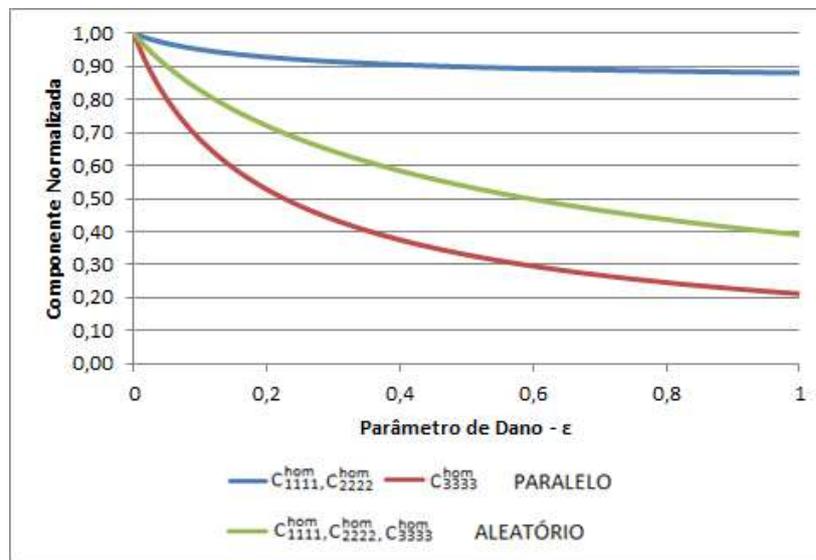


Figura 4.5: Componentes “iiii” do Tensor de Rigidez

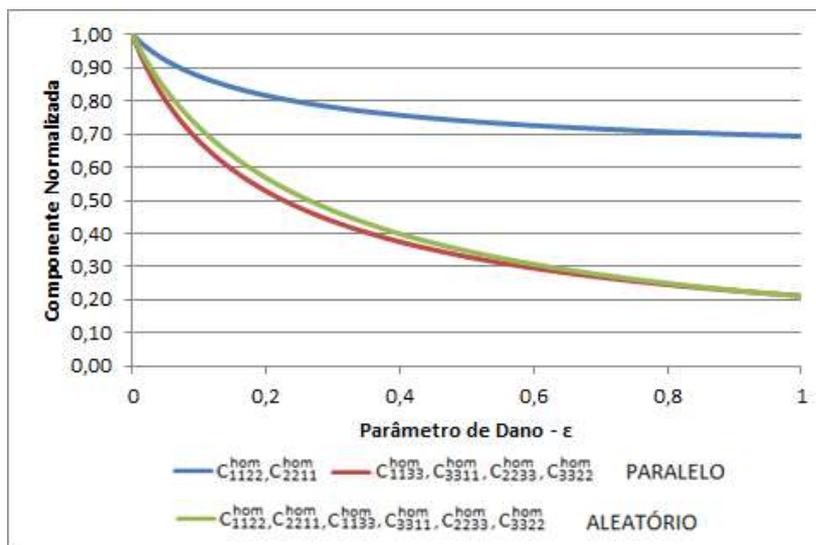


Figura 4.6: Componentes “ijj” do Tensor de Rigidez

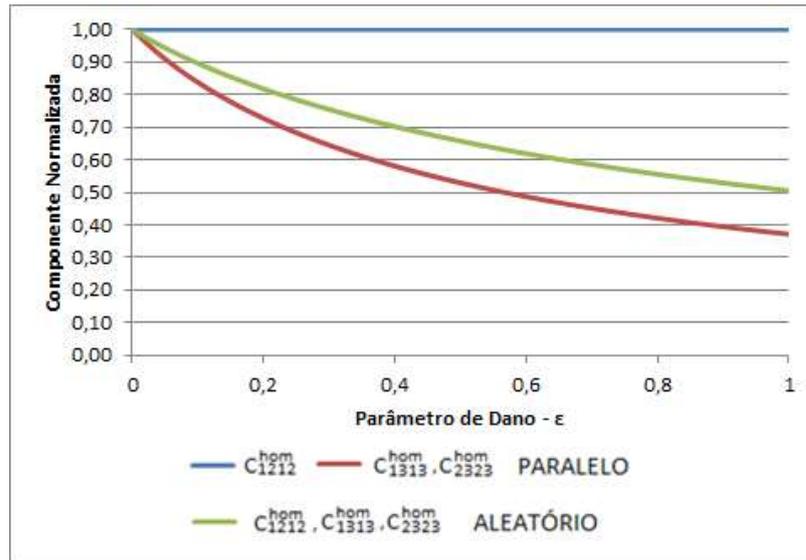


Figura 4.7: Componentes “ijij” do Tensor de Rigidez

Observa-se nos gráficos acima que, durante a distribuição paralela, a componente C_{3333}^{hom} perpendicular as fraturas apresenta um declínio muito mais acelerado que as componentes C_{1111}^{hom} e C_{2222}^{hom} paralelas. Tal fenômeno ocorreu de modo similar nas demais componentes do tensor de rigidez.

Comparando-se ambos modelos, de forma geral, as componentes do modelo de distribuição de fraturas aleatório encontram-se entre os valores extremos das componentes do tensor de rigidez do modelo de distribuição paralelo. No entanto, na figura 4.6 não se observou tal comportamento, podendo-se supor que no modelo de distribuição aleatório existe uma menor influência entre cada uma das direções do tensor em relação as demais.

4.2 PROPAGAÇÃO DE FRATURAS EM MEIO ELÁSTICO

Na seção anterior definiu-se o tensor de rigidez homogeneizado do meio admitindo os modelos de distribuição de fraturas paralelo e aleatório, cada qual apresentando um resultado diferente. No entanto, aqueles resultados são válidos para um determinado nível de fraturação e não determinam se existe ou não propagação das fraturas existentes. Nesta seção foi avaliada a propagação das fraturas, avaliando-se o nível de carga necessário para o início da propagação.

Antes de prosseguir, é necessário apresentar algumas ferramentas da mecânica da fratura. Diferentemente da mecânica da fratura tradicional, admitida por Griffith, as fraturas aqui apresentadas apresentam interação entre faces opostas. Desta forma apresenta-se um

comportamento pré-determinado para as fraturas, cujo tensor de rigidez fica denominado por $\underline{\underline{K}}$. Tal tensor é determinado em laboratório para, posteriormente, ser aplicado no contexto necessário.

O desenvolvimento da condição de propagação para fraturas é realizado de forma análoga ao material de Griffith, com a diferença de que, no trabalho em questão, não será propagada uma fratura única e sim um conjunto delas e, portanto, tornam-se necessárias as ferramentas da homogeneização. Inicialmente admite-se que a densidade volumétrica de energia livre do meio elástico homogeneizado é dada por:

$$W^f = \frac{1}{2} \underline{\underline{\epsilon}} : \mathbb{C}_{hom}(\epsilon) : \underline{\underline{\epsilon}} \quad (4.29)$$

onde \mathbb{C}_{ho} define o tensor de rigidez do material fraturado homogeneizado. Pode-se escrever a dissipação de energia \dot{D} como a diferença entre a densidade de energia mecânica de deformação Ψ_M e a densidade de energia armazenada Ψ_L . Tem-se então:

$$\Psi_M = \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} \quad , \quad \Psi_L(\underline{\underline{\epsilon}}, \epsilon) = W^f = \frac{\partial W^f}{\partial \underline{\underline{\epsilon}}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} + \frac{\partial W^f}{\partial \epsilon} \dot{\epsilon} \quad (4.30)$$

$$\frac{\dot{D}}{|\Omega_0|} = \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} - \frac{\partial W^f}{\partial \underline{\underline{\epsilon}}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} - \frac{\partial W^f}{\partial \epsilon} \dot{\epsilon} = \left(\underline{\underline{\Sigma}} - \frac{\partial W^f}{\partial \underline{\underline{\epsilon}}} \right) : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} - \frac{\partial W^f}{\partial \epsilon} \dot{\epsilon} \quad (4.31)$$

sendo $\underline{\underline{\Sigma}}$ a tensão macroscópica, $\underline{\underline{\epsilon}}$ a deformação macroscópica, $|\Omega_0|$ o volume do VER e ϵ um parâmetro que represente o dano macroscopicamente – neste trabalho adotou-se o parâmetro de densidade de fraturas, apresentado por O’Connell. Por outro lado, a equação de estado elástica escrita na escala macroscópica é:

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \frac{\partial W^f}{\partial \underline{\underline{\epsilon}}} = \mathbb{C}_{hom} : \underline{\underline{\epsilon}} \quad (4.32)$$

Desta forma a expressão da dissipação de energia, reduz-se a:

$$\frac{\dot{D}}{|\Omega_0|} = - \frac{\partial W^f}{\partial \epsilon} \dot{\epsilon} \quad (4.33)$$

Para avaliar a propagação de fraturas, avalia-se a força termodinâmica \mathcal{F} responsável pela propagação, o que se torna equivalente à evolução do ϵ :

$$\mathcal{F} = -\frac{\partial W^f}{\partial \epsilon} \geq 0 \quad (4.34)$$

Escreve-se então, o seguinte critério de não propagação, baseado na existência de uma força termodinâmica crítica \mathcal{F}_c a partir da qual a fratura se propagará:

$$\mathcal{F} \leq \mathcal{F}_c(\epsilon) \quad (4.35)$$

Desta forma escreve-se:

$$-\frac{\partial W^f}{\partial \epsilon} \leq \mathcal{F}_c(\epsilon) \quad (4.36)$$

De forma mais elaborada, pode-se expandir o termo da derivada parcial e escrever:

$$-\frac{1}{2} \underline{\underline{\epsilon}} : \frac{\partial \mathbb{C}_{hom}}{\partial \epsilon} : \underline{\underline{\epsilon}} \leq \mathcal{F}_c(\epsilon) \quad (4.37)$$

Baseando-se na igualdade $\mathbb{C}_{hom} : \mathbb{S}_{hom} = \mathbb{I}$, é possível deduzir uma condição de não propagação semelhante à expressão (4.37) formulada em termos de tensões macroscópicas, a qual fica expressa por:

$$\frac{1}{2} \underline{\underline{\Sigma}} : \frac{\partial \mathbb{S}_{hom}}{\partial \epsilon} : \underline{\underline{\Sigma}} \leq \mathcal{F}_c(\epsilon) \quad (4.38)$$

O procedimento utilizado para deduzir esta expressão resume-se a:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_{hom} : \mathbb{S}_{hom} &= \mathbb{I} \\ \frac{\partial \mathbb{C}_{hom}}{\partial \epsilon} : \mathbb{S}_{hom} + \mathbb{C}_{ho} : \frac{\partial \mathbb{S}_{hom}}{\partial \epsilon} &= \mathbb{O} \\ -\frac{\partial \mathbb{C}_{hom}}{\partial \epsilon} : \mathbb{S}_{hom} &= \mathbb{C}_{hom} : \frac{\partial \mathbb{S}_{hom}}{\partial \epsilon} \\ -\underline{\underline{\epsilon}} : \frac{\partial \mathbb{C}_{hom}}{\partial \epsilon} : \mathbb{S}_{hom} : \underline{\underline{\Sigma}} &= \underline{\underline{\epsilon}} : \mathbb{C}_{hom} : \frac{\partial \mathbb{S}_{hom}}{\partial \epsilon} : \underline{\underline{\Sigma}} \\ -\underline{\underline{\epsilon}} : \frac{\partial \mathbb{C}_{hom}}{\partial \epsilon} : \underline{\underline{\epsilon}} &= \underline{\underline{\Sigma}} : \frac{\partial \mathbb{S}_{hom}}{\partial \epsilon} : \underline{\underline{\Sigma}} \end{aligned} \quad (4.38b)$$

Observa-se, contudo, que a força termodinâmica crítica \mathcal{F}_c é uma propriedade dependente da escala de observação, do tamanho e quantidade das fraturas e da história do carregamento, não podendo ser determinado para um determinado material e sim para uma determinada estrutura. Contudo, a expressão (4.39) fornece uma relação entre \mathcal{F}_c e \mathcal{F}_t . Onde \mathcal{F}_t é a força termodinâmica crítica para uma fratura isolada apresentada por Griffith, a qual é propriedade do material e caracteriza a energia por unidade de superfície que é irreversivelmente dissipada na forma de aumento da área superficial da fratura ou seja, da propagação da fratura.

$$\mathcal{F}_c(\epsilon) = \frac{2\pi}{3} \mathcal{F}_t \left(\frac{\mathcal{N}}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (4.39)$$

Esta expressão é deduzida com base na expressão da dissipação de energia durante a propagação ($\dot{s} > 0$ ou $\dot{\epsilon} > 0$), a qual pode tomar duas formas distintas dependendo se a análise baseia-se sobre uma fratura unitária ou sobre um conjunto de fraturas ocupando um determinado volume $|\Omega_0|$. Estas duas formas devem ser equivalentes, no entanto, é necessário manter a consistência dimensional para que sejam escritas como iguais. A expressão (4.40c) apresenta a igualdade entre estas duas formas, mantendo a consistência dimensional:

$$\dot{D} = \mathcal{F}_t \dot{s} \quad (4.40a)$$

$$\frac{\dot{D}}{|\Omega_0|} = \mathcal{F}_c \dot{\epsilon} \quad (4.40b)$$

$$\frac{\dot{D}}{|\Omega_0|} = \mathcal{N} \mathcal{F}_t \dot{s} = \mathcal{F}_c \dot{\epsilon} \quad (4.40c)$$

Nesta expressão, $s = \pi a^2 = \pi \left(\frac{\epsilon}{\mathcal{N}} \right)^{\frac{2}{3}}$ é dada como a superfície da fratura e sua evolução se escreve como:

$$\dot{s} = \frac{2\pi}{3} \left(\frac{1}{\mathcal{N}} \right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{1}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{3}} \dot{\epsilon} \quad (4.41)$$

Unindo-se as expressões (4.40) e (4.41) obtém-se, então, a expressão (4.39). Para aplicar a propagação de fraturas, o problema será dividido em dois: tensão prescrita e deformação prescrita. Para aplicar a problemática em tensões prescritas, utiliza-se a expressão (4.38) e para a abordagem em deformações prescritas, utiliza-se a expressão (4.37).

Recorda-se que ambas as expressões apresentem o mesmo resultado e podem ser aplicadas nas duas condições anunciadas. A forma com que foi proposto apenas facilita os cálculos e a compreensão das equações. Existe, no entanto, uma dificuldade ao aplicar a condição em tensões expressa pela expressão (4.38), trata-se do tensor \mathbb{S}_{ho} o qual não foi determinado neste trabalho. Para determinar \mathbb{S}_{hom} foi realizada a seguinte aproximação: $\mathbb{S}_{hom} = \mathbb{C}_{hom}^{-1}$. Sabe-se, conforme mencionou-se na seção 3.4.2, que no âmbito da homogeneização esta relação apenas é verdadeira para meios periódicos e no caso vigente existem erros associados a esta expressão.

Lembra-se, contudo, que a variável ϵ é apresentada como qualquer parâmetro que representa macroscopicamente as fraturas e, portanto, podem ser utilizados quaisquer parâmetros de fratura para a avaliação das condições aplicadas. No caso em questão, julgou-se mais adequado a utilização do parâmetro de densidade de fissuras apresentado por O'Connell. A presente seção é, então, dividida em 4 subseções, contendo os modelos de distribuição de fraturas paralelo e aleatório e a prescrição de tensão ou deformação.

4.2.1 Deformação Prescrita - Fraturas Orientadas Paralelamente

Uma vez admitindo a distribuição paralela das fraturas – lembrando-se que as fraturas são definidas perpendicularmente ao eixo 3 – define-se a derivada do tensor de rigidez homogeneizado \mathbb{C}_{hom} em relação à densidade de fraturas ϵ como a derivada de cada um de seus coeficientes. Desta forma obtém-se as seguintes componentes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_{1111}^{hom}}{\partial \epsilon} = \frac{\partial C_{2222}^{hom}}{\partial \epsilon} = \frac{\partial C_{1122}^{hom}}{\partial \epsilon} = \frac{\partial C_{2211}^{hom}}{\partial \epsilon} &= -\frac{12 \pi \gamma_1}{\alpha_1^2} (3k_s + 4\mu_s)(3k_s - 2\mu_s)^2 \\ \frac{\partial C_{3333}^{hom}}{\partial \epsilon} &= -\frac{12 \pi \gamma_1}{\alpha_1^2} (3k_s + 4\mu_s)^3 \\ \frac{\partial C_{1133}^{ho}}{\partial \epsilon} = \frac{\partial C_{2233}^{hom}}{\partial \epsilon} = \frac{\partial C_{3311}^{hom}}{\partial \epsilon} = \frac{\partial C_{3322}^{hom}}{\partial \epsilon} &= -\frac{12 \pi \gamma_1}{\alpha_1^2} (3k_s + 4\mu_s)^2 (3k_s - 2\mu_s) \\ \frac{\partial C_{2323}^{hom}}{\partial \epsilon} = \frac{\partial C_{3131}^{hom}}{\partial \epsilon} &= -\frac{96 \pi \gamma_3}{\alpha_5^2} \mu_s^2 (3k_s + 4\mu_s) \quad ; \quad \frac{\partial C_{1212}^{hom}}{\partial \epsilon} = 0 \end{aligned} \tag{4.42}$$

Onde os parâmetros α_i são os mesmos das expressões (4.11) e os parâmetros γ_i são:

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= (3k_s\mu_s\pi + \mu_s^2\pi + 3k_s k_n a + 4k_n\mu_s a) \\
\gamma_2 &= (9k_s\mu_s\pi + 3\mu_s^2\pi + 6k_s k_n a + 8k_n\mu_s a) \\
\gamma_3 &= (9k_s\mu_s\pi + 6\mu_s^2\pi + 12k_s k_t a + 16k_t\mu_s a) \\
\gamma_4 &= (27k_s\mu_s\pi + 18\mu_s^2\pi + 24k_s k_t a + 32k_t\mu_s a) \\
\gamma_5 &= \frac{\pi\epsilon}{a}(3k_s + 4\mu_s) = \mathcal{N}\pi a^2(3k_s + 4\mu_s)
\end{aligned} \tag{4.43}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_6 &= \frac{4}{45} \frac{\gamma_5}{\gamma_1^2 \gamma_3^2} \left(\left(3\gamma_3 + \frac{9}{2}\pi\mu_s(3k_s + 2\mu_s) \right) \gamma_2^2 + (\gamma_3^2 - 6\pi\mu_s(3k_s + \mu_s)\gamma_3 - \right. \\
&\quad \left. 9\pi^2\mu_s^2(3k_s + 2\mu_s)(3k_s + \mu_s))\gamma_2 + \left(\frac{3}{2}\pi^2\mu_s^2 \right) (3k_s + \mu_s)^2\gamma_4 \right)
\end{aligned}$$

Determinado o tensor $\partial\mathbb{C}_{hom}/\partial\epsilon$, admite-se três casos de deformações prescritas para obter resultados mais específicos.

- a) deformação isotrópica: $\underline{\underline{\epsilon}} = E \underline{\underline{1}}$;
- b) deformação uniaxial: $\underline{\underline{\epsilon}} = E \underline{\underline{e}}_3 \otimes \underline{\underline{e}}_3$;
- c) deformação de cisalhamento: $\underline{\underline{\epsilon}} = E (\underline{\underline{e}}_2 \otimes \underline{\underline{e}}_3 + \underline{\underline{e}}_3 \otimes \underline{\underline{e}}_2)$.

4.2.1.1 Deformação Isótropa

Aplicando-se a deformação isotrópica do tipo $\underline{\underline{\epsilon}} = E \underline{\underline{1}}$ e resolvendo a expressão tensorial (4.37) obtém-se a seguinte condição de propagação:

$$\frac{486 \pi k_s^2 \gamma_1 (3k_s + 4\mu_s) E^2}{(4 a \gamma_5 (3k_s + 4\mu_s) + 9 \gamma_1)^2} \leq \mathcal{F}_c(\epsilon) \tag{4.44}$$

Desta forma – enquanto ainda não existe a propagação das fraturas – pode-se admitir a existência de uma deformação crítica onde se tem o início da propagação a qual fica representada por:

$$E_{cri} = \frac{(4 a \gamma_5 (3k_s + 4\mu_s) + 9 \gamma_1)}{9 k_s} \sqrt{\frac{\mathcal{F}_c(\epsilon)}{6\pi \gamma_1 (3k_s + 4\mu_s)}} \tag{4.45}$$

4.2.1.2 Deformação Uniaxial

Aplicando-se a deformação Uniaxial do tipo $\underline{\underline{\epsilon}} = E \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$ e resolvendo a expressão tensorial (4.37) obtém-se a seguinte condição de propagação:

$$\frac{6 \pi \gamma_1 (3k_s + 4\mu_s)^3 E^2}{(4 a \gamma_5 (3k_s + 4\mu_s) + 9 \gamma_1)^2} \leq \mathcal{F}_c(\epsilon) \quad (4.46)$$

Desta forma – enquanto ainda não existe a propagação das fraturas – pode-se admitir a existência de uma deformação crítica onde se tem o início da propagação a qual fica representada por:

$$E_{cri} = \frac{(4 a \gamma_5 (3k_s + 4\mu_s) + 9 \gamma_1)}{(3k_s + 4\mu_s)} \sqrt{\frac{\mathcal{F}_c(\epsilon)}{6\pi \gamma_1 (3k_s + 4\mu_s)}} \quad (4.47)$$

4.2.1.3 Deformação de Cisalhamento

Aplicando-se a deformação de Cisalhamento do tipo $\underline{\underline{\epsilon}} = E (\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_2)$ e resolvendo a expressão tensorial (4.37) obtém-se a seguinte condição de propagação:

$$\frac{48 \pi \mu_s^2 \gamma_3 (3k_s + 4\mu_s) E^2}{(16 a \mu_s \gamma_5 + 3 \gamma_3)^2} \leq \mathcal{F}_c(\epsilon) \quad (4.48)$$

Desta forma – enquanto ainda não existe a propagação das fraturas – pode-se admitir a existência de uma deformação crítica onde se tem o início da propagação a qual fica representada por:

$$E_{cri} = \frac{(16 a \mu_s \gamma_5 + 3 \gamma_3)}{4\mu_s} \sqrt{\frac{\mathcal{F}_c(\epsilon)}{3\pi \gamma_3 (3k_s + 4\mu_s)}} \quad (4.49)$$

4.2.1.4 Representação Gráfica das Deformações Críticas

Aplicando-se os parâmetros apresentados anteriormente na figura 4.4, apresentada na seção 4.1.3, pode-se apresentar o gráfico da figura 4.8, o qual estabelece a deformação crítica para cada uma das direções de deformação aplicada segundo o parâmetro de dano. Em outras palavras, para um determinado nível de dano, existe uma deformação na direção da deformação solicitante que é responsável por iniciar o processo de propagação de fraturas no material, esta deformação é representada na figura 4.8.

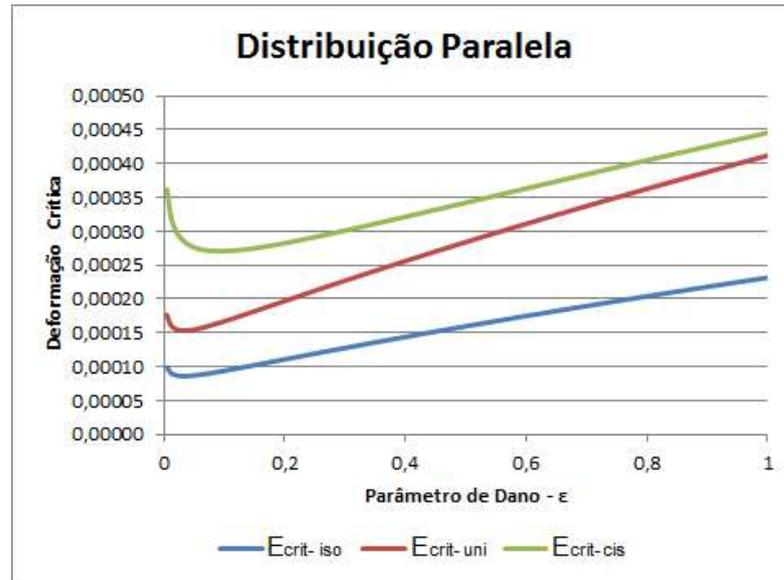


Figura 4.8: Comparação entre as deformações críticas admitindo distribuição paralela de fraturas

Ressalta-se que se o parâmetro de dano for admitido como nulo a deformação crítica se estende até infinito em todos os casos, isso ocorre devido ao fato de não ser possível propagar uma fratura que sequer encontra-se na matriz, com a teoria apresentada aqui. Percebe-se que materiais fraturados são mais deformáveis e, portanto, apresentam um valor crítico mais elevado.

4.2.2 Deformação Prescrita - Fraturas Orientadas Aleatoriamente

Diferentemente da orientação paralela das fraturas, aqui o tensor $\partial C_{hom}/\partial \epsilon$ não foi apresentado pois seus termos apresentam expressões muito extensas, porém as condições de propagação resultam em expressões mais simples, as quais podem ser apresentadas de forma semelhante às anteriores. Da mesma forma que realizado anteriormente, admite-se três casos de deformações prescritas.

- a) deformação isotropa: $\underline{\underline{\epsilon}} = E \underline{\underline{1}}$;
- b) deformação uniaxial: $\underline{\underline{\epsilon}} = E \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$;
- c) deformação de cisalhamento: $\underline{\underline{\epsilon}} = E (\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_2)$.

4.2.2.1 Deformação Isótropa

Aplicando-se a deformação isótropa do tipo $\underline{\underline{\epsilon}} = E \underline{\underline{1}}$ e resolvendo a expressão tensorial (4.37) obtém-se a seguinte condição de propagação:

$$\frac{54 \pi k_s^2 \gamma_1 (3k_s + 4\mu_s) E^2}{\beta_2^2} \leq \mathcal{F}_c(\epsilon) \quad (4.50)$$

Desta forma – enquanto ainda não existe a propagação das fraturas – pode-se admitir a existência de uma deformação crítica onde se tem o início da propagação a qual fica representada por:

$$E_{cri} = \frac{\beta_2}{3k_s} \sqrt{\frac{\mathcal{F}_c(\epsilon)}{6\pi \gamma_1 (3k_s + 4\mu_s)}} \quad (4.51)$$

4.2.2.2 Deformação Uniaxial

Aplicando-se a deformação uniaxial do tipo $\underline{\underline{\epsilon}} = E \underline{\underline{e}}_3 \otimes \underline{\underline{e}}_3$ e resolvendo a expressão tensorial (4.37) obtém-se a seguinte condição de propagação:

$$\frac{18 \pi \gamma_1 (3k_s + 4\mu_s) E^2}{\beta_2^2 \beta_4^2} P \leq \mathcal{F}_c(\epsilon) \quad (4.52)$$

Onde:

$$\begin{aligned} P = & 1440\mu_s^2 \gamma_1^3 \gamma_3 + 15\gamma_1^2 \gamma_3^2 (45k_s^2 + 16\mu_s^2) + 960ak_s \mu_s \gamma_1^2 \gamma_3 \gamma_5 (3k_s + 4\mu_s) + \\ & 3072a^2 k_s^2 \mu_s^2 \gamma_1^2 \gamma_5^2 + 32ak_s \mu_s \gamma_1 \gamma_3 \gamma_5 (3k_s + 4\mu_s) (112\pi k_s \mu_s \epsilon + 5\gamma_3) + \\ & 512a^2 k_s^2 \mu_s^2 \gamma_3^2 \gamma_5^2 \end{aligned} \quad (4.53)$$

Desta forma – enquanto ainda não existe a propagação das fraturas – pode-se admitir a existência de uma deformação crítica onde se tem o início da propagação a qual fica representada por:

$$E_{cri} = \beta_2 \beta_4 \sqrt{\frac{\mathcal{F}_c(\epsilon)}{18\pi \gamma_1 (3k_s + 4\mu_s) P}} \quad (4.54)$$

4.2.2.3 Deformação de Cisalhamento

Aplicando-se a deformação de Cisalhamento do tipo $\underline{\underline{\epsilon}} = E (\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_2)$ e resolvendo a expressão tensorial (4.37) obtém-se a seguinte condição de propagação:

$$\frac{720 \pi \mu_s^2 \gamma_1 \gamma_3 (3k_s + 4\mu_s) (6\gamma_1 + \gamma_3) E^2}{\beta_4^2} \leq \mathcal{F}_c(\epsilon) \quad (4.55)$$

Desta forma – enquanto ainda não existe a propagação das fraturas – pode-se admitir a existência de uma deformação crítica onde se tem o início da propagação a qual fica representada por:

$$E_{cri} = \frac{\beta_4}{12\mu_s} \sqrt{\frac{\mathcal{F}_c(\epsilon)}{5\pi \gamma_1 \gamma_3 (3k_s + 4\mu_s) (6\gamma_1 + \gamma_3)}} \quad (4.56)$$

4.2.2.4 Representação Gráfica das Deformações Críticas

Aplicando-se as propriedades apresentadas anteriormente na figura 4.4, apresentada na seção 4.1.3 pode-se apresentar o seguinte gráfico cuja interpretação for realizada na seção 4.2.1.4, comparando a deformação críticas nas três situações estudadas:

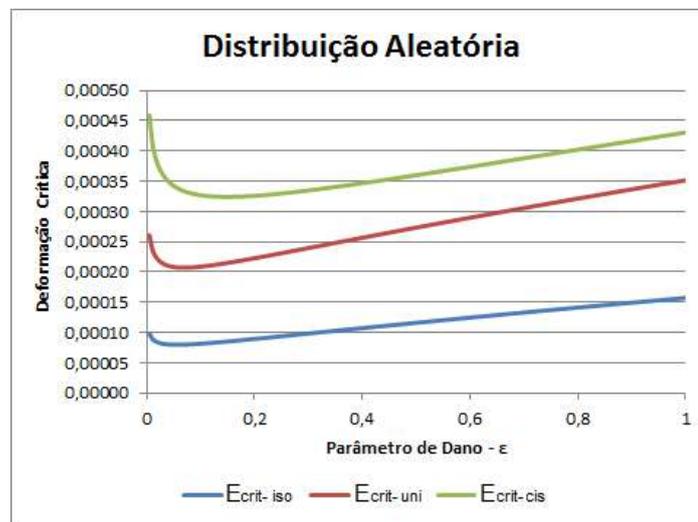


Figura 4.9: Comparação entre as deformações críticas admitindo distribuição aleatória de fraturas

Novamente, ressalta-se que se o parâmetro de dano for admitido como nulo a deformação crítica se estende até infinito em todos os casos, isso ocorre devido ao fato de não ser possível propagar

uma fratura que sequer encontra-se na matriz. Percebe-se que materiais fraturados são mais deformáveis e, portanto, apresentam um valor crítico mais elevado.

4.2.3 Tensão Prescrita - Fraturas Orientadas Paralelamente

Como mencionado anteriormente, para a expressão (3.38) será utilizada a aproximação $\mathbb{S}_{ho} = \mathbb{C}_{hom}^{-1}$. Esta aproximação não apresenta as sutilezas do verdadeiro \mathbb{S}_{hom} e, portanto, os resultados podem ser diferentes daqueles observados com o real valor de \mathbb{S}_{hom} . Define-se, novamente, a derivada do tensor de flexibilidade homogeneizado \mathbb{S}_{hom} em relação à densidade de fraturas ϵ como a derivada da inversa do tensor de rigidez \mathbb{C}_{ho} . Desta forma obtém-se as seguintes componentes não nulas – para fraturas perpendiculares ao eixo 3:

$$\frac{\partial S_{3333}^{hom}}{\partial \epsilon} = \frac{4 \pi}{3 \gamma_1} (3k_s + 4\mu_s) \quad (4.57)$$

$$\frac{\partial S_{2323}^{hom}}{\partial \epsilon} = \frac{\partial S_{3131}^{hom}}{\partial \epsilon} = \frac{8 \pi}{3 \gamma_3} (3k_s + 4\mu_s)$$

Onde os parâmetros γ_i são os mesmos das expressões (4.43) e os demais termos – não simétricos – são nulos. Determinado o tensor $\partial \mathbb{S}_{hom} / \partial \epsilon$, admite-se três casos de tensões prescritas para obter resultados mais específicos.

- a) tensão isotropa: $\underline{\underline{\Sigma}} = \Sigma \underline{\underline{1}}$;
- b) tensão uniaxial: $\underline{\underline{\Sigma}} = \Sigma \underline{\underline{e_3}} \otimes \underline{\underline{e_3}}$;
- c) tensão de cisalhamento: $\underline{\underline{\Sigma}} = \Sigma (\underline{\underline{e_2}} \otimes \underline{\underline{e_3}} + \underline{\underline{e_3}} \otimes \underline{\underline{e_2}})$.

4.2.3.1 Tensão Isótropa

Aplicando-se a tensão isotropa do tipo $\underline{\underline{\Sigma}} = \Sigma \underline{\underline{1}}$ e resolvendo a expressão tensorial (4.38) obtém-se a seguinte condição de propagação:

$$\frac{2 \pi (3k_s + 4\mu_s) \Sigma^2}{3 \gamma_1} \leq \mathcal{F}_c(\epsilon) \quad (4.58)$$

Desta forma – enquanto ainda não existe a propagação das fraturas – pode-se admitir a existência de uma tensão crítica onde se tem o início da propagação a qual fica representada por:

$$\Sigma_{cri} = \sqrt{\frac{3 \gamma_1 \mathcal{F}_c(\epsilon)}{2\pi (3k_s + 4\mu_s)}} \quad (4.59)$$

4.2.3.2 Tensão Uniaxial

Aplicando-se a deformação uniaxial do tipo $\underline{\underline{\Sigma}} = \Sigma \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$ e resolvendo a expressão tensorial (4.38) obtém-se a seguinte condição de propagação:

$$\frac{2 \pi (3k_s + 4\mu_s) \Sigma^2}{3\gamma_1} \leq \mathcal{F}_c(\epsilon) \quad (4.60)$$

Observa-se que a condição de propagação (4.60) é idêntica a condição de propagação (4.58). Tal comportamento ocorre devido às componentes nulas na derivada do tensor S_{hom} , impedindo que exista propagação nas direções (1) e (2) que são paralelas as fraturas. Desta forma – enquanto ainda não existe a propagação das fraturas – pode-se admitir a existência de uma tensão crítica – igual a expressão (4.59) – que provoca o início da propagação a qual fica representada por:

$$\Sigma_{cri} = \sqrt{\frac{3 \gamma_1 \mathcal{F}_c(\epsilon)}{2\pi (3k_s + 4\mu_s)}} \quad (4.61)$$

4.2.3.3 Tensão de Cisalhamento

Aplicando-se a tensão de cisalhamento do tipo $\underline{\underline{\Sigma}} = \Sigma (\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_2)$ e resolvendo a expressão tensorial (4.38) obtém-se a seguinte condição de propagação:

$$\frac{4 \pi (3k_s + 4\mu_s) \Sigma^2}{3\gamma_3} \leq \mathcal{F}_c(\epsilon) \quad (4.62)$$

Desta forma – enquanto ainda não existe a propagação das fraturas – pode-se admitir a existência de uma tensão crítica onde se tem o início da propagação a qual fica representada por:

$$\Sigma_{cri} = \sqrt{\frac{3 \gamma_3 \mathcal{F}_c(\epsilon)}{4 \pi (3k_s + 4\mu_s)}} \quad (4.63)$$

4.2.3.4 Representação Gráfica das Tensões Críticas

Aplicando-se os parâmetros apresentados anteriormente na figura 4.4, apresentada na seção 4.1.3, pode-se apresentar o gráfico da figura 4.10, o qual estabelece a tensão crítica para cada uma das direções de tensão aplicadas segundo o parâmetro de dano. Em outras palavras, para um determinado nível de dano, existe uma tensão na direção da tensão solicitante que é responsável por iniciar o processo de propagação de fraturas no material, esta tensão é representada na figura 4.10.

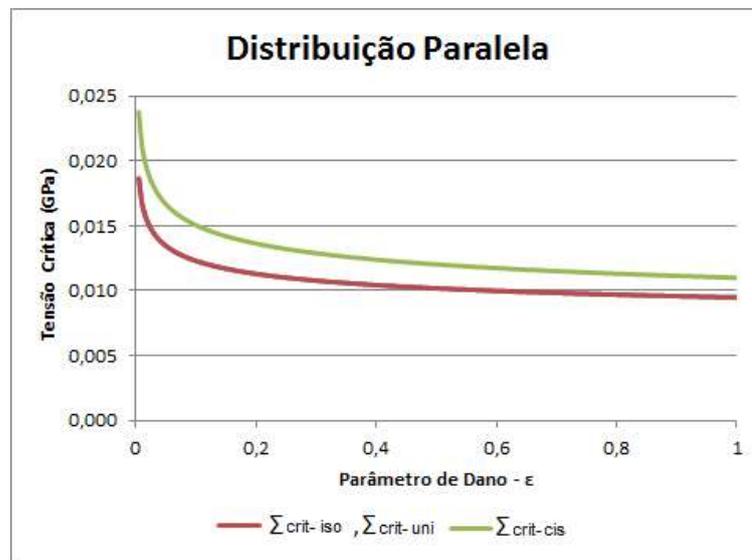


Figura 4.10: Comparação entre as tensões críticas admitindo distribuição paralela de fraturas

Novamente, ressalta-se que se o parâmetro de dano for admitido como nulo a tensão crítica se estende até infinito em todos os casos. Como pode-se observar, nesta situação os limites aplicando tensões isotrópicas e direcionadas obtiveram a mesma curva. Como já foi explicado, tal resultado ocorre devido a impossibilidade de propagação das fraturas ao aplicar tensões paralelas a estas e, devido a isso, tensões isotrópicas apenas apresentam uma direção responsável pela propagação. Ressalta-se que os eixos das fraturas coincidem com a direção de aplicação das tensões, caso as tensões não coincidisse sobre estes eixos, estes resultados não seriam obtidos. É importante perceber que a medida que o material se danifica, a tensão crítica reduz. Este comportamento é explicado devido a redução da área da matriz do material.

4.2.4 Tensão Prescrita - Fraturas Orientadas Aleatoriamente

Como mencionado anteriormente, para a expressão (3.38) será utilizada a aproximação $\mathbb{S}_{ho} = \mathbb{C}_{hom}^{-1}$. Esta aproximação não apresenta as sutilezas do verdadeiro \mathbb{S}_{hom} e, portanto, os resultados podem ser diferentes daqueles observados com o real valor de \mathbb{S}_{hom} . define-se, novamente, a derivada do tensor de flexibilidade homogeneizado \mathbb{S}_{hom} em relação à densidade de fraturas ϵ como a derivada da inversa do tensor de rigidez \mathbb{C}_{hom} . Desta forma obtém-se as seguintes componentes não nulas – com $i, j = 1, 2, 3$, sem admitir a convenção de Einstein:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_{iii}^{hom}}{\partial \epsilon} &= \frac{4\pi}{45} (3k_s + 4\mu_s) \frac{(8\gamma_1 + 3\gamma_3)}{\gamma_1\gamma_3} \\ \frac{\partial S_{ijj}^{ho}}{\partial \epsilon} &= -\frac{4\pi}{45} (3k_s + 4\mu_s) \frac{(4\gamma_1 - \gamma_3)}{\gamma_1\gamma_3} \\ \frac{\partial S_{ijij}^{hom}}{\partial \epsilon} &= \frac{\partial S_{ijji}^{hom}}{\partial \epsilon} = \frac{8\pi}{45} (3k_s + 4\mu_s) \frac{(6\gamma_1 + \gamma_3)}{\gamma_1\gamma_3} \end{aligned} \quad (4.64)$$

Onde os parâmetros γ_i são os mesmos das expressões (4.43). Os demais termos – não simétricos – são nulos. Da mesma forma que realizado anteriormente, admite-se três casos de tensões prescritas.

- a) tensão isotrópica: $\underline{\underline{\Sigma}} = \Sigma \underline{\underline{1}}$;
- b) tensão uniaxial: $\underline{\underline{\Sigma}} = \Sigma \underline{\underline{e_3}} \otimes \underline{\underline{e_3}}$;
- c) tensão de cisalhamento: $\underline{\underline{\Sigma}} = \Sigma (\underline{\underline{e_2}} \otimes \underline{\underline{e_3}} + \underline{\underline{e_3}} \otimes \underline{\underline{e_2}})$.

4.2.4.1 Tensão Isótropa

Aplicando-se a tensão isotrópica do tipo $\underline{\underline{\Sigma}} = \Sigma \underline{\underline{1}}$ e resolvendo a expressão tensorial (4.38) obtém-se a seguinte condição de propagação:

$$\frac{2\pi(3k_s + 4\mu_s)\Sigma^2}{3\gamma_1} \leq \mathcal{F}_c(\epsilon) \quad (4.65)$$

Desta forma – enquanto ainda não existe a propagação das fraturas – pode-se admitir a existência de uma tensão crítica onde se tem o início da propagação a qual fica representada por:

$$\Sigma_{cri} = \sqrt{\frac{3 \gamma_1 \mathcal{F}_c(\epsilon)}{2\pi (3k_s + 4\mu_s)}} \quad (4.66)$$

4.2.4.2 Tensão Uniaxial

Aplicando-se a tensão uniaxial do tipo $\underline{\underline{\Sigma}} = \Sigma \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$ e resolvendo a expressão tensorial (4.38) obtém-se a seguinte condição de propagação:

$$\frac{2 \pi (3k_s + 4\mu_s)(8\gamma_1 + 3\gamma_3)\Sigma^2}{45 \gamma_1 \gamma_3} \leq \mathcal{F}_c(\epsilon) \quad (4.67)$$

Desta forma – enquanto ainda não existe a propagação das fraturas – pode-se admitir a existência de uma tensão crítica onde se tem o início da propagação a qual fica representada por:

$$\Sigma_{cri} = \sqrt{\frac{45 \gamma_1 \gamma_3 \mathcal{F}_c(\epsilon)}{2 \pi (3k_s + 4\mu_s)(8\gamma_1 + 3\gamma_3)}} \quad (4.68)$$

4.2.4.3 Tensão de Cisalhamento

Aplicando-se a tensão de Cisalhamento do tipo $\underline{\underline{\Sigma}} = \Sigma (\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_2)$ e resolvendo a expressão tensorial (4.38) obtém-se a seguinte condição de propagação:

$$\frac{4 \pi (3k_s + 4\mu_s)(6\gamma_1 + \gamma_3)\Sigma^2}{45 \gamma_1 \gamma_3} \leq \mathcal{F}_c(\epsilon) \quad (4.69)$$

Desta forma – enquanto ainda não existe a propagação das fraturas – pode-se admitir a existência de uma tensão crítica onde se tem o início da propagação a qual fica representada por:

$$\Sigma_{cri} = \sqrt{\frac{45 \gamma_1 \gamma_3 \mathcal{F}_c(\epsilon)}{4 \pi (3k_s + 4\mu_s)(6\gamma_1 + \gamma_3)}} \quad (4.70)$$

4.2.4.4 Representação Gráfica das Tensões Críticas

Aplicando-se as propriedades apresentadas anteriormente na figura 4.4, apresentada na seção 4.1.3 pode-se apresentar o seguinte gráfico cuja interpretação for realizada na seção 4.2.3.4, comparando-se a tensão crítica nas três situações estudadas:

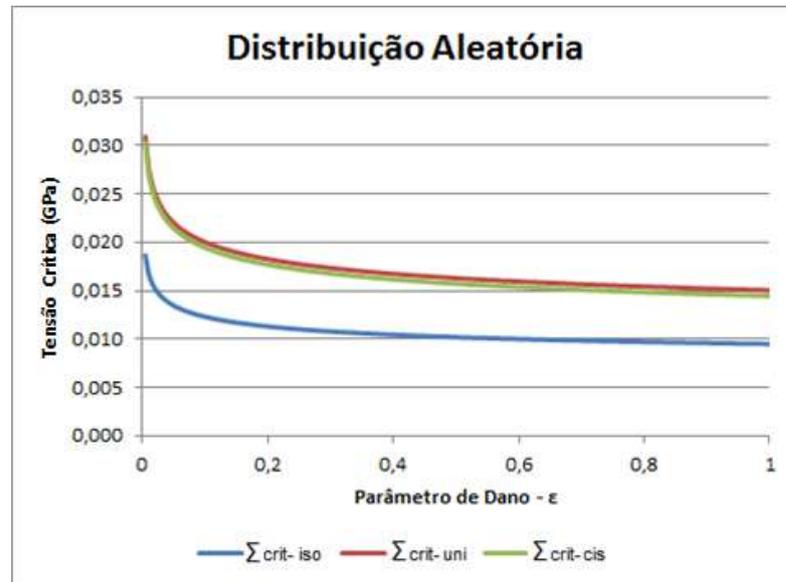


Figura 4.11: Comparação entre as tensões críticas admitindo distribuição aleatória de fraturas

Novamente, ressalta-se que se o parâmetro de dano for admitido como nulo a tensão crítica se estende até infinito em todos os casos. É importante perceber que a medida que o material se danifica, a tensão crítica reduz. Este comportamento é explicado devido a redução da área da matriz do material.

4.3 FORMULAÇÃO ALTERNATIVA DO CRITÉRIO DE PROPAGAÇÃO

Determinar os valores de \mathcal{F}_c em laboratório pode se revelar uma tarefa complexa. Devido a esta dificuldade, deve-se buscar um meio alternativo de representar as condições de propagação. Nguyen (2011) propõem a normalização das condições de propagação por sua respectiva condição de início de propagação. Desta forma, tratando-se do valor efetivo da força termodinâmica crítica \mathcal{F}_c , este valor pode ser substituído pelo seu respectivo valor algébrico da definição correspondente.

4.3.1 Propagação de Fraturas: Abordagem em Tensões

Para tal análise, admite-se que as tensões $\underline{\underline{\Sigma}}$ aplicadas devem manter-se sempre sob a mesma direção. Desta forma, observa-se a existência de um tensor $\underline{\underline{\Sigma}}_0$, na mesma direção de $\underline{\underline{\Sigma}}$, o qual corresponde ao tensor $\underline{\underline{\Sigma}}$ no instante t_0 , a partir do qual existe a propagação das fraturas. $\underline{\underline{\Sigma}}_0$ fica definida como a tensão crítica de início de propagação e é uma propriedade do material, estabelecida em laboratório para cada nível de dano do material. Uma vez que a tensão atuante apresenta a mesma direção que a tensão crítica, é possível compará-las diretamente com base em seus valores característicos Σ e Σ_0 . Pode-se escrever a seguinte relação entre estas tensões:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\Sigma}} &= \lambda \underline{\underline{\Sigma}}_0 \quad \rightarrow \quad \Sigma = \lambda \Sigma_0 & (4.71) \\ \lambda < 1 &\rightarrow \underline{\underline{\Sigma}} < \underline{\underline{\Sigma}}_0 \quad \rightarrow \quad \text{Fraturas não se propagam} \\ \lambda \geq 1 &\rightarrow \underline{\underline{\Sigma}} \geq \underline{\underline{\Sigma}}_0 \quad \rightarrow \quad \text{Fraturas se propagam} \end{aligned}$$

Onde λ é uma constante de proporcionalidade entre as Tensões. Quando as tensões atuantes Σ aplicadas sobre o sistema são inferiores a tensão crítica de propagação Σ_0 – isto é, quando $\lambda < 1$ – não existe a propagação das fraturas. No entanto, quando as tensões atuantes são superiores a tensão crítica de propagação – isto é, quando $\lambda \geq 1$ – as fraturas tem energia suficiente para induzir a propagação e, portanto, a propagação das fraturas poderá ser observada. Observa-se que as tensões críticas são dependentes de ϵ_0 , que é o valor do parâmetro de dano ϵ no instante do início da propagação. Observa-se, também, que a condição de propagação estabelecida no instante crítico, quando inicia-se a propagação, pode ser dada por:

$$\underline{\underline{\Sigma}}_0 : \frac{\partial \mathcal{S}_{hom}}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=\epsilon_0} : \underline{\underline{\Sigma}}_0 = \mathcal{F}_c |_{\epsilon=\epsilon_0} \quad (4.72)$$

Desta forma a análise de \mathcal{F}_c deve ser simplificada pela análise de \mathcal{F}_t através da expressão (4.39). Sendo assim, é possível obter uma condição de não propagação diferenciada, dividindo-se a condição de não propagação (4.38) pela expressão (4.72). Obtém-se então:

$$\frac{\underline{\underline{\Sigma}} : \frac{\partial \mathcal{S}_{hom}}{\partial \epsilon} : \underline{\underline{\Sigma}}}{\underline{\underline{\Sigma}}_0 : \frac{\partial \mathcal{S}_{hom}}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=\epsilon_0} : \underline{\underline{\Sigma}}_0} \leq \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (4.73a)$$

Pode-se, também, representar esta expressão da seguinte forma:

$$\underline{\underline{\Sigma}} : \frac{\partial \mathcal{S}_{hom}}{\partial \epsilon} : \underline{\underline{\Sigma}} \leq \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{3}} \underline{\underline{\Sigma}}_0 : \frac{\partial \mathcal{S}_{hom}}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=\epsilon_0} : \underline{\underline{\Sigma}}_0 \quad (4.73b)$$

Aplicando-se a expressão (4.71) em (4.73) chega-se a seguinte relação:

$$\lambda \leq \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{6}} \quad (4.74)$$

Aplicando este resultado obtido na expressão (4.71) obtém-se a seguinte condição de propagação em tensões:

$$\underline{\underline{\Sigma}} \leq \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{6}} \underline{\underline{\Sigma}}_0 \rightarrow \Sigma \leq \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{6}} \Sigma_0 \quad (4.75a)$$

No limite, quando inicia-se a propagação, esta expressão converte-se em:

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{6}} \underline{\underline{\Sigma}}_0 \rightarrow \Sigma = \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{6}} \Sigma_0 \quad (4.75b)$$

Observa-se que para quaisquer tensões admitidas a condição de propagação será sempre a mesma. Este resultado deve-se ao fato de que $\frac{\partial \mathcal{S}_{ho}}{\partial \epsilon}$ é independente de ϵ e, portanto, facilmente simplifica-se a expressão (4.73). Esta independência, no entanto, deve-se a simplificação adotada para \mathcal{S}_{hom} , estabelecendo que $\mathcal{S}_{hom} = \mathbb{C}_{hom}^{-1}$. Para que a análise fosse mais correta, seria necessário determinar diretamente \mathcal{S}_{hom} e verificar a dependência de ϵ .

4.3.2 Propagação de Fraturas: Abordagem em Deformações

De forma análoga, pode-se considerar a aplicação de deformações macroscópicas $\underline{\underline{\epsilon}}$ sobre o elemento. Supõem-se novamente que as deformações solicitadas mantêm-se sobre uma mesma direção ao longo do tempo. Observa-se que existe uma deformação crítica, na direção da deformação solicitada, a partir da qual existirá a propagação de fraturas. Esta deformação crítica fica denominada por $\underline{\underline{\epsilon}}_0$ a qual deve ser determinada em laboratório para cada nível de dano. Uma vez que a deformação atuante apresenta a mesma direção que a deformação crítica, é possível compará-las diretamente com base em seus valores característicos E e E_0 . Escreve-se então a seguinte relação entre estas duas deformações:

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\epsilon}} &= \lambda \underline{\underline{\epsilon}}_0 \rightarrow E = \lambda E_0 \\ \lambda < 1 &\rightarrow \text{Fraturas se propagam} \\ \lambda \geq 1 &\rightarrow \text{Fraturas não se propagam}\end{aligned}\tag{4.76}$$

Para a expressão apresentada, são válidas as mesmas observações realizadas para as tensões: Quando as deformações atuantes são maiores que as deformações críticas existe a propagação das fraturas, a passo que se as tensões críticas são maiores que as tensões atuantes, não existe a propagação. Observa-se que as deformações críticas são dependentes de ϵ_0 que é o valor do parâmetro de dano ϵ no instante do início da propagação. De forma análoga a expressão (4.72) também é necessário escrever a condição de propagação de fraturas em deformação, em um momento crítico, e substituir a análise de \mathcal{F}_c pela análise em \mathcal{F}_t através da expressão (4.39). Sendo assim, é possível obter uma condição de propagação diferenciada, dividindo-se a condição de propagação (4.37) por esta expressão em um momento crítico. Obtém-se então:

$$\frac{\underline{\underline{\epsilon}} : \frac{\partial \mathcal{C}_{hom}}{\partial \epsilon} : \underline{\underline{\epsilon}}}{\underline{\underline{\epsilon}}_0 : \frac{\partial \mathcal{C}_{hom}}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=\epsilon_0} : \underline{\underline{\epsilon}}_0} \leq \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{3}}\tag{4.77a}$$

Pode-se, também, representar esta expressão da seguinte forma:

$$\underline{\underline{\epsilon}} : \frac{\partial \mathcal{C}_{hom}}{\partial \epsilon} : \underline{\underline{\epsilon}} \leq \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{3}} \underline{\underline{\epsilon}}_0 : \frac{\partial \mathcal{C}_{hom}}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=\epsilon_0} : \underline{\underline{\epsilon}}_0\tag{4.77b}$$

Aplicando-se a expressão (4.76) em (4.77) chega-se a seguinte relação:

$$\lambda \leq \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{6}} \sqrt{\frac{\underline{\underline{\epsilon}}_0 : \frac{\partial \mathcal{C}_{hom}}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=\epsilon_0} : \underline{\underline{\epsilon}}_0}{\underline{\underline{\epsilon}}_0 : \frac{\partial \mathcal{C}_{hom}}{\partial \epsilon} : \underline{\underline{\epsilon}}_0}}\tag{4.78}$$

Aplicando este resultado obtido na expressão (4.76) obtém-se a seguinte condição de propagação em deformações:

$$\underline{\underline{\epsilon}} \leq \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{6}} \sqrt{\frac{\underline{\underline{\epsilon}}_0 : \frac{\partial \mathbb{C}_{hom}}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=\epsilon_0} : \underline{\underline{\epsilon}}_0}{\underline{\underline{\epsilon}}_0 : \frac{\partial \mathbb{C}_{ho}}{\partial \epsilon} : \underline{\underline{\epsilon}}_0}} \underline{\underline{\epsilon}}_0 \rightarrow \epsilon \leq \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{6}} \sqrt{\frac{\underline{\underline{\epsilon}}_0 : \frac{\partial \mathbb{C}_{hom}}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=\epsilon_0} : \underline{\underline{\epsilon}}_0}{\underline{\underline{\epsilon}}_0 : \frac{\partial \mathbb{C}_{hom}}{\partial \epsilon} : \underline{\underline{\epsilon}}_0}} \epsilon_0 \quad (4.79a)$$

No limite, quando inicia-se a propagação, esta expressão converte-se em:

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{6}} \sqrt{\frac{\underline{\underline{\epsilon}}_0 : \frac{\partial \mathbb{C}_{hom}}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=\epsilon_0} : \underline{\underline{\epsilon}}_0}{\underline{\underline{\epsilon}}_0 : \frac{\partial \mathbb{C}_{hom}}{\partial \epsilon} : \underline{\underline{\epsilon}}_0}} \underline{\underline{\epsilon}}_0 \rightarrow E = \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{6}} \sqrt{\frac{\underline{\underline{\epsilon}}_0 : \frac{\partial \mathbb{C}_{hom}}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=\epsilon_0} : \underline{\underline{\epsilon}}_0}{\underline{\underline{\epsilon}}_0 : \frac{\partial \mathbb{C}_{ho}}{\partial \epsilon} : \underline{\underline{\epsilon}}_0}} E_0 \quad (4.79b)$$

Observa-se agora que não é possível realizar uma simplificação tão grande quanto a realizada para tensões, isso ocorre pois o tensor \mathbb{C}_{hom} foi diretamente calculado e, com isso, reduzem-se os erros devido a aproximação da solução. Desta forma, o tensor $\frac{\partial \mathbb{C}_{ho}}{\partial \epsilon}$ permaneceu dependendo do parâmetro de dano ϵ e, portanto, a solução final depende da posição, forma, orientação, dimensão e outros parâmetros das fraturas, pois a solução é dependente de \mathbb{C}_{hom} . Esta não unicidade dos resultados faz com que seja necessário realizar aplicações para a melhor visualização dos resultados.

4.3.2.1 Deformação Isótropa – Modelo de Distribuição de Fraturas Aleatório

Aplicando-se a deformação de início de propagação isótropa do tipo $\underline{\underline{\epsilon}}_0 = E_0 \underline{\underline{1}}$ e mantendo a relação com a deformação $\underline{\underline{\epsilon}}$ como $\underline{\underline{\epsilon}} = \lambda \underline{\underline{\epsilon}}_0$, resolve-se a expressão (4.79) e obtém-se:

$$\underline{\underline{\epsilon}} : (\underline{\underline{\epsilon}}_0)^{-1} = \frac{E}{E_0} = \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{6}} \frac{\beta_2}{\beta_2^0} \quad (4.80)$$

Onde β_2 é o mesmo apresentado nas expressões (4.26) e β_2^0 trata-se de β_2 com ϵ aplicado em ϵ_0 , ou seja, $\beta_2^0 = \beta_2|_{\epsilon=\epsilon_0}$. Estes mesmos resultados podem ser obtidos dividindo-se a condição de propagação – tradicional – pela sua recíproca aplicada em ϵ_0 .

4.3.2.2 Deformação Uniaxial – Modelo de Distribuição de Fraturas Aleatório

Aplicando-se a deformação de início de propagação do tipo $\underline{\underline{\epsilon}}_0 = E_0 \underline{\underline{e}}_3 \otimes \underline{\underline{e}}_3$ e mantendo a relação com a deformação $\underline{\underline{\epsilon}}$ como $\underline{\underline{\epsilon}} = \lambda \underline{\underline{\epsilon}}_0$, resolve-se a expressão (4.79) e obtém-se:

$$\underline{\underline{\epsilon}} : (\underline{\underline{\epsilon}}_0)^{-1} = \frac{E}{E_0} = \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{6}} \frac{\beta_2 \beta_4}{\beta_2^0 \beta_4^0} \sqrt{\frac{P_0}{P}} \quad (4.81)$$

Onde β_i são os mesmos apresentados nas expressões (4.26) e β_i^0 trata-se de β_i com ϵ aplicado em ϵ_0 , ou seja, $\beta_i^0 = \beta_i|_{\epsilon=\epsilon_0}$, de forma semelhante $P_0 = P|_{\epsilon=\epsilon_0}$, sendo P apresentado na expressão (4.53). Estes mesmos resultados podem ser obtidos dividindo-se a condição de propagação – tradicional – pela sua recíproca aplicada em ϵ_0 .

4.3.2.3 Deformação de Cisalhamento – Modelo de Distribuição de Fraturas Aleatório

Aplicando-se a deformação de início de propagação do tipo $\underline{\underline{\epsilon}}_0 = E_0 (\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_2)$ e mantendo a relação com a deformação $\underline{\underline{\epsilon}}$ como $\underline{\underline{\epsilon}} = \lambda \underline{\underline{\epsilon}}_0$, resolve-se a expressão (4.79) e obtém-se:

$$\underline{\underline{\epsilon}} : (\underline{\underline{\epsilon}}_0)^{-1} = \frac{E}{E_0} = \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{6}} \frac{\beta_4}{\beta_4^0} \quad (4.82)$$

Onde β_4 são os mesmos apresentados nas expressões (4.26) e β_4^0 trata-se de β_4 com ϵ aplicado em ϵ_0 , ou seja, $\beta_4^0 = \beta_4|_{\epsilon=\epsilon_0}$. Estes mesmos resultados podem ser obtidos dividindo-se a condição de propagação – tradicional – pela sua recíproca aplicada em ϵ_0 . Resultados semelhantes podem ser obtidos para o modelo de distribuição de fraturas paralelas utilizando os procedimentos sugeridos nesta seção.

4.3.2.4 Representação Gráfica das Condições de propagação alternativas

Aplicando-se as propriedades apresentadas anteriormente na figura 4.4, apresentada na seção 4.1.3 pode-se apresentar o seguinte gráfico, comparando-se a condição de propagação normalizada nas três situações estudadas:

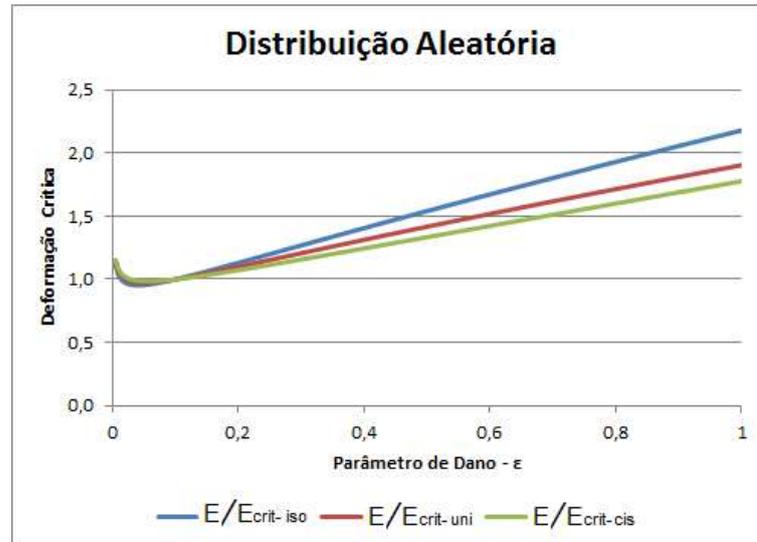


Figura 4.12: Comparação entre as condições de propagação alternativas admitindo distribuição aleatória de fraturas

Observa-se que o valor de ϵ_0 foi arbitrado como 0,1 e, portanto, valores de ϵ menores que este não apresentam significado físico. Novamente, ressalta-se que se o parâmetro de dano for admitido como nulo a deformação crítica se estende até infinito em todos os casos, isso ocorre devido ao fato de não ser possível propagar uma fratura que sequer encontra-se na matriz com a teoria apresentada aqui.

Esta condição de propagação de fraturas foi elaborada com base no trabalho de Nguyen (2010). Observa-se, entretanto, que o gráfico não é útil do ponto de vista da análise da propagação. De forma geral o material apresenta uma densidade de fraturas inicial ϵ_0 e, portanto, valores de parâmetros de dano ϵ inferiores a este não apresentam um sentido físico. Além disso, toda vez que o parâmetro de dano ϵ é superior ao valor inicial ϵ_0 , já houve a propagação das fraturas. Sendo assim a condição de propagação reduz-se à análise das solicitações, comparando-as com os valores críticos.

Comparando-se com as condições de propagação anteriormente apresentadas, observa-se um claro afastamento dos conceitos da mecânica da fratura visto que a análise com base em uma propriedade material \mathcal{F}_t é substituída pela análise em solicitações. Para utilizar esta condição de propagação, seria necessário determinar a dependência das solicitações críticas com o parâmetro de dano, a qual pode ser realizada com base nas condições de propagação clássicas, apresentadas anteriormente, ou experimentalmente, o que demandaria tempo e altos custos.

5 FUNDAMENTOS DA VISCOELASTICIDADE

Experimentalmente é observado que diversos materiais na engenharia apresentam suas solicitações resumidas a duas partes, instantânea e diferida. A parte instantânea ocorre no exato momento em que se aplicam as condições de contorno sobre a estrutura e a parte diferida ocorre ao longo do tempo, mantendo-se as condições de contorno constantes. Os materiais que apresentam este comportamento são denominados de viscoelásticos ou viscoplásticos. O presente capítulo será desenvolvido assumindo que os materiais utilizados são viscoelásticos.

Outro comportamento que se pode citar é quanto à envelhecimento dos materiais. Muitas vezes alguns materiais envelhecem, modificando suas propriedades ao longo do tempo. Em muitos casos, estes materiais envelhecem até certo ponto, a partir do qual apresentam estabilidade das suas propriedades. Materiais que não envelhecem ou que já envelheceram e que, dentro do tempo de análise, apresentam suas propriedades constantes são o objetivo deste trabalho.

5.1 VISCOELASTICIDADE UNIDIMENSIONAL

Embora neste trabalho seja aplicada a viscoelasticidade tridimensional, os conceitos básicos são mais facilmente compreendidos em modelos simples, tal como o modelo unidimensional. A presente seção tem por finalidade explicar alguns conceitos básicos de viscoelasticidade para facilitar a melhor compreensão das seções seguintes.

5.1.1 Ensaios de Fluência e de Relaxação

Para corpos unidimensionais, o ensaio de fluência é realizado aplicando-se uma tensão instantânea constante nos extremos do corpo de prova e avaliando-se a evolução da deformação ao longo do tempo. Corpos viscosos apresentam uma deformação diferida ao longo do tempo, sendo assim, com a tensão mantida constante a deformação é crescente com o passar do tempo.

Ensaios de relaxação usam a metodologia inversa, aplica-se uma deformação instantânea no corpo de prova e avalia-se a evolução da tensão ao longo do tempo. De forma análoga, um corpo viscoso reduz a tensão ao longo do tempo mesmo para uma deformação constante. Este segundo ensaio tem o inconveniente de apenas ser realizável em elementos que possibilitam a

aplicação de uma deformação total instantânea, no entanto, em geral, apresenta um tempo característico menor, o que agiliza ensaios em laboratório.

5.1.2 Viscoelasticidade Linear

Uma vez que o material é validado como linear, quando admite-se que a história das deformações passa a não interferir mais na solitação final, observa-se que o tratamento diferencial das expressões não é mais necessário para o material em questão. Materiais com estas características são denominados de materiais de Boltzmann ou materiais Boltzmannianos. Boltzmann anunciou que a superposição das solitações implica a superposição homologa das soluções para um determinado grupo de materiais. Neste trabalho, admite-se que os materiais são viscoelásticos lineares, desta forma as funções de fluência e de relaxação obtidas são independentes da história de deformações. Sendo assim pode-se definir, para um comportamento geral de carga/descarga em termos de deformação:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mathbb{J}(t, \tau)}{d\tau} : \underline{\underline{\sigma}}(\tau) d\tau \quad (5.1)$$

Sendo $\underline{\underline{\varepsilon}}(t)$ o tensor de deformações totais do sistema, $\underline{\underline{\sigma}}(\tau)$ o tensor de tensões totais aplicadas sobre o sistema, $\mathbb{J}(t, t_0)$ o tensor de fluência, τ o intervalo de tempo fictício para integração e t_0 o instante de aplicação das solitações. A expressão acima foi reescrita por Boltzmann da seguinte forma:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(t) = \mathbb{J}(t, t) : \underline{\underline{\sigma}}(t) - \int_{-\infty}^t \frac{d\mathbb{J}(t, \tau)}{d\tau} : \underline{\underline{\sigma}}(\tau) d\tau \quad (5.2)$$

Da mesma forma é possível definir a expressão a cima em termos de tensão, utilizando o tensor de relaxação $\mathbb{R}(t, t_0)$:

$$\underline{\underline{\sigma}}(t) = \mathbb{R}(t, t) : \underline{\underline{\varepsilon}}(t) - \int_{-\infty}^t \frac{d\mathbb{R}(t, \tau)}{d\tau} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\tau) d\tau \quad (5.3)$$

Com base nas expressões (5.2) e (5.3) é possível definir o operador de Boltzmann \otimes , o qual reescreve as expressões acima da seguinte forma:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(t) = \mathbb{J}(t, \tau) \otimes \underline{\underline{\sigma}}(t) \quad ; \quad \underline{\underline{\sigma}}(t) = \mathbb{R}(t, \tau) \otimes \underline{\underline{\varepsilon}}(t) \quad (5.4)$$

5.1.3 Viscoelasticidade Não Envelhescente

O envelhecimento é a característica denotada aos materiais cujas propriedades – físicas ou não – se modificam ao longo do tempo fruto de diversos fatores, naturais ou não. Esta mudança nas propriedades dos materiais pode ser muito rápida, sendo necessário considerar esta variação nas propriedades, ou muito lenta, de forma que as propriedades podem ser consideradas como estáticas se durante o tempo considerado no modelo existir uma pequena variação destas.

Também pode-se considerar que os materiais não envelhecem quando já sofreram o envelhecimento – fora do intervalo de tempo do modelo – e não apresentam mais modificações em suas propriedades no período considerado. Resumindo, o envelhecimento se resume a modificação das propriedades do material analisado dentro do intervalo de tempo do modelo proposto.

No presente trabalho foram considerados apenas materiais que não envelhecem, por simplificação. Uma vez que não é possível acompanhar a variação das propriedades de rochas ao logo de milhares de anos, foi adotado que suas propriedades permanecem envelhecidas.

Desconsiderar o envelhecimento dos materiais tem reflexo direto nas funções de fluência e de relaxação, alterando o operador de Boltzmann representado acima por um operador de convolução. Esta mudança resulta na seguinte expressão:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(t) = \mathbb{J}(t, \tau) \otimes \underline{\underline{\sigma}}(t) = \frac{d\mathbb{J}_{\tilde{n}e}(t_0, \tau)}{d\tau} * \underline{\underline{\sigma}}(t) \quad ; \quad \underline{\underline{\sigma}}(t) = \mathbb{R}(t_0, \tau) \otimes \underline{\underline{\varepsilon}}(t) = \frac{d\mathbb{R}_{\tilde{n}e}(t_0, \tau)}{d\tau} * \underline{\underline{\varepsilon}}(t) \quad (5.5)$$

Com o operador de convolução definido da seguinte forma:

$$\underline{\underline{u}}(t) * \underline{\underline{v}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{\underline{u}}(\tau) : \underline{\underline{v}}(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{\underline{v}}(\tau) : \underline{\underline{u}}(t - \tau) d\tau \quad (5.6)$$

Uma vez que neste trabalho não se considera o envelhecimento dos materiais, utiliza-se as seguintes convenções:

$$\mathbb{J}_{\tilde{n}e}(t_0; t) = \mathbb{J}(t - t_0) \quad ; \quad \mathbb{R}_{\tilde{n}e}(t_0; t) = \mathbb{R}(t - t_0) \quad (5.7)$$

Outro reflexo decorrente da adoção do não envelhecimento nos materiais recai sobre a transformada de Carson-Laplace, apresentada na seção 5.3. Materiais com envelhecimento não permitem que a transformada de Carson-Laplace seja utilizada. Isso ocorre devido ao fato de que o operador mencionado é uma integral temporal e, caso existisse a variação das propriedades devido ao envelhecimento, a função temporal que as representa iria interferir no operador de forma a invalidar o procedimento. Desta forma, materiais que apresentem envelhecimento restringem a análise viscoelástica ao espaço de tempo físico, não podendo ser convertida a uma análise elástica o espaço de Carson-Laplace.

5.1.4 Modelos Reológicos Clássicos

Reologia é a ciência que estuda fluxos de materiais líquidos bem como mudanças de forma para materiais sólidos. De forma mais geral, a reologia estuda o comportamento de determinado material e o caracteriza. Contemplando tanto a elasticidade e a plasticidade quanto a viscosidade, esta ciência é essencial para a descrição dos materiais apresentados neste trabalho.

A utilização da reologia se revela de modo cômodo no suporte à formulação de modelos de comportamento uniaxial, principalmente na viscoelasticidade linear sem envelhecimento e na plasticidade. Diversos são os modelos existentes para retratar os sistemas utilizados na modelagem. Nesta seção apresenta-se apenas os modelos mais tradicionais para formar conceitos básicos sobre os modelos que são utilizados neste trabalho.

5.1.4.1 Modelos Básicos: Mola Simples e Amortecedor

Sendo estes os modelos os mais simples, geralmente são utilizados para formar modelos mais complicados. Estes modelos descrevem materiais muito simples ou materiais mais complexos cujo regime de funcionamento se dê de forma muito semelhante dentro do intervalo de carga ou de tempo considerado. O modelo de mola simples é utilizado em análises onde assume-se que o comportamento do sistema é puramente elástico. A figura 5.1 apresenta estes modelos.

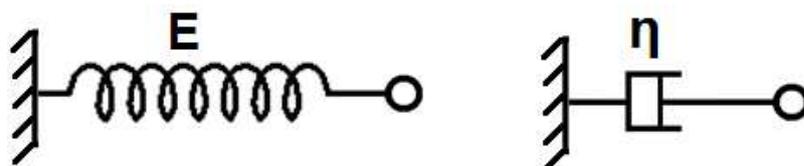


Figura 5.1: Modelo de mola simples e amortecedor

Ambos modelos aceitam condições de contorno tanto em tensões quanto em deformações e cada um deles conecta estas solicitações por meio de uma expressão. As expressões a seguir definem as funções de fluência e de relaxação e são apresentadas, respectivamente, para a mola simples, sub índice m, e para o amortecedor, sub índice d:

$$\begin{aligned} J_m(t - t_0) &= \frac{1}{E} Y(t - t_0) \quad ; \quad R_m(t - t_0) = E Y(t - t_0) \\ J_d(t - t_0) &= \frac{t}{\eta} Y(t - t_0) \quad ; \quad R_d(t - t_0) = \eta \delta(t - t_0) \end{aligned} \quad (5.8)$$

Onde as funções $Y(t - t_0)$ e $\delta(t - t_0)$ são, respectivamente, a função de Heaviside e sua derivada – Delta de Dirac:

$$\begin{aligned} Y(t - t_0) &= \begin{cases} 0 & \text{se } t < t_0 \\ \text{indefinida em } t = t_0 \\ 1 & \text{se } t > t_0 \end{cases} \\ \delta(t - t_0) &= \begin{cases} \infty & \text{se } t = t_0 \\ 0 & \text{se } t \neq t_0 \end{cases} \end{aligned} \quad (5.9)$$

$F_n(t - t_0)$ e $R_n(t - t_0)$ são, respectivamente, as funções de fluência e de relaxação unidimensionalizadas para o elemento ‘n’. Simplificadamente, para o caso unidimensional, pode-se escrever a lei de comportamento mecânico, respectivamente para a mola e para o amortecedor, como:

$$\sigma(t) = E \varepsilon_m(t) \quad ; \quad \sigma(t) = \eta \dot{\varepsilon}_d(t) \quad (5.10)$$

5.1.4.2 Modelos de Maxwell e Kelvin

Para tornar o comportamento mecânico dos modelos propostos um pouco mais completo, pode-se misturar os modelos de mola simples e amortecedor para formar um novo modelo. Este é o princípio dos modelos de Maxwell – agrupando-os em série – e Kelvin – agrupando-os em paralelo. A figura 5.2 apresenta ambos os modelos:

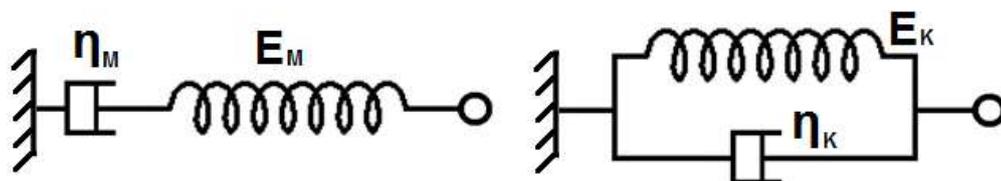


Figura 5.2: Modelo de Maxwell e modelo de Kelvin

Assim como antes, pode-se escrever as funções de fluência e de relaxação, respectivamente para o modelo de Maxwell, sub índice M, e para o modelo de Kelvin, sub índice K, como (adotando $t_0 = 0$):

$$\begin{aligned} J_M(t) &= \frac{1}{E_M} Y(t) + \frac{t}{\eta_M} Y(t) \quad ; \quad R_M(t) = E_M e^{\left(-\frac{E_M}{\eta_M} t\right)} Y(t) \\ J_K(t) &= \frac{1}{E_K} \left(1 - e^{\left(-\frac{E_K}{\eta_K} t\right)}\right) Y(t) \quad ; \quad R_K(t) = E_K Y(t) + \eta_K \delta(t) \end{aligned} \quad (5.11)$$

Pode-se definir o tempo característico τ_c como $\tau_c = \eta/E$, que pode ser de fluência ou de relaxação, dependendo de em qual função se encontra este expoente.

5.1.4.3 Modelos Sólidos Lineares Padrão

Dentre estes modelos, pode-se citar o modelo de Kelvin-Voigt e o modelo de Zener, além de outros. Todos estes modelos são equivalentes entre si, sendo possível determinar o modelo de Zener com as constantes obtidas em Kelvin-Voigt, por exemplo. A figura 5.3 apresenta estes dois modelos:

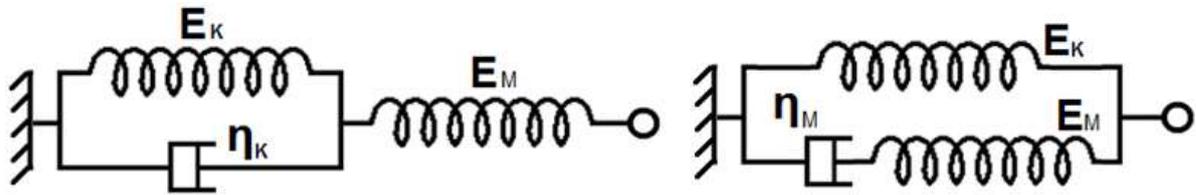


Figura 5.3: Modelo de Kelvin-Voigt e modelo de Zener

Assim como nos modelos anteriores também é possível expressar as funções de fluência e de relaxação analiticamente, estas funções ficam definidas na seguinte equação:

$$\begin{aligned} J_{KV}(t) &= \left(\frac{E_K + E_M}{E_K E_M} - \frac{1}{E_K} e^{\left(-\frac{E_K}{\eta_K} t\right)} \right) Y(t) \\ R_{KV}(t) &= \left(\frac{E_K E_M}{E_K + E_M} + \frac{E_M^2}{E_K + E_M} e^{\left(-\frac{E_K + E_M}{\eta_K} t\right)} \right) Y(t) \\ J_Z(t) &= \left(\frac{1}{E_K} - \frac{E_M}{E_K (E_K + E_M)} e^{\left(-\frac{E_K E_M}{\eta_M (E_K + E_M)} t\right)} \right) Y(t) \\ R_Z(t) &= \left(E_K + E_M e^{\left(-\frac{E_M}{\eta_M} t\right)} \right) Y(t) \end{aligned} \quad (5.12)$$

Onde os sub índices KV e Z representam Kelvin-Voigt e Zener, respectivamente.

5.2 MODELO VISCOELÁSTICO TENSORIAL TRIDIMENSIONAL

Baseando-se em observações experimentais, modelos para materiais – exibindo comportamento viscoelástico não envelhescente isótropos – são formulados em um contexto tensorial através de modelos reológicos unidimensionais clássicos (NGUYEN, S. T., 2011). No caso de geomateriais, é comum a utilização do modelo de Burger – apresentado na figura 5.4 – fornecendo resultados satisfatórios. Este modelo é a combinação dos modelos reológicos de Maxwell e Kelvin dispostos em série. Neste contexto, os sub índices M e K denotam Maxwell e Kelvin e os índices ‘e’ e ‘v’ denotam a parte elástica e a parte viscosa respectivamente.

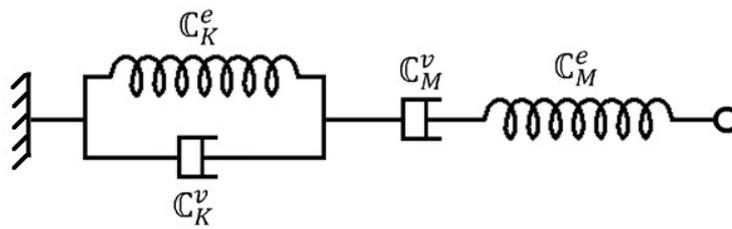


Figura 5.4: Modelo reológico de Burger

Observa-se que \mathbb{C} representa um tensor que contém as propriedades elásticas ou viscosas do elemento em questão, assemelhando-se ao tensor de rigidez do elemento. Para estabelecer corretamente a lei de comportamento deste modelo, se decompõem a velocidade de deformação total segundo a contribuição da parte de Maxwell e da parte de Kelvin:

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}} = \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}_M + \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}_K \quad (5.13)$$

Sendo a velocidade de deformação da parte de Maxwell ligada a tensão total da seguinte forma:

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}_M = \mathbb{S}_M^e : \underline{\underline{\dot{\sigma}}} + \mathbb{S}_M^v : \underline{\underline{\sigma}} \quad (5.14)$$

Onde \mathbb{S}_M^e é o tensor de flexibilidade elástico de Maxwell e \mathbb{S}_M^v é o inverso do tensor de viscosidade \mathbb{C}_M^v . Combinando as expressões (5.13) e (5.14) é possível expressar $\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}_K$ em função das variáveis $\underline{\underline{\epsilon}}$ e $\underline{\underline{\sigma}}$:

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}_K = \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} - \mathbb{S}_M^e : \underline{\underline{\dot{\sigma}}} - \mathbb{S}_M^v : \underline{\underline{\sigma}} \quad (5.15)$$

Cuja derivada toma a seguinte forma:

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}_K = \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} - \underline{\underline{S}}_M^e : \underline{\underline{\dot{\sigma}}} - \underline{\underline{S}}_M^v : \underline{\underline{\dot{\sigma}}} \quad (5.16)$$

Por outro lado, a equação de estado da parte de Kelvin expressa $\underline{\underline{\sigma}}$ em função de $\underline{\underline{\epsilon}}$ da seguinte forma:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}}_K^e : \underline{\underline{\epsilon}}_K + \underline{\underline{C}}_K^v : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}_K \quad (5.17)$$

Cuja derivada toma a seguinte forma:

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \underline{\underline{C}}_K^e : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}_K + \underline{\underline{C}}_K^v : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}_K \quad (5.18)$$

Introduzindo as expressões (5.15) e (5.16) em (5.18) obtém-se uma equação diferencial de segunda ordem, representando a lei de comportamento do sistema:

$$\underline{\underline{X}} : \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{Y}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}} + \underline{\underline{Z}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \underline{\underline{C}}_K^e : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} + \underline{\underline{C}}_K^v : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} \quad (5.19)$$

onde

$$\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{C}}_K^e : \underline{\underline{S}}_M^v \quad ; \quad \underline{\underline{Y}} = \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{C}}_K^e : \underline{\underline{S}}_M^e + \underline{\underline{C}}_K^v : \underline{\underline{S}}_M^v \quad ; \quad \underline{\underline{Z}} = \underline{\underline{C}}_K^v : \underline{\underline{S}}_M^e \quad (5.20)$$

Admitindo que os materiais em questão são isotrópicos, é possível expressar os tensores $\underline{\underline{C}}$ e $\underline{\underline{S}}$ presentes na expressão (5.20) por meio de duas constantes características para cada um (NGUYEN, S. T., 2011). Pode-se então escrever:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{C}}_K^e &= 3k_K \underline{\underline{J}} + 2\mu_K \underline{\underline{K}} \quad ; \quad \underline{\underline{C}}_K^v = \eta_K^s \underline{\underline{J}} + \eta_K^d \underline{\underline{K}} \\ \underline{\underline{C}}_M^e &= 3k_M \underline{\underline{J}} + 2\mu_M \underline{\underline{K}} \quad ; \quad \underline{\underline{C}}_M^v = \eta_M^s \underline{\underline{J}} + \eta_M^d \underline{\underline{K}} \quad ; \end{aligned} \quad (5.21)$$

Com k_α e μ_α sendo os módulos de compressão e de cisalhamento pertencentes ao tensor elástico do submodelo α (Kelvin ou Maxwell) e η_α^s e η_α^d sendo os módulos esférico e desviador do tensor de viscosidade do submodelo α . Além disso, $\underline{\underline{J}}$ e $\underline{\underline{K}}$ são respectivamente as projeções esféricas e desviadoras do tensor unitário $\underline{\underline{I}}$ de ordem 4, as quais são representadas como:

$$\underline{\underline{J}} = \underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{1}} \quad ; \quad \underline{\underline{K}} = \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{J}} \quad (5.22)$$

Na expressão acima, \otimes representa o operador de produto tensorial. Desta forma pode-se expressar \mathbb{X} , \mathbb{Y} e \mathbb{Z} da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\mathbb{X} &= \frac{3k_K}{\eta_M^s} \mathbb{J} + \frac{2\mu_K}{\eta_M^d} \mathbb{K} \quad ; \quad \mathbb{Y} = \left(1 + \frac{k_K}{k_M} + \frac{\eta_K^s}{\eta_M^s}\right) \mathbb{J} + \left(1 + \frac{\mu_K}{\mu_M} + \frac{\eta_K^d}{\eta_M^d}\right) \mathbb{K} \\ \mathbb{Z} &= \frac{\eta_K^s}{3k_M} \mathbb{J} + \frac{\eta_K^d}{2\mu_M} \mathbb{K}\end{aligned}\tag{5.23}$$

5.3 LEI DE COMPORTAMENTO NO ESPAÇO DE CARSON-LAPLACE

A transformada de Carson-Laplace é uma operação matemática utilizada com a finalidade de resolver equações diferenciais. Particularmente útil na viscoelasticidade, a transformada de Carson-Laplace simplifica a análise viscoelástica transformando o espaço de tempo na variável t em um espaço de tempo fictício na variável p . Admite-se então que a expressão $u(t)$ é transformada para $u^*(p)$ por meio da seguinte expressão:

$$u^*(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{u}(t)e^{-pt} dt\tag{5.24}$$

Demonstra-se facilmente a seguinte propriedade, $\dot{u}^* = pu^*$. Utilizando a transformada de Carson-Laplace trabalha-se muito mais facilmente com equações diferenciais. Na ausência de propagação de fissuras, a transformada de Carson-Laplace permite transformar a lei de comportamento dada por (5.19) em:

$$\underline{\underline{\sigma}}^* : \underline{\underline{\sigma}}^* + p\underline{\underline{\mathbb{Y}}} : \underline{\underline{\sigma}}^* + p^2\underline{\underline{\mathbb{Z}}} : \underline{\underline{\sigma}}^* = p\underline{\underline{\mathbb{C}}}_K^e : \underline{\underline{\varepsilon}}^* + p^2\underline{\underline{\mathbb{C}}}_K^v : \underline{\underline{\varepsilon}}^*\tag{5.25}$$

Desta forma se obtém uma relação direta entre $\underline{\underline{\sigma}}^*$ e $\underline{\underline{\varepsilon}}^*$:

$$\underline{\underline{\sigma}}^* = \underline{\underline{\mathbb{R}}}^* : \underline{\underline{\varepsilon}}^*\tag{5.26}$$

onde:

$$\underline{\underline{\mathbb{R}}}^* = (\underline{\underline{\mathbb{X}}} + p\underline{\underline{\mathbb{Y}}} + p^2\underline{\underline{\mathbb{Z}}})^{-1} : (p\underline{\underline{\mathbb{C}}}_K^e + p^2\underline{\underline{\mathbb{C}}}_K^v)\tag{5.27}$$

Uma vez que foi admitido que todos os materiais em questão são isotrópicos e que não existem inclusões presentes que alterem tal comportamento, pode-se admitir que o tensor de relaxação no espaço de Carson-Laplace também utiliza esta propriedade sendo, portanto, definido por meio de dois escalares da seguinte forma:

$$\mathbb{R}^* = 3k^*\mathbb{J} + 2\mu^*\mathbb{K} \quad (5.28)$$

Estes parâmetros são determinados por meio das expressões anteriores e podem ser apresentados como:

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^*} &= \frac{1}{k_M} + \frac{3}{p\eta_M^s} + \frac{3}{3k_K + p\eta_K^s} \quad ; \quad \frac{1}{\mu^*} = \frac{1}{\mu_M} + \frac{2}{p\eta_M^d} + \frac{2}{2\mu_K + p\eta_K^d} \\ v^* &= \frac{3k^* - 2\mu^*}{6k^* + 2\mu^*} \quad ; \quad \frac{1}{E^*} = \frac{1}{9k^*} + \frac{1}{3\mu^*} \end{aligned} \quad (5.29)$$

Uma vez tendo em mãos o tensor de relaxação no espaço de Carson-Laplace \mathbb{R}^* , é possível utilizar o operador de transformada inversa de Carson-Laplace e obter o tensor de relaxação no espaço de tempo físico. A operação de inversa da transformada pode ser determinada de diversas formas, inclusive por inspeção, no entanto, para diversas configurações possíveis estes resultados encontram-se tabelados na literatura. Uma vez constatada que a configuração desejada não se encontra tabelada recorre-se a resoluções mais complexas. Em tais situações, convém perceber que a transformada de Carson-Laplace pode ser relacionada com a transformada de Laplace por $(u)^* = \mathcal{L}(\dot{u})$. Uma vez determinada esta correlação entre as transformadas, o cálculo da inversa da transformada de Laplace reduz-se a integral de Fourier, estabelecida com base no lema de Jordan, definida pela seguinte expressão:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F\}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT} e^{p t} F(p) dp & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases} \quad (5.30)$$

Onde i representa a unidade complexa.

5.4 PROPAGAÇÃO DE FRATURAS EM MEIOS VISCOELÁSTICOS

Primeiramente, recorda-se que fraturas são descontinuidades que transmitem esforços por suas faces. A presente seção apresenta-se, então, como uma extensão da abordagem proposta por

Nguyen (2010), a qual admitia fissuras (descontinuidades que não transmitem esforços). Inicialmente considera-se as condições de contorno em deformações $\underline{\underline{\epsilon}}$ sobre o contorno do VER. Para esta deformação define-se a tensão recíproca $\underline{\underline{\Sigma}}$. O parâmetro que representa a fratura foi definido como o parâmetro de densidade de fraturas ϵ . Uma vez que este trabalho visa aplicar qualquer modelo reológico à matriz e a fratura, o campo de deformações viscosas fica definido como $\{\underline{\underline{\epsilon}}^v\}$.

Tal como na elasticidade, a densidade de dissipação de energia é determinada com base nas variáveis da energia livre, portanto é necessário determinar a energia livre de um sistema viscoelástico para, posteriormente, determinar a condição de propagação de fraturas. Sendo assim, a energia livre W^f macroscópica do sistema pode ser obtida pela integração volumétrica da energia livre na escala microscópica. Na microescala a energia livre é determinada como a soma do produto entre tensão e deformação em cada uma das molas de um sistema reológico. Desta forma, adotando o modelo de Burger representado na figura 5.5, a energia livre fica definida como:

$$W^f = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega(a)} \left(\frac{1}{2} \underline{\underline{\epsilon}}_M^e : \mathbb{C}_M^e : \underline{\underline{\epsilon}}_M^e + \frac{1}{2} \underline{\underline{\epsilon}}_K^v : \mathbb{C}_K^e : \underline{\underline{\epsilon}}_K^v \right) dV \quad (5.31)$$

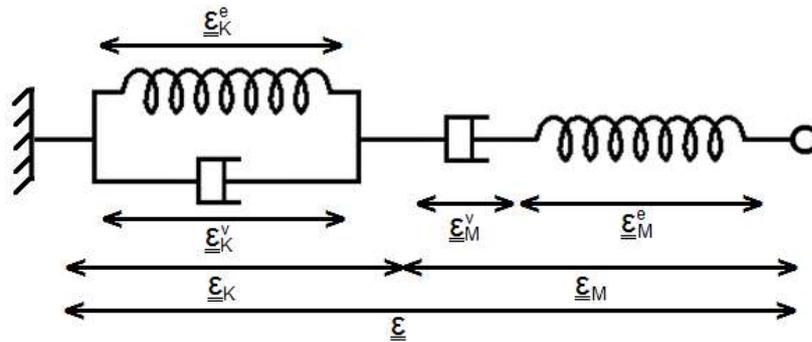


Figura 5.5: Definição das deformações atuantes no modelo de Burger

Onde $\underline{\underline{\epsilon}}_\alpha^e$ e $\underline{\underline{\epsilon}}_\alpha^v$ são, respectivamente, as deformações elásticas e viscosas do submodelo α (com α representando o modelo de Maxwell ou Kelvin). Observa-se, no entanto, que para o elemento de Kelvin tem-se a seguinte igualdade $\underline{\underline{\epsilon}}_K = \underline{\underline{\epsilon}}_K^e = \underline{\underline{\epsilon}}_K^v$. Para continuar o desenvolvimento Nguyen (2011) sugere utilizar uma formulação alternativa a equação (5.18), escrevendo-a da seguinte forma:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mathbb{C}_M^e : \underline{\underline{\epsilon}} + \underline{\underline{\sigma}}^r \quad (5.32)$$

Com $\underline{\underline{\sigma}}^r = -\mathbb{C}_M^e : \underline{\underline{\epsilon}}^v$, definindo-se $\underline{\underline{\epsilon}}^v$ como a deformação residual no sistema ao fim de um descarregamento instantâneo. Se o campo atual de deformações viscosas $\{\underline{\underline{\epsilon}}_\alpha^v\}(t)$ – com $\alpha = M$ ou K – é considerado como dado, a deformação total que aparece na equação (5.32) é a solução de um problema elástico linear com um campo de pretensão igual a $\underline{\underline{\sigma}}^r$. O campo de deformação total no instante t depende, então, linearmente da deformação $\underline{\underline{\epsilon}}(t)$ aplicada ao problema, do campo de deformações viscosas $\{\underline{\underline{\epsilon}}_\alpha^v\}(t)$ e ainda da geometria do sistema, a qual fica caracterizada por $\epsilon(t)$. Desta forma, a energia livre estocada em um sistema viscoelástico pode ser considerada como função dos valores atuais $\underline{\underline{\epsilon}}(t)$, $\{\underline{\underline{\epsilon}}_\alpha^v\}(t)$ e $\epsilon(t)$. Neste caso a dissipação toma a seguinte forma:

$$\frac{\dot{D}}{|\Omega_0|} = \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} - \frac{\partial W^f}{\partial \underline{\underline{\epsilon}}} \Big|_{\epsilon, \{\underline{\underline{\epsilon}}_\alpha^v\}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} - \frac{\partial W^f}{\partial \{\underline{\underline{\epsilon}}_\alpha^v\}} \Big|_{\underline{\underline{\epsilon}}, \epsilon} : \{\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}_\alpha^v\} - \frac{\partial W^f}{\partial \epsilon} \Big|_{\underline{\underline{\epsilon}}, \{\underline{\underline{\epsilon}}_\alpha^v\}} \dot{\epsilon} \quad (5.33)$$

Verifica-se que em uma evolução não dissipativa $\{\underline{\underline{\epsilon}}_\alpha^v\} = 0$ e $\dot{\epsilon} = 0$ tem-se:

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \frac{\partial W^e}{\partial \underline{\underline{\epsilon}}} \Big|_{\epsilon, \{\underline{\underline{\epsilon}}_\alpha^v\}} = \mathbb{R}_{hom}^0(\epsilon) : \left(\underline{\underline{\epsilon}} - \underline{\underline{\epsilon}}^v(\epsilon, \{\underline{\underline{\epsilon}}_\alpha^v\}) \right) \quad (5.34)$$

Onde $\mathbb{R}_{ho}^0(\epsilon)$ é o tensor de relaxação homogeneizado avaliado em $t=0$. Por fim, a dissipação responsável pela propagação pode ser escrita como:

$$\frac{\dot{D} - \dot{D}^v}{|\Omega_0|} = - \frac{\partial W^f}{\partial \epsilon} \Big|_{\underline{\underline{\epsilon}}, \{\underline{\underline{\epsilon}}_\alpha^v\}} \dot{\epsilon} \quad (5.35)$$

Onde

$$\frac{\dot{D}^v}{|\Omega_0|} = - \frac{\partial W^f}{\partial \{\underline{\underline{\epsilon}}_\alpha^v\}} \Big|_{\underline{\underline{\epsilon}}, \epsilon} : \{\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}_\alpha^v\} \quad (5.36)$$

Da mesma forma que anteriormente, a força termodinâmica responsável pela propagação das fraturas fica definida como:

$$\mathcal{F} = - \frac{\partial W^f}{\partial \epsilon} \Big|_{\underline{\underline{\epsilon}}, \{\underline{\underline{\epsilon}}^v\}} \left(\underline{\underline{\epsilon}}, \epsilon, \{\underline{\underline{\epsilon}}^v\} \right) \quad (5.37)$$

A diferença agora – na propagação viscoelástica – é que este valor passa a ser afetado pelo campo de deformações viscosas $\{\underline{\underline{\epsilon}}^v\}$. Com um raciocínio similar a análise energética desenvolvida em microelastoplasticidade, a densidade de energia livre é decomposta em uma parte instantânea e outra residual (LUBLINER, 1984):

$$W^f = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\epsilon}} - \underline{\underline{\epsilon}}^v \right) : \mathbb{R}_{hom}^0 : \left(\underline{\underline{\epsilon}} - \underline{\underline{\epsilon}}^v \right) + W_{res} \left(\epsilon, \{\underline{\underline{\epsilon}}^v\} \right) \quad (5.38)$$

Onde o primeiro termo representa a energia recuperável devido a um descarregamento instantâneo e o segundo termo representa a energia elástica não recuperável após este descarregamento. Desta forma a força termodinâmica \mathcal{F} responsável pela propagação é dada por:

$$\mathcal{F} = - \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\epsilon}} - \underline{\underline{\epsilon}}^v \right) : \frac{\partial \mathbb{R}_{hom}^0}{\partial \epsilon} : \left(\underline{\underline{\epsilon}} - \underline{\underline{\epsilon}}^v \right) + \left(\underline{\underline{\epsilon}} - \underline{\underline{\epsilon}}^v \right) : \frac{\partial \mathbb{R}_{hom}^0}{\partial \epsilon} : \frac{\partial \underline{\underline{\epsilon}}^v}{\partial \epsilon} \Big|_{\{\underline{\underline{\epsilon}}^v\}} - \frac{\partial W_{res} \left(\epsilon, \{\underline{\underline{\epsilon}}^v\} \right)}{\partial \epsilon} \quad (5.39)$$

A seguir adota-se a hipótese que a parte da dissipação que ocorre devido a propagação é proporcional a taxa $\dot{\epsilon}$:

$$\frac{\dot{D} - \dot{D}^v}{|\Omega_0|} = G_c \dot{\epsilon} \quad (5.40)$$

Onde G_c é a força termodinâmica crítica a partir da qual inicia-se a propagação. Seguindo este desenvolvimento, o critério de propagação estabelecido sobre \mathcal{F} é dado por:

$$\mathcal{F} < G_c \Rightarrow \dot{\epsilon} = 0 \quad ; \quad \mathcal{F} = G_c \Rightarrow \dot{\epsilon} \geq 0 \quad (5.41)$$

Sendo que igualdade $\mathcal{F} \left(\underline{\underline{\epsilon}}, \epsilon, \{\underline{\underline{\epsilon}}^v\} \right) = G_c$ permite prever a propagação em função da evolução dos parâmetros de carregamento. Nota-se que a solução passa a ser controlada de forma direta pelo campo de deformações viscosas e, conseqüentemente, pela velocidade da solitação.

6 COMPORTAMENTO HOMOGENEIZADO DE UM MEIO VISCOELÁSTICO FRATURADO

Até então os capítulos anteriores apresentavam cada um dos temas presentes aqui de maneira isolada, neste capítulo está sendo abordada a união de todos estes conhecimentos. O presente capítulo apresenta, inicialmente, o procedimento para determinação dos tensores de relaxação e de fluência para materiais que não envelhecem admitindo um modelo reológico genérico e, posteriormente, especificando alguns modelos para a matriz e para as fraturas pode-se representar tais tensores graficamente. Tal como realizado no capítulo 4, são admitidas as distribuições de fraturas paralela e aleatória.

6.1 DETERMINAÇÃO DOS TENSORES DE FLUÊNCIA E DE RELAXAÇÃO

No capítulo 4 determinou-se o tensor de rigidez homogeneizado para um sistema elástico linear, especificou-se que o tensor de flexibilidade – obtido através da inversa do tensor de rigidez homogeneizado – poderia ser utilizado mantendo-se algumas restrições. No presente capítulo, determina-se o tensor de relaxação homogeneizado para um sistema viscoelástico não envelhesciente. Desta forma, tal como se limitou anteriormente, o tensor de fluência foi obtido através da inversa do tensor de relaxação no espaço de fictício Carson-Laplace. Desta forma, o tensor de fluência obtido é uma aproximação a qual deve ser utilizada com cautela.

Mantendo-se as observações já mencionadas sobre a forma das fraturas bem como a distribuição destas no meio percebe-se que é conveniente realizar ao menos dois procedimentos, o primeiro deles admitindo fraturação paralela e o segundo admitindo fraturação aleatória. Lembrando-se que o espaço fictício de Carson-Laplace transforma o problema viscoelástico real em um problema elástico fictício equivalente, observa-se que os resultados obtidos para o sistema elástico – no capítulo 4 – podem ser aproveitados.

6.1.1 Inversa da Transformada de Carson-Laplace

Nas seções seguintes são apresentadas aplicações as quais determinam o tensor de relaxação de alguns sistemas. Uma vez que estes tensores são inicialmente determinados no espaço de

Carson-Laplace, torna-se necessário estabelecer um procedimento capaz de realizar a transformada inversa do tensor de relaxação no espaço operacional para obtê-los no espaço real. Desta forma, a solução a seguir é oferecida sempre que, dentro do espaço fictício de Carson-Laplace, a função de relaxação se encontrar como uma divisão entre dois polinômios na variável $p - A(p)$ e $B(p)$ – em que o grau de $B(p)$ é maior ou igual ao grau de $A(p)$. Independentemente do modelo reológico adotado – tanto para a matriz quanto para as fraturas – e da distribuição de fraturas admitida, percebe-se que, em todas aplicações da seção posterior, a maior simplificação que se pode obter dentro do espaço de Carson-Laplace encontra-se sob esta forma racional, por este motivo, a presente seção torna-se uma ferramenta útil na determinação da transformada inversa das seções procedentes. Sendo assim, considera-se os seguintes polinômios de mesmo grau k :

$$\begin{aligned} A(p) &= \sum_{n=0}^k a_n p^n \\ B(p) &= \sum_{n=0}^k b_n p^n = \prod_{n=1}^z (p - R_n)^{g_n} \\ F(p) &= \frac{A(p)}{p B(p)} \end{aligned} \quad (6.1)$$

Onde:

k é o grau dos polinômios $A(p)$ e $B(p)$;

a_n e b_n são os coeficientes reais dos polinômios $A(p)$ e $B(p)$, respectivamente;

R_n é a n 'ésima raiz, real ou complexa, do polinômio $B(p)$;

g_n é o grau da raiz R_n , lembrando-se que $\sum_{n=1}^z g_n = k$;

z é o número de polos principais do polinômio $B(p)$.

Sem introduzir restrições ao problema, adota-se $b_k = 1$ para compatibilidade da igualdade de $B(p)$.

Observa-se que a expressão (6.1) sugere a utilização da transformada inversa de Laplace – a qual é mais fácil de ser encontrada em forma de tabelas – ao invés da transformada inversa de Carson. Esta sugestão se da por:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{A(p)}{p B(p)}\right) = C^{-1}\left(\frac{A(p)}{B(p)}\right) \quad (6.2)$$

Onde \mathcal{L}^{-1} representa a inversa da transformada de Laplace e C^{-1} representa a inversa da transformada de Carson-Laplace. Desta forma, é possível escrever $F(p)$ como:

$$F(p) = \frac{a_0}{p b_0} + \frac{\frac{1}{b_0} \sum_{n=1}^k [(b_0 a_n - a_0 b_n) p^{n-1}]}{B(p)} \quad (6.3)$$

Observa-se, contudo, que o coeficiente b_0 não pode ser nulo. Tal imposição reside no fato de que $b_0 = 0$ não corresponde a nenhum modelo reológico físico e, portanto, não é uma possibilidade dentro do estudo em questão. Esta incorrespondência física dá-se pelo resultado final obtido considerando-se $b_0 = 0$. Pode-se, então, realizar a decomposição em elementos simples de $F(p)$, obtendo-se:

$$F(p) = \frac{a_0}{p b_0} + \sum_{m=1}^z \sum_{n=1}^{g_m} \frac{C_{m,n}}{(p - R_m)^n}$$

$$C_{m,n} = \frac{1}{(g_m - n)!} \left. \frac{\partial^{(g_m - n)}}{\partial p^{(g_m - n)}} \left[\frac{C(p)}{B(p)} (p - R_m)^{g_m} \right] \right|_{p=R_m} \quad (6.4)$$

$$C(p) = \frac{1}{b_0} \sum_{n=1}^k [(b_0 a_n - a_0 b_n) p^{n-1}]$$

Por fim, observa-se que a transformada inversa de Laplace – lembrar que utiliza-se $\frac{A(p)}{p B(p)}$ no lugar de $\frac{A(p)}{B(p)}$ – resume-se a:

$$\mathcal{L}^{-1}(F(p)) = \frac{a_0}{b_0} Y(t) + \sum_{m=1}^z \sum_{n=1}^{g_m} \frac{C_{m,n}}{(n-1)!} t^{n-1} e^{R_m t} Y(t) \quad (6.5)$$

Resumindo-se todas constantes a uma só, pode-se escrever:

$$\mathcal{L}^{-1}(F(p)) = \frac{a_0}{b_0} Y(t) + \sum_{m=1}^z \sum_{n=1}^{g_m} C_{m,n}^r t^{n-1} e^{R_m t} Y(t) \quad (6.6)$$

$$C_{m,n}^r = \frac{(g_m)!}{(g_m - n)! (n - 1)!} \frac{\partial^{(g_m - n)}}{\partial p^{(g_m - n)}} \left[\frac{C(p)}{\frac{\partial^{g_m} B(p)}{\partial p^{g_m}}} \right]_{p=R_m}$$

Esta solução pode ser simplificada caso exista a certeza de não existirem raízes repetidas no polinômio $B(p)$ – o que de fato ocorre para qualquer função de relaxação real – passando a assumir a seguinte forma:

$$\mathcal{L}^{-1}(F(p)) = \frac{a_0}{b_0} Y(t) + \sum_{m=1}^k C_{m,n}^r e^{R_m t} Y(t) \quad (6.7)$$

$$C_{m,n}^r = C_m^r = \left[\frac{C(p)}{\frac{\partial B(p)}{\partial p}} \right]_{p=R_m}$$

6.1.2 Fraturas Orientadas Paralelamente

Conforme mencionado anteriormente, pode-se utilizar o resultado elástico obtido no capítulo 4 para a determinação do tensor de relaxação no espaço fictício de Carson-Laplace. Lembrando-se que as fraturas são oblatas e, portanto, são um círculo no plano 1–2, obtêm-se as seguintes componentes para este tensor:

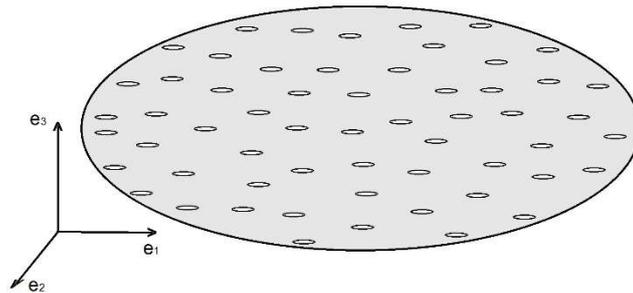


Figura 6.1: Fraturas orientadas paralelamente

$$\begin{aligned} R_{1111}^{hom*} &= R_{2222}^{hom*} = \left(k_s^* + \frac{4}{3} \mu_s^* \right) \frac{\alpha_1^* - \alpha_2^*}{\alpha_1^*} \\ R_{3333}^{hom*} &= \left(k_s^* + \frac{4}{3} \mu_s^* \right) \frac{\alpha_1^* - \alpha_3^*}{\alpha_1^*} \\ R_{1111}^{hom*} &= R_{2222}^{hom*} = \left(k_s^* + \frac{4}{3} \mu_s^* \right) \frac{\alpha_1^* - \alpha_2^*}{\alpha_1^*} \end{aligned} \quad (6.8a)$$

$$\begin{aligned}
R_{1133}^{hom*} = R_{2233}^{hom*} = R_{3311}^{hom*} = R_{3322}^{hom*} &= \left(k_s^* - \frac{2}{3}\mu_s^*\right) \frac{\alpha_1^* - \alpha_3^*}{\alpha_1^*} \\
R_{2323}^{hom*} = R_{3131}^{hom*} &= 2\mu_s^* \frac{\alpha_5^* - \alpha_6^*}{\alpha_5^*} \quad ; \quad R_{1212}^{hom*} = 2\mu_s^*
\end{aligned} \tag{6.8}$$

Onde os parâmetros α_i^* são definidos por:

$$\begin{aligned}
\alpha_1^* &= (36 k_s^{*2} \epsilon \pi + 96 k_s^* \mu_s^* \epsilon \pi + 64 \mu_s^{*2} \epsilon \pi + 27 k_s^* \mu_s^* \pi + 9 \mu_s^{*2} \pi + 27 k_s^* k_j^* a + 36 k_s^* \mu_j^* a \\
&\quad + 48 \mu_s^* \mu_j^* a + 36 \mu_s^* k_j^* a) \\
\alpha_2^* &= (36 k_s^{*2} \epsilon \pi - 48 k_s^* \mu_s^* \epsilon \pi + 16 \mu_s^{*2} \epsilon \pi) \\
\alpha_3^* &= (36 k_s^{*2} \epsilon \pi + 96 k_s^* \mu_s^* \epsilon \pi + 64 \mu_s^{*2} \epsilon \pi) \\
\alpha_4^* &= (36 k_s^{*2} \epsilon \pi + 24 k_s^* \mu_s^* \epsilon \pi - 32 \mu_s^{*2} \epsilon \pi) \\
\alpha_5^* &= (48 k_s^* \mu_s^* \epsilon \pi + 64 \mu_s^{*2} \epsilon \pi + 27 k_s^* \mu_s^* \pi + 18 \mu_s^{*2} \pi + 36 k_s^* \mu_j^* a + 48 \mu_j^* \mu_s^* a) \\
\alpha_6^* &= (48 k_s^* \mu_s^* \epsilon \pi + 64 \mu_s^{*2} \epsilon \pi)
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Tais parâmetros são obtidos realizando-se o mesmo procedimento do capítulo 4 porém, utilizando-se os seguintes tensores para a matriz e para a fratura, respectivamente:

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}_s^* &= 3 k_s^* \mathbb{J} + 2 \mu_s^* \mathbb{K} \\
\mathbb{C}_j^* &= 3 X a k_j^* \mathbb{J} + 2 X a \mu_j^* \mathbb{K}
\end{aligned} \tag{6.10}$$

Com k_s^* e μ_s^* sendo os módulos de compressão e de cisalhamento no espaço de Carson-Laplace para a matriz e k_j^* e μ_j^* os módulos de compressão e de cisalhamento no espaço de Carson-Laplace para a interação entre as faces das fraturas. Lembra-se que, para obtenção dos mesmos parâmetros observados no capítulo 4 – de forma rigorosa – dever-se-ia utilizar as seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
k_j^* &= k_n^* - \frac{4}{3} k_t^* \\
\mu_j^* &= k_t^*
\end{aligned} \tag{6.11}$$

Observa-se que os parâmetros k_s^* , μ_s^* , k_j^* e μ_j^* são dependentes do modelo reológico admitido para a matriz e para a fratura, desta forma, todos estes parâmetros dependem da variável p do espaço de Carson-Laplace. O parâmetro k_j^* , entretanto, não é físico, dependendo dos valores de k_n^* e k_t^* , os quais são obtidos em laboratório. A notação utilizando k_j^* e μ_j^* foi realizada para

simplificar o tensor \mathbb{C}_j^* , facilitando as operações deste trabalho. Para determinar o tensor de relaxação no espaço real, basta utilizar o procedimento sugerido na seção 6.1.1.

6.1.2.1 Aplicação 1 – Matriz (Kelvin-Voigt) e Fratura (Mola)

Assumindo que a matriz é homogênea e que os tensores de relaxação, tanto da matriz quanto das fraturas, são isótropos a nível microscópico, tal como sugerido na expressão (6.10), admite-se os seguintes modelos reológicos: Padrão de Kelvin-Voigt, para a matriz, e de mola simples para as fraturas, tal como sugerido na figura 6.2. Desta forma, obtém-se os seguintes parâmetros no espaço de Carson-Laplace – onde o sub índice “s” denomina a matriz e “j” a fratura:

$$\begin{aligned} k_s^* &= \frac{k_{m,s}^e (p k_{K,s}^v + k_{K,s}^e)}{p k_{K,s}^v + k_{K,s}^e + k_{m,s}^e} \\ \mu_s^* &= \frac{\mu_{m,s}^e (p \mu_{K,s}^v + \mu_{K,s}^e)}{p \mu_{K,s}^v + \mu_{K,s}^e + \mu_{m,s}^e} \\ k_j^* &= k_{m,j}^e \\ \mu_j^* &= \mu_{m,j}^e \end{aligned} \quad (6.12)$$

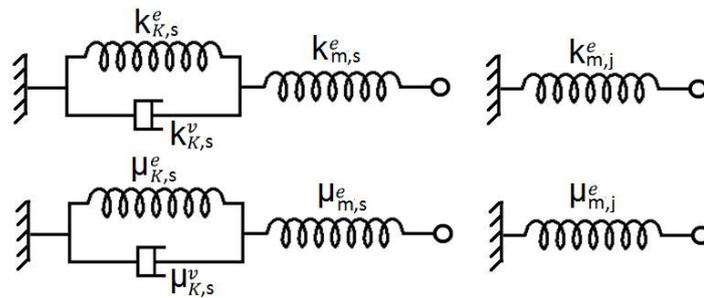


Figura 6.2: Modelos reológicos utilizados na aplicação 1

Aplicando-se os parâmetros das expressões (6.9) e (6.12) na expressão (6.8) obtém-se as componentes do tensor de relaxação no espaço fictício de Carson-Laplace. Tal procedimento pode ser realizado de forma analítica, no entanto as expressões resultantes são muito extensas, não existindo necessidade prática de as apresentar neste trabalho visto que o procedimento para sua determinação foi detalhado. Observa-se aqui que as componentes determinadas do tensor de relaxação no espaço operacional podem ser escrita na forma $\frac{A(p)}{B(p)}$, descrita na seção 6.1.1.

Posteriormente, pode-se realizar o procedimento de determinação da transformada inversa sugerido na seção 6.1.1, também de forma analítica, obtendo-se o tensor de relaxação

homogêneo no espaço de tempo real para a combinação de modelos reológicos de Kelvin-Voigt – para a matriz – e mola para as fraturas. Uma vez que este procedimento seja realizado antes de aplicar valores numéricos aos parâmetros, as expressões resultantes tronam-se, novamente, muito extensas e demandam de um grande esforço computacional, sendo mais conveniente adotar valores aos parâmetros para posteriormente realizar a operação de transformada inversa. Além disso, admitindo-se valores numéricos, torna-se possível a apresentação de um resultado final na forma gráfica segundo a variação com o parâmetro de dano e a variação temporal. A tabela 6.1 apresenta os parâmetros admitidos na aplicação 1.

$k_{K,s}^e$	$9,0 \cdot 10^9$ Pa	$\mu_{K,s}^e$	$6,8 \cdot 10^9$ Pa
$k_{K,s}^v$	$105,0 \cdot 10^{18}$ Pa.s	$\mu_{K,s}^v$	$78,8 \cdot 10^{18}$ Pa.s
$k_{m,s}^e$	$11,4 \cdot 10^9$ Pa	$\mu_{m,s}^e$	$8,5 \cdot 10^9$ Pa
$k_{m,j}^e$	$2,3 \cdot 10^9$ Pa/m	$\mu_{m,j}^e$	$2,0 \cdot 10^9$ Pa/m

Tabela 6.1: Parâmetros sugeridos na aplicação 1

Tratando-se da determinação dos parâmetros do modelo deve-se, contudo, tomar o devido cuidado. Uma vez que fraturas são regiões de baixa rigidez existentes dentro do material, não faz sentido admitir parâmetros muito elevado para as componentes do tensor de relaxação da fratura. Quanto mais rígidas forem as propriedades admitidas para a fratura, mais próximo de um comportamento “não fraturado” será apresentado pelo tensor de relaxação homogeneizado. Hipoteticamente falando, se fosse admitida uma função de relaxação infinita para as fraturas, o material homogeneizado se comportaria tal como se as fraturas simplesmente não existissem. Por outro lado, admitir tal função nula às fraturas, reduz o modelo ao mesmo modelo proposto por Nguyen (2010).

Torna-se, então, interessante comparar a função de relaxação na matriz com a da fratura. A expressão (6.10) fornece os tensores de relaxação tanto para o material quanto para a fratura. Nota-se, contudo, que ao realizar este procedimento o fator de forma X tende a zero. Tal equação inevitavelmente apresentaria um tensor de relaxação nulo para a fratura. Essa análise, no entanto, está incorreta pelo fato de que no processo de homogeneização (capítulo 5) o fator de forma é reduzido a um número finito não nulo por meio da aplicação do operador limite. Desta forma percebe-se que não é possível comparar diretamente as funções de relaxação da matriz com a fratura e, portanto, sugere-se admitir um valor de X arbitrário para que seja possível

representar estes tensores de forma gráfica. Uma vez que X trata-se apenas de um multiplicador, admitiu-se $X = 1$ para realizar a representação gráfica presente na figura 6.3

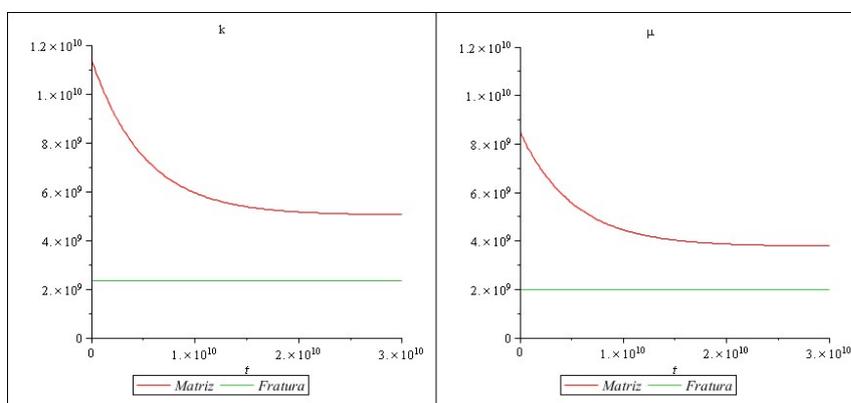


Figura 6.3: Comparação das funções de relaxação em compressão isotropa e em cisalhamento da matriz e da fratura na aplicação 1 (gráficos obtidos adotando-se $X = 1$)

Por fim, Antes de determinar os parâmetros do tensor de relaxação, é necessário definir o parâmetro de dano. De modo a tornar os gráficos mais interessantes, sugere-se admitir diferentes parâmetros de dano e esboçar os tensores de relaxação paralelamente segundo a variação temporal. Assim, manteve-se o número de fraturas constantes em 1 fratura por unidade de volume – metro cúbico – e alterou-se apenas o raio das fraturas. Uma vez que para cada parâmetro de dano estabelecido, as expressões que definem as componentes do tensor de relaxação se modificam – basta observar que as expressões em (6.9) apresentam ϵ – apenas torna-se relevante apresentar tais expressões para um determinado ϵ . Admitiu-se, então, apenas o parâmetro de dano $\epsilon = 0,25$.

Utilizando-se os parâmetros sugeridos, torna-se então viável apresentar as componentes do tensor de relaxação. Desta forma, expressão (6.13a) apresenta a componente R_{1111}^* do tensor de relaxação no espaço de Carson-Laplace.

$$R_{1111}^* = \frac{1,47 \cdot 10^{20} + 6,55 \cdot 10^{30}p + 1,13 \cdot 10^{41}p^2 + 9,44 \cdot 10^{50}p^3 + 3,78 \cdot 10^{60}p^4 + 5,80 \cdot 10^{69}p^5}{1,53 \cdot 10^{10} + 5,85 \cdot 10^{20}p + 8,57 \cdot 10^{30}p^2 + 6,02 \cdot 10^{40}p^3 + 2,04 \cdot 10^{50}p^4 + 2,69 \cdot 10^{59}p^5} \quad (6.13a)$$

Observa-se que na simplificação apresentada o termo b_k , o qual corresponde a b_5 , não é unitário. Torna-se, então, necessário dividir o numerador e o denominador por este coeficiente para obter uma divisão conforme foi proposta na seção 6.1.1.

$$R_{1111}^* = \frac{5,47 \cdot 10^{-40} + 2,44 \cdot 10^{-29} p + 4,21 \cdot 10^{-19} p^2 + 3,51 \cdot 10^{-9} p^3 + 1,40 \cdot 10^1 p^4 + 2,16 \cdot 10^{10} p^5}{5,71 \cdot 10^{-50} + 2,18 \cdot 10^{-39} p + 3,19 \cdot 10^{-29} p^2 + 2,24 \cdot 10^{-19} p^3 + 7,59 \cdot 10^{-10} p^4 + p^5} \quad (6.13b)$$

Desta forma, obém-se as seguintes componentes do tensor de relaxação no espaço de tempo real – nota-se que os expoentes apresentados são raízes do polinômio “B(p)” sugerido na seção 6.1.1, mas devido a apresentação truncada dos coeficientes esta semelhança pode não ser nítida:

$$\begin{aligned} R_{1111}^{hom} = R_{2222}^{hom} &= 9,70 \cdot 10^9 + 4,14 \cdot 10^9 e^{-1,94 \cdot 10^{-10} t} - 967,22 e^{-8,60 \cdot 10^{-11} t} \\ &\quad + 1,56 \cdot 10^5 e^{-8,65 \cdot 10^{-11} t} + 8,04 \cdot 10^9 \cos(1,56 \cdot 10^{-1} t) e^{-1,94 \cdot 10^{-10} t} \\ &\quad - 7,70 \cdot 10^7 \sin(1,57 \cdot 10^{-13} t) e^{-1,94 \cdot 10^{-10} t} \\ R_{3333}^{hom} &= 4,20 \cdot 10^9 + 1,79 \cdot 10^9 e^{-1,94 \cdot 10^{-10} t} + 689,78 e^{-8,60 \cdot 10^{-11} t} \\ &\quad + 3,02 \cdot 10^9 e^{-8,65 \cdot 10^{-11} t} + 3,44 \cdot 10^9 \cos(1,57 \cdot 10^{-1} t) e^{-1,94 \cdot 10^{-10} t} \\ &\quad - 1,36 \cdot 10^7 \sin(1,57 \cdot 10^{-13} t) e^{-1,94 \cdot 10^{-10} t} \\ R_{1122}^{hom} = R_{2211}^{hom} &= 2,15 \cdot 10^9 + 1,75 \cdot 10^9 e^{-1,94 \cdot 10^{-10} t} + 5674,10 e^{-8,60 \cdot 10^{-11} t} \\ &\quad + 1,49 \cdot 10^5 e^{-8,65 \cdot 10^{-11} t} + 9,87 \cdot 10^8 \cos(1,57 \cdot 10^{-13} t) e^{-1,94 \cdot 10^{-10} t} \\ &\quad - 1,37 \cdot 10^9 \sin(1,57 \cdot 10^{-13} t) e^{-1,94 \cdot 10^{-10} t} \\ R_{1133}^{hom} = R_{2233}^{hom} = R_{3311}^{hom} = R_{3322}^{hom} &= 1,05 \cdot 10^9 + 9,34 \cdot 10^8 e^{-1,94 \cdot 10^{-10} t} - 1513,53 e^{-8,60 \cdot 10^{-11} t} \\ &\quad + 2,13 \cdot 10^9 e^{-8,65 \cdot 10^{-11} t} + 3,95 \cdot 10^9 \cos(1,57 \cdot 10^{-13} t) e^{-1,94 \cdot 10^{-10} t} \\ &\quad - 6,72 \cdot 10^7 \sin(1,57 \cdot 10^{-13} t) e^{-1,94 \cdot 10^{-10} t} \\ R_{2323}^{hom} = R_{3131}^{hom} &= 4,76 \cdot 10^9 + 4,99 \cdot 10^9 e^{-1,94 \cdot 10^{-10} t} + 38141,76 e^{-8,65 \cdot 10^{-11} t} \\ &\quad + 9,48 \cdot 10^8 e^{-1,94 \cdot 10^{-8} t} + 1571,29 e^{-8,60 \cdot 10^{-11} t} \\ R_{1212}^{hom} &= 7,56 \cdot 10^9 + 9,44 \cdot 10^9 e^{-1,94 \cdot 10^{-10} t} \end{aligned} \quad (6.13)$$

Observa-se que, de forma geral, as expressões para o comportamento das componentes do tensor de relaxação são definidas como um somatório de termos exponenciais, tal como definido na expressão (6.7). Nas figuras 6.4 a 6.6 apresentou-se o gráfico de cada componente, normalizando-se segundo seu respectivo valor calculado no instante inicial de aplicação de uma carga e desconsiderando-se o efeito do dano – isso é, $\epsilon = 0$ e $t = 0$.

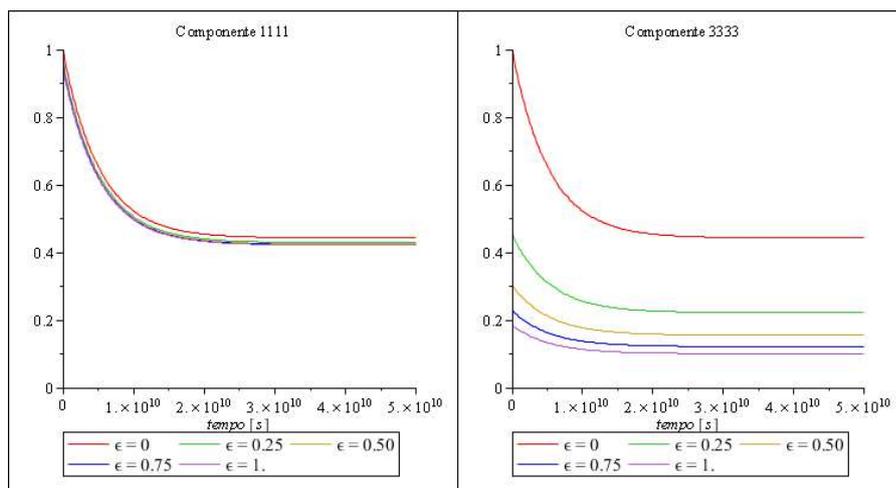


Figura 6.4: Evolução temporal das componentes R_{1111}^{hom} e R_{3333}^{hom} normalizadas na aplicação 1

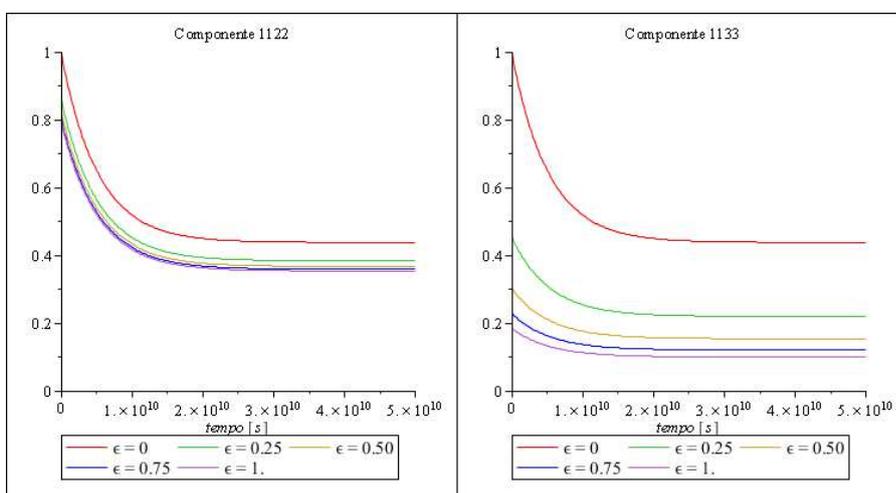


Figura 6.5: Evolução temporal das componentes R_{1122}^{hom} e R_{1133}^{hom} normalizadas na aplicação 1

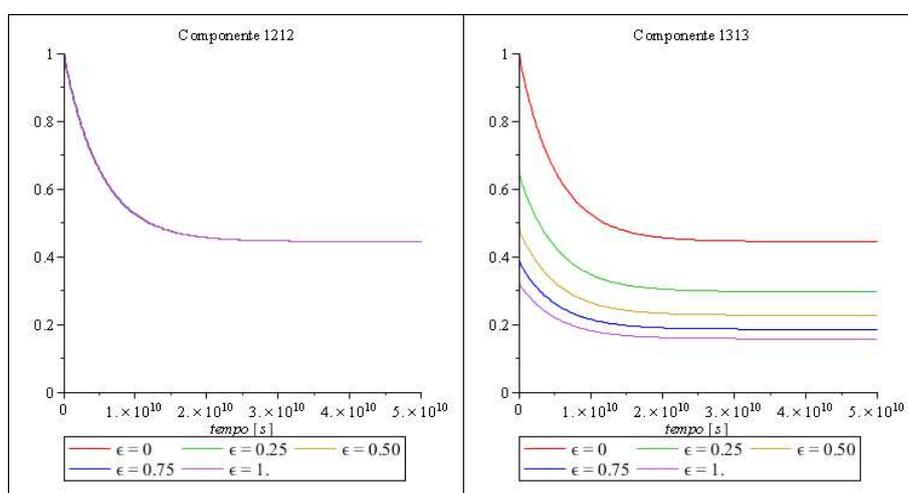


Figura 6.6: Evolução temporal das componentes R_{1212}^{hom} e R_{2323}^{hom} normalizadas na aplicação 1

Observando-se os gráficos, visualiza-se uma tendência já esperada, onde as componentes que envolvem apenas as direções 1 e 2 apresentam pequena variação com o parâmetro de dano, diferentemente do comportamento observado quando ao menos uma das direções em questão é a 3. Isso ocorre devido a distribuição paralela de fraturas no material. Como o esperado, quanto maior a densidade de fraturas ϵ , menor o valor da função de relaxação do sistema. Observa-se que os gráficos foram esboçados admitindo parâmetros de dano constantes desta forma, para cada linha de dano, existem apenas perdas por viscosidade. Pode-se também admitir que o sistema inicia com um determinado parâmetro de dano ϵ_0 e ao longo do tempo as fraturas aumentam de dimensão, desta forma observa-se perdas por efeitos viscosos e por efeitos do dano, neste caso a função de relaxação iniciaria junto com uma determinada linha e migraria para a linha correspondente ao parâmetro de dano final.

6.1.2.2 Aplicação 2– Matriz (Burger) e Fratura (Maxwell)

Esta segunda aplicação admite o modelo reológico Burger para a matriz e o modelo de Maxwell para as fraturas, tal como sugerido na figura 6.7. Admitindo-se as mesmas premissas apresentadas no princípio da aplicação 1, obtém-se os seguintes parâmetros no espaço de Carson-Laplace – onde o sub índice “s” denomina a matriz e “j” a fratura:

$$\begin{aligned}
 k_s^* &= \frac{(p k_{K,s}^v + k_{K,s}^e) p k_{M,s}^v k_{M,s}^e}{p^2 k_{K,s}^v k_{M,s}^v + p (k_{K,s}^e k_{M,s}^v + k_{K,s}^v k_{M,s}^e + k_{M,s}^v k_{M,s}^e) + k_{K,s}^e k_{M,s}^e} \\
 \mu_s^* &= \frac{(p \mu_{K,s}^v + \mu_{K,s}^e) p \mu_{M,s}^v \mu_{M,s}^e}{p^2 \mu_{K,s}^v \mu_{M,s}^v + p (\mu_{K,s}^e \mu_{M,s}^v + \mu_{K,s}^v \mu_{M,s}^e + \mu_{M,s}^v \mu_{M,s}^e) + \mu_{K,s}^e \mu_{M,s}^e} \\
 k_j^* &= \frac{p k_{M,j}^v k_{M,j}^e}{p k_{M,j}^v + k_{M,j}^e} \\
 \mu_j^* &= \frac{p \mu_{M,j}^v \mu_{M,j}^e}{p \mu_{M,j}^v + \mu_{M,j}^e}
 \end{aligned} \tag{6.14}$$

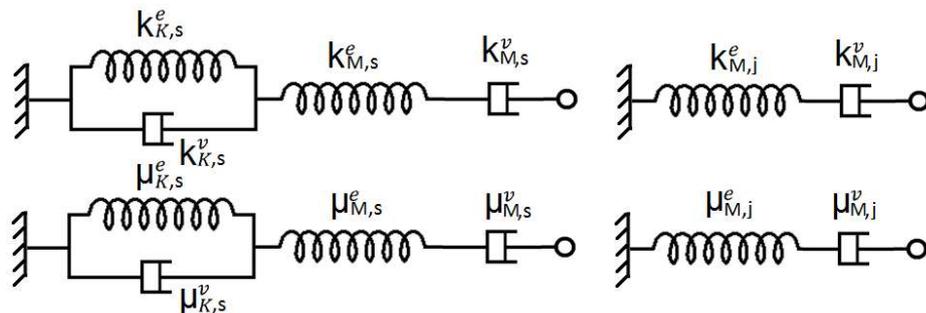


Figura 6.7: Modelos reológicos utilizados na aplicação 2

O procedimento de determinação do tensor de relaxação é exatamente igual ao sugerido na aplicação 1. Desta forma cabe determinar os parâmetros para que possa dar continuidade de forma numérica – apenas para representação gráfica. Para que seja possível a comparação com a aplicação 1, admitiu-se parâmetros os quais retornam um modelo ligeiramente semelhantes ao anterior quando desconsiderado o dano. A tabela 6.2 apresenta o valor dos parâmetros admitidos na aplicação 2 e a figura 6.8 apresenta a comparação entre o modelo proposto na aplicação 2 com aquele apresentado na aplicação 1 – na figura 6.10 não utilizou-se o processo de normalização para que seja possível observar melhor a diferença entre as componentes.

$k_{K,s}^e$	$9,7 \cdot 10^9$ Pa	$\mu_{K,s}^e$	$7,3 \cdot 10^9$ Pa
$k_{K,s}^v$	$95,0 \cdot 10^{18}$ Pa.s	$\mu_{K,s}^v$	$71,3 \cdot 10^{18}$ Pa.s
$k_{M,s}^e$	$11,4 \cdot 10^9$ Pa	$\mu_{M,s}^e$	$8,5 \cdot 10^9$ Pa
$k_{M,s}^v$	$9000 \cdot 10^{18}$ Pa	$\mu_{M,s}^v$	$6750 \cdot 10^{18}$ Pa.s
$k_{M,j}^e$	$2,3 \cdot 10^9$ Pa/m	$\mu_{M,j}^e$	$2,0 \cdot 10^9$ Pa/m
$k_{M,j}^v$	$25 \cdot 10^{18}$ Pa/m	$\mu_{M,j}^v$	$18 \cdot 10^{18}$ Pa/m

Tabela 6.2: Parâmetros sugeridos na aplicação 2

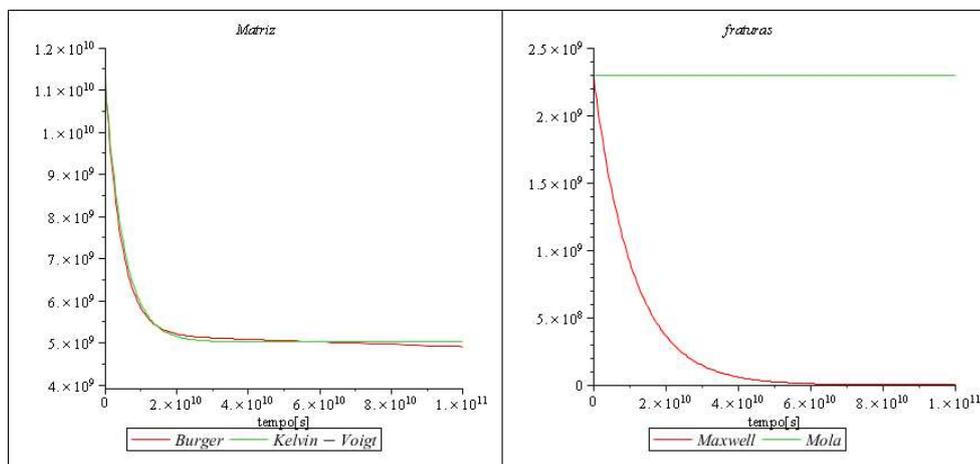


Figura 6.8: Comparação entre as funções de relaxação em compressão isotrópica da matriz e da fratura para as aplicações 1 e 2

Percebe-se que no presente modelo está sendo admitindo que as fraturas são viscoelásticas e seguem o modelo de Maxwell. Este comportamento mecânico para fraturas está sendo proposto neste trabalho, não podendo ser observado classicamente na literatura e, portanto, não existindo

parâmetros obtidos em laboratório que representem este modelo até o presente modelo, devido a isso, os parâmetros viscosos para as fraturas foram arbitrados, podendo não corresponder a realizada. Este comportamento das fraturas é semelhante àquele apresentado por uma matriz viscoelástica, no entanto, a lei de comportamento das fraturas se modifica, tornando-se diferente daquela apresenta no capítulo 3 (expressão (3.42)) e assumindo a seguinte forma:

$$\underline{T} = \underline{\underline{K}}^e : [\underline{\xi}] + \underline{\underline{K}}^v : [\dot{\underline{\xi}}] \quad (6.15)$$

onde $\underline{\underline{K}}^e$ tem a mesma definição do tensor de rigidez $\underline{\underline{K}}$ apresentado anteriormente e $\underline{\underline{K}}^v$ representa as propriedades do tensor de viscosidade das fraturas.

Tal como explicado na aplicação anterior, não é possível realizar uma comparação direta entre a função de relaxação das fraturas e da matriz. Novamente admite-se um fator de forma $X=1$ para representar graficamente a evolução temporal da função de relaxação da fratura na figura 6.1.1.

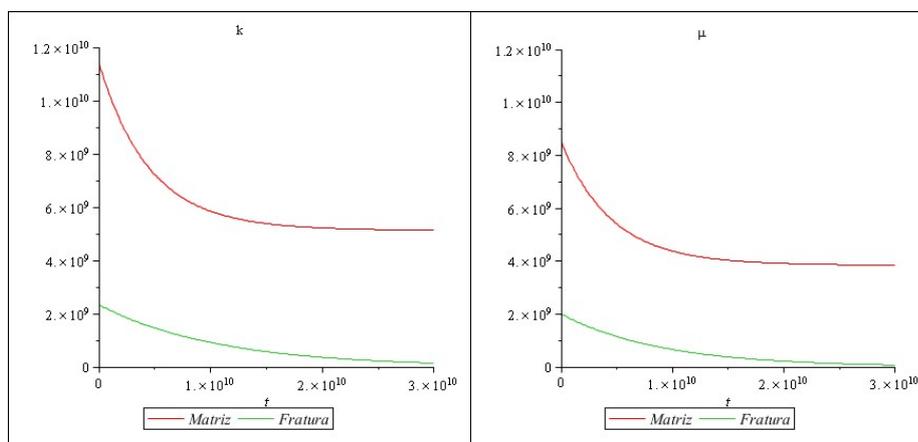


Figura 6.9: Comparação a função de relaxação da matriz e da fratura na aplicação 2

Mais uma vez admitiu-se uma densidade de fraturas $\mathcal{N} = 1$ fratura por metro cúbico e fez-se variar a dimensão destas. Nas figuras 6.10 a 6.12 apresentou-se o gráfico de cada componente, normalizando-se segundo seu respectivo valor calculado no instante inicial de aplicação de uma carga e desconsiderando-se o efeito do dano – isso é, $\epsilon = 0$ e $t = 0$.

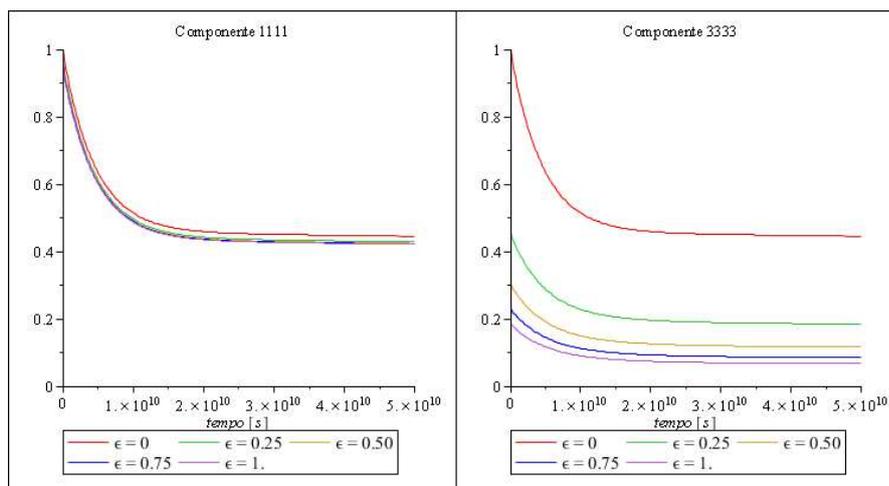


Figura 6.10: Evolução temporal das componentes R_{1111}^{hom} e R_{3333}^{hom} normalizadas na aplicação 2

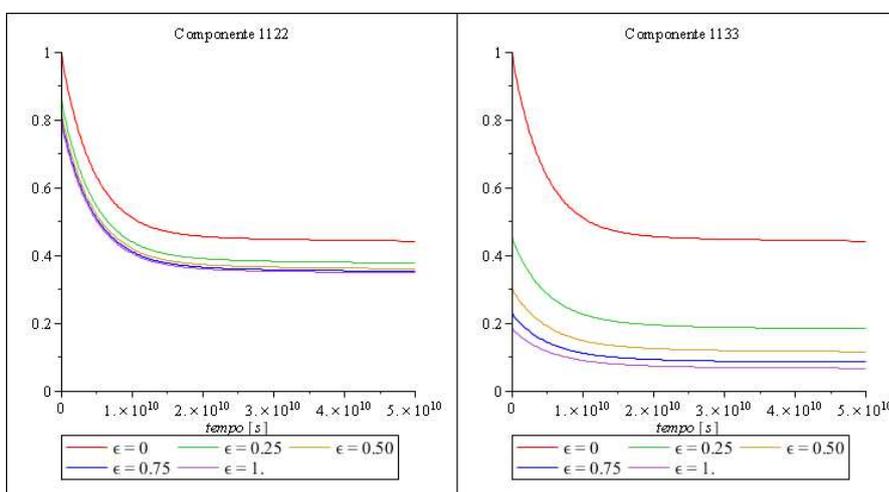


Figura 6.11: Evolução temporal das componentes R_{1122}^{hom} e R_{1133}^{hom} normalizadas na aplicação 2

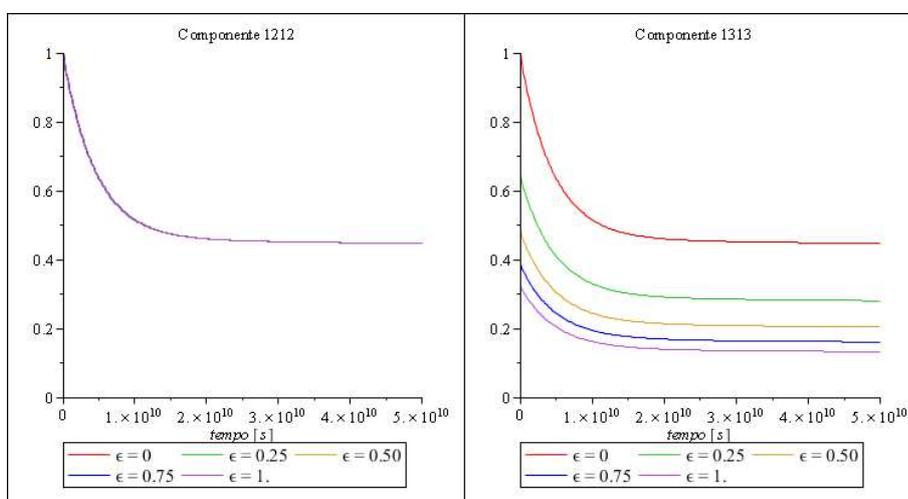


Figura 6.12 Evolução temporal das componentes R_{1212}^{hom} e R_{2323}^{hom} normalizadas na aplicação 2

Como se pode observar, o decaimento de função de relaxação do sistema é um pouco mais acentuado do que aquele apresentado na aplicação 1. Além disso, a figura 6.8 – apresentada anteriormente – explicita as semelhanças entre os modelos de Kelvin-Voigt e o modelo de Burger apresentados, embora os modelos não tenham sido otimizados de forma a coincidirem perfeitamente, a diferença entre eles não é suficiente, nem parcialmente capaz, de justificar tal comportamento na aplicação 2. Desta forma, conclui-se que tal queda na função de relaxação deve-se ao modelo proposto para fraturas, tal como observado na figura 6.8. Embora os parâmetros viscosos para a fratura tenham sido determinados de forma arbitrária, percebe-se que as fraturas também podem interferir de forma significativa a resistência diferida do sistema. Para verificar tal propriedade das fraturas, decidiu-se realizar a aplicação 3.

6.1.2.3 Aplicação 3– Matriz (Mola) e Fratura (Maxwell)

Esta terceira aplicação admite o modelo reológico de mola para a matriz e o modelo de Maxwell para as fraturas, tal como sugerido na figura 6.13. Tal modelo pode representar, simplificada, a existência de fluidos intersticiais. A ideia deste modelo, no entanto, é estudar os efeitos da viscosidade definidos apenas na fratura, desconsiderando efeitos viscosos na matriz. Admitindo-se as mesmas premissas apresentadas no princípio da aplicação 1, obtêm-se os seguintes parâmetros no espaço de Carson-Laplace – onde o sub índice “s” denomina a matriz e “j” a fratura:

$$\begin{aligned}
 k_s^* &= k_{M,s}^e \\
 \mu_s^* &= \mu_{M,s}^e \\
 k_j^* &= \frac{p k_{M,j}^v k_{M,j}^e}{p k_{M,j}^v + k_{M,j}^e} \\
 \mu_j^* &= \frac{p \mu_{M,j}^v \mu_{M,j}^e}{p \mu_{M,j}^v + \mu_{M,j}^e}
 \end{aligned} \tag{6.16}$$

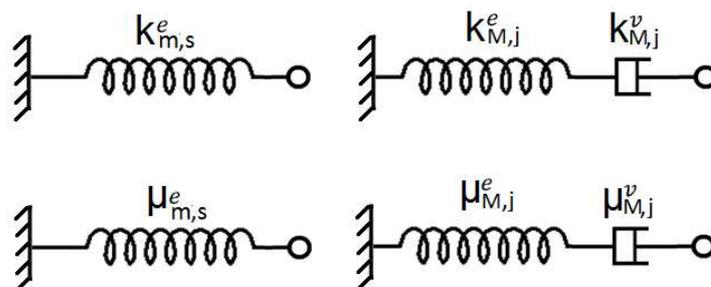


Figura 6.13: Modelos reológicos utilizados na aplicação 3

O procedimento de determinação do tensor de relaxação é exatamente igual ao sugerido na aplicação 1. Desta forma cabe determinar os parâmetros para que possa dar continuidade de forma numérica. Levando-se em conta que o modelo sem dano apresentado aqui é puramente elástico, não é possível realizar uma boa comparação com as aplicações anteriores. O atual modelo tem como base apenas um estudo breve sobre fraturas viscosas. A tabela 6.3 apresenta o valor dos parâmetros admitidos na aplicação 3

$k_{m,s}^e$	$11,4 \cdot 10^9$ Pa	$\mu_{m,s}^e$	$8,5 \cdot 10^9$ Pa
$k_{m,j}^e$	$2,3 \cdot 10^9$ Pa/m	$\mu_{m,j}^e$	$2,0 \cdot 10^9$ Pa/m
$k_{m,j}^v$	$25 \cdot 10^{18}$ Pa/m	$\mu_{m,j}^v$	$18 \cdot 10^{18}$ Pa/m

Tabela 6.3: Parâmetros sugeridos na aplicação 3

Os parâmetros atribuídos a fratura são os mesmos da aplicação 2 e podem ser observados na figura 6.9. A matriz, por outro lado, é admitida como elástica e, portanto, seria uma reta constante.

Novamente admitiu-se uma densidade de fraturas $\mathcal{N} = 1$ fratura por metro cúbico e fez-se variar a dimensão destas. Nas figuras 6.14 a 6.16 apresentou-se o gráfico de cada componente, normalizando-se segundo seu respectivo valor calculado no instante inicial de aplicação de uma carga e desconsiderando-se o efeito do dano – isso é, $\epsilon = 0$ e $t = 0$. Observa-se, contudo, que o período de tempo apresentado nos gráficos é o dobro das aplicações anteriores para que a curva seja melhor apresentada.

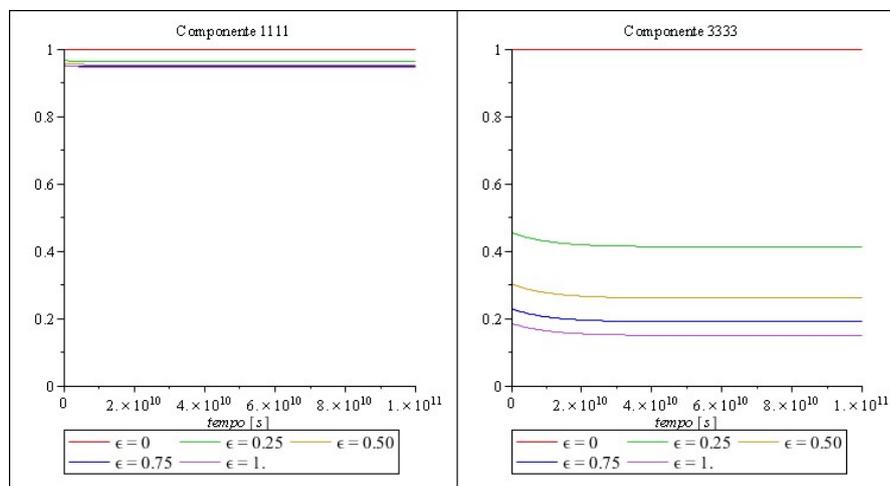


Figura 6.14: Evolução temporal das componentes R_{1111}^{ho} e R_{3333}^{hom} normalizadas na aplicação 3

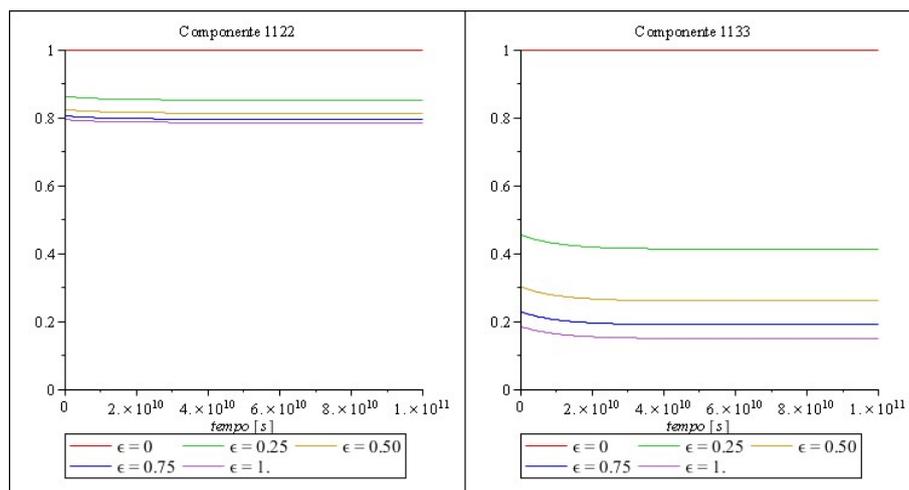


Figura 6.15: Evolução temporal das componentes R_{1122}^{hom} e R_{1133}^{hom} normalizadas na aplicação 3

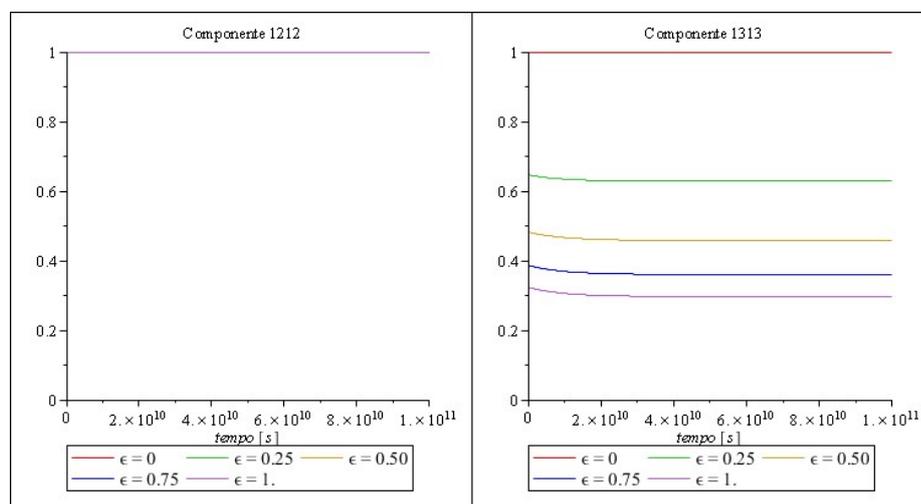


Figura 6.16: Evolução temporal das componentes R_{1212}^{hom} e R_{2323}^{hom} normalizadas na aplicação 3

Como os parâmetros admitidos foram arbitrários, as curvas apresentadas podem ser sub ou superestimadas em relação àquelas que devem ser observadas com base em parâmetros extraídos em laboratório. Embora não fique claro observando-se apenas estes gráficos, as expressões resultantes para este modelo – as quais não foram apresentadas neste trabalho – evidenciam que a evolução diferida da resistência tende a um limite fixo, diferente de zero, quando o tempo tende a um número infinitamente grande. Este limite é exatamente igual àquele observado quando as fraturas não apresentam transferência de esforços. Tal mecanismo condiz com a realidade, uma vez que quando a função de relaxação da fratura se anula tem-se resultados iguais àqueles encontrados no capítulo 4. Percebe-se, então, que admitir um modelo viscoso para fraturas pode resultar em uma modificação significativa das propriedades do sistema homogeneizado.

6.1.3 Tensores de Fluência

Esta seção visa apresentar gráficos de comportamento do tensor de fluência para o caso das aplicações anteriores. Obviamente o procedimento sugerido até então pode ser estendido ao tensor de fluência. Lembra-se, no entanto, que foi utilizado o procedimento de estimativas baseadas na solução de Eshelby e, portanto, deve-se ter cautela ao determinar estes tensores. Lembra-se que o tensor de relaxação determinado é uma estimativa, mas sua inversa pode não apresentar uma boa estimativa do tensor de fluência. Algumas limitações deste procedimento foram apresentadas ainda na elasticidade e, por este motivo, deu-se preferência por apresentar apenas o tensor de relaxação nas aplicações anteriores.

O procedimento de determinação do tensor de fluência é muito semelhante a determinação do tensor de flexibilidade, a única diferença consta no fato que originalmente tem-se determinado o tensor de flexibilidade do espaço de Carson-Laplace e, portanto, necessita-se inverter este para se obter o tensor de fluência neste espaço. Desta forma, o tensor de fluência do sistema fica determinado como:

$$\mathbb{J}_{hom}^* = (\mathbb{R}_{hom}^*)^{-1} \quad (6.17)$$

Uma vez obtido o tensor de fluência no espaço de Carson-Laplace, percebe-se que suas componentes também podem ser escritas sobre a forma $\frac{A(p)}{B(p)}$, tal como sugerido na seção 6.1.1. Novamente é necessário normalizar o coeficiente b_k – lembrando que k é grau dos polinômios – através da divisão dos polinômios $A(p)$ e $B(p)$ por seu valor. Assim, a forma resultante torna-se igual a aquela sugerida na seção 6.1.1. Por fim, para se obter o tensor de fluência no espaço real, utilizou-se o procedimento sugerido na referida seção. Nota-se, no entanto, que a utilização deste procedimento não é obrigatória, sendo apenas uma sugestão para resolução da transformada inversa, sendo possível utilizar quaisquer outros procedimentos conhecidos.

Com este procedimento, ficam conhecidas as componentes do tensor de fluência no espaço de tempo real. Cabe agora determinar os parâmetros necessários para a representação gráfica. Uma vez que os tensores aqui utilizados são os mesmos das aplicações 1 a 3, utiliza-se os mesmos parâmetros estabelecidos nestes modelos. As figuras 6.17 a 6.19 correspondem a aplicação 1, as figuras 6.20 a 6.22 correspondem a aplicação 2 e as figuras 6.23 a 6.25 correspondem a aplicação 3.

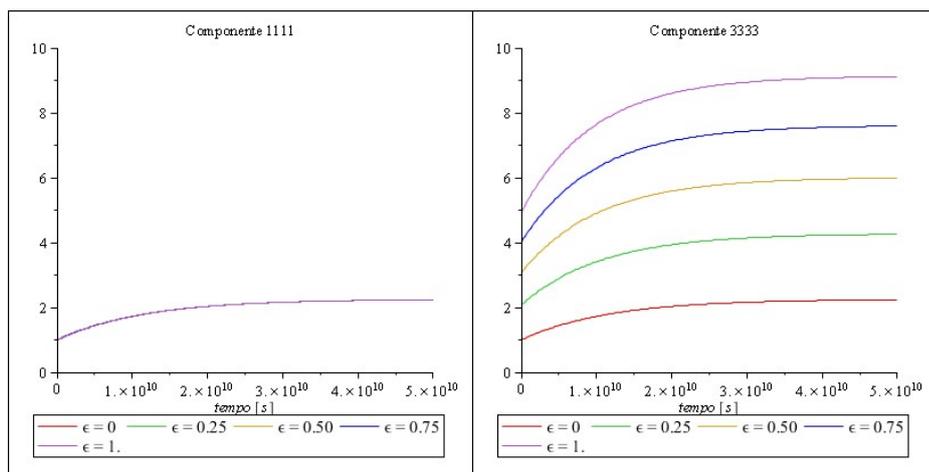


Figura 6.17: Evolução temporal das componentes J_{1111}^{hom} e J_{3333}^{hom} normalizadas na aplicação 1

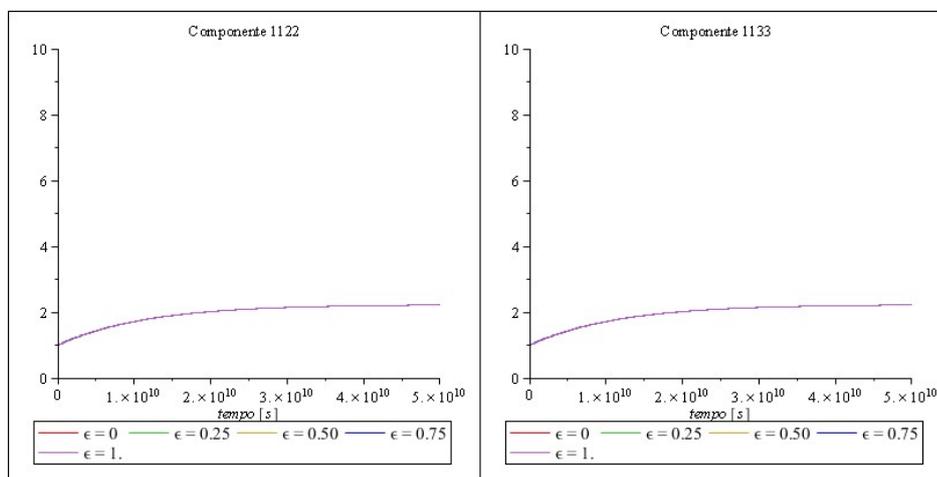


Figura 6.18: Evolução temporal das componentes J_{1122}^{hom} e J_{1133}^{hom} normalizadas na aplicação 1

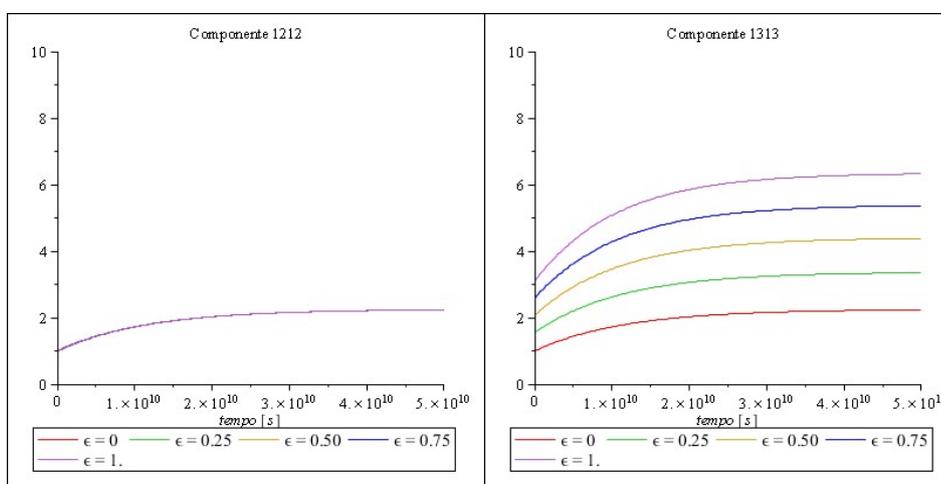


Figura 6.19: Evolução temporal das componentes J_{1212}^{hom} e J_{2323}^{hom} normalizadas na aplicação 1

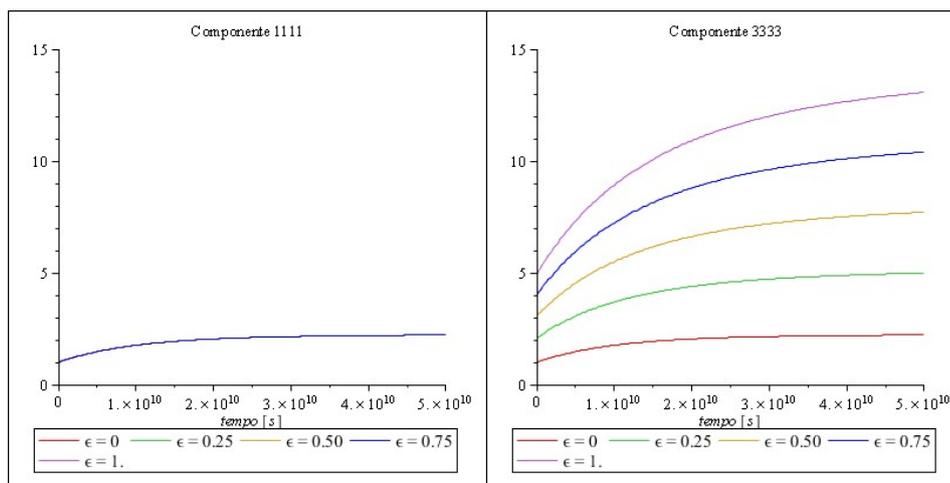


Figura 6.20: Evolução temporal das componentes J_{1111}^{ho} e J_{3333}^{hom} normalizadas na aplicação 2

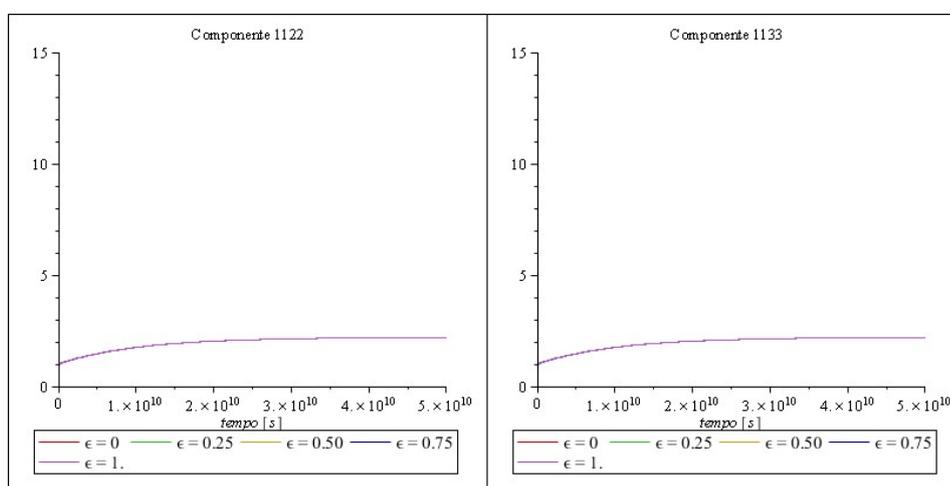


Figura 6.21: Evolução temporal das componentes J_{1122}^{hom} e J_{1133}^{hom} normalizadas na aplicação 2

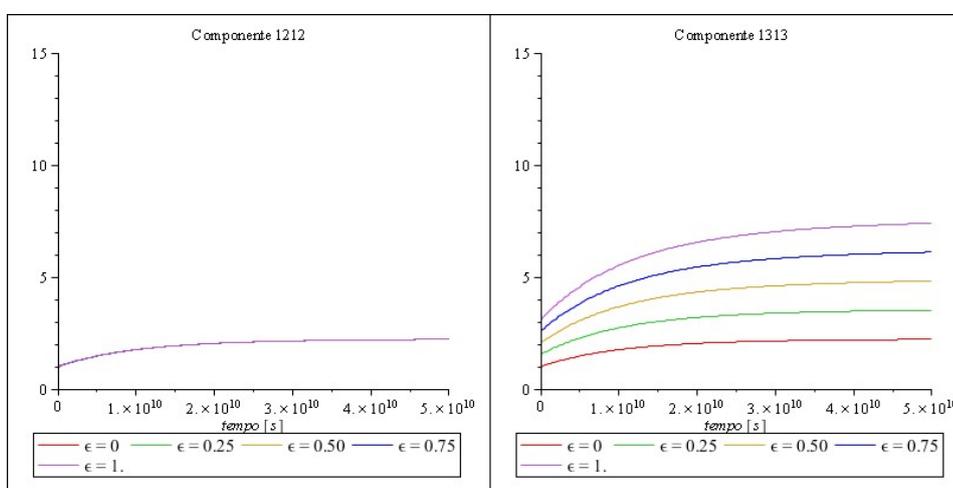


Figura 6.22: Evolução temporal das componentes J_{1212}^{hom} e J_{2323}^{hom} normalizadas na aplicação 2

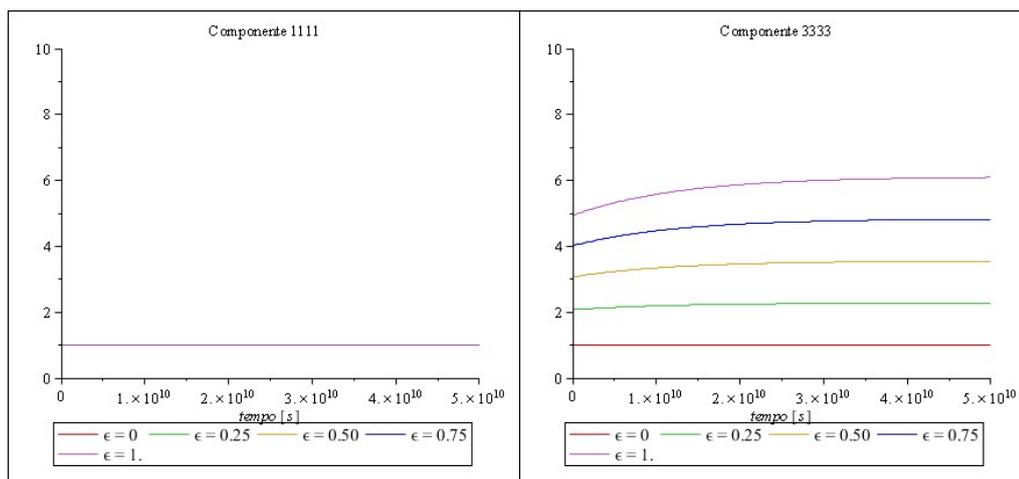


Figura 6.23: Evolução temporal das componentes J_{1111}^{hom} e J_{3333}^{hom} normalizadas na aplicação 3

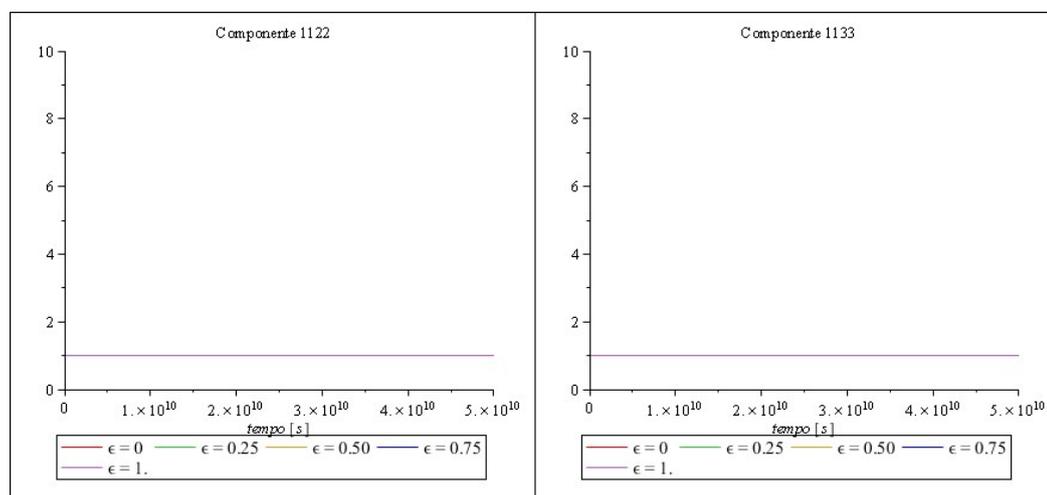


Figura 6.24: Evolução temporal das componentes J_{1122}^{hom} e J_{1133}^{hom} normalizadas na aplicação 3

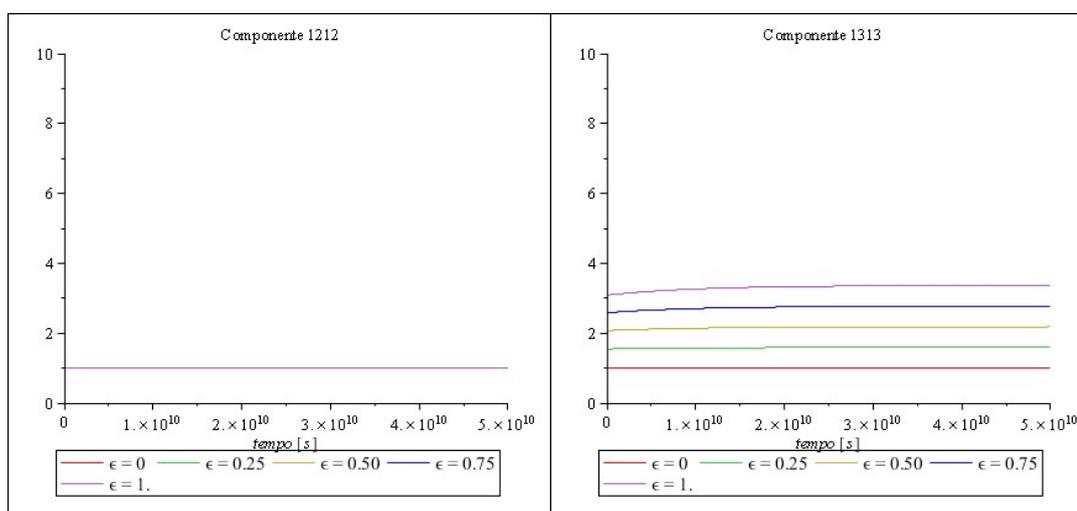


Figura 6.25: Evolução temporal das componentes J_{1212}^{hom} e J_{2323}^{hom} normalizadas na aplicação 3

Observa-se que, quando comparado com os tensores de relaxação, o tensor de fluência apresenta um número muito maior de componentes que independem das fraturas. Tal comportamento pode se dar pela aproximação realizada sobre o tensor de fluência ou simplesmente por uma compensação dos parâmetros na determinação do tensor de fluência.

Mais uma vez, os gráficos esboçam uma tendência já esperada, com o crescimento da função de fluência conforme o parâmetro de dano é aumentado. O aumento temporal das curvas também é conivente com aqueles estabelecidos para a função de fluência, quanto mais agudo era a inclinação da curva de relaxação, mais aguda é a inclinação na curva de fluência – obviamente a relaxação é decrescente a passo que a função de fluência é crescente.

6.1.4 Fraturas Orientadas Aleatoriamente

Assim como o realizado para fraturas paralelas, utiliza-se o resultado elástico obtido no capítulo 4 para a determinação do tensor de relaxação no espaço fictício de Carson-Laplace para fraturas distribuídas aleatoriamente (figura 6.26), obtém-se as seguintes expressões:

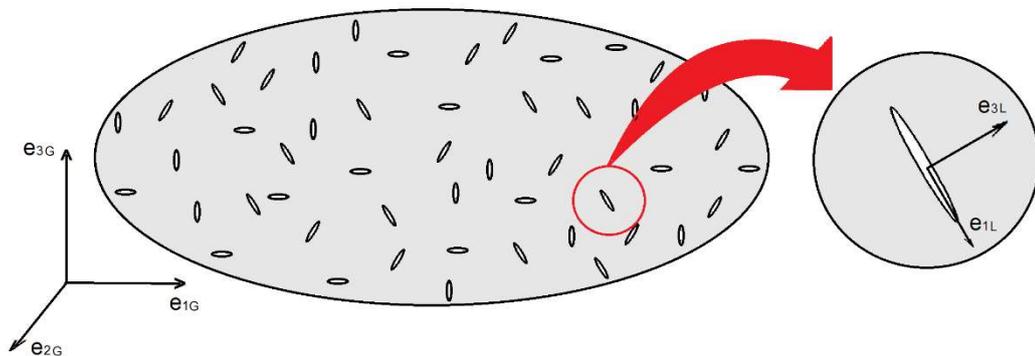


Figura 6.26: VER da distribuição de fraturas aleatória

$$R_{hom}^* = 3 k_{hom}^* \mathbb{J} + 2 \mu_{hom}^* \mathbb{K}$$

$$k_{ho}^* = k_s^* \frac{\beta_1^*}{\beta_2^*} \quad (6.18)$$

$$\mu_{hom}^* = \mu_s^* \frac{5\beta_1^*\beta_3^*}{\beta_4^*}$$

Admitindo-se que:

$$\begin{aligned}
\beta_1^* &= 9 k_s^* \pi \mu_s^* + 9 k_s^* a k_j^* + 12 \mu_s^* a k_j^* + 12 k_s^* a \mu_j^* + 16 \mu_s^* a \mu_j^* + 3 \pi \mu_s^{*2} \\
\beta_2^* &= 12 k_s^{*2} \varepsilon \pi + 16 k_s^* \varepsilon \pi \mu_s^* + 3 \pi \mu_s^{*2} + 9 k_s^* \pi \mu_s^* + 12 a \mu_s^* k_j^* + 9 k_s^* a k_j^* \\
&\quad + 16 a \mu_s^* \mu_j^* + 12 k_s^* a \mu_j^* \\
\beta_3^* &= 9 k_s^* \pi \mu_s^* + 12 k_s^* a \mu_j^* + 16 \mu_s^* a \mu_j^* + 6 \pi \mu_s^{*2}
\end{aligned} \tag{6.19a}$$

$$\beta_4^* = \left(\frac{16}{3} \pi \varepsilon \mu_s^* (3 k_s^* + 4 \mu_s^*) (2 \beta_1^* + \beta_3^*) + 5 \beta_1^* \beta_3^* \right) \tag{6.19b}$$

Lembra-se, contudo, que as expressões (6.10) e (6.11) podem ser utilizadas para escrever a expressão acima da mesma forma que aquelas apresentadas no capítulo 4. Observa-se que os parâmetros k_s^* , μ_s^* , k_j^* e μ_j^* também são dependentes do modelo reológico admitido para a matriz e para a fratura, desta forma, todos estes parâmetros dependem da variável p do espaço de Carson-Laplace. Para determinar o tensor de relaxação no espaço real, basta utilizar o procedimento sugerido na seção 6.1.1.

6.1.4.1 Aplicação 4 – Matriz (Kelvin-Voigt) e Fratura (Mola)

Admitindo-se o modelo reológico Padrão de Kelvin-Voigt para a matriz e o modelo de mola simples para as fraturas, tal como sugerido na figura 6.2 apresentada na aplicação 1, e seguindo-se o procedimento representado a cima pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
k_s^* &= \frac{k_{m,s}^e (p k_{K,s}^v + k_{K,s}^e)}{p k_{K,s}^v + k_{K,s}^e + k_{m,s}^e} \\
\mu_s^* &= \frac{\mu_{m,s}^e (p \mu_{K,s}^v + \mu_{K,s}^e)}{p \mu_{K,s}^v + \mu_{K,s}^e + \mu_{m,s}^e} \\
k_j^* &= k_{m,j}^e \\
\mu_j^* &= \mu_{m,j}^e
\end{aligned} \tag{6.20}$$

Aplicando-se os parâmetros das expressões (6.19) e (6.20) na expressão (6.18) obtém-se o módulo de compressão e de cisalhamento do tensor de relaxação no espaço fictício de Carson-Laplace. Uma vez que as fraturas são distribuídas aleatoriamente, o sistema permanece isótropo e, portanto, representar estes módulos é muito mais fácil que representar as componentes do tensor. Tal procedimento pode ser realizado de forma analítica, no entanto as expressões resultantes são muito grandes, não existindo necessidade prática de as apresentar aqui. Observa-se que a forma $\frac{A(p)}{B(p)}$, apresentada na seção 6.1.1 é estabelecida.

Posteriormente, realiza-se um procedimento de inversão da transformada de Carson-Laplace – o procedimento sugerido na seção 6.1.1 contempla esta finalidade de forma analítica – obtendo-se os módulos do tensor de relaxação homogêneo no espaço de tempo real para a combinação de modelos reológicos de Kelvin-Voigt – para a matriz – e mola para as fraturas. Novamente, as expressões analíticas são muito grandes e não existe necessidade prática de as apresentar. No entanto, é conveniente determinar um valor numérico para os parâmetros da expressão (6.19), desta forma pode-se apresentar um resultado final na forma gráfica segundo a variação com o parâmetro de dano e a variação temporal. Uma vez que não existem limitações a adotar os mesmos parâmetros da aplicação 1, a tabela 6.1 – apresentada na seção 6.1.2.1 – representa os parâmetros admitidos.

Admite-se a densidade de fraturas $\mathcal{N} = 1$ fratura por metro cúbico para representar o parâmetro de dano. Desta forma, apenas a dimensão das fraturas modifica o parâmetro de dano. Admitindo-se um parâmetro de dano $\epsilon = 0,25$ obtém-se as seguintes expressões para os módulos de compressão e de cisalhamento homogeneizados:

$$\begin{aligned}
 k_{hom} &= 3,36 \cdot 10^9 + 5,44 \cdot 10^7 e^{-9,67 \cdot 10^{-11} t} + 2,90 \cdot 10^9 e^{-1,94 \cdot 10^{-10} t} \\
 &\quad + 3,42 \cdot 10^9 e^{-1,94 \cdot 10^{-1} t} - 164,10 e^{-8,60 \cdot 10^{-1} t} \\
 \mu_{hom} &= 2,91 \cdot 10^9 - 2,71 \cdot 10^6 e^{-8,59 \cdot 10^{-1} t} + 2,92 \cdot 10^6 e^{-8,62 \cdot 10^{-1} t} \\
 &\quad + 1,16 \cdot 10^9 e^{-1,94 \cdot 10^{-10} t} + 1,13 \cdot 10^7 e^{-1,02 \cdot 10^{-10} t} \\
 &\quad + 7,85 \cdot 10^6 e^{-9,30 \cdot 10^{-11} t} + 2,26 \cdot 10^9 e^{-1,95 \cdot 10^{-1} t} \cdot \cos(5,87 \cdot 10^{-13} t) \\
 &\quad + 5,83 \cdot 10^7 e^{-1,95 \cdot 10^{-10} t} \cdot \sin(5,87 \cdot 10^{-13} t)
 \end{aligned} \tag{6.21}$$

Na equação (6.21) os termos em seno e cosseno surgem devido a fórmula de Euler, motivados pela existência de raízes complexas no polinômio do denominador no espaço de Carson-Laplace. A figura 6.27 apresenta o gráfico de cada módulo, normalizando-se segundo seu respectivo valor calculado no instante inicial de aplicação de uma carga e desconsiderando-se o efeito do dano – isso é, $\epsilon = 0$ e $t = 0$.

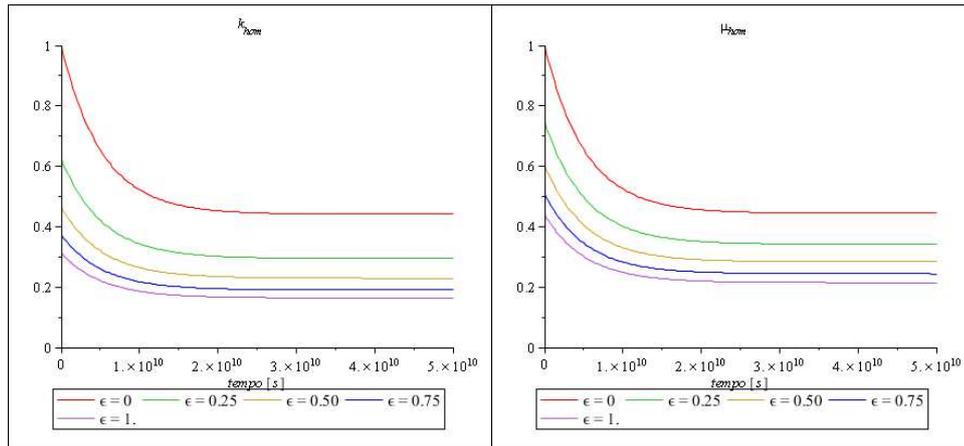


Figura 6.27: Evolução temporal dos módulos k_{hom} e μ_{ho} normalizados na aplicação 4

Observa-se nos gráficos que os módulos de compressão e de cisalhamento diferidos diminuem com o aumento do parâmetro de dano. Este comportamento já era esperado desde o princípio. A Diferença entre a razão com que cada módulo perde intensidade foi um resultado interessante. Embora os módulos estejam normalizados conforme seu respectivo valor mais elevado, este valor da norma é constante. Desta forma observa-se que o coeficiente de cisalhamento reduziu seu valor de forma mais branda quando se aumentou o dano do sistema.

6.1.4.2 Aplicação 5 – Matriz (Burger) e Fratura (Maxwell)

Admitindo-se o modelo reológico Padrão de Burger para a matriz e o modelo de Maxwell para as fraturas, tal como sugerido na figura 6.7 apresentada na aplicação 2, e seguindo-se o procedimento representado anteriormente pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
 k_s^* &= \frac{(p k_{K,s}^v + k_{K,s}^e) p k_{M,s}^v k_{M,s}^e}{p^2 k_{K,s}^v k_{M,s}^v + p (k_{K,s}^e k_{M,s}^v + k_{K,s}^v k_{M,s}^e + k_{M,s}^v k_{M,s}^e) + k_{K,s}^e k_{M,s}^e} \\
 \mu_s^* &= \frac{(p \mu_{K,s}^v + \mu_{K,s}^e) p \mu_{M,s}^v \mu_{M,s}^e}{p^2 \mu_{K,s}^v \mu_{M,s}^v + p (\mu_{K,s}^e \mu_{M,s}^v + \mu_{K,s}^v \mu_{M,s}^e + \mu_{M,s}^v \mu_{M,s}^e) + \mu_{K,s}^e \mu_{M,s}^e} \quad (7.22) \\
 k_j^* &= \frac{p k_{M,j}^v k_{M,j}^e}{p k_{M,j}^v + k_{M,j}^e} \quad ; \quad \mu_j^* = \frac{p \mu_{M,j}^v \mu_{M,j}^e}{p \mu_{M,j}^v + \mu_{M,j}^e}
 \end{aligned}$$

O procedimento de determinação do tensor de relaxação é exatamente igual ao sugerido na aplicação 1. Desta forma cabe determinar os parâmetros para que possa dar continuidade de forma numérica. Obviamente os parâmetros admitidos foram os mesmos da aplicação 2. Novamente admitiu-se uma densidade de fraturas $\mathcal{N} = 1$ fratura por metro cúbico e fez-se

variar a dimensão das fraturas. Na figura 6.28 apresenta o gráfico de cada módulo, normalizando-se segundo seu respectivo valor calculado no instante inicial de aplicação de uma carga e desconsiderando-se o efeito do dano – isso é, $\epsilon = 0$ e $t = 0$.

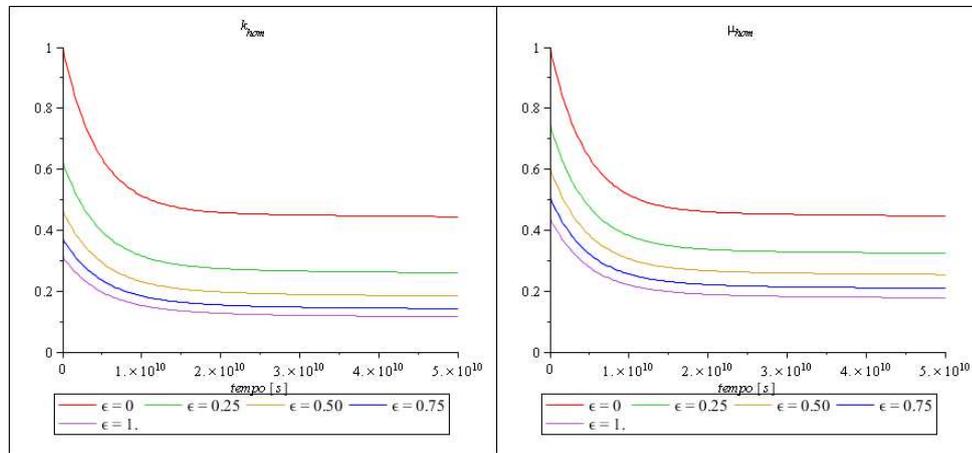


Figura 6.28: Evolução temporal dos módulos k_{hom} e μ_{hom} normalizados na aplicação 5

Na aplicação 5, existiu pouca diferença com relação aos módulos encontrados na aplicação 4. A maior diferença encontrada um leve decaimento proveniente da adoção do modelo de Maxwell às fraturas. Além disso, constata-se que a aplicação 4 tendia a um valor fixo diferente de zero a passo que a aplicação 5 tendia a zero devido a admissão do modelo de Burger.

6.1.4.3 Aplicação 6 – Matriz (Mola) e Fratura (Maxwell)

Tal como sugerido na aplicação 3, a aplicação 6 admite o modelo reológico Padrão de mola simples para a matriz e o modelo de Maxwell para as fraturas. Seguindo-se o procedimento representado a cima pode-se escrever:

$$k_s^* = k_{M,s}^e \quad ; \quad \mu_s^* = \mu_{M,s}^e$$

$$k_j^* = \frac{p k_{M,j}^v k_{M,j}^e}{p k_{M,j}^v + k_{M,j}^e} \quad ; \quad \mu_j^* = \frac{p \mu_{M,j}^v \mu_{M,j}^e}{p \mu_{M,j}^v + \mu_{M,j}^e} \quad (6.23)$$

A figura 6.29 apresenta o comportamento diferido dos módulos de compressão e de cisalhamento segundo a variação do parâmetro de dano.

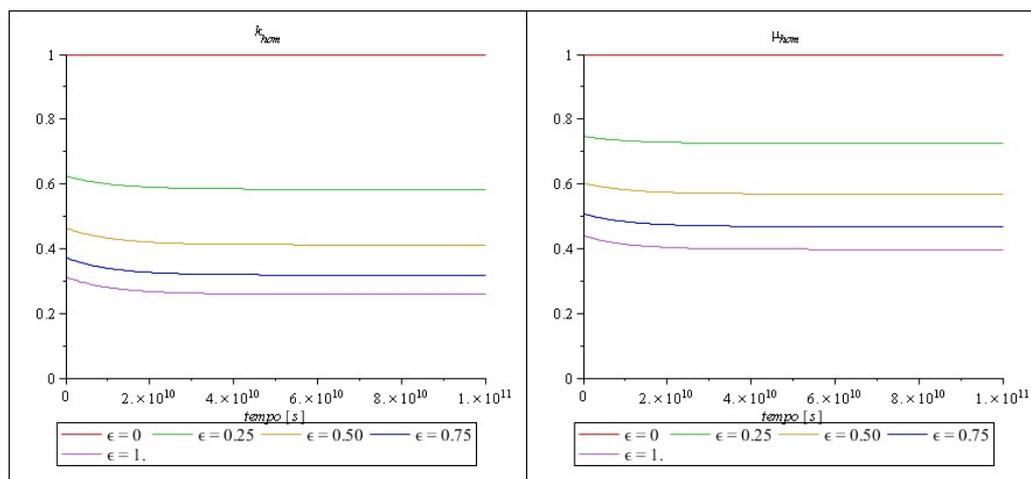


Figura 6.29: Evolução temporal dos módulos k_{hom} e μ_{hom} normalizados na aplicação 6

Novamente, a dificuldade de estabelecer um modelo semelhante aos anteriores, o tempo característico do fenômeno foi muito maior que aquele encontrado nas aplicações anteriores. Percebe-se, novamente, uma certa influência da viscosidade admitida em fraturas, demonstrando que a viscosidade em fraturas pode ter importância significativa dependendo-se do problema admitido.

6.1.5 Tensores de Fluência

Na seção 6.1.3 foi explicado o motivo de se dar preferência a relaxação em detrimento da fluência no presente trabalho. Para esta seção, as mesmas explicações são válidas. Ressalta-se, no entanto, que para as aplicações que necessitam da utilização do tensor de fluência, a presente seção deve ser estudada com mais cautela.

Da mesma forma apresentada na seção 6.1.3 esta seção visa apresentar gráficos de comportamento do tensor de fluência para o caso das aplicações anteriores. Lembra-se, contudo, que todo o procedimento de determinação do tensor de fluência apresentado na seção 6.1.3 pode ser estendido para a presente seção, utilizando-se agora os tensores de relaxação com distribuição de fraturas aleatórias. Novamente os tensores de fluência ficam definidos por:

$$\mathbb{J}_{hom}^* = (\mathbb{R}_{hom}^*)^{-1} \quad (6.24)$$

Observa-se que o tensor de relaxação é dado por:

$$\mathbb{R}_{hom}^* = 3 k_{hom}^* \mathbb{J} + 2 \mu_{hom}^* \mathbb{K} \quad (6.25)$$

Sendo assim, o tensor de fluência assume a mesma forma e fica definido por:

$$\mathbb{J}_{hom}^* = \frac{1}{3 k_{hom}^*} \mathbb{J} + \frac{1}{2 \mu_{hom}^*} \mathbb{K} \quad (6.26)$$

Onde \mathbb{J} e \mathbb{K} são, respectivamente, os tensores esférico e desviador. Uma vez que k_{hom}^* assume a forma $\frac{A(p)}{B(p)}$, k_{hom}^{*-1} assumiria a forma $\frac{B(p)}{A(p)}$. No entanto, como ambos polinômios apresentam o mesmo grau k , trata-se apenas de uma questão de definição, mudando-se apenas o nome dos polinômios. Desta forma, escreve-se k_{hom}^{*-1} na forma $\frac{A(p)}{B(p)}$ com $b_k = 1$ tal como sugerido na seção 6.1.1 – o mesmo procedimento é válido para μ_{hom}^* . Realizou-se então o procedimento de transformada inversa sugerido na seção 6.1.1 para obter-se os módulos de compressão e de cisalhamento no espaço de tempo real.

Desta forma, as figuras 6.30 a 6.32 apresentam a inversa dos módulos de compressão e de cisalhamento nas aplicações 4, 5 e 6, respectivamente. Lembra-se, contudo, que a inversa destes módulos não pode ser realizada no espaço de tempo real e sim no espaço de tempo fictício de Carson-Laplace.

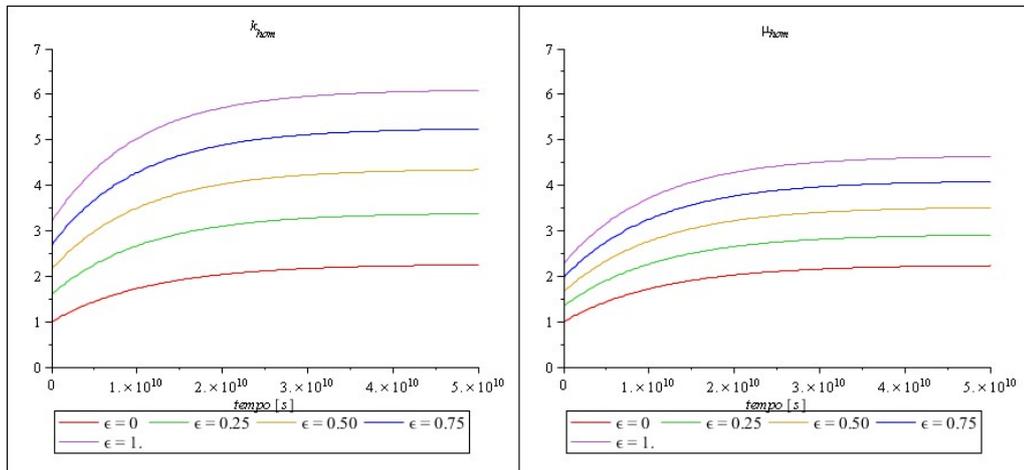


Figura 6.30: Evolução temporal dos módulos $\frac{1}{k_{hom}}$ e $\frac{1}{\mu_{hom}}$ normalizados na aplicação 4

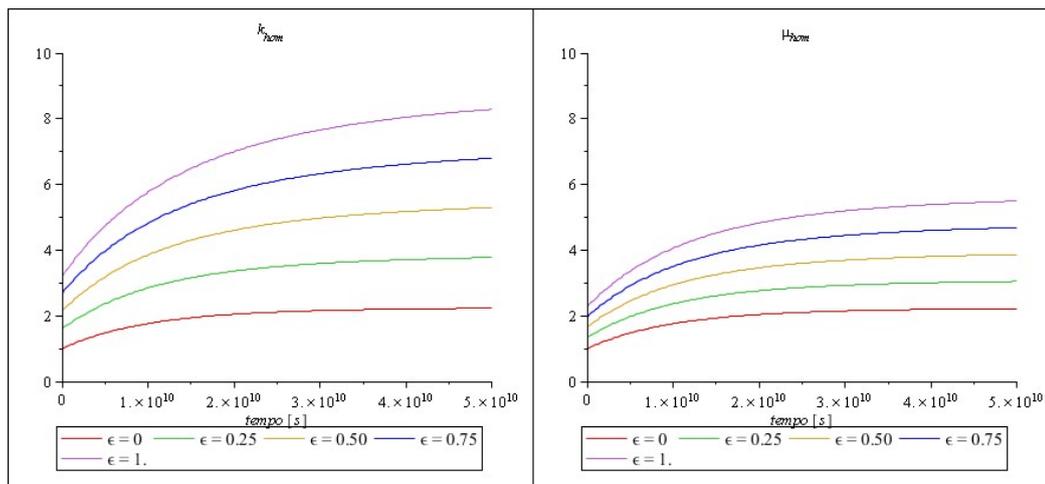


Figura 6.31: Evolução temporal dos módulos

$\frac{1}{k_{ho}}$ e $\frac{1}{\mu_{hom}}$ normalizados na aplicação 5

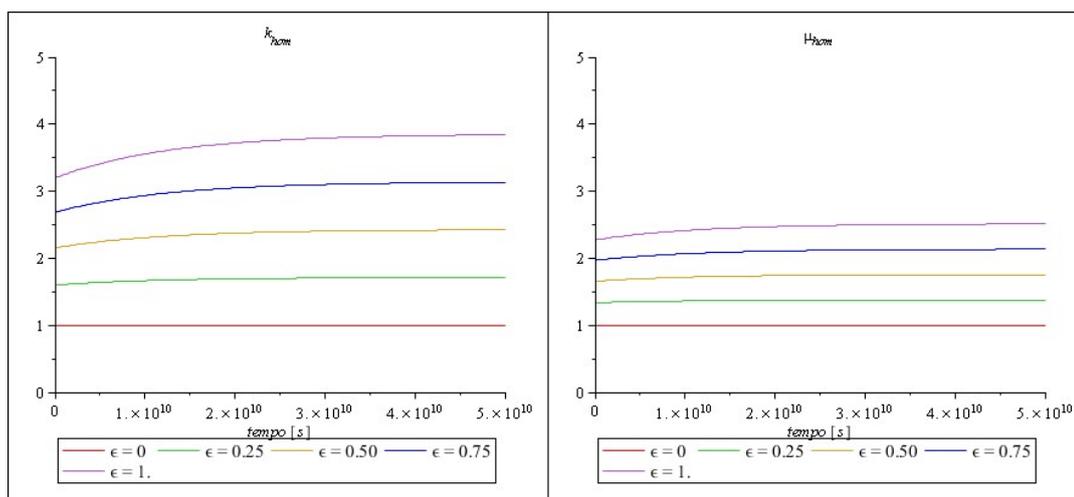


Figura 6.32: Evolução temporal dos módulos

$\frac{1}{k_{hom}}$ e $\frac{1}{\mu_{hom}}$ normalizados na aplicação 6

Os mesmas observações realizadas para a fraturação paralela são realizadas para estas figuras, as quais apresentam um comportamento esperado.

6.2 ILUSTRAÇÃO DO COMPORTAMENTO VISCOELÁSTICO: EXPERIÊNCIA DE RELAXAÇÃO EM COMPRESSÃO SIMPLES

O objetivo desta seção é ilustrar alguns aspectos do comportamento do meio fraturado na escala macroscópica, através da simulação da experiência de relaxação em compressão simples. A figura 6.33 ilustra o elemento de volume e a função de deformação aplicada.

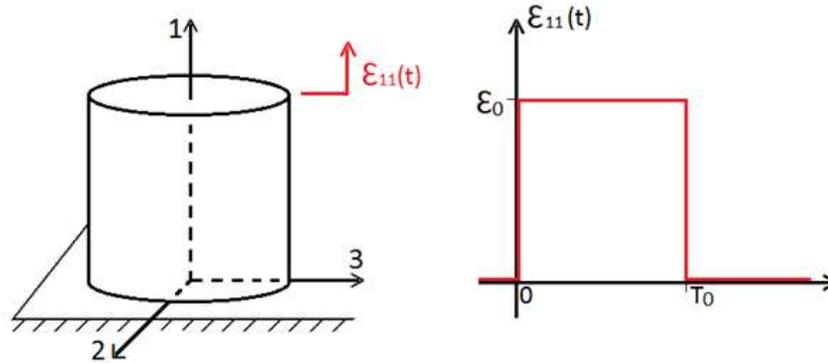


Figura 6.33: Solicitação na experiência de relaxação em compressão simples

Explicando o procedimento de forma mais formal, o elemento de volume é submetido a uma deformação de trassão uniaxial a qual é representada como:

$$\underline{\underline{\epsilon}}(t) = \epsilon_{11}(t) e_1 \otimes e_1 \quad \text{com} \quad \epsilon_{11}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \epsilon_0 & 0 \leq t < T_0 \\ 0 & t \geq T_0 \end{cases} \quad (6.27)$$

Onde $\epsilon_0 \ll 1$ e T_0 correspondem, respectivamente, a magnitude e duração da solicitação imposta. Trata-se, na verdade, de uma experiência de relaxação particular, para qual refere-se na literatura por *recovery test*; A resposta geral do material em termos de tensão escreve-se:

$$\underline{\underline{\Sigma}}(t) = \Sigma_{11}(t) e_1 \otimes e_1 + \Sigma_{22}(t) e_2 \otimes e_2 + \Sigma_{33}(t) e_3 \otimes e_3 \quad (6.28)$$

A análise nesta aplicação restringe-se a uma matriz viscoelástica isotrópica com uma distribuição isotrópica de fraturas igualmente viscoelásticas. Sendo assim, na escala macroscópica, o material fraturado é isotrópico, o que implica que em cada instante $\Sigma_{22} = \Sigma_{33}$. Além disso, assume-se o modelo de Burger para a matriz, enquanto o comportamento viscoelástico das fraturas é descrito através de um modelo de Maxwell, esta configuração é similar a aplicação 5. A solicitação imposta na expressão (6.26) pode ser finalmente expressa por:

$$\epsilon_{11}(t) = \epsilon_0[Y(t) - Y(t - T_0)] \quad (6.29)$$

Observando que a transformada de Carson Laplace é dada por:

$$\epsilon_{11}^*(p) = \epsilon_0(1 - e^{-p T_0}) \quad (6.30)$$

As correspondentes em tensão no espaço operacional são:

$$\Sigma_{11}^* = \epsilon_0 \left(k_s^* \frac{\beta_1^*}{\beta_2^*} + \frac{4}{3} \mu_s^* \frac{5\beta_1^* \beta_3^*}{\beta_4^*} \right) (1 - e^{-p T_0}) \quad (6.31)$$

$$\Sigma_{22}^* = \Sigma_{33}^* = \epsilon_0 \left(k_s^* \frac{\beta_1^*}{\beta_2^*} - \frac{2}{3} \mu_s^* \frac{5\beta_1^* \beta_3^*}{\beta_4^*} \right) (1 - e^{-p T_0})$$

A inversão destas expressões permite obter as expressões correspondentes no espaço físico. Esta operação de inversão não pode, entretanto, ser obtida tal como sugere-se na seção 6.1.1, em razão da forma exponencial resultante da função de Heaviside aplicada fora da origem. Para resolver esta transformada inversa fez-se uso do software *Maple*[®] 15. Observa-se, no entanto, que é possível resolver esta operação de forma manual, através da integral de Fourier apresentada na expressão (5.30) ou recorrendo a tabelas cujos resultados já sejam conhecidos. Além disso pode-se resolver o problema no espaço de tempo físico, sem a necessidade da transformação das expressões. A figura 6.34 ilustra a evolução temporal, para diferentes valores de dano ϵ , das componentes $\Sigma_{ii}(t)$ normalizadas para a resposta instantânea e desconsiderando-se o dano existente no elemento, isso é $t = 0$ e $\epsilon = 0$.

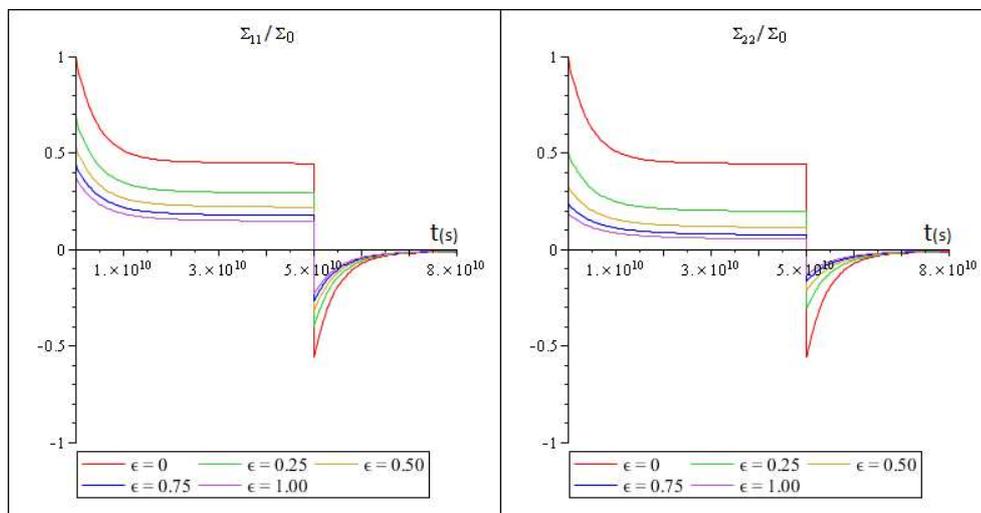


Figura 6.34: Evolução das componentes de tensão na experiência de relaxação considerando $T_0 = 5.10^{10}$ segundos

Observa-se para $\epsilon = 0$ (material sã) uma resposta igual para estes tipos de experiências. Na fase de carregamento ($t > T_0$), observa-se uma resposta em tensão decrescente em função de ϵ , o que traduz a degradação crescente do material. Na fase de recuperação ($t < T_0$), o tempo característico da função de relaxação diminui a medida que ϵ aumenta: a volta do material fraturado é mais lenta ao estado natural ($\Sigma = 0$).

6.3 MODELO REOLÓGICO EQUIVALENTE PARA O MATERIAL VISCOELÁSTICO FRATURADO

É comum expressar o comportamento dos materiais viscoelásticos sem envelhecimento recorrendo a modelos reológicos tradicionais. Percebe-se, no entanto, que o material fraturado deve apresentar dependência dos parâmetros utilizados para as fraturas. Um modelo que apresente esta dependência não é clássico na literatura. Propõem-se então a elaboração de um modelo reológico que vise acrescentar o comportamento das fraturas. Este modelo foi desenvolvido admitindo, exclusivamente, fraturação aleatória – pois o tensor de relaxação resultante deste modelo é isótropo.

Ressalta-se que a formulação do modelo é mais simples se realizado no espaço de Carson-Laplace, embora a formulação no espaço físico conduza ao mesmo modelo reológico. Lembra-se então do valor obtido para k_{hom}^* e μ_{ho}^* :

$$\begin{aligned} k_{hom}^* &= k_s^* \frac{\beta_1^*}{\beta_2^*} \\ \mu_{ho}^* &= \mu_s^* \frac{5\beta_1^*\beta_3^*}{\beta_4^*} \end{aligned} \quad (6.32)$$

Substituindo-se os devidos valores de β_i^* , percebe-se que é possível escrever k_{hom}^* como:

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_{ho}^*} &= \frac{1}{k_1^*} + \frac{1}{k_2^*} \\ k_1^* &= k_s^* \quad ; \quad k_2^* = k_a^* + k_b^* \\ k_a^* &= \frac{r}{4\pi\epsilon} (3k_j^* + 4\mu_j^*) \quad ; \quad \frac{1}{k_b^*} = \frac{1}{k_\alpha^*} + \frac{1}{k_\beta^*} \\ k_\alpha^* &= \frac{3}{16\epsilon} (3k_s^* + \mu_s^*) \quad ; \quad k_\beta^* = \frac{3}{4\epsilon} \mu_s^* \left(1 + \frac{1 - 2\nu_s^*}{2 + 2\nu_s^*} \right) \end{aligned} \quad (6.33)$$

Observa-se que para geomateriais em geral, o valor do módulo de Poisson ν_s varia pouco no tempo, isso significa que $\nu_s^* = \nu_s = cte$. Um modelo reológico virtual pode representar, no espaço de Carson-Laplace, este comportamento homogeneizado. Tal modelo é apresentado na figura 6.35.

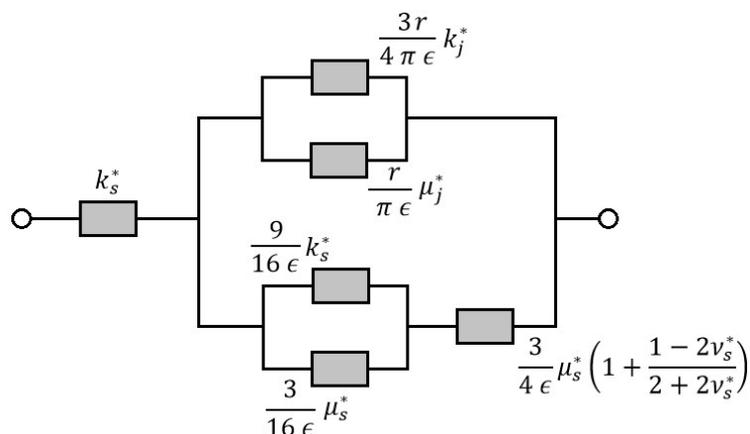


Figura 6.35: Modelo reológico para o k_{hom}^* no espaço operacional

Onde os coeficientes k_s^* , μ_s^* , k_j^* e μ_j^* são molas neste espaço virtual. Percebe-se, no entanto, que o modelo não está completo. Para completar o modelo admitido, é necessário substituir k_s^* , μ_s^* , k_j^* e μ_j^* pelos seus respectivos modelos reológicos. Como exemplo admite-se o modelo padrão de Kelvin-Voigt para a matriz e o modelo de mola para a fratura, a figura 6.36 apresenta o modelo reológico homogeneizado baseado nos modelos adotados para cada um dos elementos.

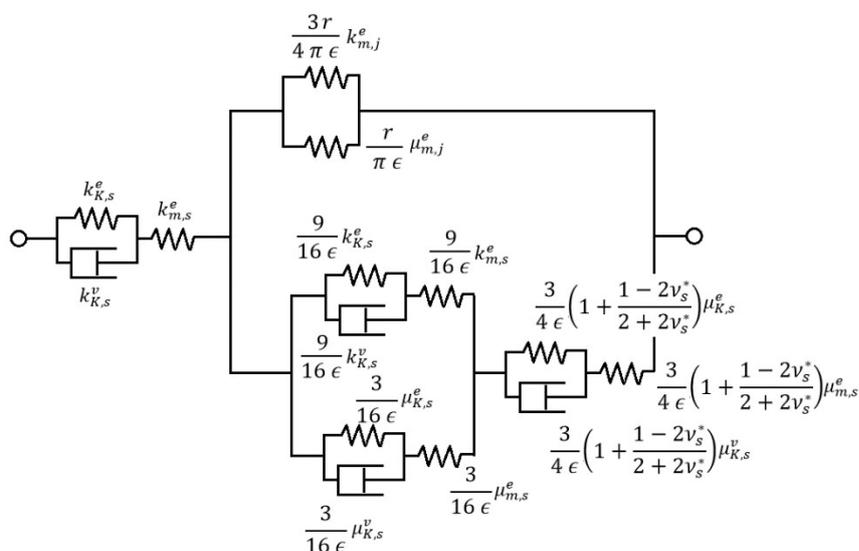


Figura 6.36: Modelo reológico para o k_{ho} admitindo matriz Padrão e fraturas elásticas

Obviamente, é permitido inserir outros modelos arbitrados ao invés destes. Este processo de determinação de um modelo reológico homogeneizado também pode ser realizado para μ_{hom}^* , de tal forma que obtém-se as seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\mu_{hom}^*} &= \frac{1}{\mu_1^*} + \frac{1}{\mu_2^*} + \frac{1}{\mu_3^*} \\
 \mu_1^* &= \mu_s^* \quad ; \quad \mu_2^* = \mu_a^* + \mu_b^* \quad ; \quad \mu_3^* = \mu_c^* + \mu_d^* + \mu_e^* \\
 \mu_a^* &= \frac{5r}{16\pi\epsilon}(3k_j^* + 4\mu_j^*) \quad ; \quad \frac{1}{\mu_b^*} = \frac{1}{\mu_\alpha^*} + \frac{1}{\mu_\beta^*} \\
 \mu_\alpha^* &= \frac{15}{64\epsilon}(3k_s^* + \mu_s^*) \quad ; \quad \mu_\beta^* = \frac{15}{16\epsilon}\mu_s^* \left(1 + \frac{1-2\nu_s^*}{2+2\nu_s^*}\right) \\
 \frac{1}{\mu_c^*} &= \frac{1}{\mu_\gamma^*} + \frac{1}{\mu_\delta^*} \quad ; \quad \frac{1}{\mu_d^*} = \frac{1}{\mu_\zeta^*} + \frac{1}{\mu_\eta^*} \quad ; \quad \frac{1}{\mu_e^*} = \frac{1}{\mu_\theta^*} + \frac{1}{\mu_i^*} \\
 \mu_\gamma^* &= \frac{45}{64\epsilon}(3k_s^* + \mu_s^*) \frac{1}{1-\nu_s^*} \quad ; \quad \mu_\delta^* = \frac{45\pi}{128\epsilon r} \mu_s^* \frac{\mu_j^*}{k_j^*} \frac{1}{(1-\nu_s^*)^2} \\
 \mu_\zeta^* &= \frac{45r}{32\epsilon\pi}(3k_j^* + 8\mu_j^*) \frac{1}{2\nu_s^* - 1} \quad ; \quad \mu_\eta^* = \frac{15}{64\epsilon}\mu_s^* \frac{1}{1-\nu_s^*} \frac{15-21\nu_j^*}{1+\nu_j^*} \\
 \mu_\theta^* &= \frac{45r}{8\epsilon\pi}\mu_j^* \frac{1-\nu_j^*}{1+\nu_j^*} \quad ; \quad \mu_i^* = \frac{10r^2}{8\epsilon\pi^2}(3k_j^* + 4\mu_j^*) \frac{\mu_j^*}{\mu_s^*} \frac{3-\nu_s^*}{1-2\nu_s^*}
 \end{aligned} \tag{6.34}$$

Observa-se, então, que o modelo pode ser representado de forma semelhante ao k_{hom}^* , a figura 6.37 apresenta esta representação.

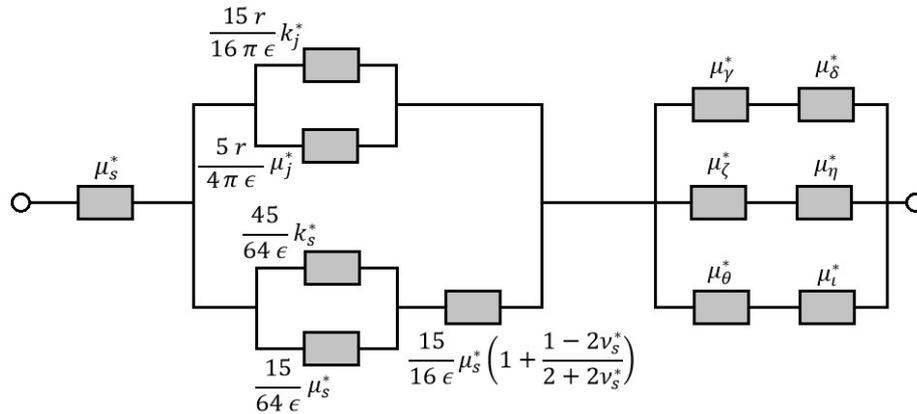


Figura 6.37: Modelo reológico para o μ_{hom}^* no espaço virtual

Observa-se, no entanto, que não é possível substituir os modelos reológicos para os elementos de matriz e fratura da mesma forma que realizado anteriormente. Esta impossibilidade se dá por causa dos termos μ_δ^* e μ_i^* . Observando-se estes termos na expressão (6.34) percebe-se que não

existe uma divisão clara entre módulos da matriz e da fratura, não tornando-se possível admitir que este valor é constante, tal como foi proposto para o coeficiente de Poisson. Para contornar este problema, sugere-se utilizar um coeficiente de Poisson homogeneizado, o qual é admitido constante para geomateriais. Desta forma determina-se apenas o módulo de compressão homogeneizado, de forma que o módulo de cisalhamento homogeneizado fica definido pelo módulo de compressão e pelo coeficiente de Poisson homogeneizados. Desta forma, pode-se admitir que o coeficiente de Poisson homogeneizado é determinado pelo limite:

$$\nu_{hom} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{3 k_{hom} - 2 \mu_{hom}}{6 k_{hom} + 2 \mu_{hom}} \right) \quad (6.35)$$

Observa-se que a expressão (6.35) trata-se apenas de um valor razoável para o coeficiente de Poisson, Caso exista a necessidade de uma melhor aproximação, esta também podem ser usada, contanto que retorne um valor constante no tempo. Observa-se também que as expressões foram apresentadas no espaço de tempo real – e não no de Carson-Laplace. Percebe-se, no entanto, que é possível obter a mesma expressão no espaço de Carson-Laplace:

$$\nu_{hom} = \nu_{hom}^* = \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{3 k_{hom}^* - 2 \mu_{hom}^*}{6 k_{hom}^* + 2 \mu_{hom}^*} \right) \quad (6.36)$$

Uma vez que estas expressões são equivalentes, o resultado obtido deve ser rigorosamente o mesmo. Apresentados estes resultados, cabe verificar se é possível realizar tal aproximação. Para isso se utilizou as propriedades da aplicação 5, com modelo padrão de Kelvin-Voigt para a matriz e modelo de mola para as fraturas. A expressão (6.21) defini os módulos de compressão e de cisalhamento homogeneizados no espaço real. Utilizando-se a expressão (6.35), escrita sem o operador limite, pode-se desenhar a evolução do coeficiente de Poisson, o qual é apresentado na figura 6.38:

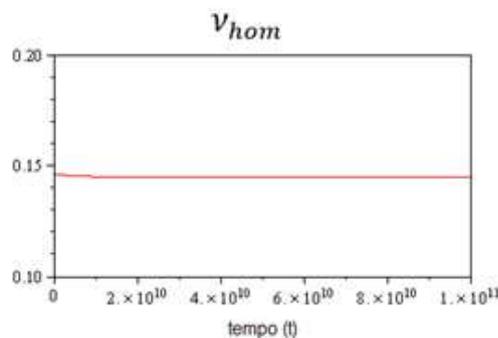


Figura 6.38: Evolução do coeficiente de Poisson homogeneizado

Observa-se que o coeficiente de Poisson homogeneizado apresenta uma variação muito pequena, de forma que torna-se difícil uma visualização. Para observar melhor a variação deste parâmetro efetuou-se a seguinte operação:

$$\begin{aligned} v_{hom} &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{3 k_{hom} - 2 \mu_{hom}}{6 k_{ho} + 2 \mu_{hom}} \right) = 0.1459 \\ v_{hom} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{3 k_{hom} - 2 \mu_{hom}}{6 k_{hom} + 2 \mu_{hom}} \right) = 0.1446 \end{aligned} \quad (6.37)$$

Observa-se então, uma diferença na terceira casa decimal. Frente a esta pequena variação, preferiu-se admitir o valor do coeficiente de Poisson como 0,1446. Outro método interessante de determinar o coeficiente de Poisson é através da seguinte expressão:

$$v_{ho} = \lim_{T \rightarrow \tau} \frac{\int_0^T \left(\frac{3 k_{hom} - 2 \mu_{hom}}{6 k_{ho} + 2 \mu_{ho}} \right) dt}{T} \quad (6.38)$$

Onde τ é o limite de tempo desejado – admite-se como o tempo de duração da análise ou o tempo característico de relaxação. Nota-se que esta expressão retorna a média do coeficiente de Poisson no tempo estipulado.

Uma vez que o modelo de k_{hom} é conhecido e que o coeficiente de Poisson é fornecido, pode-se determinar μ_{ho} . Lembra-se, contudo, que v_{hom} pode ser determinado em laboratório ou analiticamente, com base nas expressões anteriores tornando-se, no entanto, necessário conhecer ao menos μ_{hom}^* . Desta forma pode-se determinar um modelo reológico de μ_{hom} semelhante ao que foi utilizado para k_{ho} com a diferença de ter seu valor final multiplicado por uma constante definida.

7 PROPAGAÇÃO DE FRATURAS EM MEIOS VISCOELÁSTICOS

Com a finalidade de formular uma condição de propagação para meios viscoelásticos, é necessário determinar \mathcal{F} , entretanto, existem dificuldades teóricas para determiná-lo analiticamente. Ao propor que a energia livre pode ser desacoplada em uma parte instantânea e outra residual, tal como sugerido na expressão (5.61), percebe-se que a parte residual não foi expressa analiticamente. Para determinar a parte residual é necessário subtrair a energia instantânea da energia total:

$$W_{res}(\epsilon, \{\underline{\underline{\epsilon}}^v\}) = W^e - \frac{1}{2}(\underline{\underline{\epsilon}} - \underline{\underline{\epsilon}}^v) : \mathbb{R}_{hom}^0 : (\underline{\underline{\epsilon}} - \underline{\underline{\epsilon}}^v) \quad (7.1)$$

Desta forma, necessita-se conhecer a energia livre total para que a parte residual seja explicitada. A energia livre total é calculada através da soma das energias elásticas que atuam em cada uma das molas do sistema:

$$W^f = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{n=1}^m \underline{\underline{\epsilon}}_n^e : \mathbb{C}_n : \underline{\underline{\epsilon}}_n^e dV \quad (7.2)$$

Onde m é o número de molas presente no sistema, \mathbb{C}_n é a rigidez microscópica da n 'ésima mola e $\underline{\underline{\epsilon}}_n^e$ é a deformação elástica na n 'ésima mola. A expressão da energia livre conduz a dificuldades muito grandes no cálculo analítico, estas dificuldades estão concentradas na determinação da média da energia elástica de cada uma das molas, sendo assim, apenas é possível determinar a energia livre analiticamente para casos muito específicos e admitindo modelos reológicos muito simples. Na seção anterior, foi apresentado o modelo reológico do material fraturado homogeneizado utilizado neste trabalho, ficando claro que tal modelo não apresenta a simplicidade necessária para que seja possível determinar sua energia livre analiticamente para casos gerais.

7.1 AVALIAÇÃO NUMÉRICA DA CONDIÇÃO DE PROPAGAÇÃO

Para contornar estas dificuldades analíticas, sugere-se a determinação numérica da energia livre por meio de elementos finitos. Para a determinação numérica com apenas um carregamento cinemático \mathcal{E} é utilizada a expressão (5.60). Para o caso de um carregamento misto com carregamentos cinemáticos \mathcal{E} e esforços F , cujas grandezas duais são respectivamente Q e q , escreve-se:

$$\mathcal{F} = -\frac{\partial P}{\partial a|_{\mathcal{E}, \{\underline{\underline{\varepsilon}}^v\}, F}}(\mathcal{E}, a, \{\underline{\underline{\varepsilon}}^v\}, F) \quad (7.3)$$

Onde P é a energia potencial do sistema, que é a diferença entre a energia livre e o trabalho dos esforços externos ϕ :

$$P = W^e - \phi \quad (7.4)$$

Observa-se que a expressão (7.3) sugere a propagação numérica de uma fratura isolada. Tal abordagem deve ser expandida para o caso com múltiplas fraturas para que possa ser utilizada neste contexto. Para o cálculo da derivada apresentada na expressão (7.3) opta-se por uma aproximação direta. Realiza-se um incremento fictício no comprimento da fratura da mantendo-se fixo os valores de $\mathcal{E}, \{\underline{\underline{\varepsilon}}^v\}$ e F e calcula-se o incremento correspondente ao potencial dP . Desta maneira a força termodinâmica \mathcal{F} é determinada por: $\mathcal{F} = -dP/da$.

Na prática, modifica-se as condições de contorno do problema para uma nova fissura com comprimento $a + da$. Percebe-se que a derivada desejada deve apresentar alteração na carga e nas deformações viscosas. Manter os campos $\{\underline{\underline{\varepsilon}}^v\}$ de deformação viscosas constantes equivale a considerar uma resposta local puramente elástica. A energia livre é calculada através de uma integral, sobre o volume Ω , da energia livre local ω :

$$W^f = \int_{\Omega} \omega dV \quad (7.5)$$

A variação $d\Phi$ do trabalho das forças externas dadas entre os dois estados é calculada através do esforço e do incremento de deslocamento:

$$d\Phi = F da \quad (7.6)$$

Dadas as definições a cima, a taxa de restituição de energia pode ser aproximada pela seguinte expressão:

$$\mathcal{F} = - \frac{(W^f(a + da) - W^f(a)) - d\Phi}{da} \quad (7.7)$$

Com a expressão (7.7) a determinação numérica pode ser realizada. A abordagem numérica apenas foi apresentada como forma alternativa de solução e não é o tema deste trabalho, sugerindo-se buscar aplicações e mais informações para esta abordagem no trabalho de Nguyen (2010).

7.2 AVALIAÇÃO SIMPLIFICADA DA CONDIÇÃO DE PROPAGAÇÃO

Para que seja possível realizar aplicações analíticas, sugere-se simplificar algumas expressões apresentadas. Nguyen (2010) demonstrou que a parcela residual da energia livre pode ser negligenciada quando são analisadas estruturas unidimensionais homogêneas. Para uma análise preliminar, realizar esta simplificação passa a ser uma hipótese intuitiva mesmo para casos em que a estrutura não é unidimensional. A energia livre assume, então, a seguinte forma:

$$W^f = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\epsilon}} - \underline{\underline{\epsilon}}^v) : \mathbb{R}_{hom}^0 : (\underline{\underline{\epsilon}} - \underline{\underline{\epsilon}}^v) \quad (7.8)$$

Para determinar \mathcal{F} , deriva-se a energia livre com relação à ϵ , obtendo-se:

$$\mathcal{F} = -\frac{1}{2} (\underline{\underline{\epsilon}} - \underline{\underline{\epsilon}}^v) : \frac{\partial \mathbb{R}_{hom}^0}{\partial \epsilon} : (\underline{\underline{\epsilon}} - \underline{\underline{\epsilon}}^v) + (\underline{\underline{\epsilon}} - \underline{\underline{\epsilon}}^v) : \frac{\partial \mathbb{R}_{hom}^0}{\partial \epsilon} : \frac{\partial \underline{\underline{\epsilon}}^v}{\partial \epsilon} \Big|_{\{\underline{\underline{\epsilon}}^v\}} \quad (7.9)$$

Novamente, Nguyen (2010) demonstrou que para os mesmos casos da hipótese anterior é possível negligenciar o segundo termo da expressão (7.9):

$$\mathcal{F} = -\frac{1}{2} (\underline{\underline{\epsilon}} - \underline{\underline{\epsilon}}^v) : \frac{\partial \mathbb{R}_{hom}^0}{\partial \epsilon} : (\underline{\underline{\epsilon}} - \underline{\underline{\epsilon}}^v) \quad (7.10)$$

Percebe-se que as simplificações realizadas apenas produzem resultados exatos para estruturas isostáticas unidimensionais homogêneas, para as demais situações estas simplificações apenas podem ser realizadas após uma análise numérica que confirme que a participação destes termos contribui muito pouco com o resultado final esperado. Mesmo simplificando a expressão da força termodinâmica \mathcal{F} , a determinação ainda não pode ser realizada por meio da expressão (7.10) e isso se deve a presença de $\underline{\underline{\epsilon}}^v$, a qual não pode ser apresentada analiticamente para casos gerais. Para determinar a deformação $\underline{\underline{\epsilon}}^v$ para qualquer problema, é necessário determinar $\underline{\underline{\epsilon}}$ em todos os pontos e subtrair a deformação instantânea $\underline{\underline{\epsilon}}^e$ e, posteriormente, determinar a média das deformações $\underline{\underline{\epsilon}}^v$ obtidas. Para tornar possível uma aplicação, sugere-se reescrever a expressão (7.10) utilizando as tensões macroscópicas $\underline{\underline{\Sigma}}$:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \underline{\underline{\Sigma}} : \frac{\partial \mathbb{J}_{hom}^0}{\partial \underline{\underline{\epsilon}}} : \underline{\underline{\Sigma}} \quad (7.11)$$

Onde \mathbb{J}_{ho}^0 é o tensor de fluência homogeneizado $\mathbb{J}_{hom}(t - 0)$ determinado no mesmo instante que a solitação é realizada, em $t = 0$. Para simplificar a expressão (7.11) deve-se determinar o tensor \mathbb{J}_{hom}^0 , sugere-se admitir que o tensor \mathbb{J}_{ho}^0 é isótropo, tal como ocorre quando se admite uma distribuição de fraturas aleatória, para estes casos, o tensor \mathbb{J}_{hom}^0 pode ser escrito como:

$$\mathbb{J}_{hom}^0 = \frac{1}{3 k_{hom}^0} \mathbb{J} + \frac{1}{2 \mu_{hom}^0} \mathbb{K} \quad (7.12)$$

Onde k_{hom}^0 e μ_{hom}^0 são os módulos de compressão e cisalhamento homogeneizados para o tensor de fluência no instante da aplicação do carregamento. Uma vez que no instante do início do carregamento estas propriedades reduzem-se aos mesmos valores obtidos na elasticidade, pode-se usar os módulos de compressão e de cisalhamento para o tensor de relaxação, os quais foram exibidos anteriormente, pois quando avaliados neste mesmo instante adquirem os mesmos valores que os módulos apresentados. Mais uma vez a força termodinâmica \mathcal{F} obtém uma nova simplificação:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{6} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(\frac{1}{k_{hom}^0} \right) (\Sigma_{11} + \Sigma_{22} + \Sigma_{33})^2 + \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(\frac{1}{\mu_{hom}^0} \right) (\Sigma_{11}^2 + \Sigma_{22}^2 + \Sigma_{33}^2 + \Sigma_{12}^2 + \Sigma_{13}^2 + \Sigma_{23}^2) \quad (7.13)$$

Conforme mencionado anteriormente, as simplificações apenas são válidas quando a estrutura é unidimensional, esta limitação permite a simplificação da expressão acima para o caso de uma estrutura submetida a esforço uniaxial normal:

$$\mathcal{F} = \Sigma_{11}^2 \left(\frac{1}{6} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(\frac{1}{k_{hom}^0} \right) + \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(\frac{1}{\mu_{ho}^0} \right) \right) \quad (7.14)$$

Por fim, para representar \mathcal{F} , é necessário definir um modelo reológico para a matriz e para as fraturas, sugere-se utilizar o modelo de Burger para a matriz e de Maxwell para as fraturas. Percebe-se que para diversos modelos reológicos que podem ser escolhidos, todos aqueles que apresentam uma mola que retorne uma resposta instantânea no instante de aplicação da carga apresentam o mesmo resultado e, portanto, indefere qual modelo seja escolhido para esta aplicação. Ressalta-se que o valor da rigidez da mola atuante é diferente em cada um destes modelos, o que conduz a resultados diferentes quando aplicados. Para os modelos assumidos, obtém-se os seguintes parâmetros k_{hom}^0 e μ_{hom}^0 :

$$k_{hom}^0 = \frac{k_{M,s}^e \delta_1}{\delta_1 + \delta_2} \quad (7.15)$$

$$\mu_{hom}^0 = \frac{5\mu_{M,s}^e \delta_1 \delta_3}{\delta_4}$$

Com:

$$\delta_1 = 3\pi\mu_{M,s}^e (3k_{M,s}^e + \mu_{M,s}^e) + a (3k_{M,s}^e + 4\mu_{M,s}^e) (3k_{M,j}^e + 4\mu_{M,j}^e)$$

$$\delta_2 = 4\pi\epsilon k_{M,s}^e (3k_{M,s}^e + 4\mu_{M,s}^e)$$

$$\delta_3 = 3\pi\mu_{M,s}^e (3k_{M,s}^e + 2\mu_{M,s}^e) + 4a\mu_{M,j}^e (3k_{M,s}^e + 4\mu_{M,s}^e) \quad (7.16)$$

$$\delta_4 = 16\pi\epsilon\delta_3 k_{M,s}^e \mu_{M,s}^e + \frac{64}{3} \pi\epsilon\delta_3 \mu_{M,s}^e{}^2 + 32\pi\epsilon \delta_1 k_{M,s}^e \mu_{M,s}^e + \frac{128}{3} \pi\epsilon \delta_1 \mu_{M,s}^e{}^2 + 5\delta_1 \delta_3$$

Percebendo-se que os únicos termos dependentes do parâmetro de dano são δ_2 e δ_4 , a expressão (7.14) assume a seguinte forma:

$$\mathcal{F} = \Sigma_{11}^2 \left(\frac{1}{6 k_{M,s}^e \delta_1} \frac{\partial \delta_2}{\partial \epsilon} + \frac{1}{20 \mu_{M,s}^e \delta_1 \delta_3} \frac{\partial \delta_4}{\partial \epsilon} \right) \quad (7.17)$$

Percebe-se, contudo, que δ_2 e δ_4 dependem linearmente de ϵ . Resolvendo-se as derivadas obtém-se:

$$\mathcal{F} = \Sigma_{11}^2 \frac{2\pi(3k_{M,s}^e + 4\mu_{M,s}^e)}{3\delta_1} \left(1 + \frac{2(2\delta_1 + \delta_3)}{5\delta_3} \right) \quad (7.18)$$

Para prosseguir a aplicação, é necessário definir carregamentos específicos, os quais são aplicados nas seções seguintes.

7.2.1 Aplicação de Uma Taxa de Deformação Constante

A presente aplicação foi baseada nos resultados de Nguyen (2010) e teve como objetivo comparar com os resultados obtidos por este. Considera-se uma taxa de deformação $\underline{\underline{\dot{\epsilon}}} = \dot{E}_{11} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1$ constante, ou seja uma evolução linear no tempo da deformação $\underline{\underline{\epsilon}}(t) = \dot{E}_{11} t Y(t) \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1$. Nguyen (2010) demonstrou que fraturas em casos supercríticos (ou seja, quando se propagam), se propagam em direção a um valor assintótico. Se o parâmetro de dano inicial for superior ao parâmetro de dano assintótico, ou seja $\epsilon(t = \infty)$, não haverá propagação de fraturas. Então é possível estabelecer uma condição de propagação comparando-se os valores do parâmetro de dano inicial com o final, para tal busca-se os valores assintóticos de \mathcal{F} , ϵ e Σ_{11} , os quais ficam representados por \mathcal{F}^∞ , ϵ_∞ e Σ_{11}^∞ . Para relacionar as tensões Σ_{11}^∞ com as deformações \dot{E}_{11} torna-se necessário conhecer $\mathbb{J}_{hom,1111}^\infty$, que é a componente 1111 do tensor de fluência avaliado no tempo infinito e depende do modelo reológico adotado, podendo ser calculado através da expressão: $\mathbb{J}_{hom,1111}^\infty = \mathbb{J}_{ho,1111}^*(p = 0)$. Obtém-se a seguinte relação entre Σ_{11}^∞ e \dot{E}_{11}

$$\Sigma_{11}^\infty = 45 \frac{\delta_5 \delta_6 k_{M,s}^v \mu_{M,s}^v}{\delta_9} \dot{E}_{11} \quad (7.19)$$

Com:

$$\begin{aligned} \delta_5 &= 3\pi\mu_{M,s}^v(3k_{M,s}^v + \mu_{M,s}^v) + a(3k_{M,s}^v + 4\mu_{M,s}^v)(3k_{M,j}^v + 4\mu_{M,j}^v) \\ \delta_6 &= 3\pi\mu_{M,s}^v(3k_{M,s}^v + 2\mu_{M,s}^v) + 4a\mu_{M,j}^v(3k_{M,s}^v + 4\mu_{M,s}^v) \\ \delta_7 &= -96\pi\epsilon_\infty(3k_{M,s}^v + 4\mu_{M,s}^v)k_{M,s}^v\mu_{M,s}^v \quad ; \quad \delta_8 = \pi\mu_{M,s}^v{}^2 - a k_{M,j}^v(3k_{M,s}^v + 4\mu_{M,s}^v) \\ \delta_9 &= (15k_{M,s}^v + 5\mu_{M,s}^v)\delta_6^2 - \frac{17}{24}\delta_7\delta_6 - 15(3k_{M,s}^v + \mu_{M,s}^v)\delta_8\delta_6 + \delta_7\delta_8 \end{aligned} \quad (7.20)$$

Lembrando-se que foi utilizado o modelo Burger para a matriz e Maxwell para as fraturas, adotar modelos diferentes produz resultados diferentes nesta abordagem. \mathcal{F} assume então a seguinte forma:

$$\mathcal{F}^\infty = \left(45 \frac{\delta_5 \delta_6 k_{M,s}^v \mu_{M,s}^v}{\delta_9} \dot{E}_{11} \right)^2 \frac{2\pi(3k_{M,s}^e + 4\mu_{M,s}^e)}{3 \delta_1} \left(1 + \frac{2(2\delta_1 + \delta_3)}{5 \delta_3} \right) \quad (7.21)$$

A figura 7.1 apresenta um gráfico de \mathcal{F}^∞ normalizado pelo seu valor inicial.

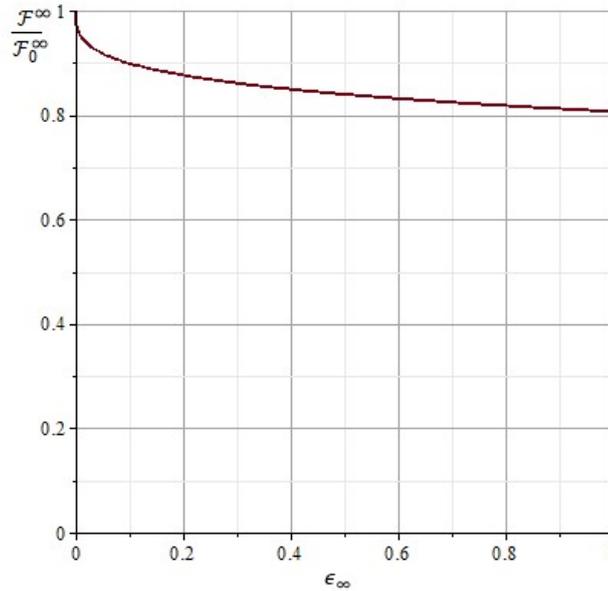


Figura 7.1: Evolução de \mathcal{F}^∞ em função do o parâmetro de dano ϵ_∞

Conhecida a força termodinâmica \mathcal{F}^∞ , a condição de propagação (5.64) pode ser reescrita para valores assintóticos como:

$$\mathcal{F}^\infty = G_c = \frac{2\pi}{3 a_\infty} G_f \quad (7.22)$$

Aplicando (7.21) em (7.22) obtém-se

$$\left(45 \frac{\delta_5 \delta_6 k_{M,s}^v \mu_{M,s}^v}{\delta_9} \dot{E}_{11} \right)^2 \frac{2\pi(3k_{M,s}^e + 4\mu_{M,s}^e)}{3 \delta_1} \left(1 + \frac{2(2\delta_1 + \delta_3)}{5 \delta_3} \right) = \frac{2\pi \mathcal{N}^{\frac{1}{3}}}{3 \epsilon_\infty^{\frac{1}{3}}} G_f \quad (7.23)$$

Define-se, com base em (7.23), a seguinte função:

$$f(\epsilon_\infty) = \frac{\epsilon_\infty^{\frac{1}{3}}}{\delta_9^2} = \frac{\mathcal{N}^{\frac{1}{3}} \delta_1 G_f}{(45\delta_5\delta_6 k_{M,s}^v \mu_{M,s}^v E_{11})^2 (3k_{M,s}^e + 4\mu_{M,s}^e) \left(1 + \frac{2(2\delta_1 + \delta_3)}{\delta_3}\right)} = \frac{\delta}{\dot{E}_{11}^2} \quad (7.24)$$

Onde δ é um coeficiente determinado com base nos parâmetros do material:

$$\delta = \frac{\mathcal{N}^{\frac{1}{3}} \delta_1 G_f}{(45\delta_5\delta_6 k_{M,s}^v \mu_{M,s}^v)^2 (3k_{M,s}^e + 4\mu_{M,s}^e) \left(1 + \frac{2(2\delta_1 + \delta_3)}{\delta_3}\right)} \quad (7.25)$$

A função $f(\epsilon_\infty)$ fica representada pela figura 7.2:

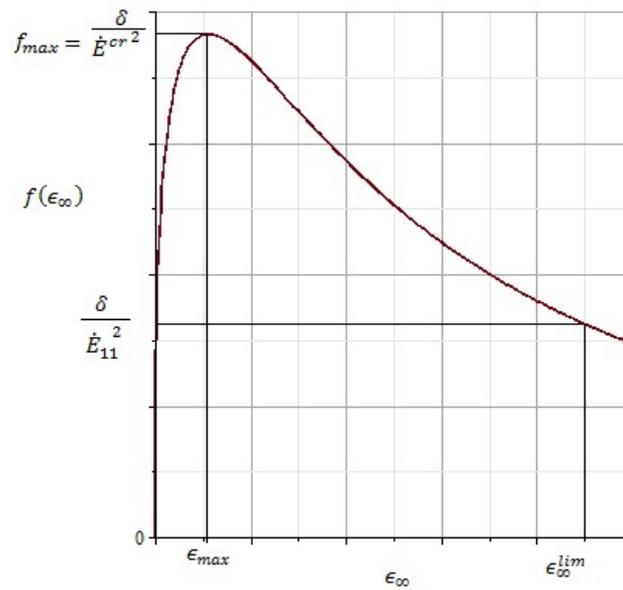


Figura 7.2: Evolução de $f(\epsilon_\infty)$ segundo o parâmetro de dano ϵ_∞

A função característica $f(\epsilon_\infty)$ é nula em $\epsilon = 0$ e atinge um valor máximo em $\epsilon = \epsilon_{max}$, sendo decrescente a partir de então. Tal função permite a determinação da velocidade crítica de deformação \dot{E}^{cr} e do parâmetro de dano máximo, tem-se então:

$$\dot{E}^{cr} = \sqrt{\frac{\delta}{f_{max}}} \quad (7.26)$$

Pode-se realizar uma análise de estabilidade:

- a) Se $\dot{E}_{11} < \dot{E}^{cr}$, a equação (7.24) não tem solução e o dano não se propaga, independentemente do valor inicial de dano;
- b) Se $\dot{E}_{11} \geq \dot{E}^{cr}$ e o parâmetro de dano inicial ϵ_0 for menor que ϵ_{∞}^{lim} , o qual depende da taxa de carregamento, o dano aumenta até o valor de ϵ_{∞}^{lim} ;
- c) Se $\dot{E}_{11} \geq \dot{E}^{cr}$ e $\epsilon_0 \geq \epsilon_{\infty}^{lim}$, o dano não se propaga.

Pode-se obter uma segunda forma de representação da condição de propagação através da determinação direta da taxa de deformação, com base na expressão (7.23) obtém-se:

$$\dot{E}_{11} = \sqrt{\frac{G_c}{\left(45 \frac{\delta_5 \delta_6 k_{M,s}^v \mu_{M,s}^v}{\delta_9}\right)^2 \frac{2\pi(3k_{M,s}^e + 4\mu_{M,s}^e)}{3\delta_1} \left(1 + \frac{2(2\delta_1 + \delta_3)}{\delta_3}\right)}} \quad (7.27)$$

Tal expressão tem sua variação conforme o parâmetro de dano apresentada na figura 7.3:

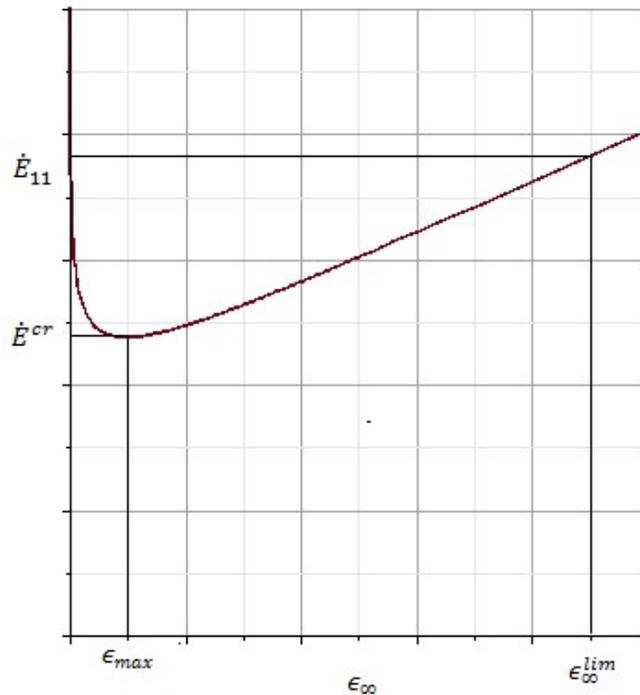


Figura 7.3: Evolução de \dot{E} segundo o parâmetro de dano ϵ_{∞}

Nesta representação fica claro a inexistência de solução para $\dot{E}_{11} < \dot{E}^{cr}$. Além disso percebe-se que se $\epsilon_0 < \epsilon_{max}$, existirá propagação para qualquer taxa de deformação $\dot{E}_{11} \geq \dot{E}^{cr}$. Este gráfico é semelhante àqueles apresentados na elasticidade, porém a interpretação deve ser diferente, uma vez que se dá em taxa de deformação e não em deformações.

7.2.2 Aplicação de Uma Tensão Constante

Além da aplicação em deformações, pode-se retornar a expressão (7.18) e trabalhar com tensões. Aplicando a equação (7.18) na condição de propagação (5.64), obtém-se a seguinte expressão:

$$\Sigma_{11}^{crit} = \sqrt{\frac{G_c}{\frac{2\pi(3k_{M,s}^e + 4\mu_{M,s}^e)}{3\delta_1} \left(1 + \frac{2(2\delta_1 + \delta_3)}{\delta_3}\right)}} \quad (7.28)$$

A expressão (7.28) retorna qual a tensão de início de propagação para um determinado parâmetro de dano inicial. Percebe-se, no entanto, que nenhum coeficiente δ_i depende diretamente de ϵ e a única relação destes coeficientes com o parâmetro de dano é por meio do tamanho da fratura. A figura 7.4 apresenta os valores de tensões críticas de início da propagação para cada valor de parâmetro de dano.

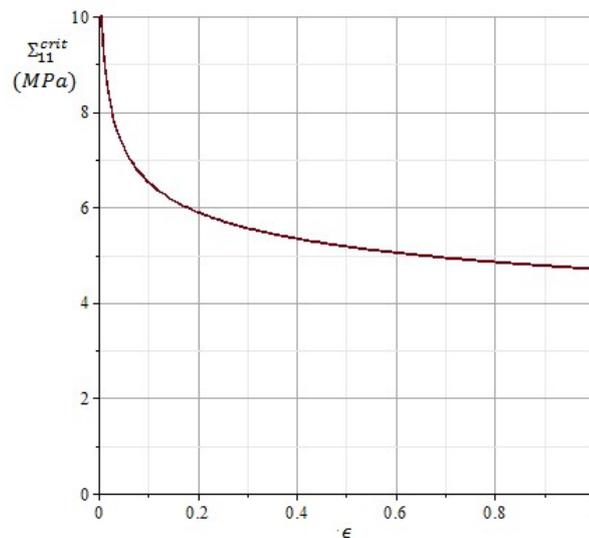


Figura 7.4: Evolução de Σ_{11}^{crit} segundo o parâmetro de dano ϵ (Obtido com parâmetros apresentados na figura 6.9)

Observa-se que a estrutura do gráfico 6.45 é similar àqueles apresentados na elasticidade, mas na presente aplicação o modelo é viscoelástico. Observa-se que para um parâmetro de dano nulo a tensão crítica equivalente é infinita, tratando-se de uma limitação do método utilizado, pois a tensão de ruptura do material já é suficiente para provocar o surgimento de falhas no elemento. Este valor representa a impossibilidade de propagar fraturas inexistentes na estrutura com a teoria aqui presente.

Conforme se mencionou anteriormente, as simplificações aplicadas sobre a energia livre e à força termodinâmica permitem calcular de maneira mais simples a propagação das fraturas para estruturas unidimensionais homogêneas. Entretanto, realizar o cálculo simplificado para estruturas não contempladas pelas simplificações torna-se uma proposta adequada quando a finalidade é comparar com resultados obtidos não realizando tais simplificações. Aplica-se então uma tensão isotropa, com a finalidade de observar o comportamento simplificado. A expressão de \mathcal{F} assume a seguinte forma:

$$\mathcal{F} = \Sigma^2 \frac{6 \pi (3k_{M,s}^e + 4\mu_{M,s}^e)}{\delta_1} \left(1 + \frac{2}{15} \frac{(2\delta_1 + \delta_3)}{\delta_3} \right) \quad (7.27)$$

Embora as simplificações não sejam corretas para este tipo de estrutura, assume-se que os termos simplificados apresentam uma importância muito pequena para a propagação, tal admissão deveria ser respaldada por cálculos numéricos, os quais não foram realizados. A finalidade desta análise consiste em comparar a tensão crítica Σ_{11}^{crit} no caso de uma solicitação normal com a tensão crítica Σ^{crit} para uma solicitação isotropa. A expressão (7.29) pode ser introduzida na condição de propagação (5.64) para obter:

$$\Sigma^{crit} = \sqrt{\frac{G_c}{\frac{6 \pi (3k_{M,s}^e + 4\mu_{M,s}^e)}{\delta_1} \left(1 + \frac{2}{15} \frac{(2\delta_1 + \delta_3)}{\delta_3} \right)}} \quad (7.27)$$

A figura 7.5 apresenta uma comparação das tensões críticas determinadas.

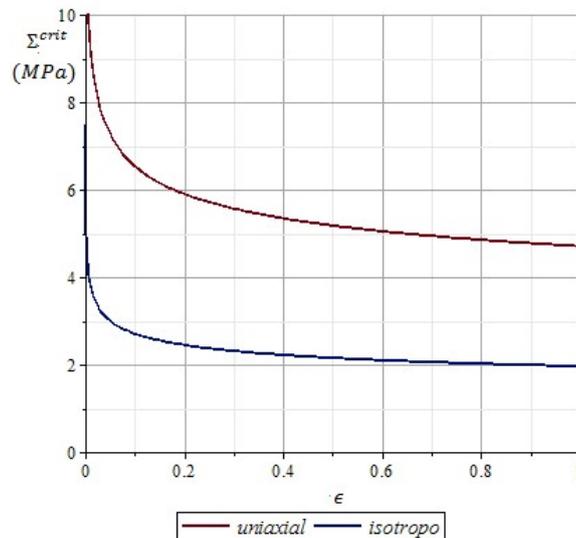


Figura 7.5: Comparação entre tensões críticas (Obtido com parâmetros apresentados na figura 6.9)

Assim como na elasticidade, as tensões críticas encontradas são menores para o caso isótropo, pois o caso isótropo admitido é equivalente a três tensões uniaxiais atuando em direções perpendiculares entre si, desta forma existe uma maior intensidade de tensões. No entanto, observa-se um comportamento semelhante ao caso elástico o que indica que, embora a aproximação esteja errada, os resultados ainda permanecem coerentes.

7.2.3 Aplicação de Uma Deformação Constante

Uma última aplicação necessária consiste em utilizar a expressão (7.29) para determinar diretamente a força termodinâmica \mathcal{F} . Desta vez, ao invés de determiná-la para valores assintóticos, será utilizada a seguinte relação entre tensões e deformações:

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \mathbb{R}(t) \otimes \underline{\underline{\epsilon}}(t) \quad (7.31)$$

Como forma de simplificar esta aplicação, sugere-se utilizá-la em sua forma unidimensional:

$$\Sigma_{11} = R_{1111}(t) \otimes E_{11}(t) \quad (7.32)$$

Onde $R_{1111}(t)$ é a componente 1111 do tensor de relaxação, admitindo que o carregamento iniciou em $t = 0$. Utilizando a expressão (7.32), aplicada em (7.29) obtém-se a seguinte expressão:

$$\mathcal{F} = (R_{1111}(t) \otimes E_{11}(t))^2 \frac{6 \pi (3k_{M,s}^e + 4\mu_{M,s}^e)}{\delta_1} \left(1 + \frac{2}{15} \frac{(2\delta_1 + \delta_3)}{\delta_3} \right) \quad (7.33)$$

Até então, $E_{11}(t)$ pode assumir qualquer evolução temporal. A ideia consiste em simplificar este procedimento admitindo que $E_{11}(t)$ é constante no tempo, reduzindo a expressão (7.33) a::

$$\mathcal{F} = (R_{1111}(t)E_{11})^2 \frac{6 \pi (3k_{M,s}^e + 4\mu_{M,s}^e)}{\delta_1} \left(1 + \frac{2}{15} \frac{(2\delta_1 + \delta_3)}{\delta_3} \right) \quad (7.34)$$

Para resolver a expressão (7.33) utiliza-se $R_{1111}(t)$ e o valor dos demais parâmetros estabelecidos na aplicação 2, desta forma apresenta-se a seguinte evolução temporal da força termodinâmica \mathcal{F} , normalizado por seu valor no instante inicial:

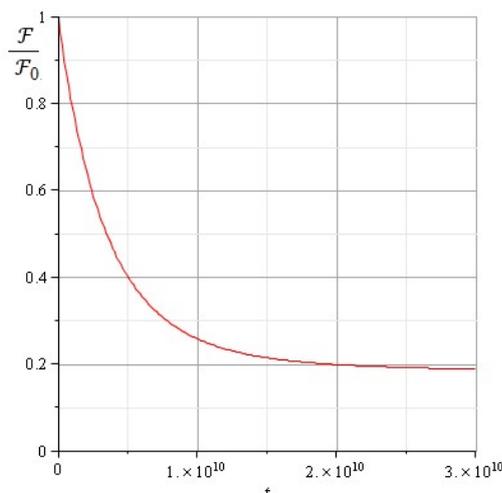


Figura 7.6: Evolução temporal da força termodinâmica (Obtido com parâmetros apresentados na figura 6.9 e $\epsilon = 0.25$)

Percebe-se que a força termodinâmica de propagação inicia, para uma deformação constante aplicada, em seu valor máximo, reduzindo seu valor até atingir um patamar constante. Este efeito decorre das deformações existentes nas molas do modelo homogeneizado, instantaneamente toda deformação está concentrada em nas molas (mais especificamente, nas molas com caráter instantâneo), a medida que o tempo passa, a deformação nas molas migra para os amortecedores. Esta transferência de deformações não precisa ser plena, podendo existir deformações residuais em algumas molas do sistema, como é o caso da situação representada.

A figura 7.6 foi estabelecida para uma deformação constante, retornando um \mathcal{F} decrescente no tempo, mas que apresenta uma assíntota horizontal. Pode-se comparar o gráfico de \mathcal{F} com a força termodinâmica crítica G_c , assumindo que G_c é constante, se $\mathcal{F} = G_c$ em algum instante de tempo, haverá a propagação, caso $\mathcal{F} < G_c$, não haverá a propagação das fraturas.

7.3 PROPAGAÇÃO DE FRATURAS EM MEIOS VISCOELÁSTICOS HOMOGENEIZADOS: APROXIMAÇÃO POR MODELO DE BURGER

Até então, a energia livre existente no material era determinada com base em uma análise microscópica, admitindo a heterogeneidade do material, entretanto, uma vez que o material seja homogeneizado, não é mais possível distinguir suas fases e o material homogeneizado torna-se um material equivalente cujas propriedades contemplam as características do material original.

Neste material equivalente, não há distinção entre as escalas microscópicas e macroscópicas e, portanto, a energia livre efetiva pode ser calculada diretamente, sem que seja necessário determinar a média das energias elásticas microscópicas. A definição da energia livre permanece a mesma, podendo ser escrita como:

$$W^f = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^m \underline{\underline{\epsilon}}_n^e : \mathbb{C}_{hom}^n : \underline{\underline{\epsilon}}_n^e \quad (7.35)$$

A equação (7.35) sugere que o comportamento do meio homogeneizado deve ser representado por uma associação de elementos de molas e amortecedores. Neste contexto, m é o número de molas existente no modelo reológico do material homogeneizado, \mathbb{C}_{hom}^n é a rigidez equivalente da n 'ésima mola do material homogeneizado e $\underline{\underline{\epsilon}}_n^e$ é a deformação na referida mola. Observa-se que a energia livre passa a depender do modelo reológico do material homogeneizado, não dependendo diretamente dos modelos admitidos para a matriz e para as fraturas. Observa-se que a energia livre também atende a hipótese de desacoplamento, sugerida anteriormente, podendo ser escrita como:

$$W^f = \frac{1}{2} \underline{\underline{\epsilon}}^e : \mathbb{R}_{hom}^0 : \underline{\underline{\epsilon}}^e + W_{res}(\underline{\underline{\epsilon}}, \underline{\underline{\epsilon}}^v) \quad (7.36)$$

Onde $\underline{\underline{\epsilon}}^e = (\underline{\underline{\epsilon}} - \underline{\underline{\epsilon}}^v)$ é a deformação instantânea observada após a aplicação de uma tensão e \mathbb{R}_{hom}^0 é o tensor de relaxação homogeneizado instantâneo do sistema. Para prosseguir esta análise é necessário determinar um modelo reológico para o material fraturado homogeneizado. Observa-se que a seção 6.3 apresenta um modelo, porém a dificuldade ao utilizá-lo é muito elevada por causa de sua complexidade. Sugere-se então a utilização de um modelo homogeneizado mais simples. Nguyen (2010) propôs um modelo de Burger homogeneizado, no entanto seu trabalho desconsiderava a interação entre as faces das fraturas, tornando-se fundamental, então, a determinação de um modelo equivalente que admita a transferência de esforços pelas fraturas.

7.3.1 Determinação do Modelo de Burger Homogeneizado

Embora Nguyen (2010) tenha desconsiderado a interação entre as faces das fraturas (fissuras), seu modelo pode ser facilmente adaptável ao caso de fraturas que transmitem esforços. A ideia

desta seção consiste em transformar o modelo proposto na seção 6.3 para um modelo equivalente de Burger que representa o material homogeneizado de forma aproximada. Como forma de simplificação, o modelo resultante está restrito a distribuição aleatória de fraturas. Observando-se as expressões (6.33), que descreve k_{hom}^* para meios aleatórios, percebe-se que k_{hom}^* apresenta a seguinte forma:

$$\frac{1}{k_{hom}^*} = \frac{1}{k_s^*} + \frac{4 \pi \epsilon (3k_s^* + 4 \mu_s^*)}{\beta_1^*} = \frac{1 + \epsilon Q^*}{k_s^*} \quad (7.37)$$

$$Q^* = \frac{4 \pi (3k_s^* + 4 \mu_s^*) k_s^*}{\beta_1^*}$$

Onde os coeficientes k_s^* , μ_s^* , k_j^* , μ_j^* são dados, assumindo o modelo de Burger para a matriz e de Maxwell para as fraturas, na expressão (6.14) e o coeficiente β_1^* é dado na expressão (6.19). No entanto, para um material homogeneizado com o comportamento de Burger, dever-se-ia ter:

$$\frac{1}{k_{hom}^*} = \frac{1}{k_{M,hom}^e} + \frac{1}{p k_{M,hom}^v} + \frac{1}{k_{K,hom}^e + p k_{K,hom}^v} \quad (7.38)$$

Infelizmente as expressões (7.37) e (7.38) não podem ser satisfeitas simultaneamente, desta forma, propõem-se aproximar o comportamento do material para um modelo de Burger. A ideia consta em realizar uma expansão em série das expressões (7.37) para que seja satisfeita a expressão (7.38) a curto $t = 0$ e longo $t = \infty$ tempo. Sendo assim, recorda-se da seguinte propriedade da transformada de Carson-Laplace:

$$\lim_{t \rightarrow 0} a(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} a^*(p) \quad ; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = \lim_{p \rightarrow 0} a^*(p) \quad (7.39)$$

Utilizando o desenvolvimento em séries de Q^* na vizinhança de $p = 0$, obtém-se:

$$Q^* = Q_0^0 + Q_1^0 p + O(p^2) \quad (7.40)$$

Com:

$$Q_0^0 = \frac{4 \pi k_{M,s}^v (3k_{M,s}^v + 4\mu_{M,s}^v)}{3 \pi \mu_{M,s}^v (3k_{M,s}^v + \mu_{M,s}^v) + a(3\mu_{M,s}^v k_{M,j}^v + 3k_{M,s}^v \mu_{M,j}^v + 4\mu_{M,s}^v \mu_{M,j}^v)} \quad (7.41a)$$

$$\begin{aligned}
Q_1^0 &= \frac{4 \pi k_{M,s}^v \left(\frac{P_1}{3} \mu_{K,s}^e \mu_{M,s}^e \mu_{M,j}^e (3k_{M,s}^v + 4\mu_{M,s}^v) P_2 + P_3 \right)}{k_{M,s}^e k_{K,s}^e \mu_{M,s}^e \mu_{K,s}^e k_{M,j}^e \mu_{M,j}^e (P_1)^2} \\
P_1 &= \left(3 \pi \mu_{M,s}^v (3k_{M,s}^v + \mu_{M,s}^v) + a (3k_{M,s}^v + 4\mu_{M,s}^v) (3k_{M,j}^v + 4\mu_{M,j}^v) \right) \\
P_2 &= \left(3k_{K,s}^e k_{M,s}^v k_{M,j}^e - 3k_{K,s}^e k_{M,s}^e k_{M,j}^v + 4k_{K,s}^e k_{M,s}^e \mu_{M,j}^v + 3k_{K,s}^e k_{M,s}^v k_{M,j}^e \right) \\
P_3 &= -3\pi k_{K,s}^e k_{M,j}^v k_{M,s}^e \mu_{K,s}^e \mu_{M,j}^e \mu_{M,s}^v (3k_{M,s}^v + 4\mu_{M,s}^v) (3k_{M,s}^v + \mu_{M,s}^v) \\
&\quad + \frac{4}{3} a k_{K,s}^e k_{M,s}^e \mu_{K,s}^e \mu_{M,j}^v \mu_{M,s}^v (3k_{M,s}^v + 4\mu_{M,s}^v) (3k_{M,j}^e + 4\mu_{M,j}^e) \\
&\quad + 36 \pi k_{K,s}^e k_{M,s}^e k_{M,s}^v \mu_{K,s}^e \mu_{M,j}^v \mu_{M,j}^e \mu_{M,s}^v \mu_{M,s}^v + 60 \pi k_{K,s}^e k_{M,s}^e k_{M,s}^v \mu_{K,s}^e \mu_{M,j}^e \mu_{M,j}^v \mu_{M,s}^e \mu_{M,s}^v \\
&\quad + 16 \pi k_{K,s}^e k_{M,s}^e \mu_{K,s}^e \mu_{M,j}^e \mu_{M,j}^v \mu_{M,s}^e \mu_{M,s}^v + 18 \pi k_{K,s}^e k_{M,j}^e k_{M,s}^e \mu_{M,j}^e (\mu_{K,s}^e + \mu_{M,s}^e) k_{M,s}^v \mu_{M,s}^v \\
&\quad + 12 \pi k_{K,s}^e k_{M,j}^e k_{M,s}^e \mu_{M,j}^e (\mu_{K,s}^e + \mu_{M,s}^e) \mu_{M,s}^v \\
&\quad + 27 \pi k_{M,j}^e \mu_{M,j}^e k_{M,s}^v \mu_{M,s}^v (k_{K,s}^e k_{M,s}^e \mu_{K,s}^e + k_{K,s}^e k_{M,s}^e \mu_{M,s}^e + k_{K,s}^e \mu_{K,s}^e \mu_{M,s}^e \\
&\quad + k_{M,s}^e \mu_{K,s}^e \mu_{M,s}^e)
\end{aligned} \tag{7.41b}$$

E o desenvolvimento em séries de Q^* na vizinhança de $p = \infty$, obtém-se:

$$Q^* = Q_0^\infty + \frac{Q_{-1}^\infty}{p} + o\left(\frac{1}{p^2}\right) \tag{7.42}$$

Com:

$$\begin{aligned}
Q_0^\infty &= \frac{4 \pi k_{M,s}^e (3k_{M,s}^e + 4\mu_{M,s}^e)}{3 \pi \mu_{M,s}^e (3k_{M,s}^e + \mu_{M,s}^e) + a (3k_{M,s}^e k_{M,j}^e + 12\mu_{M,s}^e k_{M,j}^e + 12k_{M,s}^e \mu_{M,j}^e + 16\mu_{M,s}^e \mu_{M,j}^e)} \\
Q_{-1}^\infty &= \frac{4 \pi k_{M,s}^e \left(\frac{P_1}{3} \mu_{K,s}^v \mu_{M,s}^v \mu_{M,j}^v (3k_{M,s}^e + 4\mu_{M,s}^e) P_2 + P_3 \right)}{k_{M,s}^v k_{K,s}^v \mu_{M,s}^v \mu_{K,s}^v k_{M,j}^v \mu_{M,j}^v (P_1)^2} \\
P_1 &= \left(3 \pi \mu_{M,s}^e (3k_{M,s}^e + \mu_{M,s}^e) + a (3k_{M,s}^e + 4\mu_{M,s}^e) (3k_{M,j}^e + 4\mu_{M,j}^e) \right) \\
P_2 &= \left(3k_{K,s}^v k_{M,s}^e k_{M,j}^v + 3k_{M,s}^v k_{M,s}^e k_{M,j}^v + 4k_{K,s}^v k_{M,s}^v \mu_{M,j}^e - 3k_{K,s}^v k_{M,s}^v k_{M,j}^e \right) \\
P_3 &= -\pi k_{K,s}^v k_{M,s}^v \mu_{K,s}^v \mu_{M,j}^v \mu_{M,s}^e \mu_{M,s}^e (3k_{M,s}^e + 4\mu_{M,s}^e) (3k_{M,s}^e + \mu_{M,s}^e) (3k_{M,j}^e - 4\mu_{M,j}^e) \\
&\quad + \frac{4}{3} a k_{K,s}^v k_{M,s}^v \mu_{K,s}^v \mu_{M,j}^e \mu_{M,s}^e (3k_{M,s}^e + 4\mu_{M,s}^e) (3k_{M,j}^v + 4\mu_{M,j}^v) \\
&\quad - 6 \pi k_{M,j}^v \mu_{M,j}^v \mu_{M,s}^e k_{K,s}^v k_{M,s}^v \mu_{M,s}^e (\mu_{M,s}^v + \mu_{K,s}^v) (3k_{M,s}^e + 2\mu_{M,s}^e) \\
&\quad - 27 \pi k_{M,j}^v \mu_{M,j}^v \mu_{M,s}^e k_{M,s}^v \mu_{M,s}^e (k_{K,s}^v \mu_{M,s}^v (k_{K,s}^v + k_{M,s}^v) + k_{M,s}^v k_{K,s}^v (\mu_{K,s}^v + \mu_{M,s}^v))
\end{aligned} \tag{7.43}$$

É necessário realizar este desenvolvimento em séries também para k_s^* , de forma que se obtém:

$$p = 0: \quad \frac{1}{k_s^*} = \frac{1}{p k_{M,s}^v} + \left(\frac{1}{k_{M,s}^e} + \frac{1}{k_{K,s}^e} \right) + O(p) \quad (7.44)$$

$$p = \infty: \quad \frac{1}{k_s^*} = \frac{1}{k_{M,s}^e} + \frac{1}{p} \left(\frac{1}{k_{M,s}^v} + \frac{1}{k_{K,s}^v} \right) + O\left(\frac{1}{p^2}\right)$$

Aplicando-se (7.41), (7.39) e (7.37) em (7.34) obtém-se a seguinte expressão:

$$p = 0: \quad \frac{1}{k_{ho}^*} = \frac{1 + \epsilon Q_0^0}{p k_{M,s}^v} + \left(\frac{\epsilon Q_1^0}{k_{M,s}^v} + (1 + \epsilon Q_0^0) \left(\frac{1}{k_{M,s}^e} + \frac{1}{k_{K,s}^e} \right) \right) + O(p) \quad (7.45)$$

$$p = \infty: \quad \frac{1}{k_{hom}^*} = \frac{1 + \epsilon Q_0^\infty}{k_{M,s}^e} + \frac{1}{p} \left((1 + \epsilon Q_0^\infty) \left(\frac{1}{k_{M,s}^v} + \frac{1}{k_{K,s}^v} \right) + \frac{\epsilon Q_{-1}^\infty}{k_{M,s}^e} \right) + O\left(\frac{1}{p^2}\right)$$

Para realizar a comparação com os parâmetros do modelo homogeneizado de Burger, torna-se necessário realizar esta expansão da expressão (7.38), tem-se então:

$$p = 0: \quad \frac{1}{k_{hom}^*} = \frac{1}{p k_{M,hom}^v} + \left(\frac{1}{k_{M,hom}^e} + \frac{1}{k_{K,hom}^e} \right) + O(p) \quad (7.46)$$

$$p = \infty: \quad \frac{1}{k_{hom}^*} = \frac{1}{k_{M,hom}^e} + \frac{1}{p} \left(\frac{1}{k_{M,hom}^v} + \frac{1}{k_{K,hom}^v} \right) + O\left(\frac{1}{p^2}\right)$$

Realizando-se a comparação entre as duas expressões acima, obtém-se os seguintes valores para os parâmetros homogeneizados:

$$\frac{1}{k_{M,hom}^e} = \frac{1 + \epsilon Q_M^e}{k_{M,s}^e} \quad ; \quad \frac{1}{k_{K,ho}^e} = \frac{1 + \epsilon Q_K^e}{k_{K,s}^e} \quad (7.47)$$

$$\frac{1}{k_{M,hom}^v} = \frac{1 + \epsilon Q_M^v}{k_{M,s}^v} \quad ; \quad \frac{1}{k_{K,hom}^v} = \frac{1 + \epsilon Q_K^v}{k_{K,s}^v}$$

Com:

$$Q_M^e = Q_0^\infty \quad ; \quad Q_M^v = Q_0^0 \quad (7.48)$$

$$Q_K^e = Q_0^0 + \frac{k_{K,S}^e}{k_{M,S}^v} Q_1^0 - \frac{k_{K,S}^e}{k_{M,S}^e} (Q_0^\infty - Q_0^0); \quad Q_K^v = Q_0^\infty + \frac{k_{K,S}^v}{k_{M,S}^e} Q_{-1}^\infty - \frac{k_{K,S}^v}{k_{M,S}^v} (Q_0^0 - Q_0^\infty)$$

Para ter uma caracterização completa do modelo homogeneizado de Burger, torna-se necessário estabelecer também os parâmetros de μ_{hom}^* , observando-se as expressões (6.34), μ_{hom}^* apresenta a seguinte forma:

$$\frac{1}{\mu_{hom}^*} = \frac{1}{\mu_s^*} + \frac{16 \pi \epsilon (3k_s^* + 4 \mu_s^*)}{5 \beta_1^*} \left(1 + \frac{2 a k_j^* (3k_s^* + 4 \mu_s^*) - 2 \pi \mu_s^{*2}}{\beta_3^*} \right) = \frac{1 + \epsilon M^*}{\mu_s^*} \quad (7.49)$$

$$M^* = \frac{16 \pi (3k_s^* + 4 \mu_s^*) \mu_s^*}{5 \beta_1^*} \left(1 + \frac{2 a k_j^* (3k_s^* + 4 \mu_s^*) - 2 \pi \mu_s^{*2}}{\beta_3^*} \right)$$

Onde os coeficientes k_s^* , μ_s^* , k_j^* , μ_j^* são dados, assumindo o modelo de Burger para a matriz e de Maxwell para as fraturas, na expressão (6.14) e o coeficiente β_1^* e β_3^* são dados na expressão (6.19). No entanto, para um material homogeneizado com o comportamento de Burger, dever-se-ia ter:

$$\frac{1}{\mu_{hom}^*} = \frac{1}{\mu_{M,hom}^e} + \frac{1}{p \mu_{M,hom}^v} + \frac{1}{\mu_{K,hom}^e + p \mu_{K,hom}^v} \quad (7.50)$$

Novamente não é possível satisfazer a expressão (5.85) em sua integral, desta forma, propõem-se aproximar o comportamento do material para um modelo de Burger. A ideia é realizar as mesmas expansões em séries realizadas anteriormente para que seja satisfeita a expressão (7.50) a curto $t = 0$ e longo $t = \infty$ tempo. Utilizando o desenvolvimento em séries de M^* na vizinhança de $p = 0$, obtém-se:

$$M^* = M_0^0 + M_1^0 p + O(p^2) \quad (7.51)$$

Com:

$$M_0^0 = \frac{16 \pi \mu_{M,S}^v (3k_{M,S}^v + 4\mu_{M,S}^v) P_3}{5 P_1 P_2} \quad (7.52a)$$

$$M_1^0 = -\frac{16}{5} \frac{\pi \mu_{M,S}^v P_5}{\mu_{K,S}^e \mu_{M,S}^e k_{K,S}^e k_{M,S}^e k_{M,j}^e \mu_{M,j}^e P_4^2 P_2^2}$$

$$\begin{aligned}
P_1 &= 3\pi\mu_{M,s}^v(3k_{M,s}^v + \mu_{M,s}^v) + a(k_{M,j}^v k_{M,s}^v + 12k_{M,j}^v \mu_{M,s}^v + 12\mu_{M,s}^v \mu_{M,j}^v + 16\mu_{M,s}^v \mu_{M,j}^v) \\
P_2 &= 3\pi\mu_{M,s}^v(3k_{M,s}^v + 2\mu_{M,s}^v) + 4a\mu_{M,j}^v(3k_{M,s}^v + 4\mu_{M,s}^v) \\
P_3 &= \pi\mu_{M,s}^v(9k_{M,s}^v + 4\mu_{M,s}^v) + 2a(3k_{M,s}^v + 4\mu_{M,s}^v)(k_{M,j}^v + 2\mu_{M,j}^v) \\
P_4 &= 3\pi\mu_{M,s}^v(3k_{M,s}^v + \mu_{M,s}^v) + a(3k_{M,s}^v + 4\mu_{M,s}^v)(k_{M,j}^v + 2\mu_{M,j}^v) \\
P_5 &= U_3 P_2^3 + U_2 P_2^2 + U_1 P_2 + U_0
\end{aligned} \tag{7.52b}$$

U_i presente no anexo A

E o desenvolvimento em séries de M^* na vizinhança de $p = \infty$, obtém-se:

$$M^* = M_0^\infty + \frac{M_{-1}^\infty}{p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right) \tag{7.53}$$

Com:

$$\begin{aligned}
M_0^\infty &= \frac{16\pi\mu_{M,s}^e(3k_{M,s}^e + 4\mu_{M,s}^e)P_3}{5P_1P_2} \\
M_{-1}^\infty &= \frac{16\pi\mu_{M,s}^e P_5}{5\mu_{K,s}^v \mu_{M,s}^v k_{K,s}^v k_{M,s}^v k_{M,j}^v \mu_{M,j}^v P_4^2 P_2^2} \\
P_1 &= 3\pi\mu_{M,s}^e(3k_{M,s}^e + \mu_{M,s}^e) + a(k_{M,j}^e k_{M,s}^e + 12k_{M,j}^e \mu_{M,s}^e + 12\mu_{M,s}^e \mu_{M,j}^e + 16\mu_{M,s}^e \mu_{M,j}^e) \\
P_2 &= 3\pi\mu_{M,s}^e(3k_{M,s}^e + 2\mu_{M,s}^e) + 4a\mu_{M,j}^e(3k_{M,s}^e + 4\mu_{M,s}^e) \\
P_3 &= \pi\mu_{M,s}^e(9k_{M,s}^e + 4\mu_{M,s}^e) + 2a(3k_{M,s}^e + 4\mu_{M,s}^e)(k_{M,j}^e + 2\mu_{M,j}^e) \\
P_4 &= 3\pi\mu_{M,s}^e(3k_{M,s}^e + \mu_{M,s}^e) + a(3k_{M,s}^e + 4\mu_{M,s}^e)(k_{M,j}^e + 2\mu_{M,j}^e) \\
P_5 &= U_3 P_2^3 + U_2 P_2^2 + U_1 P_2 + U_0
\end{aligned} \tag{7.54}$$

U_i presente no anexo B

É necessário realizar este desenvolvimento em séries também para k_s^* , de forma que obtém-se:

$$\begin{aligned}
p = 0: \quad \frac{1}{\mu_s^*} &= \frac{1}{p \mu_{M,s}^v} + \left(\frac{1}{\mu_{M,s}^e} + \frac{1}{\mu_{K,s}^e} \right) + O(p) \\
p = \infty: \quad \frac{1}{\mu_s^*} &= \frac{1}{\mu_{M,s}^e} + \frac{1}{p} \left(\frac{1}{\mu_{M,s}^v} + \frac{1}{\mu_{K,s}^v} \right) + O\left(\frac{1}{p^2}\right)
\end{aligned} \tag{7.55}$$

Aplicando-se (7.54), (7.52) e (7.50) em (7.48), obtém-se a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
p = 0: \quad \frac{1}{\mu_{hom}^*} &= \frac{1 + \epsilon M_0^0}{p \mu_{M,s}^v} + \left(\frac{\epsilon M_1^0}{\mu_{M,s}^v} + (1 + \epsilon M_0^0) \left(\frac{1}{\mu_{M,s}^e} + \frac{1}{\mu_{K,s}^e} \right) \right) + O(p) \\
p = \infty: \quad \frac{1}{\mu_{ho}^*} &= \frac{1 + \epsilon M_0^\infty}{\mu_{M,s}^e} + \frac{1}{p} \left((1 + \epsilon M_0^\infty) \left(\frac{1}{\mu_{M,s}^v} + \frac{1}{\mu_{K,s}^v} \right) + \frac{\epsilon M_{-1}^\infty}{\mu_{M,s}^e} \right) + O\left(\frac{1}{p^2}\right)
\end{aligned} \tag{7.56}$$

Para realizar a comparação com os parâmetros do modelo homogeneizado de Burger, torna-se necessário realizar esta expansão da expressão (7.49), tem-se então:

$$\begin{aligned}
p = 0: \quad \frac{1}{\mu_{hom}^*} &= \frac{1}{p \mu_{M,ho}^v} + \left(\frac{1}{\mu_{M,ho}^e} + \frac{1}{\mu_{K,ho}^e} \right) + O(p) \\
p = \infty: \quad \frac{1}{\mu_{hom}^*} &= \frac{1}{\mu_{M,ho}^e} + \frac{1}{p} \left(\frac{1}{\mu_{M,ho}^v} + \frac{1}{\mu_{K,ho}^v} \right) + O\left(\frac{1}{p^2}\right)
\end{aligned} \tag{7.57}$$

Realizando-se a comparação entre as duas expressões acima, obtém-se os seguintes valores para os parâmetros homogeneizados:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu_{M,ho}^e} &= \frac{1 + \epsilon M_M^e}{\mu_{M,s}^e} \quad ; \quad \frac{1}{\mu_{K,ho}^e} = \frac{1 + \epsilon M_K^e}{\mu_{K,s}^e} \\
\frac{1}{\mu_{M,ho}^v} &= \frac{1 + \epsilon M_M^v}{\mu_{M,s}^v} \quad ; \quad \frac{1}{\mu_{K,ho}^v} = \frac{1 + \epsilon M_K^v}{\mu_{K,s}^v}
\end{aligned} \tag{7.58}$$

Com:

$$M_M^e = M_0^\infty \quad ; \quad M_M^v = M_0^0 \tag{7.59}$$

$$M_K^e = M_0^0 + \frac{\mu_{K,s}^e}{\mu_{M,s}^v} M_1^0 - \frac{\mu_{K,s}^e}{\mu_{M,s}^e} (M_0^\infty - M_0^0); \quad M_K^v = M_0^\infty + \frac{\mu_{K,s}^v}{\mu_{M,s}^e} M_{-1}^\infty - \frac{\mu_{K,s}^v}{\mu_{M,s}^v} (M_0^0 - M_0^\infty)$$

Determinados todos os parâmetros de k_{hom}^* e μ_{hom}^* , pode-se escrever o tensor de relaxação como:

$$\mathbb{R}_{hom} = 3k_{hom}\mathbb{J} + 2\mu_{hom}\mathbb{K} \quad (7.60)$$

Com:

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_{hom}^*} &= \frac{1}{k_{M,hom}^e} + \frac{1}{p k_{M,hom}^v} + \frac{1}{k_{K,hom}^e + p k_{K,hom}^v} \\ \frac{1}{\mu_{hom}^*} &= \frac{1}{\mu_{M,hom}^e} + \frac{1}{p \mu_{M,hom}^v} + \frac{1}{\mu_{K,hom}^e + p \mu_{K,hom}^v} \end{aligned} \quad (7.61)$$

Para obter os coeficientes k_{hom} e μ_{ho} , basta realizar a inversa da transformada de Carson-Laplace na expressão (7.57)

7.3.2 Determinação da Energia Livre para o Modelo Homogeneizado de Burger

Retornando a energia livre para meios homogeneizados, sua expressão é dada por:

$$W^f = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^m \underline{\underline{\epsilon}}_n^e : \mathbb{C}_{hom}^n : \underline{\underline{\epsilon}}_n^e \quad (7.62)$$

Assumindo que o modelo homogeneizado é de Burger, tal como determinado na seção anterior, podemos reescrever a expressão da energia livre para a seguinte forma:

$$W^f = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\epsilon}}_M^e : \mathbb{C}_{M,hom}^e : \underline{\underline{\epsilon}}_M^e + \underline{\underline{\epsilon}}_K^e : \mathbb{C}_{K,hom}^e : \underline{\underline{\epsilon}}_K^e \right) \quad (7.63)$$

Onde $\underline{\underline{\epsilon}}_M^e$ e $\underline{\underline{\epsilon}}_K^e$ são as deformações atuantes nas molas de Maxwell e Kelvin e $\mathbb{C}_{M,hom}^e$ e $\mathbb{C}_{K,hom}^e$ foram determinados na seção anterior. A figura 7.7 apresenta o modelo de Burger Homogeneizado:

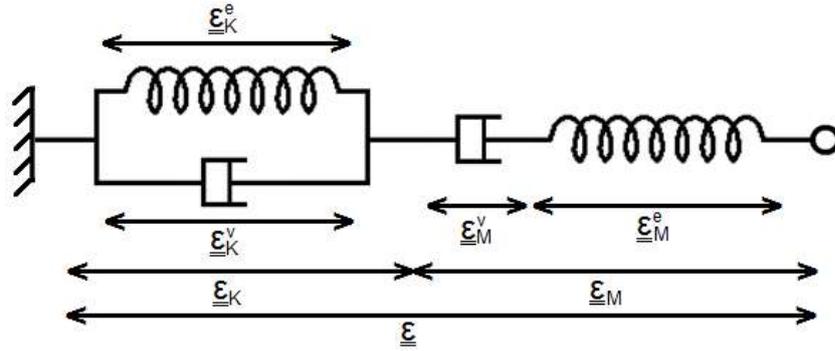


Figura 7.7: Modelo de Burger homogêneo

Percebe-se que para o presente modelo as seguintes relações são válidas:

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{\epsilon}}_M + \underline{\underline{\epsilon}}_K \quad ; \quad \underline{\underline{\epsilon}}_M = \underline{\underline{\epsilon}}_M^v + \underline{\underline{\epsilon}}_M^e \quad ; \quad \underline{\underline{\epsilon}}_K = \underline{\underline{\epsilon}}_K^v = \underline{\underline{\epsilon}}_K^e \quad (7.64)$$

A formulação específica desta energia é complexa no contexto tridimensional, portanto, é útil primeiramente ilustrar o raciocínio no caso unidimensional para, futuramente, estender ao caso tridimensional. Para o caso unidimensional, quando suposta uma sollicitação isótropa, ou seja $\underline{\underline{\epsilon}} = E \underline{\underline{1}}$ e $\underline{\underline{\Sigma}} = \Sigma \underline{\underline{1}}$, a expressão da energia livre reduz-se a:

$$W^f = \frac{1}{2} (E_M^{e2} C_{M,hom}^e + E_K^{e2} C_{K,hom}^e) \quad (7.65)$$

Onde E_M^e e E_K^e são as deformações características relativas aos tensores de deformações $\underline{\underline{\epsilon}}_M^e$ e $\underline{\underline{\epsilon}}_K^e$, e $C_{M,hom}^e$ e $C_{K,ho}^e$ são as rigidezes características associadas a estas deformações. Devido a isotropia macroscópica, a função de relaxação $R_{hom}(t)$, referida a seguir, representa a função de relaxação em compressão isótropa. Adotando-se a hipótese da decomposição da energia livre na parte instantânea e residual (viscoelástica), pode-se apresentar a energia livre através da seguinte expressão:

$$W^f = \frac{1}{2} R_{hom}^0 E^{e2} + W_{res} \quad (7.66)$$

Onde R_{hom}^0 é a função de relaxação instantânea do sistema e $E^e = E - E^v$ é a deformação instantânea observada logo após a aplicação de uma tensão. A função $R_{hom}(t)$ fica definida como:

$$\frac{1}{R_{hom}^*} = \frac{1}{C_{M,hom}^e} + \frac{1}{p C_{M,hom}^v} + \frac{1}{C_{K,hom}^e + p C_{K,hom}^v} \quad (7.67)$$

Torna-se necessário determinar a transformada inversa de $R^*(p)$ para obter $R(t)$. Sob estas definições, percebe-se que, para o modelo de Burger, $R_{hom}^0 = C_{M,hom}^e$ e que E_M^e tem a mesma definição que E^e , sendo a única deformação, em um sistema de Burger, que tem caráter instantâneo – as demais deformações são instantaneamente nulas. Desta forma, pode-se escrever:

$$W^f = \frac{1}{2} C_{M,hom}^e E_M^{e^2} + W_{res} \quad (7.68)$$

Comparando-se as expressões (7.66) e (7.68) chega-se a seguinte igualdade:

$$W_{res} = E_K^{e^2} C_{K,hom}^e \quad (7.69)$$

A energia livre fica definida em função das deformações de cada mola. As dificuldades provem do fato que as deformações de cada mola não são previamente conhecidas. É necessária a determinação prévia da relação entre as deformações nas molas do sistema com a deformação total. Esta relação é dada com base nas seguintes igualdades, válidas para um modelo de Burger:

$$\begin{aligned} E_K + E_M^e + E_M^v &= \epsilon \\ E_K^e &= E_K^v = E_K \\ \Sigma_K &= \Sigma_K^e + \Sigma_K^v = \Sigma_M^e = \Sigma_M^v = \Sigma = R_{hom} \otimes \epsilon = R_{hom}^0 \epsilon^e \end{aligned} \quad (7.70)$$

Onde Σ_α^β representa a tensão em um determinado elemento, caracterizado por α e β . Com base nesta igualdade, pode-se escrever:

$$\Sigma_M^e = C_{M,hom}^e E_M^e = R_{hom} \otimes E = R_{hom}^0 E + \int_0^t \frac{dR_{hom}}{d\tau} (t - \tau) E(\tau) d\tau \quad (7.71)$$

Onde R representa a função de relaxação do material de Burger. Obtém-se então, para o caso unidimensional a seguinte relação:

$$E_M^e = \frac{R_{hom}}{C_{M,hom}^e} \otimes E = \frac{R_{hom}^0}{C_{M,hom}^e} E + \frac{1}{C_{M,hom}^e} \int_0^t \frac{dR_{hom}}{d\tau} (t - \tau) E(\tau) d\tau \quad (7.72)$$

Fica definida, então, a relação entre E_M^e e E . Este procedimento pode tornar-se mais simples ao realizar algumas simplificações, dentre elas a deformação $E(t)$ é constante no tempo. Tem-se então:

$$E_M^e = \frac{R_{hom}(t)}{C_{M,hom}^e} E \quad (7.73)$$

Para a determinação de E_K^e usa-se a seguinte relação:

$$\Sigma_K^e + \Sigma_K^v = C_{K,hom}^e E_K^e + C_{K,hom}^v \dot{E}_K^v = \Sigma = R_{hom} \otimes E \quad (7.74)$$

Observando-se a expressão (7.66) percebe-se que é possível reescrever esta expressão como:

$$C_{K,hom}^e E_K^e + C_{K,hom}^v \dot{E}_K^e = R_{hom} \otimes E \quad (7.75)$$

Novamente, admitindo-se que a deformação $E(t)$ é constante no tempo escreve-se:

$$\dot{E}_K^e(t) = -\frac{C_{K,hom}^e}{C_{K,hom}^v} E_K^e(t) + \frac{R_{hom}(t)}{C_{K,hom}^v} E \quad (7.76)$$

Nota-se que a expressão acima é uma equação diferencial ordinária de 1ª ordem, a qual apresenta uma solução bem conhecida, com sua resposta dada pela seguinte expressão:

$$E_K^e(t) = \frac{E}{C_{K,hom}^v} e^{-\frac{C_{K,hom}^e}{C_{K,hom}^v} t} \int_0^t R_{hom}(t) e^{\frac{C_{K,hom}^e}{C_{K,hom}^v} t} dt \quad (7.77)$$

Aplicando-se as expressões (7.74) e (7.76) na expressão da energia livre (7.68) obtém-se:

$$W^f = \frac{1}{2} \frac{R_{hom}(t)^2}{C_{M,hom}^e} E^2 + \frac{C_{K,hom}^e}{C_{K,hom}^v} e^{-2\frac{C_{K,hom}^e}{C_{K,hom}^v} t} \left(\int_0^t R_{hom}(t) e^{\frac{C_{K,hom}^e}{C_{K,hom}^v} t} dt \right)^2 E^2 \quad (7.78)$$

7.3.3 Aplicação da Energia Livre para Modelos Homogeneizados

A utilização da energia livre apresentada na expressão (7.78) demanda da definição da função de relaxação $R_{hom}(t)$. Percebe-se, entretanto, que existem duas possibilidades, a primeira é adotar a função de relaxação do modelo homogeneizado de Burger, a qual resulta em uma expressão mais simples. A segunda opção consiste em utilizar a função de relaxação plena. Desta forma, a presente seção será dividida em dois, apresentando ambas as abordagens.

7.3.3.1 Aplicação da Energia Livre: Modelo Homogeneizado de Burger

Adota-se a função de relaxação $R(t)$ do modelo de Burger homogeneizado, a qual foi expressa na expressão (7.67). Realizando-se a inversa da transformada de Carson-Laplace da expressão (7.67) utilizando o software Maple®, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 R(t) &= C_{M,hom}^e e^{-Xt} \left(\cosh \left(\frac{t Y}{2C_{K,hom}^v C_{M,hom}^v} \right) + \frac{Z}{Y} \sinh \left(\frac{t Y}{2C_{K,hom}^v C_{M,hom}^v} \right) \right) \\
 X &= \frac{1}{2} \frac{(C_{K,hom}^e C_{M,hom}^v + C_{K,ho}^v C_{M,hom}^e + C_{M,ho}^e C_{M,hom}^v)}{C_{M,hom}^v C_{K,ho}^v} \\
 Y^2 &= Z^2 + 4 C_{K,ho}^e C_{M,ho}^e C_{M,hom}^v{}^2 \\
 Z &= (C_{K,hom}^e C_{M,hom}^v - C_{K,hom}^v C_{M,hom}^e - C_{M,hom}^e C_{M,hom}^v)
 \end{aligned} \tag{7.79}$$

Recorda-se, contudo, das seguintes propriedades de $\cosh(bt)$ e $\sinh(bt)$:

$$\begin{aligned}
 \cosh(bt) &= \frac{e^{bt} + e^{-bt}}{2} \\
 \sinh(bt) &= \frac{e^{bt} - e^{-bt}}{2}
 \end{aligned} \tag{7.80}$$

Desta forma a expressão (7.78) transforma-se em:

$$R(t) = \frac{C_{M,hom}^e}{2} \left(e^{\left(\frac{Y}{2C_{K,hom}^v C_{M,hom}^v} - X \right) t} \left(1 + \frac{Z}{Y} \right) + e^{\left(-\frac{t Y}{2C_{K,hom}^v C_{M,ho}^v} - X \right) t} \left(1 - \frac{Z}{Y} \right) \right) \tag{7.81}$$

Observa-se que $R_{hom}(t)$ pode ser escrito na seguinte forma:

$$R(t) = a_1 e^{-b_1 t} + a_2 e^{-b_2 t} \quad (7.82)$$

com

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{C_{M,hom}^e}{2} \left(1 + \frac{Z}{Y} \right) \\ b_1 &= -\frac{Y}{2C_{K,hom}^v C_{M,hom}^v} + X \\ a_2 &= \frac{C_{M,ho}^e}{2} \left(1 - \frac{Z}{Y} \right) \\ b_2 &= \frac{Y}{2C_{K,hom}^v C_{M,hom}^v} + X \end{aligned} \quad (7.83)$$

Desta forma, é possível simplificar a integral na expressão (7.78):

$$\int_0^t R_{ho}(t) e^{\frac{C_{K,hom}^e}{C_{K,hom}^v} t} dt = a_1 \int_0^t e^{\left(\frac{C_{K,hom}^e}{C_{K,hom}^v} - b_1\right)t} dt + a_2 \int_0^t e^{\left(\frac{C_{K,hom}^e}{C_{K,hom}^v} - b_2\right)t} dt \quad (7.84)$$

Resolvendo-se a integral obtém-se:

$$\int_0^t R_{hom}(t) e^{\frac{C_{K,hom}^e}{C_{K,hom}^v} t} dt = \frac{a_1 C_{K,hom}^v}{C_{K,hom}^e - b_1 C_{K,hom}^v} e^{\left(\frac{C_{K,hom}^e}{C_{K,hom}^v} - b_1\right)t} + \frac{a_2 C_{K,hom}^v}{C_{K,hom}^e - b_2 C_{K,hom}^v} e^{\left(\frac{C_{K,hom}^e}{C_{K,hom}^v} - b_2\right)t} \quad (7.85)$$

Pode-se, então, reescrever a energia livre da expressão (7.78) como:

$$W^e = \frac{1}{2} \frac{R_{hom}(t)^2}{C_{M,hom}^e} E^2 + C_{K,hom}^e \left(\frac{a_1}{C_{K,hom}^e - b_1 C_{K,hom}^v} e^{-b_1 t} + \frac{a_2}{C_{K,hom}^e - b_2 C_{K,hom}^v} e^{-b_2 t} \right)^2 E^2 \quad (7.86)$$

É, então, possível definir as seguintes relações:

$$\begin{aligned} W_{inst} &= \frac{1}{2} \frac{R_{hom}(t)^2}{C_{M,hom}^e} E^2 \\ W_{res} &= C_{K,ho}^e \left(\frac{a_1}{C_{K,hom}^e - b_1 C_{K,hom}^v} e^{-b_1 t} + \frac{a_2}{C_{K,hom}^e - b_2 C_{K,hom}^v} e^{-b_2 t} \right)^2 E^2 \end{aligned} \quad (7.87)$$

Para resolver a expressão da energia livre, é necessário admitir alguns valores para $C_{\alpha, hom}^{\beta}$ e, conseqüentemente, definir $R_{ho}(t)$. Na seção anterior determinou-se o modelo equivalente de Burger, encontrando k_{ho} e μ_{hom} . É intuitivo que aquele modelo também seja aplicável ao caso unidimensional, desta forma tem-se:

$$\frac{1}{C_{M,ho}^e} = \frac{1 + \epsilon T_M^e}{C_{M,s}^e} ; \quad \frac{1}{C_{K,hom}^e} = \frac{1 + \epsilon T_K^e}{C_{K,s}^e} \quad (7.88)$$

$$\frac{1}{C_{M,hom}^v} = \frac{1 + \epsilon T_M^v}{C_{M,s}^v} ; \quad \frac{1}{C_{K,hom}^v} = \frac{1 + \epsilon T_K^v}{C_{K,s}^v}$$

Com:

$$T_M^e = T_0^\infty ; \quad T_M^v = T_0^0 \quad (7.89)$$

$$T_K^e = T_0^0 + \frac{C_{K,s}^e}{C_{M,s}^e} T_1^0 - \frac{C_{K,s}^e}{C_{M,s}^e} (T_0^\infty - T_0^0) ; \quad T_K^v = T_0^\infty + \frac{C_{K,s}^v}{C_{M,s}^v} T_{-1}^\infty - \frac{C_{K,s}^v}{C_{M,s}^v} (T_0^0 - T_0^\infty)$$

Percebe-se que para uma sollicitação isotrópica, tal como mencionado no início desta aplicação, os elementos de rigidez $C_{\alpha,ho}^{\beta}$ são relacionados com $k_{\alpha,hom}^{\beta}$ através das seguintes expressões:

$$C_{M,hom}^e = k_{M,hom}^e ; C_{K,hom}^e = k_{K,hom}^e ; C_{M,hom}^v = k_{M,hom}^v ; C_{K,hom}^v = k_{K,hom}^v \quad (7.90)$$

Com base nas expressões em (7.90), pode-se reescrever as expressões (7.88) com base em parâmetros do modelo de Burger já estabelecido:

$$\frac{1}{C_{M,hom}^e} = \frac{1 + \epsilon Q_M^e}{k_{M,s}^e} ; \quad \frac{1}{C_{K,hom}^e} = \frac{1 + \epsilon Q_K^e}{k_{K,s}^e} \quad (7.91)$$

$$\frac{1}{C_{M,hom}^v} = \frac{1 + \epsilon Q_M^v}{k_{M,s}^v} ; \quad \frac{1}{C_{K,hom}^v} = \frac{1 + \epsilon Q_K^v}{k_{K,s}^v}$$

Onde os parâmetros Q_{α}^{β} são determinados na expressão (7.47). A energia livre resume-se a:

$$W^f = W_{inst} + W_{res} ; \quad W_{inst} = \frac{1 + \epsilon Q_M^e}{2k_{M,s}^e} (a_1 e^{-b_1 t} + a_2 e^{-b_2 t})^2 E^2 \quad (7.92a)$$

$$W_{res} = \frac{k_{K,s}^e}{1 + \epsilon Q_K^e} \left(\frac{a_1}{\frac{k_{K,s}^e}{1 + \epsilon Q_K^e} - b_1} \frac{k_{K,s}^v}{1 + \epsilon Q_K^v} e^{-b_1 t} + \frac{a_2}{\frac{k_{K,s}^e}{1 + \epsilon Q_K^e} - b_2} \frac{k_{K,s}^v}{1 + \epsilon Q_K^v} e^{-b_2 t} \right)^2 E^2 \quad (7.92b)$$

Com

$$a_1 = \frac{1}{2} \frac{k_{M,s}^e}{(1 + \epsilon Q_M^e)} \left(1 + \frac{Z}{Y} \right) \quad ; \quad b_1 = -\frac{Y (1 + \epsilon Q_K^v)(1 + \epsilon Q_M^v)}{2k_{K,s}^v k_{M,s}^v} + X$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \frac{k_{M,s}^e}{(1 + \epsilon Q_M^e)} \left(1 - \frac{Z}{Y} \right) \quad ; \quad b_2 = \frac{Y (1 + \epsilon Q_K^v)(1 + \epsilon Q_M^v)}{2k_{K,s}^v k_{M,s}^v} + X$$

$$X = \frac{1}{2} \left(\frac{k_{K,s}^e (1 + \epsilon Q_K^v)}{k_{K,s}^v (1 + \epsilon Q_K^e)} + \frac{k_{M,s}^e (1 + \epsilon Q_M^v)}{k_{M,s}^v (1 + \epsilon Q_M^e)} + \frac{k_{M,s}^e (1 + \epsilon Q_K^v)}{k_{K,s}^v (1 + \epsilon Q_M^e)} \right) \quad (7.93)$$

$$Y^2 = Z^2 + \frac{4k_{K,s}^e k_{M,s}^e k_{M,s}^v{}^2}{(1 + \epsilon Q_K^e)(1 + \epsilon Q_M^e)(1 + \epsilon Q_M^v)^2}$$

$$Z = \frac{k_{K,s}^e k_{M,s}^v}{(1 + \epsilon Q_K^e)(1 + \epsilon Q_M^v)} - \frac{k_{K,s}^v k_{M,s}^e}{(1 + \epsilon Q_K^v)(1 + \epsilon Q_M^e)} - \frac{k_{M,s}^e k_{M,s}^v}{(1 + \epsilon Q_M^e)(1 + \epsilon Q_M^v)}$$

Por fim, pode-se aplicar valores numéricos aos parâmetros da expressão (7.92). A tabela 7.1 apresenta valores numéricos para os parâmetros solicitados, os quais são idênticos aos apresentados na aplicação 2:

$k_{K,s}^e$	$9,7 \cdot 10^9$ Pa	$\mu_{K,s}^e$	$7,3 \cdot 10^9$ Pa
$k_{K,s}^v$	$95,0 \cdot 10^{18}$ Pa.s	$\mu_{K,s}^v$	$71,3 \cdot 10^{18}$ Pa.s
$k_{M,s}^e$	$11,4 \cdot 10^9$ Pa	$\mu_{M,s}^e$	$8,5 \cdot 10^9$ Pa
$k_{M,s}^v$	$9000 \cdot 10^{18}$ Pa	$\mu_{M,s}^v$	$6750 \cdot 10^{18}$ Pa.s
$k_{M,j}^e$	$2,3 \cdot 10^9$ Pa/m	$\mu_{M,j}^e$	$2,0 \cdot 10^9$ Pa/m
$k_{M,j}^v$	$25 \cdot 10^{18}$ Pa/m	$\mu_{M,j}^v$	$18 \cdot 10^{18}$ Pa/m

Tabela 7.1: Valores para os parâmetros do modelo assumido

Para estes parâmetros, as energias livre, residual e instantânea são representadas graficamente na figura 7.8:

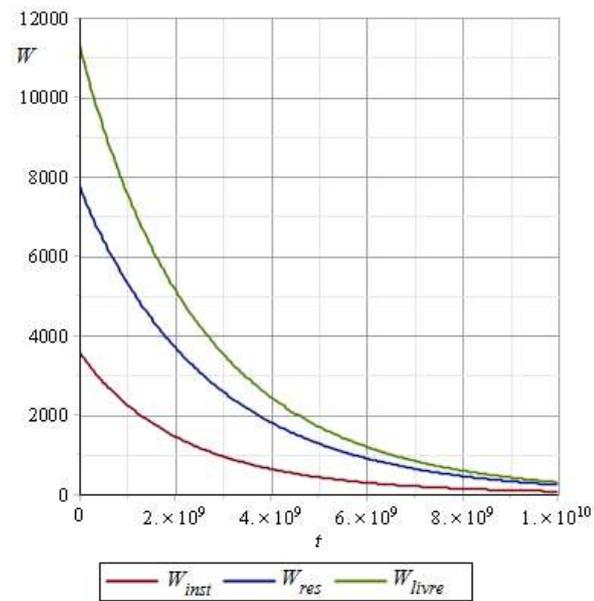


Figura 7.8: Evolução temporal das energias no material
(Obtido com $\epsilon = 0,25$ e $E = 10^{-3}$)

Observa-se que, diferentemente do esperado, a energia residual iniciou em um valor não nulo. Este comportamento claramente não é físico, pois a energia instantânea deveria corresponder a toda energia livre no instante inicial da aplicação da carga. Percebe-se que estes resultados foram obtidos ao adotar o tensor de relaxação proveniente do modelo homogeneizado de Burger.

7.3.3.2 Aplicação da Energia Livre: Modelo Homogeneizado de Pleno

Uma forma de melhorar o resultado obtido consiste em admitir a função de relaxação do modelo homogeneizado pleno, tal como se obteve na seção 6.3, para um modelo de Burger para a matriz e de Maxwell para as fraturas. Basicamente considera-se o mesmo tensor de relaxação determinado na aplicação 2. Tem-se então a seguinte expressão que representa a função de relaxação em compressão isótropa de forma simplificada:

$$R_{hom}(t) = \sum_{i=0}^k x_i e^{-y_i t} \quad (7.94)$$

Onde k é o grau dos polinômios $A(p)$ e $B(p)$ apresentados na seção 6.1.1 para a aplicação 2. Os coeficientes x_i e y_i devem ser determinados comparando-se a expressão (7.94) com a função de relaxação em compressão isótropa $R_{hom}(t)$ no espaço de tempo real. Observa-se que as

expressões são demasiadamente grandes e, portanto, não são apresentadas, além disso, a expressão (7.94) apenas é apresentada sob caráter visual, pois os cálculos realizados utilizam diretamente a função $R_{hom}(t)$.

Para a determinação da energia livre, admite-se que o modelo homogeneizado de Burger é verdadeiro. Como este comportamento é próximo do real, não devem existir grandes diferenças no resultado final. Desta forma a energia livre fica representada por:

$$W^f = \frac{1}{2} C_{M,hom}^e E_M^2 + E_K^2 C_{K,hom}^e \quad (7.95)$$

Substituindo as expressões determinadas anteriormente para as deformações nas molas, obtém-se a mesma expressão que (7.78):

$$W^f = \frac{1}{2} \frac{R(t)^2}{C_{M,hom}^e} E^2 + \frac{C_{K,hom}^e}{C_{K,hom}^v} e^{-2 \frac{C_{K,hom}^e}{C_{K,hom}^v} t} \left(\int_0^t R_{hom}(t) e^{\frac{C_{K,hom}^e}{C_{K,hom}^v} t} dt \right)^2 E^2 \quad (7.96)$$

A diferença agora consiste no modo com que esta expressão será solucionada, visto que se utiliza diretamente o tensor $R_{hom}(t)$. No entanto, para os termos em C_α^β continuam válidas as expressões (7.93). Assim, a expressão das energias torna-se:

$$W_{ins} = \frac{1}{2} \frac{R_{hom}(t)^2}{k_{M,s}^e} (1 + \epsilon Q_M^e) E^2$$

$$W_{res} = \frac{k_{K,s}^e (1 + \epsilon Q_K^v)^2}{k_{K,s}^v (1 + \epsilon Q_K^e)} e^{-2 \frac{k_{K,s}^e (1 + \epsilon Q_K^v)}{k_{K,s}^v (1 + \epsilon Q_K^e)} t} \left(\int_0^t R_{ho} (t) e^{\frac{k_{K,s}^e (1 + \epsilon Q_K^v)}{k_{K,s}^v (1 + \epsilon Q_K^e)} t} dt \right)^2 E^2 \quad (7.97)$$

$$W^f = W_{ins} + W_{res}$$

Para continuar a aplicação faz-se uma ressalva, o procedimento de cálculo torna-se muito pesado de ser realizado ao admitir o parâmetro de dano como uma variável, portanto foi arbitrado que $\epsilon = 0,25$. Resolvendo-se as expressões das energias em (7.96) para uma deformação $E = 10^{-3}$ obtém-se o seguinte gráfico para as energias:

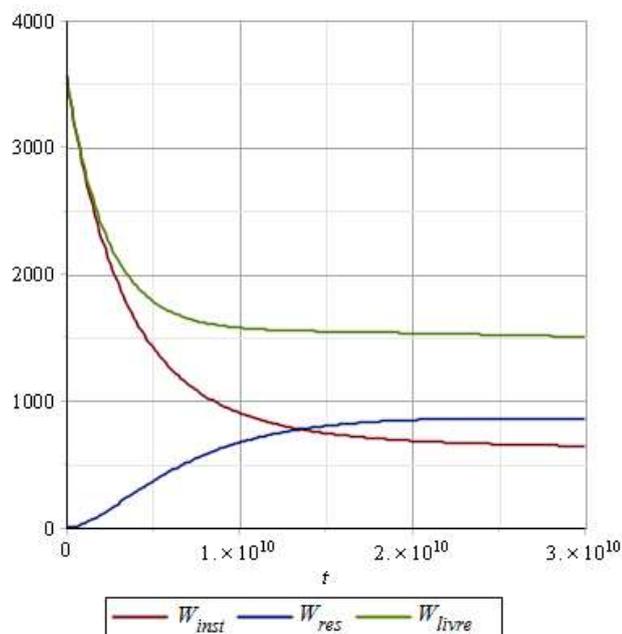


Figura 7.9: Evolução temporal das energias no material
(Obtido com $\epsilon = 0,25$ e $E = 10^{-3}$)

Na figura 7.9 as energias estão coerentes com valores esperados, pode-se observar que a energia residual inicia em zero e cresce até um patamar quase constante (quase constante devido ao fato de o modelo adotado ser Burger, de forma que a longo prazo a energia tende a se anular, mas apenas para um tempo muito grande $t \sim 10^{15}$). Observa-se que a energia elástica começa no valor máximo da energia e decresce até atingir um patamar quase constante. Este patamar existe pois as molas do modelo de Burger sempre estarão solicitadas, mesmo que a deformação nelas diminua com o tempo. Percebe-se que a energia elástica é idêntica a aquela obtida quando adotou-se $R_{hom}(t)$ como Burger Homogêneo o que indica que este valor está correto, no entanto a energia residual foi bem diferente. Provavelmente o modelo de Burger aproximado para $R_{hom}(t)$ não é suficiente para contemplar as sutilezas para a energia livre.

Nota-se, também, uma boa relação entre a figura 7.9 e 7.6, esta relação pode ser reforçada verificando-se a expressão da energia livre (7.97), percebe-se que, para deformações constantes no tempo, a energia é uma soma de termos exponenciais semelhante a seguinte forma:

$$W^f = W_{ins} + W_{res} = \sum_i a_i e^{-b_i t} \quad (7.98)$$

Onde os coeficientes a_i e b_i são dependentes do parâmetro de dano ϵ . No entanto, derivar a expressão (7.98) em relação à ϵ fornece a seguinte expressão:

$$-\mathcal{F} = \frac{\partial W^f}{\partial \epsilon} = \sum_i \frac{\partial a_i}{\partial \epsilon} e^{-b_i t} + \sum_i a_i \frac{\partial e^{-b_i t}}{\partial \epsilon} = \sum_i \left(\frac{\partial a_i}{\partial \epsilon} - \frac{a_i}{b_i} \right) e^{-b_i t} \quad (7.99)$$

Observa-se que a força termodinâmica \mathcal{F} deve assumir um caráter exponencial com o mesmo decaimento que a energia livre, diferindo apenas em sua intensidade. Esta relação explica a semelhança de forma entre as duas figuras apresentadas (a figura 7.6, entretanto, assume os valores de R_{1111} , de forma que considera também o módulo de cisalhamento, mas na seção 6.3 demonstrou-se que o módulo de cisalhamento pode ser expresso em termos do módulo de compressão e de um coeficiente de Poisson constante e, desta forma, o tempo característico é o mesmo).

Para a determinação da condição de propagação é necessário determinar a força termodinâmica \mathcal{F} , a qual é a derivada da energia livre em relação ao parâmetro de dano. Existe, no entanto, algumas complicações, quando adotou-se a função de relaxação proveniente do modelo de Burger homogeneizado, os resultados não foram satisfatórios e, então, utilizá-los conduziria a condição de propagação também insatisfatória. No entanto, para aplicação onde $R(t)$ é o mesmo da aplicação 2, foi necessário estabelecer um parâmetro de dano pois de outra forma seria necessário determinar as raízes de um polinômio de grau maior que 4 analiticamente, o que não é possível. Sendo assim não é possível derivar analiticamente a energia livre e, portanto, não é possível obter a condição de propagação.

Sugere-se, para trabalhos futuros, recalcular a aplicação com o modelo de Burger homogeneizado para verificar se não houveram erros numéricos no procedimento e verificar se o procedimento utilizando o modelo reológico pleno não pode ser realizado resolvendo-se numericamente apenas as raízes do polinômio e mantendo o restante do procedimento inalterado, desta forma a energia será função do parâmetro de dano.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS E SUGESTÕES PARA OUTROS TRABALHOS

Neste trabalho, foram abordadas questões inéditas relacionadas com a determinação do tensor de relaxação para um material viscoelástico fraturado e a caracterização reológica do mesmo. Este trabalho foi inspirado pelos resultados obtidos por Nguyen (2011) e Maghous et al. (2013), e teve como finalidade ampliar os resultados obtidos por Nguyen para propagação de fissuras em meios viscoelásticos, adicionando os esforços provenientes das interfaces das fraturas apresentadas por Maghous et al (2013).

Primeiramente, determinou-se o tensor de rigidez de um meio elástico fraturado, admitindo que as fraturas apresentam comportamento mecânico elástico. Estes resultados já haviam sido obtidos por Lorenci (2013) e são de elevada importância ao logo deste trabalho.

Em uma segunda etapa, formulou-se os critérios para a não propagação das fraturas em meios elásticos. Diferentemente de critérios anteriores, tal como aquele formulado por Griffith, os critérios apresentados admitem um comportamento mecânico para as fraturas. Desta forma, a condição de não propagação passa a depender dos parâmetros admitidos para as fraturas. As condições de não propagação propostas neste trabalho foram obtidas utilizando o tensor de rigidez obtido para o meio elástico fraturado homogeneizado.

O raciocínio micromecânico mostra que a densidade de fraturas introduzido por Budiansky e O'Connell (1976) tem um papel similar ao parâmetro de dano classicamente introduzido na abordagem macroscópica de dano crítico. Um raciocínio combinando argumentos termodinâmicos clássicos e abordagens micromecânicas permitem formular um critério para propagação de fraturas a partir da força termodinâmica responsável pela evolução do parâmetro de fraturação.

Tratando-se da viscoelasticidade, utilizou-se as estimativas de Eshelby para determinar os tensores de relaxação e de fluência homogeneizados de um meio viscoelástico fraturado. Utilizando-se as expressões resultantes, verifica-se que tanto a matriz quanto as fraturas podem apresentar um determinado comportamento viscoelástico. Com base nas mesmas expressões,

nota-se que os modelos para a matriz e para as fraturas podem, inclusive, diferir entre si, o que possibilita uma modelagem mais precisa de fenômenos mecânicos. Os resultados obtidos apresentam curvas cuja forma assemelha-se às obtidas para materiais não fraturados, no entanto, a intensidade dos fenômenos modifica-se com a admissão das fraturas.

Uma vez que as expressões obtidas, para os tensores viscoelásticos homogeneizados, dependem dos modelos reológicos utilizados para a matriz e para as fraturas, determinou-se um modelo reológico baseado em elementos mais simples que descreve o comportamento dos tensores homogeneizados. Este modelo reológico obtido é formado por submodelos, os quais são dependentes dos modelos reológicos adotados para a matriz e para as fraturas. Este modelo reológico homogeneizado foi obtido exclusivamente para materiais com distribuição aleatória de fraturas pois, para esta distribuição, o modelo resultante ainda é isotrópico.

Baseando-se nos resultados obtidos por Nguyen (2011) formulou-se as expressões de propagação de fraturas aplicadas aos materiais viscoelásticos fraturados utilizados neste trabalho. Apresentaram-se então algumas aplicações simples, nas quais foi possível estabelecer um resultado. Nguyen (2011) estudou a propagação de fissuras em meios viscoelásticos heterogêneos e constatou que a energia residual do problema deve ser avaliada numericamente pois apenas em casos muito simples é possível obtê-la analiticamente.

Por fim, não foi possível obter a condição de propagação admitindo um modelo homogeneizado de Burger. Foram constatados alguns erros ao realizar uma primeira aplicação na determinação da energia livre e, em uma segunda aplicação, a energia livre foi determinada para um parâmetro de dano estabelecido, o que impediria sua utilização para o cálculo da condição de propagação. Sugere-se então revisar a primeira aplicação para corrigir o erro e, na segunda aplicação, usar uma função de relaxação dependente da variável parâmetro de dano. Estas duas aplicações podem ser utilizadas para determinar a condição de propagação.

Sugere-se, para trabalhos futuros, determinar um modelo reológico cujos parâmetros dependam da orientação das fraturas, o que conduz a um modelo não isotrópico. Um modelo como esse tornar-se-ia geral e aplicável a qualquer geomaterial fraturado.

Aplicar as leis da poromecânica aos materiais viscoelásticos fraturados pode conduzir os resultados estabelecidos a análises mais completas, admitindo a existência de fluidos no interior das fraturas. Além disso, a admissão da variação das propriedades viscoelásticas do material

segundo a variação da temperatura afeta diretamente os resultados obtidos, tratando-se de uma análise mais adequada em diversas situações, tal como camadas rochosas profundas.

Uma vez que não foi possível realizar aplicações da propagação de fraturas em meios homogêneos de forma analítica sugere-se realizá-la através de um dos seguintes procedimentos. O primeiro consiste em determinar a derivada da energia livre de forma numérica, estabelecendo a energia livre para diversos parâmetros de dano. O segundo procedimento consiste em resolver numericamente apenas aquelas partes do problema que não podem ser resolvidas analiticamente e verificar se existe interferência no resultado final, caso seja possível ainda existirá dependência da energia livre com o parâmetro de dano e , portanto, poderá ser obtida a condição de propagação.

Uma vez que a maior parte das aplicações em engenharia é realizada de forma numérica, é fundamental reescrever as expressões da condição de propagação para materiais viscoelásticos fraturados de forma a possibilitar a implementação em softwares de elementos finitos.

Outra perspectiva que se tem em relação a trabalhos futuros recai sobre o fechamento de fraturas. Quando fraturas são submetidas a compressão, ocorre o fechamento das fraturas, este fechamento deve estar associado a um critério de fechamento de fraturas, o qual não foi apresentado neste trabalho. Propor um critério de fechamento para as fraturas em materiais elásticos e viscoelásticos é fundamental para a modelagem completa de estruturas.

Por fim, é fundamental obter a taxa de variação temporal do parâmetro de dano para meios elásticos fraturados e viscoelásticos fraturados. Esta ferramenta possibilitará a análise temporal da propagação, permitindo evoluir o parâmetro de dano e , conseqüentemente, as grandezas associadas a ele. Desta forma será possível realizar uma análise com um determinado parâmetro de dano e finalizá-la com um parâmetro de dano diferente.

REFERÊNCIAS

- ADVANI, S. G.; TUCKER III, C. L. **The use of tensors to describe and predict fiber orientation in short fiber composites.** *Journal of rheology*. Urbana, US. v. 31, p. 751-784, 1987. Disponível em: <
<http://scitation.aip.org/content/sor/journal/jor2/31/8/10.1122/1.549945>>. Acesso em: 21 ago 2015
- ATTA, A. **Analyse par homogénéisation élastoplastique des ouvrages em milieux rocheux fracturés**, 2004. 140 f. Tese (Docteur Spécialisé en Structures et Matériels) – L'École Nationale des Ponts et Chaussées, cidade Champs-sur-Marne, FR, 2004.
- BANDIS, S. C.; LUMSDEN, A. C.; BARTON, N. R. **Fundamentals of rock joint deformation.** *International journal of rock mechanics and mining sciences. s. l.* v 20, n. 6, p. 249-268, 1983. Disponível em: <
<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0148906283905958>>. Acesso em: 21 ago 2015
- BARTHÉLÉMY, J. F. **Approche micromécanique de la rupture et de la fissuration dans les géomatériaux.** 2005. 271 f. Tese (Docteur Spécialisé en Structures et Matériels) – L'École Nationale des Ponts et Chaussées, cidade Champs-sur-Marne, FR, 2005
- BARTON, N. **Review of a new shear strength criterion for rock joints.** *Engineering Geology*, Elsevier, Amsterdam, v. 7, p. 287-332, 1973
- BARTON, N.; LIEN, R.; LUNDE, J. **Engineering classification of rock masses for the design of tunnel support.** *Rock mechanics, s. l.*, v. 6, n.4, p. 189-236, dez. 1974. Disponível em: <
http://link.springer.com/article/10.1007%2F978-3-70-901239-4_6>. Acesso em: 21 ago 2015
- BIENIAWSKI, Z. T. **Stability concept of brittle fracture propagation in rock.** *Engineering Geology, s. l.*, v. 2, n. 3, p 149-162, dez. 1967. Disponível em:
 <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0013795267900142>>. Acesso em: 21 ago 2015
- BIENIAWSKI, Z. T. **Estimating the strength of rock materials.** *Journal of the South African Institute of Mining and Metallurgy*, v. 74, n. 8, p. 312-320, 1974
- BIENIAWSKI, Z. T. **Determining rock mass deformability: experience from case histories.** *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts, s. l.*, v. 2, n. 8, p 237-247, out. 1978 Disponível em: <
<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0148906278909567>>. Acesso em: 07 jan 2016
- BIENIAWSKI, Z. T. **Engineering rock mass classification: a complete manual for engineers and geologists in mining, civil and petroleum engineering.** 1. ed. New York: John Wiley & Sons, 1989. 251 p.

BLAND, D. R. **The theory of linear viscoelasticity**. Pergamon Press, Oxford, 1960. 125 p.

BUDIANSKY, B.; O'CONNELL, R. J. **Elastic moduli of a cracked solid**. *International Journal of Solids Structures*, Pergamon Press, GB, v. 12, p. 81-97, 1976.

DEERE, D. U.; DEERE, D. W. **The rock quality designation (RQD) index in practice**. *Rock classification system for engineering purposes, ASTM STP 984*. American Society for Testing and Materials, Philadelphia, p 91-101, 188

DORMIEUX, L.; KONDO, D.; ULM, F. **A micromechanical analysis of damage propagation in fluid-saturated cracked media**. *Comptes rendus mécanique, s. l.*, v. 334, n. 7, p 440-446, jul. 2006a. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1631072106000891>>. Acesso em: 21 ago 2015

DORMIEUX, L.; KONDO, D.; ULM, F. **Microporomechanics**. 1. ed. West Sussex, UK: John Wiley & Sons, 2006b. 328 p.

DORMIEUX, L.; MOLINARI, A.; KONDO, D. **Micromechanical approach to the behavior of poroelastic materials**. *Journal of the mechanics and physics of solids. s. l.* v 50, n. 10, p. 2204-2231, out. 2002. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S002250960200008X>>. Acesso em: 21 ago 2015

DORMIEUX, L.; ULM, F. **Applied micromechanics of porous materials**. Udine, IT: CISM, 2005. 331 p.

ESHELBY, J. D. **The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems**. *Proceeding of the royal society of London*, vol A 241, p. 376-396, 1957

FARMER, I. W. **Engineering properties of rocks**. *Spon Editors*, London, 1998. 182 p.

FREITAS, F. A. C. de. **A theoretical and experimental technique to measure fracture properties in viscoelastic solids**, 2007. 134 f. Tese (doctor of philosophy) – University of Nebraska, cidade Lincoln, US, 2007.

GOODMAN, R. E. **The mechanical properties of joints**, Proc. 3rd. ISRM, Denver, v. 1A, p. 127-140, 1974.

HOEK, E. **Brittle fracture of rock**. In *Rock Mechanics in Engineering Practice*. (eds K. G. Staggs and O. C. Zienkiewicz), p. 99-124. London, 1968

HOEK, E. **Strength of jointed rock masses**. *Géotechnique*, v. 23, n. 3, p. 187-223, 1983

HOEK, E; BROWN, E. T. **Empirical strength criterion for rock masses**. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*. v. 106, n. GT9, p. 1013-1035, 1980

HOEK, E.; MARINOS, P.; BENISSI, M. **Applicability of the geological strength index (GSI) classification for very weak and sheared rock masses. The case of the Athens schism formation.** Springer-Verlag. v 5, p. 151-160, 1998. Disponível em: <<https://rocscience.com/documents/hoek/references/H1998d.pdf>>. Acesso em: 07 jan 2015

JEAGER, J. C.; COOK, N. G. W.; ZIMMERMAN R. W. **Fundamentals of rock mechanics.** 4. ed. Oxford: Blackwell Publishing, 2007. 475 p.

LORENCI, L. V. S. **Formulação micromecânica do comportamento poroelástico de um meio rochoso fraturado.** 2013. 133 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, BR, 2013.

LUBLINER, J. **A maximum-Dissipation principle in generalized plasticity.** Acta Mechanica. v. 52, p. 225-237, 1984.

MAGHOUS, S.; BERNAUD, D.; FRÉARD, J.; GARNIER, D. **Elastoplastic behavior of jointed rock masses as homogenized media and finite element analysis.** *International journal of rock mechanics and mining sciences*. s. l. v 45, n. 8, p. 1273-1286, dez. 2008. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1365160908000191>>. Acesso em: 21 ago 2015

MAGHOUS, S.; DORMIEUX, L.; KONDO, D.; SHAO, J. F. **Micromechanics approach to poroelastic behavior of a jointed rock.** *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics*, s. l., v. 37, n. 2, p. 111-129, fev. 2013. Disponível em: <<http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/nag.1087/abstract>>. Acesso em: 12 ago 2015.

MURA, T. **Micromechanics of defects in solids.** ed. 2, Dordrecht, PB, Kluwer Academic Publishers, 1987. 587 p.

MURRELL, S. A. F. **The effect of triaxial stress systems on the strength of rocks at atmospheric temperatures.** *Geophysical Journal Interatinal*, v. 10, n. 3, p. 231-281, 1965

NGUYEN, S. T. **Generalized Kelvin model for micro-cracked viscoelastic material.** *Engineering fracture mechanics*, s. l., v. 127, p. 226-234, set. 2014. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0013794414001945>>. Acesso em: 12 ago 2015.

NGUYEN, S. T. **Propagation de fissures et endommagement par microfissures dans un milieu viscoélastique linéaire non vieillissant.** 2010. 209 f. Tese (Docteur Spécialisé en Structures et Matériels) – Université Paris-Est, cidade Champs-sur-Marne, FR, 2011.

NGUYEN, S. T.; DORMIEUX, L. **A Burger model for the effective behavior of a microcracked viscoelastic solid.** *International journal of damage mechanics*, s. l., v. 20, n. 8, p. 1116-1129, nov 2011. Disponível em: <<http://ijd.sagepub.com/content/20/8/1116.abstract>>. Acesso em: 12 ago 2015.

NGUYEN, S. T.; DORMIEUX, L. **Propagation de micro-cracks in viscoelastic materials: analytical and numerical methods.** *International journal of damage mechanics*, s. l., v. 24, n. 4, p. 562-581, maio 2015. Disponível em: <<http://ijd.sagepub.com/content/24/4/562.short>>. Acesso em: 12 ago 2015.

NGUYEN, S. T.; JEANNIN, L.; DORMIEUX, L.; RENARD, F. **Fracturing of viscoelastic geomaterials and application to sedimentary layered rocks.** *Mechanics Research Communications*, s. l., v. 49, p. 50-56, abr. 2013. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0093641313000359>>. Acesso em: 12 ago 2015.

NGUYEN, S. T.; DORMIEUX, L.; PAPE, Y. le; SANAHUJA, J. **Crack propagation in viscoelastic structures: theoretical and numerical analyses.** *Computational materials science*, s. l., v. 50, n. 1, p. 83-91, nov 2010. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0927025610004209>>. Acesso em: 12 ago 2015.

PAVAN, R. C. **Aplicação da teoria de dano na análise do comportamento de materiais compósitos**, 2008. 153 f. Tese (Doutor em Engenharia) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, BR, 2008.

PAVAN, R. C.; CREUS, G. J.; MAGHOUS, S. **A simplified approach to continuous damage of composite materials and micromechanical analysis.** *Composite structures*, s. l., v. 91, n. 1, p. 84-94, nov. 2009. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263822309001445>>. Acesso em: 12 ago 2015.

PITTI, R. M. **Découplage des modes mixtes de rupture dans les matériaux viscoélastiques orthotropes: modélisation et expérimentation**, 2008. 146 f. Tese (Docteur em Génie Civil) – L’universite de Limoges, Limoges, FR, 2008.

SCHAPERLY, R. A. **Correspondence principles and a generalized J integral for large deformation and fracture analysis of viscoelastic media.** *International journal of fracture*, s. l., v 25, n. 3, p 195-223, jul. 1984. Disponível em: <<http://link.springer.com/article/10.1007/BF01140837>>. Acesso em: 12 ago 2015

SELENÇON, J. **Mécanique des milieux continus: concepts généraux.** Paris: L’École Polytechnique, 2007. v.1.

SELENÇON, J. **Mécanique des milieux continus: thermoélasticité.** Paris: L’École Polytechnique, 2007. v.2.

SELENÇON, J. **Viscoélasticité pour le calcul des structures.** Paris: L’École Polytechnique, 2009. 151 p.

VELLEJO, L. I. G.; FERRER, M.; ORTUÑO, L.; OTEO, C. **Ingeniería Geológica.** Pearson Educación, Madrid, 2002. 774 p.

ANEXO A

Neste anexo são apresentadas as componentes U_i dos coeficientes M_0^0 e M_1^0 , os quais são utilizados para elaborar um modelo homogeneizado de Burger. Uma vez que os cálculos foram realizados no software MAPLE®, faz-se a seguinte mudança de notação:

$$\begin{aligned}
 a &= r \\
 k_{K,S}^v &= k_{k s v} ; k_{K,S}^e = k_{k s e} ; k_{M,S}^v = k_{m s v} ; k_{M,S}^e = k_{m s e} \\
 \mu_{K,S}^v &= \mu_{k s v} ; \mu_{K,S}^e = \mu_{k s e} ; \mu_{M,S}^v = \mu_{m s v} ; \mu_{M,S}^e = \mu_{m s e} \\
 k_{M,j}^v &= k_{m j v} ; k_{M,j}^e = k_{m j e} ; \mu_{M,j}^v = \mu_{m j v} ; \mu_{M,j}^e = \mu_{m j e}
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

As expressões de U_i são dadas por:

$$\begin{aligned}
 U3 &:= -k_{kse} k_{mje} (3k_{msv} + 4\mu_{msv}) k_{mse} (\mu_{mse} \mu_{kse} (k_{mjv} + \mu_{mjv}) - \mu_{msv} \mu_{mje} (\mu_{mse} + \mu_{kse})) : \\
 U2 &= \left(-10\pi \mu_{msv}^2 - 9\pi \mu_{msv} k_{msv} \right) \cdot U3 - \frac{1}{2} k_{kse} k_{mjv} k_{mse} (3k_{msv} + 4\mu_{msv})^2 (3k_{mjv} k_{mje} \mu_{kse} \mu_{mse} + 2k_{mjv} \mu_{kse} \mu_{mje} \mu_{mse} \\
 &\quad - 10\mu_{msv} \mu_{mje} k_{mje} \mu_{kse} - 10\mu_{msv} k_{mje} \mu_{mje} \mu_{mse}) + \pi k_{mje} \mu_{msv} (k_{kse} k_{mjv} k_{mse} \mu_{kse} \mu_{mse} (3k_{msv} + 4\mu_{msv}) (9k_{msv} + 5\mu_{msv}) \\
 &\quad + 21k_{msv} \mu_{mje} \mu_{msv} (k_{kse} k_{mse} \mu_{msv} (\mu_{kse} + \mu_{mse}) - k_{msv} \mu_{kse} \mu_{mse} (k_{kse} + k_{mse}))) : \\
 U1 &:= \left(30\pi^2 \mu_{msv}^4 + 36\pi^2 \mu_{msv}^3 k_{msv} \right) \cdot U3 + 6\gamma^2 k_{kse} k_{mje} k_{mjv}^2 k_{mse} \mu_{msv} \mu_{mje} (3k_{msv} + 4\mu_{msv})^3 (\mu_{kse} + \mu_{mse}) + 9\pi (3k_{msv} \\
 &\quad + 4\mu_{msv}) k_{mje} k_{mjv} \mu_{msv} (k_{kse} k_{mjv} k_{mse} \mu_{kse} \mu_{mse} (3k_{msv} + 4\mu_{msv}) (2\mu_{msv} + 3k_{msv}) - 4\mu_{mje} \mu_{msv} ((\mu_{mse} + \mu_{kse}) \\
 &\quad \cdot (4k_{kse} k_{mse} \mu_{msv}^2 + 5k_{kse} k_{mse} k_{msv} \mu_{msv} + 3k_{kse} k_{mse} k_{msv}^2) + 2k_{msv}^2 \mu_{kse} \mu_{mse} (k_{kse} + k_{mse}))) + 72\pi^2 \mu_{msv}^4 \\
 &\quad k_{msv}^2 \mu_{mje} k_{mje} \mu_{kse} \mu_{mse} (k_{kse} + k_{mse}) - 3\pi^2 k_{kse} k_{mje} k_{mse} \mu_{msv}^2 (24\mu_{msv}^3 k_{msv} \mu_{mje} \mu_{mse} + 24\mu_{msv}^3 k_{msv} \mu_{mje} \mu_{kse} + 56 \\
 &\quad \mu_{msv}^3 \mu_{kse} \mu_{mse} k_{mjv} + 210\mu_{kse} \mu_{mse} k_{mjv} k_{msv} \mu_{msv}^2 + 234\mu_{kse} \mu_{mse} k_{mjv} k_{msv}^2 \mu_{msv} + 81\mu_{kse} \mu_{mse} k_{mjv} k_{msv}^2) : \\
 U0 &:= \left(-54\pi^3 \mu_{msv}^5 k_{msv} - 36\pi^3 \mu_{msv}^6 \right) \cdot U3 - 18\pi^2 k_{mje} k_{mjv} \mu_{mje} \mu_{msv}^2 (3k_{msv} + 4\mu_{msv})^2 ((\mu_{mse} + \mu_{kse}) \cdot (9k_{kse} k_{mse} k_{msv}^2 \\
 &\quad + 12k_{kse} k_{mse} k_{msv} \mu_{msv} + 8k_{kse} k_{mse} \mu_{msv}^2) + 6k_{msv}^2 \mu_{kse} \mu_{mse} (k_{kse} + k_{mse})) - \frac{9}{2} \pi^2 (3k_{msv} + 4\mu_{msv}) k_{mje} k_{mjv} \\
 &\quad \mu_{msv}^2 (3k_{kse} k_{mjv} k_{mse} \mu_{kse} \mu_{mse} (3k_{msv} + 4\mu_{msv}) (2\mu_{msv} + 3k_{msv})^2 - 8\mu_{msv}^2 \mu_{mje} ((\mu_{mse} + \mu_{kse}) \cdot (9k_{kse} k_{mse} k_{msv}^2 \\
 &\quad + 12k_{kse} k_{mse} k_{msv} \mu_{msv} + 8k_{kse} k_{mse} \mu_{msv}^2) + 6k_{msv}^2 \mu_{kse} \mu_{mse} (k_{kse} + k_{mse}))) + 9\pi^3 k_{mje} \mu_{msv}^4 (-12\mu_{msv}^2 \mu_{mje} \\
 &\quad k_{msv}^2 \mu_{kse} \mu_{mse} (k_{kse} + k_{mse}) + k_{kse} k_{mse} (12k_{kse} k_{mse} k_{msv} \mu_{msv} \mu_{mje} (\mu_{mse} + \mu_{kse}) + k_{kse} k_{mjv} k_{mse} \mu_{kse} \mu_{mse} (2\mu_{msv} \\
 &\quad + 3k_{msv}) (3k_{msv} + 4\mu_{msv}) (4\mu_{msv} + 9k_{msv}))) :
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

ANEXO B

Neste anexo são apresentadas as componentes U_i dos coeficientes M_0^∞ e M_1^∞ , os quais são utilizados para elaborar um modelo homogeneizado de Burger. Uma vez que os cálculos foram realizados no software MAPLE®, faz-se a seguinte mudança de notação:

$$\begin{aligned}
 a &= r \\
 k_{K,S}^v &= k_{k s v} \ ; \ k_{K,S}^e = k_{k s e} \ ; \ k_{M,S}^v = k_{m s v} \ ; \ k_{M,S}^e = k_{m s e} \\
 \mu_{K,S}^v &= \mu_{k s v} \ ; \ \mu_{K,S}^e = \mu_{k s e} \ ; \ \mu_{M,S}^v = \mu_{m s v} \ ; \ \mu_{M,S}^e = \mu_{m s e} \\
 k_{M,j}^v &= k_{m j v} \ ; \ k_{M,j}^e = k_{m j e} \ ; \ \mu_{M,j}^v = \mu_{m j v} \ ; \ \mu_{M,j}^e = \mu_{m j e}
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

As expressões de U_i são dadas por:

$$\begin{aligned}
 U[3] &:= k_{k s v}^2 k_{m j v} k_{m s v} (3 k_{m s e} + 4 \mu_{m s e}) (\mu_{k s v} \mu_{m s v} (k_{m j e} + \mu_{m j e}) - \mu_{m s e} \mu_{m j v} (\mu_{k s v} + \mu_{m s v})) : \\
 U[2] &:= \frac{1}{2} r k_{k s v} k_{m j e} k_{m s v} (3 k_{m s e} + 4 \mu_{m s e})^2 (k_{m j e} \mu_{k s v} \mu_{m s v} (2 \mu_{m j v} + 3 k_{m j v}) - 10 k_{m j v} \mu_{m s e} \mu_{m j v} (\mu_{m s v} + \mu_{k s v})) \\
 &\quad - \pi k_{m j v} \mu_{m s e} (k_{k s v} (3 k_{m s e} + 4 \mu_{m s e}) k_{m s v} \mu_{k s v} \mu_{m s v} (9 k_{m s e} \mu_{m j e} + 18 k_{m j e} k_{m s e} + 10 \mu_{m s e} \mu_{m j e} + 15 k_{m j e} \mu_{m s e}) \\
 &\quad - \mu_{m s e} \mu_{m j v} ((\mu_{k s v} + \mu_{m s v}) \cdot (40 k_{k s v} k_{m s v} \mu_{m s e}^2 + 45 k_{k s v} k_{m s e} k_{m s v} \mu_{m s e} + 27 k_{k s v} k_{m s e}^2 k_{m s v}) + 21 k_{m s e}^2 \mu_{k s v} \mu_{m s v} (k_{k s v} + k_{m s v}))) : \\
 U[1] &:= -6 r^2 k_{m j e}^2 k_{m j v} k_{k s v} k_{m s v} \mu_{m s e} \mu_{m j v} (3 k_{m s e} + 4 \mu_{m s e})^3 (\mu_{k s v} + \mu_{m s v}) - 9 r \pi (3 k_{m s e} \\
 &\quad + 4 \mu_{m s e}) k_{m j e} k_{m j v} \mu_{m s e} (k_{k s v} k_{m j e} k_{m s v} \mu_{k s v} \mu_{m s v} (3 k_{m s e} + 4 \mu_{m s e}) (2 \mu_{m s e} + 3 k_{m s e}) - 4 \mu_{m s e} \mu_{m j v} ((\mu_{k s v} + \mu_{m s v}) \cdot (4 k_{k s v} k_{m s v} \\
 &\quad \mu_{m s e}^2 + 5 k_{k s v} k_{m s e} k_{m s v} \mu_{m s e} + 3 k_{k s v} k_{m s e}^2 k_{m s v}) + 2 k_{m s e}^2 \mu_{k s v} \mu_{m s v} (k_{k s v} + k_{m s v}))) + 3 \pi^2 k_{m j v} \mu_{m s e}^2 (k_{k s v} (3 k_{m s e} \\
 &\quad + 4 \mu_{m s e}) k_{m s v} \mu_{k s v} \mu_{m s v} (27 k_{m j e} k_{m s e}^2 + 54 k_{m s e} \mu_{m s e} k_{m j e} + 12 k_{m s e} \mu_{m s e} \mu_{m j e} + 10 \mu_{m s e}^2 \mu_{m j e} + 24 \mu_{m s e}^2 k_{m j e}) - 2 \\
 &\quad \mu_{m s e}^2 \mu_{m j v} ((\mu_{k s v} + \mu_{m s v}) \cdot (20 k_{k s v} k_{m s v} \mu_{m s e}^2 + 27 k_{k s v} k_{m s e} k_{m s v} \mu_{m s e} + 18 k_{k s v} k_{m s e}^2 k_{m s v}) + 12 k_{m s e}^2 \mu_{k s v} \mu_{m s v} (k_{k s v} + k_{m s v}))) : \\
 U[0] &:= 18 r^2 \pi k_{m j e}^2 k_{m j v} \mu_{m j v} \mu_{m s e}^2 (3 k_{m s e} + 4 \mu_{m s e})^2 ((\mu_{k s v} + \mu_{m s v}) \cdot (9 k_{k s v} k_{m s e}^2 k_{m s v} + 12 k_{k s v} k_{m s e} k_{m s v} \mu_{m s e} + 8 k_{k s v} k_{m s v} \mu_{m s e}^2) \\
 &\quad + 6 k_{m s e}^2 \mu_{k s v} \mu_{m s v} (k_{k s v} + k_{m s v})) + \frac{9}{2} \pi^2 (3 k_{m s e} + 4 \mu_{m s e}) k_{m j e} k_{m j v} \mu_{m s e}^2 (3 k_{k s v} k_{m j e} k_{m s v} \mu_{k s v} \mu_{m s v} (3 k_{m s e} \\
 &\quad + 4 \mu_{m s e}) (2 \mu_{m s e} + 3 k_{m s e})^2 - 8 \mu_{m s e}^2 \mu_{m j v} ((\mu_{k s v} + \mu_{m s v}) \cdot (9 k_{k s v} k_{m s e}^2 k_{m s v} + 12 k_{k s v} k_{m s e} k_{m s v} \mu_{m s e} + 8 k_{k s v} k_{m s v} \mu_{m s e}^2) + 6 \\
 &\quad k_{m s e}^2 \mu_{k s v} \mu_{m s v} (k_{k s v} + k_{m s v}))) - 9 \pi^3 k_{m j v} \mu_{m s e}^4 (k_{k s v} \mu_{k s v} \mu_{m s v} k_{m s v} (3 k_{m s e} + 4 \mu_{m s e}) (2 \mu_{m s e} + 3 k_{m s e}) (9 k_{m j e} k_{m s e} + 6 k_{m j e} \mu_{m s e} \\
 &\quad + 2 \mu_{m s e} \mu_{m j e}) - 2 \mu_{m s e}^2 \mu_{m j v} ((\mu_{k s v} + \mu_{m s v}) \cdot (9 k_{k s v} k_{m s e}^2 k_{m s v} + 12 k_{k s v} k_{m s e} k_{m s v} \mu_{m s e} + 8 k_{k s v} k_{m s v} \mu_{m s e}^2) + 6 \\
 &\quad k_{m s e}^2 \mu_{k s v} \mu_{m s v} (k_{k s v} + k_{m s v}))) :
 \end{aligned} \tag{A.2}$$