

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**CONTROLE DE MANIPULADORES ROBÓTICOS FLEXÍVEIS USANDO
ATUADORES E SENSORES PIEZELÉTRICOS OTIMIZADOS**

por

Alexandre Molter

Tese para obtenção do Título de
Doutor em Engenharia

Porto Alegre, Agosto de 2008

CONTROLE DE MANIPULADORES ROBÓTICOS FLEXÍVEIS USANDO ATUADORES E SENSORES PIEZELÉTRICOS OTIMIZADOS

por

Alexandre Molter

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Doutor em Engenharia

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Dr. Jun Sérgio Ono Fonseca

Co-Orientador: Prof. Dr. Marat Rafikov

Comissão de Avaliação:

Prof. Dr. José Manuel Balthazar (UNESP / Rio Claro - Brasil)

Prof(a). Dra. Teresa Tsukazan de Ruiz (PPGMAp - UFRGS/ Porto Alegre - Brasil)

Prof. Dr. Herbert Martins Gomes (PROMEC - UFRGS / Porto Alegre - Brasil))

Prof. Dr. Eduardo Perondi (PROMEC - UFRGS / Porto Alegre - Brasil)

Prof. Dr. Flávio José Lorini

Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 11 de Agosto de 2008

AGRADECIMENTOS

Agradeço de forma especial

A Deus que possibilitou que eu estivesse aqui para realizar este trabalho;

A minha família, especialmente aos meus pais, Levinus (em memória) e Wilma, pelo incentivo e apoio no decorrer de toda a minha vida;

A minha colega e companheira, Ângela Iná Führ pela colaboração, atenção, compreensão, carinho e por compartilhar a conquista dos meus sonhos e objetivos;

Aos meus filhos, Sofia e Artur, por darem um novo significado às palavras amor e felicidade e por tudo que ainda vão me ensinar.

Aos professores, orientador Dr. Jun Sérgio Ono Fonseca e Co-orientador Dr. Marat Rafikov por todo o apoio na realização deste trabalho, bem como pela confiança, amizade e estímulo nos momentos difíceis. Ao professor Dr. Júlio Claeysen pelo auxílio prestado no início dos trabalhos no doutorado e ao professor Dr. Valdecir Bottega pelo auxílio prestado durante o trabalho.

Aos colaboradores e professores do Grupo de Mecânica aplicada - GMAp e ao secretário do PROMEC, Paulo Kutter, pela amizade e apoio prestado. Aos professores, membros da banca examinadora;

À CAPES pelo suporte financeiro e ao PROMEC representado em seu corpo de funcionários e docentes;

E a todos que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

RESUMO

Neste trabalho, apresenta-se um modelo de controle de trajetória para um manipulador constituído de um segmento rígido e um flexível com atuadores e sensores piezelétricos. O modelo dinâmico do manipulador é obtido de forma fechada através da formulação de Lagrange, considerando os segmentos como vigas de Euler-Bernoulli não-prismáticas. O controle utiliza o torque dos motores como atuadores para controle da trajetória do ângulo das juntas e também para atenuar as vibrações de baixa frequência induzidas nos segmentos do manipulador. A estabilidade deste controlador é garantida pela teoria de estabilidade de Lyapunov. Atuadores e sensores piezelétricos são adicionados para contribuir no controle de vibrações de baixas frequências e de altas frequências não alcançadas pelo controle de torque dos motores. São propostos dois modelos de controle, um com realimentação do erro da trajetória e outro através do método de Equações de Riccati Dependentes de Estado. Além disso, é proposta uma otimização simultânea do controle e dos atuadores e sensores através da maximização da energia dissipada no sistema, devido à ação do controle, com otimização do posicionamento e tamanho dos atuadores e sensores piezelétricos na estrutura. Simulações são obtidas através do Maple e do Matlab/Simulink para verificar a eficiência do modelo de controle.

ABSTRACT

CONTROL OF FLEXIBLE ROBOTIC MANIPULATORS USING OPTIMIZED PIEZO-ELECTRIC ACTUATORS AND SENSORS

In this work, a tracking control model for a flexible arm robotic manipulator using piezoelectric actuators and sensors is proposed. The manipulator dynamic model is obtained in closed form by the Lagrange equations where non-prismatic Euler-Bernoulli beams are considered. The control uses the motor torques for the tracking control of the joints and also to reduce the induced low frequency vibration on the manipulator arms . The stability of this control is guaranteed by the Lyapunov stability theory. Actuators and sensors are added for controlling high frequency vibrations beyond the motor torque control range. Two control methods are proposed: one with feedback tracking error and other with State-Dependent Riccati Equations. Additionally, a simultaneous control, sizing, and location optimization for actuators and sensors is proposed, maximizing the dissipated system energy damped by control action. Simulations on Maple and Matlab/Simulink are used to verify the efficiency of the control model.

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Robótica.....	2
1.2	Controle de Robôs	4
1.3	Manipuladores com elementos flexíveis.....	5
1.4	Atuadores e sensores Piezelétricos	7
1.5	Otimização Estrutural	9
1.6	Ojetivos e organização do trabalho	10
2	EQUAÇÕES DO MOVIMENTO	12
2.1	Cinemática	12
2.1.1	Introdução	12
2.1.2	Representação de um Ponto em Diferentes Coordenadas	12
2.1.3	Posição e Orientação de um elo Flexível	14
2.1.4	Variáveis Rotação e Translação	18
2.1.5	Análise Modal	19
2.1.6	Derivada de uma Matriz de Rotação	22
2.1.7	Velocidade de um elo.....	23
2.1.8	Jacobiano Geométrico	26
2.1.9	Cálculo do Jacobiano.....	26
2.2	Dinâmica	29
2.2.1	Introdução	29
2.2.2	Formulação de Lagrange.....	29
2.2.3	Equação do Movimento.....	34
2.2.4	Propriedades do Modelo Dinâmico.....	36

2.2.5	Modelo Dinâmico Explícito para um Robô com um elo Rígido e um Flexível	38
3	CONTROLE	44
3.1	Introdução	44
3.2	Considerações Iniciais	44
3.3	Controle de Trajetória	45
3.4	Controle de Vibrações	47
3.5	Controle com realimentação	49
3.5.1	Problema de síntese linear realimentado	49
3.5.2	Controle ótimo com realimentação para sistemas não-lineares usando equações de Riccati dependentes do estado	52
4	SENSORES E ATUADORES PIEZELÉTRICOS	58
4.1	Modelo Dinâmico	60
4.2	Determinação dos modos de vibração	60
4.3	Uma forma numérica para as autofunções	62
4.4	Equação do movimento	66
4.5	Controle piezométrico	70
5	OTIMIZAÇÃO SIMULTÂNEA DA LOCALIZAÇÃO E TAMANHO DOS ATUADORES PIEZELÉTRICOS E RETROALIMENTAÇÃO	72
5.1	Energia total do sistema	73
5.2	Formulação do problema de otimização	74
5.3	Simulações do uso do material piezométrico em vigas	76
5.3.1	Extensão do problema de otimização para mais modos de vibração ...	79
6	SIMULAÇÕES E RESULTADOS	82
6.1	Simulações usando a metodologia de minimização de erro de trajetória	84
6.2	Simulações pela metodologia SDRE	89
6.2.1	Análise de estabilidade	96
7	CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS	98

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	100
ANEXOS	112

LISTA DE SÍMBOLOS

\mathbf{A}_i^{i-1}	matriz de transformação homogênea do sistema coordenado \mathbf{O}_i , com relação ao sistema \mathbf{O}_{i-1}
\mathbf{A}_e	matriz de estado
\mathbf{a}_i	comprimento do segmento i [m]
a_{pi}	comprimento do piezocerâmico i [m]
$\mathbf{B}(\mathbf{q})$	matriz de inércia do robô
$\mathbf{B}_{\theta\theta}$	bloco da matriz de inércia \mathbf{B} dos termos dependentes do ângulo das juntas
$\mathbf{B}_{\theta\delta}$	bloco da matriz de inércia \mathbf{B} dos termos de acoplamento
$\mathbf{B}_{\delta\delta}$	bloco da matriz de inércia \mathbf{B} dos termos dependentes das deflexões
\mathbf{B}_e	matriz de coeficientes da função de controle
$b_{ij}(\mathbf{q})$	elemento da matriz $\mathbf{B}(\mathbf{q})$
b_i	largura do piezocerâmico fixo ao segmento i [m]
C	capacitância do piezofilme [pF/cm^2]
C_{kij}	coeficientes constantes
$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$	matriz do efeito centrífugo e de Coriolis
\mathbf{C}_e	matriz de saída do sistema de controle
$\mathbf{C}_{\theta\theta}$	bloco da matriz $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ dos termos dependentes do ângulo das juntas
$\mathbf{C}_{\theta\delta}$	bloco da matriz $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ dos termos de acoplamento
$\mathbf{C}_{\delta\delta}$	bloco da matriz $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ dos termos dependentes das deflexões
c_{ij}	elemento da matriz \mathbf{C} ou $\cos(i + j)$
c_{ijk}	símbolos de Christoffel
\mathbf{c}_a	constante positiva
\mathbf{D}	matriz de coeficientes de fricção viscosa
\mathbf{D}_θ	bloco da matriz de coeficientes de fricção viscosa
\mathbf{D}_δ	bloco da matriz de coeficientes de fricção viscosa
\mathbf{D}_Δ	matriz diagonal positiva definida
\mathbf{D}_{yi}	matriz transformação torção
\mathbf{D}_i^{i-1}	transformação deslocamento do sistema coordenado \mathbf{O}_i , com relação ao sistema \mathbf{O}_{i-1}

\mathbf{d}	vetor de translações
$\mathbf{d}_i(x)$	translação do segmento i como função da posição \mathbf{x}
d_{n_i}	distância do piezofilme ao eixo neutro do segmento flexível i [m]
d_{31}	constante de tensão piezométrica [(m/m)/(V/m)]
$d_{y_i}(x_i, t)$	deformação do segmento flexível i [m]
$(EI)_i$	rigidez flexural do segmento i [N/m ²]
EI_{Ai}	rigidez flexural da porção do segmento composta pelo atuador e sensor piezométrico [N/m ²]
E_c	módulo de elasticidade do piezocerâmico [GPa]
E_f	módulo de elasticidade do piezofilme [GPa]
E_b	módulo de elasticidade dos segmentos flexíveis [GPa]
$\mathbf{F}(\beta_{ij})$	matriz de frequência
$\mathbf{g}(\mathbf{q})$	vetor de forças gravitacionais
\mathbf{g}_0	vetor constante da aceleração da gravidade
g_{31}	constante de tensão piezométrica [(V/m)/(N/m ²)]
\mathbf{h}_a	vetor de forças exercidas pelo elemento terminal do robô sobre o ambiente
h_{ijk}	efeito centrífugo e de Coriolis
\mathbf{h}_e	vetor de funções contínuas não lineares
\mathbf{I}	matriz identidade
$\mathbf{I}_{l_{ai}}$	momento de inércia no final do segmento i
\mathbf{I}_i	matriz tensor de inércia relativo ao baricentro do segmento i
\mathbf{I}_{h_i}	matriz tensor de inércia relativo ao baricentro do motor i
\mathbf{I}_c	tensor de inércia da carga relativo ao baricentro
\mathbf{J}_O	Jacobiano com relação à velocidade angular do segmento i
\mathbf{J}_p	Jacobiano com relação à velocidade linear do segmento i
$\mathbf{J}_{O_i}^{(l_i)}$	Jacobiano com relação à velocidade angular do baricentro do segmento i
$\mathbf{J}_{p_i}^{(l_i)}$	Jacobiano com relação à velocidade linear do baricentro do segmento i
$\mathbf{J}_O^{(h_i)}$	Jacobiano com relação à velocidade angular do baricentro do motor i
$\mathbf{J}_p^{(h_i)}$	Jacobiano com relação à velocidade linear do baricentro do motor i
\mathbf{J}	funcional custo para a energia
\mathbf{J}_0	funcional ótimo

k_{ijk}	coeficiente de elasticidade do modo j e k do segmento i
\mathbf{K}_p	matriz diagonal positiva definida de ganho de retroalimentação
\mathbf{K}_c	matriz de ganho de retroalimentação do controle piezolétrico
\mathbf{K}_T	matriz de rigidez do sistema com atuadores e sensores piezolétricos
\mathbf{K}_{piez}	matriz de rigidez da porção do braço composta pelo atuador e sensor
\mathbf{K}	matriz de rigidez do segmento
K_{c_i}	constante de ganho de retroalimentação do controle piezolétrico
k_{31}^2	fator de acoplamento eletromecânico
$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$	função Lagrangeana do sistema mecânico
l_i	distância da junta ao baricentro do segmento i [m]
L_i	projeção do comprimento do segmento i no eixo x_i [m]
m_{l_i}	massa do segmento i [kg]
m_{h_i}	massa do motor da junta i [kg]
$(MD)_i$	contribuição ao momento do segmento i das massas de segmentos posteriores ao segmento i [$kg.m$]
M	momento produzido para o segmento flexível
m_c	massa da carga [kg]
$\mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$	matriz antissimétrica dada por $\dot{\mathbf{B}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$
$\mathbf{n}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$	matriz soma dos efeitos: centrífugo, de Coriolis, atrito viscoso e estático e forças gravitacionais
\mathbf{O}_0	sistema de coordenadas de referência
\mathbf{O}_i	sistema de coordenadas no espaço
\mathbf{O}'_i	sistema de coordenadas \mathbf{O}_i , levando em conta somente uma rotação em relação ao sistema \mathbf{O}_{i-1}
\mathbf{o}_i^{i-1}	vetor posição da origem do sistema de coordenadas \mathbf{O}_i , em relação ao sistema \mathbf{O}_{i-1}
P	ponto arbitrário no espaço
\mathbf{p}_n	vetor posição do elemento terminal do robô
$\mathbf{P}_f(t)$	voltagem gerada pelo sensor piezofilme
$\mathbf{P}_i(x, t)$	voltagem de controle do piezocerâmico fixo ao segmento i
\mathbf{P}_e	matriz a ser calculada pela equação de Riccati

$\dot{\mathbf{p}}_n$	vetor velocidade linear do elemento terminal do robô
$\tilde{\mathbf{p}}_n$	representação homogênea do vetor posição \mathbf{p}_n
\mathbf{p}'	vetor posição de um ponto arbitrário
\mathbf{p}_i^*	vetor posição do elemento de volume
\mathbf{p}_{l_i}	vetor posição do baricentro do elemento de volume
$\dot{\mathbf{p}}_{h_i}$	velocidade linear do baricentro do motor i
\mathbf{p}^i	vetor posição do ponto P , com relação ao sistema de coordenadas de referência
$\dot{\mathbf{p}}_{l_i}$	velocidade linear do baricentro do segmento i
$\dot{\mathbf{p}}_c$	velocidade linear do baricentro da carga
\dot{p}_{h_i}	velocidade linear do baricentro do motor
$\dot{\mathbf{p}}_{l_i}$	velocidade linear do baricentro situado em l_i
$\tilde{\mathbf{p}}$	representação homogênea de um vetor genérico \mathbf{p}
\mathbf{Q}_i^{i-1}	transformação matricial total do segmento flexível i com relação ao segmento anterior $i - 1$
\mathbf{Q}_e	matriz de pesos do estado
$\mathbf{q}(t)$	vetor coordenadas generalizadas trajetória do ângulo das juntas e deflexões
$\tilde{\mathbf{q}}(t)$	erro de trajetória
$\dot{\mathbf{q}}(t)$	vetor velocidade do ângulo de rotação das juntas e deflexões
$\ddot{\mathbf{q}}(t)$	vetor aceleração do ângulo de rotação das juntas e deflexões
$\mathbf{q}_d(t)$	trajetória desejada do ângulo das juntas e deflexões
$\dot{\mathbf{q}}_d(t)$	velocidade desejada do ângulo das juntas e deflexões
$\mathbf{q}_r(t)$	vetor formado por uma modificação da velocidade $\dot{\mathbf{q}}_d$
$\dot{\mathbf{q}}_r(t)$	vetor de velocidade de referência
\mathbf{R}_1^0	matriz ortogonal de rotação do sistema O_1
\mathbf{R}	matriz ortogonal de rotação
\mathbf{R}_e	matriz de peso do controle
$\dot{\mathbf{R}}(t)$	matriz derivada de $\mathbf{R}(t)$
\mathbf{R}_i^{i-1}	matriz ortogonal de rotação do sistema coordenado \mathbf{O}_i , com relação ao sistema \mathbf{O}_{i-1}
\mathbf{r}_i	vetor dado por $\mathbf{p}_i^* - \mathbf{p}_{l_i}$

$\mathbf{r}_{i-1,i}^{i-1}$	vetor posição da origem do sistema coordenado i , com respeito ao sistema coordenado $i - 1$, expresso no sistema $i - 1$
\mathbf{S}_e	matriz de ganho do controle
$\mathbf{S}(t)$	matriz operador antissimétrico produto vetorial
$s(\cdot)$	$sen(\cdot)$
\mathbf{s}	vetor erro de trajetória de referência
$\mathcal{T}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$	energia cinética total do sistema
\mathcal{T}_i	energia cinética relativa ao segmento i
\mathcal{T}_{h_i}	energia cinética relativa ao motor e mecanismos que acionam a junta i
\mathcal{T}_c	energia cinética relativa à carga no elemento terminal
t_{ic}	espessura do piezocerâmico [mm]
t_{if}	espessura do piezofilme [mm]
t_{ib}	espessura do segmento i [mm]
$\mathcal{U}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$	energia potencial total do sistema
\mathcal{U}_i	energia potencial relativa ao segmento i
\mathcal{U}_{h_i}	energia potencial relativa ao motor do segmento i
\mathcal{U}_{e_i}	energia potencial relativa à elasticidade do braço i
\mathbf{u}	vetor de entrada de controle do sistema
V	função de Lyapunov
\mathbf{x}	vetor de variáveis de estado
$\ \mathbf{x}\ $	norma do vetor \mathbf{x}
z_{ijk}	momento cruzado do modo j do segmento i
\mathbf{z}_{i-1}	versor do eixo de rotação da junta i
W	energia total do sistema
$W(t_0)$	energia total inicial do sistema
W_f	energia dissipada do sistema resultante do amortecimento interno
W_c	energia dissipada do sistema resultante do controle
w_{ij}	momentos de deformação de ordem zero e ordem um, do modo j , do segmento i
β_{ij}	constantes positivas
δ	vetor de coordenadas dos modos elásticos dos segmentos
δ_d	vetor trajetória desejada dos modos de deflexão

θ	vetor de coordenadas ângulo das juntas
ϵ_{ij}	constante positiva
ϵ_{c_i}	tensão induzida no piezocerâmico, fixo ao segmento i
ζ_{ij}	índice de amortecimento natural do modo j do segmento flexível i
θ_i	rotação do segmento i [rd]
$\theta_i(x)$	rotação do segmento i , como função da posição x [rd]
λ_i	coordenadas generalizadas do sistema mecânico
$\lambda_{\max}(\cdot)$	maior autovalor da matriz (\cdot)
$\lambda_{\min}(\cdot)$	menor autovalor da matriz (\cdot)
ξ_{f_i}	forças generalizadas associadas às coordenadas generalizadas \mathbf{q}
ϖ_{ij}	j -ésima frequência angular natural do problema de autovalores para o segmento i
ρ_{bi}	densidade do segmento i [kg/m^3]
ρ_{ci}	densidade do piezocerâmico do segmento i [kg/m^3]
ρ_{fi}	densidade do piezofilme do segmento i [kg/m^3]
τ	vetor de torque dos atuadores [N]
v	vetor velocidade linear e angular do ponto P [m/s]
$v_{i-1,i}$	velocidade da origem do sistema i , com respeito à origem do sistema
$\phi_{ij}(x_i)$	funções modais espaciais
ω_i	velocidade angular do segmento i , com relação ao sistema de coordenadas base
ω_{i-1}	velocidade angular do segmento $i - 1$
Δt	intervalo de tempo [t]
Λ	matriz diagonal positiva definida
Λ_θ	bloco da matriz Λ
Λ_δ	bloco da matriz Λ

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1	Robô espacial Mobile Servicing System (MSS) U. S. Space Shuttle Endeavour: STS-100. Fonte: http://science.nasa.gov/headlines/y2001/ast18apr_1.htm ...	6
2.1	Representação de um ponto P em sistemas coordenados diferentes	13
2.2	Rotação de um elo rígido	15
2.3	Torção e flexão de um elo	15
2.4	Sistema com n elementos flexíveis conexos por juntas rotacionais	18
2.5	Deslocamento planar elo i	19
2.6	Caracterização de um elo genérico i	24
2.7	Robô planar com dois elos flexíveis	38
4.1	Diagrama de blocos do controlador proposto.....	59
4.2	Esboço do manipulador com atuadores e sensores piezelétricos.....	59
4.3	elo robótico com atuadores e sensores pizelétricos.	60
4.4	barra trissegmentada descontínua	61
4.5	Autofunções (modos de vibração) de uma viga engastada em $x = 0$. a é o primeiro modo e b o segundo modo. Autofunções geradas através da interpolação dos polinômios de Hermite em cada um dos 5 elementos.	64
4.6	Autofunções que representam os modos de vibração de uma viga engastada em $x = 0$. c é o primeiro modo e d o segundo modo. Autofunções geradas através da interpolação dos polinômios mistos: Lagrange e Hermite.	65
5.1	Função custo energia dissipada pelo sistema devido à ação do controle piezelétrico e tamanho do atuador e sensor.	78
5.2	Funções da forma de seis modos de vibração, ϕ , ϕ' e ϕ''	80
6.1	Esboço do manipulador não-prismático e flexível.	82

6.2	Posição inicial (a) e final (b) do braço robótico.....	84
6.3	Trajétoria e velocidade trapezoidal para o ângulo das juntas.	85
6.4	Deslocamento dos modos de vibração para o sistema com amortecimento natural.	85
6.5	Erro de trajetória das juntas 1 e 2 do robô.	86
6.6	Deslocamento do primeiro, segundo e terceiro modo para o sistema amortecido com controle de deslocamento.	86
6.7	Trajétoria do sistema e trajetória desejada para o ângulo das juntas.	87
6.8	Trajétoria do sistema e trajetória desejada do terminal do elo flexível.	87
6.9	Deslocamento do primeiro modo para o sistema amortecido com controle piezelétrico.	88
6.10	Deslocamento do segundo modo para o sistema amortecido com controle piezelétrico.	88
6.11	Deslocamento do terceiro modo para o sistema amortecido com controle piezelétrico.	89
6.12	Trajétoria do sistema e trajetória desejada do terminal do elo flexível.	89
6.13	Deflexão dos modos 1 e 2 sem controle.	91
6.14	Posição inicial (a) e final (b) do braço robótico.....	91
6.15	Trajétoria das juntas 1 e 2.	92
6.16	Resposta do sistema para o elo flexível, com controle de torque, modos 1 e 2..	92
6.17	Trejetórias em coordenadas espaciais do ponto final do braço. O ponto inicial e final foram marcados com retângulos.	93
6.18	Ganho de tensão elétrica para os modos 1 e 2.....	93
6.19	Resposta do elo flexível usando controle de torque e piezelétrico.	94
6.20	Posição inicial (c) e final (d) do braço robótico.....	94
6.21	Trajétoria das juntas 1 e 2.	94
6.22	Resposta do elo flexível usando controle de torque.....	95
6.23	Resposta do elo flexível usando controle de torque.....	95
7.1	Modelo experimental.	120
7.2	Modelo experimental.	120

1. INTRODUÇÃO

Estudos em robótica e controle têm atraído um número crescente de pesquisadores nos últimos 25 anos, produzindo avanços significativos em pesquisas que relacionam as duas áreas [Bottega, 2004]. Este fato é evidenciado pelo grande número de publicações e conferências dedicadas a problemas de controle em robótica [Galicki, 2007].

As tarefas práticas de robôs, freqüentemente, solicitam interações entre o robô e ambiente, o que requer um controle de força, de posição ou ambos. A proposta do controle de força pode ser bastante diversa, como aplicar uma força controlada necessária para um processo de manufatura, deslocar objetos ou tratar incertezas através de contatos controlados com objetos ou ambientes. Entre as principais técnicas de controle tem-se: controle de impedância [Hogan, 1985], controle de força/posição [De Schutter e Van Brussel, 1988], controle paralelo força/posição [Chiaverini e Sciavicco, 1993], controle híbrido força/posição [Raibert e Craig, 1981]. Alguns resultados publicados em [Siciliano e Valvanis, 1997] indicam que a pesquisa encontra-se direcionada, principalmente, à modelagem de ambientes dinâmicos, a modelos de impacto, a esquemas de estabilidade do controle durante a transição entre contato e não contato e ao controle de força e posição de manipuladores robóticos com juntas ou elos flexíveis.

O objetivo do controle de robôs é o de construir robôs que possam mover e manipular objetos e também entender e estudar o controle de movimentos mecânicos [Bottega e Fonseca, 2003] e [Shin e Choi, 2000]. O papel do controle de robôs é integrar todas as saídas dos sensores robóticos numa entrada de controle que seja capaz de realizar os movimentos a ele requeridos.

Geralmente, os manipuladores industriais são projetados com alta rigidez nos seus elementos (elos e mancais) para obter maior precisão, resultando em máquinas pesadas, com baixa performance cinemática e eficiência dinâmica. Portanto, uma maneira de obter maior agilidade e eficiência, é a redução da massa [Arteaga, 1998].

Cada vez mais no mercado se busca a redução de custos e aumento de eficiência.

No caso dos robôs, que podem atingir alto custo para a aquisição e manuseio, esta redução de custos e aumento de eficiência tem atraído muito interesse em pesquisas científicas, pois são intensamente utilizados nas indústrias, na manipulação de objetos muito pesados ou perigosos e em alguns casos, em ambientes nocivos a seres humanos. Com uso de elos leves e flexíveis os custos de fabricação e operação poderão ser bastante reduzidos.

1.1 Robótica

As gerações anteriores de pesquisadores de robótica se entusiasmaram pelo sonho de máquinas inteligentes, que pudessem substituir pessoas em muitas tarefas, gerando assim uma grande expectativa sobre a teoria de controle moderno [Bottega, 2004]. No entanto, progressos em controle de robôs nos anos 80 não corresponderam às expectativas e, ironicamente, as maiores dificuldades foram de entendimento dos movimentos humanos na realização de tarefas rotineiras. Isto mostra que as capacidades humanas foram subestimadas, repetindo o que aconteceu nos primórdios da teoria da inteligência artificial. Seres humanos podem manipular objetos e realizar tarefas com facilidade e habilidade devido a uma longa evolução biológica, realimentação e treinamento. Assim, a teoria de controle de robôs e, de um modo geral, a teoria de controle de sistemas não lineares ainda não atingiu a maturidade, sendo uma área de intensas pesquisas.

Atualmente, a automação tornou-se mais presente na indústria e trouxe consigo como exigência a substituição dos robôs existentes por sistemas menores, mais leves, rápidos e eficientes. Observa-se claramente que controladores do tipo PID (Proporcional Integral Derivativo) não apresentam um desempenho satisfatório para muitas situações. Um melhor desempenho de sistemas de automação industrial, especialmente de robôs, exige o uso de métodos de controle avançados, como controle robusto e adaptativo, além de interfaces que permitam uma melhor interação entre o robô, o ambiente e o homem. Em virtude disto, algumas áreas de pesquisa em robótica apresentam um amplo campo de trabalho, motivadas por necessidades atuais e demandas futuras. Dentre os diversos tópicos, podemos destacar problemas como: controle de força, sistemas multi-robôs, robôs subatuados, teleoperação e interfaces óticas [Canudas De Wit et al., 1996; Siciliano e Valvanis, 1998]. Quando a tarefa de um manipulador excede a capacidade de um único robô, um sistema cooperativo com mais de um robô se faz necessário. Várias aplicações exigem a adoção de um sistema com

dois robôs, como por exemplo, manipulação de objetos pesados ou não rígidos e acoplamento de peças mecânicas. Neste caso, dois robôs podem trabalhar de maneira coordenada com movimentos sincronizados, evitando colisões entre os elos e mantendo o alcance do objeto manipulado [Chiacchio et al., 1996; Walker et al., 1991]. Pesquisas avançadas são também direcionadas ao manuseio de objetos flexíveis [Svinin e Uchiyama, 1994] e controle cooperativo de manipuladores com juntas ou elos flexíveis [Ramires et al., 2003; Hu e Ma, 2006].

Uma classe especial de sistema multi-robô, que tem sido uma parte importante da pesquisa em robôs, é a modelagem de garras robóticas, que imitam a mão humana com vários dedos, desenvolvidos para manipular e apanhar objetos. No entanto, estes avanços encontram-se ainda na fase de pesquisa, pois são mecanismos complexos e industrialmente inviáveis em termos de custo, peso e confiabilidade. Em resposta a isto, pesquisadores propuseram mecanismos simplificados, obtendo bons resultados [Prattichizzo e Bicchi, 1997].

Iniciada nos anos 40, o campo da teleoperação era usada, por exemplo, para manipulação de materiais radioativos, exploração e serviços subaquáticos e espaciais [Hirzinger et al., 1993], microcirurgias e micro manipulação [Mitsubishi et al., 1997]. O objetivo da teleoperação é imitar e repetir os movimentos e a sensibilidade humana para atuar em ambientes demasiadamente insalubres para o homem atuar. Isto demanda uma interface robô-usuário de elevada complexidade [Hannaford, 1989]. Estas interfaces podem ser óticas, gráficas ou de força [Kelley e Salcudean, 1994] (aplicações cirúrgicas [Satava e Jones, 1997]). Neste caso, também temos a visão computacional como um importante sensor para sistemas robóticos [Hutchinson et al., 1996].

A classe geral de sistemas mecânicos subatuados inclui robôs que caminham [McGeer, 1990] (entre eles, alguns desenvolvidos pela universidade de Delf - www.tudelft.nl), robôs móveis [Murray e Sastry, 1993], robôs flutuantes (espaciais [Dubowsky e Papadopoulos, 1993] e subaquáticos [Fossen, 1996]) e manipuladores flexíveis (com juntas elásticas [Ramires et al., 2003] e elos flexíveis [Book, 1984; Hu e Ma, 2006]). Dentre estes, destacam-se os manipuladores flexíveis, caracterizados pela agilidade e baixo consumo de energia, sendo aplicados em atividades que exijam velocidade, precisão e baixo peso. Como exemplo destas aplicações temos: robôs industriais em tarefas como pintura, robôs espaciais utilizados em explorações ou na montagem e manutenção de estações espaciais.

O denominador comum dos sistemas mecânicos subatuados é a disponibilidade de

um número de entradas de controle menor que o de graus de liberdade. A dinâmica baseada na teoria Lagrangeana destes sistemas pode conter não linearidades e restrições, que colocam esta classe de problemas à frente das pesquisas em controle avançado.

Propriedades fortes como retro-linearização são perdidas em sistemas subatuados; a única propriedade preservada é a chamada retro-linearização parcial (em virtude da matriz de inércia do sistema ser positiva definida), que pode ser pensada como uma linearização entrada/saída com respeito aos graus de liberdade atuados [De Luca e Siciliano, 1993a], oferecendo um grande potencial para controle robusto e adaptativo a amplas classes de sistemas mecânicos subatuados.

1.2 Controle de Robôs

A idéia do controle de robôs é integrar os movimentos do robô com saídas que podem ser sensores, obtendo assim, as informações dos movimentos mecânicos executados pelo robô. Desta maneira é possível interagir com a máquina através de uma entrada de controle, que podem ser os torques nos elos e fazer com que os movimentos impostos sejam realizados adequadamente.

O problema de controle de um robô consiste na determinação das forças ou torques necessários nos atuadores do robô, de maneira a garantir a execução das tarefas desejadas que podem ser, por exemplo, a execução de um movimento dos elos do robô ou a realização de tarefas interagindo com o ambiente.

Em modelos convencionais de controle de manipuladores robóticos, o algoritmo de controle é baseado em compensações não lineares do sistema. Isto requer um modelo matemático detalhado do manipulador e um prognóstico exato dos parâmetros, como massa e momento de inércia; tarefa difícil, uma vez que estes sistemas são caracterizados por incertezas paramétricas e distúrbios externos desconhecidos. Além disso, compensações não-lineares são complexas e difíceis de serem implementadas. Para evitar estes problemas, novas técnicas de controle vêm sendo pesquisadas, entre as mais conhecidas, estão as técnicas de controle robusto e controle adaptativo. Os controladores robustos têm como principal característica a robustez contra erros de modelagem. Dentre as técnicas de controle robusto, destacamos o controle pelos modos deslizantes (" *sliding mode control* ") [Slotine e Sastry, 1983; Yeung e Chen, 1988], baseados na teoria VSS (" *variable structure system* ") [Utkin,

1977]. Os controladores adaptativos são caracterizados por apresentarem excelente desempenho no estado estacionário, ajustando os parâmetros do modelo e reduzindo as incertezas paramétricas [Sciavicco e Siciliano, 1995; Galicki, 2007]. Uma outra técnica de controle, que surgiu recentemente (nos últimos 10 anos), baseada na solução das Equações de Riccati Dependentes do Estado (SDRE) [Mracek e Cloutier, 1998], tem contribuído para controlar sistemas altamente não-lineares e vem se mostrando eficiente no controle.

1.3 Manipuladores com elementos flexíveis

Geralmente, os manipuladores industriais são projetados com alta rigidez nos seus elos e mancais para obter maior precisão, resultando máquinas pesadas, com baixa performance cinemática e eficiência dinâmica. Portanto, uma maneira para obter maior agilidade e eficiência é a redução da massa. Manipuladores leves oferecem muitos desafios a pesquisadores em robótica, em comparação com robôs rígidos e pesados. O consumo de energia é diminuído ganhando agilidade e rapidez. Devido a estas características, esta classe de manipuladores é especialmente conveniente para uma variedade de aplicações robóticas principalmente em se tratando de robôs embarcados como os destinados para missões espaciais, por exemplo, o robô espacial MSS mostrado na Figura 1.1. Porém, a redução do peso do manipulador pode implicar em diminuição da rigidez dos elementos. Conseqüentemente, as vibrações induzidas pela ação de controle acontecem em frequências mais baixas (abaixo de 100 Hz) e com maiores amplitudes, prejudicando a precisão na execução de tarefas. Todos estes fatores tornam o estudo de manipuladores flexíveis bastante interessante. Avanços na área de motores, estão diminuindo momentaneamente o interesse em robôs leves, mas este assunto deve voltar a tona à medida que maiores desempenhos sejam necessários.

Estruturas mecânicas leves podem melhorar o desempenho de manipuladores, tornando-os mais rápidos, especialmente em operações de baixa variação de carga.

Para explorar totalmente as vantagens oferecidas pelos robôs com elementos flexíveis, é importante considerar os efeitos da flexibilidade e estabelecer um controle de vibrações. Portanto, é importante a disponibilidade de um modelo dinâmico explícito, completo e correto. O modelo deve ser explícito para proporcionar um claro entendimento das iterações dinâmicas e efeitos dos acoplamentos na formulação do controle e para reduções e simplificações a termos relevantes.

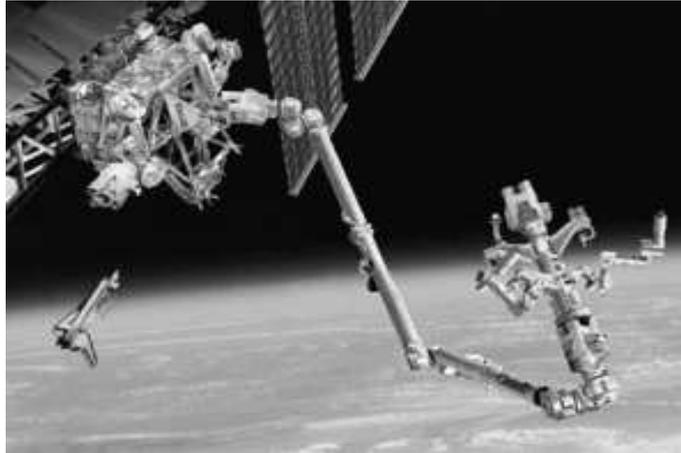


Figura 1.1 – Robô espacial Mobile Servicing System (MSS) U. S. Space Shuttle Endeavour: STS-100. Fonte:

http://science.nasa.gov/headlines/y2001/ast18apr_1.htm

As técnicas usadas para modelar a seqüência cinemática aberta, contendo um ou mais elementos (elos) flexíveis, adotam a mesma formulação do caso de elos rígidos, isto é, Newton-Euler e Euler-Lagrange. Todos são baseados numa descrição cinemática dos movimentos de corpos rígidos e dos deslocamentos.

Vários trabalhos foram publicados sobre modelos explícitos para o caso de um elo flexível [Bellezza et al., 1990; Hastings e Book, 1987] , mas esta simplificação impede o entendimento total das iterações não-lineares entre as componentes rígidas e flexíveis da dinâmica. No entanto, um modelo dinâmico de um robô planar com dois elos flexível sem efeitos torcionais que seja explícito, completo e preciso, pode resultar em equações do movimento numa forma fechada e computacionalmente eficiente. Este modelo é derivado do funcional Lagrangeano com a técnica de análise modal para o deslocamento.

Os elos são modelados como vigas de Euler-Bernoulli, pois seu comprimento é muito superior à espessura e à largura, satisfazendo condições de contorno de massa concentrada. Uma carga é adicionada na extremidade do elemento terminal. Neste caso, considerar dois modos de deformação para cada elo, inclui a maioria das possíveis iterações dinâmicas [De Luca e Siciliano, 1991].

Controle de robôs com elos flexíveis apresenta a dificuldade de não existir uma entrada de controle independente para cada grau de liberdade e são caracterizados por

variações nos parâmetros, como carga, torques e fricções nas juntas. Estas características exigem um projeto de controle que inclua uma ação de controle de posição, atuando no ângulo das juntas e um estabilizador para controlar as oscilações elásticas, induzidas pela ação de controle anterior. Existem duas possibilidades quanto ao controle de posição: controle ponto a ponto e controle de trajetória. Para o primeiro caso, alguns resultados são obtidos em [De Luca e Panzieri, 1994] e [De Luca e Siciliano, 1993b]. No caso de controle de trajetória, deve-se levar em conta que uma trajetória desejada arbitrária pode ser designada apenas para as juntas e não para os deslocamentos do elo flexível. A trajetória das juntas deve então ser computada de tal forma que a trajetória do braço, incluindo os deslocamentos, convirja para a trajetória desejada [De Luca e Siciliano, 1993a; Lammerts et al., 1995]. Em [Lammerts et al., 1995], não só os elos são considerados flexíveis mas também as juntas. Quando os parâmetros não são corretamente conhecidos, uma lei de controle da trajetória das juntas baseada num controlador adaptativo [Ortega e Spong, 1989] pode ser definida assegurando uma conveniente estabilidade assintótica, com o uso de funções de Lyapunov e do princípio de La Salle. Por outro lado, em [Canudas De Wit et al., 1996] e [De Luca e Siciliano, 1993a] é usada uma técnica de controle de dinâmica inversa, o que mostra que a trajetória das coordenadas flexíveis são limitadas. Contudo, em nenhum destes artigos o problema do amortecimento é tratado. Outra forma de controle apresentada na literatura é o uso de métodos estocásticos como o de algoritmos genéticos [Li et al., 2005].

1.4 Atuadores e sensores Piezelétricos

Recentemente, progressos com atuadores e sensores piezelétricos têm despertado interesse no projeto de estruturas inteligentes ou adaptativas. São uma classe de estruturas avançadas que alteram sua configuração geométrica, bem como características físicas quando sujeitas a uma lei de controle. Tais propriedades podem ser obtidas com atuadores ou sensores piezelétricos embutidos ou fixos à superfície da estrutura, aplicados para controle de vibrações e posição de estruturas flexíveis.

Materiais piezelétricos são ideais para uso em sensoriamento e controle de estruturas flexíveis. Sistemas de controle piezelétrico têm vantagens como baixo peso, alta precisão e eficiência. O controle de estruturas flexíveis necessita do uso de sensores e atuadores de modo adequado, que está relacionado com o seu posicionamento discreto. Muitas técnicas moder-

nas de controle foram desenvolvidas recentemente com o desafio de projetar controladores que se adaptem a estruturas flexíveis, funcionando com algumas condições requeridas. Os materiais dos sensores e atuadores também são importantes, pois afetam fatores como precisão, confiabilidade, flexibilidade, durabilidade, peso, etc. A natureza discreta ou distribuída de sensoriamento e atuação é outro fator importante no comportamento do controle de estruturas flexíveis. Sensores e atuadores discretos apresentam problemas de posicionamento, enquanto que os distribuídos oferecem maior flexibilidade, melhor resposta e características de monitoramento.

Há dois fenômenos básicos que permitem que materiais piezelétricos sejam usados como sensores e atuadores num sistema de controle. O primeiro fenômeno, conhecido como efeito direto, implica que a aplicação de forças mecânicas ou pressão num material piezelétrico produzindo uma carga elétrica. Por outro lado, no segundo fenômeno, conhecido como efeito inverso, a aplicação de uma carga elétrica no material é respondida por tensão elétrica e deformação. São os fenômenos mais usados no sensoriamento e atenuação de distúrbios de estruturas flexíveis. O efeito direto foi descoberto pelos irmãos Curie (apud [Bottega, 2004]), em 1880 [Curie e Curie, 1980] e o efeito inverso foi teoricamente previsto por Lippman [Mason, 1981](apud [Bottega, 2004]). Muitos trabalhos foram publicados para investigar esse efeito e seu uso em várias aplicações de controle [Agnes, 1995; Oueini et al., 1996; Wu, 1997]. Estes efeitos constituem uma base para um material piezelétrico ser usado como um sensor ou atuador apresentado bom desempenho e eficiência [Crawley, 1994] em diversas aplicações como: controle de vibrações de asas de aeronaves [Song et al., 1992], controle de vibrações de barras, placas e cascas [Li et al., 2003; Lee e Yu, 1996; Ip e Tse, 2001; Abreu et al., 2003], sistemas de suspensão de veículos [Fukami et al., 1995], controle de vibrações de rotor e hélices de helicópteros [Chen e Chopra, 1996], interação de estruturas flexíveis com ambientes de aerodinâmica e acústica [Bao Xaradan e Varadan, 1995; Berry et al., 1995], controle de vibrações de robôs flexíveis [Indri e Tornamde, 1996; Kalaycioglu et al., 1996] e controle de micromovimentos em dispositivos como microscópios [Fatikov e Rembold, 1996].

O modelo de controle para estruturas flexíveis com materiais piezelétricos pode ser local (descentralizado), que adiciona amortecimento à estrutura em níveis locais [Crawley, 1994; Denoyer, 1996] ou global (centralizado), que estabiliza toda a estrutura e reduz os distúrbios [Chou e Dai, 1994; Crawley, 1994]. O controle global apresenta um melhor de-

sempenho, mas tem um custo computacional elevado se comparado com o controle local [Crawley, 1994]. Controladores híbridos têm dois níveis de controle: global e local [Crawley, 1994; Hall et al., 1991].

Vários esquemas de controle têm sido implementados no controle de estruturas com o uso de dispositivos piezelétricos, entre eles estão os controles de retroalimentação de deslocamento e velocidade [Denoyer, 1996], retroalimentação de tensão elétrica e deformação [Niesrecki e Cudney, 1997], proporcional, proporcional derivativo e proporcional integral derivativo (P, PD e PID) [Galeazzi e Morganti, 1996; Lin et al., 1996b]. Controle de retroalimentação de deslocamento alcança boa performance, mas sua desvantagem é que as frequências naturais da estrutura devem ser pré-determinadas [Kwak e Sciulli, 1996]. Retroalimentação de velocidade é um método que adiciona amortecimento à estrutura. Entretanto, esta técnica pode amplificar ruídos de alta frequência [Kwak e Sciulli, 1996]

1.5 Otimização Estrutural

Do ponto de vista estrutural, os manipuladores robóticos não primam pela utilização das ferramentas mais adequadas de projeto. Há muito campo para a melhora estrutural dos projetos de manipuladores robóticos, através da utilização das modernas técnicas de otimização estrutural. Uma aplicação recente tem sido a otimização simultânea da estrutura e de seus elementos de controle. Esta combinação está abrindo um campo extraordinário de possibilidades para o projeto de estruturas controladas, especialmente quando incluem o uso de materiais piezelétricos que possibilitem uma reação da estrutura, auxiliando o controle.

As questões de localização e geometria de sensores e atuadores e suas soluções ótimas com relação a algum critério de desempenho têm o problema da forma ou análise da geometria, envolvendo um critério de desempenho representado por um funcional constituído de uma função objetivo e um conjunto de restrições. Rotinas de otimização de estruturas integradas com controle de estruturas inteligentes foram investigadas em [Hwang et al., 1993]. A posição e espessura ótimas de atuadores em estruturas compostas para maximizar a interação estrutura/atuador foi analiticamente estudada em [Master e Jones, 1991]. A questão de controle acústico estrutural foi estudada para otimização de geometria dos atuadores e localização ótima de atuadores e sensores [Pergher, 2003; Kim et al., 1995].

A otimização da localização dos atuadores piezelétricos foi estudada por vários

pesquisadores [Chattopadhyay e Seeley, 1994; Fakhroo, 1995; Gabert, 1996], utilizando critérios de desempenho como dissipação de energia, atenuação de distúrbios, esforço de controle, frequência natural, taxa de amortecimento e a parte real dos autovalores das estruturas controladas.

Dentre as várias metodologias para se projetar estruturas otimizadas, uma tem ganhado destaque nos últimos anos: a otimização topológica. Esta técnica permite gerar projetos de estruturas sob diversos tipos de restrições, visando melhorar o desempenho de estruturas para diversas aplicações, tais como redução de peso, flexibilidade e suscetibilidade a flambagem. Mais recentemente, técnicas de otimização topológica têm sido propostas, visando melhorar o desempenho de estruturas sob o aspecto dinâmico e de controle.

A análise da literatura mostra que é comum a otimização da estrutura ou do controle no projeto de manipuladores. Porém, devido as fortes iterações existentes entre a estrutura e o controlador, a individualização da otimização pode resultar num modelo ótimo que não tenha sentido global [Liu e Begg, 2000]. Portanto, neste trabalho, propõe-se a formulação consistente de uma metodologia de projeto de estruturas com otimização simultânea do controle e estrutura, aplicada a manipuladores flexíveis.

1.6 Ojetivos e organização do trabalho

Neste trabalho buscou-se mostrar a possibilidade do projeto de manipuladores robóticos mais leves e ágeis e com menor consumo de energia, que potencialmente podem ser mais baratos. A proposta desta tese se concentra, numa etapa no controle da trajetória dos elementos de um robô com elos flexíveis e em outra etapa, a chegada do ponto final do manipulador a um ponto desejado, considerando uma trajetória ótima para a mínima energia, potencial e cinética, gasta pelo sistema. Em ambos os casos é necessário um controle de vibrações no braço do robô. Além disso também será buscada uma otimização da localização e tamanho de um ou dois piezoelétricos a serem usados no controle.

No trabalho precedente [Bottega, 2004] foram considerados apenas dois modos de vibração na análise, na otimização e no controle. Neste, serão considerados mais modos de vibração na formulação da equação dinâmica e no controle. Outro fator inovador no presente trabalho será considerar elos com geometria não-prismática. A variação do método de controle em relação ao usado em [Bottega, 2004] também é um dos enfoques do trabalho.

O trabalho está organizado nos capítulos que se seguem abaixo.

O primeiro capítulo apresenta uma revisão bibliográfica sobre robótica e controle em robótica.

No segundo capítulo é apresentada uma aproximação sistemática e geral para obtenção da cinemática de um manipulador com elos flexíveis, que relaciona as velocidades das juntas com as velocidades linear e angular do elemento terminal do robô, caracterizadas pelo Jacobiano geométrico. Além disto, apresenta-se o desenvolvimento das equações da dinâmica de um manipulador robótico planar com um elo rígido e um flexível. O modelo dinâmico é obtido através da formulação de Lagrange, que apresenta propriedades importantes, como a linearidade nos parâmetros dinâmicos, de grande importância na elaboração de leis de controle [Goldstein, 1964; Woodhouse, 1987].

No capítulo três é formulada uma lei de controle do ângulo das juntas para posição e vibrações de baixa frequência dos elementos flexíveis. A estabilidade deste controlador é garantida pela teoria de estabilidade de Lyapunov [Arimoto, 1996; La Salle e Lefschetz, 1961; Lin et al., 1996a]. Também é proposto um controle para sistemas não-lineares, cujo controlador provém das equações de Riccati dependentes do estado [Mracek e Cloutier, 1998].

No capítulo quatro apresenta-se uma lei de controle adicional para estabilizar as oscilações de alta frequência dos elementos flexíveis usando atuadores e sensores piezelétricos.

No capítulo cinco apresenta-se uma modelagem simultânea do controle e dos atuadores, com otimização para a mínima energia dissipada no sistema, desenvolvendo uma metodologia de projeto de estruturas controladas otimamente, com otimização do posicionamento e tamanho dos atuadores piezelétricos na estrutura.

No capítulo seis, simulações são obtidas através do Matlab/Simulink e programação em Matlab, para verificar a eficiência das técnicas apresentadas no capítulo quatro. Os resultados abrangem tanto as leis de controle com atuadores e sensores piezelétricos, apresentada no capítulo quatro, quanto sem os piezoelétricos. Inclue-se aí também uma análise de estabilidade do método das equações de Riccati dependentes do estado para o modelo apresentado no trabalho.

2. EQUAÇÕES DO MOVIMENTO

2.1 Cinemática

2.1.1 Introdução

Um robô pode ser esquematizado, do ponto de vista mecânico, como uma cadeia cinemática aberta, formada por corpos rígidos ou flexíveis (elos), conexos em cascata por meio de juntas rotacionais ou translacionais. Um extremo da cadeia é vinculado a uma base e o outro extremo é o elemento terminal. O movimento da estrutura é realizado mediante a composição dos movimentos elementares de cada elo, com respeito ao precedente. Para manipular um objeto no espaço é necessária uma descrição da posição e orientação do elemento terminal.

Neste capítulo, primeiramente, será vista a derivação de equações cinemáticas diretas, para um robô com juntas rotacionais e braços flexíveis, as quais descrevem a posição e a orientação do elemento terminal em função das variáveis de junta, em relação a um sistema de coordenadas de referência. Estas equações são obtidas através da convenção de Denavit-Hartenberg [Sciavicco e Siciliano, 1995]. Uma vez conhecidas as equações cinemáticas diretas, obtém-se as relações entre a velocidade das juntas e as velocidades linear e angular do elemento terminal, através do Jacobiano geométrico. Tais relações são de grande importância para a derivação das equações do movimento, que compõem o capítulo seguinte.

2.1.2 Representação de um Ponto em Diferentes Coordenadas

Com relação à Figura 2.1, considera-se um ponto P arbitrário no espaço. As coordenadas de P com respeito ao sistema de coordenadas de referência $O_0 - x_0y_0z_0$ são expressas pelo vetor \mathbf{p}^0 . Agora, considerando um outro sistema de coordenadas no espaço $O_1 - x_1y_1z_1$ e sejam: \mathbf{o}_1^0 o vetor que indica a posição da origem do sistema de coordenadas O_1 , com respeito ao sistema de coordenadas O_0 , \mathbf{R}_1^0 a matriz ortogonal de rotação do sistema O_1 ,

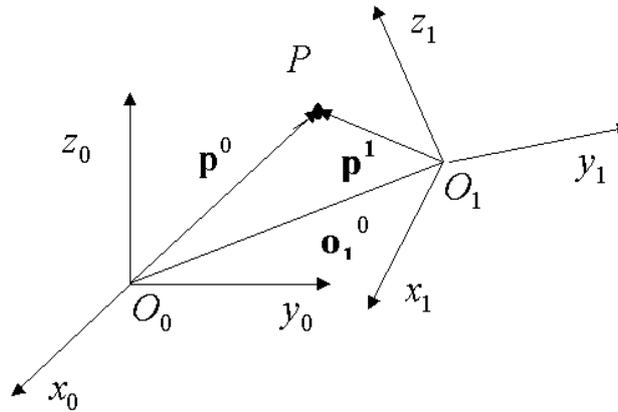


Figura 2.1 – Representação de um ponto P em sistemas coordenados diferentes

com respeito ao sistema O_0 , dada por

$$\mathbf{R}_1^0 = \begin{bmatrix} x_1^T x_0 & y_1^T x_0 & z_1^T x_0 \\ x_1^T y_0 & y_1^T y_0 & z_1^T y_0 \\ x_1^T z_0 & y_1^T z_0 & z_1^T z_0 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

e \mathbf{p}^1 é o vetor das coordenadas de P , com respeito ao sistema de coordenadas O_1 . Com considerações geométricas simples, obtém-se a posição do ponto P , com relação ao sistema de referência O_0 , que pode ser expressa como

$$\mathbf{p}^0 = \mathbf{o}_1^0 + \mathbf{R}_1^0 \mathbf{p}^1. \quad (2.2)$$

Portanto, (2.2) representa a transformação de coordenadas (translação + rotação) de um vetor, aplicado de um sistema de coordenadas a outro.

Para obter uma representação compacta da transformação de coordenadas entre dois sistemas coordenados, pode-se usar a representação homogênea de um vetor genérico \mathbf{p} , como o vetor $\tilde{\mathbf{p}}$, obtido através da adição de uma quarta componente unitária

$$\tilde{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Utilizando tal representação para o vetor \mathbf{p}^0 e \mathbf{p}^1 em (2.2), obtém-se a transformação

de coordenadas escrita em termos da matriz de transformação homogênea

$$\mathbf{A}_1^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1^0 & \mathbf{o}_1^0 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Assim, (2.2) é expressa na forma

$$\tilde{\mathbf{p}}^0 = \mathbf{A}_1^0 \tilde{\mathbf{p}}^1. \quad (2.5)$$

A transformação matricial homogênea acima é utilizada para representar a posição e orientação da extremidade final do elo, representada pelo ponto P , com relação a sua base.

2.1.3 Posição e Orientação de um elo Flexível

A posição de um corpo rígido ou flexível no espaço é determinada em termos da posição de um ponto fixo ao corpo, com relação a um sistema de coordenadas de referência (translação). A sua orientação é determinada em termos das componentes dos versores dos eixos do sistema de coordenadas fixo ao corpo, com respeito ao mesmo sistema de coordenadas de referência (rotação)[Sciavicco e Siciliano, 1995].

Para representar a posição e orientação de um elo flexível, utilizam-se as transformações matriciais homogêneas que descrevem as translações e rotações decorrentes da variação do ângulo das juntas e dos deslocamentos do elo flexível. Estas transformações são obtidas em duas etapas: na primeira, descreve-se as rotações decorrentes da variação do ângulo das juntas, considerando o elo rígido e, na segunda, adiciona-se as translações e rotações decorrentes do deslocamento.

Considerando inicialmente as rotações decorrentes da variação do ângulo das juntas, expressa-se a transformação de coordenadas que relaciona o sistema O'_i com o sistema O_{i-1} , através dos seguintes passos:

- Inicia-se com o sistema coordenado O_{i-1} .
- Toma-se a rotação θ'_{z_i} em torno do eixo z_{i-1} . Esta operação leva ao sistema O'_i , descrita

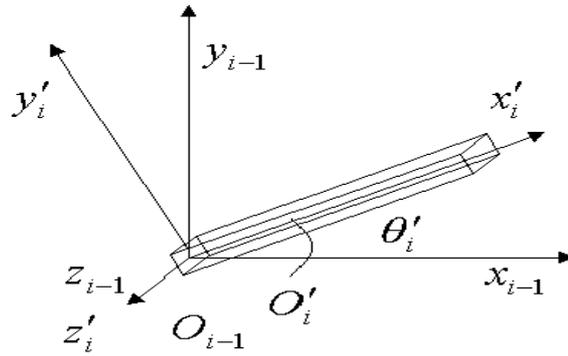


Figura 2.2 – Rotação de um elo rígido

pela matriz de transformação homogênea

$$\mathbf{A}_{i'}^{i-1} = \begin{bmatrix} c(\theta'_{zi}) & -s(\theta'_{zi}) & 0 & 0 \\ s(\theta'_{zi}) & c(\theta'_{zi}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

onde $c(\cdot)$ e $s(\cdot)$ indicam, respectivamente, coseno e seno de (\cdot) .

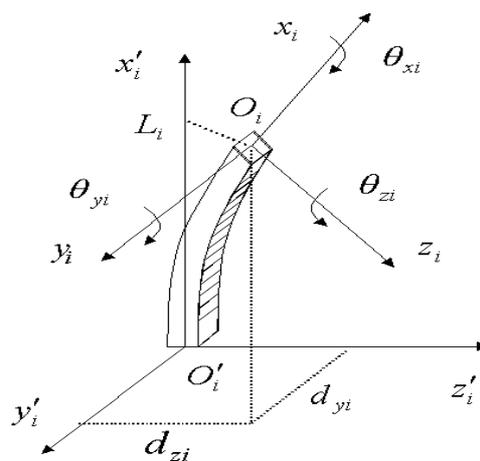


Figura 2.3 – Torção e flexão de um elo

Para as translações e rotações decorrentes dos deslocamentos e torções do elo,

expressa-se a transformação de coordenadas que relaciona o sistema O_i com o sistema O'_i , discretizada também através de transformações matriciais.

Da Figura 2.3, nota-se que o sistema coordenado O_i , fixo na extremidade do elo sofre uma rotação e uma translação, em relação ao sistema coordenado da base do elo $O'_i - x'_iy'_iz'_i$ devido à torção e deslocamento do elo. A rotação e translação são representadas com relação aos eixos y'_i e z'_i do sistema O'_i , com valor θ_{yi} , θ_{zi} e d_{yi} , d_{zi} , respectivamente, para o sistema coordenado $O_i - x_iy_iz_i$. Esta informação pode ser usada para definir a matriz transformação deslocamento, \mathbf{D}_{yzi} ou \mathbf{D}_{zyi} , para representar os efeitos do deslocamento e do comprimento do elo flexível. As matrizes transformação \mathbf{D}_{yzi} e \mathbf{D}_{zyi} são diferentes, já que elas são dependentes sobre translação e rotação. Esta última é considerada como ocorrendo primeiro (na verdade, ambas ocorrem ao mesmo tempo).

$$\mathbf{D}_{yzi} = \begin{bmatrix} c(\theta_{zi})c(\theta_{yi}) & -s(\theta_{zi}) & c(\theta_{zi})c(\theta_{yi}) & L_i \\ s(\theta_{zi})c(\theta_{yi}) & c(\theta_{zi}) & s(\theta_{zi})s(\theta_{yi}) & d_{yi} \\ -s(\theta_{yi}) & 0 & c(\theta_{yi}) & d_{zi} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

$$\mathbf{D}_{zyi} = \begin{bmatrix} c(\theta_{zi})c(\theta_{yi}) & -s(\theta_{zi})c(\theta_{yi}) & s(\theta_{yi}) & L_i \\ s(\theta_{zi}) & c(\theta_{zi}) & 0 & d_{yi} \\ -c(\theta_{zi})s(\theta_{yi}) & s(\theta_{zi})s(\theta_{yi}) & c(\theta_{yi}) & d_{zi} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Para aplicações práticas, a quantidade de rotação e translação devido à curvatura e à torção é suficientemente pequena (i.e., rotações menores que 15° e translações menores que 10% do comprimento do elo) de maneira que as seguintes aproximações podem ser feitas [Kozel e Koivo, 1991]:

- A projeção do comprimento do elo i , no eixo x_i , é assumida ser igual a L_i .
- Para a rotação θ_i devida à curvatura, $c(\theta_i) \approx 1$ e $s(\theta_i) \approx \theta_i$ (onde θ_i representa a rotação θ_{xi} , θ_{yi} ou θ_{zi}). Isto é possível quando não se consideram os efeitos da curvatura do elo.
- Os efeitos de segunda ordem na matriz transformação são negligenciados.

Se as aproximações acima são usadas, as matrizes transformação \mathbf{D}_{yzi} e \mathbf{D}_{zyi} resultam idênticas

$$\mathbf{D}_{yzi} = \mathbf{D}_{zyi} = \begin{bmatrix} 1 & -\theta_{zi} & \theta_{yi} & L_i \\ \theta_{zi} & 1 & 0 & d_{yi} \\ -\theta_{yi} & 0 & 1 & d_{zi} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

O sistema coordenado ligado à extremidade do elo em torção, sofrerá rotação relativa ao sistema coordenado da base do elo.

A quantidade de rotações varia de acordo com o movimento ao longo do comprimento do elo. Para o elo na Figura 2.3, a rotação devido à torção é definida sobre o eixo x_i e tem um valor de θ_{xi} sobre o sistema coordenado $O'_i - x'_iy'_iz'_i$. Os efeitos da torção são representados pela matriz transformação \mathbf{D}_{xi}

$$\mathbf{D}_{xi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c(\theta_{xi}) & -s(\theta_{xi}) & 0 \\ 0 & s(\theta_{xi}) & c(\theta_{xi}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Usando as aproximações acima, as transformações (2.9) e (2.10) podem ser combinadas em uma matriz transformação deslocamento \mathbf{D}_i única

$$\mathbf{D}_i^{i'} = \mathbf{D}_{xi}\mathbf{D}_{yzi} = \mathbf{D}_{zyi}\mathbf{D}_{xi} = \begin{bmatrix} 1 & -\theta_{zi} & \theta_{yi} & L_i \\ \theta_{zi} & 1 & -\theta_{xi} & d_{yi} \\ -\theta_{yi} & \theta_{xi} & 1 & d_{zi} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Assim, a transformação matricial total do elo flexível i , com relação ao elo anterior $i - 1$, é expressa na forma

$$\mathbf{Q}_i^{i-1} = \mathbf{A}_{i'}^{i-1}\mathbf{D}_i^{i'} \quad (2.12)$$

e o extremo do elo i , com relação às coordenadas da base na forma homogênea, escrito em

função do extremo do elo $i - 1$, resulta

$$\tilde{\mathbf{p}}^{i-1} = \mathbf{Q}_i^{i-1} \tilde{\mathbf{p}}^i. \quad (2.13)$$

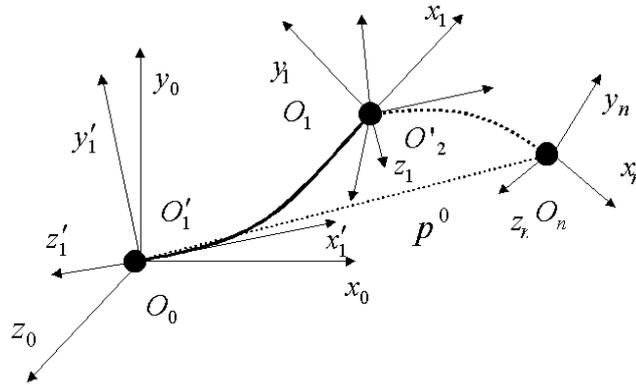


Figura 2.4 – Sistema com n elementos flexíveis conexos por juntas rotacionais

As transformações matriciais, definidas acima, podem ser usadas para obter as equações da cinemática de um manipulador genérico com n elos flexíveis, conforme a Figura 2.4, através de uma transformação matricial total \mathbf{Q}_n^0 , entre a base e o extremo do elemento terminal, dada pelo produto das matrizes transformação

$$\mathbf{Q}_n^0 = \mathbf{A}_1^0 \mathbf{D}_1^{1'} \dots \mathbf{A}_{n'}^{n-1} \mathbf{D}_n^{n'}. \quad (2.14)$$

A posição da extremidade do elemento terminal em relação ao sistema de coordenadas da base O_0 , Figura 2.4, é determinada por

$$\tilde{\mathbf{p}}^0 = \mathbf{Q}_1^0 \mathbf{Q}_2^1 \dots \mathbf{Q}_n^{n-1} \tilde{\mathbf{p}}^n = \mathbf{Q}_n^0 \tilde{\mathbf{p}}^n. \quad (2.15)$$

2.1.4 Variáveis Rotação e Translação

Para gerar resultados analíticos na representação da cinemática são necessários os valores da translação \mathbf{d}_i e rotação θ_i , resultantes de torques aplicados às juntas, nas equações matriciais. Para obter estes valores, uma representação para a translação $\mathbf{d}_i(x)$ e rotação $\theta_i(x)$, como função da posição x , ao longo do elo do manipulador se faz necessária. Existe uma variedade de métodos como funções modais [De Luca et al., 1990; Hastings e Book,

1987] ou Raileigh-Ritz [Lalanne et al., 1983; Usoro et al., 1986] para a determinação destes valores. Em todas estas técnicas, se o deslocamento $\mathbf{d}_i(x)$ for pequena, a rotação $\theta_i(x)$ pode ser obtida através da seguinte aproximação [Kozel e Koivo, 1991]

$$\theta_i(x) \approx \tan(\theta_i(x)) = \frac{\partial \mathbf{d}_i(x)}{\partial x}, \quad (2.16)$$

uma vez obtidos $\mathbf{d}_i(x)$ e $\theta_i(x)$, o deslocamento, a rotação e as vibrações dos elos provocados por torques aplicados às juntas do manipulador podem ser calculados.

2.1.5 Análise Modal

Uma representação exata da flexibilidade estrutural do elo do robô implica num modelo infinito-dimensional, o que limita a aplicação das equações de Lagrange para simulações computacionais e para determinação de técnicas de controle. Assim, uma aproximação finito-dimensional da flexibilidade pode ser obtida através das técnicas de análise modal [Meirovitch, 1967].

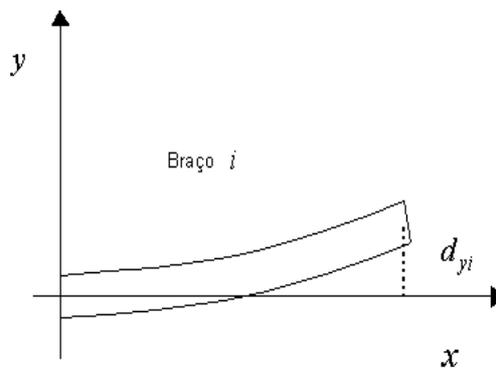


Figura 2.5 – Deslocamento planar elo i

Considerando um robô planar, os elos do robô podem ser modelados como barras de Euler-Bernoulli (Figura 2.5) com densidade uniforme ρ_i , área da seção transversal A_i , comprimento a_i e rigidez flexural $(EI)_i$, onde o deslocamento $d_{yi}(x_i, t)$ satisfaz a equação diferencial parcial

$$(EI)_i \frac{\partial^4 d_{yi}(x_i, t)}{\partial x_i^4} + \rho_i A_i \frac{\partial^2 d_{yi}(x_i, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (2.17)$$

Para resolver esta equação, condições de contorno apropriadas devem ser aplicadas nas extremidades inicial (base) e final do elo. Supondo que a inércia de um elo leve é pequena, comparada com a inércia da junta, pode-se usar funções modais restritas [Bellezza et al., 1990]. Em particular, segundo experimentos [Hastings e Book, 1987] e estudos analíticos [Cetinkunt e Yu, 1991] é conveniente assumir que cada braço é preso à base,

$$d_{yi}(0_i, t) = 0, \quad \frac{d}{dt}d_{yi}(0_i, t) = 0 \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.18)$$

Com respeito às condições restantes, a extremidade final do braço é considerada livre de restrições dinâmicas, devido à dificuldade em determinar as massas e inércias. De qualquer modo, segundo De Luca e Siciliano, 1989, é mais correto, considerar condições de contorno de massa, representando o balanço de momentos e forças cortantes, i.e,

$$\begin{aligned} (EI)_i \frac{\partial^2 d_{yi}(x_i, t)}{\partial x_i^2} \Big|_{x_i=a_i} &= -I_{ai} \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial d_{yi}(x_i, t)}{\partial x_i} \Big|_{x_i=a_i} \right) - (MD)_i \frac{d^2}{dt^2} \left(d_{yi}(x_i, t) \Big|_{x_i=a_i} \right) \\ (EI)_i \frac{\partial^3 d_{yi}(x_i, t)}{\partial x_i^3} \Big|_{x_i=a_i} &= M_{ai} \frac{d^2}{dt^2} \left(d_{yi}(x_i, t) \Big|_{x_i=a_i} \right) + (MD)_i \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial d_{yi}(x_i, t)}{\partial x_i} \Big|_{x_i=a_i} \right), \end{aligned} \quad (2.19)$$

com $i = 1, \dots, n$, onde a_i , M_{ai} e I_{ai} representam, respectivamente, o comprimento do elo i , a massa atual e o momento de inércia no final do elo i . $(MD)_i$ representa o momento de massa resultante de outros elos distantes do elo i , dependente da distância relativa de cada elo ao elo i .

A equação (2.17) pode ser resolvida usando a técnica de análise modal [Meirovitch, 1967], resultando num modelo finito-dimensional (de ordem m) para o deslocamento. Explorando a separabilidade de tempo e espaço da equação (2.17) e considerando um número finito de modos de vibração, o deslocamento de um elo robótico flexível pode ser expresso por

$$d_{yi}(x_i, t) = \sum_{j=1}^{m_i} \phi_{ij}(x_i) \delta_{ij}(t), \quad (2.20)$$

onde os deslocamentos $\delta_{ij}(t)$ são variáveis temporais associadas às funções modais espaciais $\phi_{ij}(x_i)$ do braço i . Logo, cada termo da solução geral de (2.17) é um produto de uma função

harmônica temporal

$$\delta_{ij}(t) = e^{j\varpi_{ij}t}, \quad (2.21)$$

com uma autofunção espacial da forma

$$\phi_{ij}(x_i) = C_{1,ij} \sin(\beta_{ij}x_i) + C_{2,ij} \cos(\beta_{ij}x_i) + C_{3,ij} \sinh(\beta_{ij}x_i) + C_{4,ij} \cosh(\beta_{ij}x_i). \quad (2.22)$$

Na equação (2.21), ϖ_{ij} representa a j -ésima frequência angular natural do problema de autovalores para o braço i e, na equação (2.22), $\beta_{ij}^4 = \varpi_{ij}^2 \rho_i / (EI)_i$.

Aplicando as condições de contorno acima, são determinados os coeficientes de (2.22). A condição base presa resulta em

$$C_{3,ij} = -C_{1,ij}, C_{4,ij} = -C_{2,ij}, \quad (2.23)$$

enquanto as condições de massa na extremidade do elo fornece o sistema homogêneo

$$[\mathbf{F}(\beta_{ij})] \begin{bmatrix} C_{1,ij} \\ C_{2,ij} \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (2.24)$$

A chamada equação de frequência é obtida zerando o determinante da matriz $\mathbf{F}(\beta_{ij})_{2 \times 2}$, que depende explicitamente dos valores M_{ai} , I_{ai} , e $(MD)_i$ [Oakley e Cannon, 1989]. Das primeiras m_i raízes desta equação, resulta os valores positivos de β_{ij} para a equação (2.22). Usando estes valores, os coeficientes $C_{1,ij}$ e $C_{2,ij}$ são determinados usando um fator de escala escolhidos com uma normalização aceitável. Além disso, as autofunções ϕ_{ij} resultantes satisfazem uma condição de ortogonalidade modificada, que inclui M_{ai} , I_{ai} , e $(MD)_i$. Note que, se o robô possui apenas um elo, M_{a1} e I_{a1} representam a massa e a inércia do elo, enquanto que os termos adicionais do lado direito de (2.19) se anulam ($(MD)_1 = 0$) apenas quando há um equilíbrio de massa na extremidade do elo. Para um elo intermediário i em uma cadeia de elos conectados, M_{ai} é a soma das massas de todos os elos posteriores ao elo i , enquanto que I_{ai} e $(MD)_i$ dependem da posição dos elos posteriores. Logo, estas quantidades devem ser escritas como funções dependentes da configuração do robô, o que aumenta a complexidade do modelo de Cetinkunt e Book, 1989. Porém, aproximações tomando valores constantes podem ser usadas.

Neste caso, é usado $(MD)_i = 0$ e calcula-se I_{ai} para uma configuração fixa. Pode-se, então, mostrar que $\det(\mathbf{F}) = 0$, resulta na equação transcendental [De Luca e Siciliano, 1989]

$$(1 + \cos(\beta_{ij}a_i) \cosh(\beta_{ij}a_i)) - \frac{M_{ai}\beta_{ij}}{\rho_i} (\sin(\beta_{ij}a_i) \cosh(\beta_{ij}a_i) - \cos(\beta_{ij}a_i) \sinh(\beta_{ij}a_i)) \\ - \frac{I_{ai}\beta_{ij}^3}{\rho_i} (\sin(\beta_{ij}a_i) \cosh(\beta_{ij}a_i) + \cos(\beta_{ij}a_i) \sinh(\beta_{ij}a_i)) \\ + \frac{M_{ai}I_{ai}\beta_{ij}^4}{\rho_i^2} (1 - \cos(\beta_{ij}a_i) \cosh(\beta_{ij}a_i)) = 0. \quad (2.25)$$

2.1.6 Derivada de uma Matriz de Rotação

Como o objetivo é caracterizar a velocidade linear e angular do elemento terminal de um robô, em primeiro lugar, deve-se analisar a derivada da matriz de rotação \mathbf{R} , com respeito ao tempo.

Supõe-se que a matriz de rotação varia no tempo ($\mathbf{R} = \mathbf{R}(t)$). Da propriedade de ortogonalidade de \mathbf{R} , tem-se a relação

$$\mathbf{R}(t)\mathbf{R}^T(t) = \mathbf{I}, \quad (2.26)$$

que, derivando com relação ao tempo, resulta

$$\dot{\mathbf{R}}(t)\mathbf{R}^T(t) + \mathbf{R}(t)\dot{\mathbf{R}}^T(t) = \mathbf{0}. \quad (2.27)$$

Definindo

$$\mathbf{S}(t) = \dot{\mathbf{R}}(t)\mathbf{R}^T(t), \quad (2.28)$$

a matriz \mathbf{S} resulta antissimétrica com

$$\mathbf{S}(t) + \mathbf{S}^T(t) = \mathbf{0}. \quad (2.29)$$

Multiplicando à direita ambos os termos de (2.28) por $\mathbf{R}(t)$, obtém-se

$$\dot{\mathbf{R}}(t) = \mathbf{S}(t)\mathbf{R}(t), \quad (2.30)$$

que consiste em expressar a derivada de $\mathbf{R}(t)$ em função dela própria.

A relação (2.30) admite uma interpretação física interessante. Considerando um

vetor constante \mathbf{p}' e o vetor $\mathbf{p}(t) = \mathbf{R}(t)\mathbf{p}'$, a derivada temporal de \mathbf{p} resulta

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = \dot{\mathbf{R}}(t)\mathbf{p}' = \mathbf{S}(t)\mathbf{R}(t)\mathbf{p}'. \quad (2.31)$$

Se o vetor $\omega(t)$ indica a velocidade angular do sistema de coordenadas de $\mathbf{R}(t)$ em t , com respeito ao sistema de coordenadas de referência, da mecânica [Goldstein, 1964], tem-se que

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = \omega(t) \times \mathbf{R}(t)\mathbf{p}'. \quad (2.32)$$

Portanto, o operador matricial \mathbf{S} descreve o produto vetorial entre o vetor ω e o vetor $\mathbf{R}(t)\mathbf{p}'$. A matriz $\mathbf{S}(t)$, cujos elementos, simétricos com respeito à diagonal principal, representam as componentes do vetor $\omega(t) = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$, é escrita na forma

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.33)$$

o que justifica a expressão $\mathbf{S}(t) = \mathbf{S}(\omega(t))$. Por outro lado, se \mathbf{R} representa uma matriz de rotação, vale a importante relação

$$\mathbf{R}\mathbf{S}(\omega)\mathbf{R}^T = \mathbf{S}(\mathbf{R}\omega). \quad (2.34)$$

2.1.7 Velocidade de um elo

Considera-se o elo genérico i de um robô, conforme a Figura 2.6. Sejam \mathbf{p}_{i-1} e \mathbf{p}_i os vetores que indicam a posição da origem dos sistemas coordenados $i-1$ e i , respectivamente, e seja $\mathbf{r}_{i-1,i}^{i-1}$ a posição da origem do sistema coordenado i , com respeito ao sistema coordenado $i-1$, expresso no sistema $i-1$. Aplicando a transformação de coordenadas (2.2), escreve-se

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_{i-1} + \mathbf{R}_{i-1}\mathbf{r}_{i-1,i}^{i-1}. \quad (2.35)$$

Derivando (2.35) e utilizando a expressão da derivada da matriz de rotação (2.30),

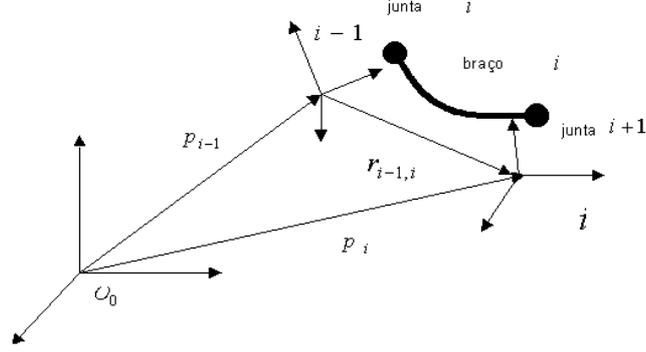


Figura 2.6 – Caracterização de um elo genérico i

juntamente com (2.32), obtém-se

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{p}}_i &= \dot{\mathbf{p}}_{i-1} + \mathbf{R}_{i-1} \dot{\mathbf{r}}_{i-1,i}^{i-1} + \omega_{i-1} \times \mathbf{R}_{i-1} \mathbf{r}_{i-1,i}^{i-1} \\ &= \dot{\mathbf{p}}_{i-1} + v_{i-1,i} + \omega_{i-1} \times \mathbf{r}_{i-1,i},\end{aligned}\quad (2.36)$$

que pode ser considerado como a expressão da velocidade linear do braço i , em função da velocidade linear e angular do elo $i-1$, onde $v_{i-1,i}$ indica a velocidade da origem do sistema coordenado i , com respeito à origem do sistema $i-1$, expressa no sistema de referência O_0 .

Para a velocidade angular, é oportuno partir da composição de rotações

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{R}_{i-1} \mathbf{R}_i^{i-1}, \quad (2.37)$$

cuja derivada temporal, de acordo com (2.30), pode ser escrita como

$$\mathbf{S}(\omega_i) \mathbf{R}_i = \mathbf{S}(\omega_{i-1}) \mathbf{R}_i + \mathbf{R}_{i-1} \mathbf{S}(\omega_{i-1,i}^{i-1}) \mathbf{R}_i^{i-1}, \quad (2.38)$$

onde $\omega_{i-1,i}^{i-1}$ indica a velocidade angular do sistema coordenado i , com respeito ao sistema $i-1$, expresso no sistema $i-1$. Usando a propriedade da ortogonalidade de matriz de rotação (2.26), obtém-se

$$\mathbf{R}_{i-1} \mathbf{S}(\omega_{i-1,i}^{i-1}) \mathbf{R}_i^{i-1} = \mathbf{R}_{i-1} \mathbf{S}(\omega_{i-1,i}^{i-1}) \mathbf{R}_{i-1}^T \mathbf{R}_{i-1} \mathbf{R}_i^{i-1}, \quad (2.39)$$

que, pela propriedade (2.34), resulta

$$\mathbf{R}_{i-1}\mathbf{S}(\omega_{i-1,i}^{i-1})\mathbf{R}_i^{i-1} = \mathbf{S}(\mathbf{R}_{i-1}\omega_{i-1,i}^{i-1})\mathbf{R}_i. \quad (2.40)$$

Portanto, (2.38) pode ser escrita como

$$\mathbf{S}(\omega_i)\mathbf{R}_i = \mathbf{S}(\omega_{i-1})\mathbf{R}_i + \mathbf{S}(\mathbf{R}_{i-1}\omega_{i-1,i}^{i-1})\mathbf{R}_i, \quad (2.41)$$

o que leva ao resultado

$$\omega_i = \omega_{i-1} + \mathbf{R}_{i-1}\omega_{i-1,i}^{i-1} = \omega_{i-1} + \omega_{i-1,i}. \quad (2.42)$$

Tal relação expressa a velocidade angular do elo i , em função da velocidade angular do segmento $i - 1$.

As relações (2.36) e (2.42) podem ser particularizadas para movimentos de rotação e translação de um sistema a outro.

Para movimentos de translação, a rotação é nula, logo tem-se a velocidade angular nula, isto é,

$$\omega_{i-1,i} = 0, \quad (2.43)$$

enquanto que a velocidade linear resulta

$$v_{i-1,i} = \dot{\mathbf{d}}_i\mathbf{z}_{i-1}, \quad (2.44)$$

onde \mathbf{z}_{i-1} representa o versor do eixo de rotação da junta i e \mathbf{d} o vetor de translações, considerando um robô planar.

Com isto, as expressões da velocidade angular (2.42) e linear (2.36) resultam em

$$\omega_i = \omega_{i-1}, \quad (2.45)$$

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \dot{\mathbf{p}}_{i-1} + \dot{d}_i\mathbf{z}_{i-1} + \omega_i \times \mathbf{r}_{i-1,i}. \quad (2.46)$$

Para movimentos de rotação, as velocidades angular e linear são expressas, respec-

tivamente, por

$$\tilde{\omega}_{i-1,i} = \dot{\mathbf{q}}_i \mathbf{z}_{i-1}, \quad (2.47)$$

onde \mathbf{z}_{i-1} é o versor do eixo da junta i e

$$\mathbf{v}_{i-1,i} = \tilde{\omega}_{i-1,i} \times \mathbf{r}_{i-1,i}. \quad (2.48)$$

Conseqüentemente, as expressões das velocidades angular e linear do sistema coordenado i , com relação ao sistema $i - 1$, resultam, respectivamente,

$$\omega_i = \omega_{i-1} + \dot{\mathbf{q}}_i \mathbf{z}_{i-1} \quad (2.49)$$

e

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \dot{\mathbf{p}}_{i-1} + \omega_i \times \mathbf{r}_{i-1,i}, \quad (2.50)$$

onde foi utilizada a relação (2.42) para $\omega_{i-1,i}$ em (2.48).

2.1.8 Jacobiano Geométrico

Uma vez obtidas as equações cinemáticas diretas, pode-se obter uma relação entre a velocidade das juntas do robô e as velocidades linear e angular dos elos do robô, através da matriz Jacobiana.

Na derivação da matriz Jacobiana, não há exigência de que a rotação e translação sejam causadas pela atuação das juntas. A única especificação usada para definir a translação é a direção que esta ocorre. Para a rotação, é necessário apenas observar o eixo de rotação e a localização que a rotação ocorre. Como visto anteriormente, os efeitos do deslocamento e de torções nos elos são modelados como translações e rotações da extremidade final de cada elo. Portanto, a matriz Jacobiana, para manipuladores com braços rígidos, pode ser estendida para manipuladores flexíveis [Kozel e Koivo, 1991].

2.1.9 Cálculo do Jacobiano

Quer-se expressar como vetores livres, a velocidade linear $\dot{\mathbf{p}}_n$ e a velocidade angular ω_n do elemento terminal, em função da velocidade das variáveis de junta e do deslocamento

$\dot{\mathbf{q}} = [\dot{\theta}, \dot{\delta}]^T$, mediante relações do tipo

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{p}}_{\mathbf{n}} &= \mathbf{J}_p(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \\ \omega_{\mathbf{n}} &= \mathbf{J}_O(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}},\end{aligned}\tag{2.51}$$

as quais podem ser escritas na seguinte forma matricial

$$v = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_{\mathbf{n}} \\ \omega_{\mathbf{n}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{pR} & \mathbf{J}_{pT} \\ \mathbf{J}_{OR} & \mathbf{J}_{OT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}.\tag{2.52}$$

Particionando a matriz de transformação \mathbf{J} em vetores coluna, obtém-se

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{pR_1} & \cdots & \mathbf{J}_{pR_n} & \mathbf{J}_{pT_1} & \cdots & \mathbf{J}_{pT_m} \\ \mathbf{J}_{OR_1} & \cdots & \mathbf{J}_{OR_n} & \mathbf{J}_{OT_1} & \cdots & \mathbf{J}_{OT_m} \end{bmatrix},\tag{2.53}$$

onde a matriz de transformação $\mathbf{J}_{6 \times N}$ é denominada Jacobiano geométrico, com $N = n + m$, onde m indica o número de modos elásticos e n , o número de juntas.

Os termos $\dot{\theta}_i \mathbf{J}_{pR_i}$ e $\dot{\delta}_i \mathbf{J}_{pT_i}$ representam, respectivamente, a contribuição da rotação da junta i e da translação do modo elástico i à velocidade linear do elo terminal, enquanto que os termos $\dot{\theta}_i \mathbf{J}_{OR_i}$ e $\dot{\delta}_i \mathbf{J}_{OT_i}$ representam, respectivamente, a contribuição da rotação da junta i e da translação do modo elástico i à velocidade angular do elo terminal.

Para a contribuição da junta i (rotacional) na velocidade angular, tendo em vista (2.47) tem-se,

$$\dot{\theta}_i \mathbf{J}_{OR_i} = \dot{\theta}_i \mathbf{z}_{i-1}\tag{2.54}$$

e, portanto,

$$\mathbf{J}_{OR_i} = \mathbf{z}_{i-1}.\tag{2.55}$$

Para a contribuição da junta i na velocidade linear, obtém-se

$$\dot{\theta}_i \mathbf{J}_{pR_i} = \omega_{i-1,i} \times \mathbf{r}_{i-1,n} = \dot{\theta}_i \mathbf{z}_{i-1} \times (\mathbf{p}_{\mathbf{n}} - \mathbf{p}_{i-1}),\tag{2.56}$$

resultando em

$$\mathbf{J}_{pR_i} = \mathbf{z}_{i-1} \times (\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_{i-1}). \quad (2.57)$$

E, finalmente, obtém-se

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}_{pR_i} \\ \mathbf{J}_{OR_i} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{z}_{i-1} \times (\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_{i-1}) \\ \mathbf{z}_{i-1} \end{Bmatrix}. \quad (2.58)$$

Para a contribuição do deslocamento do elo i (translação) na velocidade angular, tendo em vista (2.43), tem-se

$$\dot{\delta}_i \mathbf{J}_{OT_i} = 0 \quad (2.59)$$

e, portanto,

$$\mathbf{J}_{OT_i} = 0. \quad (2.60)$$

Para a contribuição do deslocamento do elo i na velocidade linear, obtém-se

$$\dot{\delta}_i \mathbf{J}_{pT_i} = \dot{\mathbf{d}}_i \mathbf{z}_{i-1}, \quad (2.61)$$

resultando em

$$\mathbf{J}_{pT_i} = \mathbf{z}_{i-1}. \quad (2.62)$$

E, finalmente, obtém-se

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}_{pT_i} \\ \mathbf{J}_{OT_i} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{z}_{i-1} \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (2.63)$$

As relações (2.63) e (2.58) consistem no cálculo do Jacobiano de maneira simples e sistemática, embasadas em relações cinemáticas diretas. No entanto, os vetores \mathbf{z}_{i-1} , \mathbf{p}_n e \mathbf{p}_{i-1} resultam em funções das coordenadas generalizadas e, em particular,

- \mathbf{z}_{i-1} é dado pela terceira coluna da matriz de transformação \mathbf{Q}_{i-1}^0 e

$$\mathbf{z}_{i-1} = \mathbf{Q}_1^0 \dots \mathbf{Q}_{i-1}^{i-2} \mathbf{z}_0, \quad (2.64)$$

onde $\mathbf{z}_0 = [0 \ 0 \ 1]^T$ é utilizado para selecionar a terceira coluna;

- \mathbf{p}_n é dado pelos três primeiros elementos da quarta coluna da matriz de transformação \mathbf{Q}_n^0 e $\tilde{\mathbf{p}}_n$, o vetor posição na forma homogênea, é dado por

$$\tilde{\mathbf{p}}_n = \mathbf{Q}_1^0 \dots \mathbf{Q}_n^{n-1} \tilde{\mathbf{p}}_0, \quad (2.65)$$

onde $\tilde{\mathbf{p}}_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$ é utilizado para selecionar a quarta coluna;

- \mathbf{p}_{i-1} é dado pelos três primeiros elementos da quarta coluna da matriz de transformação \mathbf{Q}_{i-1}^0 e

$$\tilde{\mathbf{p}}_{i-1} = \mathbf{Q}_1^0 \dots \mathbf{Q}_{i-1}^{i-2} \tilde{\mathbf{p}}_0. \quad (2.66)$$

As relações precedentes podem ser convenientemente utilizadas para calcular velocidade de translação e rotação de um ponto qualquer ao longo da estrutura do robô. Para isto, basta conhecer as funções cinemáticas diretas deste ponto.

2.2 Dinâmica

2.2.1 Introdução

A dedução do modelo dinâmico de um robô é de grande importância para a simulação do movimento, para a análise de estruturas de manipulação e para a elaboração de algoritmos de controle, eliminando assim a necessidade de uma estrutura física de manipulação.

Aqui, será apresentado um método de derivação das equações do movimento de um robô baseado na formulação de Lagrange, conceitualmente simples e sistemática, conduzindo à derivação do modelo dinâmico em forma fechada.

2.2.2 Formulação de Lagrange

O modelo dinâmico de um robô descreve as relações existentes entre o torque aplicado às juntas e o movimento da estrutura. É importante observar que na formulação de Lagrange, a derivação das equações do movimento são independentes do sistema de coordenadas de referência. é escolhido um conjunto de variáveis λ_i , $i = 1, \dots, N$, denominadas

coordenadas generalizadas, que descrevem a posição dos elementos mecânicos que constituem uma estrutura com N graus de liberdade. Neste caso, $\lambda_i = q_i$, onde $q_i = \theta_i$ para $1 \leq i \leq n$, representa o ângulo das juntas e $q_i = \delta_i$ para $n \leq i \leq n + m$, representa os modos elásticos dos elos do robô. Define-se como Lagrangeano do sistema mecânico a função, dependente das coordenadas generalizadas,

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U}, \quad (2.67)$$

onde \mathcal{T} é a energia cinética e \mathcal{U} é a energia potencial total do sistema.

A partir do Lagrangeano, obtém-se a equação de Lagrange dada por

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \xi_{f_i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.68)$$

onde ξ_{f_i} são as forças generalizadas associadas às coordenadas generalizadas q_i , as quais provêm das forças não conservativas, devido ao torque gerado pelos atuadores, torque de atrito nas juntas e torque induzido por situações de interação com o ambiente.

A equação (2.68) define as relações existentes entre as forças generalizadas aplicadas no robô e a velocidade e a aceleração de suas juntas.

Energia Cinética

Considera-se um robô com elos flexíveis representado por N graus de liberdade. A energia cinética total é dada pela soma das contribuições relativas ao movimento de cada elo e ao movimento dos atuadores nas juntas, expressa na forma

$$\mathcal{T} = \sum_{i=1}^N (\mathcal{T}_{l_i} + \mathcal{T}_{h_i}) + \mathcal{T}_c, \quad (2.69)$$

onde \mathcal{T}_{l_i} , \mathcal{T}_{h_i} e \mathcal{T}_c representam, respectivamente, a energia cinética do elo, energia cinética do motor e mecanismos que acionam a junta i e energia cinética da carga do elemento terminal.

Somando as contribuições de translação e rotação à contribuição da energia cinética do elo i , têm-se

$$\mathcal{T}_{l_i} = \frac{1}{2} m_{l_i} \dot{\mathbf{p}}_{l_i}^T \dot{\mathbf{p}}_{l_i} + \frac{1}{2} \omega_i^T \mathbf{I}_{l_i} \omega_i, \quad (2.70)$$

sendo $\dot{\mathbf{p}}_{l_i}$ a velocidade linear do baricentro situado a distância l_i da base do elo e ω_i a velocidade angular do segmento i , ambos com relação ao sistema de coordenadas base e \mathbf{I}_{l_i} representa os tensores de inércia do sistema, com relação ao sistema de coordenadas base.

Agora, deve-se expressar a energia cinética em função das coordenadas generalizadas do sistema. Para isto, podemos usar o método geométrico para o cálculo do Jacobiano, que caracteriza o elo i , dado por

$$\dot{\mathbf{p}}_{l_i} = \mathbf{J}_p^{(l_i)} \dot{\mathbf{q}} \quad (2.71)$$

e

$$\omega_i = \mathbf{J}_O^{(l_i)} \dot{\mathbf{q}}, \quad (2.72)$$

onde é evidenciada a contribuição das colunas dos Jacobianos relativos à velocidade das juntas que precedem o segmento i .

Os Jacobianos considerados são

$$\mathbf{J}_p^{(l_i)} = [\mathbf{J}_{pR1}^{(l_i)} \dots \mathbf{J}_{pRi}^{(l_i)}, \mathbf{0} \dots \mathbf{0}, \mathbf{J}_{pT1}^{(l_i)} \dots \mathbf{J}_{pTi}^{(l_i)}, \mathbf{0} \dots \mathbf{0}] \quad (2.73)$$

e

$$\mathbf{J}_O^{(l_i)} = [\mathbf{J}_{OR1}^{(l_i)} \dots \mathbf{J}_{ORi}^{(l_i)}, \mathbf{0} \dots \mathbf{0}, \mathbf{J}_{OT1}^{(l_i)} \dots \mathbf{J}_{OTi}^{(l_i)}, \mathbf{0} \dots \mathbf{0}]. \quad (2.74)$$

As colunas das matrizes (2.73) e (2.74) podem ser calculadas através do Jacobiano geométrico.

Assim, a energia cinética do elo i , em (2.70), pode ser escrita como

$$\mathcal{T}_{l_i} = \frac{1}{2} m_{l_i} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_p^{(l_i)T} \mathbf{J}_p^{(l_i)} \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_O^{(l_i)T} \mathbf{I}_{l_i} \mathbf{J}_O^{(l_i)} \dot{\mathbf{q}}. \quad (2.75)$$

A contribuição da energia cinética relativa ao motor da junta i , considerando um caso típico de motor elétrico [Sciavicco e Siciliano, 1995], pode ser escrita como

$$\mathcal{T}_{h_i} = \frac{1}{2} m_{h_i} \dot{\mathbf{p}}_{h_i}^T \dot{\mathbf{p}}_{h_i} + \frac{1}{2} \omega_{h_i}^T \mathbf{I}_{h_i} \omega_{h_i}, \quad (2.76)$$

onde m_{h_i} é a massa do motor, $\dot{\mathbf{p}}_{h_i}$ é a velocidade linear do baricentro do motor, \mathbf{I}_{h_i} é o tensor

de inércia do motor relativo ao baricentro e ω_{h_i} é a velocidade angular do rotor.

Para expressar a energia cinética do motor, em função das variáveis de junta, é oportuno expressar a velocidade linear do baricentro do motor, em analogia a (2.71), como

$$\dot{\mathbf{p}}_{h_i} = \mathbf{J}_p^{(h_i)} \dot{\mathbf{q}}. \quad (2.77)$$

O Jacobiano a calcular é, portanto,

$$\mathbf{J}_p^{(h_i)} = [\mathbf{J}_{pR1}^{(h_i)} \dots \mathbf{J}_{pRi}^{(h_i)}, \mathbf{0} \dots \mathbf{0}, \mathbf{J}_{pT1}^{(h_i)} \dots \mathbf{J}_{pTi}^{(h_i)}, \mathbf{0} \dots \mathbf{0}]. \quad (2.78)$$

Agora a velocidade angular, em (2.76), em função das variáveis de junta, pode ser expressa por

$$\omega_{h_i} = \mathbf{J}_O^{(h_i)} \dot{\mathbf{q}} \quad (2.79)$$

e o Jacobiano a ser calculado é

$$\mathbf{J}_O^{(m_i)} = [\mathbf{J}_{OR1}^{(h_i)} \dots \mathbf{J}_{ORi}^{(h_i)}, \mathbf{0} \dots \mathbf{0}, \mathbf{J}_{OT1}^{(h_i)} \dots \mathbf{J}_{OTi}^{(h_i)}, \mathbf{0} \dots \mathbf{0}]. \quad (2.80)$$

Assim, a energia cinética do motor i pode ser escrita na forma

$$\mathcal{T}_{h_i} = \frac{1}{2} m_{h_i} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_p^{(h_i)T} \mathbf{J}_p^{(h_i)} \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_O^{(h_i)T} \mathbf{I}_{h_i} \mathbf{J}_O^{(h_i)} \dot{\mathbf{q}}. \quad (2.81)$$

Analogamente, a contribuição da energia cinética relativa à carga no elemento terminal é dada por

$$\mathcal{T}_c = \frac{1}{2} m_c \dot{\mathbf{p}}_c^T \dot{\mathbf{p}}_c + \frac{1}{2} \omega_c^T \mathbf{I}_c \omega_c, \quad (2.82)$$

resultando

$$\mathcal{T}_c = \frac{1}{2} m_c \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_p^{(c)T} \mathbf{J}_p^{(c)} \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_O^{(c)T} \mathbf{I}_c \mathbf{J}_O^{(c)} \dot{\mathbf{q}}, \quad (2.83)$$

onde m_c é a massa da carga, p_c é a velocidade linear do baricentro da carga, \mathbf{I}_c é o tensor de inércia da carga, relativo ao baricentro e ω_c é a velocidade angular da carga considerada fixa ao elemento terminal.

Finalmente, segundo (2.69), somando as várias contribuições relativas aos elos, mo-

tores e carga, expressos por (2.75), (2.81) e (2.83), respectivamente, a energia cinética total do robô é expressa na forma quadrática

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N b_{ij}(\mathbf{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}, \quad (2.84)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^N \left(m_{l_i} \mathbf{J}_p^{(l_i)T} \mathbf{J}_p^{(l_i)} + \mathbf{J}_O^{(l_i)T} \mathbf{I}_{l_i} \mathbf{J}_O^{(l_i)} + m_{h_i} \mathbf{J}_p^{(h_i)T} \mathbf{J}_p^{(h_i)} + \mathbf{J}_O^{(h_i)T} \mathbf{I}_{h_i} \mathbf{J}_O^{(h_i)} \right) \\ + \frac{1}{2} m_c \mathbf{J}_p^{(c)T} \mathbf{J}_p^{(c)} + \frac{1}{2} \mathbf{J}_O^{(c)T} \mathbf{I}_c \mathbf{J}_O^{(c)} \end{aligned} \quad (2.85)$$

é denominada a matriz de inércia ($N \times N$) simétrica, positiva definida e dependente da configuração do robô.

Energia Potencial

Assim como para a energia cinética, a energia potencial total é dada pela soma das contribuições relativas a cada elo, das contribuições relativas aos motores das juntas e da carga, além da energia potencial elástica decorrente do deslocamento dos elos

$$\mathcal{U} = \sum_{i=1}^N (\mathcal{U}_{l_i} + \mathcal{U}_{h_i} + \mathcal{U}_{e_i}) + \mathcal{U}_c. \quad (2.86)$$

A contribuição genérica das forças gravitacionais é

$$\mathcal{U}_{l_i} = - \int_0^{a_i} \mathbf{g}_0^T \mathbf{p}_i \rho dV = -m_{l_i} \mathbf{g}_0^T \mathbf{p}_{l_i}, \quad (2.87)$$

na qual \mathbf{g}_0 é o vetor aceleração da gravidade, com relação ao sistema de coordenadas base. Utiliza-se a relação que define as coordenadas do baricentro do elo i . Para a contribuição do motor i e da carga, análogo a (2.87), tem-se

$$\mathcal{U}_{h_i} = -m_{h_i} \mathbf{g}_0^T \mathbf{p}_{h_i}, \mathcal{U}_c = -m_c \mathbf{g}_0^T \mathbf{p}_c. \quad (2.88)$$

A energia potencial elástica é dada pela expressão

$$\mathcal{U}_{e_i} = \frac{1}{2} \int_0^{a_i} EI_i(x_i) \left[\frac{d^2 d_{yi}(x_i)}{dx^2} \right]^2 dx, \quad (2.89)$$

que pode ser reescrita na forma

$$\mathcal{U}_{e_i} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \delta_{ij} \delta_{ik} k_{ijk}, \quad (2.90)$$

onde k_{ijk} é o coeficiente de elasticidade cruzado do modo j e k do elo i na forma

$$k_{ijk} = \int_0^{a_i} (EI)_i \phi_{ij}(x_i)'' \phi_{ik}(x_i)'' dx_i. \quad (2.91)$$

Substituindo (2.87), (2.88) e (2.90) em (2.86), obtém-se a energia potencial total expressa por

$$\mathcal{U} = - \sum_{i=1}^N (m_{l_i} \mathbf{g}_0^T \mathbf{p}_{l_i} + m_{h_i} \mathbf{g}_0^T \mathbf{p}_{h_i}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \delta_{ij} \delta_{ik} k_{ijk} - m_c \mathbf{g}_0^T \mathbf{p}_c, \quad (2.92)$$

na qual, através de \mathbf{p}_c , \mathbf{p}_{l_i} e \mathbf{p}_{h_i} , pode-se observar dependência somente das variáveis de junta \mathbf{q} e não de $\dot{\mathbf{q}}$.

2.2.3 Equação do Movimento

Levando em conta as expressões (2.84) e (2.92), que representam a energia cinética e a energia potencial do sistema mecânico, respectivamente, o Lagrangeano (2.67) pode ser escrito na forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \mathcal{T}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathcal{U}(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N b_{ij}(\mathbf{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j \\ &+ \sum_{i=1}^N (m_{l_i} \mathbf{g}_0^T \mathbf{p}_{l_i} + m_{h_i} \mathbf{g}_0^T \mathbf{p}_{h_i}) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \delta_{ij} \delta_{ik} k_{ijk} + m_c \mathbf{g}_0^T \mathbf{p}_c. \end{aligned} \quad (2.93)$$

Seguindo a derivação da equação (2.68) e notando que \mathcal{U} não depende de $\dot{\mathbf{q}}$, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^N b_{ij}(\mathbf{q}) \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^N \frac{db_{ij}(\mathbf{q})}{dt} \dot{q}_j \\ &= \sum_{j=1}^N b_{ij}(\mathbf{q}) \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \frac{\partial b_{ij}(\mathbf{q})}{\partial q_k} \dot{q}_k \dot{q}_j \end{aligned} \quad (2.94)$$

e, também,

$$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_i} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \frac{\partial b_{jk}(\mathbf{q})}{\partial q_i} \dot{q}_k \dot{q}_j, \quad (2.95)$$

onde os índices dos somatórios foram oportunamente modificados. Por outro lado, de acordo com (2.71) e (2.77), obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{U}_l}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{U}_h}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{U}_c}{\partial q_i} &= - \sum_{j=1}^N \left(m_{l_j} \mathbf{g}_0^T \frac{\partial \mathbf{p}_{l_j}}{\partial q_i} + m_{h_j} \mathbf{g}_0^T \frac{\partial \mathbf{p}_{h_j}}{\partial q_i} \right) - m_c \mathbf{g}_0^T \frac{\partial \mathbf{p}_c}{\partial q_i} \\ &= - \sum_{j=1}^N \left(m_{l_j} \mathbf{g}_0^T \mathbf{J}_{p_i}^{(l_j)}(\mathbf{q}) + m_{h_j} \mathbf{g}_0^T \mathbf{J}_{p_i}^{(h_j)}(\mathbf{q}) \right) - m_c \mathbf{g}_0^T \mathbf{J}_p^{(c)}(\mathbf{q}) = g_i(\mathbf{q}), \end{aligned} \quad (2.96)$$

$$\frac{\partial \mathcal{U}_e}{\partial q_i} = - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \frac{\partial \delta_{ij} \delta_{ik}}{\partial q_i} k_{ijk} = \mathbf{K} \mathbf{q}. \quad (2.97)$$

Como \mathcal{U}_e independe de θ_i , tem-se

$$\frac{\partial \mathcal{U}_e}{\partial \theta_i} = 0 \quad (2.98)$$

e, para as variáveis de deslocamento,

$$\frac{\partial \mathcal{U}_e}{\partial \delta_{ik}} = \sum_{j=1}^m \delta_{ij} k_{ijk}, \quad (2.99)$$

onde, como no caso anterior, os índices dos somatórios foram modificados. Portanto, as equações do movimento resultam

$$\sum_{j=1}^N b_{ij}(\mathbf{q}) \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N h_{ijk}(\mathbf{q}) \dot{q}_k \dot{q}_j + \mathbf{K} \mathbf{q} + g_i(\mathbf{q}) = \xi_{f_i} \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.100)$$

onde

$$h_{ijk} = \frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i}. \quad (2.101)$$

Uma interpretação física da equação do movimento evidencia que o coeficiente b_{ii} representa o momento de inércia na junta i quando as outras juntas estão bloqueadas, enquanto que o coeficiente b_{ij} leva em conta o efeito da aceleração da junta j sobre a junta i .

O termo $h_{ijk}(\mathbf{q})\dot{q}_k\dot{q}_j$ representa o efeito centrífugo e de Coriolis na junta i , provocado pela velocidade da junta j e k . O termo g_i representa o torque gerado no eixo da junta i devido ao efeito da gravidade.

Para explicitar as forças não conservativas que compõem o trabalho sobre as juntas do robô deve-se subtrair dos torques de atuação os torques de atrito viscoso das juntas e amortecimento dos braços $\mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}$.

Se o elemento terminal do robô está em contato com um ambiente, parte dos torques de atuação devem compensar os torques induzidos nas juntas pelas forças de contato. Tais torques são dados por $\mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{h}_a$, onde \mathbf{h}_a denota o vetor de forças exercidas pelo elemento terminal do robô sobre o ambiente.

Enfim, a equação do movimento (2.100) pode ser reescrita na forma matricial compacta, que representa o modelo dinâmico de um robô com elos flexíveis

$$\mathbf{B}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \tau\mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{h}_a, \quad (2.102)$$

onde $\mathbf{C}_{N \times N}$ satisfaz a relação

$$\sum_{j=1}^N c_{ij}\dot{q}_j = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N h_{ijk}(\mathbf{q})\dot{q}_k\dot{q}_j. \quad (2.103)$$

2.2.4 Propriedades do Modelo Dinâmico

Aqui, representa-se uma importante propriedade do modelo dinâmico, muito útil para a elaboração de algoritmos de controle.

Antissimetria da Matriz $\dot{\mathbf{B}} - 2\mathbf{C}$

Como visto anteriormente, a matriz \mathbf{C} é determinada como

$$\sum_{j=1}^N c_{ij}\dot{q}_j = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N h_{ijk}(\mathbf{q})\dot{q}_k\dot{q}_j = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i} \right) \dot{q}_k\dot{q}_j, \quad (2.104)$$

que, mediante oportunas mudanças nos somatórios entre j e k , pode ser reescrita como

$$\sum_{j=1}^N c_{ij}\dot{q}_j = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_k\dot{q}_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial b_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i} \right) \dot{q}_k\dot{q}_j. \quad (2.105)$$

Em conseqüência, o elemento genérico de \mathbf{C} resulta

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^N c_{ijk} \dot{q}_k, \quad (2.106)$$

onde os coeficientes

$$c_{ijk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial b_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i} \right) \quad (2.107)$$

são denominados símbolos de Christoffel. Nota-se que, devido à simetria de \mathbf{B} , tem-se

$$c_{ijk} = c_{ikj}. \quad (2.108)$$

Substituindo os coeficientes de (2.107) em (2.106), obtém-se

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial b_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i} \right) \dot{q}_k \\ &= \frac{1}{2} \dot{b}_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial b_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i} \right) \dot{q}_k. \end{aligned} \quad (2.109)$$

Agora, tomando $n_{ij} = \dot{b}_{ij} - 2c_{ij}$, tem-se

$$n_{ij} = \dot{b}_{ij} - 2 \left[\frac{1}{2} \dot{b}_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial b_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i} \right) \dot{q}_k \right] = \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i} - \frac{\partial b_{ik}}{\partial q_j} \right) \dot{q}_k. \quad (2.110)$$

Pode-se observar que $n_{ij} = -n_{ji}$. Isto demonstra a antissimetria da matriz $\mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{B}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$. Uma propriedade interessante, conseqüência da antissimetria de $\mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, é

$$\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} = 0. \quad (2.111)$$

Mas, como \mathbf{C} não é única, deve-se mostrar que (2.111) vale para qualquer escolha de \mathbf{C} . Para isto, é usado o princípio da conservação da energia (Princípio de Hamilton), onde a derivada total da energia cinética equivale à potência gerada por todas as forças que agem sobre as juntas do robô. Para este sistema, escreve-se

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{q}}^T (\tau - \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{K} \mathbf{q} - \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{h}_a). \quad (2.112)$$

Efetuada a derivação do primeiro membro de (2.112), obtém-se

$$\frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{B}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}. \quad (2.113)$$

Substituindo $\mathbf{B}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}$ de (2.102), resulta

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T (\dot{\mathbf{B}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}))\dot{\mathbf{q}} \\ &+ \dot{\mathbf{q}}^T (\tau - \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{K}\mathbf{q} - \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{h}_a). \end{aligned} \quad (2.114)$$

Da igualdade do segundo membro das equações (2.112) e (2.114), obtém-se o resultado fixado em (2.111).

2.2.5 Modelo Dinâmico Explícito para um Robô com um elo Rígido e um Flexível

É apresentado aqui o modelo dinâmico explícito de um robô planar com um elo rígido e um elo flexível ($n = 2$), com dois modos elásticos para o elo flexível ($m = 2$). Assim, o vetor de coordenadas Lagrangeanas se reduz a $\mathbf{q} = (\theta_1, \theta_2, \delta_1, \delta_2)^T$, o que representa $N = 4$. Resultados experimentais mostram que este modelo de ordem reduzida, com dois modos de deslocamento é suficiente para o controle de elos flexíveis através do torque dos motores devido a limitação de freqüência dos motores [De Luca e Siciliano, 1990].

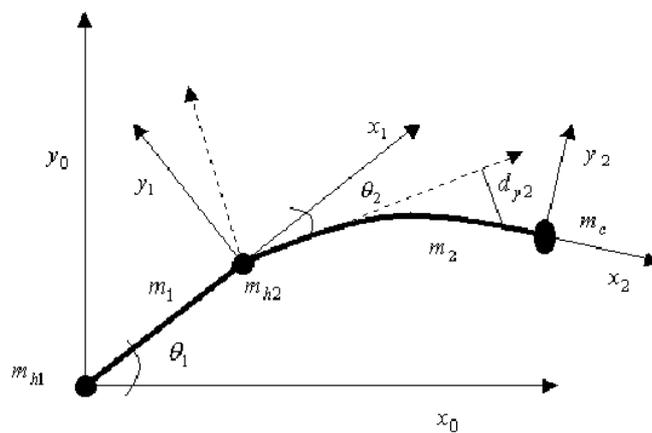


Figura 2.7 – Robô planar com dois elos flexíveis

Considera-se o robô da Figura 2.7, para o qual o vetor das variáveis generalizadas resulta em $\mathbf{q} = (\theta_1, \theta_2, \delta_1, \delta_2)^T$. Sejam a_1 e a_2 o comprimento dos elos, rígido e flexível,

respectivamente, l_1 e l_2 a posição dos baricentros dos braços, m_1 e m_2 as massas dos elos, m_{h_1} e m_{h_2} as massas dos motores que acionam as juntas, m_c a massa da carga no elemento terminal e I_{h_1} e I_{h_2} os momentos de inércia em torno dos motores. Supõe-se que $\mathbf{p}_{m_i} = \mathbf{p}_{i-1}$ e $z_{h_i} = z_{i-1}$ para $i = 1, 2$, isto é, os motores estão situados sobre o eixo das juntas com baricentro em correspondência com as origens dos respectivos sistemas coordenados e são desconsiderados efeitos torcionais.

A transformação matricial homogênea, representando a rotação do elo rígido é dada por

$$\mathbf{A}_1^0 = \begin{bmatrix} c(\theta_1) & -s(\theta_1) & 0 & 0 \\ s(\theta_1) & c(\theta_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.115)$$

e a rotação da junta do elo flexível é dada por

$$\mathbf{A}_{2'}^1 = \begin{bmatrix} c(\theta_2) & -s(\theta_2) & 0 & 0 \\ s(\theta_2) & c(\theta_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.116)$$

onde $c(\cdot)$ e $s(\cdot)$ representam $\cos(\cdot)$ e $\sin(\cdot)$.

As matrizes transformação \mathbf{D}_1^0 e $\mathbf{D}_2^{2'}$ abaixo representam a translação e a rotação devido ao deslocamento do elo rígido e do elo flexível, respectivamente, assumidas somente transversais ao eixo do braço.

$$\mathbf{D}_1^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{D}_2^{2'} = \begin{bmatrix} 1 & -\theta_2' & 0 & a_2 \\ \theta_2' & 1 & 0 & d_{y2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.117)$$

onde $d_{y2} = \delta_1\phi_1 + \delta_2\phi_2$.

Assim, as transformações matriciais totais do elo rígido \mathbf{Q}_1^0 e do elo flexível \mathbf{Q}_2^1 são

dadas pelas matrizes

$$\mathbf{Q}_1^0 = \mathbf{A}_1^0 \mathbf{D}_1^0 = \begin{bmatrix} c(\theta_1) & -s(\theta_1) & 0 & c(\theta_1)a_1 \\ s(\theta_1) & c(\theta_1) & 0 & s(\theta_1)a_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.118)$$

$$\mathbf{Q}_2^1 = \mathbf{A}_2^1 \mathbf{D}_2^{2'} = \begin{bmatrix} c(\theta_2) - s(\theta_2)\theta_2' & -c(\theta_2)\theta_2' - s(\theta_2) & 0 & c(\theta_2)a_2 - s(\theta_2)dy_2 \\ s(\theta_2) - c(\theta_2)\theta_2' & c(\theta_2) - s(\theta_2)\theta_2' & 0 & s(\theta_2)a_2 + c(\theta_2)dy_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.119)$$

A posição da extremidade do elemento terminal em relação ao sistema de coordenadas da base O_0 é determinada por

$$\tilde{\mathbf{p}}^0 = \mathbf{Q}_1^0 \mathbf{Q}_2^1 \tilde{\mathbf{p}}^2 = \begin{bmatrix} c(\theta_1) [c(\theta_2) a_2 - s(\theta_2) dy_2] - s(\theta_1) [s(\theta_2) a_2 + c(\theta_2) dy_2] + c(\theta_1) a_1 \\ s(\theta_1) [c(\theta_2) a_2 - s(\theta_2) dy_2] + c(\theta_1) [s(\theta_2) a_2 + c(\theta_2) dy_2] + s(\theta_1) a_1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.120)$$

A partir das transformações matriciais acima, o cálculo dos Jacobianos geométricos em (2.53) fornece os Jacobianos relativos à velocidade linear das juntas que precedem o elo i , para os elos, motores e carga do elemento terminal expressos abaixo.

O Jacobiano representando a velocidade linear e angular do baricentro do primeiro elo rígido é dado por

$$\mathbf{J}_p^{(l1)} = \begin{bmatrix} -s(\theta_1) l_1 & 0 & 0 & 0 \\ c(\theta_1) l_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_O^{(l1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.121)$$

e para o segundo elo flexível

$$\mathbf{J}_p^{(l2)} = \begin{bmatrix} -s(\theta_1)e_{l2} - c(\theta_1)e_{l1} - s(\theta_1) a_1 & -s(\theta_1)e_{l2} - c(\theta_1)e_{l1} & -s(\theta_1 + \theta_2) & -s(\theta_1 + \theta_2) \\ -c(\theta_1)e_{l2} - s(\theta_1)e_{l1} - c(\theta_1) a_1 & -c(\theta_1)e_{l2} - s(\theta_1)e_{l1} & -c(\theta_1 - \theta_2) & -c(\theta_1 - \theta_2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.122)$$

$$\mathbf{J}_O^{(l2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.123)$$

onde $e_{l1} = s(\theta_1)l_2 + c(\theta_1)d_{y2}$ e $e_{l2} = c(\theta_1)l_2 - s(\theta_1)d_{y2}$.

Para a velocidade linear e angular do baricentro do motor dos elos rígido e flexível, têm-se os Jacobianos

$$\mathbf{J}_p^{(h1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{J}_O^{(h1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.124)$$

$$\mathbf{J}_p^{(h2)} = \begin{bmatrix} -s(\theta_1)a_1 & 0 & 0 & 0 \\ c(\theta_1)a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{J}_O^{(h2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.125)$$

Para a velocidade linear e angular da carga no elemento terminal, têm-se os Jacobianos

$$\mathbf{J}_p^{(c)} = \begin{bmatrix} -s(\theta_1)e_{a2} - c(\theta_1)e_{a1} - s(\theta_1)a_1 & -s(\theta_1)e_{a2} - c(\theta_1)e_{a1} & -s(\theta_1 + \theta_2) & -s(\theta_1 + \theta_2) \\ -c(\theta_1)e_{a2} - s(\theta_1)e_{a1} - c(\theta_1)a_1 & -c(\theta_1)e_{a2} - s(\theta_1)e_{a1} & -c(\theta_1 - \theta_2) & -c(\theta_1 - \theta_2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.126)$$

$$\mathbf{J}_O^{(c)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.127)$$

onde $e_{a1} = s(\theta_1)a_2 + c(\theta_1)d_{y2}$, e $e_{a2} = c(\theta_1)a_2 - s(\theta_1)d_{y2}$.

Somando as várias contribuições relativas aos elos, motores e carga, expressos pelos Jacobianos geométricos acima, obtém-se a energia cinética e potencial total do robô, resultando nas equações do movimento do robô (2.102), cujas componentes são descritas abaixo.

As componentes da matriz de inércia, positiva definida $\mathbf{B}(\mathbf{q})$, são obtidas de (2.85),

resultando em

$$\begin{aligned}
b_{11} &= I_{h1} + m_c a_2^2 + m_c dy_2^2 + m_2 dy_2^2 + 2 m_2 a_1 c(\theta_2) l_2 - 2 m_2 a_1 s(\theta_2) dy_2 \\
&\quad - 2 m_c a_1 s(\theta_2) dy_2 + 2 m_c a_1 c(\theta_2) a_2 + m_2 l_2^2 + m_{h2} a_1^2 + I_2 + I_c + I_{h2} \\
&\quad + I_{l1} + m_1 I_{l1}^2 + m_2 a_1^2 + m_c a_1^2, \\
b_{12} &= b_{21} = m_c a_2^2 + m_c dy_2^2 + m_2 dy_2^2 + m_2 a_1 c(\theta_2) l_2 - m_2 a_1 s(\theta_2) dy_2 \\
&\quad - m_c a_1 s(\theta_2) dy_2 + m_c a_1 c(\theta_2) a_2 + m_2 l_2^2 + I_{l2} + I_c + I_{h2}, \\
b_{13} &= b_{31} = b_{14} = b_{41} = m_2 a_1 c(\theta_2) + m_2 l_2 + m_c a_1 c(\theta_2) + m_c a_1, \\
b_{22} &= m_c a_2^2 + m_c dy_2^2 + m_2 dy_2^2 + m_2 l_2^2 + I_{l2} + I_c + I_{h2}, \\
b_{23} &= b_{32} = b_{24} = b_{42} = m_2 l_2 + m_c a_2, \\
b_{33} &= b_{43} = b_{34} = b_{44} = m_2 + m_c.
\end{aligned} \tag{2.128}$$

Note que a ortonormalização das funções formas modais implica em simplificações nos blocos diagonais da matriz de inércia, relativos aos deslocamentos de cada elo.

Uma vez obtida a matriz de inércia, as componentes de $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ são calculadas usando (2.103) e (2.101) e são expressas por

$$\begin{aligned}
c_{11} &= (-2 m_2 a_1 s(\theta_2) l_2 - 2 m_2 a_1 c(\theta_2) dy_2 - 2 m_c a_1 c(\theta_2) dy_2 - 2 m_c a_1 s(\theta_2) a_2) \dot{\theta}_2, \\
c_{12} &= (-m_2 a_1 s(\theta_2) l_2 - m_2 a_1 c(\theta_2) dy_2 - m_c a_1 c(\theta_2) dy_2 - m_c a_1 s(\theta_2) a_2) \dot{\theta}_2, \\
c_{21} &= (m_2 a_1 s(\theta_2) l_2 + m_2 a_1 c(\theta_2) dy_2 + m_c a_1 c(\theta_2) dy_2 + m_c a_1 s(\theta_2) a_2) \dot{\theta}_1 \\
&\quad (-\frac{1}{2} m_2 a_1 s(\theta_2) l_2 - \frac{1}{2} m_2 a_1 c(\theta_2) dy_2 - \frac{1}{2} m_c a_1 c(\theta_2) dy_2 - \frac{1}{2} m_c a_1 s(\theta_2) a_2) \dot{\theta}_2 \\
&\quad + (\frac{1}{2} m_2 a_1 s(\theta_2) + \frac{1}{2} m_c a_1 s(\theta_2)) \dot{\delta}_1 + (\frac{1}{2} m_2 a_1 s(\theta_2) + \frac{1}{2} m_c a_1 s(\theta_2)) \dot{\delta}_2, \\
c_{22} &= (\frac{1}{2} m_2 a_1 s(\theta_2) l_2 + \frac{1}{2} m_2 a_1 c(\theta_2) dy_2 + \frac{1}{2} m_c a_1 c(\theta_2) dy_2 + \frac{1}{2} m_c a_1 s(\theta_2) a_2) \dot{\theta}_1, \\
c_{31} &= c_{41} = (-m_2 a_1 s(\theta_2) - m_c a_1 s(\theta_2)) \dot{\theta}_2, \\
c_{32} &= c_{42} = c_{33} = c_{43} = c_{34} = c_{44} = 0.
\end{aligned} \tag{2.129}$$

As componentes de $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ são obtidas de (2.96), resultando em

$$\begin{aligned}
g_1 &= m_1 g c(\theta_1) l_1 + m_2 g l_2 c(\theta_1 + \theta_2) - m_2 g \delta_1 \phi_1 s(\theta_1 + \theta_2) - m_2 g \delta_2 \phi_2 s(\theta_1 + \theta_2) \\
&+ m_c g c(\theta_1) a_1 + m_{h_2} g c(\theta_1) a_1 + m_c g a_2 c(\theta_1 + \theta_2) - m_c g \delta_1 \phi_1 s(\theta_1 + \theta_2) \\
&- m_c g \delta_2 \phi_2 s(\theta_1 + \theta_2) + m_c g c(\theta_1) a_1, \\
g_2 &= m_2 g l_2 c(\theta_1 + \theta_2) - m_2 g \delta_1 \phi_1 \sin(\theta_1 + \theta_2) - m_2 g \delta_2 \phi_2 s(\theta_1 + \theta_2) \\
&+ m_c g a_2 c(\theta_1 + \theta_2) - m_c g \delta_1 \phi_1 s(\theta_1 + \theta_2) - m_c g \delta_2 \phi_2 s(\theta_1 + \theta_2), \\
g_3 &= m_2 g c(\theta_1 + \theta_2) + m_c g c(\theta_1 + \theta_2), \\
g_4 &= m_2 g c(\theta_1 + \theta_2) + m_c g c(\theta_1 + \theta_2).
\end{aligned} \tag{2.130}$$

A ortonormalização das funções formas modais implica em simplificações na matriz de rigidez, resultando $k_{ijk} = 0$, para $j \neq k$, e $k_{ijk} = \varpi_{jk}^2 m_i$, para $j = k$, em (2.91), obtendo-se uma matriz diagonal na forma

$$\mathbf{K} = \text{diag}\{0, 0, \varpi_{21}^2 m_2, \varpi_{22}^2 m_2\} \tag{2.131}$$

e a matriz de amortecimento, desconsiderando os efeitos de torques de atrito viscoso nas juntas, resulta em

$$\mathbf{D} = \text{diag}\{0, 0, 2\zeta_{21} \varpi_{21}^2, 2\zeta_{22} \varpi_{22}^2\}, \tag{2.132}$$

onde ζ_{21} e ζ_{22} representam os índices de amortecimento natural dos dois modos do elo flexível.

3. CONTROLE

3.1 Introdução

Parte do controle proposto neste capítulo foi usado por Bottega, 2004 para resolver problemas de trajetória para robôs flexíveis. O controle de elos de robôs flexíveis apresenta uma dificuldade inerente de não existir uma entrada de controle independente para cada grau de liberdade.

A fim de atingir este objetivo, usa-se uma lei de controle baseada em controladores adaptativos [Ortega e Spong, 1989], cuja estabilidade da trajetória pode ser provada diretamente usando a teoria de estabilidade de Lyapunov e uma lei de controle robusto [Yao e Tomizuka, 1996] para reduzir as vibrações induzidas nos elos devido à flexibilidade.

A outra proposta de controle neste capítulo é a de controle para sistemas não-lineares através do método das equações de Riccati dependentes do estado, o qual usa o controle subótimo e busca estabilidade local do sistema [Mracek e Cloutier, 1998].

3.2 Considerações Iniciais

- Dada a equação do movimento (2.102), pode-se reescrevê-la numa forma matricial que seja mais conveniente para a determinação das leis de controle resultando em

$$\mathbf{B}(\theta)\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\theta, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_e\mathbf{q} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{u}, \quad (3.1)$$

$$\mathbf{B}(\theta) \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\theta\theta} & \mathbf{B}_{\theta\delta} \\ \mathbf{B}_{\theta\delta}^T & \mathbf{B}_{\delta\delta} \end{bmatrix}, \mathbf{C}(\theta, \dot{\mathbf{q}}) \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{\theta\theta} & \mathbf{C}_{\theta\delta} \\ \mathbf{C}_{\delta\theta} & \mathbf{C}_{\delta\delta} \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_\theta(\mathbf{q}) \\ \mathbf{g}_\delta(\theta) \end{bmatrix}, \mathbf{u} \equiv \begin{bmatrix} \tau \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \mathbf{K}_e \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K} \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

onde $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \theta^T & \delta^T \end{bmatrix}^T$ é o vetor de coordenadas generalizadas, θ é um vetor $n \times 1$ de coordenadas das juntas e δ é um vetor $m \times 1$ de coordenadas dos modos de deslocamentos dos braços. Além disso, $\mathbf{B}(\mathbf{q})$ é uma matriz $(n+m) \times (n+m)$, matriz de inércia, simétrica, positiva definida, $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$ é um vetor $(n+m) \times 1$ de torques centrífugos e de Coriolis, $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ é um vetor $(n+m) \times 1$ de torques gravitacionais, \mathbf{K} é matriz $m \times m$ de rigidez diagonal, positiva definida, \mathbf{D} é matriz $(n+m) \times (n+m)$ diagonal, positiva definida, de coeficientes de fricção viscosa para o amortecimento modal dos elos e juntas e τ é um vetor $n \times 1$ de torques agindo nas juntas. Neste estudo, desconsidera-se interações com o ambiente.

Uma significativa aproximação para a matriz de inércia consiste em avaliar a configuração não deformada, isto é, $\delta = \mathbf{0}$ [Arteaga e Siciliano, 2000; De Luca e Siciliano, 1993a]. Assim, não apenas a matriz de inércia, mas também a matriz $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ fica independente de δ . A mesma simplificação pode ser feita no vetor \mathbf{g}_δ , tornando $\mathbf{g}_\delta \equiv \mathbf{g}_\delta(\theta)$ [De Luca e Panzieri, 1994; De Luca e Siciliano, 1993b].

- O maior e menor autovalor da matriz é denotado por $\lambda_{\max}(\cdot)$ e $\lambda_{\min}(\cdot)$, respectivamente. A norma de um vetor $\mathbf{x}_{n \times 1}$ é definido por $\|\mathbf{x}\| \equiv \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}$, enquanto que a norma de uma matriz \mathbf{A} corresponde a $\|\mathbf{A}\| \equiv \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})}$.

- Propriedades [Arteaga e Siciliano, 2000]

1: A matriz de inércia $\mathbf{B}(\theta)$ satisfaz:

$$\lambda_{\min}(\mathbf{B}) \|\mathbf{q}\|^2 \leq \mathbf{q}^T \mathbf{B} \mathbf{q} \leq \lambda_{\max}(\mathbf{B}) \|\mathbf{q}\|^2 \quad \forall \theta \in R^n, \quad \forall \mathbf{q} \in R^{n+m}.$$

2: Com a definição própria de $\mathbf{C}(\theta, \dot{\mathbf{q}})$, a matriz $\dot{\mathbf{B}}(\theta) - 2\mathbf{C}(\theta, \dot{\mathbf{q}})$ é antissimétrica.

3: A matriz $\mathbf{C}(\theta, \dot{\mathbf{q}})$ satisfaz $\|\mathbf{C}(\theta, \dot{\mathbf{q}})\| \leq k_c \|\dot{\mathbf{q}}\| \quad \forall \theta \in R^n, \quad \forall \dot{\mathbf{q}} \in R^{n+m}$.

4: O vetor gravidade $\mathbf{g}_\delta(\theta)$ é limitado por $\|\mathbf{g}_\delta(\theta)\| \leq \sigma_g \quad \forall \theta \in R^n$.

3.3 Controle de Trajetória

Nesta seção, determina-se uma lei de controle de trajetória dos elos flexíveis do robô. Considere a equação (3.1). Os erros de trajetória são definidos como $\tilde{\mathbf{q}} \equiv \mathbf{q} - \mathbf{q}_d$ e $\dot{\tilde{\mathbf{q}}} \equiv \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d$, onde \mathbf{q} indica a trajetória percorrida pelo robô e \mathbf{q}_d a trajetória desejada. Antes do controle ser introduzido, seguem algumas definições necessárias:

$$\mathbf{\Lambda} \equiv \text{diag} \{ \mathbf{\Lambda}_\theta, \mathbf{\Lambda}_\delta \}, \quad (3.4)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_r \equiv \dot{\mathbf{q}}_d - \Lambda \tilde{\mathbf{q}} \equiv \begin{bmatrix} \dot{\theta}_r^T & \dot{\delta}_r^T \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} (\dot{\theta}_d - \Lambda_\theta \tilde{\theta})^T & (\dot{\delta}_d - \Lambda_\delta \tilde{\delta})^T \end{bmatrix}^T, \quad (3.5)$$

$$\mathbf{s} \equiv \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_r = \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \Lambda \tilde{\mathbf{q}} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{s}_\theta^T & \mathbf{s}_\delta^T \end{bmatrix}^T, \quad (3.6)$$

$$\mathbf{K}_p \equiv \text{diag} \{ \mathbf{K}_{p\theta}, \mathbf{K}_{p\delta} \}, \mathbf{D} = \text{diag} \{ \mathbf{D}_\theta, \mathbf{D}_\delta \}, \quad (3.7)$$

$$\mathbf{K}_{pD} \equiv \text{diag} \{ \mathbf{K}_{p\theta} + \mathbf{D}_\theta, \mathbf{K}_{p\delta} + \mathbf{D}_\delta \} = \text{diag} \{ \mathbf{K}_{pD\theta}, \mathbf{K}_{pD\delta} \}, \quad (3.8)$$

onde $\dot{\mathbf{q}}_r$ é o vetor de velocidade de referência e Λ , \mathbf{K}_p , $\mathbf{K}_{p\theta}$ e $\mathbf{K}_{p\delta}$ são matrizes de ganho diagonais, positivas definidas. Note que a propriedade 3 vale para cada submatriz de $\mathbf{C}(\theta, \dot{\mathbf{q}})$, isto é, existem constantes $k_{c\theta\theta}, \dots, k_{c\delta\delta}$ tais que $\|\mathbf{C}_{\theta\theta}\| \leq k_{c\theta\theta} \|\dot{q}\|$ para cada submatriz. O controle proposto é dado por

$$\tau = \mathbf{B}_{\theta\theta} \ddot{\theta}_r + \mathbf{B}_{\theta\delta} \ddot{\delta}_r + \mathbf{C}_{\theta\theta} \dot{\theta}_r + \mathbf{C}_{\theta\delta} \dot{\delta}_r + \mathbf{D}_\theta \dot{\theta}_r + \mathbf{g}_\theta - \mathbf{K}_{p\theta} \mathbf{s}_\theta. \quad (3.9)$$

As trajetórias δ_d e $\dot{\delta}_d$ desejadas, com condições iniciais $\delta_d(0) = \delta(0)$ e $\dot{\delta}_d(0) = \dot{\delta}(0)$ são computadas de

$$\ddot{\delta}_d = -\mathbf{B}_{\delta\delta}^{-1} \left(\mathbf{C}_{\delta\delta} \dot{\delta}_r + \mathbf{D}_\delta \dot{\delta}_r - \mathbf{K}_{p\delta} \mathbf{s}_\delta + \mathbf{K} \delta_d + \mathbf{B}_{\theta\delta}^T \ddot{\theta}_r + \mathbf{C}_{\delta\theta} \dot{\theta}_r + \mathbf{g}_\delta \right) + \Lambda_\delta \dot{\delta}. \quad (3.10)$$

O controle (3.9) junto com a equação (3.10) é expressa por

$$\mathbf{u} = \mathbf{B}(\theta) \ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{C}(\theta, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{K}_e \mathbf{q}_d + \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \mathbf{K}_p \mathbf{s}. \quad (3.11)$$

De (3.11), o erro dinâmico é

$$\mathbf{B}(\theta) \dot{\mathbf{s}} = -(\mathbf{C}(\theta, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{s} + \mathbf{K}_e \tilde{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_{pD} \mathbf{s}). \quad (3.12)$$

A fim de simplificar a discussão sobre estabilidade, \mathbf{x} é introduzido como $\mathbf{x} \equiv \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}^T & \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \end{bmatrix}^T$.

O Teorema 1, no anexo, mostra a estabilidade de (3.12) e a limitação de δ_d e $\dot{\delta}_d$.

3.4 Controle de Vibrações

O Teorema 1 garante que o erro de trajetória tende a zero e que os deslocamentos dos elos são limitadas. Para demonstrar que os deslocamentos são limitadas, assumimos que $\mathbf{D}_\delta > 0$, mas fisicamente o amortecimento pode ser pequeno, isto é, $\mathbf{D}_\delta \approx 0$, implicando em vibrações indesejadas. Neste caso, pode-se adicionar uma ação de controle que reduza as vibrações induzidas pelo torque aplicado às juntas, simulando um aumento do amortecimento do sistema. Para determinar uma lei de controle das vibrações, assume-se θ_d constante e o erro de trajetória $\mathbf{x} \approx 0$. Desta forma, a dinâmica de δ_d pode ser descrita por

$$\mathbf{B}_{\delta\delta}\ddot{\delta}_d + \mathbf{C}_{\delta\delta}\dot{\delta}_d + \mathbf{K}\delta_d + \mathbf{g}_\delta = \mathbf{0}. \quad (3.13)$$

Definindo uma nova variável $\mathbf{y} \equiv \delta_d + \mathbf{K}^{-1}\mathbf{g}_\delta$, a equação (3.13) fica

$$\mathbf{B}_{\delta\delta}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{C}_{\delta\delta}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\mathbf{y} = \mathbf{0}. \quad (3.14)$$

Usando uma candidata à função de Lyapunov [Arteaga e Siciliano, 2000]

$$V_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) = \frac{1}{2}\mathbf{y}^T\mathbf{K}\mathbf{y} + \frac{1}{2}\dot{\mathbf{y}}^T\mathbf{B}\dot{\mathbf{y}}, \quad (3.15)$$

observa-se que $\dot{V}_{\mathbf{y}} = 0$. Portanto, o ponto de equilíbrio $\mathbf{y} = \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{0}$ de (3.14) não é assintoticamente estável, indicando oscilações estacionárias. No entanto, pode-se adicionar um termo de amortecimento $\mathbf{D}'_\Delta\dot{\delta}_d$ com $\mathbf{D}_\Delta > 0$ à equação dinâmica (3.13). É claro que, neste caso, a análise da estabilidade do erro de trajetória feita anteriormente não será mais válida. Mas pode-se provar com uma nova análise que o sistema continua estável com a adição do amortecimento.

Para isto, adiciona-se o termo $\mathbf{D}'_\Delta\dot{\delta}_d$ à equação dinâmica da trajetória desejada δ_d em (3.13), resultando

$$\ddot{\delta}_d = -\mathbf{B}_{\delta\delta}^{-1} \left(\mathbf{C}_{\delta\delta}\dot{\delta}_r + \mathbf{D}_\delta\dot{\delta}_r - \mathbf{K}_{p\delta}\mathbf{s}_\delta + \mathbf{K}\delta_d + \mathbf{B}_{\theta\delta}^T\ddot{\theta}_r + \mathbf{C}_{\delta\theta}\dot{\theta}_r + \mathbf{g}_\delta + \mathbf{D}'_\Delta\dot{\delta}_d \right) + \mathbf{\Lambda}_\delta\ddot{\delta}, \quad (3.16)$$

com condições iniciais $\delta_d(0) = \delta(0)$ e $\dot{\delta}_d(0) = \dot{\delta}(0)$ e

$$\mathbf{D}'_\Delta \equiv \mathbf{D}_\Delta - \text{diag}\{f_{11}, \dots, f_{nm}\}, \quad (3.17)$$

onde

$$f_{ij} \equiv d_{ij} \frac{\dot{\delta}_{dij} s_{\delta ij}}{\left\| \dot{\delta}_{dij} s_{\delta ij} \right\| + \epsilon_{ij} e^{-\beta_{ij} t}} \quad i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, m_i \quad m = \sum_{i=1}^n m_i \quad (3.18)$$

e \mathbf{D}_Δ é uma matriz diagonal positiva definida, $\epsilon_{ij}, \beta_{ij}$ são constantes positivas, m_i é o número de coordenadas usadas para modelar os deslocamentos do elo i e $s_{\delta ij}, \dot{\delta}_{dij}, d_{ij}$ são elementos de $\mathbf{s}_\delta, \dot{\delta}_d, \mathbf{D}_\Delta$, respectivamente. Observa-se que devido a estas definições, \mathbf{D}'_Δ também será diagonal positiva definida.

Mantendo o que foi assumido anteriormente, θ_d constante, erro de trajetória $\mathbf{x} \approx 0$ e $\mathbf{D}_\delta \approx 0$, a equação dinâmica para δ_d é dada por

$$\mathbf{B}_{\delta\delta} \ddot{\delta}_d + \mathbf{C}_{\delta\delta} \dot{\delta}_d + \mathbf{D}'_\Delta \dot{\delta}_d + \mathbf{K} \delta_d + \mathbf{g}_\delta = \mathbf{0}. \quad (3.19)$$

A definição $\mathbf{y} \equiv \delta_d + \mathbf{K}^{-1} \mathbf{g}_\delta$ pode ser utilizada novamente para obter

$$\mathbf{B}_{\delta\delta} \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{C}_{\delta\delta} \dot{\mathbf{y}} + \mathbf{D}'_\Delta \dot{\mathbf{y}} + \mathbf{K} \mathbf{y} = \mathbf{0}. \quad (3.20)$$

Usando a função de Lyapunov (3.15), a propriedade 2 e o fato de $\mathbf{D}'_\Delta > 0$ independente de t , obtém-se

$$\dot{V}_{\mathbf{y}} = -\dot{\mathbf{y}}^T \mathbf{D}'_\Delta \dot{\mathbf{y}} \leq W(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) \leq 0, \quad (3.21)$$

onde $W(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) = -\min(\lambda_{\min}(\mathbf{D}'_\Delta)) \|\dot{\mathbf{y}}\|^2$ que também independe do tempo. Pode-se provar que (3.21) garante a estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{y} = \mathbf{0}$ de (3.20) [Lin et al., 1996a]. Desta forma, consegue-se aumentar o amortecimento do sistema. Na seqüência, juntando (3.9) com (3.16) obtém-se a lei de controle do sistema (3.1) expressa por

$$\mathbf{u} = \mathbf{B}(\theta) \ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{C}(\theta, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{K}_e \mathbf{q}_d + \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \mathbf{K}_p \mathbf{s} + \left[\mathbf{0}^T \quad \left(\mathbf{D}'_\Delta \dot{\delta}_d \right)^T \right]^T. \quad (3.22)$$

Em virtude de (3.22), a equação dinâmica do erro fica na seguinte forma

$$\mathbf{B}(\theta) \dot{\mathbf{s}} = -(\mathbf{C}(\theta, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{s} + \mathbf{K}_e \tilde{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_{pD} \mathbf{s}) + \left[\mathbf{0}^T \quad \left(\mathbf{D}'_\Delta \dot{\delta}_d \right)^T \right]^T. \quad (3.23)$$

O teorema 2, no anexo, verifica a estabilidade do erro de trajetória \mathbf{x} e que δ_d e $\dot{\delta}_d$ são limitados.

3.5 Controle com realimentação

Controle com realimentação é um mecanismo básico pelo qual sistemas dinâmicos mantêm seu equilíbrio. Por exemplo, uma mudança na temperatura do corpo de meio grau geralmente é um sinal de doença, assim, o equilíbrio da temperatura é mantido pelo uso de controle com realimentação [Wiener, 1948].

Pode ser definido como controle realimentado o uso de sinais de diferença, determinados pela comparação dos valores atuais das variáveis do sistema com os valores desejados, como um meio de controlar o sistema [Schmid e Rafikov, 2005]. Um exemplo cotidiano de um sistema de controle com realimentação é o controle da velocidade de um automóvel o qual usa a diferença da velocidade atual e a velocidade desejada para variar a taxa de fluxo de combustível.

3.5.1 Problema de síntese linear realimentado

O problema do controle ótimo do sistema linear

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}_e(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_e(t)\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}_e\mathbf{x}, \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0,\end{aligned}\tag{3.24}$$

minimizando o funcional na forma quadrática

$$\mathbf{J}[\mathbf{u}] = \int_0^{t_f} \mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}_e(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}_e(t)\mathbf{u}dt.\tag{3.25}$$

chama-se o problema do regulador ótimo linear com funcional quadrático. Neste problema $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n$ é o vetor do estado, $\mathbf{u} \in \mathfrak{R}^m$ é o vetor do controle, $\mathbf{A}_e \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ é matriz de estado, $\mathbf{B}_e \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ é a matriz de controle, \mathbf{C}_e é a matriz de saída do sistema, $\mathbf{Q}_e \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ é matriz de pesos semi definida positiva, $\mathbf{R}_e \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ é definida positiva.

Se t_f é finito, então o problema (3.24 - 3.25) é chamado *problema linear- quadrático do controle ótimo com horizonte finito*. Neste caso todas as matrizes podem depender do tempo. Se $t_f = \infty$, todas as matrizes são constantes, e o problema (3.24 - 3.25) é chamado *problema linear-quadrático do controle ótimo com horizonte infinito*, ou *regulador com tempo infinito* ou ainda *regulador linear-quadrático*.

Este problema pode ser resolvido através da Programação Dinâmica [Bellman, 1957]. A equação de Hamilton-Jacobi-Bellman para o problema (3.24 - 3.25) tem a seguinte forma:

$$\min_{\mathbf{u}(t)} \left[\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathit{grad} \mathbf{V})^T (\mathbf{A}_e(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}_e(t)\mathbf{u}) + \mathbf{x}^T \mathbf{Q}_e(t)\mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R}_e(t)\mathbf{u} \right] = 0, \quad (3.26)$$

onde o vetor

$$\mathit{grad} \mathbf{V} = \left[\frac{\partial V}{\partial x_1} \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial V}{\partial x_n} \right]^T.$$

Procura-se a solução da equação de Hamilton-Jacobi-Bellman (3.26) na forma da função de Lyapunov:

$$\mathbf{V}(x, t) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{P}_e(t) \mathbf{x}, \quad (3.27)$$

onde $\mathbf{P}_e(t)$ é a matriz a determinar.

Admitindo que $\mathit{grad} \mathbf{V} = \mathbf{P}_e(t)\mathbf{x}$, da condição do mínimo de (3.26), $\frac{\partial [\dots]}{\partial \mathbf{u}} = 0$, onde [...] é o que está em colchetes na equação (3.26), obtemos o controle ótimo:

$$\mathbf{u} = -\mathbf{R}_e^{-1}(t)\mathbf{B}_e^T(t)\mathbf{P}_e(t)\mathbf{x}, \quad (3.28)$$

Substituindo \mathbf{u} na equação (3.26) pelo controle (3.28) e admitindo que a matriz $\mathbf{P}_e(t)$ é simétrica, obtém-se a equação para encontrar $\mathbf{P}_e(t)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T \left[\frac{\partial \mathbf{P}_e(t)}{\partial t} + 2\mathbf{A}_e(t) - 2\mathbf{P}_e(t)\mathbf{B}_e(t)\mathbf{R}_e^{-1}(t)\mathbf{B}_e^T(t)\mathbf{P}_e(t) \right. \\ \left. + \mathbf{Q}_e(t) + \mathbf{P}_e(t)\mathbf{B}_e(t)\mathbf{R}_e^{-1}(t)\mathbf{B}_e^T(t)\mathbf{P}_e(t) \right] \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Esta equação é satisfeita para quaisquer valores de \mathbf{x} se, e somente se, a matriz $\mathbf{P}_e(t)$ satisfaz a seguinte equação diferencial de Riccati:

$$\frac{d\mathbf{P}_e(t)}{dt} + \mathbf{A}_e^T(t)\mathbf{P}_e(t) + \mathbf{P}_e(t)\mathbf{A}_e(t) - \mathbf{P}_e(t)\mathbf{B}_e(t)\mathbf{R}_e^{-1}(t)\mathbf{B}_e^T(t)\mathbf{P}_e(t) + \mathbf{Q}_e(t) = 0. \quad (3.30)$$

Por definição $\mathbf{V}(x, t_f) = 0$, então a condição final para a equação (3.30) é

$$\mathbf{P}_e(t_f) = 0. \quad (3.31)$$

Para sistemas autônomos as matrizes \mathbf{A}_e , \mathbf{B}_e , \mathbf{Q}_e e \mathbf{R}_e são constantes

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_e \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_e \mathbf{u}(t), \quad (3.32)$$

$$\mathbf{J}[\mathbf{u}] = \int_0^{\infty} \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}_e \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}_e \mathbf{u}(t) dt. \quad (3.33)$$

e para $t_f = \infty$ a função $\mathbf{V}(x)$ não depende do tempo. A equação (3.28) torna-se equação algébrica de Riccati

$$\mathbf{A}_e^T \mathbf{P}_e + \mathbf{P}_e \mathbf{A}_e - \mathbf{P}_e \mathbf{B}_e \mathbf{R}_e^{-1} \mathbf{B}_e^T \mathbf{P}_e + \mathbf{Q}_e = 0. \quad (3.34)$$

Neste caso a lei do controle ótimo

$$\mathbf{u} = -\mathbf{R}_e^{-1} \mathbf{B}_e^T \mathbf{P}_e \mathbf{x} \quad (3.35)$$

fornece mínimo ao funcional (3.33)

$$\mathbf{J}_0 = \int_0^{\infty} \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}_e \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}_e \mathbf{u}(t) dt, \quad (3.36)$$

calculado nas trajetórias ótimas do sistema (3.32) e fornece estabilidade assintótica ao sistema (3.32) se o valor de \mathbf{J}_0 é finito. A estabilidade assintótica do sistema (3.32) é assegurada através da condição suficiente para o mínimo dada pela positividade das matrizes \mathbf{Q}_e e \mathbf{R}_e , ou seja,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial^2 \mathbf{x}} & \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{u}} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{u}} & \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial^2 \mathbf{u}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_e \end{bmatrix} > \mathbf{0}, \quad (3.37)$$

onde \mathbf{H} é o Hamiltoniano do problema de controle ótimo (3.24) e (3.25).

A condição suficiente para que o valor de \mathbf{J}_0 seja finito é a controlabilidade completa para matrizes \mathbf{A}_e e \mathbf{B}_e . Isto significa que a matriz de controlabilidade

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_e & \mathbf{A}_e \mathbf{B}_e & \dots & \mathbf{A}_e^{n-1} \mathbf{B}_e \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

não pode ser singular, ou seja, conter n colunas linearmente independentes. Neste caso

$$\text{posto} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_e & \mathbf{A}_e \mathbf{B}_e & \dots & \mathbf{A}_e^{n-1} \mathbf{B}_e \end{bmatrix} = n. \quad (3.39)$$

3.5.2 Controle ótimo com realimentação para sistemas não-lineares usando equações de Riccati dependentes do estado

Um problema de controle ótimo na forma (3.24) e (3.25), para um sistema com os coeficientes das matrizes de estado, dependentes do estado e horizonte infinito, pode ser formulado da seguinte forma [Mracek e Cloutier, 1998]: minimizar o funcional de custo

$$\mathbf{J}[\mathbf{u}] = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} \mathbf{x}^T \mathbf{Q}_e(x) \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R}_e(x) \mathbf{u} dt \quad (3.40)$$

em relação ao estado \mathbf{x} e o controle \mathbf{u} , sujeito ao sistema de restrições não-lineares

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(x) + \mathbf{B}_e(x) \mathbf{u}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}_e(x) \mathbf{x}, \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0, \end{aligned} \quad (3.41)$$

onde $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathfrak{R}^m$ e $\mathbf{y} \in \mathfrak{R}^s$ (\mathfrak{R}^s é a dimensão do vetor de saída do sistema). $\mathbf{Q}_e(x) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ é matriz de pesos semidefinida positiva e $\mathbf{R}_e(x) \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ é definida positiva.

A aproximação pelas equações de Riccati dependentes do estado (SDRE), para resolver o problema de controle subótimo(3.40) e (3.41) se dá por:

1- usar parametrização direta para transformar a dinâmica não-linear do estado em matrizes de coeficientes dependentes do estado (SDC), obtem-se

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_e(x) \mathbf{x} + \mathbf{B}_e(x) \mathbf{u}, \quad (3.42)$$

com $\mathbf{f}(x) = \mathbf{A}_e(x) \mathbf{x}$. Em geral, $\mathbf{A}_e(x)$ é única somente se x for escalar [Banks et al., 2007]. Se pode considerar, como um exemplo ilustrativo, um caso multivariável $f(x) = [x_2, x_1^3]^T$. A parametrização óbvia para os coeficientes dependentes do estado (SDC) é

$$\mathbf{A}_1(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ x_1^2 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.43)$$

porém é possível encontrar outras parametrizações como

$$\mathbf{A}_2(x) = \begin{bmatrix} x_2/x_1 & 0 \\ x_1^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.44)$$

pela multiplicação e divisão de cada componente de $f(x)$ por x_1 . Uma outra parametrização ainda pode ser obtida adicionando e subtraindo o termo x_1x_2 de $f(x)$

$$\mathbf{A}_3(x) = \begin{bmatrix} -x_2 & 1 + x_1 \\ x_1^2 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.45)$$

De fato há um número infinito de parametrizações para os coeficientes dependentes do estado. Isto é verdadeiro desde que existam ao menos duas parametrizações para todo $0 \leq \alpha \leq 1$ satisfazendo

$$\alpha A_1(x)x + (1 - \alpha)A_2(x)x = \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(x) = f(x). \quad (3.46)$$

A escolha das parametrizações a serem feitas deve ser apropriada, de acordo com o sistema de controle de interesse. Um fator importante para esta escolha é não violar a controlabilidade do sistema, ou seja, a matriz de controlabilidade dependente do estado $\begin{bmatrix} \mathbf{B}_e(x) & \mathbf{A}_e(x)\mathbf{B}_e(x) & \dots & \mathbf{A}_e^{n-1}(x)\mathbf{B}_e(x) \end{bmatrix}$ ter posto completo.

2- resolver a equação de Riccati dependente do estado [Banks et al., 2007]

O hamiltoniano para o problema de controle ótimo (3.40) e (3.41) é dado por

$$\mathbf{H}(x, u, \lambda) = \frac{1}{2}(\mathbf{x}^T \mathbf{Q}_e(x) \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R}_e(x) \mathbf{u}) + \lambda^T (\mathbf{A}_e(x) \mathbf{x} + \mathbf{B}_e(x) \mathbf{u}). \quad (3.47)$$

Do Hamiltoniano, as condições necessárias para o controle ótimo são dadas por

$$\dot{\lambda} = -\mathbf{Q}_e(x) \mathbf{x} - \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \frac{\partial \mathbf{Q}_e(x)}{\partial x} \mathbf{x} - \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{R}_e(x)}{\partial x} \mathbf{u} - \left[\frac{\partial (\mathbf{A}_e(x) \mathbf{x})}{\partial x} \right]^T \lambda - \left[\frac{\partial (\mathbf{B}_e(x) \mathbf{u})}{\partial x} \right]^T \lambda, \quad (3.48)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_e(x) \mathbf{x} + \mathbf{B}_e(x) \mathbf{u}, \quad (3.49)$$

$$0 = \mathbf{R}_e(x) \mathbf{u} + \mathbf{B}_e(x) \lambda. \quad (3.50)$$

Denotando \mathbf{A}_i a i -linha de $\mathbf{A}_e(x)$ e \mathbf{B}_i a i -linha de $\mathbf{B}_e(x)$. Os termos de derivada

parcial, na forma matricial são

$$\frac{\partial(\mathbf{A}_e(x)\mathbf{x})}{\partial x} = \mathbf{A}_e(x) + \frac{\partial(\mathbf{A}_e(x))}{\partial x}\mathbf{x} = \mathbf{A}_e(x) + \begin{bmatrix} \frac{\partial\mathbf{A}_1}{\partial x_1}\mathbf{x} & \cdots & \frac{\partial\mathbf{A}_1}{\partial x_n}\mathbf{x} \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ \frac{\partial\mathbf{A}_n}{\partial x_1}\mathbf{x} & \cdots & \frac{\partial\mathbf{A}_n}{\partial x_n}\mathbf{x} \end{bmatrix}, \quad (3.51)$$

e

$$\frac{\partial(\mathbf{B}_e(x)\mathbf{u})}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\mathbf{B}_1}{\partial x_1}\mathbf{u} & \cdots & \frac{\partial\mathbf{B}_1}{\partial x_n}\mathbf{u} \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ \frac{\partial\mathbf{B}_n}{\partial x_1}\mathbf{u} & \cdots & \frac{\partial\mathbf{B}_n}{\partial x_n}\mathbf{u} \end{bmatrix}, \quad (3.52)$$

O co-estado é assumido na forma $\lambda = \mathbf{P}_e(x)\mathbf{x}$, que tem dependência do estado. Usando esta forma do co-estado, da equação (3.50) obtém-se o controle realimentado

$$\mathbf{u} = -\mathbf{R}_e^{-1}(x)\mathbf{B}_e^T(x)\mathbf{P}_e(x)\mathbf{x}. \quad (3.53)$$

Substituindo este controle na equação (3.49) tem-se

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_e(x)\mathbf{x} - \mathbf{B}_e(x)\mathbf{R}_e^{-1}(x)\mathbf{B}_e^T(x)\mathbf{P}_e(x)\mathbf{x}. \quad (3.54)$$

Para encontrar o valor da função $\mathbf{P}_e(x)$ diferencia-se $\lambda = \mathbf{P}_e(x)\mathbf{x}$ no tempo ao longo da trajetória

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= \dot{\mathbf{P}}_e(x)\mathbf{x} + \mathbf{P}_e(x)\dot{\mathbf{x}} \\ &= \dot{\mathbf{P}}_e(x)\mathbf{x} + \mathbf{P}_e(x)\mathbf{A}_e(x)\mathbf{x} - \mathbf{P}_e(x)\mathbf{B}_e(x)\mathbf{R}_e^{-1}(x)\mathbf{B}_e^T(x)\mathbf{P}_e(x)\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (3.55)$$

onde é usada a notação $\dot{\mathbf{P}}_e(x) = \sum_{i=1}^n P_{x_i}(x)\dot{x}_i(t)$.

Substituindo a equação (3.55) na primeira condição necessária do controle ótimo, equação (3.48), referente à $\dot{\lambda}$, obtém-se

$$\begin{aligned} &\dot{\mathbf{P}}_e(x)\mathbf{x} + \mathbf{P}_e(x)\mathbf{A}_e(x)\mathbf{x} - \mathbf{P}_e(x)\mathbf{B}_e(x)\mathbf{R}_e^{-1}(x)\mathbf{B}_e^T(x)\mathbf{P}_e(x)\mathbf{x} \\ &= -\mathbf{Q}_e(x)\mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{x}^T \frac{\partial\mathbf{Q}_e(x)}{\partial x}\mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{u}^T \frac{\partial\mathbf{R}_e(x)}{\partial x}\mathbf{u} \\ &- \left[\mathbf{A}_e(x) + \frac{\partial(\mathbf{A}_e(x))}{\partial x}\mathbf{x} \right]^T \mathbf{P}_e(x)\mathbf{x} - \left[\frac{\partial(\mathbf{B}_e(x)\mathbf{u})}{\partial x} \right]^T \mathbf{P}_e(x)\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (3.56)$$

Colocando os termos de uma maneira mais adequada, tem-se

$$\begin{aligned} & \dot{\mathbf{P}}_e(x)\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^T \frac{\partial \mathbf{Q}_e(x)}{\partial x} \mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{R}_e(x)}{\partial x} \mathbf{u} + \\ & \mathbf{x}^T \left[\frac{\partial(\mathbf{A}_e(x))}{\partial x} \right]^T \mathbf{P}_e(x)\mathbf{x} + \left[\frac{\partial(\mathbf{B}_e(x)\mathbf{u})}{\partial x} \right]^T \mathbf{P}_e(x)\mathbf{x} + \\ & [\mathbf{P}_e(x)\mathbf{A}_e(x) + \mathbf{A}_e^T(x)\mathbf{P}_e(x) - \mathbf{P}_e(x)\mathbf{B}_e(x)\mathbf{R}_e^{-1}(x)\mathbf{B}_e^T(x)\mathbf{P}_e(x) + \mathbf{Q}_e(x)] \mathbf{x} = 0, \end{aligned} \quad (3.57)$$

Assumindo que $\mathbf{P}_e(x)$ é solução da equação de Riccati dependente do estado (SDRE), dada por

$$\mathbf{P}_e(x)\mathbf{A}_e(x) + \mathbf{A}_e^T(x)\mathbf{P}_e(x) - \mathbf{P}_e(x)\mathbf{B}_e(x)\mathbf{R}_e^{-1}(x)\mathbf{B}_e^T(x)\mathbf{P}_e(x) + \mathbf{Q}_e(x) = 0, \quad (3.58)$$

então a seguinte condição necessária de otimalidade precisa ser satisfeita

$$\begin{aligned} & \dot{\mathbf{P}}_e(x)\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^T \frac{\partial \mathbf{Q}_e(x)}{\partial x} \mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{R}_e(x)}{\partial x} \mathbf{u} + \\ & \mathbf{x}^T \left[\frac{\partial(\mathbf{A}_e(x))}{\partial x} \right]^T \mathbf{P}_e(x)\mathbf{x} + \left[\frac{\partial(\mathbf{B}_e(x)\mathbf{u})}{\partial x} \right]^T \mathbf{P}_e(x)\mathbf{x} = 0. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Esta é uma condição de otimalidade que satisfaz a solução do controle subótimo localmente. No tempo infinito, no caso padrão do Regulador linear quadrático (com matrizes de peso do funcional com coeficientes constantes) verifica-se que esta equação é localmente satisfeita.

3 - *construir o controle não-linear realimentado* [Banks et al., 2007]

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= -\mathbf{S}_e(x)\mathbf{x}, \\ \mathbf{S}_e(x) &= \mathbf{R}_e^{-1}(x)\mathbf{B}_e^T(x)\mathbf{P}_e(x). \end{aligned} \quad (3.60)$$

Para alguns casos especiais, como sistemas com pouca dependência do estado ou com poucas variáveis de estado, a equação (3.58) pode ser resolvida de forma analítica [Shawky et al., 2007]. Por outro lado, uma solução numérica pode ser obtida com uma taxa de amostragem suficientemente grande. Uma aproximação, com estabilidade local, do sistema de malha fechada é resultado do uso da técnica das equações de Riccati dependentes do estado, não-lineares.

Lema: Para uma parametrização dos coeficientes dependentes do estado $\mathbf{A}_e(x)\mathbf{x}$, $\mathbf{A}_e(0)$ é a linearização de $f(x)$ sobre o zero equilíbrio.

Prova: sejam $\mathbf{A}_1(x)$ e $\mathbf{A}_2(x)$ duas parametrizações distintas de $f(x)$ e seja $\tilde{\mathbf{A}}(x) = \mathbf{A}_1(x) - \mathbf{A}_2(x)$. Então $\tilde{\mathbf{A}}(x)\mathbf{x} = 0$ para todo x e

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{A}}(x)\mathbf{x}}{\partial x} = \tilde{\mathbf{A}}(x) + \frac{\partial \tilde{\mathbf{A}}(x)}{\partial x}\mathbf{x} = 0. \quad (3.61)$$

Como o segundo termo do lado direito é zero em $x = 0$ segue que $\tilde{\mathbf{A}}(x) = 0$. Isto implica que $\mathbf{A}_1(0) = \mathbf{A}_2(0)$. Portanto, a parametrização avaliada em zero é única. Sem perder a generalidade, considere uma parametrização dada por $\mathbf{A}_1(x)$. A linearização do sistema é dada por

$$\dot{\mathbf{z}} = \nabla f(0)\mathbf{z}, \quad (3.62)$$

mas

$$\nabla f(x) = \mathbf{A}_1(x) + \frac{\partial \mathbf{A}_1(x)}{\partial x}\mathbf{x}, \quad (3.63)$$

logo $\nabla f(0) = \mathbf{A}_1(0)$, a qual foi mostrada ser a única para todas as parametrizações.

É assumido que existe solução da SDRE para todo x na vizinhança da origem considerada. Então, naturalmente, o par $(\mathbf{A}_e(x), \mathbf{B}_e(x))$ é uma parametrização estabilizável. Uma consequência lógica é que a solução existe em $x = 0$ e que $\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_e(0)$ é solução do sistema de equações algébricas de Riccati (3.34).

Teorema 3 [Mracek e Cloutier, 1998]: Assume-se que a parametrização dos coeficientes dependentes do estado seja escolhida de forma que a coluna $\mathbf{A}_e(x) \in C^1$ em torno da vizinhança sobre a origem e que os pares $(\mathbf{A}_e(x), \mathbf{B}_e(x))$ e $(\mathbf{C}_e(x), \mathbf{A}_e(x))$ sejam, no sentido linear para todo x pertencente a vizinhança sobre a origem, ponto a ponto, estabilizáveis e detectáveis, respectivamente. Então o regulador não-linear SDRE produz uma solução em malha fechada que é localmente e assintoticamente estável. A Prove deste teorema encontra-se no anexo.

Segundo [Mracek e Cloutier, 1998], um fator importante do método SDRE é que ele não cancela os benefícios que podem provir das não-linearidades do sistema dinâmico. A razão para isto pode ser que ele não exige nenhuma inversão dinâmica e nem linearizações

na realimentação do sistema não-linear.

O procedimento para aplicar o método SDRE num sistema dinâmico é o seguinte [Shawky et al., 2007]

Passo1 - Transformar o sistema dinâmico em espaço de estados e parametrizar o modelo na forma de coeficientes dependentes do estado.

Passo2 - Mensurar o estado do sistema $\mathbf{x}(t)$, aplicar as condições iniciais.

Passo3 - Para um dado estado inicial, resolver as equações de Riccati dependentes do estado.

Passo4 - Calcular o sinal de entrada através da equação dada por \mathbf{u} .

Passo5 - Assumir o valor da saída do sistema como o novo valor inicial e repetir o procedimento para mensurar o próximo valor do estado, isto é, voltar ao passo 3.

Passo6 - Repetir até o critério de parada adotado ser alcançado. Fim.

4. SENSORES E ATUADORES PIEZELÉTRICOS

Muitos dos controladores de trajetória de manipuladores flexíveis utiliza, como visto anteriormente, o torque produzido pelos motores, aplicado às juntas, como atuador para obter o movimento desejado nos elos do robô e também para controlar vibrações induzidas nos elos, devido a sua flexibilidade. Estes controladores são modelados considerando movimento de corpos flexíveis, onde os deslocamentos são obtidas com um número finito de modos elásticos. No entanto, esta estratégia de controle pode não alcançar resultados satisfatórios, em se tratando de vibrações, devido a limitações físicas do equipamento tal como: saturação dos motores, período mínimo de controle e ruídos [Bottega, 2004].

Alguns destes problemas podem ser resolvidos utilizando um controle híbrido constituído de dois atuadores, o motor que aciona as juntas e um atuador piezolétrico fixo à superfície dos elos do robô.

Recentemente, controle de estruturas flexíveis utilizando materiais "inteligentes" como atuadores e sensores vêm sendo estudado por pesquisadores. Entretanto, existem vários tipos de materiais inteligentes, tal como materiais piezolétricos, eletrostrictivos, transdutores magnetostrictivos, fluidos eletroreológicos, materiais com memória de forma e sensores de fibras óticas [Banks et al., 1996]. Neste trabalho, propõe-se a utilização de materiais piezolétricos. Trata-se de um material que desenvolve tensão mecânica quando sujeito a um campo elétrico ou produz um campo elétrico quando sujeito a uma tensão mecânica. Vários materiais piezolétricos como piezocerâmicos (titanato zirconato de chumbo PZT) e piezofilmes (poli fluoreto de vinilideno PVDF) são aplicáveis em controle de estruturas flexíveis como atuadores e sensores. A flexibilidade do material piezofilme o torna ideal para utilização em estruturas flexíveis como barras, placas e cascas, enquanto que o material piezocerâmico necessita de menor tensão elétrica para produzir a mesma força ou momento que o piezofilme. Para potencializar as vantagens do material piezocerâmico e piezofilme, é conveniente usar o piezofilme como sensor e o piezocerâmico como atuador.

Neste trabalho, incorpora-se a capacidade inerente dos materiais piezolétricos para

controlar vibrações de estruturas flexíveis ao controle do manipulador robótico apresentado no capítulo 3, no intuito de eliminar as vibrações de alta frequência (acima de $1KHz$), induzidas nos elos do robô, que não são alcançadas pelo controle de torque atuado pelos motores que acionam as juntas do robô.

Isto resulta num controle híbrido, constituído de uma lei de controle de retroalimentação para o torque dos motores e um controlador de retroalimentação de tensão elétrica para os atuadores piezelétricos, conforme mostrado no diagrama de blocos na Figura 4.1 .

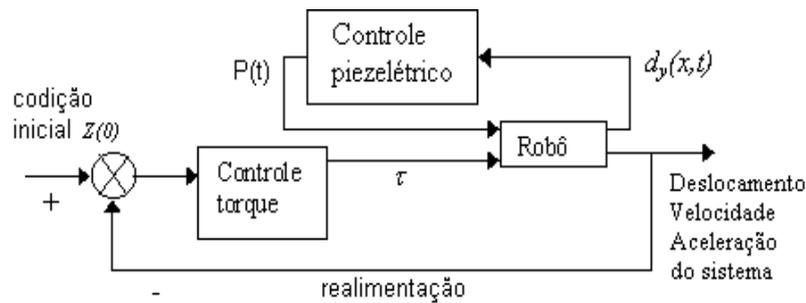


Figura 4.1 – Diagrama de blocos do controlador proposto.

Os sensores piezofilmes e atuadores piezocerâmicos são fixos aos elos flexíveis do manipulador, conforme a Figura 4.2. Como resultado, espera-se uma maior precisão no desenvolvimento de uma determinada trajetória dos elementos do robô.

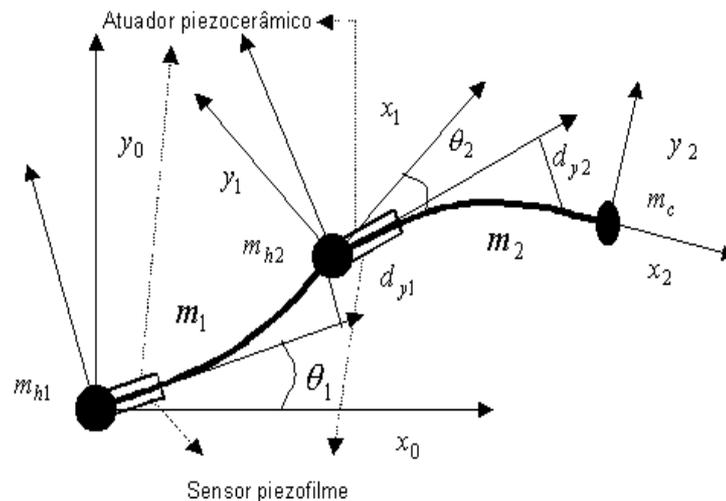


Figura 4.2 – Esboço do manipulador com atuadores e sensores piezétricos.

4.1 Modelo Dinâmico

O elo do robô pode ser modelado como uma barra uniforme de comprimento a_i , com um piezocerâmico fixo a sua superfície superior como atuador e um piezofilme fixo a sua superfície inferior como sensor, conforme a Figura 4.3.

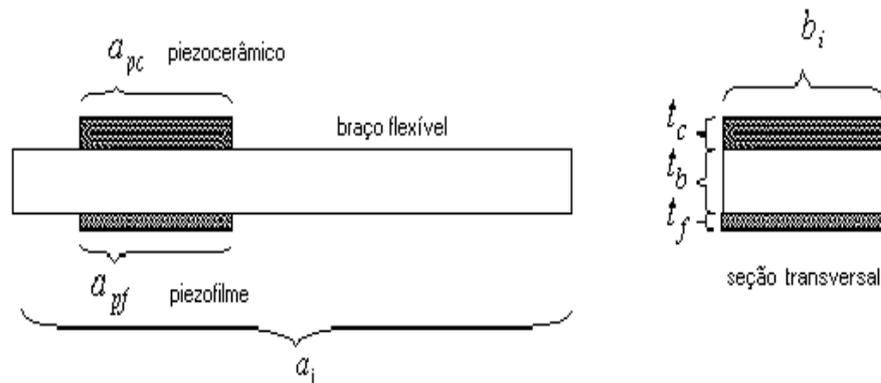


Figura 4.3 – elo robótico com atuadores e sensores piezoeletricos.

Com a adição do atuador e do sensor aos elos flexíveis do robô, as equações dos deslocamentos (2.17) e da energia potencial dos elos (2.92) devem ser remodeladas, levando em consideração as alterações físicas, como rigidez e massa do elo e o momento gerado pelos atuadores [Fuller et al., 1997].

Se o manipulador for composto por elos flexíveis não prismáticos, ou seja a seção transversal variável ao longo do elo, há um complicador que é a determinação dos modos naturais de vibração dos elos. Tendo em vista ser difícil trabalhar neste caso com a formulação analítica, propõe-se aqui formas numéricas para a determinação dos modos de vibração.

4.2 Determinação dos modos de vibração

Como visto no capítulo 2, os elos do robô podem ser modelados como vigas de Euler-Bernoulli. Para o elo com atuadores piezoeletricos, adota-se uma barra dividida em três partes descontínuas conforme a Figura 4.4, onde o deslocamento total de cada elo é representado por $d_{1yi}(x, t)$, $d_{2yi}(x, t)$, $d_{3yi}(x, t)$ e satisfazendo as equações de Euler-Bernoulli

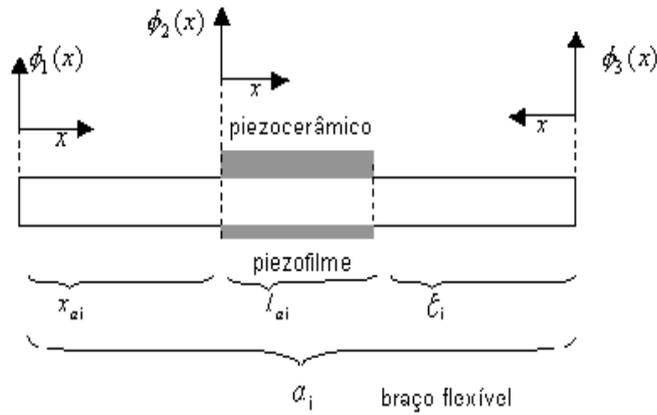


Figura 4.4 – barra trissegmentada descontínua

[Meirovitch, 1997]:

$$(EI_1)_i \frac{\partial^4 d_{1yi}(x_i, t)}{\partial x_i^4} + \rho_{1i} A_{1i} \frac{\partial^2 d_{1yi}(x_i, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (4.1)$$

$$(EI_2)_i \frac{\partial^4 d_{2yi}(x_i, t)}{\partial x_i^4} + \rho_{2i} A_{2i} \frac{\partial^2 d_{2yi}(x_i, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (4.2)$$

$$(EI_3)_i \frac{\partial^4 d_{3yi}(x_i, t)}{\partial x_i^4} + \rho_{3i} A_{3i} \frac{\partial^2 d_{3yi}(x_i, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (4.3)$$

Explorando a separabilidade de tempo e espaço de cada uma destas equações da deflexão, usando a técnica de análise modal com um número finito de modos de vibração, a deflexão de um elo robótico flexível pode ser expresso por

$$d_{k_{yi}}(x_i, t) = \sum_{j=1}^{m_i} \phi_{k_{ij}}(x_i) \delta_{k_{ij}}(t), \quad (4.4)$$

onde $k = 1, 2, 3$, número de partes em que foi dividido o elo e $\delta_{k_{ij}}(t)$, são variáveis temporais e as deflexões associadas às funções modais espaciais $\phi_{k_{ij}}(x_i)$ do elo i . Como visto no item 2.1.5 do capítulo 2, é possível encontrar soluções espaciais para os modos de vibração para cada trecho.

Desta maneira foram determinadas as funções correspondentes aos modos naturais de vibração em [Bottega, 2004], correspondentes a cada trecho da viga trissegmentada. Esta

análise vale apenas para elos prismáticos. Neste trabalho também se busca fazer uma análise em elos não-prismáticos, o que exige uma busca numérica pelas autofunções.

4.3 Uma forma numérica para as autofunções

Da formulação da teoria de vigas de Euler-Bernoulli, para pequenos deslocamentos, a equação de movimento é dada por:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 d_y(x, t)}{\partial x^2} \right) - p(x) = \rho A \frac{\partial^2 d_y(x, t)}{\partial t^2}, \quad (4.5)$$

onde EI representa a rigidez flexural da viga, $p(x)$ as forças externas e $d_y(x, t)$ a deflexão da viga.

Para pequenas amplitudes, os modos naturais de vibração não dependem das forças externas, portanto $p(x)$ pode ser desconsiderado.

Assume-se vibrações livres com ausência de forças externas

$$d_y(x, t) = \phi(x) \text{sen}(\varpi t - \Gamma) \quad (4.6)$$

onde $\phi(x)$ é um vetor com componentes independentes do tempo, ϖ é a frequência angular e Γ é a fase do ângulo.

Substituindo (4.6) na equação (4.5) obtém-se

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} \right) = -\rho A \varpi^2 \phi(x), \quad (4.7)$$

Aproximando $\phi(x)$ por elementos finitos

$$\int_0^a \frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} \right) v dx + \int_0^a \rho \varpi^2 A \phi(x) v dx = 0, \quad \forall v, \quad (4.8)$$

onde v é uma variação arbitrária de $\phi(x)$, satisfazendo as condições de contorno.

Assume-se soluções admissíveis na forma

$$\begin{aligned} \phi &= \sum_{i=1}^N U_i \psi_i, \\ v &= \sum_{j=1}^N X_j \psi_j, \end{aligned} \quad (4.9)$$

onde U_i e X_j são coeficientes escalares e N é o número de funções de base $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N\}$.

Sendo EI constante em cada elemento finito [Bathe e Wilson, 1976], usando integração por partes e substituindo (4.9) na equação resultante, chega-se as expressões das matrizes de rigidez, massa e amortecimento, respectivamente,

$$K_{ij} = \int_0^a EI \frac{d^2\psi_i}{dx^2} \frac{d^2\psi_j}{dx^2} dx, \quad (4.10)$$

$$M_{ij} = \int_0^a \rho A \psi_i \psi_j dx, \quad (4.11)$$

$$D_{ij} = \alpha M_{ij} + \beta K_{ij}, \quad (4.12)$$

onde ψ são as funções de interpolação de Hermite, definidas por elemento, ρ é a densidade do material e α e β são constantes a serem determinadas por duas taxas de amortecimento dadas, correspondentes à duas frequências de vibração diferentes. A matriz de massa poderá também ser tomada como diagonal, distribuindo de maneira adequada a massa nos nós. Neste caso, a discretização deve ser refinada o suficiente.

Assim, as frequências naturais e os modos de vibração, em coordenadas modais, por elementos finitos, na base modal, podem ser determinadas dos valores característicos da equação:

$$(K - \varpi^2 M) \phi = 0, \quad (4.13)$$

onde ϖ^2 são os valores característicos desta equação. Os autovetores representam os modos de vibração.

Quando se buscam as autofunções correspondentes às frequências naturais é necessário interpolar os valores discretos obtidos. Estas autofunções ϕ calculadas diretamente pela interpolação dos polinômios de Hermite por elemento, produzem grandes oscilações, devido aos valores das derivadas nos nós (valores dos deslocamentos dos autovetores em cada nó referentes as derivadas, m -normalizados), como é mostrado na Figura 4.5.

Estas oscilações aparecem independentemente do número de elementos usados na

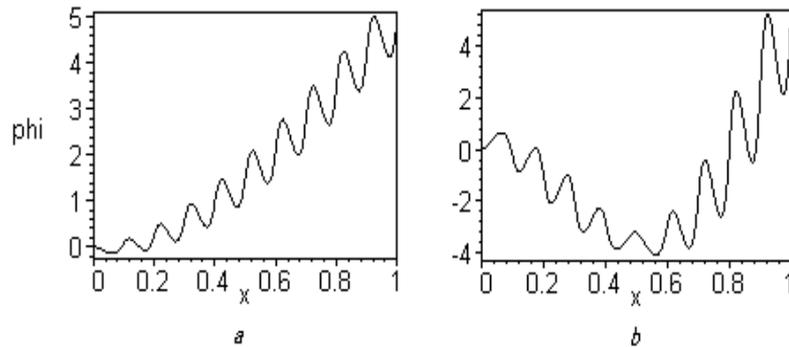


Figura 4.5 – Autofunções (modos de vibração) de uma viga engastada em $x = 0$. a é o primeiro modo e b o segundo modo. Autofunções geradas através da interpolação dos polinômios de Hermite em cada um dos 5 elementos.

discretização, exceto, se o número de elementos for pequeno, por exemplo, dois elementos para o segundo modo. Porém isto não gera boas aproximações para as autofunções.

É possível amenizar essas ondulações introduzindo funções cujos valores nos pontos de discretização sejam os mesmos vindos dos autovetores da equação (4.13). Há diversas maneiras de se fazer esta interpolação, entre elas, interpolando todos os valores por um único polinômio de Hermite; misturar polinômios de Lagrange com polinômios de Hermite (considerar Lagrange em alguns pontos e Hermite em outros ou os dois em ambos os pontos); interpolar com polinômios cujos coeficientes são calculados através da formulação de mínimos quadrados.

No caso de polinômios de interpolação onde os seus coeficientes são calculados por mínimos quadrados, é necessário considerar o operador pseudoinverso Ω^+ [Luenberger, 1976], pois podem surgir matrizes não quadradas. Este operador tem as seguintes propriedades:

- se $\Omega^T \Omega$ é inversível, então $\Omega^+ = (\Omega^T \Omega)^{-1} \Omega^T$;
- se $\Omega \Omega^T$ é inversível, então $\Omega^+ = \Omega^T (\Omega \Omega^T)^{-1}$.

Os coeficientes dos polinômios são calculados do resultado do sistema linear $\Omega x = y$, onde $x = \Omega^+ y$.

A matriz Ω é obtida da malha de elementos finitos e y dos valores dos autovetores calculados. Os valores da matriz Ω são calculados da seguinte formulação:

$$\Omega = \begin{bmatrix} x_1^n & \cdots & x_1^1 & 1 \\ x_2^n & \cdots & x_2^1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_i^n & \cdots & x_i^1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ o vetor } y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_i \end{bmatrix},$$
 onde n é a ordem dos polinômios e i é o número de pontos da malha.

As três formas de gerar as autofunções, apresentadas acima, podem amenizar o problema das oscilações, porém poderão não ser adequadas pelo erro adicional que será gerado em relação aos valores originais dos autovetores providos da equação (4.13). Neste caso é interessante adotar um critério de erro. Aqui adota-se como critério de erro o quociente de Rayleigh [Clive e Shames, 1973] de autofunções:

$$\varpi^2 = \frac{\int_0^a EI \left(\frac{d^2 \phi}{dx^2} \right)^2 dx}{\int_0^a \rho A \phi^2 dx}. \quad (4.14)$$

Por esta equação é possível fazer uma comparação das freqüências correspondentes às autofunções geradas.

No exemplo da Figura 4.6, de uma viga engastada na base, os valores dos autovetores de (4.13) correspondentes aos deslocamentos axiais são pequenos em comparação aos valores correspondentes à flexão e à derivada, portanto na montagem dos polinômios eles serão desconsiderados. Então, os polinômios gerados compõem os valores das derivadas nas extremidades do elo e os de flexão em todo elo, assim como apresentado na Figura 4.6. Tem-se aí uma mescla de funções de interpolação de Lagrange e Hermite.

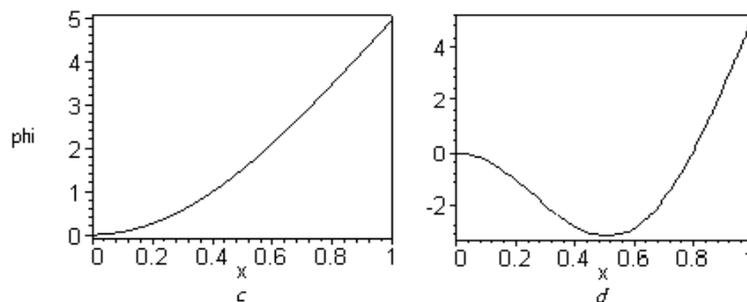


Figura 4.6 – Autofunções que representam os modos de vibração de uma viga engastada em $x = 0$. c é o primeiro modo e d o segundo modo. Autofunções geradas através da interpolação dos polinômios mistos: Lagrange e Hermite.

Na comparação das Figuras 4.5 e 4.6, dos modos naturais de vibração, percebe-se claramente a suavização das ondulações. Estas funções podem substituir as soluções exatas quando estas forem de difícil determinação.

Pelo cálculo do quociente de Rayleigh verifica-se que as autofunções ϕ geradas, representam bem os modos naturais de vibração. O erro entre os valores da equação (4.14) e os autovalores da equação (4.13), levando em conta os três primeiros modos de vibração está em torno de $1Hz$ para o primeiro e o segundo modos e $2Hz$ para o terceiro modo. Isto corresponde à aproximadamente 5% para os 2 primeiros modos e valores menores para os demais modos.

O procedimento acima descrito para obter as autofunções procede da seguinte forma

Passo 1 - Discretizar o modelo dinâmico por elementos finitos. As seções do elo, com diferentes propriedades, podem ser consideradas pelas funções de Heaviside.

Passo 2 - Resolver o problema de elementos finitos para os autovalores e autovetores.

Passo 3 - Colocar os autovetores em ordem crescente dos autovalores e m -normalizar os autovetores (normalização pela matriz de massa): $\psi_{m-norm} = \psi / \sqrt{\psi m \psi^T}$.

Passo 4 - Aproximar os valores dos autovetores pelas interpolações polinomiais descritas acima e escolher a que produz o menor erro pelo Quociente de Rayleigh.

Simulações mostram que no caso de vigas com seção transversal variável e/ou com a colocação do piezelétrico, o erro gerado pode ser mais significativo. Além disso sempre é necessário testar as diferentes possibilidades de gerar as autofunções para cada situação considerada e verificar qual é a mais adequada.

4.4 Equação do movimento

O momento produzido com a aplicação da tensão elétrica de controle $P_i(x, t)$, no atuador piezocerâmico, fixo à superfície do i -ésimo elo, pode ser obtido considerando forças de equilíbrio na direção axial. O momento M produzido para o elo flexível proposto é dado por

$$M = \int_{-t_{if}}^{t_{ic}} E_c \epsilon_{ic} b_i x dx, \quad (4.15)$$

de onde obtem-se

$$M = -\epsilon_{ic} E_c t_{ic} b_i \left[t_{if} + \frac{t_{ic}}{2} + t_{ib} - d_{n_i} \right] = c_{a_i} P_i(x, t), \quad (4.16)$$

$$\epsilon_{ic} = \frac{P(t) d_{31}}{t_{ic}}, \quad (4.17)$$

$$d_{n_i} = \frac{E_f t_{if}^2 b_i + (2t_{if} + t_{ib}) b_i t_{ib} E_b + (2t_{if} + 2t_{ib} + t_{ic}) b_i t_{ic} E_c}{2(b_i t_{ic} E_c + b_i t_{ib} E_b + b_i t_{if} E_f)}, \quad (4.18)$$

onde E_c , E_f e E_b são, respectivamente, módulo de elasticidade do piezocerâmico, do piezofilme e do material base do elo, t_{ic} , t_{if} e t_{ib} representam a espessura do piezocerâmico, do piezofilme e do elo, respectivamente, b_i é a largura do piezocerâmico, ϵ_{ic} representa a tensão elétrica induzida no piezocerâmico, fixo ao elo i , devido ao efeito da tensão elétrica nele aplicada, d_{n_i} é a distância do piezofilme ao eixo neutro do elo flexível e d_{31} é a constante de tensão piezoelétrica.

Na equação (4.16), c_{a_i} resulta numa constante, logo o momento é uma função dependente da tensão elétrica. Esta constante é determinada pelas características geométricas e propriedades materiais do elo flexível, atuador piezocerâmico e sensor piezoelétrico [Choi e Shin, 1996].

Neste trabalho, considerou-se que os atuadores e sensores piezoelétricos são fixos ao elo robótico com uma camada de cola extremamente fina em comparação com a espessura dos atuadores e sensores. Desta forma, os efeitos da camada de cola no modelo dinâmico podem ser desconsiderados [Crawley e De Luis, 1987]. Incluindo o momento produzido pelo atuador piezocerâmico no sistema dinâmico, a equação da energia potencial elástica do elo flexível (3.23) é reescrita, obtendo-se a expressão:

$$\begin{aligned} U_{ei} = & \frac{1}{2} \int_0^{x_a} EI_i(x_i) \left(\frac{d^2 d_{y_i}(x_i)}{dx^2} \right)^2 dx + \\ & \frac{1}{2} \int_{x_a}^{x_a+l_a} \frac{1}{EI_{Ai}} \left(EI_{Ai}(x_i) \frac{d^2 d_{y_i}(x_i)}{dx^2} - c_i P_i(x, t) \right)^2 dx + \\ & \frac{1}{2} \int_{x_a+l_a}^{a_i} EI_i(x_i) \left(\frac{d^2 d_{y_i}(x_i)}{dx^2} \right)^2 dx, \end{aligned} \quad (4.19)$$

onde EI_{Ai} representa a rigidez flexural da porção do elo composta pelo atuador e sensor piezelétrico, obtida a partir do eixo neutro do elo i dada por

$$EI_{Ai} = E_c \left[\frac{t_{ic}^3 b_i}{12} + t_{ic} b_i \left(t_{if} + \frac{t_{ic}}{2} - t_{ib} - d_{in} \right)^2 \right] + E_b \left[\frac{t_{ib}^3 b_i}{12} + t_{ib} b_i \left(t_{if} + \frac{t_{ib}}{2} - d_{in} \right)^2 \right] + E_f \left[\frac{t_{if}^3 b_i}{12} + t_{if} b_i \left(\frac{t_{if}}{2} - d_{in} \right)^2 \right]. \quad (4.20)$$

Assim obtém-se:

$$U_{ei} = \frac{1}{2} \int_0^{x_a} EI_i(x_i) \left(\frac{d^2 d_{yi}(x_i)}{dx^2} \right)^2 dx + \int_{x_a}^{x_a+l_a} \frac{1}{EI_{Ai}} \left(EI_{Ai}(x_i) \frac{d^2 d_{yi}(x_i)}{dx^2} c_i P_i(x, t) \right) dx + \frac{1}{2} \int_{x_a}^{x_a+l_a} \frac{1}{EI_{Ai}} (c_i P_i(x, t))^2 dx + \frac{1}{2} \int_{x_a}^{x_a+l_a} \frac{1}{EI_{Ai}} \left(EI_{Ai}(x_i) \frac{d^2 d_{yi}(x_i)}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{x_a+l_a}^{a_i} EI_i(x_i) \left(\frac{d^2 d_{yi}(x_i)}{dx^2} \right)^2 dx, \quad (4.21)$$

que pode ser reescrito na forma de somatório,

$$U_{ei} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \delta_{ij} \delta_{ik} k_{aijk} - \int_{x_a}^{x_a+l_a} \left(\frac{d^2 d_{yi}(x_i)}{dx^2} c_i P_i(x, t) \right) dx + \frac{1}{2} \int_{x_a}^{x_a+l_a} \frac{1}{EI_{Ai}} (c_i P_i(x, t))^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \delta_{ij} \delta_{ik} (k_{1ijk} + k_{2ijk}), \quad (4.22)$$

ou na forma condensada,

$$U_{ei} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \delta_{ij} \delta_{ik} k_{pijk} - \sum_{j=1}^m \delta_{ij} \gamma_{ij} + \frac{1}{2} \zeta_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \delta_{ij} \delta_{ik} (k_{1ijk} + k_{2ijk}), \quad (4.23)$$

onde k_{pijk} , k_{1ijk} e k_{2ijk} são os coeficientes de elasticidade cruzada do modo j e k nas três

seções do elo i , na forma

$$\begin{aligned}
k_{pijk} &= \frac{1}{2} \int_{x_a}^{x_a+l_a} EI_{Ai} \phi_{ij}(x_i)'' \phi_{ik}(x_i)'' dx_i, \\
k_{1ijk} &= \frac{1}{2} \int_0^{x_a} EI_i \phi_{ij}(x_i)'' \phi_{ik}(x_i)'' dx_i, \\
k_{2ijk} &= \frac{1}{2} \int_{x_a+l_a}^{a_i} EI_i \phi_{ij}(x_i)'' \phi_{ik}(x_i)'' dx_i, \\
\gamma_{ij} &= \int_{x_a}^{x_a+l_a} \phi_{ij}(x_i)'' c_i P_i(x, t) dx, \\
\zeta_{ij} &= \frac{1}{2} \int_{x_a}^{x_a+l_a} \frac{1}{EI_{Ai}} (c_i P_i(x, t))^2 dx.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Derivando a energia potencial elástica, com relação às variáveis de junta q , obtem-se:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_e}{\partial q_i} &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \frac{\partial \delta_{ij} \delta_{ik}}{\partial q_i} (k_{1ijk} + k_{2ijk}) - \\
&\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \frac{\partial \delta_{ij} \delta_{ik}}{\partial q_i} k_{pijk} - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^m \frac{\partial \delta_{ij}}{\partial q_i} \gamma_{ij} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial \zeta_i}{\partial q_i} \\
&= (\mathbf{K} + \mathbf{K}_p) \mathbf{q} - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^m \frac{\partial \delta_{ij}}{\partial q_i} \gamma_{ij} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial \zeta_i}{\partial q_i}.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Como U_e independe de θ_i , tem-se:

$$\frac{\partial U_e}{\partial \theta_i} = 0, \tag{4.26}$$

e, para as variáveis de deslocamentos

$$\frac{\partial U_e}{\partial \delta_i} = \sum_{j=1}^m \delta_{ij} k_{pijk} + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \delta_{ij} (k_{1ijk} + k_{2ijk}) - \gamma_{ij} = (\mathbf{K} + \mathbf{K}_p) \mathbf{q} - \mathbf{c}_a \mathbf{P}(t). \tag{4.27}$$

Substituindo a expressão (4.27) nas equações (2.89), obtem-se a equação de Lagrange do movimento do robô com elos flexíveis, com atuadores e sensores piezelétricos:

$$\mathbf{B}(\theta) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\theta, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_e \mathbf{q} + \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{u}, \tag{4.28}$$

$$\mathbf{B}(\theta) \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\theta\theta} & \mathbf{B}_{\theta\delta} \\ \mathbf{B}_{\theta\delta}^T & \mathbf{B}_{\delta\delta} \end{bmatrix}, \mathbf{C}(\theta, \dot{\mathbf{q}}) \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{\theta\theta} & \mathbf{C}_{\theta\delta} \\ \mathbf{C}_{\delta\theta} & \mathbf{C}_{\delta\delta} \end{bmatrix}, \quad (4.29)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_\delta(\theta) \\ \mathbf{g}_\theta(\delta) \end{bmatrix}, \mathbf{u} \equiv \begin{bmatrix} \tau \\ \mathbf{c}_a \mathbf{P}(t) \end{bmatrix}, \mathbf{K}_e \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_T \end{bmatrix}, \mathbf{K}_T = \mathbf{K}_p + \mathbf{K}. \quad (4.30)$$

onde $\mathbf{P}(t)$ é a tensão elétrica gerada pelo sensor piezofilme.

4.5 Controle piezelétrico

Uma vez obtida a equação do movimento do robô, com atuadores e sensores piezelétricos, deve-se obter uma lei de controle de retroalimentação em tensão elétrica para o atuador piezocerâmico. Propõe-se, então, um controlador de amplitude constante [Shin e Choi, 2000], na forma

$$\mathbf{P}(t) = -\mathbf{K}_c \mathbf{c}_a^T \dot{\mathbf{P}}_f(t), \quad (4.31)$$

onde \mathbf{K}_c é o ganho de retroalimentação, obtido considerando propriedades materiais do atuador piezocerâmico e também propriedades geométricas do elo flexível, $\mathbf{P}_f(t)$ é a tensão elétrica gerada pelo sensor piezofilme, obtida integrando a carga elétrica produzida pelo piezofilme, ao longo de toda sua superfície, dada por

$$\mathbf{P}_f(t) = \mathbf{C}_s \delta = \frac{k_{31}^2 b}{C g_{31}} d_{mi} \delta, \quad (4.32)$$

onde k_{31}^2 representa o fator de acoplamento eletromecânico, C a capacitância do piezofilme, b a largura do piezofilme e g_{31} a constante de tensão piezoelétrica.

O controlador (4.31) substitui $\mathbf{P}(x, t)$ na equação do momento (4.16) e adicionado ao controlador (4.43), obtém-se então a lei de controle do sistema (4.28) expressa por

$$\mathbf{u} = \mathbf{B}(\theta) \ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{C}(\theta, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{K}_e \mathbf{q}_d + \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \mathbf{K}_p \mathbf{s} + \left[\mathbf{0}^T \left(\mathbf{D}'_{\Delta} \dot{\delta}_d \right)^T + \mathbf{c}_a \mathbf{P}(t) \right]^T. \quad (4.33)$$

De forma análoga ao controle de torque, apresentado no capítulo 3, pode-se provar, através da teoria de estabilidade de Lyapunov, que, com a equação de controle (4.33), a trajetória e os deslocamentos do elo flexível resultam assintoticamente estáveis. É importante

ressaltar que a estabilidade dos dois controles, do torque e por materiais piezoelétricos, é apresentada de forma independente. Ou seja, no trabalho não é mostrado a estabilidade para os controladores acoplados.

Espera-se, então, que, com a introdução dos atuadores e sensores piezoelétricos, elimine-se as vibrações de alta frequência, induzidas nos elos do robô, que não são alcançadas pelo controle de torque atuado pelos motores do robô. Para comprovar a eficácia do controlador (4.33), propõe-se novas simulações com *MatLab/Simulink* para o sistema composto por um elo rígido e um elo flexível, com um atuador e um sensor fixos neste elo.

5. OTIMIZAÇÃO SIMULTÂNEA DA LOCALIZAÇÃO E TAMANHO DOS ATUADORES PIEZELÉTRICOS E RETROALIMENTAÇÃO

Controle de vibrações de estruturas não depende apenas da lei de controle, mas também da seleção e localização dos atuadores e sensores. No projeto de estruturas inteligentes, com atuadores e sensores, deve-se levar em conta a lei de controle de retroalimentação e localização dos atuadores e sensores. Existem várias técnicas para determinar a lei de controle, enquanto que as técnicas para determinar a localização ótima de atuadores são relativamente novas. Geralmente a lei de controle e a localização ótima são obtidas separadamente. Porém, devido a grandes interações existentes entre o controle e a posição dos atuadores e sensores, recentemente o problema de otimização simultânea de controle e localização de atuadores e sensores vem atraindo a atenção de pesquisadores. Em [Onada e Haftka, 1997], é desenvolvida uma aproximação para otimização simultânea da estrutura e controle, na qual a localização ótima dos atuadores e sensores e o controle foram obtidas através da minimização do custo total da estrutura e do sistema de controle. Em [Schultz e Heimbold, 1983] é apresentado um método para minimizar a dissipação de energia através de um conjunto ótimo de atuador/sensor e ganho de retroalimentação. Em [Kondoh et al., 1990] é usado um esquema de controle ótimo linear quadrático para a localização do atuador/sensor e ganho de retroalimentação. Estes dois últimos métodos [Schultz e Heimbold, 1983] e [Kondoh et al., 1990] são dependentes das condições iniciais.

Recentemente, controladores ativos desenvolvidos para materiais piezelétricos têm se mostrado eficientes para o controle de vibrações estruturais, dando uma nova dimensão aos problemas de controle. Isto se deve ao fato de que não só a localização, mas também o tamanho do atuador/sensor é levado em consideração na otimização [Crawley, 1994].

Neste trabalho, utiliza-se um método de otimização para a localização do atuador/sensor e ganho de retroalimentação baseado na maximização da energia dissipada devido à ação do controle [Li et al., 2002]. Esta metodologia leva em consideração os efeitos da mudança da massa e rigidez ocorridos na estrutura, devido à adição dos atuadores e sensores,

combinada com o controle para obter uma função objetivo.

5.1 Energia total do sistema

A dinâmica do elo flexível com m sensores e atuadores piezelétricos, obtido pela aplicação da equação de Lagrange que em termos das coordenadas modais δ , desconsiderando forças gravitacionais, pode ser expressa por [Crawley e De Luis, 1987].

$$\mathbf{B}_{\delta\delta}\ddot{\delta} + \mathbf{C}_{\delta\delta}\dot{\delta} + \mathbf{D}\dot{\delta} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_{\text{piez}})\delta = \mathbf{c}_a\mathbf{P}(t), \quad (5.1)$$

A energia total do sistema, pode ser escrita na forma

$$W = \mathcal{T} + \mathcal{U} = \frac{1}{2}\dot{\delta}^T\mathbf{B}_{\delta\delta}\dot{\delta} + \frac{1}{2}\delta^T(\mathbf{K} + \mathbf{K}_{\text{piez}})\delta > 0. \quad (5.2)$$

A derivação de (5.2) com relação ao tempo resulta:

$$\dot{W} = \dot{\mathcal{T}} + \dot{\mathcal{U}} = \frac{1}{2}\dot{\delta}^T\dot{\mathbf{B}}_{\delta\delta}\dot{\delta} + \dot{\delta}^T\mathbf{B}_{\delta\delta}\ddot{\delta} + \delta^T(\mathbf{K} + \mathbf{K}_{\text{piez}})\dot{\delta}, \quad (5.3)$$

Usando (5.1) e (5.3) com a lei de controle (4.31), obtém-se:

$$\dot{W} = \dot{\mathcal{T}} + \dot{\mathcal{U}} = -\dot{\delta}^T\mathbf{D}\dot{\delta} - \dot{\delta}^T(\mathbf{c}_a\mathbf{K}_c\mathbf{c}_a^T\mathbf{C}_s)\dot{\delta} < 0, \quad (5.4)$$

onde o primeiro e segundo termo do lado direito da igualdade representam a taxa de energia do sistema resultante do amortecimento interno e do controle, respectivamente.

Integrando (5.4), obtém-se

$$W(t_0) = W_f + W_c = \int_{t_0}^{\infty} \dot{\delta}^T\mathbf{D}\dot{\delta}dt + \int_{t_0}^{\infty} \dot{\delta}^T(\mathbf{c}_a\mathbf{K}_c\mathbf{c}_a^T\mathbf{C}_s)\dot{\delta}dt, \quad (5.5)$$

onde $W(t_0)$ denota a energia total inicial do sistema e W_f, W_c a energia dissipada do sistema resultante do amortecimento interno e do controle, respectivamente.

Para eliminar as vibrações do elo, é conveniente desenvolver um método que maximize a energia dissipada através do sistema de controle. Observa-se que a energia resultante do controle W_c depende da localização e tamanho dos atuadores e também da matriz de ganho de retroalimentação \mathbf{K}_c . Portanto, W_c pode ser usada como um critério de otimização do sistema de controle para determinar a localização e tamanho dos atuadores e também a

matriz ganho de retroalimentação. Logo, pode-se tomar como função objetivo a ser minimizada como:

$$\min J(x_a, l_a, K_c) = -W_c, \quad (5.6)$$

onde utiliza-se restrições de massa e tamanho dos atuadores a valores compatíveis e pode-se adicionar restrições de frequências naturais a um limite mínimo e de frequências de controle a um limite máximo.

5.2 Formulação do problema de otimização

Seja $\mathbf{z} = [\delta, \dot{\delta}]^T$, podemos escrever (5.1) na forma da equação de estado

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{G}\mathbf{z} + \mathbf{L}\mathbf{z}, \quad (5.7)$$

onde $\mathbf{G}_{2N \times 2N}$ e $\mathbf{L}_{2N \times N}$ são matrizes bloco na forma

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{B}_{\delta\delta}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{B}_{\delta\delta}^{-1}(\mathbf{C}_{\delta\delta} + \mathbf{D}) \end{bmatrix}, \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{B}_{\delta\delta}^{-1}\mathbf{c}_a\mathbf{K}_c\mathbf{c}_a^T\mathbf{C}_s \end{bmatrix}, \quad (5.8)$$

com \mathbf{I} matriz identidade $N \times N$.

A equação de estado (5.7) pode então ser reescrita na forma fechada:

$$\dot{\mathbf{z}} = \tilde{\mathbf{G}}\mathbf{z}, \quad (5.9)$$

com

$$\tilde{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{B}_{\delta\delta}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{B}_{\delta\delta}^{-1}(\mathbf{C}_{\delta\delta} + \mathbf{D} + \mathbf{c}_a\mathbf{K}_c\mathbf{c}_a^T\mathbf{C}_s) \end{bmatrix}, \quad (5.10)$$

Agora, a energia dissipada do sistema resultante do amortecimento interno W_c pode ser escrita como:

$$W_c = \int_{t_0}^{\infty} \mathbf{z}^T \mathbf{Q} \mathbf{z} dt, \quad (5.11)$$

onde

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{c}_a \mathbf{K}_c \mathbf{c}_a^T \mathbf{C}_s \end{bmatrix}, \quad (5.12)$$

matriz $2m \times 2m$ correspondente a forma quadrática da energia dissipada do sistema resultante do controle.

Aplicando apropriadas transformações a expressão (5.11) resulta

$$W_c = \mathbf{z}_0^T \mathbf{P} \mathbf{z}_0, \quad (5.13)$$

onde \mathbf{P} é a solução da seguinte equação de Lyapunov $\tilde{\mathbf{G}}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \tilde{\mathbf{G}} = -\mathbf{Q}$ e \mathbf{P} é simétrica positiva definida.

Observa-se que W_c depende das condições iniciais da estrutura flexível, para eliminar esta dependência, assume-se que o estado inicial de \mathbf{z} satisfaz $W_a^{-1} \mathbf{z}_0$ onde $W_a = \text{diag}(\lambda_i)$, com valores aleatórios para $\lambda_i > 0$. Assim obtem-se a função custo para a energia dissipada do sistema devido a ação do controle, na forma $J_0 = \text{tr}(W_a \mathbf{P} W_a)$.

$$J_0 = \text{tr}(W_a \mathbf{P} W_a). \quad (5.14)$$

A função custo J_0 depende apenas do ganho K_c e de controle c_a que por sua vez, depende da posição e do tamanho dos atuadores piezelétricos.

Para obter uma estrutura eficiente, tanto na precisão, quanto na agilidade, é importante uma função custo que considere o peso do material piezelétrico utilizado como atuador. Para isto, resultados experimentais para atuadores e sensores fixos à barras e placas [Li et al., 2002] mostram ser conveniente adicionar-se a função custo, um termo quadrático dependente do tamanho do atuador l_a , resultando no seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} \min \quad & J(x_a, l_a, K_c) = \alpha l_a^2 - J_0 \\ & 0 \leq x_a \leq a_i \\ & 0 < x_a + l_a \leq a_i \end{aligned} \quad (5.15)$$

onde

αl_a^2 considera o peso/custo da placa do material piezelétrico,

l_a é o tamanho da placa do material piezelétrico,

x_a é a posição onde se encontra a placa e

a_i é o comprimento do elo.

Tem-se aí uma função objetivo não linear com duas variáveis de decisão. As restrições são de desigualdade lineares, que representam restrições quanto ao tamanho da placa do sensor e atuador piezolétrico e a posição no elo flexível do robô.

5.3 Simulações do uso do material piezolétrico em vigas

Como exemplo de otimização foram consideradas vigas engastadas de um lado e com insertos atuadores piezolétricos colados. O procedimento desenvolvido visa a otimização da posição simultaneamente com o ganho de realimentação do controle. A colagem do atuador/sensor foi considerada como mostrado na figura 4.3.

Da equação

$$\frac{\partial^4 d_y}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 d_y}{\partial t^2} = \mathbf{c}_a \mathbf{P}(t) \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (5.16)$$

onde h é a função de localização generalizada expressa pela função de Heaviside, e as equações (2.22)-(2.25) com as equações (4.16) e (4.18), fazendo as devidas substituições, em termos de coordenadas modais é possível chegar as seguintes equações para um material piezolétrico ([Li et al., 2002], [Abreu et al., 2003])

$$\mathbf{c}_a(x_a, l_a) = -\frac{E_b E_c t_c^2 b d_{31}}{\rho_b A_b (E_b t_b + 6E_c t_c)} \times [\phi'(x_a + l_a) - \phi'(x_a)], \quad (5.17)$$

$$\mathbf{K}_{\text{piez}}(x_a, l_a) = \frac{E_b E_c t_b^3 t_c b}{\rho_b A_b (E_b t_b + 6E_c t_c)} \times [\phi''(x_a + l_a)\phi'(x_a + l_a) - \phi''(x_a)\phi'(x_a)]. \quad (5.18)$$

Se forem utilizados dois ou mais atuadores piezolétricos, as equações (5.17) e (5.18) podem ser reescritas como

$$\mathbf{c}_a(x_a, l_a) = -\frac{E_b E_c t_c^2 b d_{31}}{\rho_b A_b (E_b t_b + 6E_c t_c)} \times \sum_{i=1}^n [\phi'(x_{ai} + l_{ai}) - \phi'(x_{ai})], \quad (5.19)$$

$$\mathbf{K}_{\text{piez}}(x_a, l_a) = \frac{E_b E_c t_b^3 t_c b}{\rho_b A_b (E_b t_b + 6E_c t_c)} \times \sum_{i=1}^n [\phi''(x_{ai} + l_{ai})\phi'(x_{ai} + l_{ai}) - \phi''(x_{ai})\phi'(x_{ai})], \quad (5.20)$$

onde n é o número de atuadores piezelétricos a serem utilizados. Os índices b e c se referem ao braço e ao atuador respectivamente e E e t ao módulo de elasticidade e a espessura do material, respectivamente. b é a largura do atuador.

No trabalho de Bottega (2004) foi determinada a posição e o tamanho do atuador para dois modos de vibração. A cinemática do robô foi simulado em *PC*, utilizando *Maple* para a parte analítica (as matrizes da equação de Lagrange e os modos de vibração) e o *Matlab* para a parte numérica da otimização. Entre as diversas simulações para a constante α , na definitiva para a otimização esta constante foi considerada como 300, valor implicitamente ligado ao peso do material piezelétrico, o que implica em seu custo. Essa constante está adimensionalizada neste modelo. Considerou-se um modelo simplificado de robô com o primeiro elo rígido e o segundo elo flexível com dois modos de deformação, assim, o vetor de coordenadas Lagrangeanas se reduz a $\mathbf{q} = (\theta_1, \theta_2, \delta_{21}, \delta_{22})^T$, desconsiderando efeitos gravitacionais e com os parâmetros físicos que são apresentados no último capítulo. Os parâmetros de controle são

- $\mathbf{K}_c = 30$,
- $\lambda = 20$.

Com variação dos modos de vibração ligados à variação da posição no elo e do tamanho do atuador piezelétrico, os resultados obtidos foram $x_a = 0,09m$ e $l_a = 0,35m$.

Neste trabalho, estas simulações foram refeitas considerando dois atuadores colados no elo flexível, não-prismático. Com base nos resultados de Bottega (2004) e os artigos consultados sobre o assunto ([Li et al., 2002], [Abreu et al., 2003],[Choi et al., 1999]), um primeiro foi fixo no início do elo, $x_{a1} = 0$, e o outro com posicionamento a ser definido pela otimização. Para este caso foram feitas duas simulações:

- a primeira com a mesma função objetiva acima (5.15) e variando a posição do segundo atuador no elo e do tamanho dos dois. O valor do ganho do controle foi fixado em $\mathbf{K}_c = 10^6$, os pesos atribuídos aos modos $\lambda_1 = 200$ e $\lambda_2 = 100$ e a constante $\alpha = 10$;

- outra fixando um tamanho para os dois atuadores e variando posição e ganho do

controle, sendo a função objetiva modificada para

$$\begin{aligned} \max \quad & J(x_a, l_a, K_c) = J_0 \\ & 0 \leq x_a \leq a_i \\ & 10^5 < K_c \leq 10^9. \end{aligned} \quad (5.21)$$

O tamanho foi fixado em $l_a = 0,05m$ e pesos atribuídos aos modos $\lambda_1 = 200$ e $\lambda_2 = 100$;

Os resultados das simulações feitas no MAPLE são apresentados na Figura 5.1. Foram avaliados 6 tamanhos e 6 posições distintas. A viga considerada é não-prismática de $0,7m$ (usada também nas simulações do capítulo 6). A Figura (a) corresponde ao primeiro caso e a (b) ao segundo. A posição, foi discretizada num vetor de posições $[0.25, 0.3, 0.35, 0.4, 0.45, 0.48]$, onde cada valor desses representa a distância entre os dois atuadores piezelétricos. Os tamanhos no vetor $[0.01, 0.025, 0.05, 0.1, 0.15, 0.2]$, cada valor representa o tamanho do material piezelérico, sendo os dois de mesmo tamanho. Para o tamanho fixo foi considerado o vetor do ganho do controle $[0.20e9, 0.40e9, 0.60e9, 0.80e9, 0.100e10, 0.120e10]$. Nas figuras são atribuídos os números de 1 a 6 para estas discretizações, sendo 1 o menor valor e 6 o maior. As matrizes da Dinâmica foram calculadas analiticamente e os modos de vibração através do método de elementos finitos com a interpolação dos valores discretos, assim como mostrado no capítulo 4, seção 4.3. Dois modos foram considerados nas simulações.

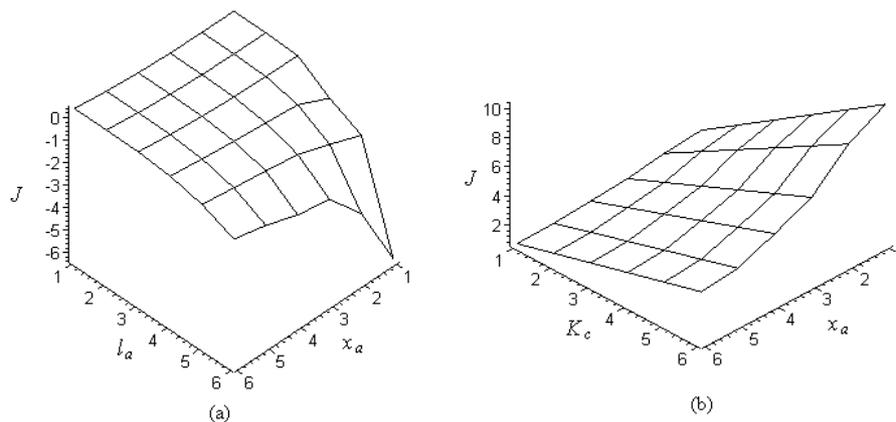


Figura 5.1 – Função custo energia dissipada pelo sistema devido à ação do controle piezelétrico e tamanho do atuador e sensor.

Percebe-se claramente por estas simulações, que há uma forte tendência de se obter

o melhor resultado para a função objetivo quando se posiciona os dois atuadores/sensores no início do elo flexível. A Figura 5.1 (a) mostra que o melhor tamanho para o atuador/sensor é o maior dentro da discretização, $l_a = 0,2m$ e a Figura 5.1 (b) que o valor máximo da função de energia dissipada se dá quando os atuadores são postos juntos no início do elo e com ganho de controle máximo.

5.3.1 Extensão do problema de otimização para mais modos de vibração

Nas simulações acima foram considerados somente dois modos de vibração para encontrar a localização e tamanho ótimos dos atuadores/sensores piezelétricos. O trabalho com vigas flexíveis usando atuadores piezelétricos pode gerar algumas limitações causadas pela truncagem modal, principalmente quando se usa somente um atuador [Sun et al., 2004]. Modos de frequências mais altas, como quarto, quinto ou sexto, podem provocar instabilidades ao sistema, quando do posicionamento não apropriado do atuador/sensor no elo flexível. Nesta seção será discutido qual posicionamento é mais apropriado e também o tamanho dos atuadores piezelétricos levando em conta seis primeiros modos de vibração de uma viga flexível. Esta escolha está baseada no trabalho de Sun et. all (2004) que fez um estudo de três condições para a tomada de decisão em relação ao posicionamento, duas no que diz respeito a estabilidade e uma em melhorar a performance do controle. Neste trabalho, estas três condições serão descritas apenas fisicamente.

- *Condição 1 - O atuador deve ser colocado numa região onde $\phi_i(x)$ e $\phi'_i(x)$ tenham a mesma tendência de variação, dentro da área de cobertura do atuador.*

Esta condição de estabilidade requer que as autofunções e suas derivadas devem estar no mesmo sentido, crescentes ou decrescentes para satisfazer o momento produzido pelo atuador, que é definido pelo momento $\phi''_i(x)$.

- *Condição 2 - O atuador deve ser posto longe da região onde a segunda derivada do modo de vibração muda de sinal.*

Se o atuador está localizado numa região de deformação nula, ou seja, onde a segunda derivada do modo de vibração muda de sinal, a força modal produzida pelo atuador diminui, visto que uma seção do atuador se opõe à outra.

- *Condição 3 - O atuador é idealmente posto na região onde o momento da força atuante tem a máxima contribuição no amortecimento da vibração.*

Esta é uma condição que visa eficiência no controle. Obviamente, se o atuador é posto numa região de maior deformação, sua atuação poderá ser mais eficaz, inibindo a deformação.

Como ilustração, consideremos os seis primeiros modos de vibração de uma viga flexível de $1m$ de comprimento, assim como mostrado na Figura 5.2.

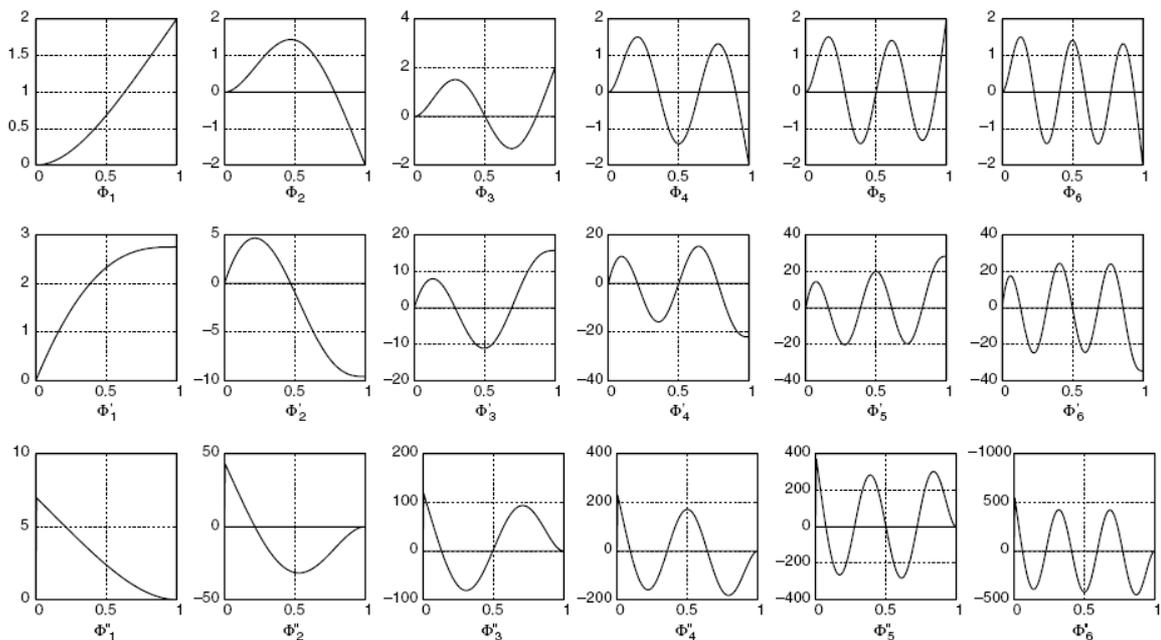


Figura 5.2 – Funções da forma de seis modos de vibração, ϕ , ϕ' e ϕ''

Assumindo que os atuadores tenham $0,1m$ de comprimento. Pela Condição 1, um atuador poderia ser posto no início da viga, ou no final. Percebe-se pela Figura 5.2 que nestas duas posições e com este tamanho de atuador, a Condição 1 é satisfeita. Se focarmos somente no primeiro modo, a Condição 2 é satisfeita para qualquer posição ou tamanho do atuador, porém para os demais modos isto já não é possível por aparecerem deformações nulas em diferentes lugares das autofunções. Além disso o quinto e o sexto modos apresentam deformação nula na região de cobertura do atuador, caso ele seja posicionado no início da viga. Então, para satisfazer a esta condição, o melhor posicionamento do atuador é no final da viga. Neste caso, a performance do controle é afetada, visto que os quatro primeiros

modos produzem amplitudes mais significativas à vibração. Uma saída para este problema é determinar a localização de atuadores com diferentes tamanhos.

Tendo em vista a performance do controle, deve-se verificar quais os modos mais atuantes na vibração. Esta verificação pode ser feita através do cálculo da contribuição da massa modal $\Phi^T M \Phi$, onde M é a matriz de massa e Φ a matriz de autovalores normalizados, ou pelo Fator de participação do modo n em uma direção que atua a aceleração $\{\phi\}_n^T [M] \{1_x\}$. $\{1_x\}$ é um vetor com valores unitários nas posições correspondentes à direção x e zero nas restantes. Neste trabalho foi calculada a contribuição da massa modal, cujos valores para os três primeiros modos são $diag(0.6116, 0.3164, 0.0028)$, verificando que os primeiros são mais significativos.

Pela Condição 3, percebe-se maior eficiência do controle quando do atuador posicionado no início da viga, onde por exemplo, há maior deformação para os dois primeiros modos de vibração. Em suma, pelas três condições assumidas acima, um bom posicionamento para o atuador é no início da viga, com o cuidado de escolher um tamanho apropriado.

6. SIMULAÇÕES E RESULTADOS

As simulações foram feitas usando duas técnicas de controle diferentes:

- *metodologia de minimização de erro de trajetória* - simulações do modelo desenvolvido por Bottega (2004), com alteração na forma de calcular os modos de vibração e ampliação do número de modos usados na formulação do modelo dinâmico.
- *metodologia SDRE* - simulações do modelo com controle via equações de Riccati dependentes do estado (SDRE). Neste ítem também se fará uma análise de estabilidade para o método SDRE.

Nas simulações considera-se somente o segundo elemento flexível e não-prismático, como mostrado na Figura 6.1. Assim sendo, este é o indutor das vibrações que afetam a trajetória do elemento final do manipulador.

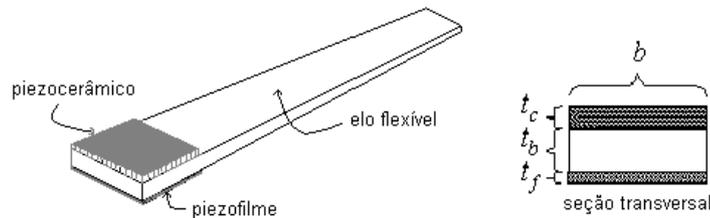


Figura 6.1 – Esboço do manipulador não-prismático e flexível.

Este elo tem variação apenas na espessura, a largura permanece constante. No manipulador completo foram considerados os seguintes parâmetros físicos [Halim e Moheimani, 2003] e [Choi et al., 1999]:

$\rho_1 = \rho_2 = 2890kg.m^{-3}$, $\rho_{cer} = 7700kg.m^{-3}$, $\rho_{filme} = 1780kg.m^{-3}$ (densidade uniforme);

$a_1 = 0,3m$, $a_2 = 1m$ (comprimento dos elos);

$a_{pc} = 0,2m$ (comprimento do atuador piezelétrico);

$t_f = 0,028mm$, $t_{b1} = 1mm$ (num lado), $t_{b2} = 0,6mm$ (no outro lado), $t_c = 0,815mm$;

$b = 25mm$ (largura igual para as três camadas de material);

$m_c = 0kg$, $m_{h1,2} = 0,5kg$ (massas da carga e motor);

$I_{h1} = 0,230kg.m^2$, $I_{h2} = 0,182kg.m^2$ (momentos de inércia - motores);

$\varpi_{21} = 27,5Hz$, $\varpi_{22} = 140,5Hz$ (frequências do elo flexível);

$E_b = 65GPa$, $E_c = 64GPa$, $E_b = 2GPa$ (módulo de elasticidade);

$\zeta_{21} = 0,07$, $\zeta_{22} = 0,03$ (taxas de amortecimento);

$d_{31} = -300 \times 10^{12}(m/m)(V/m)$, $g_{31} = 216 \times 10^{-3}(V/m)(N/m^2)$, $k_{31}^2 = 0,44$ e

$C = 380pF.cm^{-2}$

Os efeitos de gravidade foram desconsiderados.

As amplitudes dos modos de vibração são obtidas diretamente através do método de elementos finitos, onde os autovetores foram m -normalizados.

A energia potencial elástica total pode ser calculada através da equação da energia elástica do sistema [Arteaga, 1998]:

$$U_e = \frac{1}{2} \delta^T \mathbf{K}_e \delta \quad (6.1)$$

No capítulo 4 foi mostrada a forma da matriz \mathbf{K}_e . Esta contém a matriz \mathbf{K}_T , que por sua vez é calculada das autofunções

$$\mathbf{K}_T = \int_0^a EI \frac{d^2 \phi_i}{dx^2} \frac{d^2 \phi_j}{dx^2} dx. \quad (6.2)$$

A inclusão do material piezolétrico no elo flexível, para o uso em elementos finitos, foi considerado através das funções Heaviside. Desta forma, as diferentes propriedades são mapeadas ao longo do elo. A forma do cálculo das autofunções é dada também no capítulo 4.

6.1 Simulações usando a metodologia de minimização de erro de trajetória

Do modelo dinâmico do sistema para estas simulações obtém-se as equações na forma matricial compacta [Book, 1984]:

$$\mathbf{B}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{K}_e\mathbf{q}_d + \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \mathbf{K}_p\mathbf{s} = \mathbf{u}. \quad (6.3)$$

A lei de controle do sistema é a da equação (4.33), sem o material piezelétrico, expressa por:

$$\mathbf{u} = \mathbf{B}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{K}_e\mathbf{q}_d + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \mathbf{K}_p\mathbf{s} + \left[\mathbf{0}^T \left(\mathbf{D}'_{\Delta}\dot{\delta}_d \right)^T \right]^T, \quad (6.4)$$

e com material piezelétrico expressa por

$$\mathbf{u} = \mathbf{B}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{K}_e\mathbf{q}_d + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \mathbf{K}_p\mathbf{s} + \left[\mathbf{0}^T \left(\mathbf{D}'_{\Delta}\dot{\delta}_d \right)^T + \mathbf{c}_a\mathbf{P}(t) \right]^T. \quad (6.5)$$

\mathbf{K}_p é uma matriz de ganho diagonal, com termos constantes, positiva definida, obtida da equação (4.24).

A posição inicial e final do braço robótico foi considerada como mostrado na Figura 6.2. O giro nas duas juntas ocorre simultaneamente.

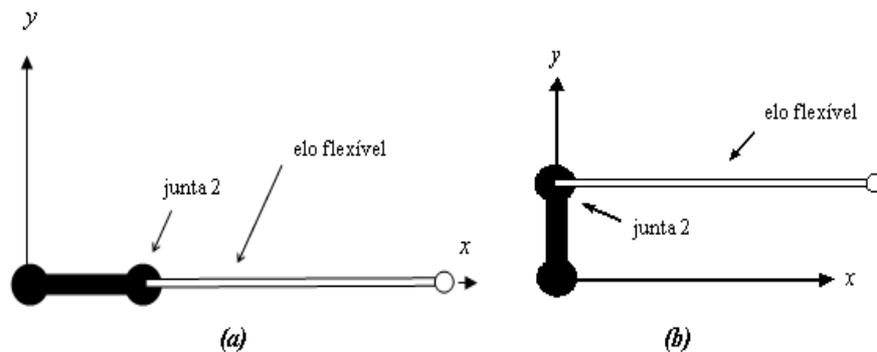


Figura 6.2 – Posição inicial (a) e final (b) do braço robótico.

Os resultados comparativos foram obtidos através de simulações em *PC*, utilizando *MatLab/Simulink*, com $\Delta t = 1ms$, com o método numérico de Runge-Kutta de quarta ordem, por um período de 5 segundos. Utilizou-se trajetórias de velocidade trapezoidal com amplitude $\pi/2$ para o ângulo da junta 1 e $-\pi/2$ para o ângulo da junta 2, sem erro de

traçado inicial, conforme mostrado na Figura 6.3.

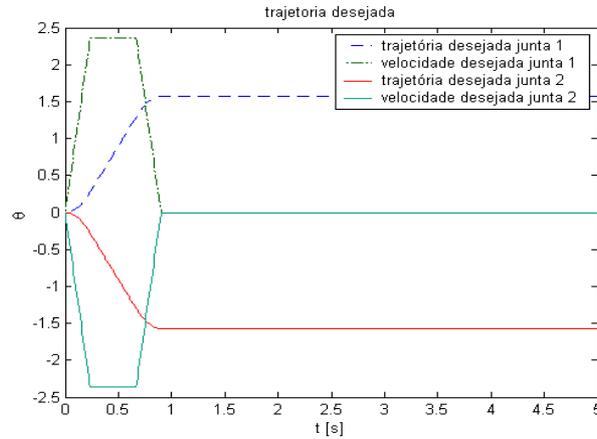


Figura 6.3 – Trajetória e velocidade trapezoidal para o ângulo das juntas.

Primeiramente, simulou-se um sistema com a lei de controle (6.3) sem o termo de amortecimento da equação (6.4). Foram considerados três modos de vibração na modelagem do sistema. Observa-se na Figura 6.4 que as deflexões tendem a zero e são limitadas devido ao amortecimento natural do sistema. Vê-se claramente que o primeiro modo prevalece sobre os outros dois e o segundo sobre o terceiro, ou seja, os modos mais baixos tem amplitudes maiores e são mais significativos na deflexão do elo flexível.

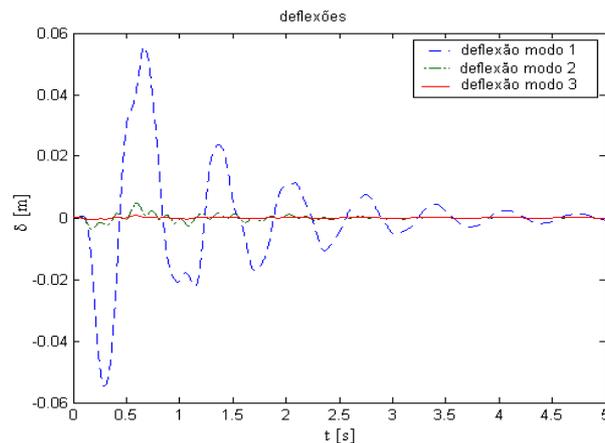


Figura 6.4 – Deslocamento dos modos de vibração para o sistema com amortecimento natural.

Pode-se observar na Figura 6.5 que o erro de trajetória do sistema também tende a zero.

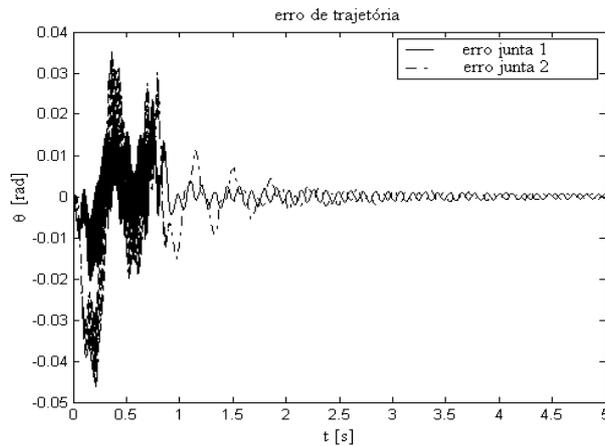


Figura 6.5 – Erro de trajetória das juntas 1 e 2 do robô.

Numa segunda simulação usando esta técnica de controle, Figura 6.6, simulou-se o sistema com o termo de amortecimento forçado, decorrente da adição do controlador $D'_\Lambda \dot{\delta}_d$, lei de controle de deflexões (6.4). Observa-se uma redução na amplitude dos deslocamentos quando comparado com o sistema sem o termo de amortecimento (6.3), mostrado nas figuras anteriores. Há uma convergência a zero mais rápida das deflexões.

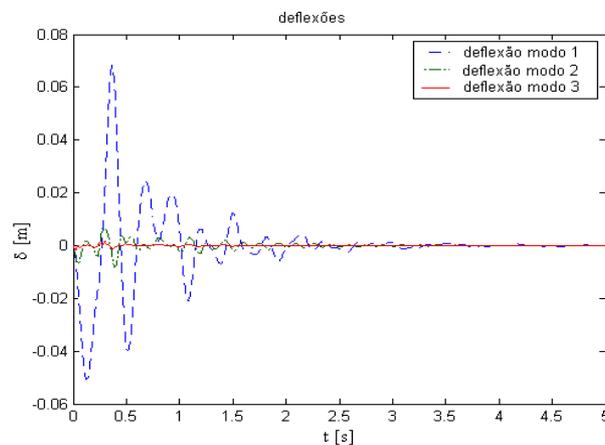


Figura 6.6 – Deslocamento do primeiro, segundo e terceiro modo para o sistema amortecido com controle de deslocamento.

As trajetórias do sistema e a desejada para o ângulo das juntas são mostradas na Figura 6.7. Aqui é interessante observar que as trajetórias nas juntas não dependem do controle piezelétrico, mas somente do controle pelo torque aplicado nos motores.

A trajetória do sistema e a desejada para o terminal do elo flexível, com respeito

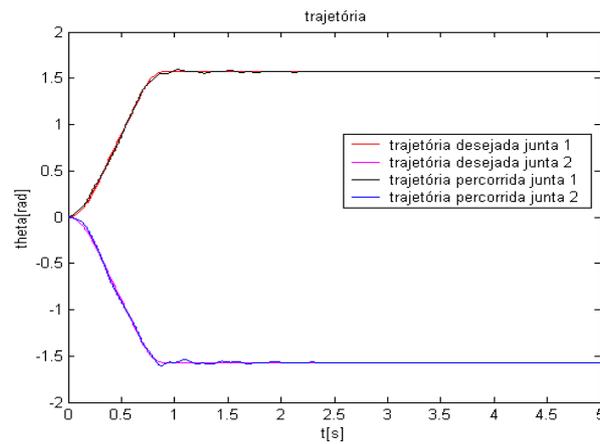


Figura 6.7 – Trajetória do sistema e trajetória desejada para o ângulo das juntas.

somente ao eixo y (em coordenadas cartesianas), considerando somente controle por torque, são mostradas na Figura 6.8.

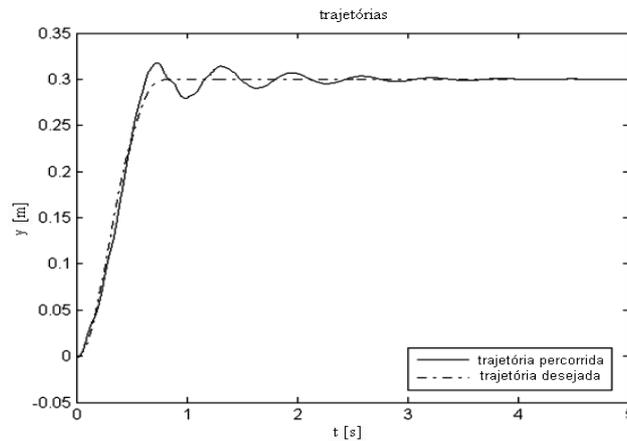


Figura 6.8 – Trajetória do sistema e trajetória desejada do terminal do elo flexível.

A última simulação para este controle, Figuras 6.9, 6.10 e 6.11, refere-se a equação (6.5), cuja lei de controle inclui os atuadores e sensores piezelétricos. A posição e tamanho do material piezelétrico são considerados $x_a = 0$ e $l_a = 0,2m$, respectivamente. Aqui percebe-se uma convergência mais rápida a zero e uma considerável redução nas amplitudes dos modos de vibração.

A trajetória do sistema e a desejada para o terminal do elo flexível, com respeito

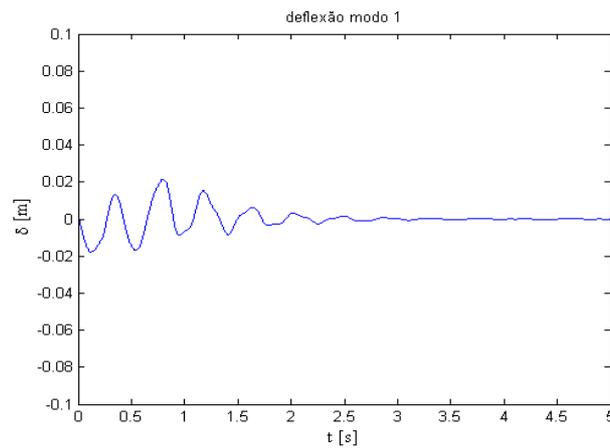


Figura 6.9 – Deslocamento do primeiro modo para o sistema amortecido com controle piezelétrico.

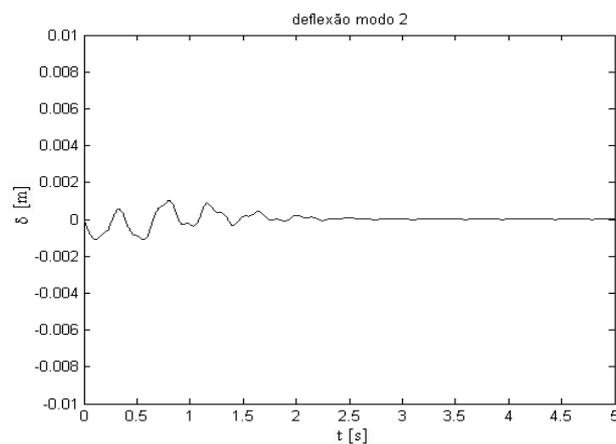


Figura 6.10 – Deslocamento do segundo modo para o sistema amortecido com controle piezelétrico.

somente ao eixo y (em coordenadas cartesianas), do modelo com controlador piezelétrico, são mostradas na Figura 6.12.

Vê-se com estes resultados o bom desempenho do controle de vibrações induzidas no elo flexível, deste que tenha as condições iniciais bem definidas. No trabalho experimental de [De Luca et al., 1990] o erro nas juntas foi em torno de 4° . Nas simulações deste trabalho, Figuras 6.5 e 6.7, percebe-se que o erro máximo é menor que $0,04rad$, o que é bem menos do que 4° .

A proposta na próxima técnica de controle é propor um controle que permita con-

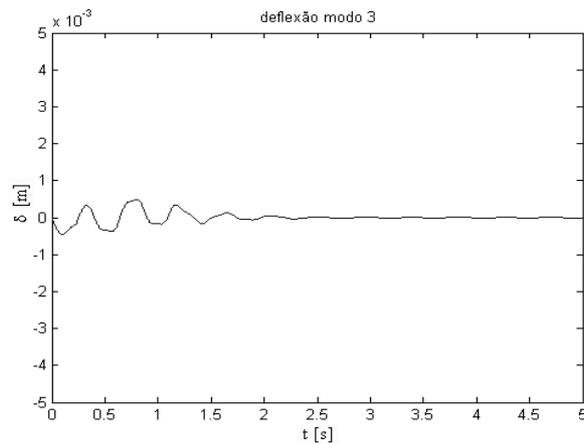


Figura 6.11 – Deslocamento do terceiro modo para o sistema amortecido com controle piezelétrico.

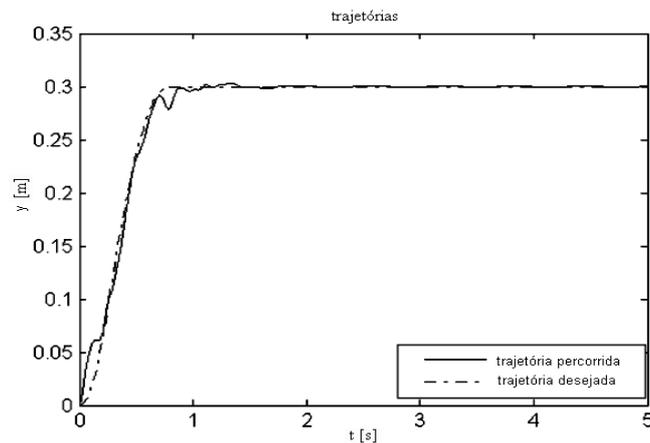


Figura 6.12 – Trajetória do sistema e trajetória desejada do terminal do elo flexível.

trolar bem o sistema mesmo que ocorram imprevistos ao longo da trajetória do robô.

6.2 Simulações pela metodologia SDRE

A proposta de controle desta técnica considera uma posição inicial \mathbf{z}_0 fixa e procura levar a parte final do manipulador para uma posição desejada, também fixa. As trajetórias das juntas permanecem livres, o que implica que o controle subótimo proposto maneja os torques das juntas para que elas percorram trajetórias de mínima energia. O problema de controle subótimo (3.40) e (3.41), para soluções ótimas ponto a ponto, pode ser reformulado

em função de $\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{z} & \dot{\mathbf{z}} \end{bmatrix}^T$: minimizar o funcional de custo quadrático

$$\mathbf{J}_z = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \mathbf{Z}^T \mathbf{Q}_e \mathbf{Z} + \mathbf{u}^T \mathbf{R}_e \mathbf{u} dt \quad (6.6)$$

em relação ao estado \mathbf{x} e o controle \mathbf{u} , sujeito ao sistema de restrições não-lineares

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{Z}} &= \mathbf{A}_e(x) \mathbf{Z} + \mathbf{B}_e(x) \mathbf{u}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}_e(x) \mathbf{Z}, \\ \mathbf{Z}(0) &= \mathbf{Z}_0, \\ \mathbf{Z}(\infty) &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

As matrizes com coeficientes dependentes do estado são:

$$\mathbf{A}_e = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{B}^{-1} \mathbf{K}_e & -\mathbf{B}^{-1} [\mathbf{C} + \mathbf{D}] \end{bmatrix}, \mathbf{B}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B}^{-1} \end{bmatrix}, \quad (6.8)$$

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \theta_1 - \theta_{1d} \\ \theta_2 - \theta_{2d} \\ \delta_1 - \delta_{1d} \\ \delta_2 - \delta_{2d} \end{bmatrix}, \dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_{1d} \\ \dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_{2d} \\ \dot{\delta}_1 - \dot{\delta}_{1d} \\ \dot{\delta}_2 - \dot{\delta}_{2d} \end{bmatrix}. \quad (6.9)$$

O índice d é usado para representar o ponto desejado, por exemplo θ_{1d} . As matrizes $\mathbf{Q}_e = \mathbf{C}_e^T \mathbf{C}_e$ e $\mathbf{C}_e = \text{diag}(\sqrt{q_{ii}})$. As dimensões das matrizes do modelo são: $\mathbf{Z} \in \mathfrak{R}^8$, $\mathbf{u} \in \mathfrak{R}^4$, $\mathbf{y} \in \mathfrak{R}^8$, $\mathbf{A}_e(x) \in \mathfrak{R}^{8 \times 8}$, $\mathbf{B}_e(x) \in \mathfrak{R}^{8 \times 4}$ e $\mathbf{R}_e(x) \in \mathfrak{R}^{4 \times 4}$.

Assumindo as condições iniciais, o próximo estado $\mathbf{Z}(t)$ para cada passo é obtido considerando o controle pelo torque dos motores e pelos atuadores piezelétricos, como é mostrado na Figura 4.1 do capítulo 4. A solução do problema do controle é dado pelas equações algébricas de Riccati independentes do estado, pois as matrizes de estado e do funcional são assumidas constantes a cada passo de integração.

As resultados foram obtidos através do Matlab, onde as equações foram integradas pelo método Runge-Kutta de quarta ordem. As equações de Riccati foram resolvidas usando a função "LQR" do Matlab. Foram considerados dois modos de vibração no sistema e dois no controle. Foram escolhidos os valores das matrizes de peso $\mathbf{Q}_e = \text{diag}(500, \dots, 500)$ e

$$\mathbf{R}_e = \text{diag}(1, \dots, 1).$$

Inicialmente, na Figura 6.13, apresenta-se a resposta do sistema, para o braço flexível, sem controle de vibrações.

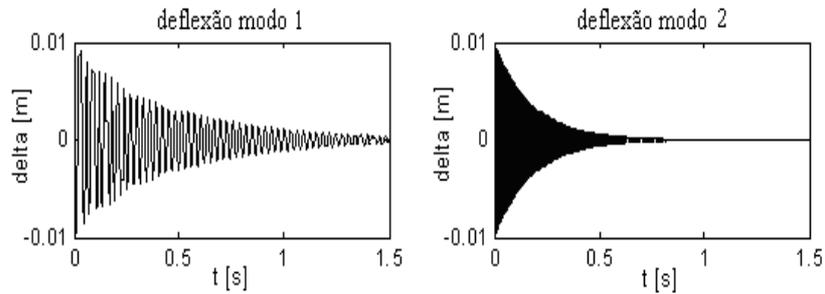


Figura 6.13 – Deflexão dos modos 1 e 2 sem controle.

Numa primeira simulação com controle, Figura 6.15, considera-se uma trajetória livre para as juntas que parte de um ponto inicial $\theta_1 = 5\pi/4$, $\theta_2 = -\pi$ e para as amplitudes $\delta_1 = \delta_2 = 0,01$. Nesta posição os dois elos do manipulador estão sobrepostos em $\pi/4$, em coordenadas cartesianas, como mostrado na Figura 6.14. O ponto desejado é $\theta_1 = \pi/4$, $\theta_2 = 0$ e é claro $\delta_1 = \delta_2 = 0$. Isto em coordenadas cartesianas representa o ponto máximo que o manipulador alcança em um ângulo de $\pi/4$ do eixo x , também mostrado na Figura 6.15. As velocidades iniciais e finais foram assumidas como sendo zero. Um novo sistema de equações lineares de Riccati é resolvido a cada $1ms$.

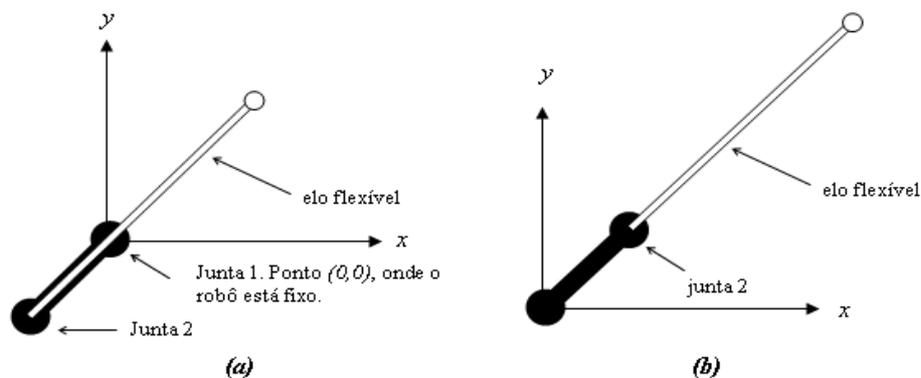


Figura 6.14 – Posição inicial (a) e final (b) do braço robótico.

A Figura 6.16, mostra o controle de vibrações no elo flexível com o ganho da realimentação do torque. As condições iniciais são as mesmas da simulação acima, que em

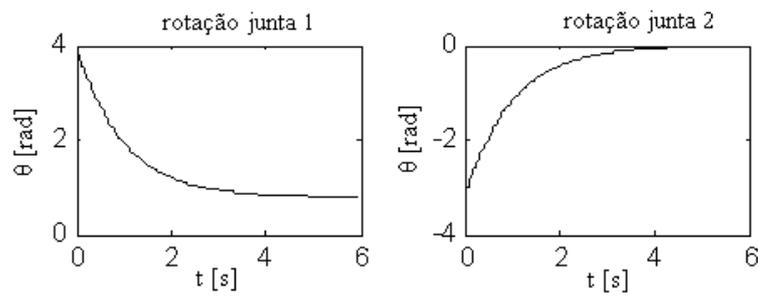


Figura 6.15 – Trajetória das juntas 1 e 2.

coordenadas cartesianas são $x_0 = y_0 = 0,495$ e o ponto desejado é $x_d = y_d = 0,92$

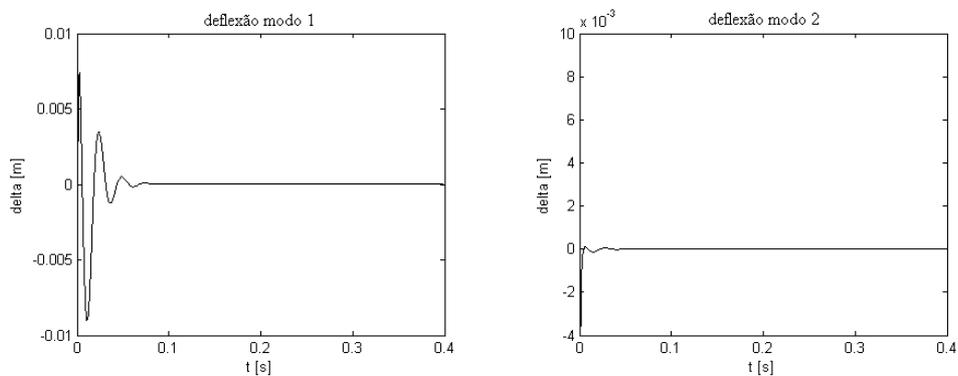


Figura 6.16 – Resposta do sistema para o elo flexível, com controle de torque, modos 1 e 2.

A trajetória do robô em coordenadas cartesianas é mostrada na Figura 6.17. Percebe-se que no início da trajetória o ponto final do robô vibra, mas logo após as vibrações cessam.

O ganho da realimentação \mathbf{u} , considerando somente o controle pelo torque dos motores, é mostrado na Figura 6.18

Na próxima simulação Figura 6.19, apresenta-se o controle das vibrações do elo flexível através do controle de torque e do ganho de tensão elétrica dos atuadores piezelétricos. As condições iniciais e o ponto desejado são os mesmos usados acima. O ganho do piezo-cerâmico $\mathbf{K}_c = \text{diag}(10, 10)$.

Estes resultados mostram bom desempenho do controle de vibrações induzidas no elo flexível. As oscilações cessam em menos de um décimo de segundo. Em trabalhos experimentais como os de [Choi et al., 1999] e [Abreu et al., 2003] percebe-se que as oscilações

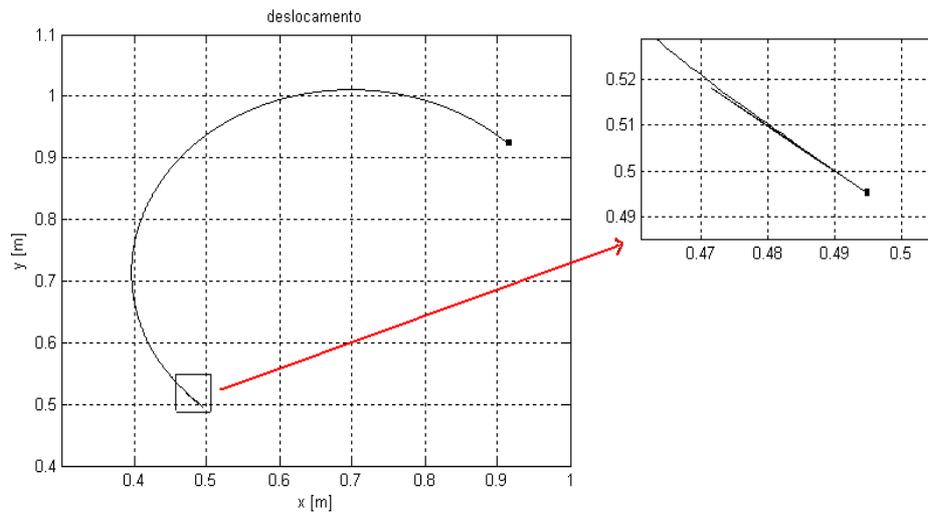


Figura 6.17 – Trejetórias em coordenadas espaciais do ponto final do braço.

O ponto inicial e final foram marcados com retângulos.

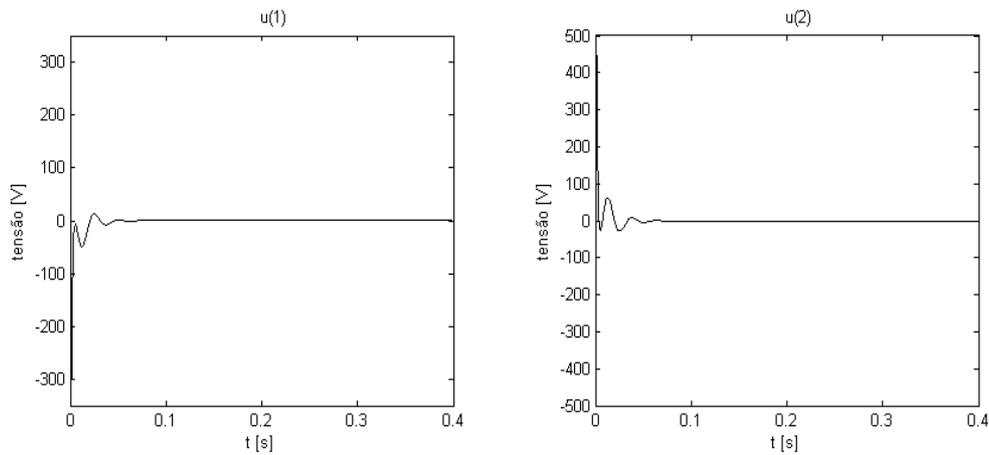


Figura 6.18 – Ganho de tensão elétrica para os modos 1 e 2.

necessitam de mais tempo para cessarem. Porém, em [Choi et al., 1999] a parte terminal do robô passa por uma trajetória desejada, o que não foi o objetivo do controle SDRE neste trabalho. Buscou-se percorrer uma trajetória de mínima energia gasta pelo sistema, dadas as condições iniciais e o ponto desejado.

Uma última simulação, Figura 6.21, foi feita para testar a robustez deste método de controle. Foram mudadas as condições iniciais $\theta_1 = \theta_2 = 0$, $\delta_1 = \delta_2 = 0,01$ e finais $\theta_1 = \theta_2 = 1$, $\delta_1 = \delta_2 = 0$. A posição inicial e final do manipulador são mostradas na Figura 6.20.

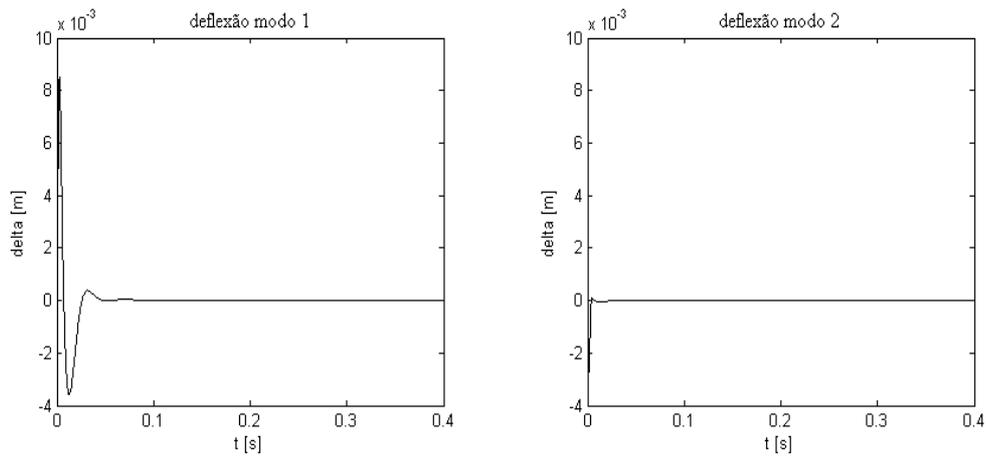


Figura 6.19 – Resposta do elo flexível usando controle de torque e piezelétrico.

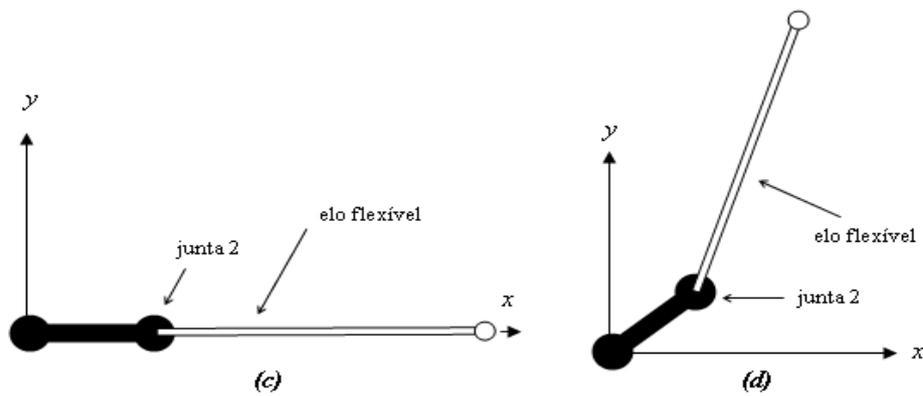


Figura 6.20 – Posição inicial (c) e final (d) do braço robótico.

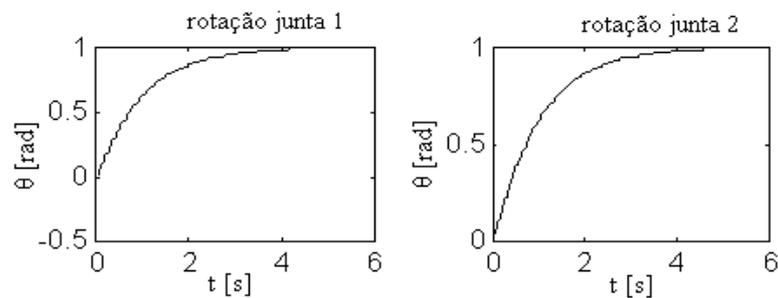


Figura 6.21 – Trajetória das juntas 1 e 2.

A escolha dos valores das matrizes de peso \mathbf{Q}_e e \mathbf{R}_e é muito importante. Uma boa escolha pode acrescentar eficiência ao controle. Além das simulações feitas acima, também

foram testados algumas matrizes \mathbf{Q}_e e \mathbf{R}_e com valores diferentes. Num primeiro momento, dividiu-se os valores de \mathbf{Q}_e por 50, resultando em $\mathbf{Q}_e = \text{diag}(10, \dots, 10)$. Com estes valores de \mathbf{Q}_e , o controle pelo torque dos motores é menos eficiente do que o mostrado acima com valores $\mathbf{Q}_e = \text{diag}(500, \dots, 500)$, como se pode perceber na Figura 6.22.

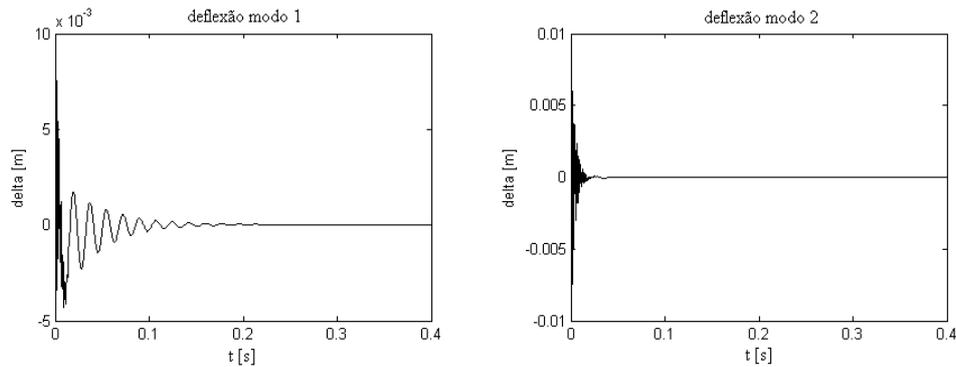


Figura 6.22 – Resposta do elo flexível usando controle de torque.

Num segundo momento, multiplicou-se os valores de \mathbf{Q}_e por 20, resultando em $\mathbf{Q}_e = \text{diag}(10000, \dots, 10000)$. Assim, o controle pelo torque dos motores também apresenta menos eficiência do que o mostrado acima com valores $\mathbf{Q}_e = \text{diag}(500, \dots, 500)$, como mostrado na Figura 6.23.

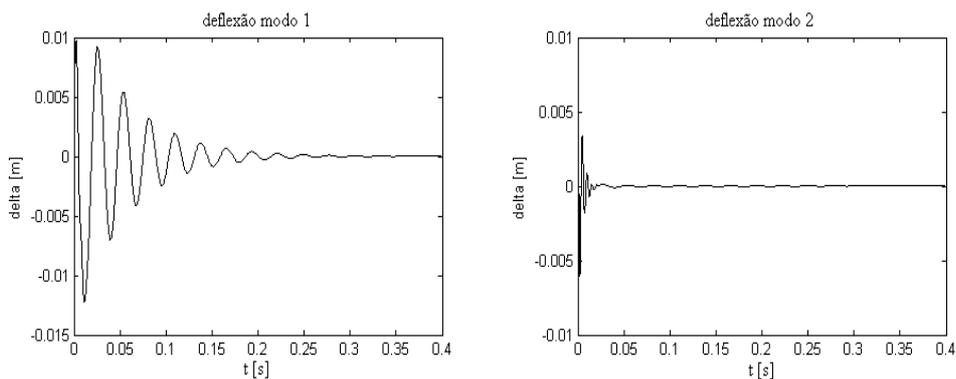


Figura 6.23 – Resposta do elo flexível usando controle de torque.

Em simulações adicionais, não apresentadas aqui para simplificar os resultados, percebe-se que ao aumentar os pesos do estado, matriz \mathbf{Q}_e , e querendo manter a mesma performance no controle, é necessário também aumentar os pesos do controle, matriz \mathbf{R}_e . Se diminuir os valores num, deve-se também diminuir no outro. Além disso, chegou-se a con-

clusão que para o modelo deste trabalho, os valores de \mathbf{Q}_e que levam o sistema ao controle num curto espaço de tempo estão em torno de $\mathbf{Q}_e = \text{diag}(500, \dots, 500)$, bem mais ou bem menos do que estes, o controle perde eficiência.

6.2.1 Análise de estabilidade

Para análise de estabilidade consideremos o sistema sem controle

$$\dot{\mathbf{x}} = f(x). \quad (6.10)$$

A estabilidade deste sistema pode ser examinada em torno da origem através da linearização. Se for assumido que $f(x) \in C^1$ e que o equilíbrio de interesse é a origem, então é possível verificar a estabilidade local assintótica através da aproximação linear de $f(x)$ em $x = 0$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathbf{A}_e(x)\mathbf{x}, \\ w(x, u) &= \mathbf{B}_e(x)\mathbf{u} \\ \mathbf{J}_f &= \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_{x=0}, \quad \mathbf{J}_w = \left[\frac{\partial w}{\partial u} \right]_{x=0}, \end{aligned} \quad (6.11)$$

onde \mathbf{J}_f e \mathbf{J}_w são matrizes Jacobianas de $f(x)$ e $w(u, x)$ em $x = 0$, respectivamente.

Se os autovalores de \mathbf{J}_f tem parte real negativa, o ponto $x = 0$ é um ponto de equilíbrio localmente estável. Se uma das partes reais for positiva, então o ponto $x = 0$ é um ponto de equilíbrio instável. Esta análise de estabilidade não incluirá valores dos autovalores com parte real nula.

Calculando a matriz $[\mathbf{J}_f]_{x=0}$ para o sistema obtem-se:

$$\mathbf{J}_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 335934.58967 & 8741054.76936 & 0 & 0 & 32.48884 & 87.38377 \\ 0 & 0 & -769507.72196 & -20022675.09759 & 0 & 0 & -74.420476 & -200.165418 \\ 0 & 0 & 321112.53138 & 10281899.240837 & 0 & 0 & 31.05537 & 102.787497 \\ 0 & 0 & 110149.17757 & 939577.59975 & 0 & 0 & 10.65272 & 9.39289 \end{bmatrix}.$$

Os autovalores desta matriz são $(0, 0, 0, 0, 1354.47497, -1282.7422, -15.64224 + 691.33802I, -15.64224 - 691.33802I)$. Percebe-se daí que há um autovalor com parte real positiva, o

que significa que a origem é um ponto instável. Da parametrização dos coeficientes dependentes do estado $f(x) = \mathbf{A}_e(x)\mathbf{x}$ obtem-se que $\mathbf{A}_e(0) = [\mathbf{J}_f]_{x=0}$ (isto é mostrado no Lema do capítulo 3) e de $w(x, u) = \mathbf{B}_e(x)\mathbf{u}$ obtem-se $\mathbf{B}_e(0) = [\mathbf{J}_w]_{x=0}$, de forma que a condição necessária para estabilidade local é que o par $(\mathbf{J}_f, \mathbf{J}_w)$ ou $(\mathbf{A}_e(0), \mathbf{B}_e(0))$ precisa ser estabilizável [Shawky et al., 2007]. Vê-se claramente daí que é exigida a controlabilidade do sistema na origem.

O cálculo da aproximação linear $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_e\mathbf{x} + \mathbf{B}_e\mathbf{u}$, ponto a ponto, é controlável e observável. Para o sistema considerado no trabalho, estas propriedades foram verificadas. Um sistema pode ser assintoticamente localmente estabilizado pela forma fechada do estado $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_e\mathbf{x} - \mathbf{B}_e\mathbf{S}_e\mathbf{x}$.

Uma observação importante é que, para verificar a controlabilidade requerida acima é preciso trabalhar com várias casas decimais de precisão no cálculo, no caso, para atingir o *posto* = 8. Visto que o passo de integração do SDRE é pequeno, a precisão usada no cálculo da controlabilidade deve ser bem maior do que a apresentada no texto.

7. CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, procurou-se desenvolver técnicas de controle de trajetória dos elementos de um robô com braços flexíveis. Esta é uma das áreas de pesquisa atuais em robótica [Hu e Ma, 2006], cuja aplicabilidade está na possibilidade de projetos de manipuladores construídos com materiais leves, preservando a força e a precisão, aumentando a agilidade e diminuindo o consumo de energia. Estes requisitos são a realidade para o uso em missões espaciais ou tarefas que exijam leveza, precisão e agilidade.

A formulação dinâmica e do controle deste trabalho podem ser aplicadas a modelos em três dimensões e com mais de um elemento flexível, porém, por opção, foi trabalhado com o caso de um robô planar com um braço rígido e um braço flexível. Em trabalhos anteriores como [De Luca e Siciliano, 1991] e [De Luca et al., 1990], o torque dos motores é utilizado como atuador para controlar o ângulo das juntas e também para controlar as vibrações dos braços flexíveis. No entanto, os modos de alta frequência não podem ser eliminados pela ação dos motores, pois as vibrações de alta frequência têm período menor do que o período do sistema de controle. Num trabalho mais recente [Shin e Choi, 2000], o torque dos motores é utilizado somente para o ângulo das juntas e as vibrações dos braços são controladas por sensores e atuadores piezelétricos. No trabalho precedente [Bottega, 2004], assim como neste, obteve-se um controlador que utiliza o torque dos motores para o controle do ângulo das juntas e vibrações de frequência menor que as do sistema de controle de torque. Para controlar vibrações de frequências não alcançadas pelo controle de torque, utilizou-se atuadores e sensores piezelétricos. Este controle possibilita um melhor aproveitamento do torque dos motores e da atuação do material piezelétrico.

Além da busca por técnicas de controle, métodos de otimização para a localização dos atuadores/sensores e ganho de retroalimentação foram obtidos, baseados na maximização da energia dissipada devido à ação do controle. Uma função custo foi obtida, também utilizada no trabalho de [Bottega, 2004], incorporou nas restrições o custo do material piezelétrico utilizado como atuador e sensor que pode ser em peso, em custo econômico ou ambos,

procurando uma estrutura mais leve e ágil sem perda de precisão e com menor custo. Outra foi simplesmente considerar o ganho do controle piezelétrico e a maximização de energia dissipada. Além disso, outra forma de otimização foi proposta, fundamentada em [Sun et al., 2004], que visa satisfazer algumas condições físicas específicas para melhor posicionamento e tamanho do material piezelétrico.

O modelo dinâmico do robô foi obtido através das equações de Lagrange, onde o braço flexível, com sensores e atuadores piezelétricos fixos, foi modelado como uma viga de Euler-Bernoulli, podendo ser não-prismática. Geralmente, as variações de massa e rigidez do braço do robô, decorrente da adição dos atuadores e sensores são desconsideradas, porém estas variações interferem na frequência natural dos modos de deslocamento. Em virtude disto, modelou-se o braço flexível escalonado, pelo método de elementos finitos. Os modos de vibração foram obtidos por interpolação do valores resultantes dos autovetores. Foram testadas três diferentes formas de interpolação: através de polinômios de Hermite, polinômios mistos de Hermite e Lagrange e interpolação por mínimos quadrados. O critério adotado para escolha da melhor interpolação foi o erro gerado entre as autofunções computadas e o Quociente de Rayleigh.

Simulações foram realizadas para duas técnicas de controle diferentes. Primeiramente, uma extensão do trabalho de Bottega (2004), foi implementada em *MatLab/Simulink* permitindo uma simulação em tempo real do sistema sem o controle das vibrações, com o controle de torque e com controle de torque e piezelétrico para vibrações, com mais modos no modelo dinâmico para a verificação da robustez do modelo de controle e a possibilidade de vigas não-prismáticas. Esta técnica foi testada em várias situações: utilizando uma trajetória de velocidade trapezoidal, simulando um deslocamento rápido de um ponto a outro do espaço de trabalho do robô, permitindo a observação das vibrações induzidas no braço flexível durante o estado estacionário; e uma trajetória específica para observar a eficiência do controle no estado transiente. Numa segunda etapa, a técnica de controle foi modificada para controle através das equações de Riccati dependentes do estado. Pelas simulações, percebeu-se uma melhora no tempo gasto para amenizar as vibrações, em relação ao modelo anterior, porém ainda não se previu o seguimento do manipulador por uma trajetória desejada, apenas de um ponto inicial a um final.

Em ambos os casos, através das simulações, percebeu-se uma redução significativa

das deflexões no elemento terminal do robô, quando adicionado controle de torque e o controle piezelétrico. Na otimização de tamanho e localização dos atuadores e sensores, mostrou-se possível encontrar uma posição e tamanho representando um equilíbrio no custo e benefício dos atuadores e sensores piezelétricos, resultando numa estrutura otimizada que realize determinadas tarefas com agilidade e precisão com um menor custo, e com o cuidado de não gerar instabilidades no sistema.

Os resultados das simulações apresentaram-se compatíveis com resultados experimentais em sistemas similares verificados na bibliografia. No entanto, para uma validação definitiva do modelo de controle, deve-se realizar experimentos num modelo real do manipulador robótico aqui apresentado, em trabalhos futuros.

Neste trabalho, utilizou-se um modelo simplificado de robô, onde o espaço de trabalho é restrito a duas dimensões o que é adequado para a formulação da lei de controle e da otimização. Porém, a grande maioria dos manipuladores trabalham num espaço tridimensional, geralmente obtido através da composição de movimentos planares entre um braço e outro em direções diferentes. Portanto, para cada tipo específico de robô, deve-se analisar suas características físicas, observando a necessidade da formulação de modelos mais detalhados em três dimensões, considerando efeitos torcionais e gravitacionais, o que pode ser obtido com a mesma formulação das equações do movimento e do deslocamento aqui apresentadas, estendidas para o modelo em três dimensões. Um modelamento mais realista dos mancais também é necessário, incluindo o fenômeno do atrito.

Como contribuição, este trabalho visa mostrar a possibilidade do projeto de manipuladores robóticos mais leves e ágeis e com menor consumo de energia através do uso de materiais inteligentes como os materiais piezelétricos em conjunto com técnicas de otimização estrutural, pouco usadas nesta área. A formulação aqui mostrada tem o potencial para servir como base para obtenção de modelos mais complexos de robôs com características específicas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abreu, G. L. C. M., Ribeiro, J. F., and Steffen, V. D., 2003. "Experiments on optimal vibration control of a flexible beam containing piezoelectric sensors and actuators", **Shock and Vibration**, vol. 10, pp. 283–300.

Agnes, G. S., 1995. "Development of a model for simultaneous active and passive piezoelectric vibration suppression", **Journal Intelligent Material. System. Structures**, vol. 6(4), pp. 482–487.

Arimoto, S., 1996. "**Control Theory of Non-Linear Mechanical Systems**". Oxford Clarendon Press, London.

Arteaga, A. M., 1998. "On the properties of a dynamic model of flexible robot manipulators", **ASME Journal of Dynamics Systems, Measurement and Control**, vol. 120, pp. 8–14.

Arteaga, A. M. and Siciliano, B., 2000. "On tracking control of flexible robot arms", **IEEE Transactions on Automatic Control**, vol. 45, pp. 520–527.

Banks, H. T., Lewis, B. M., and Tram, H. T., 2007. "Nonlinear feedback controllers and compensators: a state-dependent Riccati equation approach", **Comput. Optim. Appl.**, vol. 37, pp. 177–218.

Banks, H. T., Smith, R. C., and Wang, Y., 1996. "**Smart Material Structures: Modeling, Estimation and Control**". John Wiley & Sons, Paris.

Bao Xaradan, V. V. and Varadan, V. K., 1995. "Active control of sound transmission through a plate using a piezoelectric actuator and sensor", **Smart Material Structures**, vol. 4(4), pp. 231–239.

Bathe, J. K. and Wilson, E. L., 1976. "**Numerical Methods in Finite Element Analysis**". Prentice Hall, New Jersey.

Bellezza, F., Lanari, L., and Ulivi, G., 1990, Exact Modeling of the Slewing Flexible Link. Report In Proc. 1990 IEEE Int. Conf. Robotics Automatotion, Cincinnati/OH, pp. 734-739.

Bellman, R., 1957. "**Dynamic Programming**". Princeton, New Jersey.

Berry, A., Charette, F., and Guigou, C., 1995, Volume velocity sensors for plates. Report 95-WA/NCA-7, San Fransisco CA.

Book, W. J., 1984. "Recursive Lagrangian Dynamics of Flexible Manipulator Arms", **International Journal Robotics Research**, vol. 3(3), pp. 87–101.

Bottega, V., 2004. "**Controle e otimização Estrutural de Manipuladores Robóticos com Elementos flexíveis usando atuadores e sensores piezelétricos**", Tese de doutorado, Programa de pós-graduação em Engenharia Mecânica, UFRGS, Porto Alegre.

Bottega, V. and Fonseca, J. S. O., 2003, Controle da trajetória de Vibrações de Manipuladores Robóticos com Elementos flexíveis. Technical Report In 2º Congresso Temático de Aplicações de Dinâmica e Controle, São José dos campos.

Canudas De Wit, C., Siciliano, B., and Bastin, G., 1996. "**Theory of Robot Control**". Springer-Verlag, London.

Cetinkunt, S. and Yu, W. L., 1991. "Closed Loop Behavior of a Feedback onrolled Flexible Arm: A Comparative Study", **International Journal Robotics research**, vol. 10(3), pp. 263–275.

Chattopadhyay, A. and Seeley, C. E., 1994. "Multiobjective design procedure for control of structures using piezoeletric materials", **Journal Intelligent Material System Structures**, vol. 5(3), pp. 403–411.

Chen, P. C. and Chopra, I., 1996. "Induced strain actuation of composite beams and rotor blades with embedded piezoceramic elements", **Smart Material Structures**, vol. 5(1), pp. 35–48.

Chiacchio, P., Chiaverini, S., and Siciliano, B., 1996. "Direct and inverse kinematics for coordinate motion tasks of a two-manipulator system", **ASME J. of Dynamics Systems, Measurement, and Control**, vol. 118, pp. 691–697.

Chiaverini, S. and Sciavicco, S., 1993. "The parallel approach to force/position control of robotic manipulators", **IEEE Trans. on Robotics and Automation**, vol. 9, pp. 361–373.

Choi, S. and Shin, H., 1996. "A Hybrid Actuator Scheme for Robust Position Control of a Flexible Single-Link Manipulator", **Jornal of Robotic Systems**, vol. 13(6), pp. 359–370.

Choi, S. B., Cho, S. S., Shin, C. H., and Kim, H. K., 1999. "Quantitative feedback theory control of a single-link flexible manipulator featuring piezoelectric actuator and sensor", **Smart Material Structures**, vol. 8, pp. 338–349.

Chou, C. S. and Dai, C. L., 1994. "Active control of a vibrating circular plate", **ASME Active Control of Vibration and Noise**, vol. E(75), pp. 79–85.

Clive, D. L. and Shames, 1973. "**Solid Mechanics. A variational approach**". McGraw-Hill, New York.

Crawley, E. F., 1994. "Intelligent structures for aerospace: a technology overview and assessment", **AIAA Journal**, vol. 32(8), pp. 1689–1699.

Crawley, E. F. and De Luis, J., 1987. "Use of Piezoelectric Actuators as Elements of Intelligent Structures", **AIAA Journal**, vol. 25, pp. 1373–1385.

Curie, P. and Curie, J., 1880. "Development by pressure of polar electricity in hemihedral crystals with inclined faces", **Bull. soc. min. de France**, vol. 3, pp. 90–93.

De Luca, A., Lanari, L., Lucibello, S., and Panzieri, S., 1990, Control experiments on a two-link robot with a flexible forearm. Report In 29th IEEE Conf. Decision and Control, Honolulu, pp. 5-7.

De Luca, A. and Panzieri, S., 1994. "An iterative scheme for learning gravity compensation in flexible robot arms", **Automatica**, vol. 30, pp. 993–1002.

De Luca, A. and Siciliano, B., 1989. "Trajectory Control of a Nonlinear One-link Flexible Arm", **International Journal Control**, vol. 50, pp. 1699–1716.

De Luca, A. and Siciliano, B., 1990, Dynamic Modeling of Multi-link Flexible Robot Arms. Report In Proc. IFIP Int. Conf. on Modeling the Innovation, Roma, pp. 193-200.

De Luca, A. and Siciliano, B., 1991. "Closed-form dynamic model of planar multilink lightweight robots", **IEEE Trans. on Systems, man and Cybernetics**, vol. 21, pp. 826–839.

De Luca, A. and Siciliano, B., 1993a. "Inversion-based nonlinear control of robot arms with flexible links", **AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics**, vol. 16, pp. 1169–1176.

De Luca, A. and Siciliano, B., 1993b. "Regulation of flexible arms under gravity", **IEEE Trans. on Robotics and Automation**, vol. 9, pp. 463–467.

De Schutter, J. and Van Brussel, H., 1988. "Compliant robot motion II. A control based on external control loops", **International Journal of Robotics Research**, vol. 7(4), pp. 18–33.

Denoyer, K. K. e Kwak, M. K., 1996. "Dynamic modelling and vibration suppression of a slewing structure utilizing piezoelectric sensor and actuators", **Journal of Sound and Vibration**, vol. 189(1), pp. 13–31.

Dubowsky, S. and Papadopoulos, E., 1993. "The kinematics, dynamics, and control of free-flying and free-floating space robotic systems", **IEEE Trans. on Robotics and Automation**, vol. 9, pp. 531–543.

Fakhroo, F., 1995, Optimal location of piezoelectric actuators for vibration suppression of flexible structures. Report In Proc. SPIE Int. Soc. for Optical Eng., San Diego, pp. 304-313.

Fatikov, S. and Rembold, U., 1996. "Automated microrobot-based desktop station for micro assembly and handling of microobjects", **IEEE Symp. on Emerging Tech. and Factory Automation**, vol. ETFA 2, pp. 586-592.

Fossen, T. L., 1996. "**Guidance and control of ocean vehicles**". Press and Wiley, Chichester.

Fukami, A., Yano, M., Tokuda, H., Ohki, M., and Kizu, R., 1995. "Development of piezoelectric atuators and sensors for electronically controlled suspension", **International Journal of Vehicle Des.**, vol. 15(3-5), pp. 348-357.

Fuller, C. R., Elliot, S. J., and Nelson, P. A., 1997. "**Active Control of Vibration**". Academic Press, London.

Gabert, U. e Shulz, I., 1996. "Optimal placement of piezoelectric actuators in vibration control of adaptative structures", **ASME Int.Mech. Eng. Congress and Exposition**, vol. 93, pp. 271-277.

Galeazzi, C. and Morganti, F., 1996. "Analysis and control of microvibrations on ARTEMIS satellite", **Journal of Intelligent Material System and Structures**, vol. 7(2), pp. 216-226.

Galicki, M., 2007. "Adaptive path-constrained control of a robotic manipulator in a task space", **Robotica**, vol. 25, pp. 103-112.

Goldstein, H., 1964. "**Classical Mechanics**". Add. Wesley, Cambridge.

Halim, D. and Moheimani, S. O. R., 2003. "An optimization approach to optimal placement of collocated piezoelectric actuators and sensors on a thin plate", **Mechatronics**, vol. 13, pp. 27-47.

Hall, S., Crawley, E. F., How, J. P., and Ward, B., 1991. "Hierarchic control architecture for intelligent structures", **Journal of Guidance, Control and Dynamics**, vol. 14(3), pp. 503–512.

Hannaford, B., 1989. "A design framework for teleoperators with kinesthetic feedback", **IEEE Trans. on Robotics and Automation**, vol. 5, pp. 426–430.

Hastings, G. G. and Book, W. J., 1987. "A Linear Dynamic Model for Flexible Robotic Manipulators", **IEEE Contr. Syst. Mag.**, vol. 7(3), pp. 61–64.

Hirzinger, G., Brunner, B., Dietrich, J., and Heindl, J., 1993. "Sensor-based space robotics-ROTEX and its telerobotic features", **IEEE Transaction on Robotics and Automation**, vol. 9, pp. 649–663.

Hogan, N., 1985. "Impedance control: An approach to manipulation, Parts1-111", **ASME J. of Dynamics Systems, Measurement, and Control**, vol. 107, pp. 1–24.

Hu, Q. and Ma, G., 2006. "Variable structure maneuvering control and vibration suppression for flexible spacecraft subject to input nonlinearities", **Institute of Physics Publishing, Smart Mater. Struct.**, vol. 15, pp. 1899–1911.

Hutchinson, S., Hager, G., and Corke, P., 1996. "A tutorial on visual servo control", **IEEE Trans. on Robotics and Automation**, vol. 12, pp. 651–670.

Hwang, W. S., Hwang, W., and Park, H. C., 1993, Integration of composite structural desing with the intelligent system concept. Report In AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC 34th Structures, Structural Dyn. and Mat. Conf., Lajolla, pp. 3534-3539.

Indri, M. and Tornamde, A., 1996. "Robust regulation and trajectory tracking for flexible robots by using piezoelectric actuators", **Adv. Robotics**, vol. 10(3), pp. 265–282.

Ip, K. H. and Tse, P. C., 2001. "Optimal configuration of piezoelectric patch for vibration control of isotropic rectangular plates", **Institute of Physics Publishing, Smart Mater. Struct.**, vol. 10, pp. 395–403.

Kalaycioglu, S., Giray, M., and Asmer, H., 1996. "Vibration control of flexible manipulators using smart structures", **ASME Proc. 3rd Biennial Joint Conf. on Eng. Syst. Design and Anal.**, vol. 74(2), pp. 221–227.

Kelley, A. J. and Salcudean, S. E., 1994, The development of a force feedback mouse and its integration into a graphical user interface. Report In Proc. ASME Int. Mechanical Engineering Congr. Exposition, Chicago, vol. 55-1-CSC, pp. 287-294.

Kim, J., Varadan, V. V., and Varadan, V. K., 1995. "Finite element optimization methods for the active control of radiated sound from a plate structure", **Smart Material and Structures**, vol. 4(4), pp. 318–326.

Kondoh, S., Yatomi, C., and Inoue, K., 1990. "The positioning of sensors and actuators in the vibration control of flexible structures", **International Journal Series III**, vol. 33(2), pp. 175–181.

Kozel, D. and Koivo, A. J., 1991. "A general force/torque relationship and kinematic representation for flexible link manipulators", **Journal of Robotic Systems**, vol. 8(4), pp. 531–556.

Kwak, M. K. and Sciulli, D., 1996. "Fuzzy-logic based vibration suppression control experiments on active structures", **Journal of Sound and Vibration**, vol. 191(1), pp. 15–28.

La Salle, J. P. and Lefschetz, S., 1961. "**Stability by Lyapunov's Direct Method**". Academic Press, New York.

Lalanne, P., Berthier, P., and Derhagopian, J., 1983. "**Mechanical Vibration for Engineers**". Wiley, New York.

Lammerts, I. M. M., Veldpaus, F. E., Van De Molengraft, J. G., and Kok, J. J., 1995. "Adaptive computed reference computed torque control of flexible robots", **ASME Journal of Dynamics Systems, Measurement, and Control**, vol. 117, pp. 31–36.

Lee, P. C. Y. and Yu, J. D., 1996. "Governing equations of piezoelectric plates with graded properties across the thickness", **IEEE Int. Freq. Control Symp.**, pages 623–631.

Li, Y., Liu, Y., and Liu, X., 2005. "Active Vibration Control of a Modular Robot Combining a Back-Propagation Neural Network with a Genetic Algorithm", **Journal of Vibration and Control OnlineFirst**, vol. January(12), pp. 1–15.

Li, Y., Onoda, J., and Minesugi, K., 2002. "Simultaneous optimization of piezoelectric actuator placement and feedback for vibration suppression", **Acta Astronautica**, vol. 56(6), pp. 335–341.

Li, Y. Y., Cheng, L., and Li, P., 2003. "Modeling and Vibration control of a plate coupled with piezoelectric material", **Elsevier, Composite Structures**, vol. 62, pp. 155–162.

Lin, Y., Sontag, E. D., and Wang, Y., 1996a. "A smooth converse Lyapunov Theorem for robust stability", **SIAM Journal Control & Optimization**, vol. 34(1), pp. 1–34.

Lin, Y. J., Wen, C., Choi, B., and Saravanos, D., 1996b. "Smart structure technology for rotor blade tip clearance using a beam model", **ASME Int. Mech. Eng. Congress and Exposition**, vol. DE 93, pp. 279–288.

Liu, X. and Begg, D. W., 2000. "On simultaneous optimisation of smart structures - part I: theory", **Computer Methods in Applied Mechanics Engenier**, vol. 184, pp. 15–24.

Luenberger, D. G., 1976. "**Optimization by Vector Space Methods**". John Wiley and Sons, New York.

Mason, W. P., 1981. "Piezoelectricity, its history and applications", **Journal Acoust. Soc. of Am.**, vol. 70(6), pp. 1561–1566.

Master, A. R. and Jones, J. D., 1991. "Optimal desing of piezo-actuators in a layered composite structure for active noise and vibration control", **ASME - Smart Structures and Material**, vol. AD(24), pp. 123–129.

Mcgeer, T., 1990. "Passive dynamic walking", **International Journal of Robotics Research**, vol. 9(2).

Meirovitch, L., 1967. "**Analitical Methods in Vibration**". Macmillan, New York.

Meirovitch, L., 1997. "**Principles and Techniques of Vibration**". Prentice Hall, New York.

Mitsuishi, M., Watanabe, H., Nakanichi, H., Kubota, H., and Lizuka, Y., 1997, Dexterity enhancement for a telemicro-surgery system with multiple macro-micro colocated operation point manipulators and understanding of the operator's intention. Report In Proc. 1st Joint Conf. CVRMED II and MRCAS, Grenoble, pp. 821-830.

Mracek, P. C. and Cloutier, J. R., 1998. "Control designs for the nonlinear benchmark problem via the state-dependent Riccati equation method", **International Journal of robust and nonlinear control**, vol. 8, pp. 401-433.

Murray, R. M. and Sastry, S. S., 1993. "Nonholonomic motion planning: Steering using sinusoids", **IEEE Transactions on Automatic Control**, vol. 38, pp. 700-716.

Niesrecki, C. and Cudney, H. H., 1997. "Structural control using analog phase-locked loops", **Journal of Vibration Acoust.**, vol. 119(1), pp. 104-109.

Oakley, C. M. and Cannon, R. H., 1989, End-point Control of a Two-link Manipulator with a Very Flexible Forearm: Issues and Experiments. Report In Proc. Amer. Contr. Conf., PA, Pittsburgh, pp. 1381-1388.

Onada, J. and Haftka, R. T., 1997. "An approach to structure/control simultaneous optimization for flexible aerospacecraft", **AIAA Journal**, vol. 25, pp. 1133-1138.

Ortega, R. and Spong, M. W., 1989. "Adaptative motion control of rigid robots: a tutorial", **Automatica**, vol. 25, pp. 877-888.

Oueini, S. S., Nayfeh, A. H., and Pratt, J. R., 1996, Nonlinear control of flexible structures. Report Proc. ASME Int. Mech. Eng. Congress and Exposition, San Francisco, vol. DE(91), pp. 135-141.

Pergher, R., 2003. "**Controle de Radiação Sonora Numa Placa Retangular Através de Atuadores Piezelétricos Discretos**", Tese de doutorado, Programa de pós-graduação em Engenharia Mecânica, UFRGS, Porto Alegre.

Prattichizzo, D. and Bicchi, A., 1997. "Dynamics analysis of mobility and graspability of general manipulation systems", **ASME Journal of Dynamics Systems, Measurement and Control**, vol. 119, pp. 760–767.

Raibert, M. H. and Craig, J. J., 1981. "Híbrid position/force control of manipulators", **ASME Journal of Dynamics Systems, Measurement and Control**, vol. 103, pp. 126–133.

Ramires, A. R. G., Pieri, E. R., and Guenther, R., 2003. "Controle em Cascata de um Manipulador Robótico com um elo e uma transmissão Flexível", **Revista Controle e Automação**, vol. 14, pp. 393–401.

Satava, R. M. and Jones, S. B., 1997. "Virtual environments for medical training and education", **Presence**, vol. 6, pp. 139–146.

Schmid, A. B. and Rafikov, M., 2005. "Síntese do Controle Linear Aplicado em Sistemas Populacionais", **TEMA - Tendências em Matemática Aplicada e Computacional**, vol. 6(1), pp. 153–162.

Schultz, G. and Heimbold, G., 1983. "Dislocated actuator/sensor positioning and feedback design for flexible structures", **Jornal of Guidance**, vol. 6, pp. 361–367.

Sciavicco, L. and Siciliano, B., 1995. "**Modeling and Control of Robot Manipulators**". McGraw-Hill, Italy.

Shawky, A. M., Ordys, A. W., Petropaulakis, L., and Grimbale, M. J., 2007. "Position control of flexible manipulator using nonlinear H_∞ with state-dependent Riccati equation", **Journal of Systems and Control Engineering**, vol. 221(Part I), pp. 475–486.

Shin, H. and Choi, S., 2000. "Position control of a two-link flexible manipulator featuring piezoelectric actuators and sensors", **Mechatronics**, vol. 11, pp. 707–729.

Siciliano, B. and Valvanis, K. P., 1997, Six=degree-of-freedom impedance robot control. Report In Proc. 8th Int. Conf. on Advanced Robotics, Monterey, pp. 387-392.

Siciliano, B. and Valvanis, K. P., 1998. "**Control Problems in Robotics and Automation**". Spriger-Verlag, London.

Slotine, J. J. and Sastry, S. S., 1983. "Tracking Control of Non-Linear Systems Using Sliding Surfaces with Application to Robot Manipulators", **Int. Journal of Control**, vol. 38(2), pp. 465–492.

Song, O., Librescu, L., and Rogers, C. A., 1992. "Vibration behavior of adaptative aircraft wing structures modelled as composite thin-walled beams", **Smart Structural and Material**, vol. AD(24), pp. 157–166.

Sun, D., Mills, J. K., Shan, J., and Tso, S. K., 2004. "A PZT actuator control of a single-link flexible manipulator based on linear velocity feedback and actuator placement", **Mechatronics**, vol. 14, pp. 381–401.

Svinin, M. M. and Uchiyama, M., 1994, Coordinated dynamic control of a system of manipulators coupled via a flexible object. Report In 4th IFAC Symp. on Robot Control, Capri, pp. 1005-1010.

Usoro, P. B., Nadira, R., and Mahil, S. S., 1986. "A finite element Lagrange approach to modeling lightweight flexible manipulators", **ASME Journal of Dynamic Syst., Measurement and Control**, vol. 108, pp. 198–205.

Utkin, V. I., 1977. "Variable Structure Systems with Sliding Modes", **ASME Journal of Dynamic Syst., Measurement and Control**, vol. 22(2), pp. 212–222.

Walker, L. D., Freeman, R. A., and Marcus, S. L., 1991. "Analysis of motion and internal loading of objects grasped by multiple cooperating manipulators", **Int. Journal of Robotics Research**, vol. 10(4), pp. 396–409.

Wiener, N., 1948. "**Cybernetics: or Control and Communication in the Animal and the Machine**". MIT Press, Cambridge.

Woodhouse, N. M. J., 1987. "**Introduction to Analytical Dynamics**". Oxford Press, Oxford.

Wu, T. K., 1997. "Piezoelectrically adjustable array for large reflector antenna surface distortion compensation", **MicrowaveOptical Tech Letters**, vol. 14(4), pp. 221–224.

Yao, B. and Tomizuka, M., 1996. "Smooth Robust Adaptive Sliding Mode Control of Manipulators with Guaranteed Transient Performance", **Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control**, vol. 118, pp. 764–775.

Yeung, K. and Chen, Y., 1988. "A New Controller Design for Manipulators Using the Theory of Variable Structure Systems", **IEEE Transactions on Automatic Control**, vol. 33(2), pp. 200–206.

ANEXOS

Teorema 1

[Arteaga e Siciliano, 2000]

a) Dada uma trajetória desejada θ_d , com velocidade e aceleração limitadas, (3.12) é global e assintoticamente estável na origem ($\mathbf{s} = \mathbf{0}$).

b) A trajetória desejada $\dot{\delta}_d$ dada por (3.10) com condições iniciais $\dot{\delta}_d(0) = \dot{\delta}(0)$ e $\delta_d(0) = \delta(0)$ permanece limitada se

$$\lambda_{\min}(\mathbf{D}_\delta) > \mathbf{k}_{c\delta\theta} \left(\left\| \dot{\theta}_d \right\|_{\max} + \lambda_{\max}(\mathbf{\Lambda}_\theta) \left\| \tilde{\theta} \right\|_{\max} \right) + \mathbf{k}_{c\delta\delta} \lambda_{\max}(\mathbf{\Lambda}_\delta) \left\| \tilde{\delta} \right\|_{\max}. \quad (7.1)$$

Ainda, δ_d dada por (3.10) permanece limitada se

$$\lambda_{\min}(\mathbf{K}) > \lambda_{\max}(\mathbf{\Lambda}_\delta) (k_{c\delta\delta} \left\| \dot{q} \right\|_{\max} + \lambda_{\max}(\mathbf{D}_\delta)) \quad (7.2)$$

Prova:

a) A fim de provar a estabilidade de (3.12), considere a função de Lyapunov $V(\mathbf{x}, t) = V(\mathbf{x})$

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{B}(\theta) \mathbf{s} + \tilde{\mathbf{q}}^T \left(\mathbf{\Lambda} \mathbf{K}_{pD} + \frac{1}{2} \mathbf{K}_e \right) \tilde{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{N} \mathbf{x}, \quad (7.3)$$

$$\mathbf{N} \equiv \begin{bmatrix} (2\mathbf{\Lambda} \mathbf{K}_{pD} + \mathbf{K}_e + \mathbf{\Lambda} \mathbf{B} \mathbf{\Lambda}) & \mathbf{\Lambda} \mathbf{B} \\ \mathbf{B} \mathbf{\Lambda} & \mathbf{B} \end{bmatrix}. \quad (7.4)$$

Note que $\mathbf{N} > \mathbf{0}$, implica que

$$\lambda_1 \|\mathbf{x}\|^2 \leq V(\mathbf{x}) \leq \lambda_2 \|\mathbf{x}\|^2 \quad \lambda_1 \equiv \frac{1}{2} \min_{\theta \in R^n} (\lambda_{\min}(\mathbf{N})) \quad \lambda_2 \equiv \frac{1}{2} \max_{\theta \in R^n} (\lambda_{\max}(\mathbf{N})). \quad (7.5)$$

A derivada de (7.3), ao longo de (3.12), é

$$\begin{aligned}\dot{V}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2}\mathbf{s}^T\mathbf{B}(\theta)\mathbf{s} + \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T\Lambda\mathbf{K}_{pD}\tilde{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{q}}^T\Lambda\mathbf{K}_{pD}\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T\mathbf{K}_e\tilde{\mathbf{q}} \\ &\quad - \mathbf{s}^T(\mathbf{C}(\theta, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{s} + \mathbf{K}_e\tilde{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_{pD}\mathbf{s}) \\ &= -\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T\mathbf{K}_{pD}\dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T(\Lambda\mathbf{K}_{pD}\Lambda + \Lambda\mathbf{K}_e)\tilde{\mathbf{q}} = -\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x},\end{aligned}\quad (7.6)$$

com

$$\mathbf{Q} \equiv \text{diag}\{\Lambda\mathbf{K}_{pD}\Lambda + \Lambda\mathbf{K}_e, \mathbf{K}_{pD}\}.\quad (7.7)$$

A propriedade 2 foi usada em (7.6). Já que $\mathbf{Q} > \mathbf{0}$, $\dot{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ se e somente se $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Por (7.6), $V(\mathbf{x}, t)$ é decrescente, o que implica que o ponto de equilíbrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é assintoticamente estável [Lin et al., 1996a].

b) Primeiro, encontra-se sobre quais condições $\dot{\delta}_d$ permanece limitada, reescrevendo (3.10) como

$$\mathbf{B}_{\delta\delta}\ddot{\delta}_d = -(\mathbf{C}_{\delta\delta}\dot{\delta}_d + \mathbf{D}_\delta\dot{\delta}_d + \mathbf{K}\delta_d + \mathbf{f}_a + (\mathbf{C}_{\delta\theta}\dot{\theta}_r - \mathbf{C}_{\delta\theta}\Lambda_\delta\tilde{\delta})),\quad (7.8)$$

$$\mathbf{f}_a \equiv \mathbf{B}_{\theta\delta}^T\ddot{\theta}_r - \mathbf{B}_{\delta\delta}\Lambda_\delta\dot{\tilde{\delta}} - \mathbf{D}_\delta\Lambda_\delta\tilde{\delta} - \mathbf{K}_{p\delta}\mathbf{s}_\delta + \mathbf{g}_\delta.\quad (7.9)$$

Já que $\|\mathbf{x}\| < \infty$, o vetor \mathbf{f}_a é limitado por uma constante positiva $\mathbf{f}_{a,\max}$. Considere a função de Lyapunov:

$$V_\delta(\mathbf{x}_\delta) = \frac{1}{2}\dot{\delta}_d^T\mathbf{B}_{\delta\delta}\dot{\delta}_d + \frac{1}{2}\delta_d^T\mathbf{K}\delta_d.\quad (7.10)$$

Pela propriedade 2, a derivada de (7.10), ao longo de (7.8), é dada por

$$\begin{aligned}\dot{V}_\delta(\mathbf{x}_\delta) &= \frac{1}{2}\dot{\delta}_d^T\mathbf{B}_{\delta\delta}\dot{\delta}_d + \dot{\delta}_d^T\mathbf{K}\delta_d - \dot{\delta}_d^T(\mathbf{C}_{\delta\delta}\dot{\delta}_d + \mathbf{D}_\delta\dot{\delta}_d + \mathbf{K}\delta_d + \mathbf{f}_a) \\ &\quad - \dot{\delta}_d^T(\mathbf{C}_{\delta\theta}\dot{\theta}_r - \mathbf{C}_{\delta\theta}\Lambda_\delta\tilde{\delta}) \\ &= -\dot{\delta}_d^T\mathbf{D}_\delta\dot{\delta}_d - \dot{\delta}_d^T\mathbf{f}_a - \dot{\delta}_d^T(\mathbf{C}_{\delta\theta}\dot{\theta}_r - \mathbf{C}_{\delta\theta}\Lambda_\delta\tilde{\delta}) \\ &\leq -\lambda_{\min}(\mathbf{D}_\delta)\|\dot{\delta}_d\|^2 + \mathbf{f}_{a,\max}\|\dot{\delta}_d\| + \|\dot{\delta}_d\|(\sigma_1\|\dot{\delta}_d\| + \sigma_2),\end{aligned}\quad (7.11)$$

com

$$\sigma_1 = k_{c\delta\theta} \left(\left\| \dot{\delta}_d \right\|_{\max} + \lambda_{\max}(\Lambda_\theta) \left\| \tilde{\theta} \right\|_{\max} \right) + k_{c\delta\delta} \lambda_{\max}(\Lambda_\delta \left\| \tilde{\delta} \right\|_{\max}) \quad (7.12)$$

$$\sigma_2 = \sigma_1 \left(\left\| \tilde{\delta} \right\|_{\max} + \left\| \dot{\theta} \right\|_{\max} \right). \quad (7.13)$$

Note que $\left\| \tilde{\theta} \right\|$ e $\left\| \dot{\theta}_d \right\|$ são limitadas. Assim, $\left\| \dot{\theta} \right\|$ também é limitada. Se a condição (7.1) é satisfeita, então $\dot{V}_\delta < 0$ se $\left\| \dot{\delta}_d \right\| > \frac{(\mathbf{f}_{a,\max} + \sigma_2)}{(\lambda_{\min}(\mathbf{D}_\delta) - \sigma_1)}$, assim $\left\| \dot{\delta}_d \right\|$ permanece limitada.

Agora, o limite de δ_d será provado. Considere a notação $\mathbf{s}_0 \equiv \dot{\delta}_d + \Lambda_\delta \delta_d$ e $\mathbf{x}_\delta \equiv \begin{bmatrix} \delta_d^T & \mathbf{s}_0^T \end{bmatrix}^T$. Já que $\left\| \dot{\delta}_d \right\|$ é limitada, $\left\| \dot{\delta} \right\|$ também o é. Simplificando (3.10), tem-se

$$\mathbf{B}_{\delta\delta} \dot{\mathbf{s}}_0 = -(\mathbf{C}_{\delta\delta} \mathbf{s}_0 + \mathbf{D}_\delta \mathbf{s}_0 + \mathbf{K} \delta_d + \mathbf{f}_b + (\mathbf{C}_{\delta\delta} \Lambda_\delta \delta - \mathbf{D}_\delta \Lambda_\delta \delta)), \quad (7.14)$$

$$\mathbf{f}_b \equiv \mathbf{B}_{\theta\delta}^T \ddot{\theta}_r - \mathbf{C}_{\delta\theta} \dot{\theta}_r + \mathbf{g}_\delta - \mathbf{K}_{p\delta} \mathbf{s}_\delta - \mathbf{B}_{\delta\delta} \Lambda_\delta \dot{\delta}. \quad (7.15)$$

\mathbf{f}_b é limitada pela constante positiva $\mathbf{f}_{b,\max}$, isto é, $\|\mathbf{f}_b\| \leq \mathbf{f}_{b,\max}$ (conforme propriedades 1, 3 e 4). Considera-se a função de Lyapunov $V_\delta(\mathbf{x}_\delta, t) = V_\delta(\mathbf{x}_\delta)$

$$V_\delta(\mathbf{x}_\delta) = \frac{1}{2} \mathbf{s}_0^T \mathbf{B}_{\delta\delta} \mathbf{s}_0 + \frac{1}{2} \delta_d^T \mathbf{K} \delta_d. \quad (7.16)$$

Pela propriedade 2, a derivada de (7.16), ao longo de (7.14,) é dado por

$$\begin{aligned} \dot{V}_\delta(\mathbf{x}_\delta) &= \frac{1}{2} \mathbf{s}_0^T \dot{\mathbf{B}}_{\delta\delta} \mathbf{s}_0 + \dot{\delta}_d^T \mathbf{K} \delta_d + \mathbf{s}_0^T (\mathbf{C}_{\delta\delta} \Lambda_\delta \delta + \delta_d \Lambda_\delta \delta) \\ &\quad - \mathbf{s}_0^T (\mathbf{C}_{\delta\delta} \mathbf{s}_0 + \mathbf{D}_\delta \mathbf{s}_0 + \mathbf{K} \delta_d + \mathbf{f}_b) \\ &= -\mathbf{s}_0^T \mathbf{D}_\delta \mathbf{s}_0 - \dot{\delta}_d^T \Lambda_\delta \mathbf{K} \delta_d - \mathbf{s}_0^T \mathbf{f}_b - \mathbf{s}_0^T (\mathbf{C}_{\delta\delta} \Lambda_\delta \delta + \mathbf{D}_\delta \Lambda_\delta \delta) \\ &\leq -\lambda_{\min}(\mathbf{D}_\delta) \|\mathbf{s}_0\|^2 + \sigma_3 \|\mathbf{s}_0\| - \delta_d^T \mathbf{H} \delta_d + \sigma_4 \|\delta_d\|, \end{aligned} \quad (7.17)$$

com

$$\mathbf{H} = \Lambda_\delta \mathbf{K} - \Lambda_\delta \left(\frac{1}{2} \mathbf{C}_{\delta\delta} + \frac{1}{2} \mathbf{C}_{\delta\delta T} + \mathbf{D}_\delta \right) \Lambda_\delta, \quad (7.18)$$

$$\sigma_3 = (k_{c\delta\delta} \|\dot{\mathbf{q}}\|_{\max} + \lambda_{\max}(\mathbf{D}_\delta)) \lambda_{\max}(\Lambda_\delta) \left\| \tilde{\delta} \right\|_{\max} + f_{b,\max}, \quad (7.19)$$

$$\sigma_4 = \left\| \dot{\delta}_d \right\|_{\max} (k_{c\delta\delta} \|\dot{\mathbf{q}}\|_{\max} + \lambda_{\max}(\mathbf{D}_\delta)) \lambda_{\max}(\mathbf{\Lambda}_\delta). \quad (7.20)$$

Se a condição (7.2) é satisfeita, então $\mathbf{H} > \mathbf{0}$ e (7.17) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \dot{V}_\delta(\mathbf{x}_\delta) &\leq -\lambda_{\min}(\mathbf{D}_\delta) \|\mathbf{s}_0\|^2 + \sigma_3 \|\mathbf{s}_0\| - \lambda_{\min}(\mathbf{H}) \|\delta_d\|^2 + \sigma_4 \|\delta_d\| \\ &= -\|\mathbf{s}_0\| (\lambda_{\min}(\mathbf{D}_\delta) \|\mathbf{s}_0\| - \sigma_3) - \|\delta_d\| (\lambda_{\min}(\mathbf{H}) \|\delta_d\| - \sigma_4) \\ &\leq -\|\mathbf{x}_\delta\| (\min(\lambda_{\min}(\mathbf{D}_\delta), \lambda_{\min}(\mathbf{H})) \|\mathbf{x}_\delta\| - \max(\sigma_3, \sigma_4)). \end{aligned} \quad (7.21)$$

Assim, $\dot{V}_\delta < 0$ se $\|\mathbf{x}_\delta\| > \frac{\max(\sigma_3, \sigma_4)}{\min(\lambda_{\min}(\mathbf{D}_\delta), \lambda_{\min}(\mathbf{H}))}$. Isto implica que se $\dot{\delta}_d$ é limitada, então δ_d também o é.

Note que para qualquer sistema físico $\mathbf{D}_\delta > 0$. Assim, é possível satisfazer a condição (7.1) quando $\dot{\theta}_d$ e $\mathbf{x}(0)$ são suficientemente pequenos. O limite em $\mathbf{x}(0)$ não deveria ser considerado tão restritivo, já que pode-se escolher trajetórias desejadas θ_d e $\dot{\theta}_d$ com condições iniciais $\theta_d(0) = \theta(0)$ e $\dot{\theta}_d(0) = \dot{\theta}(0)$. A condição (7.2) pode ser satisfeita fazendo $\lambda_{\max}(\mathbf{\Lambda}_\delta)$ ser suficientemente pequeno.

Teorema 2

[Arteaga e Siciliano, 2000]

a) Dada uma trajetória desejada θ_d contínua e limitada, com velocidade e aceleração limitadas, o vetor de variáveis de estado $\mathbf{x} \equiv \left[\tilde{\mathbf{q}}^T \quad \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \right]^T$ de (3.23) é exponencial globalmente estável.

b) A trajetória desejada $\dot{\delta}_d$ dada por (3.16), com condições iniciais $\delta_d(0) = \delta(0)$ e $\dot{\delta}_d(0) = \dot{\delta}(0)$, permanece limitada se as condições de (7.1) do Teorema 1 são satisfeitas e δ_d é limitada se as condições de (7.2) são satisfeitas.

Prova:

a) Para provar a estabilidade de \mathbf{x} , considera-se a função de Lyapunov $V(t, \mathbf{x}) = V(\mathbf{x})$ dada por (7.3), junto com (7.4) e (7.5). A derivada de (7.3) ao longo de (3.23) é a

mesma que (7.6), adicionado o termo $\mathbf{D}'_{\Delta} \dot{\delta}_d$:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\mathbf{x}) &= -\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + s_{\delta}^T \mathbf{D}'_{\Delta} \dot{\delta}_d \\
&\leq -\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} \left(d_{ij} \left\| s_{\delta_{ij}} \dot{\delta}_{d_{ij}} \right\| - d_{ij} \frac{\left\| s_{\delta_{ij}} \dot{\delta}_{d_{ij}} \right\|^2}{\left\| s_{\delta_{ij}} \dot{\delta}_{d_{ij}} \right\| + \varepsilon_{ij} r^{-\beta_{ij} t}} \right) \\
&\leq -\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} \left(d_{ij} \varepsilon_{ij} e^{-\beta_{ij} t} - d_{ij} \frac{\left\| s_{\delta_{ij}} \dot{\delta}_{d_{ij}} \right\|^2}{\left\| s_{\delta_{ij}} \dot{\delta}_{d_{ij}} \right\| + \varepsilon_{ij} e^{-\beta_{ij} t}} \right) \\
&\leq -\lambda_{\min}(\mathbf{Q}) \|\mathbf{x}\|^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} d_{ij} \varepsilon_{ij} e^{-\beta_{ij} t} \\
&= -\lambda_3 \|\mathbf{x}\|^2 + \varepsilon e^{-\beta t}, \tag{7.22}
\end{aligned}$$

onde \mathbf{Q} é dado por (7.7) e

$$\lambda_3 \equiv \lambda_{\min}(\mathbf{Q}) \varepsilon \equiv \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} d_{ij} \varepsilon_{ij} \beta \equiv \min(\beta_{ij}). \tag{7.23}$$

O termo $\varepsilon e^{-\beta t}$ é obtido usando o fato de que a ação de robustez (3.17) e (3.18), as quais são funções de $\dot{\delta}_d$, são limitadas.

b) Primeiramente, deve-se encontrar as condições sob as quais $\dot{\delta}_d$ resulta limitado. Reescreve-se (3.16) como

$$\mathbf{B}_{\delta\delta} \ddot{\delta}_d = -(\mathbf{C}_{\delta\delta} \dot{\delta}_d + (\mathbf{D}_{\delta} + \mathbf{D}'_{\Delta}) \dot{\delta}_d + \mathbf{K} \delta_d + \mathbf{f}_a + (\mathbf{C}_{\delta\theta} \dot{\theta}_r - \mathbf{C}_{\delta\theta} \mathbf{\Lambda}_{\delta} \tilde{\delta})), \tag{7.24}$$

com \mathbf{f}_a dada por (7.9). Como $\|\mathbf{x}\| < \infty$, o vetor \mathbf{f}_a é limitado por uma constante positiva $\mathbf{f}_{a,\max}$. Considerando a função de Lyapunov, dada por (7.10), e usando a propriedade 2, a derivada de (7.10), ao longo de (7.24), é dada por

$$\begin{aligned}
\dot{V}_{\delta}(x_{\delta}) &= \frac{1}{2} \dot{\delta}_d^T \mathbf{B}_{\delta\delta} \dot{\delta}_d + \dot{\delta}_d^T \mathbf{K} \delta_d - \dot{\delta}_d^T (\mathbf{C}_{\delta\delta} \dot{\delta}_d + (\mathbf{D}_{\delta} + \mathbf{D}'_{\Delta}) \dot{\delta}_d + \mathbf{K} \delta_d + \mathbf{f}_a) \\
&\quad - \dot{\delta}_d^T (\mathbf{C}_{\delta\theta} \dot{\theta}_r - \mathbf{C}_{\delta\theta} \mathbf{\Lambda}_{\delta} \tilde{\delta}) \\
&= -\dot{\delta}_d^T (\mathbf{D}_{\delta} + \mathbf{D}'_{\Delta}) \dot{\delta}_d - \dot{\delta}_d^T \mathbf{f}_a - \dot{\delta}_d^T (\mathbf{C}_{\delta\theta} \dot{\theta}_r - \mathbf{C}_{\delta\theta} \mathbf{\Lambda}_{\delta} \tilde{\delta}) \\
&\leq -\lambda_{\min}(\mathbf{D}_{\delta}) \left\| \dot{\delta}_d \right\|^2 + \mathbf{f}_{a,\max} \left\| \dot{\delta}_d \right\| + \left\| \dot{\delta}_d \right\| \left(\sigma_1 \left\| \dot{\delta}_d \right\| + \sigma_2 \right), \tag{7.25}
\end{aligned}$$

com σ_1 e σ_2 dadas por (7.12) e (7.13), respectivamente. Se a condição (7.1) é satisfeita, então $\dot{V}_{\delta} < 0$ se $\left\| \dot{\delta}_d \right\| > \frac{(\mathbf{f}_{a,\max} + \sigma_2)}{(\lambda_{\min}(\mathbf{D}_{\delta}) - \sigma_1)}$, assim $\left\| \dot{\delta}_d \right\|$ permanece limitada.

Agora, o limite de δ_d será provado. Considere a notação $\mathbf{s}_0 \equiv \dot{\delta}_d + \mathbf{\Lambda}_\delta \delta_d$ e $\mathbf{x}_\delta \equiv \begin{bmatrix} \delta_d^T & \mathbf{s}_0^T \end{bmatrix}^T$. Já que $\|\dot{\delta}_d\|$ é limitada, $\|\dot{\delta}\|$ também o é. Simplificando (3.16), tem-se

$$\mathbf{B}_{\delta\delta}\dot{\mathbf{s}}_0 = -(\mathbf{C}_{\delta\delta}\mathbf{s}_0 + \mathbf{D}_\delta\mathbf{s}_0 + \mathbf{K}\delta_d + \mathbf{f}_b - (\mathbf{C}_{\delta\delta}\mathbf{\Lambda}_\delta\delta - \mathbf{D}_\delta\mathbf{\Lambda}_\delta\delta) + \mathbf{D}'_\Delta\dot{\delta}_d), \quad (7.26)$$

com \mathbf{f}_b dada por (7.15). Como discutido no Teorema 1, \mathbf{f}_b é limitado pela constante positiva $\mathbf{f}_{b,\max}$, isto é, $\|\mathbf{f}_b\| \leq \mathbf{f}_{b,\max}$. Considere a função de Lyapunov $V_\delta(\mathbf{x}_\delta, t) = V_\delta(\mathbf{x}_\delta)$ dada por (7.16). Usando a propriedade 2, a derivada de (7.16), ao longo de (7.26), verifica-se que:

$$\dot{V}_\delta(\mathbf{x}_\delta) \leq -\lambda_{\min}(\mathbf{D}_\delta)\|\mathbf{s}_0\|^2 + \sigma_3\|\mathbf{s}_0\| - \delta_d^T\mathbf{B}\delta_d + \sigma_4\|\delta_d\| - \dot{\delta}_d^T\mathbf{D}'_\Delta\dot{\delta}_d, \quad (7.27)$$

com \mathbf{B} e σ_3 dados por (7.18) e (7.19), respectivamente, e

$$\sigma_4 = \left\| \dot{\delta}_d \right\|_{\max} (2\lambda_{\max}(\mathbf{\Lambda}_\delta\mathbf{D}_\Delta) + (k_{c\delta\delta}\|\dot{\mathbf{q}}\|_{\max} + \lambda_{\max}(\mathbf{D}_\delta))\lambda_{\max}(\mathbf{\Lambda}_\delta)). \quad (7.28)$$

Se a condição (7.2) é satisfeita, então $\mathbf{B} > 0$ e (7.27) pode ser reescrita na forma

$$\begin{aligned} \dot{V}_\delta(x_\delta) &\leq -\lambda_{\min}(\mathbf{D}_\delta)\|\mathbf{s}_0\|^2 + \sigma_3\|\mathbf{s}_0\| - \lambda_{\min}(\mathbf{H})\|\delta_d\|^2 + \sigma_4\|\delta_d\| - \dot{\delta}_d^T\mathbf{D}'_\Delta\dot{\delta}_d \\ &= -\|\mathbf{s}_0\|(\lambda_{\min}(\mathbf{D}_\delta)\|\mathbf{s}_0\| - \sigma_3) - \|\delta_d\|(\lambda_{\min}(\mathbf{H})\|\delta_d\| - \sigma_4) - \dot{\delta}_d^T\mathbf{D}'_\Delta\dot{\delta}_d. \end{aligned} \quad (7.29)$$

Recordando que $\mathbf{D}'_\Delta > 0$, observa-se de (7.29) que $\dot{V}_\delta < 0$ se $\|\mathbf{x}_\delta\| > \frac{\max(\sigma_3, \sigma_4)}{\min(\lambda_{\min}(\mathbf{D}_\delta), \lambda_{\min}(\mathbf{H}))}$. Isto implica que se $\dot{\delta}_d$ é limitada, então δ_d também o é.

Em suma, a idéia principal da lei de controle proposta acima, é tratar $\mathbf{D}'_\Delta\dot{\delta}_d$ como uma perturbação e usar uma ação de robustez dada por $\text{diag}\{f_{1,1}, \dots, f_{n,m_n}\}$ em (3.17) para obter a estabilidade de \mathbf{x} . Assim, como $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$, pode-se concluir que o uso de uma trajetória desejada modificada para δ_d em (3.17) amortece o sistema, eliminando vibrações estacionárias.

Teorema 3

[Mracek e Cloutier, 1998]

Prova - A solução em malha fechada é dada por

$$\dot{\mathbf{x}} = [\mathbf{A}_e(x) + \mathbf{B}_e(x)\mathbf{R}_e^{-1}(x)\mathbf{B}_e^T(x)\mathbf{P}_e(x)]\mathbf{x} = [\mathbf{A}_c(x)]\mathbf{x}. \quad (7.30)$$

É assegurada, da teoria das equações de Riccati, que a matriz $\mathbf{A}_c(x)$ é estável em todos os pontos x . Assumi-se que a solução $\mathbf{P}_e(x) \in C_1$ e portanto coluna $\mathbf{A}_c(x) \in C_1$. Aplicando o teorema do valor médio para $\mathbf{A}_c(x)$ tem-se (denotando coluna $\mathbf{A}_c(x) = \text{col}(\mathbf{A}_c(x))$)

$$\text{col}^j(\mathbf{A}_c(x)) = \text{col}^j(\mathbf{A}_c(0)) + \frac{\partial \text{col}^j(\mathbf{A}_c(z_j))}{\partial x} \mathbf{x}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (7.31)$$

onde o vetor z_j é o ponto no segmento de linha unindo a origem e x , produzindo a igualdade na j -ésima equação de (7.31). Substituindo (7.31) em $\text{col}(\mathbf{A}_c(x))$ na equação (7.30) produz

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}_c(0)\mathbf{x} + \left[\frac{\partial \text{col}^1(\mathbf{A}_c(z_1))}{\partial x} \mathbf{x} : \frac{\partial \text{col}^2(\mathbf{A}_c(z_2))}{\partial x} \mathbf{x} : \dots : \frac{\partial \text{col}^n(\mathbf{A}_c(z_n))}{\partial x} \mathbf{x} \right] \mathbf{x} \\ &= \mathbf{A}_c(0)\mathbf{x} + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n x_i x_j \frac{\partial \text{col}^j(\mathbf{A}_c(z_j))}{\partial x}. \end{aligned} \quad (7.32)$$

Multiplicando e dividindo o segundo termo em (7.32) por $\|x\|$ e definindo

$$\psi(x, z_1, z_2, \dots, z_n) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{x_i x_j}{\|x\|} \frac{\partial \text{col}^j(\mathbf{A}_c(z_j))}{\partial x}. \quad (7.33)$$

Isso produz

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_c(0)\mathbf{x} + \psi(x, z_1, z_2, \dots, z_n) \|x\|, \quad (7.34)$$

onde pode ser usada a propriedade dos sistemas lineares

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \psi(x, z_1, z_2, \dots, z_n) = 0. \quad (7.35)$$

Na vizinhança em torno da origem, o termo linear que tem matriz de coeficientes constantes e estáveis dominam sobre os termos de alta ordem, produzindo estabilidade local assintótica.

Prática

Uma continuação importante deste trabalho é o teste de um modelo experimental. No momento, este dispositivo está sendo montado, como mostram as Figuras 7.1 e 7.2. O modelo é composto basicamente por motores de corrente contínua, potenciômetros para a

leitura dos ângulos e dois elos de alumínio, sendo o mais longo mais flexível. A colagem dos atuadores piezelétricos foi feita numa barra de aço para testes, de controle de vibrações em viga engastada em uma mesa vibratória. Os sensores são extensômetros de resistência elétrica ao invés de piezofilmes. Após estes testes, sensores e atuadores serão instalados no braço robótico. Num trabalho futuro este modelo poderá ser usado para experimentação.

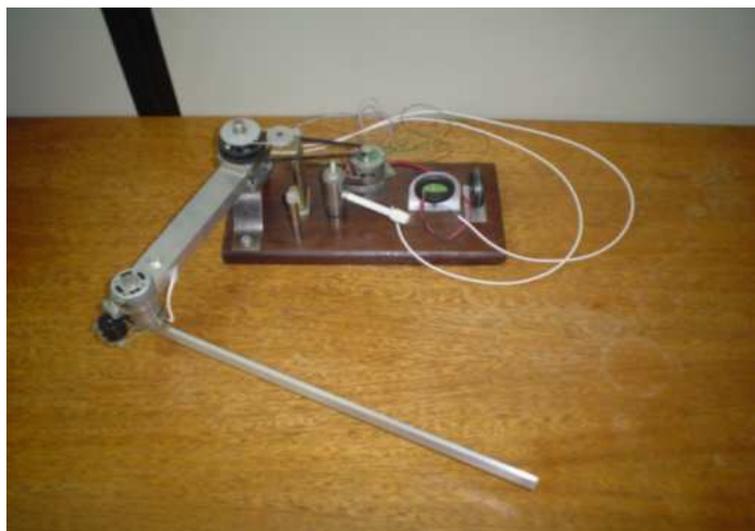


Figura 7.1 – Modelo experimental.



Figura 7.2 – Modelo experimental.