

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

## **Sincronização de Metapopulações em duas Escala Geográficas**

por

Vanderlei Manica

Dissertação submetida como requisito parcial  
para a obtenção do grau de  
Mestre em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Jacques Aveline Loureiro Da Silva  
Orientador

Porto Alegre, Junho de 2008.

## CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Manica, Vanderlei

Sincronização de Metapopulações em duas Escalas Geográficas / Vanderlei Manica.—Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2008.

78 p.: il.

Dissertação (mestrado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2008.

Orientador: Da Silva, Jacques Aveline Loureiro

Dissertação: Matemática Aplicada  
Metapopulação, caos, Número de Lyapunov

# Sincronização de Metapopulações em duas Escalas Geográficas

por

Vanderlei Manica

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

## Mestre em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Sistemas Não Lineares e Ecologia Matemática

Orientador: Prof. Dr. Jacques Aveline Loureiro Da Silva

Banca examinadora:

Prof. Dra. Graciela Canziani  
Universidad Nacional del Centro/Argentina

Prof. Dr. Luiz Alberto Díaz Rodrigues  
UFSM-RS

Prof. Dra. Maria Cristina Varriale  
PPGMAp/UFRGS-RS

Dissertação apresentada e aprovada em  
17 de junho de 2008.

Prof. Dra. Maria Cristina Varriale  
Coordenadora

## AGRADECIMENTOS

Aos meus pais Eleodoro Manica e Tereza Corbellini Manica pelo amor e incentivo.

Aos meus manos Rogério Manica, Denise Manica e Samuel Manica pelo amor, incentivo e amizade.

A todos os amigos e colegas, especialmente ao pessoal do futebol.

Ao professor Jacques A. L. da Silva pela orientação, apoio e incentivo no desenvolvimento deste trabalho.

Ao PPGMAp pela infra-estrutura oferecida e à CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Ensino Superior) pela apoio financeiro.

## Sumário

AGRADECIMENTOS . . . . .	iv
LISTA DE FIGURAS . . . . .	vii
LISTA DE SÍMBOLOS . . . . .	xii
RESUMO . . . . .	xiii
ABSTRACT . . . . .	xiv
1 INTRODUÇÃO . . . . .	1
2 ALGUNS CONCEITOS SOBRE SISTEMAS DINÂMICOS . . . . .	6
2.1 Teorema de Birkhoff . . . . .	6
2.2 Números de Lyapunov . . . . .	8
2.3 Função Exponencial Logística . . . . .	10
3 MODELO MATEMÁTICO E ESTUDO DA SINCRONIZAÇÃO DE METAPOPLAÇÕES . . . . .	13
3.1 Modelo Metapopulacional em uma Escala . . . . .	13
3.2 Estabilidade Transversal do Modelo Metapopulacional em uma escala . . . . .	15
3.3 Modelo Metapopulacional em duas Escalas . . . . .	20
3.4 Estabilidade Transversal do Modelo Metapopulacional em duas Escalas . . . . .	24
4 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS DO MODELO METAPOPLA- CIONAL . . . . .	34
4.1 Simulações Numéricas do Modelo Metapopulacional em uma Escala . . . . .	35
4.2 Simulações Numéricas do Modelo Metapopulacional em duas Escalas . . . . .	49

4.2.1	Sincronização dos Sítios nas duas Escalas . . . . .	49
4.2.2	Sincronização dos Sítios na Escala Maior . . . . .	60
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES . . . . .</b>	<b>67</b>
<b>APÊNDICE A</b>	<b>LINEARIZAÇÃO EM TORNO DO ESTADO SIN- CRONIZADO . . . . .</b>	<b>69</b>
<b>APÊNDICE B</b>	<b>CÁLCULO NUMÉRICO DOS NÚMEROS DE LYAPUNOV . . . . .</b>	<b>70</b>
<b>APÊNDICE C</b>	<b>MATRIZES CIRCULANTES . . . . .</b>	<b>72</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS . . . . .</b>	<b>75</b>

## Lista de Figuras

Figura 1.1	(a) Modelo metapopulacional com 4 sítios; (b) Modelo com 4 sítios na primeira escala e 3 sítios na segunda escala, totalizando 12 sítios. . . . .	2
Figura 2.1	(a) diagrama de bifurcação; (b) números de Lyapunov da função exponencial logística. . . . .	12
Figura 3.1	(a) Dos indivíduos que migram do sítio $k$ na etapa de tempo $t$ , uma fração de indivíduos $\gamma_{ik}$ passa a fazer parte do sítio $i$ na etapa de tempo $t + 1$ . . . . .	15
Figura 3.2	Distribuição dos indivíduos considerando sítios distribuídos em duas escalas. Dos indivíduos que saem do sítio vizinho $j$ no passo de tempo $t$ da segunda escala, uma proporção $c_{\ell j}$ chega para fazer parte do sítio $\ell$ no passo de tempo seguinte $t + 1$ . Os indivíduos que chegam em $\ell$ e saem do sítio $\{i, j\}$ com fração de migração $\mu_i$ se distribuem no sítio vizinho numa proporção $\mu_{ki}$ , $k = 1, \dots, N$ , onde $\mu_i = \mu_{1i} + \mu_{2i} + \dots + \mu_{Ni}$ , $i = 1, \dots, N$ , $j = 1, \dots, n$ . . . . .	22
Figura 3.3	Distribuição dos indivíduos considerando sítios distribuídos em duas escalas. Dos indivíduos que saem do sítio vizinho $\ell$ no passo de tempo $t$ da segunda escala, uma proporção $c_{j\ell}$ chega para fazer parte do sítio $j$ no passo de tempo seguinte $t + 1$ . A densidade de indivíduos que saem do sítio $\ell$ e chegam ao sítio $\{i, j\}$ é dada por $c_{j\ell}\mu_{i1}x^{1,\ell} + c_{j\ell}\mu_{i2}x^{2,\ell} + \dots + c_{j\ell}\mu_{iN}x^{N,\ell}$ , $i = 1, \dots, N$ , $j = 1, \dots, n$ . . . . .	23
Figura 4.1	Números Transversais de Lyapunov em função do parâmetro $r$ . (a) $m = 0, 2$ e (c) $m = 0, 5$ , acoplamento com os dois vizinhos mais próximos em forma de anel, (b) $m = 0, 2$ e (d) $m = 0, 5$ , os sítios globalmente acoplados com mesmo coeficiente de acoplamento. . . . .	36
Figura 4.2	Erro de Sincronização ((a), (c) e (e)) com o respectivo Número Transversal de Lyapunov ((b), (d) e (f)) para acoplamento feito entre os dois vizinhos mais próximos em forma de anel, ambos em função do parâmetro $m$ . Considera-se $r = 2, 88$ . Em (a) $N = 5$ ; (c) $N = 7$ ; (e) $N = 10$ . O aumento no número de sítios reduz os intervalos de sincronização e aumenta os valores do número transversal de Lyapunov. . . . .	38

- Figura 4.3 Erro de Sincronização ((a), (c) e (e)) com o respectivo Número Transversal de Lyapunov ((b), (d) e (f)) para sítios globalmente acoplados com o mesmo coeficiente, ambos em função de  $m$ . Considera-se  $r = 2,88$ . Em (a)  $N = 5$ , (c)  $N = 10$ , (e)  $N = 30$ . O fato de todos os sítios estarem acoplados com o mesmo coeficiente causa pouca variação na região de sincronização e nos valores do número transversal de Lyapunov, com o aumento do número de sítios. . . . . 39
- Figura 4.4 Erro de Sincronização ((a), (c) e (e)) com o respectivo Número Transversal de Lyapunov ((b), (d) e (f)), ambos em função do parâmetro  $m$ . Considera-se  $r = 2,88$  e um modelo metapopulacional com 30 sítios. Em (a)  $\alpha = 0,3$ ; (c)  $\alpha = 0,5$ ; (e)  $\alpha = 0,7$ . A diminuição na interação entre os sítios diminui a região de sincronização. . . . . 40
- Figura 4.5 Gráficos sítios-tempo com a respectiva densidade de um fixado sítio após o descarte de transientes. Os sítios estão acoplados em forma de anel com os dois vizinhos mais próximos,  $r = 2,88$  e  $m = 0,8$ . (a)  $N = 5$ , (b)  $N = 7$ , (c)  $N = 10$ . . . . . 41
- Figura 4.6 Gráficos sítios-tempo com a respectiva densidade de um fixado sítio após o descarte de transientes. (a)  $m = 0,2$ ,  $r = 2,5$ ; (b)  $m = 0,2$ ,  $r = 2,55$ . Nos dois casos o acoplamento é feito em forma de anel com os dois vizinhos mais próximos. O sistema sincroniza em ambos os casos e cada sítio apresenta o mesmo comportamento como se estivesse isolado. . . . . 42
- Figura 4.7 Gráficos sítios-tempo com a respectiva densidade de um fixado sítio após o descarte de transientes. (a)  $m = 0,2$ , acoplamento em forma de anel com os dois vizinhos mais próximos e  $r = 2,88$ . O sistema não sincroniza,  $L\Lambda_1 = 1,4317$ ; (b)  $m = 0,5$ , acoplamento global com mesmo coeficiente e  $r = 2,88$ , o sistema sincroniza e a densidade de cada sítio apresenta um comportamento caótico,  $L\Lambda_1 = 0,6942$ . . . . . 43
- Figura 4.8 Gráficos sítios-tempo com a respectiva densidade de um fixado sítio após o descarte de transientes. Sítios acoplados em forma de anel com os dois vizinhos mais próximos e  $m = 0,5$ . O número transversal de Lyapunov é superior a 1 e o modelo metapopulacional não sincroniza em nenhum caso. Em todos os casos  $\Lambda_1 = 0,9891$ . (a)  $r = 2,84$ ,  $L\Lambda_1 = 1,36664$  (b)  $r = 3,1$ ,  $L\Lambda_1 = 1,32065$  (c)  $r = 3,85$ ,  $L\Lambda_1 = 1,74052$ . . . . . 44

- Figura 4.9 Gráficos sítios-tempo com a respectiva densidade de um fixado sítio após o descarte de transientes. Sítios globalmente acoplados com mesmo coeficiente de acoplamento. Em todos os casos  $\Lambda_1 = 0,4828$ , o número transversal de Lyapunov é inferior a 1 e ocorre sincronização. (a)  $r = 2,84$ ,  $L\Lambda_1 = 0,6671$  (b)  $r = 3,1$ ,  $L\Lambda_1 = 0,64463$  (c)  $r = 3,85$ ,  $L\Lambda_1 = 0,8496$ . . . . . 45
- Figura 4.10 Sítios acoplados variando-se o coeficiente de interação entre os sítios,  $r = 2,88$  e  $m = 0,5$ . (a)  $\alpha = 0,3$ ,  $L\Lambda_1 = 0,9007$  (b)  $\alpha = 0,5$ ,  $L\Lambda_1 = 1,0526$  (c)  $\alpha = 0,7$ ,  $L\Lambda_1 = 1,1974$ . Em (a) o sistema sincroniza, enquanto que em (b) e (c), diminuindo a interação entre os sítios, o sistema não sincroniza. . . . . 46
- Figura 4.11 Sítios acoplados com mesmo coeficiente e  $r = 3,85$ . (a)  $m = 0,2$ ,  $L\Lambda_1 = 1,3956$ ; (b)  $m = 0,5$ ,  $L\Lambda_1 = 0,8496$ . O sistema não sincroniza em (a), mas o aumento na fração de migração sincronizar o sistema (b). . . . . 47
- Figura 4.12 Frequência das órbitas no estado sincronizado. (a)  $r = 2,55$  (b)  $r = 2,75$  (c)  $r = 2,88$  (d)  $r = 3,09$  (e) e (f)  $r = 3,85$ . . . . . 48
- Figura 4.13 Número transversal de Lyapunov em função do parâmetro  $r$ . Considera-se o modelo metapopulacional de metapopulações com 6 sítios na primeira escala (bairros) e 5 sítios na segunda escala. (a)  $\mu = 0,2$  e (c)  $\mu = 0,5$ , acoplamento entre os sítios da segunda escala feito em forma de anel com os dois vizinhos mais próximos. (b)  $\mu = 0,2$  e (d)  $\mu = 0,5$ , sítios globalmente acoplados com mesmo coeficiente. Sincronização ocorre para os valores do número transversal de Lyapunov inferiores a 1. . . . . 51
- Figura 4.14 Erro de Sincronização ((a), (c) e (e)) com o respectivo número transversal de Lyapunov ((b), (d) e (f)), ambos em função do parâmetro  $\mu$ . Considera-se  $r = 3,09$ ,  $n = 9$ ,  $N = 5$  e varia-se o coeficiente de acoplamento da matriz  $C$ . (a)  $\alpha = 0$ , (c)  $\alpha = 0,3$ , (e)  $\alpha = 0,5$ . A redução na interação entre os sítios diminui a região de sincronização. . . . . 53
- Figura 4.15 Erro de Sincronização ((a), (c) e (e)) com o respectivo número transversal de Lyapunov ((b), (d) e (f)), ambos em função do parâmetro  $\mu$ . Considera-se  $r = 3,09$ ,  $n=9$  e  $N=5$  e varia-se o coeficiente de acoplamento da matriz  $C$ . (a)  $\alpha = 0,7$ , (c)  $\alpha = 0,8$ , (e)  $\alpha = 1$ . A redução na interação entre os sítios diminui a região de sincronização e para  $\alpha = 1$  não ocorre sincronização. . . . . 54

- Figura 4.16 Gráficos sítios-tempo e densidade-tempo e são feitas as mesmas consi-derações para o modelo do caso da figura 4.13(a), mas com  $\mu$  constante. (a)  $\mu = 0,2$ ,  $L\Lambda_2 = 1,0462$  e o sistema não sincroniza (b)  $\mu = 0,5$ ,  $L\Lambda_2 = 0,6539$  e o sistema sincroniza, após o descarte de 20 mil transientes. . . . . 55
- Figura 4.17 Gráficos sítios-tempo e densidade-tempo após o descarte de 20 mil transientes. Em (a) e (b) são feitas as mesmas considerações que nos casos das figuras 4.15(b) e 4.15(c) respectivamente, mas com fração de migração constatanne  $\mu = 0,85$ . Em (a) os sítios sincronizam e  $L\Lambda_2 = 0,8497$ . Em (b) não ocorre sincronização e  $L\Lambda_2 = 1,0477$ . . . . . 56
- Figura 4.18 Gráficos sítios-tempo e densidade-tempo. Matriz acoplamento  $C$  com coeficiente de acoplamento  $\alpha = 0,5$ . (a)  $\mu = 0,5$ ,  $r = 2,5$  e  $L\Lambda_2 = 0,5628$ ; (b)  $\mu = 0,5$ ,  $r = 3,85$  e  $L\Lambda_2 = 0,8964$ . . . . . 57
- Figura 4.19 Erro de Sincronização e Número Transversal de Lyapunov, ambos em função do parâmetro  $\mu$ . Matriz acoplamento  $C$  com  $\alpha = 0,5$ ,  $r = 3,09$  e  $n = 5$ . (a)  $N = 5$ , (b)  $N = 10$  e (c)  $N = 20$ . . . . . 58
- Figura 4.20 Erro de Sincronização e Número Transversal de Lyapunov, ambos em função do parâmetro  $\mu$ . Matriz acoplamento com  $\alpha = 0,5$ ,  $r = 3,09$  e  $N = 5$  (a)  $n = 5$ , (b)  $n = 10$  e (c)  $n = 20$ . . . . . 59
- Figura 4.21 Erro de sincronização e número transversal de Lyapunov, ambos em função do parâmetro  $\mu$ . Em todos os casos  $r = 3,09$ ,  $m = 0,25$  e os sítios acoplados com coeficiente de acoplamento  $\alpha = 0,5$ . (a)  $n = 3$ ,  $N = 5$  e (c)  $n = 5$ ,  $N = 5$ , com os respectivos números transversais de Lyapunov (b) e (d). . . . . 61
- Figura 4.22 Gráficos sítios-tempo para fixados valores de  $\mu$ . Em todos os casos  $m = 0,25$ ,  $n = 3$ ,  $N = 5$ ,  $r = 3,09$  e sítios acoplados com coeficiente de acoplamento  $\alpha = 0,5$ . (a)  $\mu = 0,1$ ,  $K = 1,1031$ ; (b)  $\mu = 0,5$ ,  $K = 0,9865$ ; (c)  $\mu = 0,75$ ,  $K = 0,9181$ ; (d)  $\mu = 0,9$ ,  $K = 0,8791$ . . . . . 62
- Figura 4.23 Gráficos sítios-tempo para valores fixados de  $\mu$ . Em todos os casos  $n = 5$ ,  $N = 5$ ,  $r = 3,09$  e sítios da segunda escala acoplados com coeficiente de acoplamento  $\alpha = 0,5$ . (a)  $\mu = 0,1$ ,  $K = 1,11$ ; (b)  $\mu = 0,6$ ,  $K = 0,9896$ ; (c)  $\mu = 0,75$ ,  $K = 0,9548$ ; (d)  $\mu = 0,9$ ,  $K = 0,9198$ . . . . . 63

- Figura 4.24 Erro de sincronização ((a) e (c)) e respectivo número transversal de Lyapunov ((b) e (d)), ambos em função do parâmetro  $\mu$ . Em todos os casos  $r = 3,09$  e os sítios da segunda escala globalmente acoplados com mesmo coeficiente. (a)  $n = 3, N = 5$  e (c)  $N = 5, n = 5$  com os respectivos números transversais de Lyapunov (b) e (d). . . . . 64
- Figura 4.25 Gráficos sítios-tempo para valores fixados de  $\mu$ . Em todos os casos  $n = 3, N = 5, r = 3,09$  e sítios globalmente acoplados com mesmo coeficiente de acoplamento. (a)  $\mu = 0,018, K = 0,9912$ ; (b)  $\mu = 0,1, K = 0,7563$ ; (c)  $\mu = 0,2, K = 0,417$ ; (d)  $\mu = 0,28, K = 1,0244$ . . . . . 65
- Figura 4.26 Gráficos sítios-tempo para valores fixados de  $\mu$ . Em todos os casos  $n = 5, N = 5, r = 3,09$  e sítios globalmente acoplados com o mesmo coeficiente. (a)  $\mu = 0,016, K = 0,9763$ ; (b)  $\mu = 0,1, K = 0,7649$ ; (c)  $\mu = 0,2, K = 0,4171$ ; (d)  $\mu = 0,28, K = 1,0243$ . 66

## LISTA DE SÍMBOLOS

$x_t^k$	população $x$ no sítio $k$ no tempo $t$
$m$	fração de migração dos indivíduos da primeira escala
$\gamma_{ik}$	percentual de emigrantes do sítio $k$ para o sítio $i$ da primeira escala
$\Gamma$	matriz acoplamento dos sítios da primeira escala
$N$	número de sítios da primeira escala
$L$	número de Lyapunov
$X_t^j$	vetor populacional do sítio $j$ da segunda escala no tempo $t$
$\mu_i$	fração de migração dos indivíduos da segunda escala
$c_{j\ell}$	percentual de emigrantes do sítio $\ell$ para o sítio $j$ da segunda escala
$C$	matriz acoplamento dos sítios da segunda escala
$n$	número de sítios da segunda escala
$\alpha$	coeficiente de interação entre os sítios
$L\Lambda_1$	número transversal de Lyapunov para uma metapopulação em uma escala
$L\Lambda_2$	número transversal de Lyapunov para uma metapopulação em duas escalas
$K$	número transversal de Lyapunov para uma metapopulação em duas escalas

## RESUMO

O estudo da sincronização de sistemas dinâmicos populacionais é importante para prever e avaliar o risco de extinção global. Neste trabalho, investigamos fenômenos de sincronização caótica em modelos metapopulacionais.

Primeiramente, consideramos um modelo metapopulacional composto por um número arbitrário de sítios e obtemos um critério para a sincronização que é determinado por dois parâmetros: o número de Lyapunov que depende da dinâmica local de um sítio e um parâmetro que é determinado pela forma como os sítios interagem. A partir disso, consideramos um modelo metapopulacional composto pela distribuição de sítios em duas escalas. A primeira escala é composta por uma metapopulação, enquanto a segunda escala é composta por um número arbitrário de metapopulações. Para esse modelo, analisamos dois tipos de sincronização: o primeiro é quando ambas escalas estão sincronizadas e o segundo considera sincronização na segunda escala. Para o caso de ambas escalas estarem sincronizadas, obtemos um critério para sincronização dependendo de 2 parâmetros: o número de Lyapunov e pela forma como os sítios da primeira escala e da segunda escala interagem. No caso da segunda escala estar sincronizada com os respectivos sítios da primeira escala não necessariamente sincronizados, obtém-se um critério e seus valores são calculados numericamente.

## ABSTRACT

The study of populations' synchronization dynamics is important to predict and evaluate the risk of global extinction. In this study, we investigate the phenomenon of chaotic synchronization in metapopulation models.

At first, we propose a time-varying metapopulation model composed by patches and we obtain a condition for the synchronization that are determined by two parameters: the Lyapunov number of the separate patch and by a parameter determined from the interaction patches. Afterwards, we propose a time-varying metapopulation of metapopulations model composed by patches that are distributed in two scales, the first one is composed by a metapopulation and the second one is composed by an arbitrary number of metapopulations. We investigate two kinds of synchronization: both scales synchronized and when the second scale is synchronized. In the first case we obtain a condition for the synchronization that are determined by two parameters: the Lyapunov number and by a parameter determined from the first scale and the second scale interaction patches. The second case the condition values for the synchronization are calculated by numerical simulations.

# 1 INTRODUÇÃO

O estudo da sincronização de sistemas metapopulacionais é extremamente importante para prever e avaliar o risco da extinção global de espécies (Earn et al. [13]). Condições climáticas em diferentes regiões podem ser suficientes para dar algum tipo de sincronia, uma convincente demonstração desse fato foi observado quando duas ilhas com população de ovelhas isoladas apresentaram sincronia em suas flutuações. Outro exemplo interessante é o comportamento de lince canadenses, o fato notável é que populações geograficamente distantes possuem ciclos populacionais sincronizados. Outra maneira pela qual sincronia pode ser alcançada é através da dinâmica de populações com acoplamento feito pela migração, sistemas físicos e biológicos têm mostrado que mesmo pouca interação entre populações com grandes oscilações pode apresentar sincronização coletiva. Sincronismo de sistemas periódicos é discutido em termos da relação entre as fases de oscilação, ou seja, uma constante de fase é mantida entre as oscilações, embora as amplitudes não estejam relacionadas, estas idéias foram trazidas por Blasius que encontrou uma descrição para ciclos da dinâmica de lince canadenses e a sincronia de ciclos entre diferentes regiões (May [24]).

O problema do comportamento de várias populações interagindo como sistemas com oscilações caóticas contribui para o entendimento de importantes sistemas biológicos. Estudos analíticos das condições para sincronização caótica consistindo de um número arbitrário de sítios acoplados são feitos em diversos trabalhos da literatura (Allen et al. [2], Earn et al. [13], Dmitriev et al. [11], Chen et al. [6], Giordani e Silva [16,17], entre outros).

Neste trabalho consideramos que uma metapopulação é formada por uma população de uma única espécie distribuída em  $N$  sítios. A partir disso, consideramos que os sítios estão distribuídos em duas escalas; a primeira escala é formada por

uma metapopulação, enquanto a segunda escala é formada por  $n$  metapopulações, formando uma metapopulação de metapopulações que é composta por  $nN$  sítios. Uma maneira de melhor entendermos o modelo metapopulacional é fazendo uma analogia à dinâmica migratória de indivíduos entre bairros e cidades, a primeira escala seria composta por bairros, enquanto a segunda escala seria composta pelas cidades. Na figura (1.1), temos em (a) um modelo metapopulacional com 4 sítios e em (b) um modelo metapopulacional com 4 sítios na primeira escala e 3 sítios na segunda escala, totalizando 12 sítios.

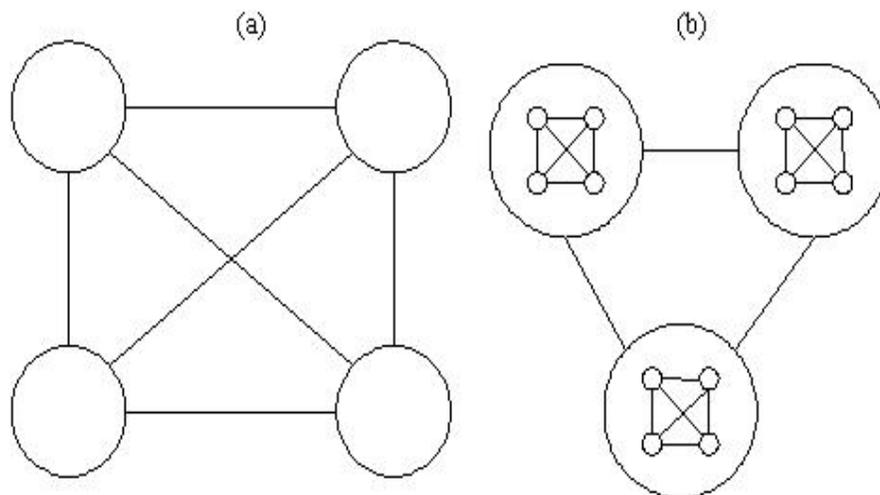


Figura 1.1: (a) Modelo metapopulacional com 4 sítios; (b) Modelo com 4 sítios na primeira escala e 3 sítios na segunda escala, totalizando 12 sítios.

A conexão entre os sítios é feita através de movimentos migratórios. A cada geração, a população passa por 3 processos distintos: o processo de dinâmica local (reprodução e sobrevivência), o processo de migração entre os indivíduos da primeira escala (bairros) e o processo de migração entre os indivíduos da segunda escala (cidades). Algumas considerações devem ser observadas:

- Deve ser estabelecida uma separação entre os eventos de dinâmica local e de migração, já que segundo Hassell et al. [19] resultados improváveis

do ponto de vista biológico podem ocorrer se houver falha na separação desses processos.

- Deve ser estabelecida a vizinhança de um dado sítio e para onde os indivíduos desse sítio migram.
- O processo de migração é de curta duração, portanto, é razoável supormos que é 100% bem sucedido (não há mortes de indivíduos durante o processo).

Inicialmente, vamos supor que não há conexão entre os sítios. Nesse caso, assumimos que uma função suave em  $[0, \infty)$  denotada por  $f$  descreve a dinâmica local

$$x_{t+1}^i = f(x_t^i), \quad t = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.1)$$

onde  $x_t^i$  representa o número de indivíduos no sítio  $i$  no passo de tempo  $t$ . Note que estamos considerando que todas as populações são idênticas, no sentido que a dinâmica de cada população é descrita pela mesma função  $f$ .

Após o processo de dinâmica local, supomos que ocorre um processo migratório. Primeiramente, consideramos a migração ocorrendo entre os sítios da primeira escala (bairros), ao terminar esse processo consideramos a migração entre os indivíduos da segunda escala (cidades). Para ambas as escalas, dado um sítio definiremos para quais sítios os indivíduos podem migrar e qual a procedência dos indivíduos que chegam a esse sítio. Nosso interesse é investigar a ocorrência de dinâmica caótica sincronizada, para isso ocorrer considera-se que o modelo local de um único sítio é instável e analisa-se a interação entre as populações.

Estamos considerando uma metapopulação de uma única espécie, sem subclasses de idade ou tamanho entre os indivíduos. Claramente podemos construir um

modelo para uma metapopulação de uma espécie com estrutura etária (De Castro et al. [9]). Outra possibilidade é considerar a dinâmica de dispersão de doenças em populações considerando modelos epidemiológicos de susceptíveis-infectados-susceptíveis (S-I-S) (Castillo-Chavez [4,5]), ou modelo epimedológico de transmissão da dengue (Cirino [7]).

A sincronia de dinâmica metapopulacional é caracterizada pela ocorrência de baixas densidades populacionais que aumentam a probabilidade de extinção global, enquanto assincronia caracteriza persistência global, mesmo ocorrendo alguma extinção local, dessa forma resultados de vários estudos podem levantar informações úteis para evitá-la. Allen et al. [2] consideraram um modelo metapopulacional acoplado e, através de simulações numéricas, mostraram que dinâmica populacional caótica reduz o risco de sincronia. Heino et al. [20] estenderam o modelo proposto por Allen et al. considerando dispersão de indivíduos dependendo da distância entre os sítios e mostraram que esse tipo de assincronia reduz a probabilidade de extinção, concluindo que caos é um caso especial, assim como perturbações locais e outros fatores que causam assincronia. Earn et al. [13] deu sustentação a idéia de que oscilações caóticas reduzem o grau de sincronismo entre sítios, reduzindo a probabilidade de extinção, eles obtiveram um critério analítico para a estabilidade de oscilações sincronizadas considerando uma metapopulação com um número arbitrário de sítios acoplados. Esses resultados são generalizados por Giordani e Silva [16,17] que obtiveram um critério para sincronização considerando um mecanismo de migração dependente da densidade populacional de cada sítio. Em Dmitriev [11] são investigados fenômenos de ‘on-off’ intermitência (sincronização que é interrompida em certos intervalos de tempo) e condições para sincronização caótica são obtidos.

No capítulo 2 abordamos o Teorema Ergódico que afirma que para qualquer subconjunto mensurável e para quase todo ponto, existe um tempo médio de permanência da órbita do ponto nesse conjunto. Além disso, abordamos o conceito de números de Lyapunov que é um indicador de caoticidade em sistemas dinâmicos e a

função exponencial logística que será a função utilizada para descrever a dinâmica local de cada sítio nas simulações numéricas.

No capítulo 3 descrevemos, primeiramente, um modelo metapopulacional com  $N$  sítios e obtemos um critério para sincronização que é determinado por dois parâmetros, um deles é o número de Lyapunov que depende da dinâmica local e o outro que é caracterizado pela interação entre os sítios. Esse resultado é o mesmo obtido por Earn et al. [13]. A partir disso, consideram-se os sítios distribuídos em duas escalas e são consideradas duas maneiras de sincronização: na primeira ocorre sincronização nas duas escalas; nesse caso, o critério para sincronização depende de dois parâmetros, um deles é o número de Lyapunov e o outro é caracterizado pela interação entre os sítios da primeira escala (bairros) e da segunda escala (cidades); na segunda ocorre sincronização na escala maior (cidades sincronizadas com os respectivos bairros não necessariamente sincronizados), para esse caso obtém-se um critério e seus valores são calculados numericamente.

No capítulo 4 são feitas diversas simulações numéricas para analisarmos o comportamento dos modelos e a verificação dos critérios analíticos para sincronização. Em todas as simulações utiliza-se a função exponencial logística para calcular a dinâmica local de cada sítio.

## 2 ALGUNS CONCEITOS SOBRE SISTEMAS DINÂMICOS

Durante séculos cientistas em todo o mundo analisaram um tipo de movimento que não apresentava um comportamento assintótico ou periódico do qual, em 1975, foi chamado de caos (Alligood [3]). Observou-se que comportamentos caóticos ocorriam em experimentos práticos e em modelos computacionais nas mais diversas áreas da ciência, o principal requerimento era que o sistema apresentasse uma não-linearidade. Esses modelos pertencem a classe da teoria de sistemas dinâmicos que descrevem comportamentos que são comuns para sistemas físicos e biológicos, isso tem beneficiado a colisão de idéias matemáticas e dessas ciências.

Neste capítulo apresentaremos o conceito de permanência de uma órbita<sup>1</sup> num conjunto e o Teorema de Birkhoff que calcula esse tempo médio de permanência para quase todo ponto. Apresentaremos também o número de Lyapunov que é um indicador de caoticidade e a função utilizada para descrever a dinâmica local das metapopulações.

### 2.1 Teorema de Birkhoff

Vamos começar explicando o que entendemos por tempo médio de permanência de uma órbita num conjunto. Considerando um espaço de probabilidade  $(\mathbb{X}, \mathcal{F}, \nu)$ <sup>2</sup>, uma transformação  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$  e um ponto  $x \in \mathbb{X}$ , queremos determinar com que frequência a órbita  $x$  por  $f$  visita um conjunto mensurável  $E$ , isto é, queremos calcular

$$\rho_t(x) = \frac{\#\{0 \leq i \leq t-1 : f^i(x) \in E\}}{t}, \quad (2.1)$$

---

<sup>1</sup>Considerando uma função  $f$ , a órbita de um ponto  $x$  é dada por  $\{x, f(x), f^2(x), \dots\}$ .

<sup>2</sup> $\mathbb{X}$  é um conjunto,  $\mathcal{F}$  é uma  $\sigma$ -álgebra definida em  $\mathbb{X}$  e  $\nu$  é uma medida definida em  $(\mathbb{X}, \mathcal{F})$ .

onde  $\#A$  denota o número de elementos de  $A$ . Observe que isto é o mesmo que

$$\rho_t(x) = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{t-1} \chi_E(f^i(x)), \quad (2.2)$$

onde  $\chi_E$  denota a função característica do conjunto  $E$ , isto é,  $\chi_E(x) = 1$  se  $x \in E$  e  $\chi_E(x) = 0$ , caso contrário.

Fazendo o número de iterados  $t$  tender a infinito e calculando, caso exista, o limite

$$\rho(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \rho_t(x). \quad (2.3)$$

Este limite, quando existe, é o tempo médio que a órbita de um ponto  $x$  permanece no conjunto  $E$ . Embora os limites superiores e inferiores da sequência  $(\rho_t(x))_{t \in \mathbb{N}}$  sempre existam, há pontos para os quais este limite não existe (Díaz [10]).

Uma consequência do Teorema de Birkhoff, que enunciaremos abaixo, é que o limite  $\rho(x)$  existe a menos de um conjunto de medida  $\nu$  nula e é uma função integrável verificando

$$\int_{\mathbb{X}} \rho(x) d\nu = \nu(E). \quad (2.4)$$

Outra consequência do teorema de Birkhoff é que se a medida é ergódica<sup>3</sup>, então o limite é exatamente a medida de  $E$ , isto é,

$$\rho(x) = \nu(E), \quad (2.5)$$

para  $\nu$ -quase todo ponto  $x \in \mathbb{X}$ .

Apresentamos a seguir o Teorema Ergódico de Birkhoff cuja demonstração e enunciado podem ser encontradas em Díaz e Jorge [10] e Oliveira [29].

---

<sup>3</sup>Dizemos que a medida  $\nu$  é ergódica para  $f$  se para todo subconjunto  $f$ -invariante  $E \in \mathcal{F}$ , (ou seja  $E = f^{-1}(E)$ ), se verifica que  $\nu(E) = 0$  ou  $\nu(E) = 1$ .

**Teorema 2.1.** (Teorema Ergódico de Birkhoff) Considerando um espaço de probabilidade  $(\mathbb{X}, \mathcal{F}, \nu)$  e uma transformação  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$  que preserva a medida<sup>4</sup>  $\nu$ . Então, para qualquer função  $\varphi$  integrável, existe uma função  $f_\varphi$  integrável e  $f$ -invariante que verifica as seguintes propriedades:

- para  $\nu$ -quase todo ponto  $x \in \mathbb{X}$  se verifica  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=0}^{t-1} \varphi(f^i(x)) = f_\varphi$ ;
- $\int_{\mathbb{X}} \varphi d\nu = \int_{\mathbb{X}} f_\varphi d\nu$ .

Além disso, se a medida  $\nu$  é ergódica (respeito a  $f$ ), então  $f_\varphi$  é constante  $\nu$ -q.t.p., em particular,

- $f_\varphi = \int_{\mathbb{X}} \varphi d\nu$  para  $\nu$ -quase todo ponto  $x \in \mathbb{X}$ .

## 2.2 Números de Lyapunov

Um padrão caótico não é caracterizado como um comportamento fixo ou periódico. Considerando uma função que representa um sistema dinâmico discreto, a estabilidade dos pontos fixos é fortemente influenciada pela derivada da função. Por exemplo, se  $x_0$  é um ponto fixo de  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $f'(x_0) = a > 1$ , então a órbita de cada ponto próximo de  $x_0$  irá se separar de  $x_0$  por uma constante multiplicativa  $a$  por iteração (Alligood [3]).

Os números de Lyapunov são generalizações da derivada, eles medem a velocidade média com que as órbitas se separam e são, portanto, um indicador de caoticidade de um sistema dinâmico. Se  $p$  é um ponto periódico de período  $t$  de uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ , o número de Lyapunov de  $f$  no ponto  $p$

---

<sup>4</sup>Dizemos que uma transformação mensurável  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$  preserva a medida ou que  $\nu$  é  $f$ -invariante se, para todo conjunto  $A \in \mathcal{F}$ , se verifica  $\nu(f^{-1}(A)) = \nu(A)$ .

é exatamente  $|(f^t)'(p)|^{1/t}$  (Díaz [10]). Para órbitas não periódicas, o número de Lyapunov  $L(x_0)$  da órbita  $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ , é definido como

$$L(x_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} (|f'(x_0)| \dots |f'(x_{t-1})|)^{1/t}, \quad (2.6)$$

se este limite existir. O expoente de Lyapunov  $h(x_0)$  é definido como

$$h(x_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} (\ln(|f'(x_0)|) + \dots + \ln(|f'(x_{t-1})|)), \quad (2.7)$$

se este limite existir. Note que  $h(x_0)$  existe se e somente se  $L(x_0)$  existe e  $\ln L(x_0) = h(x_0)$ .

Os números de Lyapunov fornecem uma medida da dependência sensitiva às condições iniciais, ou seja, diferentes condições iniciais geram diferentes números de Lyapunov. Exemplos podem ser encontrados em Alligood [3] e Díaz e Jorge [10].

Considerando que  $f$  preserva a medida ergódica  $\nu$  e utilizando o teorema de Birkhoff, temos que o expoente de Lyapunov independe da condição inicial a menos de um conjunto de medida  $\nu$  nula e é dado por

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} (\ln(|f'(x_0)|) + \dots + \ln(|f'(x_{t-1})|)) = \int_0^\infty \ln |f'(x)| d\nu(x). \quad (2.8)$$

Portanto, o número de Lyapunov também independe das condições iniciais a menos de um conjunto de medida  $\nu$  nula e é dado por

$$L = \exp \int_0^\infty \ln |f'(x)| d\nu(x). \quad (2.9)$$

Para uma função  $F$  definida em  $\mathbb{R}^m$ , o  $k$ -ésimo número de Lyapunov  $L$  é dado por

$$L_k = \lim_{t \rightarrow \infty} (r_k^t)^{1/t}, \quad (2.10)$$

se este limite existir. Aqui  $r_k^t$  é o comprimento do  $k$ -ésimo eixo ortogonal do elipsóide  $J_t U$  para uma órbita de ponto inicial  $v_0$ , para todo  $k = 1, 2, \dots, m$ , onde

$J_t = Df^t(v_0)$  é a matriz jacobiana e  $U$  é a esfera unitária com centro  $v_0$ . O valor  $r_k^t$  mede a contração ou expansão de órbitas próximas ao longo de  $m$  direções ortogonais. O expoente de Lyapunov de  $v_0$  é  $h_k = \ln L_k$ . Supondo  $\nu$  ergódica, considerando que  $F$  preserva a medida  $\nu$  e utilizando o Teorema Ergódico Multiplicativo de Osedelec (Eckman [14] e Ruelle [33]), temos que os números de Lyapunov independem da condição inicial  $v_0$  a menos de um conjunto de medida  $\nu$  nula.

Segundo Alligood [3], Ott [30], define-se como caótico o sistema que possuir pelo menos um número de Lyapunov maior que um, ou o seu correspondente expoente de Lyapunov maior que zero.

## 2.3 Função Exponencial Logística

A função  $f$  responsável pela dinâmica local do modelo metapopulacional é a função exponencial logística que é utilizada em diversos trabalhos da literatura (Allen et al. [2], Heino et al. [20]),

$$f(x) = x \exp(r(1 - x)), \quad (2.11)$$

onde  $r$  representa a taxa de crescimento da população. Em Earn [13] utiliza-se a função logística para descrever a dinâmica populacional que é dada por  $f(x) = rx(1 - x)$ . A função logística e a função exponencial logística apresentam comportamentos similares, ambas conseguem capturar fatos essenciais do meio ambiente (May [25]) e para diferentes valores do parâmetro  $r$  apresentam ciclos estáveis e caos.

Cálculos simples fornecem que o único ponto de equilíbrio positivo da função exponencial logística é  $\bar{x} = 1$ . Aplicando o critério de estabilidade que é dado por

$$\begin{aligned} |f'(\bar{x})| < 1 &\Rightarrow \bar{x} \text{ é estável,} \\ |f'(\bar{x})| > 1 &\Rightarrow \bar{x} \text{ é instável,} \end{aligned}$$

temos que  $\bar{x} = 1$  é estável para  $0 < r < 2$ .

Considerando que a dinâmica local de um único sítio é descrita pela função exponencial, isto é,

$$x_{t+1} = x_t \exp(r(1 - x_t)), \quad (2.12)$$

após a linearização na vizinhança do ponto de equilíbrio  $\bar{x}$ , pode ser expressa na forma

$$\delta_{t+1} \approx (1 - r)^t \delta_0. \quad (2.13)$$

O sistema se aproxima do ponto de equilíbrio monotonicamente se  $0 < r < 1$ . Enquanto que para  $1 < r < 2$  o sistema se aproxima do ponto de equilíbrio de forma oscilatória. Valores de  $r > 2$  fazem com que o ponto de equilíbrio deixe de ser estável, deixando de ser um atrator.

Conforme a taxa de crescimento aumenta, para  $r$  levemente superior a 2, surge um ciclo estável de período 2 com valores alterando entre  $\bar{x}_1$  e  $\bar{x}_2$ . Num determinado momento as oscilações deixam de ter período 2 e passam a ter período 4. Esse processo repete-se criando uma sequência de ciclos periódicos  $2^n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Isso ocorre até que o parâmetro  $r$  assume um valor cujas bifurcações  $2^n$  não ocorram mais. Esse estágio é então denominado caótico, que são comportamentos difíceis de serem descritos, como pode ser observado na figura 2.1(a).

Uma medida invariante  $\rho$  é chamada de uma medida natural para uma função  $f$  se

$$\rho = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{t-1} \delta_{x_i} \quad (2.14)$$

para todo  $x$  a menos de um conjunto de medida de Lebesgue nula, onde  $\delta$  é a função de *Dirac*. As medidas naturais são conhecidas pelo nome de medidas físicas e SRB medidas (Sinai-Ruelle-Bowen) (Thunberg [35]).

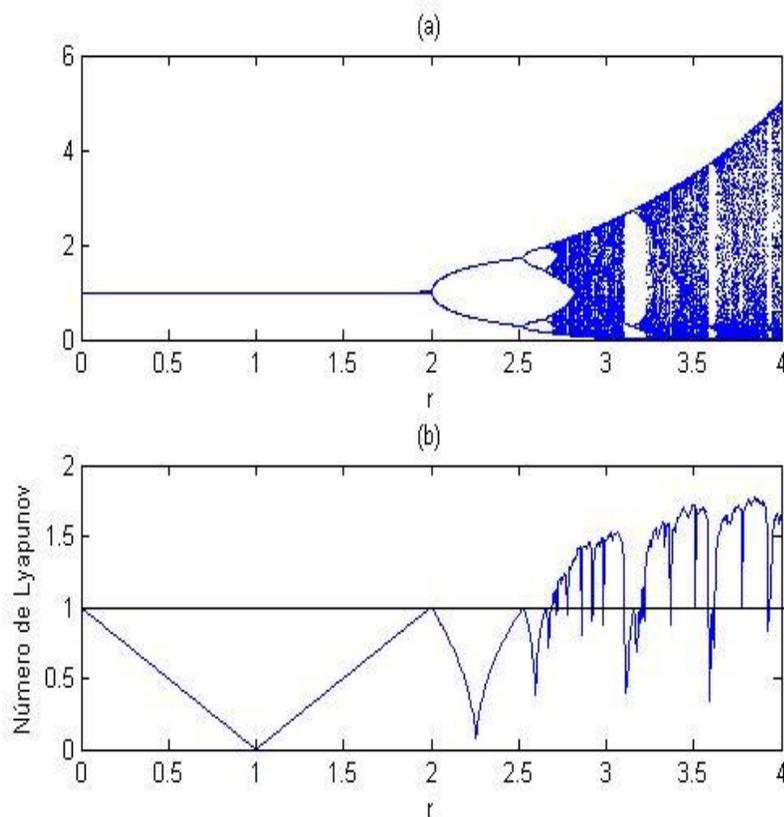


Figura 2.1: (a) diagrama de bifurcação; (b) números de Lyapunov da função exponencial logística.

Para a função exponencial logística, a medida natural é absolutamente contínua<sup>5</sup> com respeito à medida de Lebesgue e sua existência é garantida para quase todos valores de  $r$  na região caótica (Thunberg [35]).

Supondo a ergodicidade da medida natural, os números de Lyapunov para a função exponencial logística podem ser calculados utilizando o teorema de Birkhoff, a menos de um conjunto com medida de Lebesgue nula. Na figura 2.1(b), os números de Lyapunov possuem valores maiores que um na região caótica.

<sup>5</sup>Duas medidas  $\mu$  e  $\nu$  são absolutamente contínuas ( $\mu \ll \nu$ ) se  $\mu(E) = 0 \Rightarrow \nu(E) = 0$ , para qualquer conjunto  $E$  mensurável.

### 3 MODELO MATEMÁTICO E ESTUDO DA SINCRONIZAÇÃO DE METAPOPOPULAÇÕES

Neste capítulo, apresentamos o modelo matemático e os critérios para sincronização dos modelos metapopulacionais. Consideramos que uma metapopulação é formada por uma população de uma única espécie distribuída em  $N$  sítios. A partir disso, consideramos que os sítios estão distribuídos em duas escalas; a primeira escala é formada por uma metapopulação, enquanto a segunda escala é formada por  $n$  metapopulações formando uma metapopulação de metapopulações que é composta por  $nN$  sítios.

Começamos, na seção 3.1, fazendo a modelagem matemática de uma metapopulação e na seção 3.2, obtemos um critério para sincronização. Diversos trabalhos fazem estudos da dinâmica de uma metapopulação (Allen et al. [2], Heino et al. [20], Earn et al. [13], Dmitriev et al. [11], Giordani e Silva [17]). A partir disso, na seção 3.3, apresentamos a modelagem matemática dos sítios distribuídos em duas escalas e na seção 3.4, são obtidos critérios para sincronização.

Segundo Earn et al. [13], a sincronização está fortemente correlacionada com a extinção da metapopulação, dessa forma, resultados de vários estudos podem levantar informações úteis para evitar processos de extinção relacionados à sincronização.

#### 3.1 Modelo Metapopulacional em uma Escala

Nosso modelo metapopulacional consiste de  $N$  sítios numerados de  $1, 2, \dots, N$ . Em cada sítio os indivíduos estão sujeitos ao processo da dinâmica local constituído de reprodução e sobrevivência. Consideramos que uma função suave em  $[0, \infty)$  denotada por  $f$  descreve a dinâmica local. Portanto, na falta de migração entre os

sítios, a dinâmica local para cada sítio  $i$  é dada por

$$x_{t+1}^i = f(x_t^i), \quad t = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.1)$$

onde  $x_t^i$  representa o número de indivíduos no sítio  $i$  no passo de tempo  $t$ . Dependendo da função  $f$ , o modelo local dado em (3.1) pode ter um comportamento dinâmico incluindo ciclos estáveis e caos. Exemplos de funções que representam sistemas dinâmicos com esse tipo de comportamento podem ser encontrados em Alligood [3], May [24], Drazin [12]. Consideramos que todas as populações são idênticas, no sentido que a dinâmica de cada população é descrita pela mesma função  $f$ .

Após o processo de dinâmica local de cada sítio, uma fração de indivíduos  $m$  deixa o sítio  $i$  e migra para os sítios vizinhos, onde  $0 < m < 1$ . Assim, a densidade de indivíduos que partem do sítio  $i$  no passo de tempo  $t$  é  $mf(x_t^i)$ . Dos indivíduos que migram dos sítios vizinhos  $k$ , uma fração  $\gamma_{ik}$  chegará para fazer parte da população do sítio  $i$  no passo de tempo  $t + 1$ .

Supomos que o processo de migração é 100% bem sucedido, ou seja, não há perda de indivíduos durante a migração, assim temos que  $\sum_{k=1}^N \gamma_{ki} = 1$ , para todo  $i = 1, \dots, N$ . Consideramos também que os indivíduos não retornam para o mesmo sítio, ou seja,  $\gamma_{kk} = 0$  para todo  $k = 1, \dots, N$ . A matriz  $\Gamma = [\gamma_{ik}]_{i,k=1}^N$  é denominada matriz acoplamento entre os sítios da primeira escala, cada termo  $\gamma_{ik}$  representa a fração de indivíduos que sai do sítio  $k$  no passo de tempo  $t$  e passa a fazer parte do sítio  $i$  no passo de tempo  $t + 1$  (ver figura 3.1).

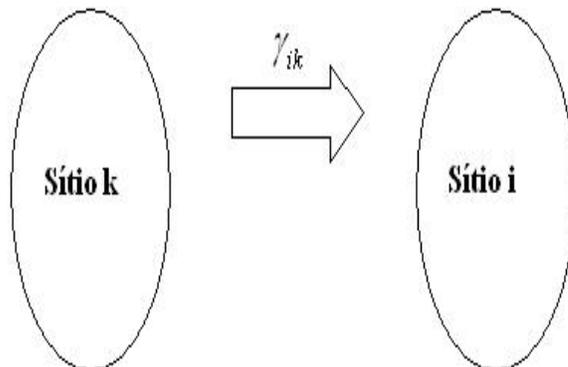


Figura 3.1: (a) Dos indivíduos que migram do sítio  $k$  na etapa de tempo  $t$ , uma fração de indivíduos  $\gamma_{ik}$  passa a fazer parte do sítio  $i$  na etapa de tempo  $t + 1$ .

Fazendo essas considerações, podemos escrever a dinâmica metapopulacional como o sistema de equações

$$x_{t+1}^i = (1 - m)f(x_t^i) + \sum_{k=1}^N \gamma_{ik} m f(x_t^k). \quad (3.2)$$

O primeiro termo do lado direito da equação (3.2) representa os indivíduos que não partiram do sítio  $i$  no passo de tempo  $t$ , enquanto o segundo termo é a soma de todas as contribuições dos sítios vizinhos, para todo  $i = 1, \dots, N$ .

### 3.2 Estabilidade Transversal do Modelo Metapopulacional em uma escala

O critério de sincronização que apresentaremos a seguir vale para uma metapopulação com um número arbitrário de sítios conectados por um mecanismo de migração e é o mesmo obtido por Earn et al. [13].

Considerando que a densidade de todos os sítios é a mesma, isto é,  $x_t^i = x_t$ ,  $i = 1, \dots, N$ , e substituindo em (3.2), temos que

$$x_{t+1} = f(x_t) - m f(x_t) + \sum_{k=1}^N \gamma_{ik} m f(x_t). \quad (3.3)$$

Supondo que  $\sum_{k=1}^N \gamma_{ik} = 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , temos que

$$x_{t+1} = f(x_t). \quad (3.4)$$

Portanto, a dinâmica de cada sítio no estado sincronizado satisfaz  $x_{t+1} = f(x_t)$ , que é exatamente a dinâmica de um sítio isolado, ou seja, se houver sincronização todas as populações oscilarão de acordo com a dinâmica local.

Os coeficientes da matriz  $\Gamma$  são todos positivos e a soma das linhas, assim como o das colunas, resulta no valor 1. Consideramos que o sistema não possui conglomerados isolados, isto é, não existem subconjuntos de sítios isolados agindo como se eles formassem uma metapopulação própria, nesse caso, dizemos que o sistema é irreduzível e, portanto,  $\Gamma$  é uma matriz irreduzível. Caso o sistema possuísse conglomerados isolados de sítios, poderíamos analisar cada conglomerado separadamente.

Seja  $\mathbf{X}_t = (x_t, x_t, \dots, x_t) \in \mathbb{R}^N$  a órbita sincronizada do sistema (3.2), estamos interessados em estudar sua estabilidade assintótica, isto é, quando órbitas que iniciam próximas ao estado sincronizado serão atraídas para esse estado. Para alcançar isso, linearizamos o sistema dado pela equação (3.2) ao redor da órbita sincronizada. A matriz jacobiana,  $DF(\mathbf{X}_t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ , aplicada no estado sincronizado pode ser calculada e suas entradas são dadas por

$$\alpha_{ki} = \begin{cases} (1 - m)f'(x_t), & \text{se } k = i; \\ \gamma_{ki}mf'(x_t), & \text{se } k \neq i. \end{cases}$$

Portanto,  $DF(\mathbf{X}_t)$  pode ser escrita como

$$DF(\mathbf{X}_t) = (I - mB)f'(x_t), \quad (3.5)$$

onde  $I$  é a matriz identidade e  $B$  é dada por

$$B = I - \Gamma. \quad (3.6)$$

A linearização ao redor da órbita sincronizada é dada por (ver Apêndice A)

$$\Delta_{t+1} = DF(\mathbf{X}_t)\Delta_t, \quad (3.7)$$

onde  $\Delta_t \in \mathbb{R}^N$  representa a perturbação transversal do estado sincronizado  $\mathbf{X}_t$ .

Para calcularmos a evolução da perturbação transversal, vamos utilizar uma técnica que desacopla o sistema (3.7). Sejam  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$  os autovalores de  $B$  e seja  $\Omega = \text{diag}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N)$ . Considerando que a matriz  $B$  é diagonalizável, existe uma matriz inversível  $Q$  tal que  $B = Q\Omega Q^{-1}$ . Fazendo a seguinte mudança de variáveis  $Y_t = Q\Delta_t$  no sistema (3.7), temos que

$$\begin{aligned} Y_{t+1} &= Q\Delta_{t+1}, \\ Y_{t+1} &= Q(I - mB)f'(x_t)\Delta_t, \\ Y_{t+1} &= (Q - mQB)f'(x_t)\Delta_t. \end{aligned}$$

Mas  $\Delta_t = Q^{-1}Y_t$ , portanto

$$\begin{aligned} Y_{t+1} &= (Q - mQB)f'(x_t)Q^{-1}Y_t, \\ Y_{t+1} &= (QQ^{-1} - mQBQ^{-1})f'(x_t)Y_t, \\ Y_{t+1} &= (I - m\Omega)f'(x_t)Y_t. \end{aligned}$$

que pode ser reescrito como

$$Y_{t+1} = \begin{pmatrix} (1 - m\omega_1)f'(x_t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (1 - m\omega_2)f'(x_t) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & (1 - m\omega_N)f'(x_t) \end{pmatrix} Y_t. \quad (3.8)$$

Pelas hipóteses feitas sobre os coeficientes da matriz  $\Gamma$ , temos que a soma das linhas, assim como a soma das colunas, é 1. Aplicando o teorema de Gershgorin (Lancaster [27]), temos que o autovalor dominante da matriz  $\Gamma$  é 1 e pelo teorema de Perron-Frobenius (Lancaster [27]), 1 é um autovalor simples de  $\Gamma$ . Portanto  $\omega_1 = 0$  é um autovalor de  $B = (I - \Gamma)$ , e obtemos

$$Y_{t+1} = \begin{pmatrix} f'(x_t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & (I - \Omega^* m) f'(x_t) & \end{pmatrix} Y_t, \quad (3.9)$$

onde  $\Omega^* = \text{diag}(\omega_2, \dots, \omega_N)$ .

O correspondente autoespaço de  $\omega_1 = 0$  é a diagonal do espaço de fase que é precisamente o estado sincronizado. As perturbações nesse espaço podem ocorrer livremente. As perturbações no espaço gerado pelos autovalores de  $(I - m\Omega^*)f'(x_t)$  são transversais ao estado sincronizado e deverão tender a zero para obtermos estabilidade assintótica.

A perturbação transversal  $\Delta_t$  se aproximará de zero quando  $t \rightarrow \infty$  se somente se

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \|P_{\tau-1} \cdot \dots \cdot P_1 P_0\|^{1/\tau} < 1, \quad (3.10)$$

onde  $P_t = (I - \Omega^* m) f'(x_t)$ .

Observando que

$$\begin{aligned} \|P_{\tau-1} \cdot \dots \cdot P_1 P_0\| &= \|(I - \Omega^* m) f'(x_{\tau-1}) \cdot (I - \Omega^* m) f'(x_{\tau-2}) \cdot \dots \cdot (I - \Omega^* m) f'(x_0)\|, \\ \|P_{\tau-1} \cdot \dots \cdot P_1 P_0\| &= \left( \prod_{t=0}^{\tau-1} |f'(x_t)| \right) \|(I - \Omega^* m) \cdot (I - \Omega^* m) \cdot \dots \cdot (I - \Omega^* m)\|, \\ \|P_{\tau-1} \cdot \dots \cdot P_1 P_0\| &= \left( \prod_{t=0}^{\tau-1} |f'(x_t)| \right) \|(I - \Omega^* m)^\tau\|. \end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \|P_{\tau-1} \cdot \dots \cdot P_1 P_0\|^{1/\tau} = L(x_0) \Lambda_1, \quad (3.11)$$

onde  $L(x_0) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left( \prod_{t=0}^{\tau-1} |f'(x_t)| \right)^{1/\tau}$  é o número de Lyapunov começando em  $x_0$  e  $\Lambda_1$  é o raio espectral de  $(I - \Omega^* m)$ , ou seja,  $\Lambda_1 = \max_{i=2, \dots, N} (|1 - \omega_i m|)$ . De fato, cada  $L(x_0)|1 - \omega_i m|$ ,  $i = 2, \dots, N$ , representa um número transversal de Lyapunov que juntamente com o número paralelo de Lyapunov representam os  $N$  números de Lyapunov associados ao sistema (3.2). Portanto, para obtermos estabilidade assintótica, basta considerar o maior valor do número transversal de Lyapunov pois corresponde à direção onde ocorre a maior expansão ( $L(x_0)\Lambda_1 > 1$ ) ou menor contração ( $L(x_0)\Lambda_1 < 1$ ) das órbitas.

Considerando que  $f$  preserva a medida natural  $\rho$  definida em (2.14). Supondo a ergodicidade de  $\rho$ , aplicando o logaritmo natural em  $\prod_{t=0}^{\tau-1} (|f'(x_t)|)^\tau$  e utilizando o Teorema de Birkhoff, temos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} (\ln(|f'(x_0)|) + \dots + \ln(|f'(x_{t-1})|)) = \int_0^\infty \ln |f'(x)| d\rho(x), \quad (3.12)$$

para todo  $x_0$  a menos de um conjunto de medida  $\rho$  nula. Portanto, o número de Lyapunov é dado por

$$L = \exp \int_0^\infty \ln |f'(x)| d\rho(x). \quad (3.13)$$

A menos de um conjunto de medida  $\rho$  nula, podemos eliminar a dependência do número de Lyapunov de  $x_0$  e estabelecer um critério para a estabilidade assintótica,

$$L\Lambda_1 < 1. \quad (3.14)$$

Earn et al. [13] consideraram a região onde o parâmetro  $L\Lambda_1 < 1$  como a região onde ocorre sincronização, enquanto para o caso  $L\Lambda_1 > 1$  uma sincronização nunca seria atingida. O valor  $L\Lambda_1$  é denominado número transversal de Lyapunov,  $L$  depende apenas da dinâmica local do sítio, enquanto  $\Lambda_1$  depende do processo migratório. Giordani e Silva [16,17] obtiveram um critério para estabilidade do

movimento sincrônico considerando um mecanismo de migração dependente da densidade, fato que generaliza o resultado acima.

Pelas considerações feitas no acoplamento dos sítios, eles oscilam conforme a dinâmica local no estado sincronizado. Se quisermos obter caos sincronizado, precisamos supor  $L > 1$  para a oscilação de um sítio desacoplado ser caótica, portanto, o termo que depende do processo migratório terá que obedecer a inequação  $\Lambda_1 < 1/L$ .

### 3.3 Modelo Metapopulacional em duas Escalas

No modelo metapopulacional, consideramos que os sítios estão distribuídos em duas escalas; a primeira escala é formada por uma metapopulação, enquanto a segunda escala é formada por  $n$  metapopulações, formando uma metapopulação de metapopulações que é composta por  $nN$  sítios. Uma maneira de melhor entendermos o modelo é fazendo uma analogia à dinâmica migratória de indivíduos entre bairros e cidades, a primeira escala seria composta por bairros, enquanto a segunda escala é composta pelas cidades. Para melhor compreendermos a construção do modelo vamos nos referir, algumas vezes, aos sítios da primeira escala por bairros e aos sítios da segunda escala por cidades.

Modelamos a evolução no tempo de um sistema dinâmico de  $nN$  equações. Em cada passo de tempo existem três processos considerados: a dinâmica local dos sítios da primeira escala (bairros), a dispersão de indivíduos entre os  $N$  sítios da primeira escala e a migração de indivíduos entre os  $n$  sítios da segunda escala (cidades). Seja  $x_t^{ij}$  o número de indivíduos no sítio  $\{i, j\}$ , onde  $i$  representa o bairro e  $j$  a cidade, para  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ ,  $t = 1, 2, \dots$ . Seja  $X_t^j = [x_t^{1,j}, x_t^{2,j}, \dots, x_t^{N,j}]^T \in \mathbb{R}^N$  o vetor populacional da cidade  $j$ . A dinâmica local de cada cidade é descrita por uma função  $F : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}^N$  de classe  $C^1$  que engloba os processos de dinâmica local e migração entre os sítios da primeira escala (bairros). Portanto, na falta de migração entre os sítios da segunda escala (cidades), a dinâmica da metapopulação de um

sítio  $j$  da segunda escala isolado é dado por

$$X_{t+1}^j = F(X_t^j), \quad t = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.15)$$

onde  $F$  engloba os processos de dinâmica local e migração entre os sítios da primeira escala e é dada por

$$F(X_t^j) = \begin{pmatrix} (1 - m)f(x_t^{1j}) + \sum_{k=1}^N \gamma_{1k} m f(x_t^{kj}) \\ (1 - m)f(x_t^{2j}) + \sum_{k=1}^N \gamma_{2k} m f(x_t^{kj}) \\ \vdots \\ (1 - m)f(x_t^{Nj}) + \sum_{k=1}^N \gamma_{Nk} m f(x_t^{kj}) \end{pmatrix}, \quad (3.16)$$

onde  $m$ ,  $f$  e  $\Gamma$ , definidos no estudo de uma metapopulação, são a fração de migração, a função responsável pela dinâmica local e a matriz de acoplamento dos sítios da primeira escala (bairros), para todo  $j = 1, \dots, n$ , respectivamente.

Após o processo de dinâmica local de cada cidade  $j$ , uma fração de indivíduos  $\mu_i$  parte de um bairro  $i$  e deixa a cidade  $j$ ,  $0 < \mu_i < 1$ , para  $i = 1, \dots, N$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Consideramos que  $\mu_i$  independente da cidade. Dos indivíduos que migram das cidades vizinhas  $\ell$ , uma proporção  $c_{j\ell}$  chegará para fazer parte da população da cidade  $j$  no passo de tempo  $t + 1$ . O processo de migração é 100% bem sucedido, ou seja, não há perda de indivíduos durante a migração, assim temos  $\sum_{j=1}^n c_{\ell j} = 1$ . Consideramos também que os indivíduos não retornam para o mesmo sítio, ou seja,  $c_{\ell\ell} = 0$  para todo  $\ell = 1, \dots, N$ . A matriz  $C = [c_{j\ell}]_{j,\ell=1}^n$  é denominada matriz acoplamento entre os sítios da segunda escala, cada termo  $c_{\ell j}$  representa a fração de indivíduos que sai da cidade  $j$  no passo de tempo  $t$  e passa a fazer parte da cidade  $\ell$  no passo de tempo  $t + 1$ , ver figura 3.2.

A densidade de indivíduos que sai do bairro  $i$  da cidade  $j$  e passa a fazer parte da população da cidade vizinha  $\ell$  é dada por  $c_{\ell j} \mu_i x^{i,j}$ . Os indivíduos que saem do sítio  $\{i, j\}$  e chegam na cidade  $\ell$  não necessariamente farão parte do bairro  $i$ , esses indivíduos se distribuem nos  $N$  bairros da cidade  $\ell$  numa proporção  $\mu_{ki}$  para  $k = 1, \dots, N$ , onde  $\mu_i = \mu_{1i} + \mu_{2i} + \dots + \mu_{Ni}$ , ver figura 3.2.

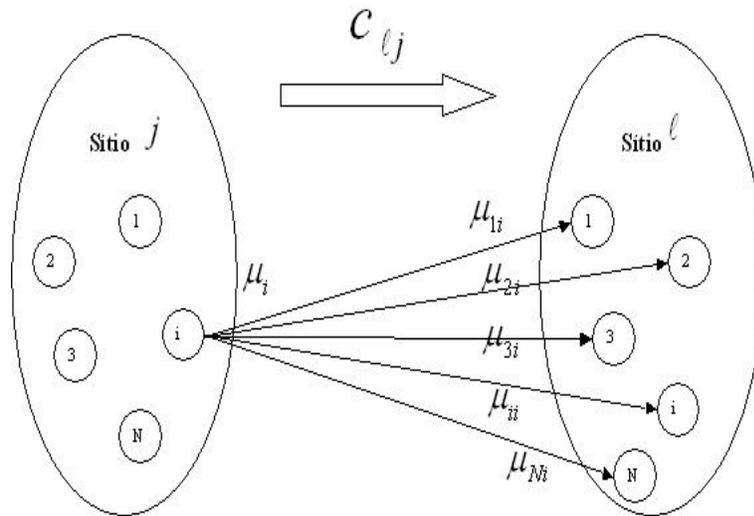


Figura 3.2: Distribuição dos indivíduos considerando sítios distribuídos em duas escalas. Dos indivíduos que saem do sítio vizinho  $j$  no passo de tempo  $t$  da segunda escala, uma proporção  $c_{\ell j}$  chega para fazer parte do sítio  $\ell$  no passo de tempo seguinte  $t + 1$ . Os indivíduos que chegam em  $\ell$  e saem do sítio  $\{i, j\}$  com fração de migração  $\mu_i$  se distribuem no sítio vizinho numa proporção  $\mu_{ki}$ ,  $k = 1, \dots, N$ , onde  $\mu_i = \mu_{1i} + \mu_{2i} + \dots + \mu_{Ni}$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

Portanto, a densidade de indivíduos que saem do sítio  $\ell$  da segunda escala e chegam ao sítio  $\{i, j\}$  da primeira escala é dada por  $c_{j\ell}\mu_{i1}x^{1,\ell} + c_{j\ell}\mu_{i2}x^{2,\ell} + \dots + c_{j\ell}\mu_{iN}x^{N,\ell}$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

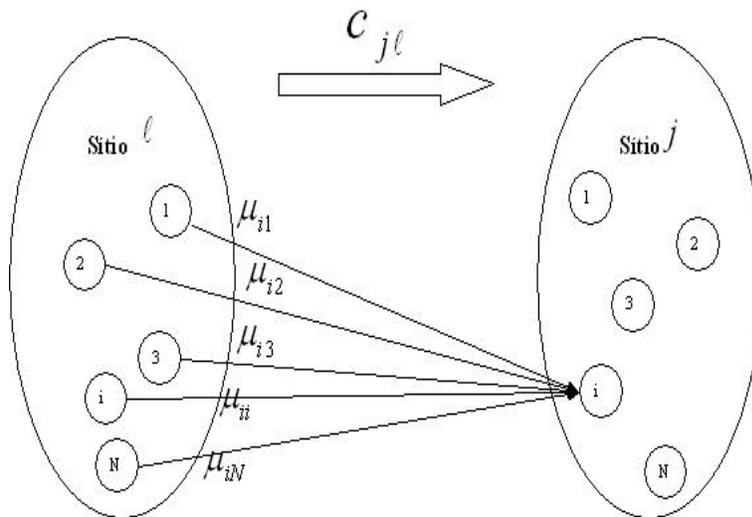


Figura 3.3: Distribuição dos indivíduos considerando sítios distribuídos em duas escalas. Dos indivíduos que saem do sítio vizinho  $\ell$  no passo de tempo  $t$  da segunda escala, uma proporção  $c_{j\ell}$  chega para fazer parte do sítio  $j$  no passo de tempo seguinte  $t + 1$ . A densidade de indivíduos que saem do sítio  $\ell$  e chegam ao sítio  $\{i, j\}$  é dada por  $c_{j\ell}\mu_{i1}x^{1,\ell} + c_{j\ell}\mu_{i2}x^{2,\ell} + \dots + c_{j\ell}\mu_{iN}x^{N,\ell}$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $j = 1, \dots, n$

Fazendo essas considerações, podemos escrever a dinâmica metapopulacional de sítios distribuídos em duas escalas como o sistema de equações

$$X_{t+1}^j = [I - W]F(X_t^j) + \sum_{\ell=1}^n c_{j\ell}\bar{W}F(X_t^\ell), \quad \forall j = 1, \dots, n, \quad (3.17)$$

onde  $I$  é a matriz identidade,  $W = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N)$  e a matriz  $\bar{W}$  é dada por

$$\bar{W} = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \dots & \mu_{1N} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mu_{N-1N} \\ \mu_{N1} & \dots & \mu_{NN-1} & \mu_{NN} \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

Obtendo-se assim, um sistema dinâmico de  $nN$  equações. O primeiro termo do lado direito da equação (3.17) representa os indivíduos que não partiram do sítio da segunda escala  $j$  (cidade) no passo de tempo  $t$ , enquanto o segundo termo conta as contribuições dos sítios vizinhos (cidades).

### 3.4 Estabilidade Transversal do Modelo Metapopulacional em duas Escalas

Para obtenção de condições para sincronização considerando sítios distribuídos em duas escalas, temos dois casos interessantes a serem analisados.

**Sincronização nas duas escalas:** quando os sítios de ambas escalas estão sincronizados, ou seja, as cidades estão sincronizadas com os respectivos bairros sincronizados. Neste caso, sincronização será alcançada se  $X_t^j = \mathbf{X}_t$ , onde  $\mathbf{X}_t = (x_t, x_t, \dots, x_t) \in \mathbb{R}^N$ , para todo  $j = 1, \dots, n$ .

**Sincronização na escala maior:** quando os sítios da escala maior estão sincronizados, ou seja, todas as cidades estão sincronizadas com os respectivos bairros não necessariamente sincronizados. Neste caso, sincronização será alcançada se  $X_t^j = \mathbf{X}_t$ , onde  $\mathbf{X}_t = (x_t^1, x_t^2, \dots, x_t^N) \in \mathbb{R}^N$ , para todo  $j = 1, \dots, n$ .

Considerando que a densidade de todos os sítios da escala maior é a mesma,  $X_t^j = \mathbf{X}_t$ , para todo  $j = 1, 2, \dots, n$ , e substituindo em (3.17), temos que

$$\mathbf{X}_{t+1} = [I - W]F(\mathbf{X}_t) + \sum_{\ell=1}^n c_{j\ell} \bar{W} F(\mathbf{X}_t), \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

considerando  $\sum_{\ell=1}^n c_{j\ell} = 1$ , para todo  $j = 1, \dots, n$ , temos que

$$\mathbf{X}_{t+1} = F(\mathbf{X}_t) - WF(\mathbf{X}_t) + \bar{W}F(\mathbf{X}_t),$$

$$\mathbf{X}_{t+1} = F(\mathbf{X}_t) + (\overline{W} - W)F(\mathbf{X}_t). \quad (3.19)$$

Portanto, para alcançarmos estados sincronizados, a dinâmica dos sítios da segunda escala satisfaz  $\mathbf{X}_{t+1} = F(\mathbf{X}_t) + (\overline{W} - W)F(\mathbf{X}_t)$ . Além disso, pelo fato de não ocorrer perda de indivíduos durante a migração ( $\sum_{j=1}^n c_{\ell j} = 1$ ) e por supormos que  $\sum_{\ell=1}^n c_{j\ell} = 1$ , para todo  $j = 1, \dots, n$ , os coeficientes da matriz  $C$  são todos positivos e a soma das linhas, assim como o das colunas, resulta no valor 1. Consideramos que o sistema não possui conglomerados isolados, dizemos que o sistema é irredutível e, portanto,  $C$  é uma matriz irredutível, caso contrário cada conglomerado poderia ser estudado separadamente.

Pelas considerações sobre a forma de migração dos indivíduos entre as cidades, a matriz  $\overline{W} - W$  de dimensão  $N \times N$  é dada por

$$\overline{W} - W = \begin{pmatrix} \mu_{11} - \mu_1 & \mu_{12} & \dots & \mu_{1N} \\ \mu_{21} & \mu_{22} - \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mu_{N-1N} \\ \mu_{N1} & \dots & \mu_{NN-1} & \mu_{NN} - \mu_N \end{pmatrix}$$

onde  $\mu_i = \mu_{1i} + \mu_{2i} + \dots + \mu_{Ni}$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Considerando que a soma de cada linha da matriz  $\overline{W}$  é  $\mu_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , temos que a dinâmica de (3.19) corresponde à dinâmica de um sítio isolado da segunda escala.

Considerando uma órbita sincronizada  $\mathbf{X}_t$  do sistema (3.17), estamos interessados em estudar sua estabilidade assintótica, isto é, quando órbitas que iniciam próximas ao estado sincronizado serão atraídas para esse estado. Fazendo a linearização do sistema metapopulacional de metapopulações, obtemos um sistema de dimensão  $nN \times nN$ . Para fazer a análise de estabilidade, utilizaremos o teorema abaixo que reduz nosso estudo a  $n$  sistemas desacoplados de dimensão  $N \times N$ . Esta mesma técnica de desacoplamento é utilizada em De Castro e Silva [9] para o estudo de um modelo metapopulacional com estrutura etária.

**Teorema 3.1.** *Seja  $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  uma função de classe  $C^1$ . Seja  $C$  matriz acoplamento entre os sítios e diagonalizável,  $S_t = (\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_t, \dots, \mathbf{X}_t) \in \mathbb{R}^{n \times N}$  o estado sincronizado da metapopulação a cada passo de tempo, onde  $\mathbf{X}_t = (x_t^1, x_t^2, \dots, x_t^N) \in \mathbb{R}^N$ . Então o sistema linear associado ao sistema não linear (3.17) é dado por*

$$Y_{t+1} = \bigoplus_{j=1}^n [I - W + \lambda_j \bar{W}] DF(\mathbf{X}_t) Y_t \quad (3.20)$$

onde  $\lambda_j$  são os autovalores da matriz  $C$ ,  $Y_t$  é uma mudança de variáveis,  $DF(\mathbf{X}_t)$  é a matriz jacobiana do modelo metapopulacional dada em (3.5) e  $\bigoplus$  representa o desacoplamento por blocos de matrizes, isto é,

$$\bigoplus_{j=1}^n A_j = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n \end{pmatrix}$$

**Dem.: 1.** *Linearizando o sistema (3.17) em torno do estado sincronizado  $S_t$ , obtemos a seguinte equação para a evolução da perturbação  $\Delta_t$ ,*

$$\Delta_{t+1} = J(S_t) \Delta_t,$$

onde  $\Delta_t$  é a perturbação transversal e  $J(S_t)$  é a matriz jacobiana  $nN \times nN$  do sistema (3.17) aplicada no estado sincronizado,

$$J(S_t) = \begin{bmatrix} DF(\mathbf{X}_t) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & DF(\mathbf{X}_t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} WDF(\mathbf{X}_t) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & WDF(\mathbf{X}_t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & c_{12} \bar{W} DF(\mathbf{X}_t) & \dots & c_{1n} \bar{W} DF(\mathbf{X}_t) \\ c_{21} \bar{W} DF(\mathbf{X}_t) & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c_{n-1n} \bar{W} DF(\mathbf{X}_t) \\ c_{n1} \bar{W} DF(\mathbf{X}_t) & \dots & c_{nm-1} \bar{W} DF(\mathbf{X}_t) & 0 \end{bmatrix}.$$

Pela definição de produto de Kronecker <sup>1</sup>, a matriz jacobiana pode ser escrita na forma

$$J(S_t) = I \otimes DF(\mathbf{X}_t) - I \otimes WDF(\mathbf{X}_t) + C \otimes \overline{W}DF(\mathbf{X}_t). \quad (3.21)$$

A matriz  $C$  é diagonalizável, então existe  $Q$  matriz não singular que diagonaliza  $C$ , isto é,  $QCQ^{-1} = \Lambda^*$ , onde  $\Lambda^* = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$ .

Considerando a seguinte mudança de variáveis,  $Y_t = (Q \otimes I)\Delta_t$ , temos que

$$Y_{t+1} = (Q \otimes I)\Delta_{t+1},$$

$$Y_{t+1} = (Q \otimes I)(I \otimes DF(\mathbf{X}_t) - I \otimes WDF(\mathbf{X}_t) + C \otimes \overline{W}DF(\mathbf{X}_t))\Delta_t,$$

$$Y_{t+1} = (Q \otimes DF(\mathbf{X}_t) - Q \otimes WDF(\mathbf{X}_t) + QC \otimes \overline{W}DF(\mathbf{X}_t))\Delta_t.$$

utilizando propriedades do produto de Kronecker.

Pelo fato de  $Y_t = (Q \otimes I)\Delta_t$ , temos que  $\Delta_t = (Q \otimes I)^{-1}Y_t$ , logo

$$Y_{t+1} = (Q \otimes DF(\mathbf{X}_t) - Q \otimes WDF(\mathbf{X}_t) + QC \otimes \overline{W}DF(\mathbf{X}_t))(Q \otimes I)^{-1}Y_t,$$

$$Y_{t+1} = (Q \otimes DF(\mathbf{X}_t) - Q \otimes WDF(\mathbf{X}_t) + QC \otimes \overline{W}DF(\mathbf{X}_t))(Q^{-1} \otimes I)Y_t,$$

$$Y_{t+1} = (I \otimes DF(\mathbf{X}_t) - I \otimes WDF(\mathbf{X}_t) + \Lambda^* \otimes \overline{W}DF(\mathbf{X}_t))Y_t.$$

Portanto, obtemos o resultado desejado.

Considerando a linearização do sistema (3.17) e o teorema 3.1, queremos que a perturbação  $\Delta_t$  tenda a zero ao  $t \rightarrow \infty$ , mas  $\Delta_t = (Q \otimes I)^{-1}Y_t$ , portanto, para obtermos estabilidade assintótica,  $Y_t$  tem que tender a zero quando  $t \rightarrow \infty$ . Isso ocorrerá se e somente se

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \|P_{\tau-1} \cdot \dots \cdot P_1 P_0\|^{1/\tau} < 1, \quad (3.22)$$

onde  $P_t = (I - W + \lambda_j \overline{W})DF(\mathbf{X}_t)$ .

---

<sup>1</sup>Seja  $A = [a_{i,j}]_{i,j=1}^m \in \mathbb{R}^{m \times m}$  e  $B = [b_{i,j}]_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , o produto de Kronecker é definido por  $A \otimes B = [a_{i,j} B]_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{mn \times mn}$ .

Pelas hipóteses feitas sobre os coeficientes da matriz  $C$ , temos que a soma das linhas, assim como a soma das colunas, é 1. Pelo teorema de Gershgorin (Lancaster [27]), temos que o autovalor dominante da matriz  $C$  é 1 e pelo teorema de Perron-Frobenius (Lancaster [27]), 1 é um autovalor simples de  $C$ .

O caso  $\lambda_1 = 1$  corresponde ao autoespaço que é precisamente o estado sincronizado dos sítios da segunda escala, as perturbações nesse espaço podem ocorrer livremente. Portanto, para obtermos os critérios para estabilidade assintótica, basta analisarmos os  $(n - 1)$  sistemas restantes.

**Sincronização na escala maior:** para obtermos critérios para sincronização na escala maior, a matriz Jacobiana é calculada em  $\mathbf{X}_t = (x_t^1, x_t^2, \dots, x_t^N)$ , onde  $\mathbf{X}_{t+1} = F(\mathbf{X}_t) + (\bar{W} - W)F(\mathbf{X}_t)$ . Nesse caso a matriz jacobiana,  $DF(\mathbf{X}_t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ , aplicada no estado sincronizado possui suas entradas dadas por

$$\alpha_{ki} = \begin{cases} (1 - m)f'(x_t^i), & \text{se } k = i; \\ \gamma_{ki}m f'(x_t^i), & \text{se } k \neq i. \end{cases}$$

Portanto,  $P_t = (I - W + \lambda_j \bar{W})DF(\mathbf{X}_t)$ , para cada  $\lambda_j$ ,  $j = 2, \dots, n$ . Dessa forma,

$$\|P_{\tau-1} \cdots P_0\| = \|(I - W + \lambda_j \bar{W})DF(\mathbf{X}_{\tau-1}) \cdots (I - W + \lambda_j \bar{W})DF(\mathbf{X}_0)\|, \quad (3.23)$$

onde  $\mathbf{X}_{t+1} = F(\mathbf{X}_t) + (\bar{W} - W)F(\mathbf{X}_t)$ .

Consideramos que  $F$  preserva a medida natural  $\rho$  definida em 2.14. Supondo a ergodicidade de  $\rho$  e utilizando o Teorema Ergódico Multiplicativo de Osedelec [14], temos que (3.22) existe a menos de um conjunto de medida  $\rho$  nula. Seja

$$K = \max_{j=2, \dots, n} \left( \lim_{\tau \rightarrow \infty} (\|(I - W + \lambda_j \bar{W})DF(\mathbf{X}_{\tau-1}) \cdots (I - W + \lambda_j \bar{W})DF(\mathbf{X}_0)\|)^{1/\tau} \right)$$

Portanto, podemos estabelecer um critério para a estabilidade assintótica que é dado por

$$K < 1. \quad (3.24)$$

Para o caso  $K < 1$  ocorre sincronização na escala maior, enquanto para  $K > 1$  não ocorre sincronização. Para calcularmos os valores de  $K$ , utiliza-se um algoritmo descrito no livro do Aligood [3] e que está descrito no Apêndice B.

**Sincronização nas duas escalas:** para obtermos critérios para sincronização nas duas escalas, consideramos que a soma de cada linha da matriz  $\bar{W}$  é  $\mu_i$ . Portanto, zero é um autovalor da matriz  $\bar{W} - W$  que gera espaço nulo de dimensão 1 dado por  $v = [1, 1, \dots, 1]^T$ . A partir disso, se  $F(\mathbf{X}_t)$  pertencer ao espaço nulo de  $\bar{W} - W$ , temos que (3.19) é dado por

$$\mathbf{X}_{t+1} = F(\mathbf{X}_t)$$

que, pelas considerações feitas na dinâmica de uma metapopulação, corresponde a dinâmica local de um único sítio isolado (bairro), ou seja,  $x_{t+1} = f(x_t)$ .

A matriz Jacobiana é calculada em  $\mathbf{X}_t = (x_t, x_t, \dots, x_t) \in \mathbb{R}^N$ , onde  $\mathbf{X}_{t+1} = F(\mathbf{X}_t)$  e  $x_{t+1} = f(x_t)$ . Portanto,  $DF(\mathbf{X}_t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ , aplicada no estado sincronizado possui suas entradas dadas por

$$\alpha_{ki} = \begin{cases} (1 - m)f'(x_t), & \text{se } k = i; \\ \gamma_{ki}m f'(x_t), & \text{se } k \neq i. \end{cases}$$

que pode ser escrita como

$$DF(\mathbf{X}_t) = (I - mB)f'(x_t),$$

onde  $B = I - \Gamma$  e  $\Gamma$  é a matriz acoplamento entre os sítios da primeira escala.

Portanto,  $P_t = (I - W + \lambda_j \overline{W})(I - mB)f'(x_t)$ , para cada  $\lambda_j$ ,  $j = 2, \dots, n$ .

Dessa forma,

$$\|P_{\tau-1} \cdot \dots \cdot P_1 P_0\| = \|(I - W + \lambda_j \overline{W})(I - mB)f'(x_{\tau-1}) \cdot \dots \cdot (I - W + \lambda_j \overline{W})(I - mB)f'(x_0)\|,$$

$$\|P_{\tau-1} \cdot \dots \cdot P_1 P_0\| = \left( \prod_{t=0}^{\tau-1} |f'(x_t)| \right) \|(I - W + \lambda_j \overline{W})(I - mB) \cdot \dots \cdot (I - W + \lambda_j \overline{W})(I - mB)\|,$$

$$\|P_{\tau-1} \cdot \dots \cdot P_1 P_0\| = \left( \prod_{t=0}^{\tau-1} |f'(x_t)| \right) \|((I - W + \lambda_j \overline{W})(I - mB))^\tau\|.$$

Portanto,

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \|P_{\tau-1} \cdot \dots \cdot P_1 P_0\|^{1/\tau} = L(x_0) \Lambda_2^j, \quad (3.25)$$

onde  $L(x_0) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left( \prod_{t=0}^{\tau-1} |f'(x_t)| \right)^{1/\tau}$  é o número de Lyapunov começando em  $x_0$  e  $\Lambda_2^j$  é o raio espectral de  $(I - W + \lambda_j \overline{W})(I - mB)$ , para cada  $\lambda_j$ ,  $j = 2, \dots, n$ .

Consideramos que  $f$  preserva a medida natural  $\rho$  definida em (2.14). Supondo a ergodicidade de  $\rho$ , aplicando o logaritmo natural em  $\prod_{t=0}^{\tau-1} (|f'(x_t)|^\tau)^{1/\tau}$  e utilizando o Teorema de Birkhoff, temos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} (\ln(|f'(x_0)|) + \dots + \ln(|f'(x_{t-1})|)) = \int_0^\infty \ln |f'(x)| d\rho(x), \quad (3.26)$$

para todo  $x_0$  a menos de um conjunto de medida  $\rho$  nula. Portanto, o número de Lyapunov é dado por

$$L = \exp \int_0^\infty \ln |f'(x)| d\rho(x). \quad (3.27)$$

A menos de um conjunto de medida  $\rho$  nula, podemos eliminar a dependência do número de Lyapunov de  $x_0$  e estabelecer um critério para a estabilidade assintótica,

$$L\Lambda_2 < 1, \quad (3.28)$$

onde  $\Lambda_2 = \max_{j=2,\dots,n} (\Lambda_2^j)$ .

Na região onde o parâmetro  $L\Lambda_2 < 1$  ocorre sincronização nas duas escalas, enquanto para  $L\Lambda_2 > 1$  não ocorre esse tipo de sincronização. O valor  $L\Lambda_2$  é denominado número transversal de Lyapunov,  $L$  depende apenas da dinâmica local do sítio, enquanto  $\Lambda_2$  depende do processo migratório entre os sítios da primeira escala e da segunda escala.

Um caso particular ocorre quando os coeficientes da matriz diagonal  $W$  são dados por  $\mu_i = \mu$ , para  $i = 1, \dots, N$ , e os coeficientes da matriz  $\overline{W}$  são dados por  $\mu_{i,k} = \mu/N$ , isto é,

$$\overline{W} - W = \begin{pmatrix} \frac{\mu}{N} - \mu & \frac{\mu}{N} & \cdots & \frac{\mu}{N} \\ \frac{\mu}{N} & \frac{\mu}{N} - \mu & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{\mu}{N} \\ \frac{\mu}{N} & \cdots & \frac{\mu}{N} & \frac{\mu}{N} - \mu \end{pmatrix}.$$

que pode ser escrita como  $\overline{W} - W = -\mu I + \frac{\mu}{N} \mathbf{1}$ , onde  $\mathbf{1}$  é uma matriz  $N \times N$  com todos seus valores 1.

Portanto, nesse caso temos  $P_t = ((1 - \mu)I + \frac{\lambda_j \mu}{N} \mathbf{1})(I - mB)f'(x_t)$ , para cada  $\lambda_j$ ,  $j = 2, \dots, n$ . A matriz  $(1 - \mu)I + \frac{\lambda_j \mu}{N} \mathbf{1}$  é uma matriz circulante, portanto, diagonalizável (Davis [8], ver apêndice C). Para analisar a evolução da matriz  $P_t$ , vamos considerar que as matrizes  $(1 - \mu)I + \frac{\lambda_j \mu}{N} \mathbf{1}$  e  $I - mB$  comutam. Exemplos de matrizes que comutam serão apresentadas adiante. Com essas considerações, temos que  $(1 - \mu)I + \frac{\lambda_j \mu}{N} \mathbf{1}$  e  $(I - mB)$  são simultaneamente diagonalizáveis, isto é, existe uma base na qual cada autovetor de  $(1 - \mu)I + \frac{\lambda_j \mu}{N} \mathbf{1}$  é também um autovetor de

$I - mB$  (Hoffman [21]), portanto, existe uma matriz  $Q$  que diagonaliza ambas as matrizes, isto é,

$$\begin{aligned} (1 - \mu)I + \frac{\lambda_j \mu}{N} \mathbf{1} &= QDQ^{-1}, \\ I - mB &= Q(I - m\Omega)Q^{-1}, \end{aligned}$$

onde  $\Omega = \text{diag}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N)$  e  $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$  são os autovalores da matriz  $(I - \Gamma)$ ,  $D = \text{diag}(d_{1,j}, d_{2,j}, \dots, d_{N,j})$  e  $\{d_{1,j}, d_{2,j}, \dots, d_{N,j}\}$  são os autovalores de  $(1 - \mu)I + \frac{\lambda_j \mu}{N} \mathbf{1}$ , para cada  $\lambda_j$ ,  $j = 2, \dots, n$ . Pelo fato da matriz  $(1 - \mu)I + \frac{\lambda_j \mu}{N} \mathbf{1}$  ser circulante, seus autovalores são dados por  $\{1 - \mu + \lambda_j \mu, 1 - \mu, \dots, 1 - \mu\}$ , e os correspondentes autovetores são as colunas da matriz de Fourier que é dada por

$$F = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w & w^2 & \dots & w^{N-1} \\ 1 & w^2 & w^4 & \dots & w^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^{N-1} & w^{2(N-1)} & \dots & w^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix},$$

onde  $w = \exp(\frac{2\pi i}{N}) = \cos(\frac{2\pi}{N}) + i \sin(\frac{2\pi}{N})$ .

Utilizando a mesma técnica de desacoplamento da seção 3.2 com uma transformação de variáveis dada por  $Y_t = Q\Delta_t$ , temos

$$Y_{t+1} = \begin{pmatrix} (1 - m\omega_1)(1 - \mu + \lambda_1 \mu) f'(x_t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (1 - m\omega_2)(1 - \mu) f'(x_t) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & (1 - m\omega_N)(1 - \mu) f'(x_t) \end{pmatrix} Y_t,$$

Pela seção 3.2, sabemos que a matriz  $I - mB$  possui um autovalor de valor 1 correspondendo ao autovetor  $[1, 1, \dots, 1]^T$ . Além disso, o autovetor  $1 - \mu + \lambda_j \mu$  gera esse mesmo espaço, e podemos reescrever (3.29) como

$$Y_{t+1} = \begin{pmatrix} (1 - \mu + \lambda_j \mu) f'(x_t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (1 - m\omega_2)(1 - \mu) f'(x_t) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & (1 - m\omega_N)(1 - \mu) f'(x_t) \end{pmatrix} Y_t.$$

Portanto, analisando a evolução do termo  $P_t = ((1 - \mu)I + \frac{\lambda_j \mu}{N} \mathbf{1})(I - mB) f'(x_t)$ , temos que

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \|P_{\tau-1} \cdot \dots \cdot P_1 P_0\|^{1/\tau} = L\Lambda_2, \quad (3.29)$$

onde  $\Lambda_2 = \max\{\max_{j=2, \dots, n} (1 - \mu + \lambda_j \mu), \max_{i=2, \dots, N} (1 - \mu)(1 - \omega_i m)\}$  é o raio espectral de  $((1 - \mu)I + \frac{\lambda_j \mu}{N} \mathbf{1})(I - mB)$  e  $L$  é o número de Lyapunov que independe da condição inicial a menos de um conjunto de medida  $\rho$  nula. De fato, cada  $L(1 - m\omega_i)(1 - \mu)$  e cada  $L(1 - \mu + \lambda_j \mu)$ ,  $i = 2, \dots, N$ ,  $j = 2, \dots, n$ , é um número transversal de Lyapunov que corresponde à direção onde ocorre expansão ou contração das órbitas.

Portanto, considerando  $\overline{W} - W = -\mu I + \frac{\mu}{N} \mathbf{1}$ , o critério para sincronização nas duas escalas é dado por

$$L\Lambda_2 < 1,$$

onde  $\Lambda_2 = \max\{\max_{j=2, \dots, n} (1 - \mu + \lambda_j \mu), \max_{i=2, \dots, N} (1 - \mu)(1 - \omega_i m)\}$ .

Considerando que a matriz de acoplamento entre os sítios da primeira escala ( $\Gamma$ ) é simétrica, isto é, dos indivíduos que migram, se a fração de indivíduos que parte de um determinado sítio  $i$  e migra para um sítio vizinho  $k$  ( $\gamma_{ki}$ ) for igual a fração de indivíduos que parte de  $k$  e migra para o sítio  $i$  ( $\gamma_{ik}$ ), então as matrizes  $(1 - \mu)I + \frac{\lambda_j \mu}{N} \mathbf{1}$  e  $I - mB$  comutam. Outro exemplo é quando  $\Gamma$  é uma matriz circulante, daí  $(1 - \mu)I + \frac{\lambda_j \mu}{N} \mathbf{1}$  e  $I - mB$  são circulantes e, portanto, comutam (ver apêndice C).

## 4 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS DO MODELO METAPOPOPULACIONAL

Diversas simulações numéricas são realizadas para analisarmos o comportamento dos modelos metapopulacionais considerados. Utiliza-se a função exponencial logística para descrever a dinâmica local de cada população. Além disso, consideram-se diversas taxas de crescimento populacional, diversas frações de migração e diversas formas de acoplamento entre os sítios.

Existem várias maneiras de acoplarmos o modelo metapopulacional. Neste trabalho, consideram-se as seguintes matrizes acoplamento:

- 1) Acoplamento feito entre os dois vizinhos mais próximos em forma de anel,

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & \dots & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & \dots & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

- 2) Acoplamento global com o mesmo coeficiente de acoplamento,

$$\Gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/(N-1) & \dots & 1/(N-1) \\ 1/(N-1) & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1/(N-1) \\ 1/(N-1) & \dots & 1/(N-1) & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

- 3) Variações dos dois casos anteriores,

$$\Gamma = (1 - \alpha)\Gamma_2 + \alpha\Gamma_1; \quad (4.3)$$

onde  $0 \leq \alpha \leq 1$ . O valor  $\alpha$  é denominado coeficiente de interação entre os sítios.

As matrizes  $C$  são definidas da mesma maneira. Todas as simulações numéricas foram feitas utilizando o software MATLAB.

## 4.1 Simulações Numéricas do Modelo Metapopulacional em uma Escala

Primeiramente, vamos realizar simulações numéricas considerando uma metapopulação formada por  $N$  sítios. As simulações são feitas considerando diversas formas de acoplamento  $\Gamma$  e diferentes frações de migração  $m$ . A função responsável pela dinâmica local é a função exponencial logística (ver eq. 2.11).

As condições iniciais do sistema são escolhidas aleatoriamente próximas ao estado sincronizado

$$X_0 = (x_0 \pm 0,01\epsilon_1, x_0 \pm 0,01\epsilon_2, \dots, x_0 \pm 0,01\epsilon_N), \quad (4.4)$$

onde  $X_0 \in \mathbb{R}^N$  e  $\epsilon_i, i = 1, \dots, N$ , são valores randômicos escolhidos entre  $[-1, 1]$ .

Na figura 4.1, apresenta-se o número transversal de Lyapunov em função do parâmetro  $r$ . O número transversal de Lyapunov é dado por  $L\Lambda_1$  e corresponde à direção onde ocorre a maior expansão ( $L\Lambda_1 > 1$ ) ou menor contração ( $L\Lambda_1 < 1$ ) das órbitas. Em todos os casos consideram-se 30 sítios.

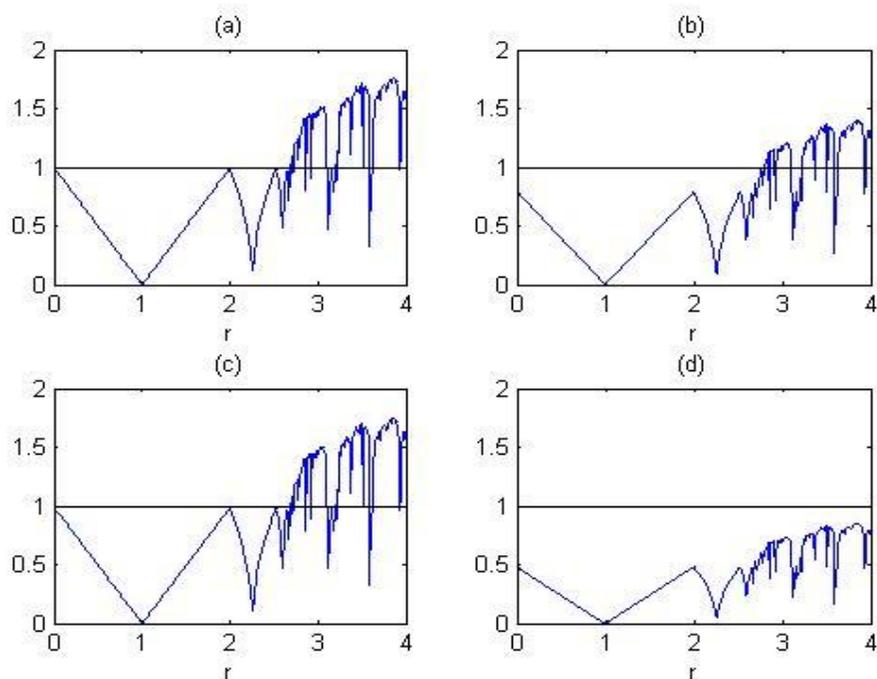


Figura 4.1: Números Transversais de Lyapunov em função do parâmetro  $r$ . (a)  $m = 0, 2$  e (c)  $m = 0, 5$ , acoplamento com os dois vizinhos mais próximos em forma de anel, (b)  $m = 0, 2$  e (d)  $m = 0, 5$ , os sítios globalmente acoplados com mesmo coeficiente de acoplamento.

Em (a), considera-se  $m = 0, 2$ , onde os sítios estão acoplados em forma de anel com os dois vizinhos mais próximos. Ocorre uma pequena redução nos valores do número transversal de Lyapunov em relação ao caso de um sítio isolado (figura 2.1(b)), isso se deve ao fato dos sítios terem pouca interação, nesse caso  $\Lambda_1 = 0, 9956$ . Em (c), considera-se o mesmo acoplamento considerado em (a) mas com fração de migração  $m = 0, 5$ ; nesse caso, houve uma pequena redução nos valores em relação ao caso (a), e  $\Lambda_1 = 0, 9891$ . Em (b), considera-se novamente  $m = 0, 2$  mas com os sítios globalmente acoplados com o mesmo coeficiente de acoplamento. Podemos observar que uma maior interação entre os sítios faz os valores do número transversal de Lyapunov reduzirem significativamente; nesse caso,  $\Lambda_1 = 0, 7931$ . Em (d), considera-se o mesmo acoplamento considerado em (b) mas com fração de migração  $m = 0, 5$ ,

todos os valores do número transversal de Lyapunov são inferiores a 1 e o modelo sincroniza para qualquer valor de  $r$ ; nesse caso,  $\Lambda_1 = 0,4828$ .

Outra maneira de analisarmos o comportamento do modelo metapopulacional é através do erro de sincronização que calcula, em valor absoluto, a média da diferença entre as densidades dos sítios. Para o passo de tempo  $t$ , o erro de sincronização é definido por

$$e_t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |x_t^i - x_t^{i+1}|, \quad (4.5)$$

onde  $x_t^{n+1} = x_t^1$ .

Assim, obtemos sincronização quando  $e_t \rightarrow 0$  para  $t \rightarrow \infty$ . Nas simulações que calculam o erro de sincronização são plotados 100 valores para cada fração de migração ( $m$ ), após o descarte de 10 mil transientes.

Na figura 4.2, apresenta-se o erro de sincronização e os valores do número transversal de Lyapunov, ambos em função da fração de migração  $m$ . Ocorre redução nos intervalos de sincronização com o aumento do número de sítios. O aumento do valor do número transversal de Lyapunov em relação ao aumento do número de sítios ocorre pois o termo  $\Lambda_1$  aumenta seu valor, de fato, ele tende a 1 quando  $N \rightarrow \infty$ .

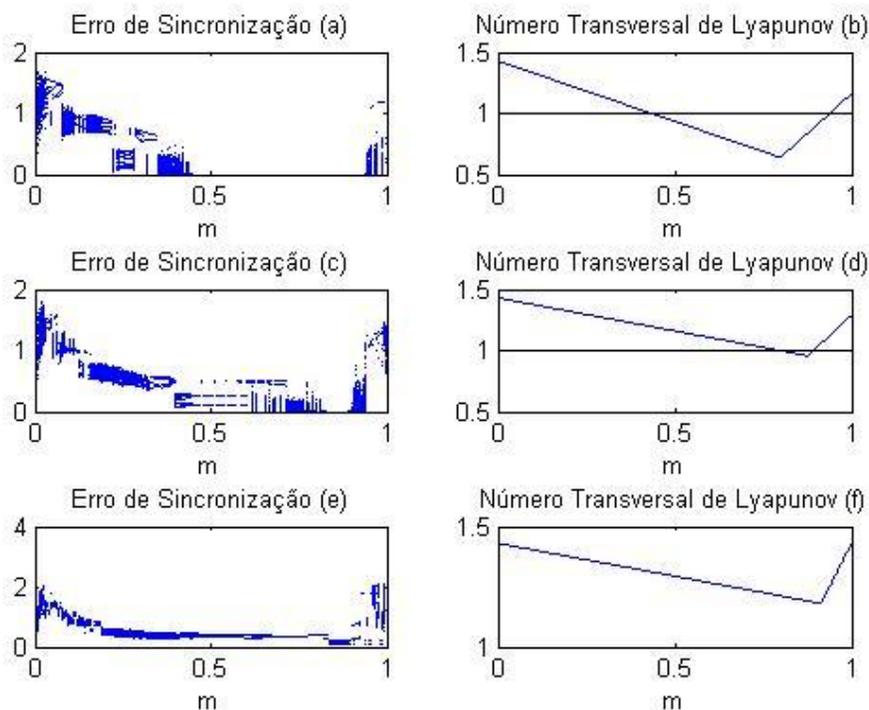


Figura 4.2: Erro de Sincronização ((a), (c) e (e)) com o respectivo Número Transversal de Lyapunov ((b), (d) e (f)) para acoplamento feito entre os dois vizinhos mais próximos em forma de anel, ambos em função do parâmetro  $m$ . Considera-se  $r = 2,88$ . Em (a)  $N = 5$ ; (c)  $N = 7$ ; (e)  $N = 10$ . O aumento no número de sítios reduz os intervalos de sincronização e aumenta os valores do número transversal de Lyapunov.

Considera-se  $r = 2,88$  que para um sítio isolado tem um comportamento caótico, onde o número de Lyapunov é dado por  $L = 1,4338$ . Em (a) são considerados 5 sítios, em (c) 7 sítios e em (e) 10 sítios com os respectivos valores do número transversal de Lyapunov (b), (d) e (f).

Na figura 4.3, considera-se novamente  $r = 2,88$ , mas com os sítios globalmente acoplados com o mesmo coeficiente de acoplamento.

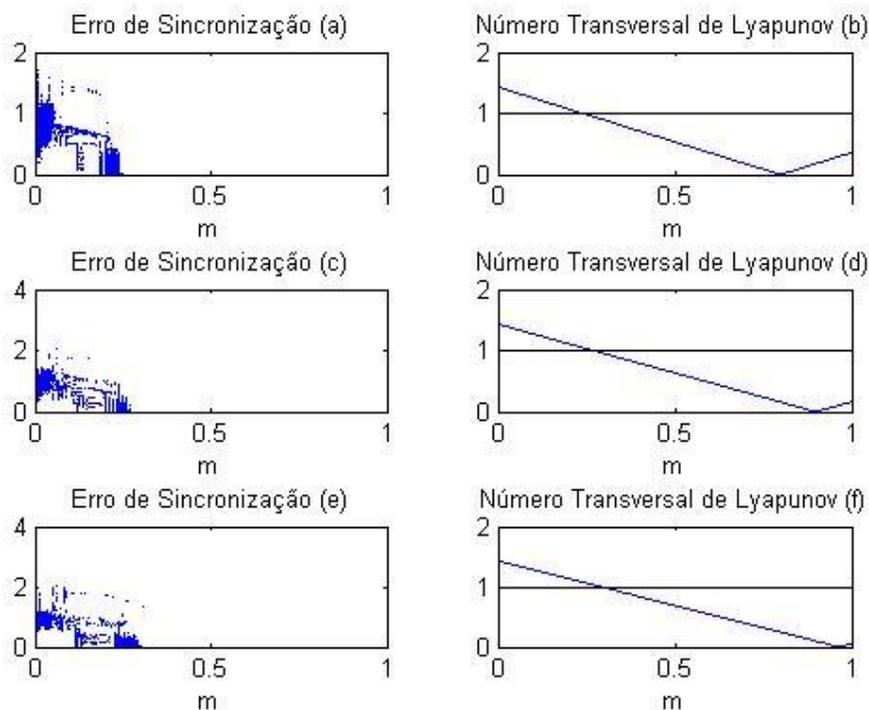


Figura 4.3: Erro de Sincronização ((a), (c) e (e)) com o respectivo Número Transversal de Lyapunov ((b), (d) e (f)) para sítios globalmente acoplados com o mesmo coeficiente, ambos em função de  $m$ . Considera-se  $r = 2,88$ . Em (a)  $N = 5$ , (c)  $N = 10$ , (e)  $N = 30$ . O fato de todos os sítios estarem acoplados com o mesmo coeficiente causa pouca variação na região de sincronização e nos valores do número transversal de Lyapunov, com o aumento do número de sítios.

Considera-se em (a) 5 sítios, (c) 10 sítios e (e) 30 sítios com o respectivo número transversal de Lyapunov (b), (d) e (f). O fato de todos os sítios estarem acoplados com o mesmo coeficiente causa pouca variação na região de sincronização e nos valores do número transversal de Lyapunov, com o aumento do número de sítios.

Na figura 4.4, apresenta-se um sistema metapopulacional com 30 sítios e  $r = 2,88$ , após o descarte de transientes. A matriz acoplamento utilizada é dada em (4.3) variando-se o coeficiente de interação entre os sítios, em (a)  $\alpha = 0,3$ , (c)  $\alpha = 0,5$  e (e)  $\alpha = 0,7$ .

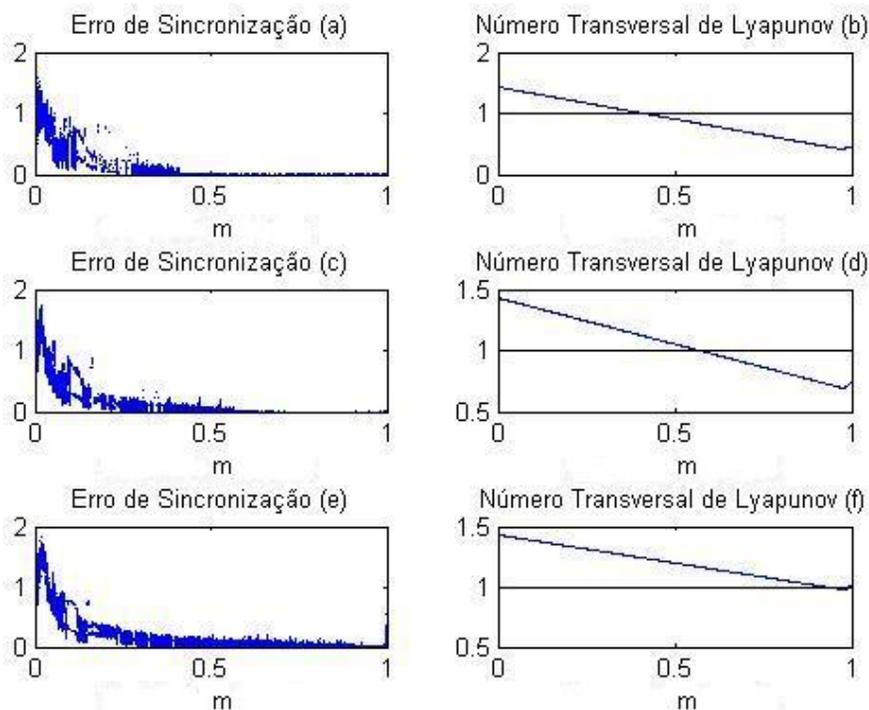


Figura 4.4: Erro de Sincronização ((a), (c) e (e)) com o respectivo Número Transversal de Lyapunov ((b), (d) e (f)), ambos em função do parâmetro  $m$ . Considera-se  $r = 2,88$  e um modelo metapopulacional com 30 sítios. Em (a)  $\alpha = 0,3$ ; (c)  $\alpha = 0,5$ ; (e)  $\alpha = 0,7$ . A diminuição na interação entre os sítios diminui a região de sincronização.

Observamos que quanto menor for a interação entre os sítios, menor é a região de sincronização, além disso, os valores do número transversal de Lyapunov são inferiores a um nas regiões de sincronização.

Em todas as simulações podemos observar uma relação entre o tamanho do erro de sincronização e o número transversal de Lyapunov, à medida que o número transversal de Lyapunov diminui aproximando-se do valor um, o erro de sincronização diminui.

Nos gráficos sítios-tempo, os sítios são numerados de 1 a  $N$  e estão ao longo do eixo vertical, enquanto no eixo horizontal temos os 30 últimos passos de tempo, após o descarte de transientes. A direita de cada gráfico sítios-tempo plotamos a

densidade populacional de um determinado sítio nos últimos 30 passos de tempo. As células  $(t, i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , são pintadas em seis tonalidades de acordo com a densidade do sítio. Para densidades altas a célula é pintada de branco e para densidades baixas a célula é pintada de preto, enquanto para densidades intermediárias as células são pintadas em tons de cinza.

Na figura 4.5, faz-se as mesmas considerações no modelo para o caso da figura 4.2, sítios acoplados em forma de anel com os dois vizinhos mais próximos,  $r = 2, 88$  e 5, 7 e 10 sítios para os casos (a), (b) e (c) respectivamente, mas com uma fração de migração fixada, neste caso,  $m = 0, 8$ .

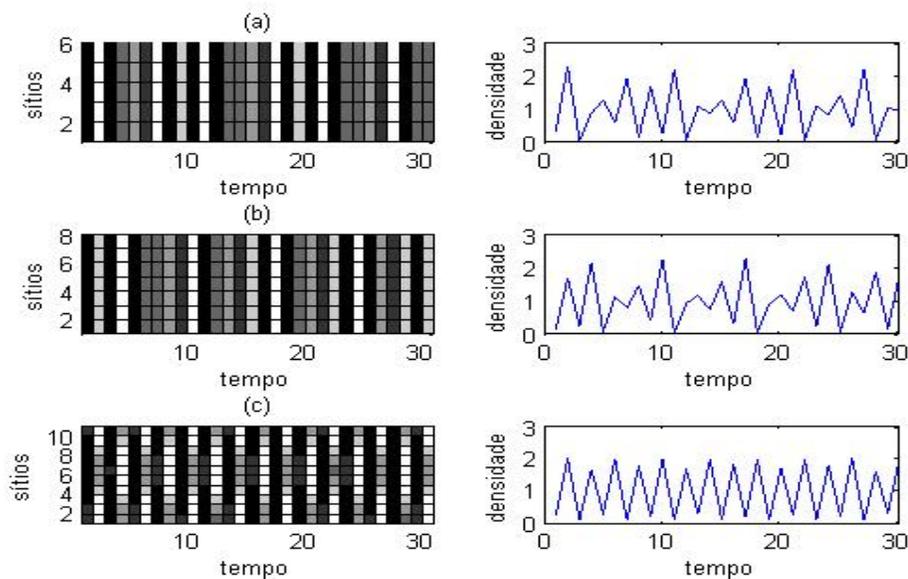


Figura 4.5: Gráficos sítios-tempo com a respectiva densidade de um fixado sítio após o descarte de transientes. Os sítios estão acoplados em forma de anel com os dois vizinhos mais próximos,  $r = 2, 88$  e  $m = 0, 8$ . (a)  $N = 5$ , (b)  $N = 7$ , (c)  $N = 10$ .

Podemos observar que para os casos (a) e (b), onde o número transversal de Lyapunov é inferior a 1, ocorre sincronização entre os sítios; enquanto para o caso (c), onde o número transversal de Lyapunov é superior a 1, não ocorre sincronização.

Na figura 4.6, considera-se em (a) e (b) um acoplamento em forma de anel com os dois vizinhos mais próximos e fração de migração  $m = 0,2$ , nesse caso  $\Lambda_1 = 0,9955$ .

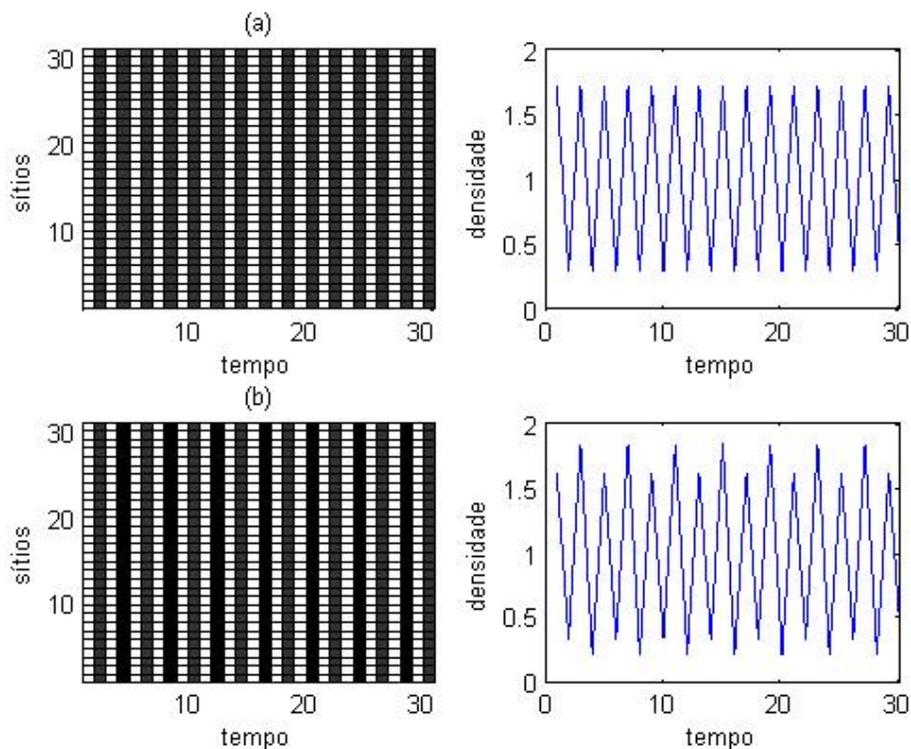


Figura 4.6: Gráficos sítios-tempo com a respectiva densidade de um fixado sítio após o descarte de transientes. (a)  $m = 0,2$ ,  $r = 2,5$ ; (b)  $m = 0,2$ ,  $r = 2,55$ . Nos dois casos o acoplamento é feito em forma de anel com os dois vizinhos mais próximos. O sistema sincroniza em ambos os casos e cada sítio apresenta o mesmo comportamento como se estivesse isolado.

Em (a) a taxa de crescimento populacional é  $r = 2,5$  que para a dinâmica de um único sítio possui órbita de período 2, e o número de Lyapunov é  $L = 0,951$ , portanto,  $L\Lambda_1 = 0,9468$ . Em (b), considera-se uma fração de migração  $m = 0,2$  e uma taxa de crescimento  $r = 2,55$  que para a dinâmica de um único sítio possui órbita de período 4. O número de Lyapunov é  $L = 0,9003$ , portanto,  $L\Lambda_1 = 0,95$ . O sistema metapopulacional sincroniza em ambos os casos e cada sítio apresenta o mesmo comportamento como se estivesse isolado.

Na figura 4.7, apresenta-se um sistema que sincroniza com aumento da interação entre os sítios, após o descarte de transientes.

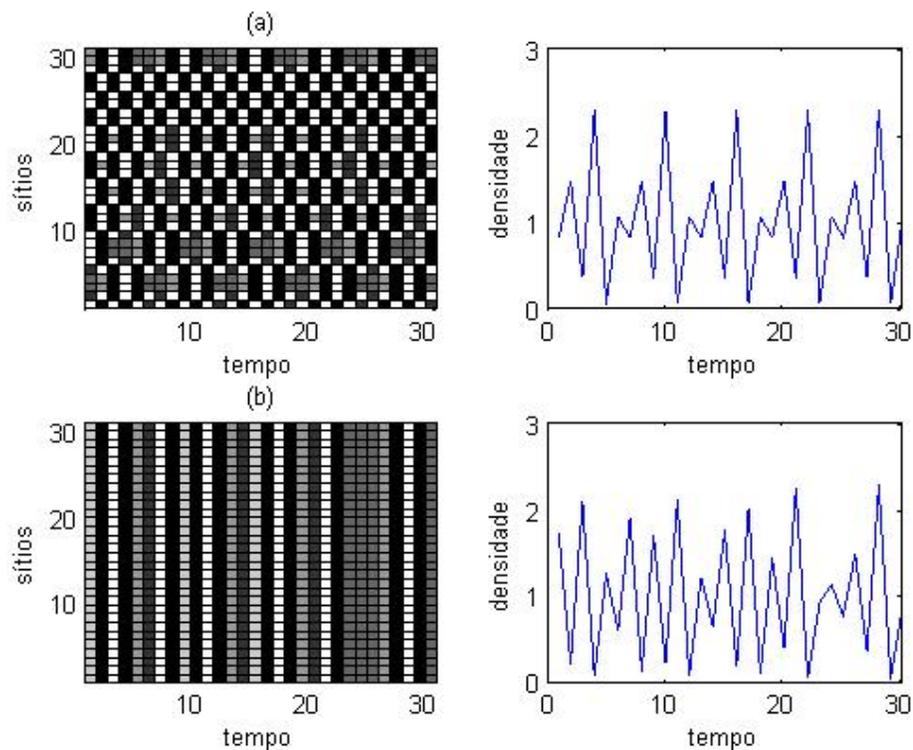


Figura 4.7: Gráficos sítios-tempo com a respectiva densidade de um fixado sítio após o descarte de transientes. (a)  $m = 0,2$ , acoplamento em forma de anel com os dois vizinhos mais próximos e  $r = 2,88$ . O sistema não sincroniza,  $L\Lambda_1 = 1,4317$ ; (b)  $m = 0,5$ , acoplamento global com mesmo coeficiente e  $r = 2,88$ , o sistema sincroniza e a densidade de cada sítio apresenta um comportamento caótico,  $L\Lambda_1 = 0,6942$ .

Em (a) foi considerado  $m = 0,2$  e  $r = 2,88$  que para a dinâmica de um sítio isolado apresenta órbita caótica ( $L = 1,4338$ ), os sítios estão acoplados em forma de anel com os dois vizinhos mais próximos. Após o descarte de 50 mil transientes o sistema não sincroniza, neste caso,  $L\Lambda_1 = 1,4317$ . Em (b), considera-se os sítios globalmente acoplados com o mesmo coeficiente,  $m = 0,5$  e  $r = 2,88$ . O valor do número transversal de Lyapunov é  $L\Lambda_1 = 0,6942$ , onde  $\Lambda_1 = 0,484$ .

Na figura 4.8, considera-se acoplamento em forma de anel com os dois vizinhos mais próximos e  $m = 0,5$ , portanto  $\Lambda_1 = 0,9891$ . As células são representadas após o descarte de 20 mil transientes.

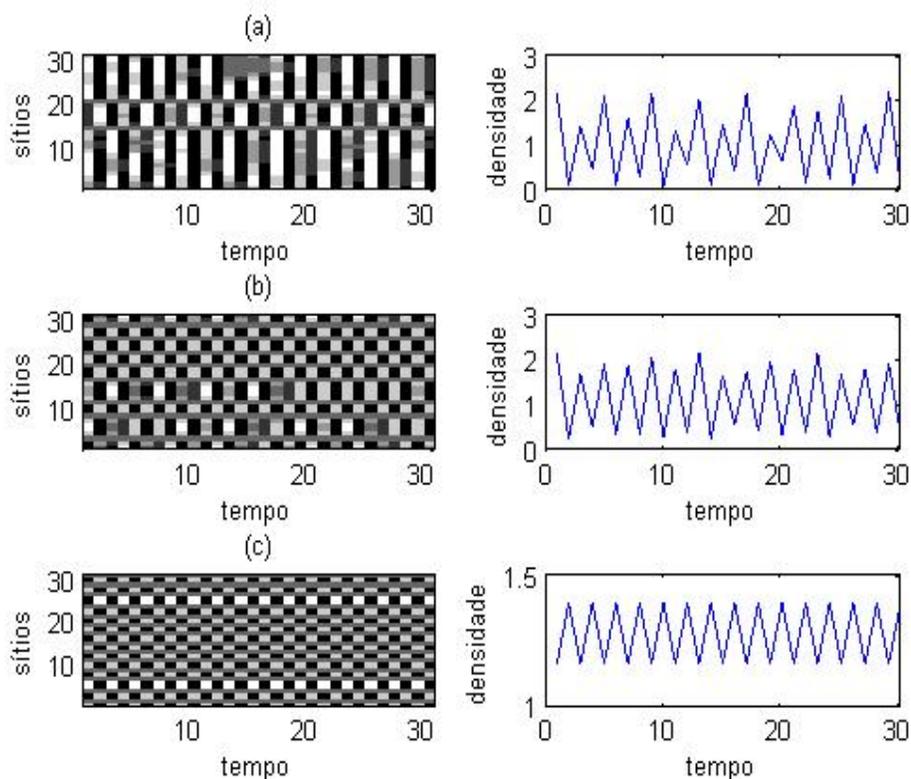


Figura 4.8: Gráficos sítios-tempo com a respectiva densidade de um fixado sítio após o descarte de transientes. Sítios acoplados em forma de anel com os dois vizinhos mais próximos e  $m = 0,5$ . O número transversal de Lyapunov é superior a 1 e o modelo metapopulacional não sincroniza em nenhum caso. Em todos os casos  $\Lambda_1 = 0,9891$ . (a)  $r = 2,84$ ,  $L\Lambda_1 = 1,36664$  (b)  $r = 3,1$ ,  $L\Lambda_1 = 1,32065$  (c)  $r = 3,85$ ,  $L\Lambda_1 = 1,74052$ .

Em todos os casos da figura acima, o valor do número transversal de Lyapunov é superior a 1 e o modelo metapopulacional não sincroniza. Em (a)  $r = 2,84$  e o número transversal de Lyapunov é dado por  $L\Lambda_1 = 1,36664$ , onde  $L = 1,3817$ . Em (b)  $r = 3,1$ ,  $L\Lambda_1 = 1,32065$ , onde  $L = 1,3352$ . Em (c)  $r = 3,85$ ,  $L\Lambda_1 = 1,74052$ , onde  $L = 1,7597$ .

Na figura 4.9, faz-se as mesmas considerações sobre o modelo metapopulacional no caso da figura 4.8, mas com os sítios globalmente acoplados e com o mesmo coeficiente de acoplamento.

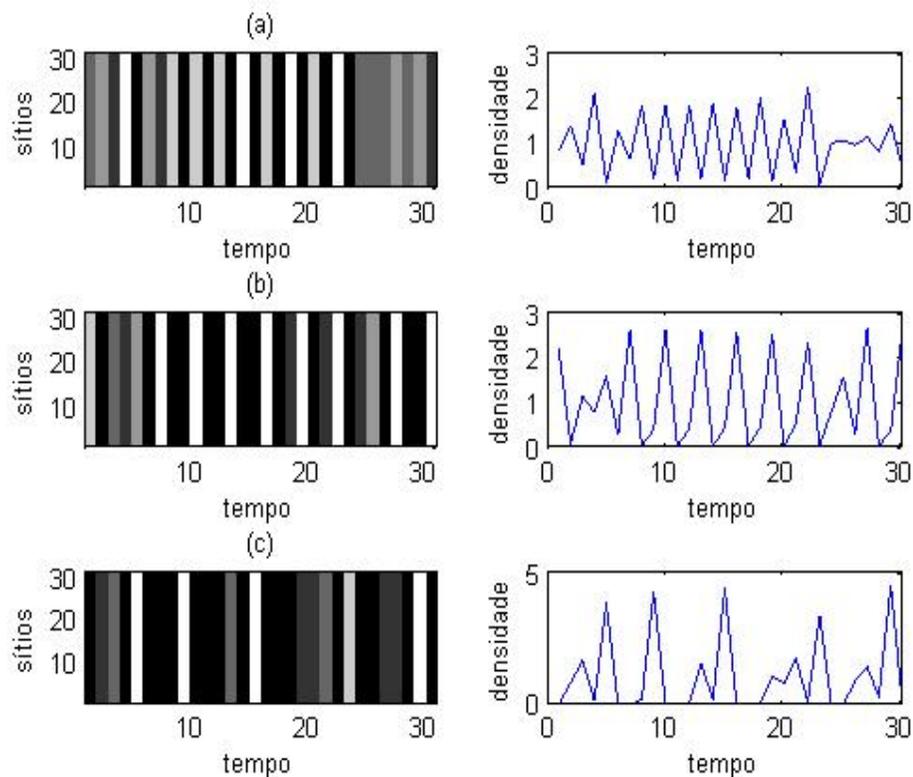


Figura 4.9: Gráficos sítios-tempo com a respectiva densidade de um fixado sítio após o descarte de transientes. Sítios globalmente acoplados com mesmo coeficiente de acoplamento. Em todos os casos  $\Lambda_1 = 0,4828$ , o número transversal de Lyapunov é inferior a 1 e ocorre sincronização. (a)  $r = 2,84$ ,  $L\Lambda_1 = 0,6671$  (b)  $r = 3,1$ ,  $L\Lambda_1 = 0,64463$  (c)  $r = 3,85$ ,  $L\Lambda_1 = 0,8496$ .

Essa alteração na forma do acoplamento causa maior interação entre os sítios, sincronizando o sistema. O valor de  $\Lambda_1$  é  $0,4828$ , conseqüentemente o valor do número transversal de Lyapunov em (a), (b) e (c) é dado por  $0,6671$ ,  $0,64463$  e  $0,8496$ , respectivamente.

Na figura 4.10, consideram-se os sítios acoplados de acordo com (4.3), variando-se o coeficiente de interação entre os sítios. Além disso,  $m = 0,5$  e  $r = 2,88$  e número de Lyapunov dado por  $L = 1,4303$ .

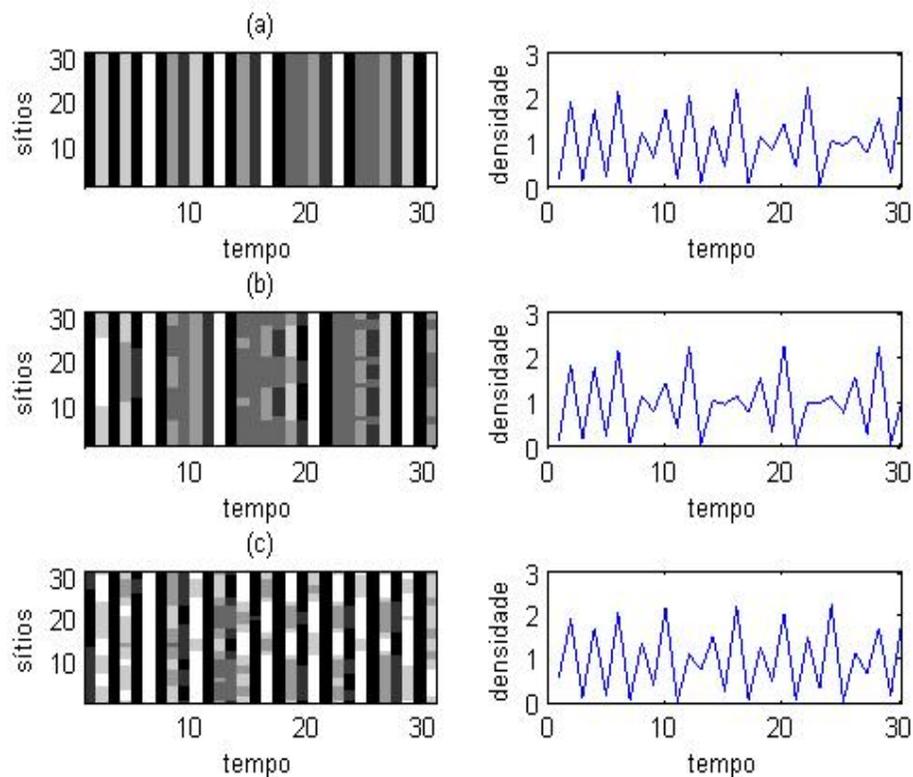


Figura 4.10: Sítios acoplados variando-se o coeficiente de interação entre os sítios,  $r = 2,88$  e  $m = 0,5$ . (a)  $\alpha = 0,3$ ,  $L\Lambda_1 = 0,9007$  (b)  $\alpha = 0,5$ ,  $L\Lambda_1 = 1,0526$  (c)  $\alpha = 0,7$ ,  $L\Lambda_1 = 1,1974$ . Em (a) o sistema sincroniza, enquanto que em (b) e (c), diminuindo a interação entre os sítios, o sistema não sincroniza.

Em (a), considera-se  $\alpha = 0,3$  e o sistema sincroniza, para esse caso  $L\Lambda_1 = 0,9007$ , onde  $\Lambda_1 = 0,6347$ . Em (b) e (c), diminuindo a interação entre os sítios, o sistema não sincroniza. Em (b),  $\alpha = 0,5$ ,  $L\Lambda_1 = 1,0526$ , onde  $\Lambda_1 = 0,7359$ . Em (c),  $\alpha = 0,7$ ,  $L\Lambda_1 = 1,1974$ , onde  $\Lambda_1 = 0,8372$ .

Na figura 4.11, apresenta-se uma simulação que, apesar do sistema estar globalmente acoplado com mesmo coeficiente, o sistema em (a) não sincroniza, mas em (b) sincroniza. Isso se deve ao fato de variarmos a quantidade de indivíduos que está migrando.

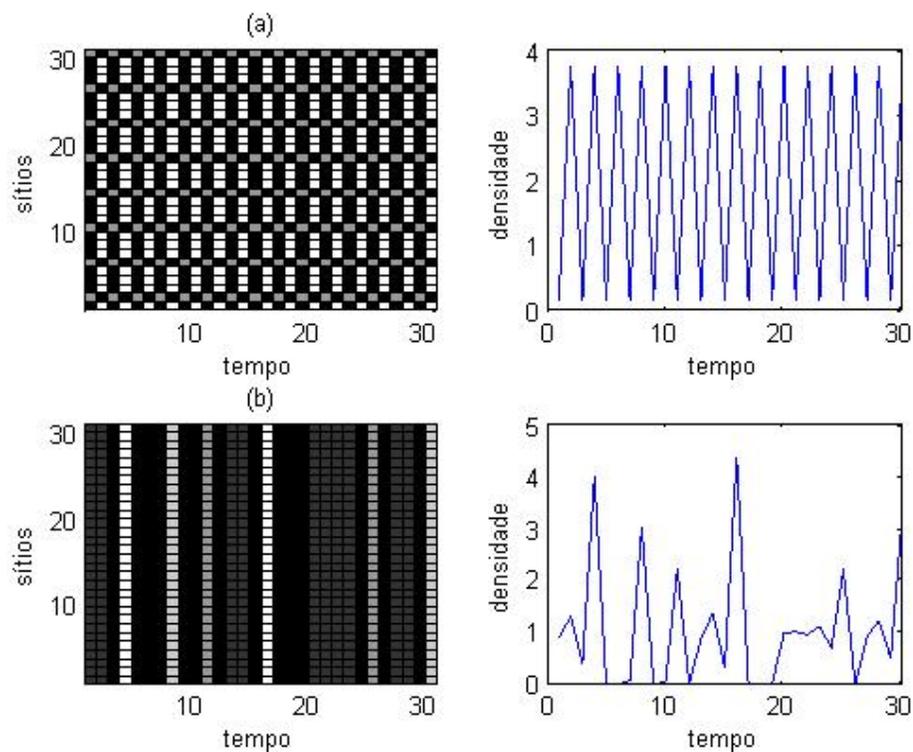


Figura 4.11: Sítios acoplados com mesmo coeficiente e  $r = 3,85$ . (a)  $m = 0,2$ ,  $L\Lambda_1 = 1,3956$ ; (b)  $m = 0,5$ ,  $L\Lambda_1 = 0,8496$ . O sistema não sincroniza em (a), mas o aumento na fração de migração sincronizar o sistema (b).

Considera-se  $r = 3,85$  que possui número de Lyapunov com valor  $L = 1,7597$ . Em (a)  $m = 0,2$ ,  $L\Lambda_1 = 1,3956$ , onde  $\Lambda_1 = 0,7931$ . Em (b)  $m = 0,5$ ,  $L\Lambda_1 = 0,8496$ , onde  $\Lambda_1 = 0,4828$ .

Podemos observar que pequena interação e aumento do número de sítios diminuem as possibilidades do modelo metapopulacional sincronizar, enquanto uma maior interação aumenta essa possibilidade.

A frequência de uma órbita, isto é, o tempo médio de permanência de uma órbita num conjunto  $E$  é dado por

$$\rho(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\#\{0 \leq i \leq t-1 : f^i(x) \in E\}}{t}. \quad (4.6)$$

Na figura 4.12, apresenta-se o cálculo da frequência de uma órbita considerando que o sistema metapopulacional está no estado sincronizado, isto é,

$$x_{t+1} = f(x_t), \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (4.7)$$

Divide-se o intervalo  $[0,5]$  em 500 partes iguais e calcula-se a frequência da órbita em cada um desses intervalos.

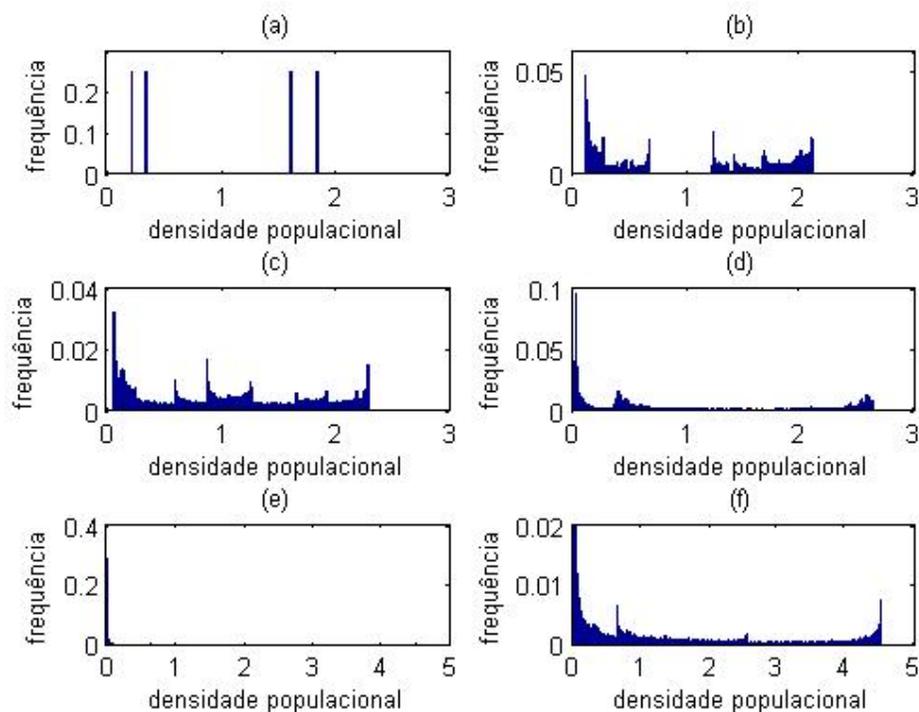


Figura 4.12: Frequência das órbitas no estado sincronizado. (a)  $r = 2,55$  (b)  $r = 2,75$  (c)  $r = 2,88$  (d)  $r = 3,09$  (e) e (f)  $r = 3,85$ .

Em (a)  $r = 2,55$ ,  $L = 0,9003$ , (b)  $r = 2,75$ ,  $L = 1,2089$ , (c)  $r = 2,88$ ,  $L = 1,431$  e (d)  $r = 3,09$ ,  $L = 1,459$ . Para visualizarmos o caso para  $r = 3,85$ , onde  $L = 1,7597$ , apresenta-se as figuras (e) e (f). Pelas considerações feitas no modelo metapopulacional, a dinâmica de cada sítio do modelo metapopulacional no estado sincronizado será a mesma de um sítio isolado. Podemos observar que a frequência de valores próximos ao zero é relativamente grande, conseqüentemente aumentando as possibilidades de extinção da metapopulação.

## 4.2 Simulações Numéricas do Modelo Metapopulacional em duas Escalas

As simulações para sincronização do modelo metapopulacional de metapopulações serão divididas em duas partes, na primeira considera-se sincronização nas duas escalas de sítios, enquanto na segunda considera-se sincronização na escala maior.

Nos gráficos sítios-tempo, os sítios estão ao longo do eixo vertical e são numerados de 1 a  $nN$ , onde os  $N$  primeiros sítios (bairros) correspondem ao sítio 1 (cidade) da segunda escala, os  $N$  seguintes sítios (bairros) ao sítio 2 da segunda escala e assim por diante. No eixo horizontal representamos os passos de tempo, após o descarte de transientes. As células são pintadas em seis cores de acordo com a densidade de cada sítio, para densidades altas a célula é pintada de branco e para densidades baixas a célula é pintada de preto, enquanto para densidades intermediárias as células são pintadas de tons cinzas.

### 4.2.1 Sincronização dos Sítios nas duas Escalas

Para obtenção de sincronização nas duas escalas, considera-se que os sítios da primeira escala estão acoplados com os dois vizinhos mais próximos em forma de

anel e com fração de migração  $m = 0,15$ . A partir disso, analisam-se diversos fatores da segunda escala de sítios que possam sincronizar o sistema.

As condições iniciais do sistema são escolhidas aleatoriamente próximas ao estado sincronizado,

$$X_0^j = (x_0 \pm 0,01\epsilon_1, x_0 \pm 0,01\epsilon_2, \dots, x_0 \pm 0,01\epsilon_N), \quad (4.8)$$

onde  $X_0^j \in \mathbb{R}^N$  e  $\epsilon_i, i = 1, \dots, N$  são valores randômicos escolhidos entre  $[-1, 1]$ .

Em todas as simulações para sincronização nas duas escalas considera-se que os coeficientes da matriz diagonal  $W$  são dados por  $\mu_i = \mu$ , para  $i = 1, \dots, N$ , e os coeficientes da matriz  $\bar{W}$  são dados por  $\mu_{i,k} = \mu/N$ , isto é,

$$\bar{W} - W = \begin{pmatrix} \frac{\mu}{N} - \mu & \frac{\mu}{N} & \dots & \frac{\mu}{N} \\ \frac{\mu}{N} & \frac{\mu}{N} - \mu & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{\mu}{N} \\ \frac{\mu}{N} & \dots & \frac{\mu}{N} & \frac{\mu}{N} - \mu \end{pmatrix}.$$

Na figura 4.13, apresentam-se valores do número transversal de Lyapunov em função do parâmetro  $r$ , neste caso, o número transversal de Lyapunov depende do produto de 2 fatores: o primeiro é o número de Lyapunov  $L$  que depende da dinâmica local de um sítio da primeira escala isolado (bairro) e o segundo ( $\Lambda_2$ ) depende da interação entre os sítios da primeira escala (bairros) e da segunda escala (cidades). Foram consideradas diferentes formas de acoplamento entre os sítios da segunda escala e diferentes frações de migração. Considera-se o modelo metapopulacional de metapopulações com 6 sítios na primeira escala (bairros) e 5 sítios na segunda escala, totalizando 30 sítios.

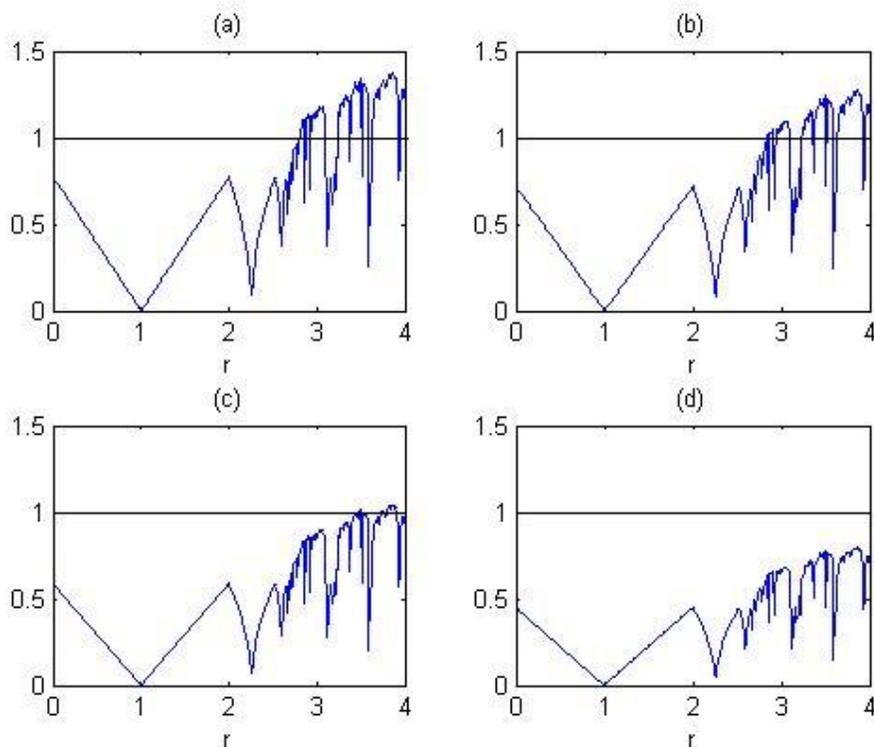


Figura 4.13: Número transversal de Lyapunov em função do parâmetro  $r$ . Considera-se o modelo metapopulacional de metapopulações com 6 sítios na primeira escala (bairros) e 5 sítios na segunda escala. (a)  $\mu = 0,2$  e (c)  $\mu = 0,5$ , acoplamento entre os sítios da segunda escala feito em forma de anel com os dois vizinhos mais próximos. (b)  $\mu = 0,2$  e (d)  $\mu = 0,5$ , sítios globalmente acoplados com mesmo coeficiente. Sincronização ocorre para os valores do número transversal de Lyapunov inferiores a 1.

Em (a) e (c), o acoplamento dos sítios da segunda escala é feito em forma de anel entre os dois vizinhos mais próximos. Considera-se para o caso (a)  $\mu = 0,2$  e (c)  $\mu = 0,5$ , o valor  $\Lambda_2$  é dado por 0,74 e 0,6054, respectivamente. Em (b) e (d), considera-se acoplamento global com mesmo coeficiente. Em (b)  $\mu = 0,2$  e em (d)  $\mu = 0,5$ , o valor de  $\Lambda_2$  é dado por 0,6845 e 0,4278, respectivamente. Sincronização ocorre para os valores do número transversal de Lyapunov inferiores a 1.

Assim como no modelo metapopulacional em uma escala, observamos que quanto maior for a interação entre os sítios, maiores são as possibilidades de sincronização.

Outra maneira de analisarmos o comportamento do modelo metapopulacional é através do erro de sincronização que é dado por

$$e_t = \frac{e_t^1 + e_t^2}{2} \quad (4.9)$$

onde

$$e_t^1 = \frac{1}{nN} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^N |x_t^{i,j} - x_t^{i+1,j}| \quad (4.10)$$

$$e_t^2 = \frac{1}{nN} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n |x_t^{i,j} - x_t^{i,j+1}| \quad (4.11)$$

onde  $x_t^{N+1,j} = x_t^{1,j}$ ,  $x_t^{i,n+1} = x_t^{i,1}$ . O valor  $e_t^1$  calcula o erro de cada sítio  $j$  da segunda escala,  $j = 1, \dots, n$ , e faz a soma, ou seja, calcula o erro de sincronização entre os bairros de cada cidade e soma; enquanto  $e_t^2$  calcula o erro de sincronização entre os sítios da segunda escala e faz a soma. Assim, obtemos sincronização nas duas escalas de sítios se  $e_t \rightarrow 0$  ao  $t \rightarrow \infty$ . Nas simulações numéricas que calculam o erro de sincronização são plotados 50 valores para uma correspondente fração de migração ( $\mu$ ), após o descarte de 5 mil transientes.

Nas figuras 4.14 e 4.15, apresenta-se o erro de sincronização e os valores do número transversal de Lyapunov, ambos em função da fração de migração  $\mu$ . Em ambas as simulações, considera-se  $N = 5$ ,  $n = 9$ , e  $r = 3,09$  que, para um único sítio da primeira escala, possui número de Lyapunov  $L = 1,459$ . O erro de sincronização é calculado variando-se o coeficiente de interação entre os sítios ( $\alpha$ ) da matriz  $C$ , definida de forma idêntica à matriz  $\Gamma$  em (4.3).

Na figura 4.14, considera-se em (a)  $\alpha = 0$ , ou seja, os sítios da segunda escala estão globalmente acoplados com mesmo coeficiente, em (c) e (e) o coeficiente  $\alpha$  é dado por 0,3 e 0,5, respectivamente. Além disso, as regiões de sincronização estão de acordo com os valores do número transversal de Lyapunov apresentados em (b), (d) e (f).

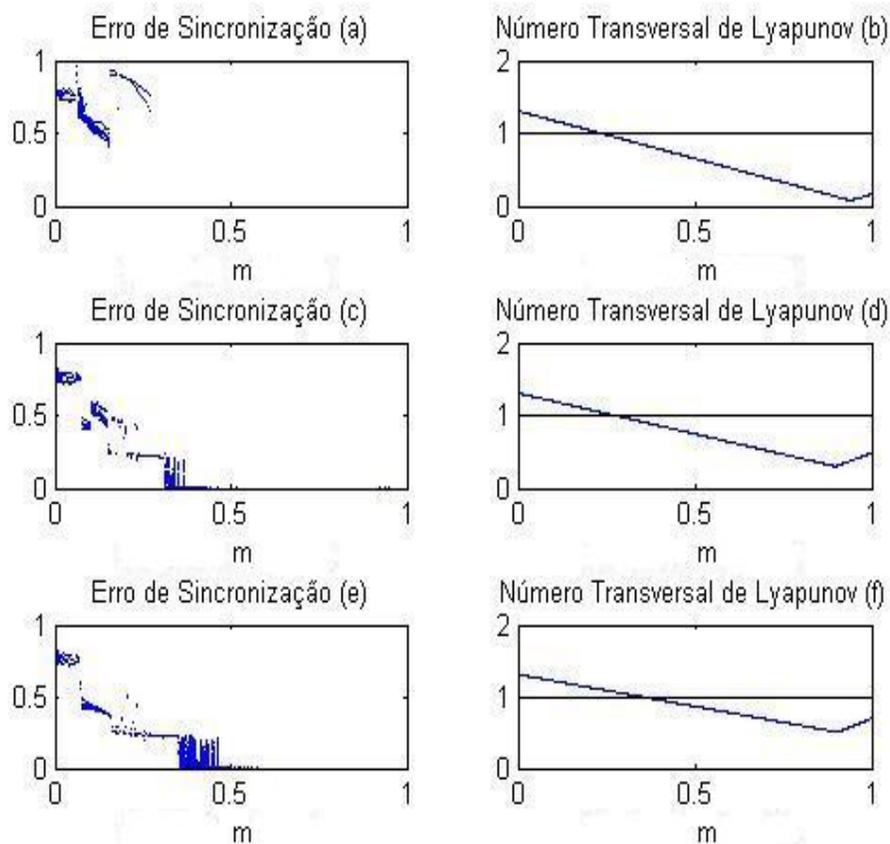


Figura 4.14: Erro de Sincronização ((a), (c) e (e)) com o respectivo número transversal de Lyapunov ((b), (d) e (f)), ambos em função do parâmetro  $\mu$ . Considera-se  $r = 3,09$ ,  $n = 9$ ,  $N = 5$  e varia-se o coeficiente de acoplamento da matriz  $C$ . (a)  $\alpha = 0$ , (c)  $\alpha = 0,3$ , (e)  $\alpha = 0,5$ . A redução na interação entre os sítios diminui a região de sincronização.

Na figura 4.15, em (a) e (c),  $\alpha$  é dado por 0,7 e 0,8, respectivamente. Em (e), considera-se  $\alpha = 1$ , ou seja, o sistema está acoplado em forma de anel com os dois vizinhos mais próximos. Podemos observar em (e) que, independente da fração de migração, o sistema não sincroniza.

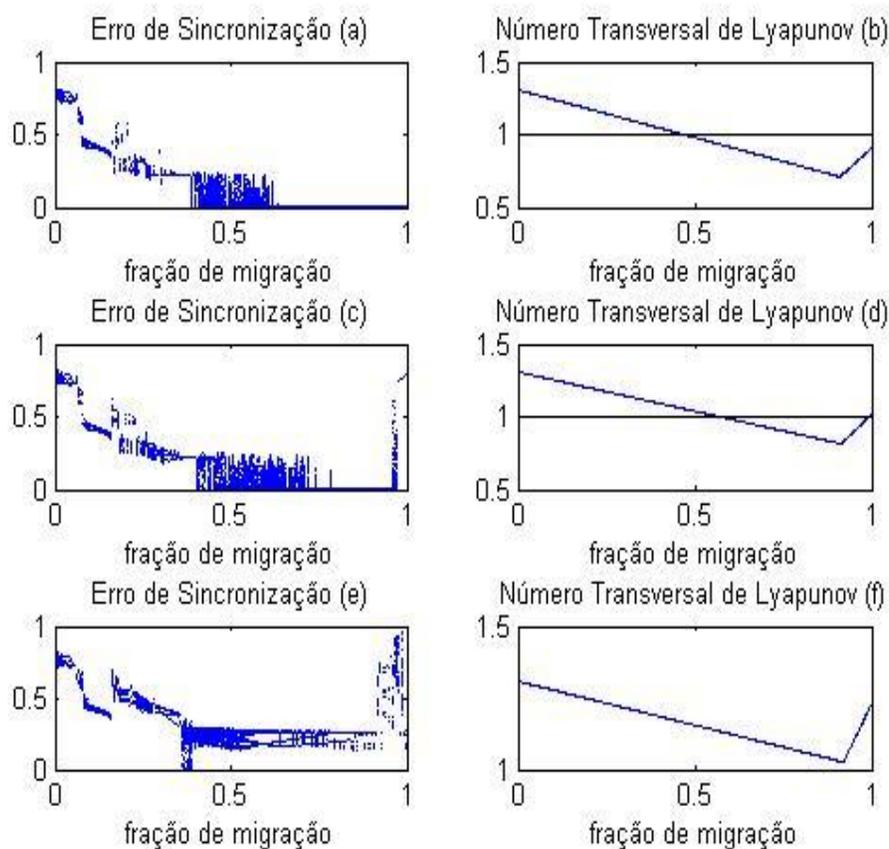


Figura 4.15: Erro de Sincronização ((a), (c) e (e)) com o respectivo número transversal de Lyapunov ((b), (d) e (f)), ambos em função do parâmetro  $\mu$ . Considera-se  $r = 3,09$ ,  $n=9$  e  $N=5$  e varia-se o coeficiente de acoplamento da matriz  $C$ . (a)  $\alpha = 0,7$ , (c)  $\alpha = 0,8$ , (e)  $\alpha = 1$ . A redução na interação entre os sítios diminui a região de sincronização e para  $\alpha = 1$  não ocorre sincronização.

Na figura 4.16, apresentam-se os gráficos sítios-tempo e são feitas as mesmas considerações para o modelo do caso da figura 4.13(a), mas com fração de migração  $\mu$  constante. Em (a)  $\mu = 0,2$  e em (b)  $\mu = 0,5$ . Em (a) não ocorre sincronização e o valor do número transversal de Lyapunov é  $L\Lambda_2 = 1,0462$ , onde  $L = 1,459$ ,  $\Lambda_2 = 0,7171$ . Em (b) o sistema sincroniza, neste caso,  $L\Lambda_2 = 0,6539$ , onde  $\Lambda_2 = 0,4482$ .

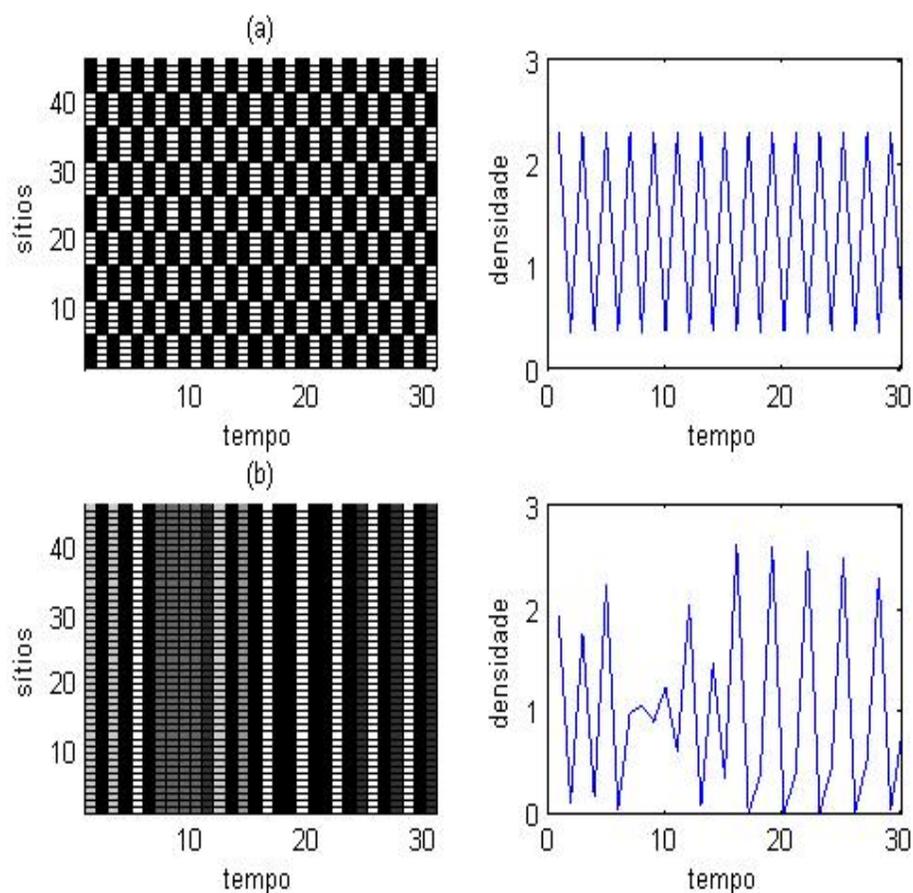


Figura 4.16: Gráficos sítios-tempo e densidade-tempo e são feitas as mesmas considerações para o modelo do caso da figura 4.13(a), mas com  $\mu$  constante. (a)  $\mu = 0,2$ ,  $L\Lambda_2 = 1,0462$  e o sistema não sincroniza (b)  $\mu = 0,5$ ,  $L\Lambda_2 = 0,6539$  e o sistema sincroniza, após o descarte de 20 mil transientes.

Na figura 4.17, em (a) e (b) são apresentados os gráficos sítios-tempo e são feitas as mesmas considerações no modelo dos casos das figuras 4.15(b) e 4.15(c) respectivamente, mas com fração de migração constante  $\mu = 0,85$ . Em (a), os sítios sincronizam e o valor do número transversal de Lyapunov é  $L\Lambda_2 = 0,8497$ , onde  $L = 1,459$  e  $\Lambda_2 = 0,5824$ . Em (b), não ocorre sincronização e o valor do número transversal de Lyapunov é  $L\Lambda_2 = 1,0477$ , onde  $L = 1,459$  e  $\Lambda_2 = 0,7181$ .

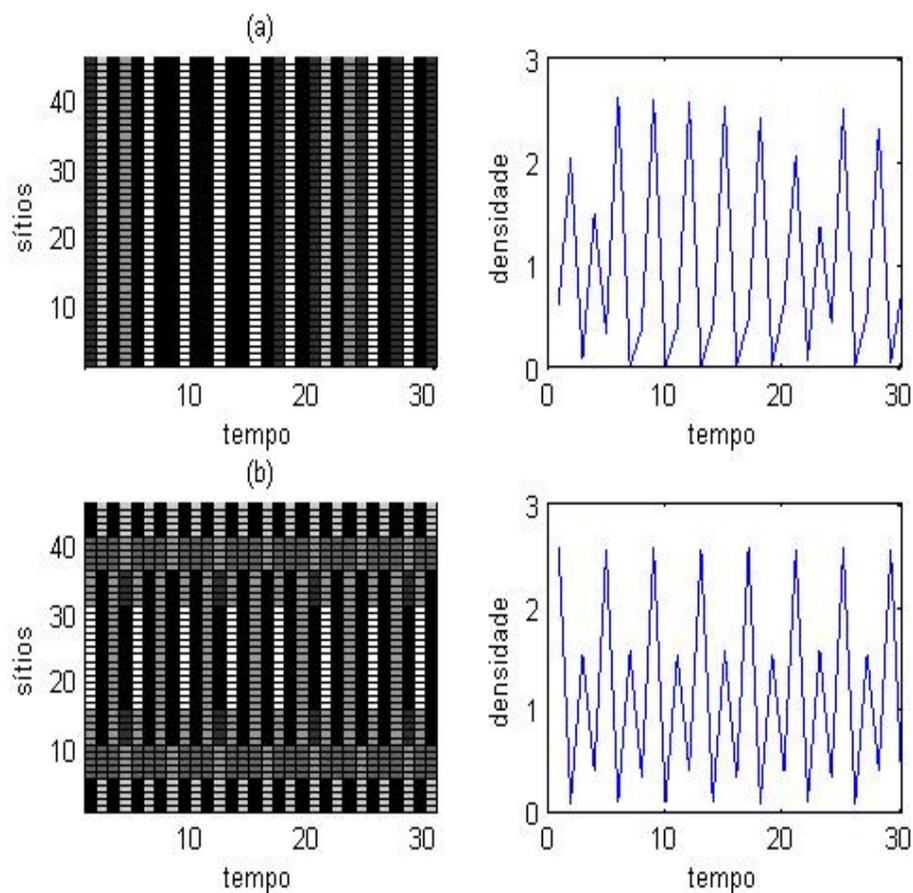


Figura 4.17: Gráficos sítios-tempo e densidade-tempo após o descarte de 20 mil transientes. Em (a) e (b) são feitas as mesmas considerações que nos casos das figuras 4.15(b) e 4.15(c) respectivamente, mas com fração de migração constante  $\mu = 0,85$ . Em (a) os sítios sincronizam e  $L\Lambda_2 = 0,8497$ . Em (b) não ocorre sincronização e  $L\Lambda_2 = 1,0477$ .

Na figura 4.18, apresentam-se dois sistemas populacionais que sincronizam.

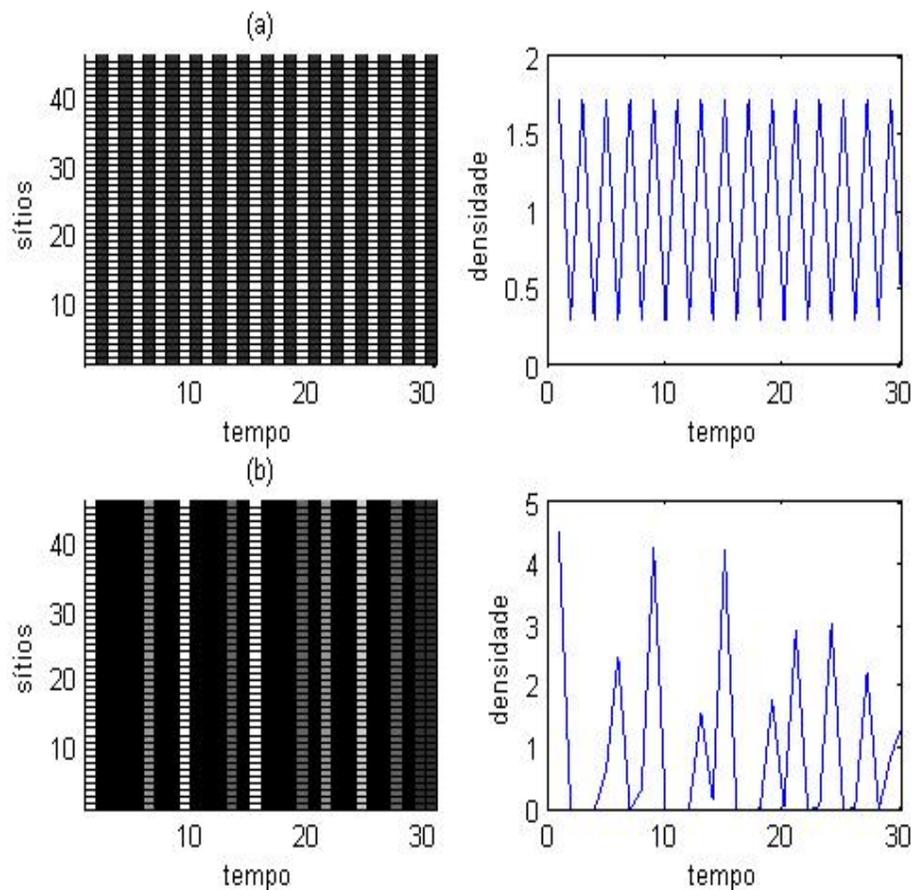


Figura 4.18: Gráficos sítios-tempo e densidade-tempo. Matriz acoplamento  $C$  com coeficiente de acoplamento  $\alpha = 0,5$ . (a)  $\mu = 0,5$ ,  $r = 2,5$  e  $L\Lambda_2 = 0,5628$ ; (b)  $\mu = 0,5$ ,  $r = 3,85$  e  $L\Lambda_2 = 0,8964$ .

Em ambos os casos a matriz acoplamento  $C$  tem coeficiente de acoplamento  $\alpha = 0,5$ . Em (a)  $\mu = 0,5$ ,  $r = 2,5$  e cada sítio possui órbita periódica que é a mesma de um sítio isolado, o valor do número transversal de Lyapunov é  $L\Lambda_2 = 0,5628$ , onde  $L = 0,951$  e  $\Lambda_2 = 0,5919$ . Em (b)  $\mu = 0,85$  e  $r = 3,85$ , os sítios sincronizam e a densidade de cada sítio apresenta um comportamento caótico. O valor do número transversal de Lyapunov é  $L\Lambda_2 = 0,8964$ , onde  $L = 1,7597$  e  $\Lambda_2 = 0,3786$ .

Nas próximas duas figuras são feitas variações no número de sítios da primeira e da segunda escalas. Em todos os casos a matriz acoplamento  $C$  é dada com  $\alpha = 0,5$ . Além disso,  $r = 3,09$  que para um sítio da primeira escala isolado, possui número de Lyapunov dado por  $L = 1,459$ .

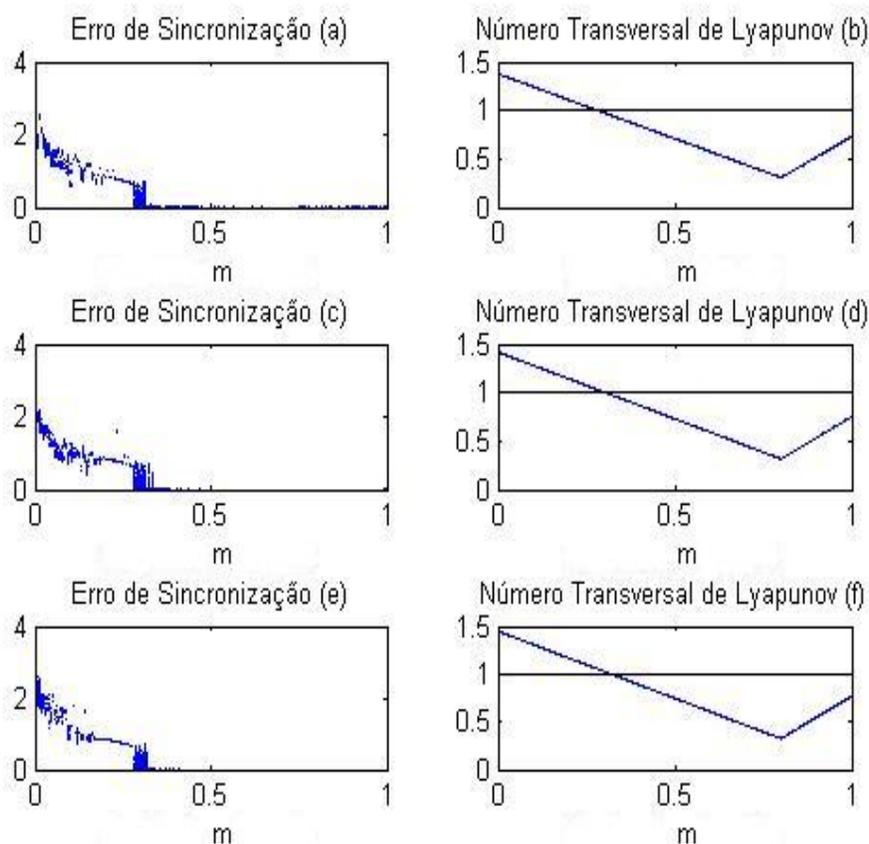


Figura 4.19: Erro de Sincronização e Número Transversal de Lyapunov, ambos em função do parâmetro  $\mu$ . Matriz acoplamento  $C$  com  $\alpha = 0,5$ ,  $r = 3,09$  e  $n = 5$ . (a)  $N = 5$ , (b)  $N = 10$  e (c)  $N = 20$ .

Na figura 4.19, considera-se  $n = 5$  e varia-se o número de sítios da primeira escala: (a)  $N = 5$ , (b)  $N = 10$  e (c)  $N = 20$ . O aumento do números de sítios da primeira escala não causa grande variação na região de sincronização nem nos valores do número transversal de Lyapunov.

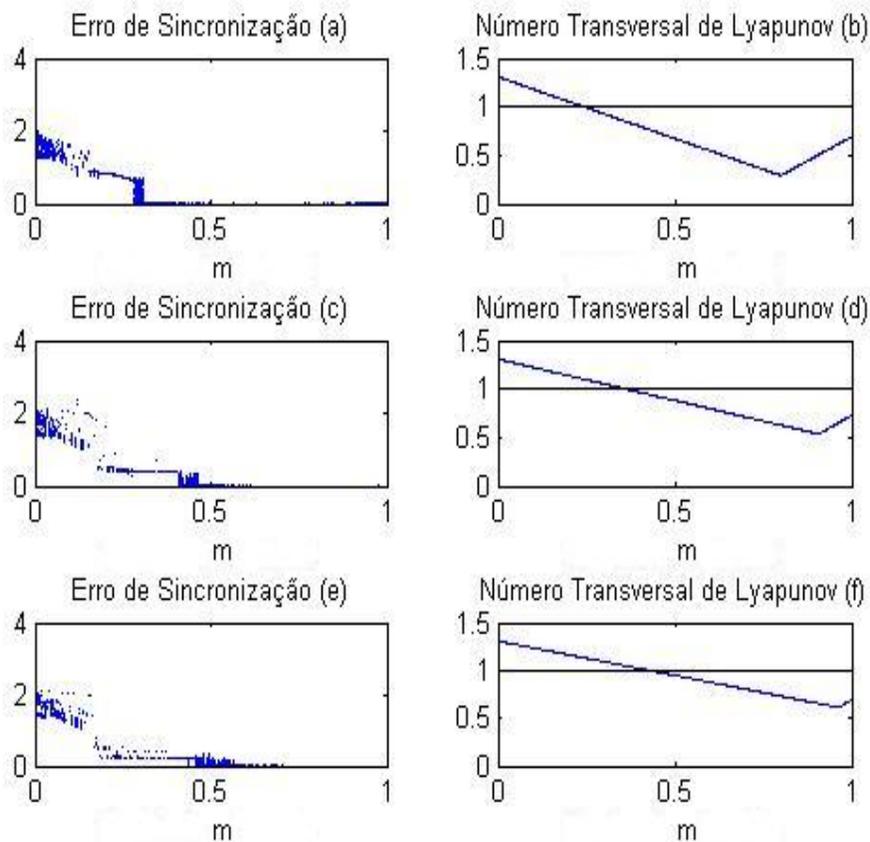


Figura 4.20: Erro de Sincronização e Número Transversal de Lyapunov, ambos em função do parâmetro  $\mu$ . Matriz acoplamento com  $\alpha = 0.5$ ,  $r = 3.09$  e  $N = 5$  (a)  $n = 5$ , (b)  $n = 10$  e (c)  $n = 20$ .

Na figura 4.20, considera-se  $N = 5$  e varia-se o número de sítios da segunda escala: (a)  $n = 5$ , (b)  $n = 10$  e (c)  $n = 20$ . À medida que o número de sítios da segunda escala aumenta, a região de sincronização diminui e os valores do número transversal de Lyapunov aumentam. Neste caso, o aumento do número de sítios da segunda escala diminui a região de sincronização.

### 4.2.2 Sincronização dos Sítios na Escala Maior

Para obtenção de sincronização na escala maior, considera-se que os sítios da primeira escala estão acoplados com os dois vizinhos mais próximos em forma de anel. A partir disso, analisam-se diversos fatores da segunda escala para obtermos sincronização. Os valores do número transversal de Lyapunov de sincronização são calculados utilizando o algoritmo descrito no Apêndice B.

Para analisarmos o comportamento do modelo metapopulacional obtendo regiões de sincronização, calcula-se o erro de sincronização que é dado por

$$e_t = \frac{1}{nN} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n |x_t^{i,j} - x_t^{i,j+1}|, \quad (4.12)$$

onde  $x_t^{i,n+1} = x_t^{i,1}$ ,  $e_t$  é o erro de sincronização entre os sítios da segunda escala. Assim, obtemos sincronização na segunda escala de sítios se  $e_t \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

As condições iniciais do sistema são escolhidas aleatoriamente próximas ao estado sincronizado

$$X_0^j = (x_0^1 \pm 0,01\epsilon_1, x_0^2 \pm 0,01\epsilon_2, \dots, x_0^N \pm 0,01\epsilon_N), \quad (4.13)$$

onde  $X_0^j \in \mathbb{R}^N$  e  $\epsilon_i, i = 1, \dots, N$ , são valores randômicos escolhidos entre  $[-1, 1]$ .

Na figura 4.21, apresenta-se o erro de sincronização ((a) e (c)) com o respectivo número transversal de Lyapunov ((b) e (d)), ambos em função do parâmetro  $\mu$ . Em (a)  $n = 3$  e em (c)  $n = 5$ . Considera-se que os sítios estão acoplados com coeficiente de acoplamento  $\alpha = 0,5$ , fração de migração dos sítios da primeira escala  $m = 0,25$ ,  $r = 3,09$ ,  $N = 5$ . A matriz  $\overline{W} - W$  de dimensão  $5 \times 5$  é dada por

$$\overline{W} - W = \begin{pmatrix} \frac{\mu}{5} - \mu & \frac{\mu}{2*5} & \frac{\mu}{3*5} & \frac{\mu}{4*5} & \frac{\mu}{5*5} \\ \frac{\mu}{5} & \frac{\mu}{2*5} - \frac{\mu}{2} & \frac{\mu}{3*5} & \frac{\mu}{4*5} & \frac{\mu}{5*5} \\ \frac{\mu}{5} & \frac{\mu}{2*5} & \frac{\mu}{3*5} - \frac{\mu}{3} & \frac{\mu}{4*5} & \frac{\mu}{5*5} \\ \frac{\mu}{5} & \frac{\mu}{2*5} & \frac{\mu}{3*5} & \frac{\mu}{4*5} - \frac{\mu}{4} & \frac{\mu}{5*5} \\ \frac{\mu}{5} & \frac{\mu}{2*5} & \frac{\mu}{3*5} & \frac{\mu}{4*5} & \frac{\mu}{5*5} - \frac{\mu}{5} \end{pmatrix}.$$

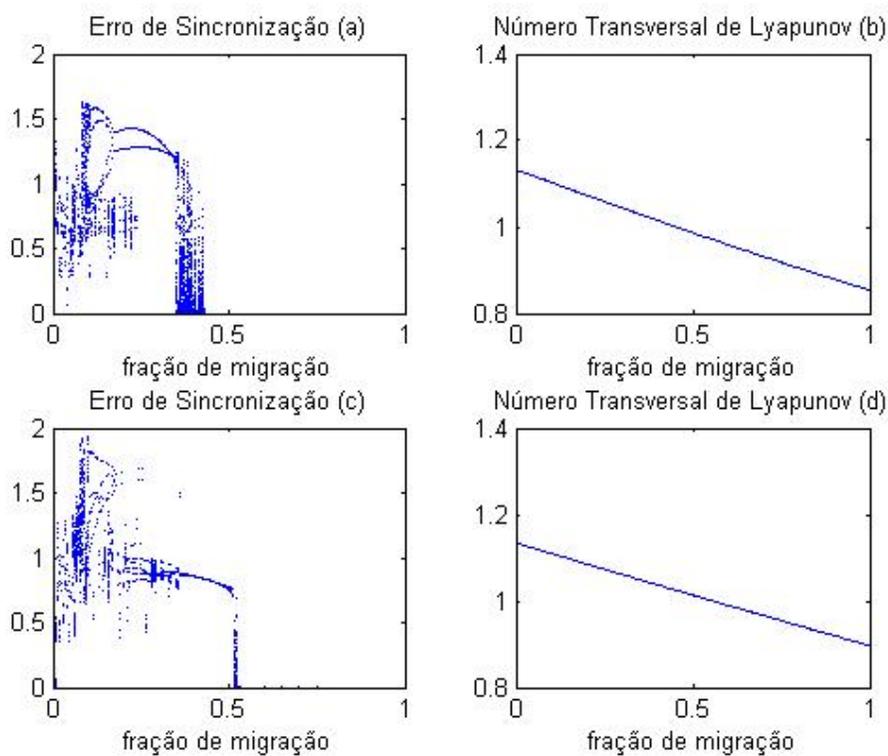


Figura 4.21: Erro de sincronização e número transversal de Lyapunov, ambos em função do parâmetro  $\mu$ . Em todos os casos  $r = 3,09$ ,  $m = 0,25$  e os sítios acoplados com coeficiente de acoplamento  $\alpha = 0,5$ . (a)  $n = 3$ ,  $N = 5$  e (c)  $n = 5$ ,  $N = 5$ , com os respectivos números transversais de Lyapunov (b) e (d).

Na figura 4.22, apresentam-se os gráficos sítios-tempo fazendo-se as mesmas considerações do caso da figura 4.21(a), mas com fração de migração fixada. Para verificarmos que as cidades estão sincronizadas devemos olhar para as células de 5 em 5, já que as 5 primeiras células correspondem à primeira cidade, as 5 células seguintes à segunda cidade e as 5 últimas à terceira cidade, para cada passo de tempo.

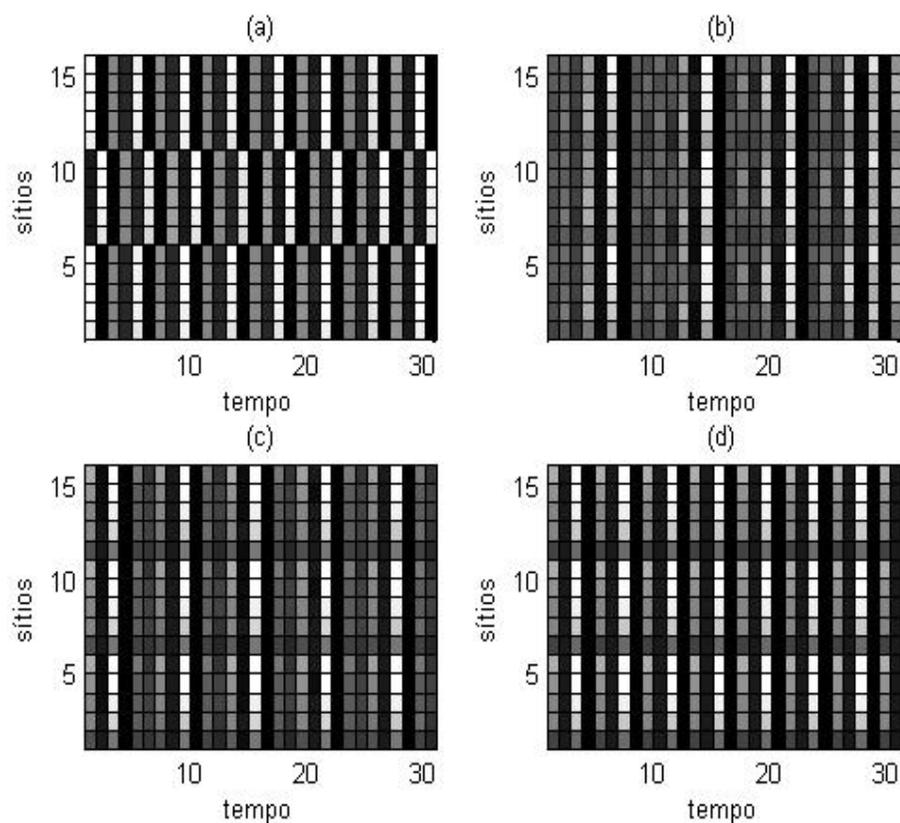


Figura 4.22: Gráficos sítios-tempo para fixados valores de  $\mu$ . Em todos os casos  $m = 0,25$ ,  $n = 3$ ,  $N = 5$ ,  $r = 3,09$  e sítios acoplados com coeficiente de acoplamento  $\alpha = 0,5$ . (a)  $\mu = 0,1$ ,  $K = 1,1031$ ; (b)  $\mu = 0,5$ ,  $K = 0,9865$ ; (c)  $\mu = 0,75$ ,  $K = 0,9181$ ; (d)  $\mu = 0,9$ ,  $K = 0,8791$ .

Em (a)  $\mu = 0,1$  e não ocorre sincronização na escala maior, o número transversal de Lyapunov é dado por  $K = 1,1031$ . Em (b)  $\mu = 0,5$ , em (c)  $\mu = 0,75$  e em (d)  $\mu = 0,9$  e ocorre sincronização na escala maior, o número de Lyapunov é dado por  $0,9865$ ,  $0,9181$  e  $0,8791$ , respectivamente.

Na figura 4.23, apresentam-se os gráficos sítios-tempo fazendo-se as mesmas considerações do caso da figura 4.21(c), mas com fração de migração constante.

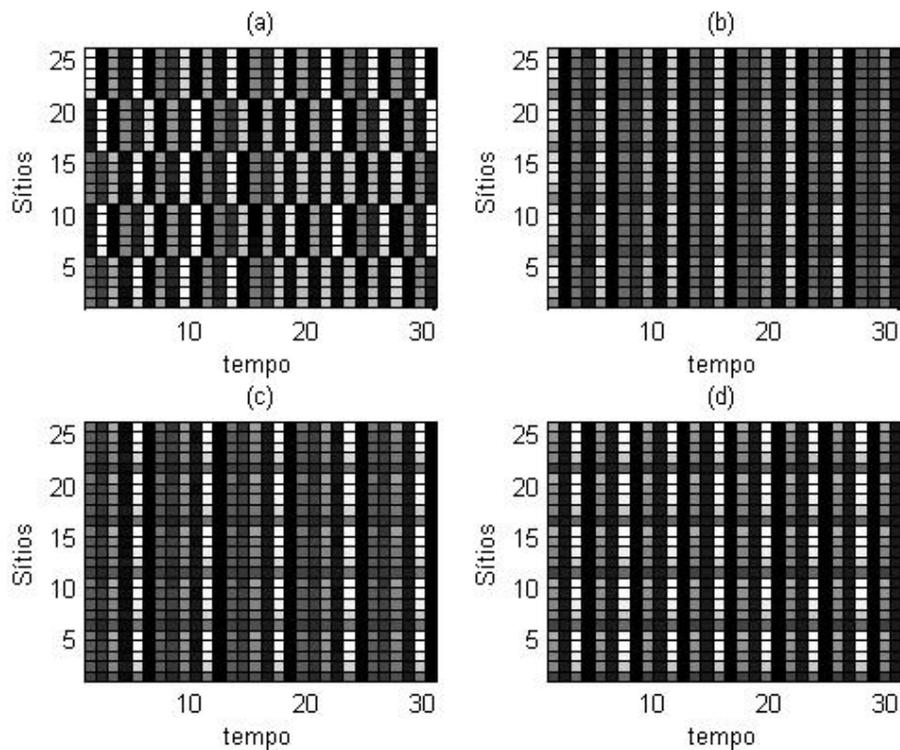


Figura 4.23: Gráficos sítios-tempo para valores fixados de  $\mu$ . Em todos os casos  $n = 5$ ,  $N = 5$ ,  $r = 3,09$  e sítios da segunda escala acoplados com coeficiente de acoplamento  $\alpha = 0,5$ . (a)  $\mu = 0,1$ ,  $K = 1,11$ ; (b)  $\mu = 0,6$ ,  $K = 0,9896$ ; (c)  $\mu = 0,75$ ,  $K = 0,9548$ ; (d)  $\mu = 0,9$ ,  $K = 0,9198$ .

Em (a)  $\mu = 0,1$  e não ocorre sincronização na escala maior, o critério de sincronização é dado por  $K = 1,11$ . Em (b)  $\mu = 0,6$ , em (c)  $\mu = 0,75$  e em (d)  $\mu = 0,9$  e ocorre sincronização na escala maior, o número transversal de Lyapunov é dado por 0,9896, 0,9548 e 0,9198, respectivamente.

Na figura 4.24, apresenta-se o erro de sincronização ((a) e (c)) com o respectivo número transversal de Lyapunov ((b) e (d)), ambos em função do parâmetro  $\mu$ . Em (a)  $n = 3$  e em (c)  $n = 5$ . Considera-se que os sítios estão globalmente acoplados

com mesmo coeficiente, fração de migração dos sítios da primeira escala  $m = 0,03$ , taxa de crescimento populacional  $r = 3,09$ , número de sítios da primeira escala  $N = 5$ . A matriz  $\bar{W} - W$  de dimensão  $5 \times 5$  é dada por

$$\bar{W} - W = \begin{pmatrix} \frac{\mu}{5} - \mu & \frac{\mu}{5} & \dots & \frac{\mu}{5} \\ \frac{\mu}{5} & \frac{\mu}{5} - \mu & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{\mu}{5} \\ \frac{\mu}{5} & \dots & \frac{\mu}{5} & \frac{\mu}{5} - \mu \end{pmatrix}.$$

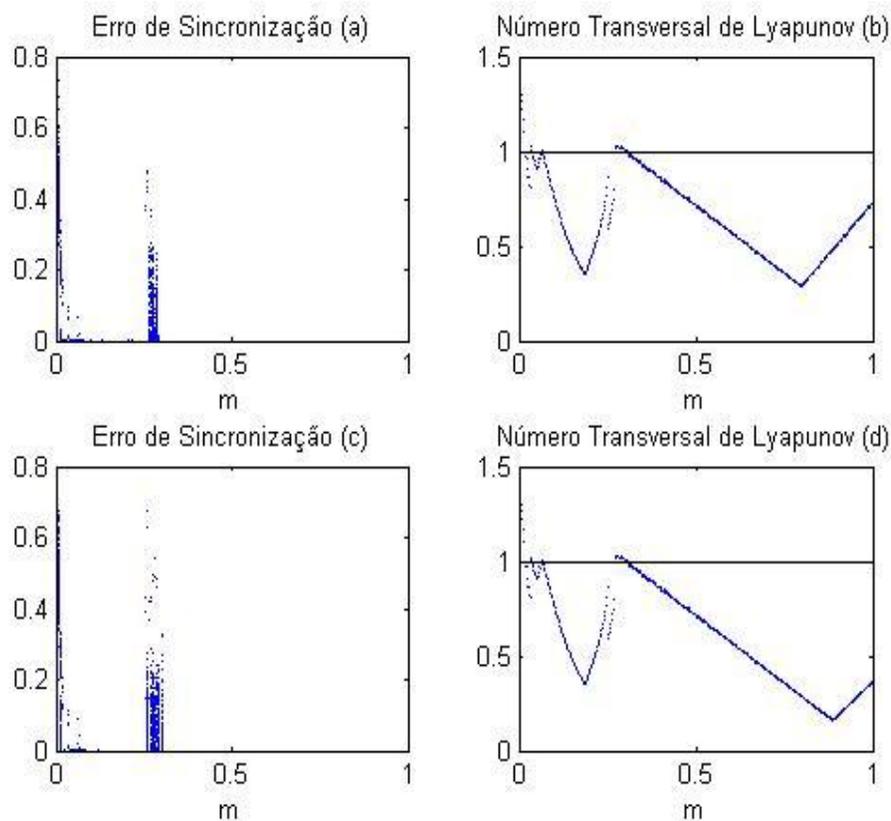


Figura 4.24: Erro de sincronização ((a) e (c)) e respectivo número transversal de Lyapunov ((b) e (d)), ambos em função do parâmetro  $\mu$ . Em todos os casos  $r = 3,09$  e os sítios da segunda escala globalmente acoplados com mesmo coeficiente. (a)  $n = 3$ ,  $N = 5$  e (c)  $N = 5$ ,  $n = 5$  com os respectivos números transversais de Lyapunov (b) e (d).

Podemos observar que ocorre sincronização na escala maior mesmo com pouca interação entre os sítios.

Na figura 4.25, apresenta-se os gráficos sítios-tempo fazendo-se as mesmas considerações do caso da figura 4.24(a), mas com fração de migração constante.

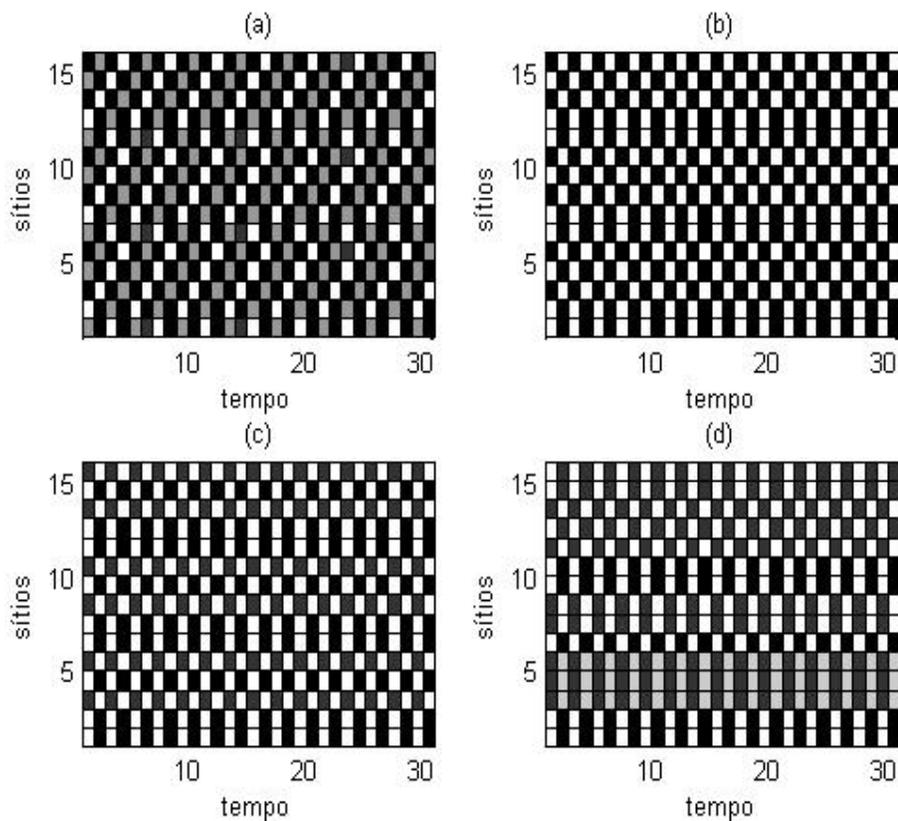


Figura 4.25: Gráficos sítios-tempo para valores fixados de  $\mu$ . Em todos os casos  $n = 3$ ,  $N = 5$ ,  $r = 3,09$  e sítios globalmente acoplados com mesmo coeficiente de acoplamento. (a)  $\mu = 0,018$ ,  $K = 0,9912$ ; (b)  $\mu = 0,1$ ,  $K = 0,7563$ ; (c)  $\mu = 0,2$ ,  $K = 0,417$ ; (d)  $\mu = 0,28$ ,  $K = 1,0244$ .

Em (a)  $\mu = 0,018$ , (b)  $\mu = 0,1$ , (c)  $\mu = 0,2$ , ocorre sincronização na escala maior, o valor do número transversal de Lyapunov é dado por 0,9912, 0,7563, 0,417, respectivamente. Em (d)  $\mu = 0,28$ , não ocorre sincronização na escala maior e o valor do número transversal de Lyapunov é dado por 1,0244.

Na figura 4.26, apresenta-se os gráficos sítios-tempo fazendo-se as mesmas considerações do caso da figura 4.24(c), mas com fração de migração constante.

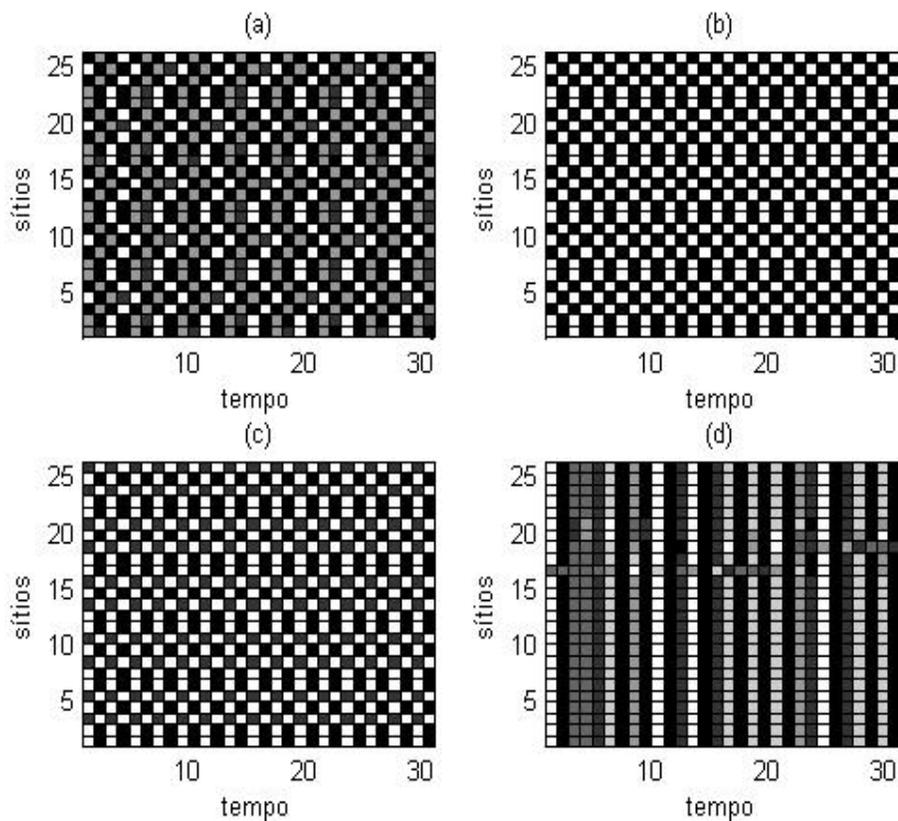


Figura 4.26: Gráficos sítios-tempo para valores fixados de  $\mu$ . Em todos os casos  $n = 5$ ,  $N = 5$ ,  $r = 3,09$  e sítios globalmente acoplados com o mesmo coeficiente. (a)  $\mu = 0,016$ ,  $K = 0,9763$ ; (b)  $\mu = 0,1$ ,  $K = 0,7649$ ; (c)  $\mu = 0,2$ ,  $K = 0,4171$ ; (d)  $\mu = 0,28$ ,  $K = 1,0243$ .

Em (a)  $\mu = 0,016$ , (b)  $\mu = 0,1$ , (c)  $\mu = 0,2$ , ocorre sincronização na escala maior, o valor do número transversal de Lyapunov é dado por 0,9763, 0,7649, 0,4171, respectivamente. Em (d)  $\mu = 0,28$ , não ocorre sincronização na escala maior e o valor do número transversal de Lyapunov é dado por 1,0243.

Em todos os casos as regiões do erro de sincronização estão de acordo com os valores do número transversal de Lyapunov.

## 5 CONCLUSÕES

Vários trabalhos dão destaque a sincronização de sistemas metapopulacionais, já que segundo Earn et al. [13] ela está fortemente correlacionada com a extinção da metapopulação, dessa forma, resultados de vários estudos podem levantar informações úteis para evitá-la.

Neste trabalho, foi considerado um modelo metapopulacional distribuído em duas escalas de sítios e fenômenos de sincronização foram analisados, em cada sítio consideramos que existe apenas uma população.

Primeiramente, consideramos um modelo metapopulacional composto por um número arbitrário de sítios e obtemos um critério para sincronização que é determinado por dois parâmetros: número de Lyapunov que depende da dinâmica local de um sítio e outro dependendo da interação entre os sítios. Esse resultado é o mesmo obtido por Earn et al. [13]. Diversas simulações numéricas são apresentadas verificando esse critério, além disso, as simulações mostram que no estado sincronizado a densidade populacional oscila com bastante frequência próxima ao zero, conseqüentemente podendo levar a extinção da metapopulação.

A partir disso, consideramos um modelo metapopulacional com sítios distribuídos em duas escalas, a primeira é composta por uma metapopulação, enquanto a segunda é composta por um número arbitrário de metapopulações, formando uma metapopulação de metapopulações. Nós analisamos dois tipos de sincronização para esse caso: no primeiro consideramos sincronização nas duas escalas de sítios e no segundo consideramos sincronização na segunda escala com os sítios da primeira escala não necessariamente sincronizados. Para o caso de ambas escalas estarem sincronizadas, obtemos um critério para sincronização dependendo de 2 parâmetros, número de Lyapunov e pela forma como os sítios da primeira escala e da segunda es-

cala interagem. No segundo caso, os valores do critério de sincronização são obtidos numericamente.

Diversas simulações numéricas são apresentadas para verificação dos critérios de sincronização. Observamos que pouca interação e aumento do número de sítios de ambas as escalas diminuem as possibilidades do modelo metapopulacional sincronizar, por outro lado, quanto maior for o acoplamento entre os sítios, maiores são as possibilidades do sistema sincronizar.

Para trabalhos futuros vários fatores podem ser considerados. Podemos propor modelos epidemiológicos, modelos com estrutura etária, considerar que possa ocorrer mortes durante a migração, diversas populações vivendo em cada sítio, vizinhanças assimétricas, entre outros fatores que possam ser utilizados para modelar com boa precisão o comportamento de metapopulações.

## Apêndice A LINEARIZAÇÃO EM TORNO DO ESTADO SINCRONIZADO

Considere  $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  de classe  $C^1$  e  $X_{t+1} = F(X_t)$ . Seja  $\mathbf{X}_t \in \mathbb{R}^m$  o estado sincronizado de  $F$ . Fazendo uma pequena perturbação  $\Delta_t$  no estado sincronizado,  $X_t = \mathbf{X}_t + \Delta_t$ , obtemos que

$$X_{t+1} = F(X_t) = F(\mathbf{X}_t + \Delta_t).$$

Expandindo em série de Taylor,

$$F(\mathbf{X}_t + \Delta_t) = F(\mathbf{X}_t) + DF(\mathbf{X}_t)\Delta_t + o(\Delta_t^2),$$

onde  $DF(\mathbf{X}_t)$  é uma matriz cujos os elementos são  $DF(\mathbf{X}_t) = [\partial(f_i)/\partial_j]_{i,j=1}^m$  e  $f_i$  são as componentes de  $F$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

Portanto, a linearização em torno do estado sincronizado é dada por

$$\Delta_{t+1} = DF(\mathbf{X}_t)\Delta_t.$$

Iterando o sistema acima, temos que

$$\Delta_1 = DF(\mathbf{X}_0)\Delta_0,$$

$$\Delta_2 = DF(\mathbf{X}_1)\Delta_1 = DF(\mathbf{X}_1)DF(\mathbf{X}_0)\Delta_0,$$

$\vdots$

$$\Delta_t = DF(\mathbf{X}_{t-1}) \dots DF(\mathbf{X}_0)\Delta_0.$$

Portanto, a perturbação  $\Delta_t$  irá se aproximar de zero se e somente se

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \|P_{\tau-1} \cdot \dots \cdot P_1 P_0\|^{1/\tau} < 1,$$

onde  $P_t = DF(\mathbf{X}_t)$ .

## Apêndice B CÁLCULO NUMÉRICO DOS NÚMEROS DE LYAPUNOV

Considerando uma esfera  $U$  de raio pequeno centrada em  $v_0$  (primeiro conjunto de pontos da órbita),  $F$  uma função suave em  $\mathbb{R}^m$  associada ao sistema dinâmico e  $DF(v_0)$  a matriz jacobiana em  $v_0$ . Seja  $J_t = DF^t(v_0)$  a matriz jacobiana da  $t$ -ésima iterada da  $F$ . Portanto,  $J_t U$  é um elipsóide com  $m$  eixos ortogonais. Quando os eixos possuem comprimento maior que 1 há uma expansão na direção de  $F^t(v_0)$ , e quando o comprimento é menor que 1 ocorre uma contração. A taxa de expansão média multiplicativa dos  $m$  eixos ortogonais são os números de Lyapunov.

Normalmente, o cálculo de  $J_t U$  é difícil de ser determinado para  $t$  grande. Assim, aproximamos  $J_t U = DF(v_{t-1}) \dots DF(v_0) U$  por algoritmos computacionais, utilizando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt.

Iniciamos com uma base ortonormal  $\{w_1^0, w_2^0, \dots, w_m^0\} \in \mathbb{R}^m$ , e computamos os vetores  $z_1, z_2, \dots, z_m$  da seguinte maneira:

$$z_1 = DF(v_0)w_1^0, z_2 = DF(v_0)w_2^0, \dots, z_m = DF(v_0)w_m^0.$$

Os vetores da elipse  $DF^t(v_0)U$  não são necessariamente ortogonais. Resolvemos esse problema criando um novo conjunto de vetores ortogonais  $\{w_1^1, w_2^1, \dots, w_m^1\}$  que geram um elipsóide com mesmo volume que  $DF^t(v_0)U$ . Para isso utilizamos o processo de ortonormalização de Gram-Schmidt,

$$\begin{aligned} y_1 &= z_1, \\ y_2 &= z_2 - \frac{z_2 \cdot y_1}{\|y_1\|^2} y_1, \\ y_3 &= z_3 - \frac{z_3 \cdot y_1}{\|y_1\|^2} y_1 - \frac{z_3 \cdot y_2}{\|y_2\|^2} y_2, \\ &\vdots \\ y_m &= z_m - \frac{z_m \cdot y_1}{\|y_1\|^2} y_1 - \dots - \frac{z_m \cdot y_{m-1}}{\|y_{m-1}\|^2} y_{m-1}, \end{aligned}$$

onde  $\cdot$  denota o produto escalar e  $\|\cdot\|$  denota a norma euclidiana.

Considerando  $w_1^1 = y_1, w_2^1 = y_2, \dots, w_m^1 = y_m$ . Para eliminar problemas de números extramente grandes ou extremamente pequenos normalizamos os  $w_1^k, k = 1, \dots, m$ . Daí,

$$w_1^1 = \frac{y_1}{\|y_1\|^2}, w_2^1 = \frac{y_2}{\|y_2\|^2}, \dots, w_m^1 = \frac{y_m}{\|y_m\|^2}$$

formam a nova base ortonormal  $\{w_1^1, w_2^1, \dots, w_m^1\}$ . Portanto, aplicando a matriz Jacobiana em  $v_1$ , após processo de ortogonalização obtemos

$$z_1 = DF(v_1)w_1^1, z_2 = DF(v_1)w_2^1, \dots, z_m = DF(v_1)w_m^1.$$

e normalizando obtemos a nova base o novo conjunto ortonormal  $\{w_1^2, w_2^2, \dots, w_m^2\}$ . Repetindo esse proceso  $t$  vezes obteremos o conjunto  $\{w_1^t, w_2^t, \dots, w_m^t\}$  de vetores que aproximam os eixos da elipsóide  $J_t U$ .

Assim,  $r_k^t \approx \|y_i^t\| \|y_i^{t-1}\| \dots \|y_i^1\|$  denota a expansão total na  $i$ -ésima direção após  $t$  iterações,  $k = 1, \dots, m$ . Portanto, a estimativa conveniente para o  $k$ -ésimo número de Lyapunov após  $t$  iterações é dado por

$$L_k = (r_k^t)^{1/t}, \quad k = 1, \dots, m.$$

Consequentemente, a estimativa para o expoente de Lyapunov é dada por

$$h_k = \frac{\ln\|y_k^t\| + \dots + \ln\|y_k^1\|}{t}, \quad k = 1, \dots, m.$$

## Apêndice C    MATRIZES CIRCULANTES

Uma matriz circulante de ordem  $m$  é uma matriz quadrada da forma

$$C = circ(c_1, c_2, \dots, c_m) = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_m \\ c_m & c_1 & \dots & c_{m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_2 & c_3 & \dots & c_1 \end{pmatrix}.$$

**Resultados sobre matrizes circulantes (Davis [8]):**

Se  $C$  é uma matriz circulante, então existe uma matriz  $F$  que diagonaliza  $C$ .

Mais precisamente,

$$C = F\Omega F^{-1},$$

onde  $F$  é a matriz de Fourier dada por

$$F = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w & w^2 & \dots & w^{m-1} \\ 1 & w^2 & w^4 & \dots & w^{2(m-1)} \\ \vdots & \dots & \vdots & & \vdots \\ 1 & w^{m-1} & w^{2(m-1)} & \dots & w^{(m-1)(m-1)} \end{pmatrix}.$$

onde  $w = \exp(\frac{2\pi i}{m}) = \cos(\frac{2\pi}{m}) + i \operatorname{sen}(\frac{2\pi}{m})$ .

A matriz  $\Omega = \operatorname{diag}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m)$ , onde  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$  são os autovalores de  $C$  e são dados por

$$\omega_j = p(w^{j-1}), j = 1, \dots, m,$$

onde

$$p(z) = c_1 + c_2 z + \dots + c_{m-1} z^{m-1}.$$

Todas as matrizes circulantes são diagonalizáveis<sup>1</sup> e as colunas de  $F$  são um conjunto de autovetores para qualquer matriz circulante. Portanto, se  $A$  e  $B$  são circulantes, temos que

$$A = F^{-1}\Omega F,$$

$$B = F^{-1}\Lambda F,$$

onde  $\Omega = \text{diag}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m)$  e  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ .

Portanto,  $AB = F^{-1}\Omega\Lambda F$  e os correspondentes autovalores de  $AB$  são dados por  $\omega_i\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

Se  $A$  e  $B$  são matrizes circulantes de ordem  $m$ , então  $AB$  também é circulante de ordem  $m$ , além disso, as matrizes  $A$  e  $B$  comutam ( $AB = BA$ ).

Exemplos de cálculo de autovalores e autovetores de matrizes circulantes de ordem  $m$ :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\mu}{m} - \mu & \frac{\mu}{m} & \cdots & \frac{\mu}{m} \\ \frac{\mu}{m} & \frac{\mu}{m} - \mu & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{\mu}{m} \\ \frac{\mu}{m} & \cdots & \frac{\mu}{m} & \frac{\mu}{m} - \mu \end{pmatrix}.$$

onde  $0 \leq \mu \leq 1$ .

Os autovalores de  $A$  são dados por

$$\omega_1 = p(1) = \frac{\mu}{m} - \mu + \frac{\mu}{m} + \dots + \frac{\mu}{m} = 0,$$

$$\omega_2 = p(w) = -\mu,$$

$$\omega_3 = p(w^2) = -\mu,$$

$\vdots$

$$\omega_m = p(w^{m-1}) = -\mu.$$

---

<sup>1</sup>Uma matriz  $A$   $m \times m$  é diagonalizável se e somente se  $A$  tem  $m$  autovetores linearmente independentes.

Os autovetores correspondentes a esses autovalores são as colunas da matriz de Fourier.

$A = (1 - \mu)I + \frac{\lambda\mu}{m}\mathbf{1}$ , onde  $\mathbf{1}$  é uma matriz  $m \times m$  com todos seus valores 1,  $0 \leq \mu \leq 1$  e  $-1 \leq \lambda \leq 1$ .

Os autovalores de  $A$  são dados por

$$\omega_1 = p(1) = 1 - \mu + \frac{\lambda\mu}{m} + \frac{\lambda\mu}{m} + \dots + \frac{\lambda\mu}{m} = 1 - \mu + \lambda\mu,$$

$$\omega_2 = p(w) = 1 - \mu,$$

$$\omega_3 = p(w^2) = 1 - \mu,$$

$\vdots$

$$\omega_m = p(w^{m-1}) = 1 - \mu.$$

Os autovetores correspondentes a esses autovalores são as colunas da matriz de Fourier.

## Referências Bibliográficas

- [1] Abdenur, F., França, L. F. N. *Hiperbolicidade, Estabilidade e Caos em Dimensão Um*, IMPA, 2007.
- [2] Allen, J. C., Schauffer, W. M., Rosko, D. *Chaos reduces species extinction by amplifying local population noise*, Nature Publishing Group, volume **364**, 2007.
- [3] Alligood, K. T., Sauer, T. D., Yorke, J. A. *CHAOS An Introduction to Dynamical Systems*, Springer-Verlag New York, Inc., 1997.
- [4] Castillo-Chavez, C. *Discrete-Time S-I-S Models with Complex Dynamics*, Elsevier Science, Inc., 2001, 4753-4761.
- [5] Castillo-Chavez, C., Yakubu, A. *Dispersal, disease and life-history evolution*, Elsevier Science, Inc., 2001, 35-53.
- [6] Chen, L., Lü, J., Lu, J. *Synchronization of the Time-Varying Discrete Biological Networks*, IEEE, 2007, 2650-2653.
- [7] Cirino, S., Silva, J. A. L. *Modelo Epidemiológico SEIR de Transmissão da Dengue em Redes de Populações Acopladas*, Dissertação de Mestrado, Editora da UFRGS, 2003.
- [8] Davis, P.J. *Circulant Matrices*, John Wiley and Sons, Inc., 1979.
- [9] De Castro, M.L., Silva, J.A., Justo, D.A. *Stability in an age-structured metapopulation model*, Journal of Mathematical Biology, 2006, 52(2):183-208.
- [10] Díaz, L. J., Jorge, D. R. *Uma Introdução aos Sistemas Dinâmicos via Frações Contínuas*, IMPA, 2007.

- [11] Dmitriev, A. S., Shirokov, M., Starkov, S. O. *Chaotic Synchronization in Ensembles of Coupled Maps*, IEEE, 1997, 918-926.
- [12] Drazin, P. G. *Nonlinear Systems*, Cambridge University Press, 1992.
- [13] Earn D. J. D., Levin, S. A., Rohani, P. *Coherence and Conservation*, SCIENCE, Vol. 290. no. 5495, 1360 - 1364, 2000.
- [14] Eckmann J. P., Ruelle D. *Ergodic Theory of chaos and strange attractors*, The American Physical Society, 617-656.
- [15] Giordani, F. T., Silva, J. A. L. *A Instabilidade Causada pela Migração Dependente da Densidade em Metapopulações*, Dissertação de Mestrado, Editora da UFRGS, 2003.
- [16] Giordani, F. T., Silva, J. A. L. *Density-Dependent Dispersal in Multiple Species Metapopulations*, Departamento de Matemática Pura e Aplicada - IM - UFRGS, 1-15.
- [17] Giordani, F. T., Silva, J. A. L. *Density-dependent Migration and Synchronism in Metapopulations*, Departamento de Matemática Pura e Aplicada - IM - UFRGS, 1-18.
- [18] Giordani, F. T., Silva, J. A. L. *Synchronism in population networks with non linear coupling*, Departamento de Matemática Pura e Aplicada - IM - UFRGS, 1-23.
- [19] Hassell, M.P., Miramontes, O., Rohani, P., May, R.M. *Appropriate Formulation for Dispersal in Spatially Structured Models: Comments in Bascompte and Sole*, The Journal of Animal Ecology, 1995, 662-664.
- [20] Heino, M., Kaitala, V., Ranta, E., Lindström, J. *Synchronous dynamics and rates of extinction in spatially structured populations*, The Royal Society, 1997.

- [21] Hoffman, K. *Álgebra Linear*, Prentice-Hall Inc., 1961.
- [22] Holden, A. V. *Chaos*, Manchester University Press, 1986.
- [23] Jansen, V. A. A., Lloyd, A. L. *Local stability analysis of spatially homogeneous solutions of multi-patch systems*, Springer-Verlag, 2000, 233-252.
- [24] May, R. M., Lloyd, A. L. *Synchronicity, chaos and population cycles: spatial coherence in an uncertain world*, Elsevier Science, 1999, 417-418.
- [25] May, R. M., Lloyd, A. L. *Theoretical Ecology*, Blackwell Scientific Publications, 1976.
- [26] Silva, J. A. L., Castro, M. L., Justo, D. A. R. *Stability in a Metapopulation Model with Density-dependent Dispersal*, Society for Mathematical Biology, 2001.
- [27] Lancaster, P., Tismenetsky, M. *The Theory of Matrices*, Academic Press, Inc., 1985.
- [28] Nusse, H. E., Yorke, J. A. *DYNAMICS: Numerical Explorations*, Springer-Verlag, New York, Inc., 1994.
- [29] Oliveira, K., *Um Primeiro Curso em Teoria Ergódica e Aplicações*, Departamento de Matemática, Universidade Federal de Alagoas, 2006.
- [30] Ott, E., Sauer, T., Yorke, J. A. *COPING WITH CHAOS Analysis of Chaotic Data and the Exploitation of Chaotic Systems*, John Wiley and Sons, Inc., 1994.
- [31] Pikovsky, A., Rosenblum, M., Kurths, J. *SYNCHRONIZATION A universal concept in nonlinear sciences*, John Wiley and Sons, Inc., 1994.
- [32] Recktenwald, G. *Numerical Methods with MATLAB*, Prentice-Hall, 2000.

- [33] Rempel, A. T., Silva, J. A. L. *A Instabilidade de Turing e sincronismo em redes de populações acopladas*, Dissertação de Mestrado, Editora da UFRGS, 2007.
- [34] Ruelle, D. *Chaotic Evolution and Strange Attractors*, Cambridge University Press, 1989.
- [35] Thunberg, H. *Periodicity versus Chaos in One-Dimensional Dynamics*, SIAM Review, volume **43**, 2001, 3-30.