

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

LEONARDO BROERING GROFF

**CONTROLE BASEADO EM EVENTOS
PARA SISTEMAS EM TEMPO
DISCRETO**

Porto Alegre
2016

LEONARDO BROERING GROFF

**CONTROLE BASEADO EM EVENTOS
PARA SISTEMAS EM TEMPO
DISCRETO**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Controle e Automação

ORIENTADOR: Prof. Dr. João Manoel Gomes da Silva Jr.

Porto Alegre
2016

LEONARDO BROERING GROFF

**CONTROLE BASEADO EM EVENTOS
PARA SISTEMAS EM TEMPO
DISCRETO**

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pela Banca Examinadora.

Orientador: _____
Prof. Dr. João Manoel Gomes da Silva Jr., UFRGS
Doutor pela Université Paul Sabatier de Toulouse – Toulouse,
França

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Maurício Zardo de Oliveira, UCS
Doutor pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul – Porto Alegre, Brasil

Prof. Dr. Diego Eckhard, UFRGS
Doutor pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul – Porto Alegre, Brasil

Prof. Dr. Lucíola Campestrini, UFRGS
Doutora pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul – Porto Alegre, Brasil

Coordenador do PPGEE: _____
Prof. Dr. Luis Fernando Alves Pereira

Porto Alegre, fevereiro de 2016.

AGRADECIMENTOS

À minha família, pelo apoio sempre que necessário.

À Roberta, pelo carinho e compreensão, mesmo nos momentos mais difíceis, e à sua família por ter me acolhido e facilitado minha estada em Porto Alegre.

Ao meu orientador, João Manoel, pela disponibilidade, paciência e pelos conhecimentos compartilhados.

Ao colega Luciano, pelas importantes discussões sobre os trabalhos realizados.

Aos demais colegas e amigos que foram importantes na realização deste trabalho.

RESUMO

Este trabalho aborda o problema de controle baseado em eventos para sistemas em tempo discreto, considerando que o sistema possui os dispositivos atuadores e sensores em nós diferentes e separados por uma rede de comunicação. A estratégia baseada em eventos consiste em reduzir a utilização da rede ao transmitir as informações do sensor para o atuador apenas quando um evento é gerado pela violação de um determinado limiar pela função de disparo. Primeiramente, são formuladas condições para a estabilidade de um sistema linear com realimentação estática de estados sob a estratégia proposta, com base na teoria de Lyapunov. Como as condições são postas na forma de desigualdades matriciais lineares (LMIs, do inglês *linear matrix inequalities*), problemas de otimização convexos podem ser utilizados na determinação dos parâmetros da função de disparo, bem como na resolução do problema de *co-design*, ou seja, do projeto simultâneo do controlador e da função de disparo, os quais são providos na sequência. A partir deste resultado básico, a metodologia é estendida para o caso em que ocorre a saturação do atuador. A seguir, é apresentada a extensão da metodologia para o caso em que o estado da planta não está disponível para o sensor, sendo então utilizado um observador de estados, considerando-se tanto o caso em que o modelo da planta utilizado no observador corresponde exatamente à dinâmica real da planta quanto o caso em que este modelo apresenta incertezas. Exemplos numéricos são apresentados para ilustrar todas as classes de sistemas consideradas, com os quais constata-se que a estratégia proposta é eficiente na redução da utilização dos recursos da rede de comunicação.

Palavras-chave: Saturação de Controle, Co-design, Sistemas de Controle em Rede, Controle Baseado em Eventos.

ABSTRACT

This work approaches the problem of event-triggered control for discrete time systems, considering that the system has the actuator and sensor devices in different nodes, separated by a communication network. The event-triggered strategy consists in reducing the utilization of the network by only transmitting the information from the sensor to the actuator when an event is generated by the violation of a determined threshold by the trigger function. Firstly, conditions for the stability of a linear system with a static state feedback under the proposed strategy are formulated based on the Lyapunov theory. Since the conditions are given in the form of linear matrix inequalities (LMIs), convex optimization problems can be used for the determination of the trigger function parameters, as well as the co-design of the feedback gain and the trigger function, which are given next. From this basic result, the methodology is extended to the case where occurs the saturation of the actuator. Following, the extension of the methodology to the case in which the plant states are not available for measure is presented, and a state-observer is used, considering both the case that the plant model corresponds exactly to the real plant dynamics and the case where this model has uncertainties. Numeric examples are shown to illustrate all the system classes considered, with which it is found that the proposed strategy is efficient in the reduction of the network resources utilization.

Keywords: Control Saturation, Co-design, Networked Control Systems, Event-Based Control.

SUMÁRIO

LISTA DE ILUSTRAÇÕES	8
LISTA DE TABELAS	9
LISTA DE ABREVIATURAS	10
LISTA DE SÍMBOLOS	11
1 INTRODUÇÃO	12
2 CONCEITOS PRELIMINARES	15
2.1 Controle Baseado em Eventos	15
2.1.1 Conceitos Fundamentais	15
2.1.2 Função de Disparo Quadrática	16
2.1.3 Problema de Co-Design	17
2.1.4 Existência de Intervalo Mínimo entre Eventos	18
2.2 Estabilidade de Sistemas Dinâmicos	18
2.2.1 Estabilidade no Sentido de Lyapunov	19
2.2.2 Região de Atração	20
2.3 Sistemas Incertos	21
2.3.1 Modelagem Politópica das Incertezas	21
2.4 Sistemas Sujeitos à Saturação	22
2.4.1 Modelo de Não-Linearidade de Setor	23
2.5 Desigualdades Matriciais Lineares	24
2.5.1 Definição	24
2.5.2 Complemento de Schur	25
2.5.3 <i>S</i> -Procedure	25
2.5.4 Outros Lemas	25
2.6 Considerações Finais	26
3 REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS BASEADA EM EVENTOS	27
3.1 Introdução	27
3.2 Preliminares e Formulação do Problema	27
3.2.1 Modelo da Planta em Tempo Discreto	28
3.2.2 Controle com Amostragem Periódica	28
3.2.3 Estratégia de Controle Baseado em Eventos	29
3.3 Condições de Estabilidade Propostas	30
3.3.1 Condições para a Síntese da Função de Disparo	30
3.3.2 Condição para <i>Co-Design</i>	32

3.4	Extensão ao Caso de Sistemas com Saturação do Atuador	33
3.4.1	Preliminares e Formulação do Problema	33
3.4.2	Condições de Estabilidade Propostas	34
3.4.3	Co-Design	37
3.5	Problemas de Otimização	38
3.5.1	Redução do Número de Transmissões	39
3.5.2	Redução do Número de Transmissões com RAS Garantida	40
3.5.3	Maximização da RAS Estimada	42
3.5.4	Otimização Multiobjetivo	43
3.5.5	Otimização com Garantia de Taxa de Decaimento	43
3.5.6	Co-Design	44
3.6	Exemplos Numéricos	45
3.6.1	Exemplo 1: Sistema Linear Instável	45
3.6.2	Exemplo 2: Sistema Linear Instável e Co-Design	48
3.6.3	Exemplo 3: Sistema Instável Sujeito à Saturação	50
3.6.4	Exemplo 4: Relação entre a RAS Garantida e a Função de Disparo	52
3.7	Comentários Finais	53
4	REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS BASEADA EM UM OBSERVADOR	54
4.1	Introdução	54
4.2	Sistema em Tempo Discreto sem Incertezas	54
4.2.1	Preliminares e Formulação do Problema	55
4.2.2	Condições de Estabilidade Propostas	56
4.3	Sistema Incerto em Tempo Discreto	58
4.3.1	Preliminares e Formulação do Problema	58
4.3.2	Condições de Estabilidade Propostas	59
4.4	Problemas de Otimização	62
4.5	Exemplos Numéricos	63
4.5.1	Exemplo 1: Sistema sem Incertezas	63
4.5.2	Exemplo 2: Sistema Incerto	66
4.6	Comentários Finais	66
5	CONCLUSÃO	68
	REFERÊNCIAS	70

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1:	Estratégias de controle.	16
Figura 2:	Politopo de incertezas \mathcal{B}_η com 2 parâmetros e 4 vértices.	22
Figura 3:	Condição de setor globalmente satisfeita $[0, 1]$, e setores $[\alpha, 1]$ e $[0, \alpha]$ para as não-linearidades $\text{sat}(v)$ e $\phi(v)$, respectivamente.	24
Figura 4:	Topologia para realimentação de estados baseada em eventos.	28
Figura 5:	Evolução do estado x_1	46
Figura 6:	Evolução do estado x_2	47
Figura 7:	Evolução do sinal de controle u	47
Figura 8:	Tempos entre eventos.	48
Figura 9:	Resultados de simulação para o Exemplo 2	49
Figura 10:	RAS estimadas para o sistema. Em vermelho, o resultado obtido em (WU; REIMANN; LIU, 2014), em azul, o obtido aplicando-se o PO 8 e em preto, trajetórias obtidas utilizando-se K_c	51
Figura 11:	RAS estimadas para o sistema. Em azul, o resultado obtido em (WU; REIMANN; LIU, 2014) e em vermelho, o obtido aplicando-se o PO 4.	52
Figura 12:	Topologia para controle baseado em um observador.	55
Figura 13:	Evolução do estado x_1	64
Figura 14:	Evolução do estado x_2	64
Figura 15:	Evolução do sinal de controle u	65
Figura 16:	Períodos entre eventos.	65

LISTA DE TABELAS

Tabela 1:	Exemplo 1: Comparação do número de eventos gerados por cada função de disparo.	46
Tabela 2:	Exemplo 2: Comparação do número de eventos gerados por cada função de disparo.	49
Tabela 3:	Exemplo 3: Comparação do número de eventos gerados por cada função de disparo.	51
Tabela 4:	Relação entre σ e $\mathcal{R}(cP_0)$	53
Tabela 5:	Ocorrência de eventos com cada função de disparo.	64
Tabela 6:	Número de eventos gerados pelas funções de disparo nos vértices dos envelopes convexos	66

LISTA DE ABREVIATURAS

LMI	Desigualdade Matricial Linear - <i>Linear Matrix Inequality</i>
MIMO	Múltiplas entradas e Múltiplas saídas - <i>Multiple-input Multiple-output</i>
NCS	Sistema de Controle em Rede - <i>Networked Control System</i>
PWL	Linear por Partes - <i>Piecewise Linear</i>
RAS	Região de estabilidade assintótica - <i>Region of Asymptotic Stability</i>
SISO	Uma entrada e uma saída - <i>Single-input Single-output</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

\sum	Somatório
0_*	Matriz nula de dimensões apropriadas
I	Matriz identidade de dimensões apropriadas
M'	Matriz transposta da matriz M
$M > (\geq) 0$	Matriz (semi)-definida positiva
$M < (\leq) 0$	Matriz (semi)-definida negativa
$\mathcal{R}(M, x)$	Conjunto definido como $\mathcal{R} = \{x : x' M x \leq 1\}$
\mathbb{R}	Conjunto dos números reais
\mathbb{R}^n	Espaço euclidiano de ordem n
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Conjunto das matrizes reais de ordem $n \times m$
$\text{diag}(m_1, \dots, m_n)$	Matriz diagonal cujos elementos da diagonal são m_1 a m_n
$\text{Co}(M_j)$	Envelope convexo com vértices M_j
$\text{traço}(M)$	Traço da matriz M

1 INTRODUÇÃO

Os sistemas de controle em rede (NCSs, do inglês *Networked Control Systems* têm se tornado cada vez mais comuns, atraindo o interesse de diversos pesquisadores, o que pode ser evidenciado pelo grande número de publicações científicas na área, por exemplo, nos *surveys* (ZHANG; BRANICKY; PHILLIPS, 2001), (TIPSUWAN; CHOW, 2003), (YANG, 2006) e nos trabalhos citados nos mesmos. Estes trabalhos apontam diversas vantagens no uso, como a flexibilidade e custo reduzido em sistemas com elementos distribuídos espacialmente e a facilidade de instalação e manutenção de sistemas embarcados. Assim, cada vez menos sistemas de controle são implementados em plataformas específicas e com canais de comunicação dedicados. Esta ascensão dos NCSs trouxe também atenção ao estudo do controle com base em amostragens aperiódicas de variáveis, em especial o controle baseado em eventos (ou *event-triggered control*, sendo este uma forma de mitigar alguns dos problemas oriundos deste tipo de sistema, como a limitação de banda em redes compartilhadas (LIAN; MOYNE; TILBURY, 1999) e o consumo de energia em redes sem fio (AKYILDIZ et al., 2001).

Os resultados encontrados em (ÅSTRÖM; BERNHARDSSON, 1999) demonstraram alguns dos benefícios do controle baseado em eventos em relação ao controle com amostragem periódica (também chamado *time-triggered control*) e, junto ao crescimento dos NCSs, motivaram o que (HEEMELS; JOHANSSON; TABUADA, 2012) chama de “última onda” do debate entre controle periódico e controle aperiódico. Além disso, (TABUADA, 2007) demonstrou a existência de um limite inferior para o tempo entre eventos de um controlador baseado em eventos estabilizante quando a função de disparo é dada por um limiar no desvio relativo do estado amostrado em relação ao estado atual e (HESPANHA; NAGHSHTABRIZI; XU, 2007) apontou o controle baseado em eventos como uma das principais perspectivas a serem exploradas em NCSs. Com isso, diversos trabalhos foram publicados apresentando implementações baseadas em eventos de leis de controle estabilizantes, como (VELASCO; MARTÍ; BINI, 2009), (LUNZE; LEHMANN, 2010), (POSTOYAN et al., 2011), (MARCHAND et al., 2013), (SBARBARO; TARBOURIECH; GOMES DA SILVA Jr, 2014) e outros.

Os trabalhos citados previamente são referentes a sistemas em tempo contínuo, ou seja, consideram que a função de disparo é monitorada continuamente. Contudo, a implementação dos controladores obtidos pelos métodos neles apresentados costuma se dar em dispositivos digitais, de forma que o sistema opera em tempo discreto, ou seja, a função de disparo é checada apenas em instantes de tempo discretos. Portanto, após o projeto do sistema em tempo contínuo, este deve ser discretizado, de modo que o sistema implementado seja apenas uma aproximação daquele projetado, como ressalta (HEEMELS; DONKERS; TEEL, 2011). Neste trabalho, uma estratégia de controle baseado em eventos é proposta para sistemas em tempo discreto, considerando uma realimentação de es-

tados, e é realizada uma comparação entre a modelagem impulsiva (ou modelagem por sistema híbrido) e a abordagem de sistema linear por partes (PWL, do inglês *Piecewise Linear*). Outros trabalhos considerando sistemas discretos que podem ser destacados são (HENNINGSSON; JOHANNESSON; CERVIN, 2008) e (EQTAMI; DIMAROGONAS; KYRIAKOPOULOS, 2010).

Além disso, a maioria dos trabalhos considera que o estado completo de sistema está disponível para ser medido. Para o caso de sistemas discretos em que apenas a saída da planta é acessível, (YOOK et al., 2002) propõe condições para a BIBO-estabilidade de NCSs discretos e a redução da utilização da rede, porém, o método utiliza estimadores de estado completo em cada nó do sistema, levando a um grande aumento na complexidade computacional para sistemas de ordem elevada. Já (JETTO; ORSINI, 2011) apresenta condições para a estabilidade interna do sistema, por meio de um funcional de Lyapunov. Nesse caso, a função de disparo do sistema é baseada no valor do funcional a cada instante, sendo que um grande número de amostragens periódicas é necessário antes que o sistema entre em uma estratégia baseada em eventos. Mais recentemente, (HEEMELS; DONKERS; TEEL, 2013) apresentou uma extensão dos resultados de (HEEMELS; DONKERS; TEEL, 2011) para uma realimentação de saída, enquanto (REIMANN et al., 2015) considerou uma realimentação baseada em um controlador PI. Uma realimentação de saída baseada em modelo foi apresentada em (HEEMELS; DONKERS, 2013). O método consiste na utilização de um preditor no controlador, permitindo que o controlador estime os estados da planta mesmo quando não está sendo atualizado pelo sensor. É considerado que o controlador e o atuador estão localizados no mesmo nó da rede, ou que um buffer no atuador é capaz de armazenar um determinado número de entradas futuras estimadas pelo controlador. Os intervalos entre eventos foram drasticamente aumentados por este método. Todavia, (VERHAEGH; GOMMANS; HEEMELS, 2013) demonstrou que o método é sensível a perturbações. Ademais, o efeito de incertezas no modelo da planta não é considerado.

A saturação de atuadores, por sua vez, é um fenômeno onipresente nos sistemas de controle real. Neste sentido, (LEHMANN; JOHANSSON, 2012), (SEURET et al., 2013) e (KIENER; LEHMANN; JOHANSSON, 2014) apresentam metodologias para o controle baseado em eventos de sistemas em tempo contínuo. Já para o caso discreto, em (WU; REIMANN; LIU, 2014) uma metodologia para o projeto do controlador que maximiza a estimativa da região de estabilidade assintótica (RAS, do inglês *Region of Asymptotic Stability*) do sistema em malha fechada é proposta. Além dos acima citados, poucos outros estudos abordam estratégias de controle baseado em eventos para sistemas sujeitos à saturação de controle, sobretudo sistemas em tempo discreto.

Outra perspectiva importante em NCSs, apontada em (ÅRZÉN et al., 2000), no contexto de agendamento de pacotes, e reiterada em (LEMMON, 2010), no contexto de geradores de eventos, é o *co-design*, ou projeto simultâneo. Geralmente, se supõe uma lei de controle estabilizante projetada *a priori* e então uma amostragem aperiódica que mantenha a estabilidade do sistema é considerada. O *co-design* do controlador e da função de disparo foi considerado inicialmente em (LI; XU, 2011), e posteriormente alguns outros estudos foram realizados, como (PENG; YANG, 2013) e (ABDELRAHIM et al., 2014), mas ainda é uma área incipiente.

Segundo o que foi exposto, o presente trabalho tem como objetivo geral a proposta de uma estratégia de controle baseado em eventos para sistemas lineares em tempo discreto e a extensão dessa estratégia abrangendo algumas áreas pouco abordadas na literatura. Para tanto, os seguintes objetivos específicos podem ser identificados:

- Proposta de uma estratégia básica aplicada à realimentação de estados de um sistema linear em tempo discreto e extensão dos resultados para sistemas sujeitos à saturação do atuador.
- Resolução do problema de *co-design* da condição de disparo e do ganho de realimentação de estados do sistema.
- Extensão da estratégia básica para o caso da realimentação de estados baseada em um observador considerando a possibilidade da existência de incertezas paramétricas no modelo utilizado no observador.
- Formulação de problemas de otimização para a determinação dos parâmetros da função de disparo.

Com este escopo, a organização desta dissertação de mestrado se dá da seguinte forma: no Capítulo 2 os conceitos necessários à elaboração deste trabalho são revisados, abordando a estabilidade no sentido de Lyapunov, os conceitos básicos sobre LMIs, sistemas incertos, sistemas sujeitos à saturação e o controle baseado em eventos.

No Capítulo 3, é apresentada a formulação básica da estratégia proposta para uma lei de controle de realimentação de estados, com condições para a estabilidade na forma de LMIs e a extensão para o caso dos atuadores saturantes, bem como o problema de *co-design* para ambos os casos. Além disso, problemas de otimização são apresentados para lidar com alguns dos casos possíveis no projeto dos controladores baseados em eventos, e exemplos numéricos são utilizados para validar e comparar os resultados obtidos com os presentes na literatura.

No Capítulo 4, a realimentação de estados baseada em um observador é abordada, inicialmente para o caso onde o modelo do observador é exato, e posteriormente para o caso onde existem incertezas paramétricas no modelo. É mostrado ainda como utilizar os problemas de otimização propostos para determinar os parâmetros da função de disparo, e exemplos numéricos ilustram os resultados obtidos.

Por fim, no Capítulo 5 são apresentadas conclusões e algumas discussões sobre as perspectivas de trabalhos futuros.

2 CONCEITOS PRELIMINARES

Neste capítulo serão apresentados os conceitos utilizados ao longo do desenvolvimento deste trabalho. Primeiramente, conceitos gerais a respeito do controle baseado em eventos serão abordados. Depois, será apresentado o conceito de estabilidade no sentido de Lyapunov, especialmente a caracterização da estabilidade interna de um sistema. A seguir, serão expostos alguns resultados encontrados na literatura para o tratamento de sistemas sujeitos à saturação. Na sequência, será feita a caracterização das incertezas do tipo politópico. Por fim, serão abordados os métodos e lemas utilizados na formulação dos problemas na forma de LMIs.

2.1 Controle Baseado em Eventos

Os NCSs são, em geral, implementados em plataformas digitais. Assim, a maioria desses sistemas de controle são baseados na amostragem periódica dos estados ou saídas da planta, de forma a ser possível a utilização das técnicas clássicas de controle discreto, (veja, por exemplo, (CHEN, 1999), (ÅSTRÖM; WITTENMARK, 1997)). Contudo, a utilização dessas técnicas, apesar de vantajosas do ponto de vista de análise e síntese dos sistemas de controle, implica em um uso ineficiente dos recursos de rede. O paradigma de controle baseado em eventos tem sido proposto como uma das formas de se aumentar a eficiência do uso destes recursos, o que foi evidenciado em alguns estudos comparativos, como (KOPETZ, 1993), (ÅSTRÖM; BERNHARDSSON, 1999).

Assim, nesta seção são apresentados os conceitos fundamentais de controle baseado em eventos, as funções de disparo quadráticas, o problema de *co-design* e o problema da existência de *Zeno-behavior*, tópicos de interesse do controle baseado em eventos.

2.1.1 Conceitos Fundamentais

O controle baseado em eventos se diferencia do controle periódico por executar uma tarefa de controle (que usualmente envolve a atualização do controlador e envio do novo valor do sinal de controle ao atuador) apenas quando um evento é gerado (ÅSTRÖM, 2008), o que ocorre sempre que uma determinada função de disparo ultrapassa um certo limite. Assim, uma estratégia de controle baseada em eventos pode ser dividida em duas partes: uma lei de controle estabilizante, que fornece um sinal de controle ao atuador com base na informação enviada pelos sensores e um gerador de eventos, o qual avalia a função de disparo e determina quando o sinal de controle deve ser atualizado. Dessa forma, o dispositivo gerador de eventos é o responsável por monitorar o estado atual do sistema e decidir se é necessário que a informação dos sensores seja utilizada na atualização do sinal de controle ou não. Isso é feito através da função de disparo, que consiste em um valor

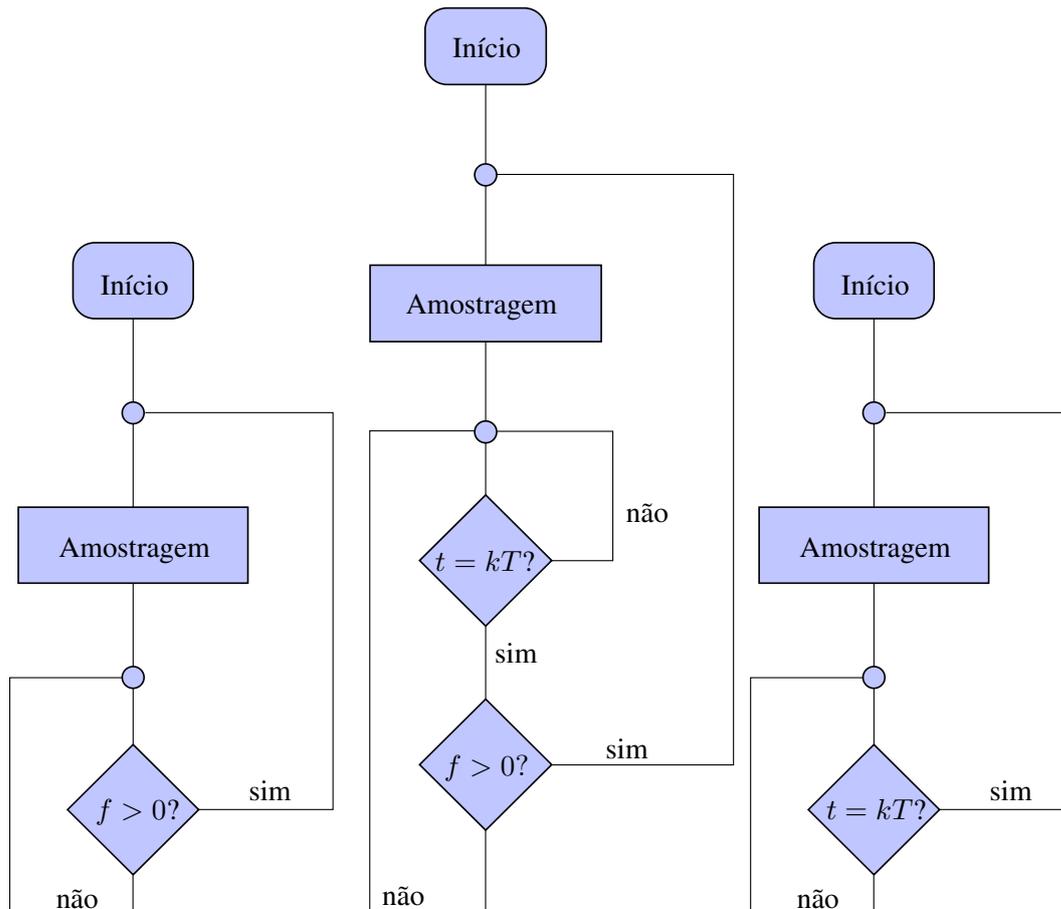


Figura 1: Estratégias de controle.

numérico, o qual é comparado a uma determinada constante (limiar) e, quando a condição de disparo é violada (ou seja, quando a função de disparo ultrapassa um determinado limiar), um evento é gerado, o que sinaliza que o sinal de controle aplicado à planta deve ser atualizado com base nos valores medidos pelos sensores.

Para melhor entender o funcionamento do controle baseado em eventos, a Figura 1 apresenta uma comparação entre os procedimentos de amostragem baseada em eventos contínua e discreta e a amostragem periódica. No primeiro caso, a função de disparo é monitorada constantemente e um evento é gerado no instante em que a condição de disparo for violada. Embora muito estudada, esta abordagem é pouco prática, já que em geral o monitoramento da função de disparo é feita por dispositivos digitais, ou seja, é realizada em intervalos de tempo discretos. O segundo caso retrata esta situação, onde a função de disparo é monitorada apenas nos instantes de tempo $t = kT$, onde T é o período de amostragem nominal, ou seja, o menor intervalo de tempo que pode decorrer entre duas atualizações. Já o terceiro caso consiste no controle discreto clássico, ou seja, o sistema é amostrado e o controle é atualizado em todos os instantes de tempo $t = kT$.

2.1.2 Função de Disparo Quadrática

Como mencionado anteriormente, o controle baseado em eventos é fundamentado na avaliação do valor de uma função de disparo, a qual gera um evento quando ultrapassa

um determinado limiar. Nesse sentido, as funções quadráticas na forma:

$$f(\xi[k]) = \xi[k]'Q\xi[k], \quad (1)$$

onde $\xi[k]$ denota o vetor de variáveis monitoradas, são uma importante classe de funções de disparo, sendo amplamente encontradas na literatura, mesmo que nem sempre escritas na forma (1). Por exemplo, considerando $x[k]$ o estado do sistema e $\delta[k] = x[n_i] - x[k]$, onde $x[n_i]$ é o valor do estado no último evento ocorrido, a condição de disparo $\|\delta[k]\| \leq \sqrt{\sigma}\|x[k]\|$ pode ser escrita a partir de uma função na forma de (1) considerando:

$$\xi[k] = [x[k]' \quad \delta[k]']', \quad Q = \begin{bmatrix} -\sigma & 0_* \\ * & I \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\delta[k] = x[n_i] - x[k]. \quad (3)$$

Assim, sempre que $f(\xi[k]) > 0$, um evento ocorrerá.

Diferentes formulações de condições de disparo da literatura expressas na forma de funções quadráticas podem ser encontradas em (HEEMELS; DONKERS; TEEL, 2011). Outros resultados consideram diretamente uma função quadrática, por exemplo em (SBARBARO; TARBOURIECH; GOMES DA SILVA Jr, 2014) ou uma função de Lyapunov quadrática é usada para a geração de eventos, como em (VELASCO; MARTÍ; BINI, 2009), (MARCHAND et al., 2013).

Além disso, pode-se considerar o caso em que o limiar da função de disparo é diferente de zero, por exemplo em (LEHMANN; JOHANSSON, 2012), para o qual, a função na forma (1) pode ser dada por:

$$\xi[k] = \delta[k], \quad Q = I, \quad (4)$$

e um evento é gerado quando $f(\xi[k]) \geq \kappa$. Apesar de esta estratégia ter alguns benefícios (como a não ocorrência de *Zeno-behavior*, veja adiante), não é possível garantir a estabilidade assintótica do sistema nesse caso, pois a condição de disparo nunca será violada próximo a origem. Este tipo de condição de disparo faz com que a convergência se dê para um ponto de equilíbrio diferente da origem, no caso de sistemas estáveis, ou que as trajetórias do sistema convirjam para um ciclo-limite, quando a planta é instável.

No presente trabalho, será utilizada uma generalização de (2), na forma:

$$\xi[k] = [x[k]' \quad \delta[k]']', \quad Q = \begin{bmatrix} -Q_\sigma & 0_* \\ * & Q_\delta \end{bmatrix}, \quad (5)$$

ou, alternativamente, $f(\delta[k], x[k]) = \delta[k]'Q_\delta\delta[k] - x[k]'Q_\sigma x[k]$.

2.1.3 Problema de Co-Design

Geralmente, os projetistas de sistemas de controle e de redes de comunicação perseguem seus diferentes objetivos de projeto em relativo isolamento, e no controle baseado em eventos isso não é diferente. A maioria dos estudos sobre controle baseado em eventos considera que um controlador estabilizante foi projetado *a priori*, e então são propostas condições para que o sistema se mantenha estável sob uma amostragem aperiódica, no que alguns autores chamam de projeto baseado em emulação (ou *emulation based design*) (HEEMELS; JOHANSSON; TABUADA, 2012). Essa “separação de interesses” é confortável do ponto de vista dos projetistas, mas obriga que cada parte do projeto seja

feita de forma conservadora, muitas vezes levando a sistemas superdimensionados, de acordo com (LEMMON, 2010).

O problema de *co-design* em sistemas de controle baseado em eventos consiste no projeto simultâneo de ambas as partes do sistema de controle, ou seja, da lei de controle e da função de disparo. Com isso, pode-se escolher uma lei de controle que minimize a necessidade de transmissão de dados ou uma função de disparo menos conservadora que garanta determinadas condições de performance do sistema em malha fechada.

2.1.4 Existência de Intervalo Mínimo entre Eventos

Uma das preocupações ao se projetar um sistema de controle baseado em eventos é garantir que existe um intervalo de tempo mínimo e não nulo entre dois eventos, pois caso isso não seja possível, o sistema pode apresentar o que se chama de *Zeno-behavior*, que é um fenômeno em que o período entre dois eventos se torna nulo, forçando uma amostragem infinitamente rápida, o que é impraticável (LEMMON, 2010). No contexto de sistemas contínuos, (TABUADA, 2007) demonstrou a existência de um intervalo mínimo garantido para a função de disparo (2), considerando $x(t)$ o estado completo da planta. No entanto, para uma realimentação de saída onde se considera $x(t)$ como o estado do controlador $x_c(t)$, a mesma função pode apresentar *Zeno-behavior*.

Para compreender melhor esse fenômeno, considere uma realimentação dinâmica de saída e uma função de disparo do tipo

$$f(\delta(t), x_c(t)) = -\|x_c(t)\| + \alpha\|\delta(t)\|, \quad (6)$$

a qual gera um evento sempre que $f(\delta(t), x_c(t)) > 0$. Caso ocorra uma amostragem em um instante t_k em que $x_c(t_k) = 0$ e o estado da planta $x_p(t_k) \neq 0$, então

$$f(\delta(t_k), x_c(t_k)) = 0 \quad \dot{f}(x_c(t_k), \delta(t_k)) > 0 \quad (7)$$

e, após um período infinitesimal, ocorrerá um novo evento. Como nenhum período de tempo finito foi decorrido, a mesma situação se apresentará, de modo que infinitos eventos ocorreriam antes que o estado do sistema pudesse evoluir.

Por outro lado, quando se trata de sistemas discretos, o período de amostragem nominal é sempre um limitante inferior intrínseco, sendo esta uma das principais vantagens do controle baseado em eventos para sistemas discretos em relação a sistemas contínuos (HEEMELS; DONKERS; TEEL, 2011). Assim, é suficiente garantir que $f \leq 0$ nos instantes de amostragem n_i para se assegurar que não ocorrerão dois eventos no mesmo instante.

2.2 Estabilidade de Sistemas Dinâmicos

Uma das mais importantes características de um dado sistema é a estabilidade, uma vez que sistemas instáveis em malha fechada são, em geral, pouco úteis e muitas vezes perigosos (SLOTINE; LI et al., 1991). Na área de controle baseado em eventos, a teoria de Lyapunov tem se provado uma forma eficiente para a caracterização da estabilidade interna dos sistemas (HEEMELS; JOHANSSON; TABUADA, 2012). Além disso, esta teoria é a principal forma de análise da estabilidade em sistemas incertos ou com não-linearidades (KHALIL, 1996), que serão abordados neste trabalho. Assim, nesta seção são apresentados o conceito de estabilidade no sentido de Lyapunov e o segundo método (também chamado método direto) de Lyapunov, bem como suas aplicações para sistemas em tempo discreto.

2.2.1 Estabilidade no Sentido de Lyapunov

O estudo da estabilidade de um sistema baseado na teoria de Lyapunov está relacionado à estabilidade de seus pontos de equilíbrio. Desse modo, considerando o seguinte sistema dinâmico em tempo discreto:

$$x[k + 1] = g(x[k]), \quad (8)$$

as seguintes definições podem ser feitas:

Definição 1. Um estado x^* será considerado um ponto de equilíbrio do sistema se, uma vez que $x[k] = x^*$ em $k = k_1$, $x[k]$ permanecerá igual a x^* para qualquer $k \geq k_1$, ou seja, tenha-se que $g(x^*) = x^* \quad \forall k \geq k_1$.

Para a análise de estabilidade no sentido de Lyapunov, é conveniente que o ponto de equilíbrio em análise esteja na origem, ou seja, $x^* = 0$. Quando o ponto estiver deslocado, ele pode ser transferido para a origem por uma troca de variáveis (SLOTINE; LI et al., 1991).

Definição 2. Seja $x = 0$ um ponto de equilíbrio do sistema (8). Ele será considerado estável se para todo $\bar{r} > 0$ existir um $\underline{r} > 0$ tal que:

$$\|x(0)\| < \underline{r} \implies \|x[k]\| < \bar{r}, \quad \forall k \geq 0. \quad (9)$$

Este ponto será considerado assintoticamente estável se, além disso,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x[k]\| = 0. \quad (10)$$

Essa definição de estabilidade, chamada estabilidade no sentido de Lyapunov, significa que, se um ponto de equilíbrio é estável, as trajetórias do sistema podem ser mantidas arbitrariamente próximas do ponto de equilíbrio se elas se iniciarem suficientemente próximas a ele. Caso isso não seja possível, o ponto de equilíbrio será considerado instável (SLOTINE; LI et al., 1991).

Uma forma de se verificar a estabilidade interna do sistema é a aplicação do segundo método de Lyapunov, que consiste na utilização de uma função escalar dos estados do sistema. Caso essa função seja positiva e decrescente em uma região em torno do ponto de equilíbrio, os estados se aproximam deste, e portanto ele é assintoticamente estável. O teorema a seguir formaliza este método:

Teorema 2.1 (Teorema de Lyapunov para Sistemas Discretos, (ÅSTRÖM; WITTENMARK, 1997)). *Seja $x = 0$ um ponto de equilíbrio de (8) e $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$, ele será considerado localmente estável caso exista uma função escalar $V : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R}$ contínua em x , tal que $V(0) = 0$ e:*

$$V(x) > 0, \quad \forall x \in \mathcal{D} - \{0\}, \quad (11)$$

$$\Delta V(x) = V(g(x)) - V(x) \leq 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}. \quad (12)$$

Além disso, se $\Delta V(x) < 0, \forall x \neq 0$, ele será considerado localmente assintoticamente estável.

Um ponto de equilíbrio pode ainda ser considerado globalmente estável, caso $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$ e $V(x)$ seja radialmente ilimitada, ou seja, $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$.

Em geral, muitas funções de Lyapunov podem existir para o mesmo sistema. Como as condições do teorema de Lyapunov são apenas suficientes para provar a estabilidade de um sistema, caso uma função candidata satisfaça as condições do teorema de Lyapunov, pode-se garantir que o ponto de equilíbrio em questão é estável. Caso contrário, nada pode-se afirmar sobre a estabilidade ou instabilidade do sistema, apenas que alguma outra função de Lyapunov pode ser capaz de demonstrar a sua estabilidade. Dessa forma, o principal obstáculo no uso da teoria de Lyapunov está em encontrar uma função adequada.

Uma função comumente utilizada como candidata a função de Lyapunov é a função quadrática de forma:

$$V(x) = x'Px = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_{ij}x_i x_j, \quad (13)$$

na qual P é uma matriz simétrica definida positiva. Quando (8) é um sistema linear, ou seja, $g(x) = Ax[k]$, a variação de $V(x)$ é dada por:

$$\Delta V(x) = x[k]'(A'PA - P)x[k], \quad (14)$$

de forma que o conjunto de LMIs

$$P > 0, \quad A'PA - P < -Q, \quad (15)$$

com $Q > 0$, fornece uma condição suficiente e necessária para a estabilidade do sistema em questão (ÅSTRÖM; WITTENMARK, 1997).

2.2.2 Região de Atração

De modo geral, a estabilidade de sistemas não-lineares não pode ser caracterizada de forma global. Nesse caso, torna-se importante determinar, além da estabilidade de um ponto de equilíbrio, a sua região de atração. A região de atração da origem do sistema (8) é definida como segue.

Definição 3. (TARBOURIECH et al., 2011) *Seja $x(k, x[0])$ a trajetória do sistema (8) iniciada em $x[0]$. A região de atração \mathcal{R}_A da origem é definida como:*

$$\mathcal{R}_A = \{x \in \mathbb{R}^n : x(k, x[0]) \rightarrow 0 \text{ quando } k \rightarrow \infty\}. \quad (16)$$

No caso de sistemas lineares, caso uma trajetória do sistema seja convergente, então todas as trajetórias também serão (ÅSTRÖM; WITTENMARK, 1997). Em outras palavras, $\mathcal{R}_A = \mathbb{R}^n$ para qualquer sistema linear estável. Por outro lado, a caracterização da região de atração de sistemas não-lineares é, em geral, uma tarefa difícil, uma vez que esta pode ser não-convexo ou até mesmo ilimitada (KHALIL, 1996). Assim, torna-se útil caracterizar um conjunto de condições iniciais para o qual se garante a convergência das trajetórias para a origem e que possa ser tratado de forma numérica ou analítica, e utilizar este conjunto como uma estimativa da região de atração do sistema. Esta estimativa, chamada de região de estabilidade assintótica (RAS, do inglês *region of asymptotic stability*) pode ser definida como segue.

Definição 4. (TARBOURIECH et al., 2011) *Uma região \mathcal{R}_S é uma RAS do sistema (8) se:*

$$\forall x[0] \in \mathcal{R}_S, \quad x(k, x[0]) \rightarrow 0 \text{ quando } k \rightarrow \infty \quad (17)$$

Evidentemente, pela Definição 3, \mathcal{R}_S é um subconjunto de \mathcal{R}_A , ou seja, $\mathcal{R}_S \subseteq \mathcal{R}_A$.

Uma das formas de se obter uma RAS de um determinado sistema é através da utilização de curvas de nível da função de Lyapunov, ou seja, garante-se que $\Delta V \leq 0, \forall x \in \mathcal{R}_S$ e $\mathcal{R}_S = \{x : x'Px \leq c\}$. A vantagem deste método é que garante-se que \mathcal{R}_S seja um conjunto invariante.

2.3 Sistemas Incertos

A maioria dos sistemas de controle são baseados em modelos matemáticos. No entanto, estes modelos são aproximações do comportamento do sistema real, sendo que cabe ao projetista avaliar a aplicabilidade de uma solução baseada em determinado modelo. Ao levar e conta as inadequações e incertezas dos modelos durante a elaboração do sistema de controle, o projetista pode ter uma maior segurança de que o sistema resultante funcionará da forma esperada (ZHOU et al., 1996).

As incertezas presentes no modelo podem surgir de parâmetros desconhecidos no momento da análise ou até mesmo de dinâmicas não modeladas, geralmente devido à complexidade que estas agregariam ao modelo. Muitas vezes, é preferível a utilização de um modelo mais simples com a adição de incertezas para tratar possíveis dinâmicas omitidas (DULLERUD; PAGANINI, 2000). No contexto de NCSs baseados em evento, além da existência de incertezas paramétricas, existem ainda incertezas devido a variações nos parâmetros da rede e dos dispositivos digitais, como o período de amostragem e o atraso de transporte, fenômenos que podem ser modelados na forma de incertezas (HETEL; DAAFOUZ; IUNG, 2008). Assim, nesta seção é feita a caracterização do modelo de incertezas politópicas considerado neste trabalho.

2.3.1 Modelagem Politópica das Incertezas

Seja o seguinte sistema linear incerto em tempo discreto:

$$x[k+1] = A(\eta)x[k], \quad \forall \eta \in \mathcal{B}_\eta = \{\eta_i : |\eta_i| \leq \beta_i, i = 1, \dots, n\}, \quad (18)$$

onde η é um vetor de parâmetros incertos, \mathcal{B}_η é um politopo com 2^n vértices, sendo n o número de parâmetros incertos e β_i é o maior valor admissível para a incerteza do i -ésimo parâmetro, ou seja, $-\beta_i \leq \eta_i \leq \beta_i$, como exemplifica a Figura 2 para $n = 2$, onde a região hachurada corresponde aos possíveis valores dos parâmetros. Então, tem-se que:

$$A(\eta) \in \mathcal{A} = \left\{ A_0 + A_\Delta : A_\Delta = \sum_{j=1}^{2^n} q_j A_{\Delta j}, \sum_{j=1}^{2^n} q_j = 1, q_j \geq 0 \right\}, \quad (19)$$

com \mathcal{A} sendo um conjunto convexo e fechado, a matriz A_0 definida como $\mathcal{A}(0)$ e as matrizes $A_{\Delta j}$ construídas a partir de $\mathcal{A}(\eta) - A_0$ nos vértices do politopo \mathcal{B}_η . Além disso, por essa definição, tem-se que $A_\Delta \in \text{Co}\{A_{\Delta j}\}$. Nesse caso, a matriz A_0 é a matriz de transição de estados nominal do sistema, enquanto A_Δ é uma matriz de incertezas aditivas.

Uma das principais vantagens da representação politópica é que o conjunto resultante é convexo, de modo que, se um conjunto de condições forem satisfeitas nos vértices do politopo, essas mesmas condições estarão satisfeitas em todo o envelope convexo formado por esses vértices (BOYD; VANDENBERGHE, 2004). No entanto, o número de vértices cresce exponencialmente com o número de parâmetros incertos, o que torna a resolução de problemas com diversas incertezas custosa de um ponto de vista numérico.

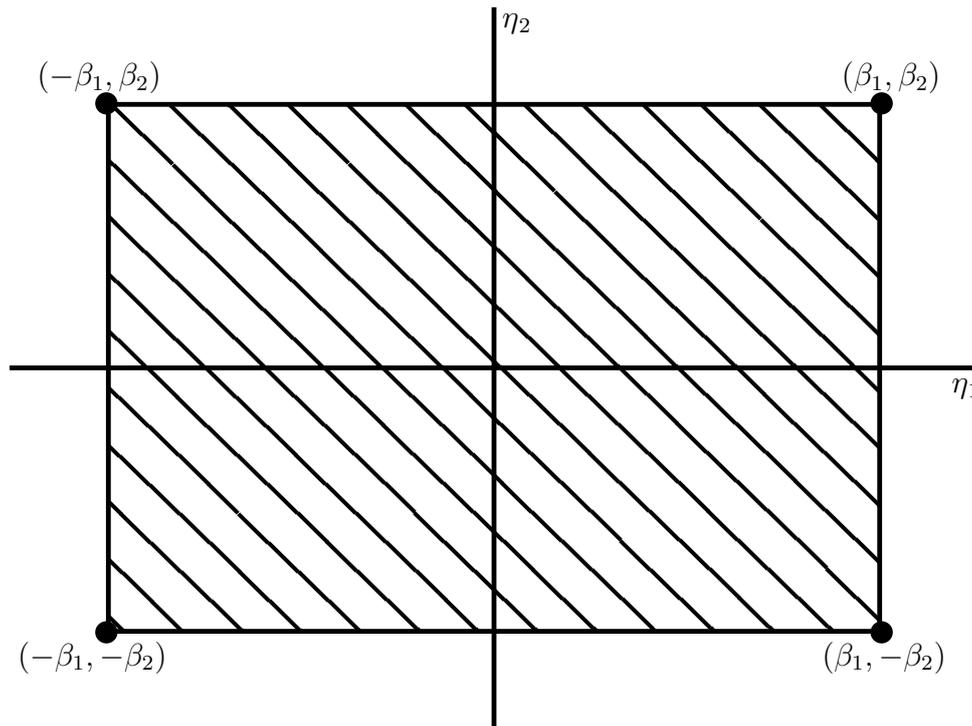


Figura 2: Polígono de incertezas \mathcal{B}_η com 2 parâmetros e 4 vértices.

2.4 Sistemas Sujeitos à Saturação

Embora muitos sistemas possam ser satisfatoriamente aproximados por modelos lineares, a maioria dos sistemas reais apresentam limitações físicas que restringem os sinais de controle que são efetivamente aplicados à planta. A saturação dos atuadores é uma das mais comuns dessas limitações, e seus efeitos devem ser previstos, de forma a evitar comportamentos indesejados do sistema (SLOTINE; LI et al., 1991).

Os sistemas lineares com saturação do atuador estão no limite entre sistemas lineares e não-lineares, uma vez que o sistema pode apresentar comportamentos lineares em uma determinada região e comportamentos não-lineares em outra região, especialmente em malha fechada. Embora a saturação possa parecer uma não-linearidade simples, ela faz parte da classe de não-linearidades ditas “duras”, assim como a histerese e a zona-morta, e é de difícil tratamento matemático (TARBOURIECH et al., 2011).

A literatura apresenta alguns métodos para se lidar com atuadores saturantes, destacando-se entre eles a modelagem politópica, a modelagem por regiões de saturação e a modelagem por não-linearidades de setor (TARBOURIECH et al., 2011). O primeiro deles se baseia na utilização de inclusões diferenciais politópicas para descrever localmente o sistema. Mais informações sobre este tipo de modelagem podem ser encontradas no trabalho original (MOLCHANOV; PYATNITSKIY, 1989) e em outras generalizações do método, por exemplo (HU; LIN, 2001) e (ALAMO; CEPEDA; LIMON, 2005). O segundo método é baseado na divisão do espaço de estados do sistema em regiões, onde em cada região a dinâmica do sistema é descrita por um sistema linear. Este tipo de modelagem é utilizada em (GOMES DA SILVA Jr et al., 1997) e (MILANI, 2002). Já o terceiro método, que será utilizado neste trabalho, é baseado em uma condição de setor, e será explicado em mais detalhes a seguir.

2.4.1 Modelo de Não-Linearidade de Setor

Considere a seguinte definição:

Definição 5 ((TARBOURIECH et al., 2011)). *Uma não-linearidade $\phi_0(x)$ satisfaz uma condição de setor se*

$$(\phi_0(x) - L_2x)'(\phi_0(x) - L_1x) \leq 0, \quad \forall x \in \mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^n, \quad (20)$$

para matrizes reais L_1 , L_2 e $L = L' = L_1 - L_2 > 0$ e $0 \in \mathcal{S}$. Caso a condição seja satisfeita para $\mathcal{S} = \mathbb{R}^n$, então diz-se que $\phi_0(x)$ satisfaz a condição de setor globalmente.

Quando uma determinada não-linearidade $\phi_0(x)$ satisfaz a condição (20), diz-se que $\phi_0(x)$ pertence ao setor $[L_1, L_2]$. Seja a função saturação $\text{sat}(v) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida como:

$$\text{sat}(v)_i = \text{sat}(v_i) = \begin{cases} -\mu_{0i} & \text{se } v_i < -\mu_{0i} \\ v_i & \text{se } -\mu_{0i} \leq v_i \leq \mu_{0i}, \quad \forall i \in 1, \dots, m, \\ \mu_{0i} & \text{se } v_i > \mu_{0i} \end{cases} \quad (21)$$

pode-se observar que $\text{sat}(v)$ pertence globalmente ao setor $[0, I]$ e localmente ao setor $[\alpha_1 I, I]$, para $\alpha_1 \leq 1$, sendo que se $\alpha_1 = 1$ a condição de setor é satisfeita apenas na região linear. Agora, observe que a saturação pode ser descrita a partir de uma não-linearidade do tipo zona-morta $\phi(v) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, da seguinte maneira:

$$\phi(v) = v - \text{sat}(v), \quad (22)$$

ou seja:

$$\phi(v)_i = \phi(v_i) = \begin{cases} v_i + \mu_{0i} & \text{se } v_i < -\mu_{0i} \\ 0 & \text{se } -\mu_{0i} \leq v_i \leq \mu_{0i}, \quad \forall i \in 1, \dots, m. \\ v_i - \mu_{0i} & \text{se } v_i > \mu_{0i} \end{cases} \quad (23)$$

Assim como $\text{sat}(v)$, $\phi(v)$ pertence globalmente ao setor $[0, I]$. Porém, diferentemente da saturação, ela pertence localmente ao setor $[0, \alpha_2 I]$, para $\alpha_2 < 1$. A Figura 3 apresenta uma comparação das não-linearidades, satisfazendo uma condição global e uma condição local com $\mathcal{S} = \{v : |v| \leq v_1\}$.

Dessa forma, o seguinte lema pode ser enunciado:

Lema 2.1 (Condição de Setor Clássica (TARBOURIECH et al., 2011)). *Sejam a matriz $H = \text{diag}(h_1, \dots, h_m) \leq I$, o vetor μ_0^H , com $\mu_{0i}^H = \mu_{0i}(1 - h_i)^{-1}$, e o conjunto $\mathcal{S}_0 = \{x : |K_i x| \leq \mu_{0i}^H, i = 1, \dots, m, i = 1, \dots, m\}$, então a relação:*

$$\phi(Kx)'T(\phi(Kx) - HKx) \leq 0, \quad (24)$$

com T sendo uma matriz diagonal definida positiva, é satisfeita sempre que $x \in \mathcal{S}_0$.

Note que quando $T = I$ esta relação é equivalente à condição (20), com $L_2 = 0$ e $L_1 = H$. Além disso, para qualquer T diagonal e definida positiva, caso uma das relações seja verificada, a outra também será. Esta condição de setor se aplica a uma classe de não-linearidades da qual a zona-morta faz parte, ou seja, quando o Lema 2.1 é utilizado para se provar a estabilidade de um sistema com a não-linearidade de zona-morta, na verdade a estabilidade está sendo garantida para uma classe maior de sistemas, o que pode ser conservador (TARBOURIECH et al., 2011). Por outro lado, a seguinte condição de setor modificada se aplica especificamente à zona-morta:

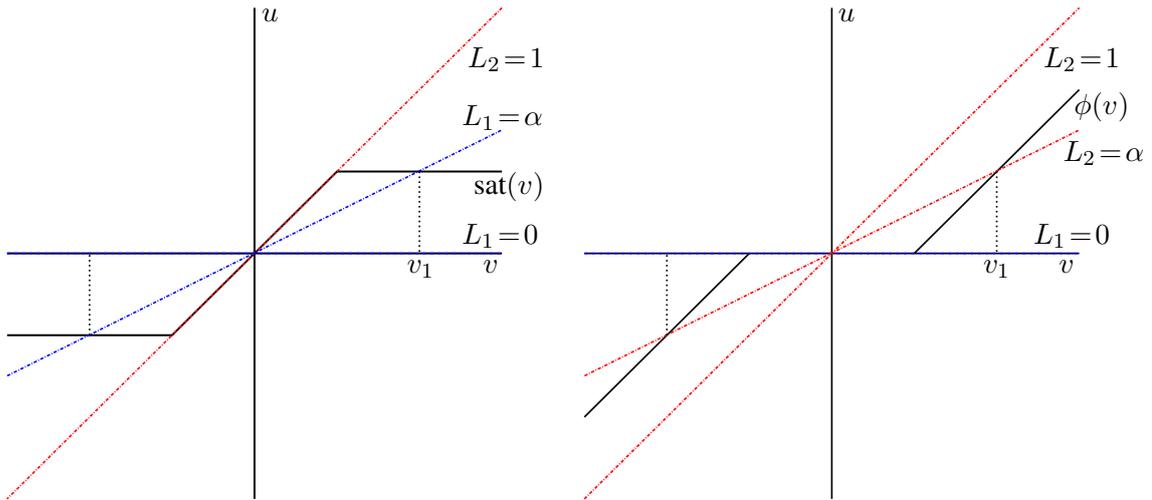


Figura 3: Condição de setor globalmente satisfeita $[0, 1]$, e setores $[\alpha, 1]$ e $[0, \alpha]$ para as não-linearidades $\text{sat}(v)$ e $\phi(v)$, respectivamente.

Lema 2.2 (Condição de Setor Generalizada (GOMES DA SILVA Jr; TARBOURIECH, 2004)). *Seja o conjunto $\mathcal{S} = \{x : |(K_i - G_i)x| \leq \mu_{0i}\}$, então a relação:*

$$\phi(Kx)'T(\phi(Kx) - Gx) \leq 0, \quad (25)$$

com T sendo uma matriz diagonal definida positiva, é satisfeita sempre que $x \in \mathcal{S}$.

Pode-se perceber que o Lema 2.1 é um caso particular do Lema 2.2 quando $G = HK$, ou seja, o Lema 2.2 é mais genérico e, portanto, menos conservador.

2.5 Desigualdades Matriciais Lineares

O uso de LMIs é muito importante na análise e síntese de sistemas de controle, pois é possível se reduzir uma ampla gama de problemas de controle a problemas de otimização convexos, os quais podem ser resolvidos numericamente de forma eficiente (BOYD et al., 1994). O desafio consiste então em formular condições para a resolução do problema na forma de LMIs, já que muitas vezes termos não-lineares estão presentes na formulação resultante. Nesta seção, são apresentadas a definição de LMI e algumas das técnicas empregadas no tratamento das mesmas.

2.5.1 Definição

Uma LMI estrita é uma desigualdade da forma:

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0, \quad (26)$$

onde $x \in \mathbb{R}^m$ é um vetor de variáveis e as matrizes simétricas $F_i = F_i' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ são conhecidas. Caso $F(x) \geq 0$, a desigualdade é dita não estrita. Uma das propriedades fundamentais das LMIs é que a restrição (26) é convexa em x , ou seja, o conjunto de soluções $\mathcal{X} = \{x : F(x) > 0\}$ é convexo, de modo que um problema na forma:

$$\begin{aligned} \text{minimize: } & c'x \\ \text{sujeito a: } & F(x) > 0, \end{aligned} \quad (27)$$

seja um problema de otimização convexo (BOYD et al., 1994).

2.5.2 Complemento de Schur

O Complemento de Schur é uma ferramenta muito útil para se converter desigualdades matriciais não-lineares em LMIs equivalentes. Ele pode ser enunciado da seguinte forma:

Lema 2.3 (Complemento de Schur (BOYD et al., 1994)). *Sejam $Q = Q'$, $R = R'$ e S matrizes reais de dimensões apropriadas. Então:*

$$i) R > 0, \quad Q - SR^{-1}S' > 0, \quad (28)$$

$$ii) \begin{bmatrix} Q & S \\ * & R \end{bmatrix} > 0 \quad (29)$$

são equivalentes.

Desta forma, a desigualdade quadrática (28) pode ser transformada na LMI (29), que pode ser eficientemente tratada por métodos computacionais.

2.5.3 S-Procedure

Comumente são encontrados casos em que se deseja garantir a definição em sinal de uma função quadrática sempre que outra função quadrática for definida em sinal. O S-procedure é uma ferramenta que permite a aproximação deste tipo de restrição através de uma LMI. O S-procedure para desigualdades estritas é apresentado a seguir.

Lema 2.4 (S-procedure (BOYD et al., 1994)). *Sejam $T_0, \dots, T_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrizes simétricas. Se existirem escalares positivos τ_1, \dots, τ_p tais que:*

$$T_0 - \sum_{i=1}^p \tau_i T_i > 0, \quad (30)$$

então

$$x'T_0x > 0, \quad \text{para todo } x \neq 0 \text{ tal que } x'T_i x \geq 0, \quad i = 1, \dots, p \quad (31)$$

é verificada.

2.5.4 Outros Lemas

Além do complemento de Schur e do S-procedure, os seguintes lemas serão utilizados neste trabalho para a obtenção de formulações LMI.

Lema 2.5. *Sejam U, V e $X = X' > 0$ matrizes de dimensões apropriadas. Então, as relações:*

$$V'U + U'V \leq U'XU + V'X^{-1}V \quad (32)$$

$$-V'U - U'V \leq U'XU + V'X^{-1}V \quad (33)$$

são verificadas.

Lema 2.6 ((SEURET; GOMES DA SILVA Jr, 2012)). *Seja $\bar{X} = M'XM$ e $X > 0$. Se:*

$$\begin{bmatrix} X_0 & I \\ * & M + M' - \bar{X} \end{bmatrix} > 0, \quad (34)$$

então $X < X_0$.

2.6 Considerações Finais

Neste capítulo, inicialmente foram apresentados os conceitos básicos relativos ao controle baseado em eventos, bem como algumas das dificuldades encontradas no seu projeto. A seguir, foi apresentada a teoria de Lyapunov, que será fundamental na formulação de condições de estabilidade para os sistemas com controladores baseados em eventos. Além disso, foram discutidos os métodos de modelagem de incertezas e da função de saturação que serão utilizados na extensão dos resultados para sistemas incertos e para sistemas sujeitos à saturação. Por fim, foram abordadas as técnicas utilizadas para a obtenção de condições na forma de LMIs, o que permite a aplicação de problemas de otimização convexos para se determinar os parâmetros desconhecidos nas condições de estabilidade propostas. Nos próximos capítulos, estes conceitos serão utilizados para o desenvolvimento de metodologias de projeto de controladores baseados em eventos.

3 REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS BASEADA EM EVENTOS

3.1 Introdução

Este capítulo apresenta um método sistemático para o projeto de uma realimentação de estados baseada em eventos para sistemas em tempo discreto. A estratégia consiste no projeto de uma função de disparo que garante a estabilidade assintótica da origem do sistema a partir da aplicação de problemas de otimização a um conjunto de restrições LMIs.

A primeira parte do capítulo apresenta a formulação básica para a realimentação de estados baseada em eventos. A seguir, os resultados são estendidos para o caso em que ocorre saturação do atuador, utilizando-se a condição de setor generalizada para modelar o efeito da saturação. Na seção seguinte são apresentados problemas de otimização para possibilitar o projeto da função de disparo com base em determinados critérios. A fim de ilustrar os métodos propostos, o capítulo é encerrado com alguns exemplos numéricos e comentários finais.

3.2 Preliminares e Formulação do Problema

Nesta seção é apresentada a formulação básica do sistema de interesse e o projeto e a implementação da estratégia baseada em eventos. O sistema a ser controlado (planta) consiste em um sistema linear invariante no tempo. Assume-se que o controle da planta contínua é feito de maneira digital. Para tanto, considera-se um período nominal de amostragem T e assume-se que o sinal de controle aplicado à planta é constante entre 2 instantes de amostragem consecutivos. Neste caso, um modelo em tempo discreto, cujo valor do estado coincide com o estado em tempo contínuo, pode ser obtido. É considerado que o sistema possui um sensor digital capaz de medir o estado da planta com uma taxa de amostragem nominal elevada. Assume-se ainda que este sensor é um dispositivo inteligente capaz de rodar o sistema de controle e que há uma rede de comunicação entre o sensor e o atuador do sistema, através da qual é enviado o sinal de controle. A Figura 4 exemplifica o funcionamento do sistema em questão, onde n_i corresponde ao instante discreto do i -ésimo evento. Esta configuração tem sido comumente utilizada no estudo da estabilidade de NCSs sob diversas técnicas de amostragem, já que ela é capaz de representar uma ampla gama de configurações de rede, como exposto em (HESPANHA; NAGHSHTABRIZI; XU, 2007).

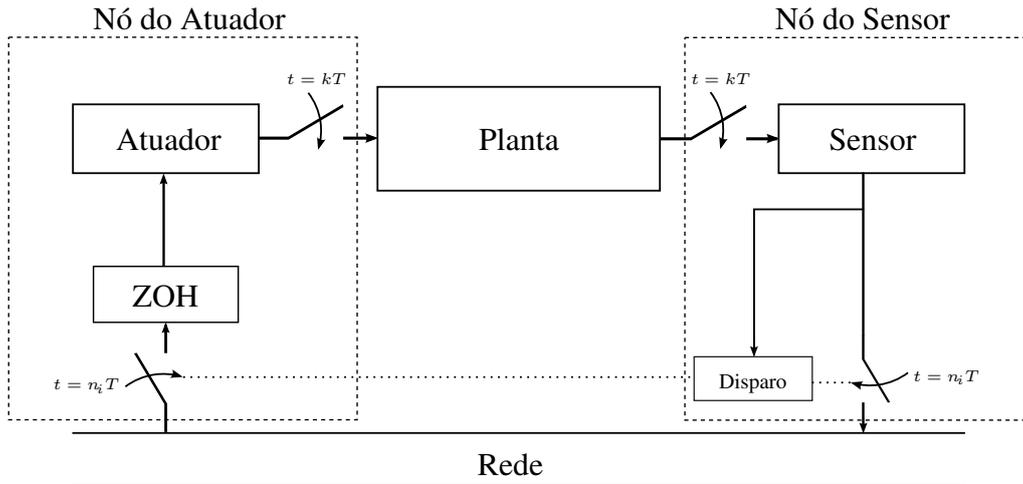


Figura 4: Topologia para realimentação de estados baseada em eventos.

3.2.1 Modelo da Planta em Tempo Discreto

Considere o seguinte sistema linear em tempo contínuo:

$$\dot{x}(t) = A_c x(t) + B_c u(t), \quad (35)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ e $u \in \mathbb{R}$ são os vetores de estado e entrada do sistema, respectivamente, e A_c e B_c são matrizes de dimensões apropriadas.

Suponha que o estado do sistema $x(t)$ é amostrado periodicamente por um sensor com período T . Além disso, considerando um segurador de ordem zero (ZOH), assuma que o sinal de entrada $u(t)$ é mantido constante entre dois instantes de amostragem, ou seja, $u(t) = u(kT)$, $\forall t \in [kT, (k+1)T]$. Dessa forma, o seguinte sistema em tempo discreto clássico pode representar o comportamento do sistema (35) nos instantes de amostragem (ÅSTRÖM; WITTENMARK, 1997):

$$x[k+1] = Ax[k] + Bu[k], \quad (36)$$

com:

$$A = e^{A_c T}, \quad B = B_c \int_0^T e^{A_c s} ds, \quad x[k] = x(kT), \quad u[k] = u(kT), \quad (37)$$

em que $x \in \mathbb{R}^n$ e $u \in \mathbb{R}$ são os vetores de estado e entrada em tempo discreto, respectivamente.

3.2.2 Controle com Amostragem Periódica

Agora, considere uma lei de controle de realimentação de estados dada por:

$$u[k] = K_c x[k], \quad (38)$$

onde $K_c \in \mathbb{R}^n$ é o ganho de realimentação projetado para estabilizar o sistema. Esta lei de controle leva ao seguinte sistema em malha fechada:

$$x[k+1] = (A + BK_c)x[k]. \quad (39)$$

O ganho K_c pode ser definido utilizando as técnicas clássicas de projeto para sistemas discretos, por exemplo, as descritas em (OGATA, 1995), (ÅSTRÖM; WITTENMARK, 1997). Se K_c for escolhido de modo que $(A + BK_c)$ seja Schur-estável, então o sistema em malha fechada será assintoticamente estável.

No entanto, observe que para garantir a estabilidade do sistema é necessário que o sinal de controle seja transmitido para o atuador a cada instante de tempo T . Caso o período de amostragem seja relativamente baixo, as atualizações do atuador serão muito frequentes, o que pode levar a problemas de congestionamento da rede. Além disso, em redes sem fio, o consumo de energia durante a transmissão de dados pode ser crítico. Consequentemente, a ideia é não enviar o sinal de controle atualizado periodicamente, através da implementação de um controle baseado em eventos.

3.2.3 Estratégia de Controle Baseado em Eventos

Utilizando-se esta estratégia de controle, a comunicação entre a planta e o controlador não é periódica. O sinal de controle é transmitido ao atuador apenas nos instantes de tempo $n_i, i = 1, 2, 3, \dots$, levando à seguinte lei de controle de realimentação de estados:

$$u[k] = u[n_i] = K_c x[n_i], \quad \forall k \in [n_i, n_{i+1}). \quad (40)$$

Então, a cada instante de amostragem periódico $t_k = kT$, deve ser realizada uma decisão em relação a amostrar ou não o estado da planta. Tal decisão é baseada em um evento associado à evolução da função de disparo.

Neste trabalho, seguindo as ideias propostas em (TABUADA, 2007) e (HEEMELS; DONKERS; TEEL, 2011), é definido:

$$x[k] = x[n_i] - \delta[k] \quad (41)$$

ou, equivalentemente, $\delta[k] = x[n_i] - x[k]$. Assim, $\delta[k]$ é uma medida da diferença entre o estado utilizado no cálculo do sinal de controle na última transmissão de dados e o atual estado da planta. Assim, a equação do sistema (39) pode ser reescrita como:

$$x[k+1] = (A + BK_c)x[k] + BK_c\delta[k] \quad (42)$$

Além disso, uma função de disparo $f(\delta[k], x[k])$ é considerada, de forma que a estratégia proposta consiste em aplicar o seguinte algoritmo:

Algoritmo 1 Estratégia de Controle Baseado em Eventos

```

if  $k = 0$  then
   $u[0] \leftarrow K_c x[0]$ 
   $i \leftarrow 1$ 
else
  if  $f(\delta[k], x[k]) > 0$  then
     $u[k] \leftarrow K_c x[k]$ 
     $i \leftarrow i + 1$ 
     $n_i \leftarrow k$ 
  else
     $u[k] \leftarrow u[n_i]$ 
  end if
end if

```

Esse algoritmo implica que se em qualquer instante de tempo $k \in \mathbb{Z}_+$ a função de disparo $f(\delta[k], x[k])$ for positiva, o sinal de controle será atualizado, ou seja, o sinal de controle será calculado a partir do valor do estado no instante atual e será enviado para o atuador.

Deseja-se então projetar uma função de disparo $f(\delta[k], x[k])$ que garanta que o sistema é assintoticamente estável sob a lei de controle (40). Além disso, deseja-se que os parâmetros da função sejam tais que o número de transmissões entre o sensor e o atuador seja reduzido, de forma a se obter uma diminuição no uso da rede de comunicação do sistema. Esses objetivos são resumidos no seguinte problema:

- P1 Dado um ganho de realimentação de estados K_c , determinar uma função de disparo $f(\delta[k], x[k])$ que garanta a estabilidade assintótica do sistema e reduza o número de eventos ocorridos em um determinado intervalo de tempo.

Além disso, existe ainda o problema de *co-design*, que pode ser formulado da seguinte maneira:

- P2 Determinar simultaneamente uma função de disparo $f(\delta[k], x[k])$ e um ganho de realimentação de estados K_c que garantam a estabilidade assintótica do sistema e reduzam o número de eventos ocorridos em um determinado intervalo de tempo.

3.3 Condições de Estabilidade Propostas

Nesta seção serão apresentadas condições para a estabilidade do sistema sob a estratégia baseada em eventos proposta. As condições serão formuladas na forma de LMIs, o que permite a aplicação de problemas de otimização convexos para a resolução de P1 e P2.

Neste caso, a seguinte função de disparo quadrática será utilizada:

$$f(\delta[k], x[k]) = \delta[k]'Q_\delta\delta[k] - x[k]'Q_\sigma x[k], \quad (43)$$

com a condição de disparo $f(\delta[k], x[k]) \leq 0$, ou seja, um evento será gerado sempre que a função de disparo se tornar positiva.

3.3.1 Condições para a Síntese da Função de Disparo

Considere a seguinte função quadrática candidata a função de Lyapunov associada ao sistema (42):

$$V(x[k]) = x[k]'Px[k]. \quad (44)$$

Seja $\Delta V(x) = V(x[k+1]) - V(x[k])$, tem-se que:

$$\begin{aligned} \Delta V(x[k]) = & x[k]'((A + BK_c)'P(A + BK_c) - P)x[k] + \\ & 2x[k]'(A + BK_c)'PBK_c\delta[k] + \\ & \delta[k]'(BK_c)'PBK_c\delta[k]. \end{aligned} \quad (45)$$

Definindo-se um vetor auxiliar:

$$\xi_0 = [x[k]' \ \delta[k]']', \quad (46)$$

pode-se reescrever (45) na forma:

$$\Delta V(x[k]) = \xi_0 \begin{bmatrix} ((A + BK_c)'P(A + BK_c) - P) & (A + BK_c)'PBK_c \\ * & (BK_c)'PBK_c \end{bmatrix} \xi_0'. \quad (47)$$

A partir da definição de $f(\delta[k], x[k])$, pode-se afirmar que, caso

$$\Delta V(x[k]) - \delta[k]'Q_\delta\delta[k] + x[k]'Q_\sigma x[k] < 0, \quad (48)$$

então $\Delta V(x[k]) < 0$, desde que $f(\delta[k], x[k]) \leq 0$.

Note que a equação (48) pode ser reescrita como:

$$\xi_0' \Psi_0 \xi_0 < 0, \quad (49)$$

com

$$\Psi_0 = \begin{bmatrix} ((A + BK_c)'P(A + BK_c) - P) + Q_\sigma & (A + BK_c)'PBK_c \\ * & (BK_c)'PBK_c - Q_\delta \end{bmatrix}. \quad (50)$$

Assim, o seguinte teorema pode ser enunciado:

Teorema 3.1. *Considere que K_c é tal que o sistema em tempo discreto (39) é assintoticamente estável sob uma estratégia de amostragem periódica. Se existirem matrizes simétricas definidas positivas P , Q_σ e Q_δ tais que*

$$\Psi_0 < 0, \quad (51)$$

então o sistema em malha fechada (42) é assintoticamente estável sob a estratégia baseada em eventos proposta no Algoritmo 1, com a função de disparo definida em (43).

Prova. Caso a relação (51) seja satisfeita, então (49) e consequentemente (48) também serão satisfeitas. Suponha agora que $n_{i+1} - n_i > 1$ e $k \in (n_i, n_{i+1})$. Nesse caso, pelo Algoritmo 1, tem-se que $f(\delta[k], x[k]) \leq 0$, ou seja

$$\delta[k]'Q_\delta\delta[k] - x[k]'Q_\sigma\bar{x}_s[k] \leq 0 \quad (52)$$

e, a partir de (48), segue que

$$\Delta V(x[k]) < 0, \quad \forall k \in (n_i, n_{i+1}). \quad (53)$$

Por outro lado, suponha que em um determinado instante k , $f(\delta, x) > 0$ (note que esta situação inclui o caso $n_{i+1} - n_i = 1$). Então, um evento ocorre e pelo Algoritmo 1 tem-se que $n_i = k$ e $\delta[k] = 0$, o que também implica que

$$\Delta V(x[k]) < 0, \quad \forall k = n_i, \quad i = 1, 2, \dots \quad (54)$$

Como resultado, conclui-se que $\Delta V(x[k]) < 0, \forall k \geq 0$ e o sistema em malha fechada é assintoticamente estável. \square

Observe que, para um K_c dado, (51) é uma LMI em P , Q_σ e Q_δ e, portanto, problemas de otimização convexos podem ser formulados a partir desta condição para a síntese de Q_σ e Q_δ . A formulação destes problemas de otimização será abordada na seção 3.5.

3.3.2 Condição para *Co-Design*

Para resolver o problema de *co-design*, é preciso considerar que K_c é uma variável a ser determinada. No entanto, quando isso é considerado, a desigualdade (51) deixa de ser uma LMI devido aos termos onde há a multiplicação entre K_c e P . Para que a desigualdade volte a ser uma LMI, observe que Ψ_0 pode ser escrito de forma análoga como:

$$\begin{bmatrix} -P + Q_\sigma & 0_* \\ * & -Q_\delta \end{bmatrix} + \Pi_0' P \Pi_0, \quad (55)$$

com:

$$\Pi_0 = \begin{bmatrix} (A + BK_c) & BK_c \end{bmatrix}. \quad (56)$$

Aplicando-se o Complemento de Schur a (55), chega-se a:

$$\begin{bmatrix} -P + Q_\sigma & 0_* & (A + BK_c)' \\ * & -Q_\delta & (BK_c)' \\ * & * & -W \end{bmatrix}. \quad (57)$$

Pré e pós-multiplicando-se (57) por:

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} W & 0_* & 0_* \\ * & W & 0_* \\ * & * & I \end{bmatrix} \quad (58)$$

e definindo-se as variáveis $W = P^{-1}$, $K_W = K_c W$, $Q_{W\sigma} = W Q_\sigma W$ e $Q_{W\delta} = W Q_\delta W$, obtém-se:

$$\tilde{\Psi}_0 = \begin{bmatrix} -W + Q_{W\sigma} & 0_* & WA' + K_W' B' \\ * & -Q_{W\delta} & K_W' B' \\ * & * & -W \end{bmatrix}. \quad (59)$$

Assim sendo, pode-se enunciar o seguinte corolário:

Corolário 3.1.1. *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas W , $Q_{W\sigma}$ e $Q_{W\delta}$ e uma matriz K_W de dimensões apropriadas tais que*

$$\tilde{\Psi}_0 < 0, \quad (60)$$

então o sistema em malha fechada (42) é assintoticamente estável sob a estratégia baseada em eventos proposta no Algoritmo 1, com a função de disparo definida em (43), considerando $Q_\sigma = W^{-1} Q_{W\sigma} W^{-1}$, $Q_\delta = W^{-1} Q_{W\delta} W^{-1}$ e o ganho de realimentação de estados dado por $K_c = K_W W^{-1}$.

Prova. A prova decorre diretamente da prova do Teorema 3.1, basta observar que $\tilde{\Psi}_0$ e Ψ_0 são congruentes, de modo que $\tilde{\Psi}_0 < 0$ é equivalente a $\Psi_0 < 0$. \square

A utilização de (60) para resolver P2 a partir de problemas de otimização será discutida na seção 3.5.

3.4 Extensão ao Caso de Sistemas com Saturação do Atuador

Nas seções 3.2 e 3.3, foram realizados a implementação e o projeto de um sistema de controle baseado em eventos considerando que o atuador é capaz de fornecer um sinal de entrada sem qualquer restrição de magnitude para a planta. No entanto, essa situação não ocorre na prática, já que existem limitações físicas com relação à magnitude do sinal fornecido ao sistema. Nesta seção, os resultados apresentados anteriormente são estendidos para tratar do problema da saturação em magnitude da saída do atuador.

3.4.1 Preliminares e Formulação do Problema

Considere o sistema apresentado em (36). Caso seja considerada a saturação do atuador, a entrada do sistema pode ser descrita por:

$$u[k] = \text{sat}(v[k]), \quad (61)$$

onde $v[k]$ é o sinal de saída do controlador e $\text{sat}(v[k])$ é a função de saturação padrão definida em (21). Esta função pode ser reescrita como uma função do tipo zona-morta da seguinte forma:

$$\phi(v[k]) = v[k] - \text{sat}(v[k]). \quad (62)$$

Considerando-se $\phi(v[k])$ e a lei de controle de realimentação de estados:

$$v[k] = K_c x[k], \quad (63)$$

a equação da dinâmica do sistema é dada por:

$$x[k+1] = (A + BK_c)x[k] - B\phi(v[k]). \quad (64)$$

Por outro lado, aplicando-se a estratégia de controle baseado em eventos, a lei de controle passa a ser dada por:

$$v[k] = v[n_i] = K_c x[n_i], \quad \forall k \in [n_i, n_{i+1}). \quad (65)$$

Considerando (65) e a definição de δ dada em (41), a equação da dinâmica do sistema sob a estratégia de controle baseado em eventos é dada por:

$$x[k+1] = (A + BK_c)x[k] + BK_c \delta[k] - B\phi(v[k]). \quad (66)$$

Além disso, uma função de disparo $f(\delta[k], x[k])$ é considerada, de forma que a estratégia proposta consiste em aplicar o seguinte algoritmo, análogo ao Algoritmo 1:

Algoritmo 2 Estratégia de Controle Baseado em Eventos

```

if  $k = 0$  then
   $v[0] \leftarrow K_c x[0]$ 
   $i \leftarrow 1$ 
else
  if  $f(\delta[k], x[k]) > 0$  then
     $v[k] \leftarrow K_c x[k]$ 
     $i \leftarrow i + 1$ 
     $n_i \leftarrow k$ 
  else
     $v[k] \leftarrow v[n_i]$ 
  end if
end if

```

Assim como na seção anterior, deseja-se agora projetar uma função de disparo $f(\delta[k], x[k]) > 0$ que garanta uma determinada RAS para o sistema sob a lei de controle (65) e deseja-se escolher parâmetros para essa função de forma que o número de transmissões de dados entre o sensor e o atuador seja reduzido. Assim sendo, os seguintes problemas podem ser formulados:

- P3 Dados um ganho de realimentação K_c e uma região $\mathcal{R}(P_0)$, determinar uma função de disparo $f(\delta[k], x[k])$ que garanta que $\mathcal{R}(P_0)$ é uma RAS do sistema em malha fechada e reduza o número de eventos em um determinado intervalo de tempo.
- P4 Dados um ganho de realimentação K_c e uma função de disparo $f(\delta[k], x[k])$, maximizar a RAS garantida $\mathcal{R}(P)$ do sistema em malha fechada.
- P5 Dado um ganho de realimentação K_c , simultaneamente determinar uma função de disparo $f(\delta[k], x[k])$ que reduza o número de eventos em um determinado intervalo de tempo e maximizar a RAS garantida $\mathcal{R}(P)$ do sistema em malha fechada.

Já o caso de *co-design* pode ser formulado da seguinte forma:

- P6 Resolver P3, P4 ou P5 e simultaneamente projetar o ganho de realimentação K_c .

3.4.2 Condições de Estabilidade Propostas

A seguir, são apresentadas as condições de estabilidade utilizadas para resolver P3, P4, P5 e P6.

Considere a seguinte função quadrática candidata a função de Lyapunov:

$$V(x[k]) = x[k]'Px[k]. \quad (67)$$

Definindo:

$$\Delta V(x[k]) = V(x[k+1]) - V(x[k]), \quad (68)$$

e omitindo-se sua dependência em k tem-se que:

$$\begin{aligned} \Delta V(x) = & x'((A + BK_c)'P(A + BK_c) - P)x + \\ & \delta'K_c'B'PBK_c\delta + \phi'B'PB\phi + \\ & 2x'(A + BK_c)'PBK_c\delta - 2\delta'K_c'B'PB\phi - \\ & 2x'(A + BK_c)'PB\phi. \end{aligned} \quad (69)$$

Agora, note que o argumento da função ϕ , ou seja, $v[k]$, pode ser escrito da seguinte forma:

$$K_c(x + \delta) = [K_c \quad K_c] \begin{bmatrix} x \\ \delta \end{bmatrix} \triangleq K_\nu \nu, \quad (70)$$

onde $K_\nu = [K_c \quad K_c]$ e $\nu = [x' \quad \delta]'$. Com isso, a partir do Lema 2.2 e do Algoritmo 2 tem-se que, caso $\nu \in \mathcal{S} = \{\nu : (K_\nu - G_\nu)\nu < \mu_0\}$, então a seguinte relação:

$$\Delta V(x) - 2\phi(K_\nu \nu)'T(\phi(K_\nu \nu) - G_\nu \nu) \leq \delta'Q_\delta\delta - x'Q_\sigma x, \quad (71)$$

com $G_\nu = [G_1 \ G_2]$ implica em $\Delta V(x) < 0$ se $f(\delta[k], x[k]) \leq 0$. Note que definindo-se:

$$\xi_1 = [x' \ \delta' \ \phi']' \quad (72)$$

$$\Pi_1 = [(A + BK_c) \ BK_c \ -B], \quad (73)$$

pode-se reescrever (71) como:

$$\xi_1' \left(\begin{bmatrix} -P + Q_\sigma & 0_* & G_1' T \\ * & -Q_\delta & G_2' T \\ * & * & -2T \end{bmatrix} + \Pi_1' P \Pi_1 \right) \xi_1 < 0. \quad (74)$$

Logo, se

$$\left(\begin{bmatrix} -P + Q_\sigma & 0_* & G_1' T \\ * & -Q_\delta & G_2' T \\ * & * & -2T \end{bmatrix} + \Pi_1' P \Pi_1 \right) < 0, \quad (75)$$

garante-se (71). Aplicando-se o complemento de Schur a (75), tem-se que esta é equivalente a:

$$\Psi_1 = \begin{bmatrix} -P + Q_\sigma & 0_* & G_1' T & (A + BK_c)' \\ * & -Q_\delta & G_2' T & (BK_c)' \\ * & * & -2T & -B' \\ * & * & * & -P^{-1} \end{bmatrix} < 0. \quad (76)$$

Observe que (76) não é uma LMI. No entanto, pode-se definir $W = P^{-1}$, $S = T^{-1}$, $Q_{W\sigma} = WQ_\sigma W$ e $G_{W1} = G_1 W$ e, a seguir, pré e pós-multiplicar Ψ_1 por

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} W & 0_* & 0_* & 0_* \\ * & I & 0_* & 0_* \\ * & * & S & 0_* \\ * & * & * & I \end{bmatrix} \quad (77)$$

obtendo-se:

$$\Psi_2 = \begin{bmatrix} -W + Q_{W\sigma} & 0_* & G_{W1}' & W(A + BK_c)' \\ * & -Q_\delta & G_2' & (BK_c)' \\ * & * & -2S & -SB' \\ * & * & * & -W \end{bmatrix} < 0. \quad (78)$$

Assim, se $\Psi_2 < 0$, garante-se que $\Delta V(x) - \delta' Q_\delta \delta + x' Q_\sigma x < 0$, desde que $\nu \in \mathcal{S}$.

Agora, deseja-se garantir que $\nu \in \mathcal{S}$, $\forall k \geq 0$, o que pode ser feito garantindo-se que $\nu[0] \in \mathcal{R}(P) = \{x : x' P x \leq 1\}$ e que $\mathcal{R}(P) \subseteq \mathcal{S}$, já que, caso (78) seja satisfeita, então $\mathcal{R}(P)$ é uma região invariante. Para tanto, considere a seguinte relação:

$$\nu' (K'_\nu - G'_\nu) \mu_0^{-2} (K_\nu - G_\nu) \nu \leq 1, \quad \forall \nu : \nu' \Lambda_0 \nu \leq 1, \quad (79)$$

com

$$\Lambda_0 = \begin{bmatrix} P & 0_* \\ * & 0_* \end{bmatrix}. \quad (80)$$

Esta relação é equivalente a dizer que $\nu \in \mathcal{S}$ sempre que $\nu' \Lambda \nu \leq 1$, o que é equivalente à seguinte expressão:

$$\nu' (\Lambda_0 - (K'_\nu - G'_\nu) \mu_0^{-2} (K_\nu - G_\nu)) \nu \geq 0. \quad (81)$$

Pode-se afirmar ainda, a partir do Algoritmo 2, que se a desigualdade

$$\nu' (\Lambda_0 - (K'_\nu - G'_\nu) \mu_0^{-2} (K_\nu - G_\nu)) \nu \geq x' Q_\sigma x - \delta' Q_\delta \delta \quad (82)$$

for satisfeita, (81) também o será. Por meio do Complemento de Schur e da definição de ν , K_ν e G_ν , a desigualdade (82) é verificada se:

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} P - Q_\sigma & 0_* & K'_c - G'_1 \\ * & Q_\delta & K'_c - G'_2 \\ * & * & \mu_0^2 \end{bmatrix} \geq 0. \quad (83)$$

Apesar de (83) ser uma LMI, para que ela seja utilizada em conjunto com (78), é necessário que elas possuam as mesmas variáveis de decisão. Isso pode ser conseguido pré e pós-multiplicando-se (83) por:

$$\Gamma_2 = \begin{bmatrix} W & 0_* & 0_* \\ * & I & 0_* \\ * & * & I \end{bmatrix}, \quad (84)$$

obtendo-se:

$$\Lambda_2 = \begin{bmatrix} W - Q_{W\sigma} & 0_* & WK'_c - G'_{W1} \\ * & Q_\delta & K'_c - G'_2 \\ * & * & \mu_0^2 \end{bmatrix} \geq 0. \quad (85)$$

Com isso, pode-se enunciar o seguinte teorema:

Teorema 3.2. *Considere que K_c é tal que o sistema em tempo discreto (64) é assintoticamente estável sob uma estratégia de amostragem periódica. Se existirem matrizes simétricas definidas positivas W , $Q_{W\sigma}$, Q_δ , matrizes de dimensões apropriadas G_{W1} , G_2 e uma matriz diagonal $S > 0$ tais que:*

$$\Psi_2 < 0 \quad (86)$$

$$\Lambda_2 \geq 0, \quad (87)$$

então a região $\mathcal{R}(P) = \{x : x' P x \leq 1\}$ é uma RAS do sistema em malha fechada (66) sob a estratégia baseada em eventos proposta no Algoritmo 2, com a função de disparo definida em (43) e $Q_\sigma = W^{-1} Q_{W\sigma} W^{-1}$.

Prova. Note que por hipótese Γ_1 é uma matriz não-singular, de forma que sua inversa Γ_1^{-1} exista. Assim, caso $\Psi_2 < 0$, então $\Psi_1 = \Gamma_1^{-1} \Psi_2 \Gamma_1^{-1} < 0$ também será verificado, já que Ψ_1 e Ψ_2 são congruentes. Aplicando-se o Complemento de Schur a (76), observa-se que $\Psi_1 < 0$ implica em (71).

Por sua vez, (71) garante que $\Delta V(x) \leq \delta' Q_\delta \delta - x' Q_\sigma x$, desde que $\nu \in \mathcal{S}$. A partir disso, seguindo o mesmo raciocínio apresentado na prova do Teorema 3.1 conclui-se que $\Delta V(x[k]) < 0$, quando $\nu \in \mathcal{S}$.

Agora, deseja-se demonstrar que $\Lambda_2 \geq 0$ garante que $\nu \in \mathcal{S}$ sempre que $x(0) \in \mathcal{R}(P)$, ou seja, que a condição de setor é verificada quando as trajetórias do sistema iniciam na RAS estimada. Para tanto, observe que Γ_2 é uma matriz não-singular, e que $\Lambda_2 \geq 0$ implica em $\Gamma_2^{-1}\Lambda_2\Gamma_2^{-1} \geq 0$ e consequentemente em (83) e (82), já que Λ_1 e Λ_2 são congruentes.

A partir do Algoritmo 2, pode-se afirmar que, para $k \in (n_i, n_{i+1})$, a verificação de (82) garante a verificação de (81), já que $\delta'Q_\delta\delta - x'Q_\sigma x \leq 0$. Além disso, para $k = n_i$, $\delta = 0$ e a verificação de (82) também garante a verificação de (81), a qual garante que se $x \in \mathcal{R}(P)$, então $\nu \in \mathcal{S}$, e a condição de setor é verificada. Assim, como $\mathcal{R}(P)$ é uma curva de nível de $V(x)$, tem-se que $\Delta V(x) < 0, \forall x \in \mathcal{R}(P)$, concluindo-se que $\mathcal{R}(P)$ é invariante e contrativo, sendo assim uma RAS do sistema (66). \square

O Teorema 3.2 é suficiente para garantir a estabilidade local do sistema em questão. A aplicação de problemas de otimização para a resolução de P3, P4 e P5 será abordada na seção 3.5.

Além da estabilidade local do sistema, é possível ainda demonstrar a estabilidade global do sistema caso este seja estável em malha aberta, ou seja, caso A possua todos os seus autovalores dentro de um círculo de raio unitário centrado na origem. Uma condição suficiente para tanto é apresentada no seguinte corolário:

Corolário 3.2.1. *Considere que K_c é tal que o sistema em tempo discreto (64) é assintoticamente estável sob uma estratégia de amostragem periódica. Se existirem matrizes simétricas definidas positivas $W, Q_{W\sigma}, Q_\delta$ e uma matriz diagonal S tais que:*

$$\begin{bmatrix} -W + Q_{W\sigma} & 0_* & WK'_c & W(A + BK_c)' \\ * & -Q_\delta & K'_c & (BK_c)' \\ * & * & -2S & -SB' \\ * & * & * & -W \end{bmatrix} < 0. \quad (88)$$

então a origem do sistema em malha fechada (66) é globalmente assintoticamente estável sob a estratégia baseada em eventos proposta no Algoritmo 2, com a função de disparo definida em (43) e $Q_\sigma = W^{-1}Q_{W\sigma}W^{-1}$.

Prova. A desigualdade (88) é idêntica a (78) com $G_\nu = K_\nu$. Neste caso, a condição de setor é satisfeita $\forall \nu \in \mathbb{R}^{2n}$, isto é, $\mathcal{S} = \mathbb{R}^{2n}$. O restante da prova decorre da prova do Teorema 3.2 \square

3.4.3 Co-Design

Para o problema de *co-design*, ou seja, considerando-se K_c como uma variável, as desigualdades (86) e (87) deixam de ser LMIs. Para que as desigualdades voltem a ser afins nas variáveis de decisão pode-se definir $G_{W2} = G_2W$ e $K_W = K_cW$ e realizar-se as seguintes transformações de congruência:

$$\Gamma_3\Psi_2\Gamma_3 = \tilde{\Psi}_2, \quad \Gamma_4\Lambda_2\Gamma_4 = \tilde{\Lambda}_2 \quad (89)$$

onde:

$$\Gamma_3 = \begin{bmatrix} I & 0_* & 0_* & 0_* \\ * & W & 0_* & 0_* \\ * & * & I & 0_* \\ * & * & * & I \end{bmatrix}, \quad \Gamma_4 = \begin{bmatrix} I & 0_* & 0_* \\ * & W & 0_* \\ * & * & I \end{bmatrix} \quad (90)$$

$$\tilde{\Psi}_2 = \begin{bmatrix} -W + Q_{W\sigma} & 0_* & G_{W1}' & WA' + K_W' B' \\ * & -Q_{W\delta} & G_{W2}' & K_W' B' \\ * & * & -2S & -SB' \\ * & * & * & -W \end{bmatrix} \quad (91)$$

$$\tilde{\Lambda}_2 = \begin{bmatrix} W - Q_{W\sigma} & 0_* & K_W' - G_{W1}' \\ * & Q_{W\delta} & K_W' - G_{W2}' \\ * & * & \mu_0^2 \end{bmatrix}. \quad (92)$$

Com isso, o seguinte corolário referente ao problema de *co-design* para o sistema com saturação do atuador pode ser enunciado:

Corolário 3.2.2. *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas W , K_W , $Q_{W\sigma}$, $Q_{W\delta}$, G_{W1} , G_{W2} e uma matriz diagonal S tais que*

$$\tilde{\Psi}_2 < 0, \quad (93)$$

$$\tilde{\Lambda}_2 \geq 0 \quad (94)$$

então a região $\mathcal{R}(P)$ é uma RAS do sistema em malha fechada (66) sob a estratégia baseada em eventos proposta no Algoritmo 2, com a função de disparo definida em (43) e $Q_\sigma = W^{-1}Q_{W\sigma}W^{-1}$, $Q_\delta = W^{-1}Q_{W\delta}W^{-1}$ e $K_c = K_W W^{-1}$.

Prova. A prova decorre diretamente da prova do Teorema 3.2, bastando observar que $\tilde{\Psi}_2$ e Ψ_2 são congruentes, assim como $\tilde{\Lambda}_2$ e Λ_2 também o são. \square

Observação 1: O Corolário 3.2.2 pode ser utilizado para provar a estabilidade global quando aplicável. Para tanto, basta considerar $G_{W1} = G_{W2} = K_W$ e descartar a restrição (94).

Esta condição de estabilidade é uma LMI nos termos W , $Q_{W\sigma}$, $Q_{W\delta}$ e K_W . Assim, é possível utilizá-la para resolver P6 através de problemas de otimização convexos, como será discutido na próxima seção.

3.5 Problemas de Otimização

Nas seções 3.2 e 3.4 foi proposta uma estratégia de controle baseado em eventos para sistemas em tempo discreto e condições para a estabilidade do sistema sob esta estratégia foram fornecidas. No entanto, a função de disparo na qual a estratégia é baseada possui elementos a serem determinados, notadamente Q_σ e Q_δ , que são variáveis livres nas LMIs dos Teoremas 3.1 e 3.2. Deseja-se então encontrar uma forma numérica para determinar Q_σ e Q_δ . Além disso, no caso do sistema com atuador saturante, deseja-se ainda garantir a estabilidade do sistema dentro de um conjunto de estados iniciais, ou maximizar este conjunto para uma determinada função de disparo.

Com esse objetivo, nesta seção são propostos problemas de otimização convexos capazes de determinar os parâmetros da função de disparo de forma a reduzir a atividade de transmissão de dados na rede. Ademais, condições para especificar ou otimizar alguns critérios de performance do sistema serão fornecidas.

3.5.1 Redução do Número de Transmissões

A redução no número de transmissões de dados realizadas entre os nós sensor e atuador do sistema, e a consequente redução no consumo de potência e na utilização da largura de banda da rede é uma das principais vantagens do controle baseado em eventos em relação às estratégias clássicas de controle. Sendo assim, a aplicação de um problema de otimização capaz de projetar Q_σ e Q_δ a fim de atingir esse objetivo é de grande interesse. No entanto, a efetiva redução do número de amostras em um determinado intervalo é uma tarefa complexa. Neste sentido, o objetivo dos problemas de otimização discutidos nessa seção pode ser visto da seguinte forma: dado um evento, maximizar o intervalo mínimo de tempo até a ocorrência do próximo evento. Com isso, tende-se a reduzir o número de transmissões de dados pelo sistema de controle, abordando-se assim o P1.

Para tanto, observe a partir da função de disparo, tem-se que:

$$f(\delta[k], x[k]) \leq \delta[k]' \delta[k] \lambda_{max}(Q_\delta) - x[k]' x[k] \lambda_{min}(Q_\sigma). \quad (95)$$

Note que no pior caso, ou seja quando a restrição é uma igualdade, a condição de disparo pode ser dada por:

$$\gamma = \frac{\delta[k]' \delta[k] \lambda_{max}(Q_\delta)}{x[k]' x[k] \lambda_{min}(Q_\sigma)} \leq 1, \quad (96)$$

e um evento ocorrerá quando:

$$\delta[k]' \delta[k] \lambda_{max}(Q_\delta) - x[k]' x[k] \lambda_{min}(Q_\sigma) = 0. \quad (97)$$

Como $\lambda_{min}(Q_\sigma)^{-1} = \lambda_{max}(Q_\sigma^{-1})$, (96) pode ser escrita como:

$$\frac{\delta[k]' \delta[k]}{x[k]' x[k]} \eta(Q_\delta, Q_\sigma^{-1}) \leq 1, \quad (98)$$

com $\eta(Q_\delta, Q_\sigma^{-1}) = \lambda_{max}(Q_\delta) \lambda_{max}(Q_\sigma^{-1})$. A ideia, então, consiste em minimizar $\eta(Q_\delta, Q_\sigma^{-1})$, de forma que o tempo mínimo para que γ evolua de 0 para 1 (ou, equivalentemente, para $f(\delta[k], x[k])$ evoluir de $-x[n_i]' Q_\sigma x[n_i]$ para 0) seja aumentado. No entanto, $\eta(Q_\delta, Q_\sigma^{-1})$ não é uma função convexa, então, para formular uma função objetivo convexa pode-se minimizar a diferença entre os parâmetros Q_δ e Q_σ , minimizando-se assim uma aproximação de $\eta(Q_\delta, Q_\sigma^{-1})$. Fixando-se $Q_\delta = I$ e limitando-se Q_σ na forma $Q_\sigma = \rho I$, o valor de ρ que minimiza a função objetivo aproximada é o mesmo que minimiza $\eta(Q_\delta, Q_\sigma^{-1})$.

Nesse contexto, o seguinte problema de otimização aplicável ao Teorema 3.1 pode ser proposto:

PO 1:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && -\rho \\ &\text{sujeito a:} && (51) \end{aligned} \quad (99)$$

onde $Q_\sigma = \rho I$ e $Q_\delta = I$. Nesse caso, a verificação da função de disparo é reduzida a $\delta[k]' \delta[k] \leq \rho x[k]' x[k]$, ou, de forma alternativa, $\|\delta[k]\| \leq \rho^{1/2} \|x[k]\|$, tornando explícito o quanto os estados podem desviar do seu último valor transmitido antes de um novo evento ocorrer. Além disso, esse caso leva à mesma estrutura da função de disparo comumente encontrada na literatura, como em (TABUADA, 2007) e (TALLAPRAGADA; CHOPRA,

2012) no contexto de sistemas contínuos, e em (HEEMELS; DONKERS; TEEL, 2011) no contexto de sistemas discretos. Outro fator importante desta função é que o processamento necessário ao monitoramento da função de disparo é reduzido.

Um segundo método intuitivo é considerar que Q_σ é uma matriz na forma $Q_\sigma = \text{diag}(\rho_1, \dots, \rho_n)$, permitindo que cada variável de estado tenha um desvio máximo distinto. Assim, seja ρ_0 a solução ótima do PO 1, o seguinte problema de otimização pode ser aplicado ao Teorema 3.1:

PO 2:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && -\text{traço}(Q_\sigma) \\ &\text{sujeito a:} && (51), Q_\sigma \geq \rho_0 I \end{aligned} \quad (100)$$

onde $Q_\delta = I$ e $Q_\sigma = \text{diag}(\rho_1, \dots, \rho_n)$, reduzindo a verificação da função de disparo a $\sum_{i=1}^n \|\delta_{xi}[k]\| \leq \sum_{i=1}^n \|\rho_i^{1/2} x_{si}[k]\|$. Basicamente, esse método considera o valor computado em PO 1 como o menor autovalor admissível de Q_σ e tenta maximizar seu traço. Observe que qualquer melhoria obtida em $\text{traço}(Q_\sigma)$ significa que alguns estados serão permitidos desviar mais do que no caso anterior, levando a uma redução no número de transmissões. Note que, caso a restrição $Q_\sigma \geq \rho_0 I$ não seja utilizada, não há garantias de que o resultado obtido levará a uma maior intervalo entre eventos em relação ao PO 2, já que a minimização de $-\text{traço}(Q_\sigma)$ com $Q_\delta = I$ não implica necessariamente na minimização de $\eta(Q_\delta, Q_\sigma^{-1})$.

Apesar de simples e intuitivos, estes métodos são um tanto conservadores. Uma abordagem mais genérica é permitir que tanto Q_δ quanto Q_σ sejam matrizes definidas positivas livres. Dessa forma, novos graus de liberdade são adicionados e, portanto, o conservadorismo é reduzido. Para tanto, sendo ρ_0 a solução ótima do PO 1, o seguinte problema de otimização pode ser aplicado ao Teorema 3.1:

PO 3:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && \text{traço}(Q_\delta - Q_\sigma) \\ &\text{sujeito a:} && (51), Q_\sigma \geq \rho_0 I, Q_\delta \leq I, \end{aligned} \quad (101)$$

onde Q_δ e Q_σ são matrizes definidas positivas livres. Esse método engloba os resultados dos PO 1 e 2, já que estes resultados são casos particulares de PO3, tendendo a levar a um menor número de transmissões de dados. No entanto, a verificação da função de disparo requer um esforço computacional maior, precisando calcular o valor das formas quadráticas $\delta[k]'Q_\delta\delta[k]$ e $x[k]'Q_\sigma x[k]$ a cada instante, oferecendo um compromisso entre uma menor utilização dos recursos da rede e o esforço computacional.

3.5.2 Redução do Número de Transmissões com RAS Garantida

Os problemas de otimização apresentados até então são aplicáveis apenas a sistemas nos quais a saturação não é considerada, ou seja, são aplicáveis apenas às condições do Teorema 3.1 e à resolução de P1. Quando se trata de sistemas com atuadores saturantes, e a resolução de P3, algumas modificações nos problemas de otimização propostos são necessárias, devido a três problemas principais:

- a) Não é possível fixar um dos parâmetros;
- b) Q_σ não é uma variável de decisão nas LMIs.

c) Não há nenhuma garantia em relação ao tamanho da RAS do sistema.

O primeiro problema surge das restrições necessárias à inclusão da condição de setor. Como é necessário que $\nu'(\Lambda_0 - (K'_\nu - G'_\nu)\mu_0^{-2}(K_\nu - G_\nu))\nu \geq 0$, não é possível garantir que haja factibilidade caso Q_δ possua um limite superior fixo. Isto é facilmente tratado considerando-se um Q_δ variável, como $Q_\delta = Q_{\delta aux}$ ou $Q_\delta = \rho_\delta I$.

Já o segundo problema é oriundo da mudança de variáveis requerida para que a formulação do Teorema 3.2 se dê em forma de LMIs. Com isso, Q_σ aparece apenas de forma implícita nas LMIs, já que $Q_{W\sigma} = WQ_\sigma W$. Para tratar este problema considere a seguinte desigualdade:

$$\begin{bmatrix} Q_{W\sigma} & W \\ * & \bar{Q}_\sigma \end{bmatrix} > 0. \quad (102)$$

Note que caso esta equação seja satisfeita, pelo Complemento de Schur e pela definição de $Q_{W\sigma}$, estará assegurado que $WQ_\sigma W > W\bar{Q}_\sigma^{-1}W$ e conseqüentemente $Q_\sigma > \bar{Q}_\sigma^{-1}$. Assim, a minimização de $\eta(Q_\delta, \bar{Q}_\sigma)$ implica na minimização de um limitante superior para $\eta(Q_\delta, Q_\sigma^{-1})$.

Por outro lado, o último problema é relevante do ponto de vista prático de projeto do sistema. Caso não seja especificada uma RAS garantida, as condições de disparo podem ser tais que a região de atração se torne extremamente pequena, de forma que a aplicação do sistema se torna praticamente inviável. Para lidar com esse problema, pode-se considerar a inclusão de uma região pré-determinada $\mathcal{R}(P_0) = \{x : x'P_0x \leq 1\}$ na RAS estimada do sistema. Assim, caso $\mathcal{R}(P_0) \subset \mathcal{R}(P)$, garante-se que a região pré-determinada seja assintoticamente estável. Isso pode ser feito a partir da seguinte LMI:

$$\begin{bmatrix} W & I \\ * & P_0 \end{bmatrix} > 0. \quad (103)$$

Observe que caso (103) seja satisfeita, então, aplicando-se o Complemento de Schur, $W - P_0^{-1} > 0$, que é equivalente a $P < P_0$. Assim, garante-se que $\mathcal{R}_0 \subset \mathcal{R}$, já que $x \in \mathcal{R}_0$ implica em $x \in \mathcal{R}$.

Com isso, o seguinte problema de otimização, análogo ao PO 1, pode ser proposto no contexto de sistemas com saturação:

PO 1s:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && \rho_\delta + \bar{\rho}_\sigma \\ &\text{sujeito a:} && (86), (87), (102), (103). \end{aligned} \quad (104)$$

onde $\bar{Q}_\sigma = \bar{\rho}_\sigma I$ e $Q_\delta = \rho_\delta I$. Este problema de otimização leva à minimização de ρ_δ e $\bar{\rho}_\sigma$, implicitamente maximizando ρ_σ . Note ainda que não há garantias de que Q_σ estará na forma ρI . No entanto, observe que (104) garante que $\Delta V \leq \delta'Q_\delta\delta - x'Q_\sigma x$. Como $Q_\sigma > \bar{\rho}_\sigma^{-1}I$, então $\Delta V \leq \delta'Q_\delta\delta - \bar{\rho}_\sigma^{-1}x'x$, e pode-se considerar $Q_\sigma = \bar{\rho}_\sigma^{-1}I$, o que garante a estabilidade do sistema.

Já o PO 2 pode ser formulado para sistemas com saturação da seguinte forma, considerando ρ_{δ_0} e ρ_{σ_0} como a solução ótima de ρ_δ e $\bar{\rho}_\sigma$ obtidas pelo PO 1s:

PO 2s:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && \text{traço}(Q_\delta + \bar{Q}_\sigma) \\ &\text{sujeito a:} && (86), (87), (102), (103), Q_\delta \leq \rho_{\delta_0}I, \bar{Q}_\sigma \leq \rho_{\sigma_0}I, \end{aligned} \quad (105)$$

com $Q_\delta = \text{diag}(\rho_{\delta_1}, \dots, \rho_{\delta_n})$ e $\bar{Q}_\sigma = \text{diag}(\rho_{\sigma_1}, \dots, \rho_{\sigma_n})$. Novamente, caso Q_σ não esteja na forma desejada, pode-se considerar $Q_\sigma = \bar{Q}_\sigma^{-1}$.

Por sua vez, o PO 3 pode ser aplicado a sistemas com atuadores saturantes como segue:

PO 3s:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} \quad \text{traço}(Q_\delta + \bar{Q}_\sigma) \\ &\text{sujeito a:} \quad (86), (87), (102), (103), \quad Q_\delta \leq \rho_{\delta_0} I, \quad \bar{Q}_\sigma \leq \rho_{\sigma_0} I, \end{aligned} \quad (106)$$

onde Q_δ e \bar{Q}_σ são matrizes definidas positivas livres.

É importante ressaltar que a escolha da região a ser incluída na RAS influencia na função de disparo projetada. Caso a atividade de disparo do sistema com a função projetada para um determinada região garantida seja muito elevada, é possível reprojeter a função de disparo considerando uma região garantida menor, o que tende a levar a uma redução em tal atividade. Além disso, se a região a ser incluída na RAS for muito grande, as LMIs podem se tornar infactíveis, o que significa que não há garantia de estabilidade.

3.5.3 Maximização da RAS Estimada

Alternativamente, é possível que a função de disparo já tenha sido projetada para atender a um determinado requisito da rede de comunicação e deseja-se que a RAS estimada seja maximizada, ou seja, deseja-se resolver P4. Nesse cenário, sejam Q_δ^* e Q_σ^* os parâmetros prescritos para a função de disparo, o seguinte problema de otimização possibilita a maximização da RAS estimada:

PO 4:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} \quad \text{traço}(P_0) \\ &\text{sujeito a:} \quad (86), (87), (102), (103), \quad \bar{Q}_\sigma \leq Q_\sigma^{*-1}, \quad Q_\delta = Q_\delta^*. \end{aligned} \quad (107)$$

Observe que caso $\bar{Q}_\sigma \leq Q_\sigma^{*-1}$, então $Q_\sigma \geq Q_\sigma^{*-1}$, de forma que a estabilidade da função de disparo prescrita está garantida, pois $\Delta V \leq \delta' Q_\delta^* \delta - x' \bar{Q}_\sigma^{-1} x \leq \delta' Q_\delta^* \delta - x' Q_\sigma^* x$. Note também que este problema de otimização considera a maximização do elipsóide $\mathcal{R}(P_0)$ inscrito na RAS estimada do sistema $\mathcal{R}(P)$, implicitamente maximizando a mesma.

É possível, no entanto, que se deseje maximizar a RAS estimada em uma dada direção, pois, por exemplo, considera-se a variação máxima de um determinado estado mais importante que a dos outros, ou para atender condições de inicialização específicas. Nesse caso, sendo d um vetor que determina a direção a ser maximizada, os valores de $x \in \mathcal{R}(P)$ nesta direção serão sempre um múltiplo de d , de forma que o limite de $\mathcal{R}(P)$ na direção do vetor é dado por:

$$x = \theta d : 1 - \theta d' P d \geq 0, \quad (108)$$

onde θ é um escalar. Aplicando-se o Complemento de Schur à relação (108) chega-se à seguinte forma equivalente:

$$\begin{bmatrix} 1 & \theta d' \\ * & W \end{bmatrix} \geq 0. \quad (109)$$

Dessa forma, a maximização de $\mathcal{R}(P)$ na direção d pode ser realizada pelo seguinte problema de otimização:

PO 5:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && -\theta \\ & \text{sujeito a:} && (86), (87), (102), (109), \bar{Q}_\sigma \leq Q_\sigma^{*-1}, Q_\delta = Q_\delta^*. \end{aligned} \quad (110)$$

3.5.4 Otimização Multiobjetivo

Pode-se ainda considerar o caso em que nem a função de disparo nem a RAS a ser garantida são especificados, e deseja-se que ambos sejam otimizados, o que está relacionado à resolução de P5. À vista disso, é necessário que o projetista determine um compromisso entre os objetivos da função, por meio de um fator de ponderação. Assim, o seguinte problema de otimização multiobjetivo pode ser proposto:

PO 6:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && \alpha_1(\text{traço}(P_0)) + \alpha_2(\rho_\delta + \bar{\rho}_\sigma) \\ & \text{sujeito a:} && (86), (87), (102), (103), \end{aligned} \quad (111)$$

onde $\bar{Q}_\sigma = \bar{\rho}_\sigma I$ e $Q_\delta = \rho_\delta I$ e α_1 e α_2 são fatores de ponderação determinados pelo projetista. Assim, quanto maior for α_1 , mais importância será dada à maximização da RAS estimada. Por outro lado, quanto maior for α_2 , mais importância será dada à redução do atividade de disparo do sistema. Alternativamente, a RAS pode ser maximizada em uma determinada direção substituindo-se $\text{traço}(P_0)$ por $-\theta$ e a restrição (103) pela restrição (109).

3.5.5 Otimização com Garantia de Taxa de Decaimento

É possível que se deseje adicionar uma garantia de taxa de decaimento exponencial do sistema, ou seja, deseja-se garantir que $\|x[k]\| \leq \beta \alpha^k \|x[0]\|$. Essa situação ocorre, por exemplo, quando é necessário impor um limite na degradação da performance do sistema em relação ao sistema operando sob uma estratégia periódica. Além disso, essa situação é ainda mais relevante quando se trata do problema de *co-design*, já que *a priori* a única restrição em K_c é que este seja tal que o sistema seja estável em malha fechada, de forma que o tempo de acomodação do sistema possa se tornar muito elevado.

Para esse fim, considere a seguinte desigualdade:

$$\Delta V(x[k]) \leq (\alpha^2 - 1)x[k]'Px[k]. \quad (112)$$

Caso essa restrição seja satisfeita, então

$$x[k+1]'Px[k+1] \leq \alpha^2 x[k]'Px[k], \quad (113)$$

e tem-se que $\beta = \lambda_{\max}(P)/\lambda_{\min}(P)$.

Considerando o Teorema 3.1, a restrição pode ser incluída verificando-se a seguinte LMI:

$$\Psi_0 < \begin{bmatrix} (\alpha^2 - 1)P & 0_* \\ & 0_* \end{bmatrix} \quad (114)$$

em vez de (51). No caso do *co-design*, a seguinte LMI pode ser utilizada:

$$\tilde{\Psi}_0 < \begin{bmatrix} (\alpha^2 - 1)W & 0_* \\ & 0_* \end{bmatrix}. \quad (115)$$

Já no que concerne ao Teorema 3.2, a restrição (112) pode ser incluída verificando-se (115) em vez de (86) e substituindo-se Ψ_1 por Ψ_2 . No caso do *co-design*, a mesma LMI pode ser utilizada no lugar de (93) substituindo-se Ψ_1 por $\tilde{\Psi}_2$.

3.5.6 Co-Design

O projeto simultâneo da função de disparo e do ganho do controlador acarreta em uma nova dificuldade na aplicação dos problemas de otimização propostos, semelhante ao problema b) da seção 3.5.2, pois tanto Q_δ quanto Q_σ não são variáveis de decisão nas LMIs. Assim, para abordar P2 e P6 pode-se considerar a restrição adicional (102) e a restrição:

$$\begin{bmatrix} \bar{Q}_\delta & I \\ * & 2W - Q_{W\delta} \end{bmatrix}, \quad (116)$$

a qual, segundo o Lema 2.6, garante que $\bar{Q}_\delta > Q_\delta$. Dessa forma, minimizando-se $\eta(\bar{Q}_\delta, \bar{Q}_\sigma)$ Com isso, o seguinte problema de otimização, análogo a PO1, pode ser proposto:

PO 7:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & \bar{\rho}_\delta + \bar{\rho}_\sigma \\ \text{sujeito a:} \quad & (60), (102), (116), \\ & (\text{ou } (93), (94), (102), (116), (103)), \end{aligned} \quad (117)$$

onde $\bar{Q}_\delta \leq \bar{\rho}_\delta I$ e $\bar{Q}_\sigma \leq \bar{\rho}_\sigma I$. O primeiro conjunto de restrições se aplica ao caso linear, enquanto o segundo conjunto de restrições se aplica ao caso com saturação do atuador. Seguindo a mesma metodologia, um resultado menos conservador pode ser obtido utilizando-se um problema análogo a PO3, a partir dos resultados de PO7. Para tanto, o seguinte problema de otimização pode ser proposto:

PO 8:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & \text{tr}(\bar{Q}_\delta + \bar{Q}_\sigma) \\ \text{sujeito a:} \quad & (60), (102), (116), \\ & \bar{Q}_\delta \leq \bar{\rho}_\delta I, \quad \bar{Q}_\sigma \leq \bar{\rho}_\sigma I, \\ & (\text{ou } (93), (94), (102), (116), (103)), \\ & \bar{Q}_\delta \leq \bar{\rho}_\delta I, \quad \bar{Q}_\sigma \leq \bar{\rho}_\sigma I), \end{aligned} \quad (118)$$

onde $\bar{\rho}_\delta$ e $\bar{\rho}_\sigma$ são as soluções ótimas de PO7, e o primeiro conjunto de restrições se aplica ao caso linear enquanto o segundo se aplica ao caso com saturação do atuador. Novamente, este resultado engloba o resultado de PO7, tendendo a um menor grau de conservadorismo.

3.6 Exemplos Numéricos

Nesta seção são apresentados exemplos numéricos visando validar os resultados obtidos neste capítulo, bem como comparar estes resultados aos encontrados na literatura.

3.6.1 Exemplo 1: Sistema Linear Instável

Considere o seguinte sistema instável em tempo contínuo utilizado em (SBARBARO; TARBOURIECH; GOMES DA SILVA Jr, 2014), modelado por (35) com:

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, B_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, K_c = [-6 \quad -3]. \quad (119)$$

Seguindo a metodologia apresentada, obtém-se um modelo como o descrito em (36), considerando um período de amostragem nominal $T = 0,05s$, chegando-se às seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1,0050 & 0,0501 \\ 0,2003 & 1,0050 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0,0501 \\ 0,0050 \end{bmatrix}. \quad (120)$$

Com o sistema disposto dessa forma, deseja-se agora projetar os parâmetros da função de disparo de modo a se obter uma redução no número de transmissões de dados entre o sensor e o atuador. Para isso, pode-se aplicar o PO 1, encontrando-se $\rho_0 = 0.0889$. A partir disso, caso se deseje obter uma redução ainda maior no número de transmissões, PO 2 e 3 podem ser utilizados. O PO 2 fornece a seguinte matriz:

$$Q_\sigma = \begin{bmatrix} 0,4189 & 0,0000 \\ * & 0,0889 \end{bmatrix}. \quad (121)$$

Por sua vez, o PO 3 chega aos seguintes resultados:

$$Q_\sigma = \begin{bmatrix} 0,4189 & 0,0000 \\ * & 0,0889 \end{bmatrix}, Q_\delta = \begin{bmatrix} 0,8182 & 0,3637 \\ * & 0,2728 \end{bmatrix}. \quad (122)$$

A título de comparação, a modelagem PWL proposta em (HEEMELS; DONKERS; TEEL, 2011) foi aplicada, encontrando-se um $\sigma_{PWL} = 0,2983$. Isso é equivalente a uma função de disparo $f(\delta[k], x[k])$ com $Q_\delta = I$ e $Q_\sigma = 0,0890I$, ou seja, um resultado muito similar ao obtido pelo PO 1. No entanto, é importante lembrar que este valor de σ_{PWL} foi obtido por meio de uma busca linear no parâmetro, tendo assim um custo computacional de projeto elevado.

Para aferir o desempenho das diferentes funções de disparo projetadas, o sistema em malha fechada foi simulado com as seguintes condições iniciais:

$$x[0] = \begin{bmatrix} -1.125 \\ 2.75 \end{bmatrix}, \quad (123)$$

e um tempo de simulação de $10s$, ou seja, $k \in [0, 200]$. A Tabela 1 apresenta o número de eventos ocorridos durante o intervalo de tempo da simulação para cada função de disparo e para o caso periódico. Tanto a função projetada pelo PO 1 quanto a projetada pelo método de (HEEMELS; DONKERS; TEEL, 2011) geraram 51 eventos, o que demonstra que, neste exemplo, a redução de conservadorismo obtida pela modelagem PWL foi muito pequena. Já a função projetada pelo PO 2 gerou 37 eventos, apresentando uma redução

Tabela 1: Exemplo 1: Comparação do número de eventos gerados por cada função de disparo.

Projeto da Função de Disparo	Número de Eventos
Modelagem PWL	51
PO 1	51
PO 2	37
PO 3	29
Amostragem Periódica	201

considerável. Por sua vez, a função projetada pelo PO 3 gerou apenas 29 eventos, o que representa 14,5% dos instantes de tempo periódicos, evidenciando a importância dos graus de liberdade adicionais na redução da utilização dos recursos da rede.

As Figuras 5 e 6 apresentam a evolução dos estados, enquanto a Figura 7 apresenta a evolução do sinal de controle para cada método. É perceptível que quanto menos transmissões de dados ocorrem, mais a resposta do sistema desvia daquela obtida com atualizações periódicas do sinal de controle, e o sistema se torna mais oscilatório, já que no intervalo entre dois eventos o sistema instável está efetivamente operando em malha aberta. Esta característica instável da planta é muito evidente ao se observar a evolução do estado x_1 com a função de disparo projetada pelo PO 3, onde pode-se notar que o estado tende a divergir entre duas atualizações do sinal de controle.

Além disso, na Figura 8 são apresentados os intervalos entre eventos, ou seja, cada ponto representa um evento, e sua magnitude representa o tempo decorrido desde o último evento. Nesta figura, pode-se observar que o intervalo entre eventos aumenta consideravelmente ao utilizar-se PO 2 em relação a PO 1, e aumenta sensivelmente ao utilizar-se PO 3 em relação a 2, com a exceção de dois eventos, nominalmente $k = n_{18}$ e $k = n_{21}$, para os quais o intervalo foi substancialmente maior, o que ocorre devido à estrutura de

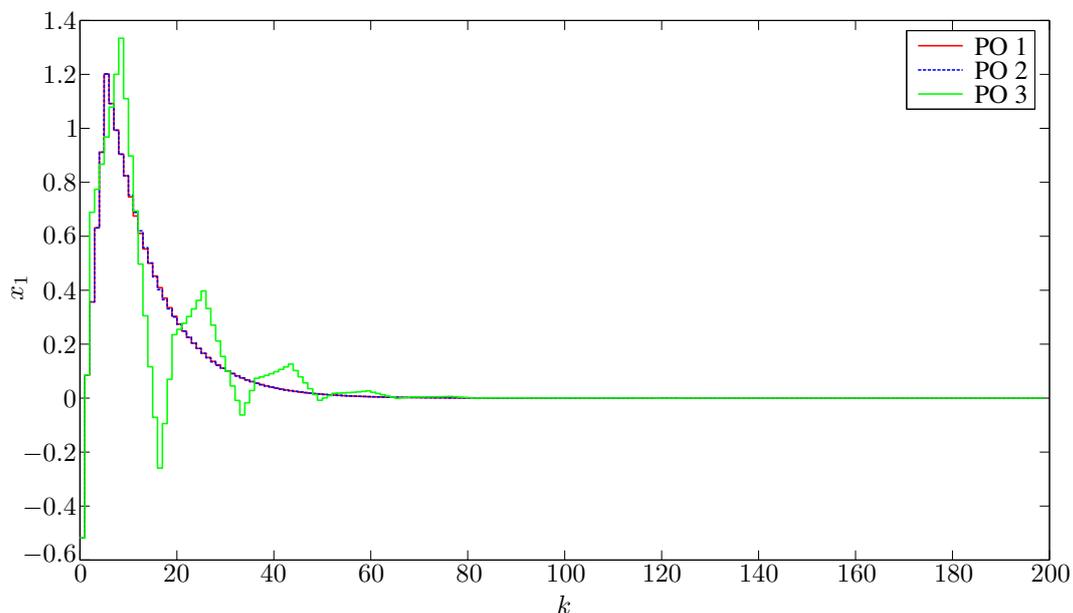


Figura 5: Evolução do estado x_1 .

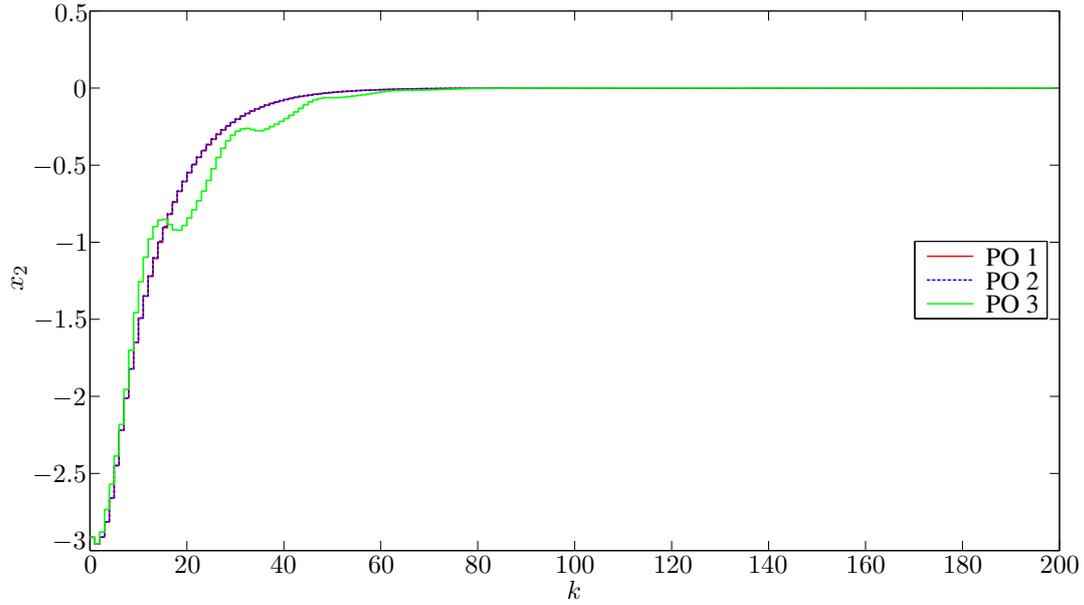


Figura 6: Evolução do estado x_2 .

Q_δ . Para melhor entender esse fenômeno, considere a seguinte decomposição de Q_δ :

$$Q_\delta = VQ_\delta^\lambda V', \quad (124)$$

onde $Q_\delta^\lambda = \text{diag}(\lambda_{min}, \dots, \lambda_{max})$ e V é uma matriz ortogonal formada concatenando-se os autovetores de Q_δ . Para o caso em particular deste exemplo, tem-se que:

$$Q_\delta^\lambda = \begin{bmatrix} 0,0910 & 0,0000 \\ * & 1,0000 \end{bmatrix}, \quad V = [v_1 \ v_2] = \begin{bmatrix} 0,4472 & -0,8944 \\ -0,8944 & -0,4472 \end{bmatrix}. \quad (125)$$

Assim, espera-se que a ocorrência de eventos seja reduzida quando $\delta[k]$ tiver a mesma direção de v_1 . Analisando-se $\delta[k]$ no intervalo $k \in (n_{17}, n_{18})$ verifica-se que o ângulo formado entre $\delta[k]$ e v_1 varia entre 0,016 rad em $k = n_{17} + 1$ e 0,203 rad em $k = n_{18} - 1$.

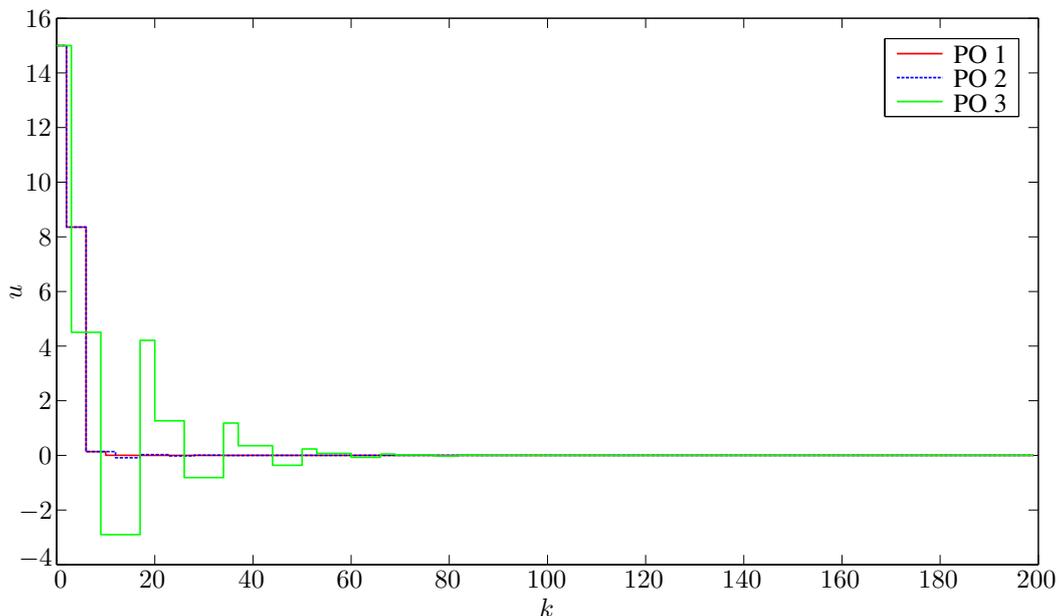


Figura 7: Evolução do sinal de controle u .

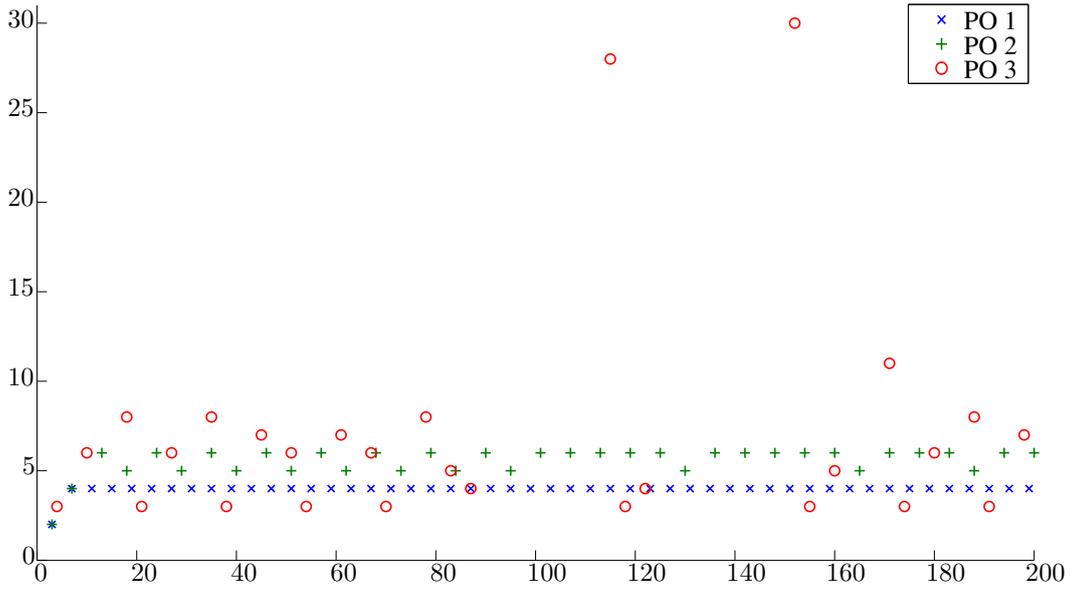


Figura 8: Tempos entre eventos.

De forma similar, este ângulo varia entre 3,128 rad em $k = n_{20} + 1$ e 2,937 rad em $k = n_{21} - 1$, conforme esperado.

3.6.2 Exemplo 2: Sistema Linear Instável e Co-Design

Considere o sistema instável em tempo contínuo apresentado em (HEEMELS; DONKERS; TEEL, 2011), modelado por (35) com:

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, K_{c0} = [1 \quad -4]. \quad (126)$$

O sistema discreto, com $T = 0,05s$, é dado por:

$$A = \begin{bmatrix} 0,9974 & 0,0539 \\ -0,1078 & 1,1591 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0,0013 \\ 0,0539 \end{bmatrix}. \quad (127)$$

Para testar a eficiência do método de *co-design*, serão projetadas funções de disparo para o ganho K_c dado, e na sequência, o ganho de realimentação será projetado simultaneamente à função de disparo visando minimizar a geração de eventos. Projetando-se a função de disparo por meio do PO 1, encontra-se $\rho = 0,0299$, e nenhum melhoramento é obtido com o PO 2. Já o PO 3 obtém as seguintes matrizes:

$$Q_\sigma = \begin{bmatrix} 0,0299 & 0,0000 \\ * & 0,0299 \end{bmatrix}, Q_\delta = \begin{bmatrix} 0,1438 & -0,2140 \\ * & 0,9465 \end{bmatrix}. \quad (128)$$

Por sua vez, a modelagem PWL obtém $\sigma_{PWL} = 0,2425$, o que é equivalente a $Q_\delta = I$ e $Q_\sigma = 0,0588I$. Pode-se observar que neste exemplo, a abordagem PWL é consideravelmente menos conservadora.

Agora, deseja-se projetar simultaneamente um ganho K_c e uma função de disparo que reduzam o número de transmissões de dados necessárias e garantam a estabilidade do sistema. Além disso, K_c havia sido projetada pelo método baseado em emulação, ou seja, era tal que o sistema periódico fosse estável e respeitasse determinado critério de performance. Os autovalores de $A + BK_c$ eram $0,9711 \pm 0,0431i$. Para que os resultados sejam

Tabela 2: Exemplo 2: Comparação do número de eventos gerados por cada função de disparo.

Projeto da Função de Disparo	Número de Eventos
Modelagem PWL	66
PO 1 e 2	86
PO 3	75
Co-Design com PO7	29
Co-Design com PO8	21
Amostragem Periódica	301

comparáveis, uma restrição foi adicionada às LMIs de forma a posicionar os autovalores de $A + BK_c$ dentro da intersecção de um disco centrado em 0,9711 e com raio 0,0431 e um disco centrado na origem com raio 0,9720, utilizando-se a metodologia proposta em (CHILALI; GAHINET, 1996). Com isso, os resultados obtidos foram:

$$Q_\sigma = \begin{bmatrix} 0,0233 & 0,0007 \\ * & 0,0208 \end{bmatrix}, Q_\delta = \begin{bmatrix} 0,0283 & -0,1259 \\ * & 0,5602 \end{bmatrix}, K_c = [1,0319 \quad -4,5898] \quad (129)$$

Para avaliar a eficácia do projeto, o sistema em malha fechada foi simulado com as seguintes condições iniciais:

$$x[0] = [2 \quad -1] \quad (130)$$

e um tempo de simulação de 15s, ou seja, $k \in [0, 300]$. O número de eventos ocorridos durante este intervalo de tempo pode ser encontrado na Tabela 1. Pode-se observar a drástica redução proporcionada pelo método de *co-design*, com apenas 21 eventos gerados, o que corresponde a 6,91% dos instantes de tempo periódicos.

A evolução dos estados é apresentada na Figura 9. Nota-se que conforme o número

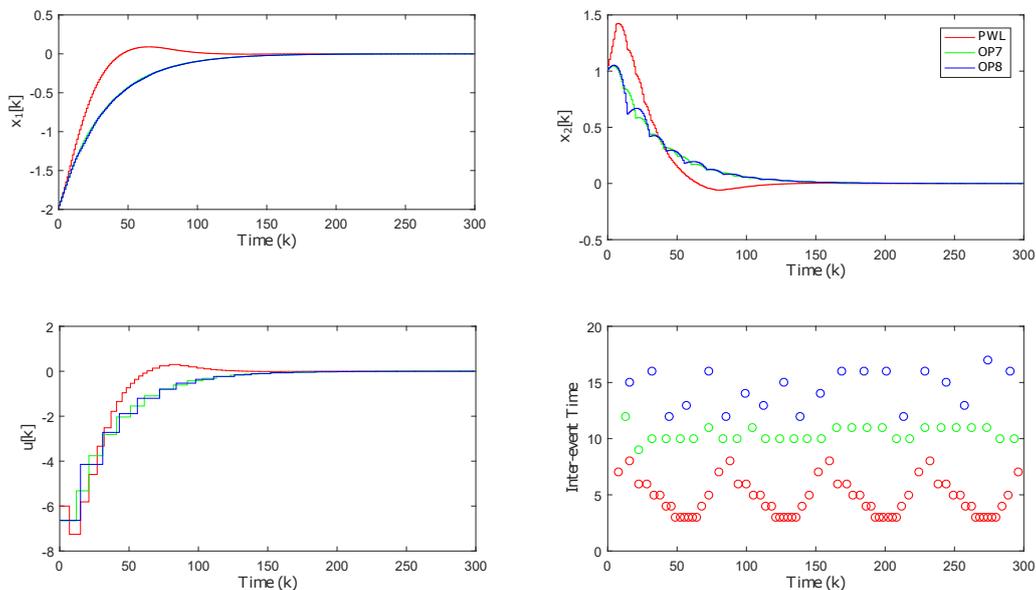


Figura 9: Resultados de simulação para o Exemplo 2

de eventos diminui, o sistema se torna mais amortecido. Este comportamento é oposto ao encontrado no exemplo anterior, onde o sistema se tornava mais oscilatório com a redução das transmissões de dados, o que indica que as restrições de comunicação impostas ao sistema causam uma degradação na performance, mas a forma que essa degradação tomará na dinâmica do sistema pode variar. Além disso, analisando-se os intervalos entre eventos, pode-se verificar o aumento considerável no tempo decorrido entre cada evento ao se utilizar o método de *co-design* proposto.

Analisando os resultados, pode-se verificar que neste exemplo a redução de conservadorismo propiciada pela modelagem PWL é relevante. No entanto, verifica-se ainda que o método de *co-design* apresenta um desempenho amplamente superior na redução de conservadorismo. Com isso, observa-se que, apesar de conveniente, o projeto baseado em emulação leva a resultados bastante conservadores.

3.6.3 Exemplo 3: Sistema Instável Sujeito à Saturação

Considere o sistema sujeito à saturação apresentado em (WU; REIMANN; LIU, 2014), que representa o modelo linearizado de um pêndulo invertido, com:

$$A = \begin{bmatrix} 1,0018 & 0,01 \\ 0,36 & 1,0018 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -0,001 \\ -0,184 \end{bmatrix}, \quad \mu_0 = 1, \quad T = 0,01s. \quad (131)$$

No trabalho citado, o ganho de realimentação de estados K_c foi projetado de modo a maximizar a RAS estimada $\mathcal{R}(P_*, 1) \triangleq \mathcal{X}_1$ para uma dada função de disparo. Para a condição de disparo $\|\delta[k]\| \leq 0,1\|x[k]\|$, o método proposto naquele trabalho encontrou $K_c = [6,3717 \quad 2,6619]$. Note que esta função é equivalente a $f(\delta[k], x[k])$ definida em (43) com:

$$Q_\sigma = \begin{bmatrix} 0,01 & 0 \\ * & 0,01 \end{bmatrix}, \quad Q_\delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{bmatrix}. \quad (132)$$

Agora, será aplicado o PO 1s para projetar uma função de disparo cuja RAS estimada $\mathcal{R}(P, 1)$ contenha \mathcal{X}_1 . Isso pode ser feito considerando-se $P_0 = P_*$ na LMI 103. Com isso, obtém-se:

$$Q_\sigma = \begin{bmatrix} 0,0342 & 0 \\ * & 0,0342 \end{bmatrix}, \quad Q_\delta = \begin{bmatrix} 0,9156 & 0 \\ * & 0,9156 \end{bmatrix}. \quad (133)$$

Além disso, um problema de *co-design* pode ser aplicado para simultaneamente projetar um ganho de realimentação K_c e uma função de disparo que reduzam a utilização dos recursos de rede e garantam a estabilidade na região \mathcal{R}_0 que contenha \mathcal{X}_1 , utilizando-se o PO 7, obtendo-se:

$$K_c = [5,3860 \quad 2,2953], \quad Q_\sigma = \begin{bmatrix} 0,0355 & 0,0001 \\ * & 0,0353 \end{bmatrix}, \quad Q_\delta = \begin{bmatrix} 0,8799 & 0,4047 \\ * & 0,3953 \end{bmatrix} \quad (134)$$

A Figura 10 apresenta \mathcal{X}_1 e \mathcal{R}_0 onde pode-se ver que $\mathcal{X}_1 \subset \mathcal{R}_0$.

Para comparar os resultados, o sistema foi simulado considerando-se a seguinte condição inicial:

$$x[0] = \begin{bmatrix} 0,2 \\ 0,8 \end{bmatrix}. \quad (135)$$

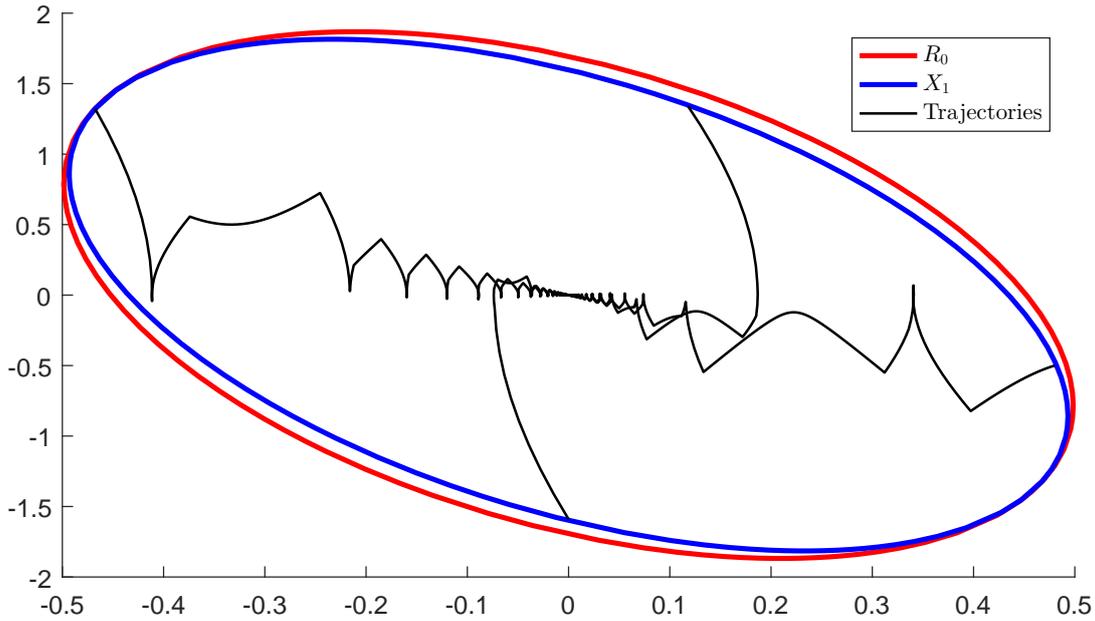


Figura 10: RAS estimadas para o sistema. Em vermelho, o resultado obtido em (WU; REIMANN; LIU, 2014), em azul, o obtido aplicando-se o PO 8 e em preto, trajetórias obtidas utilizando-se K_c

e um tempo de simulação de $10s$, ou seja, com $k \in [0, 1000]$. A Tabela 3 apresenta o número de eventos ocorridos com a utilização de cada função de disparo. Analisando-se os resultados, fica evidente que o método proposto neste trabalho é menos conservador do que o proposto em (WU; REIMANN; LIU, 2014), já que o Teorema 3.2 conseguiu demonstrar a estabilidade para uma função de disparo que gera menos eventos em um determinado intervalo de tempo. Além disso, novamente o *co-design* se mostrou mais eficiente reduzindo a ocorrência de eventos do que o método baseado em emulação.

Pode-se ainda fixar a função de disparo e o ganho de realimentação e, a seguir, resolver PO 4 para maximizar a RAS estimada. Assim, utilizando-se $K_c = [6,3717 \ 2,6619]$ e Q_σ e Q_δ definidas em (132), obtém-se a seguinte matriz P :

$$P = W^{-1} = \begin{bmatrix} 4,2889 & 0,5408 \\ * & 0,2296 \end{bmatrix}. \quad (136)$$

Como exposto em (TARBOURIECH et al., 2011), o volume do elipsóide estimado é proporcional a $\sqrt{\det(P^{-1})}$. Assim, pode-se facilmente comparar o volume dos elipsóides

Tabela 3: Exemplo 3: Comparação do número de eventos gerados por cada função de disparo.

Projeto da Função de Disparo	Número de Eventos
(WU; REIMANN; LIU, 2014)	218
PO 1s	130
<i>Co-Design</i> com OP7	96
<i>Co-Design</i> com OP8	90
Amostragem Periódica	1001

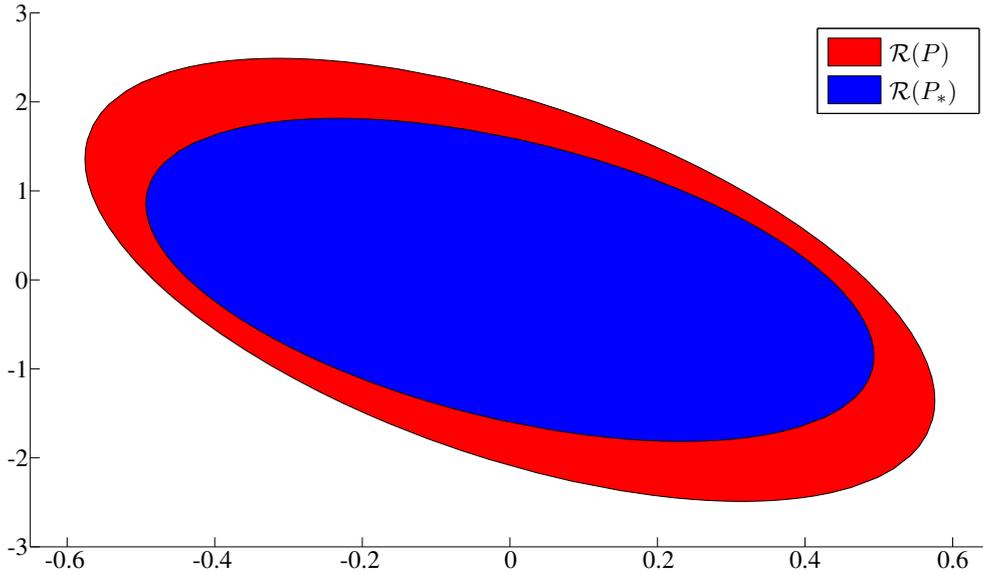


Figura 11: RAS estimadas para o sistema. Em azul, o resultado obtido em (WU; REIMANN; LIU, 2014) e em vermelho, o obtido aplicando-se o PO 4.

$\mathcal{R}(P_*)$ e $\mathcal{R}(P)$, sendo que este possui um volume 52,3% maior do que aquele, como pode ser visto na Figura 11.

3.6.4 Exemplo 4: Relação entre a RAS Garantida e a Função de Disparo

Na seção 3.5.2 mencionou-se a dependência entre o volume da RAS garantida e a função de disparo projetada. Este exemplo busca demonstrar tal dependência. Para tanto, considere o seguinte sistema instável sujeito à saturação do atuador, modelado de acordo com (66), em que:

$$A = \begin{bmatrix} 1,0526 & 0,0553 \\ 0,0553 & 1,1632 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0,0013 \\ 0,0540 \end{bmatrix}, \quad K_c = [-6,428 \quad -6,620], \quad \mu_0 = 1. \quad (137)$$

Para avaliar a influência da escolha da RAS a ser garantida sobre a função de disparo, considere uma região $\mathcal{R}(cP_0)$, com:

$$P_0 = \begin{bmatrix} 40 & 20 \\ * & 20 \end{bmatrix}. \quad (138)$$

Variando-se c entre e aplicando-se PO 1s para garantir que $\mathcal{R}(cP_0) \subseteq \mathcal{R}(P)$, encontram-se os valores de ρ_δ e $\bar{\rho}_\sigma$ apresentados na Tabela 4. Observe que $f(\delta[k], x[k]) = \rho_\delta \delta[k]' \delta[k] - \bar{\rho}_\sigma^{-1} x[k]' x[k]$, equivalente a uma função de disparo normalizada $f(\delta[k], x[k]) = \delta[k]' \delta[k] - \sigma x[k]' x[k]$, onde $\sigma = (\rho_\delta \bar{\rho}_\sigma)^{-1}$. Assim, quanto maior for o valor de σ , menor será a ocorrência de eventos.

Analisando-se os resultados obtidos, fica evidente que quanto menor for o valor de c , ou seja, quanto maior for a RAS garantida, menor é o valor de σ . Para valores de c inferiores a 1, as LMIs se tornam infactíveis. Já para valores de c superiores a 2, a restrição $\mathcal{R}(cP_0) \subseteq \mathcal{R}(P)$ deixa de ser relevante.

Tabela 4: Relação entre σ e $\mathcal{R}(cP_0)$

c	ρ_δ	$\bar{\rho}_\sigma$	σ
0.9	—	—	—
1	183,64	198,58	$2,742 \cdot 10^{-5}$
1,2	30,691	19,662	$1,657 \cdot 10^{-3}$
1,4	23,190	10,495	$4,108 \cdot 10^{-3}$
1,6	20,506	7,3401	$6,643 \cdot 10^{-3}$
1,8	19,082	5,8024	$9,031 \cdot 10^{-3}$
2	19,395	4,6131	$1,117 \cdot 10^{-2}$
2.1	19,395	4,6131	$1,117 \cdot 10^{-2}$

3.7 Comentários Finais

Nesta seção uma estratégia de controle baseado em eventos foi proposta, com o objetivo de reduzir a utilização dos recursos da rede de comunicação sobre a qual o sistema opera. Uma abordagem básica para sistemas lineares foi apresentada e estendida para o caso de sistemas sujeitos à saturação do atuador. Além disso, foram propostas condições para o *co-design* da função de disparo e do ganho de realimentação de estados do sistema. Assim, a principal vantagem desta abordagem em relação aos resultados encontrados na literatura é o fato de esta ser uma LMI na variáveis da função de disparo Q_σ e Q_δ e, no caso do *co-design*, no ganho de realimentação K_c , o que permite o projeto destes parâmetros a partir de problemas de otimização.

Nesse sentido, problemas de otimização convexa foram formulados com base nas condições propostas, objetivando reduzir a ocorrência de eventos e conseqüentemente a utilização da rede. Além disso, foram apresentados problemas de otimização que consideram a estimativa de região de atração dos sistemas com atuadores saturantes.

Por fim, a eficácia dos métodos propostos foi demonstrada através de exemplos numéricos, onde se mostrou que os resultados obtidos são menos conservadores do que os presentes na literatura. Em especial, a utilização de matrizes definidas positivas livres Q_σ e Q_δ e a resolução do problema de co-design apresentaram uma significativa redução do número de eventos gerados nas simulações. Ainda, no Exemplo 4, foi demonstrada a dependência entre a RAS garantida do sistema e a função de disparo projetada.

4 REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS BASEADA EM UM OBSERVADOR

4.1 Introdução

Neste capítulo, o método de controle baseado em eventos apresentado anteriormente é estendido para o caso em que os estados da planta não são diretamente acessíveis. Assim, a realimentação de estados é feita a partir de um observador de estados capaz de estimar o estado da planta a partir da entrada e saída da mesma. No entanto, o observador de estados é construído com base no modelo da planta, sendo que o estado só é estimado com exatidão quando o modelo corresponde precisamente à planta real. Devido a isso, neste capítulo será considerada ainda a influência de incertezas paramétricas no modelo da planta.

Na primeira parte do capítulo, é apresentado o método aplicado a sistemas sem incertezas, ou seja, quando se conhece precisamente o modelo da planta. Os resultados apresentados nesta primeira parte do capítulo encontram-se de forma resumida em (GROFF et al., 2016). A seguir, considera-se o caso em que existem incertezas paramétricas no modelo. Para isso, assume-se que as incertezas podem ser descritas na forma politópica, e condições em termos de LMIs são apresentadas para garantir a estabilidade assintótica do sistema incerto. A seguir, são propostos problemas de otimização para definir os parâmetros da função de disparo a fim de reduzir a atividade de transmissão de dados do sistema. Na sequência, visando analisar a validade e a eficácia dos métodos propostos, são apresentados exemplos numéricos. Por fim, o capítulo é concluído com algumas considerações finais.

4.2 Sistema em Tempo Discreto sem Incertezas

Na seção 3.2, considerou-se que o sistema possuía sensores capazes de medir o estado da planta. No entanto, muitas vezes apenas a saída da planta está disponível para medição, o que torna o uso de um observador essencial para a realização de uma realimentação de estados. Nesta seção, é apresentada uma estratégia de controle baseado em eventos considerando que o sensor só tem acesso à saída da planta, e um observador de estados é utilizado, da forma exposta na Figura 12. (HESPANHA; NAGHSHTABRIZI; XU, 2007) caracteriza esta topologia como um caso particular da topologia utilizada no capítulo anterior em que o sensor é inteligente. Uma vez que o sensor considerado já possuía capacidade computacional para executar o monitoramento da função de disparo, a adição de um observador de estados requer pouca inteligência adicional.

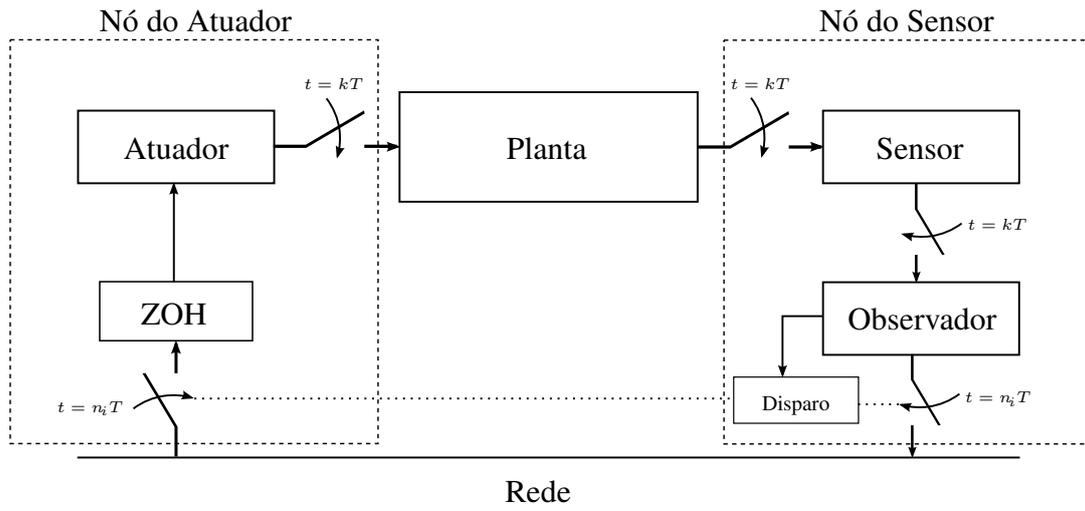


Figura 12: Topologia para controle baseado em um observador.

4.2.1 Preliminares e Formulação do Problema

Considere o sistema apresentado em (35). Agora, suponha que o estado $x(t)$ não está disponível para a medição pelos sensores, sendo:

$$y(t) = Cx(t) \quad (139)$$

a variável mensurável. Note que nos instantes de amostragem k , tem-se que $y[k] = Cx[k]$. Assim, o seguinte observador em tempo discreto pode ser utilizado para estimar o estado da planta:

$$\begin{aligned} x_o[k+1] &= Ax_o[k] + Bu[k] + K_o(y_o[k] - y[k]), \\ y_o[k] &= Cx_o[k], \end{aligned} \quad (140)$$

onde $x_o \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$ e $y_o \in \mathbb{R}$ são os vetores de estado, entrada e saída do observador, respectivamente, e $K_o \in \mathbb{R}^n$ é o ganho do observador. Então, considere uma lei de realimentação do estado observado dada por:

$$u[k] = K_c x_o[k], \quad (141)$$

onde $K_c' \in \mathbb{R}^n$ é um ganho projetado como discutido na seção 3.2.1.

Pode-se definir o erro de observação como

$$\tilde{x}[k] = x_o[k] - x[k], \quad (142)$$

de forma que o sistema em malha fechada obtido da conexão de (36), (140) e (141) possa ser representado pelas seguintes equações:

$$\tilde{x}[k+1] = (A + K_o C)\tilde{x}[k] \quad (143)$$

$$x_o[k+1] = (A + BK_c)x_o[k] + K_o C\tilde{x}[k]. \quad (144)$$

Da mesma forma que na seção 3.2.1, o envio periódico do sinal de controle pode levar a problemas na rede, tornando interessante o uso de uma estratégia baseada em eventos. Para isso, considere que K_o e K_c foram projetados de forma que o sistema em

malha fechada (143), (144) sob amostragem periódica seja assintoticamente estável, isto é, $(A + K_o C)$ e $(A + BK_c)$ sejam Schur-estáveis. A lei de controle de realimentação de estados baseada em observador para o sistema sob uma estratégia baseada em eventos é então dada por:

$$u[k] = u[n_i] = K_c x_o[n_i], \quad \forall k \in [n_i, n_{i+1}). \quad (145)$$

A partir disso e da seguinte definição:

$$\delta_o[k] = x_o[n_i] - x_o[k], \quad (146)$$

as equações que descrevem o comportamento do sistema em malha fechada são dadas por:

$$\tilde{x}[k+1] = (A + K_o C)\tilde{x}[k], \quad (147)$$

$$x_o[k+1] = (A + BK_c)x_o[k] + BK_c\delta_o[k] + K_o\tilde{e}[k]. \quad (148)$$

Considerando uma função de disparo $f(\delta_o[k], x_o[k])$, o seguinte algoritmo implementa a estratégia proposta considerando o observador de estados:

Algoritmo 3 Estratégia de Controle Baseado em Eventos com Observador

```

if  $k = 0$  then
   $u[0] \leftarrow K_c x_o[0]$ 
   $i \leftarrow 0$ 
else
  if  $f(\delta_o[k], x_o[k]) > 0$  then
     $u[k] \leftarrow K_c x_o[k]$ 
     $i \leftarrow i + 1$ 
     $n_i \leftarrow k$ 
  else
     $u[k] \leftarrow u[n_i]$ 
  end if
end if

```

Deseja-se então resolver o seguinte problema:

P7 Dados o ganho do observador K_o e o ganho de realimentação de estados K_c , determinar uma função de disparo $f(\delta_o[k], x_o[k])$ que garanta a estabilidade assintótica do sistema (36) sob a estratégia de controle baseado em eventos apresentada e reduza o número de eventos ocorridos em um determinado intervalo de tempo.

4.2.2 Condições de Estabilidade Propostas

Nesta seção serão propostas condições de estabilidade que, em conjunto com problemas de otimização convexas, serão utilizados na resolução de P7 de forma similar ao feito no capítulo anterior. No entanto, como agora presume-se que o gerador de eventos não tenha acesso ao estado da planta, a seguinte função de disparo quadrática será utilizada:

$$f(\delta_o[k], x_o[k]) = \delta_o[k]'Q_\delta\delta_o[k] - x_o[k]'Q_\sigma x_o[k], \quad (149)$$

Agora, considere a seguinte função composta candidata a função de Lyapunov:

$$V(x_o[k], \tilde{x}[k]) = V_1(\tilde{x}[k]) + V_2(x_o[k]), \quad (150)$$

com

$$V_1(\tilde{x}[k]) = \tilde{x}[k]' P_1 \tilde{x}[k] \quad (151)$$

$$V_2(x_o[k]) = x_o[k]' P_2 x_o[k] \quad (152)$$

sendo funções quadráticas associadas aos subsistemas (147) e (148), respectivamente. A seguir, define-se

$$\Delta V(x_o[k], \tilde{x}[k]) = \Delta V_1(\tilde{x}[k]) + \Delta V_2(x_o[k]) \quad (153)$$

$$\Delta V_1(\tilde{x}[k]) = V_1(\tilde{x}[k+1]) - V_1(\tilde{x}[k]) \quad (154)$$

$$\Delta V_2(x_o[k]) = V_2(x_o[k+1]) - V_2(x_o[k]). \quad (155)$$

Omitindo-se a dependência em k , $\Delta V_1(\tilde{x})$ e $\Delta V_2(x_o)$ são dadas por:

$$\Delta V_1(\tilde{x}) = \tilde{x}' ((A + K_o C)' P_1 (A + K_o C) - P_1) \tilde{x} \quad (156)$$

$$\begin{aligned} \Delta V_2(x_o) = & x_o' ((A + BK_c)' P_2 (A + BK_c) - P_2) x_o + \\ & \delta_o' (BK_c)' P_2 BK_c \delta_o + \tilde{e}' K_o' P_2 K_o \tilde{e} + \\ & 2x_o' (A + BK_c)' P_2 BK_c \delta_o + \\ & 2x_o' (A + BK_c)' P_2 K_o \tilde{e} + \\ & 2\delta_o' (BK_c)' P_2 K_o \tilde{e}. \end{aligned} \quad (157)$$

A partir da definição da função de disparo em (149), considere os seguintes limitantes superiores:

$$\Delta V_1(\tilde{x}) < -\tilde{x}' C' Q_e C \tilde{x} \quad (158)$$

$$\Delta V_2(x_o) < -x_o' Q_\sigma x_o + \delta_o' Q_\delta \delta_o + \tilde{x}' C' Q_e C \tilde{x}. \quad (159)$$

Note que a partir da definição do vetor auxiliar

$$\xi_2 = [x_o' \quad \delta_o' \quad \tilde{e}']', \quad (160)$$

pode-se reescrever (158) e (159) na forma:

$$\tilde{x}' \Psi_4 \tilde{x} < 0 \quad (161)$$

$$\xi_2' \Psi_5 \xi_2 = \xi_2' \begin{bmatrix} \psi_{511} & \psi_{512} & \psi_{513} \\ * & \psi_{522} & \psi_{523} \\ * & * & \psi_{533} \end{bmatrix} \xi_2 < 0, \quad (162)$$

onde

$$\begin{aligned} \Psi_4 &= (A + K_o C)' P_1 (A + K_o C) - P_1 + C' Q_e C \\ \psi_{511} &= (A + BK_c)' P_2 (A + BK_c) - P_2 + Q_\sigma \\ \psi_{512} &= (A + BK_c)' P_2 BK_c \\ \psi_{513} &= (A + BK_c)' P_2 K_o \\ \psi_{522} &= (BK_c)' P_2 BK_c - Q_\delta \\ \psi_{523} &= (BK_c)' P_2 K_o \\ \psi_{533} &= K_o' P_2 K_o - Q_e. \end{aligned}$$

Com isso, o seguinte teorema pode ser enunciado:

Teorema 4.1. *Sejam os ganhos K_o e K_c tais que o sistema discreto (143), (144) seja assintoticamente estável em malha fechada sob uma estratégia periódica. Se existirem matrizes definidas positivas $P_1, P_2, Q_\sigma, Q_\delta$ e uma matriz livre Q_e de dimensões apropriadas tais que:*

$$\Psi_4 < 0 \quad (163)$$

$$\Psi_5 < 0, \quad (164)$$

então o sistema em malha fechada (147), (148) é assintoticamente estável sob a estratégia baseada em eventos proposta no Algoritmo 3, com a função de disparo definida em (149).

Prova. Caso as relações (163) e (164) sejam satisfeitas, então (161) e (162) também o serão, o que implica na verificação dos limites apresentados em (158) e (159). Com isso, a partir da definição de $\Delta V(x_o, \tilde{x})$ tem-se que:

$$\Delta V(x_o, \tilde{x}) < -x_o' Q_\sigma x_o + \delta_o' Q_\delta \delta_o + \tilde{e}' Q_e \tilde{e} - \tilde{x}' C' Q_e C \tilde{x}. \quad (165)$$

Com base na definição de \tilde{e} , segue que $\tilde{e}' Q_e \tilde{e} - \tilde{x}' C' Q_e C \tilde{x} = 0$, então a seguinte relação é verificada:

$$\Delta V(x_o, \tilde{x}) + x_o' Q_\sigma x_o - \delta_o' Q_\delta \delta_o < 0. \quad (166)$$

O restante da prova é semelhante à prova do Teorema 3.1 e consiste em demonstrar que o Algoritmo 3 e a relação (166) implicam em $\Delta V(x_o, \tilde{x}) < 0, \forall k \geq 0$. \square

4.3 Sistema Incerto em Tempo Discreto

Nesta seção, os resultados da seção anterior serão estendidos para o caso em que o modelo do sistema apresenta incertezas no modelo do observador. Para isso, será considerada a classe de incertezas politópicas, descrita na seção 2.3.1.

4.3.1 Preliminares e Formulação do Problema

Considerando a classe de incertezas politópicas, pode-se definir:

$$A = A_0 + A_\Delta, \quad B = B_0 + B_\Delta \quad (167)$$

onde $A_\Delta \in \text{Co}\{A_{\Delta_i}\}$ e $B_\Delta \in \text{Co}\{B_{\Delta_j}\}$, de forma que a equação dinâmica do sistema dada em (36) possa ser reescrita como:

$$x[k+1] = (A_0 + A_\Delta)x[k] + (B_0 + B_\Delta)u[k]. \quad (168)$$

Por outro lado, o observador de estados é construído com base no modelo nominal do sistema, ou seja:

$$\begin{aligned} x_o[k+1] &= A_0 x_o[k] + B_0 u[k] + K_o(y_o[k] - y[k]), \\ y_o[k] &= C x_o[k]. \end{aligned} \quad (169)$$

Com isso, o erro de estimação \tilde{x} passa a ser dado por:

$$\tilde{x}[k+1] = (A_0 + K_o C)\tilde{x}[k] - A_\Delta x[k] - B_\Delta u[k]. \quad (170)$$

Utilizando a definição de \tilde{x} , pode-se reescrever (170) da seguinte maneira:

$$\tilde{x}[k+1] = (A_0 + A_\Delta + K_o C)\tilde{x}[k] - A_\Delta x_o[k] - B_\Delta u[k]. \quad (171)$$

Considerando agora a lei de controle baseado em eventos (145) e a definição de δ_o em (146), as equações do sistema em questão podem ser dadas pelas equações:

$$\tilde{x}[k+1] = (A_0 + A_\Delta + K_o C)\tilde{x}[k] - (A_\Delta + B_\Delta K_c)x_o[k] - (B_\Delta K_c)\delta_o[k] \quad (172)$$

$$x_o[k+1] = (A + BK_c)x_o[k] + BK_c\delta_o[k] + K_o\tilde{e}[k]. \quad (173)$$

A implementação da estratégia de controle baseado em eventos pode ser feita pela aplicação do Algoritmo 3. Com isso, o seguinte problema pode ser enunciado:

- P8 Dados o ganho do observador K_o e o ganho de realimentação de estados K_c , determinar uma função de disparo $f(\delta_o[k], x_o[k])$ que garanta a estabilidade assintótica do sistema incerto (168) sob a estratégia de controle baseado em eventos apresentada e reduza o número de eventos ocorridos em um determinado intervalo de tempo.

4.3.2 Condições de Estabilidade Propostas

A seguir, serão apresentadas condições para a estabilidade do sistema incerto (168) sob a estratégia proposta, visando reduzir

Considere a função candidata a função de Lyapunov definida em (150) e a definição de $\Delta V(x_o[k], \tilde{x}[k])$ em (153). Então, avaliando-se $\Delta V_1(\tilde{x}[k])$ encontra-se:

$$\begin{aligned} \Delta V_1(\tilde{x}) = & \tilde{x}'((A_0 + A_\Delta + K_o C)'P_1(A_0 + A_\Delta + K_o C) - P_1)\tilde{x} - \\ & 2\tilde{x}'(A_0 + A_\Delta + K_o C)'P_1(B_\Delta K_c)\delta_o - \\ & 2\tilde{x}'(A_0 + A_\Delta + K_o C)'P_1(A_\Delta + B_\Delta K_c)x_o + \\ & 2\delta_o'(B_\Delta K_c)'P_1(A_\Delta + B_\Delta K_c)x_o + \\ & \delta_o'(B_\Delta K_c)'P_1(B_\Delta K_c)\delta_o + \\ & x_o'(A_\Delta + B_\Delta K_c)'P_1(A_\Delta + B_\Delta K_c)x_o, \end{aligned} \quad (174)$$

enquanto $\Delta V_2(x_o)$ é dada por (157). Observe que, a partir do Lema 2.5, tem-se que $2x'y \leq x'Nx + y'N^{-1}y$ e $-2x'y \leq x'Nx + y'N^{-1}y$ para quaisquer vetores x e y e qualquer matriz $N = N' > 0$ de dimensões apropriadas. Então a seguinte relação é verificada:

$$\begin{aligned} \Delta V_1(\tilde{x}) \leq & \tilde{x}'((A_0 + A_\Delta + K_o C)'P_1(A_0 + A_\Delta + K_o C) - P_1)\tilde{x} + \\ & \tilde{x}'(A_0 + A_\Delta + K_o C)'P_1N_1^{-1}P_1(A_0 + A_\Delta + K_o C)\tilde{x} + \\ & \tilde{x}'(A_0 + A_\Delta + K_o C)'P_1N_2^{-1}P_1(A_0 + A_\Delta + K_o C)\tilde{x} + \\ & \delta_o'(B_\Delta K_c)'P_1N_3^{-1}P_1(B_\Delta K_c)\delta_o + \\ & \delta_o'(B_\Delta K_c)'N_1(B_\Delta K_c)\delta_o + \\ & x_o'(A_\Delta + B_\Delta K_c)'N_2(A_\Delta + B_\Delta K_c)x_o + \\ & x_o'(A_\Delta + B_\Delta K_c)'N_3(A_\Delta + B_\Delta K_c)x_o + \\ & \delta_o'(B_\Delta K_c)'P_1(B_\Delta K_c)\delta_o + \\ & x_o'(A_\Delta + B_\Delta K_c)'P_1(A_\Delta + B_\Delta K_c)x_o, \end{aligned} \quad (175)$$

onde N_1 , N_2 e N_3 são matrizes simétricas definidas positivas.

Definindo-se o vetor auxiliar:

$$\xi_3 = [\tilde{x}' \quad \xi_2']', \quad (176)$$

pode-se escrever (175) da seguinte forma:

$$\Delta V_1(\tilde{x}[k]) \leq \xi_3' \Psi_6 \xi_3 = \xi_3' \begin{bmatrix} \psi_{611} & 0_* & 0_* & 0_* \\ * & \psi_{622} & 0_* & 0_* \\ * & * & \psi_{633} & 0_* \\ * & * & * & 0_* \end{bmatrix} \xi_3 \quad (177)$$

com:

$$\begin{aligned} \psi_{611} &= (A_0 + A_\Delta + K_o C)' P_1 (A_0 + A_\Delta + K_o C) - P_1 + \\ &\quad (A_0 + A_\Delta + K_o C)' P_1 N_1^{-1} P_1 (A_0 + A_\Delta + K_o C) + \\ &\quad (A_0 + A_\Delta + K_o C)' P_1 N_2^{-1} P_1 (A_0 + A_\Delta + K_o C) \\ \psi_{622} &= (A_\Delta + B_\Delta K_c)' N_2 (A_\Delta + B_\Delta K_c) + (A_\Delta + B_\Delta K_c)' N_3 (A_\Delta + B_\Delta K_c) + \\ &\quad (A_\Delta + B_\Delta K_c)' P_1 (A_\Delta + B_\Delta K_c) \\ \psi_{633} &= (B_\Delta K_c)' P_1 (B_\Delta K_c) + (B_\Delta K_c)' N_1 (B_\Delta K_c) + (B_\Delta K_c)' P_1 N_3^{-1} P_1 (B_\Delta K_c). \end{aligned} \quad (178)$$

Observe que caso a desigualdade

$$\xi_3' \Psi_6 \xi_3 + \tilde{x}' C' Q_e C \tilde{x} < 0 \quad (179)$$

seja satisfeita, então $\Delta V_1(\tilde{x}) < -\tilde{x}' C' Q_e C \tilde{x}$.

Por outro lado, seguindo os mesmos passos apresentados na seção anterior, conclui-se que caso

$$\xi_3' \begin{bmatrix} 0_* & 0_* \\ * & \Psi_5 \end{bmatrix} \xi_3 < 0, \quad (180)$$

então $\Delta V_2(x_o) < \tilde{x}' C' Q_e C \tilde{x} + \delta'_o Q_\delta \delta - x'_o Q_\sigma x_o$.

A partir de (179) e (180), pode-se afirmar que caso

$$\xi_3' \left(\Psi_6 + \begin{bmatrix} C' Q_e C & 0_* \\ * & \Psi_5 \end{bmatrix} \right) \xi_3 < 0, \quad (181)$$

então $\Delta V(\tilde{x}, x_o) < 0$. A restrição (181) pode ser verificada por meio de duas restrições independentes, sendo elas:

$$\tilde{x}' (\psi_{611} + C' Q_e C) \tilde{x} < 0 \quad (182)$$

$$\xi_2' \left(\begin{bmatrix} \psi_{622} & 0_* & 0_* \\ * & \psi_{633} & 0_* \\ * & * & 0_* \end{bmatrix} + \Psi_5 \right) \xi_2 < 0 \quad (183)$$

Repare que ψ_{611} pode ser escrito da seguinte forma:

$$\psi_{611} = \Pi_3 M_1^{-1} \Pi_3' - P_1 \quad (184)$$

com:

$$\Pi_3 = \begin{bmatrix} P_1(A_0 + A_\Delta + K_0C) \\ P_1(A_0 + A_\Delta + K_0C) \\ P_1(A_0 + A_\Delta + K_0C) \end{bmatrix}', \quad M_1 = \begin{bmatrix} P_1 & 0_* & 0_* \\ * & N_1 & 0_* \\ * & * & N_2 \end{bmatrix} \quad (185)$$

Segundo esta definição, via Complemento de Schur, segue que (182) é satisfeita se:

$$\Psi_7 = \begin{bmatrix} -P_1 + C'Q_eC & \Pi_3 \\ * & -M_1 \end{bmatrix} < 0. \quad (186)$$

Já no que concerne à restrição (183), esta é verificada se:

$$\Psi_5 + \Pi_4 M_2^{-1} \Pi_4' < 0, \quad (187)$$

com:

$$\Pi_4 = \begin{bmatrix} P_1(A_\Delta + B_\Delta K_c) & 0_* & 0_* \\ N_2(A_\Delta + B_\Delta K_c) & 0_* & 0_* \\ N_3(A_\Delta + B_\Delta K_c) & 0_* & 0_* \\ 0_* & P_1(B_\Delta K_c) & 0_* \\ 0_* & P_1(B_\Delta K_c) & 0_* \\ 0_* & N_1(B_\Delta K_c) & 0_* \end{bmatrix}' \quad (188)$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} P_1 & 0_* & 0_* & 0_* & 0_* & 0_* \\ * & N_2 & 0_* & 0_* & 0_* & 0_* \\ * & * & N_3 & 0_* & 0_* & 0_* \\ * & * & * & P_1 & 0_* & 0_* \\ * & * & * & * & N_3 & 0_* \\ * & * & * & * & * & N_1 \end{bmatrix}. \quad (189)$$

Por esta definição, a aplicação do Complemento de Schur produz:

$$\Psi_8 = \begin{bmatrix} \Psi_5 & \Pi_4 \\ * & -M_2 \end{bmatrix} < 0. \quad (190)$$

Agora, observe que as matrizes são afins em A_Δ e B_Δ . Assim, como as incertezas são politópicas, basta que as restrições Ψ_7 e Ψ_8 sejam verificadas nos vértices do envelope convexo definido por estes conjuntos para que elas sejam verificadas em todo o interior do envelope convexo.

Com isso, o seguinte teorema pode ser proposto:

Teorema 4.2. *Sejam os ganhos K_o e K_c tais que o sistema discreto (143), (144) seja assintoticamente estável em malha fechada sob uma estratégia periódica. Se existirem matrizes definidas positivas P_1 , P_2 , Q_σ , Q_δ , N_1 , N_2 e N_3 e uma matriz livre Q_e de dimensões apropriadas tais que:*

$$\Psi_{7i} < 0 \quad \forall i = 1, \dots, n_a \quad (191)$$

$$\Psi_{8ij} < 0 \quad \forall i = 1, \dots, n_a \quad e \quad \forall j = 1, \dots, n_b, \quad (192)$$

então o sistema (147), (148) é assintoticamente estável sob a estratégia baseada em eventos proposta no Algoritmo 3, com a função de disparo definida em (149), $\forall A_\Delta \in Co\{A_{\Delta i}\}$ e $\forall B_\Delta \in Co\{B_{\Delta j}\}$.

Prova. Caso (191) seja satisfeita nos vértices do envelope convexo $\text{Co}\{A_{\Delta_i}\}$, então, por convexidade, estará satisfeita para todo o conjunto A_{Δ} , satisfazendo (186), que é equivalente a (182). Por outro lado, caso (192) seja satisfeita nos vértices dos envelopes convexos $\text{Co}\{A_{\Delta_i}\}$ e $\text{Co}\{B_{\Delta_j}\}$, então, por convexidade, estará satisfeita para todo o conjunto $A_{\Delta}B_{\Delta}$, verificando (190), que é equivalente a (183).

Dessa forma, tem-se que (182) e (183) são verificadas, o que implica na verificação de (181). Analisando os passos percorridos nas equações (174)-(180), constata-se que:

$$\Delta V(\tilde{x}, x_o) = \Delta V_1(\tilde{x}) + \Delta V_2(x_o) < \delta'_o Q_{\delta} \delta - x'_o Q_{\sigma} x_o. \quad (193)$$

A partir de (193), seguindo o raciocínio apresentado no Teorema 3.1, conclui-se que $\Delta V(\tilde{x}, x_o) < 0, \forall k > 0$. \square

4.4 Problemas de Otimização

Na seção anterior, foram apresentadas condições suficientes para a estabilidade do sistema em malha fechada sob a estratégia de controle baseado em eventos proposta. Agora, assim como feito na seção 3.5, deseja-se utilizar as condições propostas para projetar os parâmetros da função de disparo de modo que a quantidade de eventos em um determinado período de tempo seja reduzida, resolvendo assim P7 e P8, o que pode ser feito de forma similar àquela apresentada na seção 3.5.1. Assim sendo, são propostos os seguintes problemas de otimização, análogos a PO 1, 2 e 3, aplicados à realimentação de estados baseada em observador:

PO 1o:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && -\rho \\ &\text{sujeito a:} && (163), (164) \\ &&& (\text{ou } (191), (192)), \end{aligned} \quad (194)$$

onde $Q_{\sigma} = \rho I$ e $Q_{\delta} = I$.

Considerando ρ_0 como a solução ótima do PO 1o, um problema análogo ao PO 2 pode ser formulado como:

PO 2o:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && -\text{traço}(Q_{\sigma}) \\ &\text{sujeito a:} && (163), (164), Q_{\sigma} \geq \rho_0 I \\ &&& (\text{ou } (191), (192), Q_{\sigma} \geq \rho_0 I), \end{aligned} \quad (195)$$

com $Q_{\sigma} = \text{diag}(\rho_1, \dots, \rho_n)$ e $Q_{\delta} = I$;

Por sua vez, o PO 3 pode ser aplicado a sistemas com observadores de estados como segue:

PO 3o:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && \text{traço}(Q_{\delta} - Q_{\sigma}) \\ &\text{sujeito a:} && (163), (164), Q_{\sigma} \geq \rho_0 I, Q_{\delta} \leq I \\ &&& (\text{ou } (191), (192), Q_{\sigma} \geq \rho_0 I, Q_{\delta} \leq I), \end{aligned} \quad (196)$$

com Q_{σ} e Q_{δ} matrizes simétricas definidas positivas livres.

4.5 Exemplos Numéricos

A fim de ilustrar e validar os resultados obtidos neste capítulo, a seguir são apresentados alguns exemplos numéricos.

4.5.1 Exemplo 1: Sistema sem Incertezas

Considere o seguinte sistema instável em tempo contínuo, modelado por (35), com:

$$A_c = \begin{bmatrix} -0.5 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (197)$$

Seguindo a metodologia proposta, obtém-se um modelo descrito por (36), considerando um período de amostragem nominal $T = 0,01$ s, chegando-se às seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 0,9950 & 0,0100 \\ 0,0000 & 1,0101 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0,001 \\ 0,0101 \end{bmatrix}. \quad (198)$$

Supondo que a única variável disponível ao sensor é:

$$y[k] = Cx[k], C = [1 \ 0], \quad (199)$$

os seguintes ganhos estabilizantes são projetados:

$$K_c = [-0,4000 \ -2,7500], K_o = \begin{bmatrix} -0,1000 \\ -0,4000 \end{bmatrix}. \quad (200)$$

A partir desta configuração, PO 1o é aplicado, encontrando-se $\rho = 0,1684$, e PO 2o encontra os mesmos parâmetros para a função de disparo. Por sua vez, PO 3o obtém:

$$Q_\sigma = \begin{bmatrix} 0,2050 & -0,0732 \\ * & 0,3148 \end{bmatrix}, Q_\delta = \begin{bmatrix} 0,2556 & 0,1083 \\ * & 0,9843 \end{bmatrix}. \quad (201)$$

Para comparar as duas funções de disparo projetadas, o sistema em malha-fechada definido anteriormente pode ser simulado considerando-se a condição inicial:

$$x[0] = \begin{bmatrix} 10 \\ -10 \end{bmatrix}, \quad (202)$$

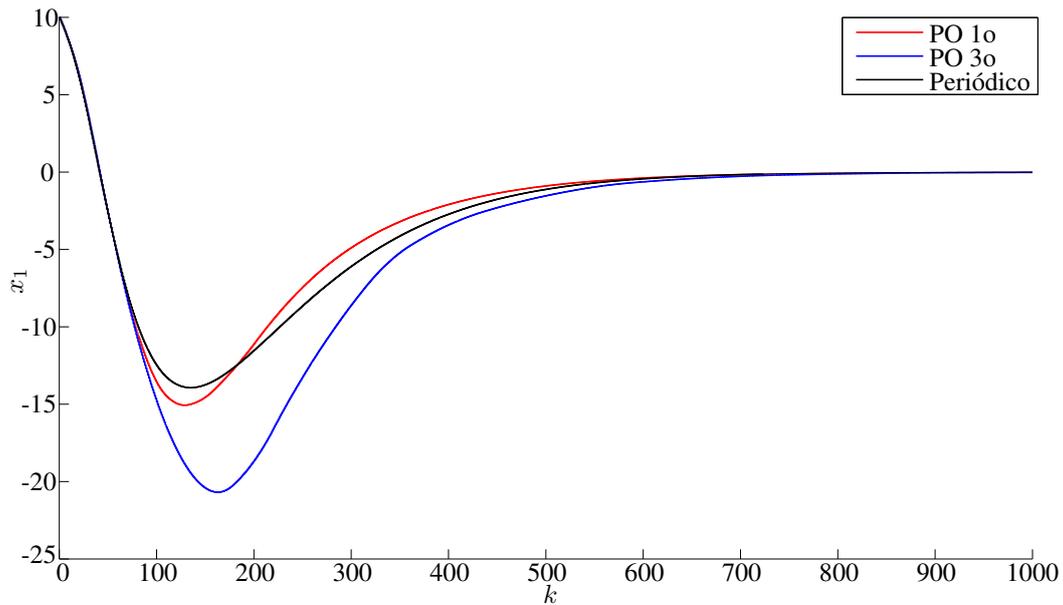
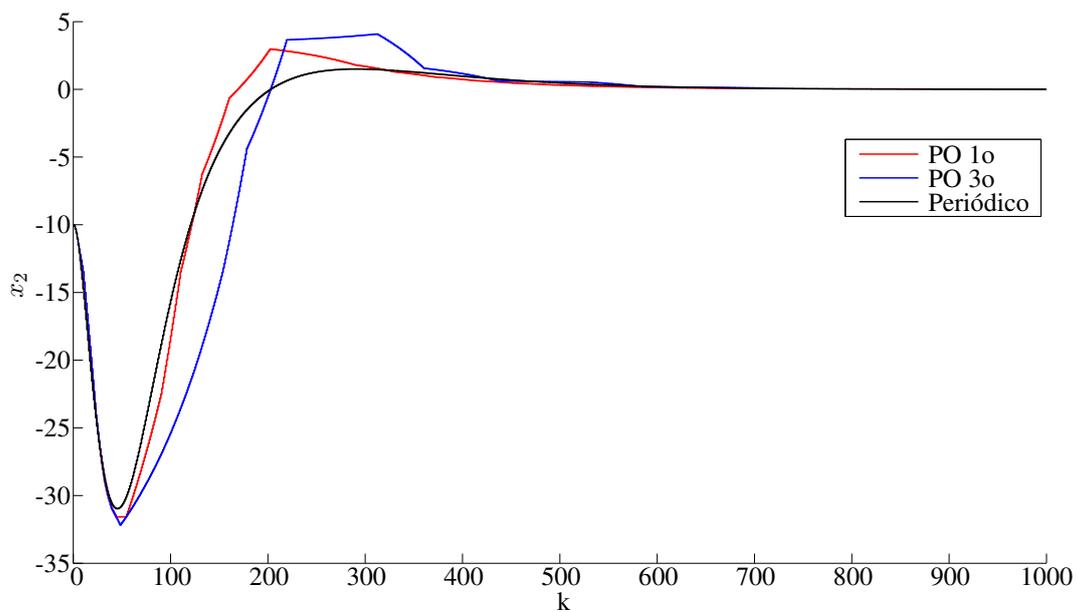
e o observador inicializado na origem, ou seja, $x_o[0] = [0 \ 0]'$. Além disso, será considerado um tempo de simulação de 10 s, o que implica em $k \in [0 \ 1000]$.

O número de eventos ocorridos no período de simulação estipulado é exposto na Tabela 6. Pode-se observar que o número de eventos ocorridos foi drasticamente reduzido quando comparado ao caso periódico, demonstrando que a metodologia proposta é muito útil quando a taxa de amostragem nominal do sensor é relativamente pequena.

A evolução dos estados da planta $x_1[k]$ e $x_2[k]$ é apresentada nas Figuras 13 e 14, respectivamente. Pode-se observar que há uma degradação da resposta do sistema em relação ao caso periódico, e que esta degradação é mais acentuada no caso em que ocorrem menos eventos, o que é esperado, já que o sistema opera em malha aberta no intervalo entre dois eventos, o que pode ser verificado analisando-se o sinal de controle apresentado na Figura 15.

Tabela 5: Ocorrência de eventos com cada função de disparo.

Projeto da Função de Disparo	Número de Eventos
PO 1o e 2o	38
PO 3o	24
Caso Periódico	1001

Figura 13: Evolução do estado x_1 .Figura 14: Evolução do estado x_2 .

Por sua vez, a Figura 16 apresenta os intervalos entre eventos para cada caso, onde evidencia-se os maiores intervalos obtidos pelo PO 3o. Além disso, pode-se notar que o tempo entre eventos é reduzido no início da simulação. Isso ocorre pois a dinâmica de

$x_o[k]$ é muito mais rápida do que a dinâmica de $x[k]$ quando existe um erro de observação considerável. Quando este erro tende a 0, a dinâmica de $x_o[k]$ se aproxima daquela de $x[k]$, mais lenta, e conseqüentemente ocorrem menos eventos.

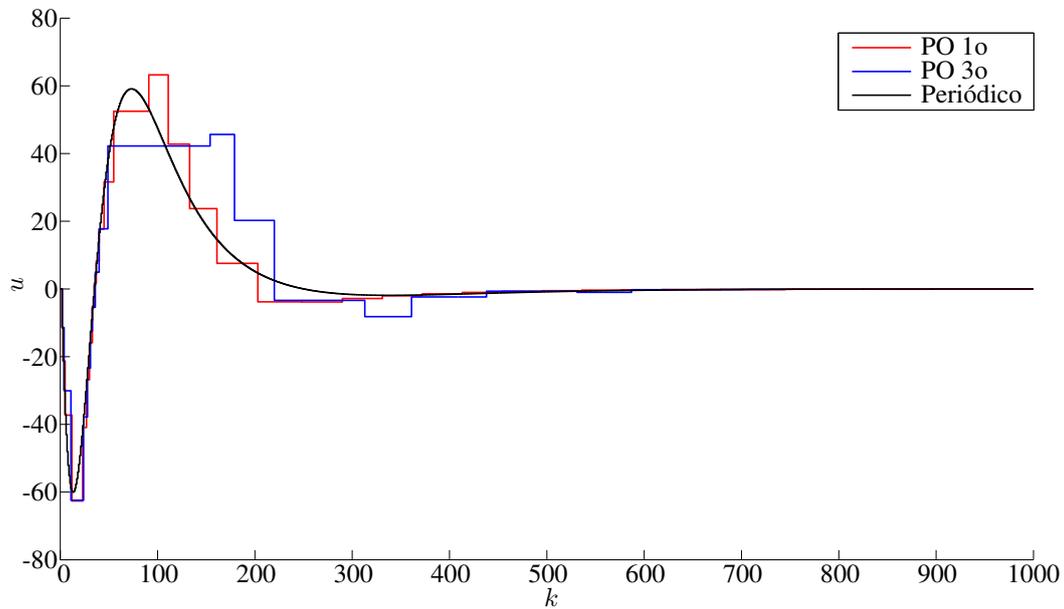


Figura 15: Evolução do sinal de controle u .

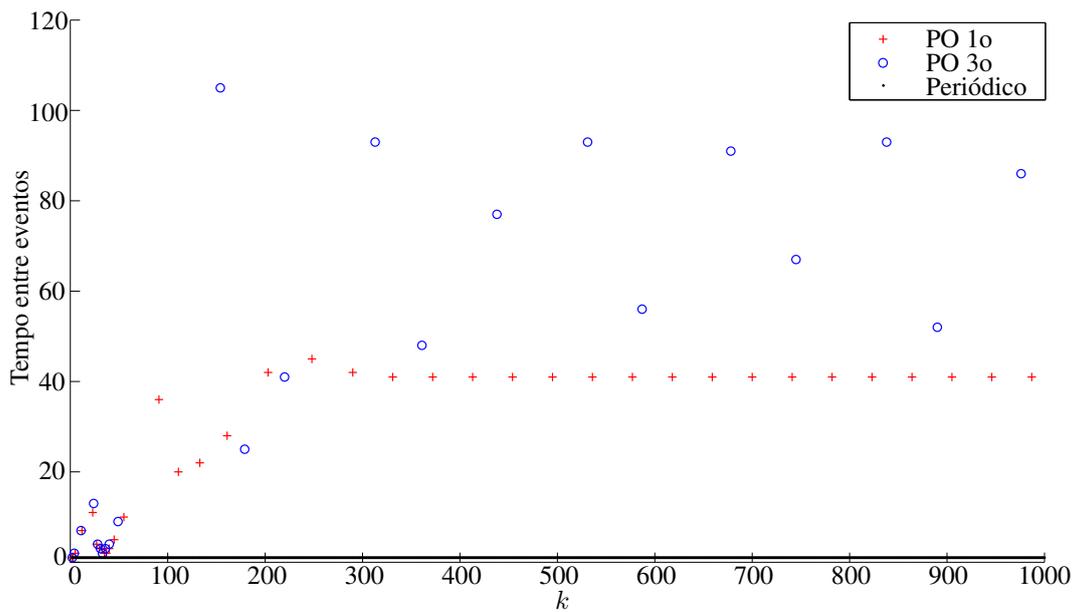


Figura 16: Períodos entre eventos.

4.5.2 Exemplo 2: Sistema Incerto

Considere o sistema apresentado no exemplo anterior. Agora, suponha que este sistema está sujeito a uma incerteza que pode ser descrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 A_0 &= \begin{bmatrix} 0,9950 & 0,0100 \\ 0,0000 & 1,0101 \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} 0,001 \\ 0,0101 \end{bmatrix}, \\
 A_\Delta &= \text{Co} \left(\begin{bmatrix} -0,9950 & -0,0100 \\ 0,0000 & -1,0101 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}, \begin{bmatrix} 0,9950 & 0,0100 \\ 0,0000 & 1,0101 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3} \right), \\
 B_\Delta &= \text{Co} \left(\begin{bmatrix} -0,0050 \\ -1,0050 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}, \begin{bmatrix} 0,0050 \\ 1,0050 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3} \right).
 \end{aligned} \tag{203}$$

Agora, aplicando-se PO 1o para projetar uma função de disparo que garanta a estabilidade assintótica do sistema, obtém-se $\rho = 0,0184$, e novamente nenhuma melhoria é encontrada por PO 2o. Já PO 3o obtém os seguintes parâmetros:

$$Q_\sigma = \begin{bmatrix} 0,0190 & -0,0017 \\ * & 0,0228 \end{bmatrix}, \quad Q_\delta = \begin{bmatrix} 0,0123 & 0,0838 \\ * & 0,5763 \end{bmatrix} \tag{204}$$

A Tabela 6 apresenta os resultados das simulações nos vértices dos envelopes convexos de A_Δ e B_Δ . Comparando-se o número de eventos gerados com o caso onde não há incertezas, percebe-se que a garantia de robustez do sistema em relação às incertezas acarreta em um maior número de eventos. Além disso, observa-se que a função projetada por PO 3o apresentou uma menor variação no número de eventos gerados, tanto em relação ao caso sem incertezas, quanto em relação à simulação da planta nos vértices do politopo de incertezas admissíveis. Com isso, verifica-se novamente a importância dos graus de liberdade adicionais de PO 3o.

Tabela 6: Número de eventos gerados pelas funções de disparo nos vértices dos envelopes convexos

Projeto da Função de Disparo	Número de Eventos			
	$[A_{\Delta_1}, B_{\Delta_1}]$	$[A_{\Delta_2}, B_{\Delta_1}]$	$[A_{\Delta_1}, B_{\Delta_2}]$	$[A_{\Delta_2}, B_{\Delta_2}]$
PO 1o e 2o	86	100	100	110
PO 3o	43	44	40	43
Caso Periódico	1001	1001	1001	1001

4.6 Comentários Finais

Neste capítulo, o resultado apresentado na seção 3.3 foi estendido para o caso onde os estados do sistema não estão disponíveis para medição. Assim, foi considerada a utilização de um observador de estados e a realização de uma realimentação estática baseada nos estados observados. Para isso, inicialmente foi abordado o caso em que se conhece precisamente o modelo da planta, e, a seguir, foi apresentada uma metodologia para sistemas com incertezas politópicas. Além disso, problemas de otimização convexos que permitem determinar os parâmetros da função de disparo que levam a uma redução da utilização dos recursos de rede foram formulados.

A partir de exemplos numéricos, foi demonstrado que a metodologia proposta é capaz de estabilizar o sistema com uma quantidade de transmissões de dados significativamente menor do que um sistema sob uma estratégia periódica. Para o caso de sistemas incertos, verificou-se que a função de disparo com Q_σ e Q_δ sendo matrizes definidas positivas livres apresentou uma sensibilidade consideravelmente menor à variação nos parâmetros da planta.

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho foi proposta uma metodologia de controle baseado em eventos para sistemas em tempo discreto. Esta abordagem possui a vantagem de representar mais fielmente a implementação efetiva de sistemas de controle em NCSs do que a abordagem contínua, já que o monitoramento dos sinais dos sensores é feita de forma digital. Ademais, extensões do resultado foram apresentadas para sistemas com saturação e para a realimentação de estados baseada em um observador.

Para isso, na primeira parte do Capítulo 3, uma estratégia básica para a síntese da função de disparo considerando uma realimentação de estados e um sistema em tempo discreto foi formulada. Além disso, condições para o *co-design* da função de disparo e do ganho de realimentação foram expostas. A seguir, este resultado foi estendido para o caso em que há saturação do atuador. A principal vantagem da metodologia proposta é que a formulação das condições é dada na forma de LMIs, o que permite a utilização de problemas de otimização convexa para a determinação das variáveis de projeto (parâmetros de função de disparo e ganho de realimentação), sendo isto um diferencial com relação aos trabalhos presentes na literatura, nos quais os parâmetros da função de disparo precisam ser determinados *a priori*. Assim, na segunda parte do Capítulo 3, foi demonstrado como utilizar problemas de otimização para a síntese da função de disparo e do ganho de realimentação de forma a reduzir a ocorrência de eventos em um determinado intervalo de tempo e, no caso de sistemas com saturação, garantir ou maximizar a RAS estimada do sistema. Além disso, foram propostos problemas de otimização capazes de explorar graus de liberdade adicionais no projeto da função de disparo, obtendo assim resultados menos conservadores do que os presentes na literatura. A partir de exemplos numéricos, foi demonstrada a importância dos graus de liberdade adicionais e do *co-design* na obtenção de melhores resultados, e, por fim, alguns comentários finais foram realizados.

No Capítulo 4 foi considerado o caso em que os estados do sistema não estão disponíveis para a medição, sendo utilizado um observador para a realização da realimentação de estados. Em um primeiro momento foi analisado o caso em que o modelo da planta usado no observador corresponde exatamente à dinâmica da planta real observada, e condições para a estabilidade e síntese da função de disparo foram propostas na forma de LMIs. No entanto, em aplicações práticas, raramente é possível obter um modelo exato da planta. Tendo isso em vista, em um segundo momento foi estudado o caso em que há incertezas no modelo da planta, ou seja, quando existem parâmetros incertos na planta ou dinâmicas complexas não modeladas. Condições expressas na forma de LMIs para a estabilidade do sistema e síntese da função de disparo foram apresentadas. Novamente, foi demonstrado como aplicar problemas de otimização convexos para a determinação dos parâmetros da função de disparo que reduzem o número de eventos gerados. Os resultados obtidos foram então aplicados a exemplos numéricos visando a sua validação e, por fim, algumas

condições finais foram expressas.

Apesar de este trabalho apresentar aplicações da estratégia de controle baseado em eventos para diversas classes de sistemas, esta área de pesquisa ainda possui muito campo a ser explorado. Nesse sentido, pode-se destacar as seguintes perspectivas de trabalhos futuros:

- **Análise dos efeitos da quantização:** A quantização dos dados é inerente aos sistemas digitais, e na maioria dos casos, considera-se que a perda de informação devido à quantização é pequena, podendo ser desprezada. No entanto, em sistemas de controle em rede, a minimização do tamanho dos dados (e o consequente aumento no quantidade de informação perdida pela quantização) pode ser um fator importante na redução da utilização da rede, tornando-se um tema de interesse para a área de controle em rede.
- **Tratamento de sistemas com atraso de transporte:** O atraso na transmissão e recebimento de dados é intrínseco aos sistemas de controle em rede. Dessa forma, é interessante apresentar uma modelagem específica para estes sistemas, o que pode potencialmente resultar em resultados menos conservadores do que a descrição do atraso a partir de incertezas genéricas.
- **Modelagem de incertezas mais complexas:** Neste trabalho foram abordados os efeitos das incertezas no modelo do sistema ao utilizar-se um observador. No entanto, foi considerada apenas a modelagem das incertezas politópicas. Ainda que essa classe de incertezas seja bastante abrangente, tratar incertezas descritas de forma mais complexa pode levar a métodos menos conservadores.
- **Métodos para análise e síntese de controladores dinâmicos:** Os resultados de análise e síntese de realimentação estática de estados apresentados neste trabalho podem ser estendidos para a realimentação dinâmica de saída, como por exemplo o caso de controladores PID. Neste sentido, pode-se considerar duas topologias. A primeira considera que o controlador roda no nó do sensor, sendo que com isso a extensão dos resultados obtidos neste trabalho é direta, porém, exige uma capacidade computacional adicional neste nó. A segunda considera que o controlador opera em um nó diferente da rede. Neste caso, o desafio consiste no fato de que o gerador de eventos não tem acesso ao estado do controlador, sendo que novas condições de estabilidade precisam ser derivadas considerando apenas a saída na função de disparo.

REFERÊNCIAS

- ABDELRAHIM, M. et al. Co-design of output feedback laws and event-triggering conditions for linear systems. In: ANNUAL CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL (CDC), 53., 2014, Los Angeles. **Proceedings...** New York: IEEE, 2014. p.3560–3565.
- AKYILDIZ, I. et al. Wireless sensor networks: a survey. **Computer Networks**, [S.l.], v.38, n.4, p.393–422, 2001.
- ALAMO, T.; CEPEDA, A.; LIMON, D. Improved computation of ellipsoidal invariant sets for saturated control systems. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL AND 2005 EUROPEAN CONTROL CONFERENCE. CDC-ECC'05., 44., 2005, Seville. **Proceedings...** New York: IEEE, 2005. p.6216–6221.
- ÅRZÉN, K.-E. et al. An introduction to control and scheduling co-design. In: CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 2000., 39., 2000, Sydney. **Proceedings...** New York: IEEE, 2000. v.5, p.4865–4870.
- ÅSTRÖM, K. J. Event based control. In: ASTOLFI, A.; MARCONI, L. (Ed.). **Analysis and design of nonlinear control systems**. Berlin: Springer, 2008. p.127–147.
- ÅSTRÖM, K. J.; BERNHARDSSON, B. Comparison of periodic and event based sampling for first-order stochastic systems. In: IFAC WORLD CONGRESS, 14., 1999, Beijing. **Proceedings...** Tarrytown: IFAC, 1999. v.11, p.301–306.
- ÅSTRÖM, K. J.; WITTENMARK, B. **Computer-controlled Systems**. 3rd.ed. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, Inc., 1997.
- BOYD, S. P. et al. **Linear matrix inequalities in system and control theory**. Philadelphia: SIAM, 1994. v.15.
- BOYD, S.; VANDENBERGHE, L. **Convex optimization**. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
- CHEN, C.-T. **Linear system theory and design**. 3rd.ed. New York: Oxford University Press, 1999.
- CHILALI, M.; GAHINET, P. H_∞ design with pole placement constraints: an LMI approach. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.41, n.3, p.358–367, 1996.

- DULLERUD, G.; PAGANINI, F. **A course in robust control theory**. New York: Springer-Verlag, 2000.
- EQTAMI, A.; DIMAROGONAS, D.; KYRIAKOPOULOS, K. Event-triggered control for discrete-time systems. In: AMERICAN CONTROL CONF., 2010, Baltimore. **Proceedings...** New York: IEEE, 2010. p.4719–4724.
- GOMES DA SILVA Jr, J. M. et al. Synthesis of state feedback for linear systems subject to control saturation by an LMI-based approach. In: IFAC SYMP. ROBUST CONTROL, 2., 1997, Budapest. **Proceedings...** Tarrytown: IFAC, 1997. p.229–234.
- GOMES DA SILVA Jr, J. M.; TARBOURIECH, S. Anti-windup design with guaranteed regions of stability for discrete-time linear systems. In: AMERICAN CONTROL CONF., 2004., 2004, Boston. **Proceedings...** New York: IEEE, 2004.
- GROFF, L. B. et al. Observer-based event-triggered control: a discrete-time approach. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE (ACC), 2016., 2016, Boston. **Proceedings...** New York: IEEE, 2016. no prelo.
- HEEMELS, W.; DONKERS, M. Model-based periodic event-triggered control for linear systems. **Automatica**, Tarrytown, v.49, p.698–711, 2013.
- HEEMELS, W.; DONKERS, M.; TEEL, A. Periodic event-triggered control based on state feedback. In: IEEE CONF. ON DECISION AND CONTROL AND EUROPEAN CONTROL CONF. (CDC-ECC), 50., 2011, Orlando. **Proceedings...** New York: IEEE, 2011.
- HEEMELS, W.; DONKERS, M.; TEEL, A. Periodic event-triggered control for linear systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, [S.l.], v.58, n.4, p.847–861, 2013.
- HEEMELS, W.; JOHANSSON, K. H.; TABUADA, P. An introduction to event-triggered and self-triggered control. In: IEEE 51ST ANNUAL CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL (CDC), 2012, Hawaii. **Proceedings...** New York: IEEE, 2012. p.3270–3285.
- HENNINGSSON, T.; JOHANNESSON, E.; CERVIN, A. Sporadic event-based control of first-order linear stochastic systems. **Automatica**, Tarrytown, v.44, n.11, p.2890–2895, 2008.
- HESPANHA, J.; NAGHSHTABRIZI, P.; XU, Y. A Survey of Recent Results in Networked Control Systems. **Proceedings of the IEEE**, New York, v.95, n.1, p.138–162, 2007.
- HETEL, L.; DAAFOUZ, J.; IUNG, C. Analysis and control of LTI and switched systems in digital loops via an event-based modelling. **International Journal of Control**, Abingdon, v.81, n.7, p.1125–1138, 2008.
- HU, T.; LIN, Z. **Control Systems with Actuator Saturation: analysis and design**. Boston: Birkhauser, 2001.
- JETTO, L.; ORSINI, V. Event-triggered internally stabilizing sporadic control for MIMO plants with non measurable state. In: IFAC WORLD CONGRESS, 18., 2011, Milano. **Proceedings...** Tarrytown: IFAC, 2011. p.10225–10230.

KHALIL, H. K. **Nonlinear systems**. 2nd.ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1996.

KIENER, G. A.; LEHMANN, D.; JOHANSSON, K. H. Actuator saturation and anti-windup compensation in event-triggered control. **Discrete Event Dynamic Systems**, Berlin, v.24, n.2, p.173–197, 2014.

KOPETZ, H. Should responsive systems be event-triggered or time-triggered? **IEICE Transactions on Information and Systems**, Tokyo, v.76, n.11, p.1325–1332, 1993.

LEHMANN, D.; JOHANSSON, K. H. Event-triggered PI control subject to actuator saturation. In: IFAC CONFERENCE ON ADVANCES IN PID CONTROL, 2012, Brescia. **Proceedings...** Tarrytown: IFAC, 2012. p.430–435.

LEMMON, M. Event-triggered feedback in control, estimation, and optimization. In: BEMPORAD, A.; HEEMELS, M.; JOHANSSON, M. (Ed.). **Networked Control Systems**. New York: Springer-Verlag, 2010. p.293–358.

LI, S.; XU, B. Co-design of event generator and controller for event-triggered control system. In: CHINESE CONTROL CONFERENCE (CCC), 30., 2011, Yantai. **Proceedings...** New York: IEEE, 2011. p.175–179.

LIAN, F.-L.; MOYNE, J.; TILBURY, D. Performance Evaluation of Control Networks for Manufacturing Systems. In: INTERNATIONAL MECHANICAL ENGINEERING CONGRESS AND EXPOSITION (DYNAMIC SYSTEMS AND CONTROL DIVISION), 1999, Nashville. **Proceedings...** New York: ASME, 1999. p.6–7.

LUNZE, J.; LEHMANN, D. A state-feedback approach to event-based control. **Automatica**, Tarrytown, v.46, p.211–215, 2010.

MARCHAND, N. et al. Lyapunov event-triggered control: a new event strategy based on the control. In: IFAC SYMP. ON NONLINEAR CONTROL SYSTEMS, 9., 2013, Toulouse. **Proceedings...** Tarrytown: IFAC, 2013.

MILANI, B. E. A. Piecewise-affine Lyapunov functions for discrete-time linear systems with saturating controls. **Automatica**, Tarrytown, v.38, n.12, p.2177–2184, 2002.

MOLCHANOV, A. P.; PYATNITSKIY, Y. S. Criteria of asymptotic stability of differential and difference inclusions encountered in control theory. **Systems & Control Letters**, [S.l.], v.13, n.1, p.59–64, 1989.

OGATA, K. **Discrete-Time Control Systems**. 3rd.ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1995.

PENG, C.; YANG, T. C. Event-triggered communication and control co-design for networked control systems. **Automatica**, Tarrytown, v.49, n.5, p.1326 – 1332, 2013.

POSTOYAN, R. et al. A unifying Lyapunov-based framework for the event-triggered control of nonlinear systems. In: IEEE CONF. ON DECISION AND CONTROL AND EUROPEAN CONTROL CONF. (CDC-ECC), 50., 2011, Orlando. **Proceedings...** New York: IEEE, 2011. p.2565 – 2570.

REIMANN, S. et al. Stability Analysis and PI Control Synthesis under Event-Triggered Communication. In: EUROPEAN CONTROL CONFERENCE (ECC), 14., 2015, Linz. **Proceedings...** New York: IEEE, 2015. p.2174 – 2179.

SBARBARO, D.; TARBOURIECH, S.; GOMES DA SILVA Jr, J. M. An event-triggered observer based control strategy for SISO systems. In: IEEE CONF. ON DECISION AND CONTROL AND EUROPEAN CONTROL CONF. (CDC-ECC), 53., 2014, Strasbourg. **Proceedings...** New York: IEEE, 2014. p.2789 – 2794.

SEURET, A. et al. Event-triggered control with LQ optimality guarantees for saturated linear systems. In: IFAC SYMPOSIUM ON NONLINEAR CONTROL SYSTEMS (NOLCOS 2013), 9., 2013, Toulouse. **Proceedings...** Tarrytown: IFAC, 2013.

SEURET, A.; GOMES DA SILVA Jr, J. M. Taking into account period variations and actuator saturation in sampled-data systems. **Systems & Control Letters**, [S.l.], v.61, n.12, p.1286–1293, 2012.

SLOTINE, J.-J. E.; LI, W. et al. **Applied nonlinear control**. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1991.

TABUADA, P. Event-triggered real-time scheduling of stabilizing control tasks. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.52, n.9, p.1680 – 1685, 2007.

TALLAPRAGADA, P.; CHOPRA, N. Event-triggered dynamic output feedback control for LTI systems. In: IEEE CONF. ON DECISION AND CONTROL, 51., 2012, Hawaii. **Proceedings...** New York: IEEE, 2012. p.6597 – 6602.

TARBOURIECH, S. et al. **Stability and stabilization of linear systems with saturating actuators**. London: Springer-Verlag, 2011.

TIPSUWAN, Y.; CHOW, M.-Y. Control Methodologies in Networked Control Systems. **Control Engineering Practice**, [S.l.], v.11, n.10, p.1099–1111, 2003.

VELASCO, M.; MARTÍ, P.; BINI, E. On Lyapunov Sampling for Event-driven Controllers. In: CONF. ON DECISION AND CONTROL AND CHINESE CONTROL CONF., 2009, Shanghai. **Proceedings...** New York: IEEE, 2009. p.6238 – 6243.

VERHAEGH, J.; GOMMANS, T.; HEEMELS, W. Extension and evaluation of model-based periodic event-triggered control. In: CONTROL CONFERENCE (ECC), 2013 EUROPEAN, 2013, Zurich. **Anais...** New York: IEEE, 2013. p.1138–1144.

WU, W.; REIMANN, S.; LIU, S. Event-triggered control for linear systems subject to actuator saturation. In: IFAC WORLD CONGRESS, 19., 2014, Cape Town. **Proceedings...** Tarrytown: IFAC, 2014.

YANG, T. C. Networked control system: a brief survey. **IEE Proceedings - Control Theory and Applications**, [S.l.], v.153, n.4, p.403–412, 2006.

YOOK, J. et al. Trading computation for bandwidth: reducing communication in distributed control systems using state estimators. **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, New York, v.10, n.4, p.503 – 518, 2002.

ZHANG, W.; BRANICKY, M. S.; PHILLIPS, S. M. Stability of networked control systems. **IEEE Control Systems**, New York, v.21, n.1, p.84–99, 2001.

ZHOU, K. et al. **Robust and optimal control**. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1996.