

Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Escola de Engenharia  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

**Análise numérica de vigas mistas aço-concreto pelo método dos  
elementos finitos: modelos para os efeitos de longa duração e  
protensão interna**

**Julián Camilo Ávila Moreno**

Porto Alegre - RS - Brasil  
2016

JULIÁN CAMILO ÁVILA MORENO

**ANÁLISE NUMÉRICA DE VIGAS MISTAS AÇO-CONCRETO  
PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS: MODELOS  
PARA OS EFEITOS DE LONGA DURAÇÃO E PROTENSÃO  
INTERNA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia. Orientação: Prof. Dr. Inácio Benvegnu Morsch.

Porto Alegre - RS - Brasil  
2016

### CIP - Catalogação na Publicação

Avila Moreno, Julián Camilo

Análise numérica de vigas mistas aço-concreto pelo método dos elementos finitos: modelos para os efeitos de longa duração e protensão interna / Julián Camilo Avila Moreno. -- 2016.

181 f.

Orientador: Inácio Benvegnu Morsch.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Escola de Engenharia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Porto Alegre, BR-RS, 2016.

1. Vigas mistas aço-concreto. 2. Elementos finitos. 3. Análise de longa duração. 4. Fluência e retração. 5. Protensão Interna. I. Benvegnu Morsch, Inácio, orient. II. Título.

**JULIÁN CAMILO ÁVILA MORENO**

**ANÁLISE NUMÉRICA DE VIGAS MISTAS AÇO-CONCRETO  
PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS: MODELOS  
PARA OS EFEITOS DE LONGA DURAÇÃO E PROTENSÃO  
INTERNA**

Esta dissertação de mestrado foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA, na Área de concentração de Estruturas, e aprovada em sua forma final pelo professor orientador e pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, 27 de abril de 2016

**Prof. Inácio Benvegno Morsch**  
Dr. pelo PPGEC/UFRGS  
Orientador

**Prof. Carlos Torres Formoso**  
Ph.D. pela University of Salford  
Coordenador do PPGEC/UFRGS

**BANCA EXAMINADORA**

**Prof. Américo Campos Filho (UFRGS)**  
Dr. pela EP/USP

**Prof. Herbert Martins Gomes (UFRGS)**  
Dr. pelo PPGEC/UFRGS

**Prof. Felipe Schaedler de Almeida (UFRGS)**  
Dr. pelo PPGEC/UFRGS

**Prof. Jorge Luis Palomino Tamayo (UFRGS)**  
Dr. pelo PPGEC/UFRGS

*Dedico esta, bem como todas as minhas demais conquistas, aos meus pais. Por acreditar em mim e me impulsar a cumprir meus sonhos.*

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente a meus pais Hugo e Mireya, e a minha irmã Natalia; pelo apoio, incentivo, suporte e confiança que transcenderam a distância que nos separava.

Ao Prof. Inácio Benvegnu Morsch pela sua orientação e conselho, que contribuíram à minha formação tanto acadêmica como pessoal. Ao Prof. Armando Miguel Awruch, que me direcionou para esta área da engenharia. Ao Dr. Jorge Palomino pela sua imprescindível colaboração durante a realização deste trabalho.

A Patrícia, por ser a força que sempre me impulsou a seguir em frente.

Aos meus colegas de apartamento: Alejandro e Álvaro, pelos momentos compartilhados e as experiências vividas ao longo destes dois anos.

À Organização dos Estados Americanos - OEA, e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Ensino Superior - CAPES, pela bolsa de estudos que possibilitou o desenvolvimento dessa pesquisa.

Por último, mas não menos importante a Deus por conceder-me a capacidade e as forças para concretizar este sonho.

*“Nossa maior fraqueza é a desistência. O caminho mais certo para o sucesso é sempre tentar apenas uma vez mais”*  
*Thomas Alva Edison*

## RESUMO

MORENO, A. J. C. Análise numérica de vigas mistas aço-concreto pelo método dos elementos finitos: modelos para os efeitos de longa duração e protensão interna. 2016. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

As vigas mistas configuram uma atrativa solução estrutural para pequenas e grandes obras na engenharia civil. O emprego deste tipo de estruturas proporciona: melhor aproveitamento das características de cada material, maior rapidez na construção e economia. Esta pesquisa da continuidade aos trabalhos de Tamayo (2011) e Dias (2013); apresenta-se um modelo numérico que emprega o método dos elementos finitos para avaliar o comportamento de estruturas do tipo viga mista, com foco na consideração dos efeitos de longa duração do concreto: fluência e retração; e à inclusão da protensão interna do tipo aderente, aplicada sob a laje de concreto. Implementaram-se seis modelos para predição dos fenômenos de longa duração: ACI 209R-92, Bazant-Baweja B3, CEB MC90, CEB MC99, CEB MC10 e GL2000, e disponibilizou-se uma ferramenta estatística que permite sua correta comparação. O cabo de protensão é modelado de maneira discreta dentro do elemento de concreto e posteriormente são definidas as contribuições que o mesmo faz ao elemento de casca do concreto no qual está inserido. O Software GiD foi empregado nas etapas de pré e pós processamento, customizando sua interface para a atribuição das propriedades do problema. A validação da simulação numérica foi efetuada a partir da modelagem de 14 vigas no total, os espécimes correspondem a vigas tanto simplesmente apoiadas como contínuas. O programa desenvolvido é capaz de modelar adequadamente estruturas do tipo viga mista, com protensão aderente instalada na laje de concreto; considerando uma análise ao longo do tempo e levando em conta os efeitos da fluência e da retração que afetam o concreto.

**Palavras-chave:** *vigas mistas aço-concreto; elementos finitos; análise de longa duração; fluência; retração; protensão.*

## ABSTRACT

MORENO, A. J. C. Numerical analysis of composite steel-concrete beams by the finite element method: models for the long-term effects and internal prestressing. 2016. These (Master of Civil Engineering) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

The composite beams constitute an attractive structural solution for small and large projects in civil engineering. The use of such structures provides better use of the characteristics of each material, faster construction and economy. This research continues the work of Tamayo (2011) and Dias (2013); it presents a numerical model employing the finite element method to evaluate composite beam structures, focusing on the long-term effects of concrete: creep and shrinkage; and the inclusion of internal adherent prestressing, applied under the concrete slab. Six models were implemented for the prediction of long-term effects: ACI 209R-92, Bazant-Baweja B3, CEB MC90, CEB MC99, CEB MC10 and GL2000, and provided a statistical tool that allows the correct comparison between them. The prestressed cable is modeled discretely within the concrete element and are further defined the contributions that it makes to the concrete shell element in which it is inserted. The GiD Software was used in the stages of pre and post processing, and its interface was customized for assigning the problem properties. The validation of numerical simulation was performed by full modeling 14 beams; the specimens correspond to both simply supported as continuous beams. The developed program is able to adequately model prestressed composite beam structures; considering the long-term effects of creep and shrinkage, that affects the concrete.

**Keywords:** *composite steel-concrete beams; finite elements; long-term analysis; creep; shrinkage; prestressing.*

## SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	8
1.1. JUSTIFICATIVA .....	9
1.2. OBJETIVOS .....	11
1.3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....	11
1.3.1. Fluência e retração.....	13
1.3.2. Vigas contínuas .....	15
1.3.3. Vigas mistas protendidas .....	16
1.3.4. Vigas mistas no Brasil .....	17
1.4. DESCRIÇÃO DO CONTEÚDO .....	19
2. EFEITOS DIFERIDOS NO TEMPO .....	20
2.1. FLUÊNCIA.....	21
2.2. RETRAÇÃO.....	22
2.3. CAUSAS.....	23
2.4. FATORES QUE AFETAM O COMPORTAMENTO NO TEMPO .....	24
2.4.1. Umidade relativa do ambiente e temperatura .....	25
2.4.2. Geometria do elemento.....	26
2.4.3. Materiais e dosagem .....	26
2.4.4. Tensão aplicada e resistência.....	27
2.4.5. Propriedades do cimento .....	28
2.4.6. Aditivos .....	28
2.4.7. Idade de carregamento.....	28
2.4.8. Procedimento e tempo de cura.....	28
2.4.9. Tipo das tensões aplicadas.....	29
2.5. EFEITOS NO COMPORTAMENTO ESTRUTURAL .....	30
2.6. MODELOS PARA A PREDIÇÃO DA FLUÊNCIA E DA RETRAÇÃO .....	31
2.6.1. Modelo ACI 209R-92.....	31
2.6.2. Modelo Bazant-Baweja B3.....	35
2.6.3. Modelo CEB MC90.....	38
2.6.4. Modelo CEB MC90-99 .....	41
2.6.5. Modelo CEB MC10.....	45
2.6.6. Modelo GL2000 .....	47
2.7. LIMITAÇÕES E DIFERENÇAS ENTRE OS MODELOS.....	48
2.8. COMPARAÇÃO ESTATÍSTICA DOS MODELOS.....	50
2.8.1. Desvio Padrão em pontos experimentais.....	51
2.8.2. Desvio Padrão em pontos igualmente espaçados no tempo .....	52
2.8.3. Coeficiente de variação $\omega_{BP}$ .....	53
2.8.4. Indicadores estatísticos do CEB: $V_{CEB}$ , $F_{CEB}$ e $M_{CEB}$ .....	53
2.8.5. Coeficiente de variação $\omega_G$ .....	55

3. PROPRIEDADES DOS MATERIAIS.....	56
3.1. CONCRETO.....	56
3.1.1. Comportamento à compressão .....	56
3.1.2. Comportamento à tração.....	58
3.1.3. Teoria da solidificação para fluência do concreto .....	60
3.2. AÇO DA ARMADURA .....	62
3.3. AÇO PROTENDIDO .....	63
3.4. AÇO ESTRUTURAL.....	64
3.5. CONECTORES .....	65
4. ASPECTOS DA ANÁLISE NUMÉRICA .....	66
4.1. DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL.....	67
4.2. PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS .....	67
4.3. ELEMENTO FINITO PARA A LAJE DE CONCRETO .....	69
4.4. FORMULAÇÃO PARA O CABO DE PROTENDIDO .....	71
4.4.1. Mapeamento Inverso .....	71
4.4.2. Geometria .....	73
4.4.3. Forças Nodais Equivalentes.....	74
4.4.4. Matriz de Rigidez .....	75
4.4.5. Análise não linear geométrica .....	76
4.5. ELEMENTO FINITO PARA A VIGA DE AÇO .....	80
4.6. ELEMENTO FINITO PARA OS CONECTORES .....	81
4.7. SOLUÇÃO INCREMENTAL ITERATIVA.....	82
5. ETAPAS COMPLEMENTARES À ANÁLISE NUMÉRICA.....	83
5.1. PRÉ-PROCESSAMENTO .....	83
5.1.1. Geração de cada malha de maneira independente .....	84
5.1.2. União das malhas.....	90
5.1.3. Atribuição do <i>Problem Type</i> .....	91
5.1.4. Aplicação das condições da estrutura.....	92
5.1.5. Parâmetros do comportamento no tempo .....	97
5.2. PÓS-PROCESSAMENTO .....	101
6. APLICAÇÕES NUMÉRICAS .....	105
6.1. VIGAS MISTAS SIMPLESMENTE APOIADAS .....	105
6.2. VIGAS MISTAS CONTÍNUAS .....	120
6.3. VIGAS MISTAS SUBMETIDAS A FLEXÃO POSITIVA E NEGATIVA.....	129
6.4. VIGAS PROTENDIDAS .....	158
7. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES .....	168
7.1. PRINCIPAIS CONTRIBUIÇÕES.....	168
7.2. SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS .....	171

## 1. INTRODUÇÃO

A utilização de vigas mistas de aço e concreto tem se mostrado como uma atrativa solução estrutural para pequenas e grandes obras de engenharia civil. Uma viga mista é um elemento estrutural constituído pela associação de um perfil de aço e uma laje de concreto armado ou protendido, unidos mediante elementos metálicos denominados conectores de cisalhamento. O emprego deste tipo de estrutura sob cargas gravitacionais proporciona um melhor aproveitamento das características de cada material, considerando a capacidade do aço de resistir esforços de tração e o bom comportamento do concreto para absorver esforços de compressão. Além disso, essa solução estrutural proporciona o aumento em resistência e rigidez, maior rapidez na construção e possibilidade de vencer grandes vãos.

As primeiras análises do comportamento dessas estruturas foram realizadas experimental e analiticamente nos anos 1920, através de algumas simplificações com relação ao material compósito. O avanço computacional dos anos 1960 possibilitou o uso de métodos numéricos, que foram substituindo, ou pelo menos reduzindo, o uso dessas análises iniciais. Entre os métodos numéricos atuais, o método dos elementos finitos é o mais difundido no âmbito da mecânica dos sólidos, e é o método empregado nesse trabalho.

Quando um elemento de concreto está submetido a um estado de tensões produto da imposição de uma deformação ou de uma carga, a sua resposta é composta por duas parcelas: uma instantânea e outra diferida no tempo. A parcela da deformação diferida no tempo pode alcançar ordens de grandeza tão altas quanto as correspondentes à deformação instantânea. Essas deformações ao longo do tempo no concreto são fundamentalmente causadas pelos fenômenos da fluência e da retração. A fluência é o incremento da deformação no tempo sob um estado de tensões constantes e ocorre usualmente na mesma direção de aplicação da carga, já a retração é a redução de volume devido principalmente as condições ambientais e as propriedades dos componentes do concreto. Esses fenômenos são influenciados principalmente pelos fatores: tempo de cura do concreto, quantidade de água na pasta de cimento, duração dos carregamentos, idade do concreto na aplicação das cargas, o tipo de cimento, forma e tamanho da peça, umidade relativa do ar e temperatura.

O funcionamento das vigas mistas pode ser melhorado com o emprego da protensão externa e/ou protensão interna. A protensão externa é um recurso útil para a geração de uma

contraflecha no perfil de aço e pode ser considerada desde a etapa de projeto. No entanto trata-se de um importante recurso para a recuperação e reforço de estruturas existentes. Por outro lado a principal aplicação da protensão interna em vigas mistas se dá em vigas mistas contínuas, mais especificamente na região de inversão do diagrama de momentos. Nesse caso a principal função da protensão interna é evitar a fissuração do concreto aumentando a capacidade de resistência da viga mista.

## 1.1. JUSTIFICATIVA

O uso de vigas mistas tem aumentado significativamente nos últimos anos. A capacidade para vencer grandes vãos, a pequena relação altura/comprimento da viga, a diminuição das deflexões, o aumento da rigidez e a redução de custos são apenas algumas das razões pelas quais esta solução é favorável para a construção de pontes, estruturas de grandes vãos e arranha-céus modernos. No entanto, trata-se de um sistema complexo de modelar devido as suas características, tais como a flexibilidade na interface viga-laje, o comportamento dos conectores de cisalhamento, e o comportamento do concreto ao longo do tempo, fazendo com que ainda hoje existam incertezas no que se refere à predição do comportamento destas estruturas.

O método dos elementos finitos tem se mostrado uma ferramenta computacional confiável na análise de problemas de mecânica das estruturas. Efetivamente tem sido empregados diversos tipos de modelos para estudar o comportamento de vigas mistas, os quais permitem considerar a deformabilidade da conexão, a não linearidade dos materiais, a ação do pré-esforço e os fenômenos reológicos de fluência e retração do concreto. Encontra-se uma ampla literatura internacional sobre o tema, mas no Brasil existem poucos trabalhos que utilizem uma ferramenta computacional própria para fazer uma modelagem tridimensional de vigas mistas, sendo normalmente usados programas comerciais.

Um dos aspectos específicos, entre os que se tem maior imprecisão, é na resposta da estrutura ao longo do tempo, considerando os fenômenos de fluência, retração e fissuração do concreto. As deformações derivadas destes fenômenos podem atingir a mesma ordem de grandeza que aquelas oriundas do carregamento de serviço da estrutura. Segundo Chong et al. (2008) os códigos de projeto, em sua maioria, simplificam os procedimentos para determinação da resposta mecânica de estruturas de concreto armado submetidas a carregamentos de serviço e focam no comportamento instantâneo. Subestimar os fenômenos

diferidos no tempo não necessariamente causa o colapso da estrutura, mas implica em grandes investimentos posteriores na manutenção para mitigar os efeitos indesejados (Roble, 2014). A quantificação imprecisa dos efeitos não lineares da retração, a fluência e a fissuração podem levar a deformações excessivas, estados de fissuração inconvenientes e erros nos cálculos das reações de apoio. Em geral, a fluência e retração do concreto afetam a durabilidade, as condições em serviço, a integridade estrutural, a estética e a estabilidade da estrutura (Goel et al., 2007).

A incerteza na predição do fenômeno justifica-se em parte na ampla variabilidade dos resultados obtidos experimentalmente, o que faz com que os códigos e normativas tenham uma baixa precisão para seus próprios cálculos. O código australiano (AS 3600, 2001), por exemplo, sugere para o cálculo da deformação por retração, que o intervalo de precisão da resposta é de  $\pm 30\%$ . A variabilidade encontrada nos resultados experimentais e em estruturas reais, têm causado a aparição de diferentes modelos que buscam simular os efeitos da fluência e da retração no concreto. Entre os comumente utilizados tem-se: o ACI 209R-92 (ACI Committee 209, 2008), o Bazant-Baweja B3 (Bazant e Baweja, 1995; 2000), o CEB ModelCode 1990 (Müller e Hilsdorf, 1990), o CEB ModelCode 1990-99 (CEB, 1991; 1993; 1999), o CEB ModelCode 2010 (CEB, 2013) e o GL2000 (Gardner e Lockman, 2001).

Também em vigas mistas contínuas se costuma verificar diferenças significativas entre os cálculos e o comportamento real da estrutura. Na região dos apoios internos tem-se um momento fletor negativo, que gera um comportamento estrutural pouco eficaz, pois apresentam-se esforços de tração na laje de concreto e de compressão na viga de aço (Dekker et al., 1995). Logo surgem fissuras na laje de concreto, gerando um incremento na deflexão, uma redução no efeito da continuidade, e uma introdução de alta não linearidade no comportamento até para pequenos níveis de esforços (Cosenza e Pecce, 1991). Adicionalmente, a compressão induzida na viga de aço pode levar à aparição de instabilidades: locais, como a flambagem da mesa inferior ou da alma; ou globais, como a flambagem lateral com torção (Dekker et al., 1995). Além disso, essas questões também são influenciadas pelos fenômenos reológicos que afetam o concreto ao longo do tempo. Essas questões não conseguem ser contempladas pelos procedimentos de cálculo simplificados adotados comumente pelos códigos de projeto. Em contrapartida, pode-se aplicar uma protensão interna na laje de concreto de modo a introduzir esforços prévios que diminuam drasticamente, ou até anulem as tensões de tração provocadas no concreto pela ação das cargas de serviço ao longo da vida útil da estrutura.

## 1.2. OBJETIVOS

O objetivo deste trabalho consiste em modelar numericamente, mediante o uso do método dos elementos finitos, estruturas do tipo vigas mistas, considerando os efeitos de longa duração, a partir dos principais modelos disponíveis na literatura para a predição dos parâmetros relacionados aos fenômenos de fluência e retração. Também tem-se como objetivo introduzir o efeito da protensão interna do tipo aderente na laje de concreto. Esta pesquisa dá continuidade aos trabalhos realizados por Tamayo (2011) e Dias (2013), os quais desenvolveram um código computacional que simula o comportamento de vigas mistas considerando os efeitos de curta e longa duração, mas limitando o tratamento da fluência e o cálculo das deformações devidas à retração ao uso do modelo CEB-FIP 1990.

Também nesse trabalho busca-se alcançar alguns objetivos específicos que consistem em:

- a) comparar o comportamento dos modelos de fluência e retração, considerando uma apropriada ferramenta estatística;
- b) avaliar o desempenho do modelo numérico para o caso de estruturas submetidas a momento negativo;
- c) empregar o software *GiD* como ferramenta de pré e pós processamento, customizando a interface do mesmo para auxiliar ao usuário na geração da malha, na introdução das condições, no fornecimento dos parâmetros característicos do problema, e na visualização dos resultados;
- d) estabelecer diretrizes para a utilização do modelo numérico proposto, tornando-o totalmente apropriado para o uso no desenvolvimento de futuras pesquisas.

## 1.3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

As vigas mistas surgiram como consequência do uso de lajes de concreto sobre vigas de aço. No início a viga era simplesmente projetada para suportar o peso da laje apoiada sobre a mesma. Depois passou-se a considerar a contribuição da laje no sistema estrutural, caracterizando-o como um sistema misto. Andrews (1912), publicou um dos primeiros artigos sobre a teoria de vigas mistas de aço e concreto, supondo uma linha reta para a distribuição de tensões e uma ligação perfeita entre a viga de aço e a laje de concreto. Segundo Malite (1990), em 1914 iniciaram-se na Inglaterra os estudos experimentais referentes a este tipo de estrutura. Na década de 20 (Wu e Slutter, 1971), praticamente todos os estudos experimentais mostraram que a teoria da linha reta para descrever a distribuição de tensões era somente

válida para os casos em que não se apresentavam deslocamentos relativos na interface entre os dois materiais. Além disso, os mesmos estudos experimentais mostraram que a interação ao longo da interface nunca era completa.

Para Viest (1958), o começo da construção compósita está marcado pela patente “*Composite Beam Construction*” emitida por Kahn (1926). Segundo Malite (1990), em 1930 o sistema estava definido e os métodos de dimensionamento estabelecidos. Na década de 40, numerosas pontes foram construídas empregando estruturas mistas (Matlock e Taylor, 1968). Em 1944 esse tema foi introduzido nas primeiras especificações sobre o projeto estrutural de pontes da *American Association of State Highway Officials* (AASHO), que converteu-se depois na AASHTO. Em 1957 a AASHTO publicou uma nova versão das especificações para o projeto de pontes usando seção mista, levando em conta a ampla experiência adquirida na década anterior. Viest (1958) afirma que nessa época a viga mista estabeleceu-se como uma atraente alternativa na construção civil, apresentando duas metodologias para o projeto estrutural: uma restringida para o uso de perfis de aço laminado baseado em tabelas com as propriedades da seção composta, e outra mais geral com equações simplificadas. Em 1960 ainda não existiam especificações para o uso de vigas mistas em edificações. No entanto existiam códigos locais como o *New York City Building Code*, geralmente adaptados às especificações da AASHO. Segundo Wu e Slutter (1971) em 1961 publicaram-se métodos simplificados de projeto nas especificações da AISC, adotando o critério da resistência última baseado somente no equilíbrio estático das forças internas dos elementos.

Um dos primeiros modelos numéricos desenvolvidos no tratamento das vigas mistas foi proposto por Yam e Chapman (1968) para vigas mistas simplesmente apoiadas, e por Yam e Chapman (1972) para vigas mistas contínuas. Matlock e Taylor (1968) desenvolveram um código computacional que considera a interação na interface assumindo a deflexão vertical igual para os dois elementos. Wu e Slutter (1971) propuseram um método de análise com interação completa, assumindo que a viga e laje tem a mesma curvatura, e que a distribuição de tensões é linear, mas não necessariamente contínua na interface. Hirst e Yeo (1980) usaram elementos finitos bidimensionais planos para a modelagem da viga de aço e da laje de concreto e elementos planos com propriedades equivalentes para os conectores. Razaqpur e Nofal (1989) desenvolveram um elemento de barra tridimensional para modelar o comportamento não-linear dos conectores de cisalhamento na interface. Posteriormente foram desenvolvidos vários modelos numéricos mais elaborados, que podem ser classificados segundo os tipos de elementos finitos usados. Os mais simples denominados unidimensionais

são aqueles nos quais a viga e a laje são modeladas por elementos viga-coluna, conectados em forma flexível mediante molas, entre os trabalhos mais significativos com essa abordagem encontram-se: Dall'asta e Zona (2004), e Gara et al. (2009). Outra solução adotada é modelar a laje de concreto com um elemento de casca poliédrica e a viga de aço com um elemento viga coluna tridimensional unidos por conexões rígidas ou flexíveis, nessa linha tem-se os trabalhos de Sapountzakis e Katsikadelis (2003) e de Macorini et al. (2006). Há também na literatura modelos mais complexos, completamente tridimensionais, como os empregados nos trabalhos de Thevendran et al. (1999), Barth e Wu (2006) e Zheng et al. (2009).

### 1.3.1. Fluência e retração

Com o decorrer do tempo, um elemento de concreto submetido à ação de solicitações constantes, incrementa a sua deformação lentamente, devido à ação dos fenômenos de fluência e retração. Esse incremento de deformação foi descoberto no começo do século XX por Woolson (1905) e Hatt (1907). Entre os trabalhos mais relevantes daquela época encontram-se os estudos desenvolvidos por Davis (1928) nos Estados Unidos (Davis, 1928)(Davis, 1928)(Davis, 1928)(Davis, 1928; Davis et al., 1937)(Davis, 1928; Davis et al., 1937)(Davis, 1928; Davis et al., 1937)e por Glanville (1930) no Reino Unido. Já no final da década de 30, Dischinger (1938) publicou uma série de equações diferenciais que pretendiam caracterizar este comportamento.

Paralelamente ao desenvolvimento das pesquisas anteriores, começaram a aparecer numerosos casos que confirmavam a grande influência destes fenômenos nas deflexões ao longo do tempo, sobretudo em pontes de grandes vãos. Em 1910, por exemplo, foi construída a ponte *Le Veurdre* sobre o rio Allier, no sul da França, constituída por três arcos articulados, cada um com de 72,5 m de vão. Em 1911 a estrutura apresentava deflexões da ordem de 13 cm. Em 1936, foi construída a ponte do Que (Saxony, Alemanha), com um vão central de 69 m, empregando barras de aço protendido submetidas a uma tração inicial de 220 MPa. Vinte e cinco anos depois a ponte apresentava preocupantes deflexões e fissuras, e segundo um estudo foi identificado que a tensão nas barras protendidas tinha diminuído em até 50 MPa, por conta das deformações diferidas do concreto. Um caso mais atual é o da ponte Koror-Babeldaob, localizada na República de Palau, que foi construída no ano de 1977, contava com um vão de 240,8 m e no momento foi a maior ponte de viga caixão protendida do mundo. A ponte apresentou deformações excessivas, que em 1990 superavam os 120 cm no centro do vão. Em vista dessa situação foi contratada duas consultorias, que concluíram que as deformações tinham se desenvolvido devido a fluência do concreto, mas foi assegurado que

ponte era estruturalmente segura. Fizeram-se reparações na estrutura, mas em setembro de 1996 a ponte colapsou repentinamente.

Nos anos 1970, foram propostas diferentes metodologias para prever o comportamento do concreto ao longo do tempo, baseadas fundamentalmente em extensos testes experimentais. Bazant (1972) realizou um estudo que resultou no desenvolvimento de um método mais robusto para a quantificação do efeito da fluência, através de uma abordagem que ajustava o valor efetivo do módulo de elasticidade considerando o envelhecimento do material. Posteriormente foram propostos vários modelos para a previsão das deformações de fluência e retração no concreto.

No final do século XX, a maior conquista relacionada ao aspecto experimental consistiu na constituição de uma base de dados de caráter mundial, com numerosos resultados correspondentes a ensaios experimentais de fluência e retração do concreto. No ano de 2008 a base de dados já contava com resultados correspondentes a 621 ensaios de fluência e 490 ensaios de retração (Bazant e Li, 2008). Nessa época surgiu o *RILEM Committee TC-MDC (Multi-Decade Creep)*, encarregado de coletar dados referentes às deflexões de 69 pontes de grande vãos ao redor do mundo, as quais na sua maioria sofreram excessivas deformações, resultando no seu fechamento ou em custosas reparações. Esses dados revelaram que todos os códigos de projeto conduzem a uma severa subavaliação dos efeitos da fluência multi-década (Bazant, 2015).

Com relação à análise numérica foram propostas diferentes abordagens para a consideração da fluência e da retração. Bazant e L'hermite (1988) apresentaram a Teoria da Solidificação para o tratamento da fluência no concreto. Póvoas (1991) usou cadeias de Kelvin numa aproximação da viscoelasticidade para a fluência do concreto. Chong et al. (2008) desenvolveram um modelo não-linear em elementos finitos para análises de longa duração do concreto armado sob cargas de serviço.

Ainda hoje, continuam-se fazendo modificações nos modelos das principais normas de referência e se desenvolvendo novas metodologias para seu estudo, o que confirma a afirmação de Bazant (2001): “No entanto, apesar dos grandes sucessos, os fenômenos da fluência e da retração ainda estão longe de ser totalmente compreendidos, embora tenham ocupado algumas das melhores mentes no campo da pesquisa do cimento, do concreto e da ciência dos materiais”.

No referente especificamente às vigas mistas, um amplo trabalho tem se desenvolvido até hoje, na consideração dos efeitos do tempo. Os primeiros trabalhos de pesquisa relatam os problemas apresentados para carregamentos de serviço em estudos de caso reais, como é o caso do trabalho de Montgomery et al. (1983). Os primeiros modelos desenvolvidos consideravam uma ligação perfeita entre a viga de aço e a laje de concreto (Gilbert, 1988). Estas formulações foram estendidas nos anos seguintes para considerar a não linearidade do material e os diferentes modelos dependentes do tempo para o concreto. O efeito da deformabilidade dos conectores de cisalhamento sobre a resposta ao longo do tempo foi pesquisado por Tarantino e Dezi (1992), Bradford e Gilbert (1992) e Amadio e Fragiaco (1993). Nesse mesmo período realizaram-se os primeiros testes de longa duração que destacaram a importância de considerar a interação parcial entre a viga de aço e a laje de concreto (Bradford e Gilbert, 1991; Wright et al., 1992).

Metodologias mais refinadas foram propostas nos anos subsequentes, as quais visaram desenvolver formulações mais rigorosas ou métodos de análise mais simplificados para o usuário, considerando em alguns casos a fissuração do concreto e a não linearidade dos materiais. Os métodos basearam-se em soluções numéricas, a maioria implementadas empregando o método dos elementos finitos (Virtuoso e Vieira, 2004; Jurkiewicz et al., 2005; Chaudhary et al., 2009), ou soluções analíticas (Faella et al., 2002; Ranzi e Bradford, 2009; Nguyen et al., 2010).

### 1.3.2. Vigas contínuas

Frequentemente utilizam-se estruturas de vigas mistas contínuas, bem seja ao longo de um apoio interno em pontes, ou em uma conexão rígida a uma coluna no interior de uma edificação. Em ambos os casos, a viga apresenta uma região de flexão negativa na qual o concreto é submetido à tração e o aço à compressão. Esta situação reduz a eficiência da viga mista. Sobre esse tema realizaram-se pesquisas desde o fim dos anos 1980, focadas na resistência última, como é o caso dos trabalhos de Bradford e Johnson (1987) e Oehlers e Bradford (1995). Pesquisas posteriores integraram o estudo do comportamento reológico do concreto, que podem levar a fissuras, redistribuição de momentos e mudanças nas deflexões, assim, podem afetar significativamente o comportamento sob carga de serviço de pontes mistas e pórticos em edificações. Bradford e Gilbert (1995) propuseram um modelo analítico para avaliar o comportamento de vigas contínuas submetidas a cargas de serviço, considerando os efeitos da fluência e da retração, assim como a fissuração nas regiões com momento negativo, validando o seu modelo com os resultados experimentais.

Kwak e Seo (2000) e Mari et al. (2003) realizaram pesquisas essencialmente relacionadas com o efeito da sequência de construção, considerando o efeito global da fluência e da retração. Virtuoso e Vieira (2004) estudaram o comportamento dependente do tempo de vigas mistas contínuas de dois vãos com conexão flexível e concluíram que o efeito da fluência simultaneamente com a retração é muito mais importante do que o efeito da fluência sozinho. Vrclj et al. (2002) apresentaram resultados numéricos comprovando a importância de considerar os efeitos da fluência e da retração na realização de verificações de projeto contra flambagem.

### 1.3.3. Vigas mistas protendidas

O conceito de vigas mistas de aço-concreto protendidas foi apresentado inicialmente por Dischinger (1949). A partir de 1950 as vigas mistas protendidas começaram a ser utilizadas, tanto na construção de novas estruturas como no reforço de estruturas antigas. Nas décadas do 50 e 60 construíram-se numerosos projetos de pontes empregando este sistema.

O estudo do comportamento das vigas mistas protendidas tem se desenvolvido fundamentalmente nos seguintes campos: comportamento estático, comportamento na região de momento negativo, comportamento dinâmico e de fadiga, e comportamento ao longo do tempo. No que diz respeito ao comportamento estático Szilard (1959) estudou vigas mistas de aço-concreto simplesmente apoiadas, pré-esforçadas com cabos de alta resistência em forma parabólica. Tochacek e Mehta (1972) realizaram uma análise da teoria dos estados limites em vigas mistas pré-esforçadas de aço concreto, supondo um comportamento não linear da laje de concreto, e elástico para a viga de aço e os cabos. Saadatmanesh et al. (1989) estudaram o desempenho de vigas mistas pré-esforçadas de aço-concreto até a falha, calculando as tensões na viga de aço, na laje de concreto e nos cabos; assim como a deflexão nas regiões com momento positivo e negativo. Dall'asta e Dezi (1998) propuseram um modelo analítico para a análise de vigas mistas simplesmente apoiadas pré-esforçadas com cabos externos, considerando o comportamento não linear do concreto, a conexão flexível e a deformação no cabo. Com relação ao comportamento na região de momento negativo, Tachibana et al. (1964) descobriram, baseados numa pesquisa experimental, que o comportamento elástico das vigas mistas contínuas de aço-concreto apresenta uma melhora considerável, quando colocados cabos de aço protendido na região momento negativo. Basu et al. (1987) testou uma viga continua de dois vãos e concluiu que a protensão na região momento negativo pode eliminar as fissuras sob ações de serviço.

Com relação ao comportamento dinâmico e a fadiga, pode-se citar o trabalho de Kennedy e Grace (1990) que analisaram o desempenho a fadiga e sobre a ação de vibrações em estruturas de viga mista submetidas a momento negativo, descobrindo que o pré-esforço na laje de concreto na região de momento negativo pode aumentar a frequência natural nas pontes, aumentando sua vida útil quando submetidas a fadiga. Miyamoto et al. (2000) analisaram as propriedades dinâmicas de vigas mistas reforçadas com cabos protendidos externamente, avaliando a influência da excentricidade, proporção da protensão e forma dos cabos nas propriedades da vibração.

Quanto aos efeitos de longa duração, pode-se citar o trabalho de Szilard (1959) que considerou o efeito do tempo, através dos fenômenos da fluência e da retração na laje de concreto e a consideração das perdas por relaxação das cordoalhas, para vigas simplesmente apoiadas com cabos de aço dispostos de forma parabólica. Dezi et al. (1995) estudaram o comportamento a longo prazo de vigas pré-esforçadas de aço-concreto, considerando duas abordagens: com a laje de concreto pré-moldada e com a mesma moldada no local.

#### 1.3.4. Vigas mistas no Brasil

A construção com estrutura mista foi introduzida no Brasil nos anos 1950, mas o seu uso cresceu apenas com o aumento na produção de aço no Brasil. Um indicativo deste crescimento foi o surgimento em 1986 de ABNT NBR 8800 (revisada e atualizada em 2008) com um capítulo dedicado ao dimensionamento e aos aspectos construtivos de vigas mistas.

Desde o início dos anos 1990 foram desenvolvidos trabalhos acadêmicos que tratavam sobre as vigas mistas. Maines (1989), apresentou um estudo considerando a análise não linear de vigas mistas com interação parcial, empregando para isso o método dos elementos finitos. Malite (1990) estudou as vigas mistas no referente ao seu dimensionamento e aspectos construtivos. Veríssimo (1996), desenvolveu um estudo sobre o comportamento de vigas de aço e vigas mistas com aberturas na alma. Gutiérrez-Klinsky (1999) apresentou uma pesquisa sobre pontes em vigas mistas, fundamentada num modelo tridimensional de elementos finitos empregando o software ANSYS. Alva (2000) faz uma abordagem abrangente sobre estruturas mistas de aço-concreto com ênfase em edifícios, abordando os aspectos construtivos, o comportamento estrutural e os procedimentos para dimensionamento recomendados pelas principais normas aplicáveis, considerando adicionalmente a situação de incêndio. Posteriormente em Oliveira (2001), são apresentados resultados de uma pesquisa teórico-experimental sobre o comportamento de vigas mistas aço-concreto adotando-se perfis

metálicos formados a frio e pré-lajes de concreto armado, visando sua aplicação nos sistemas construtivos para edificações residenciais de quatro pavimentos.

Sobrinho (2002) descreveu uma formulação matemática para o estudo das deflexões de curta e de longa duração de vigas mistas aço-concreto simplesmente apoiadas, com interação parcial e distribuição uniforme de conectores. Já Muniz (2005) apresentou uma série de modelos numéricos para a análise de elementos estruturais mistos. Catai (2005) realizou uma pesquisa sobre os fenômenos de fluência e retração do concreto, aplicados à estruturas de viga mista através de uma análise elástica. Kotinda (2006), apresentou uma série de modelos numéricos tridimensionais de vigas mistas, desenvolvidos com ênfase na interface entre viga de aço e laje de concreto, com as simulações realizadas por meio do software ANSYS. David (2007), desenvolveu um estudo teórico - experimental sobre o comportamento de vigas mistas constituídas por perfis formados a frio e laje de vigotas pré-moldadas. Albrecht (2010) propôs uma metodologia para a geração de ábacos para pré-dimensionamento de vigas mistas. Eller (2011) apresentou um estudo paramétrico sobre pontes rodoviárias em vigas mistas de aço e concreto. Machado (2012) apresentou uma análise dinâmica de vigas mistas, considerando a interação parcial entre os elementos, através do método dos elementos finitos.

No PPGEC/UFRGS também têm se desenvolvido pesquisas referentes à análise numérica de vigas mistas. Tamayo (2011) implementou a formulação de um modelo matemático num código computacional próprio, que é capaz de representar o comportamento de estruturas de viga mista para cargas de curta duração. Dias (2013) continuou o trabalho anterior, incluindo a análise de serviço, o amolecimento do concreto, e uma nova formulação para a rigidez dos conectores, implementando também o uso do software GiD para as tarefas de pré o pós processamento.

Com respeito à protensão e aos efeitos diferidos no tempo aplicados às estruturas de concreto encontram-se os trabalhos de Machado (2002), Jost (2006) e Siqueira (2014), entre outros. Machado (2002), desenvolveu um modelo computacional, baseado no método dos elementos finitos, para o estudo de estruturas de concreto armado e protendido, sob estados planos de tensão, considerando a resposta tanto instantânea como ao longo do tempo e adotando a hipótese de aderência perfeita entre o concreto e o aço. Jost (2006), apresentou uma análise numérica de estruturas com protensão não aderente. Siqueira (2014), apresentou um modelo numérico computacional, para análise diferida e não linear física e geométrica de cascas de concreto armado. Na análise do concreto submetido a cargas instantâneas um

modelo elasto-plástico é admitido, enquanto para a análise diferida, modelos Kelvin e Maxwell generalizados foram implementados.

#### 1.4. DESCRIÇÃO DO CONTEÚDO

Este trabalho encontra-se dividido em sete capítulos. Ao longo deste primeiro capítulo apresentou-se a Introdução, expondo os aspectos mais relevantes que vão se desenvolver ao longo do trabalho. A introdução inclui: a justificativa, os objetivos, tanto geral como específicos; e uma revisão bibliográfica dos tópicos principais da pesquisa.

No segundo capítulo apresenta-se a teoria referente às deformações sofridas pelo concreto ao longo do tempo, causadas pelos fenômenos de fluência e retração. Apresenta-se também a formulação correspondente aos seis modelos que foram implementados para representar esses fenômenos, explicando as suas principais características. Finalmente é exposta a metodologia empregada para a comparação estatística entre os modelos.

No terceiro capítulo são expostas as características e propriedades dos materiais utilizados. Apresentam-se as considerações empregadas na modelagem do comportamento de cada material, através do seu modelo constitutivo. Adicionalmente expõe-se a teoria da solidificação para o concreto que permite considerar os efeitos de longa duração.

O quarto capítulo apresenta os aspectos referentes à análise numérica. Explica-se a abordagem do método dos elementos finitos considerando o princípio dos trabalhos virtuais. Apresentam-se os tipos de elementos finitos empregados para a modelagem de cada uma das componentes da estrutura, e expõe-se o processo de solução incremental iterativa adotado.

No quinto capítulo são expostos os aspectos referentes ao pré e pós processamento dos dados, que é realizado empregando-se o software *GiD*. Esse software é customizado e adaptado para atender as necessidades do presente trabalho. Através de uma guia passo a passo, apresenta-se o procedimento para o uso do *GiD* nas etapas de pré e pós processamento.

São apresentadas no sexto capítulo uma série de aplicações numéricas que permitem comparar os resultados obtidos com dados experimentais ou analíticos, para demonstrar o apropriado funcionamento do código computacional. No mesmo capítulo apresenta-se a correspondente análise destes resultados.

Finalmente no sétimo capítulo encontram-se as conclusões ou considerações finais do trabalho desenvolvido, assim como uma série de sugestões para pesquisas futuras.

## 2. EFEITOS DIFERIDOS NO TEMPO

A resposta de uma peça de concreto, submetida à ação do meio ambiente e sob a aplicação ou não de cargas externas têm duas componentes: uma instantânea, e outra variável ao longo do tempo. O valor dessa deformação diferida no tempo tem uma grande influência no comportamento da estrutura, sendo que geralmente equivale a entre 1,5 e 2,5 vezes a deformação instantânea (Kim, 2014). Para o concreto submetido a carregamento constante uma classificação mais específica é feita por Neville (1997), apresentada na Tabela 1.

As deformações do concreto podem ser de caráter elástico, viscoso ou plástico, e podem também existir uma combinação entre essas. A deformação elástica é reversível, instantânea e linear, e o seu comportamento respeita a lei de Hooke. A elasticidade retardada é caracterizada por um arranjo molecular desordenado, e é completamente reversível já que a energia produzida não é dissipada e sim armazenada no material (Neville, 1971). A deformação plástica é irreversível, instantânea, não apresenta mudança volumétrica e não existe uma proporcionalidade entre a mesma e a tensão aplicada. A deformação viscosa é irreversível, depende do tempo e existe uma proporcionalidade entre a velocidade dessa deformação e a tensão aplicada.

A resposta do concreto ao longo do tempo, devido às cargas aplicadas relaciona-se diretamente com dois fenômenos inerentes a sua natureza como material visco-elástico: um aumento gradual da deformação sob tensão constante denominado fluência, e uma diminuição gradual da tensão sob deformação constante denominado relaxação. As duas deformações dependentes do tempo (Tabela 1) representam a fluência: a deformação elástica retardada é a fluência primária ou básica (reversível), e a deformação viscosa é a fluência secundária. A fluência total equivale à soma dessas duas parcelas.

Na caracterização do comportamento do concreto ao longo do tempo é fundamental considerar além das deformações produto do carregamento aplicado, as deformações causadas pelo fenômeno de retração do concreto. A retração é comumente definida como a mudança de volume de um elemento de concreto, não carregado ao longo do tempo, sendo esta deformação inerente às propriedades do concreto, causada principalmente pela perda de água do material.

Tabela 1. Tipos de deformação dependente do carregamento. Fonte: Neville (1997).

Tipo de deformação	Instantânea	Dependentes do tempo
Reversível	Elástica	Elástica retardada
Irreversível	Plástica	Viscosa

O comportamento reológico do concreto constitui um fator de grande importância na resposta estrutural, segundo Mehta e Monteiro (2008), o fenômeno de retração e o comportamento viscoelástico (fluência e relaxação) devem-se considerar conjuntamente por cinco razões fundamentais. Primeiramente os dois fenômenos originam-se na pasta endurecida de cimento; segundo, as suas curvas deformação x tempo são muito semelhantes; terceiro, os fatores que influenciam a retração também influenciam a fluência, e geralmente do mesmo modo; quarto, a micro deformação no concreto produto de cada um deles é grande e não pode ser ignorada no projeto estrutural; e quinto ambos são parcialmente reversíveis. Na prática os três fenômenos: fluência, relaxação e retração, ocorrem simultaneamente e influem diretamente no comportamento um do outro.

O comportamento provocado por esses fenômenos é altamente variável e dificilmente modelável, já que depende de numerosos fatores, entre esses das propriedades dos materiais, a geometria da seção e as condições ambientais em que se encontra a estrutura. Embora as deformações decorrentes das propriedades de retração e fluência no concreto armado tenham sido objeto de estudo de muitos pesquisadores, estas propriedades estão ainda longe de serem totalmente compreendidas (Bažant, 2001).

## 2.1. FLUÊNCIA

A fluência é definida por Neville (1997) como o incremento de deformação sob uma tensão constante, que acontece após a tensão inicial induzida por uma carga aplicada. A fluência pode-se considerar dividida em duas parcelas: por um lado está a fluência que se produz sem troca de água com o meio exterior, sob condições de umidade relativa 100%, denominada fluência básica; e por outro está a fluência por secagem que é conseqüentemente a deformação adicional causada pela troca de umidade com o meio ambiente (Mehta e Monteiro, 2008). No entanto na prática é comumente ignorada esta divisão, e se considera a fluência total, resultado da soma das duas anteriores.

Existem duas maneiras tradicionais de representar e quantificar a fluência, uma é em termos de fluência específica que é a deformação por fluência, por unidade de tensão

aplicada; e a segunda é por meio do coeficiente de fluência, que é a relação entre a deformação por fluência e a deformação elástica. O comportamento da deformação por fluência é proporcional à deformação instantânea para tensões inferiores a 40% da resistência característica do concreto, para valores de tensão superiores a este limite a fluência é não linear (Dias, 2013).

Apresenta-se na Figura 1 o comportamento típico das deformações produzidas pelo fenômeno de fluência, especificamente o crescimento e a diminuição gradual no tempo em função das condições de carga e descarga. Quando se efetua a descarga, a deformação diminui imediatamente tanto quanto a deformação elástica inicial, e continua se recuperando gradativamente durante a denominada recuperação de fluência, no entanto tem uma parcela da deformação que é irreversível de modo que qualquer aplicação de carga, mesmo que mantida por um curto período de tempo, resulta em uma deformação residual.

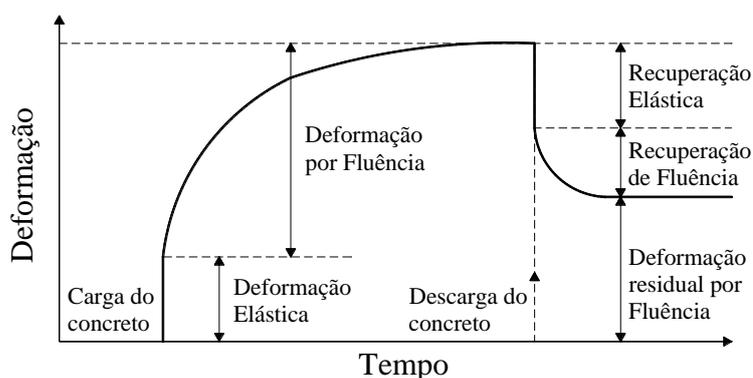


Figura 1. Deformação por fluência no tempo.

## 2.2. RETRAÇÃO

A retração é definida como a variação em comprimento ou volume ao longo do tempo, em consequência da perda de água, na ausência de solicitações externas; essa variação do volume é inerente as propriedades do concreto. A retração no concreto pode ser fundamentalmente de quatro tipos: a retração por secagem, a retração autógena, a retração por carbonatação e a retração plástica. A retração por secagem tem uma importância fundamental na durabilidade do concreto, está associada com a perda de umidade para o meio ambiente e torna-se uma das principais causas de fissuração. A retração por secagem ou hidráulica é a propriedade que consiste na contração irreversível decorrente da variação de umidade das pastas de cimento, argamassa ou concreto, assim como em outros materiais cuja estrutura interna seja de natureza porosa (Furnas, 1997).

A retração autógena é a redução de volume do material cimentício na hidratação do cimento após o início da pega, essa retração não é associada à perda ou ganho de umidade com o ambiente, nem as variações de temperatura ou restrições, a mesma é consequência da remoção de umidade dos poros capilares pela hidratação do cimento ainda não hidratado. A reação química entre o cimento e a água se dá com redução de volume, de tal forma que a água quimicamente combinada sofre uma contração de 25% do seu volume original (Kalintzis, 2000). A deformação autógena tende a aumentar devido a teores de cimento maiores e relações água/cimento menores (Neville, 1997).

A retração por carbonatação é causada pela reação do cimento e os componentes dos agregados com o dióxido de carbono no ar, o hidróxido de cálcio transforma-se em carbonato de cálcio, lentamente a carbonatação penetra além da superfície exposta. A retração plástica apresenta-se logo após do concreto ser colocado nas formas, quando ainda se encontra em estado plástico e está relacionada à perda de água por evaporação e por absorção dos agregados ou do subsolo (se estiver em contato).

Diferente da fluência que é diretamente afetada pela aplicação e remoção de cargas, a retração está intimamente ligada às condições ambientais. O volume do concreto diminui durante a secagem, mas se recupera parcialmente com a umidificação, no entanto apresenta como a fluência uma deformação remanescente, sendo que o volume do concreto não recupera completamente a sua dimensão original. A Figura 2 mostra o comportamento típico do fenômeno da retração no concreto.

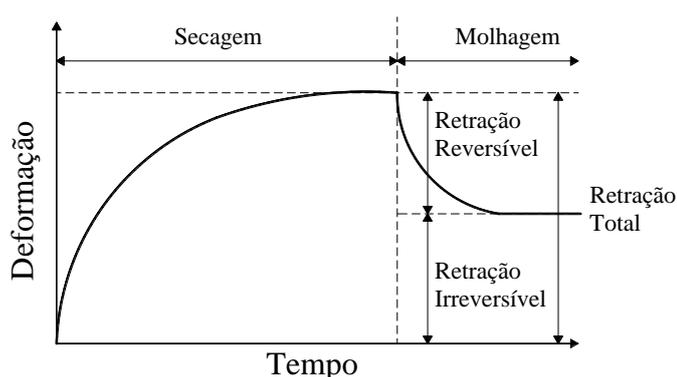


Figura 2. Deformação por retração no tempo.

### 2.3. CAUSAS

A deformação por retração apresenta-se quando a pasta de cimento se encontra exposta a umidades relativas do ambiente que estejam abaixo da saturação, principalmente pela perda de água fisicamente adsorvida do C-S-H (silicato de cálcio hidratado). De igual

maneira, quando a pasta de cimento hidratada está submetida a uma tensão aplicada, a mesma perde uma grande quantidade de água fisicamente adsorvida e mantida por tensão hidrostática em pequenos capilares (Mehta e Monteiro, 2008). As mudanças volumétricas da pasta são restringidas pela presença do agregado, da armadura, pela forma da peça e no caso da viga mista pelos conectores de cisalhamento e os elementos de protensão; estas restrições podem produzir a aparição de fissuras na peça.

As causas da fluência no concreto são complexas e ainda são controvertidas (Kataoka, 2010), segundo uma hipótese sugerida por Neville (1997) a causa mais importante da fluência é a percolação interna, isto é, a movimentação de água adsorvida na pasta de cimento carregada a tensão constante, que após muitos anos de carga pode ser reduzida, a tal ponto que já nenhuma outra redução seja possível sob a mesma tensão, deve-se lembrar que os poros capilares não permanecem preenchidos nem sob a pressão hidrostática, imersos em água, assim, a percolação interna é possível em qualquer condição de conservação, fato que justifica a existência da fluência básica (Mehta e Monteiro, 2008).

No entanto têm-se observado a existência do fenômeno de fluência após 30 anos de idade das peças, o que leva a pensar em outras causas como a não linearidade para nível de tensões maiores que 30 a 40% da tensão última; o micro fissuramento adicional da zona de transição devida à retração por secagem e a resposta elástica atrasada do agregado (uma vez que ocorre a diminuição gradativa da tensão na pasta de cimento a carga é transferida para o agregado deformando-se elasticamente).

Acker e Ulm (2001) afirmam que há dois mecanismos que explicam a origem da fluência, ambos relacionados com a mobilidade da água, o primeiro consiste na movimentação da água em direção aos poros maiores que acontece nos primeiros 10 dias da estrutura, e o segundo corresponde ao comportamento irreversível viscoso no qual é menor a alteração de volume.

## 2.4. FATORES QUE AFETAM O COMPORTAMENTO NO TEMPO

Os fenômenos de fluência e retração dependem de vários fatores relacionados entre si de maneira complexa, que compreendem as propriedades intrínsecas das misturas, as condições ambientais do entorno, a forma e geometria da peça, e as solicitações a que está submetida, entre outros. Além da quantidade de fatores atuantes, tem se uma dificuldade

adicional no que tem a ver com a variabilidade ao longo do tempo dos mesmos, e com a interdependência um do outro.

A relevância de estudar esses fatores está em que eles influem no comportamento ao longo de tempo, e conseqüentemente devem ser levados em consideração nos cálculos dos diferentes modelos empregados para prever os efeitos da fluência e da retração. Na seqüência se apresentam tais fatores, com uma breve descrição do modo como influem no desenvolvimento dos fenômenos.

#### 2.4.1. Umidade relativa do ambiente e temperatura

A umidade relativa do ambiente é talvez um dos fatores mais significativos e de grande influência nas deformações por fluência e retração. Como já mencionado, os fenômenos que afetam o comportamento do concreto diferido no tempo estão diretamente relacionados à movimentação da água na pasta, assim a umidade relativa do entorno tem grande influência nesse processo, favorecendo ou não o intercâmbio de água com o exterior. A relação entre a umidade relativa e as deformações por fluência e retração é inversamente proporcional, ou seja, quanto menor é a umidade relativa do ar, maiores são as deformações por fluência e retração.

No entanto para Sakata e Ayano (2000) é muito mais influente o histórico da temperatura do que a variação de umidade relativa, no referente à deformação por retração. Segundo os mesmos, para uma temperatura entre a faixa de 5 a 30°C, a relação entre a temperatura ambiente e deformação por retração é praticamente linear. Segundo Mehta e Monteiro (2008), a resistência de uma peça de concreto aumentará se esta for exposta a uma temperatura maior que a do ambiente como parte do processo de cura, prévio à aplicação das cargas, a deformação por fluência no tempo será então um pouco menor, no entanto pode aumentar durante o período em que o concreto está sendo carregado

Para temperaturas abaixo 5°C, a deformação lenta praticamente cessa. Por outro lado, para temperaturas acima de 20°C a fluência aumenta. Isso principalmente em pontes, nas quais o concreto do tabuleiro, sobre o qual existe uma camada de asfalto, atinge temperaturas acima de 40°C quando exposto à radiação solar durante um tempo longo (Furnas, 1997).

De maneira geral, os procedimentos de cálculo assumem as condições ambientais como constantes, o que está totalmente longe da realidade. Segundo Kim (2014) a variabilidade das condições ambientais deve ser considerada nas predições da fluência e da retração a fim de obter resultados mais confiáveis, que reflitam o melhor possível o

comportamento real do concreto. Müller e Pristl (1993) concluíram que, para temperatura constante, as deformações por fluência em corpos de prova, foram aceleradas em ambientes com umidade relativa cíclica, demonstrando um aumento de 20% em relação à exposição do concreto a umidade relativa média constante, demonstrando assim a importância de considerar as variações da umidade relativa no tempo para a predição desses fenômenos.

#### 2.4.2. Geometria do elemento

Tanto a forma como a dimensão da peça de concreto influem na magnitude das deformações induzidas pela retração e a fluência. Peças espessas apresentam menores valores de fluência que peças esbeltas, isso se deve ao fato de que a secagem no interior é mais demorada do que na parte externa da peça. Devido à resistência ao transporte de água do interior do concreto para a atmosfera, a taxa de perda de água é controlada pela distância percorrida pela água, que está sendo expelida durante a retração por secagem e a fluência. Segundo Neville (1997) a fluência diminui com o aumento nas dimensões da peça.

Conseqüentemente a forma e a dimensão são precisamente utilizadas para a determinação da espessura teórica ou efetiva, que é igual à área de seção dividida pelo semiperímetro em contato com a atmosfera. Dependendo do modelo empregado na predição da fluência e da retração, é utilizado também um outro parâmetro, que faz referência à forma da estrutura, que é a relação volume/superfície (V/S). No entanto, existe uma simples equivalência entre esses dois parâmetros, a relação volume superfície é igual a duas vezes a espessura efetiva da peça (ACI Committee 209, 2008).

#### 2.4.3. Materiais e dosagem

Para Mehta e Monteiro (2008), as características do agregado utilizado no concreto são um fator fundamental na determinação da fluência e da retração: o tamanho máximo, a granulometria assim como a forma e o tipo do agregado influem no desenvolvimento das deformações diferidas no tempo. A fonte principal das deformações relacionadas com a umidade do concreto é a pasta de cimento endurecida. Têm se pesquisado amplamente a fim de se encontrar uma proporcionalidade direta entre o conteúdo da pasta e as deformações por fluência e retração, mas essa relação direta não existe devido à restrição contra a deformação exercida em grande parte pelos agregados.

Na retração particularmente o agregado tem uma importância fundamental (Kataoka, 2010), a pesar de que o tamanho e granulometria do mesmo não tem influência direta sobre a magnitude da deformação. Agregados maiores resultam no aumento do teor agregado, no

volume total do concreto, portanto, em menor retração. Além disso as propriedades elásticas do agregado determinam o grau de contenção, por exemplo, os agregados naturais comuns não apresentam retração; enquanto agregados leves, de um modo geral, resultam em maior retração (Neville, 1997).

No caso da fluência, a propriedade física do agregado que tem maior importância é o módulo de elasticidade, quanto maior é o módulo menor é a fluência, assim concretos com agregados leves apresentam uma fluência maior como reflexo do menor módulo de elasticidade. Outra propriedade fundamental é a porosidade do agregado. Agregados com grande porosidade têm módulo de elasticidade baixo, embora agregados porosos desempenhem uma função direta nas trocas de umidade no interior do concreto, explicando a elevada fluência inicial em concretos que usam agregados leves e secos (Mehta e Monteiro, 2008). Segundo Neville (1997) um aumento do teor de agregado de 65% para 75% pode reduzir a fluência em 10%.

A influência da relação água-cimento e do consumo de cimento sobre a retração e a fluência não é direta, pois um aumento no volume de pasta de cimento significa um decréscimo da fração do agregado, portanto, um aumento nas deformações dependentes de umidade no concreto. Para um dado consumo de cimento, um acréscimo na relação água-cimento aumenta a retração por secagem e a fluência, sendo a diminuição da resistência e o aumento da permeabilidade os responsáveis por este comportamento.

#### 2.4.4. Tensão aplicada e resistência

Existe uma proporcionalidade direta entre a fluência e a tensão aplicada, desde que a tensão aplicada esteja na faixa linear da relação tensão deformação, isto é, que seja inferior a 40 % da resistência. Essa proporção, para o concreto, toma usualmente valores entre 0,4 e 0,6 da carga de ruptura, mas ocasionalmente pode atingir valores tão baixos como 0,3, ou altos como 0,75 (Neville, 1997). Acima do limite de proporcionalidade a fluência aumenta com o aumento da tensão a uma razão constante que está no intervalo de 0,80 a 0,90 da resistência de curto prazo (Kataoka, 2010), até que finalmente se produz a ruptura por fluência. O fenômeno de fluência pode aumentar a deformação total até ser atingido um valor limite de deformação admissível máxima no concreto.

A resistência do concreto influi notavelmente no desenvolvimento da fluência, sendo inversamente proporcionais. Quando a resistência do concreto é incrementada, diminui a

fluência, em parte porque para aumentar a resistência do concreto deve-se reduzir a quantidade de água (Howells et al., 2005).

#### 2.4.5. Propriedades do cimento

O tipo de cimento empregado influencia a resistência do concreto no momento da aplicação da carga, portanto a fluência é afetada. O concreto que utiliza cimento de endurecimento normal, quando carregado nas primeiras idades apresenta uma fluência maior do que um concreto fabricado com cimento de alta resistência inicial, assim misturas de concreto feitas com cimento de escória apresentam maior fluência em idade inicial, em virtude da sua baixa resistência inicial.

A granulometria fina do cimento influencia a evolução da resistência às primeiras idades, e por conseguinte a fluência. Cimentos extremamente finos apresentam uma fluência inicial maior, mas depois de um ou dois anos de carregado apresentam uma fluência menor. Enquanto à retração, acredita-se que a finura e composição do cimento não a afetam de maneira significativa. A adição de cinzas volantes e escória de alto-forno aumentam a retração, embora a evolução da fluência não é alterada pela presença de cinza volante, escória granulada de alto-forno ou sílica ativa, ou mesmo uma combinação desses materiais (Neville, 1997).

#### 2.4.6. Aditivos

Aditivos do tipo redutores de água e retardadores de pega, levam a um refinamento e um aumento do volume dos poros na pasta de cimento. Visto que o comportamento tanto da retração como da fluência são influenciados pela quantidade de água contida nos poros da pasta as deformações aumentam como consequência ao uso deste tipo de adições.

#### 2.4.7. Idade de carregamento

A idade do concreto na qual é aplicado o carregamento tem bastante influência sobre a deformação por fluência. A fluência dos concretos carregados a baixas idades é maior nas primeiras semanas de carregamento em relação a concretos carregados a maiores idades; conseqüentemente apresentam-se maiores deformações para os concretos carregados a baixas idades.

#### 2.4.8. Procedimento e tempo de cura

As condições de cura podem ser consideradas fatores influentes nas deformações de fluência. De acordo com Mehta e Monteiro (2008), dependendo das condições de cura de um

elemento de concreto, as deformações por fluência podem ser, na prática, significativamente diferentes daquelas obtidas em um teste de laboratório realizado sob umidade relativa constante, ciclos de secagem podem acentuar a microfissuração na interface agregado-pasta e assim aumentar a fluência.

Neville (1997) afirma que a cura úmida prolongada retarda a retração, mas não afeta significativamente a intensidade, nem conseqüentemente o valor da deformação associada, porém seu efeito é de atrasar a deformação já que o concreto adquire uma resistência à tração maior, suficiente para prevenir uma fissuração prematura.

#### 2.4.9. Tipo das tensões aplicadas

A aplicação de um carregamento cíclico induz uma velocidade de fluência maior nas primeiras idades, e também leva a valores superiores de deformação a longo prazo. Para duas cargas iguais em magnitude, uma alternada e outra estática, Neville (1997) observou uma deformação em função do tempo maior para a carga cíclica. Os valores calculados para a fluência e a retração sob cargas estáticas podem então subestimar a ação de cargas cíclicas.

Na Tabela 2 apresenta-se um resumo dos parâmetros que influem nos fenômenos de fluência a retração, e identifica-se se são, direta ou inversamente proporcionais aos mesmos. A flecha apontando para acima indica que a variação no parâmetro é diretamente proporcional a deformação causada pelo fenômeno, enquanto a flecha apontada para em baixo indica que são inversamente proporcionais. Por exemplo, quanto maior for a temperatura, maior vai ser o valor das deformações por fluência e retração, e quanto maior for a resistência do concreto, a deformação será menor.

Tabela 2. Proporcionalidade / Influência de cada parâmetro na predição dos fenômenos.

<b>Parâmetro</b>	<b>Fluência</b>	<b>Retração</b>
Resistência à compressão do concreto (MPa)	↓	↓
Relação volume-superfície (mm)	↓	↓
Umidade relativa do ambiente (%)	↓	↓
Tipo de cimento	*	*
Idade começo secagem/fim cura (dias)	↓	↓
Idade de aplicação da carga (dias)	↓	
Consumo de agregado (kg/m <sup>3</sup> )	↓	
Consumo de cimento (kg/m <sup>3</sup> )	↑	↑
Consumo de água (kg/m <sup>3</sup> )	↑	↑
Slump do concreto (mm)	↑	↑
Porcentagem de agregado miúdo (%)	↑	↑
Teor de ar (%)	↑	↑
Temperatura (°C)	↑	↑

\* *Quanto mais rápido for o endurecimento, menor a deformação*

## 2.5. EFEITOS NO COMPORTAMENTO ESTRUTURAL

Os fenômenos produto dos efeitos de longa duração no concreto podem levar a resultados prejudiciais no transcorrer do tempo, como: a fissuração do concreto, a redistribuição de momentos, a flambagem dos elementos e mudanças significativas nas deflexões; todos os quais alteram a resposta estrutural esperada.

A retração produz um encolhimento na peça de concreto, porém a peça encontra-se normalmente submetida a uma série de condições de contorno que restringem esse encolhimento, levando em conta adicionalmente a baixa resistência à tração do concreto, o desenlace inevitável é a aparição de fissuras nos pontos de maior concentração de tensões.

Por outro lado, o fenômeno de fluência no concreto não tem um efeito direto sob a resistência dos elementos estruturais, embora apresente uma grande influência nas deformações e até muitas vezes na redistribuição de tensões; no entanto, os efeitos são diferentes para cada tipo de estrutura.

Para uma viga simplesmente apoiada sob carga constante a fluência não tem um efeito considerável na sua resistência final, embora o incremento que gera na flecha torna-se um ponto crítico, que deve ser considerado no projeto estrutural. Para o concreto em massa, a fluência pode ser causa de fissuração devido a um ciclo de variações térmicas, manifestadas no desprendimento do calor de hidratação e o esfriamento subsequente. Um efeito benéfico da fluência é o alívio na concentração de tensões induzidas entre outros pela retração, por variações térmicas ou por movimentação das fundações. Nas estruturas de concreto a fluência diminui as tensões internas provocadas pela retração não uniforme, resultando conseqüentemente em uma redução da fissuração (Neville, 1997). Na prática este efeito benéfico não é considerado, o interesse no estudo da fluência e retração está mais focado nos efeitos relacionados ao incremento na deflexão e nas deformações dos elementos estruturais, efeitos fundamentalmente importantes em edifícios de grande altura e pontes de comprimento considerável.

Outro efeito importante dos fenômenos de fluência e retração é que provoca perdas significativas na protensão nas estruturas que se utilizam desse recurso, como o concreto encolhe, o aço de protensão encurta e perde uma parte da sua tensão aplicada inicialmente (Tadros, 2003).

## 2.6. MODELOS PARA A PREDIÇÃO DA FLUÊNCIA E DA RETRAÇÃO

Nas últimas décadas, têm sido propostos numerosos modelos para a predição da fluência e da retração do concreto, que buscam representar com exatidão o processo, mas também ser o suficientemente simples para ser empregados por engenheiros sem conhecimentos especializados no desenvolvimento destes fenômenos. Tanto a fluência como a retração são fenômenos difíceis de modelar e o cálculo independentemente do modelo utilizado não garante um resultado exato. Nesse contexto é comum a escolha do modelo segundo a conveniência para o processo de projeto.

Os modelos ACI 209R-92 (ACI Committee 209, 2008), CEB MC90 (Müller, H. S. e Hilsdorf, H. K., 1990; CEB, 1991; 1993), CEB MC90-99 (CEB, 1999), CEB MC10 (CEB, 2013), Bažant-Baweja B3 (Bazant e Baweja, 1995; 2000), e GL2000 (Gardner e Lockman, 2001), são amplamente utilizados na literatura técnica para a representação dos fenômenos de fluência e retração no concreto, a seguir apresenta-se uma breve descrição e o procedimento de cálculo de cada um. Cada modelo permite calcular dois valores ao longo do tempo: a deformação por retração  $\varepsilon_{sh}$ , e o coeficiente de fluência  $\gamma$ . Na presente análise considera-se o mesmo coeficiente de fluência para o concreto quando submetido à tração e à compressão.

Para empregar esses modelos é necessário conhecer uma série de parâmetros de entrada, que se referem às propriedades do concreto e às condições ambientais do entorno, os parâmetros que são comuns a todos os modelos encontram-se elencados a continuação:

- a) idade do concreto em que se inicia a secagem, usualmente assumida como a idade na qual se suspende o processo de cura (dias);
- a) idade de aplicação da carga (dias);
- b) umidade relativa do ambiente (%);
- c) relação volume-superfície ou espessura média (mm);
- d) tipo de cimento,

### 2.6.1. Modelo ACI 209R-92

O modelo recomendado pelo *ACI Committee 209*, foi desenvolvido por Branson e Christiason (1971). O mesmo foi modificado em 1982, 1992, 1997 e 2008 (ACI Committee 209, 2008). Trata-se de um modelo de uso simples, e apresenta a possibilidade de ajustar a sua predição em função de testes a curto prazo, através do o valor último para a deformação por

retração ou para o coeficiente de fluência. No entanto, o modelo é empírico e apresenta uma tendência de superestimar os valores de retração para idades iniciais e subestimar os mesmos ao longo prazo.

O modelo emprega uma curva hiperbólica para representar a fluência e a retração, que tende a um valor assintótico denominado valor último. A abordagem consiste na prescrição de um valor de fluência e retração para as denominadas condições padrão, e o ajuste do mesmo mediante fatores de correção que consideram a variação dessas condições padrão. Os fatores de correção são aplicados ao valor último, pois os valores calculados para a fluência e a retração ao longo do tempo são funções lineares do valor último.

Os parâmetros requeridos para a predição dos fenômenos de fluência e retração, utilizando o modelo ACI 209R-92, adicionais aos comuns para todos os modelos são:

- a) método utilizado para o processo de cura;
- b) slump do concreto (mm);
- c) porcentagem de agregado miúdo (%);
- d) consumo de cimento ( $\text{kg}/\text{m}^3$ );
- e) teor de ar (%).

A deformação por retração  $\varepsilon_{sh}(t, t_c)$  a uma idade do concreto  $t$  (dias), medida desde a idade de início da secagem (ou tempo de cura)  $t_c$  (dias), é calculada pela equação (2.1).

$$\varepsilon_{sh}(t, t_c) = \frac{(t - t_c)}{f + (t - t_c)} \cdot \varepsilon_{shu} \quad (2.1)$$

em que  $f$  (dias) é considerado constante para uma forma e tamanho padrão, tomando os valores 35 para a cura úmida e 55 para a cura a vapor. Para considerar os efeitos da forma e tamanho da peça, basta substituir o valor de  $f$  pelo calculado de acordo com a equação (2.2), sendo  $(V/S)$  a relação volume-superfície medida em mm.  $\varepsilon_{shu}$  é a deformação última por retração que está definida na equação (2.3).  $\gamma_{sh}$  é calculado mediante a equação (2.4) e representa o produto acumulado dos sete fatores de correção que estão definidos a continuação. No caso das denominadas condições padrão (Tabela 3) o valor de  $\gamma_{sh} = 1.0$ .

$$f = 26.0e^{\{1.42 \times 10^{-2}(V/S)\}} \quad (2.2)$$

$$\varepsilon_{shu} = 780\gamma_{sh} \times 10^{-6} \text{ mm} / \text{ mm} \quad (2.3)$$

$$\gamma_{sh} = \gamma_{sh,tc} \gamma_{sh,RH} \gamma_{sh,vs} \gamma_{sh,s} \gamma_{sh,\psi} \gamma_{sh,c} \gamma_{sh,\alpha} \quad (2.4)$$

Tabela 3. Condições padrão para a predição da deformação por retração. Modelo ACI 209R-92 (ACI Committee 209, 2008).

Fatores	Variáveis	Condições padrão	
Composição do concreto	Tipo de cimento	I e III	
	Slump	70	mm
	Teor de ar	≤6	%
	Porcentagem de agregado miúdo	50	%
	Consumo de cimento	279 - 446	kg/m <sup>3</sup>
Geometria	Relação volume-superfície	38	mm
Condições ambientais	Temperatura	23.2±2	°C
	Umidade relativa	40	%
Cura Inicial	Duração - cura úmida	7	dias
	Duração - cura a vapor	1 a 3	dias
	Umidade relativa	≥95	%
	Temperatura - cura úmida	23.2±2	°C
	Temperatura - cura a vapor	≤100	°C
Histórico de carregamento	Idade de carregamento - cura úmida	7	dias
	Idade de carregamento - cura a vapor	1 a 3	dias
Condições de esforço	Relação tensão-resistência do concreto	≤50	%

O coeficiente de correção para tempos de cura diferentes de 7 dias, no caso da cura úmida; ou a de 1 a 3 dias para a cura a vapor, está determinado pela equação (2.5).

$$\gamma_{sh,tc} = 1.202 - 0.2337 \log(t_c) \quad (2.5)$$

O coeficiente correspondente à umidade relativa do ambiente  $\gamma_{sh,RH}$ , é definido pela equação (2.6), sendo  $rh$  a umidade relativa em decimais.

$$\gamma_{sh,RH} = \begin{cases} 1.40 - 1.02rh & \text{para } 0.40 \leq rh \leq 0.80 \\ 3.00 - 3.00rh & \text{para } 0.80 \leq rh \leq 1.0 \end{cases} \quad (2.6)$$

No caso de uma relação volume-superfície diferente das propriedades padrão, o coeficiente  $\gamma_{sh,vs}$  é calculado mediante a equação (2.7), com a relação volume-superfície ( $V/S$ ) medida em mm.

$$\gamma_{sh,vs} = 1.2e^{\{-0.00472(V/S)\}} \quad (2.7)$$

Os coeficientes de correção determinados pelos fatores que compõem o concreto são: o fator slump  $\gamma_{sh,s}$ , o fator devido ao agregado miúdo  $\gamma_{sh,\psi}$ , o fator devido ao consumo de cimento  $\gamma_{sh,c}$ , e o fator correspondente ao teor de ar  $\gamma_{sh,\alpha}$ ; estes encontram-se determinados respectivamente pelas equações (2.8), (2.9), (2.10) e (2.11).

$$\gamma_{sh,s} = 0.89 + 0.00161s \quad (2.8)$$

$$\gamma_{sh,\psi} = \begin{cases} 0.30 + 0.014\psi & \text{para } \psi \leq 50\% \\ 0.90 + 0.002\psi & \text{para } \psi > 50\% \end{cases} \quad (2.9)$$

$$\gamma_{sh,c} = 0.75 + 0.00061c \quad (2.10)$$

$$\gamma_{sh,\alpha} = 0.95 + 0.008\alpha \geq 1.0 \quad (2.11)$$

em que  $s$  é o valor do slump do concreto em mm,  $\psi$  é a relação de agregado fino respeito ao total de agregado em peso e expressado como porcentagem,  $c$  é o consumo de cimento em  $\text{kg/m}^3$ , e  $\alpha$  é o teor de ar em porcentagem.

O coeficiente de fluência proposto no modelo ACI 209R-92 tem duas componentes. Uma determina o valor assintótico da fluência quando o tempo tende a infinito, e a outra reflete o desenvolvimento da fluência ao longo do tempo. O valor é calculado segundo a equação (2.12), sendo  $\phi_u$  o coeficiente de fluência na idade  $t_o$  (dias) do concreto devido a uma carga aplicada no tempo  $t_o$  (dias);  $d$  e  $\lambda$  são constantes para uma forma e tamanho padrão, tomando os valores recomendados de 10 e 0,6 respectivamente; e  $\phi_u$  é o coeficiente último de fluência definido pela equação (2.13). Para considerar o efeito da forma e tamanho da peça no cálculo da parcela variável no tempo basta utilizar  $\lambda = 1,0$  e  $d = f$  calculado segundo a equação (2.2).

$$\phi(t, t_o) = \frac{(t - t_o)^\psi}{d + (t - t_o)^\psi} \cdot \phi_u \quad (2.12)$$

$$\phi_u = 2.35\gamma_c \quad (2.13)$$

$\gamma_c$  é o produto acumulado das correções definidas na sequência. Para as condições padrão (Tabela 3) o valor de  $\gamma_c$  é 1.0, no caso contrário é definido pela equação (2.14).

$$\gamma_c = \gamma_{c,t_o} \gamma_{c,RH} \gamma_{c,vs} \gamma_{c,s} \gamma_{c,\psi} \gamma_{c,\alpha} \quad (2.14)$$

em que  $\gamma_{c,t_o}$  é a fator corretor correspondente à idade da aplicação do carregamento,  $\gamma_{c,RH}$  por sua vez é o fator que considera a umidade relativa do ambiente, e  $\gamma_{c,vs}$  é o coeficiente que leva em consideração a forma e o tamanho da peça; definidos pelas equações (2.15), (2.16) e (2.17) respectivamente. Enquanto os três restantes  $\gamma_{c,s}$ ,  $\gamma_{c,\psi}$  e  $\gamma_{c,\alpha}$  têm a ver com a composição do concreto, exatamente com os parâmetros de slump, quantidade de agregado miúdo e teor de ar, Equações (2.18), (2.19) e (2.20) respectivamente.

$$\gamma_{c,t_o} = \begin{cases} 1.25t_o^{-0.118} & \text{para cura úmida} \\ 1.13t_o^{-0.094} & \text{para cura a vapor} \end{cases} \quad (2.15)$$

$$\gamma_{c,RH} = 1.27 - 0.67rh \quad \text{para } rh \geq 0.40 \quad (2.16)$$

$$\gamma_{c,vs} = \frac{2}{3} \left( 1 + 1.13e^{\{-0.0213(V/S)\}} \right) \quad (2.17)$$

$$\gamma_{c,s} = 0.82 + 0.00264s \quad (2.18)$$

$$\gamma_{c,\psi} = 0.88 + 0.0024\psi \quad (2.19)$$

$$\gamma_{c,\alpha} = 0.46 + 0.09\alpha \geq 1.0 \quad (2.20)$$

### 2.6.2. Modelo Bazant-Baweja B3

O modelo é resultado de um trabalho iniciado na década de 70 (Bažant et al., 1976; Bažant e Panula, 1978), e finalmente apresentado por Bazant e Baweja (1995; 2000). Segundo os autores o B3 é o mais simples e teoricamente melhor fundamentado entre todos os modelos previamente desenvolvidos por Bazant, baseando-se na descrição matemática de dez fenômenos físicos, que afetam diretamente o comportamento em fluência e retração do concreto, e considerando o comportamento assintótico amplamente conhecido dos dois fenômenos. O modelo divide claramente a fluência básica da fluência por secagem e tem sido considerado como adequado para representar estruturas tanto simples como complexas. Os dois modelos, de fluência e retração precisam dados geralmente não disponíveis no instante do projeto de uma estrutura. Para solucionar isso, os autores adotam valores típicos para quando não se conhece o valor exato dos mesmos.

Para a predição dos fenômenos de fluência e retração usando o modelo Bazant-Baweja B3, são necessários os seguintes parâmetros, além dos comuns para todos os modelos:

- a) consumo de agregado ( $\text{kg/m}^3$ );
- b) consumo de cimento ( $\text{kg/m}^3$ );
- c) consumo de água ( $\text{kg/m}^3$ );
- d) método utilizado para o processo de cura;
- e) resistência à compressão do concreto (MPa);
- f) módulo de elasticidade do concreto aos 28 dias (MPa);

A deformação por retração  $\varepsilon_{sh}(t, t_c)$ , no tempo  $t$  (dias), medida desde o começo do processo de secagem  $t_c$  (dias) é calculada por meio da equação (2.21), na qual  $\varepsilon_{sh\infty}$  é a deformação última por retração,  $k_h$  é um fator dependente da umidade relativa e  $S(t, t_c)$  é a expressão que envolve o desenvolvimento no tempo da retração.

$$\varepsilon_{sh}(t, t_c) = \varepsilon_{sh\infty} k_h S(t - t_c) \quad (2.21)$$

O valor da deformação última por retração  $\varepsilon_{sh\infty}$  é obtido pela equação (2.22), em que  $\varepsilon_{s\infty}$  é uma constante dada pela equação (2.24), e  $E_{cm607} / E_{cm(t_c+\tau_{sh})}$  é um fator que considera a dependência do tempo para o valor da deformação última. O cálculo da variável  $k_h$  muda em função do intervalo da umidade relativa,  $rh$  expressada em decimais, conforme equação (2.23).

$$\varepsilon_{sh\infty} = \varepsilon_{s\infty} \frac{E_{cm607}}{E_{cm(t_c+\tau_{sh})}} \quad (2.22)$$

$$k_h = \begin{cases} 1 - rh^3 & \text{para } rh \leq 0.98 \\ 12.74 - 12.94rh & \text{para } 0.98 \leq rh < 1.00 \\ -0.2 & \text{para } rh = 1.00 \end{cases} \quad (2.23)$$

O valor da parcela constante da deformação última  $\varepsilon_{s\infty}$  é dado pela equação (2.24), na qual  $w$  é o consumo de água em  $\text{kg/m}^3$ ,  $f_{cm28}$  é a resistência à compressão do concreto aos 28 dias, e  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são constantes relacionadas ao tipo do cimento e as condições de cura, cujos valores estão descritos nas equações (2.25) e (2.26) respectivamente.

$$\varepsilon_{s\infty} = \alpha_1 \alpha_2 (0.019w^{2.1} f_{cm28}^{-0.28} + 270) \times 10^{-6} \quad (2.24)$$

$$\alpha_1 = \begin{cases} 1.00 & \text{para Tipo I (R)} \\ 0.85 & \text{para Tipo II (SL)} \\ 1.10 & \text{para Tipo III (RS)} \end{cases} \quad (2.25)$$

$$\alpha_2 = \begin{cases} 0.75 & \text{para cura a vapor} \\ 1.00 & \text{para cura úmida com 100\% de } rh \\ 1.20 & \text{para cura no ar com proteção contra secagem} \end{cases} \quad (2.26)$$

Para encontrar o valor do fator  $E_{cm607} / E_{cm(t_c+\tau_{sh})}$  deve-se calcular separadamente o numerador e denominador da expressão, utilizando para tal fim a equação (2.27) modificando o valor do tempo  $t$  primeiro por 607 dias e logo pela soma entre  $t_c$  e  $\tau_{sh}$ , que é o tempo médio de retração, em dias dado pela equação (2.28). Sendo  $t_c$  o tempo de cura,  $k_s$  é um fator em função da forma da seção que para o caso de lajes é igual a 1.0, e  $(V/S)$  é a relação volume-superfície em mm.

$$E_{cmt} = E_{cm28} \left( \frac{t}{4 + 0.85t} \right)^{0.5} \quad (2.27)$$

$$\tau_{sh} = 0.85t_c^{-0.08} f_{cm28}^{-0.25} [2k_s(V/S)]^2 \quad (2.28)$$

Finalmente a função no tempo para a retração  $S(t, t_c)$  é calculada mediante a equação (2.29), com  $\tau_{sh}$  dado pela equação (2.28).

$$S(t - t_c) = \tanh \sqrt{\frac{(t - t_c)}{\tau_{sh}}} \quad (2.29)$$

A função de fluência  $J(t, t_o)$ , a uma idade  $t$  (dias) causada por uma tensão constante uniaxial aplicada em  $t_o$  (dias) está dada pela equação (2.30), na qual  $q_1$  é a deformação instantânea devido à tensão unitária (inversa ao valor assintótico do módulo de elasticidade),  $C_o(t, t_o)$  é a fluência específica básica, e  $C_d(t, t_o, t_c)$  é a fluência específica adicional devido à secagem. O coeficiente de fluência  $\phi(t, t_o)$ , que é uma representação mais conveniente para introduzir a fluência nas análises estruturais pode-se calcular com base na função de fluência utilizando a equação (2.31) (Bazant e Baweja, 1995).

$$J(t, t_o) = q_1 + C_o(t, t_o) + C_d(t, t_o, t_c) \quad (2.30)$$

$$\phi(t, t_o) = J(t, t_o)E(t_o) - 1 \quad (2.31)$$

A deformação instantânea devido à tensão unitária  $q_1$ , é calculada pela equação (2.32), sendo  $E_{cm28}$  o módulo de elasticidade do concreto aos 28 dias.

$$q_1 = \frac{0.6}{E_{cm28}} \quad (2.32)$$

De acordo com o modelo, a fluência específica básica  $C_o(t, t_o)$  é composta de três parcelas (Equação 2.33): viscoelástica com envelhecimento, viscoelástica sem envelhecimento e fluida com envelhecimento.

$$C_o(t, t_o) = q_2 Q(t, t_o) + q_3 R(t, t_o) + q_4 T(t, t_o) \quad (2.33)$$

Para o cálculo da parcela viscoelástica com envelhecimento utilizam-se as expressões de (2.34) à (2.38), em que  $C$  é o consumo de cimento ( $\text{kg/m}^3$ ), e  $m$  e  $n$  são parâmetros empíricos com valores de 0.5 e 0.1 respectivamente.

$$q_2 = 185.4 \times 10^{-6} c^{0.5} f_{cm28}^{-0.9} \quad (2.34)$$

$$Q(t, t_o) = Q_f(t_o) \left[ 1 + \left( \frac{Q_f(t_o)}{Z(t, t_o)} \right)^{r(t_o)} \right]^{-1/r(t_o)} \quad (2.35)$$

$$Q_f(t_o) = \left[ 0.086(t_o)^{2/9} + 1.21(t_o)^{4/9} \right]^{-1} \quad (2.36)$$

$$Z(t, t_o) = (t_o)^{-m} \ln \left[ 1 + (t - t_o)^n \right] \quad (2.37)$$

$$r(t_o) = 1.7(t_o)^{0.12} + 8 \quad (2.38)$$

A parcela viscoelástica sem envelhecimento se calcula com base nas equações (2.39) e (2.40), com  $W/C$  sendo a relação água - cimento. Enquanto o último termo é calculado com as equações (2.41) e (2.42), sendo  $a/c$  a relação agregado - cimento.

$$q_3 = 0.29(w/c)^4 q_2 \quad (2.39)$$

$$R(t, t_o) = \ln \left[ 1 + (t - t_o)^n \right] \quad (2.40)$$

$$q_4 = 20.3 \times 10^{-6} (a/c)^{-0.7} \quad (2.41)$$

$$T(t, t_o) = \ln(t/t_o) \quad (2.42)$$

A fluência por secagem  $C_d(t, t_o, t_c)$ , é definida pelas equações de (2.43) à (2.47), sendo  $\varepsilon_{sh\infty}$  a deformação última por retração calculada com a equação (2.22), e  $\tau_{sh}$  obtido mediante a equação (2.28).

$$C_d(t, t_o, t_c) = q_5 P(t, t_o) \quad (2.43)$$

$$q_5 = 0.757 f_{cm28}^{-1} \left| \varepsilon_{sh\infty} \times 10^{-6} \right|^{-0.6} \quad (2.44)$$

$$P(t, t_o) = \left[ e^{-8H(t)} - e^{8H(t_o)} \right]^{1/2} \quad (2.45)$$

$$H(t) = 1 - (1 - rh) S(t - t_c) \quad (2.46)$$

$$S(t - t_c) = \tanh \left[ \left( \frac{t - t_c}{\tau_{sh}} \right)^{1/2} \right] \quad (2.47)$$

### 2.6.3. Modelo CEB MC90

Em 1990, o *Comité Européen du Béton*, apresentou um modelo para prever a fluência e a retração no concreto, desenvolvido por Müller e Hilsdorf (1990). O conceito é similar ao do modelo ACI 209R-92, no sentido em que utiliza uma função hiperbólica para a predição do comportamento ao longo de tempo e um valor último, calculado em base às propriedades do concreto e condições do meio ambiente.

Os parâmetros adicionais aso denominados como comuns, requeridos para o uso do modelo CEB MC90 são:

- a) resistência à compressão do concreto (MPa);
- b) temperatura (°C) (Para temperaturas superiores a 30 °C).

A deformação por retração  $\varepsilon_{sh}(t, t_c)$  medida no tempo  $t$  (dias), desde o momento  $t_c$  (dias) no qual começou a secagem, é determinada pela equação (2.48), na qual  $\varepsilon_{cso}$  é o coeficiente que representa o máximo valor da deformação por retração e  $\beta_{st}(t, t_c)$  é o coeficiente que descreve o comportamento da retração em função do tempo de secagem.

$$\varepsilon_{sh}(t, t_c) = \varepsilon_{cso} \beta_s(t, t_c) \quad (2.48)$$

o termo  $\varepsilon_{cso}$  é obtido mediante as equações de (2.49) à (2.52), sendo  $f_{cm28}$  a resistência de concreto à compressão aos 28 dias (MPa),  $f_{cmo}$  uma constante com valor de 10 MPa,  $\beta_{RH}$  o coeficiente que leva em consideração a umidade relativa,  $\beta_{sc}$  o coeficiente que depende de tipo de cimento,  $rh$  o valor da umidade relativa do ambiente em decimais.

$$\varepsilon_{cso} = \varepsilon_s(f_{cm28}) \beta_{RH} \quad (2.49)$$

$$\varepsilon_s(f_{cm28}) = [160 + 10\beta_{cs}(9 - f_{cm28}/f_{cmo})] \times 10^{-6} \quad (2.50)$$

$$\beta_{RH} = \begin{cases} -1.55[1 - rh^3] & \text{para } 0.40 \leq rh < 0.99 \\ 0.25 & \text{para } rh \geq 0.99 \end{cases} \quad (2.51)$$

$$\beta_{sc} = \begin{cases} 5.0 & \text{para Tipo I (R)} \\ 4.0 & \text{para Tipo II (SL)} \\ 8.0 & \text{para Tipo III (RS)} \end{cases} \quad (2.52)$$

O valor do  $\beta_{st}(t, t_c)$  que descreve a variação no tempo da deformação por retração é determinado pela equação (2.53), na qual  $(V/S)$  é a relação volume-superfície (mm), e  $(V/S)_o$  é uma constante com valor igual a 50 mm.

$$\beta_s(t, t_c) = \left\{ \frac{(t - t_c)}{350[(V/S)/(V/S)_o]^2 + (t - t_c)} \right\}^{0.5} \quad (2.53)$$

Para temperaturas superiores a 30 °C ocorridas durante a secagem do concreto, o modelo CEB MC90 sugere fazer umas adaptações nos cálculos que consistem em substituir: o valor de  $\beta_{RH}$  na equação (2.49) por  $\beta_{RH,T}$  calculado segundo a equação (2.54), e o valor de  $\beta_s(t, t_c)$  na equação (2.48) pelo  $\beta_{s,T}(t, t_c, T)$  calculado segundo a equação (2.55), com  $T$  sendo a temperatura (°C).

$$\beta_{RH,T} = \beta_{RH} \left[ 1 + \left( \frac{0.08}{1.03 - rh} \right) \left( \frac{T - 20}{40} \right) \right] \quad (2.54)$$

$$\beta_{s,T}(t, t_c, T) = \left\{ \frac{(t - t_c)}{350 \left[ (V/S) / (V/S)_o \right]^2 \exp[-0.06(T - 20)] + (t - t_c)} \right\}^{0.5} \quad (2.55)$$

O valor do coeficiente de fluência aos 28 dias  $\phi_{28}(t, t_o)$  é dado pela equação (2.56), na qual  $\phi_o$  é o coeficiente nominal de fluência e  $\beta_c(t, t_o)$  é a função que descreve o desenvolvimento da fluência no tempo após a aplicação da carga. O coeficiente nominal de fluência  $\phi_o$  calcula-se com base nas equações (2.57) a (2.60).

$$\phi_{28}(t, t_o) = \phi_o \beta_c(t, t_o) \quad (2.56)$$

$$\phi_o = \phi_{RH} \beta(f_{cm28}) \beta(t_o) \quad (2.57)$$

$$\phi_{RH} = 1 + \frac{1 - rh}{\sqrt[3]{0.1 \left[ (V/S) / (V/S)_o \right]}} \quad (2.58)$$

$$\beta(f_{cm28}) = \frac{5.3}{\sqrt{f_{cm28} / f_{cmo}}} \quad (2.59)$$

$$\beta(t_o) = \frac{1}{0.1 + t_o^{0.2}} \quad (2.60)$$

O efeito do tipo de cimento e a temperatura durante o processo de cura é levado em conta, substituindo nas equações (2.60) e (2.64) o valor de  $t_o$  pelo valor ajustado  $t_{oad}$ , definido pela equação (2.61); na qual  $t_{o,T}$  é a idade de carregamento do concreto em função da temperatura durante o processo de cura, calculada com a equação (2.62),  $\alpha$  determina a influência do tipo de cimento segundo a equação (2.63), e  $T$  é a temperatura em °C.

$$t_{oad} = t_{o,T} \left( \frac{9}{2 + t_{o,T}^{1.2}} + 1 \right)^\alpha \geq 0.5 \text{ dias} \quad (2.61)$$

$$t_{o,T} = t_o \exp \left( 13.65 - \frac{4000}{273 + T} \right) \quad (2.62)$$

$$\alpha = \begin{cases} 0 & \text{para Tipo I (R)} \\ -1 & \text{para Tipo II (SL)} \\ 1 & \text{para Tipo III (RS)} \end{cases} \quad (2.63)$$

O coeficiente  $\beta_c(t, t_o)$  que descreve o comportamento da fluência a longo do tempo é calculado mediante as equações (2.64) e (2.65).

$$\beta_c(t, t_o) = \left[ \frac{(t - t_o)}{\beta_H + (t - t_o)} \right]^{0.3} \quad (2.64)$$

$$\beta_H = 150 \left[ 1 + (1.2rh)^{18} \right] (V/S) / (V/S)_o + 250 \leq 1500 \quad (2.65)$$

Para considerar o efeito de temperaturas elevadas, o procedimento consiste em substituir o  $\phi_{RH}$  na equação (2.57), pelo  $\phi_{RH,T}$  calculado conforme as equações (2.66) e (2.67), e o valor de  $\beta_H$  na equação (2.64), pelo  $\beta_{H,T}$  calculado segundo as equações (2.68) e (2.69).

$$\phi_{RH,T} = \phi_T + (\phi_{RH} - 1)\phi_T^{1.2} \quad (2.66)$$

$$\phi_T = \exp[0.015(T - 20)] \quad (2.67)$$

$$\beta_{H,T} = \beta_H \beta_T \quad (2.68)$$

$$\beta_T = \exp\left(\frac{1500}{273+T} - 5.12\right) \quad (2.69)$$

#### 2.6.4. Modelo CEB MC90-99

O modelo CEB MC90-99 é uma atualização do modelo CEB MC90, que inclui concretos de alta resistência, e separa a retração nas suas componentes: autógena e por secagem; sendo que o cálculo da retração por secagem é similar ao cálculo da retração total no modelo CEB MC90. O termo usado para considerar a umidade relativa é extremamente sensível a pequenas variações da mesma. São feitas considerações especiais para elevadas e reduzidas temperaturas, e também para altos níveis de tensão.

Para utilizar o modelo CEB MC90-99 são necessários os seguintes parâmetros, adicionais aos comuns para todos os modelos:

- a) resistência à compressão do concreto (MPa);
- b) temperatura (°C) (Para altas temperaturas).
- c) tensão do concreto no momento da aplicação do carregamento (MPa) (Para tensões elevadas, superiores ao 40% de  $f_{cm28}$ ).

Uma das principais diferenças entre os modelos CEB MC90 e o CEB MC90-99, consiste na separação que o último faz para a retração total  $\varepsilon_{sh}(t, t_c)$ , que é dividida em retração autógena  $\varepsilon_{cas}(t)$  e retração por secagem  $\varepsilon_{cds}(t, t_c)$ , conforme equação (2.70).

$$\varepsilon_{sh}(t, t_c) = \varepsilon_{cas}(t) + \varepsilon_{cds}(t, t_c) \quad (2.70)$$

A componente autógena é calculada segundo as equações (2.71) à (2.73), em que  $f_{cm28}$  é a resistência à compressão do concreto aos 28 dias (MPa),  $f_{cmo}$  é uma constante com valor de 10 MPa,  $t$  é a idade do concreto (dias), e  $\alpha_{as}$  é um coeficiente dependente do tipo de cimento (Tabela 4).

Tabela 4. Coeficientes em função do tipo do cimento para modelo CEB MC90-99.

Tipo de cimento	$\alpha_{as}$	$\alpha_{ds1}$	$\alpha_{ds2}$
Tipo I (R)	700	4	0.12
Tipo II (SL)	800	3	0.13
Tipo III (RS)	600	6	0.12

$$\varepsilon_{cas}(t) = \varepsilon_{caso}(f_{cm28})\beta_{as}(t) \quad (2.71)$$

$$\varepsilon_{caso}(f_{cm28}) = -\alpha_{as} \left( \frac{f_{cm28}/f_{cmo}}{6 + f_{cm28}/f_{cmo}} \right)^{2.5} \times 10^{-6} \quad (2.72)$$

$$\beta_{as}(t) = 1 - \exp(-0.2t^{0.5}) \quad (2.73)$$

Para o cálculo da retração por secagem  $\varepsilon_{csd}(t, t_c)$  emprega-se a equação (2.74), sendo  $\varepsilon_{csdo}(f_{cm28})$  o coeficiente nominal de retração por secagem,  $\beta_{RH}$  o coeficiente que considera o efeito da umidade relativa, e  $\beta_{ds}(t, t_c)$  a função que descreve o comportamento no tempo da retração por secagem.

$$\varepsilon_{csd}(t, t_c) = \varepsilon_{csdo}(f_{cm28})\beta_{RH}\beta_{ds}(t, t_c) \quad (2.74)$$

A equação (2.75) apresenta o cálculo para  $\varepsilon_{csdo}(f_{cm28})$ , com os coeficientes  $\alpha_{ds1}$  e  $\alpha_{ds2}$  em função do tipo de cimento (Tabela 4). O coeficiente  $\beta_{RH}$ , é calculado na equação (2.76). A função do tempo  $\beta_{ds}(t, t_c)$  se calcula conforme equação (2.77), sendo  $rh$  o valor da umidade relativa em decimais,  $\beta_{s1}$  um fator calculado segundo equação (2.78),  $t_c$  a idade do concreto na que começou a secagem (dias),  $(V/S)$  a relação volume-superfície (mm),  $(V/S)_o$  uma constante com um valor igual a 50 mm.

$$\varepsilon_{csdo}(f_{cm28}) = \left[ (220 + 110\alpha_{ds1}) \exp(-\alpha_{ds2}f_{cm28}/f_{cmo}) \right] \times 10^{-6} \quad (2.75)$$

$$\beta_{RH} = \begin{cases} -1.55(1 - rh^3) & \text{para } 0.4 \leq rh < 0.99\beta_{s1} \\ 0.25 & \text{para } rh \geq 0.99\beta_{s1} \end{cases} \quad (2.76)$$

$$\beta_{ds}(t, t_c) = \left\{ \frac{(t - t_c)}{350 \left[ (V/S)/(V/S)_o \right]^2 + (t - t_c)} \right\}^{0.5} \quad (2.77)$$

$$\beta_{s1} = \left( \frac{3.5f_{cmo}}{f_{cm28}} \right)^{0.1} \leq 1.0 \quad (2.78)$$

O cálculo inicial do coeficiente de fluência, sem aplicar os ajustes pelo tipo de cimento e a temperatura, é muito similar ao modelo CEB MC90, exceto pela inclusão dos

coeficientes  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , que modificam o valor de alguns fatores em função da resistência do concreto. O coeficiente de fluência aos 28 dias  $\phi_{28}(t, t_o)$  é calculado segundo a equação (2.79).

$$\phi_{28}(t, t_o) = \phi_o \beta_c(t, t_o) \quad (2.79)$$

A parcela que correspondente ao coeficiente nominal da fluência é calculado baseando-se nas equações (2.80) à (2.83). Considerando  $t_o$  a idade de aplicação do carregamento (dias), e os coeficientes de correção  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  em função da resistência do concreto, são calculados com as equações (2.84) e (2.85).

$$\phi_o = \phi_{RH} \beta(f_{cm28}) \beta(t_o) \quad (2.80)$$

$$\phi_{RH} = \left\{ 1 + \frac{1 - rh}{\sqrt[3]{0.1 \left[ (V/S) / (V/S)_o \right]}} \alpha_1 \right\} \alpha_2 \quad (2.81)$$

$$\beta(f_{cm28}) = \frac{5.3}{\sqrt{f_{cm28} / f_{cmo}}} \quad (2.82)$$

$$\beta(t_o) = \frac{1}{0.1 + t_o^{0.2}} \quad (2.83)$$

$$\alpha_1 = \left( \frac{3.5 f_{cmo}}{f_{cm28}} \right)^{0.7} \quad (2.84)$$

$$\alpha_2 = \left( \frac{3.5 f_{cmo}}{f_{cm28}} \right)^{0.2} \quad (2.85)$$

O coeficiente  $\beta_c(t, t_o)$  calcula-se em base as equações (2.86) à (2.88), considerando o coeficiente  $\alpha_3$  (Equação 2.88).

$$\beta_c(t, t_o) = \left[ \frac{(t - t_o)}{\beta_H + (t - t_o)} \right]^{0.3} \quad (2.86)$$

$$\beta_H = 150 \left[ 1 + (1.2rh)^{18} \right] (V/S) / (V/S)_o + 250 \alpha_3 \leq 1500 \alpha_3 \quad (2.87)$$

$$\alpha_3 = \left( \frac{3.5 f_{cmo}}{f_{cm28}} \right)^{0.5} \quad (2.88)$$

Para considerar o efeito da temperatura e do tipo de cimento durante o tempo de cura, segue-se o mesmo esquema do modelo CEB MC-90, substituindo nas equações (2.83) e (2.86) o valor de  $t_o$ , pelo ajustado  $t_{oad}$  mediante o emprego das equações de (2.89) à (2.91).

$$t_{oad} = t_{o,T} \left( \frac{9}{2 + t_{o,T}^{1.2}} + 1 \right)^\alpha \geq 0.5 \text{ dias} \quad (2.89)$$

$$t_{o,T} = t_o \exp\left(13.65 - \frac{4000}{273+T}\right) \quad (2.90)$$

$$\alpha = \begin{cases} 0 & \text{para Tipo I (R)} \\ -1 & \text{para Tipo II (SL)} \\ 1 & \text{para Tipo III (RS)} \end{cases} \quad (2.91)$$

Para calcular o coeficiente de fluência sob altas temperaturas  $\phi_{28,T}(t, t_o, T)$ , emprega-se a equação (2.92). O coeficiente  $\phi_{o,T}$  é obtido da equação (2.80), mas substituindo o  $\phi_{RH}$  pelo  $\phi_{RH,T}$  resultante da equação (2.93). O  $\beta_{c,T}(t, t_o)$  é calculado com a equação (2.86), mas substituindo o  $\beta_H$  pelo  $\beta_{H,T}$  obtido pela equação (2.95). Finalmente o último termo correspondente ao transiente térmico é calculado com base na equação (2.97), sendo  $T$  o valor da temperatura (°C).

$$\phi_{28,T}(t, t_o, T) = \phi_{o,T} \beta_{c,T}(t, t_o) + \Delta\phi_{T,trans} \quad (2.92)$$

$$\phi_{RH,T} = \phi_T + (\phi_{RH} - 1) \phi_T^{1.2} \quad (2.93)$$

$$\phi_T = \exp[0.015(T - 20)] \quad (2.94)$$

$$\beta_{H,T} = \beta_H \beta_T \quad (2.95)$$

$$\beta_T = \exp\left(\frac{1500}{273+T} - 5.12\right) \quad (2.96)$$

$$\Delta\phi_{T,trans} = 0.0004(T - 20)^2 \quad (2.97)$$

No caso dos efeitos produzidos por valores elevados de tensões aplica-se uma correção ao coeficiente nominal da fluência (Equação 2.80), que consiste em multiplicar o valor previamente calculado por uma expressão que considera o valor da tensão elevada, segundo equação (2.98), na qual  $\phi_o$  é o resultado prévio, sem se realizar nenhuma alteração da equação (2.80), e  $k_\sigma$  é definido pela equação (2.99).

$$\phi_{o,k} = \phi_o \exp[1.5(k_\sigma - 0.4)] \quad (2.98)$$

$$k_\sigma = \frac{\sigma_{apl}}{f_{cmto}} \quad (2.99)$$

O cálculo da resistência à compressão calculada no tempo de aplicação de carga  $t_o$ , é feita segundo Chatterjee (2004), equação (2.100), sendo  $a$  e  $b$  parâmetros dependentes do tipo de cimento utilizado (Tabela 5).

$$f_{cmto} = f_{cm28} \frac{t_o^{3/4}}{a + bt_o^{3/4}} \quad (2.100)$$

Tabela 5. Coeficientes em função do tipo do cimento para o cálculo da resistência do concreto nas primeiras idades (Chatterjee, 2004).

Tipo de cimento	a	b
Tipo I (R)	2.8	0.77
Tipo II (SL)	3.4	0.72
Tipo III (RS)	1.0	0.92

#### 2.6.5. Modelo CEB MC10

O modelo CEB MC10 é uma atualização dos modelos anteriores do CEB: MC90 e MC90-99. No caso da deformação por retração não se introduziram modificações em relação ao modelo CEB MC90-99. Dessa forma é válida a formulação exposta no item 2.6.4 do presente trabalho. Para utilizar o modelo CEB MC10 são necessários os seguintes parâmetros, adicionais aos comuns para todos os modelos:

- resistência à compressão do concreto (MPa);
- temperatura (°C) (Para altas temperaturas).
- tensão do concreto no momento da aplicação do carregamento (MPa) (Para tensões elevadas, superiores ao 40% de  $f_{cm28}$ ).

O cálculo do coeficiente de fluência  $\phi(t, t_o)$ , é dividido em duas parcelas: a fluência básica  $\phi_{bc}(t, t_o)$  e a fluência por secagem  $\phi_{dc}(t, t_o)$ , conforme a equação (2.101). Sendo que o cálculo da fluência por secagem é similar ao cálculo do coeficiente de fluência total no modelo CEB MC90-99.

$$\phi(t, t_o) = \phi_{bc}(t, t_o) + \phi_{dc}(t, t_o) \quad (2.101)$$

A parcela que correspondente à fluência básica é calculada baseando-se nas equações (2.102) à (2.104). Considerando  $f_{cm28}$  a resistência à compressão do concreto aos 28 dias (MPa),  $t$  a idade do concreto (dias),  $t_o$  a idade de aplicação do carregamento (dias) e  $t_{o,adj}$  a idade de carga ajustada conforme as equações (2.105) à (2.107), para levar em consideração o efeito da temperatura durante o tempo de cura. Com  $T$  a temperatura (°C) e  $\alpha$  um coeficiente em função do tipo de cimento.

$$\phi_{bc}(t, t_o) = \beta_{bc}(f_{cm28}) \beta_{bc}(t, t_o) \quad (2.102)$$

$$\beta_{bc}(f_{cm28}) = \frac{1.8}{(f_{cm28})^{0.7}} \quad (2.103)$$

$$\beta_{bc}(t, t_o) = \ln \left[ \left( \frac{30}{t_{o,adj}} + 0.035 \right)^2 (t - t_o) + 1 \right] \quad (2.104)$$

$$t_{oad} = t_{o,T} \left( \frac{9}{2 + t_{o,T}^{1.2}} + 1 \right)^\alpha \geq 0.5 \text{ dias} \quad (2.105)$$

$$t_{o,T} = t_o \exp \left( 13.65 - \frac{4000}{273 + T} \right) \quad (2.106)$$

$$\alpha = \begin{cases} 0 & \text{para Tipo I (R)} \\ -1 & \text{para Tipo II (SL)} \\ 1 & \text{para Tipo III (RS)} \end{cases} \quad (2.107)$$

A parcela da fluência por secagem é calculada conforme as equações (2.108) à (2.114). Considerando  $rh$  o valor da umidade relativa em decimais e  $(V/S)$  a relação volume-superfície (mm).

$$\phi_{dc}(t, t_o) = \beta_{dc}(f_{cm28}) \beta(rh) \beta_{dc}(t_o) \beta_{dc}(t, t_o) \quad (2.108)$$

$$\beta_{dc}(f_{cm28}) = \frac{412}{(f_{cm28})^{1.4}} \quad (2.109)$$

$$\beta(rh) = \frac{1 - rh}{\sqrt[3]{0.1 \left[ \frac{2(V/S)}{100} \right]}} \quad (2.110)$$

$$\beta_{dc}(t_o) = \frac{1}{0.1 + t_{o,adj}^{0.2}} \quad (2.111)$$

$$\beta_{dc}(t, t_o) = \left[ \frac{(t - t_o)}{\beta_H + (t - t_o)} \right]^{\gamma(t_o)} \quad (2.112)$$

$$\beta_H = 1.5 \times 2(V/S) + 250 \alpha_{f_{cm}} \leq 1500 \alpha_{f_{cm}} \quad (2.113)$$

$$\alpha_{f_{cm}} = \left( \frac{35}{f_{cm28}} \right)^{0.5} \quad (2.114)$$

Para calcular o coeficiente de fluência sob altas temperaturas  $\phi(t, t_o, T)$ , emprega-se a equação (2.115). Os coeficientes  $\phi_{bc,T}$  e  $\phi_{dc,T}$  são obtidos das equações (2.116) à (2.118), sendo que adicionalmente na equação (2.112) o termo  $\beta_H$  deve ser substituído por  $\beta_{H,T}$  (Equações (2.119) e (2.120)).  $\Delta\phi_{T,trans}$  é o transiente térmico por fluência calculado conforme a equação (2.121).

$$\phi(t, t_o, T) = \phi_{bc,T}(t, t_o) + \phi_{dc,T}(t, t_o) + \Delta\phi_{T,trans} \quad (2.115)$$

$$\phi_{bc,T} = \phi_{bc} \phi_T \quad (2.116)$$

$$\phi_{dc,T} = \phi_{dc} \phi_T^{1.2} \quad (2.117)$$

$$\phi_T = \exp[0.015(T - 20)] \quad (2.118)$$

$$\beta_{H,T} = \beta_H \beta_T \quad (2.119)$$

$$\beta_T = \exp\left(\frac{1500}{273+T} - 5.12\right) \quad (2.120)$$

$$\Delta\phi_{T,trans} = 0.0004(T - 20)^2 \quad (2.121)$$

Para considerar o efeito de valores de tensões de entre o 40% e o 60% da resistência do concreto, efetua-se o ajuste sugerido na equação (2.122), na qual  $\phi(t, t_o)$  se calcula de acordo com a equação (2.101) e  $k_\sigma$  é definido pela equação (2.123).

$$\phi_\sigma(t, t_o) = \phi(t, t_o) \exp[1.5(k_\sigma - 0.4)] \quad (2.122)$$

$$k_\sigma = \frac{|\sigma_c|}{f_{cm}(t_o)} \quad (2.123)$$

#### 2.6.6. Modelo GL2000

O modelo GL2000 foi desenvolvido por Gardner e Lockman (2001) e Gardner (2004). O método está principalmente direcionado para sua utilização com fins de projeto, exceto pela resistência à compressão do concreto, todas as variáveis são conhecidas pelo engenheiro no momento de se projetar a estrutura. Para empregar o modelo GL2000 é necessário conhecer o valor dos parâmetros comuns para todos os modelos, e adicionalmente a resistência à compressão do concreto (MPa).

Para o cálculo da deformação por retração  $\varepsilon_{sh}(t, t_c)$  emprega-se a equação (2.124) sendo  $\varepsilon_{shu}$  o valor da deformação última por retração,  $\beta_{RH}$  o coeficiente de correção em função da umidade relativa e  $\beta(t, t_c)$  o fator de correção em função do tempo de secagem.

$$\varepsilon_{sh}(t, t_c) = \varepsilon_{shu} \beta_{RH} \beta(t, t_c) \quad (2.124)$$

O valor da deformação última por retração  $\varepsilon_{shu}$  é dado pela equação (2.125), sendo  $f_{cm28}$  o valor da resistência à compressão do concreto aos 28 dias (MPa), e  $k$  um fator em função do tipo de cimento determinado segundo equação (2.126).

$$\varepsilon_{shu} = 900k \left( \frac{30}{f_{cm28}} \right)^{1/2} \times 10^{-6} \quad (2.125)$$

$$k = \begin{cases} 1.00 & \text{para Tipo I (R)} \\ 0.75 & \text{para Tipo II (SL)} \\ 1.15 & \text{para Tipo III (RS)} \end{cases} \quad (2.126)$$

Os coeficientes de correção que levam em consideração a umidade relativa  $\beta_{RH}$  e o tempo de secagem  $\beta(t, t_c)$  são definidos pelas equações (2.127) e (2.128) respectivamente, sendo  $rh$  o valor da umidade relativa expressada como decimal,  $t$  a idade do concreto (dias),  $t_c$  a idade na que começou a secagem (dias) e  $(V/S)$  a relação volume-superfície (mm).

$$\beta_{RH} = 1 - 1.18rh^4 \quad (2.127)$$

$$\beta(t, t_c) = \left[ \frac{(t - t_c)}{(t - t_c) + 0.12(V/S)^2} \right]^{1/2} \quad (2.128)$$

Para o cálculo do coeficiente de fluência aos 28 dias, emprega-se a equação (2.129), na qual  $\Phi(t_c)$  é um fator de correção em função do efeito do secado antes da aplicação do carregamento,  $\phi_{bc}(t, t_o)$  corresponde à parcela da fluência básica e  $\phi_{dc}(t, t_o)$  corresponde à parcela da fluência por secagem.

$$\phi_{28}(t, t_o) = \Phi(t_c) [\phi_{bc}(t, t_o) + \phi_{dc}(t, t_o)] \quad (2.129)$$

As parcelas da fluência  $\phi_{bc}(t, t_o)$  e  $\phi_{dc}(t, t_o)$  calculam-se segundo as equações (2.130) e (2.131) respectivamente, enquanto ao fator que considera a secagem previa à carga  $\Phi(t_c)$  se determina com a equação (2.132), na qual  $t_o$  é a idade na qual foi aplicado o carregamento (dias).

$$\phi_{bc} = 2 \frac{(t - t_o)^{0.3}}{(t - t_o)^{0.3} + 14} + \left( \frac{7}{t_o} \right)^{0.5} \left( \frac{(t - t_o)}{(t - t_o) + 7} \right)^{0.5} \quad (2.130)$$

$$\phi_{dc}(t, t_o) = 2.5(1 - 10.86rh^2) \left( \frac{(t - t_o)}{(t - t_o) + 0.12(V/S)^2} \right)^{0.5} \quad (2.131)$$

$$\Phi(t_c) = \begin{cases} 1 & \text{para } t_o = t_c \\ \left\{ 1 - \left[ \frac{(t_o - t_c)}{(t_o - t_c) + 0.12(V/S)^2} \right]^{0.5} \right\}^{0.5} & \text{para } t_o > t_c \end{cases} \quad (2.132)$$

## 2.7. LIMITAÇÕES E DIFERENÇAS ENTRE OS MODELOS

A escolha do modelo adequado deve levar em conta dois aspectos: os limites de validade do modelo, e a praticidade, ponderando o nível de precisão requerida com a dificuldade para conhecer os parâmetros de entrada necessários. Na Tabela 6 apresenta-se um resumo dos intervalos de validade para os parâmetros dos seis modelos implementados.

Tabela 6. Intervalos de validade para cada modelo.

Parâmetro	ACI 209R-92	Bazant- Baweja B3	CEB MC90	CEB MC90-99	CEB MC10	GL2000
Resistência à compressão do concreto aos 28 dias - $f_{cm28}$ (MPa)	-	17 a 70	20 a 90	15 a 120	20 a 130	16 a 82
Umidade relativa do ambiente - $rh$ (%)	40 a 100	40 a 100	40 a 100	40 a 100	40 a 100	20 a 100
Tipo de cimento	I ou III (R ou RS)	I, II ou III (R, SL ou RS)				
Tensões em função da resistência à compressão do concreto (%)	<50	<45	<40	<40	<40	-
Tempo de cura úmida - $t_c$ (dias)	$\geq 1$	$\geq 1$	<14	<14	<14	$\geq 1$
Tempo de cura a vapor - $t_c$ (dias)	1 a 3	-	-	-	-	-
Tempo de aplicação do carregamento - $t_o$ (dias)	$\geq 7$	$t_o \geq t_c$	>1	>1	>1	$t_o \geq t_c \geq 1$
Temperatura (°C)	-	-	5 a 30	10 a 30	5 a 30	-
Consumo de cimento - $c$ (kg/m <sup>3</sup> )	279 a 446	160 a 720	-	-	-	-
Relação agregado/cimento - $a/c$	-	2.5 a 13.5	-	-	-	-
Relação água/cimento - $w/c$	0.35 a 0.85	-	-	-	-	0.40 a 0.60

Ha diversas considerações com relação aos parâmetros que devem ser levados em conta para a predição dos fenômenos de fluência e retração no concreto. Em termos gerais, devem se levar em consideração: as propriedades mecânicas do concreto, a geometria da peça, as condições ambientais, e os tempos de ocorrência dos fenômenos; mas não há um acordo enquanto aos parâmetros específicos a serem considerados. Apresenta-se na Tabela 7, um resumo com os parâmetros de entrada necessários para a utilização de cada um dos seis modelos implementados. Segundo o *ACI Committee 209* (2008), todo modelo deve considerar no mínimo:

- a) a descrição do concreto, as proporções do seus componentes ou as propriedades mecânicas como o módulo de elasticidade;
- b) a umidade relativa do ambiente;
- c) o tempo de aplicação das cargas;
- d) a duração da aplicação das cargas;
- e) a duração do processo de secagem;
- f) o tamanho da peça.

O modelo deve estar proposto de maneira que permita ao usuário a substituição do valor da resistência do concreto pela medida experimentalmente, e a extrapolação dos resultados para obter predições a longo prazo. As expressões matemáticas utilizadas devem ser simples e não muito sensíveis a pequenas mudanças nos parâmetros de entrada.

Tabela 7. Parâmetros para a predição de cada modelo.

Parâmetro	ACI		Bazant-Baweja B3		CEB MC90		CEB MC99		CEB MC10		GL2000	
	F	R	F	R	F	R	F	R	F	R	F	R
Resistência à compressão do concreto (MPa)			X	X	X	X	X	X	X	X		X
Relação volume-superfície (mm)	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Umidade relativa do ambiente (%)		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Tipo de cimento			X	X	X	X	X	X	X	X		X
Procedimento de cura	X	X	X	X								
Idade começo secagem/fim cura (dias)		X	X	X		X		X		X	X	X
Idade de aplicação da carga (dias)	X		X		X		X		X		X	
Consumo de agregado (kg/m <sup>3</sup> )			X									
Consumo de cimento (kg/m <sup>3</sup> )		X	X	X								
Consumo de água (kg/m <sup>3</sup> )			X	X								
Slump do concreto (mm)	X	X										
Porcentagem de agregado miúdo (%)	X	X										
Teor de ar (%)	X	X										
Densidade do concreto (kg/m <sup>3</sup> )	X											
Temperatura (°C)					X		X		X			

\* **F** = *Fluência*, **R** = *Retração*

## 2.8. COMPARAÇÃO ESTATÍSTICA DOS MODELOS

Numerosos métodos foram desenvolvidos visando a predição dos fenômenos da fluência e da retração no concreto. A variabilidade destes fenômenos tornou a sua predição um desafio, devido à variabilidade dos fatores que incidem no seu comportamento. As deformações produzidas por causa da fluência e da retração prejudicam a durabilidade a longo prazo das estruturas e conseqüentemente afetam sua estabilidade e sua capacidade de suportar carregamentos, contribuindo com as excessivas deformações e a fissuração das peças. Assim, é crucial uma predição realista, que consiga refletir acertadamente o comportamento do concreto, garantindo um projeto estrutural seguro e durável. No entanto, os modelos existentes diferem significativamente nos seus resultados. A pergunta então é, qual dos modelos permite uma predição mais realista do comportamento do material.

Para comparar a exatidão dos diferentes modelos, faz-se necessário uma avaliação estatística da variabilidade das predições em comparação com os resultados experimentais.

Tradicionalmente um conjunto de dados produto de um modelo teórico pode ser comparado com um resultado experimental, e ser caracterizado mediante indicadores estatísticos que refletem a proximidade desse modelo com a realidade.

Porém, existem algumas particularidades que fazem com que nem sempre os indicadores típicos sejam os apropriados para caracterizar o erro relativo das predições para a fluência e a retração, levando em consideração que esses indicadores se aplicariam unicamente nos tempos nos quais se tem uma medida experimental efetuada. Em primeiro lugar, tanto a fluência como a retração crescem com o passar do tempo, fazendo com que exista uma tendência de que a diferença entre os dados calculados e os experimentais se incremente enquanto maior for o tempo transcorrido. Outro aspecto consiste em que a variabilidade nas idades iniciais é muito maior e vai diminuindo com o passar do tempo, assim, tradicionalmente tem-se múltiplas medições para idades curtas e poucas para idades avançadas, quando o interesse prático está nas predições a longo prazo. Isso se traduz em que modelos com uma boa aproximação inicial avaliem-se como apropriados sendo que ao longo prazo não necessariamente estão refletindo adequadamente a realidade.

Diferentes soluções têm sido empregadas pelos pesquisadores para avaliar a exatidão desses métodos, mas não existe um consenso a respeito de qual indicador estatístico deve ser empregado na comparação dessas predições. No presente trabalho, disponibilizam-se cinco avaliações estatísticas que permitem avaliar o nível de exatidão que apresenta cada método.

As primeiras duas opções consistem em duas abordagens diferentes para calcular o desvio padrão dos dados, sendo que a primeira mede as diferenças nos tempos nos quais foram coletados os dados experimentais, e a segunda mede as diferenças em cem pontos igualmente espaçados ao longo do tempo de ensaio. Os outros três indicadores correspondem a procedimentos amplamente usados na bibliografia para caracterizar esses fenômenos: o coeficiente de variação  $\omega_{BP}$ , proposto por Bažant e Panula (1978), os indicadores estatísticos do CEB ( $V_{CEB}$ ,  $F_{CEB}$  e  $M_{CEB}$ ) sugeridos por Müller e Hilsdorf (1990), e o coeficiente de variação de Gardner  $\omega_G$  desenvolvido por Gardner (2004).

#### 2.8.1. Desvio Padrão em pontos experimentais

O desvio padrão foi calculado nos tempos correspondentes às medições experimentais. O valor de desvio padrão SD (Equação 2.110), encontra-se nas mesmas unidades da variável. A diferença relativa RD (Equações 2.111 e 2.112) já é adimensional,

comparando a diferença existente em cada ponto, com o valor observado e dando como resultado uma porcentagem dessa diferença.

$$SD = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (C_i - O_i)^2}{n}} \quad (2.133)$$

$$RD = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n RD_i^2} \quad (2.134)$$

$$RD_i = \frac{(C_i - O_i)}{O_i} \quad (2.135)$$

Nas expressões acima têm-se:  $n$  o número de pontos observados,  $O_i$  o valor medido da variável no  $i$ -ésimo ponto,  $C_i$  o valor calculado da variável no  $i$ -ésimo ponto, e  $RD_i$  a diferença relativa para o  $i$ -ésimo ponto.

A dificuldade com os indicadores estatísticos anteriores consiste em que, tradicionalmente nos ensaios experimentais de fluência e retração se efetuam um grande número de medições nos tempos iniciais (onde os fenômenos apresentam maior variabilidade), e as medições vão se fazendo mais esporádicas com o passar do tempo. Isto faz com que uma curva que possua um bom ajuste nessas primeiras idades obtenha uns indicadores estatísticos bons, independentemente do seu comportamento em tempos avançados; que são realmente os de maior importância na prática.

### 2.8.2. Desvio Padrão em pontos igualmente espaçados no tempo

Para solucionar o problema da abordagem anterior que superestima a importância do comportamento das variáveis em idades iniciais, o tempo total do ensaio foi dividido em um número fixo de intervalos de igual duração. Desse modo efetua-se o mesmo procedimento das equações (2.133) à (2.135), porém modificando algumas das definições das variáveis empregadas nessas equações, que são apresentadas a continuação:  $n=100$  pontos igualmente espaçados no tempo total do ensaio,  $O_{ij}$  o valor observado (interpolado) da variável no  $i$ -ésimo ponto.

Desta vez é considerado o comportamento do modelo ao longo de todo o tempo do ensaio. Porém, é induzido um erro adicional, produto da interpolação linear entre os valores observados, para os tempos fixados.

### 2.8.3. Coeficiente de variação $\varpi_{BP}$

Proposto por Bažant e Panula (1978), divide o tempo em intervalos iguais a décadas logarítmicas, sendo essas de 0 a 9,9 dias, de 10 a 99 dias, de 100 a 999 dias, de 1000 a 9999 dias e de 10000 dias em diante. Um peso é atribuído a cada ponto baseado na década na qual se encontra e no número de pontos observados nessa década. Para fazer a ponderação final calcula-se o valor quadrático médio para os valores resultantes de cada intervalo. O procedimento completo é descrito pelas equações de (2.136) à (2.139).

$$\varpi_{BP} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \varpi_j^2} \quad (2.136)$$

$$\varpi_j = \frac{1}{O_j} \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \varpi_{ij} (C_{ij} - O_{ij})^2} \quad (2.137)$$

$$\overline{O}_j = \frac{1}{n_w} \sum_{i=1}^n (\varpi_{ij} O_{ij}) \quad (2.138)$$

$$\varpi_{ij} = \frac{n}{n_d n_k} \quad (2.139)$$

onde  $n$  é o número de pontos no conjunto de dados  $j$ ;  $n_d$  é o número de décadas em escala logarítmica pelas quais se estendem os dados do conjunto  $j$ ;  $n_k$  é o número de pontos na  $k$ -ésima década, à qual o ponto  $i$  pertence;  $n_w$  é a soma dos pesos de todos os pontos do conjunto de dados  $j$ ;  $N$  é o número de conjuntos de dados;  $\varpi_{ij}$  é o peso atribuído ao  $i$ -ésimo ponto, do conjunto de dados  $j$ ;  $\varpi_j$  é o coeficiente de variação para o conjunto de dados  $j$ ; e finalmente  $\varpi_{BP}$  é o coeficiente de variação global.

### 2.8.4. Indicadores estatísticos do CEB: $V_{CEB}$ , $F_{CEB}$ e $M_{CEB}$

Os indicadores estatísticos do CEB: Coeficiente de variação ( $V_{CEB}$ ), Erro quadrático médio ( $F_{CEB}$ ) e Desvio médio ( $M_{CEB}$ ); foram propostos por Müller e Hilsdorf (1990). Os três indicadores são calculados em seis intervalos de tempo e finalmente se calcula o valor quadrático médio dos seis valores. Os intervalos de tempo são de 0 a 10 dias, de 11 a 100 dias, de 101 a 365 dias, de 366 a 730 dias, de 731 a 1095 dias, e de 1096 dias em diante. Às equações da (2.140) à (2.142) correspondem ao cálculo do coeficiente de variação  $V_{CEB}$ .

$$V_{CEB} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N V_j^2} \quad (2.140)$$

$$V_j = \frac{1}{O_j} \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (C_{ij} - O_{ij})^2} \quad (2.141)$$

$$\overline{O_j} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (O_{ij}) \quad (2.142)$$

onde  $n$  é o número de pontos no intervalo  $j$ ;  $N$  é o número de intervalos;  $V_j$  é o coeficiente de variação para o intervalo  $j$ ; e  $V_{CEB}$  é o coeficiente de variação global.

Note-se que na equação (2.141), o denominador da expressão é  $n-1$ , isso se traduz em que para valores de  $n=1$  o valor do denominador vai ser 0, ignorando o efeito daqueles períodos de tempo com só um ponto observado. Observa-se também na equação (2.141) que toda a expressão está precedida por um termo com denominador  $\overline{O_j}$ , calculado para cada período de tempo, isto faz com que para valores medidos pequenos das variáveis (primeiras idades) o valor do  $V_j$  seja muito maior e vice-versa; superestimando a contribuição dos pontos com valores altos e subestimando aqueles com valores baixos.

O erro quadrático médio  $F_{CEB}$ , calcula a diferença entre os valores calculados e observados comparando-a com o valor observado. As equações para o cálculo são da (2.143) à (2.145). Sendo  $f_i$  a porcentagem de diferença entre o valor observado e calculado para o ponto  $i$ ;  $F_j$  o erro quadrático médio para o intervalo  $j$ ; e  $F_{CEB}$  o erro quadrático médio global.

$$F_{CEB} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N F_j^2} \quad (2.143)$$

$$F_j = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n f_i^2} \quad (2.144)$$

$$f_i = \frac{(C_{ij} - O_{ij})}{O_{ij}} \times 100 \quad (2.145)$$

O desvio médio  $M_{CEB}$  é calculado de acordo com as equações (2.146) e (2.147), em que  $M_j$  é a taxa entre valor calculado e experimental, para o intervalo  $j$ . O  $M_{CEB}$  indica a sistemática subestimação ou superestimação do modelo, sendo que valores inferiores a 1,0 indicam subestimação e valores superiores superestimação. O valor de perfeita correlação é 1,0.

$$M_{CEB} = \frac{\sum_{j=1}^N M_j}{N} \quad (2.146)$$

$$M_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{C_{ij}}{O_{ij}} \quad (2.147)$$

### 2.8.5. Coeficiente de variação $\omega_G$

Este indicador foi desenvolvido por Gardner (2004), a média do valor observado e o valor quadrático médio são calculados em intervalos de tempo semi logarítmicos, nos quais a duração de cada intervalo corresponde a 3,16 vezes a duração do intervalo anterior. Os intervalos são: de 3 a 9,9 dias, de 10 a 31,5 dias, de 31,6 a 99 dias, de 100 a 315 dias, de 316 a 999 dias, de 1000 a 3159 dias, e de 3160 dias em diante. Para obter um critério de ajuste, calcula-se o valor quadrático médio dos valores resultantes para cada intervalo, sem considerar o número de observações efetuadas no mesmo, dando igual peso para cada período de tempo. O coeficiente de variação é o resultado de dividir este valor entre a média dos valores da variável calculada baixo o mesmo critério. O  $\omega_G$  é calculado conforme as equações da (2.148) à (2.152).

$$\omega_G = \frac{s_G}{\bar{O}} \quad (2.148)$$

$$s_G = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (s_j) \quad (2.149)$$

$$\bar{O} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\bar{O}_j) \quad (2.150)$$

$$s_j = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (C_{ij} - O_{ij})^2} \quad (2.151)$$

$$\bar{O}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (O_{ij}) \quad (2.152)$$

### 3. PROPRIEDADES DOS MATERIAIS

Nesse capítulo expõem-se as características e o comportamento dos materiais empregados. No caso do concreto analisa-se seu comportamento quando submetido à tração e à compressão, assim como a metodologia adotada para a análise dos efeitos da fluência e da retração. Apresentam-se separadamente o modelo constitutivo adotado para o aço da armadura, e do perfil metálico. Para o aço protendido, se expõe o procedimento empregado na sua consideração, assim como as restrições do modelo. Finalmente explica-se a abordagem empregada na consideração dos conectores de cisalhamento.

#### 3.1. CONCRETO

No desenvolvimento desse trabalho empregou-se o modelo do concreto utilizado previamente por Tamayo (2011) e Dias (2013). Apresenta-se nesse item um resumo com as características principais do material incluindo o seu comportamento à compressão e à tração. Para informações mais detalhadas consultar os trabalhos mencionados anteriormente.

##### 3.1.1. Comportamento à compressão

Para representar o concreto à compressão empregou-se a Teoria de Plasticidade Associada e o critério de plastificação de Druker-Prager modificado. Definiram-se duas superfícies de escoamento: uma que define o começo da deformação plástica e outra que divide o comportamento com endurecimento não linear do comportamento elasto-plástico perfeito. As superfícies são expressas pela função de plastificação  $f(I_1, J_2)$ , de acordo com a equação (3.1), em função dos invariantes de tensões  $I_1$  e  $J_2$ , com  $\sigma_o$  a tensão efetiva equivalente considerada como a tensão de compressão de um ensaio uniaxial. Os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  são parâmetros do material que foram obtidos a partir dos resultados experimentais de Kupfer et al. (1969):  $\alpha = 0.355\sigma_o$  e  $\beta = 1.355$ .

$$f(I_1, J_2) = (3J_2\beta + \alpha I_1)^{1/2} = \sigma_o \quad (3.1)$$

Considerando  $\sigma_z = 0$ , obtém-se a função de plastificação em termos das componentes das tensões no plano estrutural, equação (3.2). Quando atingida a superfície de plastificação inicial, inicia a expansão das superfícies conforme a lei de endurecimento adotada; até chegar na superfície limite de escoamento, onde inicia-se o comportamento elasto-plástico perfeito.

Finalmente verifica-se a condição de fratura do concreto a compressão. Na Figura 3 são apresentadas as superfícies de escoamento definidas no espaço das tensões principais ( $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ ), com  $f_c$  a resistência média do concreto a compressão uniaxial.

$$f(\sigma) = \left\{ 1.355 \left[ (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y) + 3(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2) \right] + 0.355 \sigma_o (\sigma_x + \sigma_y) \right\}^{1/2} = \sigma_o \quad (3.2)$$

O incremento da deformação plástica é definido de acordo com a equação (3.3), em que  $d\lambda$  é uma constante de proporcionalidade que determina a magnitude da deformação plástica, e  $\partial f(\sigma) / \partial \sigma_{ij}$  define a direção perpendicular à superfície de escoamento.

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f(\sigma)}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3.3)$$

Considera-se o concreto como um material de endurecimento isótropo, cuja superfície de escoamento evolui conforme a deformação plástica aumenta, Equação (3.4).  $f(\sigma)$  é a função de escoamento definida pela equação (3.2), e  $\sigma_y(k)$  representa a tensão de escoamento relacionada ao parâmetro de endurecimento  $k$ , que para a presente formulação corresponde a deformação plástica efetiva (parâmetro  $d\lambda$  considerando a hipótese de endurecimento do trabalho (Owen et al., 1984)).

$$F(\sigma, k) = f(\sigma) - \sigma_y(k) = 0 \quad (3.4)$$

Para a definição do critério de esmagamento simplesmente converteu-se diretamente o critério de plastificação que estava em termos das tensões às deformações, conforme a Equação (3.5). Quando atingida a deformação última  $\varepsilon_u$ , o concreto perde a sua rigidez e resistência. Para considerar o amolecimento do material, quando esse alcança o valor de  $f_c$ , o patamar de escoamento é substituído por uma reta descendente até atingir o valor de deformação última  $\varepsilon_u = 0,01$  (Figura 4).

$$1.355(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 - \varepsilon_x \varepsilon_y) + 1.01625(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2) + 0.355 \varepsilon_u (\varepsilon_x + \varepsilon_y) = \varepsilon_u^2 \quad (3.5)$$

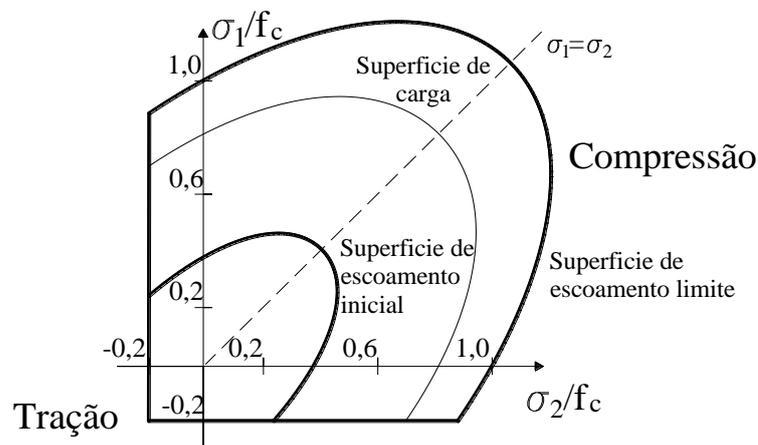


Figura 3. Superfícies de escoamento no plano das tensões principais.

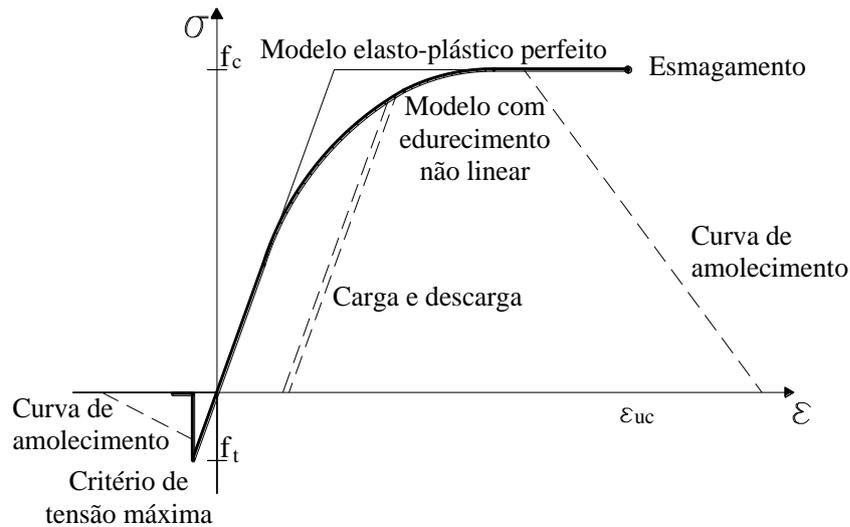


Figura 4. Diagrama unidimensional tensão-deformação para concreto submetido à tração e à compressão.

### 3.1.2. Comportamento à tração

O comportamento à tração no concreto é modelado através do conceito de fissuração distribuída (Póvoas, 1991). Esta abordagem considera a fissuração distribuída na zona de influência associada ao ponto representativo do material. Assim, atualiza-se a relação tensão-deformação nesse ponto após a ocorrência da fissuração, sem ser necessária a modificação da malha de elementos finitos.

A fissuração ocorre quando é excedida a tensão de fratura do concreto pela tensão principal máxima. Forma-se então uma fissura na direção perpendicular à referida tensão principal. Isso faz com que o concreto se transforme em um material ortótropo, com eixos locais de ortotropia coincidentes com as direções das tensões principais (Figura 5). O modelo de fissuração empregado permite ainda a formação de duas fissuras mutuamente ortogonais em cada ponto, mantendo-se as suas direções fixas ao longo de todo o processo de carga. Admitem-se diferentes configurações de fissuração, ilustradas na Figura 6.

Considera-se uma redução gradual do módulo de elasticidade transversal, para levar em consideração os diferentes fenômenos que influenciam significativamente na capacidade do concreto de conduzir forças de corte nos pontos fissurados. Esses fenômenos são: engrenamento entre as faces das fissuras, presença de armaduras e a rigidez ao corte e à flexão das armaduras que as atravessam. No caso de verificar-se o fechamento total da fissura, supõe-se um contato perfeito entre as superfícies e conseqüentemente emprega-se o módulo para o concreto não fissurado.

A aderência existente entre o aço da armadura e o concreto é modelada indiretamente através da relação estabelecida entre as componentes normais dos estados de tensão e de deformação coincidentes com a direção do plano da fissura (Póvoas, 1991), adotando os diagramas de tensão-extensão apresentados na Figura 7, o primeiro utilizado nas zonas com influência da armadura e o segundo em estruturas de concreto simples ou nas zonas que encontram-se fora da zona de influência da armadura. Na Figura 7  $f_t$  é a resistência máxima à tração do concreto,  $E_c$  é o módulo de elasticidade do concreto, e  $\varepsilon_{ct}$  é a deformação correspondente à máxima tração. Na Figura 7. a)  $\varepsilon_m$  é a máxima deformação em função do grau do mecanismo de aderência considerado entre o concreto e a armadura (tomando para  $\alpha$  valores entre 0.5 e 1.0 (Póvoas, 1991)). Na Figura 7. b)  $\varepsilon_m$  se calcula em função da energia de fratura  $G_f$  e a espessura da peça de concreto  $h$ .

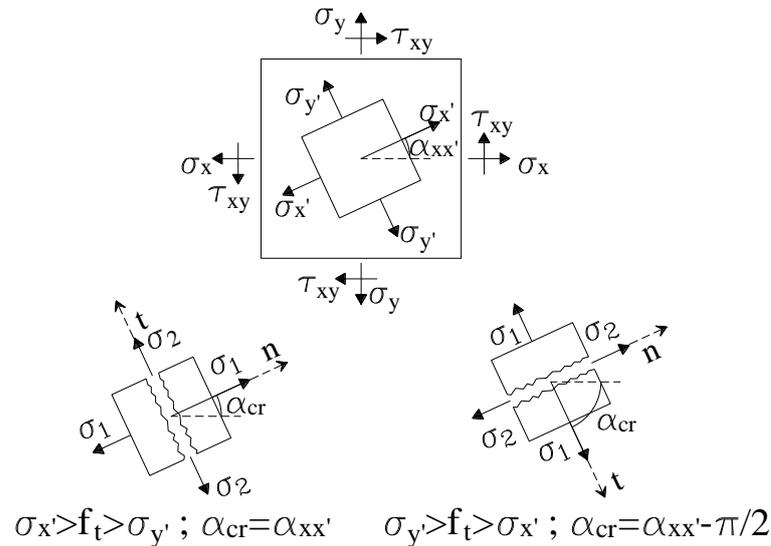


Figura 5. Definição dos eixos de referência da fissura.

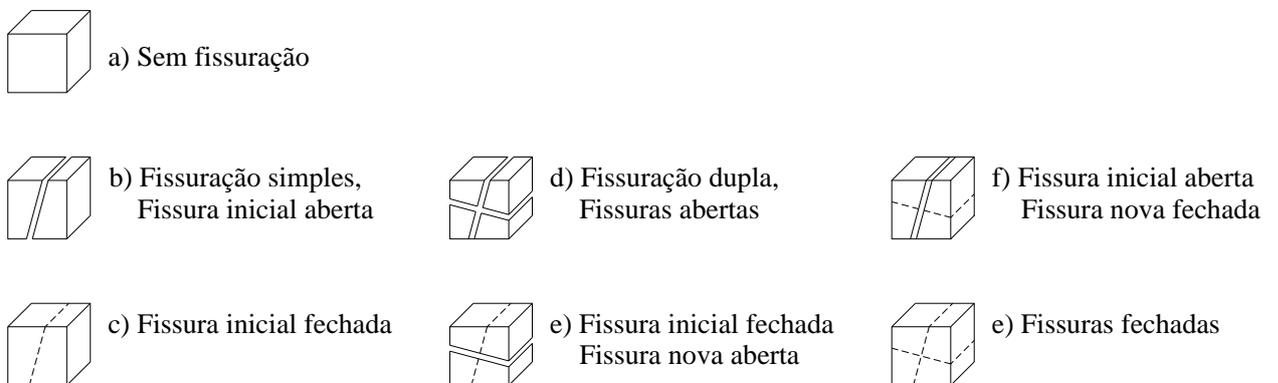


Figura 6. Condições admitidas para fissuração.

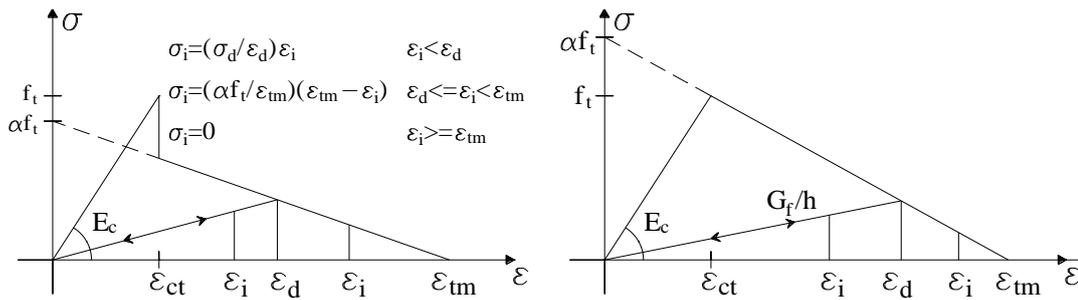


Figura 7. Diagrama de retenção de tensões para o concreto fissurado a) zonas com influência da armadura b) zonas sem influência da armadura.

### 3.1.3. Teoria da solidificação para fluência do concreto

Emprega-se a teoria da solidificação para o tratamento da fluência no concreto, apresentada por Bazant e Prasannan (1989), baseada na micromecânica do processo de envelhecimento. Essa teoria fundamenta-se em que o processo de envelhecimento deve-se, em grande parte, ao incremento de volume da pasta de cimento solidificada por unidade de volume de concreto, que ocupa poros originalmente ocupados pela água e por uma parte de cimento dissolvido (Dias, 2013).

No primeiro passo de carga, para o qual supõe-se a carga dentro dos limites de serviço, análise é feita considerando o comportamento elasto-plástico do concreto. Nos passos posteriores o envelhecimento do concreto é modelado através do aumento de uma fração de volume do material solidificado (cimento hidratado), que é tratado como um material viscoelástico sem envelhecimento descrito por uma cadeia Kelvin com parâmetros  $(E_\mu, \eta_\mu)$  independentes da idade. Emprega-se um histórico de deformações para expressar a taxa total da deformação viscoelástica. A não-linearidade é obtida modificando a atual taxa de fluência por uma função da tensão atual.

A deformação total da cadeia de Kelvin no tempo  $(t)$  devido à carga aplicada no tempo  $(t_0)$  é dada pela equação (3.6), em que  $E_\mu, \tau_\mu = \eta_\mu / E_\mu$  e  $\eta_\mu$  são o módulo de elasticidade, o tempo de retardação e a viscosidade do  $\mu$ -ésimo componente da cadeia de Kelvin respectivamente, e  $N$  é o número total de elementos. Empregaram-se nesse trabalho cinco elementos para ajustar as cadeias de Kelvin às curvas de fluência, número suficiente para alcançar uma boa aproximação segundo o trabalho desenvolvido por Dias (2013).

$$\gamma(t-t_0) = \sum_{\mu=1}^N \frac{1}{E_\mu} \left( 1 - e^{-(t-t_0)/\tau_\mu} \right) \quad (3.6)$$

A determinação dos tempos de retardamento a partir de testes de fluência leva a um sistema de equações mal condicionado. No entanto esses tempos podem ser escolhidos adequadamente com o emprego da equação (3.7) (Bazant e Prasanna, 1989). Sendo  $\tau_1$  pequeno o suficiente para levar em conta o envelhecimento do concreto. A escolha dos  $\tau_\mu$ , no entanto não é totalmente arbitrária. É importante que esses valores cubram o período total de interesse. Bazant e Prasanna (1989) indicam alguns valores de referência, neste trabalho são usados os apresentados na equação (3.8). Para a escolha dos passos de tempo, é mais eficaz manter os passos de tempo na escala logarítmica  $(t-t_0)$ , na qual  $t_0$  é o instante no qual o primeiro carregamento é aplicado na estrutura, ou a primeira deformação imposta. O primeiro passo  $(t_0 - t_1)$  é obtido mediante a equação (3.9), e os passos subsequentes segundo a equação (3.10), na qual  $m$  é o número de passo por década. Em cada passo de tempo é atualizado o valor do módulo de elasticidade, conforme o modelo de predição escolhido; enquanto o valor do coeficiente de Poisson permanece constante.

$$\tau_\mu = \tau_1 10^{\mu-1} \quad \mu=1,2,\dots,N \quad (3.7)$$

$$\tau_1 = 0.01 t_0 \quad \tau_N \geq 0.5 t_{máx} \quad (3.8)$$

$$t_1 - t_0 = 0,1 t_0 \quad (3.9)$$

$$t_{r+1} - t_0 = 10^{1/m} (t_r - t_0) \quad (3.10)$$

Segundo a teoria empregada, a função de fluência para um material viscoelástico com envelhecimento como o concreto vem dada pela equação (3.11), na qual  $E_c(t_o)$  é o módulo de elasticidade no tempo de aplicação da carga ( $t_o$ ) dado em MPa,  $V(t)$  é o volume de concreto solidificado e  $\gamma(t, t_o)$  é a função de fluência para um material sem envelhecimento.

$$J(t, t_o) = \frac{1}{E_c(t_o)} + \frac{\gamma(t, t_o)}{V(t)} \quad (3.11)$$

No entanto, a função de fluência para os seis modelos de predição dos fenômenos de fluência e retração implementados no presente trabalho, pode ser expressada conforme a equação (3.12). A comparação entre as equações (3.11) e (3.12) resulta em que  $\gamma(t, t_o) = \varphi(t, t_o)$  e  $V(t) = E_c(28)$  ou  $V(t) = E_c(t_o)$ , dependendo do modelo empregado.

$$J(t, t_o) = \frac{1 + \varphi(t, t_o)}{E_c(t_o)} \quad \text{modelos ACI 209R-92 e Bazant-Baweja B3} \quad (3.12)$$

$$J(t, t_o) = \frac{1}{E_c(t_o)} + \frac{\varphi(t, t_o)}{E_c(28)} \quad \text{modelos CEB MC90, CEB MC99, CEB MC10 e GL2000}$$

Levando em conta que  $\gamma(t, t_0) = \varphi(t, t_0)$  os parâmetros  $E_\mu$  podem ser obtidos discretizando a função  $\varphi(t, t_0)$ , usando L pontos determinados de acordo com o número de pontos de tempo da análise, conforme a Equação (3.10). Empregando o ajuste de curvas pelo método dos mínimos quadrados tem-se sistema apresentado na Equação (3.13). Com  $\varphi_i$  uma função conhecida; a função a ser aproximada, já sem os coeficientes apresenta-se na Equação (3.14), sendo que os coeficientes a serem aproximados são  $C_j = 1/E_j$ . O sistema de equações encontra-se explicitado na Equação (3.15), com  $\eta_j = \tau_j/E_j$ . Com a resolução do sistema obtêm-se os parâmetros  $E_j$  da cadeia.

$$\sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^n C_j f_j(x_i) f_k(x_i) = \sum_{i=1}^L \varphi_i f_k(x_i) \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, n \quad (3.13)$$

$$f_j = \gamma(t, t_0) = (1 - e^{-(t-t_0)/\tau_j}) \quad (3.14)$$

$$[A]\{X\} = \{B\} \quad \text{ou} \quad A(i, j).X(j) = B(i) \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

$$A(i, j) = \sum_{k=1}^L [1 - e^{-(t-t_0)_k/\tau_i}] [1 - e^{-(t-t_0)_k/\tau_j}] \quad (3.15)$$

$$B(i, j) = \sum_{k=1}^L \varphi(t, t_0)_k [1 - e^{-(t-t_0)_k/\tau_i}]$$

$$X(j) = 1/E_j$$

### 3.2. AÇO DA ARMADURA

As armaduras ordinárias habitualmente utilizadas em estruturas de concreto armado são constituídas por barras de aço de seção circular, com superfícies lisas ou rugosas e diâmetros que variam comumente entre 6 e 40 mm. O aço da armadura caracteriza-se mediante um modelo elasto-plástico com endurecimento. As barras de aço resistem fundamentalmente forças axiais. Dessa forma, emprega-se um modelo uniaxial para a descrição do comportamento do material.

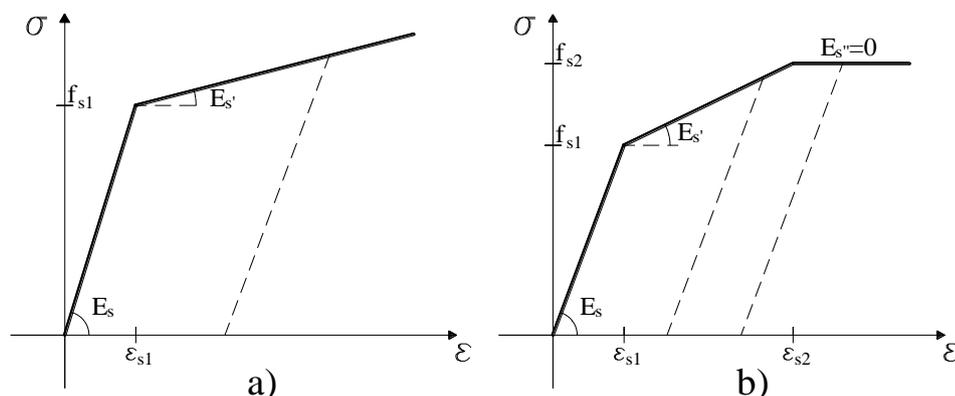


Figura 8. Diagrama tensão-extensão para o aço a) bi-linear b) tri-linear.

Foi adotado um diagrama tensão-extensão bi-linear ou tri-linear (Figura 8) conforme diferentes códigos de projeto.  $E_s$  é o módulo de elasticidade do aço,  $E_{s'}$  a inclinação no segundo tramo da curva e  $E_{s''}$  a inclinação no terceiro tramo. Quando a descarga ocorre a mesma segue a inclinação inicial  $E_s$  (Owen et al., 1984). O cálculo do incremento da tensão axial do aço é conseguido a partir das tensões atuantes no sistema local do ponto de integração correspondente.

### 3.3. AÇO PROTENDIDO

Os cabos de protensão são normalmente constituídas por aço de alta resistência. Um cabo de protensão está composto por cordoalhas, que a sua vez estão compostas de fios de aço, com diâmetros normalmente inferiores a 12 mm. Para modelar o comportamento do aço de protensão emprega-se um modelo uniaxial, similar ao do aço da armadura (Figura 8). Para obter os incrementos das tensões axiais emprega-se a formulação explicada em detalhe no capítulo 4, que permite o seu cálculo a partir das deformações do concreto no qual está inserido; e se utiliza um algoritmo preditor-corretor elasto-plástico que corrige as tensões e garante a satisfação das leis constitutivas mostradas na Figura 8. Nesse trabalho considera-se o pré-esforço como aderente à laje de concreto, fazendo com que exista compatibilidade no campo de deslocamentos do cabo e do concreto no qual está inserido.

Emprega-se uma metodologia que considera a discretização da armadura de pré-esforço aplicando os seus efeitos no elemento do concreto no qual está inserido. A inclusão da rigidez da armadura de pré-esforço contribuindo na rigidez global da estrutura, se traduz em ganhos de eficiência, estabilidade e rapidez do algoritmo de solução não linear, em particular, para níveis de carga próximos do colapso.

A contribuição das armaduras de pré-esforço para o equilíbrio da estrutura deve-se considerar não só a modelação do pré-esforço inicial, mas também as variações ocorridas no valor do pré-esforço ao longo da história de carga. Para levar em consideração este comportamento avaliam-se as perdas que sofre, tanto instantâneas, como ao longo do tempo. Tradicionalmente consideram-se como perdas do pré-esforço os fenômenos que contribuem para uma diminuição do estado de tensão uniforme definido pela aplicação da força de pré-esforço.

Para armaduras pré-tensionadas existem três tipos de perdas: as que antecedem a transferência do pré-esforço, as instantâneas e as perdas diferidas ao longo da história de

carga. As perdas que antecedem a transferência do pré-esforço podem ser associadas ao dispositivo de fixação dos fios, por atrito em eventuais pontos de flexão, por retração do concreto e por relaxação do aço de pré-esforço. As perdas instantâneas podem ser por deformação do concreto e por escorregamento das armaduras nas zonas de amarração. Finalmente as perdas diferidas consistem naquelas que se referem aos fenômenos de fluência e retração no concreto e a relaxação do cabo de pré-esforço.

Para as armaduras pós-tensionadas as perdas podem ser instantâneas ou diferidas. As perdas instantâneas são por atrito entre a armadura e as bainhas, por penetração das cunhas e deformação das ancoragens, e por deformação do concreto em conformidade com a sequência de esticamento adotada para as armaduras de pré-esforço. As perdas diferidas são aquelas produto da fluência e da retração no concreto e as por relaxação do cabo de pré-esforço.

### 3.4. AÇO ESTRUTURAL

O aço possui um comportamento elasto-plástico com endurecimento. Para representá-lo emprega-se um modelo constitutivo que considera a deformação elasto-plástica, para o qual é necessário determinar o critério de plastificação, a lei de escoamento e a lei de endurecimento. A função de escoamento à tração e à compressão para o aço é a mesma; emprega-se então a lei de Huber-Von Mises para metais, que é expressada em termos das tensões no plano estrutural conforme equação (3.16). Na Figura 9 apresenta-se a representação em duas dimensões desse critério de plastificação no espaço das tensões principais  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ .

$$f(\sigma) = \left( \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2 \right)^{1/2} = \sigma_o \quad (3.16)$$

A lei de escoamento que relaciona os incrementos das deformações plásticas com as tensões do material é representada da mesma maneira que para o concreto, conforme a equação (3.3). No entanto, a lei de endurecimento que define o movimento da superfície de escoamento conforme a deformação plástica aumenta é monitorada extrapolando as tensões multiaxiais ao campo uniaxial. De acordo com Owen et al. (1984) essa relação uniaxial define-se conforme a equação (3.17), com  $\sigma_y^{k-1}$  tensão de escoamento correspondente ao incremento de carga  $k-1$ ,  $\sigma_y^k$  e  $\Delta \varepsilon_p^k$  a tensão de escoamento e o incremento da deformação plástica no incremento de carga  $k$ , e  $H'$  o módulo de endurecimento do material.

$$\sigma_y^k = \sigma_y^{k-1} + H' \left( \Delta \varepsilon_p^k \right) \quad (3.17)$$

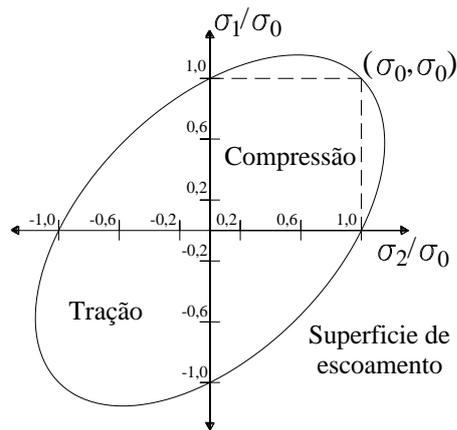


Figura 9. Critério de plastificação em tração e compressão para o aço.

### 3.5. CONECTORES

Para simular a variação de rigidez do conector conforme o incremento da força de corte é necessário conhecer a curva força cortante-deslocamento relativo do conector. É realizado um ajuste da curva através de uma equação exponencial dependente dos parâmetros  $a$  e  $b$  proposto por Yam e Chapman (1968), conforme a equação (3.18) (Figura 10). Nessa equação  $F_\alpha$  é a força de cisalhamento atuante no conector na direção  $\alpha$ ,  $a$  e  $b$  são constantes que definem tamanho e forma da curva e  $s_\alpha$  é o deslocamento relativo associado à direção  $\alpha$ .

$$F_\alpha = a(1 - e^{-bs_\alpha}) \quad (3.18)$$

Para determinar a rigidez do conector pode se empregar a rigidez tangente ou a rigidez cortante, uma representação das duas abordagens é apresentada na Figura 10. No caso da rigidez tangente, supõe-se que uma direção qualquer é considerada, determinando a rigidez de  $\kappa$  conforme a equação (3.19). Já para a rigidez secante emprega-se a equação (3.20).

$$\kappa = \frac{dF}{ds} = abe^{-bs} \quad (3.19)$$

$$\kappa = F / s \quad (3.20)$$

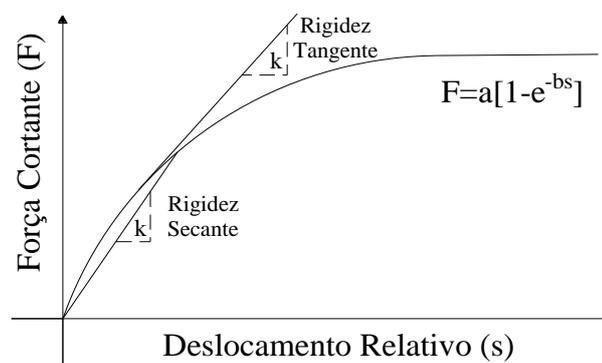


Figura 10. Curva exponencial ajustada: força cortante-deslocamento relativo típica. Rigidez tangente e rigidez secante do conector.

#### 4. ASPECTOS DA ANÁLISE NUMÉRICA

O modelo numérico empregado para representar a viga mista é o mesmo utilizado por Tamayo (2011) e Dias (2013), acrescentando a implementação do elemento de cabo protendido interno na laje de concreto. O modelo numérico baseia-se no método dos elementos finitos, sendo utilizados quatro elementos finitos diferentes para a representação dos componentes da estrutura da viga mista. Para as relações de equilíbrio utiliza-se o princípio dos trabalhos virtuais.

A laje de concreto é representada por elementos de casca degenerada quadráticos de oito nós, os quais encontram-se localizados no plano médio da laje. A viga de aço está constituída por elementos de casca plana fina de quatro nós, localizados nos planos médios das mesas e da alma da correspondente viga de aço. Empregam-se elementos finitos diferentes para a laje de concreto e o perfil metálico devido à espessura dos mesmos, enquanto os elementos finitos que compõem o perfil metálico possuem uma espessura pequena, os elementos da laje possuem uma espessura tal que se faz necessário considerar os as tensões de corte fora do plano. Os conectores de cisalhamento que fazem a ligação entre a viga de aço e a laje de concreto representam-se mediante elementos de barra tridimensionais que unem os planos médios da laje e da mesa superior, nas posições reais dos conectores. Os cabos de aço protendido são representados por elementos unidimensionais quadráticos de três nós. Um esquema com a interação desses elementos apresenta-se na Figura 11.

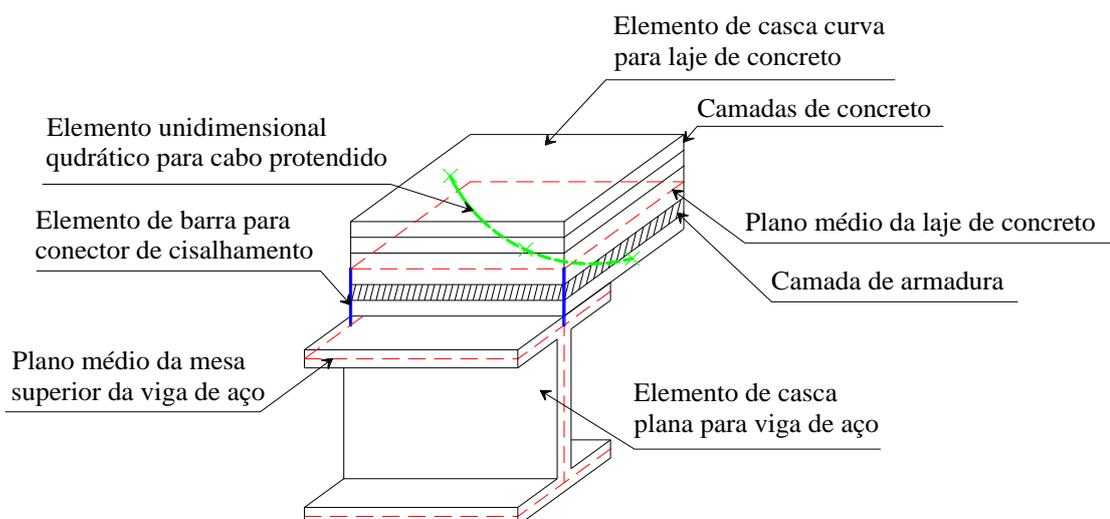


Figura 11. Montagem do modelo numérico para a viga mista.

O sistema de equações não lineares resultante é resolvido através de uma formulação incremental e iterativa baseada no método modificado de Newton-Raphson. O efeito do tempo é levado em conta através de um esquema de integração passo a passo no domínio do tempo em conjunto com o procedimento de análise elasto-plástico. Em cada passo de tempo, um processo incremental de carga é usado, e um processo iterativo é empregado para a solução das equações de equilíbrio para cada incremento de carga (Dias, 2013).

#### 4.1. DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL

O vetor do campo de deslocamentos  $\{u\}$  em qualquer ponto dentro de um elemento é obtido interpolando o vetor de deslocamentos nodais  $\{u\}_e$  conforme a equação (4.1), sendo  $[N]$  a matriz que contém as funções de forma do elemento finito.

$$\{u\} = [N]\{u\}_e \quad (4.1)$$

Conhecidos os deslocamentos em qualquer ponto no interior do elemento, determina-se a deformação utilizando um apropriado operador linear, sendo o campo de deformações definido conforme a equação (4.2), sendo  $[L]$  uma matriz com operadores diferenciais. Usualmente os deslocamentos são expressados a nível nodal, logo é conveniente expressar o campo de deformações  $\{\varepsilon\}$ , em termos dos deslocamento nodais, conforme a equação (4.3), em que  $[B]$  é a matriz de deformação-deslocamento ( $[B]=[L][N]$ )

$$\{\varepsilon\} = [L]\{u\} \quad (4.2)$$

$$\{\varepsilon\} = [B]\{u\}_e \quad (4.3)$$

Conhecida a deformação é possível calcular a as tensões em cada elemento. Nesse trabalho consideram-se as deformações inelásticas dependentes do tempo referentes aos fenômenos de fluência e retração do concreto. Neste caso as tensões são determinadas conforme a equação (4.4), sendo  $[D]$  a matriz constitutiva do material e  $\{\varepsilon^*\}$  o vetor de deformações produto dos efeitos de fluência e retração.

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon - \varepsilon^*\} \quad (4.4)$$

#### 4.2. PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS

Considere-se um corpo sujeito a um conjunto de forças de volume e de superfície que lhe provocam uma deformação. Com base no seu estado de equilíbrio estático, a configuração do corpo é modificada por um conjunto de pequenos deslocamentos e rotações

compatíveis com as condições fronteira. O princípio dos trabalhos virtuais estabelece que o trabalho realizado pelas tensões internas do corpo é igual ao trabalho realizado pelas forças exteriores que agem sobre o mesmo. Considerando um elemento sujeito à ação de forças externas de volume  $\{p_b\}$ , de superfície  $\{p_s\}$ , e concentradas  $\{p_e\}$ , o princípio dos trabalhos virtuais expressa-se conforme a equação (4.5). Substituindo as equações (4.1), (4.3) e (4.4) em (4.5) obtém-se a equação (4.6), que é válida para qualquer deslocamento virtual.

$$\int_{V_e} \delta \varepsilon^T \sigma dV = \int_{V_e} \delta \{u\}^T \{p_b\} dV + \int_{A_e} \delta \{u\}^T \{p_s\} dA + \delta \{u\}_e^T \{p_e\} \quad (4.5)$$

$$\delta \{u\}_e^T \left\{ \left( \int_{V_e} [B]^T [D] [B] dV \right) \{u\}_e - \left( \int_{V_e} [B]^T [D] \{\varepsilon^*\} dV \right) \right\} = \delta \{u\}_e^T \left( \int_{V_e} [N]^T \{p_b\} dV + \int_{A_e} [N]^T \{p_s\} dA + \{p_e\} \right) \quad (4.6)$$

O princípio dos trabalhos virtuais pode ser apresentado conforme a equação (4.7), ou ainda de maneira mais compacta como na equação (4.8), em que  $[K]_e$  é a matriz de rigidez do elemento,  $\{F\}_e$  é o vetor de forças nodais devido às deformações por fluência e retração no concreto, e  $\{P\}_e$  é o vetor de cargas externas totais aplicado ao elemento; definidos nas equações (4.9), (4.10) e (4.11) respectivamente.

$$\int_{V_e} [B]^T [D] [B] dV \{u\}_e = \quad (4.7)$$

$$\int_{V_e} [N]^T \{p_b\} dV + \int_{A_e} [N]^T \{p_s\} dA + \{p_e\} + \int_{V_e} [B]^T [D] \{\varepsilon^*\} dV$$

$$[K]_e \{u\}_e = \{F\}_e + \{P\}_e \quad (4.8)$$

$$[K]_e = \int_{V_e} [B]^T [D] [B] dV \quad (4.9)$$

$$\{F\}_e = \int_{V_e} [B]^T [D] \{\varepsilon^*\} dV \quad (4.10)$$

$$\{P\}_e = \int_{V_e} [N]^T \{p_b\} dV + \int_{A_e} [N]^T \{p_s\} dA + \{p_e\} \quad (4.11)$$

O conceito do princípio dos trabalhos virtuais pode ser estendido de um elemento para a estrutura global, adaptando a equação (4.8). A expressão equivalente a nível estrutural é a equação (4.12), em que  $\{u\}$  contém o deslocamento correspondente aos graus de liberdade de cada nó da estrutura,  $[K]$ ,  $\{F\}$  e  $\{P\}$  são a matriz de rigidez global, o vetor de carga equivalente (para os fenômenos do concreto ao longo do tempo) e o vetor de carga externa respectivamente. Estes são calculados segundo as equações (4.13), (4.14) e (4.15); sendo  $n$  o número total de elementos finitos do modelo.

$$[K] \{u\} = \{F\} + \{P\} \quad (4.12)$$

$$[K] = \sum_n [K]_e \quad (4.13)$$

$$\{F\} = \sum_n \{F\}_e \quad (4.14)$$

$$\{P\} = \sum_n \{P\}_e \quad (4.15)$$

A expressão de equilíbrio (4.12) pode ser reescrita como se apresenta na equação (4.16), sendo  $\{Q\}$  o vetor das forças internas da estrutura e encontra-se definido segundo a equação (4.17).

$$\{P\} - \{Q\} = 0 \quad (4.16)$$

$$\{Q\} = [K]\{u\} - \{F\} = \int_{V_e} [B]^T \{\sigma\} dV \quad (4.17)$$

### 4.3. ELEMENTO FINITO PARA A LAJE DE CONCRETO

Para modelar o concreto emprega-se um elemento finito de casca degenerada do tipo quadrático com oito nós e cinco graus de liberdade por nó (duas rotações e três translações). A definição da independência rotacional e dos deslocamentos dos graus de liberdade permite a consideração das componentes transversais da tensão de corte. Esta aproximação equivale a usar a teoria geral de cascas e se reduz à hipótese de Reissner & Mindlin aplicados a placas. Um esquema deste elemento é apresentado na Figura 12. O elemento é composto de camadas normais à superfície que se assume permanecerem paralelas entre si depois de deformadas. A armadura é representada mediante um modelo distribuído, no qual transformam-se as barras de aço, em uma camada com espessura equivalente à área da seção transversal das barras. Estas camadas são localizadas em uma altura correspondente ao centroide das barras que representam.

As funções de forma do elemento estão determinadas conforme as equações (4.18) e (4.19) para os nós dos cantos e os nós intermediários respectivamente. As tensões e deformações do elemento são definidas considerando a hipótese do estado plano de tensões:  $\sigma_z = 0$ . As componentes de deformação definidas em função dos eixos locais apresentam-se na equação (4.21), enquanto as componentes de tensão encontram-se na equação (4.20), sendo  $u'$ ,  $v'$  e  $w'$  são as componentes do deslocamento no sistema local,  $\{\varepsilon'\}$  é o vetor de deformação e  $[D]$  é a matriz constitutiva.

$$N_k = \frac{1}{4} (1 + \xi \xi_k) (1 + \eta \eta_k) (\xi \xi_k + \eta \eta_k - 1) \quad k = 1, 3, 5, 7 \quad (4.18)$$

$$N_k = \frac{\xi_k^2}{2} \left[ (1 + \eta \eta_k) (1 + \eta^2) + (1 + \eta \eta_k) (1 - \xi^2) \right] \quad k = 2, 4, 6, 8 \quad (4.19)$$

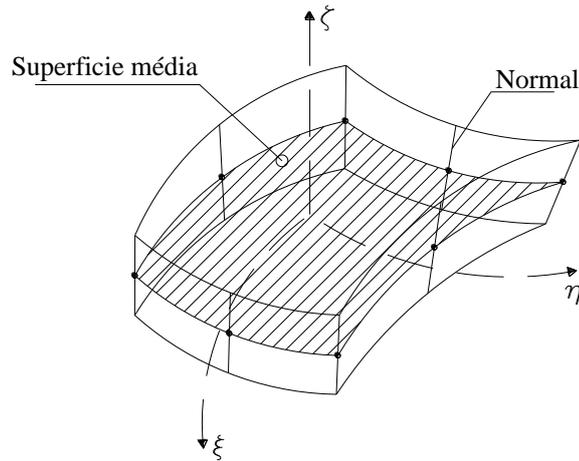


Figura 12. Elemento finito de casca degenerada empregado para modelar a laje de concreto.

$$\{\sigma'\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \tau_{x'y'} \\ \tau_{x'z'} \\ \tau_{y'z'} \end{Bmatrix} = [D]\{\varepsilon'\} \quad (4.20)$$

$$\{\varepsilon'\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} \\ \frac{\partial v'}{\partial y'} \\ \frac{\partial v'}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial v'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial y'} \end{Bmatrix} \quad (4.21)$$

A forças nodais equivalentes e a matriz de rigidez do elemento são obtidas para a iteração  $i$ , segundo as equações (4.22) e (4.23) respectivamente, sendo  $[D_T]_i$  a matriz constitutiva tangente para o material nos eixos locais, segundo corresponda pode ser: a matriz para o concreto fissurado, não fissurado, elasto-plástico, ou para o aço da armadura elástico ou elasto-plástico. A integração é feita para cada camada e são somados os resultados para calcular as ações globais do elemento. No plano da camada emprega-se um esquema de integração 2x2 e o efeito de acoplamento entre os termos de corte e de flexão já está considerado no cálculo da rigidez através da matriz  $[B]_c$ .

$$\{p\}_i = \int_V [B]_c \{\sigma\}_i dV \quad (4.22)$$

$$[K]_c^i = \int_V [B]_c^T [D_T]_i [B]_c dV \quad (4.23)$$

#### 4.4. FORMULAÇÃO PARA O CABO DE PROTENDIDO

O modelo empregado considera o cabo modelado de maneira incorporada dentro do elemento finito de casca (Figura 13), abordagem proposta por Póvoas (1991). O cabo é subdividido em segmentos, correspondentes aos elementos de concreto que atravessa. A localização de cada segmento de cabo, encontra-se definida pelas coordenadas de três nós que determinam a sua geometria. As coordenadas globais são obtidas na fase de pré-processamento, já as coordenadas paramétricas são calculadas no código computacional utilizando um processo de mapeamento inverso. Posteriormente se definem as contribuições que o elemento de cabo faz ao elemento de concreto ao qual pertence. Essas contribuições dizem respeito às cargas aplicadas, tensões produzidas pelo efeito do protendido, deformações e incremento de rigidez. Nesse trabalho foram desconsideradas as perdas por relaxação do cabo. Um procedimento para incluir a consideração das perdas por relaxação e o protendido do tipo não aderente é apresentado com detalhe no trabalho de Póvoas (1991).

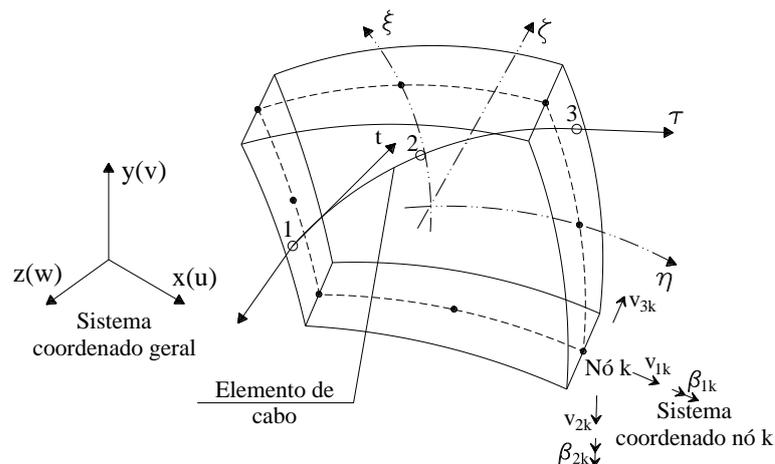


Figura 13. Elemento finito de cabo de protensão.

##### 4.4.1. Mapeamento Inverso

O processo de mapear coordenadas paramétricas  $(\xi, \eta, \zeta)$  em coordenadas globais  $(x, y, z)$  é feito mediante a interpolação das coordenadas nodais do elemento ( $\bar{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ ,  $\bar{y} = [y_1, y_2, \dots, y_n]$ ,  $\bar{z} = [z_1, z_2, \dots, z_n]$ ), empregando para isso as funções de forma  $N_j$  de acordo com a equação (4.24); em que  $n$  é o número de nós que definem o elemento finito.

$$\begin{aligned} x &= \sum_{j=1}^n N_j(\xi, \eta, \zeta) \bar{x}_j \\ y &= \sum_{j=1}^n N_j(\xi, \eta, \zeta) \bar{y}_j \\ z &= \sum_{j=1}^n N_j(\xi, \eta, \zeta) \bar{z}_j \end{aligned} \quad (4.24)$$

No entanto, para o caso do cabo de aço protendido precisou-se fazer o procedimento inverso, ou seja, obter as coordenadas paramétricas dos três pontos que definem a geometria do cabo (dentro de cada elemento de concreto atravessado); a partir das suas coordenadas globais. Para determinar a coordenada  $\zeta$  é feita uma relação linear entre a posição  $z$  do ponto, e a espessura virtual da laje, considerada entre -1 e +1. Agora, para determinar as coordenadas  $\xi$  e  $\eta$  empregasse o procedimento de mapeamento inverso (Farias e Naylor, 1998), recaindo em um sistema não linear, que é solucionado transformando-o em um problema da raízes simultâneas e aplicando o método de Newton Raphson.

Uma variação nas coordenadas globais  $(x, y)$  pode ser descrita em termos das coordenadas paramétricas  $(\xi, \eta)$  conforme a equação (4.25), ou em forma matricial conforme a equação (4.26), em que o valor do Jacobiano  $[J]$  está definido na equação (4.27).

$$\begin{aligned}\Delta x &= \frac{\partial x}{\partial \xi} \Delta \xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} \Delta \eta \\ \Delta y &= \frac{\partial y}{\partial \xi} \Delta \xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} \Delta \eta\end{aligned}\quad (4.25)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = [J] \begin{bmatrix} \Delta \xi \\ \Delta \eta \end{bmatrix}\quad (4.26)$$

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}\quad (4.27)$$

Portanto a variação das coordenadas paramétricas em função das coordenadas globais é descrita na equação (4.28), invertendo-se a matriz  $[J]$  obtém-se a equação (4.29).

$$\begin{bmatrix} \Delta \xi \\ \Delta \eta \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}\quad (4.28)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta \xi \\ \Delta \eta \end{bmatrix} = \left\{ \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial x}{\partial \eta} \\ -\frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}\quad (4.29)$$

O processo iterativo de Newton Raphson é feito de acordo com as equações (4.30) e (4.31). Para isso inicialmente supõe-se um valor qualquer para as coordenadas paramétricas  $(\xi_i, \eta_i)$ , calculam-se as coordenadas  $(x_i, y_i)$  utilizando a equação (4.24) e comparam-se com o valor das coordenadas globais do ponto objetivo  $(x_{obj}, y_{obj})$ , sendo  $\Delta x = x_{obj} - x_i$  e

$\Delta y = y_{obj} - y_i$ . Com os valores de  $\Delta x$  e  $\Delta y$  calculam-se  $\Delta \xi$  e  $\Delta \eta$  (Equação (4.29)) e atualiza-se o valor de  $(\xi_i, \eta_i)$  (Equações (4.30) e (4.31)), repetindo o ciclo até  $\Delta x$  e  $\Delta y$  terem valores inferiores a uma tolerância de  $1e^{-10}$ .

$$\xi_{i+1} = \xi_i + \Delta \xi \quad (4.30)$$

$$\eta_{i+1} = \eta_i + \Delta \eta \quad (4.31)$$

#### 4.4.2. Geometria

Conhecidas as coordenadas globais  $(x, y, z)$  dos pontos nodais, para o elemento de cabo, é possível definir a sua geometria em função da coordenada curvilínea  $\tau$ , através da equação (4.32), sendo  $N'_j$  as funções definidas na equação (4.33).

$$\{x_p(\tau)\} = \sum_{j=1}^3 N'_j(\tau) \{x_j\} \quad (4.32)$$

$$N'_1 = -\frac{1}{2} \xi (1 - \xi)$$

$$N'_2 = (1 - \xi^2) \quad (4.33)$$

$$N'_3 = \frac{1}{2} \xi (1 + \xi)$$

O vetor tangente unitário  $\{t(\tau)\}$  (Figura 13) está definido pela equação (4.34), sendo  $\{v(\tau)\}$  e  $|\{v(\tau)\}|$  determinados conforme as equações (4.35) e (4.36) respectivamente. Ao fazer coincidir o eixo  $x'$  do referencial local com a direção do vetor unitário  $\{t(\tau)\}$ , e considerando que para este caso apenas interessa a deformação axial da armadura de pré-esforço, conclui-se que a definição das orientações dos eixos complementares  $y'$  e  $z'$  está condicionada unicamente pela obrigatoriedade do referencial local constituir um sistema coordenado homogêneo. Assim os vetores unitários do referencial local  $\{i\}, \{j\}, \{k\}$  são definidos conforme a equação (4.37) com  $a, b, c$  determinados na equação (4.38).

$$\{t(\tau)\} = \frac{\{v(\tau)\}}{|\{v(\tau)\}|} \quad (4.34)$$

$$\{v(\tau)\} = \frac{dx}{d\tau} \{i\} + \frac{dy}{d\tau} \{j\} + \frac{dz}{d\tau} \{k\} \quad (4.35)$$

$$|\{v(\tau)\}| = \left[ \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 + \left( \frac{dy}{d\tau} \right)^2 + \left( \frac{dz}{d\tau} \right)^2 \right]^{1/2} = v \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} \{i'\} &= \{t(\tau)\} = a \{i\} + b \{j\} + c \{k\} \\ \{j'\} &= \frac{1}{(b^2 + a^2)^{1/2}} (-b \{i\} + a \{j\}) \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\{k'\} = \frac{i' \times j'}{|i' \times j'|}$$

$$a = \frac{1}{v} \frac{dx}{d\tau} ; \quad b = \frac{1}{v} \frac{dy}{d\tau} ; \quad c = \frac{1}{v} \frac{dz}{d\tau} \quad (4.38)$$

A matriz de rotação  $[\Theta]$ , que relaciona os sistemas de eixos coordenados local e global, está definida na equação (4.39). Assim as derivadas parciais das componentes dos deslocamentos no referencial local são definidas pela equação (4.40). Considerando exclusivamente a componente relativa à extensão axial da armadura a relação simplifica-se à apresentada na equação (4.41).

$$[\Theta] = [\{i'\}, \{j'\}, \{k'\}] \quad (4.39)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} & \frac{\partial v'}{\partial x'} & \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} & \frac{\partial v'}{\partial y'} & \frac{\partial w'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} & \frac{\partial v'}{\partial z'} & \frac{\partial w'}{\partial z'} \end{bmatrix} = [\Theta]^T \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} [\Theta] \quad (4.40)$$

$$\varepsilon_{x'} = \frac{\partial u'}{\partial x'} = \{a \quad b \quad c\} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} \quad (4.41)$$

Recorrendo às expressões do elemento de casca degenerado, é possível explicitar as derivadas parciais das componentes do deslocamento no referencial global, em termos dos deslocamentos nodais da casca. Assim a definição da extensão axial do cabo pode-se definir conforme a equação (4.42), explicitada em (4.43), sendo  $[B_p(\tau)]$  a matriz de deformação da armadura de pré-esforço (apresentada no Apêndice A), e  $\{d\}$  o vetor de deslocamentos nodais no referencial global, com  $i = 1, \dots, 8$  o número de nós do elemento de casca.

$$\varepsilon_{x'} = [B_p(\tau)] \{d\} \quad (4.42)$$

$$\varepsilon_{x'} = [\dots \quad B_{1i} \quad B_{2i} \quad B_{3i} \quad B_{4i} \quad B_{5i} \quad \dots] \begin{Bmatrix} \vdots \\ u_i \\ v_i \\ w_i \\ \alpha_i \\ \beta_i \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (4.43)$$

#### 4.4.3. Forças Nodais Equivalentes

A ação da protensão é modelada através da consideração de uma deformação de origem térmica  $\Delta\varepsilon_{p,T}$ , definida segundo a equação (4.44), sendo  $E_p$  o módulo de elasticidade

do cabo pré-esforçado definido conforme o modelo constitutivo correspondente,  $A_p$  a área transversal do cabo e  $P_o$  a carga de pré-esforço aplicada.

$$\Delta\varepsilon_{p,T} = \frac{P_o}{E_p A_p} \quad (4.44)$$

Na formação do vetor, que contém as forças nodais equivalentes ao estado de tensão instalado da estrutura, a contribuição da armadura de pré-esforço é considerada conforme a equação (4.45), cuja solução se obtém mediante integração numérica segundo a equação (4.46), em que  $\{P_i\}_p$  representa o vetor que contém a contribuição do cabo para a determinação das forças nodais equivalentes referentes ao nó  $i$  do elemento de concreto por ele atravessado; considerando:  $\sigma_{p,k}$  a tensão instalada nos pontos de integração do elemento unidimensional, cujo valor é determinado para uma relação tensão-extensão multilinear idêntica à relação estabelecida para armaduras ordinárias,  $l_p$  é o comprimento do segmento de cabo incorporado dentro o elemento de casca,  $\{v(\tau)\}_k$  é definido na equação (4.36), e  $w_k$  são os pesos dos pontos de integração do elemento de cabo.

$$P_p = \int_{l_p} B_p^T \sigma_p A_p dl \quad (4.45)$$

$$\{P_i\}_p = \sum_{k=1}^{NGAUS=3} [B_i(\tau_k)]_p^T \sigma_{p,k} A_p \{v(\tau_k)\} w_k \quad (4.46)$$

O nível de tensão que corresponde ao incremento genérico  $n$  vem determinado por uma relação incremental conforme a equação (4.47), com  $E_p^*$  atualizado conforme o modelo constitutivo da aço de pré-esforço e  $\Delta\varepsilon_p^n$  definida na equação (4.48) para armaduras aderentes.

$$\begin{aligned} \sigma_p^n &= \sigma_p^{n-1} + \Delta\sigma_p^n \\ \Delta\sigma_p^n &= E_p^* \Delta\varepsilon_p^n \end{aligned} \quad (4.47)$$

$$\Delta\varepsilon_p^n = [B]_p \{\delta\} \quad (4.48)$$

#### 4.4.4. Matriz de Rigidez

O cabo protendido contribui à matriz de rigidez do elemento de casca no qual encontra-se incorporado através da matriz  $[K]_p$  definida na equação (4.49), sendo  $l_p$  o comprimento do segmento de cabo contido no elemento. Em termos das coordenadas curvilíneas  $\tau$  a matriz de rigidez fica definida pela equação (4.50), obtendo-se sua respectiva solução por integração numérica conforme a equação (4.51).

$$[K]_p = \int_{l_p} [B]_p^T E_p A_p [B]_p dl \quad (4.49)$$

$$(K_{ij})_p = \int_{-1}^{+1} (B_i)_p^T E_p A_p (B_j)_p v d\tau \quad (4.50)$$

$$(K_{ij})_p = \sum_{k=1}^{NGAUS=3} (B_i(\xi, \eta, \zeta)_k)_p^T E_p A_p (B_j(\xi, \eta, \zeta)_k)_p v(\tau_k) w_k \quad (4.51)$$

#### 4.4.5. Análise não linear geométrica

Para considerar a não linearidade geométrica, amplia-se a formulação inicialmente desenvolvida para o elemento unidimensional embebido no elemento de casca. Particularizam-se para o referencial local do elemento unidimensional parabólico as expressões relativas ao componente axial das deformações de Green Lagrange: A deformação total  $\varepsilon_p$ , a variação da deformação total  $\delta\varepsilon_p$ , a deformação incremental  $\Delta\varepsilon_p$ , e a variação da deformação incremental  $\delta\Delta\varepsilon_p$ , representadas nas equações (4.52), (4.53), (4.54) e (4.55) respectivamente.

$$\varepsilon_p = \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u'}{\partial x'} \right)^2 + \left( \frac{\partial v'}{\partial x'} \right)^2 + \left( \frac{\partial w'}{\partial x'} \right)^2 \right] \quad (4.52)$$

$$\delta\varepsilon_p = \frac{\partial \delta u'}{\partial x'} + \left( \frac{\partial u'}{\partial x'} \frac{\partial \delta u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \frac{\partial \delta v'}{\partial x'} + \frac{\partial w'}{\partial x'} \frac{\partial \delta w'}{\partial x'} \right) \quad (4.53)$$

$$\Delta\varepsilon_p = \frac{\partial \Delta u'}{\partial x'} + \left( \frac{\partial u'}{\partial x'} \frac{\partial \Delta u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \frac{\partial \Delta v'}{\partial x'} + \frac{\partial w'}{\partial x'} \frac{\partial \Delta w'}{\partial x'} \right) + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \Delta u'}{\partial x'} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Delta v'}{\partial x'} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Delta w'}{\partial x'} \right)^2 \right] \quad (4.54)$$

$$\delta\Delta\varepsilon_p = \frac{\partial \delta u'}{\partial x'} \frac{\partial \Delta u'}{\partial x'} + \frac{\partial \delta v'}{\partial x'} \frac{\partial \Delta v'}{\partial x'} + \frac{\partial \delta w'}{\partial x'} \frac{\partial \Delta w'}{\partial x'} \quad (4.55)$$

A deformação total  $\varepsilon_p$  (4.52) expressada em notação simbólica encontra-se definida na equação (4.56), sendo  $\varepsilon_{p,L}$  a parcela linear da deformação e  $\varepsilon_{p,NL}$  a parcela não linear. Nessa expressão  $[B]_{p,L} = [B_p(\tau)]$  é a matriz de deformação linear da armadura de pré-esforço (Explicitada no Apêndice A),  $\{d\}$  é o vetor de deslocamentos nodais no referencial global, enquanto  $\{A\}$  e o produto  $[G]\{d\}$  são definidos segundo as equações (4.57) e (4.58) respectivamente.

$$\begin{aligned} \varepsilon_p &= \varepsilon_{p,L} + \varepsilon_{p,NL} \\ \varepsilon_{p,L} &= [B]_{p,L} \{d\} \\ \varepsilon_{p,NL} &= \frac{1}{2} \{A\} [G] \{d\} \end{aligned} \quad (4.56)$$

$$\{A\} = \left\{ \frac{\partial u'}{\partial x'} \quad \frac{\partial v'}{\partial x'} \quad \frac{\partial w'}{\partial x'} \right\} \quad (4.57)$$

$$[G]\{d\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u'}{\partial x'} \\ \frac{\partial v'}{\partial x'} \\ \frac{\partial w'}{\partial x'} \end{array} \right\} \quad (4.58)$$

A parcela não linear  $\varepsilon_{p,NL}$  pode ser rescrita conforme a equação (4.59), definindo  $[B]_{p,NL}$  como a matriz de deformação não linear calculada conforme a equação (4.60).

$$\varepsilon_{p,NL} = \frac{1}{2}[B]_{p,NL}\{d\} \quad (4.59)$$

$$[B]_{p,NL} = \{A\}[G] \quad (4.60)$$

A variação da deformação total  $\delta\varepsilon_p$  pode ser expressa em notação simbólica conforme a equação (4.61), distinguindo a parcela linear  $\delta\varepsilon_{p,L}$ , e a não linear  $\delta\varepsilon_{p,NL}$ .

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon_p &= \delta\varepsilon_{p,L} + \delta\varepsilon_{p,NL} \\ \delta\varepsilon_{p,L} &= [B]_{p,L} \delta\{d\} \\ \delta\varepsilon_{p,NL} &= \{A\}[G] \delta\{d\} = [B]_{p,NL} \delta\{d\} \end{aligned} \quad (4.61)$$

$$[G] \delta\{d\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \delta u'}{\partial x'} \\ \frac{\partial \delta v'}{\partial x'} \\ \frac{\partial \delta w'}{\partial x'} \end{array} \right\} \quad (4.62)$$

A expressão em notação simbólica para a deformação incremental  $\Delta\varepsilon_p$ , Equação (4.54), encontra-se na equação (4.63), com  $\Delta[B]_{p,NL}$  e  $\Delta\{A\}$  definidos segundo as equações (4.64) e (4.65), respectivamente.

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon_p &= \Delta\varepsilon_{p,L} + \Delta\varepsilon_{p,NL} \\ \Delta\varepsilon_{p,L} &= [B]_{p,L} \Delta\{d\} \end{aligned} \quad (4.63)$$

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon_{p,NL} &= \{A\}[G] \Delta\{d\} + \frac{1}{2} \Delta\{A\}[G] \Delta\{d\} = \left( [B]_{p,NL} + \frac{1}{2} \Delta[B]_{p,NL} \right) \Delta\{d\} \\ \Delta[B]_{p,NL} &= \Delta\{A\}[G] \end{aligned} \quad (4.64)$$

$$\Delta\{A\} = \left\{ \frac{\partial \Delta u'}{\partial x'} \quad \frac{\partial \Delta v'}{\partial x'} \quad \frac{\partial \Delta w'}{\partial x'} \right\} \quad (4.65)$$

Finalmente a variação da deformação incremental  $\delta\Delta\varepsilon_p$ , Equação (4.55), encontra-se definida em termos da notação simbólica conforme a equação (4.66), com  $\delta\{A\}$  definido segundo a Equação (4.67).

$$\delta\Delta\varepsilon_p = \delta\{A\}[G]\Delta\{d\} \quad (4.66)$$

$$\delta\{A\} = \left\{ \frac{\partial\delta u'}{\partial x'} \quad \frac{\partial\delta v'}{\partial x'} \quad \frac{\partial\delta w'}{\partial x'} \right\} \quad (4.67)$$

Considerando a formulação incremental do princípio dos trabalhos virtuais, a componente do acréscimo do trabalho de deformação devida à contribuição da armadura de pré-esforço expressa-se segundo a equação (4.68). Para o incremento das tensões emprega-se a equação (4.69), e as relações previamente definidas nas equações (4.61) e (4.66).

$$\Delta(\delta U_i)_p = \int_{V_p} \delta\varepsilon_p \Delta\sigma_p dV + \int_{V_p} \delta\Delta\varepsilon_p \sigma_p dV \quad (4.68)$$

$$\Delta\sigma_p = E_p \left( [B]_{p,L} + [B]_{p,NL} \right) \Delta\{d\} \quad (4.69)$$

A componente do acréscimo do trabalho pode reescrever-se conforme a equação (4.70), em que  $[K]_{p,T}$  é a matriz de rigidez tangente, resultado da soma de três matrizes: A matriz de rigidez linear  $[K]_{p,L}$ , a matriz de rigidez dos grandes deslocamentos  $[K]_{p,NL}$ , e a matriz da tensão inicial ou matriz geométrica  $[K]_{p,S}$ ; conforme a equação (4.71). A definição de cada uma dessas está especificada na equação (4.74), utilizando as relações expressadas nas equações (4.72) e (4.73).

$$\Delta(\delta U_i)_p = \int_{l_p} \delta\{d\}^T \left( [B]_{p,L} + [B]_{p,NL} \right)^T E_p \left( [B]_{p,L} + [B]_{p,NL} \right) \Delta\{d\} A_p dl + \quad (4.70)$$

$$\int_{l_p} \sigma_p \delta[A][G]\Delta\{d\} A_p dl = \delta\{d\}^T [K]_{p,T} \Delta\{d\}$$

$$[K]_{p,T} = [K]_{p,L} + [K]_{p,NL} + [K]_{p,S} \quad (4.71)$$

$$\delta[A]^T \sigma_p = [\Sigma][G]\delta\{d\} \quad (4.72)$$

$$[\Sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_p & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_p & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_p \end{bmatrix} \quad (4.73)$$

$$[K]_{p,L} = \int_{l_p} [B]_{p,L}^T E_p [B]_{p,L} A_p dl$$

$$[K]_{p,NL} = \int_{l_p} \left( [B]_{p,L}^T E_p [B]_{p,NL} + [B]_{p,NL}^T E_p [B]_{p,L} + [B]_{p,NL}^T E_p [B]_{p,NL} \right) A_p dl \quad (4.74)$$

$$[K]_{p,S} = \int_{l_p} [G]^T [\Sigma][G] A_p dl$$

Do exposto anteriormente, resulta evidente que em última instância a solução está determinada pelas matrizes  $[B]_{p,L}$  e  $[G]$ . A matriz  $[B]_{p,L}$  é a mesma  $[B_p(\tau)]$  definida na equação (4.43) e explicitada no Apêndice A desse trabalho. Enquanto a matriz  $[G]$  é definida pela equação (4.75), e subdividida então nas submatrizes  $[G_1]$ ,  $[G_2]$  e  $[G_3]$ .

$$[G]\{d\} = \begin{pmatrix} [G_1] \\ [G_2] \\ [G_3] \end{pmatrix} \{d\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} \\ \frac{\partial v'}{\partial x'} \\ \frac{\partial w'}{\partial x'} \end{Bmatrix} \quad (4.75)$$

A submatriz  $[G_1]$  é definida na equação (4.76). Note-se que é a mesma relação apresentada na equação (4.41), assim  $[G_1]$  é igual a  $[B_{p,L}(\tau)]$ , conforme Equação (4.77).

$$[G_1]\{d\} = \frac{\partial u'}{\partial x'} \quad (4.76)$$

$$[G_1] = [B_{p,L}(\tau)] \quad (4.77)$$

A submatriz  $[G_2]$  é definida na equação (4.78). Aplicando a equação (4.40) para expressar os deslocamentos locais (em termos das coordenadas curvilíneas) em função das coordenadas globais da estrutura, o termo  $\partial v'/\partial x'$  é apresentado em (4.79), e pode-se rescrever conforme a equação (4.80), sendo  $i=1,\dots,n$  o número de nós do elemento de casca. Os termos de  $[G_2]$  são explicitados no Apêndice A do presente trabalho.

$$[G_2]\{d\} = \frac{\partial v'}{\partial x'} \quad (4.78)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial x'} = \{a \quad b \quad c\} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{-b}{(b^2 + a^2)^{1/2}} \\ a \\ \frac{0}{(b^2 + a^2)^{1/2}} \end{Bmatrix} \quad (4.79)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial x'} = [G_2]\{d\} = [\dots \quad G_{2,1i} \quad G_{2,2i} \quad G_{2,3i} \quad G_{2,4i} \quad G_{2,5i} \quad \dots] \begin{Bmatrix} \vdots \\ u_i \\ v_i \\ w_i \\ \alpha_i \\ \beta_i \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (4.80)$$

Utilizando um procedimento análogo,  $[G_3]$  é definida na equação (4.81). O termo  $\partial w' / \partial x'$  é expressado em termos dos deslocamentos globais segundo a equação (4.82), que pode ser rescrita conforme a equação (4.83). Os termos explícitos da submatriz  $[G_3]$  são também apresentados no Apêndice A.

$$[G_3]\{d\} = \frac{\partial w'}{\partial x'} \quad (4.81)$$

$$\frac{\partial w'}{\partial x'} = \{a \quad b \quad c\} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -ac \\ -bc \\ a^2 + b^a \end{Bmatrix} \frac{1}{\left[ (ac)^2 + (bc)^2 + (a^2 + b^2)^2 \right]^{1/2}} \quad (4.82)$$

$$\frac{\partial w'}{\partial x'} = \left[ \dots \quad G_{3,1i} \quad G_{3,2i} \quad G_{3,3i} \quad G_{3,4i} \quad G_{3,5i} \quad \dots \right] \begin{Bmatrix} \vdots \\ u_i \\ v_i \\ w_i \\ \alpha_i \\ \beta_i \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (4.83)$$

#### 4.5. ELEMENTO FINITO PARA A VIGA DE AÇO

Para modelar a viga de aço, foi utilizado um elemento finito de casca plana, com quatro nós e seis graus de liberdade por nó. Este elemento é obtido pela combinação do elemento de membrana (graus de liberdade  $u, v, \theta_z$ ) proposto por Ibrahimbegovic et al. (1990) e do elemento de placa fina (graus de liberdade  $w, \theta_x, \theta_y$ ) proposto por Batoz e Tahar (1982). Emprega-se uma regra de integração gaussiana completa de 3x3 no plano do elemento utilizando a quadratura de Gauss-Legendre, e uma regra integração com cinco pontos na espessura, para considerar a variação das propriedades dos materiais associadas à plastificação progressiva no elemento. É importante destacar que para a análise não linear do material, os termos fora da diagonal da matriz de rigidez devem ser considerados para garantir a convergência do procedimento não-linear de Newton Raphson.

As componentes de deformação em um ponto de integração são definidas conforme equação (4.84), na qual  $\{\delta\}_m$  é o vetor que contém os deslocamentos de membrana ( $u, v, \theta_z$ ),  $\{\delta\}_f$  é o vetor dos deslocamentos de flexão ( $w, \theta_x, \theta_y$ ), e  $z$  representa a coordenada na espessura medida a partir do plano médio do elemento.

$$\{\varepsilon\} = [B]_m \{d\}_m + z [B]_f \{d\}_f \quad (4.84)$$

As componentes das tensões são calculadas segundo a equação (4.85), sendo  $[D]$  a matriz constitutiva do material em coordenadas locais. O princípio dos trabalhos virtuais é empregado para o cálculo das forças nodais equivalentes de membrana  $\{P_m\}_i$  e de flexão  $\{P_f\}_i$  para a iteração  $i$  conforme a equação (4.86).

$$\sigma = [D]_s \{\varepsilon\} \quad (4.85)$$

$$\begin{aligned} \{P_m\}_i &= \int_V [B]_m^T \{\sigma\}_i dV \\ \{P_f\}_i &= \int_V z [B]_f^T \{\sigma\}_i dV \end{aligned} \quad (4.86)$$

A matriz de rigidez correspondente ao elemento da viga de aço é definida na equação (4.87), em que  $[K]_m^i$  é a matriz de rigidez de membrana,  $[K]_b^i$  é a matriz de rigidez de flexão,  $[K]_{mb}^i$  é uma matriz de acoplamento entre as duas anteriores e  $[K]_p$  é uma matriz com efeito estabilizador para eliminar a singularidade introduzida na consideração da rotação no plano do elemento. Para maior detalhe consulte-se Tamayo (2011).

$$[K]_s^i = \begin{bmatrix} [K]_m^i + [K]_p & [K]_{mb}^i \\ [K]_{bm}^i & [K]_b^i \end{bmatrix} \quad (4.87)$$

#### 4.6. ELEMENTO FINITO PARA OS CONECTORES

Para modelar os conectores de cisalhamento tipo stud se consideraram elementos finitos tridimensionais de barra, os quais unem os planos médios da laje de aço e a mesa superior da viga de aço. O comprimento desta barra é aproximado ao valor real do comprimento do conector. Os conectores são modelados discretamente, em função da distribuição real dos mesmos. A matriz de rigidez do conector  $[K]_{cone}^i$  corresponde a uma matriz típica para um elemento de barra viga-coluna tridimensional. São empregadas a rigidez axial  $K_A$ , a rigidez de torsão  $K_T$ , e as rigidezes laterais de corte  $K_y$  e  $K_z$ . O grau de liberdade correspondente à torsão  $\theta_x$  é condensado, devido ao elemento da laje não contar com este grau de liberdade. As rigidezes laterais  $K_y$  e  $K_z$  atualizam-se em cada iteração  $i$ , assim, a matriz  $[K]_{cone}^i$  é definida conforme equação (4.88), com  $[K]_i$  segundo equação (4.89). A condição de compatibilidade dos giros é conseguido utilizando valores dos coeficientes de corte  $g_1$  e  $g_2$  muito grandes.

$$[K]_{cone}^i = \begin{bmatrix} [K]_i & [K]_i [R]^T \\ [R][K]_i & [R][K]_i [R]^T \end{bmatrix} \quad (4.88)$$

$$[K]_i = \begin{bmatrix} K_A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_x^i & 0 & 0 & 0 & \frac{K_x^i L}{2} \\ 0 & 0 & K_y^i & 0 & -\frac{K_y^i L}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{K_y^i L}{2} & 0 & \frac{K_y^i L^2}{2}(2+g_2) & 0 \\ 0 & \frac{K_x^i L}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{K_x^i L^2}{2}(2+g_1) \end{bmatrix} \quad (4.89)$$

#### 4.7. SOLUÇÃO INCREMENTAL ITERATIVA

Adotou-se o procedimento empregado por Tamayo (2011), que utiliza uma formulação incremental iterativa para a solução de problemas não lineares, baseada no método modificado de Newton Raphson. Seguindo este método, a matriz de rigidez é atualizada em dois momentos: o primeiro desses na segunda iteração de cada incremento de carga e o segundo quando ocorrer a descarga de um determinado elemento. Esta atualização ocorre em função de considerar o comportamento elasto-plástico dos materiais, empregando os modelos constitutivos relacionados a cada um deles.

O efeito do tempo é considerado através de um esquema de integração passo a passo no domínio do tempo. Assume-se que as mudanças na carga externa ocorrem unicamente no início ou no final de cada passo de tempo, e que durante o passo de carga que as forças externas permanecem constantes. A consideração da carga devido às deformações por fluência e retração do concreto se faz ao final de cada laço de tempo, as deformações geradas por esses fenômenos são convertidas em cargas nodais que são aplicadas no próximo passo de tempo.

Os incrementos de carga externa em um tempo particular podem ser a sua vez subdivididos em intervalos, para detalhar melhor a resposta não linear da estrutura. Para cada intervalo é utilizado um processo iterativo na solução das equações de equilíbrio. Considera-se convergido quando aplicando o teorema dos trabalhos virtuais, a diferença entre o trabalho das forças externas e as tensões internas é inferior a uma determinada tolerância.

## 5. ETAPAS COMPLEMENTARES À ANÁLISE NUMÉRICA

O código computacional implementado requer que lhe sejam fornecidos uma série de dados, correspondentes à geometria do problema, às condições de contorno, às solicitações da estrutura, ao histórico de cargas, e aos parâmetros necessários para avaliar a resposta ao longo do tempo. Essas informações são fornecidas por um arquivo de dados que é gerado em um software de pré-processamento.

Após efetuar os cálculos, para visualizar graficamente os resultados também é necessário um programa, desta vez para pós-processamento. Nesse programa o usuário pode visualizar a resposta ao longo do tempo da estrutura em termos de tensões e deformações. Existem múltiplas ferramentas disponíveis para cumprir a função de pré e pós processamento, nesse trabalho emprega-se o software GiD para tal fim.

O GiD é uma ferramenta para pré e pós processamento de simulações numéricas em ciência e engenharia desenvolvido pelo CIMNE – *International Center for Numerical Methods in Engineering* (Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona-Espanha). É um software amplamente customizável, o que faz com que se adapte facilmente às necessidades do usuário. O GiD permite realizar a geração da malha, a atribuição das propriedades dos materiais, das condições de contorno, e das cargas, além da inclusão de outras informações particulares dependendo das necessidades do usuário; que são exportadas em um arquivo de dados para ser utilizado por um software externo na fase dos cálculos.

### 5.1. PRÉ-PROCESSAMENTO

Para ilustração da etapa de pré-processamento foi utilizada como base a estrutura apresentada na Figura 14. Para a qual desenvolve-se o processo completo de pré-processamento: partindo desde a geometria inicial, até a geração do arquivo de dados de entrada para o código computacional. O processo pode ser dividido em 5 etapas, que são: a geração de cada malha de maneira independente, a união das malhas, a atribuição do *Problem Type*, a introdução das propriedades da estrutura e das condições que está submetida a mesma, e finalmente a introdução dos parâmetros para realizar a análise ao longo do tempo.

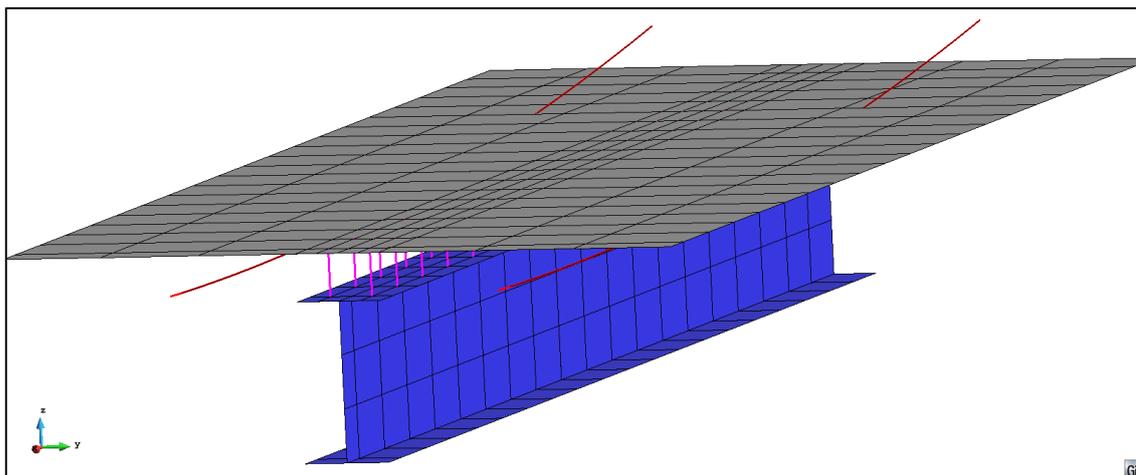


Figura 14. Viga mista usada como exemplo.

#### 5.1.1. Geração de cada malha de maneira independente

São gerados três arquivos independentes correspondentes à laje de concreto, à viga de aço e aos conectores (ou quatro, no caso que a estrutura a modelar possua cordoalhas de aço protendido dentro da laje de concreto). A razão para isso é que o GiD não permite o emprego de elementos de ordem diferente em uma mesma geometria. Cabe lembrar que neste caso empregam-se: para a laje de concreto elementos quadriláteros quadráticos, para a viga de aço elementos quadriláteros lineares, para os conectores elementos de barra lineares, e para os cabos de protensão elementos unidimensionais quadráticos. Na definição da geometria é importante levar em conta em quais lugares da estrutura se aplicarão as cargas e as condições de contorno, para garantir a existência de nós exatamente nesses pontos.

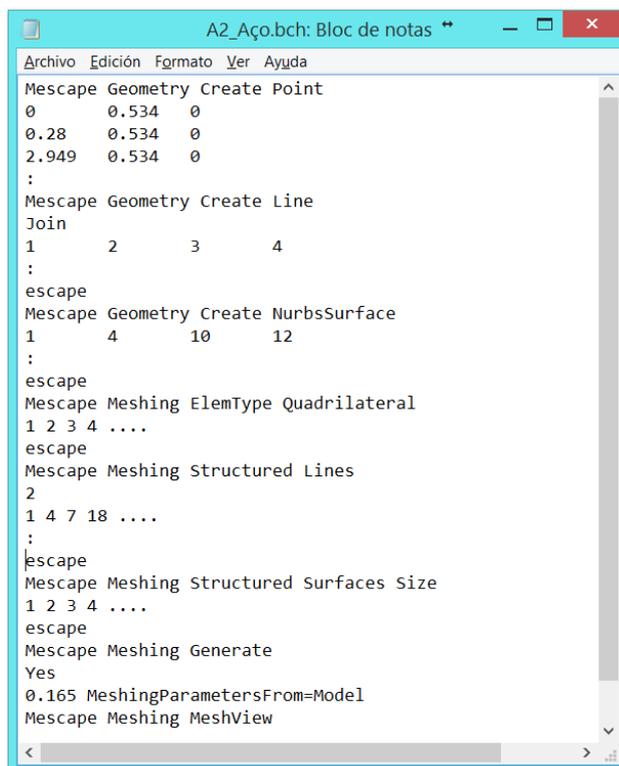
Existem variadas maneiras de gerar a geometria do problema. Em primeiro lugar, podem ser empregadas as ferramentas de desenho próprias do GiD. Uma segunda opção, é importar a geometria desde um software CAD em formato \*.dxf. Uma terceira alternativa, é importar um arquivo de dados com as coordenadas e os comandos que indiquem ao GiD como gerar essa geometria, mediante um arquivo \*.bch.

Considerando-se a primeira opção, é importante saber que o GiD trabalha com uma ordem hierárquica no que se refere às entidades geométricas, então para gerar uma superfície é necessário primeiro desenhar as linhas que a limitam, e atribuir para essas o atributo de superfície, conseqüentemente devem ser desenhados com antecipação os pontos que definem essas linhas. Todas as informações e instruções necessárias para realizar este processo encontram-se no manual do usuário do GiD (Ribó et al., 2014).

No caso de se importar a geometria mediante um arquivo \*.dxf, o procedimento consiste simplesmente em guardar o arquivo gerado pelo programa CAD no formato especificado e depois, a partir do menu do GiD, importar o arquivo (*Files->Import->DXF*).

A alternativa do arquivo \*.bch consiste praticamente em programar uma série de ações para serem realizadas pelo GiD. Trata-se de um arquivo de texto, com uma série de comandos e com as informações referentes às coordenadas dos nós, as conectividades entre esses e a identificação das linhas pertencentes a cada superfície. A vantagem dessa alternativa consiste em que é possível indicar ao GiD através do mesmo arquivo de texto as instruções para gerar a malha. No entanto a elaboração desse arquivo leva tempo e quando se trata de uma estrutura mais ou menos simples são mais práticas as primeiras duas alternativas. Para importar o arquivo \*.bch o procedimento é: *Files->Import->Batch file*. Um arquivo exemplo é apresentado na Figura 15.

Após ter as superfícies geradas no GiD, procede-se com a geração da malha que pode ser estruturada, semiestruturada e não estruturada. Recomenda-se usar uma malha estruturada para problemas com geometrias simples. Na malha estruturada pode-se escolher o número de partes nas quais o usuário quer dividir uma linha, ou a medida máxima dos segmentos que este quer considerar (*Mesh->Structured->Lines->Assign number of cells / Assign Size*).



```

Archivo Edición Formato Ver Ayuda
Mescape Geometry Create Point
0 0.534 0
0.28 0.534 0
2.949 0.534 0
:
Mescape Geometry Create Line
Join
1 2 3 4
:
escape
Mescape Geometry Create NurbsSurface
1 4 10 12
:
escape
Mescape Meshing ElemType Quadrilateral
1 2 3 4 ....
escape
Mescape Meshing Structured Lines
2
1 4 7 18 ....
:
escape
Mescape Meshing Structured Surfaces Size
1 2 3 4 ....
escape
Mescape Meshing Generate
Yes
0.165 MeshingParametersFrom=Model
Mescape Meshing MeshView

```

Figura 15. Exemplo de arquivo \*.bch.

Outro aspecto importante é definir o tipo do elemento finito a ser utilizado, que é diferente para cada uma das malhas. No caso da laje de concreto usa-se um elemento quadrilátero (*Mesh->Element type->Quadrilateral*) quadrático (*Mesh->Quadratic type->Quadratic*). Para a viga de aço um elemento quadrilátero (*Mesh->Element type->Quadrilateral*) linear (*Mesh->Quadratic type->Normal*). Para os conectores não é necessário especificar o tipo do elemento por ser unidimensional, mas sim checar que sua geometria esteja descrita só por dois nós (*Mesh->Quadratic type->Normal*). No caso das cordoalhas empregasse um elemento unidimensional quadrático (*Mesh->Quadratic type->Quadratic*).

Após a definição dessas condições, a malha deve ser gerada (*Mesh->Generate mesh*) e exportada (*Files->Export->GiD mesh*). Deve-se garantir que as malhas sejam compatíveis na ligação dos conectores com os nós tanto da viga como da laje. As figuras 16 a 18 mostram exemplos de malhas separadas para a viga de aço, a laje de concreto e os conectores. No lado esquerdo de cada figura encontram-se as superfícies, considerando a existência de nós nos pontos de aplicação das condições de contorno, e no direito, a malha de elementos finitos.

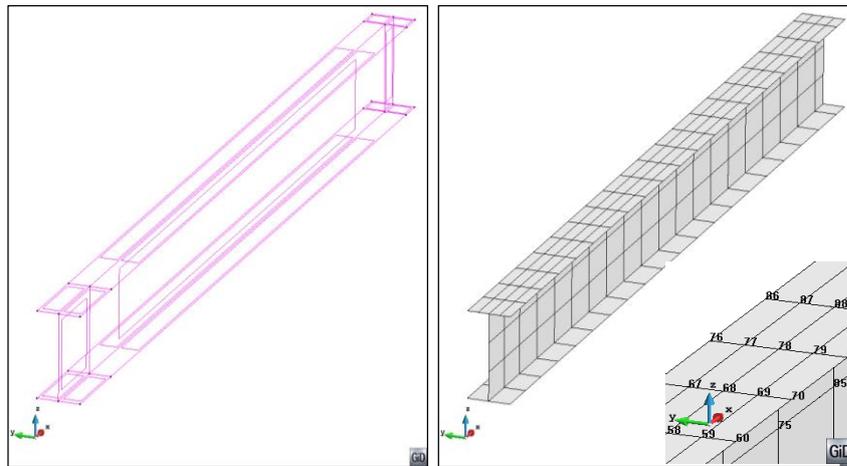


Figura 16. Geometria da viga e malha com elementos finitos quadriláteros lineares.

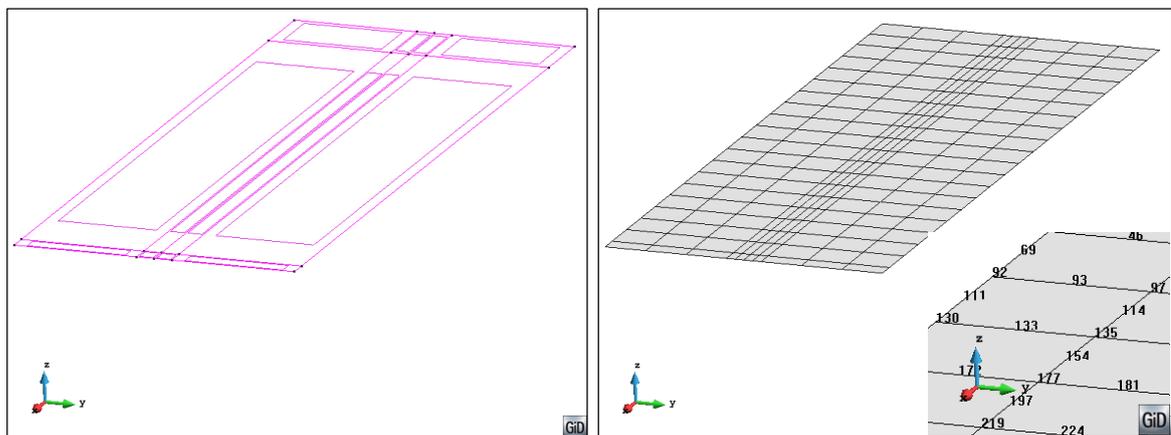


Figura 17. Geometria da laje e malha com elementos finitos quadriláteros quadráticos.

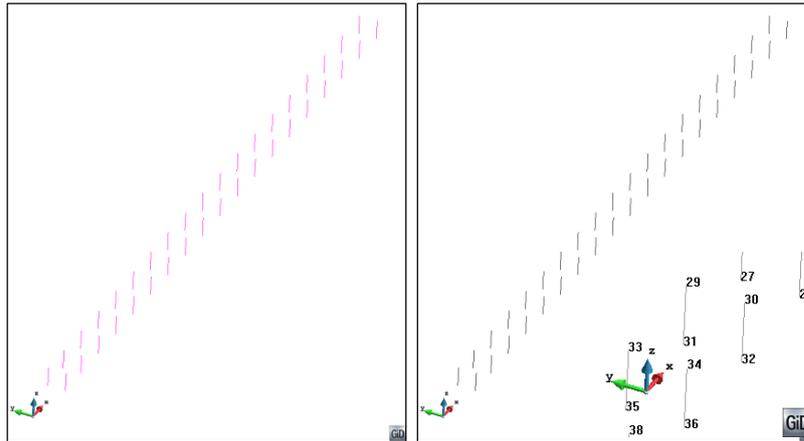


Figura 18. Geometria dos conectores e malha com elementos finitos lineares.

A geração da malha correspondente às cordoalhas é um pouco mais complexa, pois o elemento de cabo deve ser dividido exatamente nos pontos nos quais atravessa cada elemento da malha gerada para a laje de concreto. O procedimento para a geração da malha do cabo se explica na sequência. O primeiro passo consiste em desenhar o cabo protendido (Figura 19), baseando-se nas coordenadas globais dos nós que descrevem sua geometria. O elemento pode ser uma linha (*Geometry->Create->StraightLine*) ou um arco (*Geometry->Create->Arc->By3points*). Depois é necessário sobrepor o elemento com a laje de concreto à qual pertence. Para efetuar esse processo é aconselhável gerar uma *layer* para o cabo e desligar a mesma durante a etapa seguinte do processo.

É necessário salvar uma cópia da malha de concreto em formato \*.dxf (*Files->Export->Using Template .bas(only mesh)->DXF*) para depois ser importada no arquivo da cordoalha e gerar as interseções entre os elementos. Após desligar a *layer* do cabo, importa-se a malha de concreto (*Files->Import->DXF*). Visto que a malha para o concreto foi gerada como uma superfície, e não como um volume, é necessário extrudar a mesma. Para isso selecionam-se os elementos recém importados (localizados na metade da altura da laje de concreto) e se trasladam para as coordenadas correspondentes a fase inferior da laje (*Utilities->Move*).

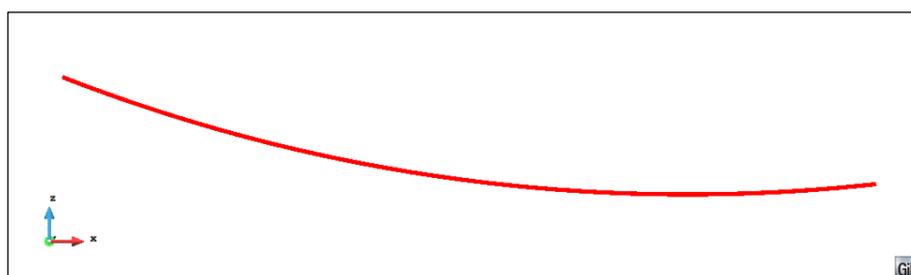


Figura 19. Desenho inicial do cabo.

O próximo passo consiste em ligar de novo a *layer* na qual estava desenhado o cabo. A aparência deve ser similar à apresentada na Figura 20. Todos os elementos devem ser copiados, fazendo uma extrusão dos mesmos a fim de interceptar o cabo com cada elemento do concreto (*Utilities->Copy*). Já na janela do comando para copiar: para o *Entities type* escolhe-se *Lines*, marca-se *Do extrude: Surfaces* e desmarca-se *Maintain layers*. O valor no eixo z, no qual deve-se gerar a cópia, corresponde à espessura real da laje de concreto ou superior. Na Figura 21 apresenta-se um gráfico com a configuração final após realizar a cópia, e na Figura 22 mostram-se as especificações adequadas no momento de copiar os elementos.

Neste ponto é que se geram as interseções entre o cabo e os elementos de concreto atravessados pelo mesmo (*Geometry->Edit->Intersection->Surfaces*). Agora o cabo que tinha sido desenhado inicialmente encontra-se separado em segmentos coincidentes com os elementos de concreto. Na sequência devem-se apagar todos os elementos de geometria auxiliares que se utilizaram para dividir o cabo. Para isso o mais prático é desligar de novo a *layer* do cabo, e apagar tudo o que ainda permaneça na tela. Depois ligar de novo a *layer* do cabo e apagar completamente os elementos diferentes do cabo que ainda existam.

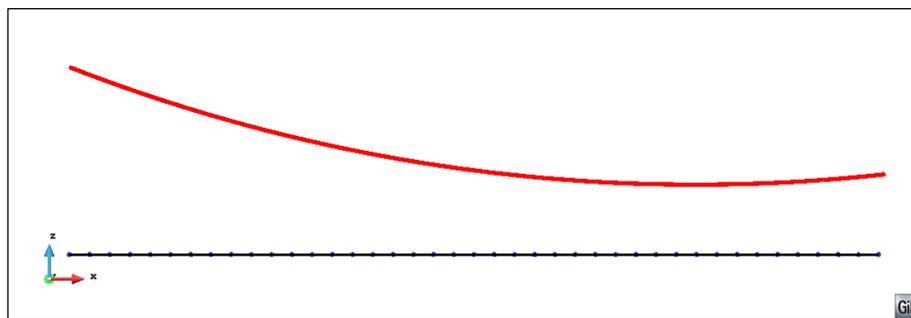


Figura 20. Cabo e laje de concreto localizada na face inferior da laje real.

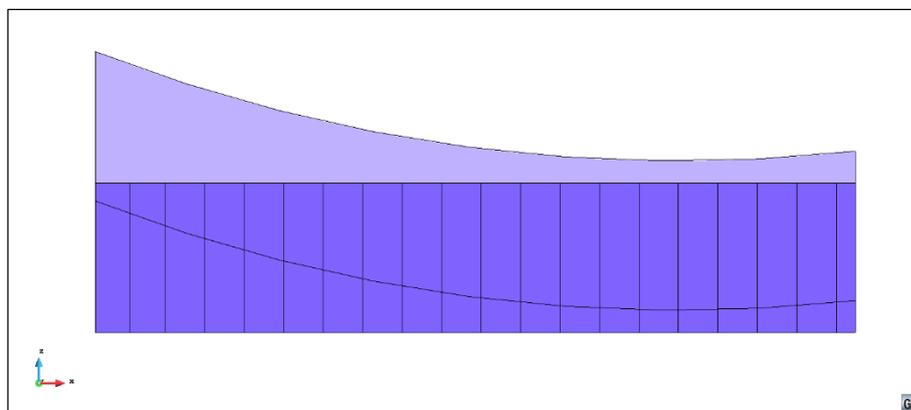


Figura 21. Cabo e laje de concreto copiadas em uma altura igual à espessura real.

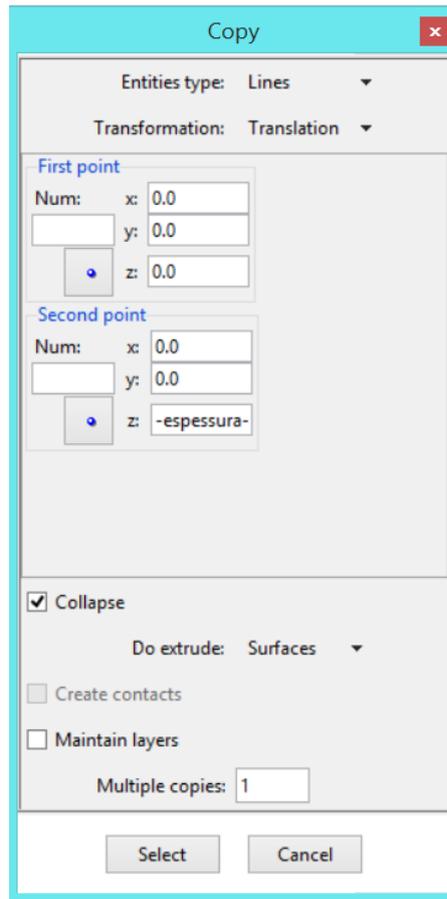


Figura 22. Janela do comando copiar com os parâmetros adequados.

Finalmente obtém-se o cabo dividido em segmentos, conforme apresentado na Figura 23. Agora configuram-se as condições para a malha dos elementos de cabo: *Mesh->Quadratic type-> Quadratic*, *Mesh->Structured->Lines->Assign number of cells =1*, *Mesh->GenerateMesh*. O resultado é uma malha de elementos unidimensionais (retos ou curvos) descritos por três nós (Figura 24 e Figura 25). O último passo consiste em exportar a malha da mesma maneira que para qualquer um dos outros elementos (*Files->Export->GiD mesh*).

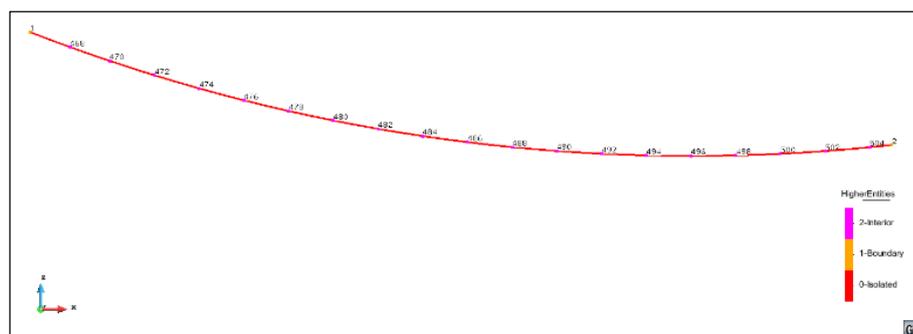


Figura 23. Segmentos do elemento de cabo.

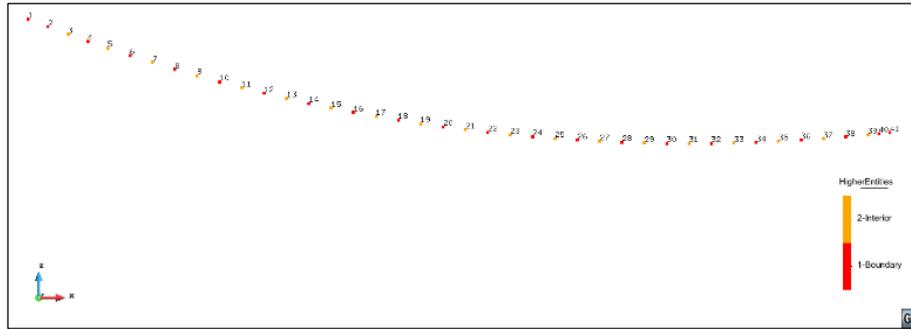


Figura 24. Nós que descrevem o cabo.

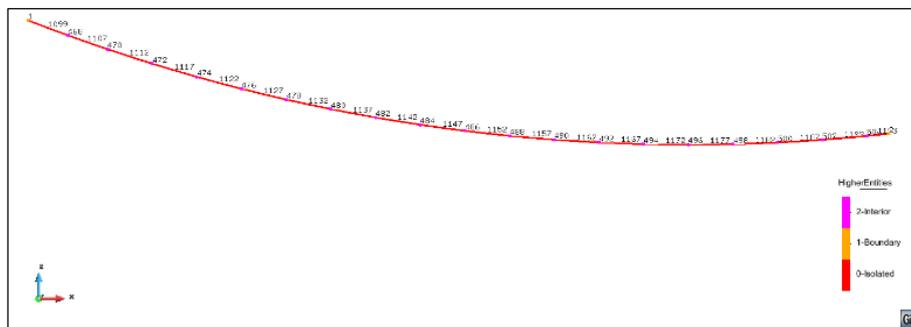


Figura 25. Geometria do cabo e malha de elementos finitos quadráticos.

### 5.1.2. União das malhas

Após a geração das malhas separadamente, estas devem ser importadas em um mesmo arquivo, conforme a seguinte sequência: malha da viga de aço, malha da laje de concreto, malha dos conectores e finalmente a malha dos elementos protendidos. É importante seguir a ordem acima para garantir que a numeração global seja feita nessa mesma sequência. Para importar as malhas utiliza-se a série de comandos: *Files->Import-> GiD mesh*, no momento do GiD questionar sobre a malha existente deve-se marcar a opção *Add No Share*, para adicionar a malha atual sem apagar a anterior. Devem-se criar quatro *layers*, com os nomes STEEL, CONCRETE, CONNECTOR e PRESTRESSED (nessa ordem), na medida que as malhas são importadas, estas devem ser vinculadas à *layer* correspondente (Figura 26).

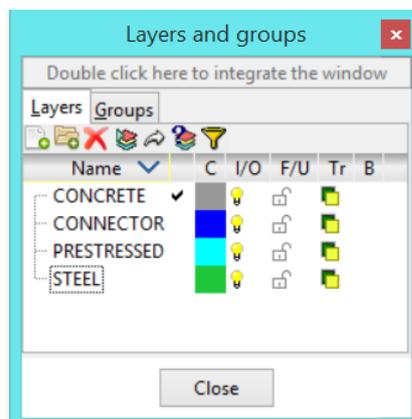


Figura 26. *Layers* a serem empregadas.

Por causa da superposição das malhas alguns nós estarão sobrepostos, pois possuem as mesmas coordenadas. Esse é o caso, por exemplo, de todos os nós dos conectores, pois um nó deve coincidir com a laje de concreto e o outro com a viga de aço. Para eliminar os nós repetidos empregam-se os comandos *Mesh->Edit Mesh->Collapse->Mesh*. Na Figura 14 apresenta-se a malha completa da viga tomada como exemplo.

Uma verificação importantíssima a fazer é a da direção das normais nos elementos da malha, pois esta interfere na ordem de como as conectividades dos diferentes elementos serão escritas no arquivo de dados. O correto é que a normal dos elementos localizados no plano XY esteja orientada no sentido Z+, e a dos elementos em XZ orientada no sentido Y-. Para realizar essa verificação se segue o procedimento: *View->Normals->Elements*, e seguidamente se selecionam todos os elementos da malha. Na Figura 27 mostra-se a distribuição adequada das normais em uma vista da seção transversal da estrutura. No caso que as normais estejam orientadas no sentido oposto deve-se fazer a inversão correspondente (*Utilities->Swap normals->Setect by normal*, e depois selecionar os elementos cuja normal requer mudar de sentido).

Para finalizar essa parte do processo os nós devem ser renumerados, usando o método *Reverse Cuthill-McKee*, que reduz a banda da matriz gerada na análise numérica. Para executar dita renumeração basta escrever na linha de comando do GiD: *escape escape escape Utilities Variables RenumberMethod 1*.

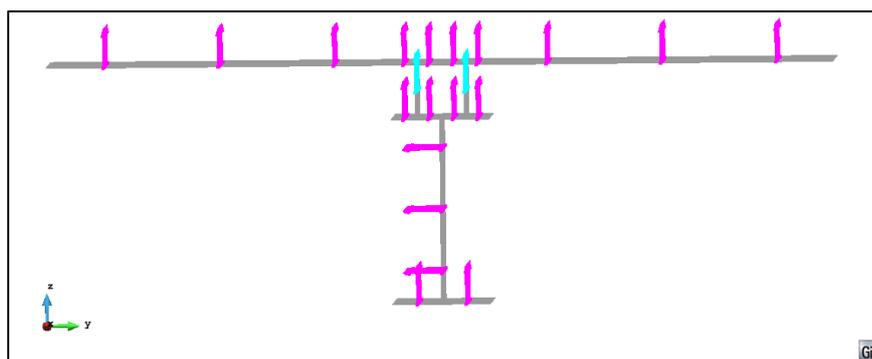


Figura 27. Direção das normais adequada, Z+ e Y-.

### 5.1.3. Atribuição do *Problem Type*

O *Problem Type* está composto por uma série de arquivos através dos quais é efetuada a customização no GiD. Para que a opção do *Problem Type* VM2 apareça no menu do GiD, o mesmo tem que estar localizado na rota: *C:\Program Files (x86)\GiD\GiD(Versão)\problemtypes*. Estando aberto o arquivo, no qual foram superpostas

as quatro malhas segundo as instruções explicadas anteriormente, devem-se efetuar os seguintes comandos: *Data->ProblemType->VM2* (Figura 28).

Com a atribuição do *Problem Type* se tem acesso a janelas onde é possível especificar a informação necessária para o fornecimento dos dados de entrada ao programa. Disponibilizam-se três janelas: *Conditions*, *Materials* e *Problem Data*. A janela de *Conditions* serve para aplicar as condições de contorno, as solicitações que atuam na estrutura e as propriedades das seções; em *Materials* especificam-se as principais características dos materiais; e em *Problem Data* os parâmetros base para o desenvolvimento do programa, a divisão de camadas do aço, a maneira como aplicar as cargas, e os parâmetros requeridos pelos modelos para a análise ao longo do tempo.

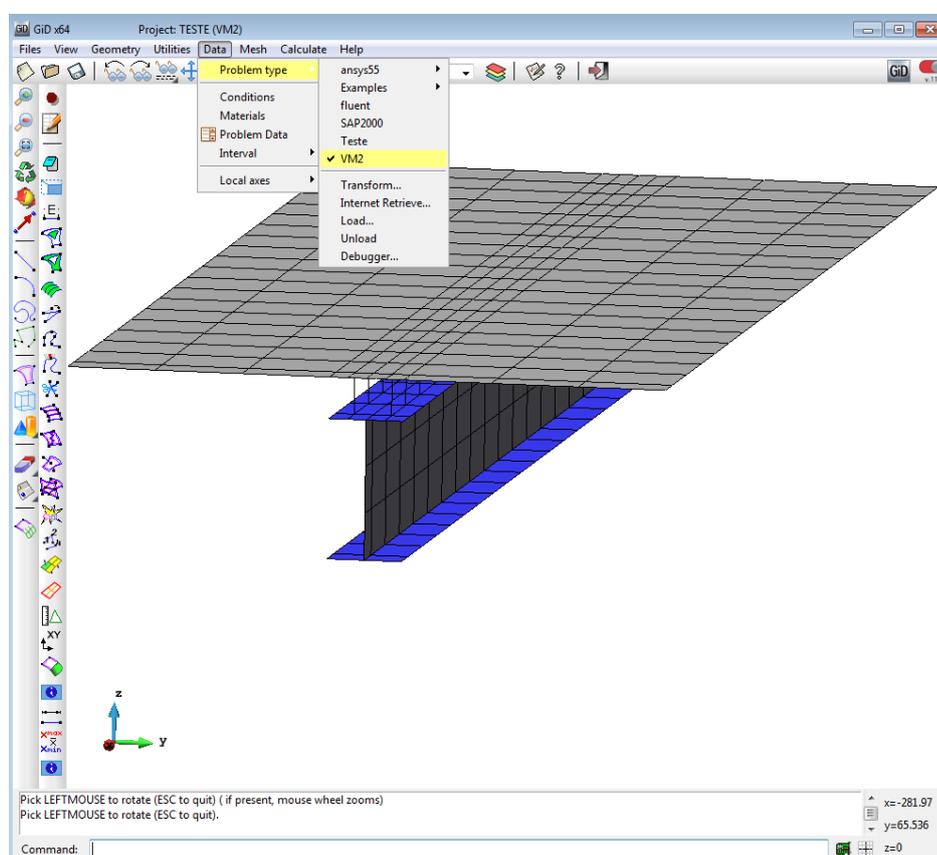


Figura 28. Atribuição do *Problem Type*.

#### 5.1.4. Aplicação das condições da estrutura

O primeiro a se fazer é definir as propriedades de cada material: o aço da viga (Figura 29), o aço dos conectores (Figura 30), o concreto da laje (Figura 31), a armadura da laje (Figura 32), e o aço protendido das cordoalhas (Figura 33). Para indicações mais específicas sobre o preenchimento destes campos, deve-se consultar o trabalho de Dias (2013).

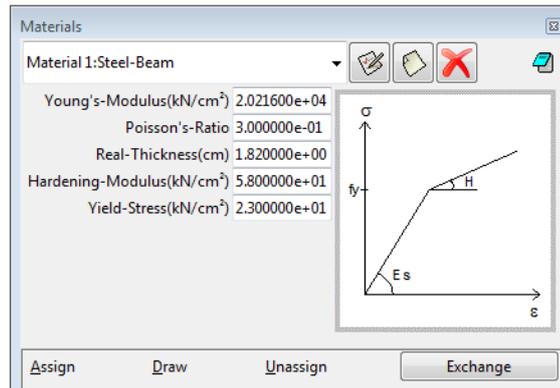


Figura 29. Materials. Steel Beam.

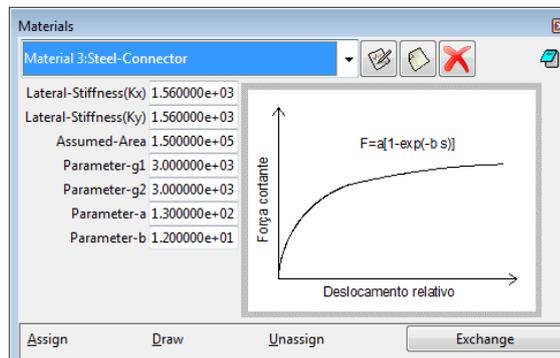


Figura 30. Materials. Steel Connector.

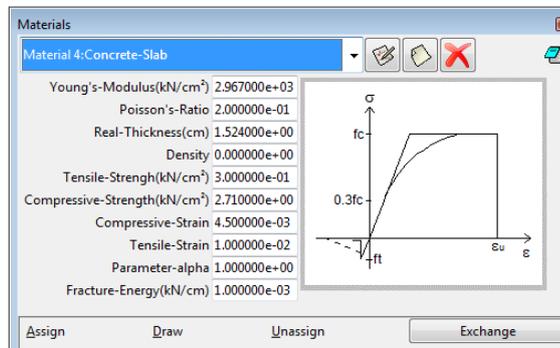


Figura 31. Materials. Concrete Slab.

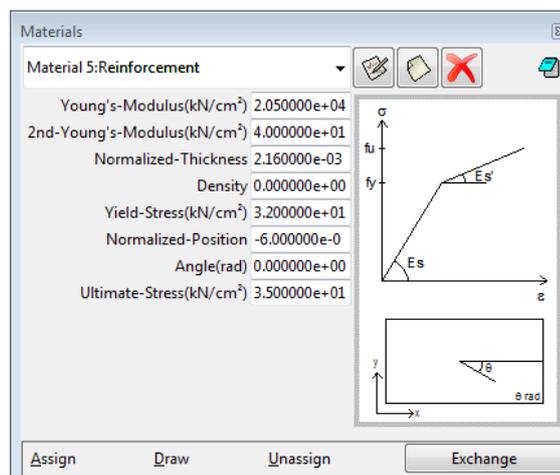


Figura 32. Materials Steel Reinforcement.

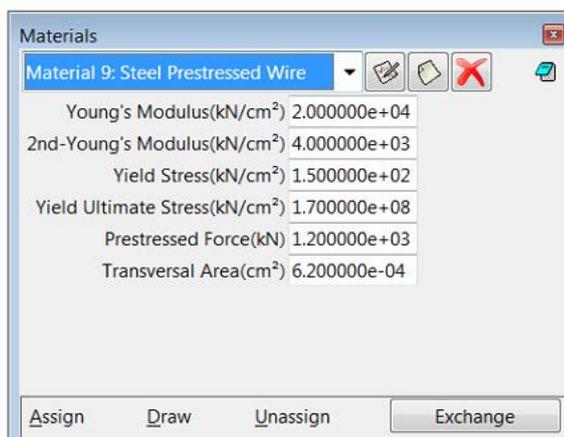


Figura 33. Materials. Steel Prestressed Wire.

Na janela *Problem Data/GENERAL* (Figura 34) definem-se os dados gerais do problema, como o título, o tipo de análise, o tipo de integração, o tipo de solução a ser empregada, o tipo de rigidez dos conectores e finalmente a consideração ou não do amolecimento no concreto.

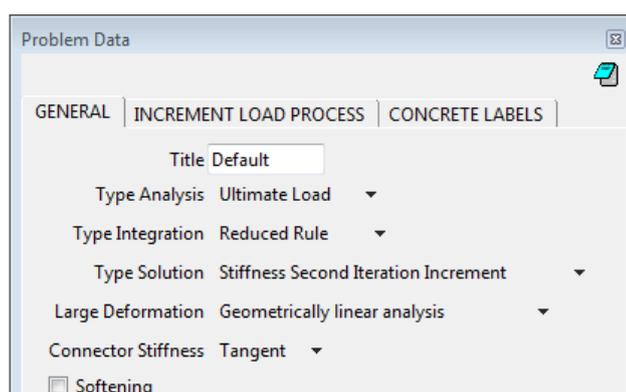


Figura 34. Problem Data. GENERAL.

A definição do processo incremental de cargas, se faz na aba *INCREMENT LOAD PROCESS* (Figura 35). O primeiro passo é definir como dividir o processo de aplicação de carga, sabendo o número de intervalos e que porcentagem da carga vai ser incrementada em cada um desses intervalos. Este processo é importante por tratar-se de um problema elasto-plástico, no qual o tamanho do incremento pode influenciar o resultado. O primeiro dado é quantas configurações diferentes vão ser utilizadas para a aplicação da carga, isto é: se vão ser todos os incrementos iguais (nesse caso só é preciso utilizar uma história de carga), ou se os incrementos vão se realizar de uma maneira específica (nesse caso devem-se usar tantas histórias como diferentes configurações para incrementar a carga). Para cada história devem se preencher os dados que correspondem a: Tolerância, número de incrementos, porcentagem da carga correspondente a cada incremento, máximo número de iterações, e o tipo de resultado para imprimir após terminar cada intervalo.

Na aba *CONCRETE LABELS* (Figura 36) encontra-se a informação correspondente às camadas da laje de concreto, no caso devem-se utilizar tantas *LABELS*, como configurações diferentes da seção transversal do concreto (usualmente é só uma). Posteriormente se preenche uma lista com o número de camadas em que se quer dividir a laje e o material correspondente (Tanto concreto como armadura).

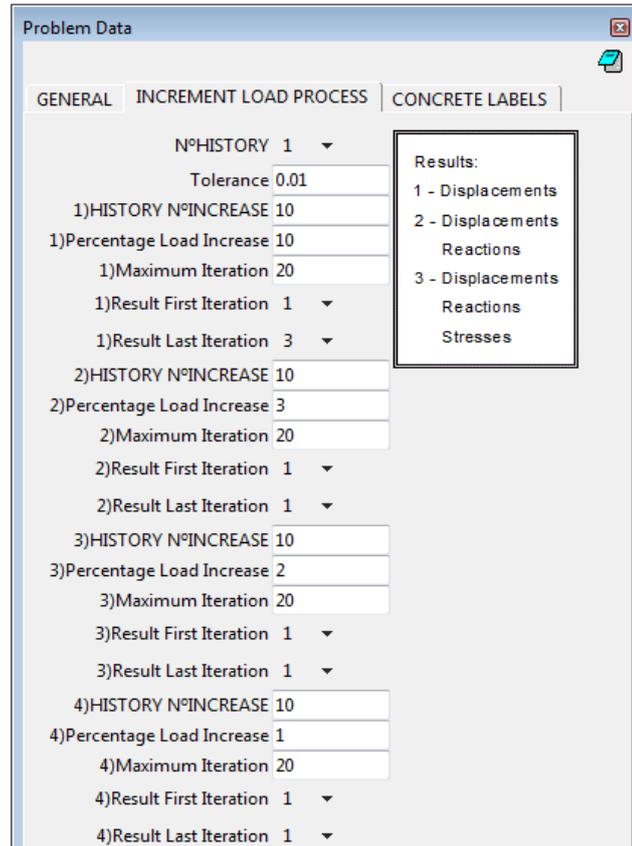


Figura 35. Problem Data. Incremental Load Process.

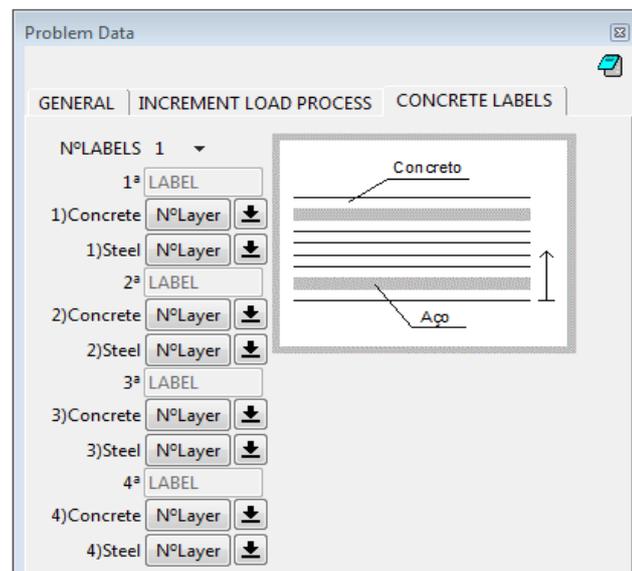


Figura 36. Problem Data. Concrete Labels.

Para atribuir propriamente as condições do problema aos elementos da malha, utiliza-se a janela *Conditions*, que permite ao usuário atribuir os materiais previamente definidos ao elemento correspondente da malha, conforme ilustrado nas Figuras 37 a 40. Nessa mesma janela se atribuem as cargas pontuais nos nós (Figura 41) e distribuídas nas áreas (Figura 42), nas cargas pontuais o sentido positivo está definido pelo sentido positivo do eixo no qual se está aplicando a carga, enquanto para as áreas o sentido positivo equivale ao sentido oposto à normal do elemento. Finalmente também são atribuídas as restrições e condições de contorno (Figura 43).

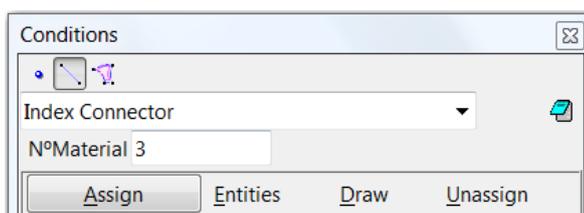


Figura 37. Conditions. Connector.

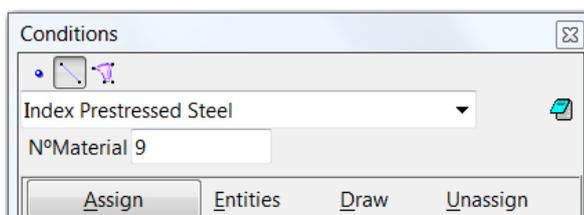


Figura 38. Conditions. Prestressed Steel.

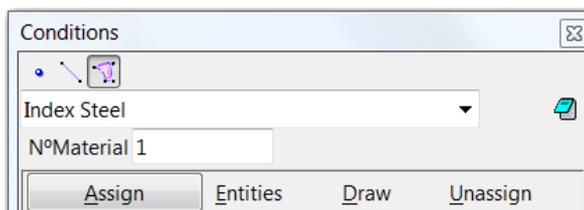


Figura 39. Conditions. Steel.

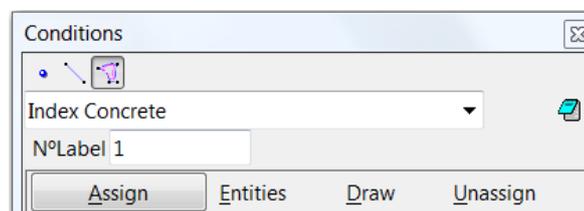


Figura 40. Conditions. Concrete.

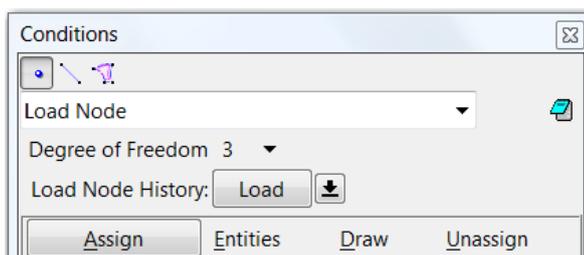


Figura 41. Conditions. Point Load.

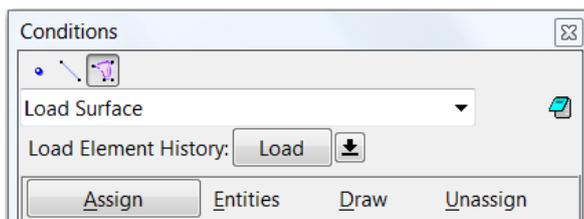


Figura 42. Conditions. Area Load.

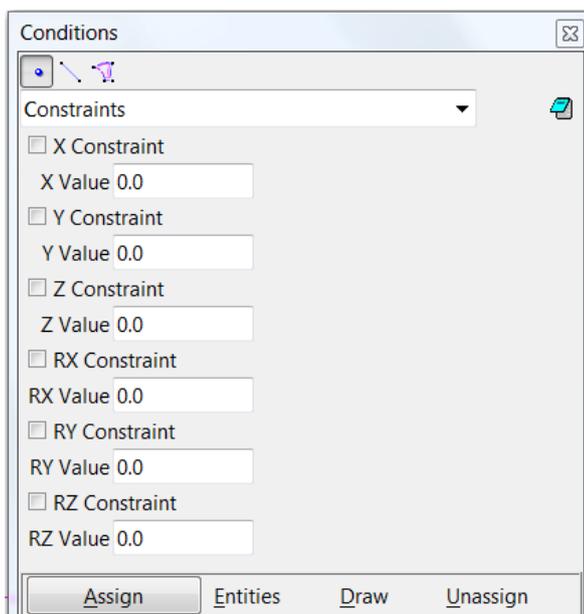


Figura 43. Conditions. Constraints.

#### 5.1.5. Parâmetros do comportamento no tempo

A aba destinada aos parâmetros referentes à análise diferida no tempo somente é ativada se o usuário modificar o *Type Analysis* para a opção *Service Load* (Figura 44).

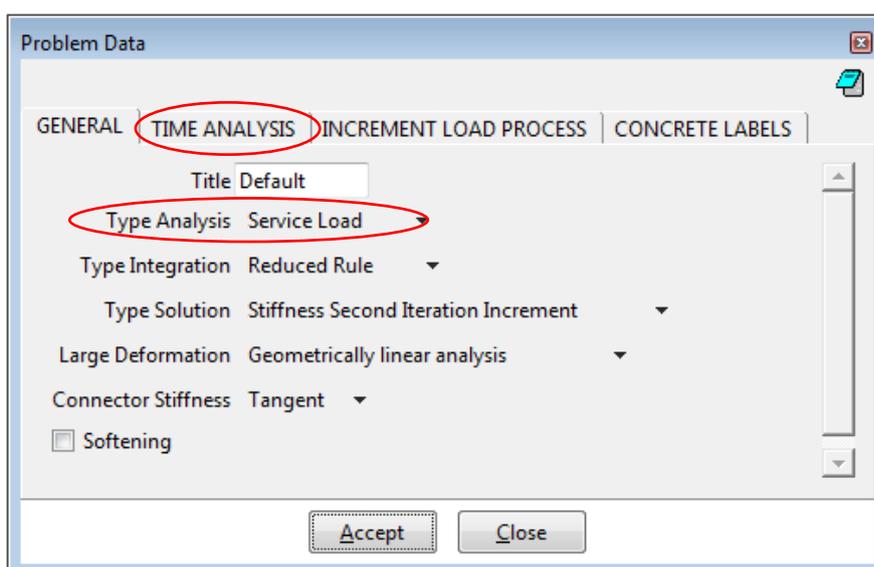


Figura 44. Problem Data. Aba GENERAL. Service Load.

Já na aba específica para *TIME ANALYSIS*, o primeiro dado a ser preenchido é o modelo que será utilizado para a predição da fluência e da retração. Em função da resposta para este dado, a aba muda de formato, para preencher unicamente os espaços correspondentes aos parâmetros requeridos pelo modelo específico selecionado.

Alguns parâmetros são comuns a todos os modelos, logo são solicitados sempre na aba *TIME ANALYSIS*, independentemente do modelo escolhido, esses parâmetros são:

- a) *Step Load*: Permite fazer uma lista com as idades da estrutura (medidas em dias) nas quais são impostos carregamentos. No caso de apenas uma carga aplicada em um determinado tempo, preenche-se a primeira linha da coluna *Load Time* com a idade de aplicação desta única carga e na segunda linha coloca-se o tempo final da análise, ou seja, a idade até a qual essa carga é suportada pela estrutura. Sempre o último dado colocado nesta lista é o tempo final da análise;
- b) *m parameter*: Número de passos por década considerado para determinar os tempos da cadeia de Kelvin. Adotar um valor em torno de 10 produz uma boa aproximação (Dias, 2013);
- c) *Curing Time*: Tempo de cura que se deu para a peça, medido em dias;
- d) *Cement Type*: Tipo de cimento empregado no concreto. A classificação é feita segundo a nomenclatura Americana (Tipo I, II e II), mas adicionalmente têm o nome explicando de que cimento se trata;
- e) *Relative Humidity*: Valor de umidade relativa do ambiente, expressado em porcentagem;
- f) *Concrete cross section area*: Área de concreto que a peça tem, medida em  $\text{mm}^2$ ;
- g) *Concrete perimeter in contact*: Perímetro da seção de concreto, medido em mm.

Os demais parâmetros variam entre todos os modelos, particularmente para o modelo ACI 209R-92 (Figura 45), são requeridos os seguintes parâmetros adicionais:

- h) *Curing Method*: Método utilizado para o processo de cura, as opções são úmida ou a vapor;
- i) *Unit weight of concrete*: Peso unitário do concreto medido em  $\text{kg/m}^3$ ;
- j) *Concrete Standard Composition*: Dados que correspondem aos materiais que compõem a pasta de concreto. Esses dados têm um valor padrão, que somente

deve ser modificado se são conhecidos valores específicos reais. Os dados são: o slump do concreto (mm), o consumo de agregado miúdo (% do agregado total), o consumo de cimento ( $\text{kg/m}^3$ ), e o teor de ar (%);

- k) *Specific parameters of model*: Uma série de parâmetros específicos, definidos no modelo com um valor padrão, esses parâmetros são: alpha, f (dias), psi, e d (dias).

Figura 45. Problem Data. Aba TIME ANALYSIS. ACI 209R-92.

Figura 46. Problem Data. Aba TIME ANALYSIS. Bazant-Baweja B3.

Na Figura 46 encontra-se a aba correspondente ao modelo Bazant-Baweja B3, neste caso os dados específicos a serem preenchidos são:

- Curing Method*: Método utilizado para o processo de cura, as opções são: úmida ou a vapor;
- Cement Content*: Consumo de cimento medido em  $\text{kg}/\text{m}^3$ ;
- Water Cemet Ratio*: Relação água/cimento, escrita como decimal;
- Aggregate Cement Ratio*: Relação agregado/cimento, escrita como decimal.

No caso do modelo CEB MC90 (Figura 47) o único dado adicional é a temperatura medida em  $^{\circ}\text{C}$ . Já no modelo CEB MC90-99 (Figura 48), além da temperatura, deve ser fornecido o valor da tensão do concreto quando este for carregado, medida em MPa. Já para o modelo GL2000 (Figura 49), não é preciso colocar nenhuma informação adicional à descrita como comum para todos os modelos.

Figura 47. Problem Data. Aba TIME ANALYSIS. CEB MC90.

Figura 48. Problem Data. Aba TIME ANALYSIS. CEB MC90-99.

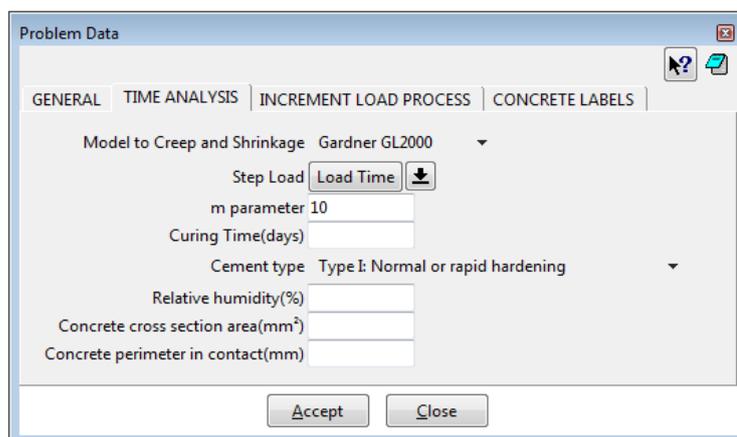


Figura 49. Problem Data. Aba TIME ANALYSIS. GL2000.

Nas abas do GiD correspondentes à análise ao longo do tempo foram incluídas uma série de ajudas para o usuário, com as quais se dá uma breve explicação do que significa o parâmetro, e qual é um intervalo de valores usuais. Para acessar a esta ajuda basta fazer um click esquerdo sobre o espaço com dúvida (Figura 50).

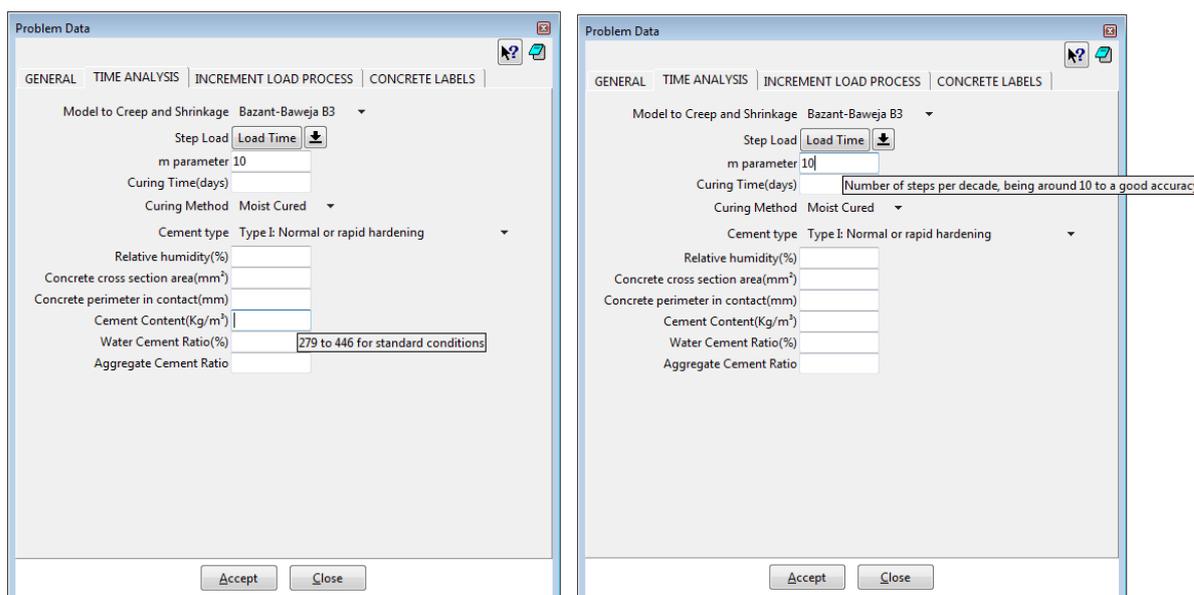


Figura 50. Problem Data. Aba TIME ANALYSIS. Ajuda para o usuário.

## 5.2. PÓS-PROCESSAMENTO

Para começar com a etapa do pós-processamento deve-se trocar a interface do GiD (*Files->Postprocess*), conforme a Figura 51. Isso faz com que mude o menu e apareçam as opções necessárias para desenvolver a análise. O seguinte passo consiste em ler dois arquivos gerados pelo código computacional (*Files->Open multiple*), um com a malha e outro com os resultados, esses têm a extensão \*.post.msh e \*.post.res, respectivamente. Os dados

fornechos para o GiD contemplan tensões e deformações (do aço e do concreto separadamente e também da estrutura como um todo), para todos os passos de tempo analisados. Na Figura 52 se apresenta o exemplo de um arquivo trabalhado no GiD, com os dados provenientes do código computacional desenvolvido.

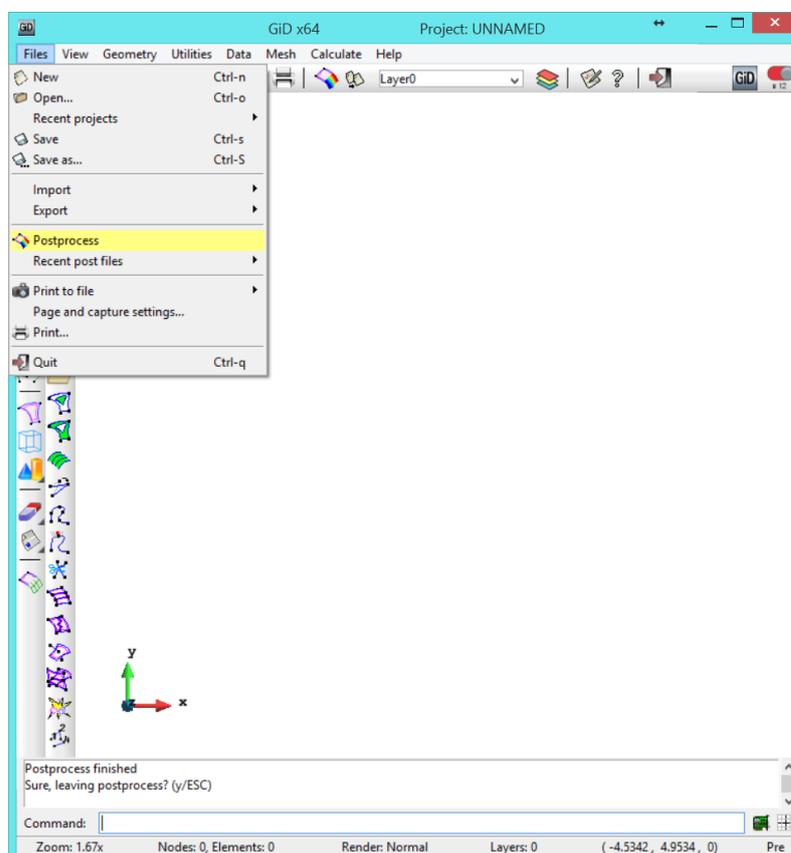


Figura 51. Mudança de interfase para pós-processamento.

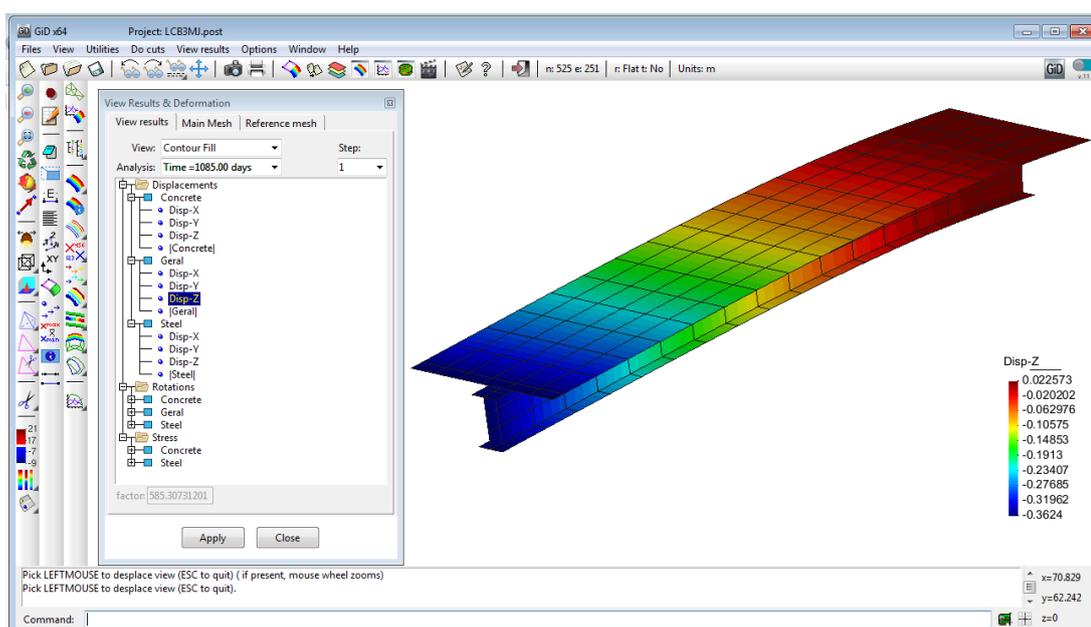


Figura 52. Exemplo de pós-processamento.

Nas barras de ferramentas verticais, no lado esquerdo, encontram-se as diferentes opções para a visualização dos resultados, que permitem ao usuário visualizar os resultados de diversas maneiras: através da deformada, de uma escala de cores, linhas de contorno, valores máximos e mínimos, vetores, cortes, entre outros. Após decidir o formato desejado, selecione-se a grandeza a ser representada (deslocamentos, rotações ou tensões), os elementos sobre os quais aplicar a representação (concreto, aço, ou completo), e finalmente o grau de liberdade no qual deseja-se ver a resposta. Todo este processo apresenta-se na Figura 53.

Para obter uma visualização de resultados mais específica, emprega-se a janela *View Results* (*Window->View Results*). Na parte superior da janela pode-se escolher o tipo de representação (*View*), a idade da estrutura (*Analysis*), e o passo de carga (*Step*) para o qual procuram-se visualizar os resultados. Enquanto na parte inferior, escolhe-se exatamente qual resultado visualizar; isto é, deslocamentos, rotações ou tensões; assim como os elementos da estrutura sob os quais querem ser visualizados os resultados. As opções da janela *View Results* apresentam-se na Figura 54.

Para a representação das fissuras na laje de concreto emprega-se uma sub-rotina no software Matlab, que utiliza o arquivo *crack.dat*, produto do código computacional. A representação das fissuras pode-se fazer também para qualquer idade da estrutura e passo de carga definidos pelo usuário. Na Figura 55 apresenta-se um exemplo da representação das fissuras para a laje de concreto de uma viga submetida a flexão negativa.

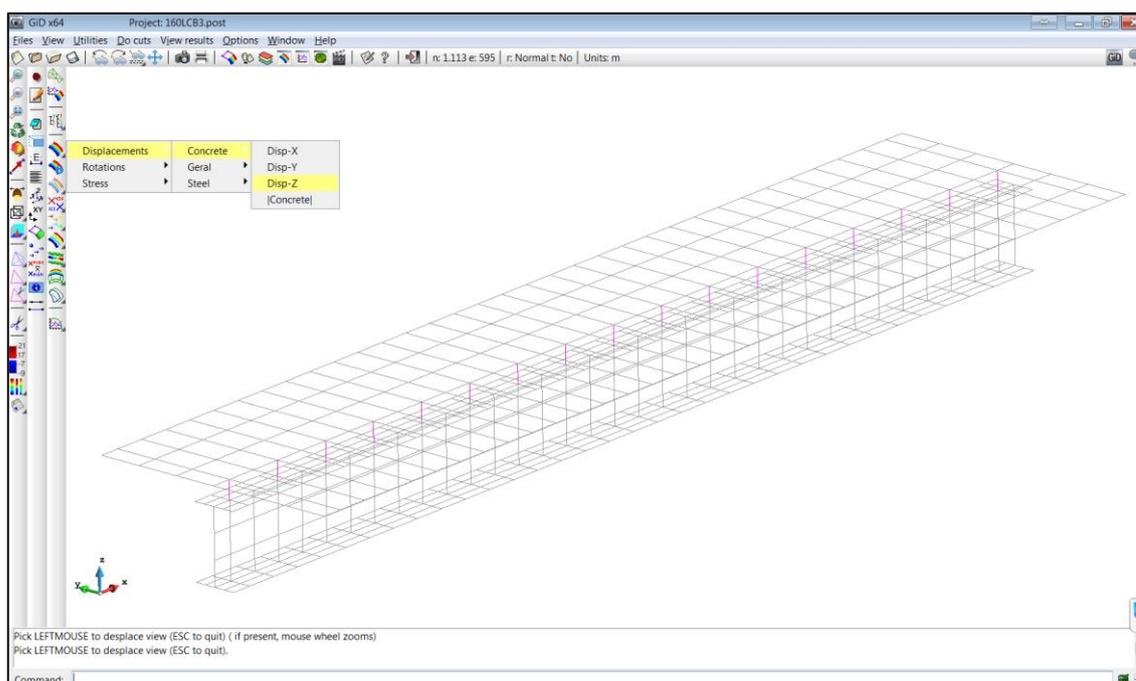


Figura 53. Escolha da variável a ser representada.

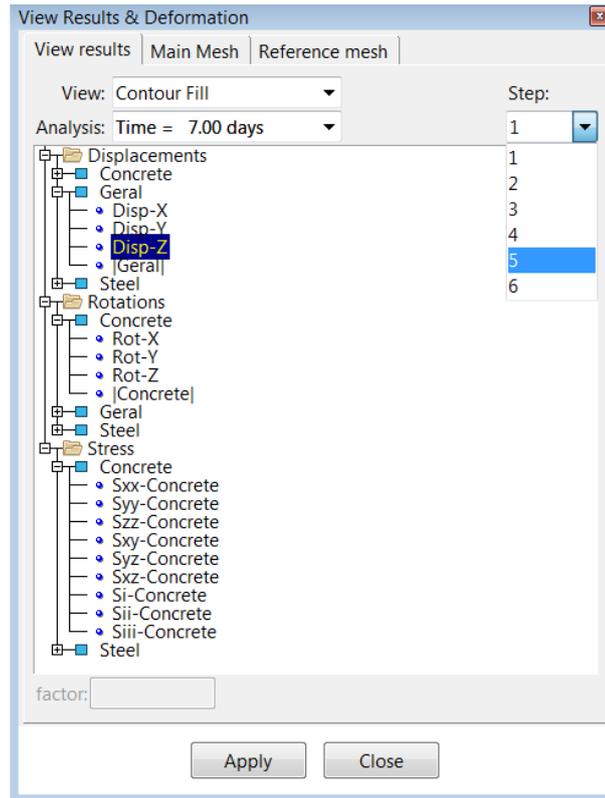


Figura 54. Janela. View Results.

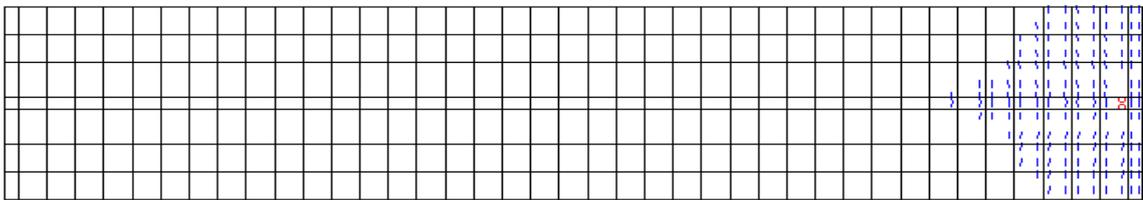


Figura 55. Exemplo de representação das fissuras para a laje de concreto.

## 6. APLICAÇÕES NUMÉRICAS

Apresentam-se, neste capítulo, um conjunto de exemplos com o intuito de demonstrar a aplicabilidade do código computacional desenvolvido. Esses exemplos consistem na comparação de resultados obtidos na análise computacional com testes experimentais ou com soluções analíticas. Para cada exemplo são apresentadas as condições e propriedades adotadas, e se faz uma análise estatística comparando os resultados obtidos com os apresentados em trabalhos de outros autores.

### 6.1. VIGAS MISTAS SIMPLEMENTE APOIADAS

Quatro vigas mistas de aço e concreto simplesmente apoiadas, denominadas B1, B2, B3 e B4, foram testadas experimentalmente por Bradford e Gilbert (1991), a fim de medir a sua deformação ao longo do tempo. Essas vigas têm seção transversal idêntica e o mesmo comprimento. O deslocamento foi medido no centro e no quarto do vão durante 250 dias. As dimensões características da seção transversal encontram-se detalhadas na Figura 56.

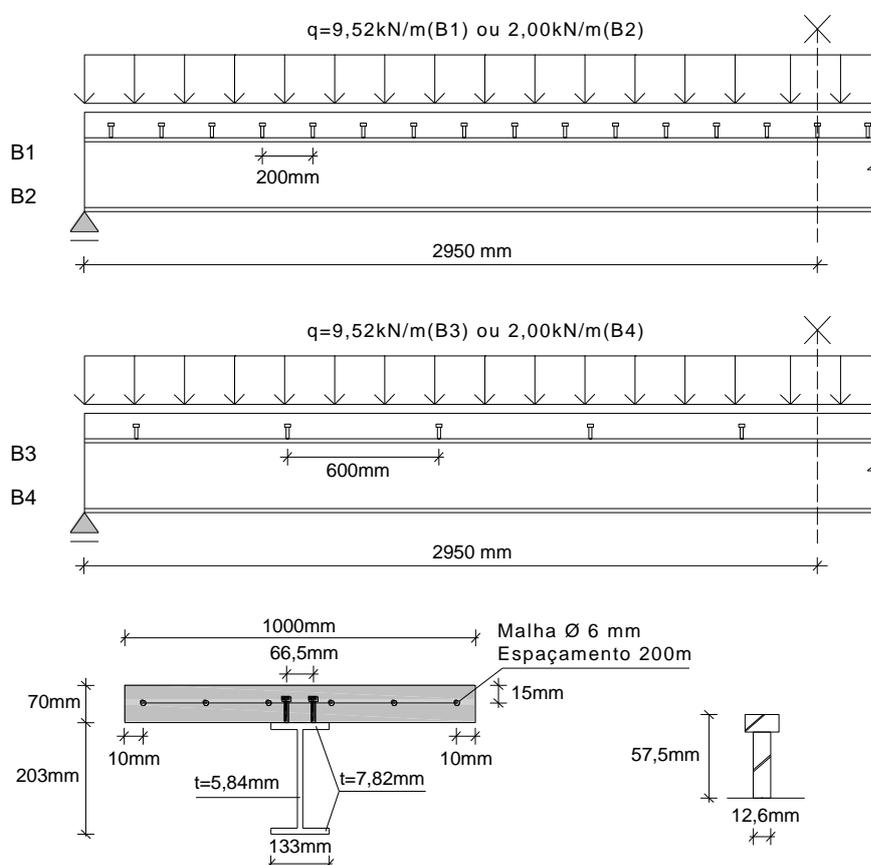


Figura 56. Geometria e seção transversal das vigas mistas B1, B2, B3 e B4.

Nas vigas B1 e B3 foi aplicada uma carga total uniformemente distribuída de 9,52 kN/m ; enquanto que as outras duas vigas, B2 e B4 foram unicamente submetidas à carga do peso próprio (2,00kN/m). Num sistema misto, o colapso do concreto não necessariamente se traduz no colapso da estrutura. Para levar em conta esta situação considera-se um efeito denominado “*tension stiffening*”, que sugere incrementar o valor da deformação máxima a tração; para depois da fissuração as tensões diminuir linearmente até zero. Usualmente emprega-se um valor equivalente a dez vezes a deformação última tradicional (Liang et al. (2005) e Baskar et al. (2002)). Alguns autores sugerem valores ainda maiores como 0.1 (Rex e Easterling (2000) e Liang et al. (2004)). Para o presente exemplo empregou-se o critério de dez vezes a deformação última tradicional. As propriedades dos materiais empregados encontram-se na Tabela 8. As vigas possuem pares de conectores uniformemente dispostos, sendo o espaçamento entre eles diferente para as vigas B1, B2 (200 mm) e B3, B4 (600 mm). As condições de carga, a posição dos conectores, e o detalhe da geometria dos mesmos estão ilustrados na Figura 56. A curva de rigidez adotada para os conectores apresenta-se na Figura 57.

Tabela 8. Propriedades dos materiais para as vigas de Bradford e Gilbert (1991).

Material	Propriedades			
Aço Estrutural	Módulo de Elasticidade	$E =$	200000	MPa
	Tensão de Escoamento	$f_y =$	360	MPa
	Coefficiente de Poisson	$\nu =$	0,3	
	Deformação Última	$\epsilon_u =$	25	%
Aço de Reforço	Módulo de Elasticidade	$E =$	200000	MPa
	Tensão de Escoamento	$f_y =$	250	MPa
	Tensão Última	$f_u =$	350	MPa
	Coefficiente de Poisson	$\nu =$	0,3	
Concreto	Deformação Última	$\epsilon_u =$	25	%
	Resistência à Compressão	$f_{ck} =$	31,1	MPa
	Módulo de Elasticidade	$E_{28} =$	25100	MPa
	Resistência à Tração	$f_t =$	3,11	MPa
	Coefficiente de Poisson	$\nu =$	0,2	
	Deformação Última à Tração	$\epsilon_{u(+)} =$	3,0	‰
Deformação Última à Compressão	$\epsilon_{u(-)} =$	4,5	‰	
Conector de Cisalhamento	Espaçamento	$s =$	200 (B1 e B2) 600 (B3 e B4)	mm
	Diâmetro x Altura	$d \times h =$	12,6 x 57,5	mm
	Número de Linhas	$n =$	2	
	Constante 1	$a =$	120	kN
	Constante 2	$b =$	7,0	mm <sup>-1</sup>

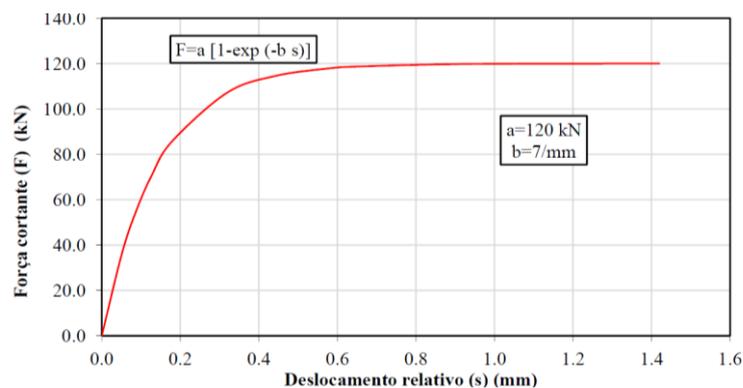


Figura 57. Rigidez dos conectores das vigas de Bradford e Gilbert (1991).

Apenas metade da viga foi modelada, aproveitando a simetria da mesma. Para as vigas B1 e B2 empregou-se uma malha composta por 144 elementos de aço (16 divisões no sentido longitudinal), 112 de concreto (16 divisões no sentido longitudinal), e 30 de conectores (15 pares igualmente espaçados), a estrutura encontra-se representada na Figura 58. Embora os elementos que descrevem o perfil metálico apresentam uma razão de aspecto elevada, esse valor é inferior a três, garantindo o adequado comportamento da malha. Na representação da laje de concreto usaram-se 7 camadas de concreto com uma espessura de 10 mm cada uma, e duas camadas de aço para representar a armadura com espessura equivalente e orientação conforme a Figura 60. Sendo que  $\theta = 0^\circ$  refere-se à armadura longitudinal e  $\theta = 90^\circ$  à armadura transversal, e a posição normalizada está compreendida dentro de um intervalo entre -1 e 1. No lado esquerdo dessa figura encontra-se a posição real da armadura. Na Figura 59 apresenta-se a malha de elementos finitos usada para representar as vigas B3 e B4, sendo que a única diferença com a anterior é a quantidade de conectores utilizados que é de 10 elementos (5 pares igualmente espaçados).

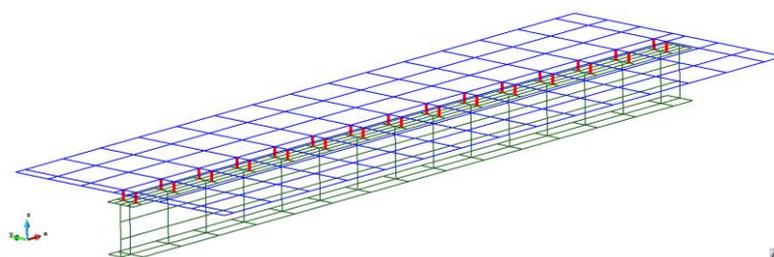


Figura 58. Malha de elementos finitos das vigas B1 e B2

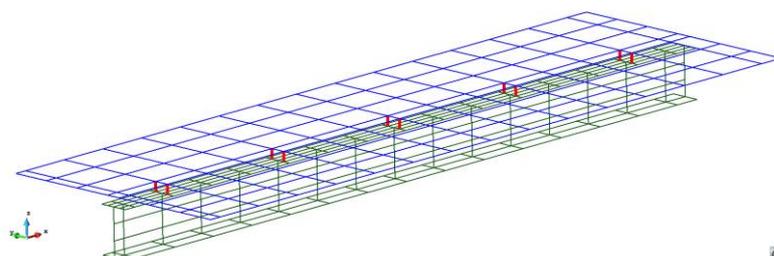


Figura 59. Malha de elementos finitos das vigas B3 e B4

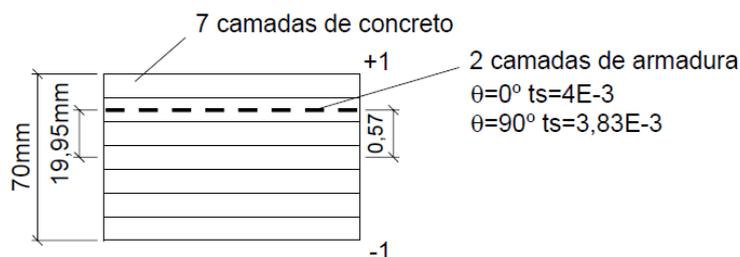


Figura 60. Esquema camadas de concreto e aço para as vigas de Bradford e Gilbert (1991)

O peso próprio da viga de aço é de 0,2455 kN/m e foi aplicado como carga pontual nos nós centrais da alma do perfil, 15 nós em total no sentido longitudinal da estrutura. O peso próprio da laje, 1,75 kN/m foi aplicado como uma carga de pressão sob toda laje. Já a sobrecarga de 7,52 kN/m, foi aplicada como uma carga de pressão na laje de concreto em uma largura central de 60,6 mm.

A idade de aplicação do carregamento é 10 dias e a análise se estende durante 250 dias em total, tendo 29 passos de tempo para efetuar a análise (Tabela 11). Para a predição da deformação por retração e o coeficiente de fluência adotou-se o uso de um cimento de endurecimento normal (Tipo I), uma temperatura de 20 °C, um tempo de cura de 10 dias, e uma umidade relativa diferente para cada modelo, a fim de ajustar o valor da retração ao resultado experimental; isto em função de que no relatório experimental não são fornecidos dados referentes às condições ambientais durante o tempo de ensaio, unicamente o valor experimental da retração. A razão para efetuar o ajuste respeito ao valor experimental final de retração, e não de fluência, é que a retração é o fenômeno que governa o comportamento destas estruturas ao longo do tempo, quando submetidas a cargas de serviço (Dias, 2013). Um resumo das propriedades utilizadas encontra-se na Tabela 9. Na Tabela 10 encontram-se os parâmetros da cadeia de Kelvin empregados para cada modelo.

Tabela 9. Propriedades para análise diferida no tempo. Vigas Bradford e Gilbert (1991)

<b>Método de cura</b>	Úmida	
<b>Tempo de cura</b>	10 dias	
<b>Tempo aplicação do carregamento</b>	10 dias	
<b>Tempo total de análise</b>	250 dias	
<b>Tipo de cimento</b>	1	
<b>Temperatura</b>	20 °C	
<b>Umidade relativa</b>	ACI 209	79 %
	Bazant B3	77 %
	GL2000	74 %
	MC90	58 %
	MC99	68 %

Tabela 10. Parâmetros da cadeia de Kelvin para as vigas de Bradford e Gilbert (1991)

		Cadeia Kelvin (n=5)					
Parâmetro	Modelo		ACI	Bazant B3	GL2000	MC90	MC99
	$\tau_1$	0,1	$E_1$ (kN/cm <sup>2</sup> )	41,35	2,87	9,12	3,45
$\tau_2$	1	$E_2$ (kN/cm <sup>2</sup> )	7,44	5,92	1,98	3,06	3,69
$\tau_3$	10	$E_3$ (kN/cm <sup>2</sup> )	2,41	2,98	1,40	1,66	2,00
$\tau_4$	100	$E_4$ (kN/cm <sup>2</sup> )	1,18	1,05	1,04	0,71	0,86
$\tau_5$	1000	$E_5$ (kN/cm <sup>2</sup> )	-2,44	-5,56	-13,68	6,78	11,80

Tabela 11. Passos de tempo empregados na análise (dias). Vigas Bradford e Gilbert (1991)

Passo	Tempo (dias)	Passo	Tempo (dias)	Passo	Tempo (dias)	Passo	Tempo (dias)	Passo	Tempo (dias)
<b>1</b>	10,00	<b>7</b>	19,95	<b>13</b>	39,81	<b>19</b>	79,43	<b>25</b>	158,49
<b>2</b>	11,22	<b>8</b>	22,39	<b>14</b>	44,67	<b>20</b>	89,13	<b>26</b>	177,83
<b>3</b>	12,59	<b>9</b>	25,12	<b>15</b>	50,12	<b>21</b>	100	<b>27</b>	199,53
<b>4</b>	14,13	<b>10</b>	28,18	<b>16</b>	56,23	<b>22</b>	112,2	<b>28</b>	223,87
<b>5</b>	15,85	<b>11</b>	31,62	<b>17</b>	63,1	<b>23</b>	125,89	<b>29</b>	250,00
<b>6</b>	17,78	<b>12</b>	35,48	<b>18</b>	70,79	<b>24</b>	141,25		

Bradford e Gilbert (1991) mediram experimentalmente a retração ao longo do tempo. Na Figura 61 comparam-se a curva experimental com as previsões calculadas para cada modelo. Para ter uma ideia quantitativa da diferença entre o resultado experimental e a previsão calculada apresentam-se na Tabela 12 uma série de indicadores estatísticos que permitem avaliar o nível de semelhança entre a curva experimental e cada uma das curvas correspondentes aos modelos de previsão. A  $RD_{Exp}$  é o desvio relativo medido sobre os pontos experimentais, a  $RD_{100p}$  é o desvio relativo medido em 100 pontos igualmente espaçados ao longo de todo o tempo de análise, o BP é o coeficiente de variação desenvolvido por Bazant e Panula (1979),  $V_{CEB}$ ,  $F_{CEB}$  e  $M_{CEB}$  são os indicadores estatísticos propostos pelo *Comité Euro-International du Béton* (CEB), e o  $\omega_G$  é o coeficiente de variação proposto por Gardner (2004).

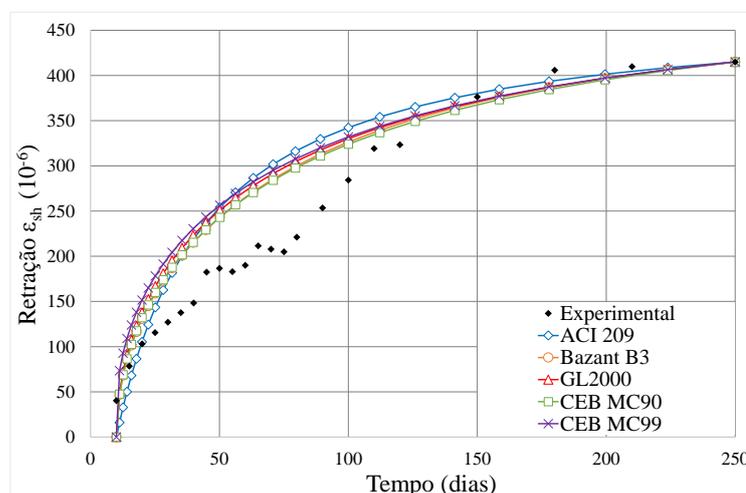


Figura 61. Curva de deformação por retração para as vigas de Bradford e Gilbert (1991)

Tabela 12. Indicadores estatísticos para Retração. Vigas de Bradford e Gilbert (1991)

Modelo	RD <sub>Exp</sub>	RD <sub>100p</sub>	BP(%)	V <sub>CEB</sub> (%)	F <sub>CEB</sub> (%)	M <sub>CEB</sub>	ω <sub>G</sub> (%)
ACI 209	30.05	18.88	20.77	23.85	22.67	0.78	19.17
Bazant B3	28.48	17.49	17.75	20.64	20.78	0.78	17.93
GL2000	31.56	19.08	19.55	22.80	23.39	0.80	20.18
CEB MC90	28.50	17.53	17.57	20.46	20.79	0.78	17.94
CEB MC99	35.23	21.05	21.12	24.75	26.59	0.81	22.80

Na Figura 61 a tendência das curvas para todos os modelos é similar, devido ao ajuste atingem o valor de retração experimental final de  $415 \times 10^{-6}$ , mas segundo os indicadores estatísticos pode-se dizer que o modelo Bazant B3 e o modelo CEB MC90 têm uma sutil melhor adaptação em relação aos outros três modelos.

Na Figura 62 encontram-se os deslocamentos medidos no centro do vão ao longo dos 250 dias do ensaio, para as Vigas B1 e B2 e também os deslocamentos calculados com cada um dos modelos. Na Figura 64 apresenta-se a mesma informação para as vigas B3 e B4. Finalmente na Figura 63 estão apresentados os deslocamentos no quarto do vão para as vigas B1 e B2 e na Figura 65 para as vigas B3 e B4. Evidencia-se uma clara coincidência nos resultados para as vigas B1 e B3 em todos os cenários, para o deslocamento calculado tanto no centro como no quarto do vão. A comparação do valor final do deslocamento no centro do vão aos 250 dias é apresentada na Tabela 13 e na Tabela 17 para as vigas B1 e B3 respectivamente, pode-se constatar que a diferença entre o valor experimental e o calculado está entre 0,002 e 0,075 cm para todos os modelos, o que significa um erro inferior ao 3,5%.

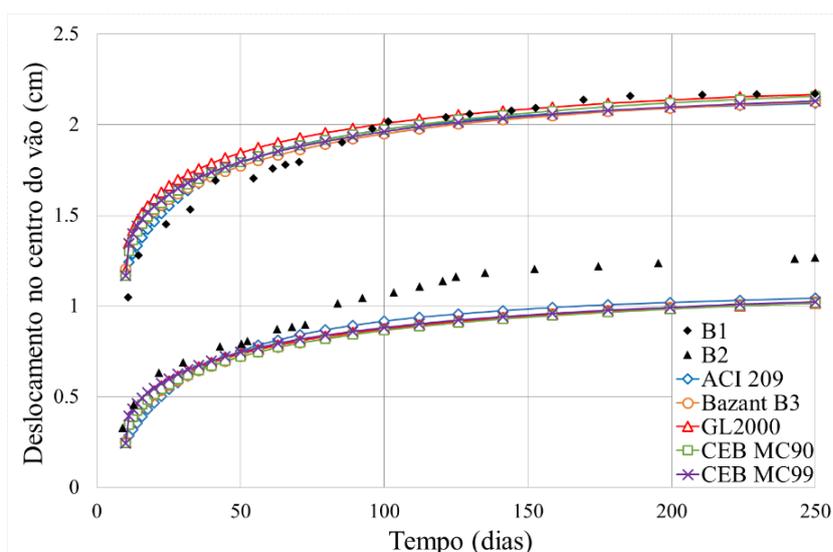


Figura 62. Deslocamento no centro do vão para vigas B1 e B2.

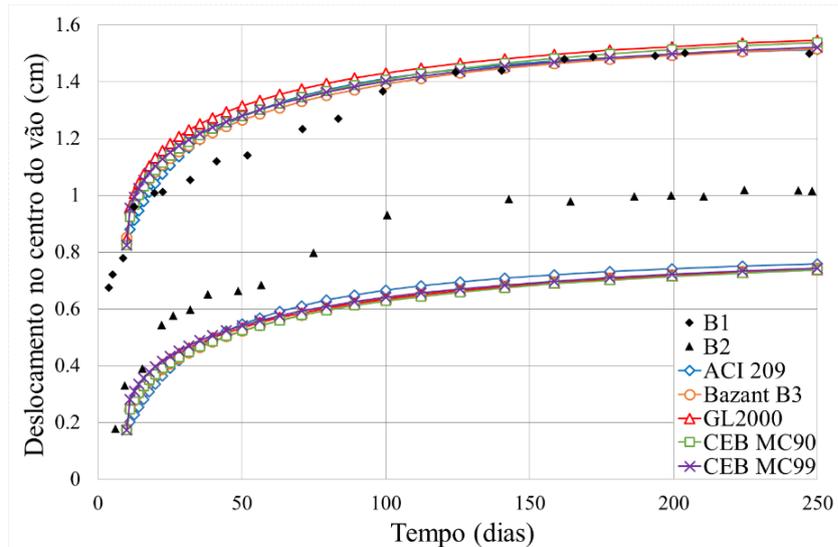


Figura 63. Deslocamento no quarto do vão para vigas B1 e B2.

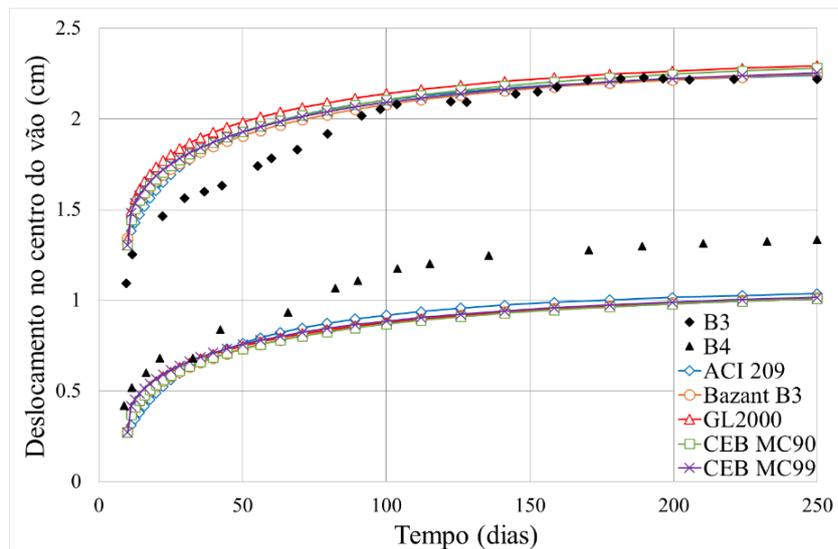


Figura 64. Deslocamento no centro do vão para vigas B3 e B4.

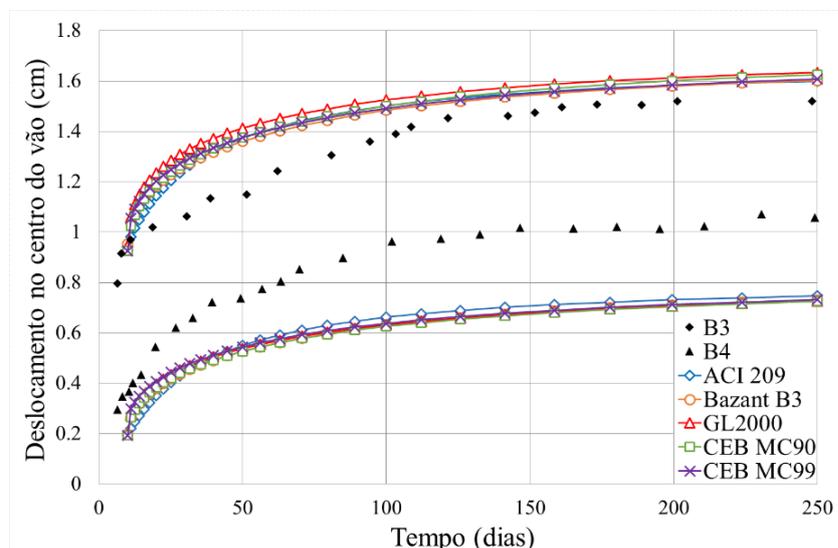


Figura 65. Deslocamento no quarto do vão para vigas B3 e B4.

Não só é importante comparar o valor no final do ensaio, também a evolução ao longo do tempo da deformação e a capacidade de cada um dos modelos para descreve-la acertadamente. As vigas B1 e B3 têm um comportamento diferenciado, sendo que uma grande maioria dos indicadores estatísticos avaliados apresentam valores de erro inferiores ao 10% (Tabela 14 e Tabela 18), considera-se um bom resultado pois é uma comparação ao longo de todo o tempo do ensaio e representa o bom comportamento dos modelos e a fidelidade da análise com relação aos dados experimentais para cada passo de tempo.

Tabela 13. Comparação deslocamento no centro do vão em t=250 dias. Viga B1.

Modelo	Deslocamento (cm)	Diferença (cm)	Erro Relativo (%)	Taxa
<b>Experimental</b>	2.130			
<b>ACI 209</b>	2.118	0.012	0.54	1.00
<b>Bazant B3</b>	2.124	0.006	0.29	1.00
<b>GL2000</b>	2.168	0.038	1.80	1.02
<b>CEB MC90</b>	2.157	0.027	1.28	1.01
<b>CEB MC99</b>	2.132	0.002	0.08	1.00

Tabela 14. Indicadores estatísticos para deslocamento no centro do vão. Viga B1.

Modelo	RD <sub>Exp</sub> (%)	RD <sub>100p</sub> (%)	$\omega_{BP}$ (%)	V <sub>CEB</sub> (%)	F <sub>CEB</sub> (%)	M <sub>CEB</sub>	$\omega_G$ (%)
<b>ACI 209</b>	3.90	3.88	4.05	4.54	5.38	1.02	5.50
<b>Bazant B3</b>	4.56	4.30	4.75	5.33	6.77	1.02	6.76
<b>GL2000</b>	5.51	4.36	6.20	7.25	8.65	1.05	8.31
<b>CEB MC90</b>	4.35	3.70	4.60	5.31	6.54	1.03	6.44
<b>CEB MC99</b>	4.98	4.33	5.19	5.92	7.38	1.03	7.38

Tabela 15. Comparação deslocamento no centro do vão em t=250 dias. Viga B2.

Modelo	Deslocamento (cm)	Diferença (cm)	Erro Relativo (%)	Taxa
<b>Experimental</b>	1.268			
<b>ACI 209</b>	1.044	0.224	17.69	0.82
<b>Bazant B3</b>	1.022	0.246	19.39	0.81
<b>GL2000</b>	1.016	0.252	19.86	0.80
<b>CEB MC90</b>	1.016	0.252	19.88	0.80
<b>CEB MC99</b>	1.024	0.244	19.27	0.81

Tabela 16. Indicadores estatísticos para deslocamento no centro do vão. Viga B2.

Modelo	RD <sub>Exp</sub> (%)	RD <sub>100p</sub> (%)	$\omega_{BP}$ (%)	V <sub>CEB</sub> (%)	F <sub>CEB</sub> (%)	M <sub>CEB</sub>	$\omega_G$ (%)
<b>ACI 209</b>	15.15	16.04	19.14	12.76	13.38	0.80	15.23
<b>Bazant B3</b>	17.07	18.17	21.74	14.92	14.68	0.78	16.27
<b>GL2000</b>	16.11	17.62	21.55	14.50	14.14	0.79	15.11
<b>CEB MC90</b>	17.39	18.59	22.40	15.24	14.96	0.78	16.43
<b>CEB MC99</b>	15.11	16.81	21.02	13.87	13.44	0.79	13.97

Tabela 17. Comparação deslocamento no centro do vão em t=250 dias. Viga B3.

Modelo	Deslocamento (cm)	Diferença (cm)	Erro Relativo (%)	Taxa
<b>Experimental</b>	2.219			
<b>ACI 209</b>	2.242	0.023	1.03	1.01
<b>Bazant B3</b>	2.247	0.028	1.26	1.01
<b>GL2000</b>	2.294	0.075	3.40	1.03
<b>CEB MC90</b>	2.282	0.063	2.83	1.03
<b>CEB MC99</b>	2.255	0.036	1.61	1.02

Tabela 18. Indicadores estatísticos para deslocamento no centro do vão. Viga B3.

Modelo	RD <sub>Exp</sub> (%)	RD <sub>100p</sub> (%)	$\omega_{BP}$ (%)	V <sub>CEB</sub> (%)	F <sub>CEB</sub> (%)	M <sub>CEB</sub>	$\omega_G$ (%)
<b>ACI 209</b>	5.68	4.99	9.06	6.27	6.60	1.09	6.62
<b>Bazant B3</b>	5.71	4.92	9.54	6.39	7.02	1.10	7.14
<b>GL2000</b>	8.39	7.51	11.23	8.84	9.53	1.12	10.09
<b>CEB MC90</b>	6.43	5.75	9.10	7.00	7.55	1.09	7.88
<b>CEB MC99</b>	6.19	5.33	9.16	7.11	7.80	1.09	7.97

Tabela 19. Comparação deslocamento no centro do vão em t=250 dias. Viga B4.

Modelo	Deslocamento (cm)	Diferença (cm)	Erro Relativo (%)	Taxa
<b>Experimental</b>	1.303			
<b>ACI 209</b>	1.037	0.266	20.42	0.80
<b>Bazant B3</b>	1.015	0.288	22.12	0.78
<b>GL2000</b>	1.009	0.294	22.56	0.77
<b>CEB MC90</b>	1.009	0.294	22.58	0.77
<b>CEB MC99</b>	1.017	0.286	21.98	0.78

Tabela 20. Indicadores estatísticos para deslocamento no centro do vão. Viga B4.

Modelo	RD <sub>Exp</sub> (%)	RD <sub>100p</sub> (%)	$\omega_{BP}$ (%)	V <sub>CEB</sub> (%)	F <sub>CEB</sub> (%)	M <sub>CEB</sub>	$\omega_G$ (%)
<b>ACI 209</b>	20.50	18.85	24.57	16.83	17.92	0.73	19.61
<b>Bazant B3</b>	21.07	20.95	26.35	18.16	17.92	0.73	19.94
<b>GL2000</b>	20.14	20.43	26.23	17.70	17.32	0.74	18.99
<b>CEB MC90</b>	21.37	21.32	27.00	18.44	18.17	0.73	20.15
<b>CEB MC99</b>	19.10	19.69	25.73	16.94	16.34	0.74	17.67

Para as vigas B2 e B4, que suportam unicamente o seu próprio peso, os deslocamentos calculados foram inferiores aos obtidos experimentalmente, com diferenças no valor final de entre 2 e 3 mm. Exatamente o mesmo resultado foi reportado nos trabalhos de Giussani e Mola (2010), Jurkiewicz et al. (2005) e Wang et al. (2010). Giussani e Mola (2010) empregaram um modelo analítico para analisar o comportamento de vigas mistas ao longo do tempo. Foram empregadas as funções de fluência e retração do modelo CEB-FIP e foi considerado o deslocamento relativo dos conectores de cisalhamento. Jurkiewicz et al. (2005) utilizaram um modelo teórico para a análise diferida no tempo de vigas mistas de aço concreto submetidas a condições de serviço. O comportamento ao longo do tempo do

concreto é calculado através de uma formulação incremental, considerando a viscoelasticidade linear para cada passo de tempo. Levou-se em conta o deslocamento relativo dos conectores, enquanto a armadura da laje e a fissuração foram desconsideradas. Wang et al. (2010) empregaram um modelo analítico para análise de curta e longa duração, é considerado o deslocamento relativo dos conectores e é utilizado o modelo CEB-FIP para a obtenção dos parâmetros de fluência e retração.

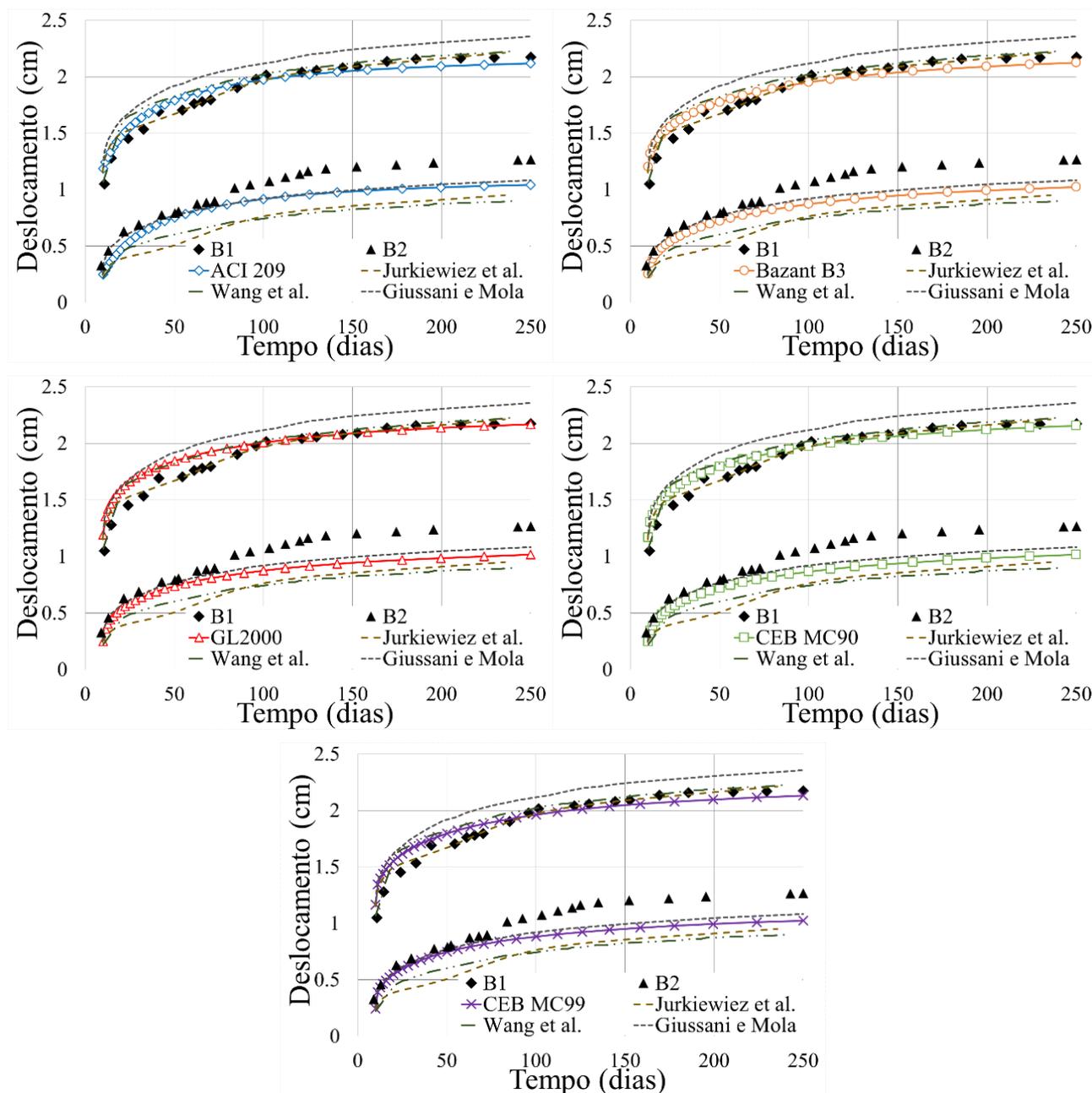


Figura 66. Comparação com outros autores. Vigas B1 e B2. a) ACI 209, b) Bazant B3, c) GL2000, d) CEB MC90, e) CEB MC99

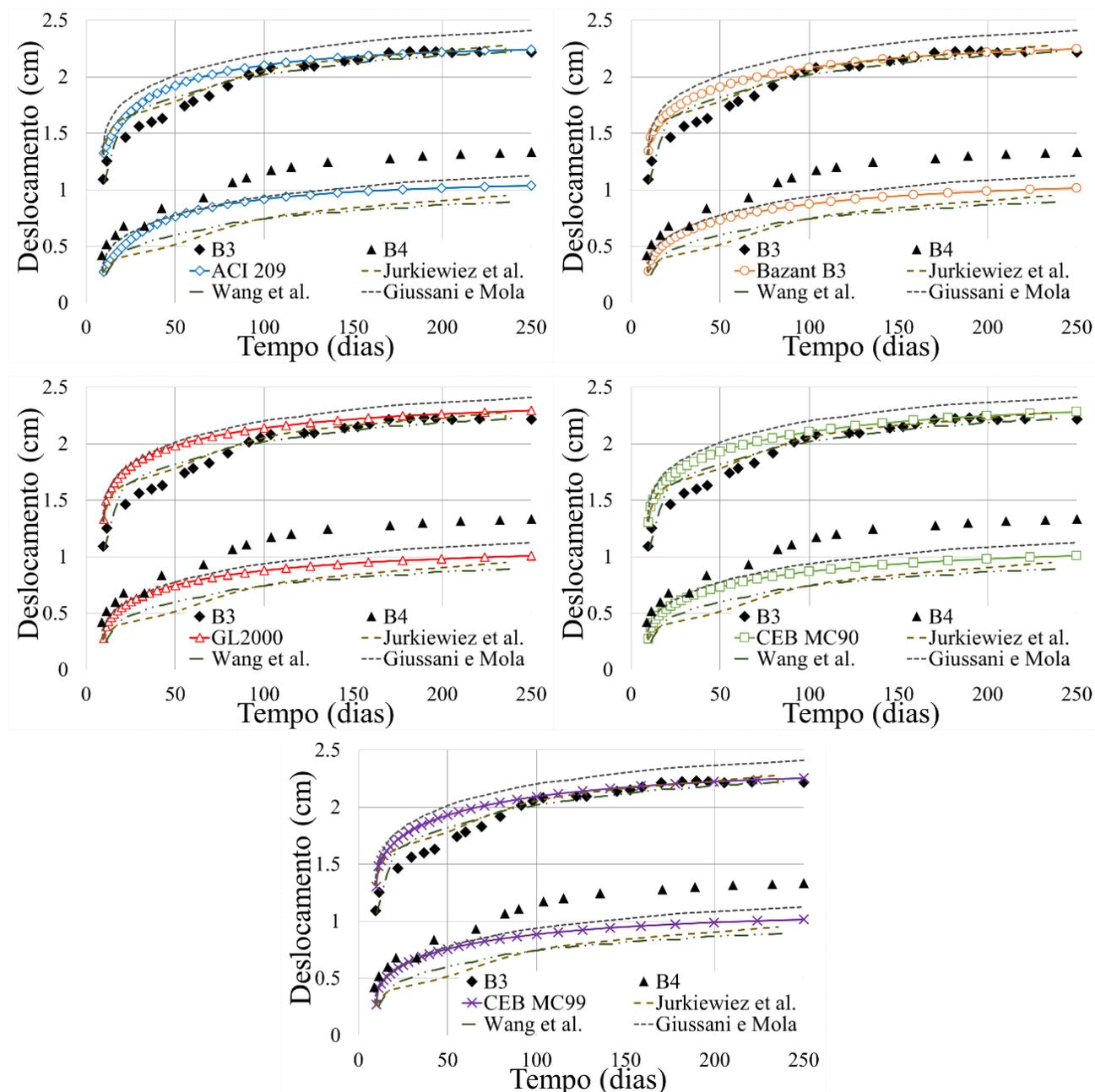


Figura 67. Comparação com outros autores. Vigas B3 e B4. a) ACI 209, b) Bazant B3, c) GL2000, d) CEB MC90, e) CEB MC99

Na Figura 66 apresentam-se os resultados calculados para as vigas B1 e B2 (com maior número de conectores), correspondentes a todos os modelos de fluência e retração implementados. Esses resultados são comparados com os testes experimentais, e com resultados obtidos por Giussani e Mola (2010), Jurkiewicz et al. (2005) e Wang et al. (2010). A mesma informação para as vigas B3 e B4 (com menor número de conectores) encontra-se na Figura 67. Observa-se como para as vigas B2 e B4 (submetidas unicamente ao peso próprio) os referidos autores encontraram, deslocamentos inferiores aos experimentais, inclusive menores que os obtidos na presente análise. Os cinco modelos apresentam

resultados satisfatórios e coincidentes, no caso das vigas B1 e B3, com o relatório experimental, e no caso das vigas B2 e B4 com os resultados obtidos por outros autores, que validaram seus modelos também com as vigas de Bradford e Gilbert (1991).

Levando em consideração o bom ajuste que se teve para as vigas B1 e B3, e a coincidência dos resultados obtidos para as quatro vigas com os três trabalhos citados anteriormente, atribuem-se as diferenças reportadas para as vigas B2 e B4 a questões experimentais, como a variação ao longo do tempo de análise das condições ambientais, a metodologia empregada para a medição dos deslocamentos, entre outros

Na Figura 78 apresentam-se os diagramas das tensões atuantes, correspondentes à seção transversal localizada no meio do vão da viga B1. Logo depois da idade de carregamento (10 dias), todas os esforços de compressão são suportados pelo concreto, enquanto o aço suporta toda a tração. Com o passar do tempo o perfil de aço começa a contribuir com a resistência a compressão, fazendo com que a parcela que suporta o concreto diminua de 0.54 até 0.37 kN/cm<sup>2</sup>. As tensões de tração no aço incrementam com o tempo, alcançando um valor máximo de 14.32 kN/cm<sup>2</sup>. Na Figura 69 apresenta-se a mesma informação para a viga B2, o comportamento é similar ao da viga B1, sendo que a magnitude dos valores das tensões são menores, máximos a tração e compressão no perfil de aço para a idade de 250 dias: 5.92 e 4.09 kN cm<sup>2</sup> respectivamente, em função de que a carga atuante também é menor.

No caso da viga B3, que está submetida às mesmas cargas da B1, mas possui um número menor de conectores, evidenciam-se valores maiores de tensões atuantes, conforme o esperado, ao longo de todo o tempo do ensaio (Figura 70). Finalmente a viga B4 apresenta um comportamento similar à viga anterior, sendo que os valores das tensões são muito menores, isto porque está somente submetida à ação do peso próprio (Figura 81). Constata-se para todos os casos que as cargas aplicadas correspondem ao carregamento de serviço. Não são atingidos os valores de  $f_c$ ,  $f_t$ , nem  $f_y$  ao longo do tempo do ensaio.

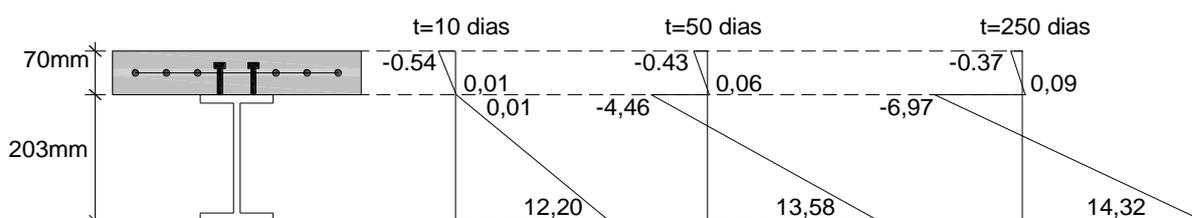


Figura 68. Diagrama de tensões (kN/cm<sup>2</sup>) da viga B1 aos 10, 50 e 250 dias.

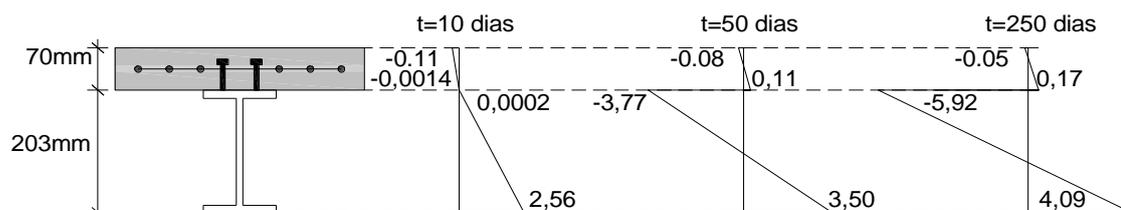


Figura 69. Diagrama de tensões ( $\text{kN}/\text{cm}^2$ ) da viga B2 aos 10, 50 e 250 dias.

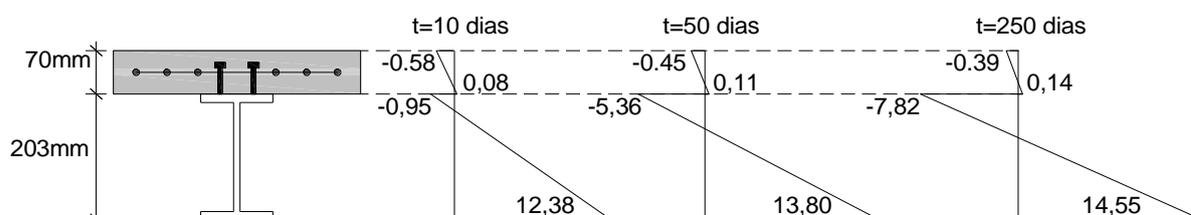


Figura 70. Diagrama de tensões ( $\text{kN}/\text{cm}^2$ ) da viga B3 aos 10, 50 e 250 dias.

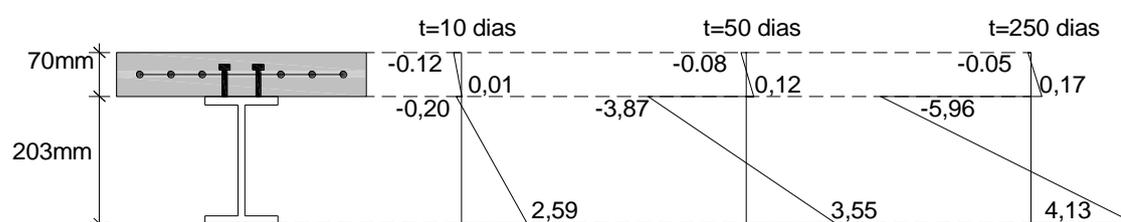


Figura 71. Diagrama de tensões ( $\text{kN}/\text{cm}^2$ ) da viga B4 aos 10, 50 e 250 dias.

Na Figura 72 apresentam-se as gráficas correspondentes ao deslocamento relativo na interfase laje-viga para as vigas B1 e B3 (submetidas ao mesmo carregamento, diferindo entre elas unicamente a quantidade de conectores de cisalhamento). Conforme o esperado, o deslocamento relativo é maior na viga B3, que tem um menor número de conectores. Com o passar do tempo o deslocamento relativo no meio do vão tende a se incrementar, enquanto nos apoios os conectores tendem a recuperar sua posição original por conta da ação dos fenômenos de fluência e retração no concreto. Os maiores valores de deslocamento relativo encontram-se nos extremos da viga.

Na Figura 73 encontra-se o deslocamento relativo para as vigas B2 e B4, ambas submetidas unicamente à ação do peso próprio. Depois de aplicada a carga ( $t=10$  dias) os deslocamentos relativos são maiores para a viga B4, que tem menos conectores, conforme o esperado. Ao longo do tempo a viga B4 apresenta uma maior variação no deslocamento relativo, isso pela menor quantidade de conectores. Se bem o comportamento é similar ao das vigas B1 e B3 os valores absolutos do deslocamento relativo são menores, devido a que suportam um carregamento menor.

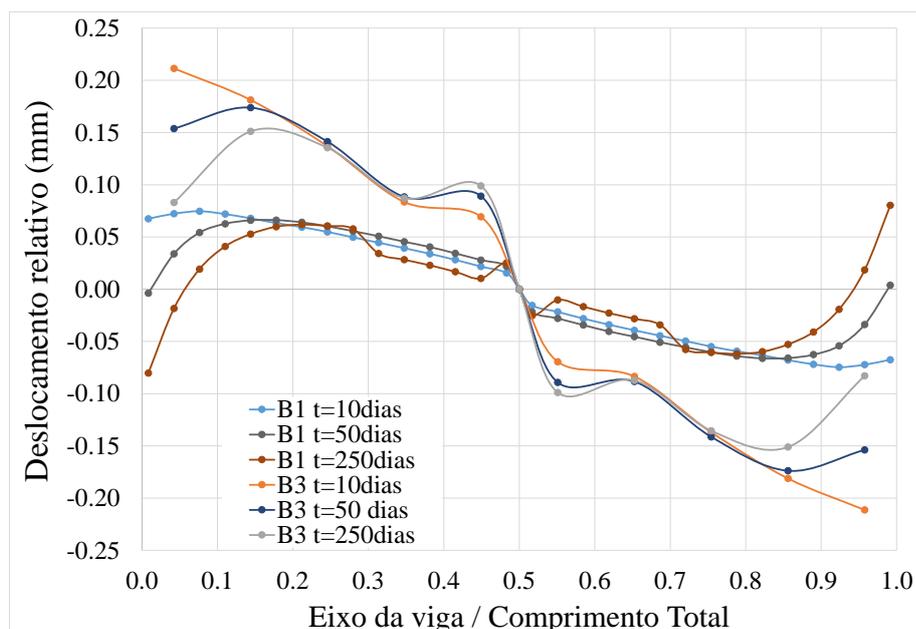


Figura 72. Deslocamento relativo ao longo do vão. Vigas B1 e B3.

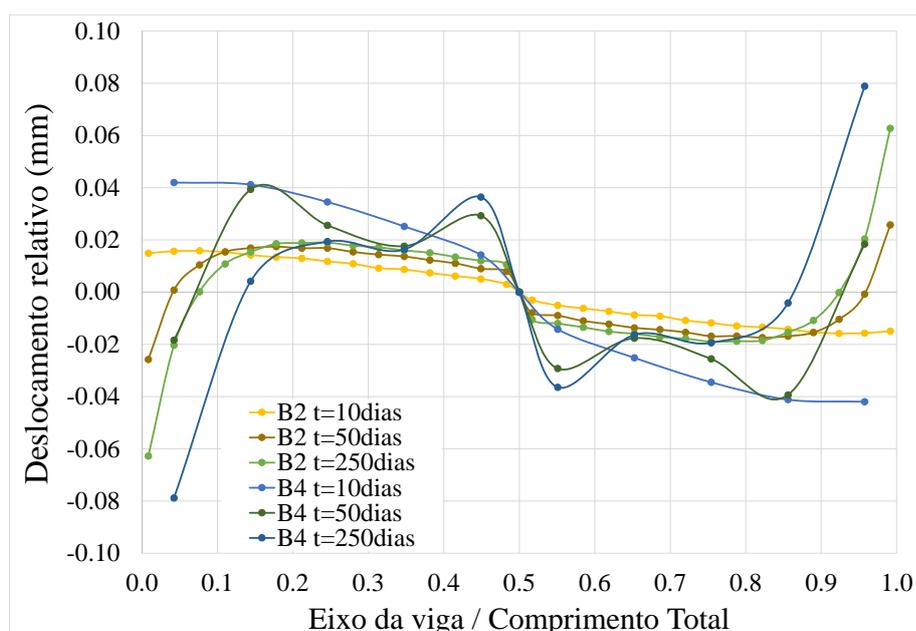


Figura 73. Deslocamento relativo ao longo do vão. Vigas B2 e B4.

Na Figura 74 encontra-se uma imagem correspondente ao pós-processamento dos dados de deslocamentos para a viga B1, em primeiro lugar apresenta-se a deformada da estrutura na idade de 10 dias, quando é recém aplicado o carregamento e em seguida a deformada na idade de 250 dias, que corresponde ao tempo total da análise. As mesmas informações são apresentadas para as vigas B2, B3 e B4 na Figura 75, Figura 76 e Figura 77 respectivamente. O deslocamento diferido no tempo é amplamente significativo, sendo que segundo a presente análise, o deslocamento ao final do período dos 250 dias representa

aproximadamente 4 vezes o deslocamento inicial para as vigas que somente suportam o peso próprio e 1,7 vezes o deslocamento inicial para as vigas com carga externa.

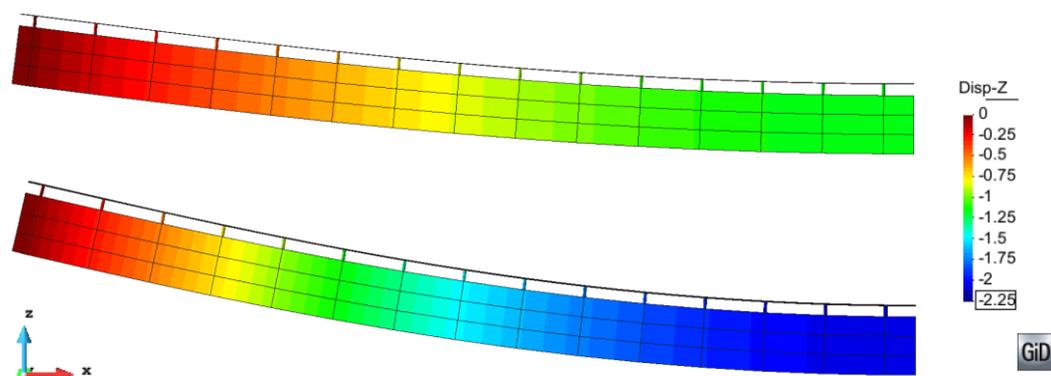


Figura 74. Deformada e deslocamento (cm) da viga B1 aos 10 e 250 dias

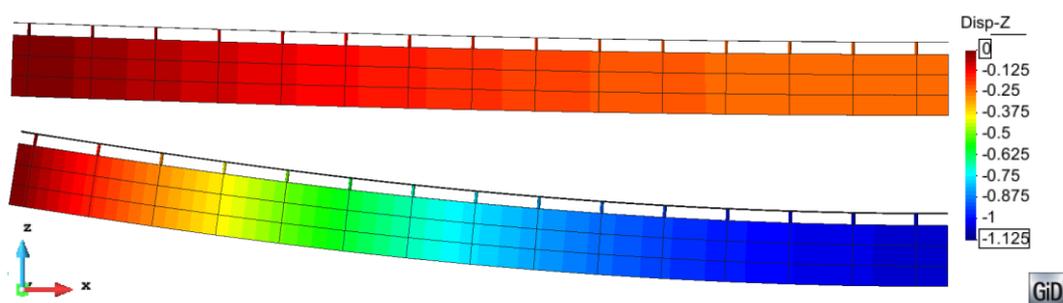


Figura 75. Deformada e deslocamento (cm) da viga B2 aos 10 e 250 dias

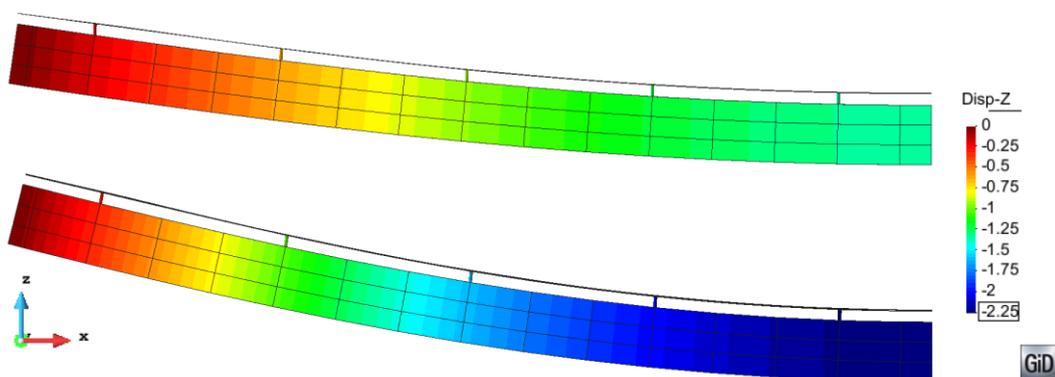


Figura 76. Deformada e deslocamento (cm) da viga B3 aos 10 e 250 dias

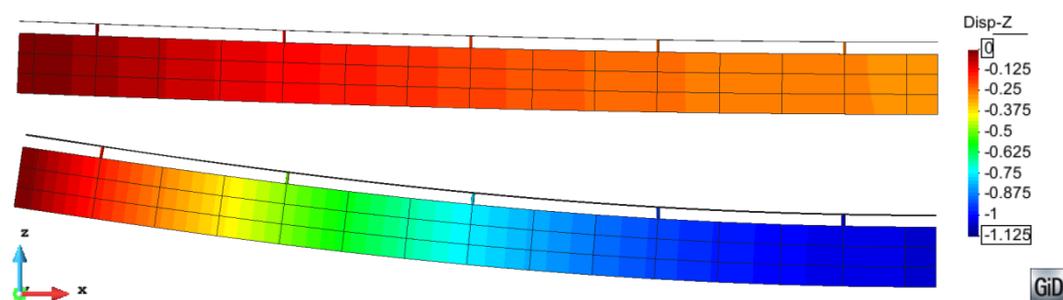


Figura 77. Deformada e deslocamento (cm) da viga B4 aos 10 e 250 dias

## 6.2. VIGAS MISTAS CONTÍNUAS

Duas vigas mistas contínuas de dois vãos foram testadas durante um período de 340 dias por Gilbert e Bradford (1992). As vigas possuem dois vãos iguais de 5,80 m, e são idênticas quanto a sua geometria. A primeira (B1) só suporta o peso próprio de 1,92 kN/m, enquanto a segunda (B2) suporta adicionalmente uma sobrecarga de 4,75kN/m. Na Figura 78 encontram-se as dimensões características da seção transversal.

No relatório experimental não se tem detalhes dos conectores. As propriedades, dimensões e arranjo adotados no presente trabalho correspondem às adotadas por Jiang et al. (2009), que usaram estas vigas para validar seu modelo. O arranjo consiste em duas linhas de conectores, espaçados uniformemente cada 145 mm. A curva de rigidez adotada apresenta-se na Figura 79. A deformação última a tração do concreto corresponde a 10 vezes a deformação tradicional, conforme Liang et al. (2005) e Baskar et al. (2002). Um resumo com as propriedades dos materiais apresenta-se na Tabela 21.

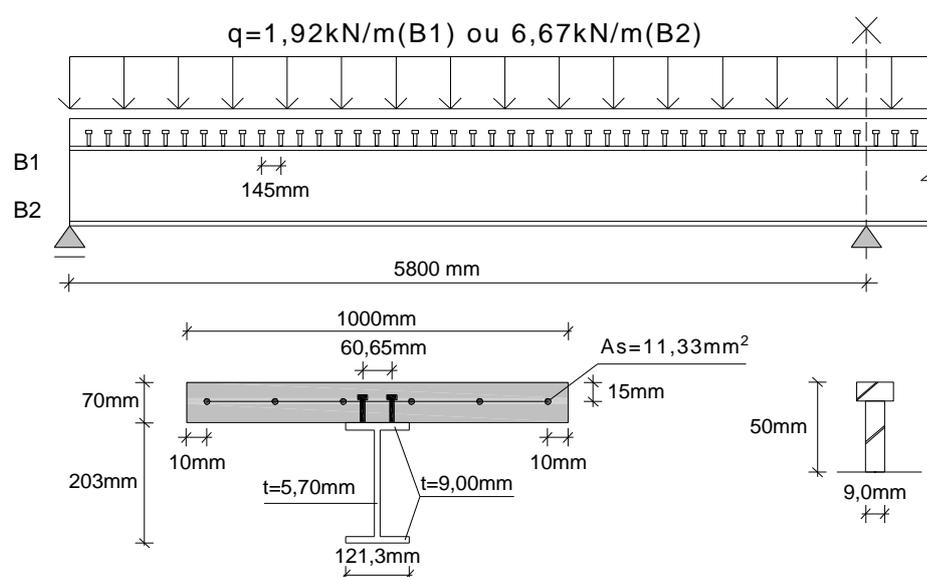


Figura 78. Geometria e seção transversal das vigas mistas contínuas B1 e B2.

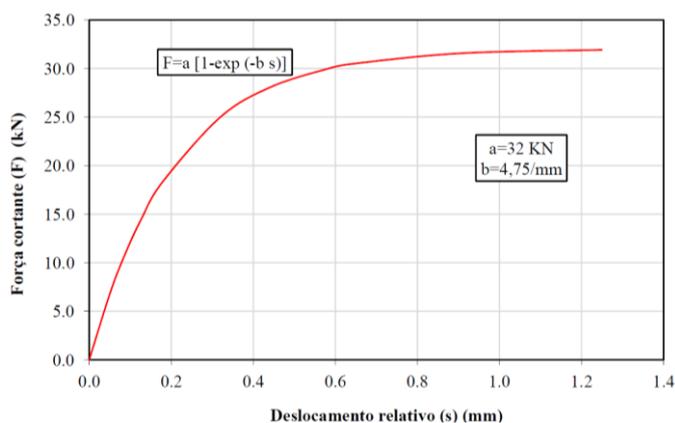


Figura 79. Rigidez dos conectores das vigas de Gilbert e Bradford (1992)

Tabela 21. Propriedades dos materiais para as vigas de Gilbert e Bradford (1992)

Material	Propriedades			
Aço Estrutural	Módulo de Elasticidade	$E =$	200000	MPa
	Tensão de Escoamento	$f_y =$	280	MPa
	Tensão Última	$f_y =$	350	MPa
	Coefficiente de Poisson	$\nu =$	0,3	
	Deformação Última	$\epsilon_u =$	25	%
Aço de Reforço	Módulo de Elasticidade	$E =$	200000	MPa
	Tensão de Escoamento	$f_y =$	280	MPa
	Tensão Última	$f_u =$	350	MPa
	Coefficiente de Poisson	$\nu =$	0,3	
	Deformação Última	$\epsilon_u =$	25	%
Concreto	Resistência à Compressão	$f_{ck} =$	27,0	MPa
	Módulo de Elasticidade	$E_{28} =$	22000	MPa
	Resistência à Tração	$f_t =$	3,00	MPa
	Coefficiente de Poisson	$\nu =$	0,2	
	Deformação Última à Tração	$\epsilon_{u(+)} =$	3,0	%o
	Deformação Última à Compressão	$\epsilon_{u(-)} =$	4,5	%o
Conector de Cisalhamento	Espaçamento	$s =$	145	mm
	Diâmetro x Altura	$d \times h =$	9,0 x 50,0	mm
	Número de Linhas	$n =$	2	
	Constante 1	$a =$	32	kN
	Constante 2	$b =$	4,75	$\text{mm}^{-1}$

Aproveitando a propriedade de simetria, modelou-se apenas a metade da estrutura. Empregaram-se para a malha de elementos finitos: 369 elementos para representar a viga de aço (41 divisões no sentido longitudinal), 287 para a laje de concreto (41 divisões no sentido longitudinal) e 80 para os conectores de cisalhamento (40 pares igualmente espaçados), conforme a Figura 80. Para representar a laje empregaram-se 7 camadas de concreto cada uma com 10 mm de espessura e 1 camada de aço para representar a armadura conforme a Figura 81. No lado esquerdo dessa figura encontra-se a posição real da armadura, enquanto que à direita encontram-se a espessura e a posição normalizada da armadura dentro da laje e a direção da camada de aço, sendo que  $\theta = 0^\circ$  refere-se à armadura longitudinal.

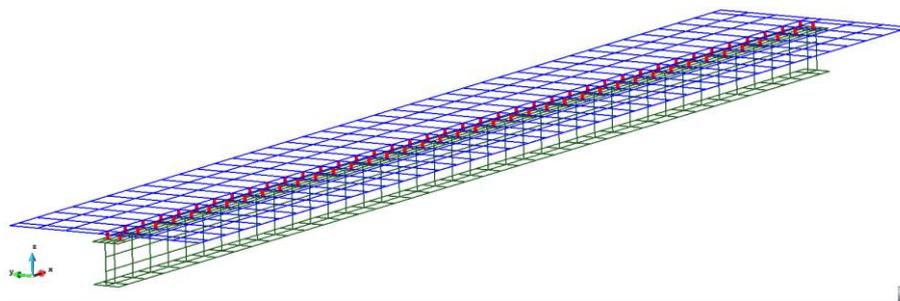


Figura 80. Malha de elementos finitos das vigas contínuas B1 e B2.

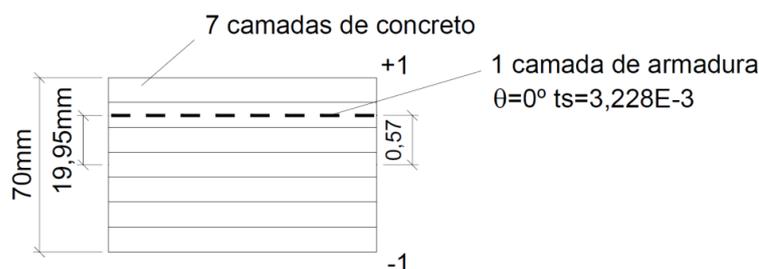


Figura 81. Esquema das camadas de concreto e aço para as vigas contínuas B1 e B2.

A carga correspondente ao peso próprio foi aplicada como carga de pressão nos elementos da laje de concreto. A sobrecarga na viga B2 foi aplicada como uma carga de pressão sobre os mesmos elementos. A idade de aplicação do carregamento e o tempo de cura não são mencionados no relatório experimental. Adotou-se um valor de 7 dias, conforme uma das idades consideradas por Chaudharya et al. (2007). O tempo total da análise foi 340 dias, empregaram-se para a análise 34 passos de tempo que são apresentados na Tabela 24.

Segundo Bradford e Gilbert (1995) para o período final, a deformação por retração medida foi de  $520 \times 10^{-6}$ . Para representar os fenômenos de fluência e retração adotaram-se as seguintes variáveis: cimento de endurecimento normal (Tipo I), temperatura de 20 °C, e umidade relativa diferente dependendo do modelo, a fim de ajustar o valor da retração ao resultado experimental. O Ajuste se realiza em função de que no relatório experimental não são fornecidos dados referentes às condições ambientais durante o tempo de ensaio, unicamente valores experimentais da retração. Na Tabela 22 apresenta-se um resumo das propriedades utilizadas e na Tabela 23 encontram-se os parâmetros obtidos da cadeia de Kelvin para cada modelo.

Tabela 22. Propriedades para análise diferida no tempo. Vigas contínuas B1 e B2.

<b>Método de cura</b>	Úmida	
<b>Tempo de cura</b>	7 dias	
<b>Tempo aplicação do carregamento</b>	7 dias	
<b>Tempo total de análise</b>	340 dias	
<b>Tipo de cimento</b>	1	
<b>Temperatura</b>	20 °C	
<b>Umidade relativa</b>	ACI 209	69 %
	Bazant B3	70 %
	GL2000	69 %
	MC90	41 %
	MC99	55 %

Tabela 23. Parâmetros da cadeia de Kelvin para as vigas contínuas B1 e B2.

Cadeia Kelvin (n=5)							
Parâmetro	Modelo		ACI	Bazant B3	GL2000	MC90	MC99
	$\tau_1$	0,07	E <sub>1</sub>	22,26	2,41	8,49	2,73
$\tau_2$	0,7	E <sub>2</sub>	11,65	5,34	2,15	2,79	3,25
$\tau_3$	7	E <sub>3</sub>	2,29	2,93	1,21	1,33	1,54
$\tau_4$	70	E <sub>4</sub>	1,28	1,25	1,06	0,67	0,78
$\tau_5$	700	E <sub>5</sub>	2,51	1,57	1,65	0,65	0,75

Tabela 24. Passos de tempo empregados na análise (dias). Vigas contínuas B1 e B2.

Passo	Tempo (dias)								
1	7,00	8	15,67	15	35,08	22	78,54	29	175,83
2	7,85	9	17,58	16	39,36	23	88,12	30	197,29
3	8,81	10	19,73	17	44,17	24	98,88	31	221,36
4	9,89	11	22,14	18	49,56	25	110,94	32	248,37
5	11,09	12	24,84	19	55,6	26	124,48	33	278,68
6	12,45	13	27,87	20	62,39	27	139,67	34	340,00
7	13,97	14	31,27	21	70,00	28	156,71		

Na Figura 82 comparam-se os resultados experimentais correspondentes ao deslocamento no centro do vão, com os calculados por cada um dos modelos implementados. As discontinuidades que acontecem para todos os modelos são produto da fissuração da laje, que ocorre em diferentes momentos, dependendo do modelo. Na Tabela 25 e na Tabela 27 apresentam-se a comparação do deslocamento final aos 340 dias no centro do vão, para as vigas B1 e B2 respectivamente. Os resultados têm uma boa concordância com os dados experimentais, sendo que para a viga B1 a maior diferença corresponde à predição do modelo ACI e equivale a só 0,033 cm, enquanto para a viga B2 esta diferença é de 0,066 cm.

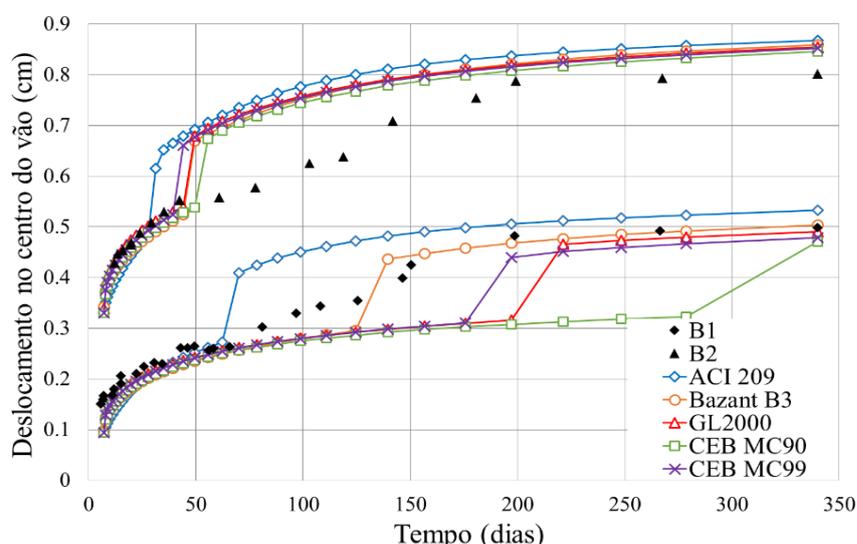


Figura 82. Deslocamento no centro do vão para vigas contínuas B1 e B2.

Na Tabela 26 são apresentados os indicadores estatísticos que comparam o comportamento de cada modelo ao longo de todo o tempo do ensaio para a viga contínua B1. Baseado nestes indicadores, o modelo Bazant B3 é o que melhor se adapta a curva experimental, e coincidentemente é o que prediz com maior exatidão o deslocamento final, sendo que a diferença entre o valor experimental e o calculado é de 0,004 cm, isto é 0,90% de erro (Tabela 25). Na Tabela 28 apresenta-se a mesma informação para a viga contínua B2, neste caso quatro dos cinco modelos apresentam um comportamento similar, sendo que o erro está quantificado entre 7% e 13% para eles; unicamente o modelo do ACI diferencia-se dos outros predizendo um deslocamento ligeiramente maior.

Tabela 25. Deslocamento no centro do vão t=340 dias. Viga contínua B1.

Modelo	Deslocamento (cm)	Diferença (cm)	Erro Relativo (%)	Taxa
<b>Experimental</b>	0.499			
<b>ACI 209</b>	0.532	0.033	6.71	1.07
<b>Bazant B3</b>	0.503	0.004	0.90	1.01
<b>GL2000</b>	0.490	0.009	1.72	0.98
<b>CEB MC90</b>	0.471	0.028	5.57	0.94
<b>CEB MC99</b>	0.479	0.020	4.06	0.96

Tabela 26. Indicadores estatísticos - deslocamento no centro do vão. Viga contínua B1.

Modelo	RD <sub>Exp</sub> (%)	RD <sub>100p</sub> (%)	$\omega_{BP}$ (%)	V <sub>CEB</sub> (%)	F <sub>CEB</sub> (%)	M <sub>CEB</sub>	$\omega_G$ (%)
<b>ACI 209</b>	19.65	14.92	24.97	35.98	36.25	0.90	18.27
<b>Bazant B3</b>	14.09	6.43	17.77	32.33	32.58	0.81	12.18
<b>GL2000</b>	15.08	12.84	25.11	34.67	34.72	0.76	15.69
<b>CEB MC90</b>	18.58	23.67	30.24	37.50	37.26	0.73	18.67
<b>CEB MC99</b>	14.65	12.23	22.34	34.68	34.93	0.77	14.37

Tabela 27. Deslocamento no centro do vão t=340 dias. Viga contínua B2.

Modelo	Deslocamento (cm)	Diferença (cm)	Erro Relativo (%)	Taxa
<b>Experimental</b>	0.802			
<b>ACI 209</b>	0.868	0.066	8.23	1.08
<b>Bazant B3</b>	0.859	0.057	7.16	1.07
<b>GL2000</b>	0.855	0.053	6.60	1.07
<b>CEB MC90</b>	0.846	0.044	5.49	1.06
<b>CEB MC99</b>	0.853	0.051	6.30	1.06

Tabela 28. Indicadores estatísticos deslocamento no centro do vão. Viga contínua B2.

Modelo	RD <sub>Exp</sub> (%)	RD <sub>100p</sub> (%)	$\omega_{BP}$ (%)	V <sub>CEB</sub> (%)	F <sub>CEB</sub> (%)	M <sub>CEB</sub>	$\omega_G$ (%)
<b>ACI 209</b>	13.69	14.25	16.38	17.36	17.12	1.10	12.63
<b>Bazant B3</b>	9.35	11.22	12.61	12.97	12.91	1.06	9.29
<b>GL2000</b>	7.87	10.98	12.84	13.24	13.13	1.08	8.96
<b>CEB MC90</b>	8.01	9.38	11.48	11.91	11.84	1.06	8.45
<b>CEB MC99</b>	8.56	10.89	12.67	13.17	13.02	1.08	9.13

Adicionalmente efetuou-se uma comparação com os resultados obtidos por outros autores que validaram seus próprios modelos também com as vigas de Gilbert e Bradford (1992). Esse é o caso de Chaudharya et al. (2007) e Nguyen et al. (2010). Chaudharya et al. (2007) empregaram um modelo híbrido analítico-numérico para a análise de vigas mistas contínuas de aço e concreto, sendo analítico ao nível do elemento e numérico ao nível da estrutura. O modelo leva em consideração a não linearidade produzida pela fluência e a retração do concreto. Nguyen et al. (2010) utilizaram uma formulação exata, discretizada no tempo para avaliar o comportamento diferido de vigas mistas de concreto e aço. No modelo as relações constitutivas são representadas ao longo do tempo, e as equações diferenciais que governam o comportamento são derivadas em função do deslocamento para cada instante; essas equações são resolvidas analiticamente e a matriz de rigidez é deduzida de modo genérico para o elemento de viga mista. Nguyen et al. (2010) fizeram duas análises, na primeira ignorando a fissuração e na segunda considerando-a baseados na sugestão do Eurocode 4 (En1994-1-1, 2004), negligenciando a contribuição do concreto ao longo de 15% do vão. Para considerar a fluência e a retração empregaram o modelo CEB-MC90.

Na Figura 83 representam-se os resultados obtidos por Chaudharya et al. (2007) e por Nguyen et al. (2010) para o caso da análise com fissuração. Comparam-se esses resultados com os obtidos neste trabalho para cada um dos modelos. Em geral, os resultados de Chaudharya et al. (2007) acompanham a curva experimental durante os primeiros dias do ensaio, antes de ocorrer a fissuração. Cabe destacar que os resultados de Nguyen et al. (2010) assumem a peça fissurada desde o começo da análise, fazendo com que o modelo apresente significativas diferenças no início da análise, mas acompanhe o comportamento experimental depois de ter ocorrido a fissuração da laje de concreto. Em termos gerais as curvas correspondentes aos modelos implementados encontram-se contidas no intervalo entre as duas curvas obtidas pelos autores anteriores. Os resultados obtidos no presente estudo conseguem acompanhar tanto os deslocamentos iniciais, antes de ocorrer a fissuração, como a resposta final da estrutura, depois de fissurada a laje.

Na Figura 84 apresentam-se a deformada e os deslocamentos calculados da viga contínua B1, mostra-se a evolução do deslocamento ao longo do tempo considerando as idades de 7, 45, 125 e 340 dias, baseado nos resultados do modelo Bazant B3, que foi o que apresentou um melhor comportamento. Uma análise similar para a viga contínua B2 encontra-se na Figura 85. O deslocamento aos 7 dias é produzido pela carga aplicada na estrutura e à ação do peso próprio, esta análise corresponde com a resposta instantânea da estrutura. Com o

passar do tempo, o deslocamento aumenta devido à ação da fluência e da retração, sendo que no caso da viga B1 (submetida unicamente ao peso próprio) o deslocamento aos 340 dias equivale a 5 vezes o deslocamento instantâneo, enquanto para a viga B2 (submetida a um carregamento adicional de 4,75 kN/m) o deslocamento é 2,5 vezes o inicial. Enxerga-se o efeito das condições de apoio do problema, sendo que o apoio esquerdo corresponde ao apoio de extremo e o direito é o apoio central, posicionado sobre o eixo no qual aplicou-se a condição de simetria.

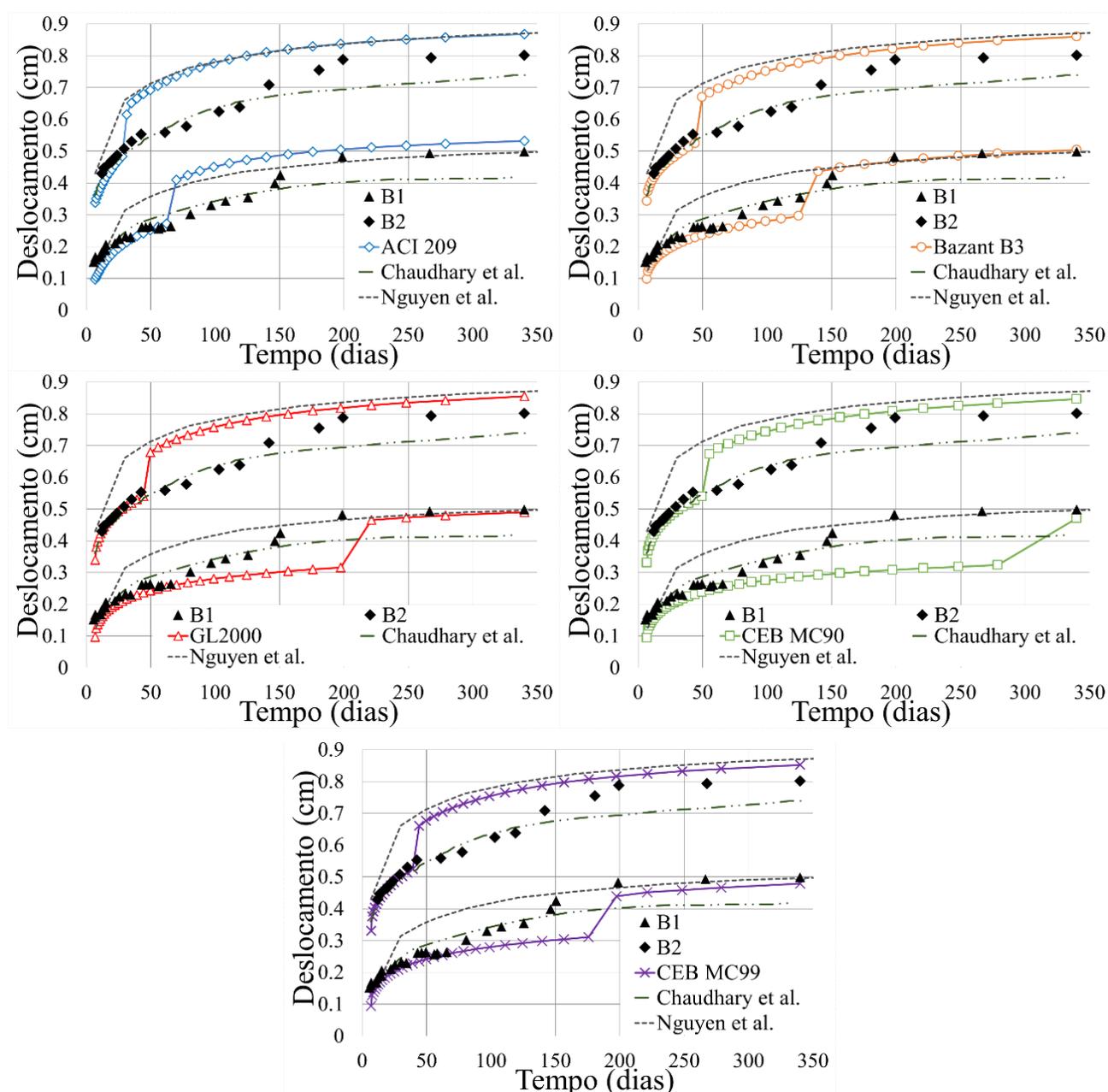


Figura 83. Comparação com outros autores. Vigas contínuas B1 e B2. a) ACI 209, b) Bazant B3, c) GL2000, d) CEB MC90, e) CEB MC99

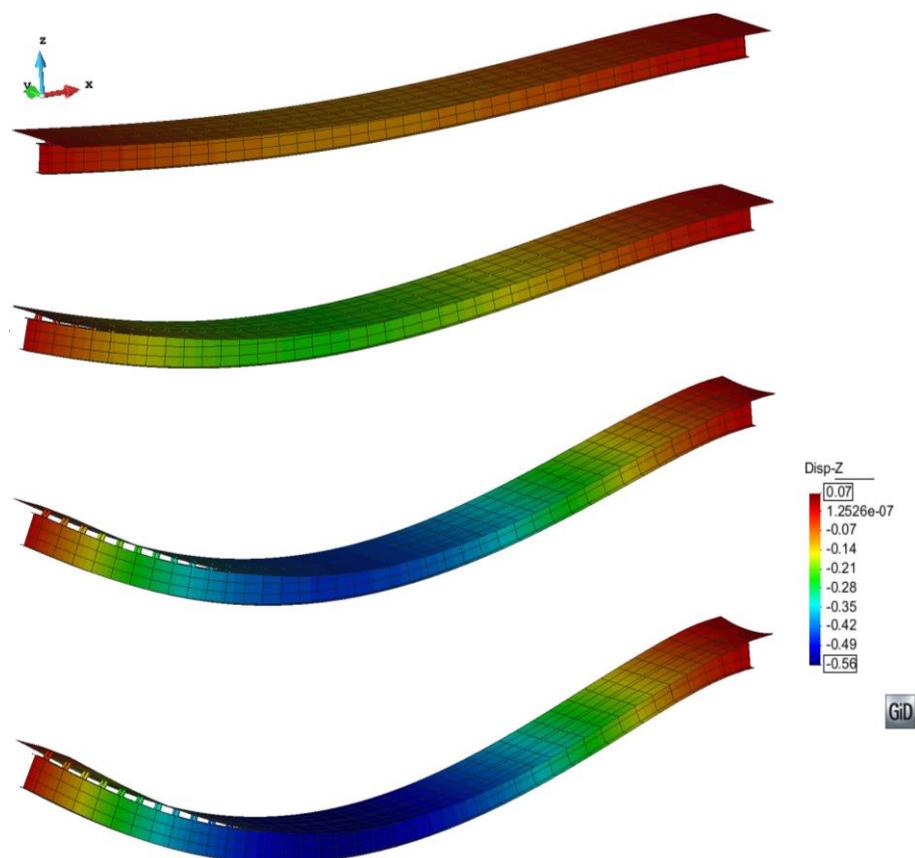


Figura 84. Deformada e deslocamento (cm). Viga B1. Modelo Bazant B3. 7, 45, 125 e 340 dias.

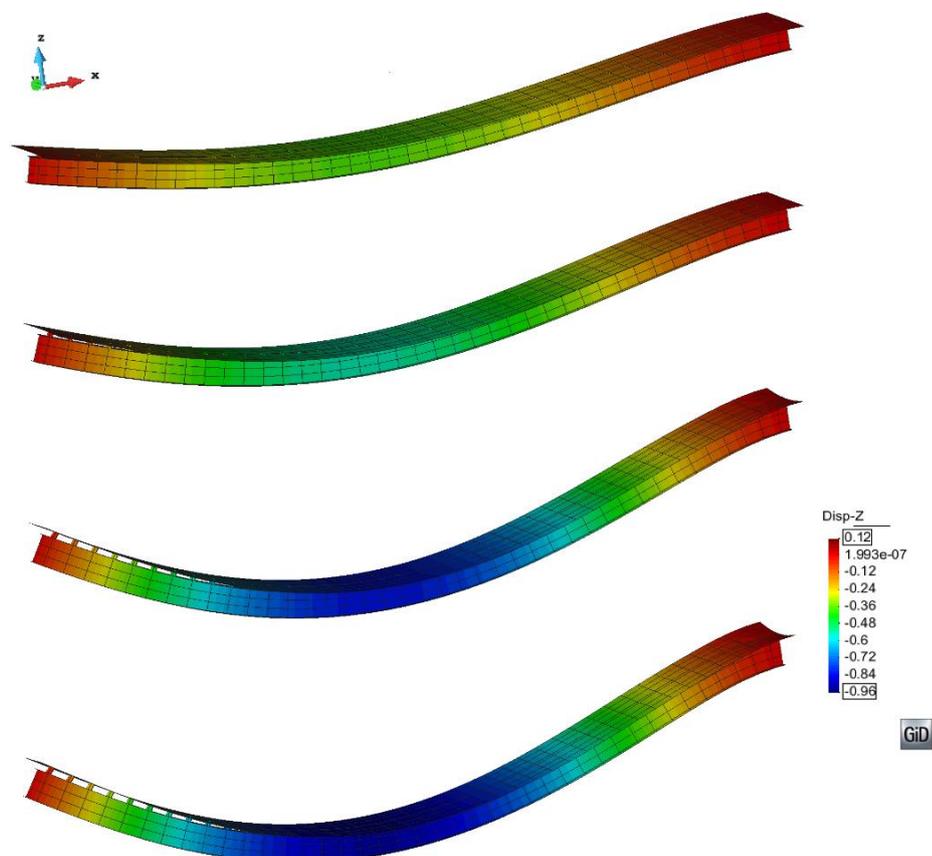


Figura 85. Deformada e deslocamento (cm). Viga B2. Modelo Bazant B3. 7, 45, 125 e 340 dias.

Na Figura 86 apresenta-se a evolução da fissuração na camada superior da laje de concreto para a viga contínua B1. As fissuras aparecem na região próxima ao apoio central da estrutura, onde se produz momento negativo e conseqüentemente se geram esforços de tração. Na idade de aplicação da carga não ocorre fissuração, esta começa a acontecer por volta do dia 45 e se desenvolve ao longo de todo o tempo e análise. Para a viga contínua B2 (Figura 87) a fissuração aparece desde o começo do carregamento, e o nível de fissuração apresentado é em geral mais elevado do que para a viga anterior.

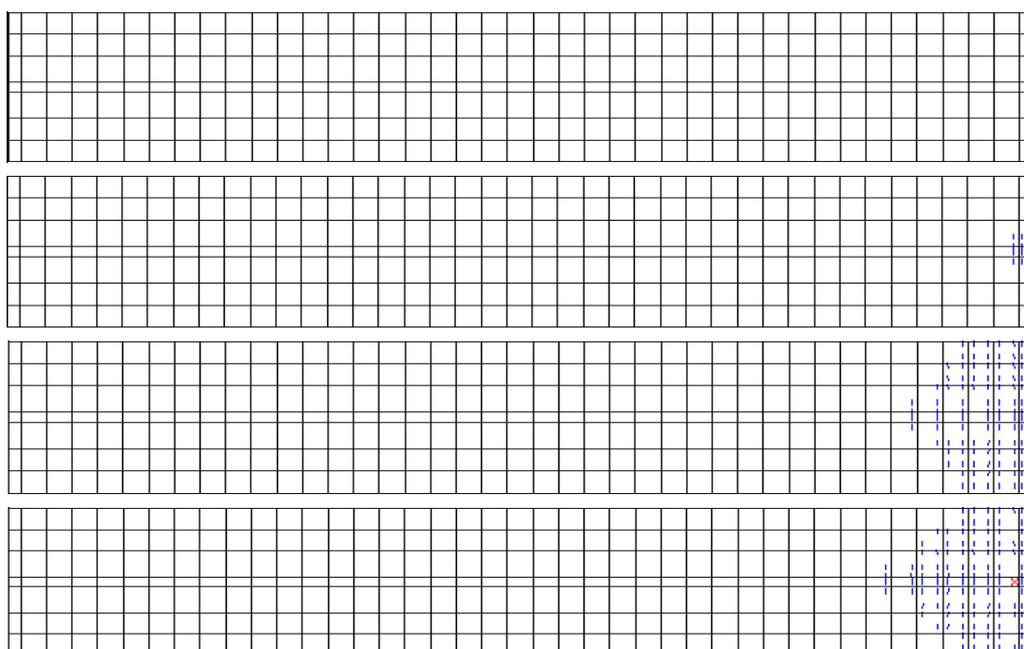


Figura 86. Fissuração na camada superior da laje viga B1 para 7, 45, 125 e 340 dias.

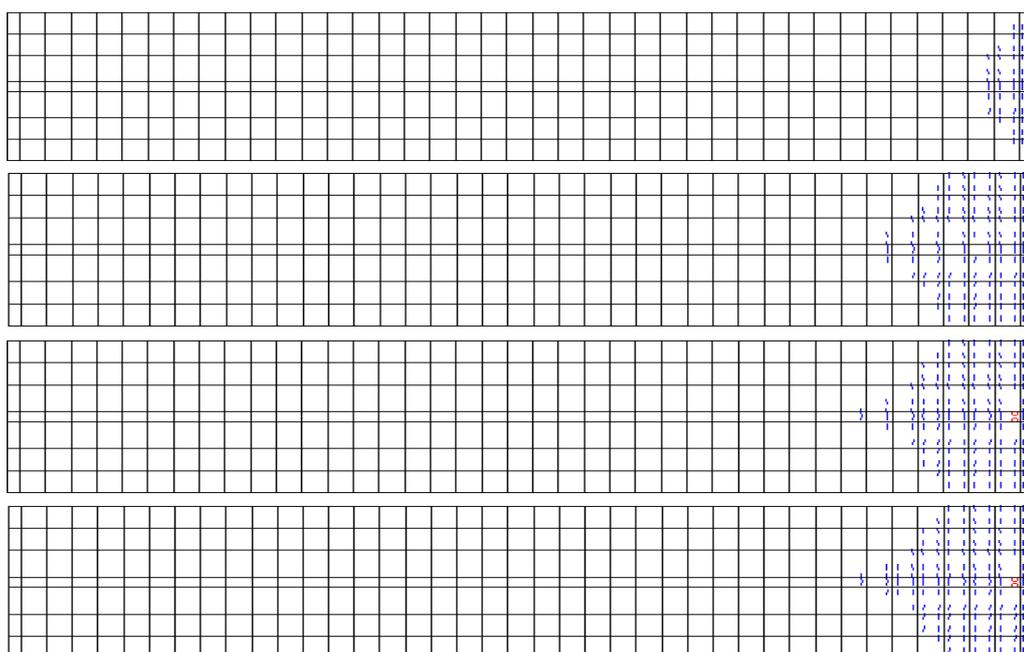


Figura 87. Fissuração na camada superior da laje viga B2 para 7, 45, 125 e 340 dias.

Na Figura 88 apresentam-se os diagramas das tensões atuantes, ao longo do tempo; na seção transversal que corresponde ao apoio intermédio, onde se apresenta a inversão de momento fletor. Na idade de aplicação do carregamento tanto o aço como o concreto suportam baixas tensões de tração e compressão. Aos 45 dias a laje de concreto assume toda a tração da seção e o perfil de aço assume a compressão, o valor dessas tensões continua se incrementando no tempo, até o dia 125 onde as tensões no concreto quase alcançam o valor de  $f_t$ . Posteriormente o concreto se fissura e diminui consideravelmente sua capacidade à tração, fazendo com que o perfil de aço assumira a responsabilidade pela tração e a compressão da seção. Já a viga B2 (Figura 89), apresenta desde as primeiras idades tensões maiores do que a B1, conforme ao esperado, pois suporta um carregamento maior. O concreto alcança a seu limite a tração antes do que a viga B1, mais ou menos nos 45 dias. Posteriormente o perfil de aço suporta tanto a tração como compressão às que está submetida a seção.

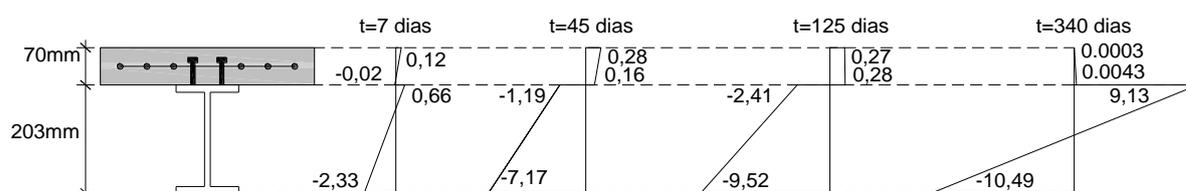


Figura 88. Diagrama de tensões ( $\text{kN/cm}^2$ ) da viga contínua B1 aos 7, 45, 125 e 340 dias.

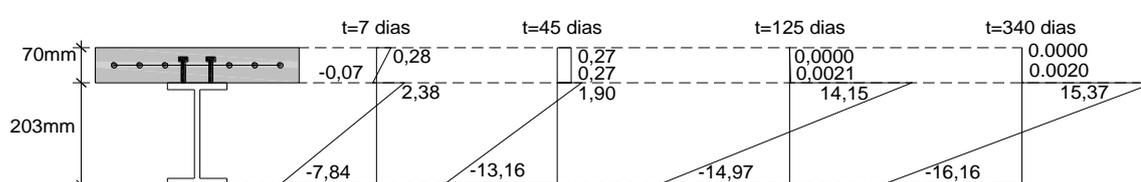


Figura 89. Diagrama de tensões ( $\text{kN/cm}^2$ ) da viga contínua B2 aos 7, 45, 125 e 340 dias.

### 6.3. VIGAS MISTAS SUBMETIDAS A FLEXÃO POSITIVA E NEGATIVA

Uma série de experimentos com vigas mistas foram desenvolvidos por Fan et al. (2010). Os autores analisaram o comportamento deste tipo de estruturas quanto aos efeitos de fluência e retração, estudando vigas submetidas a momento fletor positivo e negativo. Foram ensaiadas quatro vigas durante um período de 3 anos: duas dessas simplesmente apoiadas (LCB1 e LCB2), com concretos de diferentes resistências, submetidas a um momento positivo; e as outras duas em balanço (LCB3 e LCB4), submetidas a momento negativo, com diferente armadura longitudinal. Informações detalhadas das vigas encontra-se na Tabela 29.

Tabela 29. Diferenças entre as vigas de Fan et al. (2010)

Viga	Condição de carregamento	Comprimento	Concreto	Armadura Longitudinal	Quantia de aço
LCB1	Momento Positivo	4,0	C20	8 $\phi$ 6	0,63%
LCB2	Momento Positivo	4,0	C30	8 $\phi$ 6	0,63%
LCB3	Momento Negativo	2,0+1,0+2,0	C30	4 $\phi$ 12+4 $\phi$ 6	1,57%
LCB4	Momento Negativo	2,0+1,0+2,0	C30	8 $\phi$ 12+4 $\phi$ 6	2,83%

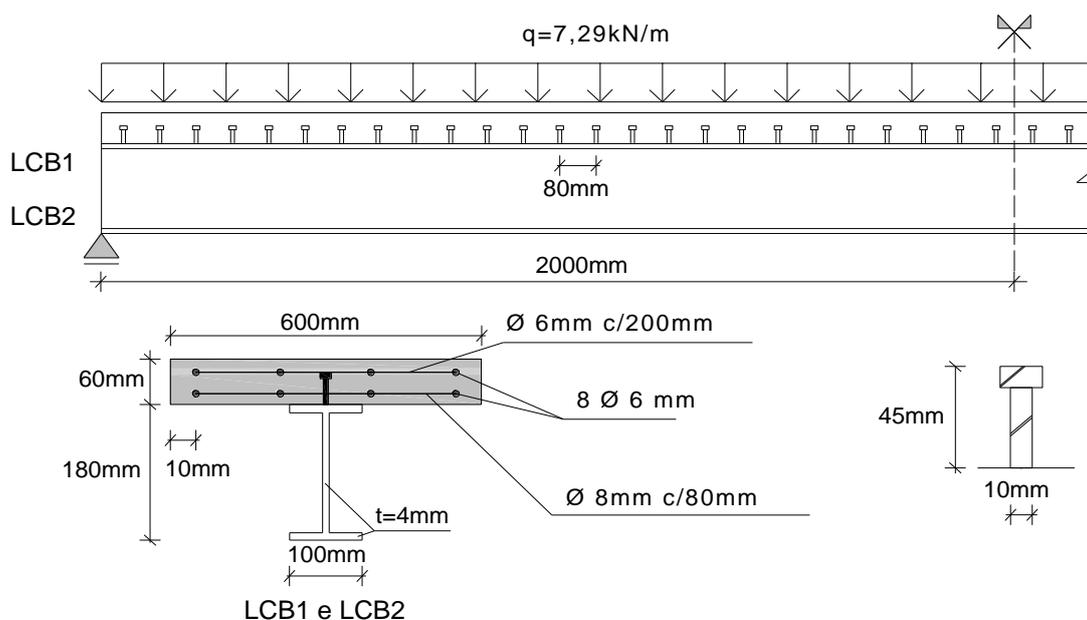


Figura 90. Geometria e seção transversal das vigas mistas LCB1 e LCB2.

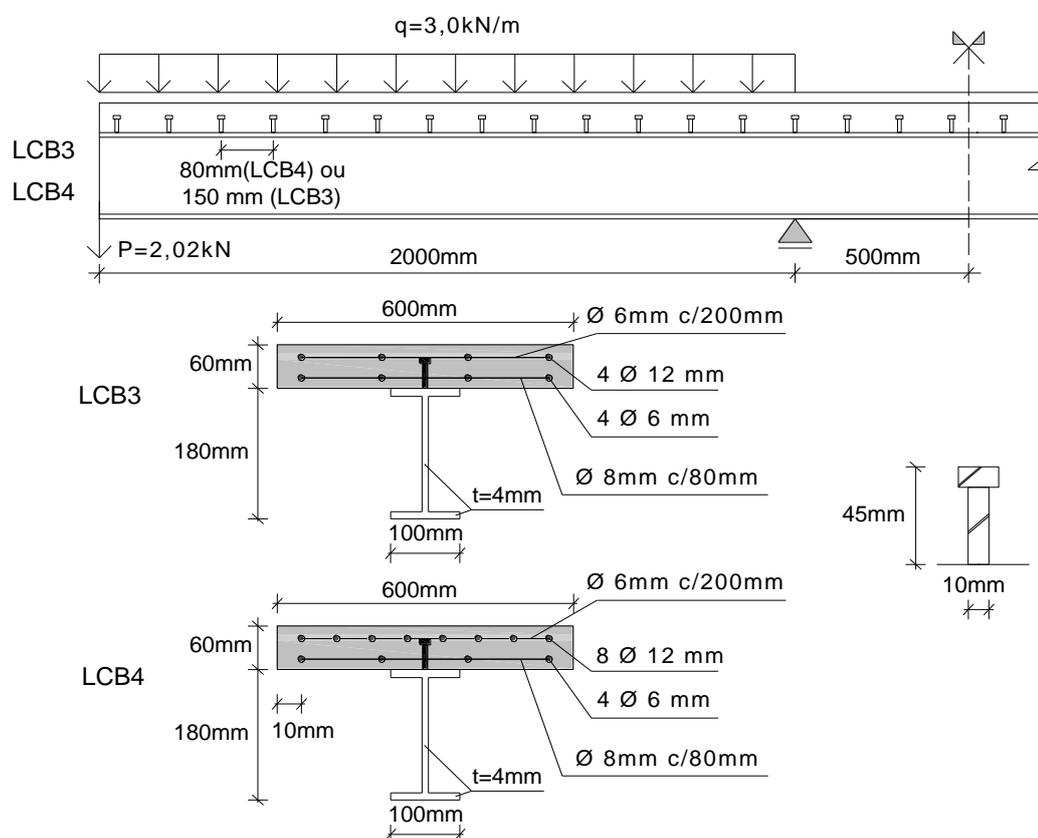


Figura 91. Geometria e seção transversal das vigas mistas LCB3 e LCB4.

As vigas LCB1 e LCB2, têm um comprimento de 4,0 m. Foram carregadas com uma carga distribuída de 7,29 kN/m, incluindo o peso próprio. A geometria, a seção transversal e as condições de carregamento encontram-se expostas na Figura 90. Para a LCB1 empregou-se um concreto denominado C20, enquanto para as vigas LCB2, LCB3 e LCB4 foi utilizado um concreto denominado C30. Maiores detalhes sobre as características do concreto das quatro vigas encontram-se na Tabela 30.

As vigas LCB3 e LCB4 possuem um vão central de 1,0 m e um balanço de 2,0 m nas extremidades. Foram aplicadas cargas pontuais nos extremos das vigas com um valor de 2.02 kN, para gerar um momento negativo no espaçamento entre os apoios. Para simular uma estrutura de ponte real aplicou-se também uma carga externa distribuída de 1,94 kN/m nos balanços. A carga total distribuída incluindo o peso próprio é de 3,0 kN/m. Na Figura 91 apresenta-se a geometria destas duas vigas, assim como os detalhes da sua seção transversal e as condições de carregamento.

O espaçamento longitudinal entre os conectores de cisalhamento é de 150 mm para a viga LCB3, e de 80 mm para as outras três. Este arranjo dos conectores garante uma resistência ao cisalhamento muito maior do que a requerida, fazendo com que a capacidade de carga da estrutura seja governada pela fluência da viga de aço (Fan et al., 2010). A curva de rigidez adotada para os conectores pode ser visualizada na Figura 92, os dados para o traçado desta curva foram obtidos através do relatório experimental de Chapman e Balakrishnan (1964). As propriedades dos conectores apresentam-se na Tabela 30. A armadura transversal das quatro vigas encontram-se especificadas na Tabela 29 e na Figura 90 e Figura 91. Detalhes das propriedades empregadas para todos os materiais encontram-se na Tabela 30.

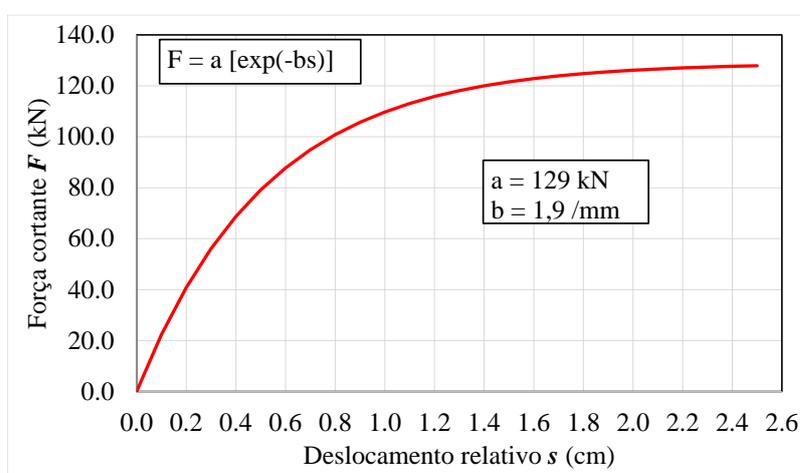


Figura 92. Curva de rigidez para os conectores das vigas de Fan et al. (2010)

Tabela 30. Propriedades dos materiais para as vigas de Fan et al. (2010).

Material		Propriedades		
Aço Estrutural	Módulo de Elasticidade	$E =$	206000	MPa
	Tensão de Escoamento	$f_y =$	303,6	MPa
	Coefficiente de Poisson	$\nu =$	0,3	
	Deformação Última	$\epsilon_u =$	25	%
Aço de Reforço	Módulo de Elasticidade	$E =$	206000	MPa
	Tensão de Escoamento	$f_y =$	303,6	MPa
	Tensão Última	$f_u =$	350	MPa
	Coefficiente de Poisson	$\nu =$	0,3	
Concreto	Resistência à Compressão	$f_{ck} =$	24,5 (C20) 34,0 (C30)	MPa
	Módulo de Elasticidade	$E_{28} =$	31800 (C20) 34700 (C30)	MPa
	Resistência à Tração	$f_t =$	2,54 (C20) 3,17 (C30)	MPa
	Coefficiente de Poisson	$\nu =$	0,2	
	Deformação Última à Tração	$\epsilon_{u(+)} =$	2,0	%
	Deformação Última à Compressão	$\epsilon_{u(-)} =$	4,5	%
Conector de Cisalhamento	Espaçamento	$s =$	150	mm
	Diâmetro x Altura	$d \times h =$	10 x 45	mm
	Número de Linhas	$n =$	1	
	Constante 1	$a =$	129	kN
	Constante 2	$b =$	1,9	mm <sup>-1</sup>

A malha de elementos finitos empregada para a simulação das vigas LCB1 e LCB2 é apresentada na Figura 93. A malha é composta por 364 elementos correspondentes à viga de aço (52 divisões ao longo da viga), 312 elementos para a laje de concreto (52 divisões ao longo da viga) e 51 conectores igualmente espaçados. O peso próprio foi aplicado como uma carga de pressão sobre os elementos da laje de concreto, enquanto os 6,23 kN/m da carga externa foram aplicados sobre os nós centrais da laje de concreto.

Para a simulação numérica das vigas LCB3 e LCB4 aplicou-se a condição de simetria, modelando apenas a metade da estrutura. A malha para a viga LCB3 possui 374 (34 divisões no sentido longitudinal) elementos para a viga de aço, 204 (34 divisões no sentido longitudinal) elementos para a laje de concreto e 17 elementos para os conectores igualmente espaçados, conforme a Figura 94. No caso da viga LCB4 a malha é igual à anterior exceto pelo número de conectores, 33 elementos igualmente espaçados (Figura 95). O peso próprio foi aplicado como uma pressão na laje de concreto, e a carga externa de 1,94 kN/m foi colocada nos nós centrais da laje de concreto. A carga pontual de 2,02 kN foi aplicada no nó central da aba inferior na extremidade da malha da viga de aço, para as duas vigas.

Para a discretização da laje das quatro vigas foram empregadas seis camadas de concreto com uma espessura igual a 10 mm cada uma, e quatro camadas de armadura de acordo com o apresentado na Figura 96 para as vigas LCB1 e LCB2, e na Figura 97 para as vigas LCB3 e LCB4. Nestas figuras encontra-se à esquerda a medida da espessura da laje de concreto e a posição real das camadas de armadura, enquanto à direita estão a espessura e a posição normalizadas das camadas de aço, o ângulo  $\theta=0^\circ$  refere-se à armadura longitudinal enquanto  $\theta=90^\circ$  à armadura transversal.

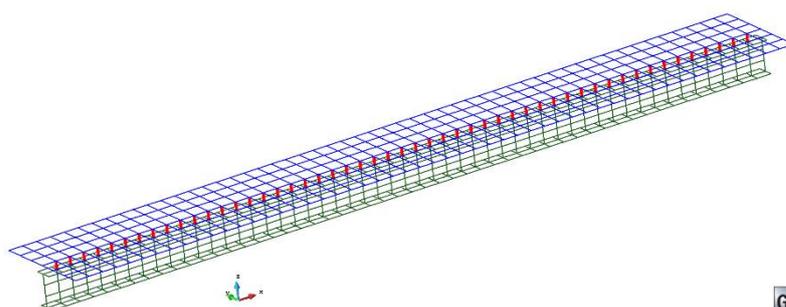


Figura 93. Malha de elementos finitos para vigas LCB1 e LCB2.

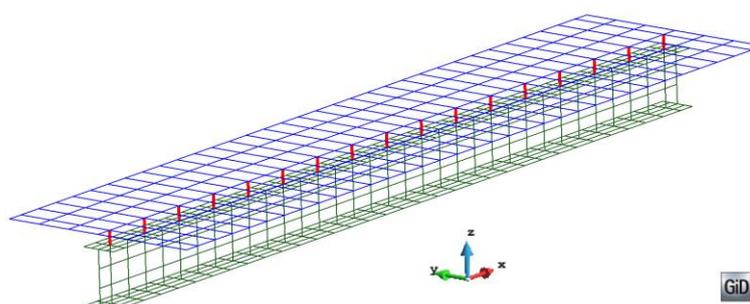


Figura 94. Malha de elementos finitos para vigas LCB3.

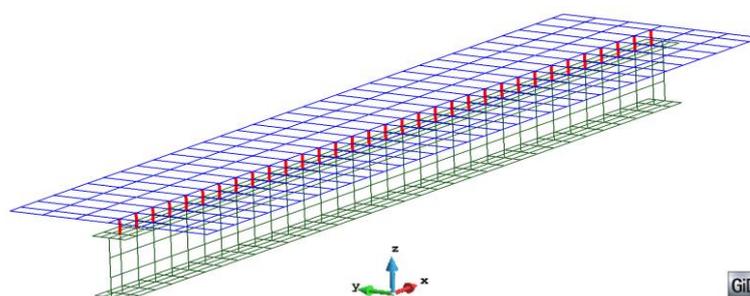


Figura 95. Malha de elementos finitos para vigas LCB4.

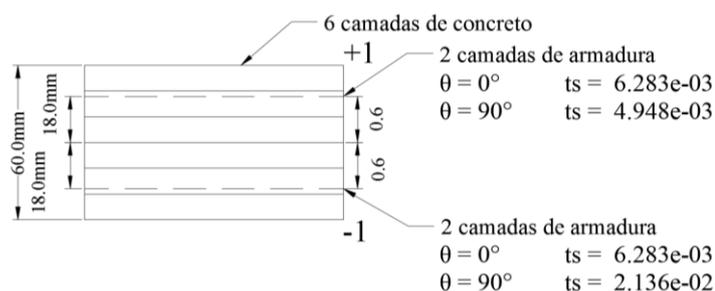


Figura 96. Esquema camadas de concreto e aço para as vigas LCB1 e LCB2.

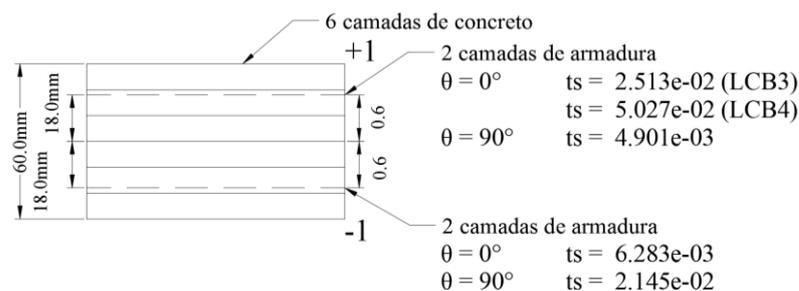


Figura 97. Esquema camadas de concreto e aço para as vigas LCB3 e LCB4.

A idade de aplicação do carregamento é de 7 dias. As estruturas foram monitoradas durante um período total de 1085 dias. Para efetuar a presente análise empregaram-se 44 passos de tempo, conforme a Tabela 31. Para a determinação da deformação por retração e o coeficiente de fluência adotou-se o uso de um cimento de endurecimento normal (Tipo I), uma temperatura de cura de 16 °C (conforme relatório experimental) e um tempo de cura de 7 dias. Um resumo das propriedades empregadas encontra-se na Tabela 32.

Tabela 31. Passos de tempo empregados na análise (dias). Vigas de Fan et al. (2010)

Passo	Tempo (dias)								
1	7	10	19.7	19	55.6	28	157	37	442
2	7.85	11	22.1	20	62.4	29	176	38	496
3	8.81	12	24.8	21	70	30	197	39	556
4	9.89	13	27.9	22	78.5	31	221	40	624
5	11.1	14	31.3	23	88.1	32	248	41	700
6	12.5	15	35.1	24	98.9	33	279	42	785
7	14	16	39.4	25	111	34	313	43	881
8	15.7	17	44.2	26	124	35	351	44	1085
9	17.6	18	49.6	27	140	36	394		

Tabela 32. Propriedades para análise diferida no tempo. Vigas Fan et al. (2010).

<b>Método de cura</b>	Úmida
<b>Tempo de cura</b>	7 dias
<b>Tempo aplicação do carregamento</b>	7 dias
<b>Tempo total de análise</b>	1085 dias
<b>Tipo de cimento</b>	1
<b>Temperatura</b>	Tabela 33
<b>Umidade relativa</b>	Tabela 33

Tabela 33. Análises variando temperatura e umidade relativa. Vigas Fan et al. (2010)

	Condições 3 anos	Condições 3 meses	Ajuste retração	Variável no tempo
<b>Temperatura (°C)</b>	19,3	15,0	19,3	Figura 98. b)
<b>Umidade relativa (%)</b>	68	56	Tabela 34	Figura 98. a)

Tabela 34. Valores de umidade relativa utilizados para ajustar a retração.

Modelo	C20	C30
ACI 209	53	44
Bazant B3	70	42
GL2000	66	56*
CEB MC90	67*	43*
CEB MC99	47	52*

\* Foi modificado também o tipo de cimento empregado.

Durante os 1085 dias que durou o ensaio se registrou o valor dos deslocamentos no centro e no quarto do vão para as vigas LCB1 e LCB2, e no extremo livre para as vigas LCB3 e LCB4. Adicionalmente mediram-se também a temperatura e a umidade relativa durante todo o tempo do ensaio. Essas medições são apresentadas na Figura 98. Segundo o relatório experimental, durante os primeiros três meses de ensaio o valor médio de temperatura foi 15 °C, e de umidade relativa foi 56%. Para o período total de três anos os valores médios foram de 19,3 °C para a temperatura e 68% para a umidade relativa.

Adotaram-se quatro abordagens diferentes para prever as respostas destas vigas, variando os valores correspondentes à umidade relativa e à temperatura em cada caso. Primeiro utilizaram-se os valores médios para esses parâmetros considerando os três anos do ensaio: 19,3 °C e 68%. Em segundo lugar consideraram-se os valores médios durante os três primeiros meses do ensaio, período no qual se apresenta a maior variabilidade nos fenômenos de fluência e retração: 15 °C e 56%. Para a terceira abordagem os valores de temperatura e umidade relativa foram ajustados para cada modelo, a fim de que a predição se aproximasse ao valor experimental da retração. Finalmente se fez uma análise variando o valor da umidade relativa e da temperatura ao longo do tempo, conforme as variações registradas na Figura 98. Um resumo dos valores utilizados para cada análise encontra-se na Tabela 32.

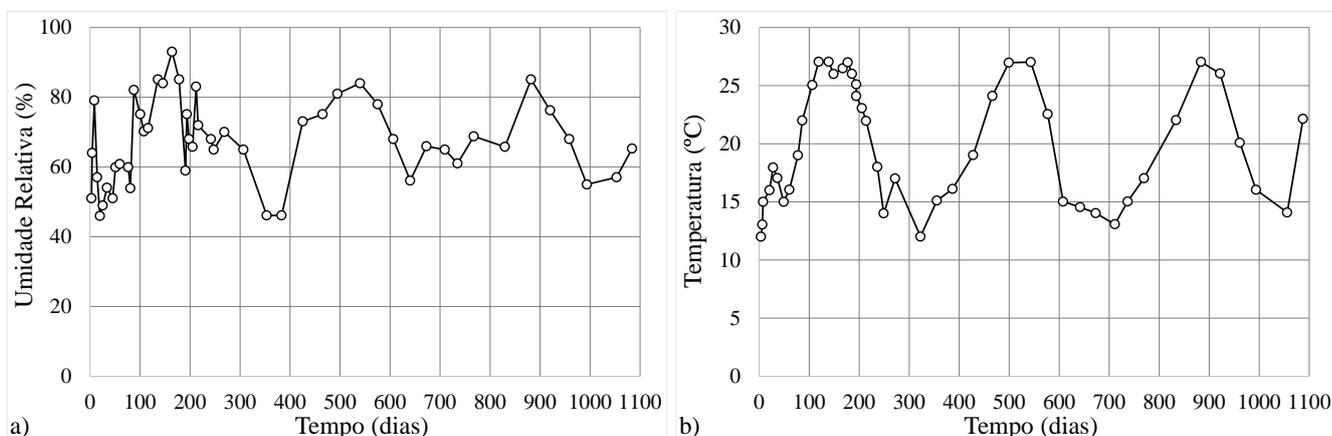


Figura 98. Variação das condições ambientais no tempo. a) Umidade Relativa, b) Temperatura.

Fan et al. (2010) mediram experimentalmente a retração durante os três anos de ensaio, para os dois concretos utilizados: o C20 (Figura 99), utilizado na viga LCB1, e o C30 (Figura 100) utilizado para as vigas LCB2, LCB3 e LCB4. Para ajustar as predições dos modelos modificou-se o valor da umidade relativa nos mesmos, conforme o indicado na Tabela 34. Dependendo do modelo e do valor da retração a ser atingido, não só se modificou o valor da umidade relativa, mas também o tipo de cimento empregado, é o caso dos valores marcados com estrela (\*) na Tabela 34. No caso do concreto C20 o ajuste se fez tendo como valor alvo de deformação unitária  $640 \times 10^{-6}$ , e para o concreto C30 este valor foi  $740 \times 10^{-6}$ .

Nos primeiros dois cenários considerados para o concreto C20, que correspondem às condições ambientais médias dos três anos e dos três primeiros meses de ensaio respectivamente, apresentam-se diferenças significativas entre a predição dos modelos, sendo que o modelo de Bazant-Baweja B3 é o que prediz os maiores deslocamentos, enquanto o CEB MC90 prediz os menores. Os indicadores estatísticos que correspondem a estas duas situações (Tabela 35 e Tabela 36) confirmam que em termos gerais as predições tiveram um ajuste melhor usando as condições médias correspondentes aos três primeiros meses, esta afirmação tem sentido desde o ponto de vista de que a retração é altamente variável nas primeiras idades do concreto e com o tempo tende a encontrar um valor assintótico.

Para o terceiro caso, no qual se ajustou a retração, como é de esperar os indicadores melhoraram consideravelmente (Tabela 37), sendo que dependendo do indicador o erro para todos os modelos está variando entre o 5% e o 15%. Um bom ajuste considerando a variabilidade no tempo que ocorre em função das alterações de temperatura e umidade relativa. Finalmente no caso das condições ambientais variando ao longo do tempo, se enxerga claramente a dependência do fenômeno de retração respeito à variação de umidade relativa. Embora os valores não coincidam exatamente entre as predições e o comportamento experimental, a variação na inclinação das curvas ocorre no mesmo momento para o caso teórico e experimental, o que retifica a grande influência deste parâmetro.

Tabela 35. Indicadores estatísticos da retração ao longo do tempo. Concreto C20. Condições ambientais médias durante os três anos do ensaio.

<b>Modelo</b>	<b>SD<sub>Exp</sub></b> <b><math>\varepsilon(10^{-6})</math></b>	<b>RD<sub>Exp</sub></b> <b>(%)</b>	<b>SD<sub>100p</sub></b> <b><math>\varepsilon(10^{-6})</math></b>	<b>RD<sub>100p</sub></b> <b>(%)</b>	<b>BP</b> <b>(%)</b>	<b>V<sub>CEB</sub></b> <b>(%)</b>	<b>F<sub>CEB</sub></b> <b>(%)</b>	<b>M<sub>CEB</sub></b>	<b><math>\omega_G</math></b> <b>(%)</b>
<b>ACI 209</b>	117.5	28.59	122.8	20.47	28.40	63.70	56.33	0.62	31.81
<b>Bazant B3</b>	71.4	18.86	73.6	11.46	19.03	53.26	50.48	0.71	33.00
<b>GL2000</b>	49.6	14.71	45.6	6.64	13.54	51.14	49.11	0.75	14.47
<b>CEB MC90</b>	180.4	38.70	195.6	32.49	40.34	63.02	58.92	0.54	42.98
<b>CEB MC99</b>	134.8	30.33	145.6	23.99	30.92	55.51	53.77	0.61	32.93

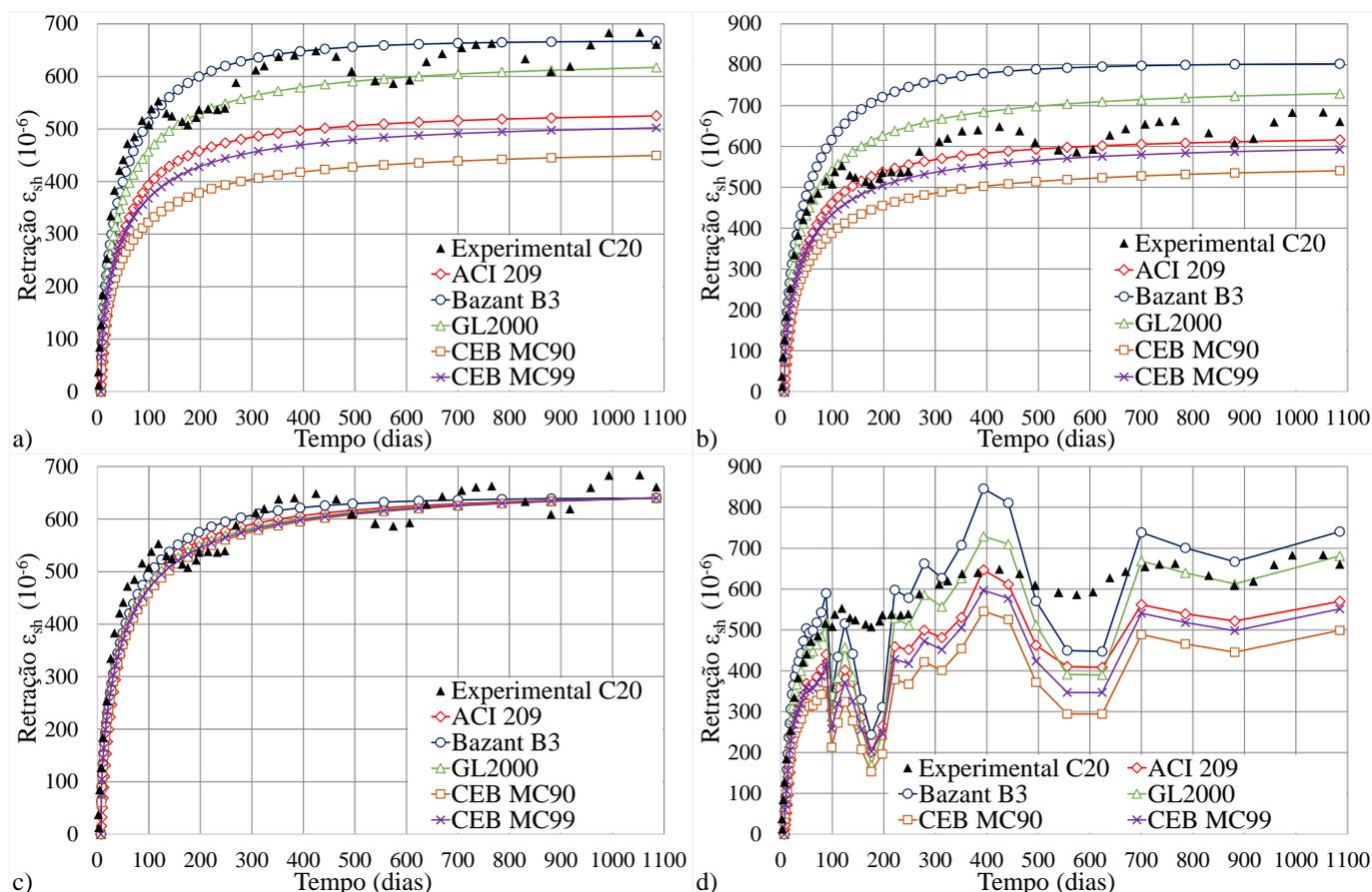


Figura 99. Deformação por retração ao longo do tempo para concreto C20. a) Condições 3 anos, b) Condições 3 meses, c) Ajustando retração, d) Condições variáveis no tempo.

Tabela 36. Indicadores estatísticos da retração ao longo do tempo. Concreto C20. Condições ambientais médias durante os três primeiros meses do ensaio.

Modelo	$SD_{Exp}$ $\epsilon(10^{-6})$	$RD_{Exp}$ (%)	$SD_{100p}$ $\epsilon(10^{-6})$	$RD_{100p}$ (%)	BP (%)	$V_{CEB}$ (%)	$F_{CEB}$ (%)	$M_{CEB}$	$\omega_G$ (%)
ACI 209	57.8	16.99	47.9	7.24	16.19	60.41	53.01	0.72	18.04
Bazant B3	142.7	28.92	154.6	24.66	26.33	52.76	52.60	1.00	26.21
GL2000	70.4	17.23	74.2	11.31	13.78	49.48	48.86	0.89	13.85
CEB MC90	109.4	26.28	114.1	18.82	25.74	56.19	52.88	0.65	28.14
CEB MC99	66.9	17.95	66.3	10.35	16.96	50.00	49.27	0.72	18.37

Tabela 37. Indicadores estatísticos da retração ao longo do tempo. Concreto C20. Condições ambientais produto do ajuste à retração experimental.

Modelo	$SD_{Exp}$ $\epsilon(10^{-6})$	$RD_{Exp}$ (%)	$SD_{100p}$ $\epsilon(10^{-6})$	$RD_{100p}$ (%)	BP (%)	$V_{CEB}$ (%)	$F_{CEB}$ (%)	$M_{CEB}$	$\omega_G$ (%)
ACI 209	49.7	15.83	36.0	5.74	14.11	59.97	52.61	0.75	15.38
Bazant B3	40.1	13.61	31.3	4.92	11.03	50.79	48.80	0.80	11.77
GL2000	39.6	13.39	32.1	5.04	11.15	50.39	48.65	0.78	11.58
CEB MC90	45.5	14.30	36.2	5.50	12.43	51.43	49.19	0.77	13.09
CEB MC99	41.2	13.44	33.6	5.16	11.33	48.24	48.08	0.78	11.79

Tabela 38. Indicadores estatísticos da retração ao longo do tempo. Concreto C20. Condições ambientais variáveis ao longo dos três anos do ensaio.

Modelo	$SD_{Exp}$ $\epsilon(10^{-6})$	$RD_{Exp}$ (%)	$SD_{100p}$ $\epsilon(10^{-6})$	$RD_{100p}$ (%)	BP (%)	$V_{CEB}$ (%)	$F_{CEB}$ (%)	$M_{CEB}$	$\omega_G$ (%)
ACI 209	142.3	31.35	133.9	21.37	27.19	64.56	57.33	0.61	31.53
Bazant B3	102.3	21.88	97.4	13.82	18.93	53.94	51.43	0.80	21.06
GL2000	123.3	22.12	107.0	12.26	20.21	55.36	52.74	0.71	20.69
CEB MC90	109.4	26.28	114.1	18.82	25.74	56.19	52.88	0.65	28.14
CEB MC99	165.7	33.90	162.5	25.83	30.42	57.80	55.80	0.59	33.04

Para o concreto C30 nenhuma das previsões alcançou o valor da retração experimental, nem para as condições médias durante os três anos do ensaio, nem para as correspondentes aos três primeiros meses. Porém, as curvas se aproximaram mais do comportamento experimental utilizando o valor das variáveis para os três primeiros meses do ensaio (Tabela 39 e Tabela 40). Devido ao valor elevado de retração experimental registrado foi complicado ajustar os modelos, fazendo com que não só tivesse que se mudar o parâmetro da umidade relativa, mas também o tipo de cimento (Tabela 34). Novamente a análise feita com as condições ambientais variáveis evidencia a correlação e forte influência da umidade relativa e a retração.

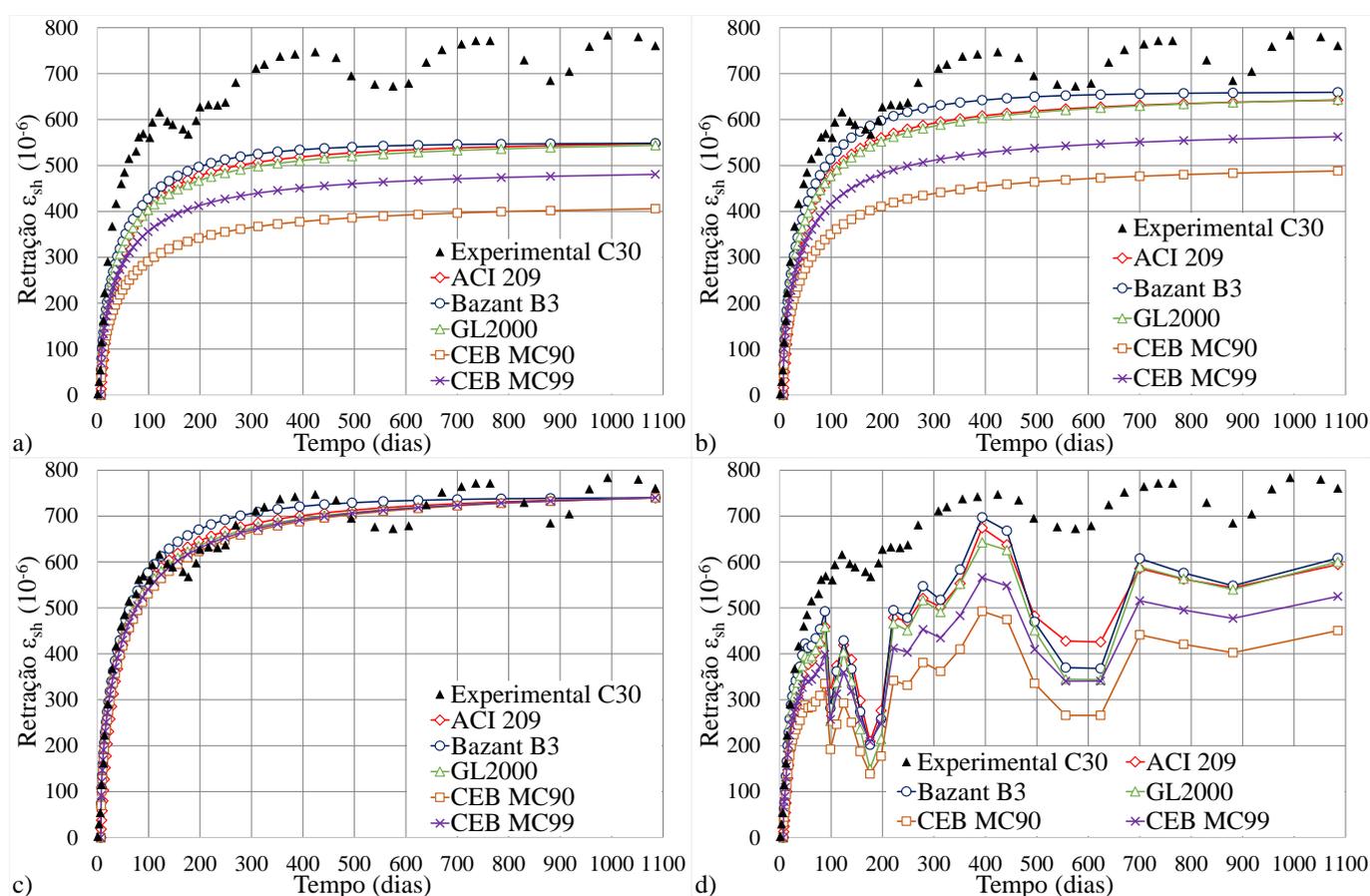


Figura 100. Deformação por retração ao longo do tempo para concreto C30. a) Condições 3 anos, b) Condições 3 meses, c) Ajustando retração, d) Condições variáveis no tempo.

Tabela 39. Indicadores estatísticos da retração ao longo do tempo. Concreto C30. Condições ambientais médias durante os três anos do ensaio.

Modelo	SD <sub>Exp</sub> ε(10 <sup>-6</sup> )	RD <sub>Exp</sub> (%)	SD <sub>100p</sub> ε(10 <sup>-6</sup> )	RD <sub>100p</sub> (%)	BP (%)	V <sub>CEB</sub> (%)	F <sub>CEB</sub> (%)	M <sub>CEB</sub>	ω <sub>G</sub> (%)
ACI 209	170.5	34.30	189.6	27.40	34.80	63.11	56.88	0.58	36.42
Bazant B3	155.9	29.62	178.8	25.09	32.42	45.93	51.69	0.63	31.96
GL2000	172.4	32.26	194.6	27.58	34.48	47.31	52.82	0.61	34.45
CEB MC90	288.0	50.51	324.0	46.54	56.28	64.57	64.66	0.44	56.28
CEB MC99	222.9	39.44	252.4	35.88	44.02	49.95	56.53	0.55	43.42

Tabela 40. Indicadores estatísticos da retração ao longo do tempo. Concreto C30. Condições ambientais médias durante os três primeiros meses do ensaio.

Modelo	SD <sub>Exp</sub> ε(10 <sup>-6</sup> )	RD <sub>Exp</sub> (%)	SD <sub>100p</sub> ε(10 <sup>-6</sup> )	RD <sub>100p</sub> (%)	BP (%)	V <sub>CEB</sub> (%)	F <sub>CEB</sub> (%)	M <sub>CEB</sub>	ω <sub>G</sub> (%)
ACI 209	97.4	22.92	104.4	14.82	21.03	57.44	52.13	0.68	22.75
Bazant B3	68.3	15.51	78.4	10.00	15.72	36.69	46.41	0.76	15.34
GL2000	94.3	19.92	105.4	14.38	19.56	38.39	47.47	0.72	19.74
CEB MC90	222.6	40.49	249.2	35.72	43.83	55.15	57.75	0.53	44.12
CEB MC99	158.1	29.46	178.3	25.09	31.66	41.92	50.99	0.64	31.42

Tabela 41. Indicadores estatísticos da retração ao longo do tempo. Concreto C30. Condições ambientais produto do ajuste à retração experimental.

Modelo	SD <sub>Exp</sub> ε(10 <sup>-6</sup> )	RD <sub>Exp</sub> (%)	SD <sub>100p</sub> ε(10 <sup>-6</sup> )	RD <sub>100p</sub> (%)	BP (%)	V <sub>CEB</sub> (%)	F <sub>CEB</sub> (%)	M <sub>CEB</sub>	ω <sub>G</sub> (%)
ACI 209	42.7	14.44	35.5	5.29	9.71	53.81	49.65	0.78	10.77
Bazant B3	35.8	10.86	34.6	4.37	6.68	33.44	45.22	0.85	6.95
GL2000	33.1	10.86	33.4	4.48	6.81	33.34	45.18	0.83	7.14
CEB MC90	38.3	11.78	36.4	4.81	7.94	34.63	45.48	0.81	8.47
CEB MC99	34.8	10.91	34.4	4.67	7.13	32.33	45.09	0.83	7.53

Tabela 42. Indicadores estatísticos da retração ao longo do tempo. Concreto C30. Condições ambientais variáveis ao longo dos três anos do ensaio.

Modelo	SD <sub>Exp</sub> ε(10 <sup>-6</sup> )	RD <sub>Exp</sub> (%)	SD <sub>100p</sub> ε(10 <sup>-6</sup> )	RD <sub>100p</sub> (%)	BP (%)	V <sub>CEB</sub> (%)	F <sub>CEB</sub> (%)	M <sub>CEB</sub>	ω <sub>G</sub> (%)
ACI 209	190.3	36.05	197.4	28.22	32.68	64.29	57.67	0.57	34.70
Bazant B3	191.2	32.62	200.8	27.23	30.96	50.77	54.09	0.61	30.39
GL2000	214.1	36.26	222.4	30.62	34.20	52.83	55.90	0.58	33.97
CEB MC90	222.6	40.49	249.2	35.72	43.83	55.15	57.75	0.53	44.12
CEB MC99	242.2	41.50	262.7	37.33	42.15	52.17	57.84	0.54	41.77

Foi feita uma análise inicial, na qual se calcularam os deslocamentos para as quatro vigas mediante uma abordagem simplificada, para avaliar o quanto esse tipo de análise consegue representar o comportamento de uma estrutura de viga mista, ao longo do tempo e submetida a flexão positiva e negativa. Os deslocamentos medidos no centro do vão para as vigas LCB1 e LCB2, e no extremo livre para as vigas LCB3 e LCB4 encontram-se na Tabela 43. Nessa tabela a primeira coluna: δ<sub>mi</sub> representa os deslocamentos medidos instantâneos, e

a segunda:  $\delta_{mt}$  os deslocamentos medidos diferidos no tempo, exatamente na idade de 1085 dias. Para desenvolver esta análise empregou-se a metodologia da seção transformada equivalente, que consiste em transformar a seção mista em uma seção homogênea equivalente de aço, onde os dois materiais: concreto e aço, são considerados como lineares elásticos. Para a transformação da seção de concreto empregou-se o valor do módulo de elasticidade predito por cada modelo (Tabela 44), assim obteve-se um deslocamento calculado diferente para cada caso, em função do modelo empregado.

Tabela 43. Deslocamentos medidos experimentalmente. Vigas de Fan et al. (2010).

Viga	$\delta_{mi}$ (cm)	$\delta_{mt}$ (cm)
<b>LCB1</b>	0.394	0.957
<b>LCB2</b>	0.361	0.972
<b>LCB3</b>	0.341	0.361
<b>LCB4</b>	0.309	0.210

Tabela 44. Parâmetros calculados para análise simplificada. Concretos C20 e C30.

Modelo	Concreto C20			Concreto C30		
	Módulo de Elasticidade (MPa) 28 dias	Coefficiente de Fluência 1085 dias	Deformação por retração $\epsilon(10^{-6})$ 1085 dias	Módulo de Elasticidade (MPa) 28 dias	Coefficiente de Fluência 1085 dias	Deformação por retração $\epsilon(10^{-6})$ 1085 dias
<b>ACI 209R-92</b>	33170	1.81	547	29610	1.81	525
<b>Bazant-Baweja B3</b>	31050	2.41	548	27730	2.42	667
<b>GL 2000</b>	31630	2.93	544	28290	2.93	617
<b>CEB MC90</b>	34810	2.92	406	32250	3.27	450
<b>CEB MC90-99</b>	34810	2.67	481	32250	3.35	502

Para o cálculo do deslocamento instantâneo ( $\delta_{ci}$ ) no meio do vão para as vigas simplesmente apoiadas (LCB1 e LCB2) aplicou-se a Equação (6.1). Com  $\Delta$  o deslocamento,  $w$  a carga distribuída,  $l$  o comprimento da viga,  $E_s$  o módulo de elasticidade do aço e  $I_t$  o módulo de inércia da seção transformada. Os resultados encontram-se na Tabela 45 para a viga LCB1 e na Tabela 47 para a viga LCB2. O valor do deslocamento não variou muito entre um modelo e outro, sendo que a predição feita mediante o modelo simplificado esteve sempre por cima do resultado experimental. Para a viga LCB1, o desvio relativo entre o deslocamento calculado e o medido esteve entre o 10% e o 15% para todos os modelos, enquanto para a viga LCB2 esses valores oscilaram entre o 20% e o 23%. Estas predições consideram-se aceitáveis, pois a maior diferença foi inferior a 1 mm, e sempre estiveram a favor da segurança.

$$\Delta = \frac{5wl^4}{384E_s I_t} \quad (6.1)$$

O deslocamento ao longo do tempo está composto por duas parcelas, o deslocamento resultante da fluência e o resultante da retração. O deslocamento devido à fluência ( $\delta_{cf}$ ) foi calculado utilizando uma abordagem amplamente usada nos diversos códigos de projeto estrutural, entre eles o Eurocode 4 (En1994-1-1, 2004), segundo a qual se substitui o valor do módulo de elasticidade pelo módulo efetivo (Equação (6.2)), na qual  $E$  é o módulo de elasticidade do concreto aos 28 dias,  $E_c$  é o módulo efetivo,  $\varphi$  é o coeficiente de fluência calculado segundo cada modelo (apresentado na Tabela 44), e  $\psi$  é um fator que depende do tipo de carga aplicada, usualmente considerado 1,1 para cargas permanentes e 0,55 para os efeitos da retração. O valor calculado do deslocamento por fluência já inclui o valor do deslocamento instantâneo.

$$E_c = \frac{E}{1 + \psi\varphi} \quad (6.2)$$

A retração no concreto depende das propriedades do material, das condições ambientais e da geometria da peça. Uma abordagem simplificada consiste em aplicar uma força axial de compressão atuando na laje de concreto, o que produz um momento fletor atuando na seção composta. O valor dessa força axial é calculado mediante a equação (6.3), e o momento é calculado multiplicando o valor da força axial pela distância entre os centroides da seção composta e da laje de concreto (Equação (6.4)).

$$N_{sh} = A_c E_{sh} \varepsilon_{sh} \quad (6.3)$$

$$M_{sh} = N_{sh} y_{sc} \quad (6.4)$$

em que,  $A_c$  é a área transversal da laje,  $E_{sh}$  é o módulo de elasticidade efetivo do concreto considerando o efeito da retração (que é calculado utilizando a equação (6.2) e considerando  $\psi=0.55$ ),  $\varepsilon_{sh}$  é a deformação por retração calculada particularmente para cada modelo (Tabela 44),  $N_{sh}$  é a força axial resultante da retração,  $y_{sc}$  é a distância entre os centroides da seção composta e a laje de concreto,  $M_{sh}$  é o momento fletor gerado pela ação da retração.

Os resultados correspondentes ao deslocamento calculado ao longo do tempo para a viga LCB1 encontram-se na Tabela 46, na qual  $\delta_{cf}$  é o deslocamento calculado por fluência,  $\delta_{cr}$  é o deslocamento calculado por retração e  $\delta_{ct}$  é o deslocamento calculado aos 1085 dias. Analogamente os resultados de deslocamento no tempo para a viga LCB2 encontra-se na Tabela 48. Os resultados obtidos têm uma precisão aceitável, sendo que o modelo que mais se aproximou aos resultados experimentais foi o MC90 para ambos casos, com um erro de só 7,4% para a viga LCB1 e 0,1% para a LCB2. Os modelos que para ambas vigas estão mais distantes da resposta experimental ao longo do tempo são o Bazant-Baweja B3 e o GL 2000.

Tabela 45. Comparação deslocamento instantâneo. Viga LCB1.

Modelo	$\delta_{ci}$ (cm)	Diferença (cm)	R.D. (%)	Taxa
<b>Experimental</b>	0.394			
<b>ACI 209R-92</b>	0.448	0.054	13.7%	1.14
<b>Bazant-Baweja B3</b>	0.454	0.060	15.1%	1.15
<b>GL 2000</b>	0.452	0.058	14.7%	1.15
<b>CEB MC90</b>	0.441	0.047	11.9%	1.12
<b>CEB MC90-99</b>	0.441	0.047	11.9%	1.12

Tabela 46. Comparação deslocamento diferido no tempo. Viga LCB1.

Modelo	$\delta_{cf}$ (cm)	$\delta_{cr}$ (cm)	$\delta_{ct}$ (cm)	Diferença (cm)	R.D. (%)	Taxa
<b>Experimental</b>			0.957			
<b>ACI 209R-92</b>	0.571	0.495	1.066	0.109	11.4%	1.11
<b>Bazant-Baweja B3</b>	0.611	0.604	1.214	0.257	26.9%	1.27
<b>GL 2000</b>	0.630	0.547	1.177	0.220	23.0%	1.23
<b>CEB MC90</b>	0.623	0.404	1.027	0.070	7.4%	1.07
<b>CEB MC90-99</b>	0.626	0.450	1.076	0.119	12.4%	1.12

Tabela 47. Comparação deslocamento instantâneo. Viga LCB2.

Modelo	$\delta_{ci}$ (cm)	Diferença (cm)	R.D. (%)	Taxa
<b>Experimental</b>	0.361			
<b>ACI 209R-92</b>	0.438	0.077	21.5%	1.21
<b>Bazant-Baweja B3</b>	0.444	0.083	23.0%	1.23
<b>GL 2000</b>	0.442	0.081	22.5%	1.23
<b>CEB MC90</b>	0.435	0.074	20.4%	1.20
<b>CEB MC90-99</b>	0.435	0.094	20.4%	1.20

Tabela 48. Comparação deslocamento diferido no tempo. Viga LCB2.

Modelo	$\delta_{cf}$ (cm)	$\delta_{cr}$ (cm)	$\delta_{ct}$ (cm)	Diferença (cm)	R.D. (%)	Taxa
<b>Experimental</b>			0.972			
<b>ACI 209R-92</b>	0.555	0.525	1.080	0.108	11.1%	1.11
<b>Bazant-Baweja B3</b>	0.593	0.507	1.100	0.128	13.2%	1.13
<b>GL 2000</b>	0.613	0.494	1.107	0.135	13.9%	1.14
<b>CEB MC90</b>	0.597	0.376	0.973	0.001	0.1%	1.00
<b>CEB MC90-99</b>	0.587	0.450	1.037	0.065	6.7%	1.07

No caso das vigas submetidas a flexão negativa: LCB3 e LCB4 efetuou-se uma análise similar, calculando o deslocamento no extremo livre. A comparação entre os deslocamentos instantâneos calculados e o experimental encontra-se resumida na Tabela 49 para a viga LCB3 e na Tabela 52 para a viga LCB4. A exatidão na predição dos cinco modelos e consideravelmente boa para a LCB3, os modelos que mais aproximaram-se ao resultado experimental foram o CEB MC90 e o CEB MC99 com uma diferença relativa respeito do resultado real de só 9.9%. Para a LCB4 incrementaram-se um pouca as diferenças mas

continua sendo uma predição apropriada, levando em consideração a simplicidade da abordagem; a diferença relativa entre as predições e o valor real oscila entre o 18% e o 20%.

No cálculo da deformação por fluência empregou-se a mesma abordagem utilizada para as vigas simplesmente apoiadas LCB1 e LCB2, aplicando uma análise estática, mas utilizando o módulo de elasticidade efetivo. De igual maneira para considerar o efeito da retração no tempo aplicou-se um momento fletor calculado conforme as equações (6.3) e (6.4). Os resultados para a viga LCB3 encontram-se na Tabela 50 e para a viga LCB4 na Tabela 53. Contrário ao acontecido até agora, as predições obtidas por todos os modelos são completamente erradas, tendo erros entre o 97.3% e o 160.2% para o case da LCB3 e entre 71.1% e 162.1% para a LCB4.

Os resultados anteriores demonstram que está se superestimando o efeito da retração na laje de concreto. A grande diferença entre os valores calculados e os experimentais acontece em parte devido a que a abordagem empregada não considera a fissuração do concreto. Para considerar a fissuração na análise, adotou-se o procedimento sugerido no Eurocode 4 (En1994-1-1, 2004), que consiste em desconsiderar a laje de concreto no cálculo da inércia da seção, em regiões próximas dos apoios nos quais se considera o concreto como fissurado, e considerá-la no restante da viga. A extensão dessas regiões corresponde a um 15% do comprimento de cada vão. O momento aplicado correspondente a retração, é aplicado nas regiões nas quais está se considerando a existência da laje sem fissurar. Os resultados desta análise encontram-se na Tabela 51 para a viga LCB3 e na Tabela 54 para a viga LCB4.

Os resultados apresentam uma variação drástica, que demonstra a importância de considerar a fissuração na análise. Embora o valor do erro ainda é grande para todos os modelos, pelo menos os deslocamentos preditos coincidem em sentido com os experimentais, o que não acontecia no caso de desconsiderar a fissuração. Para a viga LCB3 o valor do erro varia entre um 39.1% para o modelo CEB MC90 e um 83.5% para o modelo ACI 209R-92. Para a viga LCB4 os valores para todos os modelos oscilam entre 4.8% para o CEB MC99 e 40.8% para o ACI 209R-92.

Tabela 49. Comparação deslocamento instantâneo. Viga LCB3.

<b>Modelo</b>	<b><math>\delta_{ci}</math> (cm)</b>	<b>Diferença (cm)</b>	<b>R.D. (%)</b>	<b>Taxa</b>
<b>Experimental</b>	0.341			
<b>ACI 209R-92</b>	0.378	0.037	10.8%	1.11
<b>Bazant-Baweja B3</b>	0.382	0.041	12.0%	1.12
<b>GL 2000</b>	0.381	0.040	11.7%	1.12
<b>CEB MC90</b>	0.375	0.034	9.9%	1.10
<b>CEB MC90-99</b>	0.375	0.034	9.9%	1.10

Tabela 50. Comparação deslocamento diferido no tempo sem fissuração. Viga LCB3.

Modelo	$\delta_{cf}$ (cm)	$\delta_{cr}$ (cm)	$\delta_{ct}$ (cm)	Diferença (cm)	R.D. (%)	Taxa
<b>Experimental</b>			0.361			
<b>ACI 209R-92</b>	0.457	-0.675	-0.217	0.578	160.2%	-
<b>Bazant-Baweja B3</b>	0.480	-0.638	-0.158	0.519	143.8%	-
<b>GL 2000</b>	0.491	-0.616	-0.124	0.485	134.4%	-
<b>CEB MC90</b>	0.483	-0.473	0.010	0.351	97.3%	0.03
<b>CEB MC90-99</b>	0.477	-0.569	-0.092	0.453	125.5%	-

Tabela 51. Comparação deslocamento diferido no tempo com fissuração. Viga LCB3.

Modelo	$\delta_{cf}$ (cm)	$\delta_{cr}$ (cm)	$\delta_{ct}$ (cm)	Diferença (cm)	R.D. (%)	Taxa
<b>Experimental</b>			0.361			
<b>ACI 209R-92</b>	0.542	-0.483	0.060	0.301	83.5%	0.16
<b>Bazant-Baweja B3</b>	0.556	-0.456	0.100	0.261	72.3%	0.28
<b>GL 2000</b>	0.563	-0.440	0.123	0.238	65.9%	0.34
<b>CEB MC90</b>	0.558	-0.338	0.220	0.141	39.1%	0.61
<b>CEB MC90-99</b>	0.554	-0.407	0.147	0.214	59.2%	0.41

Tabela 52. Comparação deslocamento instantâneo. Viga LCB4.

Modelo	$\delta_{ci}$ (cm)	Diferença (cm)	R.D. (%)	Taxa
<b>Experimental</b>	0.309			
<b>ACI 209R-92</b>	0.368	0.059	19.0%	1.19
<b>Bazant-Baweja B3</b>	0.371	0.062	20.1%	1.20
<b>GL 2000</b>	0.370	0.061	19.8%	1.20
<b>CEB MC90</b>	0.365	0.056	18.2%	1.18
<b>CEB MC90-99</b>	0.365	0.056	18.2%	1.18

Tabela 53. Comparação deslocamento diferido no tempo sem fissuração. Viga LCB4.

Modelo	$\delta_{cf}$ (cm)	$\delta_{cr}$ (cm)	$\delta_{ct}$ (cm)	Diferença (cm)	R.D. (%)	Taxa
<b>Experimental</b>			0.210			
<b>ACI 209R-92</b>	0.427	-0.557	-0.130	0.340	162.1%	-
<b>Bazant-Baweja B3</b>	0.442	-0.517	-0.075	0.285	135.8%	-
<b>GL 2000</b>	0.449	-0.493	-0.045	0.255	121.4%	-
<b>CEB MC90</b>	0.443	-0.383	0.061	0.149	71.1%	0.29
<b>CEB MC90-99</b>	0.440	-0.463	-0.023	0.233	111.0%	-

Tabela 54. Comparação deslocamento diferido no tempo com fissuração. Viga LCB4.

Modelo	$\delta_{cf}$ (cm)	$\delta_{cr}$ (cm)	$\delta_{ct}$ (cm)	Diferença (cm)	R.D. (%)	Taxa
<b>Experimental</b>			0.210			
<b>ACI 209R-92</b>	0.523	-0.398	0.124	0.086	40.8%	0.59
<b>Bazant-Baweja B3</b>	0.532	-0.370	0.163	0.047	22.6%	0.77
<b>GL 2000</b>	0.536	-0.353	0.184	0.026	12.6%	0.87
<b>CEB MC90</b>	0.533	-0.274	0.260	0.050	23.6%	1.24
<b>CEB MC90-99</b>	0.531	-0.331	0.200	0.010	4.8%	0.95

A ampla variabilidade apresentada sobretudo no cálculo do deslocamento ao longo do tempo para as vigas submetidas a flexão negativa demonstra a importância do emprego de soluções mais exatas para o tratamento destes problemas, deixando em evidência que os procedimentos simplificados podem resultar em previsões completamente erradas, e nem sempre a favor da segurança.

Em sequência apresentam-se os resultados da análise realizada para a viga LCB1. Consideram-se as mesmas quatro abordagens adotadas no cálculo da retração, usando: as condições ambientais médias dos três anos, as dos três primeiros meses, ajustando a retração, e variando o valor destas condições ao longo do tempo. Na Figura 101 encontram-se os resultados dos deslocamento para a viga LCB1, medidos no meio e no quarto do vão.

No caso da primeira abordagem o erro para o deslocamento final, na idade de 1085 dias varia entre 0.12% para o modelo CEB MC90 e 13.30% para o Bazant-Baweja B3 (Tabela 55). Na Tabela 56 compara-se o comportamento de cada modelo considerando todo o tempo de ensaio, segundo os indicadores estatísticos os modelos que melhor representam o comportamento da estrutura são o ACI 209R-92 e o CEB MC99.

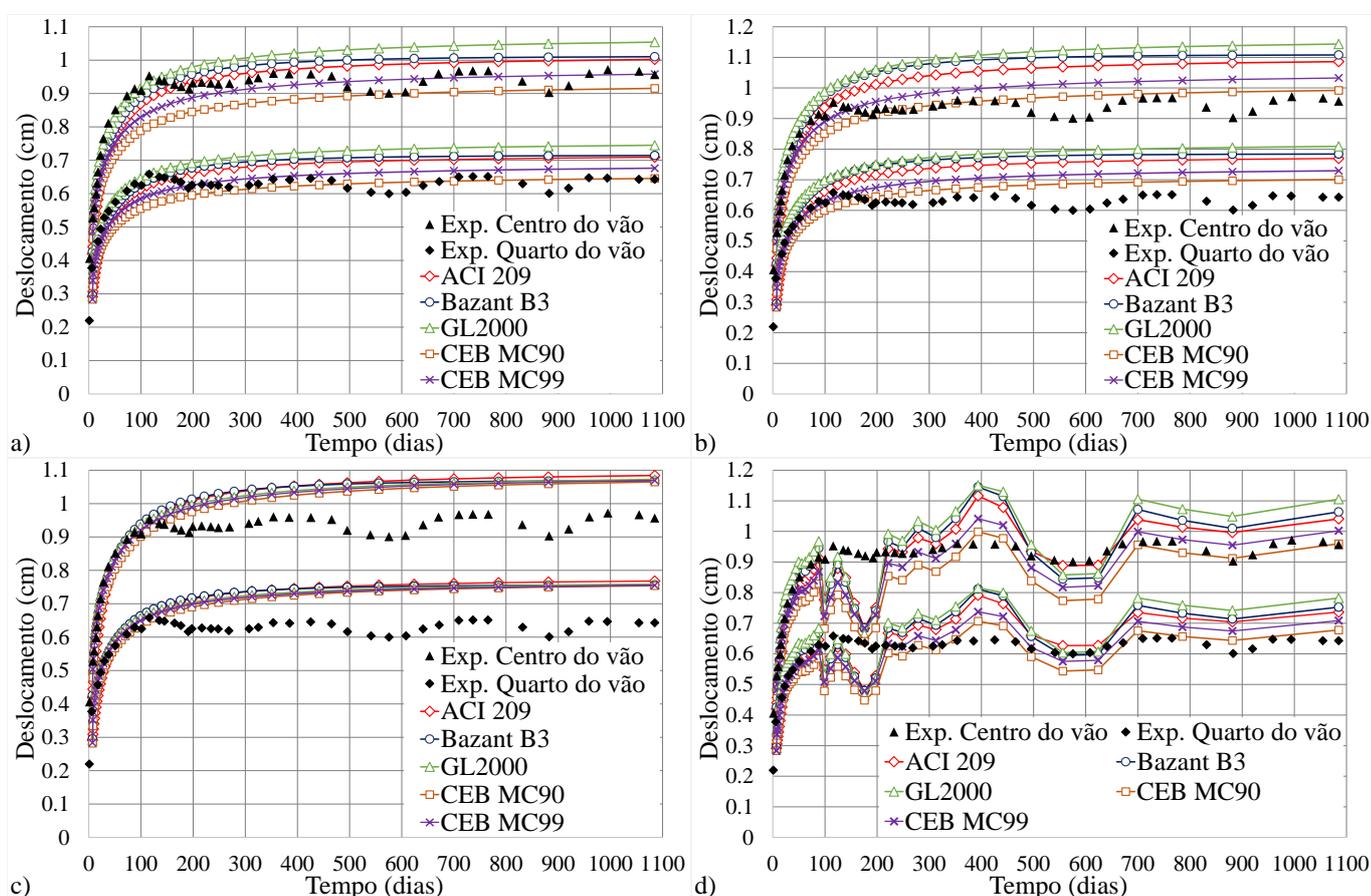


Figura 101. Deslocamento no centro e no quarto do vão. Viga LCB1. a) Condições 3 anos, b) Condições 3 meses, c) Ajustando retração, d) Condições variáveis no tempo.

Para o segundo cenário, no qual se consideram as condições ambientais médias durante os três primeiros meses do ensaio o modelo com uma resposta mais aproximada para o valor final do deslocamento é o CEB MC90 com um erro relativo de 3.66% (Tabela 57). Ao comparar o comportamento ao longo de todo o tempo do ensaio os modelos CEB MC90 e CEB MC99 são os que apresentam melhores resultados (Tabela 58).

Com o ajuste da retração (Figura 101.c.), conseguiu-se que todos os modelos coincidiram em um mesmo valor final de deslocamento. O comportamento descrito pelos modelos ajustados apresenta uma boa coincidência durante os primeiros 130 dias do ensaio, depois o resultado experimental começa a oscilar em função das mudanças nas condições ambientais, enquanto as previsões atingem um valor assintótico. O erro relativo está entre 10.88% e 13.33% (Tabela 59), valores que continuam sendo aceitáveis, e estão a favor da segurança da estrutura. Na Tabela 60 encontram-se os indicadores estatísticos correspondentes, todos com valores similares e baixos, pois as previsões entre os modelos são praticamente coincidentes.

Para a abordagem na qual o valor das condições ambientais é variável ao longo do tempo, foram obtidos bons resultados, sendo que o modelo com um resultado mais próximo ao deslocamento experimental nos 1085 dias é o CEB MC90 com um erro do 0.29% (Tabela 61). A Tabela 62 mostra os modelos com melhor ajuste: o ACI 209R-92 e o CEB MC90.

Tabela 55. Comparação deslocamento no centro do vão em  $t=1085$  dias. Viga LCB1. Condições ambientais médias durante os três anos do ensaio.

Modelo	Deslocamento (cm)	Diferença (cm)	Erro Relativo (%)	Taxa
<b>Experimental</b>	0.957			
<b>ACI 209</b>	0.982	0.025	2.66	1.03
<b>Bazant B3</b>	1.084	0.127	13.30	1.13
<b>GL2000</b>	1.054	0.097	10.12	1.10
<b>CEB MC90</b>	0.916	0.041	4.33	0.96
<b>CEB MC99</b>	0.958	0.001	0.12	1.00

Tabela 56. Indicadores estatísticos do deslocamento no centro do vão ao longo do tempo. Viga LCB1. Condições ambientais médias durante os três anos do ensaio.

Modelo	$SD_{Exp}$ (cm)	$RD_{Exp}$ (%)	$SD_{100p}$ (cm)	$RD_{100p}$ (%)	BP (%)	$V_{CEB}$ (%)	$F_{CEB}$ (%)	$M_{CEB}$	$\omega_G$ (%)
<b>ACI 209</b>	0.07	6.66	0.04	3.50	16.62	32.72	36.97	0.89	13.10
<b>Bazant B3</b>	0.11	11.26	0.12	12.21	18.64	32.87	37.26	0.99	15.84
<b>GL2000</b>	0.09	8.31	0.09	8.42	17.00	32.02	36.55	0.97	13.50
<b>CEB MC90</b>	0.09	9.63	0.07	6.33	17.61	32.96	37.24	0.85	16.35
<b>CEB MC99</b>	0.07	6.34	0.04	3.50	16.08	31.97	36.46	0.89	12.28

Tabela 57. Comparação deslocamento no centro do vão em t=1085 dias. Viga LCB1. Condições ambientais médias durante os três primeiros meses do ensaio.

Modelo	Deslocamento (cm)	Diferença (cm)	Erro Relativo (%)	Taxa
<b>Experimental</b>	0.957			
<b>ACI 209</b>	1.064	0.107	11.14	1.11
<b>Bazant B3</b>	1.185	0.228	23.88	1.24
<b>GL2000</b>	1.143	0.186	19.47	1.20
<b>CEB MC90</b>	0.992	0.035	3.66	1.04
<b>CEB MC99</b>	1.033	0.076	7.90	1.08

Tabela 58. Indicadores estatísticos do deslocamento no centro do vão ao longo do tempo. Viga LCB1. Condições ambientais médias durante os três primeiros meses do ensaio.

Modelo	SD <sub>Exp</sub> (cm)	RD <sub>Exp</sub> (%)	SD <sub>100p</sub> (cm)	RD <sub>100p</sub> (%)	BP (%)	V <sub>CEB</sub> (%)	F <sub>CEB</sub> (%)	M <sub>CEB</sub>	ω <sub>G</sub> (%)
<b>ACI 209</b>	0.10	10.30	0.10	9.72	18.11	33.30	37.53	0.95	15.73
<b>Bazant B3</b>	0.20	20.69	0.22	22.99	25.65	36.87	40.85	1.08	25.51
<b>GL2000</b>	0.15	15.80	0.17	17.16	22.01	34.50	38.78	1.04	20.99
<b>CEB MC90</b>	0.07	5.86	0.04	3.77	16.04	32.05	36.53	0.91	12.34
<b>CEB MC99</b>	0.07	7.09	0.07	6.65	16.43	31.99	36.55	0.95	12.80

Tabela 59. Comparação deslocamento no centro do vão em t=1085 dias. Viga LCB1. Condições ambientais produto do ajuste à retração experimental.

Modelo	Deslocamento (cm)	Diferença (cm)	Erro Relativo (%)	Taxa
<b>Experimental</b>	0.957			
<b>ACI 209</b>	1.085	0.128	13.33	1.13
<b>Bazant B3</b>	1.061	0.104	10.88	1.11
<b>GL2000</b>	1.072	0.115	12.06	1.12
<b>CEB MC90</b>	1.065	0.108	11.28	1.11
<b>CEB MC99</b>	1.069	0.112	11.72	1.12

Tabela 60. Indicadores estatísticos do deslocamento no centro do vão ao longo do tempo. Viga LCB1. Condições ambientais produto do ajuste à retração experimental.

Modelo	SD <sub>Exp</sub> (cm)	RD <sub>Exp</sub> (%)	SD <sub>100p</sub> (cm)	RD <sub>100p</sub> (%)	BP (%)	V <sub>CEB</sub> (%)	F <sub>CEB</sub> (%)	M <sub>CEB</sub>	ω <sub>G</sub> (%)
<b>ACI 209</b>	0.11	11.56	0.12	11.59	18.99	33.70	37.89	0.96	16.76
<b>Bazant B3</b>	0.10	9.59	0.10	10.03	17.52	32.33	36.78	0.97	14.48
<b>GL2000</b>	0.10	9.58	0.10	10.06	17.81	32.38	36.87	0.98	14.56
<b>CEB MC90</b>	0.09	8.97	0.09	9.20	17.66	32.70	37.16	0.96	14.69
<b>CEB MC99</b>	0.10	9.18	0.10	9.68	17.71	32.52	37.05	0.97	14.40

Tabela 61. Comparação deslocamento no centro do vão em  $t=1085$  dias. Viga LCB1. Condições ambientais variáveis ao longo dos três anos do ensaio.

Modelo	Deslocamento (cm)	Diferença (cm)	Erro Relativo (%)	Taxa
<b>Experimental</b>	0.957			
<b>ACI 209</b>	1.020	0.063	6.60	1.07
<b>Bazant B3</b>	1.151	0.194	20.26	1.20
<b>GL2000</b>	1.105	0.148	15.49	1.16
<b>CEB MC90</b>	0.960	0.003	0.29	1.00
<b>CEB MC99</b>	1.002	0.045	4.72	1.05

Tabela 62. Indicadores estatísticos do deslocamento no centro do vão ao longo do tempo. Viga LCB1. Condições ambientais variáveis ao longo dos três anos do ensaio.

Modelo	$SD_{Exp}$ (cm)	$RD_{Exp}$ (%)	$SD_{100p}$ (cm)	$RD_{100p}$ (%)	BP (%)	$V_{CEB}$ (%)	$F_{CEB}$ (%)	$M_{CEB}$	$\omega_G$ (%)
<b>ACI 209</b>	0.10	8.92	0.07	5.84	17.30	33.09	37.32	0.89	14.76
<b>Bazant B3</b>	0.14	13.54	0.15	13.78	21.65	33.89	38.08	0.98	20.93
<b>GL2000</b>	0.12	11.53	0.11	10.58	19.41	32.96	37.34	0.95	18.21
<b>CEB MC90</b>	0.12	11.27	0.10	7.51	18.00	33.60	37.86	0.84	15.75
<b>CEB MC99</b>	0.10	8.57	0.07	5.81	16.87	32.53	37.00	0.88	13.84

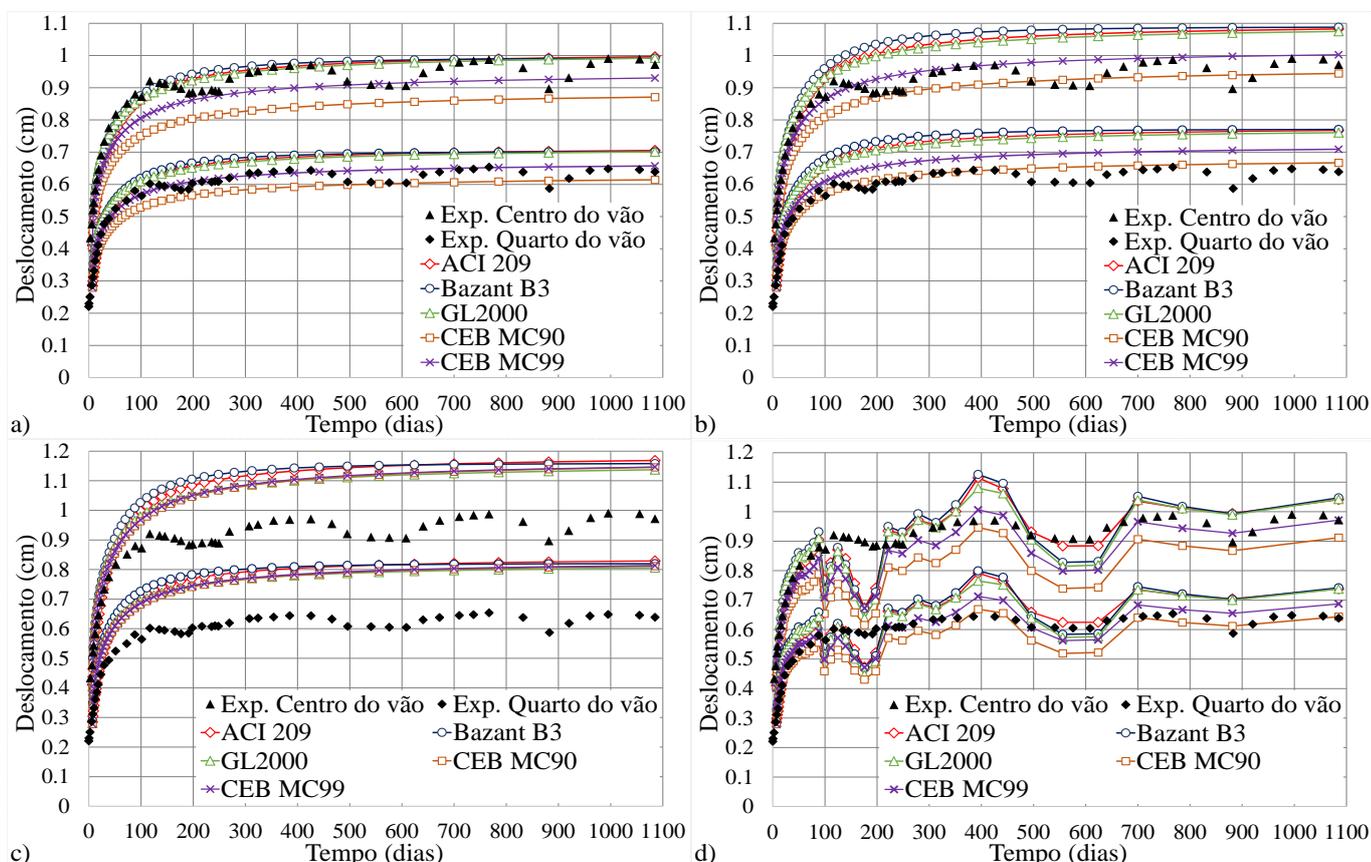


Figura 102. Deslocamento no centro e no quarto do vão. Viga LCB2. a) Condições 3 anos, b) Condições 3 meses, c) Ajustando retração, d) Condições variáveis no tempo.

Os resultados produto da análise para a viga LCB2 são apresentados na Figura 102. Considerando as condições ambientais médias dos três anos do ensaio os modelos que melhor se ajustaram ao valor final do deslocamento foram o ACI 209R-92 (2.51%), o Bazant Baweja B3 (2.03%) e o GL2000 (2.05%) (Tabela 63). Ao longo de todo o tempo do ensaio os mesmos três modelos apresentaram o melhor comportamento (Tabela 64).

Utilizando a umidade relativa e a temperatura médias durante os três primeiros meses, incrementaram os valores dos deslocamentos, e aumentaram um pouco os erros relativos, mas continuam estando dentro de um intervalo de aceitabilidade, os melhores resultados aos 1085 dias correspondem aos modelos CEB MC90 e CEB MC99 com um erro de 2.83% e 3.13% respectivamente (Tabela 65). Coincidentemente também são esses dois modelos os que apresentam um melhor comportamento ao longo do tempo (Tabela 66).

Tabela 63. Comparação deslocamento no centro do vão em  $t=1085$  dias. Viga LCB2. Condições ambientais médias durante os três anos do ensaio.

Modelo	Deslocamento (cm)	Diferença (cm)	Erro Relativo (%)	Taxa
<b>Experimental</b>	0.972			
<b>ACI 209</b>	0.996	0.024	2.51	1.03
<b>Bazant B3</b>	0.992	0.020	2.03	1.02
<b>GL2000</b>	0.992	0.020	2.05	1.02
<b>CEB MC90</b>	0.871	0.101	10.38	0.90
<b>CEB MC99</b>	0.930	0.042	4.30	0.96

Tabela 64. Indicadores estatísticos do deslocamento no centro do vão ao longo do tempo. Viga LCB2. Condições ambientais médias durante os três anos do ensaio.

Modelo	$SD_{Exp}$ (cm)	$RD_{Exp}$ (%)	$SD_{100p}$ (cm)	$RD_{100p}$ (%)	BP (%)	$V_{CEB}$ (%)	$F_{CEB}$ (%)	$M_{CEB}$	$\omega_G$ (%)
<b>ACI 209</b>	0.06	6.43	0.04	3.47	11.35	17.52	19.10	0.94	8.72
<b>Bazant B3</b>	0.06	5.26	0.04	3.38	10.08	15.98	17.73	0.97	6.89
<b>GL2000</b>	0.05	4.49	0.03	2.73	9.95	15.88	17.67	0.96	6.32
<b>CEB MC90</b>	0.11	12.73	0.10	10.81	15.63	19.94	21.22	0.85	16.49
<b>CEB MC99</b>	0.07	7.01	0.05	4.82	11.60	17.03	18.66	0.91	10.30

Tabela 65. Comparação deslocamento no centro do vão em  $t=1085$  dias. Viga LCB2. Condições ambientais médias durante os três primeiros meses do ensaio.

Modelo	Deslocamento (cm)	Diferença (cm)	Erro Relativo (%)	Taxa
<b>Experimental</b>	0.972			
<b>ACI 209</b>	1.082	0.110	11.36	1.11
<b>Bazant B3</b>	1.088	0.116	11.94	1.12
<b>GL2000</b>	1.075	0.103	10.58	1.11
<b>CEB MC90</b>	0.944	0.028	2.83	0.97
<b>CEB MC99</b>	1.002	0.030	3.13	1.03

As predições correspondentes à retração ajustada coincidem para todos os modelos, mas o resultado é um valor muito alto, isso porque o ajuste foi feito para um valor de retração experimental também muito alto, como foi comentado anteriormente. Os erros para o deslocamento final estão entre 16.99% e 20.22% (Tabela 67). O erro relativo da curva também incrementou-se, para os diferentes modelos oscila entre o 15% e o 25% (Tabela 68).

Variando o valor das condições ambientais, ao longo do tempo, obtiveram-se bons resultados, o erro máximo no deslocamento final foi de 7.71% para o modelo de Bazaant Baweja B3 e o melhor ajustado foi o CEB MC99 com um erro relativo de 0.09% (Tabela 69). O resultado na comparação das curvas completas foi também satisfatório, corroborando que as variações no deslocamento, coincidem com as variações de umidade relativa. Os erros para os modelos oscilaram entre o 5% e o 22%.

Tabela 66. Indicadores estatísticos do deslocamento no centro do vão ao longo do tempo. Viga LCB2. Condições ambientais médias durante os três primeiros meses do ensaio.

Modelo	SD <sub>Exp</sub> (cm)	RD <sub>Exp</sub> (%)	SD <sub>100p</sub> (cm)	RD <sub>100p</sub> (%)	BP (%)	V <sub>CEB</sub> (%)	F <sub>CEB</sub> (%)	M <sub>CEB</sub>	ω <sub>G</sub> (%)
ACI 209	0.11	11.67	0.11	10.99	14.30	19.41	20.88	1.00	13.06
Bazant B3	0.12	12.70	0.12	12.76	14.65	19.19	20.72	1.04	14.02
GL2000	0.10	10.56	0.10	10.25	13.32	18.09	19.75	1.03	12.37
CEB MC90	0.06	6.72	0.04	4.17	11.44	17.14	18.76	0.91	9.76
CEB MC99	0.06	5.02	0.04	3.40	10.35	16.35	18.15	0.96	7.11

Tabela 67. Comparação deslocamento no centro do vão em t=1085 dias. Viga LCB2. Condições ambientais produto do ajuste à retração experimental.

Modelo	Deslocamento (cm)	Diferença (cm)	Erro Relativo (%)	Taxa
Experimental	0.972			
ACI 209	1.169	0.197	20.22	1.20
Bazant B3	1.158	0.186	19.13	1.19
GL2000	1.137	0.165	16.99	1.17
CEB MC90	1.145	0.173	17.81	1.18
CEB MC99	1.146	0.174	17.95	1.18

Tabela 68. Indicadores estatísticos do deslocamento no centro do vão ao longo do tempo. Viga LCB2. Condições ambientais produto do ajuste à retração experimental.

Modelo	SD <sub>Exp</sub> (cm)	RD <sub>Exp</sub> (%)	SD <sub>100p</sub> (cm)	RD <sub>100p</sub> (%)	BP (%)	V <sub>CEB</sub> (%)	F <sub>CEB</sub> (%)	M <sub>CEB</sub>	ω <sub>G</sub> (%)
ACI 209	0.17	18.18	0.19	19.40	20.33	23.79	24.99	1.07	19.81
Bazant B3	0.18	19.20	0.19	20.11	20.35	23.67	24.90	1.10	21.15
GL2000	0.15	15.97	0.16	16.44	17.93	21.59	23.05	1.08	18.21
CEB MC90	0.15	15.33	0.16	16.39	18.00	21.62	23.08	1.06	17.25
CEB MC99	0.15	15.65	0.16	16.70	18.19	21.75	23.21	1.07	17.73

Tabela 69. Comparação deslocamento no centro do vão em  $t=1085$  dias. Viga LCB2. Condições ambientais variáveis ao longo dos três anos do ensaio.

<b>Modelo</b>	<b>Deslocamento (cm)</b>	<b>Diferença (cm)</b>	<b>Erro Relativo (%)</b>	<b>Taxa</b>
<b>Experimental</b>	0.972			
<b>ACI 209</b>	1.041	0.069	7.11	1.07
<b>Bazant B3</b>	1.047	0.075	7.71	1.08
<b>GL2000</b>	1.042	0.070	7.24	1.07
<b>CEB MC90</b>	0.912	0.060	6.19	0.94
<b>CEB MC99</b>	0.971	0.001	0.09	1.00

Tabela 70. Indicadores estatísticos do deslocamento no centro do vão ao longo do tempo. Viga LCB2. Condições ambientais variáveis ao longo dos três anos do ensaio.

<b>Modelo</b>	<b>SD<sub>Exp</sub> (cm)</b>	<b>RD<sub>Exp</sub> (%)</b>	<b>SD<sub>100p</sub> (cm)</b>	<b>RD<sub>100p</sub> (%)</b>	<b>BP (%)</b>	<b>V<sub>CEB</sub> (%)</b>	<b>F<sub>CEB</sub> (%)</b>	<b>M<sub>CEB</sub></b>	<b><math>\omega_G</math> (%)</b>
<b>ACI 209</b>	0.08	8.18	0.07	5.61	12.42	18.19	19.69	0.94	10.38
<b>Bazant B3</b>	0.09	8.99	0.08	7.12	12.26	17.48	19.07	0.96	11.09
<b>GL2000</b>	0.09	8.69	0.08	6.57	12.30	17.55	19.21	0.95	10.95
<b>CEB MC90</b>	0.13	14.14	0.12	11.59	15.35	20.78	22.14	0.85	15.57
<b>CEB MC99</b>	0.09	8.56	0.07	5.93	11.92	17.83	19.47	0.90	9.62

Os resultados da análise para a viga LCB3 apresentam-se na Figura 103. Na primeira abordagem do problema, se consideraram as condições ambientais constantes, e com o valor médio correspondente aos três anos do ensaio. Neste contexto nenhum dos modelos atingiu o valor do deslocamento. Os que mais se aproximaram foram o ACI 209R-92 e o Bazant Baweja B3, apresentando erros relativos de 32.18% e 43.75% respectivamente (Tabela 71). Os mesmos dois modelos também apresentaram o melhor comportamento ao longo do tempo (Tabela 72). Neste caso os modelos CEB MC90 e CEB MC99, não conseguiram atingir altos níveis de fissuração, fazendo com que o deslocamento seja muito inferior ao experimental.

Na segunda análise, utilizando os valores dos parâmetros ambientais que correspondem aos três primeiros meses do ensaio, tem-se uma melhora no comportamento de quase todos os modelos, com exceção do CEB MC90. Os modelos com um resultado mais próximo ao experimental são novamente o ACI 209R-92 e o Bazant Baweja B3, com erros relativos de 9.40% e 21.76% (Tabela 73). Os indicadores estatísticos ao longo do tempo melhoraram consideravelmente para quatro dos cinco modelos (Tabela 74).

Na análise feita ajustando o valor da retração, o comportamento de todos os modelos melhorou. Sendo que a maior diferença para os valores dos deslocamentos aos 1085 foi de só 8.29% (Modelo ACI 209 R-92) e o melhor ajuste foi atingido pelo modelo CEB MC90 com um erro relativo de 1.28% (Tabela 75). Levando em conta o ajuste ao longo do tempo (Tabela 76), os modelos melhor ajustados foram o Bazant Baweja B3, o GL2000, e o CEB MC 90.

Finalmente na análise variando o valor da temperatura e da umidade relativa, os modelos ACI 209R-92 e Bazant Baweja B3 predisseram deslocamentos muito elevados. O melhor resultado nos 1085 dias foi para o modelo CEB MC99 com um erro de 5.23% (Tabela 77). Respeito ao comportamento ao longo do tempo foi também o modelo CEB MC99 que apresentou melhores resultados (Tabela 78). O melhor ajuste entre os deslocamentos calculados e os medidos experimentalmente para a viga LCB3, alcançou-se ajustando o valor da temperatura e a umidade relativa para atingir o valor da retração experimental.

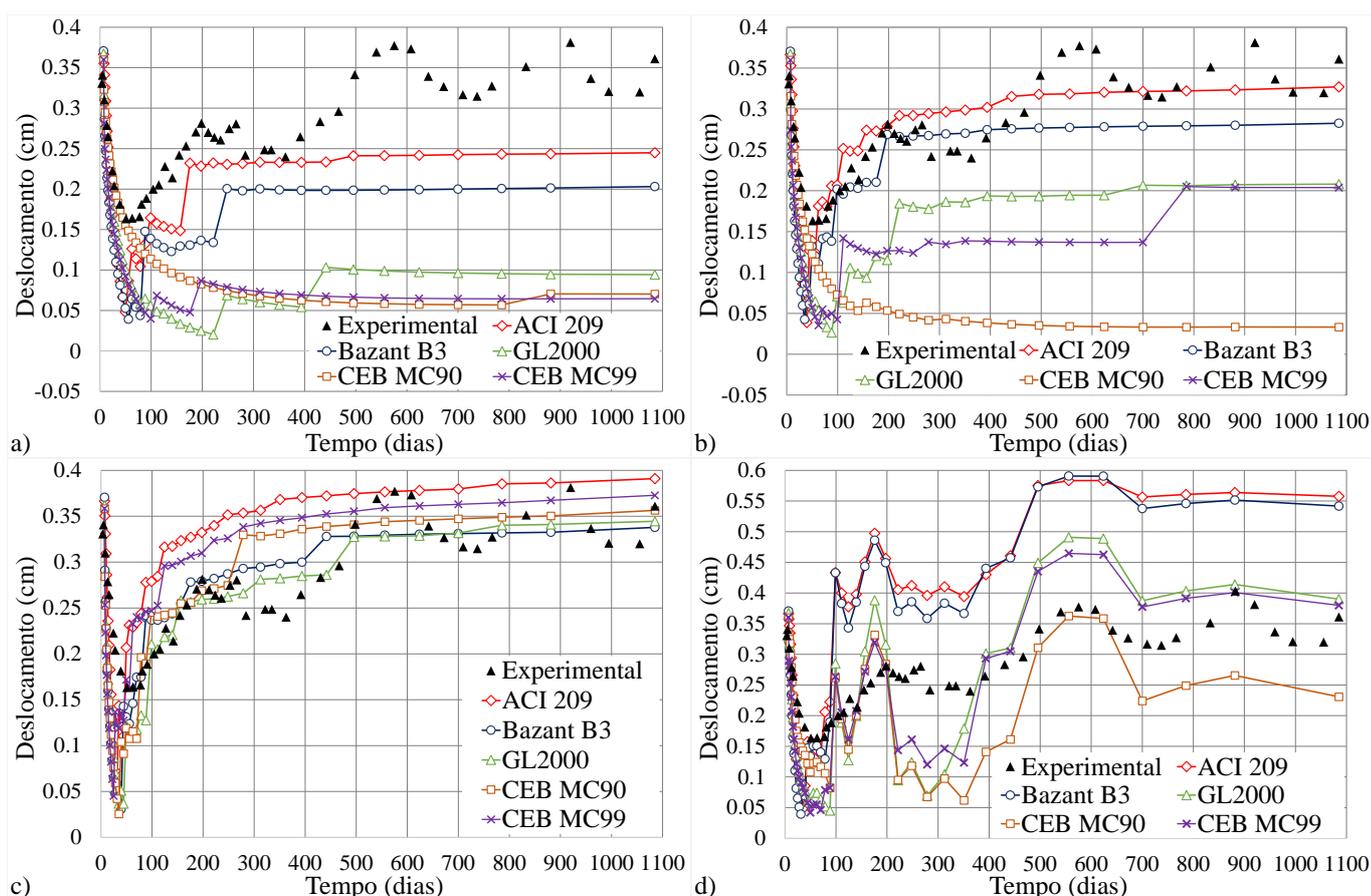


Figura 103. Deslocamento no extremo livre. Viga LCB3. a) Condições 3 anos, b) Condições 3 meses, c) Ajustando retração, d) Condições variáveis no tempo.

Tabela 71. Comparação deslocamento no extremo livre em  $t=1085$  dias. Viga LCB3. Condições ambientais médias durante os três anos do ensaio.

Modelo	Deslocamento (cm)	Diferença (cm)	Erro Relativo (%)	Taxa
<b>Experimental</b>	0.361			
<b>ACI 209</b>	0.245	0.116	32.18	0.68
<b>Bazant B3</b>	0.203	0.158	43.75	0.56
<b>GL2000</b>	0.094	0.267	73.87	0.26
<b>CEB MC90</b>	0.070	0.291	80.53	0.20
<b>CEB MC99</b>	0.065	0.297	82.14	0.18

Tabela 72. Indicadores estatísticos do deslocamento no extremo livre ao longo do tempo. Viga LCB3. Condições ambientais médias durante os três anos do ensaio.

Modelo	SD <sub>Exp</sub> (cm)	RD <sub>Exp</sub> (%)	SD <sub>100p</sub> (cm)	RD <sub>100p</sub> (%)	BP (%)	V <sub>CEB</sub> (%)	F <sub>CEB</sub> (%)	M <sub>CEB</sub>	ω <sub>G</sub> (%)
<b>ACI 209</b>	0.08	24.32	0.09	24.81	29.75	30.91	31.29	0.76	32.14
<b>Bazant B3</b>	0.11	38.94	0.13	38.92	39.29	42.42	42.86	0.63	45.18
<b>GL2000</b>	0.20	65.58	0.22	71.52	62.12	66.47	66.50	0.42	65.28
<b>CEB MC90</b>	0.20	58.44	0.24	71.92	64.38	65.76	65.00	0.47	60.73
<b>CEB MC99</b>	0.21	67.11	0.24	75.48	67.09	69.33	69.42	0.39	69.99

Tabela 73. Comparação deslocamento no extremo livre em t=1085 dias. Viga LCB3. Condições ambientais médias durante os três primeiros meses do ensaio.

Modelo	Deslocamento (cm)	Diferença (cm)	Erro Relativo (%)	Taxa
<b>Experimental</b>	0.361			
<b>ACI 209</b>	0.327	0.034	9.40	0.91
<b>Bazant B3</b>	0.282	0.079	21.76	0.78
<b>GL2000</b>	0.208	0.153	42.37	0.58
<b>CEB MC90</b>	0.033	0.328	90.80	0.09
<b>CEB MC99</b>	0.204	0.157	43.55	0.57

Tabela 74. Indicadores estatísticos do deslocamento no extremo livre ao longo do tempo. Viga LCB3. Condições ambientais médias durante os três primeiros meses do ensaio.

Modelo	SD <sub>Exp</sub> (cm)	RD <sub>Exp</sub> (%)	SD <sub>100p</sub> (cm)	RD <sub>100p</sub> (%)	BP (%)	V <sub>CEB</sub> (%)	F <sub>CEB</sub> (%)	M <sub>CEB</sub>	ω <sub>G</sub> (%)
<b>ACI 209</b>	0.05	13.66	0.04	10.45	21.40	23.74	23.87	0.94	21.95
<b>Bazant B3</b>	0.06	17.75	0.06	16.04	26.03	28.80	27.68	0.81	29.07
<b>GL2000</b>	0.12	43.21	0.13	41.21	40.78	45.79	46.88	0.60	47.63
<b>CEB MC90</b>	0.23	69.66	0.27	82.21	72.71	74.22	73.83	0.38	71.37
<b>CEB MC99</b>	0.14	49.48	0.16	49.83	44.38	51.66	52.11	0.53	51.86

Tabela 75. Comparação deslocamento no extremo livre em t=1085 dias. Viga LCB3. Condições ambientais produto do ajuste à retração experimental.

Modelo	Deslocamento (cm)	Diferença (cm)	Erro Relativo (%)	Taxa
<b>Experimental</b>	0.361			
<b>ACI 209</b>	0.391	0.030	8.29	1.08
<b>Bazant B3</b>	0.338	0.023	6.40	0.94
<b>GL2000</b>	0.345	0.016	4.55	0.96
<b>CEB MC90</b>	0.356	0.005	1.28	0.99
<b>CEB MC99</b>	0.373	0.012	3.26	1.03

Tabela 76. Indicadores estatísticos do deslocamento no extremo livre ao longo do tempo. Viga LCB3. Condições ambientais produto do ajuste à retração experimental.

<b>Modelo</b>	<b>SD<sub>Exp</sub> (cm)</b>	<b>RD<sub>Exp</sub> (%)</b>	<b>SD<sub>100p</sub> (cm)</b>	<b>RD<sub>100p</sub> (%)</b>	<b>BP (%)</b>	<b>V<sub>CEB</sub> (%)</b>	<b>F<sub>CEB</sub> (%)</b>	<b>M<sub>CEB</sub></b>	<b>ω<sub>G</sub> (%)</b>
<b>ACI 209</b>	0.08	27.37	0.07	22.37	27.01	31.61	32.57	1.09	32.15
<b>Bazant B3</b>	0.06	16.08	0.04	10.54	25.17	29.85	28.72	0.90	26.57
<b>GL2000</b>	0.05	14.57	0.04	9.18	24.42	28.18	27.42	0.86	24.71
<b>CEB MC90</b>	0.06	17.07	0.05	12.91	25.06	29.07	28.12	0.92	26.59
<b>CEB MC99</b>	0.07	23.57	0.06	17.40	27.90	32.66	31.61	1.01	31.57

Tabela 77. Comparação deslocamento no extremo livre em t=1085 dias. Viga LCB3. Condições ambientais variáveis ao longo dos três anos do ensaio.

<b>Modelo</b>	<b>Deslocamento (cm)</b>	<b>Diferença (cm)</b>	<b>Erro Relativo (%)</b>	<b>Taxa</b>
<b>Experimental</b>	0.361			
<b>ACI 209</b>	0.558	0.197	54.50	1.55
<b>Bazant B3</b>	0.542	0.181	50.05	1.50
<b>GL2000</b>	0.390	0.029	8.03	1.08
<b>CEB MC90</b>	0.231	0.130	36.10	0.64
<b>CEB MC99</b>	0.380	0.019	5.23	1.05

Tabela 78. Indicadores estatísticos do deslocamento no extremo livre ao longo do tempo. Viga LCB3. Condições ambientais variáveis ao longo dos três anos do ensaio.

<b>Modelo</b>	<b>SD<sub>Exp</sub> (cm)</b>	<b>RD<sub>Exp</sub> (%)</b>	<b>SD<sub>100p</sub> (cm)</b>	<b>RD<sub>100p</sub> (%)</b>	<b>BP (%)</b>	<b>V<sub>CEB</sub> (%)</b>	<b>F<sub>CEB</sub> (%)</b>	<b>M<sub>CEB</sub></b>	<b>ω<sub>G</sub> (%)</b>
<b>ACI 209</b>	0.17	56.38	0.20	62.08	55.08	58.13	59.24	1.34	59.40
<b>Bazant B3</b>	0.16	54.02	0.19	58.52	52.64	56.55	57.19	1.27	58.81
<b>GL2000</b>	0.10	32.64	0.09	28.12	30.51	37.67	38.33	0.90	36.57
<b>CEB MC90</b>	0.10	29.46	0.10	29.20	32.68	34.88	35.06	0.75	36.39
<b>CEB MC99</b>	0.08	28.07	0.07	23.44	28.71	34.64	35.47	0.88	36.97

Na Figura 104 apresentam-se os resultados que correspondem ao deslocamento no extremo livre para a viga LCB4. Na primeira análise realizada com as condições ambientais médias dos três anos, nenhum dos modelos atinge o valor de deslocamento final, sendo que o mais próximo é o modelo de ACI 209 R-92 com um erro relativo de 22.73% (Tabela 79). Na comparação do comportamento ao longo do tempo (Tabela 80) é também o modelo ACI 209 R-92 que apresenta o melhor ajuste.

Na análise empregando as condições ambientais dos três primeiros meses, todos os modelos apresentam uma melhoria, menos o CEB MC90. O melhor ajuste para o deslocamento final e para o modelo ACI 209 R-92, com um erro relativo de 3.37% (Tabela 81). Ao longo do tempo os dois modelos melhor ajustados são o ACI 209 R-92 e o Bazant Baweja B3 (Tabela 82).

Com o valor ajustado da retração, os resultados melhoram significativamente, sendo que o melhor ajuste é atingido pelo modelo Bazant Baweja B3, com um erro relativo de 0.85% (Tabela 83). Ao longo do tempo três dos modelos apresentam um comportamento diferenciado, é o caso do Bazant Baweja B3, o GL2000 e o CEB MC90 (Tabela 84).

Finalmente na análise feita variando a temperatura e a umidade relativa, evidencia-se que o comportamento do gráfico experimental apresenta incrementos e decrementos nos mesmos pontos que os gráficos dos modelos afetados pela variação destes parâmetros; o que confirma que a variação (incremento e decremento) apresentada do dia 200 em diante encontra-se ligada com a variação da umidade relativa, dado que as condições de carga não variaram nesse intervalo de tempo. O melhor resultado comprando o valor final do deslocamento corresponde ao modelo CEB MC9 com 10.67% de erro relativo (Tabela 85). Ao longo do tempo o modelo com um melhor ajuste é também, o CEB MC90 (Tabela 86).

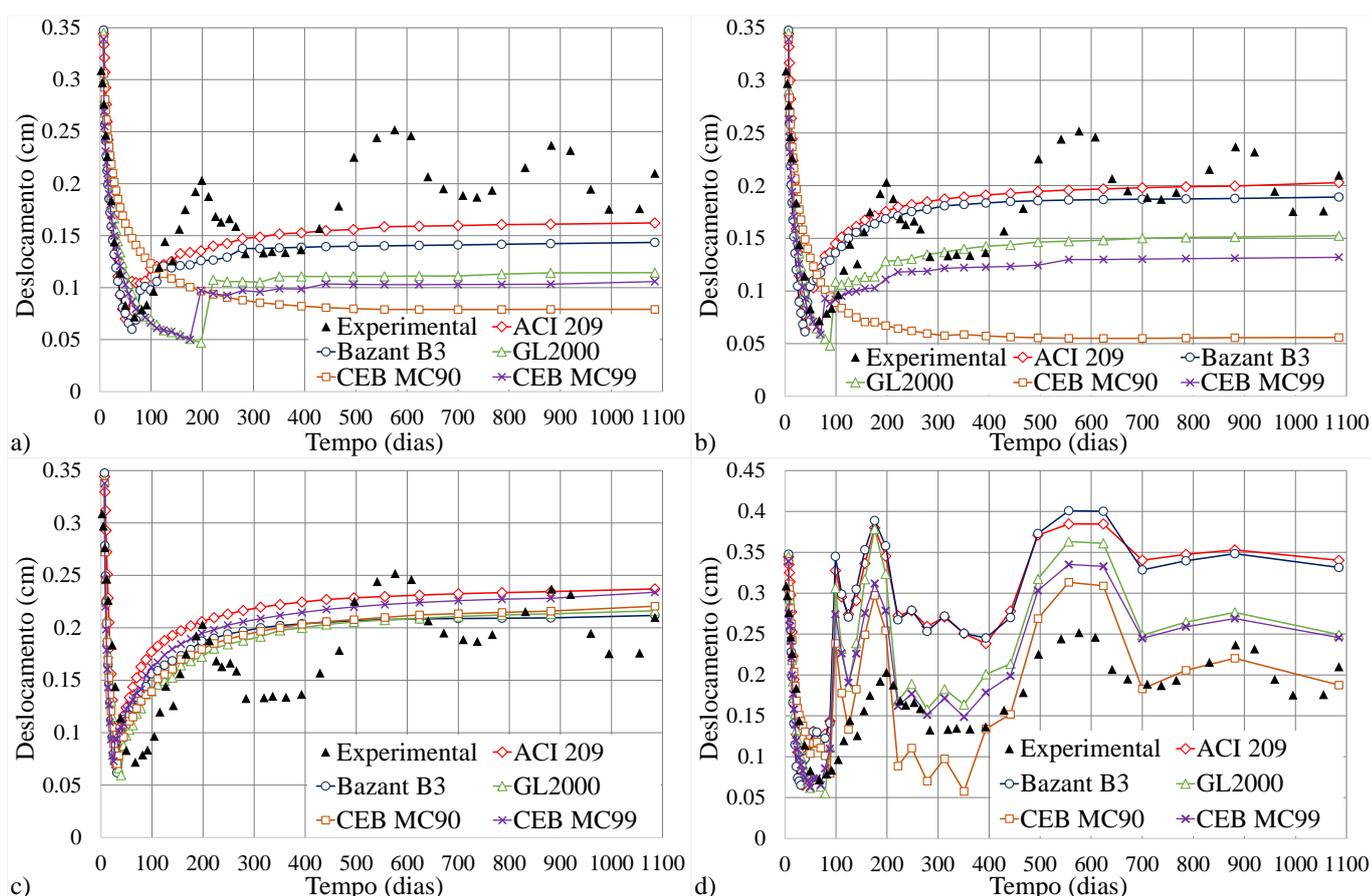


Figura 104. Deslocamento no extremo livre. Viga LCB4. a) Condições 3 anos, b) Condições 3 meses, c) Ajustando retração, d) Condições variáveis no tempo.

Tabela 79. Comparação deslocamento no extremo livre em t=1085 dias. Viga LCB4. Condições ambientais médias durante os três anos do ensaio.

Modelo	Deslocamento (cm)	Diferença (cm)	Erro Relativo (%)	Taxa
<b>Experimental</b>	0.210			
<b>ACI 209</b>	0.162	0.048	22.73	0.77
<b>Bazant B3</b>	0.144	0.066	31.64	0.68
<b>GL2000</b>	0.115	0.096	45.49	0.55
<b>CEB MC90</b>	0.079	0.131	62.32	0.38
<b>CEB MC99</b>	0.106	0.104	49.58	0.50

Tabela 80. Indicadores estatísticos do deslocamento no extremo livre ao longo do tempo. Viga LCB4. Condições ambientais médias durante os três anos do ensaio.

Modelo	SD <sub>Exp</sub> (cm)	RD <sub>Exp</sub> (%)	SD <sub>100p</sub> (cm)	RD <sub>100p</sub> (%)	BP (%)	V <sub>CEB</sub> (%)	F <sub>CEB</sub> (%)	M <sub>CEB</sub>	ω <sub>G</sub> (%)
<b>ACI 209</b>	0.05	19.81	0.05	19.39	34.82	31.56	30.52	0.89	30.80
<b>Bazant B3</b>	0.06	21.71	0.06	23.93	35.92	34.03	31.80	0.80	32.43
<b>GL2000</b>	0.08	37.26	0.09	40.12	43.01	46.05	43.53	0.71	42.82
<b>CEB MC90</b>	0.10	47.90	0.11	53.78	51.24	54.72	56.58	0.75	55.16
<b>CEB MC99</b>	0.09	38.90	0.09	43.46	44.43	47.32	45.01	0.66	43.68

Tabela 81. Comparação deslocamento no extremo livre em t=1085 dias. Viga LCB4. Condições ambientais médias durante os três primeiros meses do ensaio.

Modelo	Deslocamento (cm)	Diferença (cm)	Erro Relativo (%)	Taxa
<b>Experimental</b>	0.210			
<b>ACI 209</b>	0.203	0.007	3.37	0.97
<b>Bazant B3</b>	0.189	0.021	9.93	0.90
<b>GL2000</b>	0.152	0.058	27.41	0.73
<b>CEB MC90</b>	0.056	0.154	73.42	0.27
<b>CEB MC99</b>	0.132	0.078	37.15	0.63

Tabela 82. Indicadores estatísticos do deslocamento no extremo livre ao longo do tempo. Viga LCB4. Condições ambientais médias durante os três primeiros meses do ensaio.

Modelo	SD <sub>Exp</sub> (cm)	RD <sub>Exp</sub> (%)	SD <sub>100p</sub> (cm)	RD <sub>100p</sub> (%)	BP (%)	V <sub>CEB</sub> (%)	F <sub>CEB</sub> (%)	M <sub>CEB</sub>	ω <sub>G</sub> (%)
<b>ACI 209</b>	0.04	21.55	0.03	17.29	33.98	30.31	34.32	1.03	29.15
<b>Bazant B3</b>	0.05	20.86	0.03	17.10	33.38	30.84	32.90	0.97	30.25
<b>GL2000</b>	0.05	21.04	0.05	21.96	34.92	32.75	30.75	0.79	31.08
<b>CEB MC90</b>	0.11	54.11	0.13	63.78	56.52	61.79	60.57	0.61	57.71
<b>CEB MC99</b>	0.07	27.03	0.07	29.86	38.55	38.21	35.43	0.74	37.16

Tabela 83. Comparação deslocamento no extremo livre em t=1085 dias. Viga LCB4. Condições ambientais produto do ajuste à retração experimental.

Modelo	Deslocamento (cm)	Diferença (cm)	Erro Relativo (%)	Taxa
<b>Experimental</b>	0.210			
<b>ACI 209</b>	0.237	0.027	12.89	1.13
<b>Bazant B3</b>	0.212	0.002	0.85	1.01
<b>GL2000</b>	0.216	0.006	2.98	1.03
<b>CEB MC90</b>	0.221	0.011	5.05	1.05
<b>CEB MC99</b>	0.234	0.024	11.39	1.11

Tabela 84. Indicadores estatísticos do deslocamento no extremo livre ao longo do tempo. Viga LCB4. Condições ambientais produto do ajuste à retração experimental.

Modelo	SD <sub>Exp</sub> (cm)	RD <sub>Exp</sub> (%)	SD <sub>100p</sub> (cm)	RD <sub>100p</sub> (%)	BP (%)	V <sub>CEB</sub> (%)	F <sub>CEB</sub> (%)	M <sub>CEB</sub>	ω <sub>G</sub> (%)
<b>ACI 209</b>	0.06	33.30	0.05	28.59	38.43	37.89	46.97	1.17	39.76
<b>Bazant B3</b>	0.05	25.59	0.04	20.50	35.13	34.13	38.11	1.04	34.79
<b>GL2000</b>	0.05	22.68	0.03	18.66	34.54	31.85	34.45	1.01	32.72
<b>CEB MC90</b>	0.05	24.01	0.04	19.87	35.33	32.98	35.81	1.03	34.26
<b>CEB MC99</b>	0.06	29.77	0.04	24.80	38.12	37.77	42.17	1.09	40.31

Tabela 85. Comparação deslocamento no extremo livre em t=1085 dias. Viga LCB4. Condições ambientais variáveis ao longo dos três anos do ensaio.

Modelo	Deslocamento (cm)	Diferença (cm)	Erro Relativo (%)	Taxa
<b>Experimental</b>	0.210			
<b>ACI 209</b>	0.340	0.130	61.96	1.62
<b>Bazant B3</b>	0.331	0.121	57.83	1.58
<b>GL2000</b>	0.249	0.039	18.74	1.19
<b>CEB MC90</b>	0.188	0.022	10.67	0.89
<b>CEB MC99</b>	0.246	0.036	16.98	1.17

Tabela 86. Indicadores estatísticos do deslocamento no extremo livre ao longo do tempo. Viga LCB4. Condições ambientais variáveis ao longo dos três anos do ensaio.

Modelo	SD <sub>Exp</sub> (cm)	RD <sub>Exp</sub> (%)	SD <sub>100p</sub> (cm)	RD <sub>100p</sub> (%)	BP (%)	V <sub>CEB</sub> (%)	F <sub>CEB</sub> (%)	M <sub>CEB</sub>	ω <sub>G</sub> (%)
<b>ACI 209</b>	0.13	74.06	0.14	76.56	62.39	71.12	77.77	1.50	69.93
<b>Bazant B3</b>	0.13	74.94	0.14	76.59	61.42	72.17	78.65	1.48	70.52
<b>GL2000</b>	0.08	40.62	0.08	39.88	41.98	47.04	50.37	1.21	45.05
<b>CEB MC90</b>	0.06	26.47	0.04	20.97	34.70	33.74	35.75	1.03	30.82
<b>CEB MC99</b>	0.07	34.14	0.07	32.51	39.43	41.01	44.35	1.15	41.80

## 6.4. VIGAS DE CONCRETO PROTENDIDAS

Póvoas (1991) apresentou uma série de testes numéricos para avaliar a formulação desenvolvida no seu trabalho. O autor analisou diferentes configurações geométricas para a localização de um cabo de protensão, em vigas de concreto simplesmente apoiadas e contínuas. Foram modeladas no total oito vigas de concreto protendido, sendo quatro grupos de duas vigas, desenvolvendo duas análises numéricas distintas: a primeira análise considerando o efeito do protendido mediante a aplicação de uma força no elemento de cabo, e a segunda análise considerando-o através da aplicação de cargas externas equivalentes. Póvoas comparou os resultados obtidos mediante a simulação numérica com a solução analítica dessas vigas.

O módulo de elasticidade do concreto empregado foi 19500 MPa. Para o aço de protensão empregou-se uma cordoalha de classe Y1860S7, cuja tensão de rotura é 1860 MPa. Uma descrição completa das características dos materiais empregados encontra-se na Tabela 87.

Tabela 87. Propriedades dos materiais para as vigas de Póvoas (1991).

Material	Propriedades			
Aço protendido	Módulo de Elasticidade	$E_p =$	195000	MPa
	Tensão de Escoamento	$f_y =$	1674	MPa
	Tensão Última	$f_u =$	1860	MPa
	Área	$A =$	150	mm <sup>2</sup>
	Deformação Última	$\varepsilon_u =$	5	%
Concreto	Resistência à Compressão	$f_{ck} =$	17,5	MPa
	Módulo de Elasticidade	$E_{28} =$	19500	MPa
	Resistência à Tração	$f_t =$	1,5	MPa
	Coefficiente de Poisson	$\nu =$	0,2	
	Deformação Última à Tração	$\varepsilon_{u(+)} =$	2,5	‰
	Deformação Última à Compressão	$\varepsilon_{u(-)} =$	4,5	‰

As vigas A1, A2, B1, B2, C1 e C2 correspondem a estruturas simplesmente apoiadas, com um comprimento total de 20 m, nas quais varia a posição do cabo de protensão. As vigas D1 e D2 são contínuas de dois vãos, com 10 m de comprimento para cada vão, o com o cabo posicionado horizontalmente. Um esquema das condições de apoio das vigas é apresentado na Figura 105.

O autor compara dois tipos de resultados: o deslocamento no centro do vão e as reações nos apoios. Modelou-se a metade da estrutura em todos os casos, aplicando a

condição de simetria. A malha de elementos finitos usada para descrever a geometria de todas as vigas é idêntica, esta composta por quatro elementos de concreto (Figura 106). Empregou-se uma malha igual à definida por Póvoas (1991), para comparar fielmente os resultados obtidos. Modificam-se para cada caso, as condições de contorno, o carregamento aplicado ou a posição do elemento de cabo. Buscando reproduzir exatamente o procedimento de Póvoas (1991), não foi considerada a contribuição de rigidez da cordoalha para este exemplo em específico.

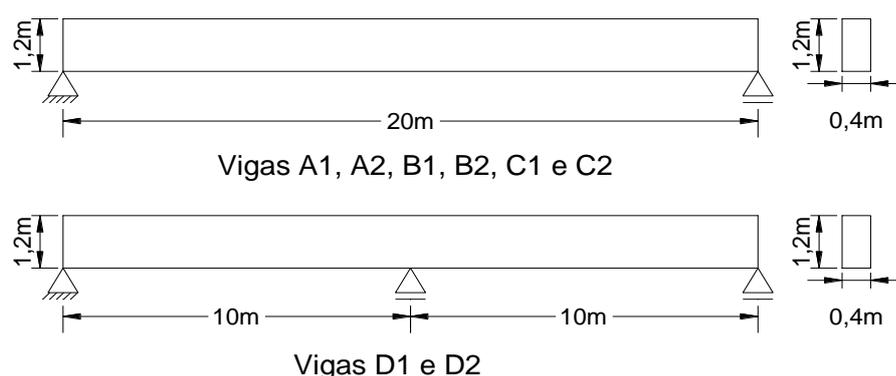


Figura 105. Condições de apoio vigas de Póvoas (1991)

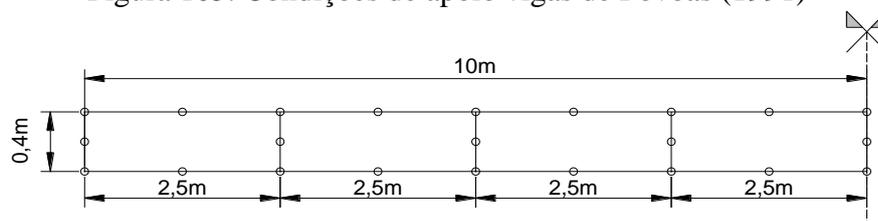


Figura 106. Malha de elementos finitos vigas de Póvoas (1991).

As primeiras duas vigas têm um cabo pré-esforçado reto paralelo ao eixo longitudinal da viga, conforme o ilustrado na Figura 107 e na Figura 108. Na primeira viga, denominada como A1, aplicou-se uma carga de pré-esforço no elemento de cabo de 1200 kN. A segunda viga (A2) é igual à primeira exceto pelo carregamento, neste caso foi aplicado um momento externo sobre a viga no apoio i de valor 1200 kNm, a fim de desenvolver a mesma magnitude do deslocamento do caso anterior com a carga de pré-esforço (Figura 108).

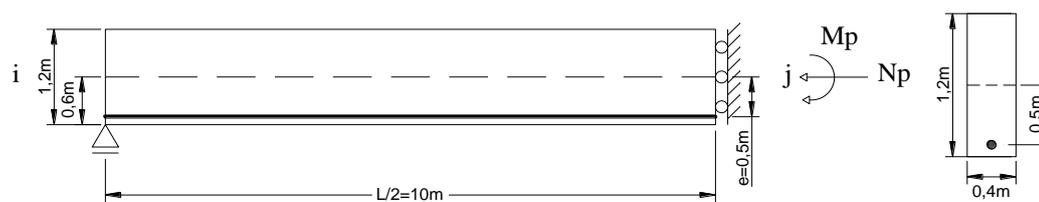


Figura 107. Representação esquemática da viga simplesmente apoiada A1.

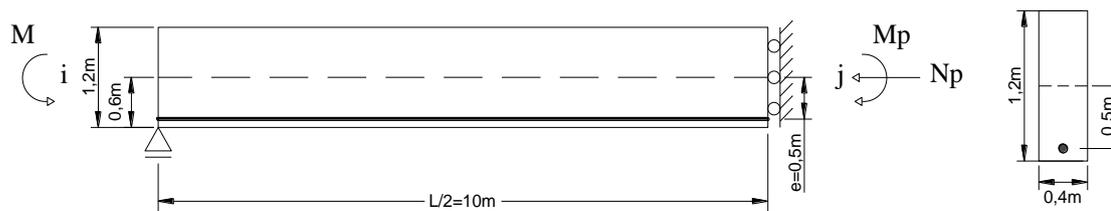


Figura 108. Representação esquemática da viga simplesmente apoiada A2.

Mediram-se os deslocamentos no centro do vão, assim como os valores das reações nos apoios. Os resultados são comparados na Tabela 88 com a solução analítica, e também com a solução numérica apresentada no trabalho de Póvoas (1991). Observa-se uma excelente concordância com os resultados obtidos nesse trabalho.

Tabela 88. Comparação de resultados. Vigas A1 e A2.

Viga	Tipo de análise	Deslocamento no centro do vão (m)	Reação vertical em i Vi (kN)	Momento interno em j Mj kN*m
A1	Analítica	0.02604	0.00	0.00
	Póvoas	0.02645	0.00	0.00
	Presente Análise	0.02646	0.00	0.00
A2	Analítica	-0.02604	0.00	0.00
	Póvoas	-0.02645	0.00	-1200.00
	Presente Análise	-0.02646	0.00	-1200.00

O segundo grupo de vigas possui um elemento de cabo pré-esforçado inclinado reto, sendo que nos apoios a sua localização coincide com a linha neutra da viga, e no centro do vão alcança uma excentricidade de 50 cm. A viga B1 (Figura 109) é carregada com 1200 kN de pré-esforço no cabo, enquanto a viga B2 (Figura 110) foi carregada com uma carga pontual aplicada no centro do vão com valor de 239,7 kN, procurando novamente atingir o mesmo valor de deformação que o conseguido com o cabo pré-esforçado.

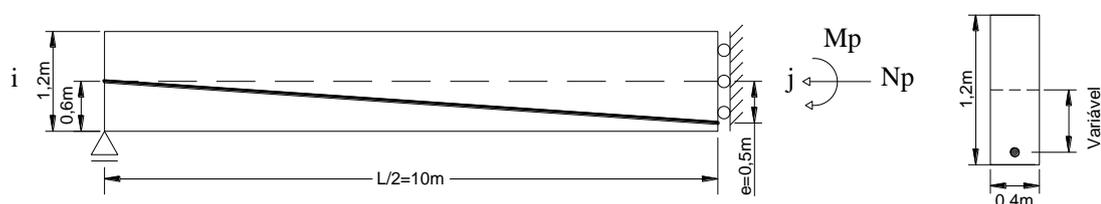


Figura 109. Representação esquemática da viga simplesmente apoiada B1.

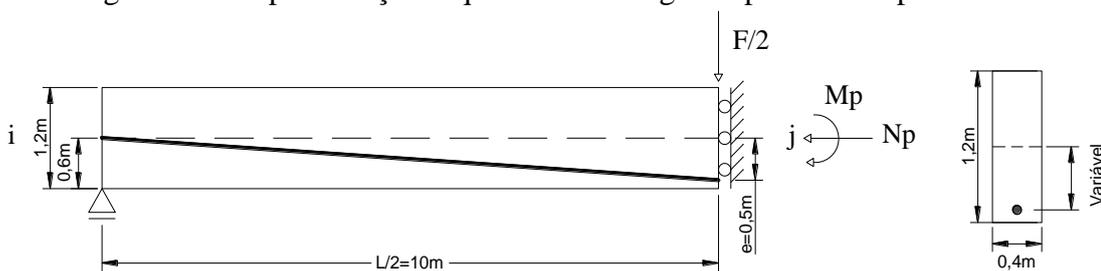


Figura 110. Representação esquemática da viga simplesmente apoiada B2.

Novamente comparam-se os deslocamentos no centro do vão e os valores das reações nos apoios. Os resultados correspondentes encontram-se na Tabela 89. Os valores do deslocamento coincidem exatamente com os calculados por Póvoas (1991), e são bastante próximos da resposta analítica. Os valores das reações calculados foram iguais aos analíticos, apresentando um ajuste melhor do que os apresentados por Póvoas (1991).

Tabela 89. Comparação de resultados. Vigas B1 e B2.

Viga	Tipo de análise	Deslocamento no centro do vão (m)	Reação vertical em i $V_i$ (kN)	Momento interno em j $M_j$ kN*m
B1	Analítica	0.01734	0.00	0.00
	Póvoas	0.01779	0.00	0.00
	Presente Análise	0.01779	0.00	0.00
B2	Analítica	-0.01734	119.85	-1198.50
	Póvoas	-0.01779	119.90	-1199.00
	Presente Análise	-0.01779	119.85	-1198.50

O terceiro grupo de vigas corresponde à mesma geometria dos exemplos anteriores, variando a posição do cabo. Para as vigas C1 e C2 o cabo pré esforçado tem forma parabólica. Sendo que no apoio, sua posição coincide com o eixo da viga e no centro do vão a sua excentricidade é de 50 cm. A diferença entre a viga C1 (Figura 111) e a C2 (Figura 112) consiste em que a primeira tem um pré-esforço aplicado através do cabo com um valor de 1200 kN, enquanto a segunda alcança o mesmo valor de deslocamento através de um carregamento distribuído externo com valor de 24 kN/m.

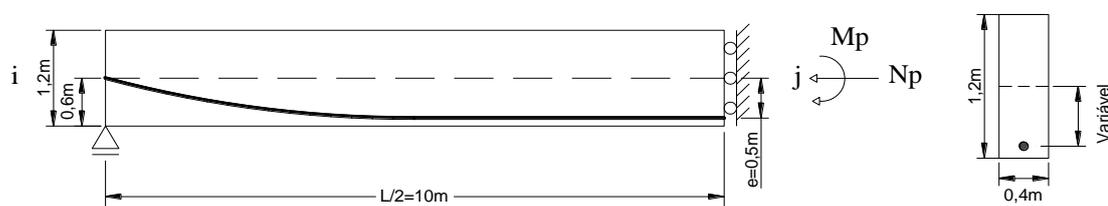


Figura 111. Representação esquemática da viga simplesmente apoiada C1.

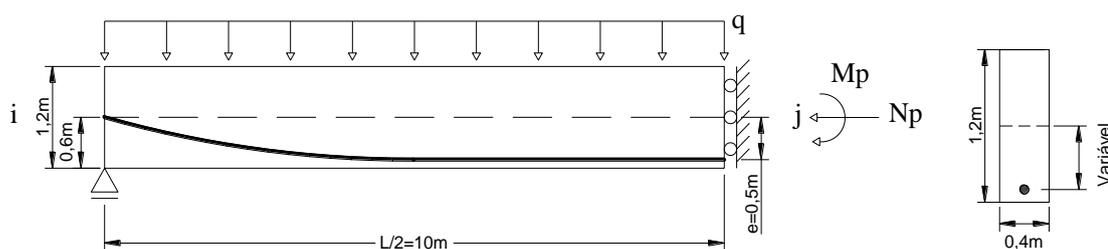


Figura 112. Representação esquemática da viga simplesmente apoiada C2.

Na Tabela 90 apresentam-se os resultados correspondentes para estas duas vigas. O valor obtido para as reações é exatamente igual para o presente estudo, os cálculos de Póvoas e o resultado analítico. O valor de deslocamento calculado tem uma excelente concordância com o calculado pelo autor, e um ajuste apropriado com o resultado analítico.

Tabela 90. Comparação de resultados. Vigas C1 e C2.

Viga	Tipo de análise	Deslocamento no centro do vão (m)	Reação vertical em i $V_i$ (kN)	Momento interno em j $M_j$ kN*m
C1	Analítica	0.02170	0.00	0.00
	Póvoas	0.02224	0.00	0.00
	Presente Análise	0.02220	0.00	0.00
C2	Analítica	-0.02170	240.00	-1200.00
	Póvoas	-0.02224	240.00	-1200.00
	Presente Análise	-0.02223	240.00	-1200.00

Finalmente analisaram-se duas vigas contínuas: D1 e D2. A posição do cabo de pré-esforço nas mesmas é similar à das vigas A1 e A2, sendo que trata-se de um cabo retilíneo paralelo ao eixo longitudinal da viga, localizado na parte inferior da mesma com uma excentricidade de 50 cm. Para o caso da viga D1 (Figura 113) foi aplicada uma carga de pré-esforço no cabo equivalente a 1200 kN, enquanto para a viga D2 (Figura 114) aplicou-se um momento externo de valor 1200 kN\*m.

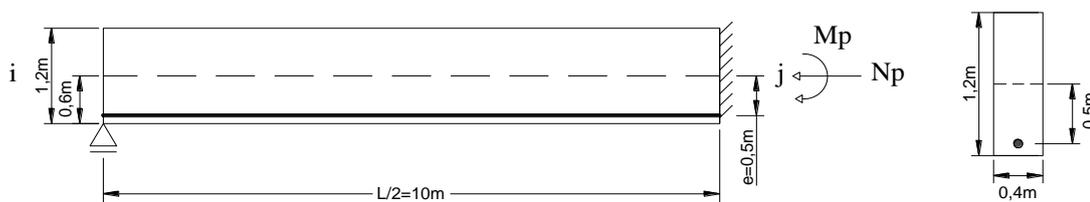


Figura 113. Representação esquemática viga contínua D1.

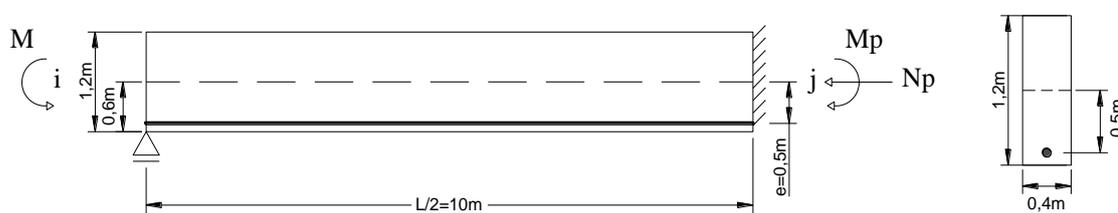


Figura 114. Representação esquemática viga contínua D2.

Os resultados para as vigas contínuas D1 e D2 encontram-se resumidos na Tabela 91. É clara a correspondência dos resultados com os calculados por Póvoas, e a sua vez com a resposta analítica.

Tabela 91. Comparação de resultados. Vigas D1 e D2.

Viga	Tipo de análise	Deslocamento no centro do vão (m)	Reação vertical em i Vi (kN)	Momento interno em j Mj kN*m
D1	Analítica	0.00163	90.00	-900.00
	Póvoas	0.00170	89.10	-891.00
	Presente Análise	0.00170	87.97	-879.73
D2	Analítica	-0.00163	-90.00	-300.00
	Póvoas	-0.00170	-89.10	-309.00
	Presente Análise	-0.00170	-89.14	-308.64

## 6.5. VIGAS MISTAS PROTENDIDAS

Dezi, Leoni et al. (1996) calcularam analiticamente o comportamento ao longo do tempo de uma viga mista contínua, com protensão interna aplicada na laje de concreto. A viga possui dois vãos simétricos de 25,0 m cada um. A viga encontra-se submetida a um carregamento distribuído de 64,56 kN/m, e o cabo de protensão encontra-se localizado nos 20 metros centrais da estrutura (10 metros em cada vão), conforme a Figura 115. A força de protensão é de 4000 kN.

A ligação entre a laje de concreto e o perfil de aço tem uma rigidez de 0.5 kN/mm<sup>2</sup>. Empregam-se uma linha de conectores espaçados uniformemente a cada 200 mm. A curva de rigidez adotada apresenta-se na Figura 116. Um resumo completo com as propriedades dos materiais apresenta-se na Tabela 92.

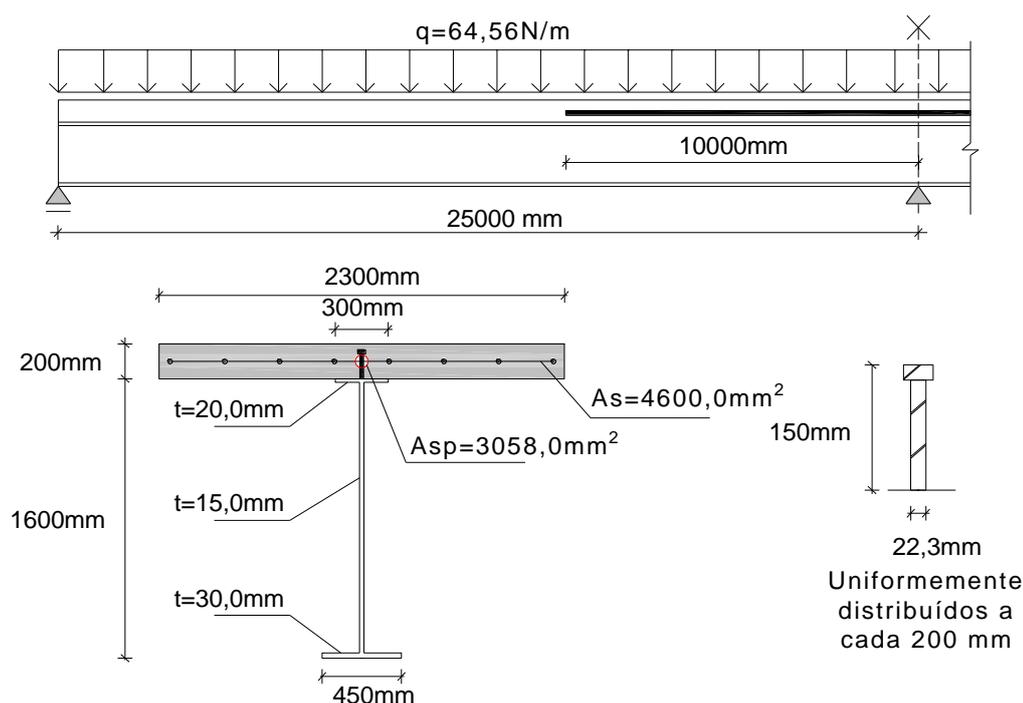


Figura 115. Geometria e seção transversal da viga mista contínua protendida.

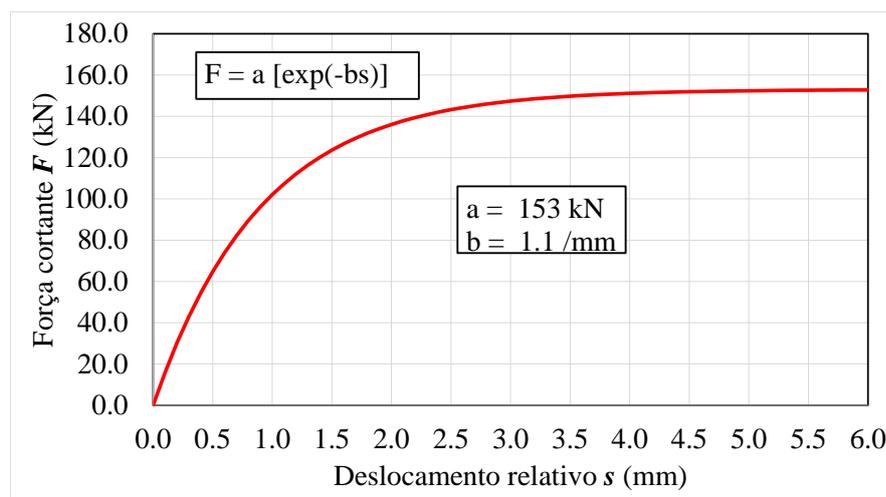


Figura 116. Rigidez dos conectores da viga de Dezi, Leoni et al. (1996)

Tabela 92. Propriedades dos materiais para a viga de Dezi, Leoni et al. (1996)

Material	Propriedades	
Aço Estrutural	Módulo de Elasticidade	$E = 210000$ MPa
	Tensão de Escoamento	$f_y = 280$ MPa
	Tensão Última	$f_y = 350$ MPa
	Coefficiente de Poisson	$\nu = 0,3$
	Deformação Última	$\epsilon_u = 25$ %
Aço de Reforço	Módulo de Elasticidade	$E = 210000$ MPa
	Tensão de Escoamento	$f_y = 280$ MPa
	Tensão Última	$f_u = 350$ MPa
	Coefficiente de Poisson	$\nu = 0,3$
	Deformação Última	$\epsilon_u = 25$ %
Concreto	Resistência à Compressão	$f_{ck} = 30,0$ MPa
	Módulo de Elasticidade	$E_{28} = 22000$ MPa
	Resistência à Tração	$f_t = 3,00$ MPa
	Coefficiente de Poisson	$\nu = 0,2$
	Deformação Última à Tração	$\epsilon_{u(+)} = 3,0$ ‰
	Deformação Última à Compressão	$\epsilon_{u(-)} = 4,5$ ‰
Aço protendido	Módulo de Elasticidade	$E_p = 197000$ MPa
	Tensão de Escoamento	$f_y = 1500$ MPa
	Tensão Última	$f_u = 1700$ MPa
	Área	$A = 3058$ mm <sup>2</sup>
	Deformação Última	$\epsilon_u = 5$ %
Conector de Cisalhamento	Espaçamento	$s = 200$ mm
	Diâmetro x Altura	$d \times 22,3 \times$ mm
	Número de Linhas	$n = 1$
	Constante 1	$a = 153$ kN
	Constante 2	$b = 1,1$ mm <sup>-1</sup>

Aproveitando a propriedade de simetria, modelou-se apenas a metade da estrutura. Empregaram-se para a malha de elementos finitos: 1125 elementos para representar a viga de aço (125 divisões no sentido longitudinal), 378 para a laje de concreto (63 divisões no sentido longitudinal) e 125 para os conectores de cisalhamento (igualmente espaçados), conforme a Figura 117. Para representar a laje empregaram-se 8 camadas de concreto cada uma com 25 mm de espessura e 4 camadas de aço para representar a armadura conforme a Figura 118. No lado esquerdo dessa figura encontra-se a posição real da armadura, enquanto que à direita encontram-se a espessura e a posição normalizada da armadura dentro da laje e a direção da camada de aço, sendo que  $\theta = 0^\circ$  refere-se à armadura longitudinal e  $\theta = 90^\circ$  à armadura transversal.

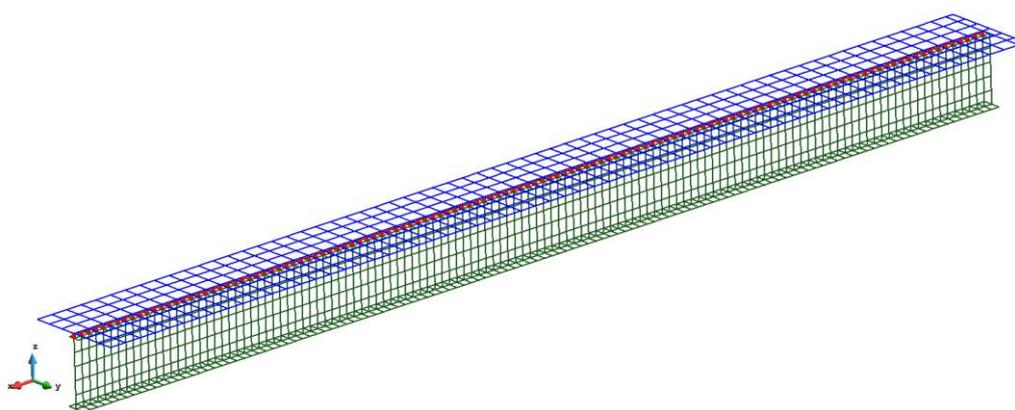


Figura 117. Malha de elementos finitos da viga mista contínua protendida.

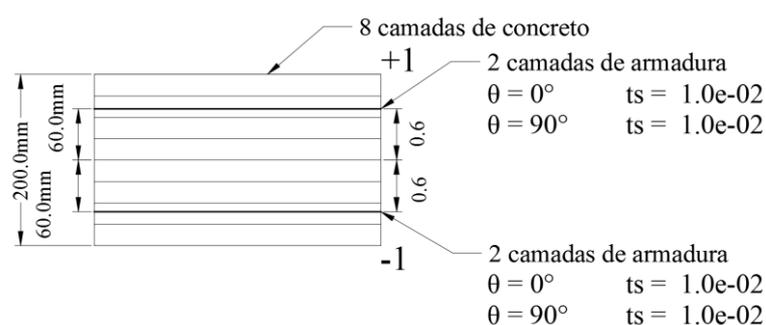


Figura 118. Esquema das camadas de concreto e aço para viga contínua protendida.

A carga foi aplicada como carga de pressão nos elementos da laje de concreto. A idade de aplicação do carregamento é 30 dias, e o tempo de cura é 10 dias. O tempo total da análise foi 25550 dias (70 anos), empregaram-se para a análise 59 passos de tempo que são apresentados na Tabela 93.

Para o cálculo da retração e da fluência empregou-se o modelo CEB MC90, já que Dezi, Leoni et al. (1996) utilizaram o mesmo para as suas predições destes fenômenos.

Empregou-se um valor de umidade relativa de 50%, cimento de endurecimento normal (Tipo I) e temperatura de 20 °C. Na Tabela 94 apresenta-se um resumo das propriedades utilizadas e na Tabela 95 encontram-se os parâmetros obtidos da cadeia de Kelvin para cada modelo.

Tabela 93. Passos de tempo empregados na análise(dias).Viga mista contínua protendida

<b>Passo</b>	<b>Tempo (dias)</b>										
<b>1</b>	30	<b>11</b>	94.87	<b>21</b>	300	<b>31</b>	948.68	<b>41</b>	3000	<b>51</b>	9486.8
<b>2</b>	33.66	<b>12</b>	106.44	<b>22</b>	336.61	<b>32</b>	1064.4	<b>42</b>	3366.0	<b>52</b>	10644.
<b>3</b>	37.77	<b>13</b>	119.43	<b>23</b>	377.68	<b>33</b>	1194.3	<b>43</b>	3776.7	<b>53</b>	11943.
<b>4</b>	42.38	<b>14</b>	134.01	<b>24</b>	423.76	<b>34</b>	1340.0	<b>44</b>	4237.6	<b>54</b>	13400.
<b>5</b>	47.55	<b>15</b>	150.36	<b>25</b>	475.47	<b>35</b>	1503.5	<b>45</b>	4754.6	<b>55</b>	15035.
<b>6</b>	53.35	<b>16</b>	168.7	<b>26</b>	533.48	<b>36</b>	1687.0	<b>46</b>	5334.8	<b>56</b>	16870.
<b>7</b>	59.86	<b>17</b>	189.29	<b>27</b>	598.58	<b>37</b>	1892.8	<b>47</b>	5985.7	<b>57</b>	18928.
<b>8</b>	67.16	<b>18</b>	212.38	<b>28</b>	671.62	<b>38</b>	2123.8	<b>48</b>	6716.1	<b>58</b>	21238.
<b>9</b>	75.36	<b>19</b>	238.3	<b>29</b>	753.57	<b>39</b>	2382.9	<b>49</b>	7535.6	<b>59</b>	25550
<b>10</b>	84.55	<b>20</b>	267.38	<b>30</b>	845.51	<b>40</b>	2673.7	<b>50</b>	8455.1		

Tabela 94. Propriedades para análise diferida no tempo. Viga mista contínua protendida.

<b>Método de cura</b>	Úmida
<b>Tempo de cura</b>	7 dias
<b>Tempo aplicação do carregamento</b>	7 dias
<b>Tempo total de análise</b>	25550 dias
<b>Tipo de cimento</b>	1
<b>Temperatura</b>	20 °C
<b>Umidade relativa</b>	50 %

Tabela 95. Parâmetros da cadeia de Kelvin para a viga mista contínua protendida.

$\tau_i$	$E_i$ (kN/cm <sup>2</sup> )
<b>0,3</b>	3,40
<b>3</b>	3,99
<b>30</b>	1,62
<b>300</b>	1,03
<b>3000</b>	3,05
<b>30000</b>	-30,10

Os autores consideram todos os materiais como lineares elásticos e calcularam separadamente as diferentes ações sobre a viga. Numa primeira análise aplicaram a carga distribuída e calcularam sua ação ao longo do tempo considerando a fluência. Posteriormente calcularam a ação da retração no mesmo período de tempo, e finalmente aplicaram a protensão interna. Com o intuito de fazer as comparações correspondentes, na presente análise se desenvolveu o mesmo procedimento. Na Figura 119 apresentam-se os resultados obtidos para os deslocamentos produto da fluência, a retração e a protensão separadamente. Enxerga-se uma clara correspondência entre os resultados da deformação por fluência. Enquanto para a

deformação por retração apresenta-se uma diferença de aproximadamente um milímetro. Já a deformação produto da protensão alcança um valor máximo similar, embora exista uma pequena diferença no formato da deformada.

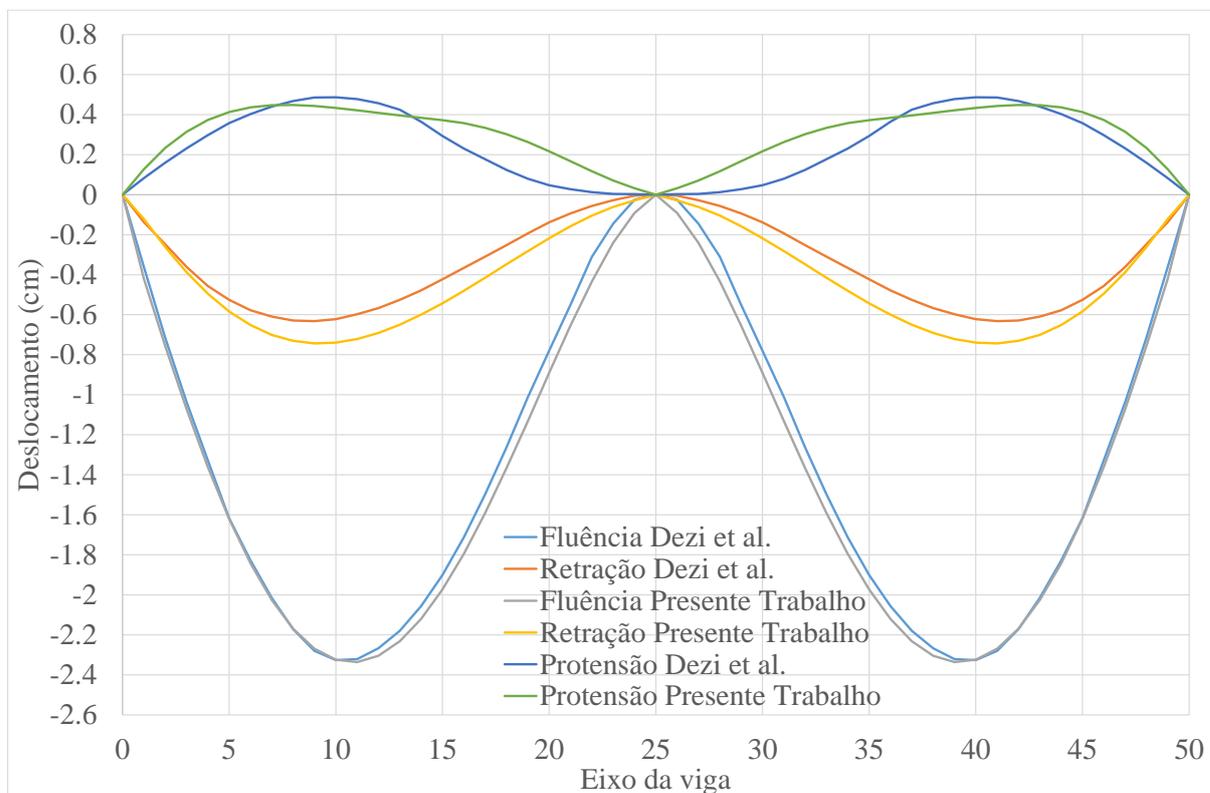


Figura 119. Deslocamento ao longo da viga  $t = 25550$  dias.

## 7. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Tomou-se como ponto de partida o código computacional previamente desenvolvido por Tamayo (2011) e Dias (2013). Este código modela numericamente estruturas do tipo viga mista, considerando o comportamento elasto-plástico e as não linearidades físicas dos materiais empregados. Implementaram-se seis modelos que permitem prever os fenômenos de fluência e retração no concreto, eles são: o ACI 209R-92, o Bazant-Baweja B3, o CEB MC90, o CEB MC99, o CEB MC10 e o GL2000. Adicionalmente disponibilizou-se uma ferramenta estatística que permite a correta comparação das previsões feitas pelos modelos e os resultados experimentais. Implementou-se a protensão interna, sendo que o cabo de protensão modelado de maneira discreta dentro do elemento de concreto, representado por elementos unidimensionais quadráticos de três nós. O Software GiD foi empregado nas etapas de pré e pós processamento. Para a visualização das fissuras empregam-se rotinas desenvolvidas no Matlab. Diversos testes foram realizados, com o intuito de validar o modelo numérico. Consideraram-se tanto vigas simplesmente apoiadas como contínuas (submetidas a momento negativo). Avaliou-se o comportamento das mesmas ao longo do tempo e sob a ação de protensão na laje de concreto, comparando os resultados com respostas experimentais ou analíticas. Obtiveram-se resultados satisfatórios em todas as validações numéricas.

### 7.1. PRINCIPAIS CONTRIBUIÇÕES

O presente trabalho representa uma contribuição importante no contexto da modelagem numérica de estruturas do tipo viga mista, sendo que leva em consideração os principais aspectos acadêmicos que são usualmente motivo de estudo dos pesquisadores na área das estruturas mistas: as propriedades do concreto que afetam os fenômenos de fluência e retração, a resposta ao longo do tempo do comportamento da estrutura, a interação entre o aço e o concreto, e o comportamento elasto-plástico dos materiais.

O presente trabalho da sequência aos trabalhos desenvolvidos por Tamayo (2011) e Dias (2013) no CEMACOM/PPGEC/UFRGS. Nesse contexto a contribuição do trabalho foi implementar, testar e comparar diversos modelos para tratar a questão da fluência e a retração. Além disso, implementou-se um elemento de cabo para tratar problemas com protensão

interna, no entanto com a limitação de tratar casos com aderência entre o cabo de protensão e a laje de concreto.

De maneira geral, o modelo computacional apresentado neste trabalho permitiu obter resultados confiáveis, para a análise de estruturas do tipo viga mista de aço-concreto. Nas análises de longa duração a fluência e a retração foram caracterizadas de modo satisfatório, do ponto de vista das necessidades de projeto.

A modelagem de estruturas do tipo vigas contínuas, submetidas a uma solicitação de momento negativo (nas quais o concreto suporta esforços de tração e o perfil de aço esforços de compressão), apresentou resultados satisfatórios. Sendo muito mais precisos que os obtidos mediante a consideração dos procedimentos tradicionais simplificados para fins de projeto deste tipo de estruturas. Nesse tipo de estruturas a fissuração da laje de concreto joga um papel fundamental, sendo que seu efeito representa variações consideráveis na predição dos deslocamentos.

As comparações efetuadas entre as predições dos deslocamentos e os resultados experimentais refletem o bom comportamento do modelo computacional. Quando as predições não coincidiram com o resultado experimental, expuseram-se estudos desenvolvidos por diferentes autores nos quais se reportava exatamente o mesmo comportamento predito.

Os modelos empregados para a predição da fluência e da retração apresentaram um bom comportamento. Para determinar plenamente se um modelo é melhor que o outro é necessário desenvolver um estudo mais amplo, para o caso particular dos exemplos apresentados nesse trabalho os dois modelos que melhor se comportaram foram o ACI 209R-92 e o CEB MC-99. De modo geral, utilizando os mesmos parâmetros de entrada, as predições obtidas para a deformação por retração costumam ter maiores valores para os modelos ACI 209R-92 e Bazant-Baweja B3, enquanto apresentam valores inferiores para o modelo CEB MC-90. Para o fenômeno da fluência, as predições com valores mais altos são as que resultam dos modelos CEB MC90 e GL2000, enquanto as predições mais baixas são as do modelo ACI209R-92.

A utilização dos modelos ACI 209R-92 e Bazant-Baweja B3 demanda o conhecimento de um número maior de parâmetros de entrada, em relação aos demais modelos, especificamente no que se refere à composição da mistura de concreto. Enquanto que os modelos CEB MC90, CEB MC99 e GL2000 não precisam de tanta informação para o

desenvolvimento de suas previsões. Cabe ao engenheiro projetista fazer uma avaliação em função do grau de precisão que pretende alcançar com seus cálculos e à informação que tem disponível para a realização dos mesmos.

O emprego das ferramentas estatísticas implementadas permitem fazer uma avaliação quantitativa adequada para determinar qual modelo representa melhor o comportamento da estrutura, sobre todo nos casos em que as previsões sejam similares e graficamente não seja fácil determinar a diferença entre os modelos empregados. Os indicadores estatísticos que melhor refletem as diferenças entre os modelos de fluência e retração implementados são os coeficientes de variação  $\omega_{BP}$  e  $\omega_G$ , propostos por Bazant-Panula e Gardner respectivamente. Sendo que os valores calculados com eles conseguem caracterizar adequadamente o comportamento da estrutura ao longo de todo o tempo de análise, e a sua vez, marcam uma diferença significativa entre os modelos avaliados.

A consideração das propriedades ambientais como variáveis no tempo de análise, demonstrou a grande influência que têm essas variações nas deformações calculadas ao longo do tempo. Embora as previsões não necessariamente coincidiram com os valores de deslocamento experimental, definitivamente adotaram um comportamento similar às reportadas no relatório experimental, nas quais um incremento na umidade relativa sempre coincide com uma diminuição da deformação e vice-versa.

A implementação da protensão interna na laje de concreto apresentou resultados satisfatórios. A abordagem empregada permite a consideração de cabos com diferentes geometrias, modelados de maneira discreta dentro da laje, identificando suas contribuições ao elemento de concreto ao qual pertence. A consideração da rigidez da armadura de pré-esforço contribuindo à rigidez global se traduz em ganhos de eficiência, estabilidade e rapidez do algoritmo de solução não linear, em particular, para níveis de carga próximos do colapso.

O programa desenvolvido tem capacidade de modelar adequadamente estruturas do tipo viga mista, com protendido aderente instalado na laje de concreto; considerando uma análise ao longo do tempo e levando em conta os efeitos da fluência e da retração que afetam o concreto. Consequentemente o programa constitui uma ferramenta importante que pode ser empregada na previsão do comportamento estrutural deste tipo de estruturas, e no desenvolvimento de pesquisas futuras.

## 7.2. SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Dentro da linha de pesquisa relacionada com o comportamento estrutural de estruturas do tipo viga mista, e dando continuidade ao presente trabalho; podem se desenvolver ainda numerosas contribuições em pesquisas futuras, sobre uma série de tópicos que requerem um estudo mais aprofundado. Na sequência propõem-se alguns desses tópicos.

No referente à protensão, ainda pode-se implementar no código computacional a protensão não aderente, assim como o cálculo das perdas instantâneas e diferidas ao longo do tempo, disponibilizando assim a diferenciação entre estruturas pré-tensionadas e pós-tensionadas.

Pode-se também implementar a consideração dos efeitos da temperatura no comportamento estrutural, através da simulação de uma carga térmica atuante na estrutura.

Os efeitos de cargas cíclicas, deve ser incluído, para a simulação de ações dinâmicas sobre a estrutura, tais como sismos o até o mesmo tráfego veicular no caso de uma ponte. Nessa sequência seria possível também desenvolver um estudo focado no efeito da fadiga nos elementos estruturais, considerando a aplicação dessas cargas ao longo do tempo.

Levando em consideração que os procedimentos de projeto disponibilizados nos diferentes códigos de projeto estrutural, nem sempre conseguem representar adequadamente o comportamento real deste tipo de estrutura; recomenda-se desenvolver um estudo comparativo, projetando uma série de estruturas mediante as diretrizes destes códigos e avaliando o comportamento das mesmas mediante a modelagem numérica utilizando o código computacional desenvolvido.

Sugere-se o desenvolvimento de estudos paramétricos, empregando a ferramenta computacional desenvolvida. Uma opção é estudar a influência e a sensibilidade dos modelos de fluência e retração, à variação de determinados parâmetros de entrada. Também é possível desenvolver um estudo alternando as propriedades da seção, a largura dos vãos, a disposição dos conectores e os tipos de protendido; para a otimização de projetos utilizando este tipo de estrutura, assim como para a geração de ferramentas como ábacos que facilitem o desenvolvimento de projetos de uma maneira apropriada.

Finalmente podem se desenvolver estudos considerando a modelagem de estruturas de grande porte, como pontes, a partir da ferramenta computacional desenvolvida.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ACI. **Guide for modeling and calculation shrinkage and creep in hardened concrete**. 209, A. C. 2008.
- ACKER, P. e ULM, F.-J. Creep and shrinkage of concrete: physical origins and practical measurements. **Nuclear Engineering and Design**, v. 203, p. 143-158, 2001.
- ALBRECHT, T. F. **Ábacos de pré-dimensionamento e avaliação do comportamento de vigas mistas de aço e concreto**. 2010. (Mestrado). Universidade Federal de Viçosa, Viçosa.
- ALVA, G. M. S. **Sobre o projeto de edifícios em estrutura mista aço-concreto**. 2000.
- AMADIO, C. e FRAGIACOMO, M. A finite element model for the study of creep and shrinkage effects in composite beams with deformable shear connections. **Costruzioni Metalliche**, v. 4, p. 213-228, 1993.
- ANDREWS, E. **Elementary Principles of Reinforced Concrete Construction**, Scott: Greenwood and Sons, England 1912.
- AS-3600. **Australian Standard, Concrete Structures**. Standards Australia International. 2001.
- BARTH, K. E. e WU, H. Efficient nonlinear finite element modeling of slab on steel stringer bridges. **Finite elements in analysis and design**, v. 42, p. 1304-1313, 2006.
- BASKAR, K.; SHANMUGAM, N. E. e THEVENDRAN, V. Finite-element analysis of steel-concrete composite plate girder. **Journal of Structural Engineering**, v. 128, p. 1158-1168, 2002.
- BASU, P. K.; SHARIF, A. M. e AHMED, N. U. Partially prestressed continuous composite beams. I. **Journal of Structural Engineering**, v. 113, p. 1909-1925, 1987.
- BATOZ, J. L. e TAHAR, M. B. Evaluation of a new quadrilateral thin plate bending element. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 18, p. 1655-1677, 1982.
- BAŽANT, Z.; OSMAN, E. e THONGUTHAI, W. Practical formulation of shrinkage and creep of concrete. **Matériaux et Construction**, v. 9, p. 395-406, 1976.
- BAŽANT, Z. e PANULA, L. Practical prediction of time-dependent deformations of concrete - Part VI. **Matériaux et Construction**, v. 11, p. 175-183, 1979.
- BAZANT, Z. P. Prediction of concrete creep effects using age-adjusted effective modulus method. *ACI Journal Proceedings*, 1972. ACI.
- BAZANT, Z. P. RILEM draft recommendation: TC-242-MDC multi-decade creep and shrinkage of concrete: material model and structural analysis Model B4 for creep, drying shrinkage and autogenous shrinkage of normal and high-strength concretes with multi-decade applicability. **MATERIALS AND STRUCTURES**, v. 48, p. 753-770, 2015.
- BAŽANT, Z. P. Prediction of concrete creep and shrinkage: past, present and future. **Nuclear Engineering and Design**, v. 203, p. 27-38, 2001.
- BAZANT, Z. P. e BAWEJA, S. Creep and shrinkage prediction model for analysis and design of concrete structures-model B3. **Materials and Structures**, v. 28, p. 357-365, 415-430, 488-495, 1995.
- BAZANT, Z. P. e BAWEJA, S. Creep and shrinkage prediction model for analysis and design of concrete structures: Model B3. **ACI Special Publications**, v. 194, p. 1-84, 2000.

- BAZANT, Z. P. e L'HERMITE, R. **Mathematical modeling of creep and shrinkage of concrete**. Wiley Chichester, 1988. ISBN 0471920576.
- BAZANT, Z. P. e LI, G. H. Comprehensive Database on Concrete Creep and Shrinkage. **Acı Materials Journal**, v. 105, p. 635-637, 2008.
- BAŽANT, Z. P. e PANULA, L. Practical Prediction of Time Dependent Deformations of Concrete, Parts I–IV. **Materials and Structures**, p. V. 11, pp. 307-316, 317-378, 425-434; V. 12, pp. 169-183, 1978.
- BAZANT, Z. P. e PRASANNAN, S. Solidification theory for concrete creep. I: Formulation. **Journal of engineering mechanics**, v. 115, p. 1691-1703, 1989.
- BRADFORD, M. e JOHNSON, R. Inelastic buckling of composite bridge girders near internal supports. **Proceedings of the Institution of Civil Engineers**, v. 83, p. 143-159, 1987.
- BRADFORD, M. A. e GILBERT, R. I. Time-dependent behaviour of simply-supported steel-concrete composite beams. **Magazine of Concrete Research**, v. 43, p. 265-274, 1991.
- BRADFORD, M. A. e GILBERT, R. I. Composite Beams with Partial Interaction under Sustained Loads. **Journal of Structural Engineering**, v. 118, p. 1871-1883, 1992.
- BRADFORD, M. A. e GILBERT, R. I. Time-dependent behavior of continuous composite beams at service loads. **Journal of Structural Engineering**, v. 121, p. 319-327, 1995.
- BRANSON, D. E. e CHRISTIASON, M. Time Dependent Concrete Properties Related To Design-Strength and Elastic Properties, Creep, and Shrinkage. **ACI Special Publication**, v. 27, 1971.
- CATAI, E. **Análise dos efeitos da retração e fluência em vigas mistas**. 2005. (Mestrado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- CEB. Evaluation of the Time Dependent Properties of Concrete. **Bulletin d'Information No. 199, Comité European du Béton/Federation Internationale de la Precontrainte, Lausanne, Switzerland**, p. 201, 1991.
- CEB. CEB-FIP Model Code 1990. **CEB Bulletin d'Information No. 213/214, Comité Euro-International du Béton, Lausanne, Switzerland**, p. 33-41, 1993.
- CEB. Structural Concrete—Textbook on Behaviour, Design and Performance. Updated Knowledge of the CEB/FIP Model Code 1990. **fib Bulletin 2, V. 2, Federation Internationale du Béton, Lausanne, Switzerland**, p. 37-52, 1999.
- CEB. **fib Model Code for Concrete Structures 2010**. Berlin, Germany: Wilhelm Ernst & Sohn, Verlag für Architektur 2013.
- COSENZA, E. e PECCE, M. Deflection and redistribution of moments due to the cracking in steel–concrete composite continuous beams. **ICSAS'91**, 1991.
- CHAPMAN, J. e BALAKRISHNAN, S. Experiments on composite beams. **The Structural Engineer**, v. 42, p. 369-383, 1964.
- CHATTERJEE, A. **Shrinkage and strength characterizations of concrete containing supplementary cementing materials**. ProQuest, 2004. ISBN 0549540423.
- CHAUDHARY, S.; PENDHARKAR, U. e NAGPAL, A. K. Control of creep and shrinkage effects in steel concrete composite bridges with precast decks. **Journal of Bridge Engineering**, v. 14, p. 336-345, 2009.
- CHAUDHARY, S.; PENDHARKARB, U. e NAGPAL, A. Service load behavior of continuous composite beams with precast decks considering creep, shrinkage and cracking. **ASIAN JOURNAL OF CIVIL ENGINEERING (BUILDING AND HOUSING)**, v. 8, p. 423-442, 2007.

- CHONG, K. T.; FOSTER, S. J. e GILBERT, R. I. Time-dependent modelling of RC structures using the cracked membrane model and solidification theory. **Computers & Structures**, v. 86, p. 1305-1317, 2008.
- DALL'ASTA, A. e DEZI, L. Nonlinear behavior of externally prestressed composite beams: Analytical model. **Journal of Structural Engineering-Asce**, v. 124, p. 588-597, 1998.
- DALL'ASTA, A. e ZONA, A. Three-field mixed formulation for the non-linear analysis of composite beams with deformable shear connection. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 40, p. 425-448, 2004.
- DAVID, D. L. **Análise teórica e experimental de conectores de cisalhamento e vigas mistas constituídas por perfis de aço formados a frio e laje de vigotas pré- moldadas**. 2007. 256 p. (Doutorado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- DAVIS, R. E. Flow of concrete under sustained compressive stress. *Journal Proceedings*, 1928. p.303-326.
- DEKKER, N. W.; KEMP, A. R. e TRINCHERO, P. Factors Influencing the Strength of Continuous Composite Beams in Negative Bending. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 34, p. 161-185, 1995.
- DEZI, L.; LEONI, G. e TARANTINO, A. M. Time-Dependent Analysis of Prestressed Composite Beams. **Journal of Structural Engineering-Asce**, v. 121, p. 621-633, 1995.
- DEZI, L.; LEONI, G. e TARANTINO, A. M. Algebraic methods for creep analysis of continuous composite beams. **Journal of Structural Engineering** 122(4): 423-430, 1996.
- DIAS, M. M. **Análise numérica de vigas mistas aço-concreto pelo método dos elementos finitos: efeitos de longa duração**. 2013. (Master). Escola de Engenharia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre (RS) - Brasil.
- DISCHINGER, F. Entwicklung und Fortschritte im Eisenbetonbau. **Neues Bauen in Eisenbeton**, v. 2, p. 9-39, 1938.
- DISCHINGER, F. Stahlbrücken im Verbund mit Stahlbetondruckplatten. **Der Bauingenieur**, v. 24, 1949.
- ELLER, P. R. **Pré-dimensionamento de vigas mistas de aço e concreto para pontes de pequeno porte**. 2011. (Mestrado). Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto.
- EN1994-1-1. **Eurocode 4: Design of composite steel and concrete structures – Part 1-1: General rules and rules for buildings**. EN 1994-1-1, 2004.
- FAELLA, C.; MARTINELLI, E. e NIGRO, E. Steel and concrete composite beams with flexible shear connection: “exact” analytical expression of the stiffness matrix and applications. **Computers & structures**, v. 80, p. 1001-1009, 2002.
- FAN, J.; NIE, J.; LI, Q. e WANG, H. Long-term behavior of composite beams under positive and negative bending. I: experimental study. **Journal of structural engineering**, v. 136, p. 849-857, 2010.
- FARIAS, M. M. e NAYLOR, D. J. Safety analysis using finite elements. **Computers and Geotechnics**, v. 22, p. 165-181, 1998.
- FURNAS, E. D. Laboratório de Concreto. **Concretos massa, estrutural, projetado e compactado com rolo: ensaios e propriedades**. Pacelli de Andrade, W., ed. São Paulo, Pini, 1997.

- GARA, F.; LEONI, G. e DEZI, L. A beam finite element including shear lag effect for the time-dependent analysis of steel–concrete composite decks. **Engineering Structures**, v. 31, p. 1888-1902, 2009.
- GARDNER, N. e LOCKMAN, M. Design provisions for drying shrinkage and creep of normal-strength concrete. **ACI Materials Journal**, v. 98, 2001.
- GARDNER, N. J. Comparison of prediction provisions for drying shrinkage and creep of normal-strength concretes. **Canadian Journal of Civil Engineering**, v. 31, p. 767-775, 2004.
- GILBERT, R. I. Time effects in concrete structures. **Developments in civil engineering**, v. 23, 1988.
- GILBERT, R. I. e BRADFORD, M. A. **Time-dependent behavior of continuous composite beams at service loads**. School of Civ. Engrg., Univ. of New South Wales. Sydney, Australia: October 1992, p.24. 1992. (307)
- GIUSSANI, F. e MOLA, F. Displacement Method for the Long-Term Analysis of Steel-Concrete Beams with Flexible Connection. **Journal of structural engineering**, v. 136, p. 265-274, 2010.
- GOEL, R.; KUMAR, R. e PAUL, D. Comparative study of various creep and shrinkage prediction models for concrete. **Journal of materials in civil engineering**, v. 19, p. 249-260, 2007.
- GUTIÉRREZ-KLINSKY, G. E. **Uma contribuição ao estudo das pontes em vigas mistas**. . 1999. (Mestrado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- HATT, W. Notes on the effect of time element in loading reinforced concrete beams. Proc. ASTM, 1907. p.421-433.
- HIRST, M. J. S. e YEO, M. F. The Analysis of Composite Beams Using Standard Finite-Element Programs. **Computers & Structures**, v. 11, p. 233-237, 1980.
- HOWELLS, R.; LARK, R. J. e BARR, B. I. G. A sensitivity study of parameters used in shrinkage and creep prediction models. **Magazine of Concrete Research**, v. 57, p. 589-602, 2005.
- IBRAHIMBEGOVIC, A.; TAYLOR, R. L. e WILSON, E. L. A robust quadrilateral membrane finite element with drilling degrees of freedom. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 30, p. 445-457, 1990.
- JIANG, M.; QIU, W. e ZHANG, Z. Time-Dependent Analysis of Steel-Concrete Composite Beams. Engineering Computation, 2009. ICEC'09. International Conference on, 2009. IEEE. p.8-11.
- JOST, D. T. **Análise de Peças Fletidas com Protensão Não Aderente pelo Método dos Elementos Finitos**. 2006. (Mestrado). Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.
- JURKIEWIEZ, B.; BUZON, S. e SIEFFERT, J. G. Incremental viscoelastic analysis of composite beams with partial interaction. **Computers & Structures**, v. 83, p. 1780-1791, 2005.
- KAHN, J. **Composite beam construction**: Google Patents 1926.
- KALINTZIS, C. Estudo da fluência do concreto de elevado desempenho. **EPUSP–Escola Politécnica de São Paulo-Dissertação de mestrado-São Paulo**, 2000.

- KATAOKA, L. T. **Análise da deformabilidade por fluência e retração e sua utilização na monitoração de pilares de concreto**. 2010. (Doctor). Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
- KENNEDY, J. B. e GRACE, N. F. Prestressed continuous composite bridges under dynamic load. **Journal of Structural Engineering**, v. 116, p. 1660-1678, 1990.
- KIM, S. **Creep and Shrinkage Effects on Steel-Concrete Composite Beams**. 2014. (Master degree). Virginia Tech, Blacksburg, Virginia.
- KOTINDA, T. I. **Modelagem numérica de vigas mistas aço-concreto simplesmente apoiadas: ênfase ao estudo da interface laje-viga**. 2006. (Master). USP
- KUPFER, H.; HILSDORF, H. K. e RUSCH, H. Behavior of concrete under biaxial stresses. *Journal Proceedings*, 1969. p.656-666.
- KWAK, H.-G. e SEO, Y.-J. Long-term behavior of composite girder bridges. **Computers & Structures**, v. 74, p. 583-599, 2000.
- LIANG, Q. Q.; UY, B.; BRADFORD, M. A. e RONAGH, H. R. Ultimate strength of continuous composite beams in combined bending and shear. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 60, p. 1109-1128, 2004.
- LIANG, Q. Q.; UY, B.; BRADFORD, M. A. e RONAGH, H. R. Strength analysis of steel-concrete composite beams in combined bending and shear. **Journal of Structural Engineering-Asce**, v. 131, p. 1593-1600, 2005.
- MACORINI, L.; FRAGIACOMO, M.; AMADIO, C. e IZZUDDIN, B. A. Long-term analysis of steel-concrete composite beams: FE modelling for effective width evaluation. **Engineering Structures**, v. 28, p. 1110-1121, 2006.
- MACHADO, M. A. D. S. **Aplicação do método dos elementos finitos para a análise elasto-viscoplástica de peças de concreto armado e protendido, submetidas a estados planos de tensão**. 2002. Universidade Federal do Rio Grande do Sul
- MACHADO, W. G. **Análise dinâmica de vigas mistas com interação parcial**. 2012. (Mestrado). Escola De Minas, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto.
- MAINES, A. **Análise não linear de vigas mistas**. 1989. 1v. 139p. Dissertação (Mestrado) (Mestrado). Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- MALITE, M. Sobre o cálculo de vigas mistas aço-concreto: ênfase em edifícios. **São Carlos, 144p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas), Escola de Engenharia de São Carlos, São Carlos**, 1990.
- MARI, A.; MIRAMBELL, E. e ESTRADA, I. Effects of construction process and slab prestressing on the serviceability behaviour of composite bridges. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 59, p. 135-163, 2003.
- MATLOCK, H. e TAYLOR, T. P. **A computer program to analyze beam-columns under movable loads**. Center for Highway Research, University of Texas, 1968.
- MEHTA, P. K. e MONTEIRO, P. J. M. **Concreto: microestrutura, propriedades e materiais**. Ibracon, 2008. ISBN 8598576123.
- MIYAMOTO, A.; TEI, K.; NAKAMURA, H. e BULL, J. W. Behavior of prestressed beam strengthened with external tendons. **Journal of Structural Engineering**, v. 126, p. 1033-1044, 2000.
- MÜLLER, H. e PRISTL, M. Creep and shrinkage of concrete at variable ambient conditions. *RILEM PROCEEDINGS*, 1993. CHAPMAN & HALL. p.15-15.

- MÜLLER, H. S. e HILSDORF, H. K. **Evaluation of the time dependent behavior of concrete: summary report on the work of General Task Group 9.** CEB, 1990. ISBN 2883940053.
- MUNIZ, C. F. D. G. **Modelos Numéricos para Análise de Elementos Estruturais Mistos.** 2005. Dissertação (Mestrado) (Mestrado). PROPEC, Departamento de Engenharia Civil, Escola de Minas., Universidade Federal de Ouro Preto
- NEVILLE, A. **Propriedades do concreto**, PINI. **São Paulo**, 1997.
- NEVILLE, A. M. **Creep of concrete: plain, reinforced, and prestressed.** 1971.
- NGUYEN, Q.-H.; HJIAJ, M. e UY, B. Time-dependent analysis of composite beams with continuous shear connection based on a space-exact stiffness matrix. **Engineering Structures**, v. 32, p. 2902-2911, 2010.
- OEHLERS, D. e BRADFORD, M. **Composite steel and concrete structural members: fundamental behaviour:** Oxford: Pergamon Press 1995.
- OLIVEIRA, L. **Estudo do comportamento e da resistência das vigas mistas aço-concreto constituídas por perfis formados a frio e lajes pré-fabricadas.** . 2001. 1v. 100p Dissertação (Mestrado) (Mestrado). Universidade Federal de Minas Gerais
- OWEN, D. R. J.; HINTON, E. e SUAREZ ARROYO, B. **Finite element software for plates and shells.** Pineridge Press, 1984.
- PÓVOAS, R. **Modelos Não-Lineares de Análise e Dimensionamento.** 1991. Dissertação de Doutorado, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto
- RANZI, G. e BRADFORD, M. A. Analysis of composite beams with partial interaction using the direct stiffness approach accounting for time effects. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 78, p. 564-586, 2009.
- RAZAQPUR, A. G. e NOFAL, M. A Finite-Element for Modeling the Nonlinear Behavior of Shear Connectors in Composite Structures. **Computers & Structures**, v. 32, p. 169-174, 1989.
- REX, C. O. e EASTERLING, W. S. Behavior and modeling of reinforced composite slab in tension. **Journal of Structural Engineering-Asce**, v. 126, p. 764-771, 2000.
- RIBÓ, R. et al. **GiD User Manual. The universal, adaptative and user friendly pre and postprocessing system for computer analysis in science and engineering.** Barcelona 2014.
- ROBLE, S. E. **Análisi de estructuras de hormigón considerando los efectos de las deformaciones diferidas.** 2014.
- SAADATMANESH, H.; ALBRECHT, P. e AYYUB, B. M. Experimental-Study of Prestressed Composite Beams. **Journal of Structural Engineering-Asce**, v. 115, p. 2348-2363, 1989.
- SAKATA, K. e AYANO, T. Effect of Ambient Temperature and Humidity on Creep and Shrinkage of Concrete. **ACI Special Publication**, v. 194, 2000.
- SAPOUNTZAKIS, E. J. e KATSIKADELIS, J. T. A new model for the analysis of composite steel-concrete slab and beam structures with deformable connection. **Computational Mechanics**, v. 31, p. 340-349, 2003.
- SIQUEIRA, H. C. **Análise do comportamento diferido de cascas de concreto armado.** 2014. (Doutor). Escola de Engenharia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil., Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.
- SOBRINHO, B. C. **Deflexões de Vigas Mistas Biapoiadas em Condições de Serviço: Análises de Curta e Longa Duração.** 2002. 107p. Dissertação (Mestrado) (Mestrado).

Programa de Pós-Graduação em Engenharia. , Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, SC.

SZILARD, R. Design of prestressed composite steel structures. **J. Struct. Div.,ASCE**, v. ASCE, 85(9), p. 97-124, 1959.

TACHIBANA, Y.; KONDO, K. e ITO, K. **Experimental Study for Composite beams prestressed with wire cables. Final report, Intern. Assoc. for Bridge and Struct. Engrg.** . Rio der Janeiro. 7th Congress: pp. 667-683 p. 1964.

TADROS, M. K. **Prestress losses in pretensioned high-strength concrete bridge girders.** Transportation Research Board, 2003. ISBN 030908766X.

TAMAYO, J. L. P. **Análise Numérica de Vigas Mistas pelo Método dos Elementos Finitos.** 2011. (Master). Escola de Engenharia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre (RS) - Brasil.

TARANTINO, A. M. e DEZI, L. Creep effects in composite beams with flexible shear connectors. **Journal of Structural Engineering**, v. 118, p. 2063-2080, 1992.

THEVENDRAN, V.; CHEN, S.; SHANMUGAM, N. E. e LIEW, J. Y. R. Nonlinear analysis of steel-concrete composite beams curved in plan. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 32, p. 125-139, 1999.

TOCHACEK, M. e MEHTA, C. L. Economical design of prestressed plate girder. **Journal of the Structural Division**, v. ASCE, No. ST6, 98, p. 1273-1289, 1972.

VERÍSSIMO, G. D. S. **Análise e comportamento de vigas de aço e vigas mistas com aberturas na alma.** 1996. Universidade Federal de Minas Gerais

VIEST, I. M. **Composite construction in steel and concrete for bridges and buildings.** McGraw-Hill, 1958.

VIRTUOSO, F. e VIEIRA, R. Time dependent behaviour of continuous composite beams with flexible connection. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 60, p. 451-463, 2004.

VRCELJ, Z.; BRADFORD, M.; UY, B. e WRIGHT, H. Buckling of the steel component of a composite member caused by shrinkage and creep of the concrete component. **Progress in Structural Engineering and Materials**, v. 4, p. 186-192, 2002.

WANG, W.-W.; DAI, J.-G.; LI, G. e HUANG, C.-K. Long-term behavior of prestressed old-new concrete composite beams. **Journal of Bridge Engineering**, v. 16, p. 275-285, 2010.

WOOLSON, I. H. Some remarkable tests indicating 'flow' of concrete under pressure. **Engineering News**, v. 54, p. 459-460, 1905.

WRIGHT, H. D.; VITEK, J. L. e RAKIB, S. N. Long-Term Creep and Shrinkage in Composite Beams with Partial Connection. **Proceedings of the Institution of Civil Engineers-Structures and Buildings**, v. 94, p. 187-195, 1992.

WU, Y.-C. e SLUTTER, R. Continuous Composite Beams Under Fatigue Loading. **Fritz Eng. Lab. Report**, 1971.

YAM, L. e CHAPMAN, J. The inelastic behaviour of simply supported composite beams of steel and concrete. **Proceedings of the institution of civil engineers**, v. 41, p. 651-683, 1968.

YAM, L. e CHAPMAN, J. Inelastic behaviour of continuous composite beams of steel and concrete. Institution of Civil Engineers, Proceedings, 1972.

ZHENG, Y.; ROBINSON, D.; TAYLOR, S. e CLELAND, D. Finite element investigation of the structural behaviour of deck slabs in composite bridges. **Engineering Structures**, v. 31, p. 1762-1776, 2009.

## APÊNDICE A

A continuação explicitam-se o valor dos termos que compõem a matriz de deformação linear geométrica da armadura de pré-esforço  $[B_p(\tau)]$ , utilizada no capítulo 4 para o cálculo da deformação axial, conforme a equação (4.43).

$$\begin{aligned}
B_{1i} &= \left( a^2 \frac{\partial \xi}{\partial x} + ab \frac{\partial \xi}{\partial y} + ac \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + \left( a^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} + ab \frac{\partial \eta}{\partial y} + ac \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\
B_{2i} &= \left( ab \frac{\partial \xi}{\partial x} + b^2 \frac{\partial \xi}{\partial y} + bc \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + \left( ab \frac{\partial \eta}{\partial x} + b^2 \frac{\partial \eta}{\partial y} + bc \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\
B_{3i} &= \left( ac \frac{\partial \xi}{\partial x} + bc \frac{\partial \xi}{\partial y} + c^2 \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + \left( ac \frac{\partial \eta}{\partial x} + bc \frac{\partial \eta}{\partial y} + c^2 \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\
B_{4i} &= \left( a^2 \frac{\partial \xi}{\partial x} + ab \frac{\partial \xi}{\partial y} + ac \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \zeta \frac{h}{2} V_{1,i}^x + \left( a^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} + ab \frac{\partial \eta}{\partial y} + ac \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \zeta \frac{h}{2} V_{1,i}^x + \\
&\quad \left( a^2 \frac{\partial \zeta}{\partial x} + ab \frac{\partial \zeta}{\partial y} + ac \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) N_i \frac{h}{2} V_{1,i}^x + \left( ab \frac{\partial \xi}{\partial x} + b^2 \frac{\partial \xi}{\partial y} + bc \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \zeta \frac{h}{2} V_{1,i}^y + \\
&\quad \left( ab \frac{\partial \eta}{\partial x} + b^2 \frac{\partial \eta}{\partial y} + bc \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \zeta \frac{h}{2} V_{1,i}^y + \left( ab \frac{\partial \zeta}{\partial x} + b^2 \frac{\partial \zeta}{\partial y} + bc \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) N_i \frac{h}{2} V_{1,i}^y + \\
&\quad \left( ac \frac{\partial \xi}{\partial x} + bc \frac{\partial \xi}{\partial y} + c^2 \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \zeta \frac{h}{2} V_{1,i}^z + \left( ac \frac{\partial \eta}{\partial x} + bc \frac{\partial \eta}{\partial y} + c^2 \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \zeta \frac{h}{2} V_{1,i}^z + \\
&\quad \left( ac \frac{\partial \zeta}{\partial x} + bc \frac{\partial \zeta}{\partial y} + c^2 \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) N_i \frac{h}{2} V_{1,i}^z \\
B_{5i} &= - \left\{ \left( a^2 \frac{\partial \xi}{\partial x} + ab \frac{\partial \xi}{\partial y} + ac \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \zeta \frac{h}{2} V_{2,i}^x + \left( a^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} + ab \frac{\partial \eta}{\partial y} + ac \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \zeta \frac{h}{2} V_{2,i}^x + \right. \\
&\quad \left( a^2 \frac{\partial \zeta}{\partial x} + ab \frac{\partial \zeta}{\partial y} + ac \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) N_i \frac{h}{2} V_{2,i}^x + \left( ab \frac{\partial \xi}{\partial x} + b^2 \frac{\partial \xi}{\partial y} + bc \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \zeta \frac{h}{2} V_{2,i}^y + \\
&\quad \left( ab \frac{\partial \eta}{\partial x} + b^2 \frac{\partial \eta}{\partial y} + bc \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \zeta \frac{h}{2} V_{2,i}^y + \left( ab \frac{\partial \zeta}{\partial x} + b^2 \frac{\partial \zeta}{\partial y} + bc \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) N_i \frac{h}{2} V_{2,i}^y + \\
&\quad \left( ac \frac{\partial \xi}{\partial x} + bc \frac{\partial \xi}{\partial y} + c^2 \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \zeta \frac{h}{2} V_{2,i}^z + \left( ac \frac{\partial \eta}{\partial x} + bc \frac{\partial \eta}{\partial y} + c^2 \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \zeta \frac{h}{2} V_{2,i}^z + \\
&\quad \left. \left( ac \frac{\partial \zeta}{\partial x} + bc \frac{\partial \zeta}{\partial y} + c^2 \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) N_i \frac{h}{2} V_{2,i}^z \right\}
\end{aligned}$$

Para o caso da análise não linear geométrica, emprega-se a matriz  $[G]$ , que a sua vez é subdividida nas submatrizes  $[G_1]$ ,  $[G_2]$  e  $[G_3]$ . A submatriz  $[G_1]$  é igual a matriz  $[B_{p,L}(\tau)]$ , conforme o capítulo 4. A continuação explicitam-se os termos correspondentes às submatrizes  $[G_2]$  e  $[G_3]$ , empregadas especificamente nas equações (4.80) e (4.83) respectivamente.

$$\begin{aligned}
G_{2,1i} &= \frac{1}{(a^2 + b^2)^{1/2}} \left[ \left( -ab \frac{\partial \xi}{\partial x} - b^2 \frac{\partial \xi}{\partial y} - bc \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + \left( -ab \frac{\partial \eta}{\partial x} - b^2 \frac{\partial \eta}{\partial y} - bc \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right] \\
G_{2,2i} &= \frac{1}{(a^2 + b^2)^{1/2}} \left[ \left( a^2 \frac{\partial \xi}{\partial x} + ab \frac{\partial \xi}{\partial y} + ac \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + \left( a^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} + ab \frac{\partial \eta}{\partial y} + ac \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right] \\
G_{2,3i} &= 0 \\
G_{2,4i} &= \frac{1}{(a^2 + b^2)^{1/2}} \left[ \left( -ab \frac{\partial \xi}{\partial x} - b^2 \frac{\partial \xi}{\partial y} - bc \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \zeta \frac{h}{2} V_{1,i}^x + \right. \\
&\quad \left( -ab \frac{\partial \eta}{\partial x} - b^2 \frac{\partial \eta}{\partial y} - bc \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \zeta \frac{h}{2} V_{1,i}^x + \\
&\quad \left( -ab \frac{\partial \zeta}{\partial x} - b^2 \frac{\partial \zeta}{\partial y} - bc \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) N_i \frac{h}{2} V_{1,i}^x + \\
&\quad \left( a^2 \frac{\partial \xi}{\partial x} + ab \frac{\partial \xi}{\partial y} + ac \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \zeta \frac{h}{2} V_{1,i}^y + \\
&\quad \left( a^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} + ab \frac{\partial \eta}{\partial y} + ac \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \zeta \frac{h}{2} V_{1,i}^y + \\
&\quad \left. \left( a^2 \frac{\partial \zeta}{\partial x} + ab \frac{\partial \zeta}{\partial y} + ac \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) N_i \frac{h}{2} V_{1,i}^y \right] \\
G_{2,5i} &= \frac{1}{(a^2 + b^2)^{1/2}} \left[ \left( -ab \frac{\partial \xi}{\partial x} - b^2 \frac{\partial \xi}{\partial y} - bc \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \zeta \frac{h}{2} V_{2,i}^x + \right. \\
&\quad \left( -ab \frac{\partial \eta}{\partial x} - b^2 \frac{\partial \eta}{\partial y} - bc \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \zeta \frac{h}{2} V_{2,i}^x + \\
&\quad \left( -ab \frac{\partial \zeta}{\partial x} - b^2 \frac{\partial \zeta}{\partial y} - bc \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) N_i \frac{h}{2} V_{2,i}^x + \\
&\quad \left( a^2 \frac{\partial \xi}{\partial x} + ab \frac{\partial \xi}{\partial y} + ac \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \zeta \frac{h}{2} V_{2,i}^y + \\
&\quad \left( a^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} + ab \frac{\partial \eta}{\partial y} + ac \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \zeta \frac{h}{2} V_{2,i}^y + \\
&\quad \left. \left( a^2 \frac{\partial \zeta}{\partial x} + ab \frac{\partial \zeta}{\partial y} + ac \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) N_i \frac{h}{2} V_{2,i}^y \right] \\
G_{3,1i} &= \frac{1}{[(ac)^2 + (bc)^2 + (a^2 + b^2)]^{1/2}} \left[ \left( -a^2 c \frac{\partial \xi}{\partial x} - abc \frac{\partial \xi}{\partial y} - ac^2 \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + \right. \\
&\quad \left. \left( -a^2 c \frac{\partial \eta}{\partial x} - abc \frac{\partial \eta}{\partial y} - ac^2 \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right] \\
G_{3,2i} &= \frac{1}{[(ac)^2 + (bc)^2 + (a^2 + b^2)]^{1/2}} \left[ \left( -abc \frac{\partial \xi}{\partial x} - b^2 c \frac{\partial \xi}{\partial y} - bc^2 \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + \right. \\
&\quad \left. \left( -abc \frac{\partial \eta}{\partial x} - b^2 c \frac{\partial \eta}{\partial y} - bc^2 \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{3,3i} &= \frac{1}{[(ac)^2 + (bc)^2 + (a^2 + b^2)]^{1/2}} \left[ \left( a(a^2 + b^2) \frac{\partial \xi}{\partial x} + b(a^2 + b^2) \frac{\partial \xi}{\partial y} + c(a^2 + b^2) \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + \right. \\
&\quad \left. \left( a(a^2 + b^2) \frac{\partial \eta}{\partial x} + b(a^2 + b^2) \frac{\partial \eta}{\partial y} + c(a^2 + b^2) \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right] \\
G_{3,4i} &= \frac{1}{[(ac)^2 + (bc)^2 + (a^2 + b^2)]^{1/2}} \left[ \left( -a^2 c \frac{\partial \xi}{\partial x} - abc \frac{\partial \xi}{\partial y} - ac \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \zeta \frac{h}{2} V_{1,i}^x + \right. \\
&\quad \left( -a^2 c \frac{\partial \eta}{\partial x} - abc \frac{\partial \eta}{\partial y} - ac^2 \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \zeta \frac{h}{2} V_{1,i}^x + \\
&\quad \left( -a^2 c \frac{\partial \zeta}{\partial x} - abc \frac{\partial \zeta}{\partial y} - ac^2 \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) N_i \frac{h}{2} V_{1,i}^x + \\
&\quad \left( -abc \frac{\partial \xi}{\partial x} - b^2 c \frac{\partial \xi}{\partial y} - bc^2 \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \zeta \frac{h}{2} V_{1,i}^y + \\
&\quad \left( -abc \frac{\partial \eta}{\partial x} - b^2 c \frac{\partial \eta}{\partial y} - bc^2 \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \zeta \frac{h}{2} V_{1,i}^y + \\
&\quad \left( -abc \frac{\partial \zeta}{\partial x} - b^2 c \frac{\partial \zeta}{\partial y} - bc^2 \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) N_i \frac{h}{2} V_{1,i}^y + \\
&\quad \left( a(a^2 + b^2) \frac{\partial \xi}{\partial x} + b(a^2 + b^2) \frac{\partial \xi}{\partial y} + c(a^2 + b^2) \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \zeta \frac{h}{2} V_{1,i}^z + \\
&\quad \left( a(a^2 + b^2) \frac{\partial \eta}{\partial x} + b(a^2 + b^2) \frac{\partial \eta}{\partial y} + c(a^2 + b^2) \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \zeta \frac{h}{2} V_{1,i}^z + \\
&\quad \left. \left( a(a^2 + b^2) \frac{\partial \zeta}{\partial x} + b(a^2 + b^2) \frac{\partial \zeta}{\partial y} + c(a^2 + b^2) \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) N_i \frac{h}{2} V_{1,i}^z \right] \\
G_{3,5i} &= \frac{1}{[(ac)^2 + (bc)^2 + (a^2 + b^2)]^{1/2}} \left[ \left( -a^2 c \frac{\partial \xi}{\partial x} - abc \frac{\partial \xi}{\partial y} - ac \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \zeta \frac{h}{2} V_{2,i}^x + \right. \\
&\quad \left( -a^2 c \frac{\partial \eta}{\partial x} - abc \frac{\partial \eta}{\partial y} - ac^2 \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \zeta \frac{h}{2} V_{2,i}^x + \\
&\quad \left( -a^2 c \frac{\partial \zeta}{\partial x} - abc \frac{\partial \zeta}{\partial y} - ac^2 \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) N_i \frac{h}{2} V_{2,i}^x + \\
&\quad \left( -abc \frac{\partial \xi}{\partial x} - b^2 c \frac{\partial \xi}{\partial y} - bc^2 \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \zeta \frac{h}{2} V_{2,i}^y + \\
&\quad \left( -abc \frac{\partial \eta}{\partial x} - b^2 c \frac{\partial \eta}{\partial y} - bc^2 \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \zeta \frac{h}{2} V_{2,i}^y + \\
&\quad \left( -abc \frac{\partial \zeta}{\partial x} - b^2 c \frac{\partial \zeta}{\partial y} - bc^2 \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) N_i \frac{h}{2} V_{2,i}^y + \\
&\quad \left( a(a^2 + b^2) \frac{\partial \xi}{\partial x} + b(a^2 + b^2) \frac{\partial \xi}{\partial y} + c(a^2 + b^2) \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \zeta \frac{h}{2} V_{2,i}^z + \\
&\quad \left( a(a^2 + b^2) \frac{\partial \eta}{\partial x} + b(a^2 + b^2) \frac{\partial \eta}{\partial y} + c(a^2 + b^2) \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \zeta \frac{h}{2} V_{2,i}^z + \\
&\quad \left. \left( a(a^2 + b^2) \frac{\partial \zeta}{\partial x} + b(a^2 + b^2) \frac{\partial \zeta}{\partial y} + c(a^2 + b^2) \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) N_i \frac{h}{2} V_{2,i}^z \right]
\end{aligned}$$