

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA QUÍMICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA QUÍMICA

**MÉTODO DE AJUSTE PARA MPC BASEADO EM MULTI-
CENÁRIOS PARA SISTEMAS NÃO QUADRADOS**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

José Eduardo Weber dos Santos

Porto Alegre

2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA QUÍMICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA QUÍMICA

MÉTODO DE AJUSTE PARA MPC BASEADO EM MULTI- CENÁRIOS PARA SISTEMAS NÃO QUADRADOS

José Eduardo Weber dos Santos

Dissertação de Mestrado apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia

Área de concentração:

Pesquisa e Desenvolvimento de Processos

Linha de Pesquisa:

Projeto, Simulação, Modelagem, Controle e Otimização de Processos.

Orientadores:

Prof. Dr. Jorge Otávio Trierweiler

Prof. Dr. Marcelo Farenzena

Porto Alegre

2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA QUÍMICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA QUÍMICA

A Comissão Examinadora, abaixo assinada, aprova a Dissertação *Método de Ajuste para MPC baseado em Multi-cenários para Sistemas não Quadrados*, elaborada por José Eduardo Weber dos Santos, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Engenharia.

Comissão Examinadora:



Prof. Dr. João Manoel Gomes da Silva Júnior (DELAE - UFRGS)



Prof. Dr. Luís Cláudio Oliveira Lopes (UFU)



Dra. Viviane Rodrigues Botelho (DEQUI - UFRGS)

Resumo

A utilização de controladores preditivos multivariáveis na indústria de processos cresceu significativamente nos últimos anos principalmente devido à versatilidade e a confiabilidade que essa ferramenta proporciona em termos de controle avançado. No entanto, aspectos relacionados à aplicação prática do que vem sendo desenvolvido no meio acadêmico possui pouca difusão na indústria devido às configurações clássicas adotadas, como sistemas quadrados (com o mesmo número de variáveis controladas e manipuladas), modelos lineares, utilização de *setpoint* e etc. diferindo daquilo que está disponível e é amplamente utilizado industrialmente: sistemas não-quadrados (geralmente com mais variáveis controladas do que manipuladas), modelos não-lineares e utilização de *soft-constraints*. Esse trabalho propõe uma metodologia para ajuste dos parâmetros presentes em um controlador preditivo, atento à variedade de algoritmos presentes na indústria de processos. Essa metodologia se baseia na obtenção do melhor desempenho alcançável para cada cenário de um modelo global do processo, atendendo as restrições de Número de Desempenho Robusto relativo (rRPN), Máxima Sensibilidade e restrições nas ações de controle. Baseado em um desempenho que é alcançável, o modelo linear global é escalonado (assim como a planta não-linear) e os pesos que levam o sistema para a melhor condição operacional são estimados. Essa técnica abrange controladores operando em faixas e/ou *setpoint* e configurações não-quadradas, i.e., com mais variáveis controladas do que manipuladas. A abordagem proposta foi testada em uma planta de quatro tanques esféricos com aquecimento apresentando resultados coerentes, corroborando seu potencial de aplicação industrial.

Palavras-chave: Controle Preditivo Multivariável, sintonia, desempenho alcançável, robustez.

Abstract

Due to their versatility and reliability, Model Predictive Controllers (MPCs) are the standard solution for advanced process control in the process industry. However, there is a gap between the academic developments and the actual industrial applications, since the most academic studies focus on systems working with set-points and same number of manipulated and controlled variables, whereas the industrial application cope with non-squared configuration usually with several controlled variables in ranging and a reduced number of manipulated variables. This work proposes a tuning methodology for the countable parameters presents in a typical industrial predictive controller, considering the variety of the algorithms presents commercially in the process industry. This methodology is based on the estimation of the best attainable performance for each scenario of the global model of the process, constrained by the relative Robust Performance Number (rRPN), Maximal Sensitivity and restrictions in the control actions. Based on a performance that is attainable, the linear global model is scaled (and the non-linear) and the weights that lead the system to the best operational condition are estimated. This technique covers controllers operating in zones of control and/or set-point tracking and non-square configurations, i.e., with more controlled variables than manipulated. The proposed approach was tested in a Quadruple-Spherical tanks heating system presenting coherent results indicating its potential for industrial applications.

Keywords: Multivariable Predictive Control, tuning, attainable performance, robustness.

“A menos que modifiquemos a nossa maneira de pensar, não seremos capazes de resolver os problemas causados pela forma como acostumamos a ver o mundo”.
(Albert Einstein)

Agradecimentos

Agradeço a todos que contribuíram direta ou indiretamente para a realização desse trabalho, especialmente:

À Deus, que durante todos os momentos me deu forças para seguir em frente;

Aos meus pais, Lorelize e José Antônio e minha irmã Juliana por estarem sempre ao meu lado e que com amor sempre apoiaram e incentivaram minhas escolhas estimulando constantemente a minha educação. Aos demais familiares agradeço por estarem sempre torcendo pelo meu sucesso.

Aos meus orientadores, Prof. Jorge Otávio Trierweiler e Prof. Marcelo Farenzena por durante todos os momentos nesses 2 anos servirem como base para o desenvolvimento desse trabalho transmitindo seus conhecimentos, por todo apoio, disponibilidade, atenção e paciência.

Aos meus colegas Camila, Melissa, Juliano e Adam pela amizade desenvolvida nesses 2 anos. Agradeço especialmente aos colegas Maria Andressa e Giovani que não dividiram apenas a sala durante o período do mestrado, mas a amizade e cumplicidade. Sem vocês, essa caminhada teria sido muito mais difícil. Obrigado pelos momentos de descontração e lazer que tornaram essa trajetória mais alegre.

Agradeço aos meus amigos, que durante todos os momentos sempre serviram de apoio, tornando minha vida mais feliz, em especial àqueles que estão presentes desde sempre e foram imprescindíveis para a minha adaptação em Porto Alegre.

À Universidade Federal do Rio Grande do Sul e ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química pela oportunidade de realização desse trabalho.

SUMÁRIO

Capítulo 1 – Introdução	1
1.1 Motivação.....	1
1.2 MPCs industriais e a problemática do ajuste	4
1.3 Objetivos do trabalho.....	5
1.4 Estrutura da dissertação	5
Capítulo 2 – Revisão Bibliográfica.....	7
2.1 Pequeno Histórico da Evolução dos Controladores.....	7
2.2 Controle preditivo baseado em modelo	9
2.2.1 Problema de Controle.....	10
2.2.2 Algoritmos para MPC.....	12
2.3 Sintonia de controladores MPC	16
2.3.1 Métodos de Sintonia de Controlador MPC.....	19
Capítulo 3 – Método de ajuste de controladores preditivos baseado em cenários ...	27
3.1 Ideia Básica	27
3.2 Desempenho desejado e desempenho alcançável.....	29
3.3 Número de Desempenho Robusto (RPN)	31
3.3.1 Número de Desempenho Robusto relativo (rRPN)	31
3.3.2 Escalonamento RPN.....	32
3.4 Máxima Sensibilidade	33
3.5 A função $\Delta u/\Delta y_{set}$	34
3.6 Definição do Desempenho Alcançável para multi-cenários operacionais quadrados	34
3.7 Escalonamento baseado em γ	36
3.8 Sintonia dos Pesos do Controlador MPC.....	37
3.9 Expansão para sistemas não quadrados e ajuste para faixas de operação.....	38
Capítulo 4 – Estudo de Caso	41
4.1 Modelo 4 Tanques Esféricos com Aquecimento.....	41
4.1.1 Análise do Modelo: Pontos de Operação	46
4.1.2 Métrica de Desempenho Operacional.....	56
4.1.3 Otimizador em Tempo Real.....	61
Capítulo 5 – Resultados	65
5.1 Modelo 4 Tanques Esféricos com Aquecimento.....	65
5.1.1 Ajuste em setpoint para sistema quadrado 2×2	66
5.1.2 Ajuste em faixas para sistema não quadrado 4×2	71
5.1.3 Ajuste em faixas para sistema não quadrado 6×4	74
5.1.4 Ajuste com faixas para sistema não quadrado 10×4 com otimizador	77
5.2 Avaliação do ajuste para MPC baseado em multi-cenários.....	86
5.2.1 Influência das Matrizes de Peso e Escalonamento.....	86
5.2.2 Influência do Otimizador	93
Capítulo 6 – Conclusões e Trabalhos Futuros.....	97
6.1 Principais conclusões.....	97
6.2 Sugestões para trabalhos futuros	99
Referências	101
Apêndice A – Definições.....	107
A.1 Controle Multivariável.....	107
A.1.1 Representação em Espaço de Estados	108
A.1.2 Funções de Transferência para sistemas MIMO	109

A.1.3 Decomposição em Valores Singulares (SVD)	110
A.1.4 Condicionamento da Matriz	111
A.1.5 Zeros de Transmissão	112
A.1.6 Polos	113
A.1.7 Relative Gain Array (RGA).....	113
Apêndice B – Fatoração Blaschke	115
B.1 Fatoração Blaschke e Desempenho Alcançável	115
B.1.1 Fatoração de Zeros Positivos	115
B.1.2 Performance Alcançável	116
Apêndice C – Análise do Estudo de Caso	119
C.1 Análise do Modelo 4 Tanques esféricos com aquecimento: Cenários operacionais	119

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1: Estrutura de controle preditivo (Baseado em Nikolaou, 2001).....	2
Figura 1.2: Hierarquia de controle (Baseado em Qin e Badgwell, 2003).....	4
Figura 2.1: Diagrama representativo de um MPC Típico (Fonte: Botelho, 2015).....	10
Figura 2.2: Faixas de Operação (Fonte: Maciejowski, 2002).	12
Figura 2.3: Resposta Degrau unitário.....	13
Figura 2.4: Processo sugerido de sintonia do controlador preditivo (Fonte: Campos, Gomes e Perez, 2013).....	19
Figura 3.1: Decomposição do modelo global em cenários.	28
Figura 3.2: Malha de controle por retroalimentação (Baseado em Trierweiler e Farina, 2003).....	29
Figura 3.3: Funções Γ e Γ_{REF}	32
Figura 3.4: Função de Sensibilidade.....	33
Figura 3.5: Representação da Função $\Delta u/\Delta y_{set}$	34
Figura 3.6: Arranjo do sistema de controle com filtros.	37
Figura 4.1: Unidade de 4 tanques esféricos com aquecimento.....	42
Figura 4.2: Representação esquemática em forma de blocos da Planta de 4 tanques esféricos com aquecimento.	43
Figura 4.3: Variáveis manipuladas com perturbação degrau nas vazões de alimentação.	47
Figura 4.4: Comportamento das saídas h_1, h_2, h_3 e h_4 após perturbação nas vazões de alimentação no Ponto de Operação 1.....	48
Figura 4.5: Comportamento das saídas T_1, T_2, T_3 e T_4 após perturbação nas vazões de alimentação no Ponto de Operação 1.....	48
Figura 4.6: Comportamento das saídas h_1, h_2, h_3 e h_4 após perturbação nas vazões de alimentação no Ponto de Operação 2.....	49
Figura 4.7: Comportamento das saídas T_1, T_2, T_3 e T_4 após perturbação nas vazões de alimentação no Ponto de Operação 2.....	49
Figura 4.8: Perturbação degrau nas aberturas das válvulas de distribuição direta aos Tanques 1 e 2.....	50
Figura 4.9: Comportamento das saídas h_1, h_2, h_3 e h_4 após perturbação nas aberturas das válvulas x_1 e x_2 no Ponto de Operação 1.	50
Figura 4.10: Comportamento das saídas T_1, T_2, T_3 e T_4 após perturbação nas aberturas das válvulas x_1 e x_2 no Ponto de Operação 1.	51
Figura 4.11: Comportamento das saídas h_1, h_2, h_3 e h_4 após perturbação nas aberturas das válvulas x_1 e x_2 no Ponto de Operação 2.	51
Figura 4.12: Comportamento das saídas T_1, T_2, T_3 e T_4 após perturbação nas aberturas das válvulas x_1 e x_2 no Ponto de Operação 2.	52
Figura 4.13: Perturbação degrau em todas as variáveis manipuladas.	53
Figura 4.14: Comportamento das saídas h_1, h_2, h_3 e h_4 após perturbação na vazão de alimentação F_1 e F_2 e nas aberturas das válvulas x_1 e x_2 no Ponto de Operação 1.....	53
Figura 4.15: Comportamento das saídas T_1, T_2, T_3 e T_4 após perturbação na vazão de alimentação F_1 e F_2 e nas aberturas das válvulas x_1 e x_2 no Ponto de Operação 1.....	54
Figura 4.16: Comportamento das saídas h_1, h_2, h_3 e h_4 após perturbação na vazão de alimentação F_1 e F_2 e nas aberturas das válvulas x_1 e x_2 no Ponto de Operação 2.....	54
Figura 4.17: Comportamento das saídas T_1, T_2, T_3 e T_4 após perturbação na vazão de alimentação F_1 e F_2 e nas aberturas das válvulas x_1 e x_2 no Ponto de Operação 2.....	55
Figura 4.18: Resultado analítico da função $C\$, em relação à x_1 e x_2 (a) e F_1 e F_2 (b) no Ponto de Operação 1.....$	57

Figura 4.19: Resultado analítico da função $C\$$, em relação à x_1 e x_2 (a) e F_1 e F_2 (b) no Ponto de Operação 2.	57
Figura 4.20: Curvas de nível para a função custo avaliada no valor ótimo.	59
Figura 4.21: Arquitetura do controlador preditivo com camada de otimização (Adaptado de Campos, Gomes e Perez, 2013).	62
Figura 5.1: Resposta degrau das funções T_d, T_1 e T_2 para os níveis.	66
Figura 5.2: Variáveis controladas (a) e manipuladas (b) para ajuste multi-cenários através de <i>setpoint</i> de níveis no caso 2×2	68
Figura 5.3: Resposta degrau para as funções de desempenho desejável e alcançável para as temperaturas.	69
Figura 5.4: Variáveis controladas (a) e manipuladas (b) para ajuste <i>setpoint</i> do sistema $T_1, T_2 \times F_1, F_2$	70
Figura 5.5: Resposta Degrau para T_d, T_1 e T_2 para o cenário limitante do ajuste não quadrado dos níveis considerando os dois pontos de operação estudados.	71
Figura 5.6: Padrões dos distúrbios não-medidos adicionados em cada tanque.	72
Figura 5.7: Resposta dos níveis em malha aberta em relação aos distúrbios não-medidos.	73
Figura 5.8: Variáveis controladas (a) e manipuladas (b) para ajuste em faixa dos níveis. .	74
Figura 5.9: Resposta em malha aberta das saídas do sistema 6×4 em relação aos distúrbios externos.	75
Figura 5.10: Variáveis controladas (a) e manipuladas (b) para o ajuste do sistema 6×4 .	76
Figura 5.11: Modelo estendido com <i>targets</i> para as variáveis manipuladas.	77
Figura 5.12: Variáveis (a) controladas e (b) manipuladas para sistema não quadrado operando com otimizador QP frente à resposta de distúrbio aleatório.	79
Figura 5.13: Variáveis (a) controladas e (b) manipuladas para sistema não quadrado operando com otimizador LP frente à resposta de distúrbio aleatório.	80
Figura 5.14: Distúrbios não medidos em forma de degrau enviados aos tanques 3 e 4.	81
Figura 5.15: Variáveis (a) controladas e (b) manipuladas para sistema não quadrado com otimizador QP frente à resposta de distúrbio degrau.	82
Figura 5.16: Variáveis (a) controladas e (b) manipuladas para sistema não quadrado com otimizador LP frente à resposta de distúrbio degrau.	83
Figura 5.17: Distúrbios não medidos em forma de rampa enviados aos tanques 1 e 2. ...	84
Figura 5.18: Variáveis (a) controladas e (b) manipuladas para sistema não quadrado com otimizador QP frente à resposta de rampa de distúrbio.	85
Figura 5.19: Variáveis (a) controladas e (b) manipuladas para sistema não quadrado com otimizador LP frente à resposta de rampa de distúrbio.	86
Figura 5.20: Variáveis (a) controladas e (b) manipuladas para sistema $h_1, h_2 \times F_1, F_2$ sem escalonamento e com pesos padrão do Matlab.	87
Figura 5.21: Variáveis (a) controladas e (b) manipuladas para sistema $T_1, T_2 \times F_1, F_2$ sem escalonamento e com pesos padrão do Matlab.	88
Figura 5.22: Variáveis (a) controladas e (b) manipuladas para sistema $h_1, h_2, h_3, h_4 \times F_1, F_2$ sem escalonamento e com pesos padrão do Matlab submetido ao distúrbio aleatório da Figura 5.6.	89
Figura 5.23: Variáveis (a) controladas e (b) manipuladas para sistema $h_1, h_2, h_3, h_4, T_1, T_2 \times F_1, F_2, x_1, x_2$ sem escalonamento e com pesos padrão do Matlab submetido ao distúrbio aleatório da Figura 5.6.	90

Figura 5.24: Variáveis (a) controladas e (b) manipuladas para sistema $h_1, h_2, h_3, h_4, T_1, T_2 \times F_1, F_2, x_1, x_2$ sem escalonamento e com pesos padrão do Matlab submetido ao distúrbio degrau da Figura 5.14.	91
Figura 5.25: Variáveis (a) controladas e (b) manipuladas para sistema $h_1, h_2, h_3, h_4, T_1, T_2 \times F_1, F_2, x_1, x_2$ sem escalonamento e com pesos padrão do Matlab submetido ao distúrbio rampa da Figura 5.17.	92
Figura 5.26: Variação da Função Custo para operação do sistema 10×4 submetido ao Distúrbio Aleatório da Figura 5.6.	93
Figura 5.27: Variação da Função Custo para operação do sistema 10×4 submetido ao Distúrbio Degrau da Figura 5.14.	94
Figura 5.28: Variação da Função Custo para operação do sistema 10×4 submetido ao Distúrbio Rampa da Figura 5.17.	94
Figura A.1: Problemas SISO e MIMO (Adaptado de Seborg, Edgar e Mellichamp, 1989).	108

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1: Métodos de sintonia do Horizonte de Predição (Garriga e Soroush, 2010). ...	21
Tabela 2.2: Métodos de sintonia do Horizonte de Controle (Garriga e Soroush, 2010). ...	21
Tabela 2.3: Métodos de sintonia para o peso nas variáveis de saída (Garriga e Soroush, 2010).....	22
Tabela 2.4: Métodos de sintonia para o peso na supressão do movimento (Garriga e Soroush, 2010).....	23
Tabela 2.5: Necessidades industriais para metodologia de ajuste de MPC.	25
Tabela 3.1: Método para ajuste de controlador preditivo baseado em multi-cenários. ...	39
Tabela 4.1: Parâmetros da unidade 4 tanques esféricos com aquecimento.....	46
Tabela 4.2: Especificações referentes aos Pontos de Operação	46
Tabela 4.3: Cálculo dos valores estacionários.....	47
Tabela 4.4: Integral do Erro Quadrático entre o modelo linearizado e o não linear para o Ponto de Operação 1.....	55
Tabela 4.5: Integral do Erro Quadrático entre o modelo linearizado e o não linear para o Ponto de Operação 2.....	56
Tabela 4.6: Valores Ótimos para função custo, $C\$$	58
Tabela 4.7: Valores ótimos para o problema QP e LP.....	61
Tabela 5.1: Custo de Operação para sistema 6×4 com otimizador.	95
Tabela C.1: Zeros de transmissão positivos nos subsistemas 2×2 do Ponto de Operação 1.	119
Tabela C.2: Zeros de transmissão positivos nos subsistemas 3×3 do Ponto de Operação 1.	120
Tabela C.3: Zeros de transmissão positivos nos subsistemas 4×4 do Ponto de Operação 1.	122
Tabela C.4: Zeros de transmissão positivos nos subsistemas 2×2 do Ponto de Operação 2.	123
Tabela C.5: Zeros de transmissão positivos nos subsistemas 3×3 do Ponto de Operação 2.	124
Tabela C.6: Zeros de transmissão positivos nos subsistemas 4×4 do Ponto de Operação 2.	126

NOTAÇÃO E SIMBOLOGIA

$B_{0,z}(s)$	Fatoração de Blaschke para a Direção de Saída dos zeros no SPD
$B_{0,z}^\dagger(0)$	Pseudo-Inversa de $B_{0,z}(s)$
C	Controlador
c_p	Capacidade Calorífica da água
CV	Variável Controlada
$C\$$	Função Custo
D_i	Diâmetro do Tanque i
DMC	<i>Dynamic Matrix Control</i>
F	Vazão de Alimentação
$G(s)$	Função de Transferência do Modelo do Processo
$G_s(s)$	Função de Transferência do Modelo Escalonado do Processo
$G_{PO1}(s)$	Função de Transferência Nominal no Ponto Operação 1
GPC	<i>Generalized Predictive Control</i>
h_i	Altura de nível do Tanque i
I	Matriz Identidade
$K(s)$	Função de Transferência que relaciona $\Delta u/\Delta y_{set}$
L_s	Matriz de Escalonamento das Variáveis de Saída
LP	Problema de Programação Linear
M	Horizonte de Controle
M_s	Valor da Máxima Sensibilidade
M_k	Valor Máximo da Função $K(s)$
MIMO	<i>Multi-Input-Multi-Output</i>
MPC	Controlador Preditivo Baseado em Modelo (<i>Model Predictive Control</i>)
MV	Variável Manipulada
nc	Número de Cenários
ni	Número de Entradas de um Processo
no	Número de Saídas de um Processo
P	Horizonte de Predição
p	Polo
PID	Controlador Proporcional-Integral-Derivativo
Q	Matriz de Peso para as Variáveis Controladas
\dot{Q}_i	Taxa de Aquecimento do Tanque i
QP	Problema de Programação Quadrática
RPN	Número de Desempenho Robusto (<i>Robust Performance Number</i>)
rRPN	Número de Desempenho Robusto relativo

RTO	Sigla de Otimização em Tempo Real (<i>Real Time Optimization</i>)
r	Variável de Referência ou <i>setpoint</i>
R_s	Matriz de Escalonamento das Variáveis de Entrada
R_i	Coeficiente de Descarga do Tanque i
$S(s)$	Função de Sensibilidade
SISO	<i>Single-Input-Single-Output</i>
SPD	Semi-Plano Direito
$T(s)$	Função Desempenho Alcançável em Malha Fechada
$T_d(s)$	Função Desempenho Desejável em Malha Fechada
T_i	Temperatura de saída do Tanque i
T_{in}	Temperatura de Alimentação
t_k	Instante Atual
t_{k+1}	Instante Futuro
t_s	Tempo de Amostragem
$t_{s,i}$	Tempo de Subida da função de transferência do canal i
u	Variável de Entrada
u_{target}	<i>Target</i> para as Variáveis Manipuladas
u_{min}	Limite Inferior das Variáveis Manipuladas
u_{max}	Limite Superior das Variáveis Manipuladas
Δu	Variação nas Ações de Controle
Δu_{max}	Limite da Máxima Variação nas Ações de Controle
y	Variável de Saída
\hat{y}	Variável de Saída Estimada pelo Modelo
\hat{y}_{min}	Limite Inferior das Variáveis Controladas
\hat{y}_{max}	Limite Superior das Variáveis Controladas
Δy	Variação das Variáveis Controladas
Δy_{set}	Variação do <i>setpoint</i>
ΔD	Variação de Distúrbio
W	Matriz de Peso para a Supressão do Movimento
W_u	Matriz de Peso para as Variáveis Manipuladas
ρ	Massa Específica da água
ρ_ϵ	Peso da Violação da <i>soft-constraint</i>
$\bar{\sigma}$	Máximo Valor Singular
ϵ_∞	Máximo <i>offset</i> tolerado

ε_k	Máximo Valor de Violação da Faixa
ζ	Fator de Amortecimento
ω_n	Frequência Natural não-amortecida
ω	Frequência
$\omega_{MÁX,k}$	Frequência que ocorre o valor do RPN do cenário k
γ^*	Condicionamento Mínimo
γ^\blacksquare	Condicionamento Mínimo Global
γ_k	Condicionamento do Cenário k
$\phi(\Omega)$	Função que relaciona o somatório dos tempos de subida da função $T(s)$
$\psi(\Theta)$	Função para sintonia dos pesos do controlador MPC
ϑ	Problema de Programação Quadrática (QP)
ϱ	Problema de Programação Linear (LP)
$\Gamma(G, T, \omega)$	Função de Desempenho Robusto
$\Gamma_{REF}(G, T, \omega)$	Função de Desempenho Robusto de Referência
x_1 e x_2	Abertura das válvulas de distribuição direta aos tanques 1 e 2
z	Zero de Transmissão

Capítulo 1 – Introdução

Devido à alta competitividade presente no cenário atual e a exigência cada vez maior dos consumidores por qualidade e confiabilidade, as indústrias não têm outro caminho a não ser a busca contínua da melhoria dos fatores de diferenciação.

Visando garantir a qualidade e padronização que o homem não conseguia atingir sozinho surgiu o controle automático. Essa estratégia tem desempenhado um papel fundamental no avanço da engenharia principalmente por lidar com ritmo acelerado de produção, precisão, confiabilidade e aumento do nível de perigo em relação à exposição humana. A utilização do controle automático reduziu a mão-de-obra, aumentou a eficiência operacional das instalações e reduziu o custo operacional dos equipamentos promovendo a transformação da matéria-prima em bens de consumo de forma padronizada. Porém, a dificuldade dessa utilização fez com que essa ferramenta não garantisse total eficiência, qualidade e lucro, como era desejado, necessitando de técnicas que facilitam sua operação e implementação.

Técnicas de controle foram amplamente desenvolvidas nos últimos anos, mas o aproveitamento e a difusão dessas tecnologias na indústria tem se dado de forma extremamente lenta. A principal causa disso é a falta de conhecimento de novas técnicas, falta de mão-de-obra especializada e a difícil aplicação prática do que vem sendo desenvolvido na área.

1.1 Motivação

A necessidade de técnicas avançadas para o controle automático que garantam eficiência, qualidade e robustez tornam-se peça chave para obtenção de produtos com qualidade e baixo custo.

Um sistema de controle confiável é aquele que permite operar próximo aos limites impostos pela segurança, pelo meio ambiente e pelo processo permitindo alterar as condições de operação normais para uma condição mais favorável reduzindo o tempo de produção fora da especificação, e conseqüentemente gerando maior retorno econômico. Esse sistema bem projetado requer uma seleção adequada de variáveis de entrada e saída, atuadores e sensores, seleção da configuração de controle e a estrutura e ordem do controlador.

A principal metodologia de controle avançado confiável, com impacto significativo na indústria e que aborda os sistemas multivariáveis de forma simples e até natural é o controle preditivo baseado em modelo (MPC). Essa técnica tem sido aplicada principalmente na indústria petroquímica com crescimento significativo em outros setores da indústria de processos.

Para Ferramosca *et al.* (2009) o controle preditivo multivariável é uma das técnicas de controle avançado com mais sucesso na indústria de processos, devido à formulação do problema de controle, o uso do modelo para prever a evolução da planta e a consideração explícita das restrições no problema de otimização.

Segundo Maciejowski (2002), as razões para o sucesso da aplicação dessa ferramenta são a funcionalidade de lidar com controle multivariável de forma natural levando em conta as limitações do atuador. Isso permite a operação mais perto das restrições (comparado com controle convencional), que frequentemente conduz o processo ao ponto de operação mais adequado. Outra razão é o fato dessa estratégia de controle tratar o problema de controle no domínio do tempo integrando técnicas de controle ótimo, controle estocástico e processos com tempo morto (Camacho e Bordons, 1999).

Na Figura 1.1 é possível observar um quadro resumido da estratégia de atuação do controlador preditivo, onde t_k é o instante atual no qual as variáveis controladas são medidas. A partir dos valores medidos, do modelo do processo e das restrições impostas ao problema são calculadas as ações de controle, através de um problema de otimização, que levarão a planta ao valor ou faixa desejada. O processo é repetido até o instante final de operação implementando apenas a primeira ação de controle calculada em cada período de amostragem.

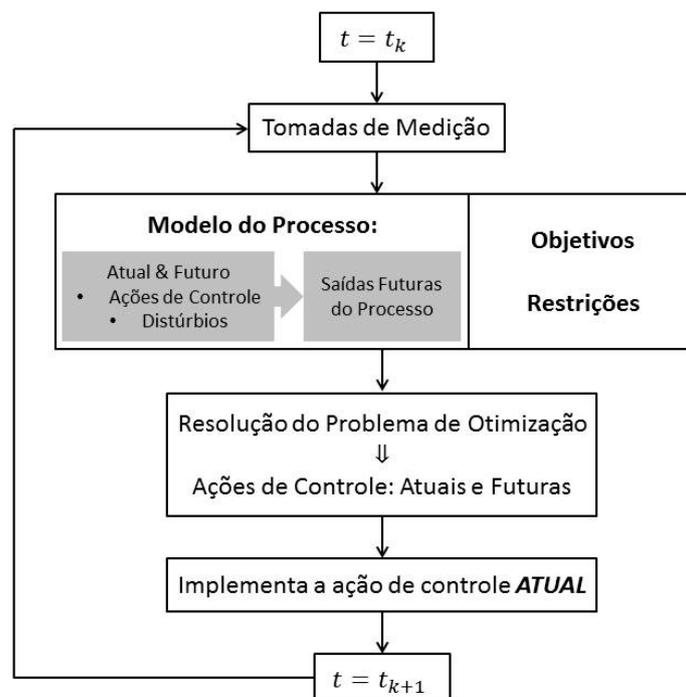


Figura 1.1: Estrutura de controle preditivo (Baseado em Nikolaou, 2001).

A utilização de restrições é sem dúvida uma das principais vantagens da utilização do controle preditivo. Frequentemente essas restrições estão associadas com custos diretos e custos de energia, para as variáveis controladas. Procura-se operar a planta com o mínimo custo possível a fim de atingir o mesmo objetivo de controle. Já para as variáveis manipuladas as restrições se encontram na forma de saturação impostas tanto pelos limites físicos do atuador, como limites econômicos visando o gasto mínimo de matéria-prima. Para as variáveis controladas, além das restrições que não podem ser violadas, chamadas de *hard-constraints*, é possível especificar restrições que podem ser temporariamente violadas, *soft-constraints*, permitindo uma maior flexibilidade para o controlador a fim de garantir os objetivos finais estabelecidos pelo problema de controle.

O modelo do processo tem um papel fundamental na utilização do controle preditivo, pois visa estimar os processos num intervalo futuro, pré-definido. A escolha desse modelo deve ser capaz de capturar a dinâmica do processo e prever as ações futuras com implementação simples.

Controladores preditivos são capazes de garantir ao processo estabilidade, robustez e operação com restrições superando assim outras técnicas de controle avançado, podendo ainda ter a versatilidade de trabalhar em faixas de operação.

Camacho e Bordons (1999) comparam a estratégia do controlador preditivo com a estratégia usada para dirigir um carro: o motorista sabe a trajetória de referência até um horizonte finito de controle e, levando em conta as características do carro (modelo do carro) decide que ações de controle (acelerador, freio e direção) devem ser levadas em conta para seguir essa trajetória. Apenas a primeira ação de controle é utilizada em cada instante, e o processo é repetido nas próximas ações num modo chamado de horizonte deslizante. Já para o controle clássico Proporcional-Integral-Derivativo (PID), baseado no erro, a mesma analogia poderia ser feita, mas o que seria tomado como base para as ações futuras seria o espelho retrovisor do carro, ou seja, os erros passados até o instante de medição, embora a ação derivativa confira certa tendência futura da evolução do erro.

Conforme Qin e Badgwell (2003), o controlador preditivo é parte de um nível da hierarquia das funções de controle, e substitui uma série de controladores clássicos, como mostrado na Figura 1.2. Nessa figura, a coluna da esquerda mostra uma estrutura convencional de controle e a da direita uma estrutura utilizando controlador preditivo (MPC). No topo da hierarquia um otimizador global determina os pontos estacionários ótimos para cada unidade da planta. Esses pontos devem ser enviados para otimizadores locais de cada unidade que consideram mais detalhadamente a unidade do que o nível global. Os otimizadores locais computam um ótimo econômico e enviam para um nível inferior que move a planta minimizando violações das restrições impostas pelo nível superior. Na estrutura convencional, essa etapa é atingida utilizando uma combinação de algoritmos PID, blocos *lead-lag* (L/L) e seletores lógicos (*High/Low*). Já na estrutura utilizando controladores preditivos, essa combinação de blocos é substituída apenas por um controlador MPC.

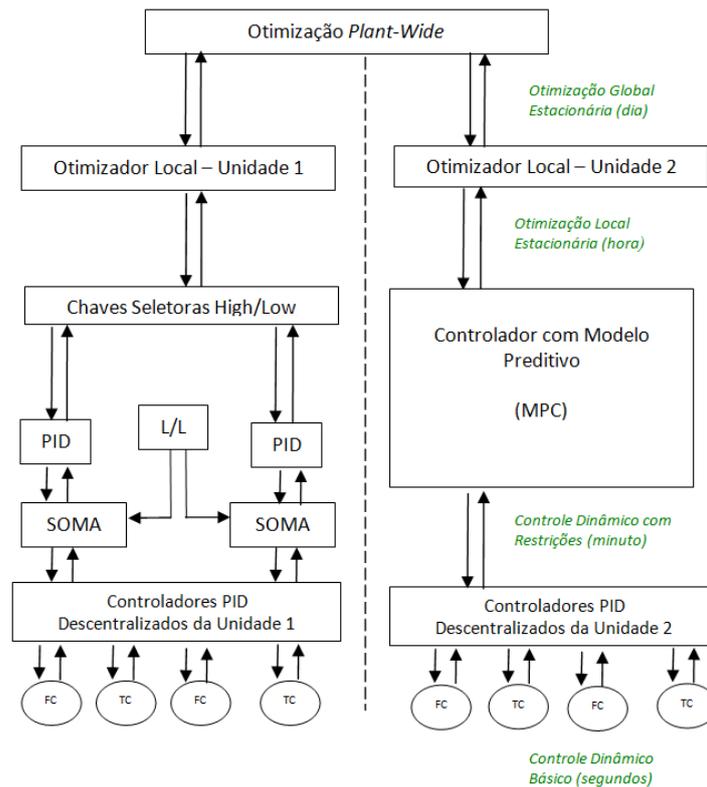


Figura 1.2: Hierarquia de controle (Baseado em Qin e Badgwell, 2003).

O uso de tecnologias que envolvem controle preditivo cresceu rapidamente devido principalmente à ampla variedade de áreas de aplicação que essa técnica abrange como ar e gás, fabricação de produtos químicos, processamento de alimentos, polímeros, têxteis, refino, utilidades e etc. Essas aplicações podem ser tanto para sistemas monovariáveis como para sistemas que possuem centenas de variáveis. Segundo Qin e Badgwell (2003) mais de 4600 aplicações foram reportadas no ano de 2002, mais do dobro reportado cinco anos antes. A maior aplicação é na indústria de petróleo e refino que abrange 67% do total empregado.

Os algoritmos disponíveis oferecem excelentes ferramentas, mas limitações referentes à estabilidade desses algoritmos faz com que técnicas de sintonia e ajuste sejam testadas exaustivamente em malha fechada. Além disso, as poucas técnicas disponíveis falham ao levar em conta sistemas não quadrados, principalmente aqueles com mais variáveis controladas do que manipuladas, operando em faixas ou zonas de controle e restrições operacionais.

O desafio trata-se então de desenvolver técnicas para controle preditivo que contemplem as necessidades que não foram até agora abordadas. Essa nova proposta deve ser de fácil entendimento e com fundamentos teóricos aceitáveis que justificam a sua aplicação.

1.2 MPCs industriais e a problemática do ajuste

Conforme Qin e Badgwell (2003), controladores preditivos industriais possuem particularidades e peculiaridades que diferem da base teórica consolidada sobre MPCs. A

determinação do modelo do processo, o qual se baseia a teoria de controle preditivo, é adotada para controladores comerciais de diversas formas: modelos lineares ou não-lineares, com base empírica e/ou fenomenológica. Dentre os modelos lineares os mais comuns são aqueles formulados através de funções de transferência, resposta degrau, resposta impulso, modelos auto regressivos e espaço de estados. Além disso, outra prática industrial é a utilização de *soft-constraints* ao invés de *setpoint*, onde geralmente o número de variáveis controladas é maior que o número de variáveis manipuladas e, em alguns casos, o mesmo controlador possui diferentes considerações para cada variável onde o problema de controle se altera entre cenários quadrados e não quadrados.

A utilização de camadas de otimização simplificadas e otimização em tempo real (RTO), que calculam os valores ótimos estacionários para as variáveis manipuladas, também configuram peculiaridades industrialmente utilizadas, que por vezes não são abrangidas nas metodologias de ajuste.

Na indústria, os algoritmos disponíveis que utilizam diferentes combinações e práticas operacionais devem ser levados em conta para a determinação de metodologias de ajuste. Essa precaução deve ser tomada visando à obtenção de metodologias que abranjam qualquer técnica de controle preditivo de forma satisfatória, uma vez que a conversão (ou aproximação) do modelo empregado para o modelo utilizado nas metodologias disponíveis não garante o melhor desempenho atingível para o controlador.

1.3 Objetivos do trabalho

Os principais objetivos desse trabalho são:

- Desenvolver um método de ajuste de controladores preditivos para sistemas não quadrados, com foco principal naqueles com mais variáveis controladas do que manipuladas, ou seja, com número negativo de graus de liberdade;
- Desenvolver e implementar uma sistemática para sintonizar MPC que operem por faixa e/ou *setpoint* que seja de fácil entendimento e utilização;
- Essa metodologia deverá proporcionar uma operação robusta, que opere em qualquer ponto de operação em qualquer subsistema da unidade de forma estável;
- Desenvolver um estudo de caso rico em comportamentos dinâmicos e possíveis configurações que seja capaz de ilustrar adequadamente a metodologia de ajuste desenvolvida neste trabalho. Esse estudo de caso apresenta comportamento de fase não mínima multivariável e elevado grau de acoplamento;
- Implementar diferentes configurações de MPCs incluindo camada de otimização econômica para ilustrar tanto a técnica de ajuste desenvolvida, quando a versatilidade da planta desenvolvida como estudo de caso.

1.4 Estrutura da dissertação

Essa dissertação apresenta-se dividida em 6 capítulos.

No Capítulo 2 é abordado o controle preditivo baseado em modelo (MPC) e as principais metodologias de ajuste disponíveis, base teórica principal do desenvolvimento da pesquisa.

O Capítulo 3 apresenta o desenvolvimento da metodologia do ajuste de controladores preditivos multivariáveis para sistemas que operam em *setpoints* e faixas (ou zonas) de operação, aplicável para sistemas quadrados e não quadrados, com mais variáveis controladas do que manipuladas, e com restrições operacionais, foco principal do trabalho.

No capítulo 4 é descrita a unidade proposta para os testes dos métodos de ajuste aqui desenvolvidos, além as características que a torna um modelo adequado para o estudo, comparável com uma unidade industrial real. Essa unidade é analisada, juntamente com todos os casos e subcasos, e comparada com os modelos lineares que serão utilizados no desenvolvimento do controlador.

No capítulo 5 são feitos testes da metodologia de ajuste desenvolvida no estudo de caso desenvolvido no capítulo 4, para algumas das configurações possíveis. Os ajustes obtidos com a metodologia proposta são comparados com outras sistemáticas de ajuste normalmente empregadas.

O capítulo 6 apresenta as considerações finais, conclusões da pesquisa e sugestões para trabalhos futuros.

Capítulo 2 – Revisão Bibliográfica

Como forma de diminuir a variabilidade dos processos, estratégias de controle avançado foram amplamente desenvolvidas, garantindo assim um maior retorno econômico e uma melhor qualidade dos produtos obtidos. O controle preditivo baseado em modelo (MPC) surgiu como uma alternativa frente ao controle clássico, onde ações de controle baseadas em um modelo do processo são tomadas, conferindo a especificação desejada para as variáveis controladas.

Nesse capítulo será apresentado um breve histórico sobre a evolução dos controladores e a definição da estratégia de controle preditivo baseado em modelo. Por fim, são apresentados os principais algoritmos que utilizam o controle preditivo e metodologias para sintonia de MPCs.

2.1 Pequeno Histórico da Evolução dos Controladores

Os controladores surgiram com a revolução industrial e seus desenvolvimentos recentes estão fortemente atrelados aos computadores digitais. Para se ter uma perspectiva dos desenvolvimentos históricos envolvendo controladores, esta seção irá apresentar sucintamente os principais marcos históricos e está baseada no livro “*Modern Control Systems*” (Dorf e Bishop, 2004) e na Dissertação “Abordagem Inovadora no projeto de controladores PID” (Faccin, 2004).

Com o surgimento das máquinas a vapor no século XVIII, a principal forma de energia até então disponível, que era o trabalho humano ou de animais, foi substituída. Com o aumento da demanda, a necessidade de dosar essa energia e evitar a exposição ao perigo, técnicas de controle automático foram desenvolvidas.

O primeiro controlador automático industrial foi inventado em 1775, por James Watts, e tratava-se de um regulador centrífugo para o controle de velocidade das máquinas a vapor. Essa invenção puramente empírica prevaleceu até 1868 quando Clerk Maxwell, utilizando cálculo diferencial, estabeleceu a primeira análise matemática do comportamento de um sistema máquina-regulador. Na sequência, E.J. Routh (1877) e A. Hurwitz (1885), de forma independente, criaram critérios de estabilidade esses sendo explorados para sistemas não lineares em 1896 por A.M. Lyapunov.

Em 1914 Edgar Bristol protocolou o pedido da patente de um amplificador bocal-palheta, o qual era capaz de prover a ação proporcional e Morris E. Leeds obteve em 1920 uma patente de um controlador eletro-mecânico com ação integral. No entanto, houve certa dificuldade de combinar as duas ações de controle, sendo a primeira versão comercial de um controlador PI disponível apenas em 1929. Em 1935, Ralph Clarridge da "Taylor Instrument Companies" criou o controlador de três termos, ao utilizar um controlador que antecipava a variação do sinal do erro para solucionar um problema de oscilação de uma malha de controle de temperatura. Essa funcionalidade era chamada de "pre-act" e foi testada apenas em casos especiais até 1939, quando uma versão nova do controlador PID foi oferecida como padrão nos sistemas de controle da empresa.

A maior dificuldade para a difusão nos processos industriais dos controladores PID foi causada principalmente pela inexistência de regras simples para a sintonia dos parâmetros desse controlador. Visando resolver esse problema através do artigo "Optimum Settings for Automatic Controllers", em 1942, J.G. Ziegler e N.B. Nichols apresentaram dois procedimentos para a sintonia dos controladores através de regras simples de ajuste, baseadas em características dinâmicas do processo.

Durante a década de 60, o termo controle avançado era designado para qualquer técnica que diferenciava do controlador clássico PID. Técnicas de sintonia baseadas *Generalized minimum variance* (GMV) serviram como base para o desenvolvimento do chamado *Model Predictive Control* (MPC), que obteve grande aceitação na indústria. O controle preditivo atraiu também pesquisadores principalmente devido ao desempenho e a capacidade de controlar processos com dinâmica mais complexa que incluíam fatores de fase não mínima, longo tempo morto e características instáveis em malha aberta e superando o controlador PID ao lidar com restrições operacionais.

O conceito de MPC, propriamente dito, provém da década de 70 quando engenheiros da *Shell Oil* desenvolveram seus próprios MPCs com a primeira aplicação em 1973. Richalet foi o pioneiro da aplicação das técnicas de controle preditivo através do "Identification and Command algorithm" (IDCOM) e posteriormente "Model Algorithmic Control" (MAC). O IDCOM foi melhorado através do desenvolvimento do algoritmo DMC ("Dynamic Matrix Control") proposto por Cutler e Ramaker em 1980, assim como o método "Generalized Predictive Control" (GPC), desenvolvido por Clarke *et al.* (1987).

Em 1988, Keyser *et al.* apresentou um estudo comparativo de controle preditivo auto adaptado de longo range (LRPC) focando em robustez, variação de parâmetros, ruído e variações de tempo morto. Já em 1989, Garcia *et al.* apresentou uma pesquisa que incluía técnicas para controle preditivo, apresentando as vantagens em design e implementação e a relação entre controle linear e quadrático. Essas pesquisas apresentaram os efeitos de robustez e aplicação em sistemas não lineares.

Desde então, novos algoritmos para controle preditivo foram explorados e adaptados, tornando essa estratégia de controle uma das mais adequadas para a indústria.

2.2 Controle preditivo baseado em modelo

O controle preditivo, criado no final dos anos 70, é uma técnica de controle avançado, bastante difundida na indústria de processos. A razão para esse sucesso se deve ao fato do MPC lidar de forma natural com o controle multivariável, restrições operacionais, processos com fase não mínima, mudanças nos parâmetros do sistema (controle robusto), integrar técnicas de controle ótimo, controle estocástico, processos com tempo morto, inclusão de objetivos econômicos na função custo, etc. (Camacho e Bordons, 1999).

As ideias principais do controle preditivo estão baseadas no uso explícito de um modelo para prever a saída do processo num tempo futuro, calculando a partir desse modelo uma sequência de ações que minimizam uma função objetivo. A performance do controlador depende principalmente da qualidade com que o modelo proposto captura a dinâmica do processo e da importância relativa entre as variáveis controladas e manipuladas, dadas pelo ajuste (Maciejowski, 2002).

O grande avanço desse tipo de controlador está na capacidade de determinar ações de controle com base na previsão do que acontecerá na planta, e não apenas em função de um erro medido (Duraiski, 2001).

Conforme Holkar e Waghmare (2010), o controle preditivo está alicerçado em três características básicas:

1. Uso explícito de um modelo para prever a saída do processo ao longo de um horizonte de tempo futuro;
2. Cálculo de uma sequência de ações de controle que otimiza um índice de performance;
3. Estratégia do horizonte deslizante, que em cada instante de tempo o horizonte se move no futuro, aplicando a primeira ação de controle da sequência calculada em cada passo.

Segundo Camacho e Bordons (1999), as principais vantagens do MPC são:

- Pode ser utilizado para uma grande variedade de processos, desde aqueles com dinâmicas simples até os mais complexos, incluindo sistemas com tempo morto, instáveis e de fase não mínima;
- Permite implementação fácil de controladores multivariáveis;
- Possui compensação para tempo morto;
- Introduce o conceito de controle *feedforward* para compensar distúrbios medidos;
- As restrições são sistematicamente incluídas na formulação do processo.

A utilização das restrições é sem dúvida a principal vantagem da utilização dessa estratégia, pois na maioria dos processos industriais as plantas trabalham com restrições operacionais relacionadas a custos diretos e custos de energia que devem ser minimizados e mantidos no menor valor possível. Nas variáveis manipuladas, as restrições são na maioria das vezes na forma de saturação: válvulas com finita faixa de operação,

vazões com valores máximos devido à capacidade nominal das bombas e taxas de variação de atuadores (Maciejowski, 2002).

Em alguns casos, a referência a ser seguida não é dada por um ponto na saída do processo, mas sim uma faixa em que as variáveis de saída devem permanecer dentro na maioria do tempo. Quando o interesse é qualidade do produto final a ser obtido, essa região aceitável para as variáveis de saída pode não ser válida, mas quando se trata de outras variáveis como pressão, temperatura e nível, que podem ser tratadas em faixa, o controle preditivo atua superando essa falha que possuem os controladores baseados em erro. Para sistemas sem graus de liberdade a substituição de zonas de controle no lugar de *setpoint* surge naturalmente por razões econômicas, para sistemas que podem operar em faixas (Ferramosca *et al.*, 2010).

As desvantagens da utilização do MPC são a elevada carga computacional necessária, principalmente para os casos com restrições e a necessidade de um modelo apropriado do processo, que consiga representá-lo de forma adequada. A construção do algoritmo é baseada no conhecimento do modelo e é afetada pelas discrepâncias existentes entre o processo real e o modelo utilizado.

2.2.1 Problema de Controle

O controle preditivo multivariável é um algoritmo de controle, industrialmente adotado na versão discreta, e sua metodologia se baseia na predição em cada instante de tempo, através da utilização de um modelo, das saídas do processo para um determinado horizonte, P , chamado horizonte de predição. As ações de controle são calculadas em cada instante de amostragem através da minimização de uma função objetivo, a fim de manter o processo mais perto possível da trajetória de referência, ao longo de um horizonte de controle, M . A variação dessas variáveis pode também ser incluída na função objetivo a ser minimizada, e somente a primeira ação de controle é enviada ao processo. No próximo instante de amostragem todo o procedimento é repetido, sendo essa técnica chamada de “Horizonte Deslizante”. Tal procedimento é ilustrado na Figura 2.1, onde esse procedimento pode ser visualizado.

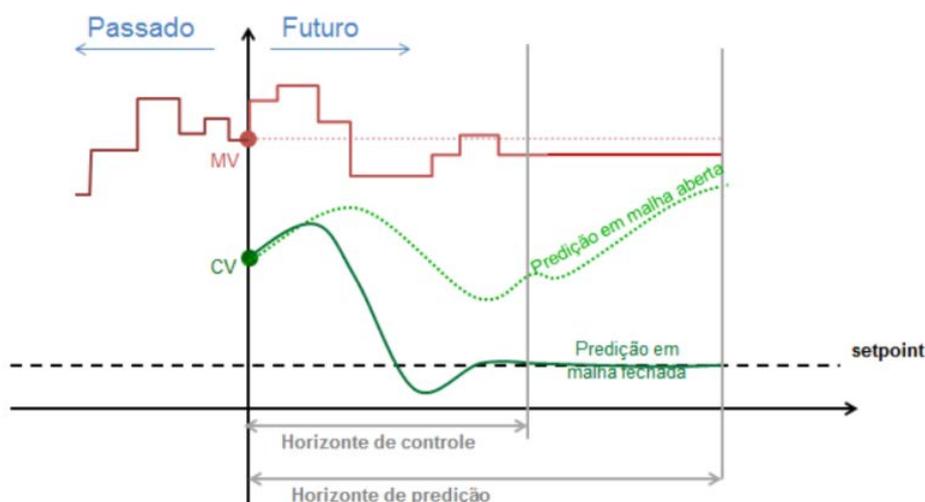


Figura 2.1: Diagrama representativo de um MPC Típico (Fonte: Botelho, 2015).

Na Figura 2.1 é apresentada a trajetória de referência ou *setpoint*, a ser seguida pelo modelo em malha fechada. As ações de controle são computadas até o horizonte de controle M , e posteriormente mantidas constantes até o horizonte de predição P .

A cada instante de amostragem, é resolvido um problema de otimização expresso pela Equação 2.1. Essa equação penaliza o desvio da variável de processo, controlada, em relação à variável de referência, esforço das variáveis manipuladas para atingir o objetivo de controle, o desvio da variável manipulada em relação a um *target* (quando esse existe) e a violação da faixa de operação.

$$\min_{u, \varepsilon_k} J = \min_{u, \varepsilon_k} \left(\sum_{j=1}^M \|u(t+j|t) - u_{target}(t+j|t)\|_{W_u}^2 + \sum_{j=1}^P \|\hat{y}(t+j|t) - r(t+j|t)\|_Q^2 + \sum_{j=1}^M \|\Delta u(t+j-1|t)\|_W^2 + \rho_\varepsilon \varepsilon_k^2 \right) \quad (2.1)$$

sujeito à

$$\begin{aligned} u_{min[1]}^{[M]} &\leq u_{[1]}^{[M]} \leq u_{máx[1]}^{[M]} \\ -\Delta u_{min[1]}^{[M]} &\leq \Delta u_{[1]}^{[M]} \leq \Delta u_{máx[1]}^{[M]} \\ \hat{y}_{min[1]}^{[P]} - \varepsilon_k &\leq \hat{y}_{[1]}^{[P]} \leq \hat{y}_{máx[1]}^{[P]} + \varepsilon_k \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde $u(t+j|t)$ são as ações de controle futuras calculadas, $u_{target}(t+j|t)$ é o target (valor de referência) para as variáveis manipuladas, $\hat{y}(t+j|t)$ é a saída predita pelo modelo, $r(t+j|t)$ é o *setpoint*, $\Delta u(t+j-1|t) = u(t) - u(t-1)$ é o esforço das variáveis de controle, W_u , Q e W são matrizes de peso para as variáveis manipuladas, variáveis controladas e supressão do movimento, ρ_ε é o peso da penalização por violação da *soft-constraint*, ε_k é a máxima folga de desvio da faixa, que quantifica o pior caso de violação das variáveis controladas e $\|x\|_W^2 = x^T W x$ é a norma-peso euclidiana de x .

A ausência de alguns termos do índice representado pela Equação 2.1, ocorre ao considerar casos particulares de problemas de controle. Quando não há *target* para as variáveis manipuladas, por exemplo, o termo correspondente a essa penalização é desconsiderado (ou os pesos da matriz W_u são iguais à zero), ocorrendo o mesmo para a penalização por violação quando não são consideradas faixas de operação ao invés de *setpoint*.

A escolha do tempo de amostragem (t_s), horizonte de predição (P), horizonte de controle (M), as matrizes de peso (W_u , Q e W) e a penalização das restrições brandas (*soft-constraint*, (ρ_ε)) consistem nos parâmetros de sintonia para o controlador MPC.

Na Figura 2.1 o objetivo de controle foi representado como forma de trajetória de referência, dada pelo *setpoint*, que deve ser seguido pela variável ou pelas variáveis de saída. Em algumas aplicações o valor exato para essas variáveis não é importante

podendo permanecer dentro de faixas específicas, ou “zonas”, como ilustra a Figura 2.2. A utilização dessa estratégia através de zonas de controle ocorre principalmente quando não há graus de liberdade suficientes para atingir o objetivo dado através de uma trajetória específica.

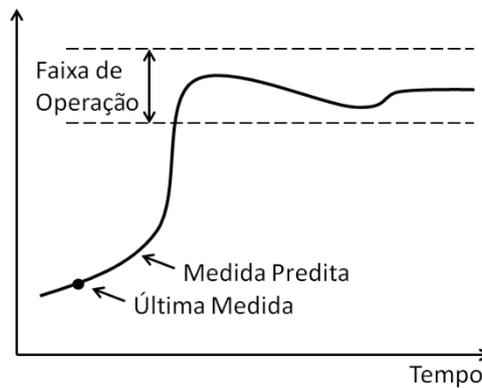


Figura 2.2: Faixas de Operação (Fonte: Maciejowski, 2002).

Para atingir o objetivo de controle através das faixas, é necessário considerar o valor $Q(i) = 0$, ou seja, fazer com que o valor da variável de saída não seja penalizado ao divergir do valor de referência (*setpoint*), deixando que apenas as restrições nas variáveis controladas definam os objetivos de controle (Maciejowski, 2002). Essas restrições, chamadas de *soft-constraints* podem ser violadas temporariamente, visando atingir o objetivo final de controle. Quando a variável controlada encontra-se dentro da faixa de operação a penalização é zero, ocorrendo apenas quando há a violação. Ao considerar um sistema operando em faixas, há a inclusão de uma folga (ε_k) nas restrições violáveis ($y_{m\acute{a}x}$ e $y_{m\acute{i}n}$), que indica a distância violável para as variáveis controladas até o novo limite de operação (inviolável) chamado de *hard-constraint*.

Outras variações da trajetória de referência como afunilamento, que se assemelha a faixa de restrição, exceto o fato de tornar-se mais estreita ao longo do horizonte de predição podem ser utilizadas nessa técnica de controle.

2.2.2 Algoritmos para MPC

Dentre os algoritmos disponíveis para controle preditivo, os mais populares e que possuem maior difusão na indústria são: *Dynamic Matrix Control* (DMC) e *Generalized Predictive Control* (GPC) (Camacho e Bordons, 1999).

Dynamic Matrix Control (DMC)

Criado em 1979 por Cutler e Ramaker, a matriz dinâmica de controle é um algoritmo para controle preditivo multivariável sem restrições baseado na representação do modelo através de resposta degrau.

Assumindo $\beta = [\beta(1), \beta(2), \beta(3), \dots, \beta(n)]^T$ como forma de representar a resposta ao degrau unitário obtida para um processo, como mostrado na Figura 2.3, os elementos desse vetor representam a mudança observada na saída do processo em n instantes

discretos de mesma amostragem e duração, após uma perturbação do tipo degrau unitário na variável de entrada (Ogunnaike, 1986).

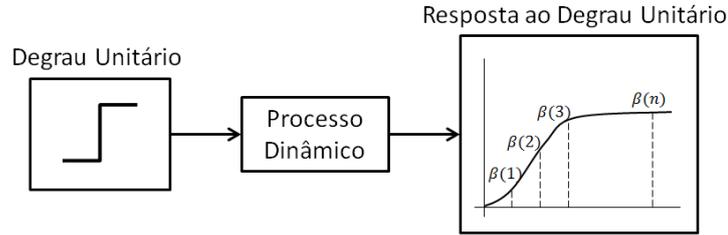


Figura 2.3: Resposta Degrau unitário.

Assumindo o instante atual como k , na ausência de qualquer ação de controle (“free response”), o modelo prediz que a saída do processo será da forma:

$$\hat{y}^0(k) = [\hat{y}^0(k+1), \hat{y}^0(k+2), \dots, \hat{y}^0(k+p)]^T \quad (2.3)$$

onde p é o horizonte de predição.

Considerando um modelo linear, aplica-se o princípio da superposição, e a representação da resposta degrau indica que para uma sequência arbitrária de m ações de controle $\Delta u(k), \Delta u(k+1), \Delta u(k+2), \dots, \Delta u(k+m-1)$ causará no sistema uma mudança a partir do estado inicial, $\hat{y}^0(k)$, para um novo estado:

$$\hat{y}(k+1) = [\hat{y}^1(k+1), \hat{y}^1(k+2), \hat{y}^1(k+3), \dots, \hat{y}^1(k+p)]^T \quad (2.4)$$

Essas saídas podem ser representadas da seguinte forma:

$$\hat{y}(k+1) = \hat{y}^0(k) + \beta \Delta u(k) + w(k+1) \quad (2.5)$$

onde $w(k+1)$ representa o efeito coletivo dos distúrbios não medidos nas variáveis de saída, $\Delta u(k) = [\Delta u(k), \Delta u(k+1), \dots, \Delta u(k+m-1)]^T$ é o valor do degrau em m pontos que começam no tempo k . A matriz β , chamada de matriz dinâmica, é dada pela Equação 2.6.

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta(1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \beta(2) & \beta(1) & 0 & \dots & 0 \\ \beta(3) & \beta(2) & \beta(1) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta(m) & \beta(m-1) & \beta(m-2) & \dots & \beta(1) \\ \beta(m+1) & \beta(m) & \beta(m-1) & \dots & \beta(2) \\ \beta(p) & \beta(p-1) & \beta(p-2) & \dots & \beta(p-m+1) \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Essa matriz é formada por m colunas da resposta degrau do sistema, $\Delta u(k)$ representa o vetor m -dimensional de ações de controle e $w(k+1)$ é o vetor do efeito coletivo de distúrbios.

Considerando a trajetória desejada para o problema como $y^*(k+1)$ e fazendo algumas simplificações, obtém-se:

$$\hat{y}^0(k) + \beta \Delta u(k) + w(k+1) = y^*(k+1) \quad (2.7)$$

$$e(k+1) \triangleq y^*(k+1) - [\hat{y}^0(k) + w(k+1)] \quad (2.8)$$

$$\beta \Delta u(k) = e(k+1) \quad (2.9)$$

A Equação 2.9 representa o modelo final para o algoritmo DMC sem restrições. A parte à direita da equação representa o desvio predito entre a planta e o *setpoint* na ausência de ações de controle, e a parte esquerda, uma mudança no incremento a ser observada na planta como resultado de uma sequência de ações de controle, $\Delta u(k)$. Esse problema é resolvido encontrando um vetor $\Delta u(k)$, que minimiza a norma euclidiana entre o vetor da esquerda (o que o processo pode alcançar) e o da direita (o que é exigido pelo processo). O problema de otimização é dado por:

$$\min_{\Delta u(k)} \phi = \min_{\Delta u(k)} \{ [e(k+1) - \beta \Delta u(k)]^T [e(k+1) - \beta \Delta u(k)] + K^2 [\Delta u(k)^T \Delta u(k)] \} \quad (2.10)$$

onde $K^2 [\Delta u(k)^T \Delta u(k)]$ representa uma penalização por ações excessivas de controle. A equação analítica que representa a sequência de ações de controle, penalizando o excesso de movimento das variáveis manipuladas, K^2 , é representada pela Equação 2.11.

$$\Delta u(k) = (\beta^T \beta + K^2 I)^{-1} \beta^T e(k+1) \quad (2.11)$$

Lembrando que, em todas as estratégias de predição, apenas o primeiro elemento do vetor $\Delta u(k)$ é enviado à planta, caracterizando o chamado horizonte deslizante.

O modelo até aqui descrito representa um caso SISO, mas as mesmas características são observadas para o caso multivariável. As equações que representam o algoritmo DMC permanecem as mesmas, diferindo apenas nas dimensões dos vetores e matrizes.

Quando as restrições são envolvidas no problema, a formulação deve ser adaptada a fim de introduzir no problema de otimização essas restrições, reescrevendo o problema como uma programação quadrática (QP), com restrições.

Generalized Predictive Control (GPC)

Método proposto por Clarke *et al.* (1987) propõe uma estratégia para controle preditivo que abrange problemas relacionados à fase não mínima, plantas instáveis em malha aberta, plantas com tempo morto variável ou desconhecido e plantas com ordem desconhecida.

Considerando um sistema regulatório em um ponto de operação particular, o modelo linearizado pode ser descrito como:

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t-1) + x(t) \quad (2.12)$$

onde A e B são polinômios do operador de deslocamento para trás, q^{-1} :

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_{na} q^{-na} \quad (2.13)$$

$$B(q^{-1}) = b_0 + b_1q^{-1} + \dots + b_{nb}q^{-nb} \quad (2.14)$$

Na Equação 2.12, $u(t)$ representa as ações de controle, $y(t)$ é a variável de saída e $x(t)$ é o distúrbio, dado da seguinte forma:

$$x(t) = C(q^{-1})\xi(t) \quad (2.15)$$

onde $\xi(t)$ é uma sequência randômica sem correlação. Combinando as Equações 2.12 e 2.15 obtêm-se o modelo *Controlled Auto-Regressive and Moving-Average* (CARMA):

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t-1) + C(q^{-1})\frac{\xi(t)}{\Delta} \quad (2.16)$$

Como forma de corrigir os distúrbios na planta, o operador $\Delta = 1 - q^{-1}$, é adicionado na definição. Na prática, dois distúrbios principais são encontrados: degraus randômicos em tempos randômicos e movimento Browniano (em plantas com balanço de energia).

A fim de simplificar o problema, adota-se $C(q^{-1}) = 1$, ou alternativamente, o valor é truncado e absorvido nos polinômios A e B .

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t-1) + \frac{\xi(t)}{\Delta} \quad (2.17)$$

Para considerar um preditor $y(t+j)$ torna-se necessário considerar a identidade:

$$1 = E_j(q^{-1})A\Delta + q^{-j}F_j(q^{-1}) \quad (2.18)$$

onde E_j e F_j são polinômios exclusivamente definidos para $A(q^{-1})$ e o horizonte de predição j . Multiplicando a Equação 2.17 por $E_j\Delta q^j$ e substituindo os valores de $E_jA\Delta$, tem-se:

$$E_jA\Delta y(t+j) = E_jB\Delta u(t+j-1) + E_j\xi(t+j) \quad (2.19)$$

$$y(t+j) = E_jB\Delta u(t+j-1) + F_j y(t) + E_j\xi(t+j) \quad (2.20)$$

Como o grau do polinômio $E_j(q^{-1}) = 1 - j$, o ruído presente na Equação 2.20 está no futuro, e a predição do modelo fica:

$$\hat{y}(t+j|t) = G_j\Delta u(t+j-1) + F_j y(t) \quad (2.21)$$

onde $G_j(q^{-1}) = E_jB$. Observe que $G_j(q^{-1}) = \frac{B(q^{-1})[1 - q^{-j}F_j(q^{-1})]}{A(q^{-1})\Delta}$, e uma forma de computar o valor de G_j é simplesmente considerar a transformada z da resposta degrau da planta e tomar os primeiros j termos.

A fim de resolver as equações ao longo do horizonte de predição é proposta a Equação de Diophantine, que obtém os polinômios E_{j+1} e F_{j+1} a partir dos valores de E_j e F_j .

Supondo um *setpoint* geralmente constante [$w(t+j)$; $j = 1, 2, \dots$] disponível, a função custo a ser minimizada é dada da seguinte forma:

$$J(N_1, N_2) = E\left\{\sum_{j=N_1}^{N_2} [y(t+j) - w(t+j)]^2 + \sum_{j=1}^{N_2} \lambda(j)[\Delta u(T+j-1)]^2\right\} \quad (2.22)$$

Dessa forma, as equações para a predição da saída do modelo podem ser escritas como:

$$\hat{y} = G\tilde{u} + f \quad (2.23)$$

Onde os vetores que formam essa equação são de tamanho $N \times 1$:

$$\hat{y} = [\hat{y}(t+1), \hat{y}(t+2), \dots, \hat{y}(t+N)]^T \quad (2.24)$$

$$\tilde{u} = [\Delta u(t), \Delta u(t+1), \dots, \Delta u(t+N-1)]^T \quad (2.25)$$

$$f = [f(t+1), f(t+2), \dots, f(t+N)]^T \quad (2.26)$$

A matriz G , é então uma matriz triangular inferior de dimensão $N \times N$:

$$G = \begin{bmatrix} g_0 & 0 & \dots & 0 \\ g_1 & g_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{N-1} & g_{N-2} & \dots & g_0 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Cabe-se observar que se a planta possuir tempo morto $k > 1$, as primeiras $k - 1$ linhas de G serão nulas a não ser que o valor de N_1 seja igual ao k elemento não nulo. Assim, a expressão da função custo, é reescrita conforme a Equação 2.28.

$$J_1 = E\{J(1, N)\} = E\{(G\tilde{u} + f - w)^T(G\tilde{u} + f - w) + \lambda\tilde{u}^T\tilde{u}\} \quad (2.28)$$

A minimização de J_1 é feita sem a inclusão de restrições nas ações de controle futuras, e o vetor de entradas é calculado como:

$$\tilde{u} = (G^T G + \lambda I)^{-1} G^T (w - f) \quad (2.29)$$

Lembrando que o sinal de controle enviado ao processo é o primeiro elemento do vetor \tilde{u} . Se não houver erros futuros preditos, ou seja, $w - f = 0$, não haverá ações de controle, considerando que as ações são tomadas baseadas no erro futuro e não nos erros passados. O problema de programação quadrática (QP) surge ao considerar as restrições no problema de controle.

2.3 Sintonia de controladores MPC

Apesar de apresentar algumas vantagens frente ao controle clássico (PID), o controlador preditivo possui a desvantagem de possuir um número elevado de parâmetros de ajuste. Ressalta-se que o melhor ajuste para o controlador preditivo está baseado num modelo adequado do processo, ou seja, um modelo que consiga capturar a dinâmica de forma coerente.

Se o controlador preditivo não tiver uma boa sintonia, ele pode não contribuir para reduzir a variabilidade das variáveis controladas mais importantes do processo. Assim, ao invés de ajudar, ele pode até mesmo aumentar as oscilações e dificultar a otimização da planta industrial (Campos, Gomes e Perez, 2013).

Os parâmetros de sintonia do controlador MPC são o horizonte de predição mínimo (P_0) e máximo (P), horizonte de controle (M), tempo de amostragem (t_s), peso do erro das variáveis controladas (Q), peso da supressão do movimento (W), peso da penalização por violação da *soft-constraint* (ρ_ϵ) e peso das variáveis manipuladas (W_u). As matrizes W_u , Q , W e a penalização por violação, ρ_ϵ , podem variar ou não com o tempo. Cabe ressaltar que alguns parâmetros de ajuste, podem ou não aparecer na função a ser minimizada dependendo do problema proposto.

Garriga e Soroush (2010) destacam duas noções fundamentais que devem ser levadas em conta ao sintonizar um MPC:

- A primeira sintonia é desenvolver um modelo apropriado do processo. Se o modelo é suficientemente preciso, os demais parâmetros serão de fácil sintonia. Caso o controlador apresente mau desempenho, a primeira medida a ser tomada é analisar o modelo do processo e identificar as falhas, caso existam.
- O equilíbrio entre robustez e performance. Rápido desempenho em malha fechada requer um modelo representativo da faixa de operação da malha de controle. A maioria dos usuários de controle preditivo deseja que o controlador permaneça estável com a mudança do ponto operacional.

Conforme Trierweiler e Farina (2003), cada parâmetro de ajuste tem uma função específica na sintonia do controlador MPC, e são:

O Horizonte de predição mínimo (P_0) e máximo (P), marcam os limites de tempo inicial e final (em amostragem) em que é desejado que a saída siga o sinal de referência. Se um valor alto de P_0 é estabelecido, os erros nos primeiros instantes serão negligenciados provocando uma resposta suave na saída do processo. Processos com tempo morto e resposta inversa não necessitam valores de P_0 menores que eles, pois a saída irá evoluir após esse tempo. O horizonte de predição máximo (P) deve ser igual ou ligeiramente menor que o tempo de assentamento do processo em malha aberta, em amostragem, garantindo assim a captura de todo o desenvolvimento dinâmico da planta até a estabilidade.

O Horizonte de controle (M) deve ser $M \leq P$. O valor desse parâmetro especifica os graus de liberdade em ações de controle. Depois de M intervalos de amostragem, os incrementos de controle são nulos, ou seja, fornecem um valor constante à planta. Em algoritmos GPC o valor de M deve ser pelo menos igual ao número de polos instáveis da planta, e para sistemas estáveis pelo menos $M = 1$ deve ser usado. Um cuidado especial deve ser tomado ao adotar $M = P$ e $W = 0$, pois nesse caso o MPC se reduz a um controlador de variância mínima que é instável em processos com fase não mínima. Uma boa escolha para esse parâmetro é $M = P/4$, que indica um bom compromisso entre desempenho e estabilidade.

É importante observar que os parâmetros P_0 , P e M possuem influência direta no tamanho das matrizes utilizadas para computar as ações de controle, logo são responsáveis pela carga computacional envolvida no problema de controle.

O tempo de amostragem (t_s) deve ser o primeiro a ser escolhido, pois a partir dele serão escolhidos os horizontes de predição e de controle. Seu valor é escolhido conforme o tempo de subida da planta em malha aberta, utilizando um número mínimo de sete

tomadas de amostra nesse tempo. Esse número de tomadas de amostra é adequado, pois captura a evolução do sistema, sem elevar a carga computacional ao utilizar muitos pontos, e sem desconsiderar parcelas importantes da dinâmica do processo. É também apropriado relacionar o tempo de amostragem com a largura de banda de malha fechada ou com a função de desempenho alcançável do sistema retroalimentado f_c , quando não há um controlador, pois esse representa a velocidade que a retroalimentação irá admitir o comando de entrada. O intervalo que deve ser escolhido encontra-se na Equação 2.30.

$$\frac{1}{30f_c} < t_s < \frac{1}{5f_c} \quad (2.30)$$

As matrizes de peso W_u , Q e W são diagonais em que os elementos são ajustados a fim de atingir o desempenho desejado em malha fechada e escalonar as variáveis de entrada e saída, fazendo as unidades das variáveis medidas e controladas comparáveis. W_u é utilizada quando são utilizados *targets* ou valores-alvo para as variáveis manipuladas. A matriz Q é usada para ajustar a saída das variáveis, ou seja, o aumento desse parâmetro torna mais importante a ação que garante o valor medido próximo (ou igual) ao *setpoint*. Já a matriz W é aplicada a fim de penalizar excesso de incremento nas ações de controle, feitas pelas variáveis manipuladas. Quanto maior o valor de W , mais lento será a resposta em malha fechada.

A penalização por violação (ρ_ϵ) é utilizada quando é considerado um problema com faixas de operação ao invés de *setpoint*. Esse fator penaliza o desvio das variáveis controladas da faixa onde as violações são permitidas (chamadas de *soft-constraints*). As faixas onde não são permitidas violações são aquelas que entram como restrições rígidas (*hard-constraints*) na função custo do controlador MPC.

Campos, Gomes e Perez (2013) definem o processo de sintonia do controlador preditivo como um trabalho amplo, recomendando os seguintes passos, propostos na Figura 2.4.

As etapas a serem seguidas propostas na Figura 2.4, devem ser levadas em conta sempre que uma nova sintonia é proposta, visando melhorar o desempenho do controlador e conseqüentemente aumentar o lucro, esse sendo o objetivo principal do problema proposto. Geralmente a escolha da pré-sintonia é feita através de métodos que estão baseados em aproximações da planta por função de primeira ordem mais tempo morto, características do processo em malha aberta ou ajustes feitos através de “tentativa e erro”. A utilização de técnicas de “tentativa e erro”, a mais utilizada na indústria, levam na maioria das vezes a obtenção de ótimos locais para as variáveis manipuladas, o que causa problemas relacionados à robustez do controlador por serem estáveis apenas para os cenários em que a sintonia foi proposta.

Existem inúmeros métodos analíticos de sintonia para o controlador preditivo que são baseados em aproximações por modelo de primeira ordem com tempo morto, função de sensibilidade, características do processo em malha aberta ou outras aproximações. Outra abordagem encontrada para a sintonia de MPCs é a utilização de problemas de otimização através da definição de uma ou mais funções objetivo a fim de buscar uma sintonia ótima geralmente resolvida através de algoritmos não lineares.

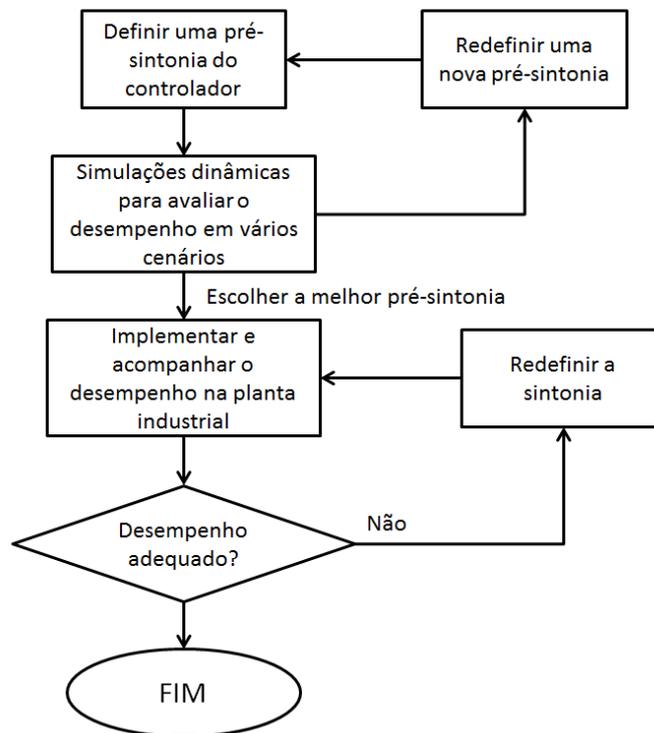


Figura 2.4: Processo sugerido de sintonia do controlador preditivo (Fonte: Campos, Gomes e Perez, 2013).

2.3.1 Métodos de Sintonia de Controlador MPC

O desenvolvimento de algoritmos para controladores preditivos trouxe vantagens em sistemas de controle, principalmente ao trabalhar com o uso de restrições. Essas vantagens trouxeram flexibilidade e também um grande problema para a utilização dessa ferramenta: a sintonia dos inúmeros parâmetros de um MPC. Uma sintonia eficiente garante que as variáveis controladas seguirão a trajetória de referência de forma robusta e com pouco esforço das variáveis manipuladas.

Garriga e Soroush (2010) classificaram os métodos de sintonia em aqueles que possuem fórmulas explícitas para os vários parâmetros baseados em aproximação/simulação da dinâmica do processo ou bandas as quais os parâmetros de ajustes podem estar. Essas fórmulas/bandas são baseadas nos parâmetros da dinâmica do processo em malha aberta. Os métodos de ajuste podem ser *off-line*, ou seja, os parâmetros de ajuste são estimados antes de fechar a malha de controle ou *self-tuning*, que utilizam algoritmos que são executados simultaneamente com a função custo do controlador preditivo.

Os métodos baseados em formulações prontas proporcionam boas orientações para a sintonia de MPCs, com a desvantagem de serem aplicáveis a apenas casos específicos (tanto de plantas como de algoritmos de controle preditivo), surgindo assim uma dificuldade de implementação e tendo ajuste baseados em “tentativa e erro” inevitavelmente adotados (Nery Júnior, Martins e Kalid, 2014).

Com isso, outros métodos de ajuste baseados em problemas de otimização, onde são minimizados índices de desempenho, possuem destaque nos últimos anos, podendo abranger problemas com e sem restrições e a garantia de que a planta se encontra na melhor sintonia.

Horizonte de Predição

O horizonte de predição final P , dado em número de amostragem é definido infinito para garantir a estabilidade do processo (Bitmead, Gevers e Wertz, 1990). Dentre os demais métodos de sintonia para algoritmos DMC, Maurath *et al.* (1988) sugere a escolha de P entre 80 e 90% do valor estacionário do processo. Da mesma forma Maurath, Mellichamp e Seborg (1988) propõem um valor mínimo para esse parâmetro relacionado ao horizonte de controle e ao tempo morto do processo (dado em número de amostragem). Cutler (1983) estabelece o valor de P como a soma do horizonte de controle e do horizonte de modelo e Georgiou, Georgakis e Luyben (1988) sugere a soma dos tempos de subida a 60 e 95% do estado estacionário divididos pelo tempo de amostragem menos 1 para determinar P . Hinde Jr e Cooper (1994) propõe a conversão do modelo em uma função de primeira ordem mais tempo morto a fim de utilizar 5 vezes a constante de tempo do processo mais o valor do tempo morto divididos pela amostragem do problema. Shridhar e Cooper (1998) propõe uma estratégia de sintonia do horizonte de predição para sistemas SISO e MIMO estáveis em malha aberta baseada no condicionamento da matriz A do processo e na aproximação do modelo por uma função de primeira ordem mais tempo morto. Genceli e Nikolaou (1993) propõem uma banda para definição de P que garante estabilidade em malha fechada com restrições nas entradas e saídas e está baseado no máximo entre a diferença da menor e da maior entrada divididos pela máxima variação de entrada ou 1.

Já para algoritmos GPC, Yamuna Rani e Unbehauen (1997) propõe um método de sintonia baseado no máximo tempo morto e no tempo de assentamento do sistema. Banerjee e Shah (1992) sugerem para sistemas estáveis a escolha de P baseado no tempo de subida de 95% do estado estacionário. Karacan, Hapoğlu e Alpbaz (2001) utilizam o máximo entre 10 e o tempo de subida para o horizonte de predição. Clarke e Mohtadi (1989) estabelecem uma faixa baseado na ordem do polinômio A e no tempo de subida de 95% do valor estacionário do processo. Por fim, Trierweiler e Farina (2003) propõe uma estratégia de sintonia baseada no Número de Desempenho Robusto (RPN) do sistema. Se o RPN é baixo é assumido o valor de P igual a 80% do tempo de subida do valor estacionário do processo e se o RPN é alto o valor assumido para P é 90% do tempo de subida.

Essas metodologias, para algoritmos DMC e GPC, estão resumidas na Tabela 2.1.

Horizonte de Controle

O horizonte de controle M é um valor inteiro, que representa o intervalo em que as variáveis manipuladas podem se mover e, posterior a esse tempo, nenhuma ação de controle é calculada. Esse parâmetro afeta o quanto agressivo ou conservativo serão as ações de controle (Garriga e Soroush, 2010). Um horizonte de controle grande gera um controlador com maior desempenho, uma vez que possui mais graus de liberdade, o que permite que ações de controle mais agressivas possam ser calculadas no início e depois possam retornar a valores menores, o que confere um maior desempenho à resposta as custas de uma maior carga computacional, a qual hoje não se constitui de um fator limitante para MPCs lineares. As metodologias para sintonia do horizonte de controle estão resumidas na Tabela 2.2.

Georgiou, Georgakis e Luyben (1988) estabelecem o valor desse parâmetro baseado no tempo que a saída atinge 60% do valor estacionário. Hinde Jr e Cooper (1994) utiliza uma aproximação do modelo do processo por uma função de primeira ordem mais tempo morto e estabelece M como o valor da constante de tempo da aproximação. Da mesma forma, Shridhar e Cooper (1998) através do modelo aproximado do processo propõe uma equação semelhante à utilizada para o cálculo de P diferindo ao multiplicar a constante de tempo do processo por 1 ao invés de 5. Genceli e Nikolaou (1993) estabelecem o valor de M maior ou igual ao máximo da diferença da menor e da maior entrada divididos pela máxima variação de entrada ou 1.

Clarke e Mohtadi (1989) propõe o valor de M menor ou igual ao tempo morto da planta em amostragem. Por fim, Trierweiler e Farina (2003) propõe para algoritmos GPC e DMC o valor de M como 25% do valor do horizonte de predição P .

Tabela 2.1: Métodos de sintonia do Horizonte de Predição (Garriga e Soroush, 2010).

Algoritmo	Valor ou Banda	Referência
DMC	$P = [(t_{80} + t_{90})/2]/T_s$	Maurath <i>et al.</i> (1988)
DMC	$P > M + t_d/T_s$	Maurath, Mellichamp e Seborg (1988)
DMC	$P = M + N$	Cutler (1983)
DMC	$P = t_{60}/T_s + t_{95}/T_s - 1$	Georgiou, Georgakis e Luyben (1988)
DMC	$P = (5\tau_p + t_d)/T_s$	Hinde Jr e Cooper (1994)
DMC	$P = \max(5\tau_{rs}/T_s + k_{rs})$ $k_{rs} = \tau_{d,rs}/T_s + 1$	Shridhar e Cooper (1998)
DMC	$P - 1 \geq \max((u_{max} - u_{min})/\Delta u_{max}, 1)$	Genceli e Nikolaou (1993)
GPC	$P = d_{max} + (t_s/T_s)/3,5$	Yamuna Rani e Unbehauen (1997)
GPC	$P = t_{95}/T_s$	Banerjee e Shah (1992)
GPC	$P = \max(10, t_r/T_s)$	Karacan, Hapoğlu e Alpbaz (2001)
GPC	$2n_a - 1 < P < t_{95}/T_s$	Clarke e Mohtadi (1989)
DMC, GPC	baixo RPN: $P = t_{80}/T_s$ alto RPN: $P = t_{90}/T_s$	Trierweiler e Farina (2003)

Tabela 2.2: Métodos de sintonia do Horizonte de Controle (Garriga e Soroush, 2010).

Algoritmo	Valor ou Banda	Referência
DMC	$M = t_{60}/T_s$	Georgiou, Georgakis e Luyben (1988)
DMC	$M = \tau_p/T_s$	Hinde Jr e Cooper (1994)
DMC	$M = \max(\tau_{rs}/T_s + k_{rs})$ $k_{rs} = \tau_{d,rs}/T_s + 1$	Shridhar e Cooper (1998)
DMC	$M \geq \max((u_{max} - u_{min})/\Delta u_{max}, 1)$	Genceli e Nikolaou (1993)
GPC	$M \leq \tau_d/T_s$	Clarke e Mohtadi (1989)
DMC, GPC	$M \cong P/4$	Trierweiler e Farina (2003)

Pesos nas variáveis de saída

Os pesos nas variáveis de saída são usados para escalonar as variáveis controladas e direcionar maior esforço de controle para as saídas mais importantes a fim de atingir uma resposta rápida e precisa (Garriga e Soroush, 2010). A sintonia dos pesos da variável de saída pode ser estabelecida através da diminuição ou aumento dos valores que compõem a matriz Q devido à importância das variáveis controladas.

Rowe e Maciejowski (1999) propõem uma expressão para a matriz Q de sistemas em fase mínima como o produto do transposto da matriz C . Para sistemas em fase não mínima, Rowe e Maciejowski (2000) estabelecem outra expressão baseada em H_∞ aplicadas em casos não estritamente próprios e casos estritamente próprios. Por fim, Trierweiler e Farina (2003) apresentam uma metodologia de sintonia baseada na direção de saída do zero localizado no semi-plano direito mais perto da origem calculada para o sistema escalonado. Essas metodologias estão resumidas na Tabela 2.3.

Tabela 2.3: Métodos de sintonia para o peso nas variáveis de saída (Garriga e Soroush, 2010).

Algoritmo	Fórmula ou Banda	Referência
Espaço de Estado	$Q = C^T C$	Rowe e Maciejowski (1999)
Espaço de Estado	Caso Não-Estritamente Próprio: $Q = X_\infty - A^T (I + X_\infty B B^T)^{-1} X_\infty A$ $X_\infty = \gamma^2 X W^{-1}$ $W = (\gamma^2 - 1)I - Z X$ $\gamma > \gamma_{min} = (1 + \rho(XZ))^{1/2}$ $X = A^T X A - A^T X B (I + B^T X B)^{-1} B^T X A + C^T C$ $Z = A Z A^T - A Z C^T (I + C Z C^T)^{-1} C Z A^T + B B^T$	Rowe e Maciejowski (2000)
Espaço de Estado	Caso Estritamente Próprio: $Q = C^T C$	Rowe e Maciejowski (2000)
DMC, GPC	$Q_s = 1/(1 + y_{z,s})^{1/2}$	Trierweiler e Farina (2003)

Pesos na supressão do movimento

Penalizar a taxa de mudança nas variáveis manipuladas garante um controlador mais robusto, mas também mais lento. Ao contrário, não penalizar ou utilizar um valor baixo trará um controlador agressivo e de pouca estabilidade.

Hinde Jr e Cooper (1994) utiliza uma abordagem para sintonia da penalização da supressão do movimento baseada na função de desempenho desejável definido com pequeno tempo de subida e 10-15% de *overshoot*. Genceli e Nikolaou (1993) propõem duas equações para a supressão do movimento, que garantem estabilidade em malha fechada: uma para o peso no estado final e a outra é uma relação de recorrência para os

demais pesos da matriz M . Shridhar e Cooper (1998) estabelece uma fórmula para os pesos da matriz de supressão do movimento através da aproximação da dinâmica do processo por uma função de primeira ordem mais tempo morto.

Yamuna Rani e Unbehauen (1997) propõe um método para sintonizar os pesos de supressão baseados na sintonia ótima dos demais parâmetros propostos por (Mcintosh, Shah e Fisher (1990) e a sintonia fina das constantes são baseadas nos valores calculados previamente. Mcintosh, Shah e Fisher (1989) e (1991) propõe em conjunto uma estratégia de sintonia inicial e periodicamente os valores de peso da matriz M são atualizadas. Trierweiler e Farina (2003) estabelecem uma formulação de sintonia dos pesos de supressão do movimento baseadas no reescalonamento do processo através da frequência com que o sistema atinja o valor máximo de RPN. Um resumo das metodologias encontra-se na Tabela 2.4.

Tabela 2.4: Métodos de sintonia para o peso na supressão do movimento (Garriga e Soroush, 2010).

Algoritmo	Fórmula ou Banda	Referência
DMC	$\lambda = \Gamma K_p^2, \Gamma$ é usualmente 10	Hinde Jr e Cooper (1994)
DMC	$\lambda_p = \left[\sum_{j=-N+1}^P \delta_j + (b + w\check{b}) \sum_{i=1}^N E_i + \sum_{j=-N+1}^P (a_j + w\check{a}_j) \right]$ $/ \left[1 - \left(\sum_{i=1}^N E_i \right) / G \right]$ $\lambda_{j-1} = \lambda_j - a_j - w\check{a}_j - \delta_j, 1 \leq j \leq P$	Genceli e Nikolaou (1993)
DMC	$\lambda_s^2 = (M/500) \sum_{r=1}^R \{ Q_r^2 K_{rs}^2 [P - k_{rs} - (3/2)(\tau_{rs}/T_s) + 2 - ((M-1)/2)] \}, s = 1, 2, \dots, S$ $k_{rs} = \tau_{d,rs}/T_s + 1$	Shridhar e Cooper (1998)
GPC	$\lambda = mP + c$	Yamuna Rani e Unbehauen (1997)
GPC	$\lambda_{start} = [m tr(G^T G)] / M$ $\lambda = \lambda_{rel} [B(1)]^2$	Mcintosh, Shah e Fisher (1989) e (1991)
DMC, GPC	$\Lambda_s = [(1 + u_{z,s}) \log_{10}(RPN + 1)]^{1/2} \text{mean} g_s^{i,j}(\omega_{sup}) $	Trierweiler e Farina (2003)

Métodos Baseados em Problemas de Otimização

Além das fórmulas para o cálculo dos diversos parâmetros de sintonia, outra forma de obtê-los é através de funções objetivo, que são minimizadas através de algoritmos de otimização obedecendo a determinados critérios e restrições.

Algumas metodologias propostas para algoritmos sem restrições são apresentadas: Gous e De Vaal (2012) propõe um método para a obtenção dos fatores de supressão do movimento para algoritmos DMC utilizando o algoritmo de busca Nelder-Mead, que fornecem um comportamento aceitável para as variáveis manipuladas. Davtyan, Hoffmann e Scheuring (2011) testaram algumas funções objetivo a fim de selecionar a mais adequada para a sintonia do controlador preditivo e por fim, desenvolveram uma metodologia para sintonia automática do horizonte de predição, horizonte de controle e tempo de amostragem através da otimização de parâmetros sequenciais. Um método automático para sintonia de MPC, que combinou propriedades do modelo em malha fechada (taxa de *overshoot* e supressão do movimento), utilizando otimização baseada em enxame de partículas (PSO) foi proposto por Suzuki *et al.* (2012) e da mesma forma Van Der Lee, Svrcek e Young (2008) utilizaram algoritmo genético para a otimização.

Na indústria de processos, a presença de restrições é bastante difundida sejam essas impostas fisicamente ou por imposições econômicas. Dessa forma Al-Ghazzawi *et al.* (2001) e Exadaktylos e Taylor (2010) propõem a obtenção das matrizes de peso das variáveis controladas e da supressão do movimento das variáveis manipuladas considerando as restrições operacionais do problema de controle. Paralelamente Nery Júnior, Martins e Kalid (2014) propõem uma estratégia de sintonia capaz de lidar com a incerteza do modelo através da minimização de um índice multi-objetivo que envolve integrais através do tempo de termos que desviam as saídas e o *setpoint* e a variação do movimento das variáveis manipuladas.

A não consideração dos outros parâmetros de ajuste (W_u e ρ_ϵ) na revisão bibliográfica se deve ao fato das metodologias abordadas até o presente momento não serem capazes de considerar a inclusão de valores de referência para as variáveis manipuladas e consideração de faixas para as variáveis controladas no problema de controle, sendo o ajuste para esses parâmetros na prática feitos através de “tentativa e erro”. No que tange à matriz W_u , pode ser sintonizada seguindo regras similares as adotadas para a matriz Q , desde que se use um modelo estendido, como será apresentado na metodologia a ser proposta neste trabalho. Além disso, observa-se também a falta de métodos de sintonia e ajuste para sistemas não quadrados, que possuem um número maior de variáveis controladas do que manipuladas, operando em faixas ao invés de *setpoints* ou trajetórias de referência.

Na Tabela 2.5 são apresentadas as necessidades requeridas nas aplicações industriais que utilizam controle preditivo juntamente com aquilo que está disponível, abordado nessa revisão bibliográfica. É também apresentado o que o método de ajuste proposto nesse trabalho deverá compreender.

Tabela 2.5: Necessidades industriais para metodologia de ajuste de MPC.

Necessidade	Metodologias Disponíveis	Metodologia Proposta
Utilização de <i>soft-constraint</i>		X
Utilização de <i>setpoint</i>	X	X
Sistemas Quadrados	X	X
Sistemas Não-Quadrados		X
Utilização de Otimização Simplificada		X
Utilização de <i>Targets</i> para as MVs		X
Sintonia do Tempo de Amostragem	X	Trierweiler e Farina (2003)
Sintonia do Horizonte de Predição	X	Trierweiler e Farina (2003)
Sintonia do Horizonte de Controle	X	Trierweiler e Farina (2003)
Sintonia da Matriz de Peso Q	X	X
Sintonia da Matriz de Peso W_u		X
Sintonia da Matriz de Peso W	X	X
Sintonia da Penalização da violação ρ_ϵ		X

Capítulo 3 – Método de ajuste de controladores preditivos baseado em cenários

Neste capítulo é proposta uma metodologia para a sintonia e ajuste de controladores preditivos multivariáveis que estejam operando através de *setpoint* e/ou faixas de operação. Essa metodologia é primeiramente descrita para sistemas multivariáveis quadrados, ou seja, que possuem o mesmo número de entradas e de saídas operando através de *setpoints*, e posteriormente estendida para sistemas com mais variáveis controladas do que manipuladas (sistemas não quadrados) operando através de faixas de operação.

Inicialmente é apresentada a ideia básica de como a metodologia foi idealizada e então são apresentadas as generalizações, equacionamento e estratégias de resolução dos problemas de otimização formulados. Essa metodologia está baseada na obtenção de cenários quadrados que contemplam características ótimas e alcançáveis para o sistema original em mais de um ponto de operação, operando assim de forma robusta e com o desempenho alcançável para todos os cenários. As definições necessárias para o melhor entendimento desse capítulo encontram-se nos Apêndices A e B.

3.1 Ideia Básica

Uma matriz de transferência de dimensão $[n_o \times n_i]$ é composta pela associação dos canais (entrada e saída) do modelo da planta, onde cada coluna dessa matriz (que representa as entradas, n_i) irá interferir de forma diferente nas saídas (n_o) do modelo (representada pelas linhas).

Um subcaso quadrado, ou cenário, da matriz de transferência da planta trata-se da associação entre duas ou mais entradas e duas ou mais saídas da matriz de transferência original formando assim cenários quadrados. Um exemplo é observado através da Figura 3.1, onde $H_0(s)$ representa o modelo global de um processo com 3 saídas (y_1, y_2 e y_3) e 2 entradas (u_1 e u_2) e $H_1(s), H_2(s)$ e $H_3(s)$ representam os cenários quadrados que compõe o modelo global.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc} u_1 & u_2 \end{array} \\
 \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{array} & \begin{bmatrix} tf(y_1, u_1) & tf(y_1, u_2) \\ tf(y_2, u_1) & tf(y_2, u_2) \\ tf(y_3, u_1) & tf(y_3, u_2) \end{bmatrix}
 \end{array} \\
 H_0(s) =
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 H_1(s) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} u_1 & u_2 \end{array} \\ y_1 & \begin{bmatrix} tf(y_1, u_1) & tf(y_1, u_2) \\ tf(y_2, u_1) & tf(y_2, u_2) \end{bmatrix} \\ y_2 & \end{array} \\
 H_2(s) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} u_1 & u_2 \end{array} \\ y_1 & \begin{bmatrix} tf(y_1, u_1) & tf(y_1, u_2) \\ tf(y_3, u_1) & tf(y_3, u_2) \end{bmatrix} \\ y_3 & \end{array} \\
 H_3(s) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} u_1 & u_2 \end{array} \\ y_2 & \begin{bmatrix} tf(y_2, u_1) & tf(y_2, u_2) \\ tf(y_3, u_1) & tf(y_3, u_2) \end{bmatrix} \\ y_3 & \end{array}
 \end{array}
 \right.
 \end{array}$$

Figura 3.1: Decomposição do modelo global em cenários.

A ideia geral do método proposto se baseia na obtenção de cenários quadrados do modelo do processo multivariável (modelo global) que se encontram em pontos de operação críticos. Ao considerar o melhor desempenho para esses cenários, que seja alcançável incluindo as limitações do processo para esses pontos de operação, como referência para a sintonia dos parâmetros do controlador MPC, o sistema completo irá operar de forma robusta e adequada com valores ótimos para a sintonia do controlador levando o sistema a operar da forma satisfatória.

São considerados todos os cenários presentes no sistema global, ou seja, todas as associações entre variáveis de entrada e saída que formam matrizes de transferência quadradas. Em cada cenário poderá haver fatores que limitam o desempenho do controlador. Os fatores de fase não mínima, que são exemplos de fatores limitantes de desempenho, se manifestam em problemas quadrados através da presença de zeros de transmissão e/ou polos no semi-plano direito (causando resposta inversa e/ou resposta instável em malha aberta, respectivamente) e tempo morto, que podem ou não estar presentes no caso geral (dependendo do arranjo do sistema e do ponto de operação escolhido).

No caso geral e em cada subsistema, a presença de fatores de fase não mínima é feita através da análise de matriz de transferência, a fim de identificar a presença de zeros/polos instáveis e tempo morto.

O objetivo do método de ajuste proposto é fazer com que o sistema completo, opere de forma robusta e estável, levando em conta as restrições físicas do processo (restrições em válvulas, restrições operacionais, maximização do lucro) e as restrições inerentes ao modelo desse processo que mesmo ausentes no sistema completo surgem ao saturar uma ou mais variáveis manipuladas, ou seja, estão em algum cenário específico.

Os parâmetros de sintonia tempo de amostragem (t_s), Horizonte de Predição (P) e Horizonte de controle (M) foram adotados conforme Trierweiler e Farina (2003), ou seja, o tempo de amostragem trata-se de 7 a 15 tomadas de amostra no tempo de subida da planta em malha aberta, o horizonte de predição é o tempo de assentamento da planta

em malha aberta dado em número de amostragem e o horizonte de controle é 25% do horizonte de predição.

Assim, a sintonia dos parâmetros aqui descrita ocorrerá através dos pesos das variáveis controladas, pesos do *target* das variáveis manipuladas, pesos da supressão do movimento e penalização da violação ao trabalhar com faixas de operação. O papel fundamental desses pesos é fazer com que o sistema seja escalonado, ou seja, quantificando as variáveis em um “mesmo tamanho” ou uma mesma base, e qualificar quais as variáveis mais importantes para a operabilidade do sistema conforme necessidade operacional ou lucro.

Com base no conhecimento limitado pela revisão bibliográfica, a presente metodologia de ajuste determina o melhor alcançável para o sistema global conforme as limitações de cada cenário, servindo assim como uma trajetória de referência para o controlador MPC.

3.2 Desempenho desejado e desempenho alcançável

Considerando uma malha de retroalimentação padrão, mostrada na Figura 3.2, onde G é o modelo do processo, C é o controlador, Δy é a variável controlada e Δy_{set} é a variável de referência, $T(s)$ é a função que representa o desempenho em malha fechada para o sistema de retroalimentação.

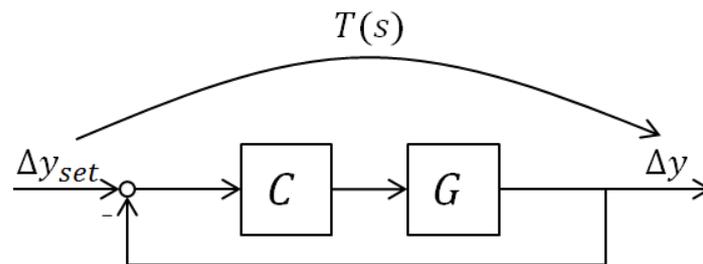


Figura 3.2: Malha de controle por retroalimentação (Baseado em Trierweiler e Farina, 2003).

A função de transferência em malha fechada $T(s)$, fornece uma relação entre a variável controlada Δy e o *setpoint* Δy_{set} , que para um sistema SISO é dada através da Equação 3.1.

$$T(s) = \frac{\Delta y}{\Delta y_{set}} = \frac{G(s)C(s)}{1+G(s)C(s)} \quad (3.1)$$

Considerando um sistema em fase mínima $G(s)$ e especificando o valor de $T(s) = T_d(s)$, ou seja, uma função desejada para a trajetória de referência (função de primeira, segunda ordem ou função à escolha do projetista), o controlador correspondente ideal que compensará a trajetória especificada pode ser calculado a partir da manipulação algébrica da Equação 3.1.

Para o caso MIMO, uma extensão da trajetória especificada é reescrita através do sistema desacoplado, com os parâmetros diferentes para cada saída do processo da forma:

$$T_d = \text{diag}(T_{d,1}, T_{d,2}, \dots, T_{d,no}) \quad (3.2)$$

A função de transferência em malha fechada para sistemas MIMO é dada pela Equação 3.3.

$$T(s) = [I + G(s)C(s)]^{-1}G(s)C(s) \quad (3.3)$$

O desempenho desejado pode ser estabelecido através de qualquer comportamento de um sistema dinâmico para cada saída do processo, lembrando que a escolha correta para esse desempenho depende dos objetivos de controle do projetista e o dever de ser compatível com a ordem e dinâmica da planta. Normalmente é desejável que a dinâmica em malha fechada se torne mais rápida que a dinâmica em malha aberta além da função escolhida dever ser estável, apresentar preferencialmente ganho unitário (o que equivale a não apresentar erro em regime estacionário) e a utilização de um controlador causal.

Diversas formas para funções de transferência são obtidas através de funções otimizadas para critérios ITAE, ITSE, IAE e ISE. Para uma função de segunda ordem, pode-se especificar o tempo de subida, tempo de assentamento, máximo *overshoot* e erro estacionário permitidos em malha fechada conforme proposto por Trierweiler (1997):

$$T_{d,i}(s) = \frac{1 - \varepsilon_{\infty}}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\zeta\frac{s}{\omega_n} + 1} \quad (3.4)$$

onde ω_n é a frequência natural não amortecida, ζ é o fator de amortecimento e ε_{∞} é o máximo erro em regime estacionário tolerado. A escolha dos parâmetros deve ser feita considerando as restrições e limitações do processo.

Cabe ressaltar que essas funções, representadas pela Equação 3.4, são compatíveis com modelos de fase mínima, ou seja, que não apresentam tempo morto, polos e zeros no semi-plano direito (SPD), sendo $T(s) = T_d(s)$.

Além das limitações físicas do processo, existem limitações inerentes ao processo, como elementos de fase não mínima (zeros no SPD e tempo morto) e instabilidades (polos no SPD), que devem levadas em conta no desempenho desejado do processo, resultando em um desempenho alcançável. Os fatores de fase não mínima limitam a máxima velocidade com que o controlador pode atuar, enquanto que a presença de polos no SPD estabelece a velocidade mínima que o controlador deve atuar para evitar a instabilidade do sistema em malha fechada (Escobar, 2006).

Para modelos que apresentam tempo morto, deve-se incorporar esse valor na própria função de desempenho, e para sistemas que apresentam polos e zeros positivos devem-se levar em conta as restrições de estabilidade interna, dadas pelas Equações 3.5 e 3.6. Essas restrições consideram os valores das funções desempenho em malha fechada, $T(s)$, e sensibilidade, $S(s)$, avaliadas nos valores do polo e zeros no SPD (p e z).

$$T(z) = 0; S(z) = 1 \quad (3.5)$$

$$T(p) = 1; S(p) = 0 \quad (3.6)$$

Uma forma de obter a função desempenho alcançável, ou seja, uma função desempenho desejado que leva em consideração os fatores de fase não mínima

(tornando-se assim alcançável) é através da Fatoração de Blaschke (Trierweiler, 1997), dada pela Equação 3.7.

$$T(s) = B_{0,z}(s)B_{0,z}^\dagger(0)[I - (I - T_d(s))] \quad (3.7)$$

onde $B_{0,z}(s)$ representa a fatoração de Blaschke para a direção de saída dos zeros e o operador B^\dagger é a pseudo-inversa de B , tal que $B(0)B^\dagger(0) = I$. A função $T(s)$ é diferente da função original $T_d(s)$, mas possui os mesmos valores singulares e representa a função em malha fechada alcançável em um caso ideal.

A presença desses fatores no modelo altera o comportamento do desempenho desejado, que após ser fatorado (através da fatoração de Blaschke) é chamado de desempenho alcançável. A Fatoração do sistema, bem como os detalhes sobre essa relação desejável-alcançável é fornecida no Apêndice B.

3.3 Número de Desempenho Robusto (RPN)

A função de desempenho robusto $\Gamma(G, T, \omega)$, proposta por Trierweiler (1997), é uma medida da dificuldade para um dado sistema atingir o desempenho desejado de forma robusta. Trata-se de uma maneira sistemática para a determinação da controlabilidade entrada-saída de um sistema, sendo um índice quantitativo que auxilia a escolha de uma estrutura de controle apropriada. O Número de Desempenho Robusto, RPN, do inglês “*Robust Performance Number*”, é o valor onde a função de desempenho robusto atinge seu máximo, ambas são definidas por:

$$\Gamma(G, T, \omega) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\bar{\sigma}([I - T(j\omega)]T(j\omega)) \left[\gamma^*(G(j\omega)) + \frac{1}{\gamma^*(G(j\omega))} \right]} \quad (3.8)$$

$$RPN \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma_{MAX}(G, T, \omega) = \max_{\omega \in R} \{\Gamma(G, T, \omega)\} \quad (3.9)$$

onde $\gamma^*(G(j\omega))$ é o condicionamento mínimo de $G(j\omega)$, $\bar{\sigma}([I - T]T)$ é o máximo valor singular da função de transferência $[I - T]T$ e $T(s)$ é a função desempenho alcançável em malha fechada determinada para o modelo nominal $G(s)$.

O RPN é composto de dois fatores:

1. O termo $\bar{\sigma}([I - T]T)$ atua como uma função peso, e possui seu valor máximo próximo à frequência de corte do sistema, região onde as incertezas são mais importantes para a estabilidade robusta do projeto de controle.
2. O termo $\gamma^*(G) + \frac{1}{\gamma^*(G)}$ é responsável pela avaliação da direcionalidade do sistema.

O RPN indica o desempenho e a robustez para uma dada estrutura de controle, servindo como ferramenta para avaliar o projeto de controladores. Uma boa estrutura de controle é aquela que apresenta um valor baixo de RPN (i.e., $RPN < 3$).

3.3.1 Número de Desempenho Robusto relativo (rRPN)

O Número de Desempenho Robusto relativo, desenvolvido por Trierweiler (2002), é obtido como um desvio relativo entre a área sob a curva da função de desempenho robusto (Γ) e a área sob a curva da função de desempenho robusto de referência (Γ_{REF}).

A função Γ_{REF} , dada pela Equação 3.10, representa o caso ideal, onde a função desempenho alcançável é igual à função desempenho desejável, $T(s) = T_d(s)$, e o condicionamento mínimo da matriz $G(s)$, é o menor possível, isto é, $\gamma^*(G) = 1$. A Figura 3.3 ilustra as curvas das funções Γ e Γ_{REF} .

$$\Gamma_{REF} \triangleq \sqrt{\bar{\sigma}([I - T_d(j\omega)]T_d(j\omega))} \times 2 \quad (3.10)$$

O Número de Desempenho Robusto relativo é então definido por:

$$rRPN = \frac{\int_{\omega_{min}}^{\omega_{max}} \Gamma(G,T) d\log\omega - \int_{\omega_{min}}^{\omega_{max}} \Gamma_{REF}(G,T_d) d\log\omega}{\int_{\omega_{min}}^{\omega_{max}} \Gamma_{REF}(G,T_d) d\log\omega} \quad (3.11)$$

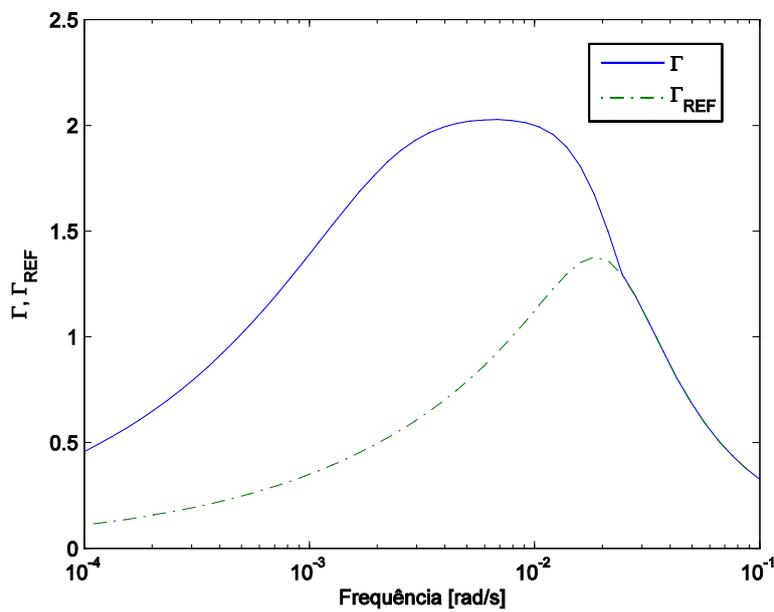


Figura 3.3: Funções Γ e Γ_{REF} .

O valor desse parâmetro ($rRPN$) representa o quanto distante o desempenho desejado se encontra do alcançável. Valores $rRPN$ menores que 1 indicam que o desempenho desejável especificado será realizável através de um ajuste adequado do controlador. Quanto maior for o valor do $rRPN$ maior será a diferença entre o desejável e o que efetivamente se poderá alcançar.

3.3.2 Escalonamento RPN

O escalonamento do sistema possui extrema importância na análise correta de um problema de controle, relacionado à direcionalidade, pois faz com que as variáveis de entrada e saída do problema sejam comparáveis entre si, ou seja, possuam uma mesma magnitude para fins de controle.

Sistemas bem condicionados facilitam o desempenho numérico do algoritmo de otimização e produzem respostas com erros relativos menores. Por isso, o escalonamento do problema de controle através do condicionamento mínimo é feito através do cálculo

das matrizes de escalonamento R_s e L_s , para qualquer frequência ω , que fazem com que a razão entre o máximo e o mínimo valor singular da matriz de transferência seja mínimo, ou seja, $\gamma^*(G(j\omega))$.

Considerando a faixa de frequência de corte do sistema (ω_c), ou de uma função equivalente ao desempenho desejável, o sistema adota automaticamente as propriedades da retroalimentação. Para isso, adota-se como frequência ótima para o escalonamento do sistema uma frequência próxima do valor da frequência de corte que além das propriedades da retroalimentação agrega fatores de desempenho e robustez no sistema, a frequência ω_{MAX} , frequência essa onde a função de desempenho robusto (Γ) atinge seu valor máximo, denominado *RPN*. O condicionamento mínimo será dado por:

$$\min_{R_s, L_s} \gamma^* = L_s G(j\omega_{MAX}) R_s \quad (3.12)$$

onde R_s e L_s são matrizes diagonais de escalonamento.

Dessa forma o sistema escalonado, o qual se deve projetar o controlador, é dado pela Equação 3.13.

$$G_s = L_s G(s) R_s \quad (3.13)$$

3.4 Máxima Sensibilidade

Considerando uma malha de retroalimentação padrão, Figura 3.4, onde a função de Sensibilidade $S(s)$ representa uma variação de saída (Δy) frente a uma variação de distúrbio ΔD .

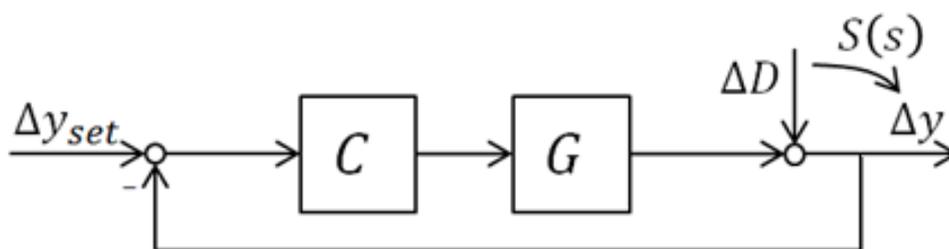


Figura 3.4: Função de Sensibilidade.

Através da álgebra de blocos, a relação que representa a função de Sensibilidade para um caso MIMO é dada pela Equação 3.14.

$$S(s) = \frac{\Delta y}{\Delta D} = (I + G(s)C(s))^{-1} = I - T(s) \quad (3.14)$$

A origem do nome se deve ao fato de a função sensibilidade relacionar a incerteza relativa da resposta em malha fechada ($T(s)$) com uma incerteza relativa em malha aberta, através da seguinte relação:

$$\frac{\Delta T(s)}{T(s)} = S(s) \frac{\Delta G(s)}{G(s)} \quad (3.15)$$

A máxima sensibilidade, valor máximo da função de sensibilidade avaliado na frequência, consiste no menor esforço necessário para instabilizar uma determinada malha de controle, é definida pela Equação 3.16.

$$Ms = \max_{0 \leq \omega < \infty} |S(j\omega)| \quad (3.16)$$

Valores altos para a máxima sensibilidade indicam uma má robustez. Os valores limítrofes recomendados para essa métrica é $1,2 \leq Ms \leq 2,2$ (Astrom e Hagglund, 1995).

3.5 A função $\Delta u / \Delta y_{set}$

Do mesmo modo em que é determinada a função de transferência em malha fechada $T(s)$, mostrada na Figura 3.2, e a função de sensibilidade $S(s)$, mostrada na Figura 3.4, é possível obter uma função que relaciona uma variação de entrada na planta, Δu , em relação à variação de *setpoint* Δy_{set} , como mostrada na Figura 3.5.

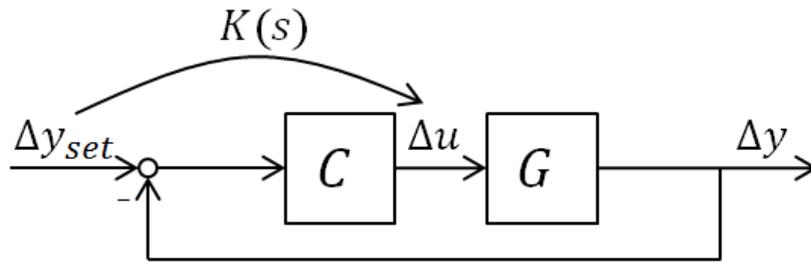


Figura 3.5: Representação da Função $\Delta u / \Delta y_{set}$.

Essa relação, representada neste trabalho como Função $K(s)$, é obtida através da álgebra de blocos, para um caso MIMO, resultando em:

$$K(s) = \frac{\Delta u}{\Delta y_{set}} = G(s)^{-1}T(s) \quad (3.17)$$

A análise da função $K(s)$ no domínio do tempo leva a uma função de transferência não-própria (i.e., ordem do numerador maior que a ordem do denominador) devido à inversão direta da planta a qual aplicada a uma função $T(s)$ estipulada de ordem mais baixa, acaba deixando $K(s)$ não causal. Uma alternativa para a avaliação dessa função é no domínio da frequência através do máximo valor singular, ou máximo ganho, da matriz de transferência $K(s)$ para um dado conjunto de frequências. O pico do máximo valor singular de $K(s = j\omega)$, considerando o intervalo $0 \leq \omega < \infty$, representa qual será a maior variação da ação de controle (Δu) ocasionada pela variação de *setpoint* (Δy_{set}), como mostrado na equação abaixo:

$$Mk = \max_{0 \leq \omega < \infty} \bar{\sigma}(K(j\omega)) \quad (3.18)$$

3.6 Definição do Desempenho Alcançável para multi-cenários operacionais quadrados

Considerando uma matriz de transferência $G(s)$, de dimensões $no \times ni$, sendo no o número de saídas e ni o número de entradas do modelo, a matriz de transferência que relaciona a variação da saída Δy em relação a uma variação de *setpoint* Δy_{set} , $T(s)$, possui dimensões $no \times no$.

A especificação da matriz $T(s) = T_d(s)$ dada pelo projetista, na maioria das vezes, visa uma resposta rápida e estável. O controlador ideal que fará com que o sistema em malha fechada alcance o desempenho desejável ($T_d(s)$) é obtido pela manipulação algébrica da Equação 3.1. Cabe ressaltar que esse desempenho, que é desejável (estipulado pelo projetista), só será alcançado quando o sistema operar em fase mínima, sendo necessária a fatoração dos elementos de fase não mínima quando presentes, incluindo esses fatores limitantes de desempenho na função em malha fechada tornando o desempenho desejado em alcançável ($T(s)$).

Partindo-se dessa premissa, consideram-se cenários do modelo do processo, ou seja, subcasos quadrados do caso geral, e a partir deles é obtida uma função que represente trajetórias alcançáveis para esses cenários. Esses cenários representam todas as associações entre entradas e saídas do modelo podendo assim cada variável estar presente em mais de um cenário.

Considerando o fato de o desempenho alcançável ser determinado pela Equação 3.7, quaisquer funções poderão ser utilizadas para $T_d(s)$, que fatoradas, representarão $T(s)$. No entanto, nessa metodologia, será determinada uma função $T_d(s)$ através de um problema de otimização que garanta um compromisso entre desempenho, robustez e restrições nas ações de controle para o problema em todos os cenários, ao ser fatorada em $T(s)$.

A função $T_d(s)$, dada pela Equação 3.2 para um caso MIMO, possui cada canal da diagonal principal (representando a variação de saída frente à variação de *setpoint* para o modelo global) dado pela Equação 3.4. Considerando para cada canal ganho unitário (ou seja, não há erro em regime estacionário) e taxa de *overshoot* fixa em 5%, a informação que irá definir a trajetória em cada canal i é apenas função da frequência natural não amortecida (ω_n) a partir da qual se obtém o tempo de subida ($t_{s,i}$). Dessa forma, a Equação 3.19, busca a minimização do somatório do quadrado do tempo de subida de cada canal (ϕ), tornando a função desempenho desejado o mais rápido possível, respeitando as restrições.

$$\min_{\Omega} \phi(\Omega) = \min_{\Omega} \sum_{i=1}^n (t_{s,i})^2 \quad (3.19)$$

sujeito à

$$rRPN(k) \leq 1 \quad (3.20)$$

$$Ms(k) \leq 2,2 \quad (3.21)$$

$$Ms(k) \geq 1,2 \quad (3.22)$$

$$Mk(k) \leq 10 \quad (3.23)$$

onde $\Omega = [\omega_{n,1}, \omega_{n,2}, \dots, \omega_{n,i}]$, $k = 1 \dots nc$ é o número de cenários do modelo global considerados para o problema de otimização, $rRPN(k)$ é o Número de desempenho robusto relativo, $Ms(k)$ é o valor da Máxima sensibilidade e $Mk(k)$ o pico do máximo valor singular da função $K(s = j\omega)$. Esse problema é resolvido através de um algoritmo de otimização não linear com restrições. Aqui foi adotado o algoritmo *fmincon* do Matlab® R2012b (“*trust-region-reflective algorithm*”).

Ao considerar um valor para cada cenário k de $rRPN(k) \leq 1$, Equação 3.20, é admitido que o valor máximo para a área sob a curva da função de desempenho robusto (Γ) seja o dobro da área sob a curva da função de desempenho robusto de referência (Γ_{REF}), ou seja, a condição de controlabilidade do processo representado pelo cenário k mesmo não estando na condição ideal (ou de referência, inatingível para sistemas que operam em fase não-mínima), irá garantir compromisso entre robustez e desempenho ao apresentar um valor relativo ao valor de referência menor ou igual a 1. O mesmo ocorre para as restrições de Máxima sensibilidade, dados por 3.21 e 3.22, dentro dos limites indicados por Astrom e Hagglund (1995).

A restrição, dada por 3.23, minimiza o valor do maior ganho principal da matriz $K(s)$ que relaciona uma variação de ação de controle (Δu) frente a uma variação de *setpoint* (Δy_{set}). Ao incluir essa restrição é garantido que não será enviada à planta ações de controle muito bruscas (o que não é desejado para qualquer problema de controle), por vezes respeitando os limites físicos das variáveis de entrada u .

Cabe ressaltar, que os valores de $rRPN \leq 1$ e $Mk \leq 10$ são valores heurísticos definidos a fim de garantir funções alcançáveis com bom desempenho (mais rápidas que a dinâmica em malha aberta), robustas, e com ações de controle compatíveis com os limites dos atuadores. Considerando valores maiores para essas restrições, é possível obter funções com melhor desempenho, mas pouco robustas, que necessitam de ações de controle altas, e por vezes indisponíveis/inatingíveis em processos reais.

Como resultado da minimização da função, dada pela Equação 3.19, obtém-se um desempenho desejável ($T_d(s)$) único para todos os cenários, que fatorado de acordo com os fatores de fase não mínima (presentes ou não) de cada cenário k , representarão as funções de desempenho alcançável $T_k(s)$.

3.7 Escalonamento baseado em γ^\blacksquare

O cálculo do Número de Desempenho Robusto (RPN) de cada cenário é feito, através da Equação 3.9, e a partir dele é obtido o valor da frequência com que o RPN é obtido, denominado $\omega_{M\acute{A}X,k}$. Com base nessas frequências, ou seja, uma frequência obtida para cada cenário k avaliados são determinadas as matrizes de escalonamento R_s e L_s através do condicionamento mínimo global, γ^\blacksquare , dado pela Equação 3.24.

$$\gamma^\blacksquare \stackrel{\text{def}}{=} \min_{R_s, L_s} \left\| \gamma_k(L_s G(j\omega_{M\acute{A}X,k}) R_s) \right\|_\infty \quad (3.24)$$

onde $k = 1 \dots nc$ é o número de cenários avaliados, $G(j\omega_{M\acute{A}X,k})$ é o modelo global do processo avaliado na frequência $\omega_{M\acute{A}X,k}$ onde ocorre o RPN da trajetória alcançável para cada cenário $T_k(s)$, $\gamma(M)$ é o condicionamento da matriz M e $\|x\|_\infty$ é a norma infinita de x . Esse problema é resolvido através de um algoritmo de otimização não linear sem restrições (*Nelder-Mead*).

As matrizes de escalonamento, R_s e L_s , que farão com que o condicionamento global do modelo do processo seja o menor possível, irão servir como filtros para a planta não linear, visto que $G(s)$ representa o modelo linear para um dado ponto de operação. Além disso, essas matrizes de escalonamento incluirão fatores de robustez no modelo não

linear, por serem obtidas na frequência onde ocorre o RPN, e para o modelo do controlador adotado (controlador projetado para $G_s = R_s G(s) L_s$), como mostrado na Figura 3.6.

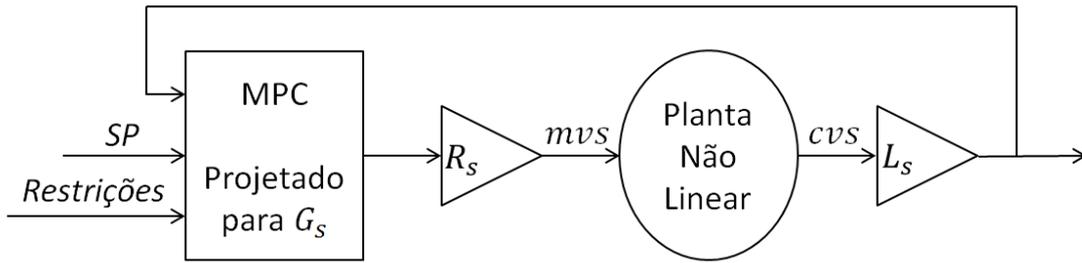


Figura 3.6: Arranjo do sistema de controle com filtros.

O arranjo do sistema de controle será disposto conforme a Figura 3.6, pelo fato do controlador ser projetado para um modelo escalonado, ou seja, as ações de controle serão calculadas com base em G_s , necessitando assim de filtros que tornem as unidades compatíveis entre as ações provenientes do controlador e a planta não linear.

É importante ressaltar que a configuração da malha com filtros de escalonamento ilustrado na Figura 3.6 deve ser empregada necessariamente quando houver um mesmo peso para todas as variáveis, ou seja, um peso único que será diferenciado apenas pelo escalonamento. Quando há diferença entre os pesos para as variáveis de entrada e saída e violação da faixa, a parcela que pondera o escalonamento pode ser incorporada diretamente no valor desses pesos, como proposto por Trierweiler e Farina (2003). Esse arranjo (Figura 3.6) é utilizado a fim de suprir as limitações de alguns *softwares*, como o caso do Matlab® R2012b que possui um peso único para todas as saídas na penalização por violação das *soft-constraints*.

3.8 Sintonia dos Pesos do Controlador MPC

Possuindo funções que representam trajetórias alcançáveis para cenários representativos do modelo do processo, que incluem fatores de desempenho, robustez e limitações nas ações de controle, o passo final para a sintonia do controlador preditivo é obter os pesos das matrizes da função custo do MPC que irão garantir que o sistema (não linear) opere na melhor condição alcançável.

Tendo as trajetórias alcançáveis para diferentes cenários como referência, é minimizado um índice que representa a soma do erro entre o valor estimado para a saída do controlador preditivo e o valor alcançável para cada cenário, penalizando (se houver) um desvio da faixa de restrição violável das variáveis controladas (*soft-constraints*) e o desvio do *target* para as variáveis manipuladas. A equação que representa o índice a ser minimizado (ψ) é:

$$\min_{\Theta} \left\{ \sum_{k=1}^{nc} \left\| T_k(s) \Delta y_{set} - \frac{(\hat{y} - y_{bias})}{\Delta \hat{y}} \right\|^2 + \sum_{k=1}^{nc} \hat{\epsilon}_k^2 + 0,5 \cdot \sum_{k=1}^{nc} \|u_{target} - \hat{u}\|^2 \right\} \quad (3.25)$$

onde $\Theta = [Q(i), W_u(j), W(j), \rho_\epsilon]$ representa os pesos para as variáveis controladas, manipuladas, supressão do movimento e penalização por violação da faixa, sendo $Q(i)$, $W_u(j)$ e $W(j)$ os elementos da diagonal das matrizes de peso onde $i = 1 \dots n_o$ e $j = 1 \dots n_i$, Δy_{set} é a variação do *setpoint*, \hat{y} é o vetor formado pelos valores estimados pelo modelo para as variáveis controladas, y_{bias} é o vetor formado pelos valores estacionários iniciais do modelo uma vez que a função de desempenho alcançável T_k é dada em variação de saída frente à variação de *setpoint*, $\hat{\epsilon}_k$ é o desvio das variáveis controladas da *soft-constraint*, u_{target} é o vetor dos *targets* para as variáveis manipuladas e \hat{u} é o vetor formado pelas ações de controle enviadas ao processo. Observa-se que o desvio do *target* para as variáveis manipuladas é ponderado pelo valor 0,5 fazendo com que na sintonia dos pesos para as variáveis controladas e o desvio das faixas sejam priorizados em relação ao desvio do valor do *target*. Foi feita essa consideração levando em conta que o objetivo do problema de controle é manter as variáveis controladas no valor (ou faixa) de referência, podendo assim (caso haja graus de liberdade disponíveis) seguir uma trajetória específica para as variáveis manipuladas. Esse problema é resolvido através de um algoritmo de otimização não linear sem restrições (*Nelder-Mead*).

Minimizando o índice $\psi(\Theta)$, considerando as variáveis de entrada e saídas escalonadas através do condicionamento mínimo global, o sistema irá operar em uma condição ideal e próxima do alcançável em cada cenário e consequentemente no caso geral, o que não ocorre ao considerar a parcela da função custo do MPC, Equação 2.1, que penaliza o erro entre o valor estimado pelo modelo e o *setpoint*, que difere muito da trajetória alcançável, principalmente em sistemas que operam em fase não mínima. A minimização direta dessa parcela da função custo do MPC como forma de sintonia poderá levar o sistema a instabilidade ou a obtenção de ótimos locais visto que não considera o comportamento que a planta poderá atingir (resposta inversa, tempo morto, dinâmica oscilatória, etc.), somente aquele comportamento desejado dado pelo *setpoint*. Além disso, pelo fato do *setpoint* ser uma mudança brusca, o controlador irá gerar ações corretivas bruscas, por vezes inatingíveis em casos reais.

Os passos que resumem a metodologia proposta para o ajuste de controladores preditivos baseado em cenários representativos encontram-se na Tabela 3.1.

3.9 Expansão para sistemas não quadrados e ajuste para faixas de operação

Considera-se um sistema não quadrado, aquele que possui o número de variáveis controladas diferentes do número de variáveis manipuladas. Quando há mais variáveis manipuladas do que controladas, o sistema possui graus de liberdade disponíveis e, desde que hajam perturbações factíveis nas variáveis de saída o sistema terá liberdade e ações de controle disponíveis para alcançá-las. O contrário ocorre quando o sistema possui um maior número de variáveis controladas do que manipuladas, ou seja, o sistema não possui ações disponíveis para atender todas as demandas feitas para o controlador, levando por vezes à valores diferentes das especificações.

Tabela 3.1: Método para ajuste de controlador preditivo baseado em multi-cenários.

1. Especificação de cenários quadrados para o modelo do processo:

$$G_k(s), k = 1 \dots nc$$

2. Obtenção da função de desempenho desejável ($T_d(s)$), através do problema de otimização:

$$\min_{\Omega} \phi(\Omega) = \min_{\Omega} \sum_{i=1}^n (t_{s,i})^2$$

s.a.

$$rRPN(k) \leq 1$$

$$Ms(k) \leq 2,2$$

$$Ms(k) \geq 1,2$$

$$Mk(k) \leq 10$$

3. Fatoração da função de desempenho desejável em desempenho alcançável, para os cenários k :

$$T_k(s) = B_{O,zk}(s)B_{O,zk}^\dagger(0)T_d(s)$$

4. Determinação do RPN para os cenários k e determinação da frequência em que ocorre esse valor $\omega_{MAX,k}$;
5. Cálculo das matrizes de escalonamento R_s e L_s através do condicionamento mínimo global:

$$\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \min_{R_s, L_s} \|\gamma_k(L_s G(j\omega_{MAX,k}) R_s)\|_{\infty}$$

6. Arranjo do sistema escalonado, conforme Figura 3.6, e projeto do controlador para o modelo $G_s = R_s G(s) L_s$;
7. Sintonia dos pesos do controlador através da minimização da função:

$$\min_{\Theta} \psi(\Theta) = \min_{\Theta} \left\{ \sum_{k=1}^{nc} \left\| T_k(s) \Delta y_{set} - \frac{(\hat{y} - y_{bias})}{\Delta \hat{y}} \right\|^2 + \sum_{k=1}^{nc} \hat{\epsilon}_k^2 + 0,5 \cdot \sum_{k=1}^{nc} \|u_{target} - \hat{u}\|^2 \right\}$$

Uma alternativa para sistemas que possuem um maior número de variáveis controladas do que manipuladas é a utilização de faixas de operação, ao invés de *setpoints*, onde as variáveis de saída poderão se manter em uma zona (região de controle) onde não são necessárias ações corretivas, ou seja, não há erro.

Para o controlador MPC, a utilização de faixas de operação é disposta através da utilização de *hard-constraints*, que são aquelas restrições que não podem ser violadas, e *soft-constraints*, restrições que podem ser temporariamente violadas permitindo uma maior flexibilidade para o controlador levar o processo à operação desejada. Essa estratégia de controle é feita mantendo os pesos da diagonal da matriz Q iguais à zero, ou seja, permitindo que as saídas possam quaisquer valores (diferentes do *setpoint*) desde que permaneçam dentro faixa rígida, e permitindo uma transgressão temporária para as faixas violáveis.

Para um sistema não quadrado que possua mais variáveis controladas do que manipuladas $H(s)$, de dimensão $[no \times ni]$ sendo $no > ni$, poderá haver $C_{no,ni}$ cenários de dimensão $[ni \times ni]$ dado por:

$$C_{no,ni} = \frac{no!}{ni!(no-ni)!} \quad (3.26)$$

onde no representam o número de saídas, e ni o número de entradas do modelo não quadrado. Cabe ressaltar que são considerados todos os cenários quadrados do modelo global do processo, ou seja, quando $ni > 2$ haverá combinações entre os canais 2×2 , $3 \times 3, \dots, ni \times ni$.

A partir da determinação de todos os cenários quadrados, o método de ajuste propõe a determinação de uma função de desempenho desejável para cada saída do modelo geral, nesse caso $H(s)$, que atenda o compromisso entre desempenho, robustez e ações de controle para cada cenário $k = 1 \dots nc$.

O passo chave para o ajuste de sistemas não quadrados em faixas de operação encontra-se na parte relacionada ao escalonamento. Com o cálculo do RPN são encontradas as frequências, $\omega_{MÁX,k}$, onde ocorre o RPN de cada cenário, que servirão de base para a determinação das matrizes de escalonamento do modelo global, L_s e R_s . Em *softwares* onde não ocorre distinção entre o peso que pondera a violação das *soft constraints* para cada CV, que é o caso do Matlab® R2012b (utilizado para as simulações), o peso calculado será único, diferenciado para cada saída pelo escalonamento. A parte final do método, que corresponde à determinação dos pesos para a supressão do movimento, para a violação da faixa e os pesos do *target* (se houver), se resume à Equação 3.27.

$$\min_{\theta} \psi(\theta) = \min_{\theta} \left\{ \sum_{k=1}^{nc} \hat{\varepsilon}_k^2 + 0,5 \cdot \sum_{k=1}^{nc} \|u_{target} - \hat{u}\|^2 \right\} \quad (3.27)$$

Considerando que o *software* utilizado não permite a distinção de peso para as faixas violáveis, o arranjo do sistema de controle deve ser obrigatoriamente disposto conforme a Figura 3.6. Caso o MPC apresente as faixas ponderáveis, serão calculados valores diferentes para os pesos, e a parcela responsável pelo escalonamento do sistema poderá ser incorporada diretamente no valor desses pesos.

Capítulo 4 – Estudo de Caso

Os processos industriais possuem determinadas características que lhes conferem complexidade e limitam o desempenho do controlador. Tais características ocorrem pela presença de fatores de fase não mínima como zeros de transmissão no semi-plano direito, tempo morto constante ou variável, dinâmicas muito oscilatórias e integradoras, polos instáveis, etc. Outro complicador é o alto grau de acoplamento entre os canais que pode acarretar em elevada direcionalidade.

Nesse capítulo é proposta uma planta laboratorial composto de 4 tanques esféricos com aquecimento variável, a qual pode apresentar diversos comportamentos dinâmicos encontrados em sistemas multivariáveis.

A partir desse estudo de caso são feitas análises do comportamento dos casos e subcasos presentes a fim de garantir plantas com dinâmica complexa e representativa, tal como os processos reais.

4.1 Modelo 4 Tanques Esféricos com Aquecimento

A unidade a ser estudada é uma planta com quatro tanques esféricos interconectados. Cada tanque possui ainda sistemas de aquecimento independentes. O sistema possui como saídas os níveis dos quatro tanques (h_1, h_2, h_3 e h_4) e as temperaturas de saída de cada tanque (T_1, T_2, T_3 e T_4). Como variáveis de entrada o sistema possui as vazões de alimentação (F_1 e F_2) e a abertura das válvulas de distribuição direta aos tanques 1 e 2 (x_1 e x_2), sendo esses valores assumidos entre 0 e 1. Na Figura 4.1 é possível observar o esquema proposto da unidade de 4 tanques esféricos com aquecimento. Tal modelo foi baseado no modelo de 4 tanques esféricos, proposto por Escobar e Trierweiler (2013).

Nesse estudo foram consideradas as taxas de aquecimento dos tanques superiores (\dot{Q}_3 e \dot{Q}_4) proporcionais aos respectivos níveis (h_3 e h_4), e para os tanques inferiores, as taxas de aquecimento (\dot{Q}_1 e \dot{Q}_2) foram projetadas de forma a serem proporcionais à vazão de alimentação proveniente dos tanques superiores. A escolha dessa forma de aquecimento para os tanques inferiores foi crucial para o projeto dessa unidade, pois

dessa maneira, não há acoplamento total entre o nível e a temperatura dos tanques inferiores o que levaria a singularidades caso fossem controladas simultaneamente.

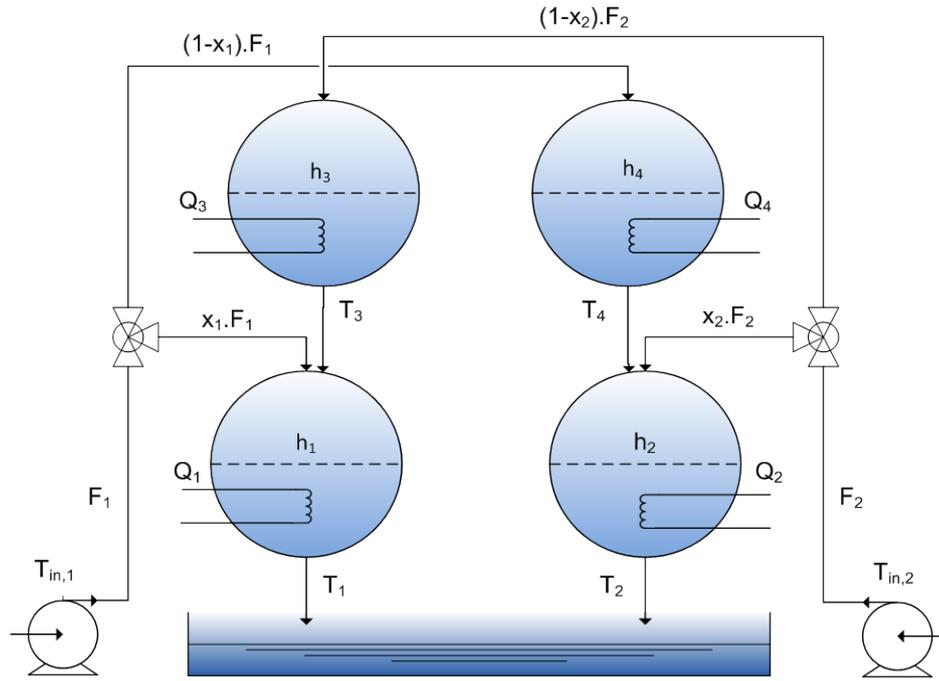


Figura 4.1: Unidade de 4 tanques esféricos com aquecimento.

A modelagem fenomenológica dessa unidade foi feita através do balanço de massa e de energia em cada tanque, permitindo a sua representação através de um modelo não linear, conforme as seguintes equações:

$$\frac{dh_1}{dt} = \frac{x_1 F_1 + R_3 \sqrt{h_3} - R_1 \sqrt{h_1}}{\pi h_1 (D_1 - h_1)} \quad (4.1)$$

$$\frac{dh_2}{dt} = \frac{x_2 F_2 + R_4 \sqrt{h_4} - R_2 \sqrt{h_2}}{\pi h_2 (D_2 - h_2)} \quad (4.2)$$

$$\frac{dh_3}{dt} = \frac{(1-x_2) F_2 - R_3 \sqrt{h_3}}{\pi h_3 (D_3 - h_3)} \quad (4.3)$$

$$\frac{dh_4}{dt} = \frac{(1-x_1) F_1 - R_4 \sqrt{h_4}}{\pi h_4 (D_4 - h_4)} \quad (4.4)$$

$$\frac{dT_1}{dt} = \frac{x_1 F_1 T_{in,1} + R_3 \sqrt{h_3} T_3 - R_1 \sqrt{h_1} T_1 + \frac{q_1 \sqrt{h_3}}{\rho c_p \sqrt{D_3}} - T_1 (x_1 F_1 + R_3 \sqrt{h_3} - R_1 \sqrt{h_1})}{\frac{\pi}{3} h_1^2 \left(\frac{3}{2} D_1 - h_1 \right)} \quad (4.5)$$

$$\frac{dT_2}{dt} = \frac{x_2 F_2 T_{in,2} + R_4 \sqrt{h_4} T_4 - R_2 \sqrt{h_2} T_2 + \frac{q_2 \sqrt{h_4}}{\rho c_p \sqrt{D_4}} - T_2 (x_2 F_2 + R_4 \sqrt{h_4} - R_2 \sqrt{h_2})}{\frac{\pi}{3} h_2^2 \left(\frac{3}{2} D_2 - h_2 \right)} \quad (4.6)$$

$$\frac{dT_3}{dt} = \frac{(1-x_2)F_2T_{in,2} - R_3\sqrt{h_3}T_3 + \frac{\dot{q}_3h_3}{\rho c_p D_3} - T_3((1-x_2)F_2 - R_3\sqrt{h_3})}{\frac{\pi}{3}h_3^2\left(\frac{3}{2}D_3 - h_3\right)} \quad (4.7)$$

$$\frac{dT_4}{dt} = \frac{(1-x_1)F_1T_{in,1} - R_4\sqrt{h_4}T_4 + \frac{\dot{q}_4h_4}{\rho c_p D_4} - T_4((1-x_1)F_1 - R_4\sqrt{h_4})}{\frac{\pi}{3}h_4^2\left(\frac{3}{2}D_4 - h_4\right)} \quad (4.8)$$

onde D_i representa o diâmetro do tanque i , R_i é o coeficiente de descarga do tanque i , \dot{q}_i é a taxa de aquecimento máxima do tanque i , $T_{in,1}$ e $T_{in,2}$ são as temperaturas das vazões de alimentação F_1 e F_2 , respectivamente, ρ é a massa específica do fluido que está escoando e c_p é a capacidade térmica do fluido à pressão constante.

A escolha de tanques esféricos se deve ao fato da não linearidade ser acentuada, devido à área de seção transversal variar conforme a altura de nível de líquido dentro do tanque. Uma boa estratégia para avaliar causa e efeito é através da representação esquemática na forma de blocos entrada-saída como observado na Figura 4.2. Essa representação mostra a inter-relação entre os diferentes subsistemas e as variáveis que compõem a planta.

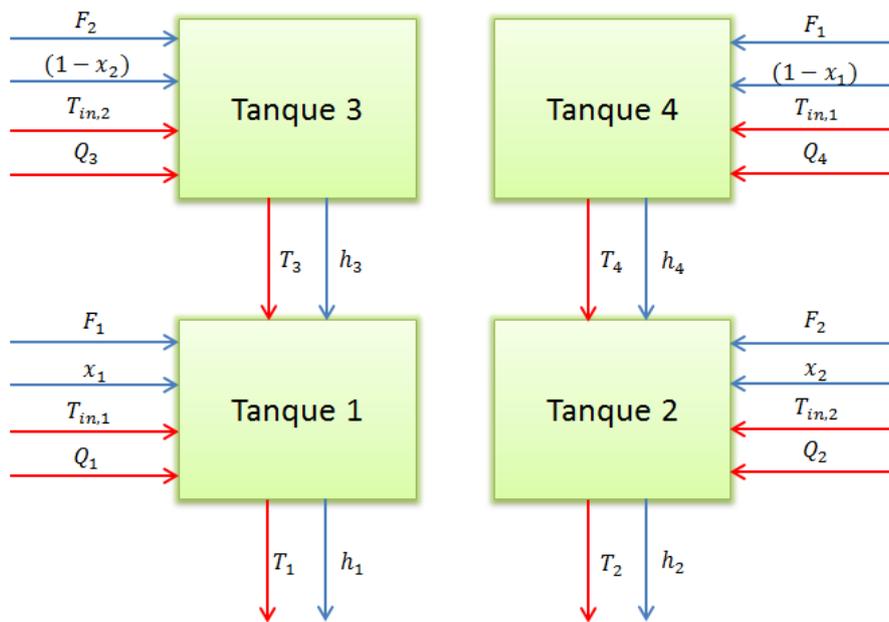


Figura 4.2: Representação esquemática em forma de blocos da Planta de 4 tanques esféricos com aquecimento.

Esse modelo foi implementado em Simulink® a fim de estudar o comportamento dinâmico não linear da unidade. Para a utilização no projeto do controlador MPC, torna-se necessário um modelo linear representativo, que foi obtido através da linearização das equações de balanço em torno de pontos de operação específicos (ou pontos de equilíbrio). O procedimento de linearização foi feito através da expansão em série de Taylor omitindo os termos de segunda ordem e superiores, utilizando variáveis desvio, possibilitando assim a representação em espaço de estado e posteriormente a obtenção da matriz de transferência. As matrizes da representação em espaço de estado são dadas pelas Equações 4.9, 4.10, 4.11 e 4.12:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & a_{1,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 & a_{2,4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{3,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{4,4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{5,1} & 0 & a_{5,3} & 0 & a_{5,5} & 0 & a_{5,7} & 0 \\ 0 & a_{6,2} & 0 & a_{6,4} & 0 & a_{6,6} & 0 & a_{6,8} \\ 0 & 0 & a_{7,3} & 0 & 0 & 0 & a_{7,7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{8,4} & 0 & 0 & 0 & a_{8,8} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

onde:

$$a_{1,1} = \frac{-0.5R_1}{h_1^{\frac{3}{2}}\pi(D_1 - h_1)} - \frac{x_1F_1 + R_3\sqrt{h_3} - R_1\sqrt{h_1}}{\pi h_1^2(D_1 - h_1)} + \frac{x_1F_1 + R_3\sqrt{h_3} - R_1\sqrt{h_1}}{\pi h_1(D_1 - h_1)^2}$$

$$a_{1,3} = \frac{0.5R_3}{\sqrt{h_3}\pi h_1(D_1 - h_1)}$$

$$a_{2,2} = \frac{-0.5R_2}{h_2^{\frac{3}{2}}\pi(D_2 - h_2)} - \frac{x_2F_2 + R_4\sqrt{h_4} - R_2\sqrt{h_2}}{\pi h_2^2(D_2 - h_2)} + \frac{x_2F_2 + R_4\sqrt{h_4} - R_2\sqrt{h_2}}{\pi h_2(D_2 - h_2)^2}$$

$$a_{2,4} = \frac{0.5R_4}{\sqrt{h_4}\pi h_2(D_2 - h_2)}$$

$$a_{3,3} = \frac{-0.5R_3}{h_3^{\frac{3}{2}}\pi(D_3 - h_3)} - \frac{(1-x_2)F_2 - R_3\sqrt{h_3}}{\pi h_3^2(D_3 - h_3)} + \frac{(1-x_2)F_2 - R_3\sqrt{h_3}}{\pi h_3(D_3 - h_3)^2}$$

$$a_{4,4} = \frac{-0.5R_4}{h_4^{\frac{3}{2}}\pi(D_4 - h_4)} - \frac{(1-x_1)F_1 - R_4\sqrt{h_4}}{\pi h_4^2(D_4 - h_4)} + \frac{(1-x_1)F_1 - R_4\sqrt{h_4}}{\pi h_4(D_4 - h_4)^2}$$

$$a_{5,1} = \frac{-6 \left(x_1F_1(T_{in,1} - T_1) + R_3\sqrt{h_3}(T_3 - T_1) + \frac{q_1\sqrt{h_3}}{\rho c_p \sqrt{D_3}} \right)}{\pi h_1^3 \left(\frac{3}{2} D_1 - h_1 \right)} + \frac{3 \left(x_1F_1(T_{in,1} - T_1) + R_3\sqrt{h_3}(T_3 - T_1) + \frac{q_1\sqrt{h_3}}{\rho c_p \sqrt{D_3}} \right)}{\pi h_1^2 \left(\frac{3}{2} D_1 - h_1 \right)^2}$$

$$a_{5,3} = \frac{\frac{3}{2} \left(\frac{R_3}{\sqrt{h_3}}(T_3 - T_1) + \frac{q_1}{\rho c_p \sqrt{h_3 D_3}} \right)}{\pi h_1^2 \left(\frac{3}{2} D_1 - h_1 \right)}$$

$$a_{5,5} = \frac{3(-x_1F_1 - R_3\sqrt{h_3})}{\pi h_1^2 \left(\frac{3}{2} D_1 - h_1 \right)}$$

$$a_{5,7} = \frac{3R_3\sqrt{h_3}}{\pi h_1^2 \left(\frac{3}{2} D_1 - h_1 \right)}$$

$$a_{6,2} = \frac{-6 \left(x_2F_2(T_{in,2} - T_2) + R_4\sqrt{h_4}(T_4 - T_2) + \frac{q_2\sqrt{h_4}}{\rho c_p \sqrt{D_4}} \right)}{\pi h_2^3 \left(\frac{3}{2} D_2 - h_2 \right)} + \frac{3 \left(x_2F_2(T_{in,2} - T_2) + R_4\sqrt{h_4}(T_4 - T_2) + \frac{q_2\sqrt{h_4}}{\rho c_p \sqrt{D_4}} \right)}{\pi h_2^2 \left(\frac{3}{2} D_2 - h_2 \right)^2}$$

$$a_{6,4} = \frac{\frac{3}{2} \left(\frac{R_4}{\sqrt{h_4}}(T_4 - T_2) + \frac{q_2}{\rho c_p \sqrt{h_4 D_4}} \right)}{\pi h_2^2 \left(\frac{3}{2} D_2 - h_2 \right)}$$

Cabe ressaltar que nas matrizes A, B, C e D os parâmetros são aqueles definidos nos pontos de operação especificados, em seus valores estacionários. A matriz de transferência equivalente, i.e., $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$, possui dimensão 8×4 , sendo as linhas representando as variáveis de saída ($h_1, h_2, h_3, h_4, T_1, T_2, T_3$ e T_4) e as colunas representando as variáveis de entrada (F_1, F_2, x_1 e x_2) do problema de controle.

4.1.1 Análise do Modelo: Pontos de Operação

Para estudar o comportamento desse sistema, é necessário definir pontos de operação que conferem características dinâmicas representativas ao processo. Os parâmetros do processo estão definidos na Tabela 4.1.

Tabela 4.1: Parâmetros da unidade 4 tanques esféricos com aquecimento

Parâmetro	Valor	Unidade
D_1, D_2, D_3, D_4	25	cm
R_1, R_2, R_3, R_4	3,75	$cm^{2,5}/s$
$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dot{q}_4$	1500	W
$T_{in,1}, T_{in,2}$	25	$^{\circ}C$
ρ	1	g/cm^3
c_p	4,18	$J/g^{\circ}C$

Para o cálculo dos pontos de operação, foram definidos os valores estacionários das entradas do problema, que são as vazões de alimentação (F_1 e F_2) e a abertura das válvulas de alimentação direta aos tanques 1 e 2 (x_1 e x_2), cujos valores encontram-se na Tabela 4.2. Esses valores foram escolhidos pelo fato do arranjo $x_1 + x_2 < 1$ apresentar zero de transmissão positivo no subcaso 2×2 ($[h_1, h_2] \times [F_1, F_2]$).

Tabela 4.2: Especificações referentes aos Pontos de Operação

Dados Iniciais	Ponto de Operação 1	Ponto de Operação 2	Unidade
F_1 e F_2	13,0	13,0	cm^3/s
x_1	0,35	0,40	—
x_2	0,25	0,20	—

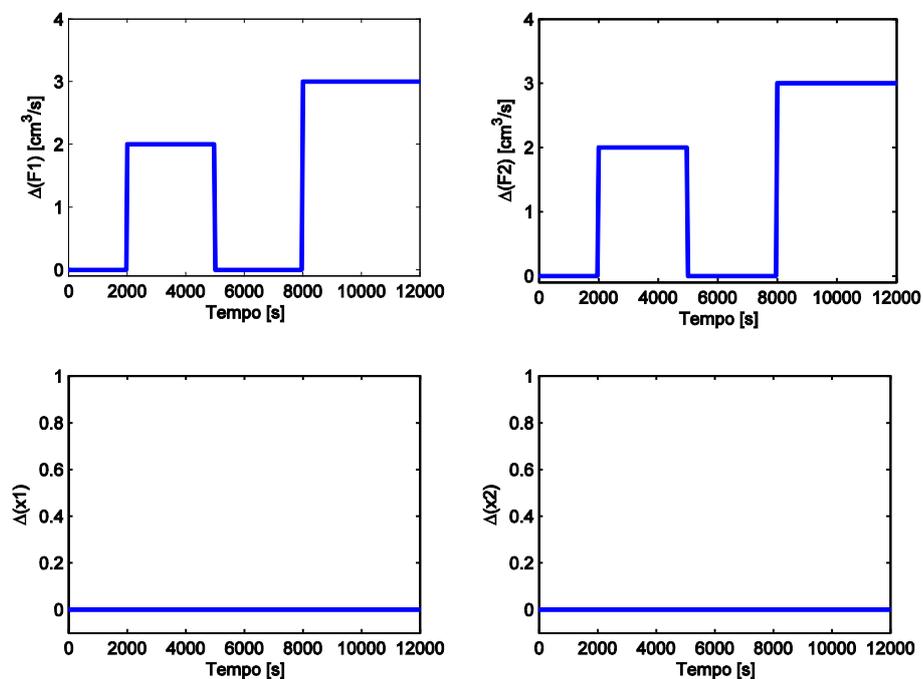
Com base nas especificações e parâmetros da unidade, foram calculados os valores estacionários das saídas, cujos resultados encontram-se na Tabela 4.3.

A partir desses dados, foram calculadas as matrizes de transferência nominais $G_{PO1}(s)$ e $G_{PO2}(s)$. Com base nessas matrizes de transferência e no modelo real do processo (não linear) foram feitas uma sequência de degraus nas vazões de alimentação (F_1 e F_2) e nas aberturas das válvulas (x_1 e x_2), separadamente, com mesma direção e mesma magnitude, a fim de verificar o comportamento das saídas e comparar o modelo real com o linear, que será utilizado no projeto do controlador.

Tabela 4.3: Cálculo dos valores estacionários

Estacionário	Ponto de Operação 1	Ponto de Operação 2	Unidade
h_1	14,54	17,23	cm
h_2	9,71	7,50	cm
h_3	6,76	7,62	cm
h_4	5,06	4,22	cm
T_1	44,83	44,74	°C
T_2	45,02	45,12	°C
T_3	34,95	35,52	°C
T_4	33,59	32,77	°C

A Figura 4.4 e a Figura 4.5 mostram as respostas dinâmicas dos níveis e temperaturas, respectivamente, frente à variação de vazão de alimentação, dado pela Figura 4.3, para o Ponto de Operação 1, e a Figura 4.6 e Figura 4.7 para o Ponto de Operação 2. Os valores da variação das aberturas das válvulas de distribuição aos tanques 1 e 2 (Δx_1 e Δx_2) foram mantidos constantes e iguais a zero. Observa-se que os modelos lineares conseguem representar adequadamente a dinâmica do processo dos quatro tanques esféricos com aquecimento, apresentando maior discrepância ao atingir os valores estacionários. Para a variação de temperatura, é observada a presença de uma grande resposta inversa em relação à variação da vazão de alimentação.

**Figura 4.3:** Variáveis manipuladas com perturbação degrau nas vazões de alimentação.

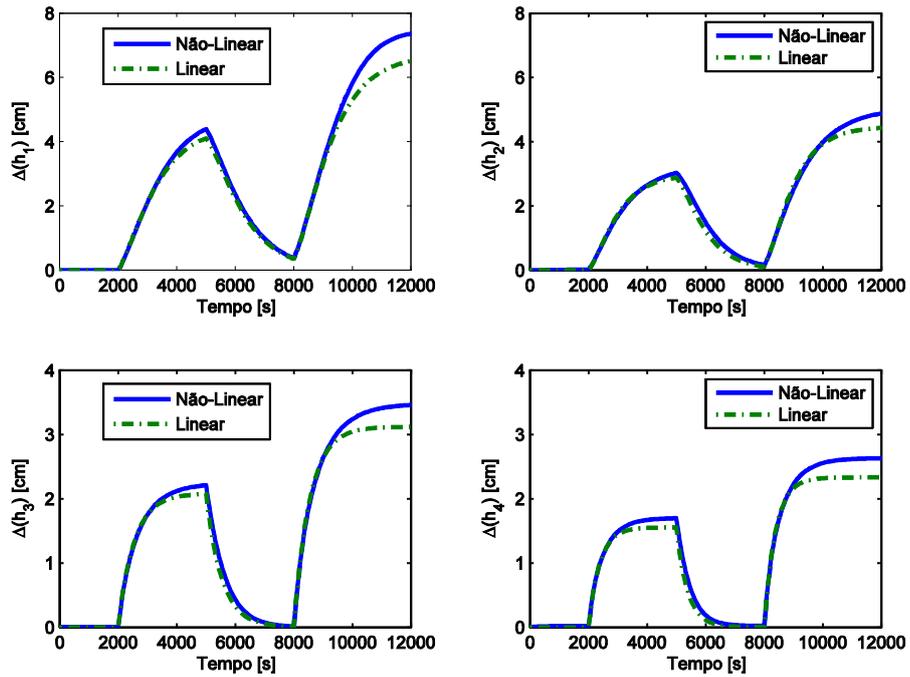


Figura 4.4: Comportamento das saídas h_1 , h_2 , h_3 e h_4 após perturbação nas vazões de alimentação no Ponto de Operação 1.

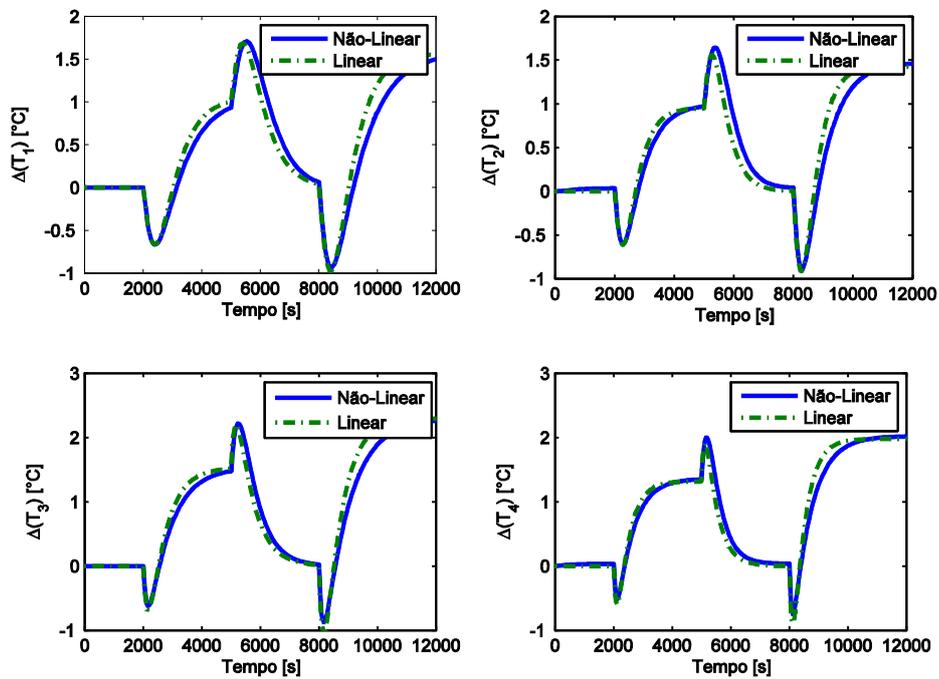


Figura 4.5: Comportamento das saídas T_1 , T_2 , T_3 e T_4 após perturbação nas vazões de alimentação no Ponto de Operação 1.

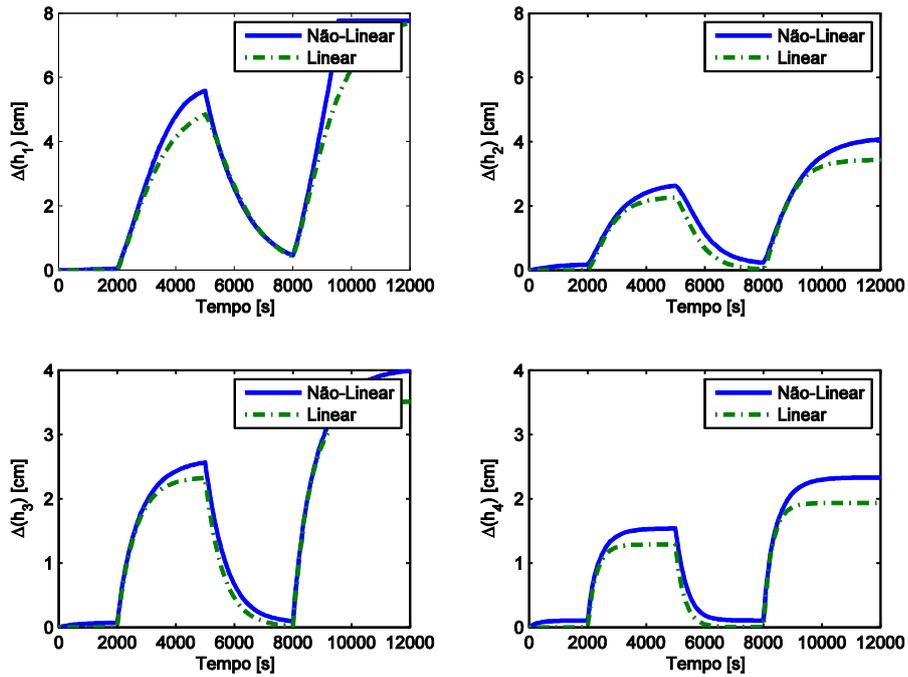


Figura 4.6: Comportamento das saídas h_1 , h_2 , h_3 e h_4 após perturbação nas vazões de alimentação no Ponto de Operação 2.

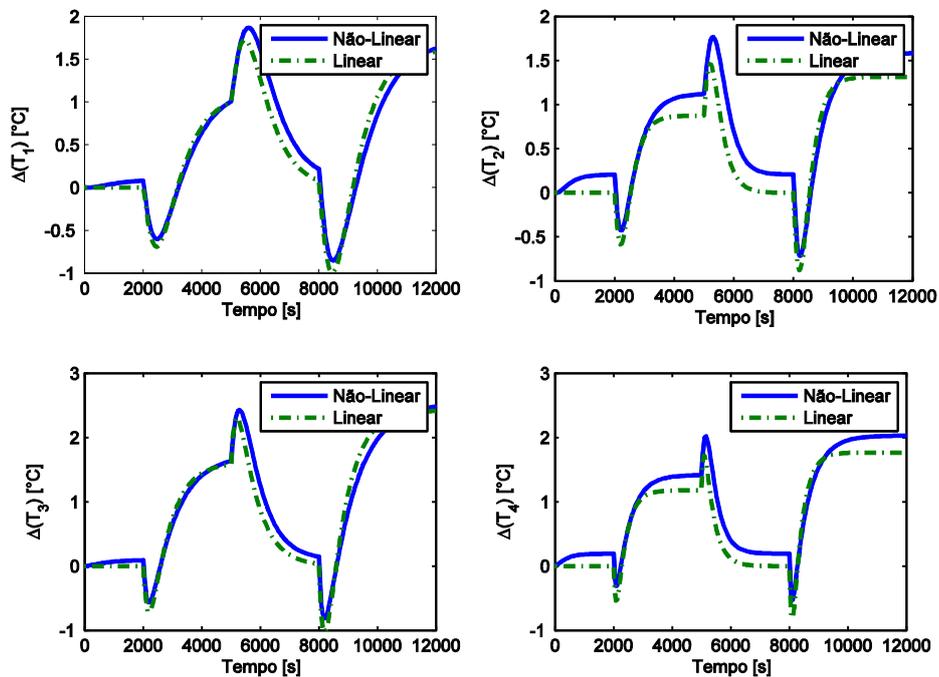


Figura 4.7: Comportamento das saídas T_1 , T_2 , T_3 e T_4 após perturbação nas vazões de alimentação no Ponto de Operação 2.

Posteriormente foram feitos degraus apenas nas aberturas das válvulas de distribuição das vazões de alimentação direta aos tanques 1 e 2 (x_1 e x_2), com mesma magnitude e direção, conforme observado na Figura 4.8. O comportamento dessas saídas

pode ser observado na Figura 4.9 e Figura 4.10 para o Ponto de Operação 1 e nas Figura 4.11 e Figura 4.12 para o Ponto de Operação 2.

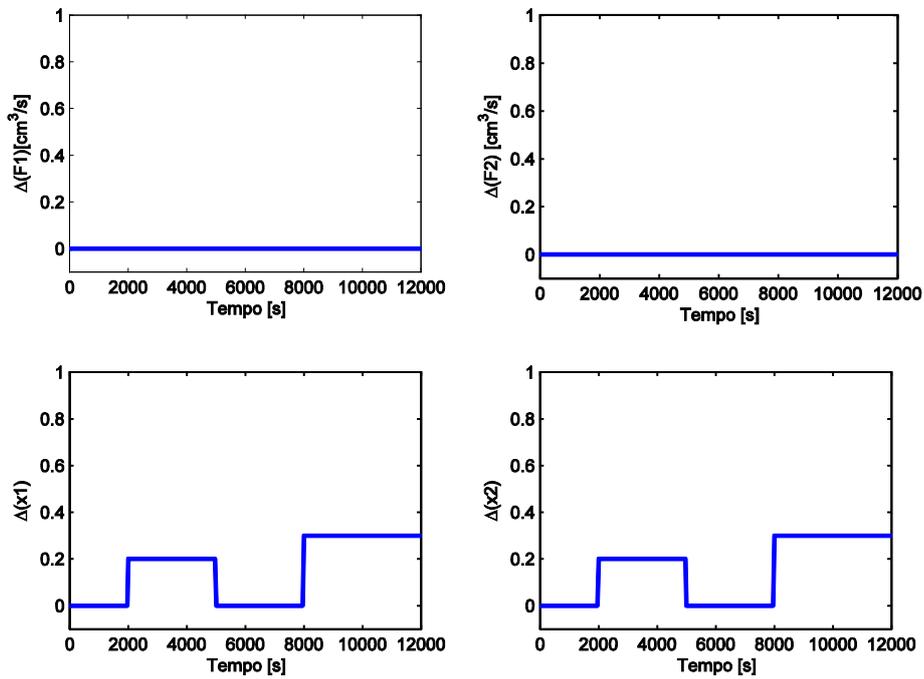


Figura 4.8: Perturbação degrau nas aberturas das válvulas de distribuição direta aos Tanques 1 e 2.

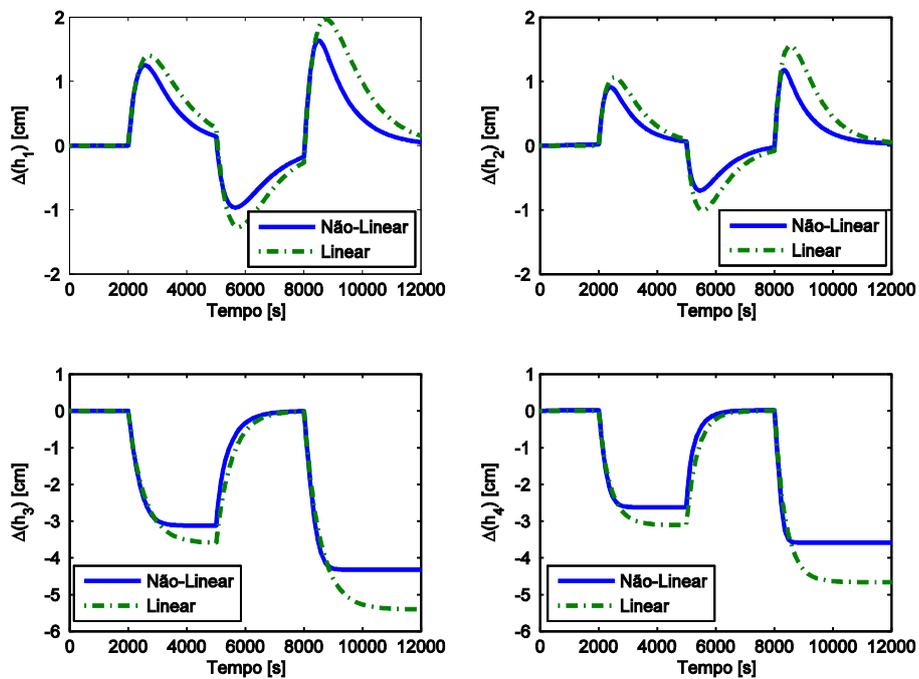


Figura 4.9: Comportamento das saídas h_1 , h_2 , h_3 e h_4 após perturbação nas aberturas das válvulas x_1 e x_2 no Ponto de Operação 1.

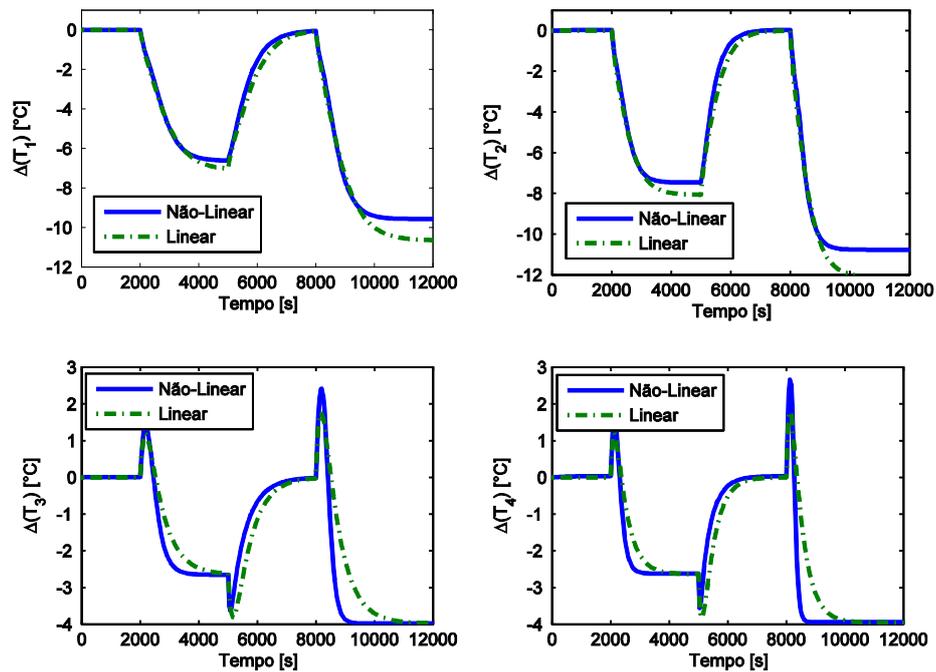


Figura 4.10: Comportamento das saídas T_1, T_2, T_3 e T_4 após perturbação nas aberturas das válvulas x_1 e x_2 no Ponto de Operação 1.

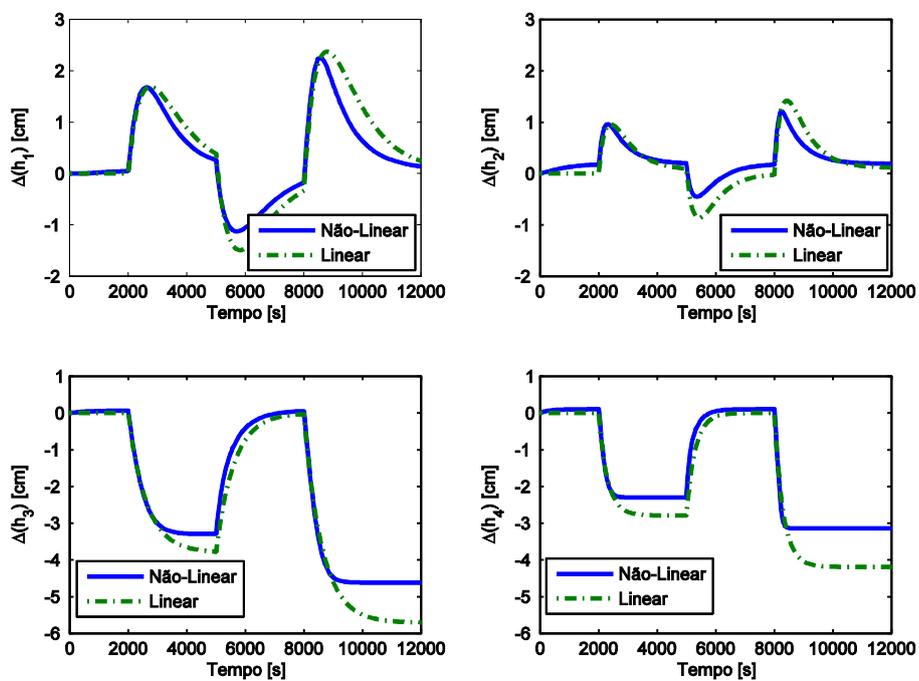


Figura 4.11: Comportamento das saídas h_1, h_2, h_3 e h_4 após perturbação nas aberturas das válvulas x_1 e x_2 no Ponto de Operação 2.

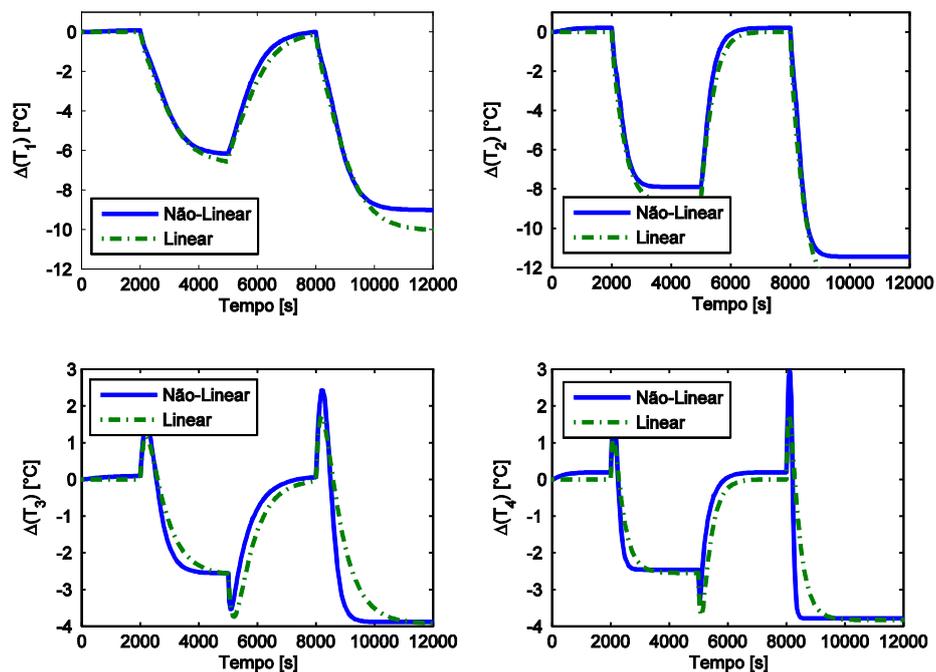


Figura 4.12: Comportamento das saídas T_1 , T_2 , T_3 e T_4 após perturbação nas aberturas das válvulas x_1 e x_2 no Ponto de Operação 2.

O comportamento das saídas frente à variação das aberturas das válvulas apresentou também uma boa aproximação do modelo linearizado com a unidade real. Como visto na Figura 4.9 e Figura 4.11, a perturbação nessas válvulas causou um distúrbio na dinâmica da planta, mas não afetou significativamente o ganho, representando um *overshoot*. Para os tanques superiores (3 e 4) a Figura 4.10 e Figura 4.12 apresentaram resposta inversa para a temperatura.

Para a variação nas quatro variáveis manipuladas, foram agrupadas as mesmas variações tanto nas vazões de alimentação, quanto para a abertura das válvulas, feitas para os casos anteriores, conforme Figura 4.13, a fim de verificar o comportamento dinâmico da unidade e a qualidade da linearização.

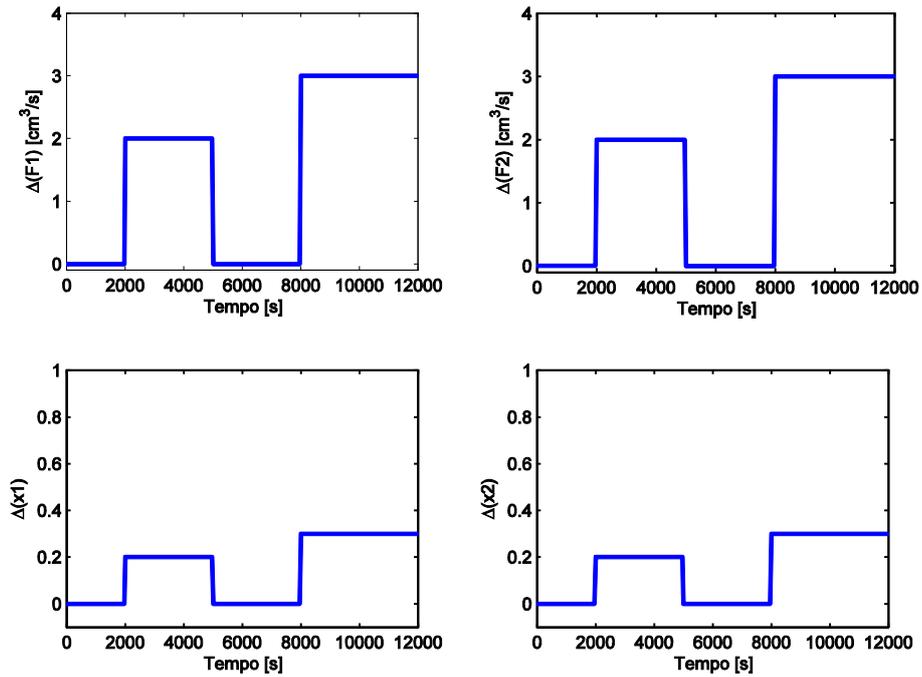


Figura 4.13: Perturbação degrau em todas as variáveis manipuladas.

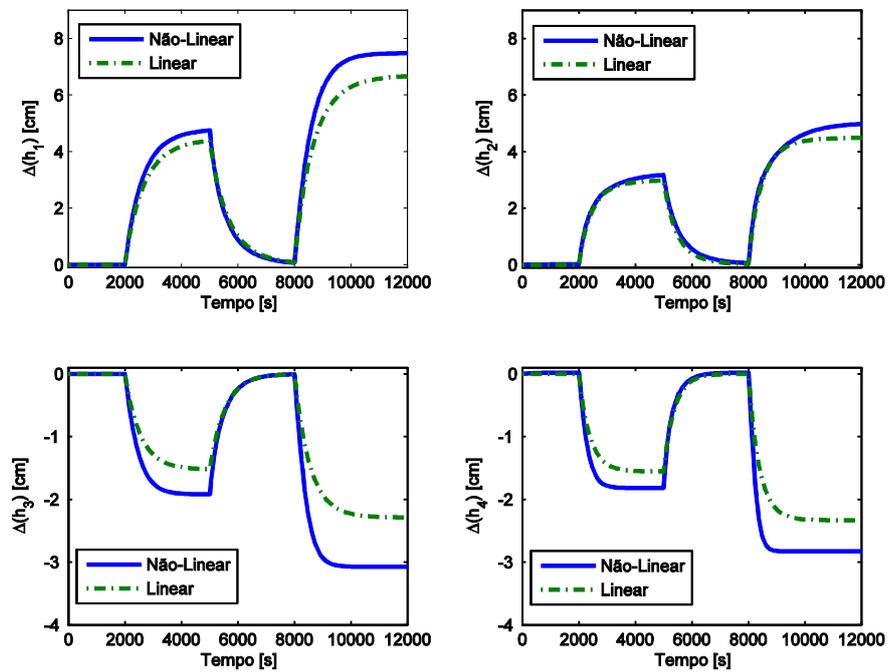


Figura 4.14: Comportamento das saídas h_1, h_2, h_3 e h_4 após perturbação na vazão de alimentação F_1 e F_2 e nas aberturas das válvulas x_1 e x_2 no Ponto de Operação 1.

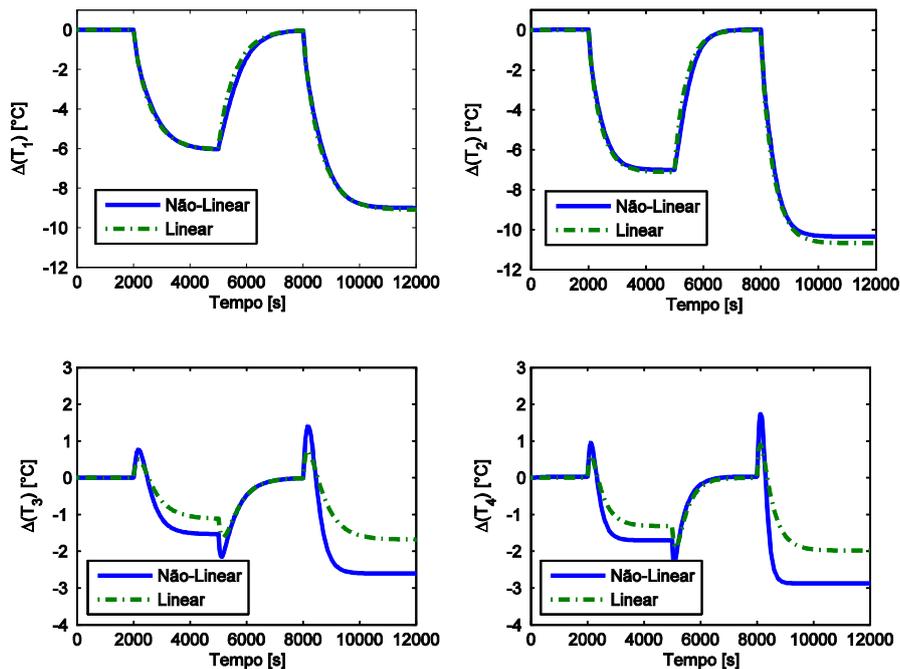


Figura 4.15: Comportamento das saídas T_1 , T_2 , T_3 e T_4 após perturbação na vazão de alimentação F_1 e F_2 e nas aberturas das válvulas x_1 e x_2 no Ponto de Operação 1.

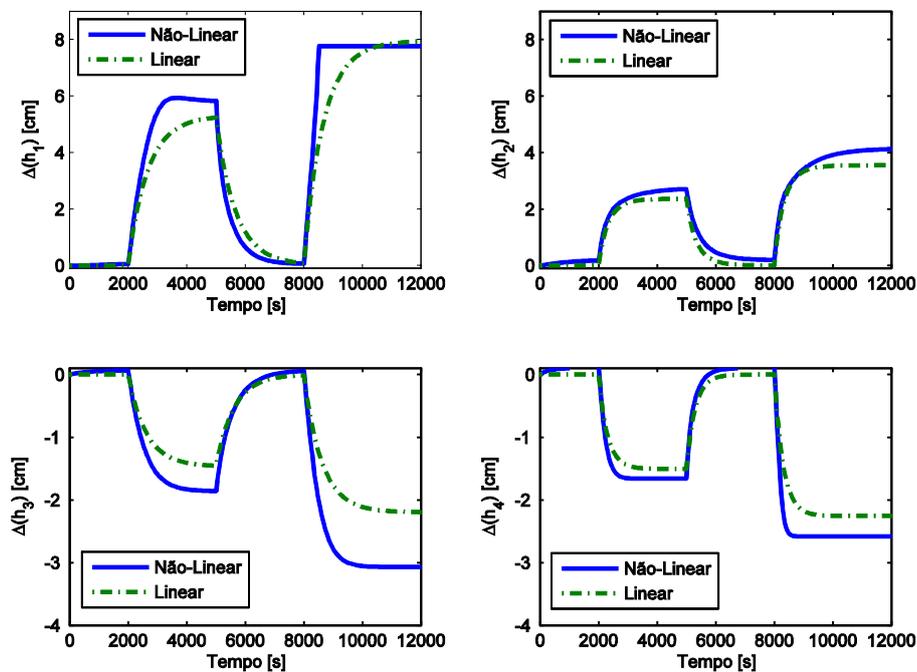


Figura 4.16: Comportamento das saídas h_1 , h_2 , h_3 e h_4 após perturbação na vazão de alimentação F_1 e F_2 e nas aberturas das válvulas x_1 e x_2 no Ponto de Operação 2.

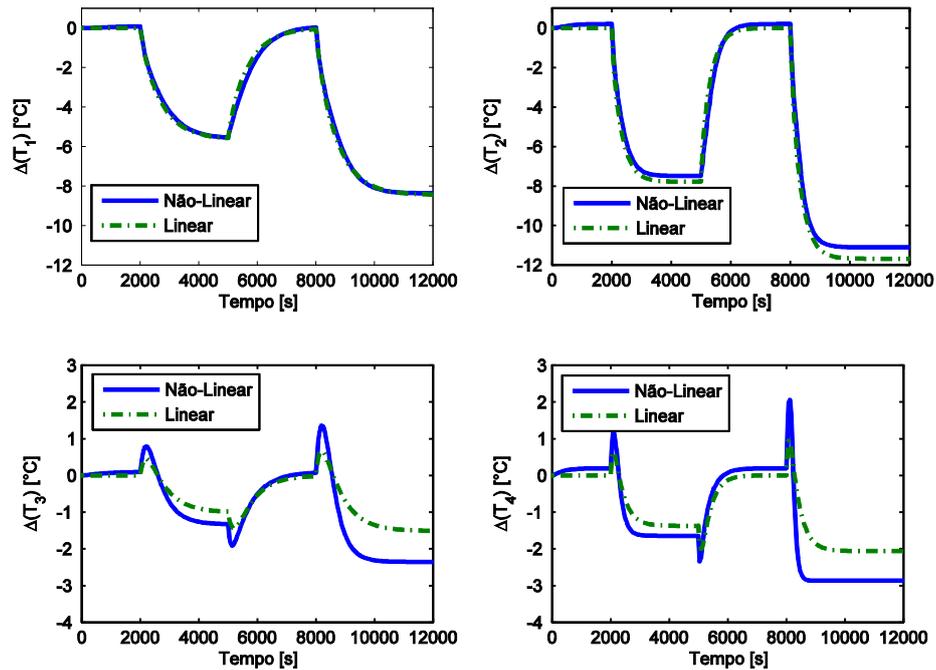


Figura 4.17: Comportamento das saídas T_1 , T_2 , T_3 e T_4 após perturbação na vazão de alimentação F_1 e F_2 e nas aberturas das válvulas x_1 e x_2 no Ponto de Operação 2.

O modelo linearizado se mostrou adequado para o projeto do controlador MPC, pois apresentou uma boa aproximação para a dinâmica do processo apresentando maior divergência nos valores estacionários. Ao considerar as perturbações na forma degrau com mesma magnitude e direção nos pares x_1 e x_2 e F_1 e F_2 , separadamente, observou-se presença de resposta inversa, para temperatura, e *overshoot*, para nível de altura dos tanques inferiores. A análise do modelo linearizado juntamente com o não linear foi feita a fim de exemplificar as características e peculiaridades do modelo não linear capturadas pela aproximação linear, sendo detalhadas no Apêndice C. Como forma de analisar quantitativamente a qualidade do modelo linearizado em relação ao modelo não linear foram calculados os valores da Integral do Erro Quadrático entre o ajuste linear e o modelo não linear para cada simulação. Os valores encontram-se na Tabela 4.4 para o Ponto de Operação 1 e na Tabela 4.5 para o Ponto de Operação 2.

Tabela 4.4: Integral do Erro Quadrático entre o modelo linearizado e o não linear para o Ponto de Operação 1.

Saída	Degaus nas vazões de alimentação	Degaus nas aberturas das válvulas	Degaus nas vazões e aberturas das válvulas
h_1	36,23	28,36	92,35
h_2	8,27	17,62	11,68
h_3	6,03	83,54	81,96
h_4	6,11	100,70	40,09
T_1	7,52	64,05	10,83
T_2	6,27	136,22	20,33
T_3	7,97	100,25	108,82
T_4	5,14	99,05	119,62

Tabela 4.5: Integral do Erro Quadrático entre o modelo linearizado e o não linear para o Ponto de Operação 2.

Saída	Degraus nas vazões de alimentação	Degraus nas aberturas das válvulas	Degraus nas vazões e abertura das válvulas
h_1	118,04	30,72	119,72
h_2	30,21	12,50	27,27
h_3	14,10	79,61	89,96
h_4	15,83	106,17	20,49
T_1	6,55	54,70	7,83
T_2	16,33	225,61	54,61
T_3	8,64	83,81	81,84
T_4	14,78	85,19	103,55

Através da Tabela 4.4 e Tabela 4.5 é possível observar que os valores da Integral do Erro Quadrático entre os ajustes linearizados e o modelo não linear para ambos os pontos de operação são pequenos indicando uma boa representatividade do modelo linearizado.

4.1.2 Métrica de Desempenho Operacional

Como forma de avaliar o desempenho operacional do sistema de 4 tanques esféricos com aquecimento, e também a qualidade do ajuste de MPC, foi proposta uma função custo conforme Equação 4.13.

$$C\$ = \frac{\dot{Q}_1}{\dot{Q}_3} \sqrt{T_1} + \frac{\dot{Q}_2}{\dot{Q}_4} \sqrt{T_2} + F_1 \frac{\sqrt{1-x_1}}{x_1^{1/4}} + F_2 \frac{\sqrt{1-x_2}}{x_2^{1/4}} \quad (4.13)$$

onde T_1 e T_2 representam as temperaturas de saída dos tanques 1 e 2, F_1 e F_2 são as vazões das correntes de alimentação e x_1 e x_2 são as aberturas das válvulas de distribuição direta aos tanques 1 e 2, respectivamente. \dot{Q}_1 , \dot{Q}_2 , \dot{Q}_3 e \dot{Q}_4 são as taxas de aquecimento de cada tanque, dadas por:

$$\dot{Q}_1 = \frac{\dot{q}_1 \sqrt{h_3}}{\rho c_p \sqrt{D_3}} \quad (4.14)$$

$$\dot{Q}_2 = \frac{\dot{q}_2 \sqrt{h_4}}{\rho c_p \sqrt{D_4}} \quad (4.15)$$

$$\dot{Q}_3 = \frac{\dot{q}_3 h_3}{\rho c_p D_3} \quad (4.16)$$

$$\dot{Q}_4 = \frac{\dot{q}_4 h_4}{\rho c_p D_4} \quad (4.17)$$

onde \dot{q}_i é a potência máxima de cada aquecedor, ρ é a densidade do líquido presente no tanque, c_p é o calor específico, D_i é o diâmetro de cada tanque e h_i é o nível de líquido presente em cada tanque i .

A função custo, proposta pela Equação 4.13, é uma função que relaciona o custo total de operação da unidade de 4 tanques esféricos com aquecimento, sendo que o valor dessa função aumenta com o aumento da vazão da alimentação (F_1 e F_2) e com o aumento da taxa de aquecimento dos tanques inferiores (\dot{Q}_1 e \dot{Q}_2), indicando assim quais as variáveis que mais influenciam no custo total de operação do sistema, ou seja, correntes com maior valor agregado. Observa-se também que essa função é inversamente proporcional às taxas de aquecimento aos tanques superiores, ou seja, um maior aquecimento fornecido em \dot{Q}_3 e \dot{Q}_4 irá minimizar o custo total, representando assim as taxas com menor valor. A parcela que relaciona o aquecimento no custo total é ponderada pela raiz quadrada da temperatura de saída dos tanques inferiores, e a parcela que relaciona a vazão é ponderada por uma função que relaciona a abertura das válvulas de alimentação direta aos tanques 1 e 2 de forma a atenuar a influência das vazões no custo total, pelo fato dessas possuírem um valor agregado menor que as taxas de aquecimento.

Os gráficos da função custo encontram-se na Figura 4.18 e Figura 4.19.

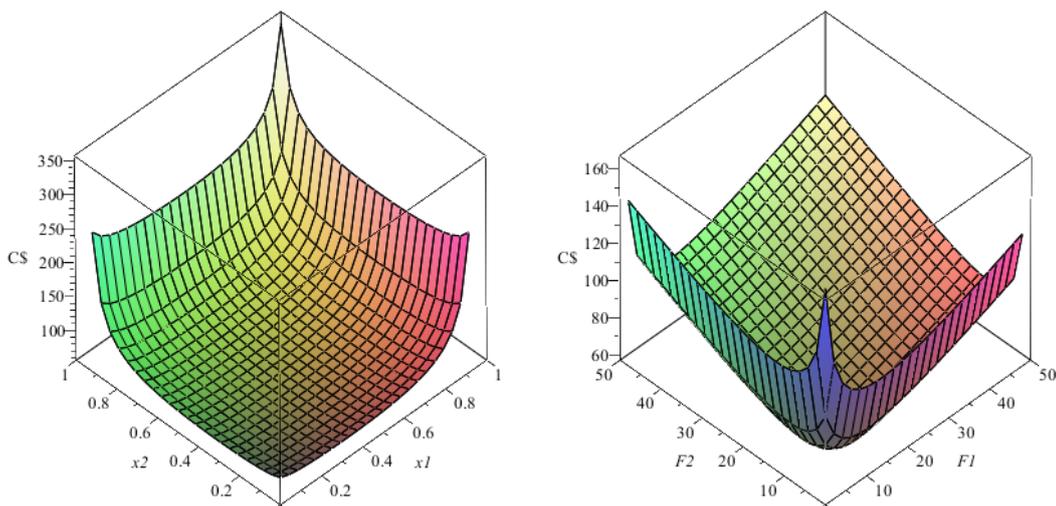


Figura 4.18: Resultado analítico da função $C\$,$ em relação à x_1 e x_2 (a) e F_1 e F_2 (b) no Ponto de Operação 1.

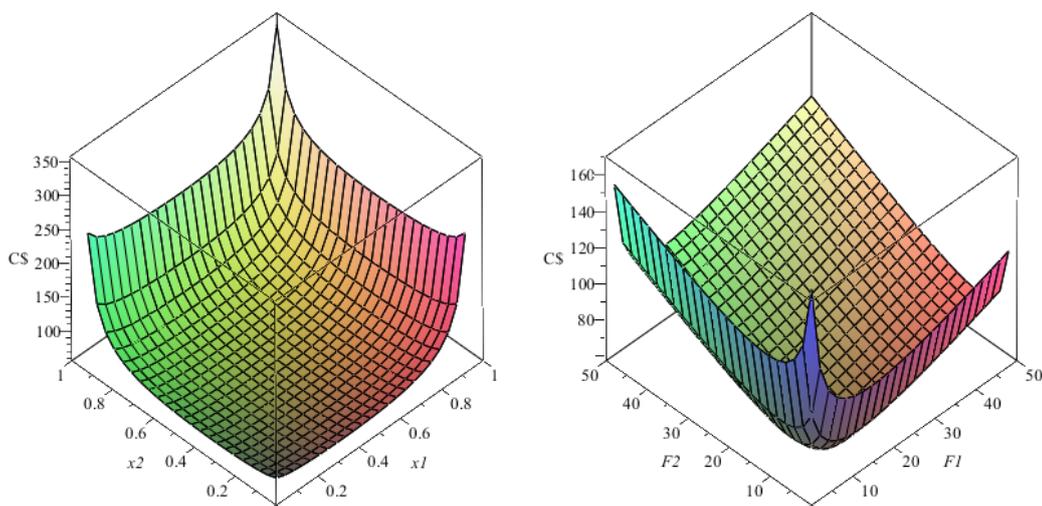


Figura 4.19: Resultado analítico da função $C\$,$ em relação à x_1 e x_2 (a) e F_1 e F_2 (b) no Ponto de Operação 2.

Como na indústria, o principal objetivo de controle é atingir a trajetória de referência (ou zona de referência, no caso de faixas) de forma rápida e robusta, visando o custo mínimo para atingir esses objetivos, torna-se necessário minimizar a o custo total para operação do sistema.

Com base nos parâmetros do sistema de 4 tanques esféricos com aquecimento, foi minimizada a função $C\$$. Os valores ótimos encontrados através do algoritmo não linear com restrições *fmincon* do Matlab® R2012b ("*trust-region-reflective algorithm*") para as entradas do problema, e os valores calculados para as saídas, encontram-se na Tabela 4.6.

Tabela 4.6: Valores Ótimos para função custo, $C\$$.

Parâmetros	Valores Ótimos	Unidade
$C\$$	55,96	\$
F_1	15,08	cm^3/s
F_2	15,08	cm^3/s
x_1	0,454	
x_2	0,454	
h_1	16,17	cm
h_2	16,17	cm
h_3	4,82	cm
h_4	4,82	cm
T_1	40,04	$^{\circ}C$
T_2	40,04	$^{\circ}C$
T_3	33,4	$^{\circ}C$
T_4	33,4	$^{\circ}C$

Considerando os parâmetros ótimos nominais encontrados (dados pela Tabela 4.6), para F_1 e x_1 , foi feita uma análise das curvas de nível da função custo do sistema em função das outras entradas, F_2 e x_2 , conforme observado na Figura 4.20.

Conforme observado nas curvas de nível e nos valores calculados, o valor ótimo para as entradas, que possui menor custo, é simétrico. Isso é proveniente do arranjo simétrico presente no sistema de 4 tanques esféricos com aquecimento. Além disso, observa-se também que existem curvas de nível nas quais os custos possuem o mesmo valor para vários arranjos entre as entradas, sendo a partir deles definidas as faixas de operação para as variáveis controladas do estudo de caso, de forma com que o sistema opere em uma região onde não há variação brusca no custo total de operação. Para o Ponto de Operação 1, da Tabela 4.2, o custo ótimo é de $C\$ = 57,3$ e para o Ponto de Operação 2 é igual a $C\$58,3$.

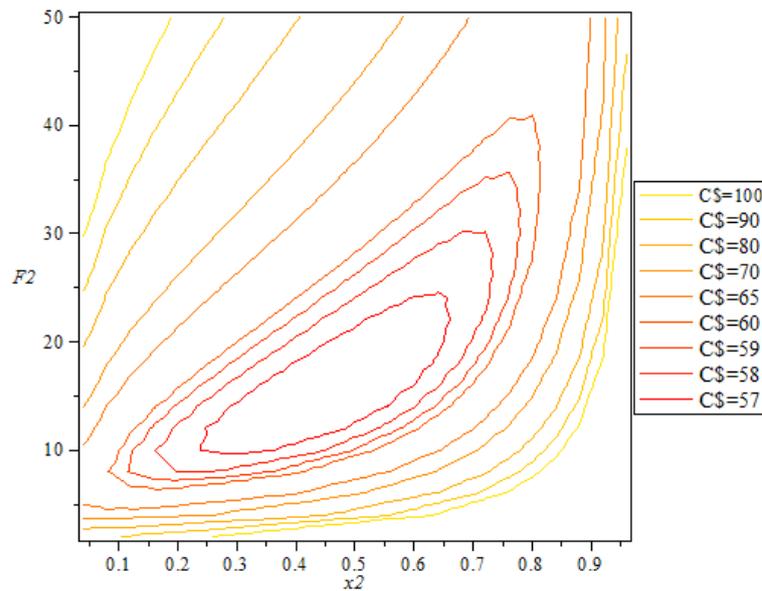


Figura 4.20: Curvas de nível para a função custo avaliada no valor ótimo.

Outra forma de analisar a função objetivo proposta é através de uma Programação Quadrática (QP), que é caracterizada por uma função objetivo quadrática com restrições lineares, dada da seguinte forma:

$$\min_x \vartheta = \frac{1}{2}x^T Hx + f^T x \quad (4.18)$$

sujeita à

$$Kx \leq b \quad (4.19)$$

onde H é uma matriz simétrica $n \times n$, matriz que representa o termo quadrático na função objetivo, f é um vetor de n coeficientes, que representa o termo linear na função objetivo e K é uma matriz $m \times n$, isto é, matriz com m restrições e n variáveis que devem satisfazer as restrições de desigualdade ($\leq b$).

A matriz H é definida como a matriz Hessiana do problema não linear avaliado no valor ótimo nominal, que se encontram na Tabela 4.6, devendo ser obrigatoriamente positiva definida a fim de gerar um problema convexo. Já a matriz f trata-se do gradiente do problema não linear também avaliado nos valores ótimos nominais. Para a matriz de restrições lineares K é atribuído o ganho estático do modelo global do processo em malha aberta e para a matriz b os limites das variáveis controladas, isto é, as faixas de operação (*soft-constraints*), considerando o vetor x como variação das variáveis manipuladas. Dessa forma a partir da função $C\$,$ dada pela Equação 4.13, foi derivado um problema quadrático com os parâmetros definidos nas Equações 4.20 e 4.21.

$$H = \begin{bmatrix} 0,1091 & 0,01 & -2,7442 & 0,0281 \\ 0,01 & 0,1091 & 0,0281 & -2,7442 \\ -2,7442 & 0,0281 & 107,6816 & -9,2115 \\ 0,0281 & -2,7442 & -9,2115 & 107,6816 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

$$f = \begin{bmatrix} -0,0518 \times 10^{-3} \\ -0,0359 \times 10^{-3} \\ 0,9477 \times 10^{-3} \\ 0,5864 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Considerando uma nova função custo que leva em conta a parcela da função custo original ($C_1\$$) que relaciona apenas as entradas do problema de controle, dada pela Equação 4.22, observa-se a presença de uma matriz Hessiana com autovalores negativos, que ao ser avaliada no problema QP resultará em um problema não-convexo. Dessa forma, para a avaliação dessa função custo, $C_2\$$, foi obtido um problema de programação linear (LP) dado pelas Equações 4.23 e 4.24.

$$C_2\$ = F_1 \frac{\sqrt{1-x_1}}{x_1^{1/4}} + F_2 \frac{\sqrt{1-x_2}}{x_2^{1/4}} \quad (4.22)$$

$$\min_x q = g'x \quad (4.23)$$

sujeito a

$$Kx \leq b \quad (4.24)$$

onde g é o gradiente da função $C_2\$$ avaliado no valor ótimo nominal, K é definida como a matriz de ganho do modelo em malha aberta e b os valores das *soft-constraints*. O valor encontrado para g é:

$$g = \begin{bmatrix} 0,9003 \\ 0,9003 \\ -19,9116 \\ -19,9119 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Assim, o problema de otimização não linear (Equação 4.13) que necessita de um algoritmo de otimização não linear, o qual demanda uma maior carga computacional para ser resolvido e apresenta um maior risco de obtenção de ótimos locais, é substituído por uma programação quadrática e por uma programação linear ambos com restrições de desigualdade. Os valores ótimos encontrados para a programação quadrática e para a programação linear, considerando o sistema sem distúrbios e com as faixas de operação, encontram-se na Tabela 4.7.

Com base no problema de programação quadrática ou programação linear é possível incluir no problema geral, operando em faixas, um otimizador que calcula em cada tempo de amostragem o valor ótimo para as ações de controle enviando *targets* para essas variáveis, fazendo com que o problema proposto opere sempre no ponto ótimo, ou seja, aquele de menor custo de operação, levando em consideração as faixas e os distúrbios presentes no caso real.

Tabela 4.7: Valores ótimos para o problema QP e LP.

Parâmetros	QP	LP	Unidade
<i>CUSTO</i>	$\vartheta = 6,91$	$\varrho = 7,98$	\$
F_1	12,55	12,86	cm^3/s
F_2	11,81	12,65	cm^3/s
x_1	0,388	0,495	–
x_2	0,264	0,313	–
h_1	13,07	14,62	<i>cm</i>
h_2	8,28	8,87	<i>cm</i>
h_3	5,36	5,36	<i>cm</i>
h_4	4,18	3,69	<i>cm</i>
T_1	42,93	41,96	$^{\circ}C$
T_2	44,15	42,10	$^{\circ}C$
T_3	33,86	33,86	$^{\circ}C$
T_4	32,82	32,36	$^{\circ}C$

A obtenção de dois problemas de otimização (um QP e outro LP) se deve pelo fato do segundo ser dependente apenas das entradas do modelo, ou seja, independe de distúrbios nas variáveis de saída. O problema QP, além da parcela referente às entradas, possui parcelas referentes ao aquecimento enviados aos tanques (relacionadas aos níveis dos tanques superiores, saídas), que variam diretamente com os distúrbios, necessitando de uma etapa referente à reconciliação de distúrbios para o cálculo das matrizes H e f para a resolução do problema de otimização. Assim, para a utilização do QP, nesse caso, além das matrizes K e b que variam com os distúrbios presentes no caso real, haveria para cada instante de amostragem uma nova função objetivo para o cálculo do custo ótimo. Como nesse estudo foram derivados dois problemas (um QP e outro LP) ambos os problemas serão analisados, e comparados com o a função custo real (não linear).

4.1.3 Otimizador em Tempo Real

O sistema de otimização em tempo real serve para direcionar a planta para o melhor ponto de operação considerando as restrições e as condições operacionais. Essa camada deve possuir um modelo matemático do processo em questão e uma ou mais funções objetivo (função custo a ser minimizada, função de máxima eficiência energética, máxima produção, etc.) resultando em valores ideais ou *setpoints* a serem alcançados pelo sistema de controle (Campos, Gomes e Perez, 2013). Considerando uma planta na qual se deseja minimizar os custos, considera-se que esses custos estejam associados às entradas (manipuladas) do sistema e com os produtos (saídas), de forma que as entradas tendem a aumentar o custo e as saídas a diminuir.

O RTO (*Real Time Optimization*), conforme Trierweiler (2013), é uma estratégia de otimização que possui uma etapa de reconciliação dos dados a fim de identificar a estabilidade da planta para ajustar os parâmetros do modelo, e a partir dele resolver o problema de otimização econômica. Pelo fato de ser um problema mais complexo e não linear ocorre uma maior demanda computacional, além de uma baixa periodicidade para obtenção das soluções. Aqui, para simplificar a sua utilização, optou-se por não utilizar a etapa de reconciliação de dados, portanto não se trata de um RTO, e utiliza um modelo linear do processo (G) resolvendo um problema de programação quadrática (QP) ou

programação linear (LP) para calcular os as ações de controle ótimas, isto é, *targets*, considerando as perturbações atuais na mesma frequência de atuação do controlador. A Figura 4.21 mostra a arquitetura do otimizador simplificado. Essa estratégia de controle é muitas vezes denominada de MPC em duas camadas, sendo que a de otimização está vinculada a aspectos econômicos e a segunda, ao cálculo das ações de controle que efetivamente serão aplicadas na planta.

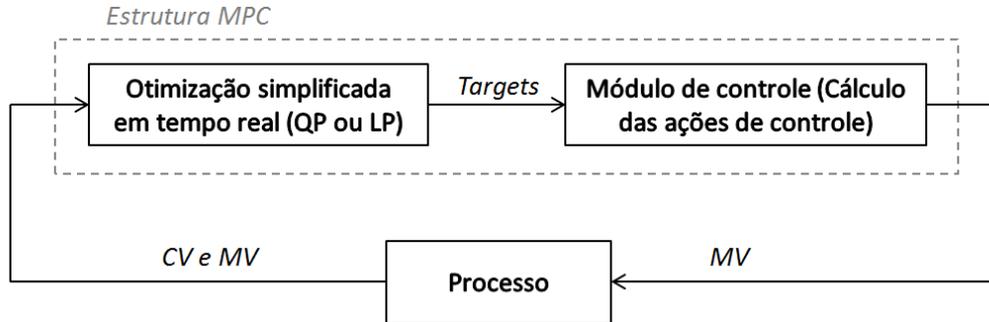


Figura 4.21: Arquitetura do controlador preditivo com camada de otimização (Adaptado de Campos, Gomes e Perez, 2013).

Na Figura 4.21 o controlador MPC recebe os dados da planta: variáveis controladas (CVs), associadas às restrições operacionais e perturbações medidas, associadas às condições externas ao processo. Essas informações são validadas, processadas e os resultados (variáveis manipuladas ótimas) são enviadas como *targets* ao processo. O objetivo da otimização QP ou LP é estimar para onde o processo deveria ir, considerando uma função objetivo econômica. Essa camada vai calcular os valores ótimos de variáveis manipuladas considerando os ganhos estáticos do modelo do controlador (que costumam se localizar em pontos operacionais onde algumas restrições da planta estão ativas).

As variáveis manipuladas (MVs) são avaliadas pelo otimizador, juntamente com os seus valores passados a fim de estimar as saídas, Δy_{sim} , em malha aberta (baseadas no modelo linear do processo, o mesmo utilizado para o controlador) e comparar com as saídas reais, y_{cvs} . A diferença $y_{cvs} - \Delta y_{sim}$ é uma discrepância ocasionada pelos distúrbios não medidos e entre o modelo da planta e o sistema real.

Considerando o sistema operando em faixas, qualquer movimento para as variáveis de saída é permitido desde que seus valores permaneçam dentro da faixa especificada máxima ($y_{m\acute{a}x}$) e mínima ($y_{m\grave{m}n}$). Assim, o problema de otimização é resolvido, e como restrições de desigualdade ($Kx \leq b$) é considerado o valor do ganho estático do processo, K , de forma que:

$$K \cdot u \leq y_{m\acute{a}x} - (y_{cvs} - \Delta y_{sim}) + K \cdot u_0 \quad (4.26)$$

$$-K \cdot u \leq -y_{m\grave{m}n} + (y_{cvs} - \Delta y_{sim}) - K \cdot u_0 \quad (4.27)$$

onde u_0 é o valor das MVs utilizadas no instante atual.

Dessa maneira, é minimizado o valor da função de programação quadrática ou programação linear que obedece às restrições operacionais (*soft-constraints*) através da

estimação em malha aberta (matriz de ganhos) em relação ao estado atual das CVs. Assim, em cada instante de amostragem, com base nas MVs atual e passadas as restrições de desigualdade do problema de otimização variam, e o ponto ótimo calculado (ações de controle que se tornam *target* para as MVs) é enviado ao controlador preditivo, indicando o custo mínimo de operação para o problema.

Capítulo 5 – Resultados

A fim de validar a metodologia proposta para o ajuste de controladores preditivos multivariáveis foi utilizado o Modelo de 4 tanques esféricos com aquecimento, descrito no capítulo anterior. O arranjo específico e o modo de operação em cada estudo de caso proposto podem variar de acordo com o projetista, podendo ser através de *setpoint*, para sistemas quadrados, ou faixas de operação, para sistemas não quadrados com número negativo de graus de liberdade, ou seja, $CVs > MVs$.

O trabalho em questão trata-se de um trabalho computacional, onde os dados considerados como sendo da “planta real” são obtidos através da simulação das equações que compõem o modelo não linear do sistema. Além disso, a utilização de funções para otimização, e o próprio controlador preditivo (MPC) possuem suas configurações de acordo com o *software* utilizado.

O *software* utilizado para a simulação dinâmica do modelo do processo, e para a implementação do método proposto para o ajuste de controladores MPC foi o Matlab® R2012b (8.0.0.783) 64-bit (win64) e o Simulink® Version 8.0 (R2012b).

O processador empregado para todos os testes e resultados apresentados nessa dissertação foi um Intel®Core™ i7 – 4770S CPU @ 3.10 GHz, com 12 GB de RAM.

5.1 Modelo 4 Tanques Esféricos com Aquecimento

Primeiramente foram considerados dois casos quadrados $[2 \times 2]$, que possuem como variáveis manipuladas as vazões de alimentação F_1 e F_2 e como variáveis controladas os níveis dos tanques 1 e 2, h_1 e h_2 e as temperaturas desses tanques, T_1 e T_2 , separadamente. Essa análise será feita para o sistema operando através de *setpoint* já que possui o número de variáveis manipuladas necessário para atingir o objetivo de controle.

Posteriormente foram feitas análises e ajuste do controlador preditivo para sistemas não quadrados, 4×2 e 6×4 , que é o foco principal do método proposto nesse trabalho, operando através de faixas (*soft* e *hard-constraints*). Foi incluída também, no último sistema, a utilização de um otimizador que calcula *targets* para as variáveis manipuladas

minimizando o custo total de operação do sistema, através de um problema QP ou LP, obedecendo às restrições operacionais, tornando assim o sistema em uma configuração $[10 \times 4]$.

5.1.1 Ajuste em setpoint para sistema quadrado 2×2

Dois casos foram estudados para o sistema quadrado 2×2 , onde as variáveis manipuladas foram as vazões de alimentação (F_1 e F_2) e as variáveis controladas foram as alturas dos tanques inferiores, h_1 e h_2 para o Caso 1, e as temperaturas T_1 e T_2 para o Caso 2.

Caso 1: $[h_1, h_2] \times [F_1, F_2]$

Para ajustar o controlador no caso $[h_1, h_2] \times [F_1, F_2]$, foi considerado o mesmo cenário, mas em dois pontos de operação distintos, apresentados na Tabela 4.2.

A primeira parte do método proposto consiste na determinação da função de desempenho desejável, $T_d(s)$, através da minimização da Equação 3.19. Os parâmetros encontrados como tempo de subida para a função que relaciona a variação de saída em relação à variação de setpoint para cada canal são $t_s = [370,33; 218,53]$. A minimização dessa função foi feita através do algoritmo *fmincon* do Matlab® R2012b (“*trust-region-reflective algorithm*”). A Figura 5.1 mostra a resposta degrau da função encontrada, $T_d(s)$, e das correspondentes respostas alcançáveis para cada um dos cenários, i.e., $T_1(s)$ e $T_2(s)$.

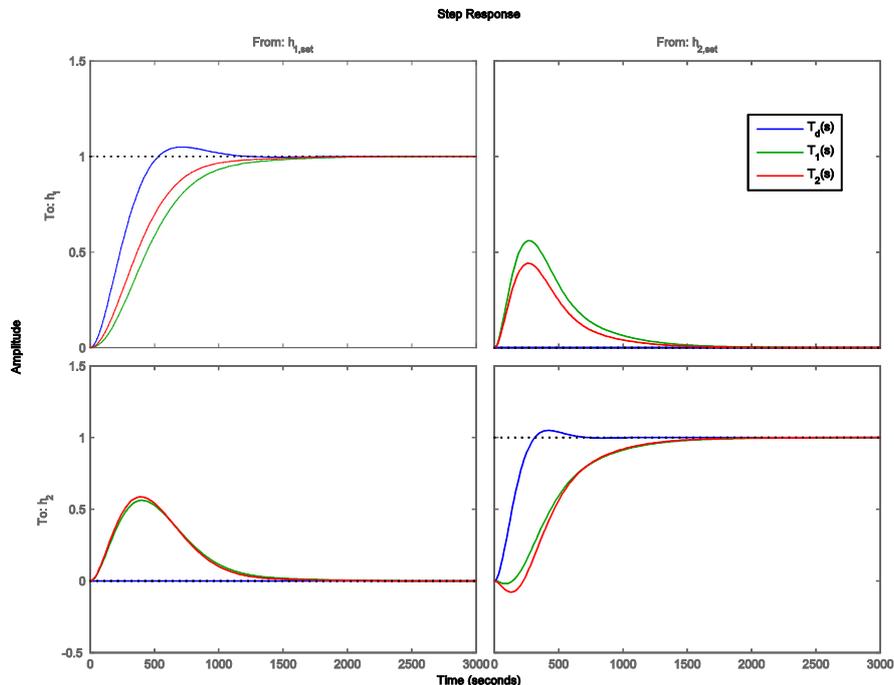


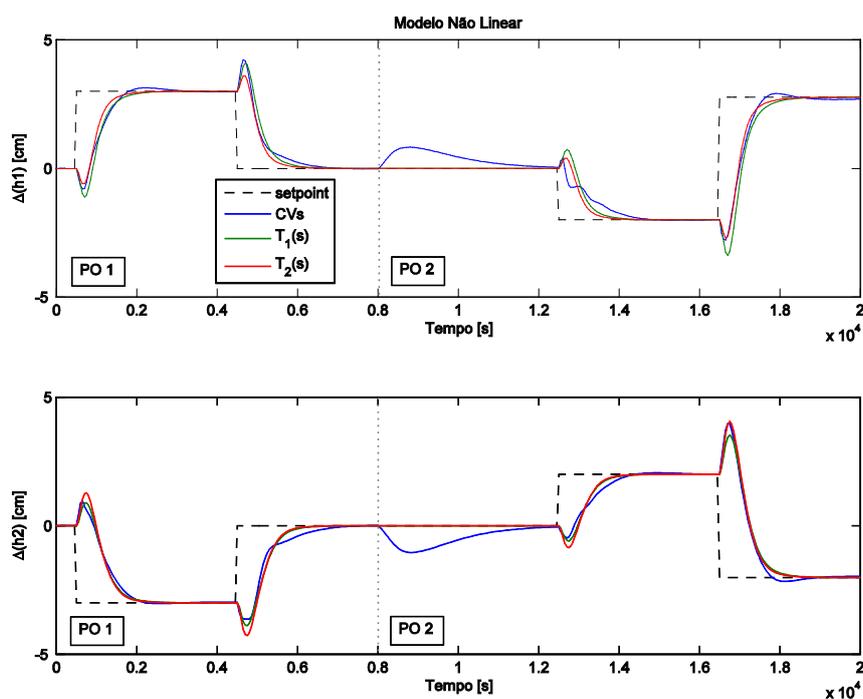
Figura 5.1: Resposta degrau das funções T_d , T_1 e T_2 para os níveis.

Como observado na Figura 5.1, a função T_d trata-se de uma matriz de transferência diagonal, a qual deverá ser multiplicada pela fatoração Blaschke responsável por capturar as direções de saída dos zeros presentes no SPD de cada cenário. Essa combinação permite que se determinem os desempenhos alcançáveis $T_1(s)$ e $T_2(s)$.

As matrizes de escalonamento obtidas através do condicionamento mínimo global, γ^\square , que são baseadas na frequência máxima da função RPN para cada cenário ($\omega_{M\acute{A}X,1} = 0,0034$ e $\omega_{M\acute{A}X,2} = 0,0039$) são $L_s = \text{diag}[1,0125; 1,1970]$ e $R_s = \text{diag}[0,7445; 1,0]$. Essas matrizes de escalonamento farão com que sistema utilizado como modelo para o controlador ($G_s = L_s G_1 R_s$) possua um condicionamento próximo ao mínimo uma vez que leva em conta todos os cenários analisados.

O sistema, que apresenta zeros de transmissão positivos, foi perturbado em mudanças de *setpoint* na direção de saída desses zeros, a qual consiste na direção da pior perturbação possível. Além disso, foi feita uma perturbação nos valores de x_1 e x_2 no tempo $t = 8000s$ a fim de observar a resposta do ajuste a distúrbios externos, e a robustez do método ao mudar para o Ponto de Operação 2. A sintonia dos pesos do controlador, encontrados através do algoritmo de otimização não linear sem restrições *fminsearch* (Nelder-Mead) do Matlab® R2012b, são $Q = \text{diag}[0,0073; 0,0057]$ e $W = \text{diag}[0,0187 \times 10^{-3}; 0,9190 \times 10^{-3}]$. As simulações feitas para esse ajuste, considerando a planta não linear e os cenários lineares, encontram-se na Figura 5.2.

Na Figura 5.2(a) é apresentada a variação *setpoint*, a variação das trajetórias alcançáveis para os dois cenários lineares considerados no ajuste ($T_1(s)$ e $T_2(s)$) e os valores das variações das CVs durante a mudança dos pontos de operação. Foram consideradas as variações das grandezas medidas pelo fato de serem considerados cenários diferentes no ajuste.



(a)

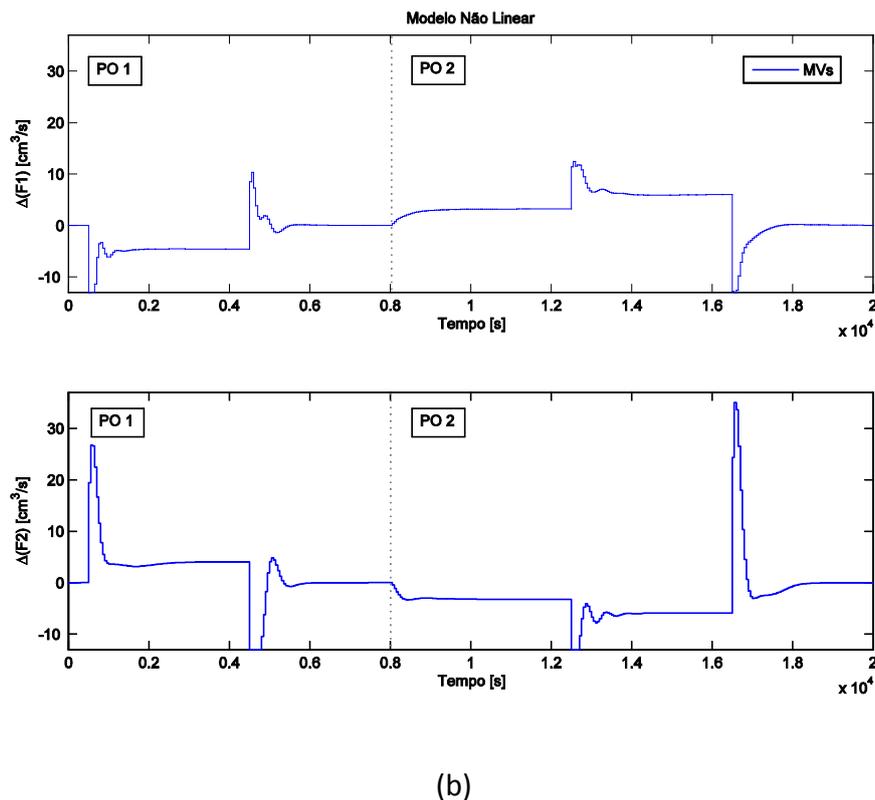


Figura 5.2: Variáveis controladas (a) e manipuladas (b) para ajuste multi-cenários através de *setpoint* de níveis no caso 2×2 .

Os pesos do controlador MPC calculados para o estudo (Figura 5.2) são obtidos a fim de priorizar a importância entre as variáveis consideradas, visto que o escalonamento é feito previamente e incluído no ajuste através de filtros para planta não linear, conforme esquema proposto na Figura 3.6.

Caso 2: $[T_1, T_2] \times [F_1, F_2]$

Para ajustar o controlador no caso $[T_1, T_2] \times [F_1, F_2]$, foram considerados também os mesmos cenários, nos Pontos de Operação 1 e 2. O valor dos tempos de subida para a função de desempenho desejado, T_d , são $t_s = [400,1; 406,6]$. A Figura 5.3 mostra a resposta degrau da função encontrada, e das funções fatoradas (através da fatoração de Blaschke), que representam as funções de desempenho alcançável em relação a cada cenário.

A Figura 5.3 apresenta a resposta degrau das trajetórias encontradas para os cenários nos Pontos de Operação 1 e 2 e a resposta degrau para a função de desempenho desejado, T_d . Nota-se que a trajetória é quase igual para os dois cenários devido ao valor do zero localizado no SPD para ambos os Pontos de Operação ser igual.

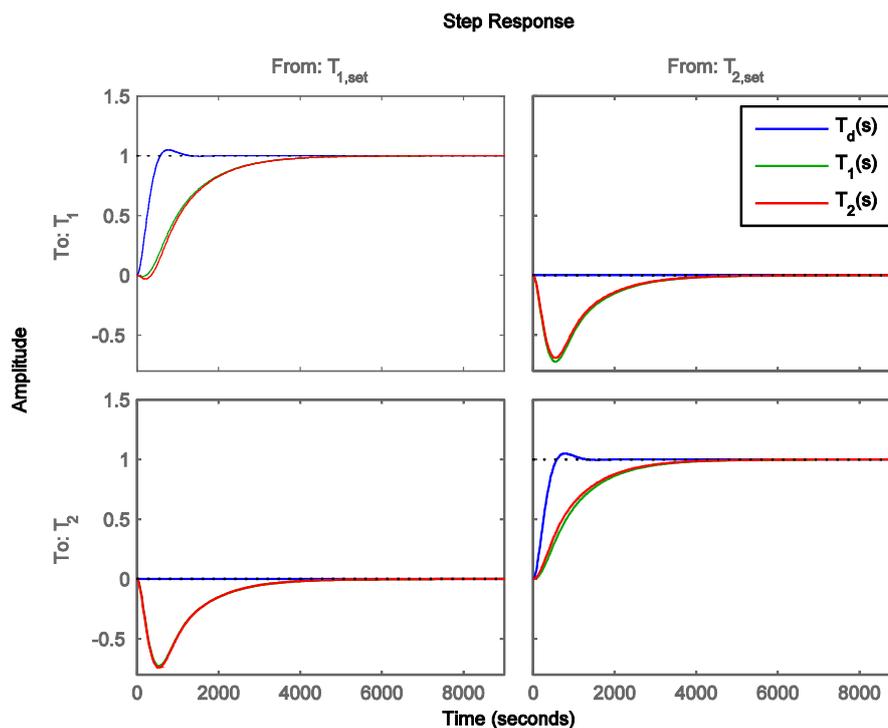
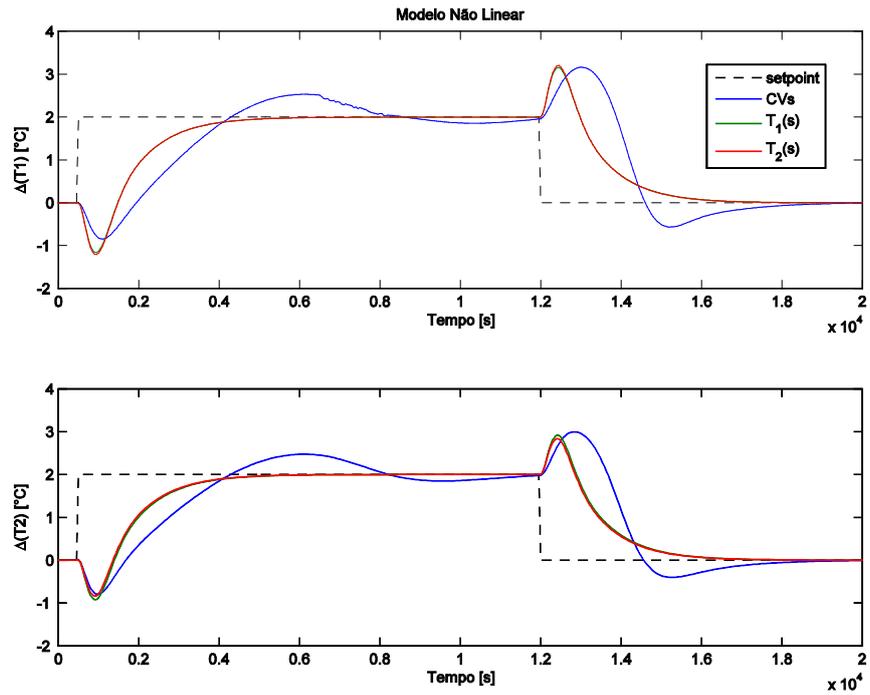


Figura 5.3: Resposta degrau para as funções de desempenho desejável e alcançável para as temperaturas.

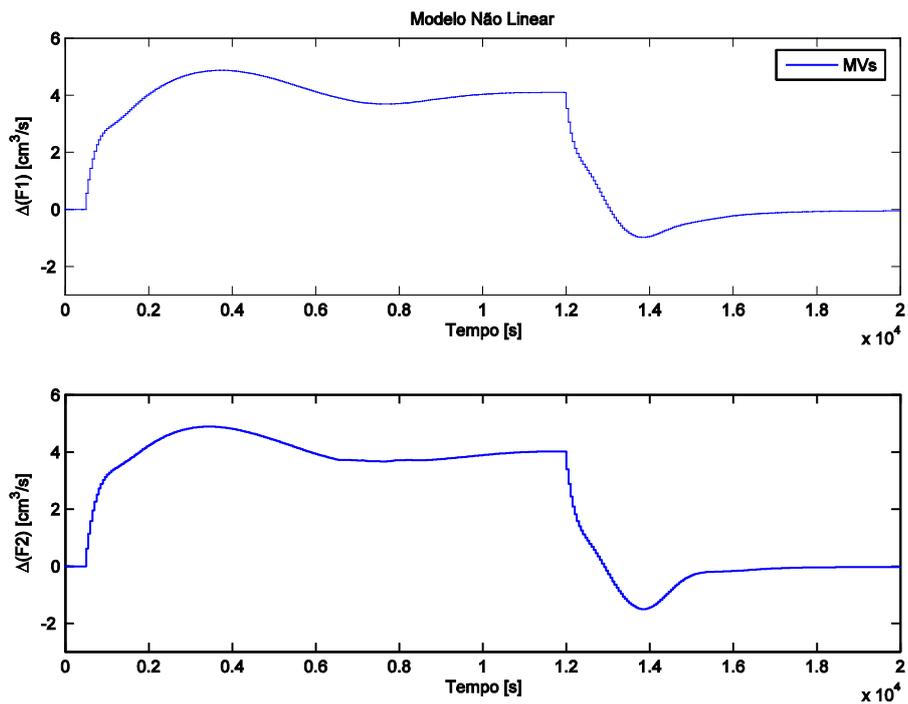
O escalonamento feito através do condicionamento mínimo global, avaliado na frequência com que ocorre o RPN ($\omega_{M\acute{A}X,1} = 0,0015$ e $\omega_{M\acute{A}X,2} = 0,0015$), são $L_s = \text{diag}[1,0171; 1,0506]$ e $R_s = \text{diag}[0,8948; 1,0]$. Para sintonizar os pesos do controlador preditivo foram feitos degraus no *setpoint*, na direção dos zeros de transmissão localizados no SPD (direções diferentes do caso anterior).

Os pesos encontrados para a simulação são $Q = \text{diag}[0,1381 \times 10^{-3}; 0,1368 \times 10^{-3}]$ e $W = \text{diag}[0,1021 \times 10^{-3}; 0,2154 \times 10^{-3}]$.

A simulação dinâmica para esse ajuste e as trajetórias ótimas alcançáveis para cada cenário ($T_1(s)$ e $T_2(s)$) considerado encontram-se na Figura 5.4. Cabe ressaltar que as trajetórias obtidas como alcançáveis para os cenários, são baseadas em modelos lineares, logo se tratam de trajetórias lineares. A planta utilizada nessa simulação é não linear, logo poderá haver uma discrepância significativa entre as trajetórias de referência e o valor que as CVs irão atingir. Nessa simulação, Figura 5.4, a discrepância entre a trajetória da planta não linear e do cenário alcançável (linear) é acentuada em relação à simulação da Figura 5.2, devido ao modelo linearizado apresentar um ganho inferior ao ganho real (conforme Figura 4.15 e Figura 4.17) o que leva à uma ação de controle mais intensa gerada pelo controlador (que é baseado no modelo linear) acarretando um *overshoot*.



(a)



(b)

Figura 5.4: Variáveis controladas (a) e manipuladas (b) para ajuste *setpoint* do sistema $[T_1, T_2] \times [F_1, F_2]$.

5.1.2 Ajuste em faixas para sistema não quadrado 4×2

Para a análise do sistema 4×2 foi considerado o sistema que possui como saídas os níveis de líquido presentes nos 4 tanques esféricos (h_1, h_2, h_3 e h_4) e como entradas as vazões de alimentação aos tanques (F_1 e F_2).

Por possuir um número maior de variáveis controladas em relação às manipuladas, ou seja, um número de graus de liberdade negativo, o arranjo do sistema será disposto através de faixas de operação garantindo uma maior flexibilidade ao controlador ao atingir os objetivos de controle. O número de cenários quadrados possíveis, obtido através da Equação 3.26, para cada sistema é dado pela análise combinatória de 4 dois a dois, ou seja, $C_{4,2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$.

Considerando os dois Pontos de Operação para o ajuste dos níveis, o tempo de subida encontrado para cada canal da função de desempenho desejado, $T_d(s)$, é $t_s = [418,4; 630,1; 205,6; 1421,5]$. Esse sistema apresenta apenas um cenário limitante, que possui zero de transmissão positivo, para ambos os pontos de operação: $[h_1, h_2] \times [F_1, F_2]$. Esse cenário deverá ser fatorado em relação à direção de saída dos zeros de transmissão positivos a fim de obter as funções de desempenho alcançável, $T_k(s)$, conforme Figura 5.5. Os demais cenários, por não apresentarem fatores limitantes de desempenho, irão possuir $T(s) = T_d(s)$.

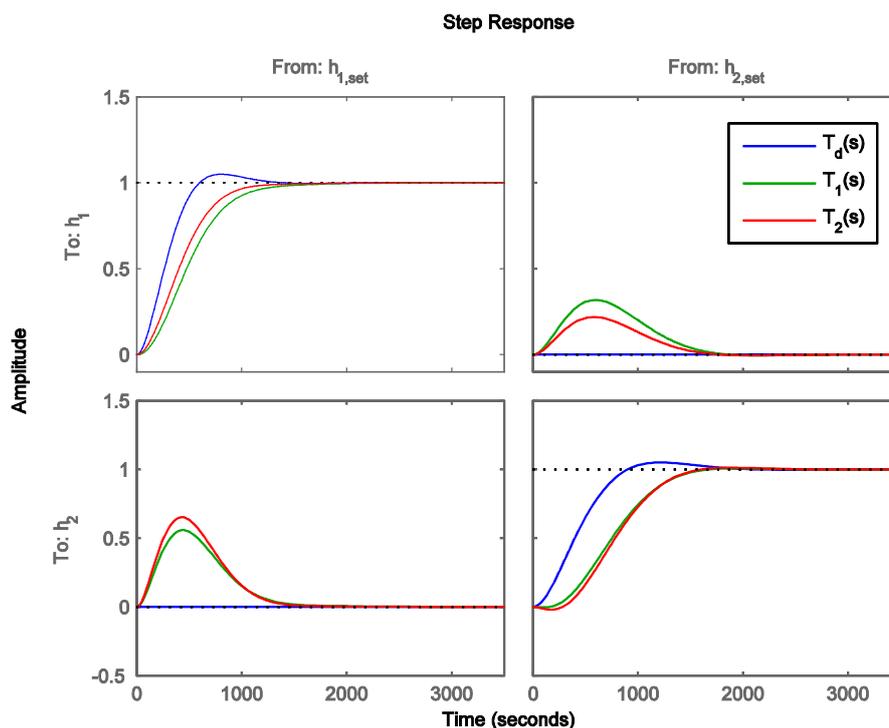


Figura 5.5: Resposta Degrau para T_d, T_1 e T_2 para o cenário limitante do ajuste não quadrado dos níveis considerando os dois pontos de operação estudados.

As matrizes de escalonamento, calculadas com base na frequência com quem é obtido o valor do RPN em cada cenário ($\omega_{M\acute{A}X,k}$), são $L_s = \text{diag}[0,2966; 0,8914; 1,4565; 1,3313]$ e $R_s = \text{diag}[1,1407; 1,0]$.

Os fatores limitantes presentes em cenários quadrados que provém do caso geral são computados no ajuste, através do escalonamento utilizando a frequência em que ocorre

a função alcançável para esse cenário, ou seja, o escalonamento baseado no condicionamento mínimo global abrange particularidades presentes em cenários quadrados que não se encontram no caso geral.

Para avaliar a qualidade do ajuste proposto e sintonizar os pesos do controlador, foram adicionadas a cada tanque novas correntes F_d com distúrbios não medidos nas vazões adicionadas às existentes, e as CVs foram mantidas em faixas de nível de tamanho constante e igual a 3 cm. Essas faixas representam as *soft-constraints*, ou seja, podem ser violadas temporariamente para garantir uma maior flexibilidade ao controlador ao atingir os objetivos finais de controle e foram definidas desse tamanho a fim de garantir que os 4 tanques não transbordem e nem esvaziem, o que poderia danificar o sistema de aquecimento. As restrições rígidas (*hard-constraints*) foram mantidas constantes e iguais aos limites físicos dos tanques ($h_{máx} = 25 \text{ cm}$ e $h_{min} = 0 \text{ cm}$). Os padrões dos distúrbios não medidos, gerados no Simulink® através do bloco *White Noise* com densidade espectral de potência (PSD) de 0,2 e filtrados por uma função integradora com constante de tempo 10, adicionados em cada tanque encontram-se na Figura 5.6, e pelo fato de ser um sistema acoplado, nos tanques inferiores além do distúrbio direto haverá a influência do distúrbio feito nos tanques superiores. Na Figura 5.7 encontra-se a resposta em malha aberta do sistema (sem a presença do controlador) frente aos distúrbios não medidos adicionados em cada tanque

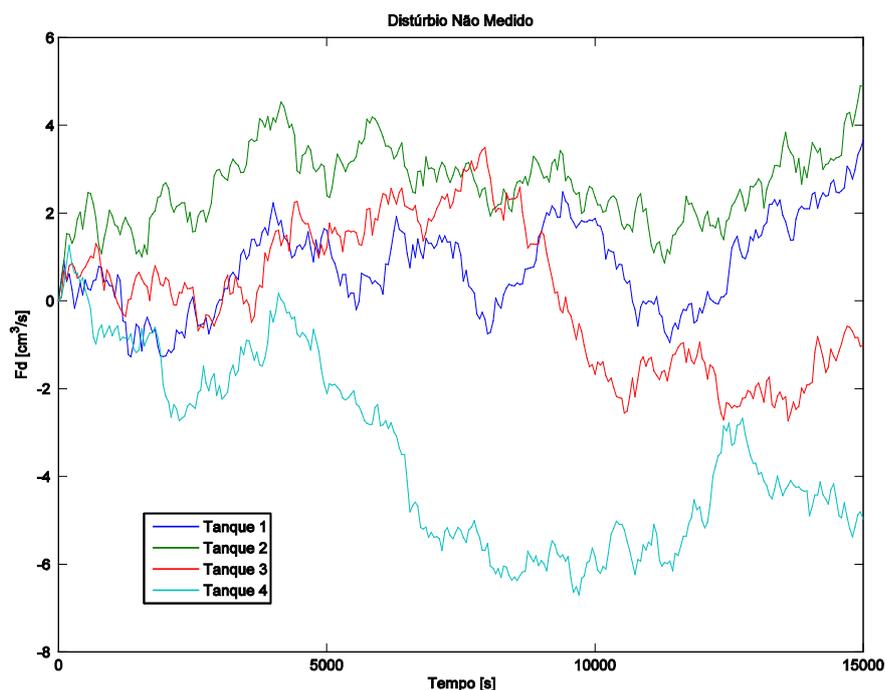


Figura 5.6: Padrões dos distúrbios não-medidos adicionados em cada tanque.

Observa-se que a adição de distúrbios não medidos mostrados na Figura 5.6, na ausência do controlador causa a violação das restrições permitidas e o esgotamento quase total do tanque 4, que caso ocorresse interromperia a alimentação ao tanque 2 instabilizando a operação do sistema. O ajuste em faixas aqui proposto visa a violação

mínima das *soft-constraints*, ou seja, operação do sistema não quadrado dentro das faixas quando submetido à distúrbios não medidos.

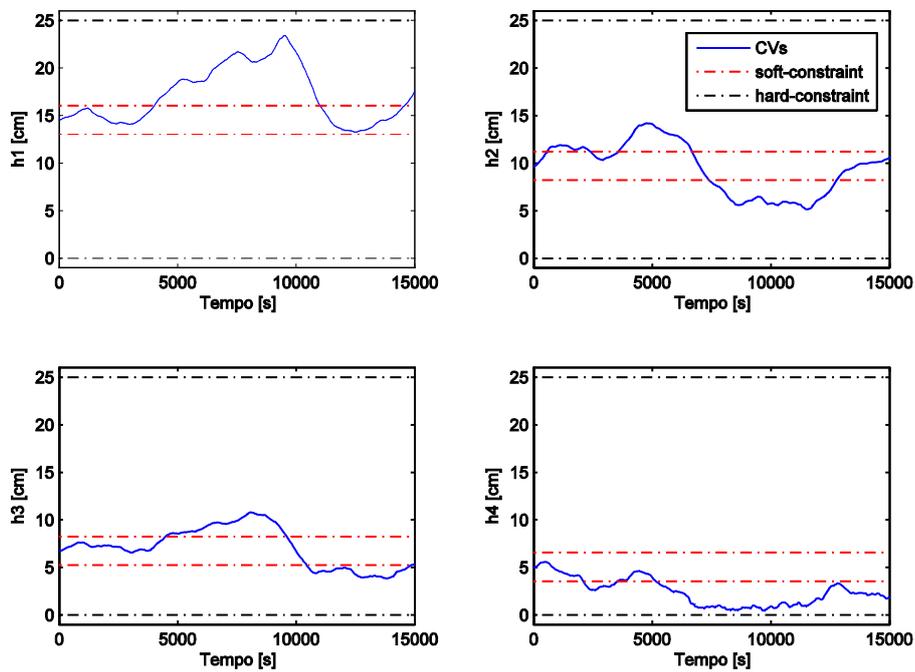
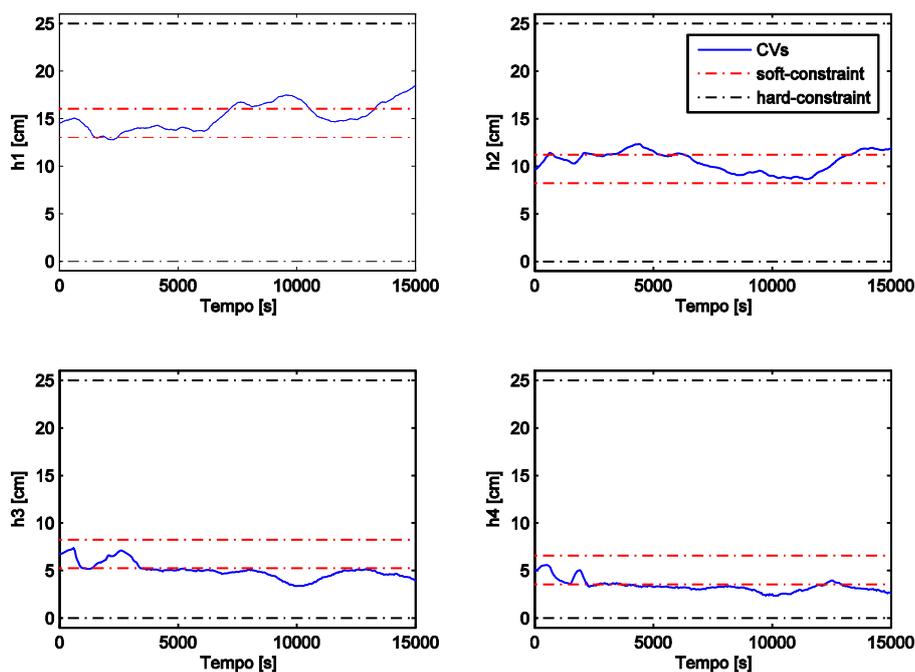
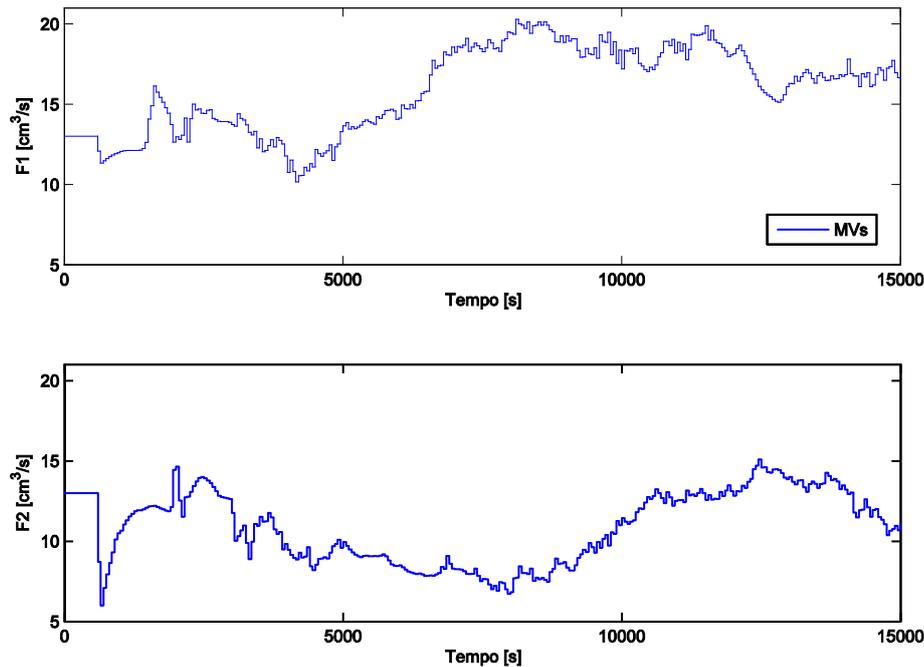


Figura 5.7: Resposta dos níveis em malha aberta em relação aos distúrbios não-medidos.

Os pesos do controlador preditivo foram sintonizados, a fim de minimizar a violação das *soft constraints*. O valor encontrado para a matriz da supressão do movimento é $W = \text{diag}[0,3988 \times 10^{-4}; 0,8844 \times 10^{-4}]$ e para a penalização por violação é $\rho_\epsilon = 0,5016$. A simulação para esse ajuste encontra-se na Figura 5.8.



(a)



(b)

Figura 5.8: Variáveis controladas (a) e manipuladas (b) para ajuste em faixa dos níveis.

Pelo fato de haver apenas as vazões de alimentação disponíveis para controlar os níveis dos 4 tanques, por vezes ocorre a violação das *soft-constraints*.

5.1.3 Ajuste em faixas para sistema não quadrado $[6 \times 4]$

Para o problema de ajuste 6×4 foram consideradas todas as variáveis manipuladas disponíveis para controle do sistema, ou seja, as vazões de alimentação F_1 e F_2 e a abertura das válvulas de distribuição x_1 e x_2 . Como variáveis controladas consideraram-se as alturas de nível de todos os tanques (h_1, h_2, h_3 e h_4) e as temperaturas dos tanques inferiores (T_1 e T_2).

Por tratar-se de um sistema 6×4 , existem cenários quadrados 2×2 , 3×3 e 4×4 . De acordo com a Equação 3.26, feita para as variáveis controladas e manipuladas para cada configuração de cenário, existem 90 cenários 2×2 , 80 cenários 3×3 e 15 cenários 4×4 totalizando 185 cenários para cada Ponto de Operação.

Nesse ajuste, foi considerado apenas o Ponto de Operação 1, e as matrizes de escalonamento obtidas na frequência com que ocorre o valor RPN em cada um dos 185 cenários são $L_s = \text{diag}[8,0221; 7,3270; 2,6488; 14,2940; 12,1454; 2,6295]$ e $R_s = \text{diag}[11,1727; 19,0493; 0,3969; 1,0]$. Nesse problema, devido ao fato de serem consideradas variáveis com dimensões muito diferentes em relação às entradas e saídas, o escalonamento tem papel fundamental, pois redimensiona as variáveis em um mesmo tamanho (através do condicionamento mínimo global), como observado pelos valores das matrizes L_s e R_s .

As faixas de operação para os níveis foram mantidas em valores constantes e iguais a 3 cm abrangendo o valor nominal calculado para esses níveis durante toda a simulação, visando como no caso anterior, o não esgotamento e o não enchimento total dos tanques que causariam um superaquecimento nas resistências elétricas utilizadas para aquecer os tanques. Para as temperaturas, as faixas consideradas foram de 6°C devido à potência de aquecimento ser influenciada diretamente pelas vazões e ao nível dos tanques. Os valores das *hard constraints* dos níveis foram considerados os limites físicos dos tanques ($h_{máx} = 25 \text{ cm}$ e $h_{min} = 0 \text{ cm}$) e para as temperaturas os limites considerados foram $T_{máx} = 70^\circ\text{C}$ e $T_{min} = 25^\circ\text{C}$.

Foi feita a análise do sistema em relação a distúrbios não medidos. Para o ajuste do controlador MPC utilizado para manter os níveis dos 4 tanques e as temperaturas dos tanques inferiores em faixas submeteu-se o sistema ao mesmo conjunto de distúrbios mostrado na Figura 5.6. A resposta em malha aberta do sistema, ou seja, sem a presença de controlador, encontra-se na Figura 5.9.

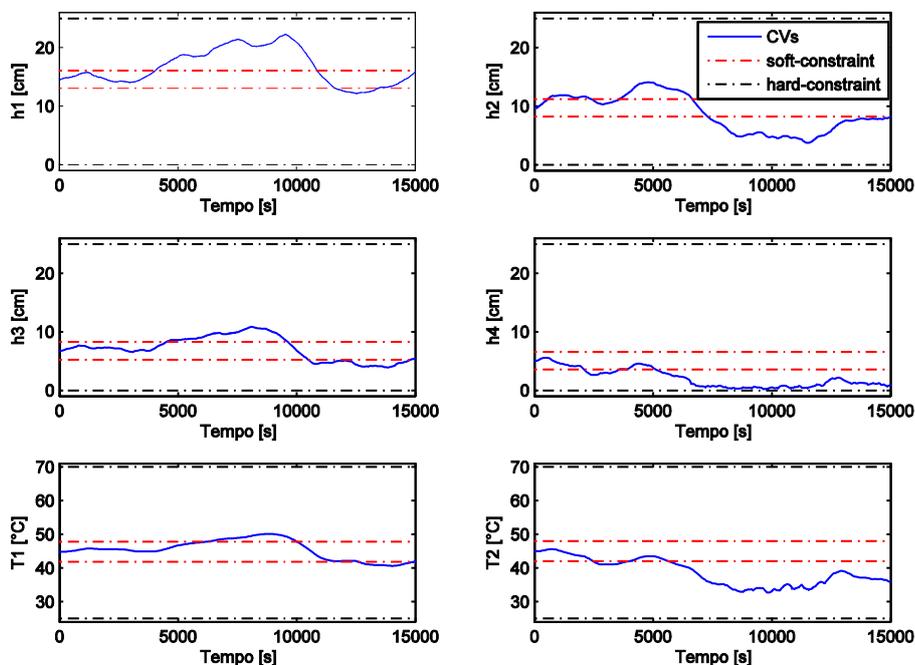


Figura 5.9: Resposta em malha aberta das saídas do sistema $[6 \times 4]$ em relação aos distúrbios externos.

Observa-se a partir da Figura 5.9 que o sistema quando submetido aos distúrbios não medidos possui um esvaziamento quase total do tanque 4, que conseqüentemente iria interromper a alimentação ao tanque 2 (limitando assim o aquecimento ao tanque 2). Isso ocorre devido ao acoplamento do sistema de 4 tanques esféricos com aquecimento, onde o distúrbio presente em apenas 1 tanque é transmitido aos demais.

Nessa configuração, foi considerado o ajuste apenas para a supressão do movimento das variáveis controladas e a violação das *soft constraints*. Os pesos calculados para a supressão do movimento do controlador MPC são $W = \text{diag}[0,0002; 0,0001; 0,0017; 0,0010]$ e para a penalização das *soft constraints* é $\rho_\epsilon = 4,6685 \times 10^{-4}$. A simulação dinâmica do problema proposto encontra-se na Figura 5.10.

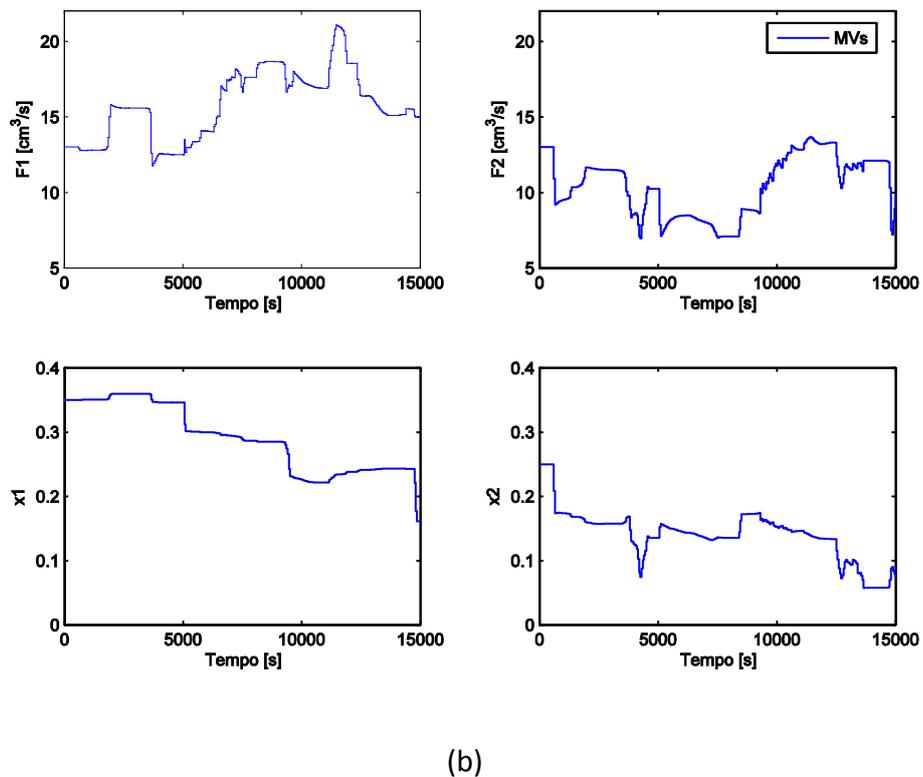
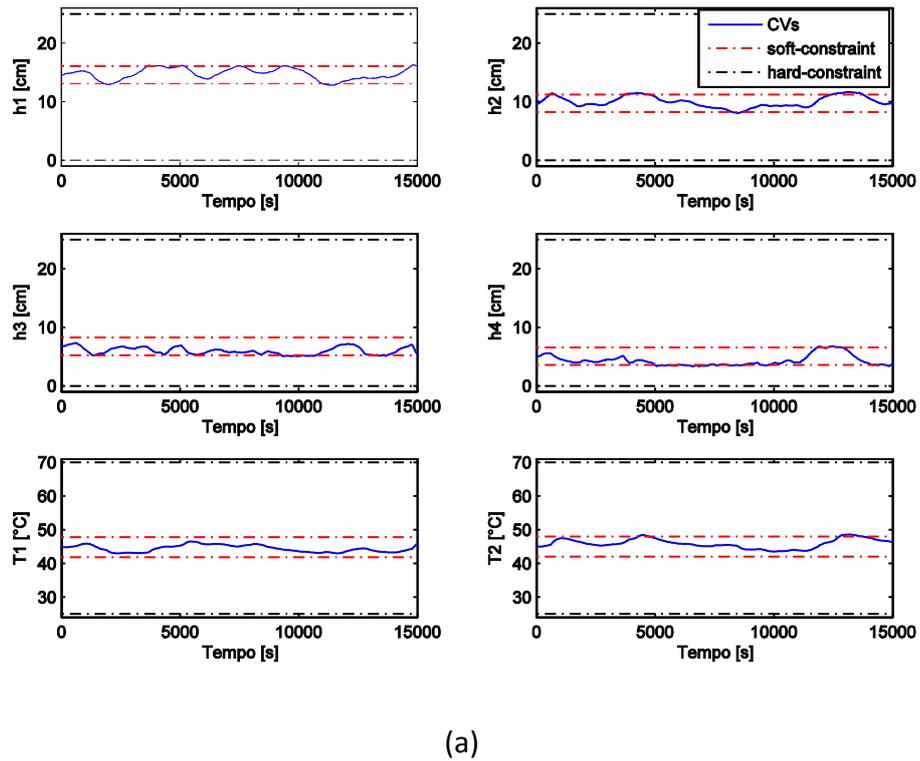


Figura 5.10: Variáveis controladas (a) e manipuladas (b) para o ajuste do sistema $[6 \times 4]$.

Observa-se que nesse sistema, como mostrado na Figura 5.10, as variáveis controladas mantêm-se na maior parte do tempo operando dentro das faixas

especificadas, e quando ocorre a violação de alguma faixa rapidamente ocorrem ações corretivas nas MVs a fim de manter o sistema operando de forma adequada. Além disso, pode-se observar também que as CVs seguem qualquer trajetória dentro das faixas, o que é permitido, pois a penalização ocorre apenas quando há a violação.

Devido aos valores dos pesos para a supressão do movimento para as variáveis manipuladas, observa-se que as ações corretivas possuem penalizações da mesma ordem de grandeza para os pares de vazão de alimentação e abertura de válvulas de distribuição.

5.1.4 Ajuste com faixas para sistema não quadrado $[10 \times 4]$ com otimizador

A disposição do sistema operando em faixas para o controle preditivo ocorre principalmente devido ao número negativo de graus de liberdade do sistema, obrigando haver uma maior flexibilidade nas CVs a fim de atingir o objetivo de controle do sistema geral, que possui um número menor de MVs. Quando as CVs encontram-se com uma certa “folga” em relação às faixas é possível incluir no problema *targets* ou valores de referência para as variáveis manipuladas, que levarão obrigatoriamente o sistema a saturar uma ou mais restrições ou o próprio *target*.

Como variáveis controladas foram utilizadas as alturas dos níveis dos 4 tanques (h_1, h_2, h_3 e h_4) e as temperaturas dos tanques inferiores (T_1 e T_2) e como variáveis manipuladas as vazões de alimentação (F_1 e F_2) e as aberturas das válvulas (x_1 e x_2). O mesmo padrão de distúrbios utilizados nos casos anteriores (Figura 5.6), os mesmos valores para as *soft* e *hard constraints* e o mesmo escalonamento considerando todos os cenários quadrados foram utilizados.

Para fazer a inclusão do *target* para as variáveis manipuladas foi considerado um modelo estendido para o controlador, possuindo assim novas variáveis controladas ($F_{1,set}, F_{2,set}, x_{1,set}, x_{2,set}$), conforme Figura 5.11.

		F_1	F_2	x_1	x_2
Modelo Original	h_1	$tf(h_1, F_1)$	$tf(h_1, F_2)$	$tf(h_1, x_1)$	$tf(h_1, x_2)$
	h_2	$tf(h_2, F_1)$	$tf(h_2, F_2)$	$tf(h_2, x_1)$	$tf(h_2, x_2)$
	h_3	$tf(h_3, F_1)$	$tf(h_3, F_2)$	$tf(h_3, x_1)$	$tf(h_3, x_2)$
	h_4	$tf(h_4, F_1)$	$tf(h_4, F_2)$	$tf(h_4, x_1)$	$tf(h_4, x_2)$
	T_1	$tf(T_1, F_1)$	$tf(T_1, F_2)$	$tf(T_1, x_1)$	$tf(T_1, x_2)$
	T_2	$tf(T_2, F_1)$	$tf(T_2, F_2)$	$tf(T_2, x_1)$	$tf(T_2, x_2)$
Modelo Estendido	$F_{1,set}$	$\frac{1}{0,1s + 1}$	0	0	0
	$F_{2,set}$	0	$\frac{1}{0,1s + 1}$	0	0
	$x_{1,set}$	0	0	$\frac{1}{0,1s + 1}$	0
	$x_{2,set}$	0	0	0	$\frac{1}{0,1s + 1}$

Figura 5.11: Modelo estendido com *targets* para as variáveis manipuladas.

As novas variáveis controladas ($F_{1,set}, F_{2,set}, x_{1,set}$ e $x_{2,set}$) foram incluídas no modelo do controlador MPC com uma dinâmica muito rápida (instantânea), de forma que os *setpoints* e os pesos equivalentes à essas CVs representarão *targets* e os pesos da matriz

W_u , respectivamente. Dessa forma, as variáveis manipuladas são também variáveis controladas e penalizadas em relação a um valor de referência.

A inclusão de *targets* no problema original é geralmente feita considerando um problema de otimização que visa o custo mínimo para a operação, respeitando as restrições impostas ao problema de controle, que ocorrem nas CVs ao serem consideradas as faixas de operação. Dessa forma, em cada tempo de amostragem, as trajetórias passadas são estimadas, o que modifica os valores das restrições do problema de otimização, devido à presença de distúrbios não medidos, calculando assim o valor ótimo de operação para as MVs e enviando ao controlador esses valores como referência para essas variáveis que ocasionarão um custo mínimo. Esse otimizador além dos *targets* para as variáveis manipuladas calcula também os valores ótimos para as CVs que iriam ocorrer considerando o ganho estático do modelo do processo (restrições).

Foram considerados duas funções a serem otimizadas: Programação Quadrática (QP) e Programação Linear (LP). O problema QP foi utilizado ao considerar a função custo, Equação 4.13, que relaciona as variáveis de entrada e de saída do problema geral. Já o problema LP foi utilizado ao considerar apenas a parcela da função custo original, referente às entradas do modelo, que não variam com os distúrbios não medidos (que ocorrem nas saídas).

Para o cálculo dos pesos do controlador preditivo com otimizador, através da Equação 3.27, foram utilizados como valores de referência para as MVs os valores ótimos encontrados para o problema de otimização. Os pesos obtidos para a sintonia do controlador preditivo são

$$W_u = \text{diag}[0,1512 \times 10^{-3}; 0,0692 \times 10^{-3}; 0,0344 \times 10^{-3}; 0,0394 \times 10^{-3}] ,$$

$$W = \text{diag}[0,0680 \times 10^{-3}; 0,0077 \times 10^{-3}; 0,2125 \times 10^{-3}; 0,0175 \times 10^{-3}] \text{ e}$$

$$\rho_\epsilon = 0,0099 \times 10^{-3}.$$

As simulações foram feitas, sendo em cada período de amostragem resolvido o problema QP ou LP, calculando a partir do estado atual e passados do sistema quais os valores ótimos necessários para levar ao custo mínimo de operação, respeitando as restrições das variáveis controladas (dadas pelas faixas de operação). A resolução dos problemas de programação quadrática e linear em cada período de amostragem determina o valor ótimo para as MVs respeitando as restrições que variam com os distúrbios enviados ao processo. Essas restrições são estimadas através do ganho estático do processo em malha aberta.

As simulações considerando o problema de otimização quadrático e linear encontram-se nas Figura 5.12 e Figura 5.13, respectivamente.

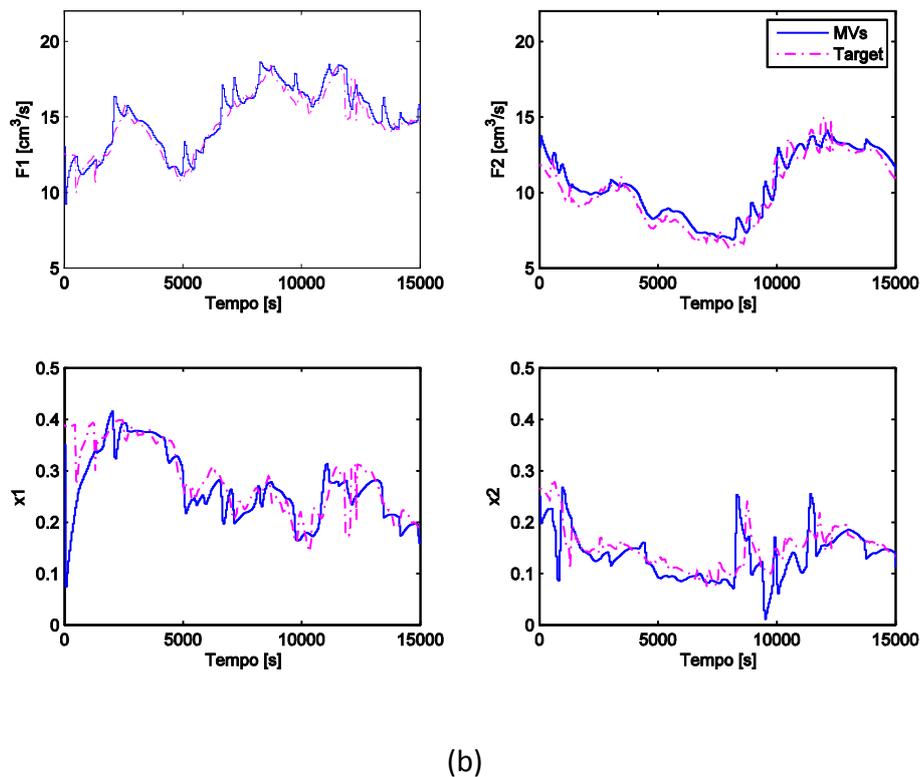
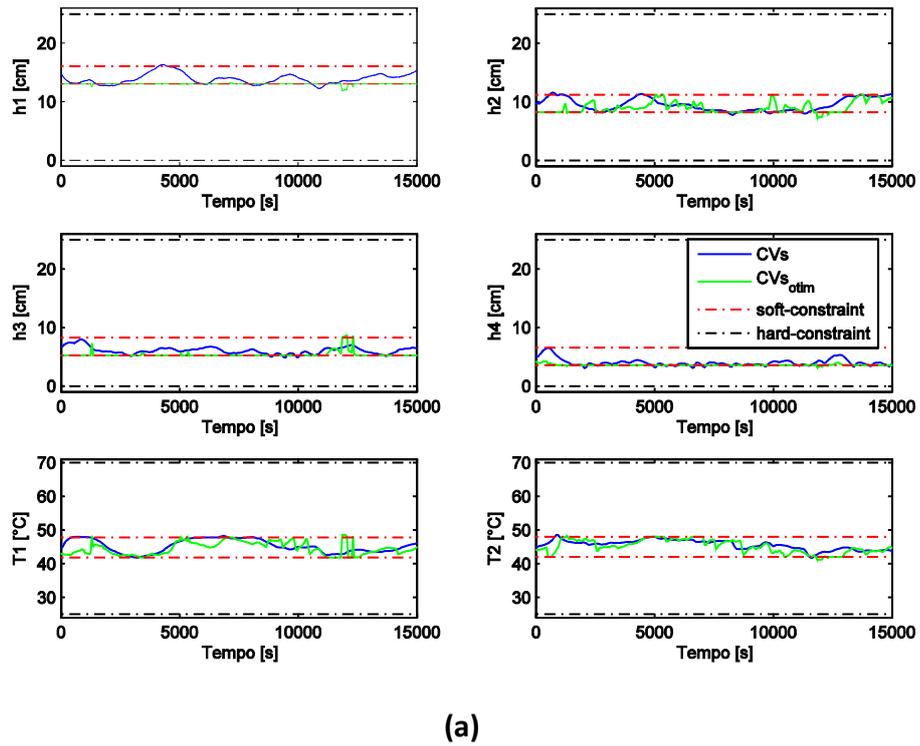
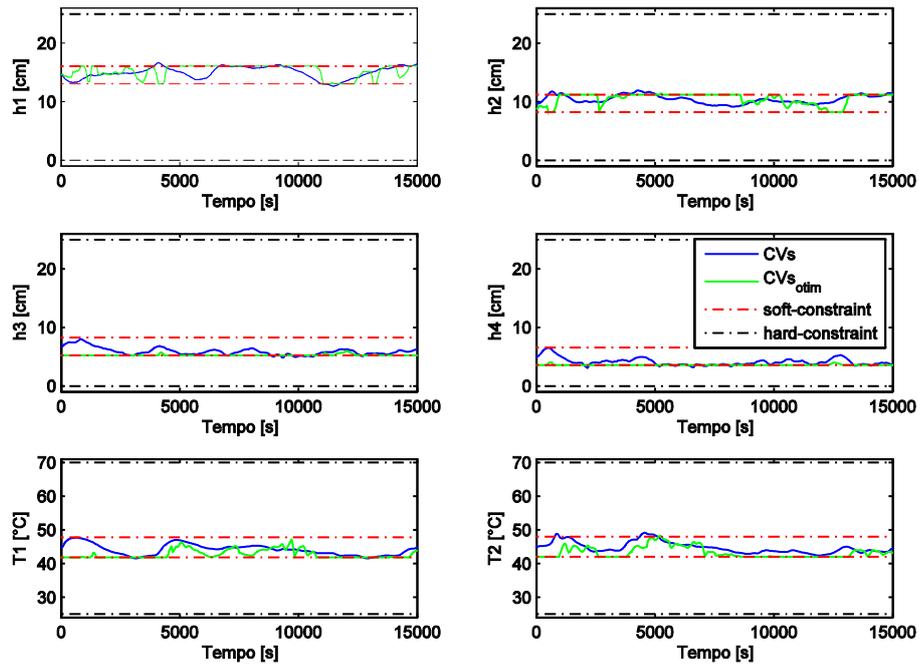
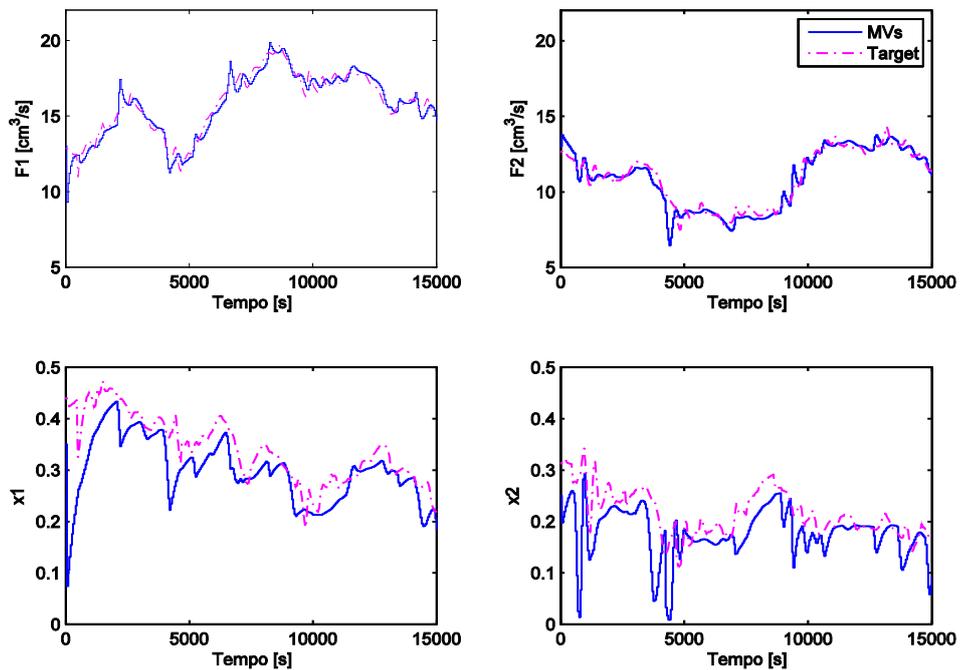


Figura 5.12: Variáveis (a) controladas e (b) manipuladas para sistema não quadrado operando com otimizador QP frente à resposta de distúrbio aleatório.



(a)



(b)

Figura 5.13: Variáveis (a) controladas e (b) manipuladas para sistema não quadrado operando com otimizador LP frente à resposta de distúrbio aleatório.

Nas Figura 5.12(a) e Figura 5.13(a) são mostrados também os valores que a planta obteria se estivesse operando com o valor exato do *target* nas *MVs*, CVs_{otim} , sem capturar os efeitos dinâmicos da operação.

Foram feitas outras simulações, considerando apenas distúrbios não medidos enviados aos tanques superiores, 3 e 4, em forma de degraus. Pelo fato dos tanques estarem interconectados, o distúrbio enviado a esses tanques será propagado influenciando os níveis e temperaturas dos outros tanques. O padrão dos distúrbios encontra-se na Figura 5.14 e a simulação do sistema operando com o controlador MPC que foi sintonizado para o caso anterior utilizando os otimizadores QP e LP, encontra-se na Figura 5.15 e Figura 5.16.

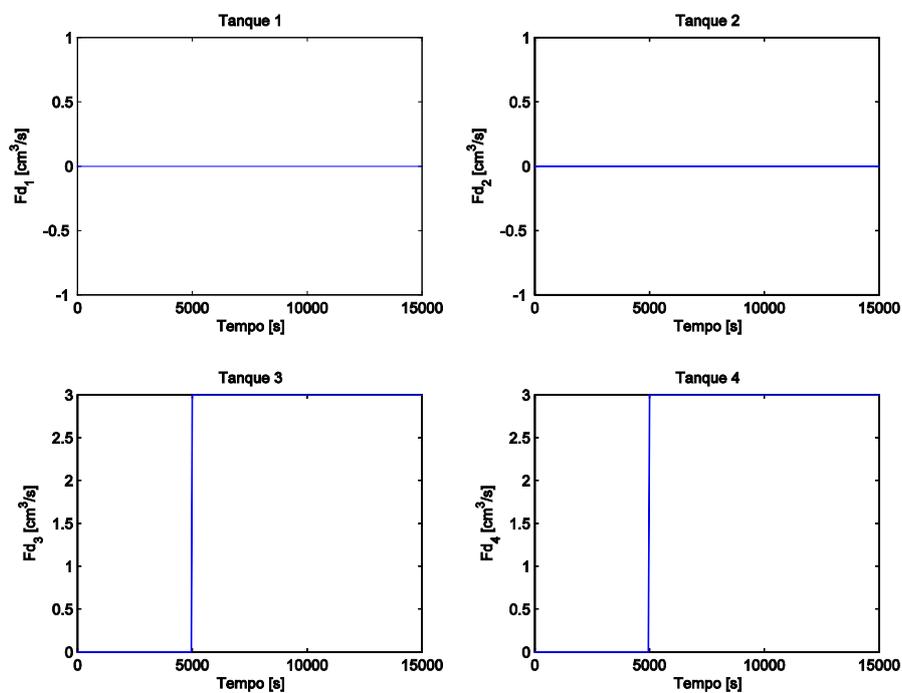


Figura 5.14: Distúrbios não medidos em forma de degrau enviados aos tanques 3 e 4.

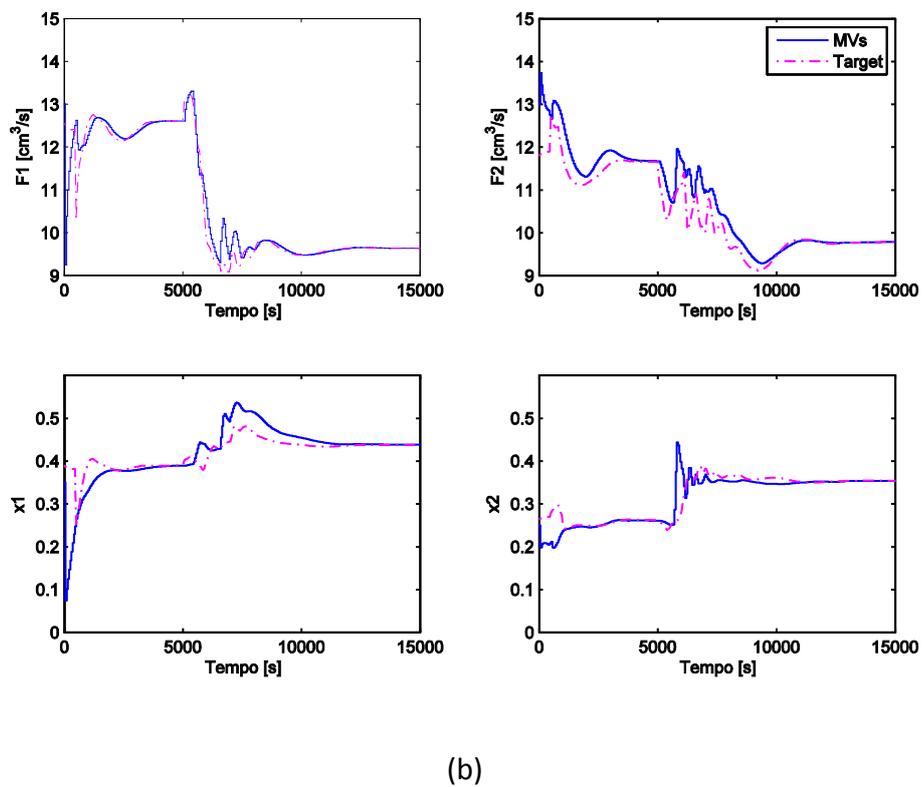
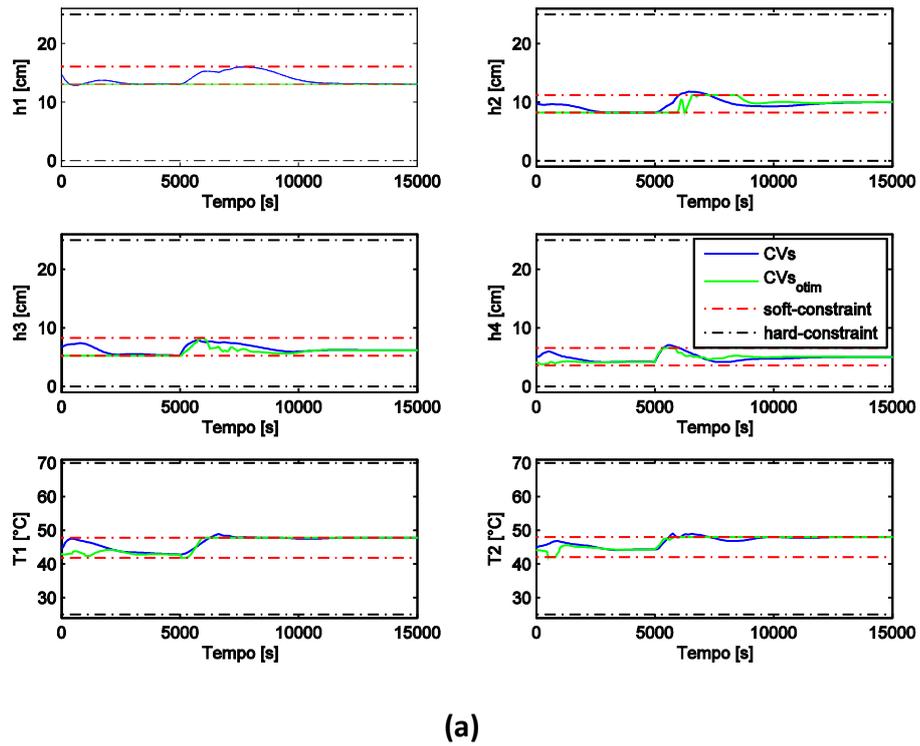
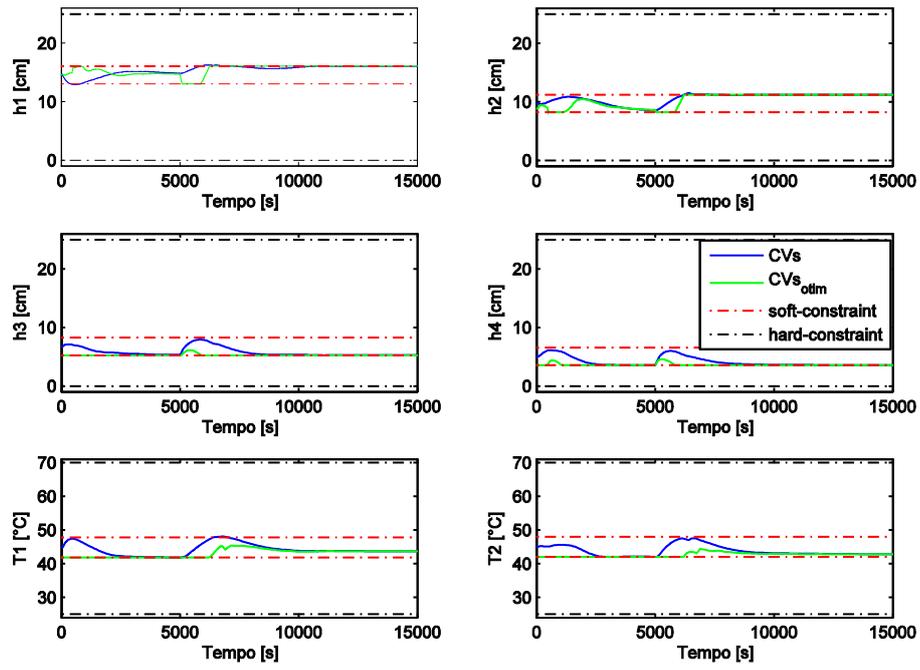
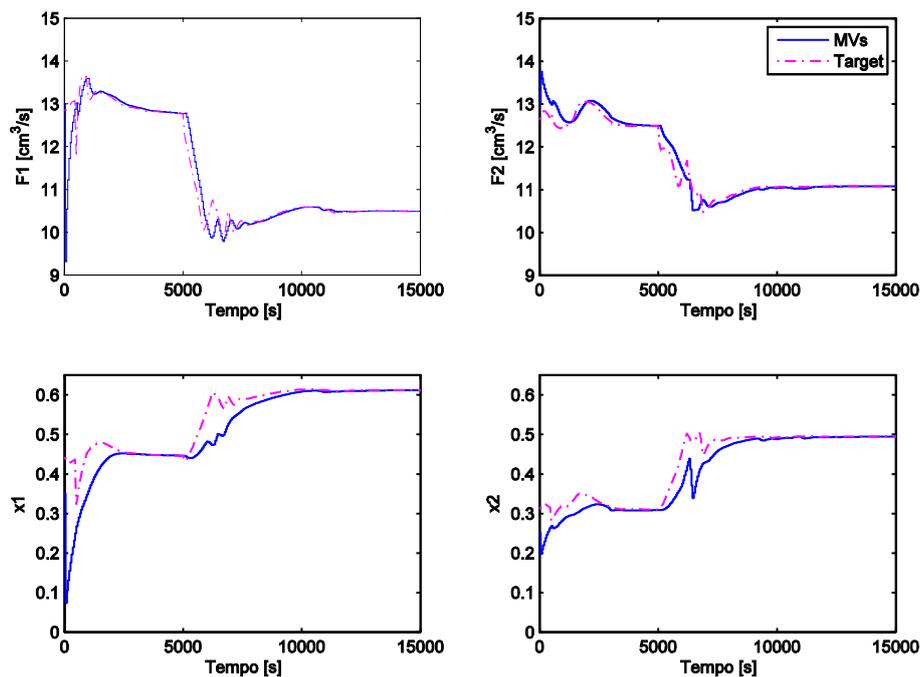


Figura 5.15: Variáveis (a) controladas e (b) manipuladas para sistema não quadrado com otimizador QP frente à resposta de distúrbio degrau.



(a)



(b)

Figura 5.16: Variáveis (a) controladas e (b) manipuladas para sistema não quadrado com otimizador LP frente à resposta de distúrbio degrau.

Por fim, foi considerado também um distúrbio em forma de rampa, aplicados aos tanques 1 e 2, de forma a observar o comportamento do sistema em relação à sintonia e à utilização do otimizador. Os padrões dos distúrbios encontram-se na Figura 5.17 e as simulações do problema com otimizador encontram-se nas Figura 5.18 e Figura 5.19.

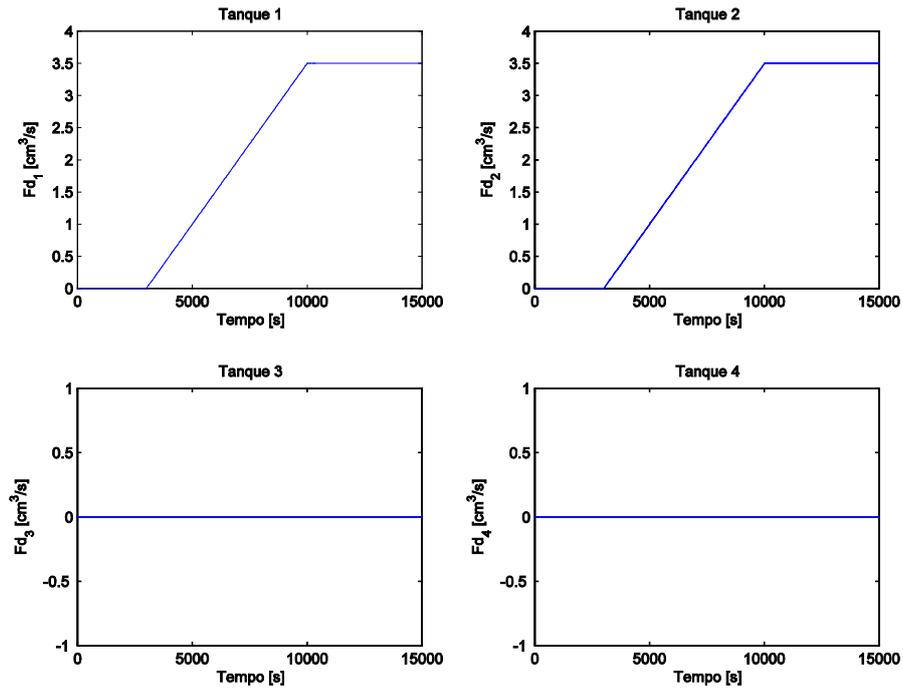
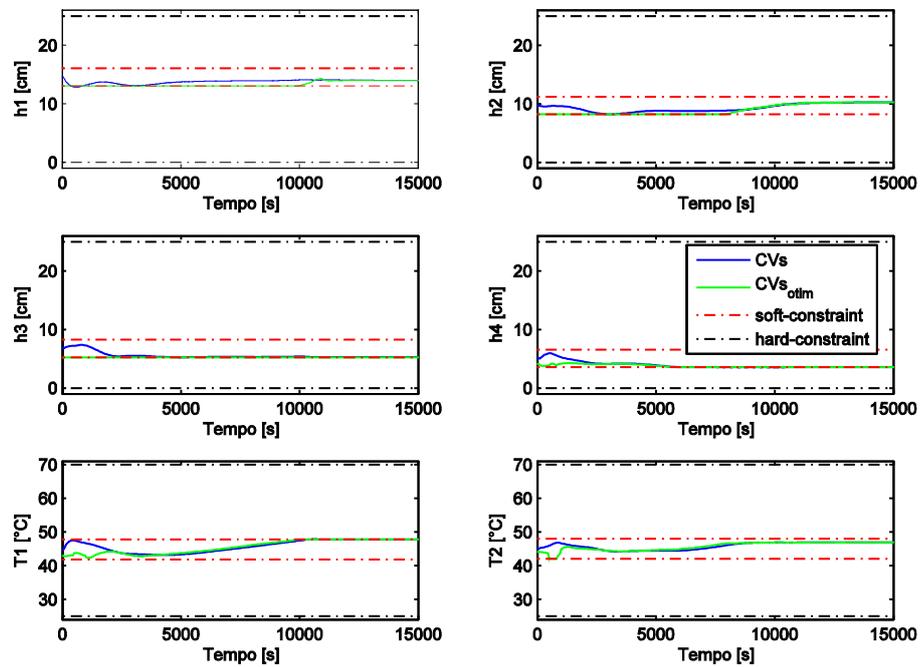


Figura 5.17: Distúrbios não medidos em forma de rampa enviados aos tanques 1 e 2.



(a)

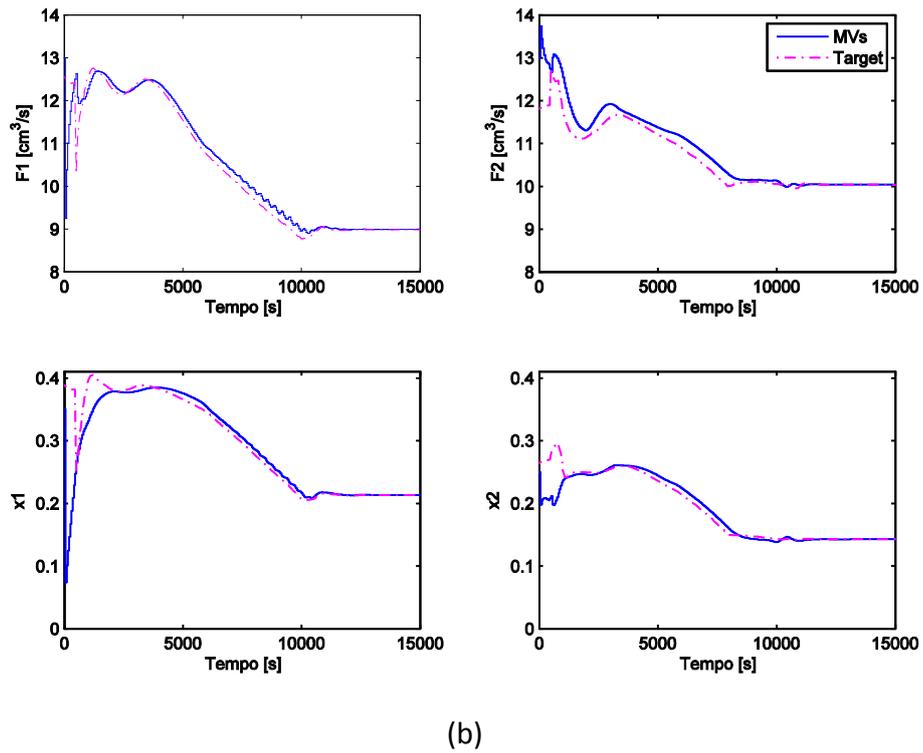
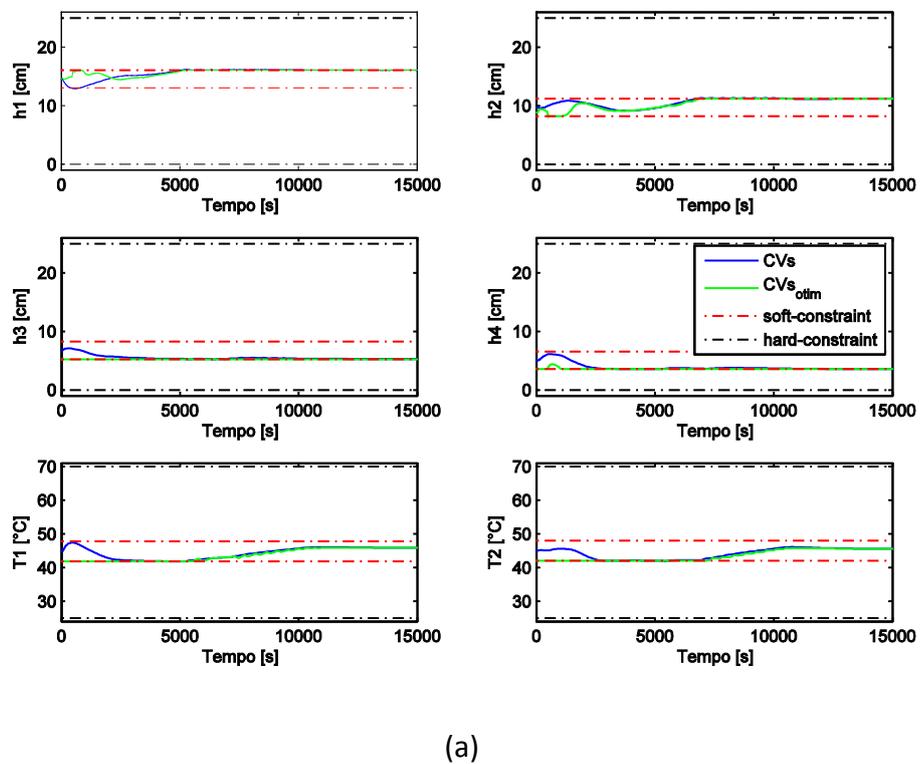


Figura 5.18: Variáveis (a) controladas e (b) manipuladas para sistema não quadrado com otimizador QP frente à resposta de rampa de distúrbio.



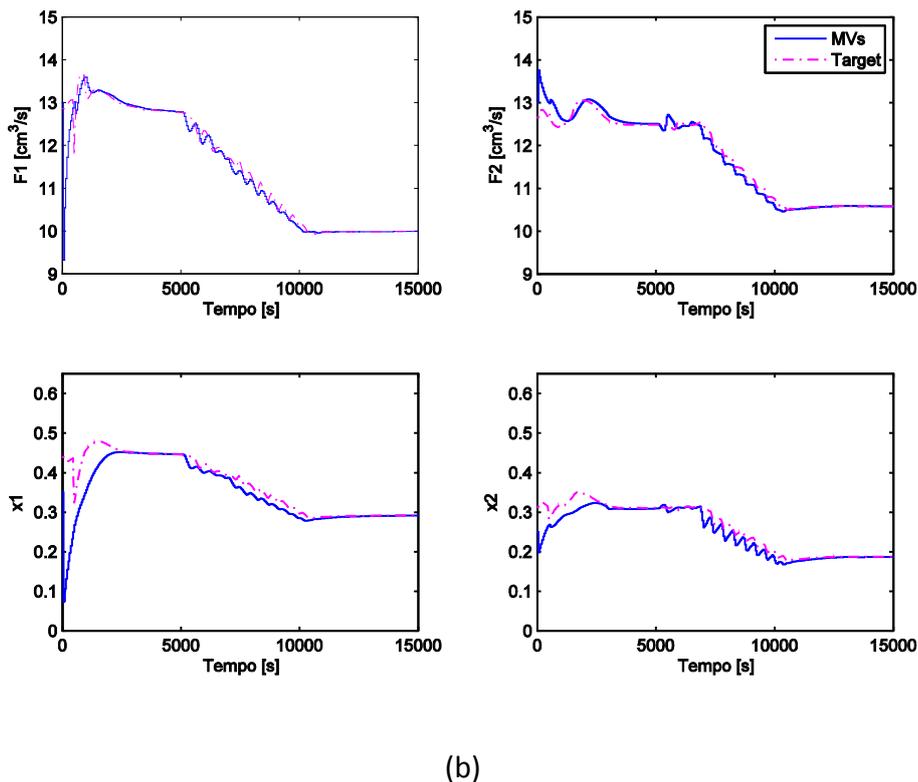


Figura 5.19: Variáveis (a) controladas e (b) manipuladas para sistema não quadrado com otimizador LP frente à resposta de rampa de distúrbio.

A simulação considerando o distúrbio em forma de rampa enviado aos tanques inferiores foi feita a fim de verificar o comportamento do otimizador, visto que o *target* calculado para as MVs possui como restrições o modelo estático do processo (ganho estático), e como esperado, comporta-se melhor considerando distúrbios suaves (lentos), em forma de rampa.

5.2 Avaliação do ajuste para MPC baseado em multi-cenários

5.2.1 Influência das Matrizes de Peso e Escalonamento

Como forma de avaliar o ajuste de controladores preditivos propostos nesse trabalho, foram feitas novas simulações para os mesmos casos, considerando uma sintonia trivial para o ajuste dos pesos do controlador preditivo e considerando o sistema sem escalonamento. Os pesos utilizados para essa sintonia trivial são $Q = \text{diag}[1; \dots; ny]$, $W_u = \text{diag}[0; \dots; nu]$, $W = \text{diag}[0,1; \dots; nu]$ e $\rho_\epsilon = 1 \times 10^5$, onde ny é o número de variáveis controladas e nu o número de variáveis manipuladas e por se tratar do sistema sem escalonamento, utilizou-se $R_s = \text{diag}[1; \dots, nu]$ e $L_s = \text{diag}[1; \dots, ny]$.

Pelo fato de não existirem metodologias de ajuste que contemplam valores de referência para as MVs os pesos da diagonal da matriz W_u serão mantidos nulos e não serão testados os casos com otimizador, apenas os casos com distúrbios envolvidos no ajuste [6 × 4].

A simulação dinâmica para o ajuste com *setpoint* para os casos $[2 \times 2]$ envolvendo os níveis e as temperaturas encontram-se na Figura 5.20 e Figura 5.21, respectivamente.

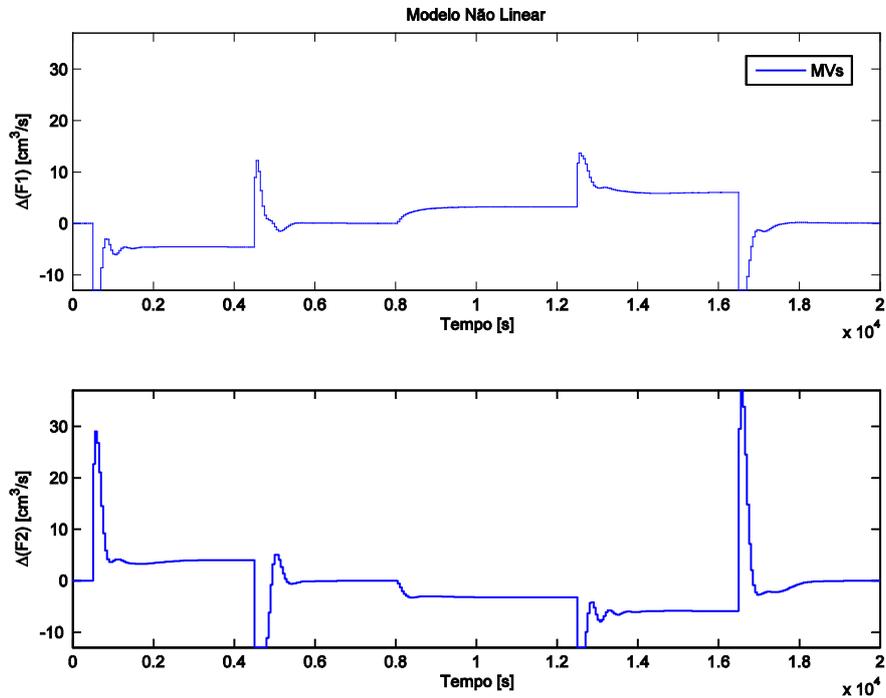
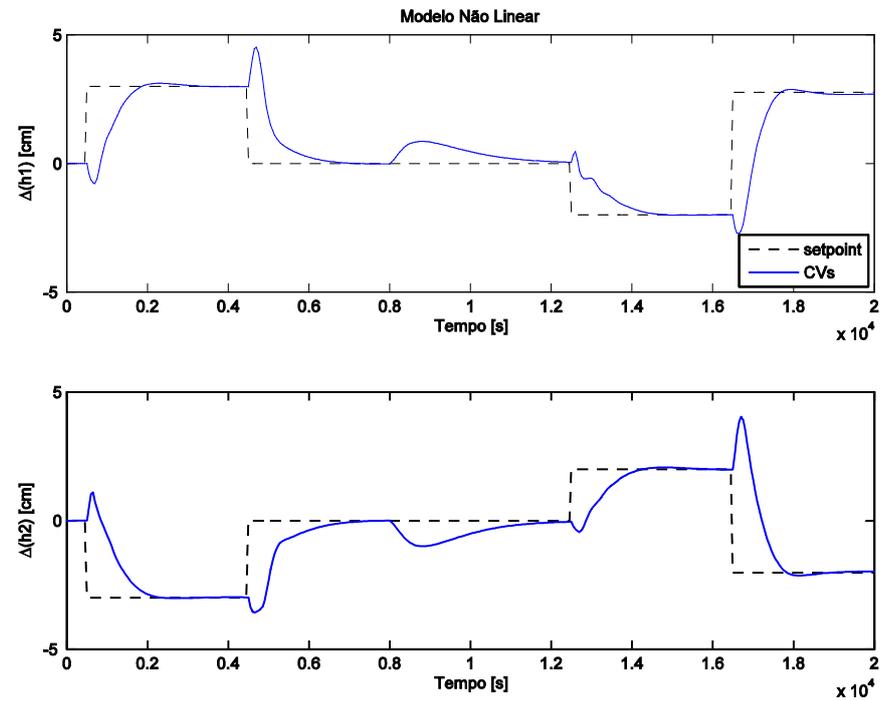
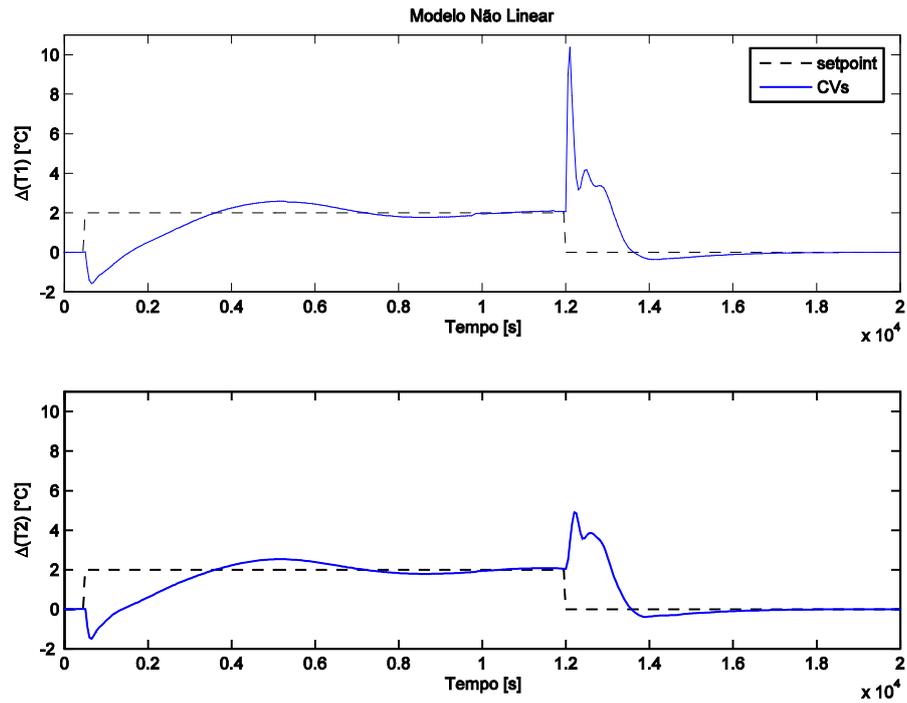
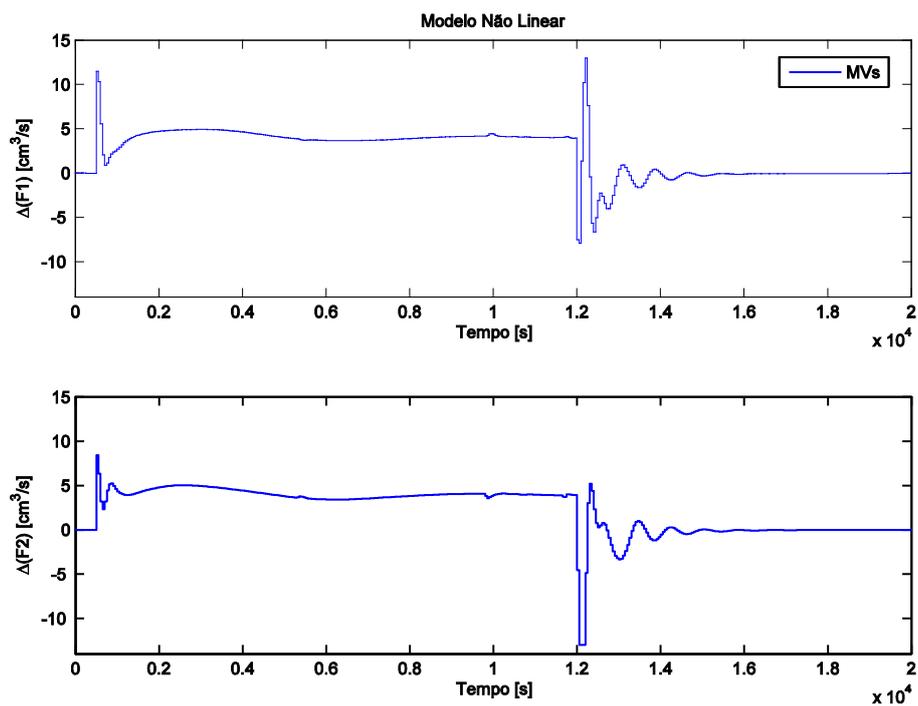


Figura 5.20: Variáveis (a) controladas e (b) manipuladas para sistema $[h_1, h_2] \times [F_1, F_2]$ sem escalonamento e com pesos padrão do Matlab.



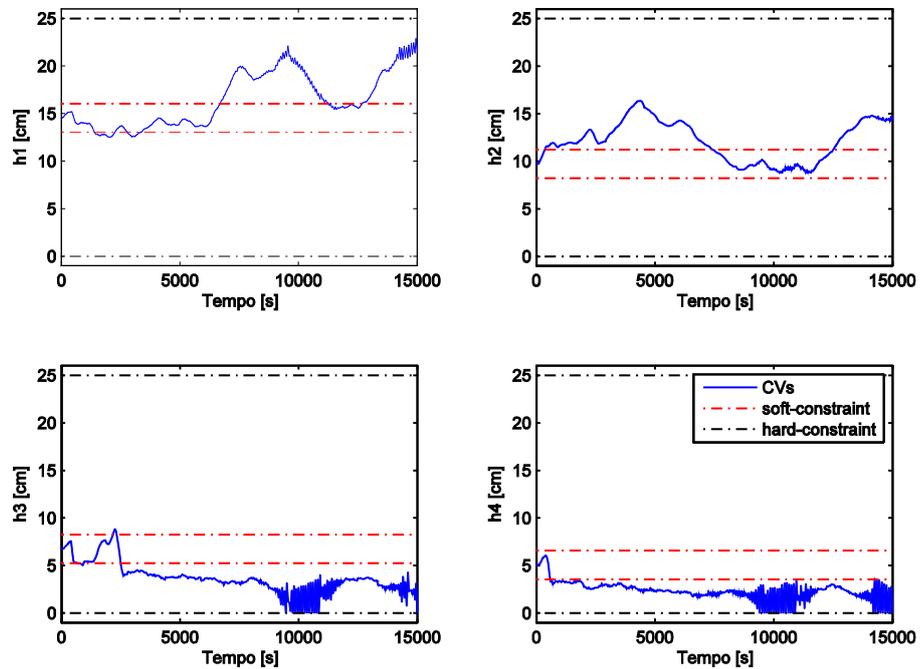
(a)



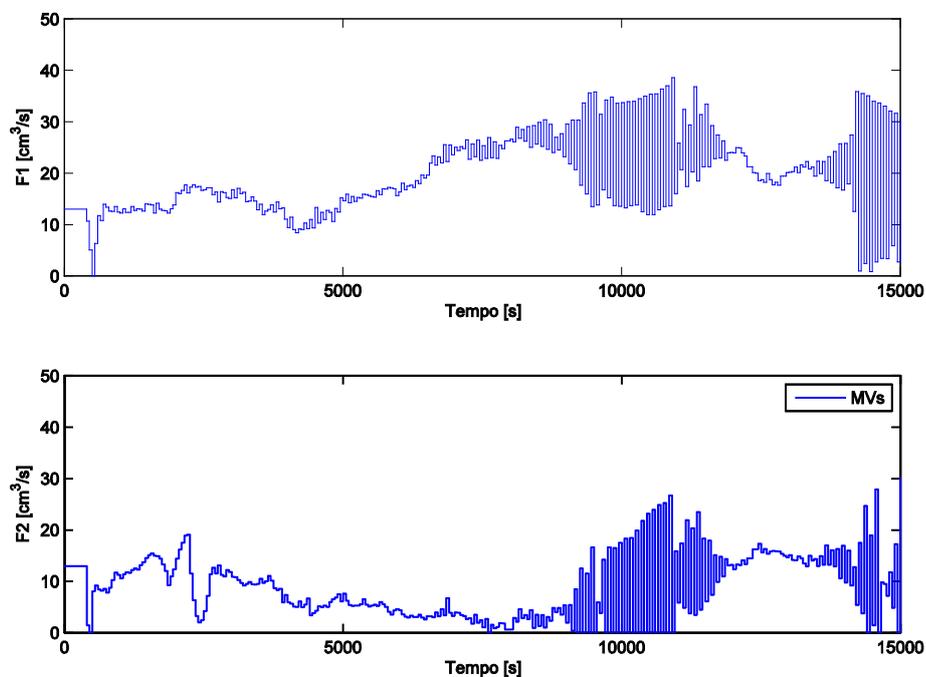
(b)

Figura 5.21: Variáveis (a) controladas e (b) manipuladas para sistema $[T_1, T_2] \times [F_1, F_2]$ sem escalonamento e com pesos padrão do Matlab.

Da mesma forma, foram considerados os ajustes com os pesos dados através da sintonia trivial para os sistemas não quadrados. Para o sistema $[4 \times 2]$ e $[6 \times 4]$ submetidos ao distúrbio aleatório, a simulação encontra-se na Figura 5.22 e Figura 5.23.

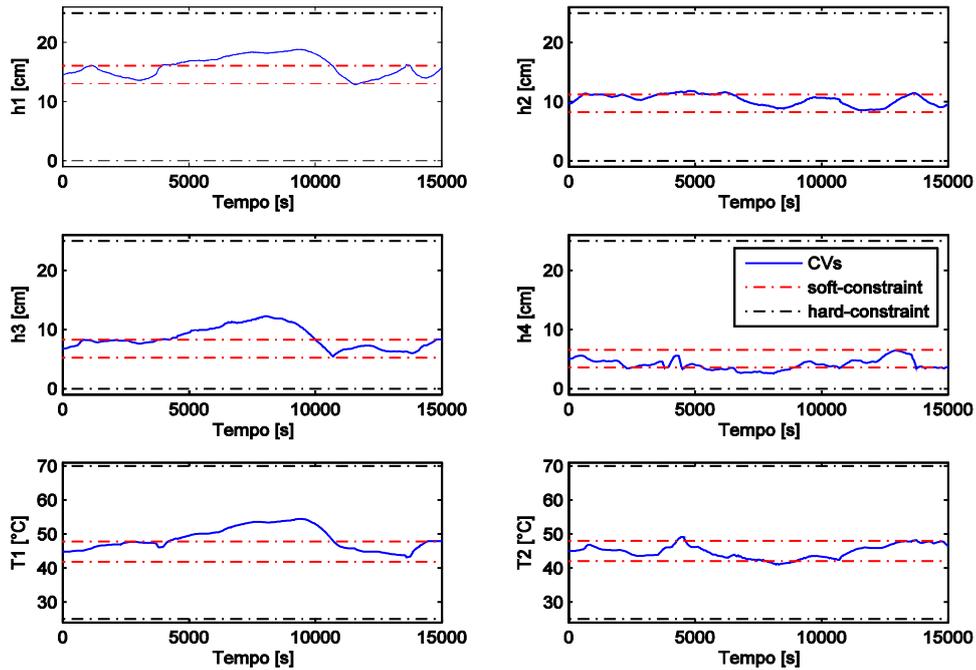


(a)

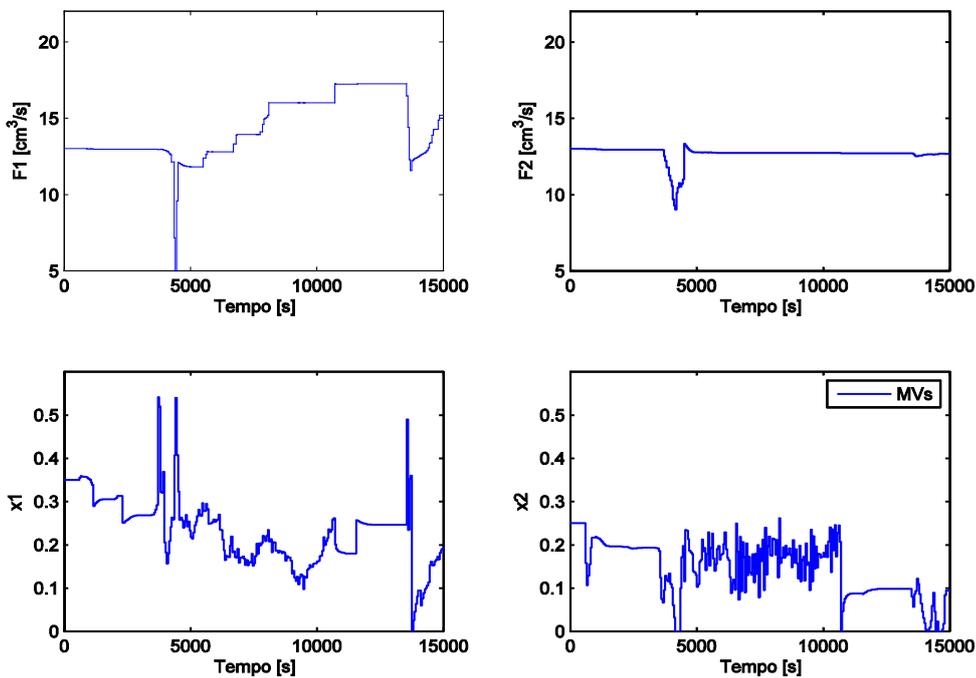


(b)

Figura 5.22: Variáveis (a) controladas e (b) manipuladas para sistema $[h_1, h_2, h_3, h_4] \times [F_1, F_2]$ sem escalonamento e com pesos padrão do Matlab submetido ao distúrbio aleatório da Figura 5.6.



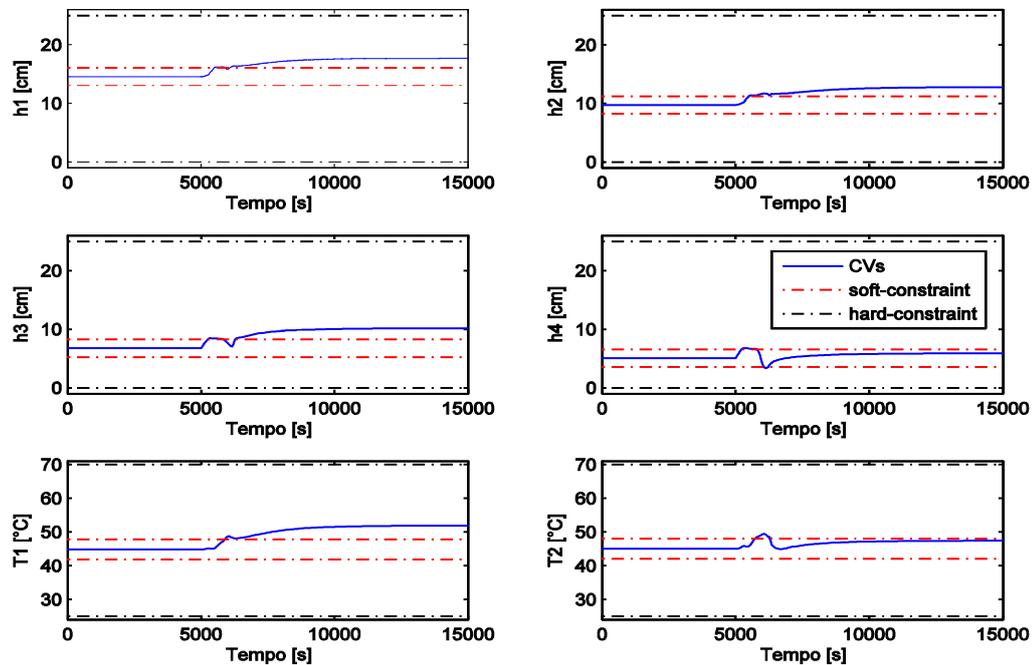
(a)



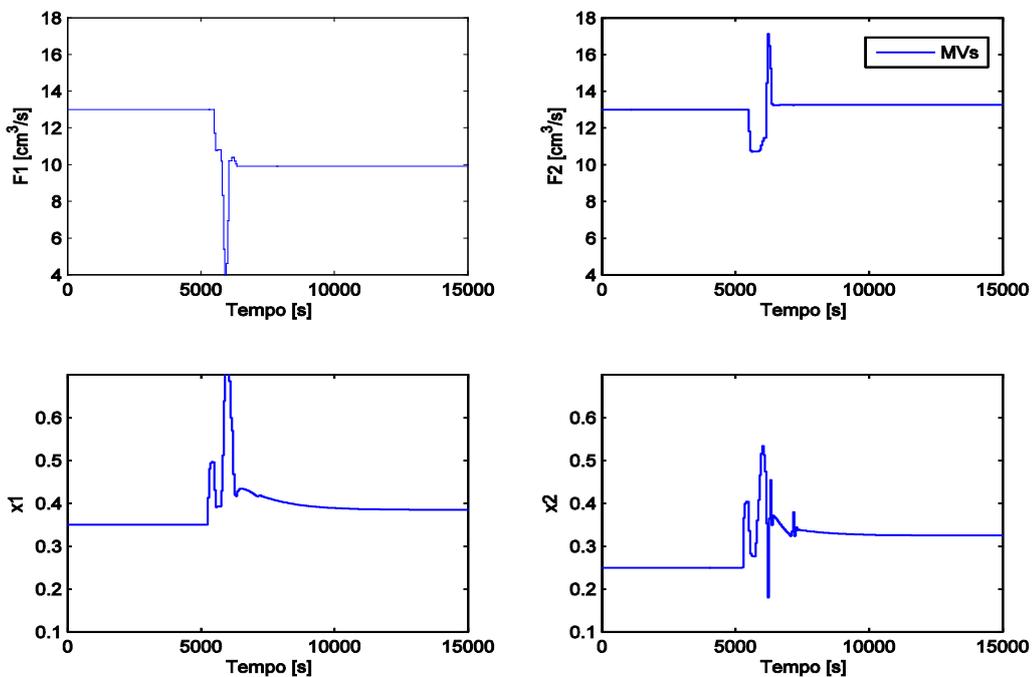
(b)

Figura 5.23: Variáveis (a) controladas e (b) manipuladas para sistema $[h_1, h_2, h_3, h_4, T_1, T_2] \times [F_1, F_2, x_1, x_2]$ sem escalonamento e com pesos padrão do Matlab submetido ao distúrbio aleatório da Figura 5.6.

O sistema $[6 \times 4]$ foi submetido também aos distúrbios em forma de degrau e rampa, a fim de observar o comportamento do sistema operando com a sintonia trivial. As simulações encontram-se na Figura 5.24 e Figura 5.25.



(a)



(b)

Figura 5.24: Variáveis (a) controladas e (b) manipuladas para sistema $[h_1, h_2, h_3, h_4, T_1, T_2] \times [F_1, F_2, x_1, x_2]$ sem escalonamento e com pesos padrão do Matlab submetido ao distúrbio degrau da Figura 5.14.

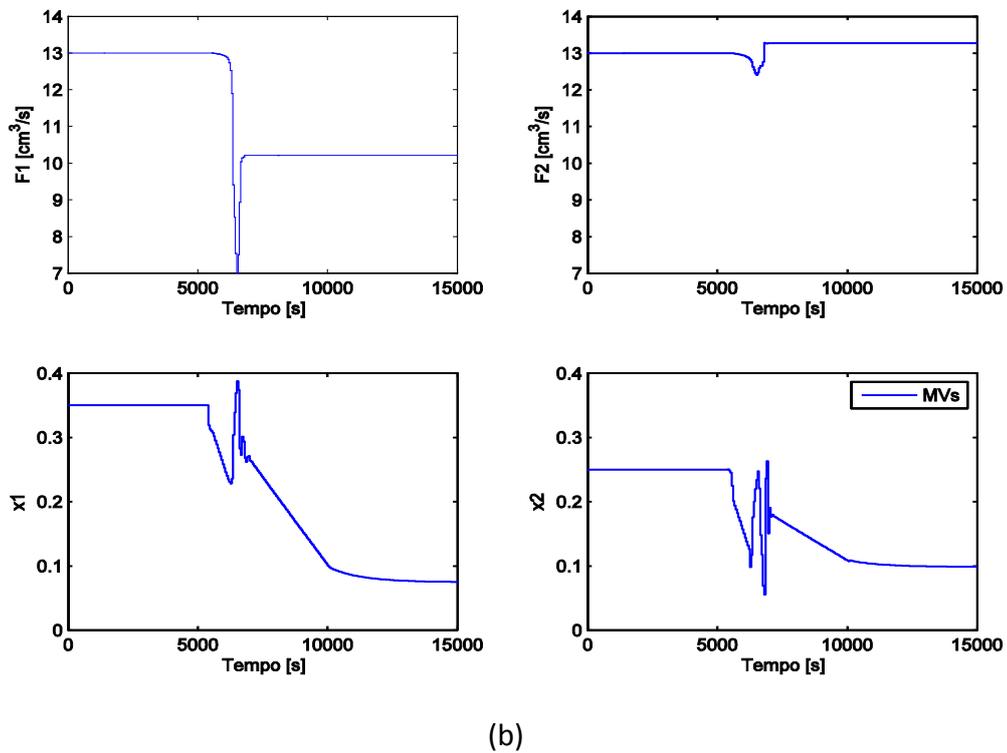
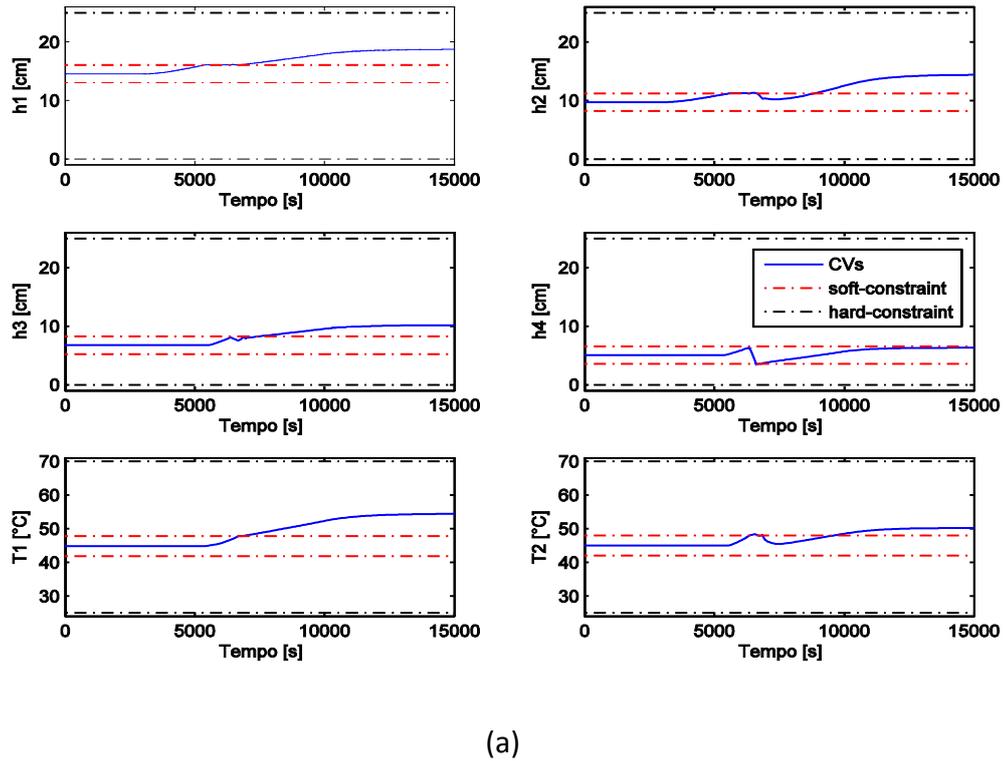


Figura 5.25: Variáveis (a) controladas e (b) manipuladas para sistema $[h_1, h_2, h_3, h_4, T_1, T_2] \times [F_1, F_2, x_1, x_2]$ sem escalonamento e com pesos padrão do Matlab submetido ao distúrbio rampa da Figura 5.17.

Pode-se observar que as simulações utilizando a sintonia trivial, no caso do ajuste para sistemas quadrados com *setpoint*, leva o sistema a operar adequadamente seguindo os valores de referência estabelecidos para o sistema que opera em fase não mínima, com maior oscilação que a simulação apresentada para o ajuste proposto nesse trabalho.

Para os casos não quadrados, operando em faixas, o ajuste dado pela sintonia trivial se mostrou inadequado, levando ao excesso de movimento para as variáveis manipuladas e saturação nas CVs causando um esvaziamento total dos tanques. Além disso, a mudança no padrão dos distúrbios leva o sistema a operar fora das faixas de especificação o que não é desejado.

5.2.2 Influência do Otimizador

Analisando o sistema 6×4 com otimizador, foram feitos testes para 3 tipos de distúrbios diferentes: distúrbio aleatório, distúrbio em forma de degrau (enviados aos tanques superiores) e distúrbio em forma de rampa (enviados aos tanques inferiores). Foram testados também dois tipos de otimizadores diferentes em cada teste: otimizador QP e otimizador LP.

Paralelamente a essas simulações foi avaliado o valor da função custo, Equação 4.13, a partir da qual se obtém o valor real do custo de operação do sistema. As simulações da variação do custo conforme cada otimizador são:

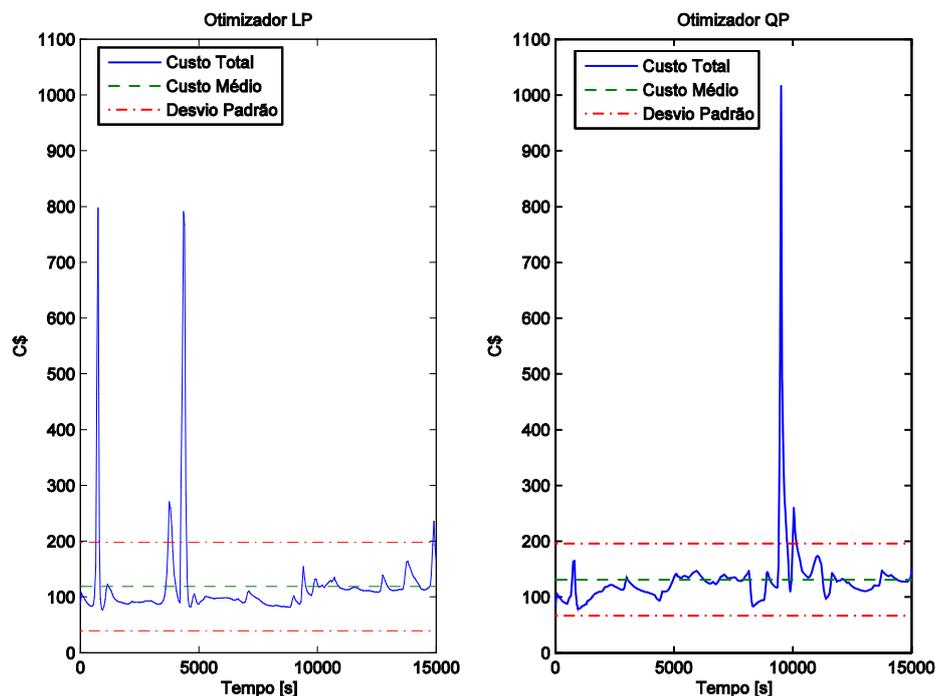


Figura 5.26: Variação da Função Custo para operação do sistema 10×4 submetido ao Distúrbio Aleatório da Figura 5.6.

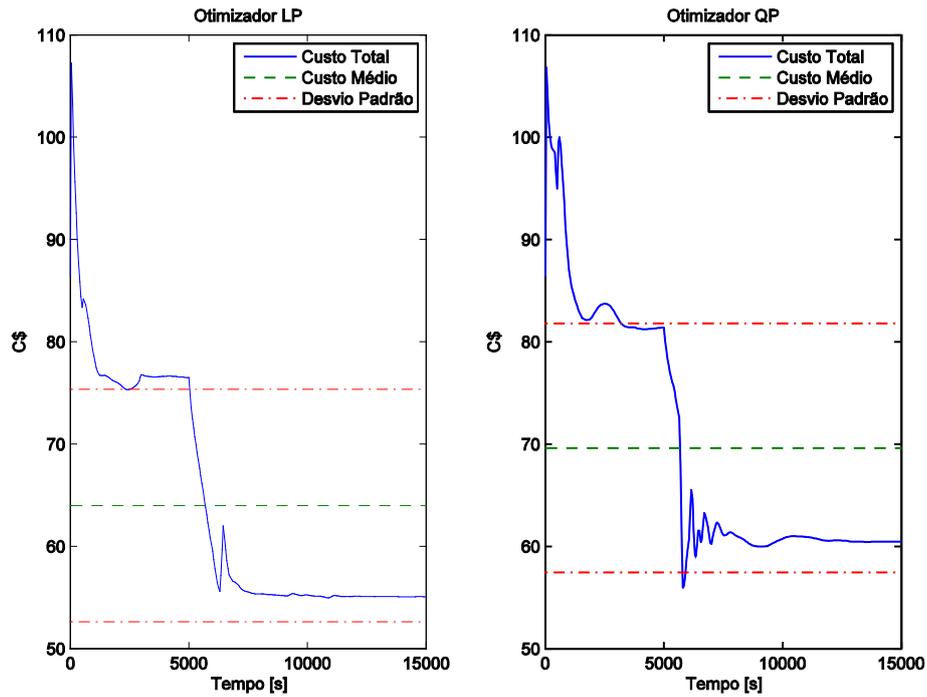


Figura 5.27: Variação da Função Custo para operação do sistema 10×4 submetido ao Distúrbio Degrau da Figura 5.14.

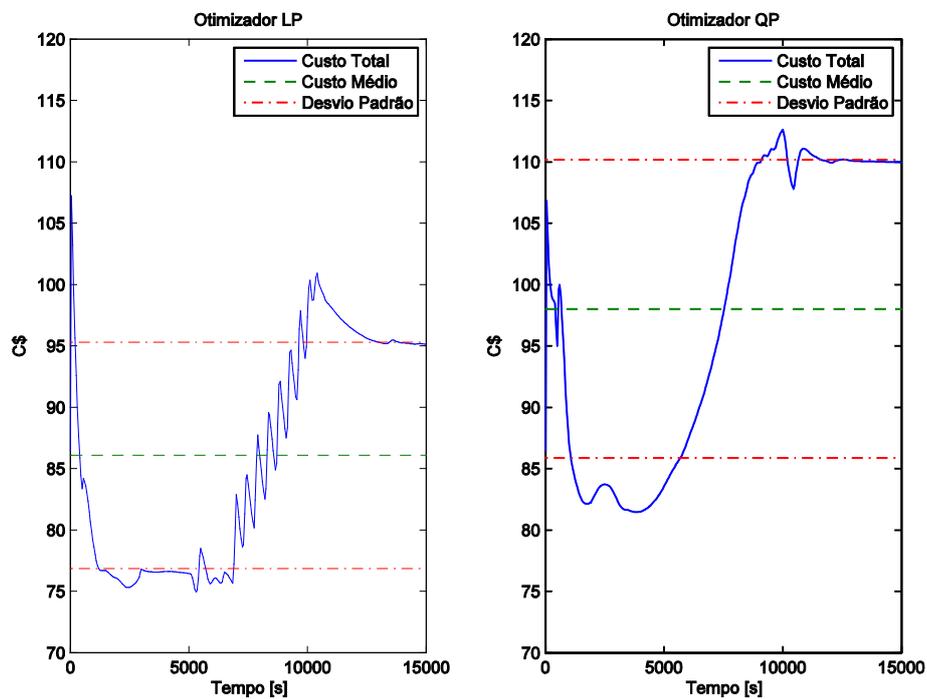


Figura 5.28: Variação da Função Custo para operação do sistema 10×4 submetido ao Distúrbio Rampa da Figura 5.17.

Os resultados do custo médio de operação para o sistema $[10 \times 4]$ e o desvio padrão dos valores encontram-se na Tabela 5.1.

Tabela 5.1: Custo de Operação para sistema 6×4 com otimizador.

Distúrbio	Otimizador LP		Otimizador QP	
	Média	Desvio Padrão	Média	Desvio Padrão
Distúrbio Aleatório	118,6	79,3	131,1	64,6
Distúrbio Degrau	63,9	11,4	69,61	12,2
Distúrbio Rampa	86,1	9,2	98,01	12,1

Observa-se que a utilização de diferentes otimizadores causou custos de operação diferentes para o sistema $[10 \times 4]$, sendo avaliados através da função não-linear que representa o custo real de operação. A abordagem através do otimizador LP foi a que apresentou menor custo de operação, ou seja, levou o sistema a operar mais próximo do custo ótimo.

Capítulo 6 – Conclusões e Trabalhos Futuros

Esse trabalho teve como principal objetivo desenvolver um método de ajuste para controladores preditivos multivariáveis. Essa ferramenta é capaz de ajustar controladores preditivos de forma robusta e possui uma sistemática para ajuste de controladores que operam em faixa e/ou *setpoint* focando em sistema de controle não quadrados, onde o número de variáveis controladas é maior que o número de manipuladas. A seguir serão apresentadas as principais conclusões e algumas sugestões para trabalhos futuros.

6.1 Principais conclusões

Uma revisão a respeito das técnicas de controle e principais algoritmos para controladores preditivos disponíveis na literatura foram realizados juntamente com as principais metodologias de ajuste dos parâmetros de um controlador MPC. O observado a partir disso é que essa estratégia de controle avançado possui grande difusão na indústria de processos principalmente pela utilização explícita de um modelo representativo do processo, do uso de restrições (tanto para as variáveis controladas como para as manipuladas) e a utilização de faixas de operação ao invés de *setpoint* o que permite a configuração de sistemas não quadrados. Além disso, dentre os trabalhos que reportam metodologias de ajuste, a maioria possui limitações quanto à formulação do algoritmo de controle preditivo e a aproximações do modelo do processo o que não garante um ajuste ótimo dificultando a sua aplicação industrial.

O trabalho aqui abordado desenvolveu uma metodologia de sintonia capaz de ajustar um controlador preditivo com dimensões quaisquer, sendo sistemas quadrados (com mesmo número de variáveis controladas e manipuladas) ou sistemas não quadrados (com mais variáveis controladas do que manipuladas ou o contrário). Isso ocorre pelo fato de serem considerados problemas de otimização, onde o número de parâmetros de decisão pode variar de acordo com a dimensão do problema proposto.

A metodologia completa se baseia na divisão do modelo global do processo (podendo ser quadrado ou não quadrado) em cenários quadrados, i.e., cenários com mesmo número de variáveis controladas do que manipuladas. A partir dessa divisão, é determinada uma função de desempenho alcançável para o sistema completo, que considera peculiaridades presentes em cada um dos cenários considerados para o ajuste.

Essa estratégia foi feita visando à consideração dos fatores de fase não mínima que não se encontram no modelo global, mas se encontram em cenários quadrados menores, que ocorrerão possivelmente ao saturar uma ou mais variáveis durante a operação do processo. As particularidades de cada cenário quadrado do modelo do processo são avaliadas através de restrições no Número de Desempenho Robusto relativo, na Máxima Sensibilidade, e dos valores de ações de controle. De posse dos valores alcançáveis para a função de desempenho do sistema global, são determinadas as frequências com que ocorre o valor do Número de Desempenho Robusto de cada cenário, servindo como base para o escalonamento do modelo linearizado e da planta não linear, através do condicionamento mínimo global.

O passo final para a metodologia apresentada consiste na determinação dos pesos que irão ponderar o erro entre as variáveis estimadas pelo modelo e o *setpoint*, o excesso de movimento das variáveis manipuladas, o desvio do *target* das ações de controle e a violação da faixa de operação, visto que o escalonamento do sistema foi feito previamente. Isso ocorre através da minimização de uma função que penaliza a diferença entre o valor estimado para as saídas pelo modelo e o valor da trajetória alcançada pelo modelo global calculada e também a penalização da violação da faixa de operação.

Como estudo de caso, foi proposto e analisado um sistema multivariável de 4 tanques esféricos com aquecimento. Esse sistema foi projetado visando à obtenção de uma unidade acoplada rica em comportamentos dinâmicos e com possíveis configurações capazes de ilustrar adequadamente a metodologia de ajuste desenvolvida.

A metodologia foi aplicada no estudo de caso para diversas configurações: sistemas quadrados operando através de *setpoint*, e sistemas não quadrados operando com e sem a presença de um otimizador na camada superior. Nos sistemas quadrados onde a metodologia foi empregada, observou-se que a técnica de ajuste contribuiu para o desempenho robusto e adequado do processo quando perturbado na direção dos zeros de transmissão positivos (no caso dos sistemas quadrados) não gerando ações de controle bruscas e saturações. Para os sistemas operando em faixas, quando submetidos a distúrbios coloridos, o ajuste procedeu de forma coerente trazendo as variáveis controladas para a faixa de operação aceitável sem excesso de movimento nas ações de controle e saturações. A utilização do otimizador nos sistemas não quadrados corroborou com o propósito desse trabalho, que é a aplicação industrial da metodologia, visto que industrialmente camadas de otimização enviam *targets* para as variáveis manipuladas, visando um custo mínimo de operação.

A divisão da metodologia empregada permite também a utilização da trajetória alcançável como forma de estimar o desempenho do processo, assim como a estimação de parâmetros de ajuste em outras técnicas de controle (como controladores PID). Da mesma forma, o escalonamento baseado no condicionamento mínimo global pode agregar fatores de robustez e desempenho quando utilizado em outras técnicas de controle.

Portanto, pode-se concluir que o trabalho proposto levou a resultados coerentes com os objetivos propostos e é de grande interesse prático, visto que as técnicas de ajuste

para controlador preditivo disponíveis consideram apenas determinados tipos de algoritmos e configurações que não são amplamente utilizadas na indústria.

6.2 Sugestões para trabalhos futuros

A principal sugestão para trabalho futuro é sem sombra de dúvida a aplicação da metodologia proposta no ajuste de um MPC que esteja operando em uma planta real. Embora a metodologia tenha sido desenvolvida com esse foco, ainda não foi testada em uma planta real.

A metodologia proposta foi desenvolvida a fim de proporcionar uma técnica viável e abrangente de ajuste para controladores preditivos industriais. Os resultados aqui descritos indicam a qualidade da metodologia, mas aspectos referentes à carga computacional do método devem ser aperfeiçoados devido à consideração de sistemas muito grandes para a sintonia. Neste sentido, um dos pontos que serão objeto de aprimoramento é o teste de algoritmos de segmentação do modelo, tipo *branch and bound*, visando evitar que todas as combinações sejam avaliadas e a utilização de técnicas de controle parcial de sistemas como forma de priorização entre as variáveis. A exclusão de cenários inviáveis também será avaliada e permitirá a redução do esforço computacional nessa etapa de projeto.

Outra melhoria que poderá ser incorporada é a inclusão de prioridades entre as variáveis, a fim de permitir melhores desempenhos para variáveis específicas e outras formas de fatoração a fim de encontrar o desempenho alcançável, como matrizes de interação, devido principalmente à sensibilidade da Fatoração Blashcke ao modelo do processo.

Além disso, a metodologia aqui descrita foi considerada apenas para controladores preditivos lineares. A sua extensão para trabalhar com NMPC ainda precisa ser testada.

Também é desejável a análise criteriosa das camadas de otimização, que enviam *targets* para as variáveis manipuladas, e inclusão de camadas de *Real Time Optimization* (RTO).

Referências

AL-GHAZZAWI, A. et al. On-line tuning strategy for model predictive controllers. **Journal of Process Control**, v. 11, n. 3, p. 265-284, 2001.

ASTROM, K. J.; HAGGLUND, T. **PID Controllers: Theory, Design, and Tuning**, 1995.

BANERJEE, P.; SHAH, S. L. Tuning guidelines for robust generalized predictive control. **Proc. 31st IEEE Conf. on Decision and Control**, v. 4, p. 3233-3234, 1992.

BITMEAD, R. R.; GEVERS, M.; WERTZ, V. **Adaptive Optimal Control: The Thinking Man's GPC**, 1990.

BOTELHO, V. **Auditoria e diagnóstico de modelos para controladores preditivos industriais**. 2015. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química., Universidade Federal do Rio Grande do Sul., Porto Alegre, RS, Brasil.

BRISTOL, E. H. On a new measure of interaction for multivariable process control. **IEEE Trans. Autom. Control**, v. AC-11, n. 1, p. 133-134, 1966.

CAMACHO, E. F.; BORDONS, C. **Model Predictive Control**, 1999.

CAMPOS, M. C. M. M.; GOMES, M. V. C.; PEREZ, J. M. G. T. **Controle Avançado e Otimização na Indústria do Petróleo**, 2013.

CLARKE, D. W.; MOHTADI, C. Properties of generalized predictive control. **Automatica**, v. 25, n. 6, p. 859-875, 1989.

CLARKE, D. W.; MOHTADI, C.; TUFFS, P. S. Generalized predictive control-Part I. The basic algorithm. **Automatica**, v. 23, n. 2, p. 137-148, 1987.

CUTLER, C. R. Dynamic Matrix Control - A Optimal Multivariable Control Algorithm with Constraints. **Dynamic Matrix Control: An Optimal Multivariable Control Algorithm with Constraints**, 1983.

DAVTYAN, A.; HOFFMANN, S.; SCHEURING, R. Optimization of model predictive control by means of sequential parameter optimization. IEEE SSCI 2011 - Symposium Series on Computational Intelligence - CICA 2011 - 2011 IEEE Symposium on Computational Intelligence in Control and Automation, 2011. p.11-16.

DORF, R. C.; BISHOP, R. H. **Modern Control Systems, 10th Edition**, 2004.

DURAIKI, R. G. **Controle Preditivo Não Linear Utilizando Linearizações Ao Longo da Trajetória**, 2001.

ESCOBAR, M. **Abordagem Flexível, Robusta e Estruturada para o Projeto de Controladores PID Multivariáveis**. 2006. 165 (Dissertação de Mestrado). Departamento de Engenharia Química, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre - RS - Brasil.

ESCOBAR, M.; TRIERWEILER, J. O. Multivariable PID controller design for chemical processes by frequency response approximation. **Chemical Engineering Science**, v. 88, n. 0, p. 1-15, 1/25/ 2013. ISSN 0009-2509.

EXADAKTYLOS, V.; TAYLOR, C. J. Multi-objective performance optimisation for model predictive control by goal attainment. **International Journal of Control**, v. 83, n. 7, p. 1374-1386, 2010.

FACCIN, F. **Abordagem inovadora no projeto de controladores PID**. 2004. (Dissertação de Mestrado). Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2004.

FERRAMOSCA, A. et al. MPC for tracking target sets. Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control, 2009. p.8020-8025.

_____. MPC for tracking zone regions. **Journal of Process Control**, v. 20, n. 4, p. 506-516, 2010.

GARRIGA, J. L.; SOROUSH, M. Model predictive control tuning methods: A review. **Industrial and Engineering Chemistry Research**, v. 49, n. 8, p. 3505-3515, 2010.

GENCELI, H.; NIKOLAOU, M. Robust stability analysis of constrained I "SUB 1" - norm model predictive control. **AIChE Journal**, v. 39, n. 12, p. 1954-1965, 1993.

GEORGIU, A.; GEORGAKIS, C.; LUYBEN, W. L. NONLINEAR DYNAMIC MATRIX CONTROL FOR HIGH-PURITY DISTILLATION COLUMNS. **AIChE Journal**, v. 34, n. 8, p. 1287-1298, 1988.

GOUS, G. Z.; DE VAAL, P. L. Using MV overshoot as a tuning metric in choosing DMC move suppression values. **ISA transactions**, v. 51, n. 5, p. 657-664, 2012.

HINDE JR, R. F.; COOPER, D. J. A pattern-based approach to excitation diagnostics for adaptive process control. **Chemical Engineering Science**, v. 49, n. 9, p. 1403-1415, 1994.

HOLKAR, K. S.; WAGHMARE, L. M. An overview of model predictive control. **International Journal of Control and Automation**, v. 3, n. 4, p. 7, 2010.

JÚNIOR, G. A. N.; MARTINS, M. A. F.; KALID, R. A PSO-based optimal tuning strategy for constrained multivariable predictive controllers with model uncertainty. **ISA Transactions**, v. 53, n. 2, p. 560-567, 2014.

KARACAN, S.; HAPOĞLU, H.; ALPBAZ, M. Application of optimal adaptive generalized predictive control to a packed distillation column. **Chemical Engineering Journal**, v. 84, n. 3, p. 389-396, 2001.

KATSUHIKO, O. **Modern Control Engineering**, 2002.

MACIEJOWSKI, J. M. **Predictive Control with Constraints**, 2002.

MAURATH, P. R. et al. Predictive controller design by principal components analysis. **Industrial and Engineering Chemistry Research**, v. 27, n. 7, p. 1204-1212, 1988.

MAURATH, P. R.; MELLICHAMP, D. A.; SEBORG, D. E. Predictive controller design for single-input/single-output (SISO) systems. **Industrial and Engineering Chemistry Research**, v. 27, n. 6, p. 956-963, 1988.

MCINTOSH, A. R.; SHAH, S. L.; FISHER, D. G. Selection of tuning parameters for adaptive generalized predictive control. 1989. p.1846-1851.

_____. Performance tuning of adaptive generalized predictive control. **Preprints 11th IFAC World Congress**, v. 4, p. 174-179, 1990.

_____. Analysis and tuning of adaptive generalized predictive control. **Canadian Journal of Chemical Engineering**, v. 69, n. 1, p. 97-110, 1991.

NERY JÚNIOR, G. A.; MARTINS, M. A. F.; KALID, R. A PSO-based optimal tuning strategy for constrained multivariable predictive controllers with model uncertainty. **ISA Transactions**, v. 53, n. 2, p. 560-567, 3// 2014. ISSN 0019-0578.

NIKOLAOU, M. **Model predictive controllers: A critical synthesis of theory and industrial needs**. Advances in Chemical Engineering. 26: 131-204 p. 2001.

OGUNNAIKE, B. A. DYNAMIC MATRIX CONTROL: A NONSTOCHASTIC, INDUSTRIAL PROCESS CONTROL TECHNIQUE WITH PARALLELS IN APPLIED STATISTICS. **Industrial & Engineering Chemistry, Fundamentals**, v. 25, n. 4, p. 712-718, 1986.

QIN, S. J.; BADGWELL, T. A. A survey of industrial model predictive control technology. **Control Engineering Practice**, v. 11, n. 7, p. 733-764, 2003.

ROWE, C.; MACIEJOWSKI, J. Tuning MPC using H^∞ loop shaping. Proceedings of the American Control Conference, 2000. p.1332-1336.

ROWE, C.; MACIEJOWSKI, J. M. Tuning robust model predictive controllers using LQG/LTR. **Proceedings of the 14th Triennial World Congress**, 1999.

SEBORG, D. E.; EDGAR, T. F.; MELLICHAMP, D. A. **Process Dynamics and Control**, 1989.

SHRIDHAR, R.; COOPER, D. J. A tuning strategy for unconstrained multivariable model predictive control. **Industrial and Engineering Chemistry Research**, v. 37, n. 10, p. 4003-4016, 1998.

SKOGESTAD, S.; POSTLETHWAITE, I. **Multivariable Feedback Control**, 1996.

SUZUKI, R. et al. Parameter optimization of model predictive control by PSO. **Electrical Engineering in Japan (English translation of Denki Gakkai Ronbunshi)**, v. 178, n. 1, p. 40-49, 2012.

TRIERWEILER, J. O. **A Systematic Approach to Control Structure Design**, 1997.

_____. Application of the RPN methodology for quantification of the operability of the quadruple-tank process. **Brazilian Journal of Chemical Engineering**, v. 19, p. 195-206, 2002. ISSN 0104-6632.

_____. Real-Time Optimization of Industrial Processes. In: BAILLIEUL, J. e SAMAD, T. (Ed.). **Encyclopedia of Systems and Control**. London: Springer London, 2013. p.1-11. ISBN 978-1-4471-5102-9.

TRIERWEILER, J. O.; FARINA, L. A. RPN tuning strategy for model predictive control. **Journal of Process Control**, v. 13, n. 7, p. 591-598, 2003.

VAN DER LEE, J. H.; SVRCEK, W. Y.; YOUNG, B. R. A tuning algorithm for model predictive controllers based on genetic algorithms and fuzzy decision making. **ISA Transactions**, v. 47, n. 1, p. 53-59, 2008.

YAMUNA RANI, K.; UNBEHAUEN, H. Study of predictive controller tuning methods. **Automatica**, v. 33, n. 12, p. 2243-2248, 1997.

Apêndice A – Definições

A.1 Controle Multivariável

A teoria de controle moderno contrasta com a teoria de controle convencional no fato da primeira ser aplicável para sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas, que podem ser lineares ou não lineares, invariantes ou variantes no tempo, enquanto a segunda só é aplicável para sistemas lineares invariantes no tempo de uma entrada e uma saída (Katsuhiko, 2002).

Com a evolução dos processos industriais e a complexidade proveniente dessa evolução, os sistemas de controle deixaram de operar de forma SISO e passaram a operar de forma MIMO. Com isso, as técnicas de ajuste e controle desenvolvidas não funcionavam de forma satisfatória para os novos modos de operação surgindo aí à necessidade de pesquisas no projeto de controle multivariável.

Considera-se uma planta *Multi-Input-Multi-Output* uma extensão de uma planta *Single-Input-Single-Output*, com m entradas e n saídas. As saídas formam um vetor de dimensão $n \times 1$ e as entradas um vetor de dimensão $m \times 1$. A maioria das técnicas apresentadas para sistemas MIMO são uma extensão das técnicas de sistemas SISO, apresentando como principal diferença a presença das direções relacionadas às entradas e saídas, que não ocorrem em sistemas SISO pelo fato de serem escalares.

O projeto de controladores que operam de forma MIMO, Figura A.1(c), ainda é um desafio para engenheiros de controle devido à complexidade do processo e a interação que ocorre entre as variáveis de entrada e as variáveis de saída (sistemas acoplados). Para isso existem abordagens que aproximam o sistema multivariável em sistemas “Multi-SISO”, ou técnicas de controle multivariável, dentre elas o controle preditivo.

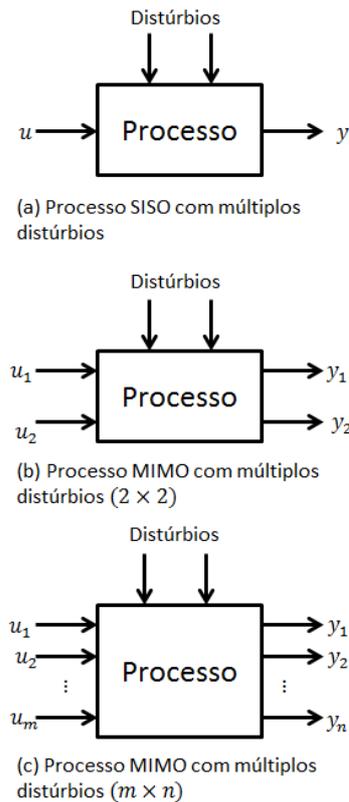


Figura A.1: Problemas SISO e MIMO (Adaptado de Seborg, Edgar e Mellichamp, 1989).

A.1.1 Representação em Espaço de Estados

Katsuhiko (2002) definiu o Estado de um sistema dinâmico como o menor conjunto de variáveis, chamadas variáveis de estado, que determinam completamente o comportamento do sistema em qualquer instante de tempo. Se n variáveis de estado são necessárias para descrever completamente o comportamento de um dado sistema, então essas n variáveis podem ser consideradas como as n componentes de um vetor de estados $x(t)$. O espaço n -dimensional cujos eixos de coordenadas são os eixos x_1, x_2, \dots, x_n é chamado de espaço de estados e qualquer estado pode ser representado por um ponto no espaço de estados.

Considerando um sistema com m entradas e n saídas, uma forma de representá-lo é através de espaço de estado não linear como observado nas Equações A.1 e A.2.

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u) \quad (\text{A.1})$$

$$y = g(x, u) \quad (\text{A.2})$$

onde dx/dt é a derivada no tempo dos estados x , y é a saída, f e g são funções não lineares, que representam toda a dinâmica do modelo. Modelos de espaço de estado lineares são derivados a partir da linearização dessas equações (Equações A.1 e A.2), em torno de pontos estacionários e representados através de variáveis desvio. A linearização desses modelos é obtida através da aproximação em série de Taylor, negligenciando termos de 2ª ordem e superiores, gerando os modelos dados pelas Equações A.3 e A.4.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (\text{A.3})$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (\text{A.4})$$

onde A, B, C e D são matrizes reais. Por tratar-se de matrizes de linearização $A = \partial f / \partial x$ e $B = \partial f / \partial u$ e são chamadas matrizes de estado. As matrizes C e D são matrizes que relacionam os estados e as entradas com a saída do sistema. A representação em espaço de estado pode ser reescrita através da Equação A.5, que é mais conhecida na literatura.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

A partir da representação em espaço de estados linear, aplicando a transformada de Laplace na Equação A.5, e considerando as condições iniciais nulas, obtém-se a Função de Transferência (para casos monovariáveis) ou Matriz de Transferência (para casos multivariáveis), dada pela Equação A.6, que é uma representação do modelo linear através da variável de Laplace, s .

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (\text{A.6})$$

Cabe ressaltar que a generalização em espaço de estados não linear e linear possui a mesma forma tanto para sistemas com uma variável de entrada e uma variável de saída como aqueles que possuem mais variáveis. O que irá diferir do caso SISO para o caso MIMO serão o tamanho dos vetores de entrada e saída, e conseqüentemente das matrizes de linearização A, B, C e D .

A.1.2 Funções de Transferência para sistemas MIMO

A matriz de transferência $G(s)$ relaciona de forma linear o vetor de saídas $Y(s)$ com o vetor de entradas $U(s)$, da forma

$$Y(s) = G(s)U(s) \quad (\text{A.7})$$

Em sistemas *Single-Input-Single-Output* por tratar-se de entradas e saídas escalares uma função simples descreve a variação de saída em relação à variação de entrada, a chamada função de transferência. Já em sistemas MIMO, uma variação em uma das entradas irá afetar todas as saídas sendo cada canal responsável por uma função de transferência de uma matriz de transferência (Skogestad e Postlethwaite, 1996).

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{1,1} & \dots & G_{1,n} \\ G_{2,1} & \dots & G_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ G_{m,1} & \dots & G_{m,n} \end{bmatrix}_{m \times n} \quad (\text{A.8})$$

$$Y(s) = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}_{n \times 1} \quad (\text{A.9})$$

$$U(s) = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}_{m \times 1} \quad (\text{A.10})$$

onde $G(s)$ é a matriz de transferência, $Y(s)$ e $U(s)$ são os vetores de saída e entrada, respectivamente.

A notação matricial mostrada na Equação A.7, representa uma compacta relação entre as entradas e saídas de um sistema multivariável $m \times n$. A matriz de transferência $G(s)$ é uma função de Laplace e pode ser usada pra representar a dinâmica do sistema de forma linear, ou seja, como as saídas serão influenciadas frente a variações na entrada.

Cada canal dessa matriz representa de forma independente, através de uma função de transferência, sua contribuição na variável de saída. Essa contribuição depende da forma com que o modelo é proposto podendo ser nula (caso não haja influência na saída), ou apresentando fatores que causarão prejuízo no desempenho do controlador como tempo morto elevado, resposta inversa, instabilidade e etc.

A matriz onde $s = 0$, ou seja, $G(s = 0)$, é chamada matriz de ganhos estacionários do sistema com m entradas e n saídas, representada por K (Seborg, Edgar e Mellichamp, 1989). O ganho representa o valor máximo que será atingido frente uma perturbação de grau de magnitude 1, no tempo $t \rightarrow \infty$.

Ao atribuir o valor $s = j\omega$, a matriz resultante, $G(j\omega)$, representa a resposta do sistema a um sinal senoidal de frequência ω , chamada de análise no domínio da frequência. Essa abordagem permite análise de comportamento dinâmico, estabilidade e robustez frente a variações da frequência do sistema.

A.1.3 Decomposição em Valores Singulares (SVD)

Single Value Decomposition (SVD) é uma das principais ferramentas que permitem a generalização dos conceitos de ganho, direções de pólo e direções de zero para sistemas multivariáveis. SVD é o elo de ligação entre os sistemas SISO e MIMO.

Considerando qualquer frequência ω , $G(j\omega)$, é uma matriz constante de dimensões $m \times n$. Os valores singulares são as raízes quadradas positivas dos autovalores de $G^H G$, onde G^H é o complexo conjugado transposto de G .

$$\sigma_i(G) = \sqrt{\lambda_i(G^H G)} \quad (\text{A.11})$$

Conforme Skogestad e Postlethwaite (1996) os valores singulares, também chamados de valores principais ou ganhos principais, estão diretamente relacionados com as direções de entrada e saída, também chamadas direções principais.

Qualquer matriz G pode ser decomposta em seus valores singulares, da seguinte maneira

$$G = U \Sigma V^H \quad (\text{A.12})$$

onde, Σ é uma matriz quadrada, de ordem $k \times k$ com $k = \min[m, n]$, formada por valores não-negativos singulares, σ_i , arranjados de forma decrescente ao longo da

diagonal principal; as outras entradas são nulas. U é uma matriz unitária $n \times n$, dos vetores singulares de saída e V uma matriz também unitária de ordem $m \times m$, dos vetores singulares de entrada. As colunas do vetor U , são ortonormais e representam as direções de saída da planta. Já as colunas do vetor V , também ortonormais representam as direções de entrada da planta.

Algumas vantagens do SVD são:

3. Os valores singulares propõem uma melhor informação sobre os ganhos da planta;
4. As direções da planta obtidas através do SVD são ortogonais e de tamanho unitário (ortonormais);
5. A decomposição em valores singulares também é obtida para plantas não quadradas.

O maior ganho para qualquer direção de entrada é chamado de máximo valor singular e é definido como

$$\bar{\sigma}(G) \equiv \sigma_1(G) = \max_{u \neq 0} \frac{\|G(0)u\|_2}{\|u\|_2} \quad (\text{A.13})$$

Da mesma forma, o menor ganho pra qualquer direção de entrada, excluindo as entradas nulas, é definido como

$$\underline{\sigma}(G) \equiv \sigma_k(G) = \min_{u \neq 0} \frac{\|G(0)u\|_2}{\|u\|_2} \quad (\text{A.14})$$

Na representação mostrada pela Equação A.12, a matriz Σ , possui sua diagonal principal composta por valores singulares, sendo dispostos em ordem decrescente. Os vetores de entrada e de saída que correspondem às direções do maior valor singular são aqueles que representam as direções mais fortes, ou seja, em direção ao maior ganho.

A.1.4 Condicionamento da Matriz

O condicionamento da matriz trata-se de uma maneira utilizada para quantificar o grau de direcionalidade e o nível de interação em sistemas MIMO com forte direcionalidade, ou seja, sistemas cujo ganho varia consideravelmente com a direção de entrada (Skogestad e Postlethwaite, 1996). O condicionamento da matriz é definido como a razão entre o máximo e o mínimo valor singular da matriz,

$$\gamma(G) \equiv \frac{\bar{\sigma}(G)}{\underline{\sigma}(G)} \quad (\text{A.15})$$

O condicionamento é usado como medida da controlabilidade do sistema. Um sistema com elevado condicionamento é dito mal-condicionado, e indica sensibilidade à incerteza. Se o condicionamento é pequeno então os efeitos multivariáveis de incerteza não são de extrema importância. Em outras palavras, alto condicionamento indica problemas de controle.

O condicionamento da matriz depende fortemente do escalonamento das variáveis de entrada e de saída. Especificando, R e L , são matrizes diagonais de escalonamento e o

condicionamento mínimo da matriz é então definido na Equação A.16. Todos os valores de R e L são avaliados a fim de encontrar o menor valor para o condicionamento possível, chamado condicionamento mínimo.

$$\gamma^*(G) = \min_{R,L} \gamma(LGR) \quad (\text{A.16})$$

A fim de garantir que a planta possua o melhor cenário, torna-se necessário avaliar o condicionamento da matriz. O escalonamento das variáveis de entrada e saída, que é responsável por esse condicionamento, é um ponto chave na escolha do modelo do processo, pois indicará a controlabilidade do sistema, sendo por vezes necessário mudar o escalonamento a fim de obter um sistema adequado.

A.1.5 Zeros de Transmissão

Considerando $G(s)$ uma matriz de transferência, z é um zero de transmissão ou simplesmente zero de $G(s)$ se o rank da matriz $G(s = z)$ é menor que o rank normal de $G(s)$ (Skogestad e Postlethwaite, 1996).

Tomando z como um zero de $G(s)$, existe um vetor de entrada de direção u_z e um vetor de saída de direção y_z , de forma que $u_z^H u_z = 1$ e $y_z^H y_z = 1$.

Para encontrar os zeros de transmissão é resolvido um problema de autovalores generalizados, dado pelas seguintes equações:

$$\begin{bmatrix} A - sI & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{z,I} \\ u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.17})$$

$$\begin{bmatrix} x_{z,O}^H & y_z^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A - sI & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.18})$$

$$G(z)u_z = 0 \quad (\text{A.19})$$

$$y_z^H G(z) = 0 \quad (\text{A.20})$$

onde A, B, C e D são as matrizes da representação em Espaço de Estado da matriz de transferência. Outra forma de calcular a direção dos zeros é através da decomposição em valores singulares (SVD) de $G(z)$. Nesse caso as direções u_z e y_z são dadas pelas colunas V e U correspondentes ao valor singular que torna $s = z$.

A presença de zeros de transmissão no SPD caracterizam, assim como presença de tempo morto, sistemas de fase não mínima. Tais características limitam o desempenho do controlador impondo uma barreira à velocidade máxima de atuação do controlador em malha fechada (Escobar e Trierweiler, 2013).

A direção de saída do zero, y_z , traz a informação a respeito de qual saída (ou combinação de saídas) irão dificultar a estratégia de controle.

A.1.6 Polos

Os polos p_i de um sistema em espaço de estado (A, B, C, D) são os autovalores de A . Genericamente, os polos de $G(s)$ são definidos como os valores $s = p$, onde $G(p)$ é singular, ou seja, é infinito (Skogestad e Postlethwaite, 1996).

Em sistemas multivariáveis os polos possuem direções de entrada e saída associadas, tal que $u_p^H u_p = 1$ e $y_p^H y_p = 1$. Pode-se afirmar que os polos de $G(s)$ são os zeros de $G^{-1}(s = p)$, de forma que suas direções são obtidas através das seguintes equações:

$$y_p = C x_R \quad (\text{A.21})$$

$$u_p = B^H x_L \quad (\text{A.22})$$

$$A x_R = p x_R \quad (\text{A.23})$$

$$x_L^H A = x_L^H p \quad (\text{A.24})$$

$$G^{-1}(p) y_p = 0 \quad (\text{A.25})$$

$$u_p^H G^{-1}(p) = 0 \quad (\text{A.26})$$

onde x_R e x_L são os autovetores correspondentes aos problemas de autovalores dados pelas Equações A.23 e A.24.

Alternativa para a determinação das direções é através do SVD. Se $G(s = p)$ é não singular, logo $G^{-1}(p)$ possui as direções y_p e u_p dados pelas colunas de V e U que correspondem aos valores singulares que tornam zero em $s = p$.

A.1.7 Relative Gain Array (RGA)

Bristol (1966) desenvolveu uma aproximação sistemática para a análise de processos de controle multivariável, o RGA. Essa aproximação requer apenas informação de estado estacionário, ganho K , e é uma medida do grau de interação, invariante em relação ao escalonamento. Trata-se da razão entre o ganho do sistema em malha aberta e o ganho do sistema em malha fechada.

$$RGA(K) = \Lambda(K) = K \times (K^{-1})^T \quad (\text{A.27})$$

$$\lambda_{ij} = \frac{\left(\frac{\partial y_i}{\partial u_j} \right)_{u_{k \neq j} = cte}}{\left(\frac{\partial y_i}{\partial u_j} \right)_{y_{k \neq i} = cte}} = \frac{\text{Ganho em Malha Aberta}}{\text{Ganho em Malha Fechada}} \quad (\text{A.28})$$

onde \times representa a multiplicação elemento por elemento.

Algumas propriedades importantes do RGA para processos em estado estacionário (Bristol, 1966), são:

1. É normalizado e a soma dos elementos de cada linha e cada coluna é igual a 1;
2. Os ganhos relativos são sem dimensão e não dependem das unidades de escalonamento das variáveis;

3. O RGA é uma medida da sensibilidade para incerteza no ganho da matriz K . O ganho da matriz se torna singular se um elemento K_{ij} é mudado para $K_{ij} = K_{ij}(1 - 1/\lambda_{ij})$. Assim, um grande valor de RGA indica que pequenas mudanças em K_{ij} podem mudar de forma brusca as características de controle do processo.

Apêndice B – Fatoração Blaschke

B.1 Fatoração Blaschke e Desempenho Alcançável

Considerando uma matriz de transferência $G(s)$ dada em função das matrizes de realização do sistema dadas da seguinte maneira:

$$G(s) \cong \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

Um sistema linear $G(s)$ pode ser fatorado na entrada e saída de acordo com os zeros/pólos do sistema localizados no SPD:

$$G(s) = G_I(s)F_I(s) \quad (\text{B.2})$$

$$G(s) = F_O(s)G_O(s) \quad (\text{B.3})$$

onde F_I e F_O são matrizes de transferência contendo os zeros/pólos do sistema localizados no SPD e consistem em uma série de filtros de primeira ordem.

B.1.1 Fatoração de Zeros Positivos

Fatoração de Entrada

Seja $G(s)$ um sistema linear contendo N_z zeros no SPD, com direções de entrada $\hat{x}_{z,i}$ e $\hat{u}_{z,i}$ definidas por

$$\begin{bmatrix} A - z_i I & B_{i-1} \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_{z,i} \\ \hat{u}_{z,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

Esse sistema pode ser fatorado em, $G(s) = G_I(s)F_I(s)$ onde

$$G_I(s) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

A matriz modificada B e o filtro B_I podem ser calculados através de um procedimento iterativo para $i = 1, \dots, N_z$ com $B_0 = B$ e $B' = B_{N_z}$. A cada iteração as seguintes equações são calculadas:

$$B_i = B_{i-1} - 2\text{Re}(z_i)\hat{x}_{z,i}\hat{u}_{z,i}^H \quad (\text{B.5})$$

$$F_i(s) = I - \frac{2\text{Re}(z_i)}{s+\bar{z}_i}\hat{u}_{z,i}\hat{u}_{z,i}^H \quad (\text{B.6})$$

$$F_I(s) = F_{N_z}(s)F_{N_z-1}(s) \dots F_1(s) = \prod_{i=0}^{N_z-1} F_{N_z-i}(s) \quad (\text{B.7})$$

É importante salientar que as direções não são as mesmas dos zeros de transmissão, com exceção do primeiro zero fatorado, uma vez que o sistema é modificado.

Fatoração de Saída

Seja $G(s)$ contendo N_z SPD-zeros z_i , com direções de saída $\hat{x}_{z,i}$ e $\hat{y}_{z,i}$ definidas por

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{z,i}^H & \hat{y}_{z,i}^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A - z_i I & B \\ C_{i-1} & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.8})$$

Pode ser fatorado em, $G(s) = F_O(s)G_O(s)$ onde

$$G_O(s) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (\text{B.9})$$

A matriz modificada C pode ser calculada através de um procedimento iterativo para $i = 1, \dots, N_z$ com $C_0 = C$ e $C' = C_{N_z}$. A cada iteração as seguintes equações são calculadas:

$$C_i = C_{i-1} - 2\text{Re}(z_i)\hat{y}_{z,i}\hat{x}_{z,i}^H \quad (\text{B.10})$$

$$F_i(s) = I - \frac{2\text{Re}(z_i)}{s+\bar{z}_i}\hat{y}_{z,i}\hat{x}_{z,i}^H \quad (\text{B.11})$$

$$F_O(s) = F_{N_z}(s)F_{N_z-1}(s) \dots F_1(s) = \prod_{i=0}^{N_z-1} F_{N_z-i}(s) \quad (\text{B.12})$$

B.1.2 Performance Alcançável

Zeros Positivos

Se $G(s)$ tem um zero no SPD (z), com direção de saída y_z , para manter a estabilidade interna da malha, o sistema feedback não deve cancelar esse zero. Assim, $L = GC$ deve ter um zero alocado na mesma posição com a mesma direção de saída.

$$y_z^H G(z) = 0 \implies y_z^H G(z)C(z) = 0 \quad (\text{B.13})$$

Como $T = LS$, as restrições de interpolação levam no seguinte resultado

$$y_z^H T(z) = 0; y_z^H S(z) = y_z^H \quad (\text{B.14})$$

Uma possível solução é dada pela expressão:

$$T(s) = F_{O,z}(s)\tilde{F}_{O,z}^{-1}(0)T_d(s) \quad (\text{B.15})$$

onde $T_d(s)$ é o desempenho ideal, desejado para o sistema, $F_{O,z}(s)$ é o filtro da fatoração da saída do sistema para os zeros positivos e $\tilde{F}_{O,z}^{-1}$ é a pseudo-inversa de $F_{O,z}(0)$. Sendo z um zero de $F_{O,z}(s)$.

O fator $\tilde{F}_{O,z}^{-1}$ é inserido para que $F_{O,z}(0)\tilde{F}_{O,z}^{-1}(0) = I$ preservando assim as características estacionárias $T(0) = T_d(0)$.

$T(s)$ é diferente de $T_d(s)$, mas possui exatamente os mesmos valores singulares, uma vez que $F_{O,z}(s)$ contém todos os SPD-zeros do sistema, as propriedades de robustez são mantidas na saída da planta.

Apêndice C – Análise do Estudo de Caso

C.1 Análise do Modelo 4 Tanques esféricos com aquecimento: Cenários operacionais

A interação das variáveis de entrada através das magnitudes e direções podem gerar inúmeros cenários em malha aberta que apresentam comportamentos distintos, tornando-se necessário o estudo de cada subcaso a fim de identificar os fatores de fase não mínima, que irão interferir no desempenho do controlador.

Para isso, foram estudados todos os subcasos quadrados (2×2 , 3×3 e 4×4), derivados do sistema 6×4 , no Ponto de Operação 1 e 2, que possuem zeros de transmissão positivos, assim como o RGA, que indica a interação entre as variáveis, e a direção de entrada e saída desses zeros de transmissão.

Tabela C.1: Zeros de transmissão positivos nos subsistemas 2×2 do Ponto de Operação 1.

Sistema	Zero no SPD	RGA	y_z	u_z
$G([h_1, h_2]; [F_1, F_2])$	0,0030	$\begin{bmatrix} -0,2195 & 1,2195 \\ 1,2195 & -0,2195 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,6411 \\ 0,7675 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,6353 \\ -0,7723 \end{bmatrix}$
$G([h_1, T_1]; [x_1, x_2])$	0,0408	$\begin{bmatrix} 0,4920 & 0,5080 \\ 0,5080 & 0,4920 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,8728 \\ 0,4882 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,0436 \\ -0,9990 \end{bmatrix}$
$G([h_1, T_1]; [F_2, x_1])$	0,0408	$\begin{bmatrix} 0,5080 & 0,4920 \\ 0,4920 & 0,5080 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,8728 \\ 0,4882 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$
$G([h_1, T_1]; [F_1, x_2])$	0,0408	$\begin{bmatrix} 0,4920 & 0,5080 \\ 0,5080 & 0,4920 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,8728 \\ 0,4882 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,8510 \\ 0,5252 \end{bmatrix}$
$G([h_1, T_1]; [F_1, F_2])$	0,0408	$\begin{bmatrix} 0,4920 & 0,5080 \\ 0,5080 & 0,4920 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,8728 \\ 0,4882 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,0931 \\ -0,9957 \end{bmatrix}$
$G([h_1, T_2]; [x_2, F_1])$	0,00086447	$\begin{bmatrix} 1,6967 & -0,6967 \\ -0,6967 & 1,6967 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,5324 \\ 0,8465 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,9992 \\ 0,0394 \end{bmatrix}$
$G([h_1, T_2]; [F_1, x_2])$	0,00037299	$\begin{bmatrix} -1,9699 & 2,9699 \\ 2,9699 & -1,9699 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,7849 \\ 0,6196 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,9995 \\ -0,0323 \end{bmatrix}$
$G([h_1, T_2]; [F_1, x_1])$	0,0066	$\begin{bmatrix} 0,35 & 0,65 \\ 0,65 & 0,35 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,9996 \\ -0,0269 \end{bmatrix}$
$G([h_1, T_2]; [F_1, F_2])$	0,0001 - 0,0043i	$\begin{bmatrix} 0,1811 & 0,8189 \\ 0,8189 & 0,1811 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,3858 - 0,8187i \\ -0,4025 - 0,1371i \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,6470 \\ -0,3152 + 0,6943i \end{bmatrix}$

$G([h_2, T_1]; [F_2, x_2])$	0,0049	$\begin{bmatrix} 0,25 & 0,75 \\ 0,75 & 0,25 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,9998 \\ 0,0192 \end{bmatrix}$
$G([h_2, T_1]; [F_2, x_1])$	0,00094272	$\begin{bmatrix} -0,5272 & 1,5272 \\ 1,5272 & -0,5272 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,8273 \\ 0,5618 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,9997 \\ -0,0262 \end{bmatrix}$
$G([h_2, T_1]; [F_1, x_2])$	0,00049229	$\begin{bmatrix} 2,2606 & -1,2606 \\ -1,2606 & 2,2606 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,5323 \\ 0,8466 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,9991 \\ -0,0420 \end{bmatrix}$
$G([h_2, T_1]; [F_1, F_2])$	0,0007 $-0,0040i$	$\begin{bmatrix} 0,8433 & 0,1567 \\ 0,1567 & 0,8433 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,0022 - 0,8527i \\ -0,4737 - 0,2204i \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,6067 \\ -0,5098 - 0,6099i \end{bmatrix}$
$G([h_2, T_2]; [x_1, x_2])$	0,0892	$\begin{bmatrix} 0,5512 & 0,4488 \\ 0,4488 & 0,5512 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,9569 \\ 0,2905 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,9996 \\ 0,0286 \end{bmatrix}$
$G([h_2, h_2]; [F_2, x_1])$	0,0892	$\begin{bmatrix} 0,4488 & 0,5512 \\ 0,5512 & 0,4488 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,9569 \\ 0,2905 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,8302 \\ -0,5574 \end{bmatrix}$
$G([h_2, T_2]; [F_1, x_2])$	0,0892	$\begin{bmatrix} 0,5512 & 0,4488 \\ 0,4488 & 0,5512 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,9569 \\ 0,2905 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ -0,0014 \end{bmatrix}$
$G([h_2, T_2]; [F_1, F_2])$	0,0892	$\begin{bmatrix} 0,5512 & 0,4488 \\ 0,4488 & 0,5512 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,9569 \\ 0,2905 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,9972 \\ 0,0743 \end{bmatrix}$
$G([h_3, T_2]; [x_1, x_2])$	0,0066	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,9105 \\ -0,4134 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
$G([h_3, T_2]; [F_2, x_1])$	0,0066	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,5918 \\ 0,8061 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$
$G([h_3, T_2]; [F_1, x_2])$	0,0066	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,9105 \\ 0,4134 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
$G([h_3, T_2]; [F_1, F_2])$	0,0066	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,5918 \\ 0,8061 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
$G([h_4, T_1]; [x_1, x_2])$	0,0049	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,7704 \\ 0,6376 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
$G([h_4, T_1]; [F_2, x_2])$	0,0049	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0,0033 & 0,9967 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,9989 \\ 0,0476 \end{bmatrix}$
$G([h_4, T_1]; [F_2, x_1])$	0,0049	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,7704 \\ -0,6376 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
$G([h_4, T_1]; [F_1, x_2])$	0,0049	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,5453 \\ 0,8382 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
$G([h_4, T_1]; [F_1, F_2])$	0,0049	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,5453 \\ 0,8382 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$
$G([T_1, T_2]; [F_2, x_2])$	0,0049	$\begin{bmatrix} 0,75 & 0,25 \\ 0,25 & 0,75 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,9998 \\ -0,0192 \end{bmatrix}$
$G([T_1, T_2]; [F_2, x_1])$	0,0001 $-0,0025i$	$\begin{bmatrix} 0,7022 & 0,2978 \\ 0,2978 & 0,7022 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,4290 - 0,4744i \\ -0,7221 - 0,2636i \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,9995 \\ -0,0064 + 0,0325i \end{bmatrix}$
$G([T_1, T_2]; [F_1, x_1])$	0,0066	$\begin{bmatrix} 0,35 & 0,65 \\ 0,65 & 0,35 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,9996 \\ -0,0269 \end{bmatrix}$
$G([T_1, T_2]; [F_1, F_2])$	0,0011	$\begin{bmatrix} -0,2958 & 1,2958 \\ 1,2958 & -0,2958 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,7406 \\ 0,6720 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,6620 \\ -0,7495 \end{bmatrix}$

Tabela C.2: Zeros de transmissão positivos nos subsistemas 3×3 do Ponto de Operação

1

Sistema	Zero no SPD	RGA	y_z	u_z
$G([h_4, T_1, T_2]; [F_1, F_2, x_1])$	0,0049	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,75 & 0,25 \\ 0 & 0,25 & 0,75 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,5453 \\ -0,8382 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0,9998 \\ -0,0192 \end{bmatrix}$

$G([h_4, T_1, T_2]; [F_2, x_1, x_2])$	0,0049	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0,75 & 0 & 0,25 \\ 0,25 & 0 & 0,75 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,7704 \\ -0,6376 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,9998 \\ 0 \\ 0,0192 \end{bmatrix}$
$G([h_3, T_1, T_2]; [F_1, F_2, x_1])$	0,0066	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0,35 & 0 & 0,65 \\ 0,65 & 0 & 0,35 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,5918 \\ 0 \\ 0,8061 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,9996 \\ 0 \\ 0,0269 \end{bmatrix}$
$G([h_3, T_1, T_2]; [F_1, x_1, x_2])$	0,0066	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0,35 & 0,65 & 0 \\ 0,65 & 0,35 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,9105 \\ 0 \\ 0,4134 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,9996 \\ -0,0269 \\ 0 \end{bmatrix}$
$G([h_2, T_1, T_2]; [F_1, F_2, x_1])$	0,0892	$\begin{bmatrix} 1,2033 & 0,4408 & -0,6521 \\ 0,35 & 0 & 0,65 \\ -0,5533 & 0,5512 & 1,0021 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,9569 \\ 0 \\ 0,2905 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,9932 \\ -0,1136 \\ -0,0266 \end{bmatrix}$
$G([h_2, T_1, T_2]; [F_1, F_2, x_2])$	0,0049	$\begin{bmatrix} 0,5512 & 0,1890 & 0,2597 \\ 0 & 0,75 & 0,25 \\ 0,4488 & 0,0610 & 0,4903 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,8303 \\ 0,4239 \\ 0,3618 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -0,9998 \\ 0,0192 \end{bmatrix}$
$G([h_2, T_1, T_2]; [F_1, x_1, x_2])$	0,0892	$\begin{bmatrix} 0,0766 & 0,4746 & 0,4488 \\ 0,35 & 0,65 & 0 \\ 0,5734 & -0,1246 & 0,5512 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,9569 \\ 0 \\ 0,2905 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,9996 \\ -0,0270 \\ -0,0022 \end{bmatrix}$
$G([h_2, T_1, T_2]; [F_2, x_1, x_2])$	0,0049	$\begin{bmatrix} -0,0305 & 0,5512 & 0,4793 \\ 0,75 & 0 & 0,25 \\ 0,2805 & 0,4488 & 0,2707 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,8890 \\ -0,2443 \\ 0,3873 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,9998 \\ 0 \\ 0,0192 \end{bmatrix}$
$G([h_2, h_4, T_1]; [F_1, F_2, x_2])$	0,0049	$\begin{bmatrix} 0 & 0,25 & 0,75 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,75 & 0,25 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0,5453 \\ 0,8382 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0,9998 \\ -0,0192 \end{bmatrix}$
$G([h_2, h_4, T_1]; [F_2, x_1, x_2])$	0,0049	$\begin{bmatrix} 0,25 & 0 & 0,75 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0,75 & 0 & 0,25 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -0,7704 \\ 0,6376 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,9998 \\ 0 \\ -0,0192 \end{bmatrix}$
$G([h_2, h_3, T_2]; [F_1, F_2, x_2])$	0,0892	$\begin{bmatrix} 0,5512 & 0,1122 & 0,3366 \\ 0 & 0,75 & 0,25 \\ 0,4488 & 0,1378 & 0,4134 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,9569 \\ 0 \\ 0,2905 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,9998 \\ -0,0186 \\ -0,0011 \end{bmatrix}$
$G([h_2, h_3, T_2]; [F_2, x_1, x_2])$	0,0892	$\begin{bmatrix} 0,1122 & 0,5512 & 0,3366 \\ 0,75 & 0 & 0,25 \\ 0,1378 & 0,4488 & 0,4134 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,9569 \\ 0 \\ 0,2905 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,3489 \\ 0,9370 \\ 0,0201 \end{bmatrix}$
$G([h_1, T_1, T_2]; [F_1, F_2, x_1])$	0,0066	$\begin{bmatrix} 0,2452 & 0,5080 & 0,2468 \\ 0,1048 & 0,4920 & 0,4032 \\ 0,65 & 0 & 0,35 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,82 \\ 0,5426 \\ 0,1823 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,9996 \\ 0 \\ -0,0269 \end{bmatrix}$
$G([h_1, T_1, T_2]; [F_1, F_2, x_2])$	0,0408	$\begin{bmatrix} 0,4920 & 0,9373 & -0,4293 \\ 0,5080 & -0,1873 & 0,6793 \\ 0 & 0,25 & 0,75 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,8728 \\ 0,4882 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,1232 \\ -0,9922 \\ 0,0188 \end{bmatrix}$
$G([h_1, T_1, T_2]; [F_1, x_1, x_2])$	0,0066	$\begin{bmatrix} -0,0468 & 0,5388 & 0,5080 \\ 0,3968 & 0,1112 & 0,4920 \\ 0,65 & 0,35 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,8324 \\ -0,5508 \\ 0,0617 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,9996 \\ 0,0269 \\ 0 \end{bmatrix}$
$G([h_1, T_1, T_2]; [F_2, x_1, x_2])$	0,0408	$\begin{bmatrix} 0,0815 & 0,4920 & 0,4265 \\ 0,6685 & 0,5080 & -0,1765 \\ 0,25 & 0 & 0,75 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,8728 \\ 0,4882 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,9998 \\ -0,0034 \\ -0,0194 \end{bmatrix}$
$G([h_1, h_4, T_1]; [F_1, F_2, x_1])$	0,0408	$\begin{bmatrix} 0,1722 & 0,5080 & 0,3198 \\ 0,65 & 0 & 0,35 \\ 0,1778 & 0,4920 & 0,3302 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,8728 \\ 0 \\ 0,4882 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,0327 \\ -0,9995 \\ 0,0016 \end{bmatrix}$
$G([h_1, h_4, T_1]; [F_1, x_1, x_2])$	0,0408	$\begin{bmatrix} 0,1722 & 0,3198 & 0,5080 \\ 0,6500 & 0,3500 & 0 \\ 0,1778 & 0,3302 & 0,4920 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,8728 \\ 0 \\ 0,4882 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,4932 \\ 0,0247 \\ 0,8696 \end{bmatrix}$
$G([h_1, h_3, T_2]; [F_1, F_2, x_1])$	0,0066	$\begin{bmatrix} 0,3500 & 0 & 0,65 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0,65 & 0 & 0,35 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0,5918 \\ 0,8061 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,9996 \\ 0 \\ -0,0269 \end{bmatrix}$

$G([h_1, h_3, T_2]; [F_1, x_1, x_2])$	0,0066	$\begin{bmatrix} 0,35 & 0,65 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0,65 & 0,35 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -0,9105 \\ 0,4134 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,9996 \\ -0,0269 \\ 0 \end{bmatrix}$
$G([h_1, h_2, T_2]; [F_1, F_2, x_1])$	0,0892	$\begin{bmatrix} 0,35 & 0 & 0,65 \\ -0,5143 & 0,4488 & 1,0655 \\ 1,1643 & 0,5512 & -0,7155 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0,9569 \\ 0,2905 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,9932 \\ -0,1136 \\ -0,0266 \end{bmatrix}$
$G([h_1, h_2, T_2]; [F_1, F_2, x_2])$	0,0892	$\begin{bmatrix} 0 & 0,75 & 0,25 \\ 0,5512 & 0,0378 & 0,4110 \\ 0,4488 & 0,2122 & 0,3390 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0,9569 \\ 0,2905 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,0582 \\ -0,9981 \\ 0,0191 \end{bmatrix}$
$G([h_1, h_2, T_2]; [F_1, x_1, x_2])$	0,0892	$\begin{bmatrix} 0,35 & 0,65 & 0 \\ 0,6492 & -0,0979 & 0,4488 \\ 0 & 0,4479 & 0,5512 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0,9569 \\ 0,2905 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,9996 \\ 0,0270 \\ 0,0022 \end{bmatrix}$
$G([h_1, h_2, T_2]; [F_2, x_1, x_2])$	0,0892	$\begin{bmatrix} 0,75 & 0 & 0,25 \\ 0,2504 & 0,5512 & 0,1984 \\ 0 & 0,4488 & 0,5516 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0,9569 \\ 0,2905 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,9998 \\ -0,0016 \\ -0,0193 \end{bmatrix}$
$G([h_1, h_2, T_1]; [F_1, F_2, x_1])$	0,0408	$\begin{bmatrix} 0,1128 & 0,5080 & 0,3792 \\ 0,65 & 0 & 0,35 \\ 0,2372 & 0,4920 & 0,2708 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,8728 \\ 0 \\ 0,4882 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,9720 \\ 0,2336 \\ 0,0256 \end{bmatrix}$
$G([h_1, h_2, T_1]; [F_1, F_2, x_2])$	0,0408	$\begin{bmatrix} 0,4920 & -0,3022 & 0,8103 \\ 0 & 0,25 & 0,75 \\ 0,5080 & 1,0522 & -0,5603 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,8728 \\ 0 \\ 0,4882 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,1231 \\ -0,9922 \\ 0,0187 \end{bmatrix}$
$G([h_1, h_2, T_1]; [F_1, x_1, x_2])$	0,0408	$\begin{bmatrix} 0,3505 & 0,1415 & 0,5080 \\ 0,65 & 0,35 & 0 \\ 0 & 0,5085 & 0,4920 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,8728 \\ 0 \\ 0,4882 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,9996 \\ -0,0271 \\ -0,0047 \end{bmatrix}$
$G([h_1, h_2, T_1]; [F_2, x_1, x_2])$	0,0408	$\begin{bmatrix} 0,7489 & 0,4920 & -0,2409 \\ 0,25 & 0 & 0,75 \\ 0,0011 & 0,5080 & 0,4909 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,8728 \\ 0 \\ 0,4882 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,9998 \\ -0,0034 \\ -0,0194 \end{bmatrix}$

Tabela C.3: Zeros de transmissão positivos nos subsistemas 4×4 do Ponto de Operação

1

Sistema	Zero no SPD	RGA				y_z	u_z
$G([h_2, h_3, T_1, T_2], [F_1, F_2, x_1, x_2],)$	0,0892	0,3583	0,1122	0,1929	0,3366	0,9569	0,9992
		0	0,75	0	0,25	0	-0,0286
		0,35	0	0,65	0	0	-0,0269
$G([h_1, h_4, T_1, T_2], [F_1, F_2, x_1, x_2],)$	0,0408	0,2917	0,1378	0,1571	0,4134	0,2905	-0,0017
		0,1722	0,3810	0,3198	0,1270	0,8728	0,0436
		0,65	0	0,35	0	0	-0,9989
$G([h_1, h_2, T_1, T_2], [F_1, F_2, x_1, x_2],)$	0,0408	0,1778	0,3690	0,3302	0,1230	0,4882	0,0022
		0	0,25	0	0,75	0	0,0192
		0,1722	0,3810	0,3198	0,1270	0,8728	-0,0436
$G([h_1, h_2, T_1, T_2], [F_1, F_2, x_1, x_2],)$	0,0408	0,3583	0,1122	0,1929	0,3366	0	0,9989
		0,1778	0,3690	0,3302	0,1230	0,4882	-0,0022
		0,2917	0,1378	0,1571	0,4134	0	-0,0192
$G([h_1, h_2, h_4, T_1], [F_1, F_2, x_1, x_2],)$	0,0408	0,1722	0,3810	0,3198	0,1270	0,8728	-0,0436
		0	0,25	0	0,75	0	0,9989
		0,65	0	0,35	0	0	-0,0022
		0,1778	0,3690	0,3302	0,1230	0,4882	-0,0192

$G([h_1, h_2, h_3, T_2], [F_1, F_2, x_1, x_2],)$	0,0892	$\begin{bmatrix} 0,35 & 0 & 0,65 & 0 \\ 0,3583 & 0,1122 & 0,1929 & 0,3366 \\ 0 & 0,75 & 0 & 0,25 \\ 0,2917 & 0,1378 & 0,1571 & 0,4134 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0,9569 \\ 0 \\ 0,2905 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,9992 \\ 0,0286 \\ 0,0269 \\ 0,0017 \end{bmatrix}$
---	--------	--	--	---

Tabela C.4: Zeros de transmissão positivos nos subsistemas 2×2 do Ponto de Operação

2

Sistema	Zero no SPD	RGA	y_z	u_z
$G([h_1, h_2], [F_1, F_2])$	0,0033	$\begin{bmatrix} -0,2060 & 1,2060 \\ 1,2060 & -0,2060 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,5581 \\ 0,8298 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,555 \\ 0,8318 \end{bmatrix}$
$G([h_1, T_1], [x_1, x_2])$	0,0326	$\begin{bmatrix} 0,5086 & 0,4914 \\ 0,4914 & 0,5086 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,7845 \\ 0,6201 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,0476 \\ -0,9989 \end{bmatrix}$
$G([h_1, T_1], [F_2, x_1])$	0,0326	$\begin{bmatrix} 0,4914 & 0,5086 \\ 0,5086 & 0,4914 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,7845 \\ 0,6201 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ -0,0029 \end{bmatrix}$
$G([h_1, T_1], [F_1, x_2])$	0,0326	$\begin{bmatrix} 0,5086 & 0,4914 \\ 0,4914 & 0,5086 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,7845 \\ 0,6201 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,8402 \\ -0,5422 \end{bmatrix}$
$G([h_1, T_1], [F_1, F_2])$	0,0326	$\begin{bmatrix} 0,5086 & 0,4914 \\ 0,4914 & 0,5086 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,7845 \\ 0,6201 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,0949 \\ -0,9955 \end{bmatrix}$
$G([h_1, T_2], [F_2, x_1])$	0,0011	$\begin{bmatrix} 1,5515 & -0,5515 \\ -0,5515 & 1,5515 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,5370 \\ 0,8436 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,9993 \\ -0,0365 \end{bmatrix}$
$G([h_1, T_2], [F_1, x_2])$	0	$\begin{bmatrix} -18,1857 & 19,1857 \\ 19,1857 & -18,1857 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,6881 \\ 0,7257 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,9995 \\ -0,0318 \end{bmatrix}$
$G([h_1, T_2], [F_1, x_1])$	0,0082	$\begin{bmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,6 & 0,4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,9995 \\ -0,0308 \end{bmatrix}$
$G([h_2, T_1], [F_2, x_2])$	0,0044	$\begin{bmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,8 & 0,2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,9999 \\ 0,0154 \end{bmatrix}$
$G([h_2, T_1], [F_2, x_1])$	0,0012	$\begin{bmatrix} -0,3291 & 1,3291 \\ 1,3291 & -0,3291 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,8152 \\ 0,5792 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,9998 \\ -0,0214 \end{bmatrix}$
$G([h_2, T_1], [F_1, x_2])$	0,0003	$\begin{bmatrix} 2,9433 & -1,9433 \\ -1,9433 & 2,9433 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,5671 \\ 0,8236 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,9992 \\ 0,0412 \end{bmatrix}$
$G([h_2, T_1], [F_1, F_2])$	0,0011 $-0,004i$	$\begin{bmatrix} 0,8583 & 0,1417 \\ 0,1417 & 0,8583 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,1087 - 0,8097i \\ -0,4841 - 0,3133i \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,5167 \\ 0,6331 + 0,5763i \end{bmatrix}$
$G([h_2, T_2], [x_1, x_2])$	0,1979	$\begin{bmatrix} 0,5811 & 0,4189 \\ 0,4189 & 0,5811 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,9771 \\ 0,2126 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,9999 \\ 0,0165 \end{bmatrix}$
$G([h_2, T_2], [F_2, x_1])$	0,1979	$\begin{bmatrix} 0,4189 & 0,5811 \\ 0,5811 & 0,4189 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,9771 \\ 0,2126 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,7304 \\ 0,6830 \end{bmatrix}$
$G([h_2, T_2], [F_1, x_2])$	0,1979	$\begin{bmatrix} 0,5811 & 0,4189 \\ 0,4189 & 0,5811 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,9771 \\ 0,2126 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$
$G([h_2, T_2], [F_1, F_2])$	0,1979	$\begin{bmatrix} 0,5811 & 0,4189 \\ 0,4189 & 0,5811 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,9771 \\ 0,2126 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,9988 \\ 0,0493 \end{bmatrix}$
$G([h_3, T_2], [x_1, x_2])$	0,0082	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,9574 \\ 0,2887 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
$G([h_3, T_2], [F_2, x_1])$	0,0082	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,6383 \\ 0,7698 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$
$G([h_3, T_2], [F_1, x_2])$	0,0082	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,9574 \\ -0,2887 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
$G([h_3, T_2], [F_1, x_1])$	0,0082	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0,0021 & 0,9979 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,7149 \\ 0,6992 \end{bmatrix}$
$G([h_3, T_2], [F_1, F_2])$	0,0082	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,6383 \\ 0,7698 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$G([h_4, T_1], [x_1, x_2])$	0,0044	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,6992 \\ 0,7149 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
$G([h_4, T_1], [F_2, x_2])$	0,0044	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0,0038 & 0,9962 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,8480 \\ 0,53 \end{bmatrix}$
$G([h_4, T_1], [F_2, x_1])$	0,0044	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,6992 \\ 0,7149 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
$G([h_4, T_1], [F_1, x_2])$	0,0044	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,5462 \\ 0,8376 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$
$G([h_4, T_1], [F_1, F_2])$	0,0044	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,5462 \\ 0,8376 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$
$G(T_1, T_2 [F_2, x_2])$	0,0044	$\begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,2 & 0,8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,999 \\ -0,0154 \end{bmatrix}$
$G([T_1, T_2], [F_2, x_1])$	0,0003 $-0,0027i$	$\begin{bmatrix} 0,7443 & 0,2557 \\ 0,2557 & 0,7443 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,6508 + 0,3314i \\ -0,1895 - 0,6563i \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,9995 \\ -0,0116 + 0,0279i \end{bmatrix}$
$G([T_1, T_2], [F_1, x_1])$	0,0082	$\begin{bmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,6 & 0,4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,9995 \\ -0,0308 \end{bmatrix}$
$G([T_1, T_2], [F_1, F_2])$	0,0011	$\begin{bmatrix} -0,2970 & 1,2970 \\ 1,2970 & -0,2970 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,7668 \\ 0,6418 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,6157 \\ 0,7880 \end{bmatrix}$

Tabela C.5: Zeros de transmissão positivos nos subsistemas 3×3 do Ponto de Operação
2

Sistema	Zero no SPD	RGA	y_z	u_z
$G([h_4, T_1, T_2], [F_1, F_2, x_2])$	0,0044	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,2 \\ 0 & 0,2 & 0,8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,5462 \\ -0,8376 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -0,9999 \\ 0,0154 \end{bmatrix}$
$G([h_4, T_1, T_2], [F_2, x_1, x_2])$	0,0044	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0,8 & 0 & 0,2 \\ 0,2 & 0 & 0,8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,6992 \\ -0,7149 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,9999 \\ 0 \\ 0,0154 \end{bmatrix}$
$G([h_3, T_1, T_2], [F_1, F_2, x_1])$	0,0082	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0,4 & 0 & 0,6 \\ 0,6 & 0 & 0,4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,6383 \\ 0 \\ 0,7698 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,9995 \\ 0 \\ 0,0308 \end{bmatrix}$
$G([h_3, T_1, T_2], [F_1, x_1, x_2])$	0,0082	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0,6 & 0,4 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,9574 \\ 0 \\ 0,2887 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,9995 \\ 0,0308 \\ 0 \end{bmatrix}$
$G([h_2, T_1, T_2], [F_1, F_2, x_1])$	0,1979	$\begin{bmatrix} 1,3638 & 0,4189 & -0,7826 \\ 0,4 & 0 & 0,6 \\ -0,7638 & 0,5811 & 1,1826 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,9771 \\ 0 \\ 0,2126 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,9962 \\ 0,0819 \\ 0,0306 \end{bmatrix}$
$G([h_2, T_1, T_2], [F_1, F_2, x_2])$	0,0044	$\begin{bmatrix} 0,5811 & 0,1605 & 0,2584 \\ 0 & 0,8 & 0,2 \\ 0,4189 & 0,0395 & 0,5416 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,7847 \\ 0,5517 \\ 0,2827 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0,9999 \\ -0,0154 \end{bmatrix}$
$G([h_2, T_1, T_2], [F_1, x_1, x_2])$	0,1979	$\begin{bmatrix} 0,0949 & 0,4862 & 0,4189 \\ 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0,5051 & -0,0862 & 0,5811 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,9771 \\ 0 \\ 0,2126 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,9995 \\ -0,0308 \\ -0,0013 \end{bmatrix}$
$G([h_2, T_1, T_2], [F_2, x_1, x_2])$	0,0044	$\begin{bmatrix} -0,0313 & 0,5811 & 0,4502 \\ 0,8 & 0 & 0,2 \\ 0,2313 & 0,4189 & 0,3498 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,8608 \\ -0,4035 \\ 0,3101 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,9999 \\ 0 \\ -0,0154 \end{bmatrix}$

$G([h_2, h_4, T_2], [F_1, x_1, x_2])$	0	$\begin{bmatrix} 0 & 0,4468 & 0,4048 \\ 0 & 0,2289 & 0 \\ 0 & 0,3221 & 0,5952 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,3898 - 0,3092i \\ 0,7982 + 0,1640i \\ -0,2725 - 0,1191i \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,9989 \\ -0,0461 \\ 0 - 1,0408i \end{bmatrix}$
$G([h_2, h_4, T_1], [F_1, F_2, x_2])$	0,0044	$\begin{bmatrix} 0 & 0,2 & 0,8 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0,5462 \\ 0,8376 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -0,9999 \\ 0,0154 \end{bmatrix}$
$G([h_2, h_4, T_1], [F_2, x_1, x_2])$	0,0044	$\begin{bmatrix} 0,2 & 0 & 0,8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0,8 & 0 & 0,2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -0,6992 \\ 0,7149 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,9999 \\ 0 \\ 0,0154 \end{bmatrix}$
$G([h_2, h_3, T_2], [F_1, F_1, x_2])$	0,1979	$\begin{bmatrix} 0,5811 & 0,0838 & 0,3351 \\ 0 & 0,8 & 0,2 \\ 0,4189 & 0,1162 & 0,4649 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,9771 \\ 0 \\ 0,2126 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ -0,0099 \\ 0 \end{bmatrix}$
$G([h_2, h_3, T_2], [F_2, x_1, x_2])$	0,1979	$\begin{bmatrix} 0,0838 & 0,5811 & 0,3351 \\ 0,8 & 0 & 0,2 \\ 0,1162 & 0,4189 & 0,4649 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,9771 \\ 0 \\ 0,2126 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,2091 \\ 0,9778 \\ 0,0129 \end{bmatrix}$
$G([h_1, T_1, T_2], [F_1, F_2, x_1])$	0,0082	$\begin{bmatrix} 0,2733 & 0,4914 & 0,2353 \\ 0,1267 & 0,5086 & 0,3647 \\ 0,6 & 0 & 0,4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,7494 \\ 0,6546 \\ 0,0993 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,9995 \\ 0 \\ 0,0308 \end{bmatrix}$
$G([h_1, T_1, T_2], [F_1, F_2, x_2])$	0,0326	$\begin{bmatrix} 0,5086 & 0,8224 & -0,3309 \\ 0,4914 & -0,0224 & 0,5309 \\ 0 & 0,2 & 0,8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,7845 \\ 0,6201 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,1179 \\ -0,9929 \\ 0,0150 \end{bmatrix}$
$G([h_1, T_1, T_2], [F_1, x_1, x_2])$	0,0082	$\begin{bmatrix} -0,0761 & 0,5846 & 0,4914 \\ 0,4761 & 0,0154 & 0,5086 \\ 0,6 & 0,4 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,7529 \\ -0,6576 \\ 0,0250 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,9995 \\ -0,0308 \\ 0 \end{bmatrix}$
$G([h_1, T_1, T_2], [F_2, x_1, x_2])$	0,0326	$\begin{bmatrix} 0,1070 & 0,5086 & 0,3844 \\ 0,6930 & 0,4914 & -0,1844 \\ 0,2 & 0 & 0,8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,7845 \\ 0,6201 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,9999 \\ -0,0037 \\ -0,0156 \end{bmatrix}$
$G([h_1, T_1, T_2], [F_1, F_2, x_1])$	0,0326	$\begin{bmatrix} 0,2034 & 0,4914 & 0,3051 \\ 0,6 & 0 & 0,4 \\ 0,1966 & 0,5086 & 0,2949 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,7845 \\ 0 \\ 0,6201 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,0381 \\ -0,9993 \\ 0,0018 \end{bmatrix}$
$G([h_1, T_1, T_2], [F_1, x_1, x_2])$	0,0326	$\begin{bmatrix} 0,2034 & 0,3051 & 0,4914 \\ 0,6 & 0,4 & 0 \\ 0,1966 & 0,2949 & 0,5086 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,7845 \\ 0 \\ 0,6201 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,5267 \\ 0,0243 \\ 0,8497 \end{bmatrix}$
$G([h_1, h_3, T_2], [F_1, F_2, x_1])$	0,0082	$\begin{bmatrix} 0,4 & 0 & 0,6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0,6 & 0 & 0,4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0,6383 \\ 0,7698 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,9995 \\ 0 \\ -0,0308 \end{bmatrix}$
$G([h_1, h_3, T_2], [F_1, x_1, x_2])$	0,0082	$\begin{bmatrix} 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0,6 & 0,4 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -0,9574 \\ 0,2887 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,9995 \\ -0,0308 \\ 0 \end{bmatrix}$
$G([h_1, h_2, T_1], [F_1, F_2, x_2])$	$0,0016 - 0,0044i$	$\begin{bmatrix} 0,5820 & 0,0013 & 0,3418 \\ 0 & 0,0011 & 0,3007 \\ 0,4180 & 0,0013 & 0,3537 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,0637 - 0,7142i \\ 0,2857 - 0,0702i \\ -0,1805 - 0,6056i \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -0,9794 + 0,0 \\ -0,0603 + 0,0 \end{bmatrix}$
$G([h_1, h_2, T_1], [F_1, x_1, x_2])$	0,0031	$\begin{bmatrix} 0 & 0,5814 & 0,3431 \\ 0 & 0 & 0,3018 \\ 0 & 0,4176 & 0,3551 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,6695 \\ -0,3065 \\ 0,6766 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,9995 \\ 0,0308 \\ 0 \end{bmatrix}$
$G([h_1, h_2, T_1], [F_2, x_1, x_2])$	$0,0007 - 0,0015i$	$\begin{bmatrix} 0,0013 & 0,5820 & 0,3418 \\ 0,0011 & 0 & 0,3007 \\ 0,0013 & 0,4180 & 0,3537 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,1839 - 0,4823i \\ 0,6072 + 0,1316i \\ -0,3460 - 0,4773i \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,9981 \\ 0 \\ -0,0614 \end{bmatrix}$
$G([h_1, h_2, T_2], [F_1, F_2, x_1])$	0,1979	$\begin{bmatrix} 0,4 & 0 & 0,6 \\ -0,6323 & 0,4189 & 1,2134 \\ 1,2323 & 0,5811 & -0,8134 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0,9771 \\ 0,2126 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,9962 \\ -0,0819 \\ -0,0306 \end{bmatrix}$

$G([h_1, h_2, T_2], [F_1, F_2, x_2])$	0,1979	$\begin{bmatrix} 0 & 0,8 & 0,2 \\ 0,5811 & 0,0044 & 0,4145 \\ 0,4189 & 0,1956 & 0,3855 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0,9771 \\ 0,2126 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,0204 \\ -0,9997 \\ 0,0154 \end{bmatrix}$
$G([h_1, h_2, T_2], [F_1, x_1, x_2])$	0,1979	$\begin{bmatrix} 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0,5939 & -0,0128 & 0,4189 \\ 0,0061 & 0,4128 & 0,5811 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0,9771 \\ 0,2126 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,9995 \\ -0,0308 \\ -0,0013 \end{bmatrix}$
$G([h_1, h_2, T_2], [F_2, x_1, x_2])$	0,1979	$\begin{bmatrix} 0,8 & 0 & 0,2 \\ 0,2029 & 0,5811 & 0,2160 \\ -0,0029 & 0,4189 & 0,5840 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0,9771 \\ 0,2126 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,9999 \\ 0 \\ 0,0154 \end{bmatrix}$
$G([h_1, h_2, T_1], [F_1, F_2, x_1])$	0,0326	$\begin{bmatrix} 0,1531 & 0,4914 & 0,3555 \\ 0,6 & 0 & 0,4 \\ 0,2469 & 0,5086 & 0,2445 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,7845 \\ 0 \\ 0,6201 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,9108 \\ 0,4120 \\ 0,0268 \end{bmatrix}$
$G([h_1, h_2, T_1], [F_1, F_2, x_2])$	0,0326	$\begin{bmatrix} 0,5086 & -0,2023 & 0,6938 \\ 0 & 0,2 & 0,8 \\ 0,4914 & 1,0023 & -0,4938 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,7845 \\ 0 \\ 0,6201 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,1176 \\ -0,930 \\ 0,0148 \end{bmatrix}$
$G([h_1, h_2, T_1], [F_1, x_1, x_2])$	0,0326	$\begin{bmatrix} 0,4049 & 0,1037 & 0,4914 \\ 0,6 & 0,4 & 0 \\ -0,0049 & 0,4963 & 0,5086 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,7845 \\ 0 \\ 0,6201 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,9995 \\ 0,0311 \\ 0,0071 \end{bmatrix}$
$G([h_1, h_2, T_1], [F_2, x_1, x_2])$	0,0326	$\begin{bmatrix} 0,7901 & 0,5086 & -0,2987 \\ 0,2 & 0 & 0,8 \\ 0,0099 & 0,4914 & 0,4987 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,7845 \\ 0 \\ 0,6201 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,9999 \\ -0,0037 \\ -0,0157 \end{bmatrix}$

Tabela C.6: Zeros de transmissão positivos nos subsistemas 4×4 do Ponto de Operação 2

Sistema	Zero no SPD	RGA	y_z	u_z
$G([h_2, h_3, T_1, T_2], [F_1, F_2, x_1, x_2],)$	0,1979	$\begin{bmatrix} 0,3487 & 0,0838 & 0,2324 & 0,3351 \\ 0 & 0,8 & 0 & 0,2 \\ 0,4 & 0 & 0,6 & 0 \\ 0,2613 & 0,1162 & 0,1676 & 0,4649 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,9771 \\ 0 \\ 0 \\ 0,2126 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,9994 \\ -0,0164 \\ -0,0308 \\ -0,0010 \end{bmatrix}$
$G([h_2, h_3, h_4, T_2], [F_1, F_2, x_1, x_2],)$	0,0006 $-0,0034i$	$\begin{bmatrix} 0 & 0,0810 & 0,4468 & 0,3238 \\ 0 & 0,8 & 0 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,2289 & 0 \\ 0 & 0,1190 & 0,3211 & 0,4762 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,0463 + 0,7309i \\ 0 \\ -0,5770 - 0,2326i \\ 0,1152 + 0,2518i \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,9989 \\ 0 \\ 0,0461 \\ 0 \end{bmatrix}$
$G([h_1, h_4, T_1, T_2], [F_1, F_2, x_1, x_2],)$	0,0326	$\begin{bmatrix} 0,2034 & 0,3932 & 0,3051 & 0,0983 \\ 0,6 & 0 & 0,4 & 0 \\ 0,1966 & 0,4068 & 0,2949 & 0,1017 \\ 0 & 0,2 & 0 & 0,8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,7845 \\ 0 \\ -0,6201 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,0476 \\ 0,9987 \\ -0,0022 \\ -0,0154 \end{bmatrix}$
$G([h_1, h_3, h_4, T_1], [F_1, F_2, x_1, x_2],)$	0,0028	$\begin{bmatrix} 0,2328 & 0,0013 & 0,3492 & 0,3418 \\ 0 & 0,0011 & 0 & 0,3007 \\ 0,6 & 0 & 0,4 & 0 \\ 0,1672 & 0,0013 & 0,2508 & 0,3537 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,6549 \\ -0,3396 \\ 0 \\ 0,6752 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0,9981 \\ 0 \\ 0,0614 \end{bmatrix}$
$G([h_1, h_2, T_1, T_2], [F_1, F_2, x_1, x_2],)$	0,0326	$\begin{bmatrix} 0,2034 & 0,3932 & 0,3051 & 0,0983 \\ 0,34870 & 0,0838 & 0,2324 & 0,3351 \\ 0,1966 & 0,4068 & 0,2949 & 0,1017 \\ 0,2513 & 0,1165 & 0,1676 & 0,4649 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,7845 \\ 0 \\ 0,6201 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,0476 \\ -0,9987 \\ 0,0022 \\ 0,0154 \end{bmatrix}$
$G([h_1, h_2, h_4, T_1], [F_1, F_2, x_1, x_2],)$	0,0326	$\begin{bmatrix} 0,2034 & 0,3932 & 0,3051 & 0,0983 \\ 0 & 0,2 & 0 & 0,8 \\ 0,6 & 0 & 0,4 & 0 \\ 0,1966 & 0,4068 & 0,2949 & 0,1017 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,7845 \\ 0 \\ 0 \\ 0,6201 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,0476 \\ 0,9987 \\ -0,0022 \\ -0,0154 \end{bmatrix}$
$G([h_1, h_2, h_3, T_2], [F_1, F_2, x_1, x_2],)$	0,1979	$\begin{bmatrix} 0,3487 & 0,0838 & 0,2324 & 0,3351 \\ 0 & 0,8 & 0 & 0,2 \\ 0,2513 & 0,1162 & 0,1676 & 0,4649 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,9771 \\ 0 \\ 0 \\ 0,2126 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,9994 \\ -0,0164 \\ -0,0308 \\ -0,0010 \end{bmatrix}$

