UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL – UFRGS
CENTRO INTERDISCIPLINAR DE NOVAS TECNOLOGIAS NA EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO

O PROCESSO DA CONSTRUÇÃO DO CONCEITO MATEMÁTICO DE LIMITE PELO APRENDIZ COM UTILIZAÇÃO DE OBJETOS DIGITAIS

Antonio da Fonseca de Lira

Porto Alegre
2008

Antonio da Fonseca de Lira

O PROCESSO DA CONSTRUÇÃO DO CONCEITO MATEMÁTICO DE LIMITE PELO APRENDIZ COM UTILIZAÇÃO DE OBJETOS DIGITAIS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Informática na Educação.

Orientadora:
Prof[a]. Dr[a]. Léa da Cruz Fagundes

Co-Orientador:
Prof. Dr. Marcus Vinícius de Azevedo Basso

Porto Alegre

2008

CIP – CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)

L768p Lira, Antonio da Fonseca de

O processo da construção do conceito matemático de limite pelo aprendiz com utilização de objetos digitais [manuscrito] / Antonio da Fonseca de Lira; orientadora: Léa da Cruz; Co-Orientador: Marcus Vinícius de Azevedo Basso. – Porto Alegre, 2008.

119 f. + Anexos.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias na Educação. Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação, 2008, Porto Alegre, BR-RS.

1. Matemática – Cálculo – Aprendizagem. 2. Matemática – Conceito – Limite. 3. Pensamento formal. 4. Epistemologia genética. I. Cruz, Léa da Cruz. II. Basso, Marcus Vinicius de Azevedo. III. Título.

CDU – **51:159.922.7**

Bibliotecária Neliana Schirmer Antunes Menezes – CRB 10/939

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
CENTRO INTERDISCIPLINAR DE NOVAS TECNOLOGIAS NA EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO

Ata da Sessão de Defesa de Tese de Doutorado de Antonio da Fonseca de Lira

"O processo da construção do conceito matemático de limite pelo aprendiz com utilização de objetos digitais".

Às quinze horas e trinta minutos do dia vinte e sete de junho de dois mil e oito, na sala 209 do Instituto de Psicologia, na Universidade Federal do Rio Grande do Sul, realizou-se a Defesa de Tese intitulada "*O processo da construção do conceito matemático de limite pelo aprendiz com utilização de objetos digitais*", de autoria de Antonio da Fonseca de Lira, sob a orientação da Profa. Dra. Léa da Cruz Fagundes e co-orientação do Prof. Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso. A Banca Examinadora, composta pelos Professores Doutores Jorge Campos da Costa, Cleci Maraschin e Elisete Zardo Búrigo, aprovou a Tese de Doutorado do aluno, que cumpriu com todos os requisitos e terá seu título de Doutor em Informática na Educação homologado pela Comissão de Pós-Graduação em Informática na Educação.

Profa. Dra. Léa da Cruz Fagundes
(Presidenta e Orientadora)

Prof. Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso
(Co-orientador)

Prof. Dr. Jorge Campos da Costa
PUC/RS

Profa. Dra. Cleci Maraschin
UFRGS

Profa. Dra. Elisabete Zardo Búrigo
UFRGS

Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação - UFRGS
Av. Paulo Gama, 110 - prédio 12105 - 3º andar sala 332 - CINTED
90040-060 - Porto Alegre (RS) - Brasil

Resumo

O conceito de limite é a base para qualquer aluno de um curso superior que faça a disciplina de cálculo, portanto deveria haver uma ênfase especial na sua aprendizagem por parte de professores e alunos. Na sala de aula a ênfase é dada sobre a definição formal e sobre a forma que ela é apresentada nos livros de cálculo.

Neste trabalho foi feita uma pesquisa sobre a natureza do conceito de limite junto com uma reflexão sobre o que é um conceito. Houve uma pesquisa para entender quais os mecanismos cognitivos que estão envolvidos quando um sujeito atua sobre um problema que envolve tal conceito. Buscaram-se elementos de apoio para a investigação no processo histórico de desenvolvimento deste conceito matemático e é preciso destacar a importância deste processo para desenvolver objetos digitais interativos que pudessem ser utilizados em experimentos desenvolvidos para entender os mecanismos cognitivos deste conceito.

De modo paralelo ao estudo da história do conceito e seus antecedentes houve um outro estudo sobre objetos digitais interativos e as possibilidades de utilizá-los na investigação dos mecanismos cognitivos. A teoria escolhida para a análise epistemológica do conceito foi a Epistemologia Genética de Jean Piaget, especificamente a teoria relativa a relações e operações infralógicas, lógicas e ao pensamento formal.

Na investigação realizada foi utilizado um problema como desequilíbrio inicial. Este forneceu o ponto de partida para questionar as certezas e dúvidas do sujeito de forma a investigar os mecanismos cognitivos que formam o conceito de limite e do contínuo numérico.

Palavras-chave: Limite. Conceito. Objetos Digitais Interativos. Relações Infralógicas. Relações Lógicas. Pensamento Formal. Epistemologia Genética.

Abstract

The concept of limit is the basis for every student accessing the college and needs study calculus, therefore it should be an emphasis about its learning from students and teachers. At the classroom the emphasis is on the formal definition and over the way it is presented at the books of calculus.

On this work a research was carried on and it was about the nature of concept of limit together with a reflexion about what is a concept. There was a research for understanding the cognitive mechanisms related when um individual acts on a problem with that concept.

There was a search for elements, in the historic development, that supported the investigation about that mathematic concept and is necessary to regard the importance of that process for the design of interactive digital objects that could be used in experiments designed for understanding the cognitive mechanism related to the concept of limits.

In a parallel with the study about the history of limit concept and his ancestors there was another study about interactive digital objects and the possibilities for using that in the investigation of cognitive mechanism. The theory to be used in the analysis was The Genetic Epistemology of Jean Piaget, especially the section about infralogic and logic relation and operations and the formal thinking.

In this work it was used a start problem that supplied the beginning point to argue the certainties and doubts of the subject in a way to investigate the cognitive mechanisms that form the limit concept and the numeric continuum, its basis.

KEYWORDS: Limit. Concept. Interactive Digital Objects. Infralogic Relations. Logic Relations. Formal Thinking. Genetic Epistemology.

Agradecimentos:

A Deus por ter permitido a realização desta obra.

À minha família.

Aos amigos.

Ao CEFET/AM (Centro Federal de Educação Tecnológica do Amazonas)

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Amazonas – FAPEAM

Aos professores e servidores do PPGIE

Sumário

Lista de Figuras

1 - Apresentação

O aprendizado do conceito matemático de limite apresenta diversas dificuldades, conforme o autor pôde comprovar em sua experiência como professor de cálculo de curso superior da área de exatas. Em geral há um baixo desempenho. Dado este problema, que é crônico no ensino superior, pode-se questionar sobre o desenvolvimento de processos e métodos que permitam investigar tais dificuldades de aprendizagem do conceito de limite, que é fundamental para o aprendizado de derivada e integral? Que inovações introduzir no currículo para melhorar a aprendizagem deste conceito? Este trabalho tem como objetivo contribuir para responder a primeira pergunta, pois o conhecimento de como acontece a aprendizagem de limite pode permitir mudanças. A segunda pergunta demanda novas investigações que podem ser feitas em outros trabalhos de pesquisa.

Existem estudos relativos à aprendizagem do conceito de limite dentro do cálculo, considerando que a história dos dois se confunde, como é possível verificar nos trabalhos publicados em (Tall, 1991) e (Brolezzi, 1996). No livro organizado por Tall sobre o pensamento matemático avançado (aquele que trata com definições formais e deduções) há os relatos e trabalhos de investigação sobre conceitos matemáticos relativos a limite (Vide Anexo F), análise (Michèle Artigue), e sobre o pensamento matemático avançado e o computador (Ed Dubinsky e David Tall). No trabalho de Brolezzi há um estudo sobre a oposição entre o discreto e o contínuo na história da matemática e como isto influenciou a construção conceitual do cálculo. Há também os trabalhos sobre o estudo do uso de ambientes informatizados para a aprendizagem de cálculo conforme pode ser visto em Lima (2004) e Sauer (2004). Estes dois últimos dão ênfase na análise de processos de aprendizagem de conceitos de cálculo dentro de um contexto de trabalho em um ambiente informatizado.

Em geral, o conteúdo relativo aos estudos de limite em sala de aula segue os livros textos de cálculo, nos quais os conceitos são apresentados de maneira formal, seguindo uma ordem dedutiva. Entretanto (Tall, ibid, pág. XIV):

> "... há um grande abismo entre a maneira como as idéias envolvidas em matemática avançada são construídas cognitivamente e apresentadas em uma ordem dedutiva. Isto nos adverte que simplesmente apresentar uma teoria matemática como uma seqüência de definições, teoremas e provas (como acontece em um curso universitário típico) podem mostrar

> a estrutura lógica da matemática, mas falha no objetivo de permitir o funcionamento psicológico da mente humana em desenvolvimento". (Tradução do autor).

Considerando esta diferença entre o processo cognitivo do aluno e a forma como o conteúdo relativo a limite é apresentado em livros textos e em sala de aula o autor deste trabalho pensou em desenvolver uma pesquisa, na qual o computador pudesse ser utilizado como uma ferramenta para investigar e evidenciar os mecanismos cognitivos envolvidos na construção deste conceito matemático. Neste processo de investigação o computador será uma importante ferramenta sob dois aspectos. O primeiro aspecto considera a construção de objetos digitais que permitam a criação de situações que evidenciem a construção conceitual de limite. O segundo aspecto considera o computador como ferramenta de registro deste processo de modo que se possam reconstruir os procedimentos realizados pelos sujeitos na interação com objetos digitais. A teoria utilizada como ferramenta de suporte para a análise dos mecanismos cognitivos relativos ao conceito de limite foi Epistemologia Genética de Jean Piaget. Em (Piaget, 1993) são apresentados os resultados sobre as noções que envolvem o conceito de contínuo em crianças. Este conceito é fundamental pra o conceito de limite e esses estudos foram considerados na construção da investigação proposta no presente trabalho.

Através da construção deste conceito pode-se pensar em intervenções no processo de ensino/aprendizagem, inclusive utilizando o computador como ferramenta que possibilite a melhoria da aprendizagem.

2 - Justificativa da Pesquisa

Segundo Cornu em (Tall, ibid., pág. 153) o conceito de limite é uma noção particularmente difícil, típica do pensamento necessário em matemática avançada. Uma das dificuldade em ensinar e aprender este conceito está não só na sua riqueza e complexidade, mas também na extensão de que os aspectos cognitivos não podem ser gerados puramente da definição matemática.

Cornu, conforme (Tall, idem, pág. 153), estudou o desenvolvimento conceitual de limite e apontou quatro obstáculos epistemológicos (Bachelard, 1938) para aprendizagem deste conceito:

- A impossibilidade de estabelecer a ligação entre o geométrico e o numérico;
- A noção de infinitamente grande e infinitamente pequeno;
- Aspecto metafísico da noção de limite e
- A dúvida se o limite é atingido ou não.

Estes obstáculos se apresentam ainda hoje quando os estudantes se defrontam com o estudo do conceito de limite.

Além destas considerações anteriores, como aluno de licenciatura em matemática na Universidade Federal do Amazonas e professor de Cálculo I no Centro Federal de Educação Tecnológica do Amazonas o autor constatou as dificuldades que o aluno enfrenta nesta disciplina dos cursos de ciências exatas. A forma como o conceito de limite é apresentado aos alunos nos livros de matemática e em sala de aula, quando o professor faz uma exposição da definição, apresenta alguns exemplos, teoremas e logo após faz uma série de exercícios. Um questionamento que o autor fez, ao longo dos anos como professor de cálculo, foi o de como auxiliar os alunos a aprenderem um conceito considerado difícil e como utilizar os recurso da informática utilizando programas como o Cabri-Géomètre II e Mathcad no auxílio às disciplinas ministradas. Entretanto, o uso do computador, apesar de aumentar a motivação dos alunos e demandar mais tempo no preparo de atividades, não garantiu melhora no aprendizado. Faltava o conhecimento sobre os mecanismos cognitivos envolvidos no aprendizado de matemática e em especial no conceito de limite usando o computador. **Uma investigação que permita evidenciar o processo de construção de tal conhecimento é a justificativa deste trabalho**.

Neste estudo do processo de construção do conceito de limite o autor deste trabalho teve que fazer uma investigação dos fundamentos do cálculo e tentar entender como, desde os gregos, se pensava ao tentar achar a área, por exemplo, do círculo, ou seja, como se pensava a matemática. Pesquisando estes fundamentos do pensamento da matemática em (Davis, 1986, pág. 371) ficou evidenciado, para o autor, que a análise matemática obtinha seu significado e legitimidade através de suas ligações com a geometria (e a intuição geométrica), que tinha então como expressão somente a geometria euclidiana. No século dezenove aconteceram alguns fatos que abalaram esta confiança:

- A descoberta de geometrias não-euclidiana, mostrando que havia mais de uma geometria imaginável;
- O desenvolvimento da análise de tal maneira que ultrapassou a intuição geométrica (descoberta de curvas que enchem o espaço e curvas contínuas que não têm derivada em nenhum ponto).

Ainda, segundo Davis, a perda da certeza na geometria implicou na perda de toda certeza no pensamento humano. Como resposta, a este problema, os matemáticos do século dezenove liderados por Dedekind, Cantor e Weierstrass, passaram da Geometria à aritmética como fundamento para a matemática. Para realizar tal tarefa cada um deles apresentou uma construção do contínuo linear (sistema dos números reais) para mostrar como este contínuo podia ser construído a partir dos inteiros 1, 2, 3... Nos três métodos foi necessário usar algum conjunto infinito de números racionais para definir ou construir um número real. Com este esforço de reduzir a análise e a geometria à aritmética, introduziram-se conjuntos infinitos nos fundamentos da matemática. Cantor desenvolveu a Teoria dos conjuntos e parecia que a idéia de um conjunto, como uma coleção arbitrária de objetos distintos, era tão simples e fundamental que poderia ser a base para construir toda a matemática. A teoria dos conjuntos era confundida com a própria lógica, por exemplo, a relação de inclusão entre dois conjuntos B incluindo A, pode ser uma implicação "se A, então B". Desta forma parecia que a lógica (leis fundamentais da razão) poderia ser a base para toda a matemática. Assim, Russel e Whitehead procuraram mostrar em seus *Principia Matematica* que toda a matemática é somente uma elaboração das leis da lógica. Como toda a matemática pode ser reduzida à teoria dos conjuntos, devem-se considerar os fundamentos da teoria dos conjuntos, mas Russel descobriu que a noção de conjunto possui armadilhas, são contradições, chamadas de antinomias. A mais famosa delas é o Paradoxo de Russel (veja anexo B, Definições Matemáticas). Este paradoxo e outras antinomias mostraram que a lógica intuitiva podia conduzir a contradições. Estas estão associadas à "crise dos fundamentos", que teve como resposta três soluções (Davis, op. cit. págs. 374-380):

1. A tentativa do "logicismo", a escola de Frege e Russel, que procurou achar uma reformulação da teoria dos conjuntos que pudesse evitar o paradoxo de Russel e salvar o projeto de Russel-Frege-Whitehead que baseava toda a matemática nos alicerces da lógica.

2. A tentativa do Construcionismo – foi originada com o topólogo holandês L.E.J. Brouwer, em torno de 1908. Segundo Brouwer os números naturais nos são dados por uma intuição fundamental, que é o ponto de partida de toda a matemática. Ele afirmava que toda a matemática deveria estar baseada construtivamente nos números naturais. Os objetos matemáticos são dados por uma construção, em um número finito de procedimentos, partindo dos números naturais.

3. A tentativa do Formalismo, desenvolvida por David Hilbert, cujo projeto tinha três passos:

- Introduzir uma linguagem formal e regras formais de inferência suficientes para que toda "demonstração correta" de um teorema clássico pudesse ser representada por uma dedução formal, partindo dos axiomas, com cada passo mecanicamente verificável.
- Desenvolver uma teoria das propriedades combinatórias desta linguagem formal, considerada como um conjunto finito de símbolos sujeitos às permutações e reajustes, conforme permitido pelas regras de dedução (metamatemática).
- Demonstrar, por meio de raciocínios puramente finitos, que uma contradição, não pode ser deduzida dentro deste sistema.

Na busca pela certeza em matemática o golpe final veio com Gödel, que 1930, com os seus teoremas da imperfeição mostraram que o projeto de Hilbert era irrealizável, ou seja, que qualquer sistema formal consistente suficientemente forte para conter a aritmética elementar seria incapaz de demonstrar sua própria consistência.

Piaget, em (1976/2, pág. 1-28) faz um estudo sobre o objeto e os métodos da lógica, e, nesta análise, ele aborda as relações entre a lógica e a matemática, no qual ele aponta as três escolas de pensamento, que são ligadas às três tentativas, já relacionadas acima, de solução à "crise dos fundamentos" da matemática. Em sua conclusão ele recusa as três visões (logicismo, construcionismo/intuicionismo e formalismo) e aponta uma quarta visão, que seria concebendo as estruturas lógicas e matemáticas sendo parcialmente separadas, mas constituindo uma parte comum por assimilações recíprocas e não mais em sentido único. Para Piaget ""... a lógica não se 'aplica', pois, de fora, à matemática: ela lhe é parcialmente incorporada e se acha assim generalizada em lógica matemática. "Inversamente, a matemática não se reduz tampouco à lógica, mas a completa e a modifica num processo de troca contínuo". Ele afirma que a assimilação recíproca entre a lógica e a matemática é especialmente clara no terreno da quantidade e que a quantificação lógica, com freqüência, reduz-se apenas às relações de parte ao todo e de complementaridade (quantidade intensiva), enquanto as estruturas matemáticas supõem, além disso, uma relação quantitativa entre as próprias partes dos conjuntos (quantidade extensiva). É possível construir estruturas lógicas sem fazer apelo à matemática (classificações) e, inversamente, há um conjunto considerável de estruturas matemáticas que ultrapassam a quantidade lógica. Entretanto, as estruturas intensivas estão incluídas no seio da matemática (em teoria dos conjuntos) e é possível estabelecer relações sempre mais estreitas entre as estruturas comuns à lógica e à matemática (inclusões e complementaridades) e as estruturas extensivas (correspondências entre elementos, etc.) sem que se possa pensar em separação pura e simples das duas.

No presente trabalho o autor procura identificar, além das estruturas lógicas e matemáticas, as estruturas infralógicas, relativas às vizinhanças e distâncias espaço-temporais, abordadas no item 6.2. Haverá uma tentativa de entender a relação destas estruturas, pelo menos em termos de mecanismos cognitivos, com aquelas lógico-matemáticas, sendo que o estudo das relações entre estruturas lógicas e matemáticas já foi abordado por Piaget e suas conclusões sobre a relação entre as estruturas lógicas e matemáticas são apresentadas no Anexo G - Considerações de Piaget: a relação entre classes e números inteiros.

3 – O Problema

Alguns conceitos, tais como o de limite, não estão presentes no contexto do cotidiano dos estudantes e também não se configuram em objetos tangíveis do mundo material, o computador poderá ser uma ferramenta importante nesta investigação? Encontramos recursos na informática que possam aportar novas soluções? Novos recursos do mundo virtual estão sendo desenvolvidos em educação, são os objetos digitais de aprendizagem.

O principal problema de investigação neste estudo é o seguinte:

Que objetos digitais e como utilizá-los para investigar o desenvolvimento de mecanismos cognitivos presentes no processo de construção do conceito matemático de limite (de uma função com domínio e imagem no conjunto dos reais) em aprendizes?

Ao longo do desenvolvimento do trabalho outros problemas, relacionados com o principal, foram investigados:

- Quais as diretrizes pra conceber objetos digitais que possam ser utilizados no processo de aprendizagem de limite?
- Fatos e aspectos históricos relativos ao conceito de limite devem ser considerados na construção de objetos digitais voltados pra a aprendizagem ou investigação deste conceito?
- Como evidenciar mecanismos cognitivos nas condutas presentes numa construção conceitual do sujeito aprendiz?

4 – Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é utilizar o computador para investigar e tentar identificar os mecanismos cognitivos envolvidos na construção do conceito matemático de limite na aprendizagem com o uso de objetos digitais interativos. Neste processo de investigação o referencial teórico utilizado foi a Epistemologia Genética de Jean Piaget.

A necessidade de atingir o objetivo principal envolve a atenção em outros objetivos secundários e ao mesmo tempo importantes para os resultados deste trabalho de pesquisa:

- Critérios para a elaboração e uso de objetos digitais de aprendizagem voltados para a aprendizagem matemática;
- Realização de uma pesquisa histórica do conceito de limite e aproveitamento dos obstáculos epistemológicos surgidos no processo de desenvolvimento deste conceito na Matemática, para a construção de objetos digitais, que contemplem os aspectos cognitivos, históricos e as possibilidades que o objeto digital pode oferecer;
- Elaboração de uma metodologia baseada na Epistemologia Genética de Jean Piaget que permita evidenciar os mecanismos cognitivos relativos à construção do conceito de limite.

5 - A História da noção de limite e noções correlatas

Esta parte do presente trabalho será destinada a um estudo do conceito de limite, seu desenvolvimento ao longo da história, dos conceitos que tiveram alguma influência na sua formação e a uma tentativa de construir a relação deste conceito com as operações infralógicas, que já foram abordadas anteriormente.

O conceito do limite como o conhecemos nos livros de calculo e matemática do ensino médio é apresentado sob a forma de uma sentença que relaciona grandezas. Vejamos alguns exemplos:

> "Seja f uma função real de variável real e seja *a*, $a \in R$, tal que exista uma vizinhança reduzida de *a* contida no domínio de f. O limite dos valores f(x) para x tendendo a *a* é o número real L se, e somente se, para qualquer real positivo ε, existe algum real positivo δ, tal que:
>
> "$0 < | x - a | < \delta \rightarrow | f(x) - L | < \varepsilon$ " (Paiva, 1995. pág. 397)

"Seja f uma função definida para todo número em um intervalo aberto contendo *a* exceto possivelmente no próprio *a*. O limite de f(x) quando x tende a *a* será L., escrito como:

$\lim_{x \to a} f(x) = L$

se a seguinte afirmativa for verdadeira:

"Dado $\varepsilon > 0$ qualquer, existe um $\delta > 0$, tal que se $0 < | x - a | < \delta$ então $| f(x) - L | < \varepsilon$" (Leithold, 1994, pág.58).

Os exemplos apresentados são relativos a funções, mas a definição de limite para seqüências de números reais possui o mesmo raciocínio envolvendo a relação entre vizinhanças representadas por épsilons e deltas.

Para que este conceito chegasse a tal estado de formalismo matemático deve-se perguntar: quais foram as construções teóricas que tiveram de serem realizadas por nossos antepassados? Tal construção começa com os gregos e tem relação com a crise dos incomensuráveis, com a idéia de número, de contínuo e com os cálculos da área de figuras geométricas. Em (Piaget, 1993) foi apresentado um estudo, no qual as noções de contínuo, espaço, vizinhança e outras necessárias ao conceito de limite foram estudadas junto a crianças com idades ate mais ou menos 12 anos.

5.1 Antecedentes históricos

5.1.1 Os gregos

Segundo Brolezzi (1996, pág. 20) a crise dos incomensuráveis (que aconteceu em 420 a.C. e evidenciou a existência de números irracionais) é considerada de grande importância para o estudo da evolução da Matemática, e, mais especificamente, para a evolução da idéia de número. Para a compreensão do alcance dessa descoberta é preciso ter em mente dois conceitos básicos da visão matemática pitagórica: o conceito de *número* e a idéia de *razão*. Os pitagóricos, não consideravam números nem o zero nem o um, nem outras combinações não-naturais, como números fracionários, etc. Para os pitagóricos, quaisquer duas grandezas seriam comensuráveis, bastando encontrar a unidade de medida compatível com ambas. Depois da crise dos incomensuráveis, surgiu outra grande polêmica entre os filósofos pré-socráticos. Segundo Boyer citado por em Brolezzi, (ibid, pág. 22) o problema da incomensurabilidade entre magnitudes gerou algumas concepções polêmicas acerca da natureza do mundo físico, como a ***doutrina atomística***, defendida por Demócrito, que propunha a existência do ***infinitamente pequeno*** compondo o ser das coisas. Demócrito, no século quinto a.C., foi o primeiro matemático grego a determinar o volume da pirâmide e do cone. Ele generalizou a maneira de determinar o volume para pirâmides de base poligonal qualquer. Para obter o volume do cone, bastava uma inferência natural obtida pelo aumento, repetido indefinidamente, do número de lados do polígono regular formando a base da pirâmide. Segundo, Boyer (pág. 21) aparentemente, ele foi o primeiro a falar de ***infinitesimais*,** e a considerar a possibilidade de trabalhar com o infinitamente pequeno, a fim de recompor o todo, como no caso de utilizar lâminas circulares infinitamente finas para calcular o volume de cilindros e cones, antecipando-se assim ao teorema de Cavalieri, nesses casos. Segundo Davis (1986, pág. 273) um **infinitésimo** "é um número maior que zero e que, no entanto, permanece menor do que 1, por exemplo, não importa quantas vezes (em número finito) for adicionado a si próprio".

Entretanto a teoria dos infinitesimais de Demócrito e seus seguidores foi combatida por outra escola filosófica, nascida em Eléa (Magna Grécia), pelo influxo das idéias de Parmênides. Esta escola chamava a atenção para os paradoxos e contradições existentes na concepção do mundo físico como composto por partículas infinitamente pequenas e indivisíveis. Propunha, em substituição, considerar a imutabilidade e unidade essencial do mundo físico.

Zeno de Élea propôs quatro paradoxos (da Dicotomia, de Aquiles e a Tartaruga, da Flecha e o do Estádio) que trouxeram controvérsias quanto à noção de movimento e velocidade. Segundo (Boyer, 2001. pág. 52) os paradoxos de Zeno parecem ter influenciado profundamente o desenvolvimento da matemática grega, e talvez tenha relação com a descoberta dos incomensuráveis. Para Boyer a Matemática adquiriu outra configuração após Zeno. Em Os Elementos, escrito por Euclides cerca de 300 a.C., as grandezas passaram a ser associadas a segmentos de reta e não mais a números ou pedras. Segundo (Boyer, 2001, pág. 53). O reino dos números continuava a ser discreto, mas o mundo das grandezas contínuas era algo à parte e devia ser tratado por métodos geométricos. Isto contribui pra o desenvolvimento da Álgebra Geométrica, que resolvia problemas aritméticos ou algébricos lidando diretamente com grandezas contínuas, realizando todas as operações sem necessidade de referência direta a números e suas representações. O *refúgio na álgebra* geométrica está registrado principalmente no Livro II de Os Elementos de Euclides (Brolezzi, op.cit., pág.24) e a obra de Euclides representa o início da busca que resultará no Cálculo Diferencial e Integral. Esta obra reúne toda a elaboração grega dos séculos anteriores, e registra o momento em que os pesquisadores começam a se voltar para a possibilidade da exploração da continuidade e da geometria em termos de análise algébrica, interessando-se mais por métodos de redução como o método de exaustão de Eudoxo. Segundo (Maor, 2003, pág. 66) os gregos não desenvolveram o cálculo por duas razões: o mal-estar dos diante do infinito - chamado *horror infiniti* - e o fato de que eles não possuíam a linguagem da álgebra. Brolezzi (ibid p.25) observa que para Euclides a razão não era um *número* no sentido aritmético abstrato, e o tratamento dado aos *irracionais* em *Os Elementos* é totalmente geométrico.

O próximo passo no caminho até o conceito de limite pode ser registrado quando os gregos idealizaram o método da exaustão. Eudoxo desenvolveu o seu ***Método da Exaustão***, que se baseia num princípio que ficou conhecido como ***Postulado de Arquimedes***. O enunciado desse axioma é dado por Euclides X, 1, dizendo que, dadas duas grandezas diferentes (ambas não nulas) (Boyer, 20021, pág. 63) : "*Se de uma grandeza qualquer subtrairmos uma parte não menor que sua metade e do resto novamente subtrair-se não menor que a metade e se esse de subtração é continuado, finalmente restará uma grandeza menor que qualquer grandeza da mesma espécie ".* (Neste enunciado já podemos ver a expressão "menor que a grandeza dada" significando-se que se pode obter uma grandeza tão pequena quanto se queira, mostrando uma relação com o conceito formal de limite que temos hoje). Nesta definição foi excluído o *infinitesimal* de todas as demonstrações geométricas dos gregos. Além disso, ela permite raciocinar sem ultrapassar a compreensão intuitiva clara, pois Eudoxo não propõe ir até o infinito para de fato atingir o limite, mas apenas afirma que se pode chegar a uma grandeza tão pequena quanto qualquer outra dada. Esta definição se aproxima do conceito de limite, pois a diferença entre o *método de exaustão* e o *limite* do Cálculo Diferencial e Integral reside apenas no fato de os gregos não realizarem essa ***passagem ao infinito***, pois não tinham noção de um *continuum* aritmético. Mas o tipo de argumentação é o mesmo, tanto no caso do atual *limite* quanto no *método de exaustão* geométrico.

O próximo conceito relativo a limite é o de ***indivisíveis,*** ele foi usado por Arquimedes (287-212 a.C.) para calcular á área sob a parábola. Conforme Heath apud Brolezzi (ibid pág. 28) em sua obra *O Método*, Arquimedes chega ao resultado de que um segmento parabólico é 4/3 do triângulo de mesma base e vértice (o vértice do segmento é o ponto a partir do qual a perpendicular à base é maior). Arquimedes considerou que superfícies são constituídas por retas.. Parece que os considerava como *indivisíveis*, pois chegava a muitos resultados pelo método da balança, usando o princípio do nivelamento como quem estivesse pesando mecanicamente uma coleção de lâminas finas ou de fitas de algum material pesado. Após obter um resultado pelo seu *método mecânico,* demonstrava-o pelo *método da exaustão.* Para *provar* o resultado obtido para a área sob a curva da parábola, Arquimedes inscreve no segmento parabólico um triângulo de área A, tendo à mesma base e vértice que o segmento, e mostra que a área do segmento parabólico tem é (4/3)A. Dentro de cada um dos segmentos menores tendo os lados do triângulo como base, ele inscreve triângulos similares. Prosseguindo da mesma forma, ele obteve uma série de polígonos com um número crescente de lados. Ele demonstrou que a área do n-ésimo polígono é dada pela soma de uma série. Arquimedes não achou o limite da série, apenas encontrou a soma dos n termos e acrescentou o restante, que pode ser feito *tão pequeno quanto quisermos*. Arquimedes não usa a noção de *limite* e sim o princípio da exaustão, o qual permite considerar que a área do segmento parabólico não podia ser nem maior nem menor que o valor obtido, (4/3)A. Brolezzi, (ibid pág. 29), comenta que para definir (4/3)A como a *soma de uma série infinita*, Arquimedes precisaria valer-se de um conceito geral de *número real*, o qual não estava disponível em sua época. Faltava a Arquimedes a noção de *passagem ao limite*, pois ele partilhava com os gregos do chamado *horror ao infinito*. Como conclui Boyer citado por Brolezzi (ibid 29), **é incorreto imputar a Arquimedes as idéias expressas na integral e na derivada**.

5.1.2 Newton Leibniz

O uso de infinitésimos teve o seu pleno florescimento, conforme (Davis, 1986. pág. 275) nas gerações após Pascal: Newton, Leibniz, os irmãos Bernoulli (Jakob e Johann) e Leonhard Euler. Segundo Davis (ibid. pág. 276) Newton tentou evitar o infinitésimo, em seu *Principia Mathematica. R*esultados que tinham sido achados por métodos infinitesimais são apresentados de uma maneira euclidiana e finita.

Newton trabalhava com quantidades variáveis que tinham um significado baseado na noção de movimento contínuo, considerando-as fruto do movimento contínuo de pontos, retas e planos. Segundo Boyer citado por Brolezzi (supra. pág. 30) ele não considerava as variáveis como *agregados de elementos infinitesimais* e em seu trabalho fazia referência aos infinitésimos, mas foi removendo qualquer referência a eles ao longo do trabalho, até chegar a considerar que quantidades matemáticas não deveriam ser constituídas por *momentos* ou *partes muito pequenas*, mas sim como descritas pelo movimento contínuo. Newton preferia usar *velocidades*, que também chamava de *movimentos*, *mutações*, ou *fluxões* de quantidades e referia-se ao seu Cálculo como o *Método das Fluxões*. A *fluxão* é uma velocidade finita, e não uma quantidade infinitamente pequena. As variáveis eram todas consideradas como *quantidades fluentes*. Os conceitos mecânicos e *cinemáticos*, usados para expressar as variáveis, em linguagem de hoje, seria o mesmo que considerá-las em função do tempo. Para Newton o conceito fundamental do Cálculo é eminentemente cinemático, e a idéia central é a de *fluxão* x, vetor velocidade de x, ou taxa de mudança da variável, que é a decomposição no eixo x do vetor velocidade do ponto. Em seu *Principia Mathematica* Newton reconheceu a necessidade do limite, embora não o tenha usado em seu trabalho. No começo do livro I do *Principia* ele tentou dar uma formulação precisa do conceito de limite.

Segundo Baron, citado por Brolezzi (ibid.pág. 31), para **Leibniz** a visualização do Cálculo se dá de forma estática: ***"Leibniz considerava as variáveis como percorrendo seqüências de valores infinitamente próximos. No seu Cálculo há pouco uso de conceitos de movimento".*** Leibniz utilizou os diferenciais infinitamente pequenos, e tecia sobre eles analogias, buscando uma visualização do Cálculo através de considerações discretas, através do diferencial. A **diferencial** de uma variável y é a diferença (dy) entre dois valores consecutivos de y em uma seqüência de números infinitamente próximos. Os valores tinham de ser infinitamente pequenos, para obter a reta tangente à curva no ponto (x_0,y_0) dado. Para cada ponto (x,y) na curva podemos formar o "triângulo característico" dx, dy, ds (ds é a diferencial do comprimento do arco s). Se o segmento de reta ds, infinitamente pequeno, for prolongado, formará a tangente à curva em (x,y).

O quadro seguinte apresenta uma comparação entre a forma que Newton e Leibniz entendiam os problemas que envolviam o cálculo da tangente de uma reta em um determinado ponto.

	Newton	Leibniz
Quantidades variáveis	Eram fruto do movimento continuo de pontos retas e planos. Foram chamadas de quantidades fluentes.	Percorrem seqüências de valores infinitamente próximos
Infinitésimos	Fez referências a este conceito, que foi abandonado	Julgava necessários os infinitésimos, e tecia sobre eles analogias, buscando uma visualização do Cálculo através de considerações discretas,

		através do diferencial
Principal Conceito	***Fluxão*** – é uma velocidade finita Fluxão de x. Vetor velocidade de x ou taxa de mudança da variável. É a decomposição no eixo x do vetor velocidade no ponto.	***a diferencial*** de uma variável y é a diferença (dy) entre dois valores consecutivos de y em uma seqüência de números infinitamente próximos
Diferenciação/fluxão	Tomar fluxões significava associar uma velocidade finita a uma variável	a diferenciação associava uma diferencial infinitamente pequena a uma variável
Inconsistência lógica	Fluxão definida por razão última	Diferencial como diferença infinitamente pequena

Figura 1- Quadro de Comparação entre os conceitos de Newton e Leibniz

A seguir apresentamos um texto baseado em Maor (2003), nele é apresentado, de forma mais detalhada e com exemplos, o entendimento de Newton e Leibniz:

- **Newton** - imaginou o gráfico de uma função como uma curva gerada por um ponto móvel P(x,y). Quando P traça uma curva x e y variam continuamente com o tempo, imaginava-se o tempo "fluindo", daí a palavra "***fluente***". Newton partiu para encontrar as taxas de mudança de x e y em relação ao tempo, ou seja seus ***fluxões***, que eram calculados considerando a diferença, ou a mudança nos valores de x e y entre duas ocasiões "adjacentes", dividida pelo intervalo de tempo transcorrido. O ponto crucial, e ponto de inconsistência, era fazer o intervalo de tempo transcorrido igual a zero, ou pensar neste intervalo tão pequeno a ponto de ser desprezível. Vejamos um exemplo: a função $y = x^2$. Considerando um pequeno **intervalo de tempo ε** . Durante esse intervalo de tempo a coordenada x muda na quantidade x'ε (Newton usou um ponto sobre x, mas devido à dificuldade de escrita e impressão será usado o apóstrofe). De modo semelhante, a mudança no y é y'ε. Ao substituir x por x+ x'ε e y por $y+y'ε = (x+ x'ε)^2 = x^2 + 2x (x'ε) +$

$(x'\varepsilon)^2$. Como $y = x^2$ podemos cancelar y no lado esquerdo da equação com o x^2 no lado direito e obtemos $y'\varepsilon = 2xx'\varepsilon + x'^2\,\varepsilon^2$. A seguir dividem-se os dois lados da equação por ε . Finalmente se faz ε igual a zero resultando em $y'= 2xx'$. Obtêm-se então a relação entre as fluxões de dois fluentes, x e y, ou seja, entre as taxas de mudança das variáveis x e y, sendo cada uma considerada como uma função do tempo. A inconsistência nesse raciocínio aparece na relação entre os fluxões quando se faz o intervalo de tempo igual a zero, assim os fluxões tendem a zero e a divisão $y'/x'= 2x$ que é a inclinação da reta em um ponto qualquer se torna 0/0. Esta divisão de 0 por 0 é uma inconsistência.

- **Leibniz** – concebeu seu cálculo diferencial e integral por volta de 1675 e em 1677 já tinha um sistema desenvolvido. Suas idéias foram moldadas de um modo mais abstrato. Ele pensava em termos diferenciais, que eram pequenos acréscimos nos valores das variáveis x e y. A figura 7 (Maor, ibid.3, pág. 115) mostra o gráfico de uma função $y = f(x)$ e um ponto P(x,y) sobre ela. Podemos traçar a linha tangente ao gráfico em P e consideramos um ponto vizinho T. Isto forma o triângulo PRT que foi chamado por Leibniz de ***triângulo característico***. Seus lados PR e RT são os aumentos nas coordenadas de x e de y quando nos deslocamos de P para T. Estes aumentos forma chamados de dx e dy respectivamente. Ele argumentou que se dx e dy fossem suficientemente pequenos, a linha tangente ao gráfico em P seria quase idêntica ao próprio gráfico na vizinhança de P, dizendo de outra forma, o segmento de linha PT vai quase coincidir com o segmento de curva PQ, onde Q é um ponto no gráfico acima ou abaixo de T. Para acharmos a inclinação da linha tangente em P precisamos achar dy/dx. O raciocínio de Leibniz era de que dx e dy poderiam se tornar quantidades tão pequenas que sua relação representaria não apenas a inclinação da linha tangente em P, mas também a inclinação do gráfico em P. Segundo Maor (2003) **havia uma falha fundamental neste argumento. A linha tangente e a curva só coincidiriam se os pontos P e T coincidissem, ou seja, o triângulo característico se tornasse um ponto e assim ambos os lados dx e dy se tornariam iguais a zero e a divisão entre eles seria uma indeterminação 0/0**. Para ilustrar a idéia vamos encontrar a derivada da função $y = x^2$ usando a notação moderna. Aumentando x por uma quantidade Δx tem-se um aumento correspondente em y de $\Delta y = (x+\Delta x)^2 - x^2$, o que depois de expandido e simplificado resultará em $(2x\Delta x+ (\Delta x)^2)$. O coeficiente diferencial $\Delta y/\Delta x$ será igual a $(2x\Delta x+ (\Delta x)^2)/\Delta x = 2x + \Delta x$. Se Δx tender para zero, Δy também tenderá para zero e teremos $\Delta y/\Delta x = 0/0 = 2x$, que é uma inconsistência.

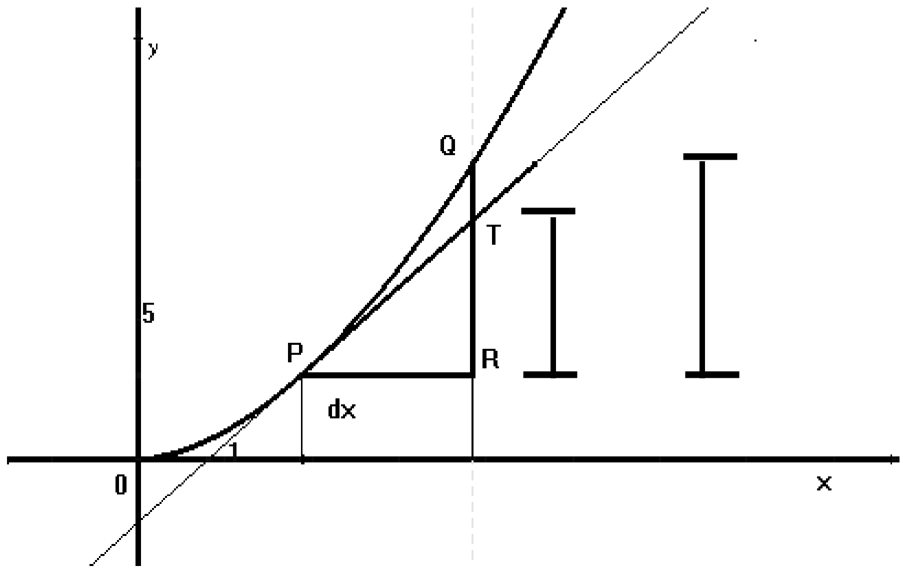

Figura 2 - Triângulo Característico de Leibniz.

5.1.3 Cauchy, Weierstrass, Dedekind e Cantor.

Em 1826 (Brolezzli, ibid pág. 32) Cauchy estabelece a ***noção de limite*** (vide anexo B - Definições Matemáticas), com esta ferramenta Weierstrass (1815-1897) formaliza o cálculo utilizando a linguagem de Épsilons e Deltas. Para exemplificar o uso dos épsilons e deltas na forma que Weirstrass raciocinava pode-se calcular a velocidade da função espaço utilizada anteriormente $y = t^2$, y com sendo a posição em função do tempo t. Se desejamos calcular a velocidade em t=3. A velocidade será definida como um limite aproximado por razões de incrementos finitos. Seja Δt um incremento de tempo finito, e Δy o incremento de espaço correspondente. A quantidade variável $\Delta y/\Delta t = 2t + \Delta t$. Escolhendo valores de Δt suficientemente pequenos podemos fazer com que a razão $\Delta y/\Delta t$ se torne tão próxima quanto queiramos de 2t, com t = 3, então a velocidade será tão próxima quanto queiramos de 6. Davis (ibid. 279) comenta que este método consegue remover qualquer referência a números que não são finitos e evita também qualquer tentativa de fazer Δt igual a zero na fração $\Delta y/\Delta t$, evitando as armadilhas lógicas do uso de infinitésimos. Davis comenta ainda que a velocidade instantânea, quantidade fisicamente mensurável e intuitivamente clara torna-se sujeita à noção de "limite". A situação apresentada até agora para calcular a velocidade instantânea poderia ser expressa da seguinte forma (com base em Davis op. cit . pág. 280):

A velocidade é v, se para qualquer número positivo ε, $(\Delta y/\Delta t) - v$ é menor do que ε em valor absoluto, para todos os valores de Δt que são menores em valor absoluto do que um certo outro número positivo δ (que dependerá de ε e t). A velocidade instantânea v foi definida por meio de uma relação entre duas quantidades, ε e δ, que não influenciam v. Davis (op. cit pág. 280) afirma que para satisfazer a consistência lógica aceitamos uma definição muito mais difícil de entender que o conceito definido. Ele afirma ainda que a reconstrução do cálculo baseado no conceito de limite e sua definição por épsilons e deltas equivale a uma redução do cálculo à aritmética dos números reais e que isto foi uma volta, depois de dois milênios e meio, ao problema dos números irracionais, abandonado pelos gregos após Pitágoras.

O conceito de limite deve ser entendido dentro do contexto dentro no qual ele foi desenvolvido que é o da construção do Cálculo. Segundo Brolezzi (op. cit. pág. 32) os dois caminhos percorridos por Newton e Leibniz se encontraram em um mesmo ponto, o Cálculo, no qual o discreto e o contínuo interagem, e para a formalização do Cálculo, foi necessário elaborar a teoria sobre o ***contínuo*** e tentar compreender a natureza da reta real. Assim para construir toda a teoria envolvida era preciso o apóio sobre os números reais, e sobre a idéia de limite. Georg Cantor (1845-1918) discutiu a continuidade da reta real. Ele propôs a construção de um conjunto especial de pontos, chamado de *Conjunto de Cantor* ou *Poeira de Cantor*. A construção do conjunto de Cantor começa com o intervalo unitário [0,1], representado como um segmento de reta. Primeiro removemos um terço central, o que nos deixará com dois segmentos, [0,1/3] e [2/3,1]. O próximo passo é a remoção de um terço central de cada segmento, e assim por diante, indefinidamente. O resultado desse processo infinito é a chamada *Poeira de Cantor*, conjunto denotado por *C*. Calculando o que foi removido, vemos que seu comprimento é

$$1/3 + 2(1/3)^2 + 4(1/3)^3 + ... = 1.$$

Este processo de retirada dos terços esgota completamente o intervalo [0,1]

Segundo Young citado em Brolezzi (op. cit. pág. 33) existe uma função que mapeia C sobre o intervalo unitário, mostrando que C tem a mesma cardinalidade de tal intervalo[0,1]. Este tipo de exploração, juntamente com outras pesquisas de Cantor, permitiu formalizar o conceito de número real. Tais pesquisas permitiram elaborar a hipótese do contínuo. Segundo a hipótese de Cantor o contínuo tem uma potência infinitamente superior ao infinito enumerável, e não existe potência "entre" a potência do infinito enumerável e a potência do contínuo. Dedekind (1831-1916) utilizou cortes para representar os reais e expressou a continuidade da reta real através da noção de conjuntos, permitindo trabalhar com quaisquer grandezas, racionais ou irracionais, dentro de uma estrutura algébrica, não geométrica. Os números reais foram definidos ainda por Georg Cantor por meio de certos processos de limite, conforme (Courant, 2000, pág. 86). A idéia de Cantor foi sugerida pelo fato de que os números reais podem ser considerados como decimais infinitas e decimais infinitas são limites de frações decimais finitas.

5.2 Síntese do Aspecto Histórico do Conceito de Limite

O resgate do histórico do conceito de limite juntamente com o de outros conceitos, que de alguma forma influenciaram na sua construção, mostra que, em geral, as ferramentas desenvolvidas pelo ser humano não são fruto do trabalho de uma pessoa, mas dos esforços de muitos. Os desequilíbrios teóricos que surgiram ao longo do desenvolvimento conceitual de limite possuem estreita relação com pensamento do ser humano sobre a natureza dos números e de sua relação com a reta real e os pontos que a formam.

A crise dos incomensuráveis, enfrentada pelos gregos, levou a uma separação entre a aritmética e a geometria. Tal fato gerou, por conseqüência, a separação entre as operações lógicas daquelas infralógicas e também influenciou na maneira que se pensava o mundo físico. Afinal as grandezas eram discretas formadas por infinitésimos ou eram de natureza contínua e indivisível? A teoria que encarava o mundo como discreto foi combatida pela escola eleática que considerava a imutabilidade e unidade essencial do mundo físico.

A palavra crise já trás na sua origem o conceito de separação. Então como unir o discreto com o contínuo, como unir o lógico com o infralógico?

A partir desta crise começou a necessidade pelo conceito de limite, que permitiria explicar os números irracionais, que seriam a resposta para tal separação. Como resposta ao problema os gregos criaram o método da exaustão de Eudoxo. Tal método era baseado no Postulado de Arquimedes, que já falava em grandezas de tamanho arbitrário e afastava os infinitésimos de todas as demonstrações geométricas dos gregos. Este método atingiu uma aproximação com o cálculo diferencial e integral, entretanto não havia uma passagem ao infinito, pois não existia, na época, tal noção. Arquimedes usou os indivisíveis que também eram discretos, entretanto, ele usava-os para indicar resultados de áreas e volumes e não para provar os resultados.

Newton, Leibniz e outros matemáticos do século XVII também utilizaram os infinitésimos. O primeiro tentou evitar este conceito em suas publicações. Newton trabalhou com quantidades variáveis e Leibniz com as discretas. Entretanto o infinitésimo não conseguiu eliminar a contradição em seus cálculos de fluxões e diferenciais que sempre acabavam em divisão de zero por zero.

Foi a definição de Cauchy junto com a formalização construída por Weierstrass com épsilons e deltas que permitiram formular a construção formal do conceito de limite e do Cálculo, com a sua redução à aritmética dos números reais levando a uma volta, depois de dois mil e quinhentos anos, ao problema dos números irracionais. Como foi dito em Brolezzi (ibid.) o cálculo é o “reino” da interação entre o discreto e o contínuo e, segundo minha compreensão, entre o lógico e o infralógico. Mas apesar do conceito de limite ainda havia uma necessidade para a definição do Cálculo, que era a compreensão da natureza da reta real e dos números reais associados aos pontos desta reta. Esta discussão foi feita por Cantor, que usou a Poeira de Cantor e Dedekind que usou o conceito de cortes. Cantor formulou a hipótese do contínuo, definindo a continuidade da reta real com relação ao infinito enumerável do conjunto dos números racionais.

O estudo feito por Cornu em (Tall,1991) sobre o desenvolvimento conceitual do limite, evidencia quatro grandes obstáculos epistemológico. Concluo que tais dificuldades estão relacionadas com a forma como se concebe as grandezas físicas, os números e a reta real. Outra relação com tais dificuldades está nos mecanismos cognitivos envolvidos com este conceito.

Nestes, estão envolvidas operações lógicas, construídas sobre relações que envolvem qualidades que independem do espaço-tempo, e operações infralógicas, construídas sobre relações topológicas construídas sobre o espaço-tempo. São estas operações que, segundo os estudos de Piaget, respectivamente constroem os conceitos de números inteiros e irracionais, daí a relação da pesquisa realizada nesta seção com o item sobre operações infralógicas e com o objetivo deste trabalho.

6 - Referencial Teórico

6.1 O conceito de Conceito

6.1.1 Revisão

Para atender os objetivos deste trabalho faz-se necessário ter um referencial teórico que permita construir uma noção do que é um conceito, como ocorre a sua gênese e quais são as variantes ou níveis de evolução desta categoria. Este é um trabalho que poderia ser desenvolvido, com mais profundidade, por alguém da área de teoria do conhecimento ou filosofia, entretanto o autor tentou apresentar, ainda que com certa superficialidade, algumas definições que possam servir como elementos auxiliares na reflexão sobre o que é um conceito.

Em (Abbagnano, 1970) tem-se que conceito é:

> *"Em geral todo* ***processo que torne possível a descrição, a classificação e a previsão de objetos cognoscíveis*** *(grifo do autor). Assim entendido, o termo tem significado generalíssimo e pode incluir toda espécie de sinal ou procedimento semântico, qualquer que seja o objeto a que se refere abstrato ou concreto,* ***próximo ou longínquo****;* ***universal ou individual (grifo meu)*** *etc. Pode-se ter um conceito da mesa como do número 3, do homem como de Deus, do Gênero e da espécie (os chamados universais) como de uma realidade individual, por ex. , de um período histórico ou de uma instituição histórica (o "Renascimento" ou o "Feudalismo"). Embora o conceito seja normalmente indicado por um nome, ele não é o nome, já que diferentes nomes podem exprimir o mesmo conceito ou diferentes conceitos podem ser indicados, por equívoco pelo mesmo nome. O conceito, além disso, não* ***é um elemento simples ou indivisível, mas pode ser constituído de um conjunto de técnicas simbólicas extremamente complexas*** *(grifo meu); como é o caso das teorias científicas que também podem ser chamadas conceito (o conceito da relatividade, o conceito da evolução) (...). Enfim, o alegado caráter de universalidade subjetiva ou validade intersubjetiva do conceito é, na realidade, simplesmente sua* ***comunicabilidade de signo lingüístico*** *(grifo meu):* ***a função primeira e fundamental do conceito é a mesma da linguagem, isto é a comunicação****". (grifo meu).*

Neste texto, Nicola Abbagnano representa de forma parcial, todo um processo de conceituação que teve de realizar para poder apresentar a definição de conceito na forma de um conjunto de signos articulados que permitem a um entendimento por parte de quem lê. No desenvolvimento do texto da referida obra é apresentada uma visão histórica de como o conceito de conceito evoluiu. Entretanto, o texto pesquisado não evidencia a preocupação de mostrar, e isto será abordado no texto do Anexo A– Gênese e evolução do Conceito para Piaget, como uma criança passa do pensamento individual aos conceitos e ao pensamento possível de ser coletivo e compartilhado com outras pessoas. Nessa definição de conceito de Abbagnano ora o conceito é um processo, ora é um termo, depois é um sinal ou um procedimento semântico, um conjunto de técnicas simbólicas. Esta multiplicidade gera confusão na definição do que é um conceito. Com base em tal definição foi construído um quadro, apresentado na figura 1, que destaca alguns aspectos que devem ser considerados quando se pensa na definição de conceito.

Atributos/símbolos
Permite Descrição
Permite Classificação
Permite Previsão
Comunicação/Signo
Contempla o Aspecto Universal
Contempla o Aspecto Individual
Permite a Representação
É um sistema

Figura 3- Aspectos do conceito de Conceito

Para Ausubel, segundo Moreira (1997. pág. 19), um conceito comunica o significado de alguma coisa e pode ser definido como um termo que representa uma série de características, propriedades, atributos, regularidades e/ou observações de um objeto, fenômeno ou evento. Esta definição aborda o aspecto da comunicabilidade e expressa o conceito como um termo que representa as regularidades e que permite a descrição de um objeto, fenômeno ou evento.

Para Frege (Campos, 2004. pág. 55) “Um conceito é predicativo. (...) Por outro lado, um nome de um objeto, um nome próprio, é totalmente incapaz de ser usado como um predicado gramatical”. Ele propõe a noção de extensão de conceito, que é um macro-objeto semântico constituído por todos aqueles objetos que caem sob o conceito e o pensou como sendo mais relacionado à fundamentação lógica de seu sistema. Ele vinculou o conceito à idéia de função, pois sua preocupação estava voltada exclusivamente para a filosofia da matemática, e usou a dupla argumento–função para substituir a dupla sujeito-predicado, considerada pela lógica clássica.

Com a finalidade de eliminar a confusão que se estabelece entre nome próprio e conceito Frege procura acentuar a distinção nome próprio-termo conceitual. Este tem como papel designar um conceito. Somente quando combinado com um artigo definido ou pronome demonstrativo pode corresponder a um nome próprio. Mas nesse caso pára de corresponder a um termo conceitual geral. O nome de uma coisa é um nome próprio.

Frege pensava que a função só pode cumprir seu papel lógico se relacionada à idéia de verdade. O valor de uma função é um valor-de-verdade. Ele distingue entre o valor-de-verdade do verdadeiro (verdadeiro) e o valor-de-verdade do falso (falso). Conceito é uma função cujo valor é sempre um valor-de-verdade.

As duas primeiras definições possuem em comum o aspecto da possibilidade de comunicação através do uso do conceito e é ai que se abre a perspectiva que permite que o conhecimento do indivíduo possa ser compartilhado e questionado por outros. A terceira tem como objetivo principal trabalhar a definição de conceito dentro do contexto da lógica (que tem como finalidade estabelecer as leis ou normas do pensamento correto ou julgamento, cujo conteúdo é o objeto essencial de sua investigação) e do uso desta como fundamento da aritmética, que no começo do século XIX passava a ser tida como a pedra de base da matemática (uma apresentação mais detalhada pode ser encontrada no Anexo I - Considerações de Frege sobre o Nome).

Pode-se fazer uma pergunta apropriada ao contexto deste capítulo: Qual a importância do conceito para a aprendizagem? O conceito tem importância tanto para a construção do conhecimento do indivíduo como para a construção do conhecimento social. No âmbito social pode-se destacar que a comunicabilidade, viabilizada também pela representação, permite que as pessoas discutam, compartilhem idéias e conhecimentos. Isto é muito importante no meio científico, onde para se adotar um conceito como sendo válido existe discussão entre os pares. No âmbito individual os conceitos permitem aos indivíduos construírem o seu entendimento do mundo.

Considerando, ainda, as diferentes abordagens apresentadas anteriormente poder-se-ia pensar nos seguintes questionamentos:

- Como e quando é gerado um conceito e quais as fases que ele atravessou no seu processo de formação?
- Como ocorre o desenvolvimento do conceito nas crianças, mesmo naquelas que ainda não dominam a linguagem de forma plena?

Uma discussão sobre as respostas a estas perguntas é apresentada por Piaget no livro " Formação do Símbolo na Criança", (Piaget, 1978). Neste livro é abordada a discussão sobre a

> *"... função simbólica, como mecanismo comum aos diferentes sistemas de representações, e como mecanismo individual cuja existência prévia é necessária para tornar possíveis as interações de pensamento entre indivíduos e, por conseqüência, a constituição ou aquisição das significações coletivas."*

Neste trecho Piaget faz a conexão entre o individual e o social através da função simbólica.

Para estudar o que é conceito para Piaget deve-se ter conhecimento de alguns pontos:

- A pesquisa que ele desenvolveu volta-se para a adaptação do sujeito ao meio ambiente e neste esforço o sujeito utiliza-se de todo o seu aparelho de assimilação incluindo os sistemas físicos (esquemas sensórios-motores) e os sistemas cognitivos (sistemas conceituais)
- No estudo da formação do símbolo na Criança (Piaget, ibid.) foram abordados os esquemas representativos que fazem parte do aspecto figurativo (representação ou percepção) do pensamento. Tais esquemas possuem como papel fornecer uma sinalização ou representação dos dados sobre os quais o raciocínio se apóia através da organização lógica.

- Depois Piaget discorreu sobre a evolução das formas de raciocínio do sujeito, que atuam sobre as formas de representação (aspecto figurativo do pensamento).
- Finalmente, ele trata do desenvolvimento da inteligência (da inteligência sensório-motora à conceitual) pela ótica da adaptação (equilíbrio/desequilíbrio entre assimilação e acomodação).

Um texto sobre o estudo de Piaget descrevendo a gênese e evolução do conceito é apresentado, com mais detalhes, no anexo A.

6.1.2 Considerações sobre conceitos e a Teoria de Piaget

A opção da escolha da teoria desenvolvida por Jean Piaget para explicar o conceito de Conceito deve-se ao fato de que ela mostra a gênese e os vários estados no processo da construção conceitual.

Os esquemas sensório-motores são os ancestrais dos conceitos. Eles permitem a assimilação de ordem prática, ou seja, na ação. Quando o sujeito coordena esquemas sensório-motores entre si tal fato pode ser considerado como um raciocínio sensório-motor, entretanto ainda não existe a representação (função simbólica), na qual o significado e o significante são diferenciados e ao mesmo tempo são coordenados.

Alem dos esquemas sensório-motores Piaget evidenciou também os vários intermediários que o conceito possui:

- **Esquemas verbais** (18 meses a 2 anos) são intermediários entre os esquemas sensório-motores e os esquemas conceituais. São os primeiros **signos verbais** que servem de expressão à criança, estes são intermediários entre significantes simbólicos ou imitativos e verdadeiros signos.
- **Pré-conceitos** (entre os dois e os quatro anos) - na narração ou na descrição atual acontece o **emprego dos pré-conceitos**. As noções que a criança emprega sem cessar oscilam entre generalidade e individualidade e

ainda lembram a estrutura dos esquemas sensório-motores, bem como das imagens imitativas ou lúdicas daí derivadas.

- Finalmente o conceito

Neste processo evolutivo do conceito existe o equilíbrio/desequilíbrio entre assimilação e acomodação. O jogo e a imitação são formas de representação que ocorrem quando acontece o desequilíbrio entre assimilação e acomodação. No jogo ocorre o predomínio da assimilação sobre a acomodação e o objeto dado é assimilado a quaisquer realidades, graças às imagens imitativas que servem de significantes. É uma forma de assimilação egocêntrica. A imitação é um prolongamento da acomodação. A imagem é uma imitação interiorizada, um prolongamento da imitação (Piaget,id, pág. 98). Ela é o produto de uma acomodação imitativa. Na imitação existe um predomínio da acomodação sobre a assimilação. A evolução da coordenação espaço-tempo é um aspecto que indica passagem do equilíbrio sensório-motor para o equilíbrio representativo (representação cognitiva), o qual permite chegar ao conceito. No equilíbrio sensório-motor a assimilação e a acomodação são sempre atuais, ao passo que no equilíbrio representativo as assimilações e acomodações anteriores interferem com as presentes a título de significantes e a assimilações anteriores a título de significações.

Com base nas leituras realizadas pode-se dizer que o **Conceito** é uma superestrutura, um esquema que coordena sistemas de representação, sistemas de classificação e um sistema lógico, o qual constrói sistemas de relações. Estas podem ser de equivalências ou diferenças que evoluem em operações. O conceito como elemento do sistema de assimilação do sujeito permite a descrição, classificação, previsão, a comunicação e permite abordar os aspectos universal e individual dos objetos.

O conceito possui relação com a operação, pois ele precisa da reversibilidade do pensamento, o que acontece quando a criança está no nível das operações. A **reversibilidade** é a expressão do equilíbrio permanente alcançado entre uma acomodação generalizada e uma assimilação que se tornou não-deformante. A reversibilidade é a possibilidade de encontrar um estado anterior dos dados, não se opondo ao estado atual (assimilação); e um estado tão real ou realizável quanto esse estado atual (acomodação). Esse equilíbrio móvel e reversível garante tanto a conservação dos conceitos e dos juízos quanto o sistema conceitual interior a cada um, regulando as correspondências das operações entre indivíduos (intercâmbio social de pensamento). O pensamento reversível só é possível quando o sujeito possui a conservação do todo, que seria o conjunto formado pela estrutura de classes relativas ao sistema conceitual formado. Realizar operações, adicionar, subtrair, multiplicar, dividir elementos e classes conservando o conceito significa a presença do pensamento reversível e descentrado, ou seja, a assimilação dos objetos pelo sujeito não ocorre em função de um elemento específico da classe. O conceito em sua forma "plena" se consolida quando o sistema de signos é acrescentado a um conjunto de ações interiorizadas, quando o pensamento já é totalmente reversível, ou seja, essas ações podem ser executadas e compostas no sentido direto e inverso. O sistema de signos permite que haja o intercâmbio social entre os indivíduos.

O desenvolvimento do sujeito que passa do plano das ações práticas ao plano dos conceitos necessita da construção de um sistema de operações, que está imbricado com o pensamento reversível. Outra necessidade é uma coordenação interindividual destas operações, possibilitada por um sistema de signos, o que garante, ao mesmo tempo, a reciprocidade geral dos pontos de vista e a correspondência do pormenor das operações e dos resultados respectivos.

6.2 Operações Infralógicas

6.2.1 Definição

Neste trabalho, até o presente momento, foi explorado o conceito de Conceito e a sua relação com operações lógicas. Estas (Piaget, 1993, pág. 478) apoiam-se em objetos individuais considerados como invariantes e limita-se a reuní-los ou relacioná-los independentemente de suas vizinhanças ou distâncias espaço-temporais que os separam ou ainda, segundo suas semelhanças (classes e relações simétricas) ou suas diferenças (relações assimétricas). Por exemplo: sejam duas classes A e A' tal $A+A'= B$; $B+B'= C$; etc. ou ainda $A<B<C$, etc. B é uma classe reconhecível, quaisquer que sejam as distâncias entre A e A' e a relação $A<B$ também independe dos arranjos espaço-temporais. Entretanto, quando se deseja tratar com o conceito matemático de limite, um dos temas mais importantes deste trabalho, deve-se abordar noções topológicas do tipo vizinhança, separação, ordem, envolvimento e contínuo, nas quais o arranjo espaço-temporal é decisivo. Conforme (Piaget, 1993. pág. 15) as noções espaciais fundamentais são topológicas e estas relações são construídas antes que qualquer organização projetiva ou euclidiana do espaço.

Com relação a tais arranjos espaço-temporais existem operações de outra natureza que podem ajudar a explicar a construção do conhecimento relativo a “intuição” do espaço. Tais operações foram estudas por Piaget (idem, p. 480) e foram chamadas de **Operações infralógicas**. Estas ao invés de reunir ou de dissociar os objetos segundo suas semelhanças (fundamentalmente classes e relações simétricas) ou suas diferenças (fundamentalmente relações assimétricas), reúnem ou dissociam as partes do objeto segundo suas vizinhanças ou diferenças de posição. Assim alguns elementos vizinhos constituirão uma reunião α qual acrescentada a uma reunião α‘ formará a reunião β, etc., constituindo cada reunião α, β, γ, δ, etc. um objeto parcial e, sendo essas totalidades de diversos graus elas mesmas partes do objeto total que é o espaço considerado.

6.2.2 Relação entre operações infralógicas e operações lógicas

Segundo Piaget (idem, pág. 479) as **operações infralógicas não são componíveis com as operações lógicas**. Se a reunião de elementos α faz parte de β, se β faz parte de γ, e se o objeto γ pertence à classe lógica A, que esta incluída na classe B, pode-se concluir que γ é um B, já que ele é um A, mas nem α nem β são A ou B. Neste exemplo γ é, portanto, ao mesmo tempo, o ponto de chegada das operações infralógicas que ligam a α e β, e o ponto de partida das operações lógicas que o ligam a A e B, mas não há composição transitiva possível entre dois sistemas operatórios. Pode-se tomar como exemplo o caso de α ser um segmento que faz parte da linha β que faz parte do quadrado γ, pode-se dizer que o quadrado γ pertence à classe lógica dos quadrados A e em conseqüência à dos quadriláteros B, mas nem o segmento α nem a linha β pertencem às classes A e B dos quadrados e dos quadriláteros. Vide figura 4.

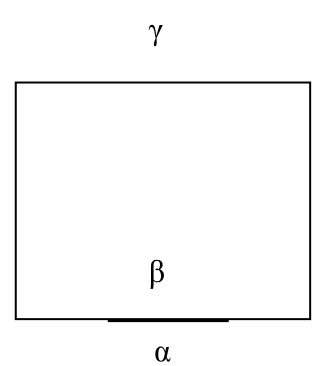

Figura 4 – Quadrado γ e segmento de reta α

As **operações infralógicas**, **cujas composições são fundadas na vizinhança** e não na semelhança (como as operações lógicas), acabam na construção de esquemas únicos e contínuos, que são os espaços totais, ao passo que as operações lógico-aritméticas acabam em sistemas de conjuntos descontínuos. O **contínuo** intervém, num certo grau, na elaboração da série de números, quando **aos números racionais são acrescentados os números irracionais**, cuja função é precisamente preencher as lacunas deixadas pelos primeiros. Sabe-se que os **números irracionais** são originados da consideração do espaço e que a sua introdução é precisamente devida à necessidade de corresponder a seqüência dos números ao contínuo espacial: eles não constituem, portanto, um produto espontâneo das operações lógico aritméticas, mas antes o ponto de solda entre essas operações e as operações infralógicas. Existem "espaços abstratos" que podem ser descontínuos e que se pode falar do "espaço dos números inteiros", etc.

Quais as operações infralógicas que intervêm na construção do espaço e em que consiste sua correspondência com as operações lógico-aritméticas que intervêm na construção do número na criança ?(esta construção foi abordada no Livro "A gênese do número na criança" de Piaget) Com esta pergunta Piaget investiga uma relação que tem paralelo com a Crise dos Incomensuráveis (Piaget,1967, pág. 365), na qual os gregos, de forma contrária dissociaram o geométrico do numérico, tal dissociação foi realizada para fugir da impossibilidade, por exemplo, de achar o número correspondente ao tamanho do lado de um quadrado de área 2. O resultado que mais chamou atenção nas investigações de Piaget foi o fato de que as operações constitutivas das relações topológicas invocarem durante muito tempo a quantidade "intensiva" apenas. Piaget diz que apesar da contradição aparente elas são espaciais sem serem ainda matemáticas. Somente quando são constituídas e agrupadas entre si que as operações infralógicas de caráter "intensivo" engendram, por suas próprias combinações, as operações de caráter "extensivo", isto é, matemático, métricas ou não métricas.

Para melhor compreender estes conceitos foram considerados dois conjuntos A e A' cuja reunião constitui o conjunto B, as operações que intervêm podem ser divididas em:

- **Intensiva** – diremos que uma quantificação será simplesmente "intensiva" quando as operações limitam-se a utilizar as relações $A<B$ e $A'<B$ sem ocupar com as relações entre A e A'. Em outras palavras, quando tais operações nos ensinam simplesmente que o

todo é maior do que a parte sem se preocupar em saber se uma das partes contém mais ou menos elementos que a outra.

- **Extensiva** – considerando o exemplo apresentado anteriormente diremos que uma quantificação torna-se extensiva se é possível estabelecer, por outro lado, que A contém mais elementos que A', ou menos ou a mesma quantidade. A quantificação extensiva se divide em
    - **Métrica** (ou numérica) quando intervém uma unidade nessa comparação entre A e A' ou entre A (ou A') e B, e em conseqüência pode-se dizer quanto A é inferior ou superior a A' (ou quantas vezes A ou A' entram em B).
    - **Não métrica** se na comparação entre A e A' ou entre A (ou A') e B não intervém uma unidade. Assim pode-se apenas dizer que A é inferior ou superior a A', sem poder dizer quanto.

Com relação às noções espaciais Piaget aponta uma diferenciação no uso do termo **"qualitativo"** quanto às relações utilizadas pelos matemáticos e por ele.

Os matemáticos repartem as noções espaciais em relações métricas e relações **"qualitativas"**. A **topologia**, em particular, sendo considerada **qualitativa na medida em que ignora as relações métricas**. A **lógica**, por outro lado, é dita como "**qualitativa**".

Para Piaget não é o mesmo sentido, pois:

- A **lógica das classes e das relações** é **qualitativa** no sentido intensivo, ou seja, não se preocupa com as relações entre as partes disjuntas pertencentes ao mesmo todo, ignora as relações métricas, e considera a relação entre o todo e as partes.
- A **topologia** é **qualitativa no sentido "extensivo"**, ou seja, ignora as relações métricas, mas não desconsidera as relações entre as partes: por exemplo, diríamos que o conjunto A contém "quase todos" os elementos de B, isto é, "todos com exceção de um conjunto fracamente representado ou conjunto finito A' = B-A". É assim que o postulado de Cantor, que determina o contínuo por uma sucessão de intervalos encaixados, apela para uma sucessão de relações "quase todos". Piaget afirma que se vê de imediato que a relação "quase todos" é de um caráter extensivo (já que A>A'), que ignora a lógica das classes.

Como existe neste trabalho o interesse pelas operações infralógicas estas noções propostas por Piaget foram utilizadas para entender a relação entre as operações infralógicas e lógicas.

Segundo Piaget (idem) as **operações infralógicas**, que permitem à criança construir sua representação elementar do espaço, **são de caráter simplesmente intensivo**, e em conseqüência **podem ser comparadas às da pura lógica qualitativa de classes e das relações definidas apenas por suas qualidades**. Em outras palavras, as relações topológicas que o sujeito constrói procedem, inicialmente, por simples encaixes ou por construção de ordens, mas sem chegar, por falta de análise do **contínuo**, a outra coisa além de uma série de lógica qualitativa do espaço (portanto a uma infralógica intensiva). Antes de ser capaz de medir a criança vê que uma parte de um conjunto é maior ou menor do que outra parte (por exemplo, que sua fatia de bolo é menor do que a do vizinho), mas tais reações extensivas permanecem por muito tempo intuitivas e não dão lugar a sistemas operatórios definidos antes da construção das perspectivas e das semelhanças (proporções), ao passo que as relações intensivas dão lugar a intuições mais precoces e agrupamentos mais rápidos. A **topologia elementar da criança** é unicamente de caráter **intensivo** e apenas a introdução do **infinito na análise do contínuo** torna a topologia **extensiva**, isto é matemática, ao passo que até antes do nível formal todas as operações espaciais da criança se apóiam somente no finito.

Segundo as pesquisas de Piaget em (Piaget ,1993, capítulos de 1 a 5) a criança de mais ou menos 7 anos constrói diversos **sistemas operatórios** por meio de **relações intensivas**, desenvolvidas desde o nascimento, **de vizinhança, de separação, de ordem, de envolvimento e de contínuo** (**relações topológicas)**:

1 **A vizinhança** – relação espacial mais elementar, correspondendo à condição mais simples de toda a estrutura perceptiva ou representativa do espaço, isto é, a “proximidade” dos elementos percebidos num mesmo campo. Piaget afirma que desde os trabalhos da psicologia da forma (Gestalt), sabe-se que o fator fundamental para organização das estruturas é a proximidade dos elementos estruturados. A função de proximidade evolui com a idade: quanto menor a criança mais a proximidade leva vantagem sobre os outros fatores de organização (semelhança, simetria, etc.); com o desenvolvimento, ao contrário, o fator proximidade prima menos em relação aos outros e os elementos de um todo podem ser relacionados a distâncias menos exíguas.

A vizinhança como tal não é construída, mas dada desde as intuições iniciais e serve de ponto de partida para a construção operatória.

2 **Separação** – Dois elementos vizinhos podem se interpenetrar e se confundir em parte: introduzir entre eles uma relação de separação consiste em dissociá-los, ou pelo menos, em fornecer um meio de distingui-los. Esta relação espacial corresponde a uma relação perceptiva muito primitiva: a que intervém na segregação das unidades ou, de modo geral, na análise dos elementos dentro de uma totalidade global ou sincrética. Numa percepção sincrética como a de um bebê vendo um objeto apoiado contra uma parede à maneira de uma mancha que apenas sobressai àquela, há vizinhança sem separação clara, ao passo que quanto maior o desenvolvimento, mais a percepção é analítica e as relações de separação foram determinadas. Da mesma forma que os progressos da análise levam a criança a estabelecer "separações" cada vez mais numerosas entre elementos inicialmente indiferenciados, estes mesmo progressos levam-na a construção de figuras percebidas, a ter em conta "vizinhanças" em graus diversos e segundo zonas cada vez maiores, em vez de limitarem-se as relações de proximidade imediata. Dois elementos A e A são separados quando eles não têm elementos comuns: A x A' = O. Mas a criança é capaz de uma intuição mais refinada da separação quando as combina com as noções de cercadura ou envolvimento e de fechamento ou fronteira. Como testemunho os desenhos anteriores a 4 anos (anteriores aos primeiros desenhos de figuras euclidianas), que representam um elemento interior a uma superfície fechada, ou exterior a ela ou na fronteira.

3 **Envolvimento** (**ou circunscrição ou envoltório**) – em uma seqüência ordenada ABC, o elemento B é percebido como estando "entre" A e C, o que constitui uma circunscrição a uma dimensão. Sobre uma superfície, um elemento pode ser igualmente percebido como rodeado pelos outros, como o nariz, enquadrado pelo resto do rosto. A três dimensões, a circunscrição é dada numa certa relação de interioridade, como o de um objeto num caixa fechada. A relação de envolvimento é dada perceptivamente tão logo sejam organizadas as vizinhanças, as separações e os diversos tipos de ordem. Ela dá lugar a uma evolução complexa, em particular quanto às três dimensões. Por exemplo: uma desaparição parcial de um objeto atrás de um anteparo não provoca de imediato uma percepção adequada, mas a percepção de alguma coisa comparável a uma absorção. Por volta de um ano ainda, para colocar um anel em volta de uma haste rígida o sujeito limita-se a aplicá-la contra a haste, como se o envolvimento fosse resultar diretamente do contato

em vez de implicar o ato de enfiar a haste no anel. Envolvimento de um elemento é um conjunto de suas vizinhanças, elas mesmas gradualmente vizinhas, e tal elemento ou sua cercadura é envolvido por uma fronteira se podemos determinar as situações:

- **Interior a A** - um ponto (ou um elemento qualquer de ordem inferior a A) será interior a A se existe um envolvimento desse ponto que só contém pontos de A;
- **Exterior a A -** um ponto (ou um elemento qualquer de ordem inferior a A) será exterior a A se existe um envolvimento desse ponto que não contém nenhum ponto de A;
- **Na fronteira de A_0 – um ponto estará na fronteira A_0** se qualquer envolvimento desse ponto contiver, ao mesmo tempo, pontos interiores e pontos exteriores a A. No caso de uma fronteira que separa A de A' a separação será expressa pela dupla disjunção $(A + A_0) \times A' = 0$ e $(A' + A_0) \times A = 0$.

4 **Ordem (**ou sucessão espacial) - intervém muito precocemente quando o olhar ou o tocar do bebê percorrem uma seqüência de elementos arranjados de maneira constante (como as barras de sua cama, etc.). Intervém ainda quando a percepção guia, segundo pontos de referência ordenados, uma seqüência de movimentos habituais: por exemplo, a visão de uma porta que é aberta, de uma figura que aparece e de certo número de movimentos anunciadores da refeição formam uma seqüência de percepções ordenadas tanto no espaço quanto no tempo, ligadas aos hábitos da sucção. As relações de ordem também são suscetíveis de desenvolvimentos ulteriores indefinidos em função da complexidade crescente dos conjuntos a serem percebidos. A noção de ordem é construída por meio de uma sucessão linear de elementos ou de uma sucessão de envolvimentos (linhas que formam uma superfície ou superfícies que fecham um volume).

5 **Contínuo** – intervém desde o início de toda percepção no caso das linhas e das superfícies dadas, mas a questão é saber em que sentido o conjunto de um campo perceptivo constitui um campo espacial contínuo. Independentemente do fato de, por muito tempo, os diversos espaços qualitativos inicias (boca, tato, visão,etc.) não serem coordenados entre si, não fica provado que num campo particular, tal como uma campo visual, por exemplo, o contínuo perceptivo seja de mesmo caráter em todos os níveis do desenvolvimento. A percepção da continuidade modificar-se-á em função do aperfeiçoamento crescente dos limiares de sensibilidade e, em conseqüência, da evolução das relações de vizinhança e separação. A noção

de contínuo aparece no nível das intuições representativas e das operações concretas (isto é, antes que as operações formais permitam a compreensão do infinito e a introdução de uma quantificação extensiva fundada nele), sob uma forma intermediária entre o contínuo perceptivo e o contínuo matemático. Poincaré exprimia o contínuo perceptivo na fórmula X = Y (X é indiscernível de Y); Y = Z, mas X ≠ Z, o que traduz bem o irracional da percepção. No nível das intuições representativas e das operações concretas o contínuo é expresso sob a forma não irracional (mas insuficiente do ponto de vista matemático): X é vizinho, mas não separado (não disjunto) de Y; Y é vizinho, mas não separado de Z; mas Z é separado de X por Y. Em (Piaget,1993. Pág. 159) o contínuo perceptivo ou intuitivo é entendido como uma síntese entre a vizinhança (que procede da "proximidade " perceptiva) e a separação (separação entre elementos espaciais distinguidos pela análise, sejam vizinhos ou não), mas uma síntese inacabada, pois A e B são percebidos como vizinhos (já que indiferenciados), mas não separados, B e C da mesma forma, ao passo que A e C são separados e percebidos como mais vizinhos do que são na realidade. Quanto à noção de Piaget do contínuo matemático pode-se obter mais detalhes no Anexo E – Conclusões de Piaget sobre as Noções do ponto e do contínuo.

Piaget constatou que, uma vez que essas diversas noções eram fornecidas pela representação intuitiva, a criança chega às estruturas operatórias listadas a seguir quando a articulação das intuições em jogo torna-se suficiente para assegurar sua composição reversível, ou seja, desde o nível das operações concretas:

I - Partição e adição primitiva – as reações estudadas no capítulo V de (Piaget , 1993) mostram a capacidade, desde 6-7 anos, de dissociar um contínuo em elementos vizinhos (e separados por essa dissociação), que, adicionados gradualmente, reconstituem um todo. Daí: A + A'= B, B + B'= C, etc. e C- B' = B; B – A'= A. **Este agrupamento, no domínio infralógico das vizinhanças, é o exato equivalente, ao agrupamento dos encaixes das classes A, B, C, etc., no domínio lógico**.

II – Ordem de colocação – O capítulo II do livro citado no item I mostrou como é construída a noção de ordem linear pela composição gradual das vizinhanças. Daí as ordens direta e inversa entre os elementos A, B, C, etc.: A→B→C... e C→B→A. A ordem será cíclica se

$A \rightarrow B \rightarrow C ... \rightarrow X \rightarrow A \rightarrow B ...$ igualmente com inversão de sentido possível. A ordem inversa, por resultar da mudança do sentido de percurso da seqüência, já constitui um deslocamento, não segundo o significado euclidiano de um movimento de objetos, mas do ponto de vista dos movimentos necessários ao sujeito para percorrer a seqüência.

Este mesmo agrupamento (ordem de colocação) intervém quando são ordenados, não mais os elementos de uma seqüência linear, mas as cercaduras ou envolvimentos sucessivos de um elemento de partida. Se A é um primeiro envolvimento (curva fechada cercando uma superfície, ou uma superfície envolvendo um volume), B o segundo, etc. encontra-se uma ordem ABC... que pode coincidir com as adições primitivas do agrupamento. Mas este último permanece independente da ordem no sentido de que temos tanto $A' + A = B$ como $A + A' = B$. **Este agrupamento que engendra a ordem de colocação é equivalente às seriações de relações assimétricas, no domínio lógico**. A natureza infralógica deste agrupamento é atestada pela intervenção das vizinhanças e pelo fato de que ele conduzirá, no terreno euclidiano, às operações de deslocamento.

III – Reciprocidade das vizinhanças – Se no agrupamento I o sujeito parte do elemento A, considerando A' como elemento vizinho (escrevemos A_1 e A_1'), ele pode igualmente partir de A como elemento vizinho (que será designado A'_2). Ele compreenderá então que :

$$A_1 + A'_1 = A_2 + A'_2 (= B);$$

Da mesma forma que $B_1 + B'_1 = B_2 + B'_2 (= C)$, etc.

Essa reciprocidade das vizinhanças (que também se aplica às separações) constitui o equivalente infralógico do agrupamento das "vicariâncias" no plano lógico.

IV – Relações simétricas de intervalos – da mesma forma que, no terreno das operações lógicas qualitativas, o agrupamento das vicariâncias (que é um agrupamento de classes) se traduz em termos de relações pelo agrupamento das relações simétricas, também no terreno infralógico a reciprocidade das separações se traduz em termos de relações por um sistema de relações simétricas, que são as relações de intervalos. No domínio das noções topológicas elementares, que ignoram as distâncias e suas conservações, tais intervalos são marcados simplesmente no seio dos agrupamentos de ordem II pela relação "entre": por exemplo

B está entre A e C na ordem direta, da mesma forma que está situado entre C e A na ordem inversa. Temos, portanto em conseqüência do agrupamento II, o agrupamento seguinte (que pode ser extraído dele da mesma maneira pela qual um sistema de relações simétricas pode ser sempre extraído de uma seriação):

$A \leftrightarrow B$ (=0); $A \leftrightarrow C$ (=B); $A \leftrightarrow D$ (= B, C), etc. (O símbolo $\leftrightarrow$ significa a relação "entre").

Essa relação simétrica "entre" é adquirida tão logo é construída a ordem linear, enquanto antes ela dá lugar a múltiplas dificuldades. Na ordem cíclica ABCDAB... a criança descobre que um elemento qualquer (por exemplo, D) está sempre situado entre dois outros (por exemplo, entre B e A) na ordem inversa e entre os mesmo, mas permutados (por exemplo, entre A e B) na ordem inversa. O mesmo agrupamento pode ser aplicado a uma sucessão ordenada de envolvimentos.

V – Multiplicação biunívoca de elementos – existem três espécies de envolvimentos que fornecem a imagem intuitiva mais simples das dimensões, ou seja, um sistema a três dimensões tem por fronteira uma superfície (um sistema a duas dimensões), um sistema a duas dimensões tendo por fronteira uma linha (a uma dimensão) e um sistema a uma dimensão tendo por fronteira um ponto (a dimensão 0). A elaboração de tais relações leva a um agrupamento multiplicativo tão logo o sujeito passa de uma dimensão a muitas. No caso da seqüência unidimensional ABCD, a linha que liga B a D constitui um segmento da linha ABCD, já que ela não corta senão pontos que pertencem a esta linha (como C). Em contrapartida, a linha que liga um ponto interior de uma superfície fechada a um ponto exterior corta a linha fronteira. Se representarmos essa linha fronteira pela seqüência $A_1B_1C_1D_1$... etc., e a linha que a corta pela seqüência $A_2B_2C_2D_2$... etc. existe, pois, um determinado ponto que pertence às duas linhas ao mesmo tempo. Por exemplo, o ponto C1 coincidirá com D2 e será necessário escreve-lo C_1D_2, o que constitui uma operação multiplicativa exprimida pelas palavras "ao mesmo tempo" indicando que o ponto C_1D_2 pertence às duas seqüências. Um agrupamento multiplicativo a duas dimensões é a generalização de tal operação no caso de interseção de dois feixes de curvas e a criança tem a imagem intuitiva dele em qualquer rede que pode ser lida simultaneamente nos dois sentidos como uma tabela de dupla entrada.

VI – Multiplicação biunívoca de relações – uma mesma rede a duas ou três dimensões pode ser construída em termos de relações. Em termos concretos, uma correspondência biunívoca consiste, com efeito, em estabelecer uma rede tal como a que acabamos de examinar: Os elementos $A_1B_1C_1$... etc., de uma seqüência são colocados em correspondência com os elementos A'_1, B'_1, C'_1 de uma outra seqüência quando certa conexão é estabelecida entre A_1 e A_1', entre A_2e A'_2. A conexão poderia ser desenhada sob a forma de linhas, que simbolizariam as relações, que ligam os elementos postos em correspondência. Neste caso essas linhas cruzariam as seqüências $A_1B_1C_1$ ... e $A_1'B_1'C_1'$, etc., segundo um sistema multiplicativo a duas dimensões.

VII e VIII – Multiplicações có-unívoca de elementos ou relações – é evidente que os sujeitos capazes de correspondências biunívocas, isto é, um termo a um termo foram igualmente aptos a construir correspondências um a diversos, isto é, co-unívocas. Por exemplo, num mosaico qualquer, o elemento A_1, corresponderá a muitos elementos vizinhos $A_2B_2C_2$ ..., essa seqüência $A_2B_2C_2$ ... corresponderá a um grande número de elementos vizinhos $A_3B_3C_3D_3F_3$... etc.

Estes são os sistemas operatórios que exprimem as relações topológicas em posse da criança no nível das operações concretas. Mas mesmo explicitando assim, através de uma formulação simbólica, o que permanece implícito na ação do sujeito, constata-se que cada um desses sistemas limita-se a apelar para encaixes, ordens de sucessão ou correspondências entre si, isto é, noções das quais nenhuma supõe ainda uma quantificação extensiva. Os encaixes dos sistemas em I e III limitam-se a ligar os elementos parciais às totalidades das quais são integrantes, os sistemas II e IV fazem a mesma coisa, mas em termos de relações e de intervalos, e as correspondências V a VIII consistem em encaixes simultâneos segundo dois sistemas ao mesmo tempo. Esses sistemas supõem raciocínios qualitativos, que procedem gradualmente por distinções dicotômicas: são agrupamentos e não grupos.

6.3 Caracterização do pensamento formal

No processo de desenvolvimento cognitivo do ser humano ele constrói sistemas para a assimilação da realidade externa e interna ao seu organismo. Tais sistemas começam com os reflexos seguidos de esquemas sensório-motores e a partir da construção da função simbólica inicia-se a construção dos esquemas conceituais. Neste processo o ser humano passa pelos estádios sensório-motor, pré-operatório, operatório e formal, assim definidos por Piaget em seus estudos. Em cada um desses estádios são construídos sistemas que coordenam os esquemas, sejam eles sensório-motores ou conceituais, e quando o ser humano atinge, durante o seu desenvolvimento, o **estádio formal** ele passa a realizar, além das operações concretas, as operações proposicionais ou formais. Estas passam a formar um único grande sistema, o qual reúne em um mesmo todo as duas formas de reversibilidade das operações (inversão e reciprocidade) juntamente com o conjunto das operações lógicas (Piaget citado em Montangero ,1998, pág. 191). Estas duas formas de reversibilidade operatória (inversa e recíproca) podem ser coordenadas em um sistema único. Tal sistema é o grupo das quatro transformações próprio da lógica proposicional do adolescente (inversão, reciprocidade, inversão da recíproca ou reciprocação da inversa e transformação idêntica). As operações formais passam a constituir também uma outra estrutura que é a estrutura de redes. Estas permitem reunir todas as operações em um sistema único, caracterizado pelas leis de rede. A rede é obtida pela construção de um "conjunto de partes". Esse conjunto é construído por meio de combinatória. São as operações combinatórias e a estrutura de grupo que diferenciam a rede formal dos agrupamentos concretos. O concreto está limitado ao real, àquilo que o sujeito percebe da realidade e o formal é construído pelos possíveis, que se caracterizam pelas possibilidades.

Segundo Piaget citado em (Montangero, idem. Pág. 192) o **Pensamento Formal** é caracterizado pela estrutura de conjunto de grupo e de rede coordenadas. Ele afirma ainda que se tal estrutura constitui uma forma de equilíbrio o seu modo de existência consiste em um conjunto de possibilidades, em que somente são realizadas as operações e os esquemas operatórios efetivamente construídos, reduzindo-se o resto às transformações virtuais, podendo produzir-se a partir dessas realidades efetivas. Na estrutura de conjunto de grupo está presente a dupla reversibilidade do pensamento. Na estrutura de rede esta presente a combinatória.

6.3.1 O pensamento formal, o conceito de limite e os objetos digitais interativos.

Conforme o texto sobre o pensamento formal, este se caracteriza pela estrutura de conjunto de grupo e de redes coordenadas, então cabe a seguinte pergunta: **o que existe de estrutura de grupo e de redes no caso do estudo sobre o conceito de limite utilizando objetos digitais interativos?**

Com o objetivo de responder a esta pergunta foram detalhados, a princípio, os conceitos de limite, grupo e rede:

Seja a seguinte definição do conceito de limite:

"Seja f uma função definida para todo número em um intervalo aberto contendo *a*, exceto possivelmente no próprio *a*. O limite de f(x) quando x tende a *a* será L. , escrito como

$\lim_{x \to a} f(x) = L$

se a seguinte afirmativa for verdadeira:

Dado $\varepsilon > 0$ qualquer, existe um $\delta > 0$, tal que se $0 < | x - a | < \delta$ então $| f(x) - L | < \varepsilon$" (Leithold, 1994, pág.58).

Ela possui as condições :

- Seja f uma função definida para todo número em um intervalo aberto contendo, *a* exceto possivelmente no próprio *a*
- Dado $\varepsilon > 0$ qualquer, existe um $\delta > 0$,

Ela possui também uma proposição condicional escrita na forma "se p então q".

O conteúdo da proposição **p = " $0 < | x - a | < \delta$"**

O conteúdo da proposição **q = "$| f(x) - L | < \varepsilon$"**

I - Estruturas de grupo:

A definição de limite é construída utilizando uma implicação lógica na forma **"se p então q"**. Fazendo o agrupamento destas duas proposições "p" e "q" combinadas na forma da multiplicação lógica e considerando as formas em que elas são afirmadas e negadas teríamos o agrupamento multiplicativo nas quatro primeiras linhas do quadro seguinte. As operações presentes nas 16 linhas do quadro formam de todas as combinações **possíveis de formar com os o par de proposições p e q, considerando verdadeiro e falso**:

1) p.q	9) p. q'v p'. q
2) p. q'	10) p'. q v p'. q'
3) p'. q	11) p. q v p. q'v p'. q
4) p'. q'	12) p. q v p. q'v p'. q'
5) p. q v p'. q'	**13) p. q v p'. q v p'. q' (conceito de limite)**
6) p. q v p'. q	14) p. q'v p'. q v p'. q'
7) p. q v p. q'	15) p. q v p'. q v p. q'v p'. q'
8) p. q' v p'. q'	16) 0

Figura 5 - Quadro de Proposições Lógicas

Da linha 1 ate a 4 estão as combinações 1 a 1. Da linha 5 até a 10 estão as combinações 2 a 2. Da linha 11 até a 14 estão as combinações 3 a 3. Na linha 15 está a combinação 4 a 4e na linha 16 o zero significa que não há combinações 0 a 0. Estas dezesseis combinações possíveis constituem operações novas que resultam da combinação de proposições do ponto de vista de sua verdade ou falsidade. Como o conceito de limite é dado por uma implicação (linha 13), ou seja, se p implica q ($p \rightarrow q$), então a associação p.q' é falsa e a representação do conceito através de proposições seria: (p.q) v (p'.q) v (p'q'), que corresponde ao numero treze do quadro anterior. Ao mesmo tempo se aplicarmos as operações lógicas de inversão (N), reciprocidade(R) e correlação (C) ao número 13 foram obtidas as operações 2, 12 e 3 respectivamente. A cada uma das outras operação presentes no quadro 1 podemos aplicar as 4 operações lógicas e assim obteremos uma operação presente no quadro, pois cada uma delas possui sua inversa, sua recíproca e sua correlativa entre as dezesseis operações possíveis.

Piaget, conforme citado em (Chiarottino, 1972, pág. 31), mostra que se nos ativermos ao aspecto algébrico da estrutura de grupo constataremos que o sujeito se comporta como se a qualquer destas operações proposicionais pudéssemos fazer corresponder de um lado uma inversa e do outro uma recíproca. Tal estrutura é o grupo de duas reversibilidades INRC. Este grupo comporta todas as operações dos agrupamentos, mas componíveis entre si: I (Identidade), N(Inversão), R(Reciprocidade), C (Correlatividade) fundida numa estrutura de grupo que é comutativo, pois satisfaz às seguintes condições: N=RC; R =NC; e I =NRC. Então resta comprovar se as dezesseis proposições formam um grupo ou um conjunto de grupos.

Examinando a figura seguinte podemos visualizar que as dezesseis proposições formam quatro grupos do tipo INRC.

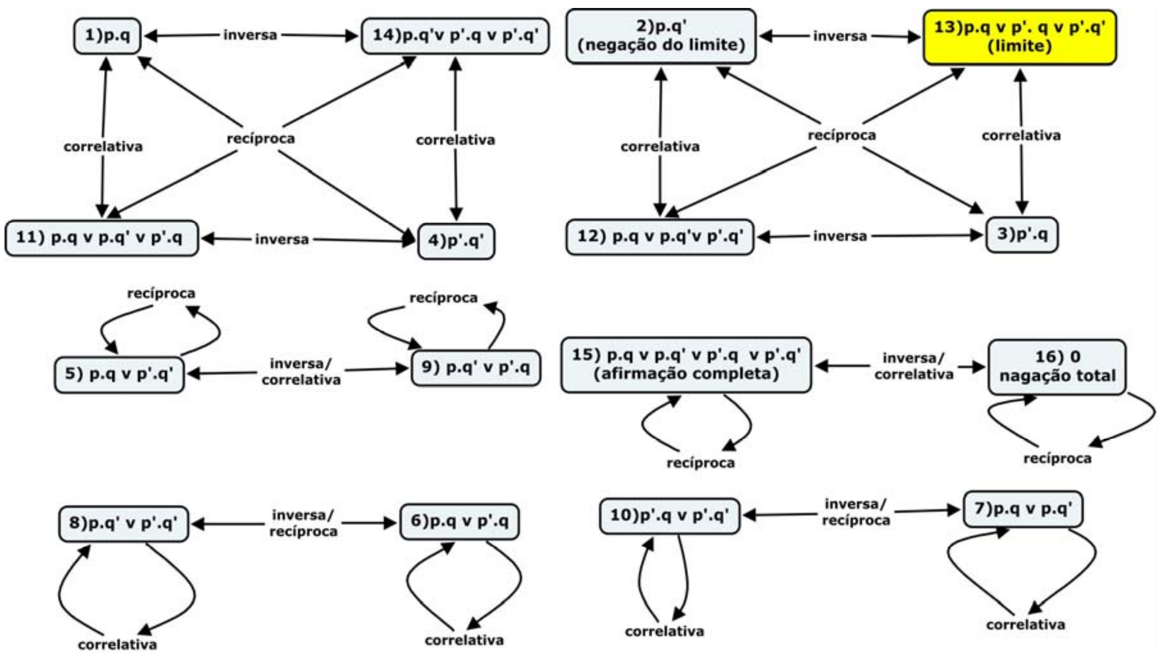

Figura 6 – Redes envolvendo proposições lógicas

Com base no figura 5, com dezesseis proposições e nas estruturas vistas na figura anterior pode-se mostrar que as proposições resultantes da aplicação das operações lógicas de identidade, recíproca, inversão e correlatividade na implicação que define o conceito de limite comportam um grupo do tipo INRC. Para realizar tal demonstração são necessários um conjunto, uma operação (o = composição entre operações lógicas) aplicada a elementos deste conjunto e a satisfação de quatro condições que foram listadas a seguir. Além das quatro existe uma quinta, que não é fundamental, mas que permite identificar se o grupo é comutativo.

Os elementos do conjunto G são:

I = p→q = p.q v p’.q v p’.q’

N = p.q’

R = q→p = p.q v p. q’v p’.q’

C = p’.q.

Condições para formar um grupo:

1)Todo elemento do conjunto composto com qualquer outro elemento do conjunto resulta num terceiro elemento do conjunto.

I aplicada em qualquer elemento resulta no próprio elemento:

I(I)=I, I(N)= N, I(R)= R, I(C)= C.

N aplicada em I,N,R,C resulta:

N(I)= N(p.qv p'. q v p'. q') = p.q' = N

N(N)= N(p.q') = p .q v p'.q v p'.q'=I

N(R)= N (p.q v p. q'v p'.q')= p' . q= C

N(C)=N(p'.q) = p.q v p. q'v p'.q'= R

R aplicada em I,N,R,C resulta:

R(I) = R(p.q v p'.q v p'.q')= p.q v p. q'v p'.q'=R.

R(N) = R(p.q')= p'.q=C

R(R) = R(p.q v p. q'v p'.q')=(p'. q' v p'.q v p.q) = I

R(C) = R(p'.q)=p.q' = N

C aplicada em I,N,R,C resulta em:

C(I) = C(p.q v p'.q v p'.q') = p'.q = C

C(N) = C(p.q') = p.q v p. q'v p'.q'= R

C(R) = C(p.q v p. q'v p'.q') = p.q'= N

C(C) = C(p'.q) = p.q v p'.q v p'.q'= I.

2) A operação de composição (o) é associativa.

Exemplo 1: (N o R) o C = N o (R o C) = I

(N o R) o C = C o C = I

N o (R o C) = N o N = I

Exemplo 2: (R o C) o R = R o (C o R)

N o R = C = R o N = C

C = C.

3) Existe em G= {I,N,R,C} um elemento neutro I tal que para qualquer elemento x de G tem-se x o I = x, como foi verificado anteriormente.

4) Para todo elemento x de G existe um inverso y tal que x o y = y o x = I. No caso de G o inverso de cada elemento é ele mesmo.

5) O grupo é abeliano, pois sejam quais forem x e y pertencentes a G ter-se-á xoy = yox.

II – Estrutura de Rede:

A segunda parte da pergunta feita no início do item 6.3.1 é: o que existe de rede no conjunto das dezesseis proposições presentes no quadro da figura 5?

Para entender conceito de rede existe a demanda pelo conceito de grafo e conceitos relativos. Estes conceitos foram listados a seguir(Goldbarg, ?, pág.485.):

Grafo – é uma estrutura que representa um conjunto de elementos denominados *nós* e suas relações de interdependências ou *arestas*.

Um Grafo é representado matematicamente por:

G'= (*V*, *E*)

Onde *V* é o conjunto de vértices, *E* o conjuntos de arestas ou ligações entre os vértices. (|*V*|= n , |*E*|= m). Onde n é o numero de vértices e m o número de arestas. Poderíamos usar o G como símbolo do grafo, mas para não confundir com o G do grupo, usaremos G'. Por exemplo, vide a figura a seguir:

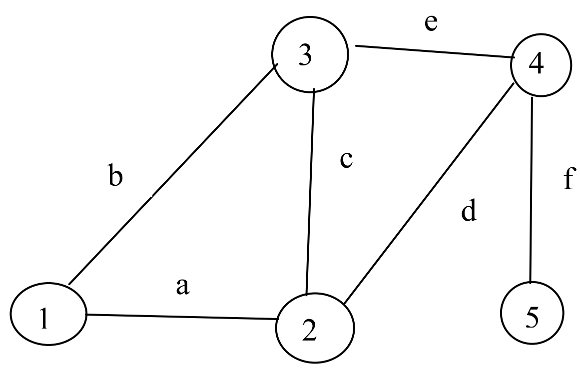

Figura 7 - Exemplo de Grafo.

V= {1,2,3,4,5}, E = {(1,2).(1,3),(2,3),(2,4),(3,4),(4,5)}, |V| = 5, |E| = 6.

Grafo rotulado - Um grafo G'= (V,E) é rotulado se existem atribuições associadas a seus nós (tanto numéricas como alfabéticas).

Multigrafo - um grafo G'= (V,E) é um multigrafo se existem mais de uma aresta ligando o mesmo par de vértices.

Grafo Direcionado - um grafo é dito direcionado quando o sentido das ligações entre os vértices é importante. Nesse caso normalmente as arestas são chamadas por *arcos*.

Rede – uma rede R = {V, E, F} é um grafo direcionado G'= (V,E) atravessado por um fluxo F = {f_1, f_2, ..., f_n} que circula em suas m arestas.

Com base nas definições anteriores relativas a redes e grafos pode-se concluir que as operações lógicas de Identidade(I), Inversão (N), Reciprocidade (R) e correlatividade (C) aplicadas sobre as proposições do quadro 1 com as dezesseis proposições formam várias redes. Examinando ainda a figura 5, com as proposições, em especial a parte de cima no lado direito, podemos conferir visualmente a formação de várias redes. Isto se justifica por: as proposições juntamente com as operações lógicas que as ligam de forma orientada formam um multigrafo rotulado (as atribuições dos nós são as proposições lógicas) com um fluxo entre seus vértices. O fluxo entre os vértices do grafo é permitido pela aplicação das operações lógicas I,N,R, C junto às proposições associadas aos vértices.

Detalhando em uma representação formalizada o multigrafo e a rede formados pelas proposições 2,3,12,13 tem-se:

V = {2, 3, 12, 13}, E = {(2,3),(2,12),(2, 13),(3, 2),(3, 12),(3, 13),(12, 2),(12, 3),(12,13),(13,2),(13,3),(13,12)}, F= {I,N,R,C}.

6.3.2 O conceito de limite: operações infralógicas, grupos e redes

Considerando os conceitos de grupo e de rede apresentados anteriormente deve-se mostrar como o conceito de limite, que é uma implicação lógica do tipo p →q pode estar inserido dentro de um estrutura que coordena rede e grupo. Então no caso específico do conceito do limite a sentença correspondente à identidade seria:

Identidade (I) (p→q): Se (eu escolho um valor de x suficientemente próximo, e diferente, de a) **então (**eu posso tornar f(x) tão próximo quanto eu queira de L)

Como inversa teríamos:

Inversa (N) (p.~q): existe pelo menos um ε > 0 para o qual não consigo escolher uma vizinhança de a de modo que para todo x nessa vizinhança f(x) esteja na vizinhança (L - ε, L +ε). **(não existe o limite)**. Outra pergunta para a inversa: (é possível escolher valores próximos de a e f(x) não estar tão próximo quanto eu queira de L) ou (existe algum valor de ε tal que não importa o valor de a que eu escolha f(x) não estará na vizinhança de raio ε de L).

Recíproca (R) (q→p): Se (eu escolher f(x) suficientemente próximo de L, podendo ate coincidir com L) então (eu posso tornar x tão próximo de a quanto eu queira, com x diferente de a). **(existe o limite com restrições)**.

Correlativa (C) (~p . q): **(** Eu escolho x fora do intervalo aberto (a- δ, a+ δ) **)** **e** (eu posso tornar f(x) tão próximo quanto eu queira de L)**.**

6.4 Considerações sobre a natureza do conceito de limite

O capítulo IV mostrou um estudo histórico das noções que contribuíram para a construção do conceito de limite. No presente capítulo houve um estudo sobre elementos da teoria de Piaget que pudessem permitir a descrição dos mecanismos cognitivos envolvidos na construção do conceito de limite. O estudo apontou na direção das operações infralógicas. Outro fato importante é que existe uma relação entre as operações lógico-matemáticas e infralógicas, tal relação mostra uma ligação entre os processos envolvidos no conceito de limite e de contínuo, o qual foi estudado no capítulo V de (Piaget, 1993). As operações lógicas possuem estreita relação com o aspecto discreto dos números descrevendo grandezas físicas. As infralógicas, conforme o que foi estudado, possuem estreita relação com o aspecto contínuo dos números descrevendo estas mesmas grandezas físicas. As reflexões sobre o conteúdo do capítulo 5 e o presente capítulo propiciaram a construção de algumas considerações, que foram apresentadas com suas respectivas respostas propostas:

6.4.1 O que é o conceito de limite?

Uma tentativa de resposta é apresentada a seguir :

A seguir temos três definições de limite:

1 - “Seja f uma função real de variável real e seja a, $a \in R$, tal que exista uma vizinhança reduzida de a contida no domínio de f. O limite dos valores f(x) para x tendendo a a é o número real L se, e somente se, para qualquer real positivo ε, existe algum real positivo δ, tal que :

$0< | x- a | < \delta \rightarrow | f(x) – L | < \varepsilon$ ” (Paiva, 1995. pág. 397)

2 - “Seja f uma função definida para todo número em um intervalo aberto contendo a exceto possivelmente no próprio a. O limite de f(x) quando x tende a a será L.

, escrito como

$\lim_{x\to a} f(x) = L$

se a seguinte afirmativa for verdadeira:

Dado $\varepsilon>0$ qualquer, existe um $\delta > 0$, tal que se $0< | x - a | < \delta$ então $| f(x) – L | < \varepsilon$” (Leithold, 1994, pág.58).

3 – Diz-se que o número a é o limite da seqüência (x_n) quando, para todo número real $\varepsilon> 0$, dado arbitrariamente, pode-se obter $n_0 \in N$ (naturais) tal que todos os termos x_n

com índice $n>n_0$ cumprem a condição $|x_n - a| < \varepsilon$. Escreve-se a = lim x_n. (Lima, 2002, pág. 23).

Pode-se fazer a seguinte interpretação da definição 1 ou 2: A qualquer real positivo (ε), escolhido para ser o comprimento de um intervalo haverá sempre um numero real positivo correspondente (δ), escolhido para ser o comprimento de outro intervalo, tal que se x esta dentro do intervalo formado por δ em torno de a então y esta dentro do intervalo formado por ε em torno de L.

A interpretação da definição 3 pode ser: A qualquer real positivo (ε), escolhido para ser o comprimento de um intervalo, haverá sempre um inteiro n_0, tal que se $n> n_0$ será cumprida a condição de que o elemento de índice n da seqüência estará dentro do intervalo de diâmetro ε em torno de L.

Pode-se fazer o seguinte questionamento: **Quais os tipos de relações, quais as operações lógicas e quais as operações infralógicas envolvidas quando um sujeito trabalha com a definição e com o conceito de limite.**

Quanto às relações pode-se pensar em:

- Existe uma **relação** lógica que liga os dois intervalos. Ela é do tipo **implicação**. Pois "**se**" x esta dentro do intervalo de centro a "**então**" y está dentro do intervalo de centro L e raio ε. No caso das séries –definição 3- existe uma relação de implicação lógica, pois se obtivermos um valor de índice $n>n_o$ isto implicará que o valor de x_n estará dentro do intervalo de raio ε e centro L.
- Existem dois **sistemas de encaixes de intervalos, portanto há relações infralógicas**. Um relacionado a "existe um δ". O outro relacionado a "dado qualquer ε". No caso o relacionamento direto entre os intervalos representador por ε e δ é dado pela relação "**menor que**", pois para qualquer valor de intervalo que se escolha sempre há um valor menor possível. Isto é uma quantificação extensiva. Assim cada conjunto de ε ou δ esta relacionado pela relação de ordem "menor que".

Quanto às operações lógicas envolvidas com o conceito de limite pode-se pensar em dois tipos:

- As operações lógicas envolvidas no conceito de números inteiros (vide Anexo G - Considerações de Piaget: a relação entre classes e números inteiros) que são a base para formação dos números racionais que, por sua vez, são a base para a construção dos irracionais.

- As operações lógicas envolvidas com as proposições da definição formal de limite foram detalhadas em 6.3 Caracterização do pensamento formal. Elas se estruturam na forma de uma coordenação de grupos e redes.

Quanto às operações infralógicas envolvidas no conceito de limite:

Quando se pensa em uma função real de variável real existe a relação com as operações infralógicas que influenciam na construção do contínuo numérico. O contínuo numérico (representado pela reta real) é o conjunto dos números reais. Este tem entre suas características:

- É um corpo (possui duas operações, soma e multiplicação que obedecem a algumas condições) (vide Anexo B – Definições lógicas e/ou matemáticas)**.**
- Tem uma relação de ordem (“menor que”, “maior que”) que permite comparar diretamente dois elementos do conjunto, esta relação permite uma quantificação extensiva. (no Corpo do Complexos não podemos comparar dois números complexos em termos de ordem).
- É completo – ou seja, todo conjunto não-vazio, limitado superiormente, $X \subset R$ (R é o Conjunto dos reais) possui supremo $b = \sup X \in R$ (de forma similar todo conjunto não-vazio, limitado inferiormente $X \subset R$ possui ínfimo $a = \inf X \in R$). **Intuitivamente este fato significa que a reta real não tem “furos”**. A completude necessária ao conceito de real implica na existência de supremos e ínfimos. Todo conjunto não-vazio limitado contido nos Reais possui supremos e ínfimos que pertencem aos reais. Para definir supremos e ínfimos precisamos das relações de ordem < e >, que ocorrem entre os próprios elementos do conjunto dos reais. Tais relações de ordem pode ser feitas de forma infinita, pois se perguntamos qual o próximo número real maior que três teremos uma infinidade de respostas. Este processo infinito está relacionado com o conceito de ponto de acumulação.

Em sua obra sobre a Representação do Espaço na Criança (vide Anexo E) Piaget discorre sobre as quatro relações de vizinhança, separação, ordem, envolvimento e as operações de divisão, composição, ordenar e envolver. Ele afirma que o contínuo se constitui na síntese dessas quatro relações, embora falte aos sujeitos dos experimentos as noções de números irracionais, de limite e de ponto de acumulação.

Analisando a definição de limite e a definição formal do contínuo numérico pode-se dizer que as relações de vizinhança, separação e as operações de divisão e composição estão relacionadas à própria definição de número real se considerarmos a definição de Dedekind **(vide Anexo B – Definições lógicas e/ou matemáticas)**, baseada em cortes e classes. A ordem e o envolvimento estão presentes quando pensamos em sistemas de intervalos encaixados tendendo para um ponto limite.

6.4.2 É necessário o conceito de continuidade para haver o conceito de limite?

Não, pois é possível aplicar o conceito de limite com uma série, que partindo dos inteiros chegue aos reais. Na verdade existe a necessidade do conceito do contínuo numérico (Conjunto dos Reais).

6.4.3 É possível aplicar limite em um intervalo só de números racionais?

Não, o conceito de limite precisa da completude. Vejamos o caso dos racionais: se aplicarmos o conceito de limite a uma seqüência de números racional maiores que zero e que o quadrado de cada um desses números seja menor que dois. Este conjunto é limitado superiormente e pela proposição que diz "todo conjunto não vazio de números reais, que seja limitado superiormente, possui supremo" (Ávila, 1993, pág. 3) ele tem supremo, mas esse supremo não é racional, pois ele é o número irracional raiz de 2. Assim o conjunto dos números racionais não é "fechado" para a operação de limite.

6.4.4 Qual é a relação entre operações infralógicas e o conceito de limite?

Em (Piaget, 1993) foi abordada a construção do esquema espaço na criança e a construção das relações topológicas, euclidianas e projetivas. Pelas experiências realizadas Piaget concluiu que o conceito de contínuo repousa sobre relações de vizinhança, separação, envolvimento e ordem. O conceito de limite (que depende dos conceitos de vizinhança e ponto de acumulação) (vide definições no Anexo 1) se fundamenta no contínuo numérico, construído através destas relações topológicas estudadas. Cabe aqui uma diferenciação entre a relação de vizinhança e a definição formal de vizinhança que encontramos em livros de matemática. A relação de vizinhança citada por Piaget e Inhelder é perceptiva ou representativa, portanto intuitiva, por outro lado a definição formal de vizinhança (vide Anexo B, Definições Matemáticas) permite a operacionalização deste conceito no contexto da matemática em nível formal. Existe uma estreita relação entre elas, pois se de um lado Piaget fala de vizinhança com o sentido de "proximidade" em seus estudos, por outro lado na definição formal de vizinhança esta implícita a noção do "tão próximo quanto queira", ou seja, a noção de proximidade está definida de uma maneira que permita a sua utilização em um sistema formal. É interessante que no estudo do desenvolvimento histórico destes conceitos, conforme (Brolezzi, 1996, pág. 32) a definição formal de limite foi construída primeiro, depois veio a construção da definição formal do contínuo numérico.

Segundo as pesquisas de Piaget a criança de mais ou menos 7 anos constrói diversos **sistemas operatórios** por meio de **relações intensivas de vizinhança, de separação, de ordem, de envolvimento e de contínuo**. Ele constatou que, uma vez que essas diversas noções eram fornecidas pela representação intuitiva, a criança chega às estruturas operatórias do tipo partição/adição primitiva, ordem de colocação, reciprocidade de vizinhanças, e outras listadas no item 6.2, quando a articulação das intuições em jogo torna-se suficiente para assegurar sua composição reversível, ou seja, desde o nível das operações concretas. São essas noções e operações infralógicas que permitirão ao sujeito construir o contínuo, que é a base do conceito de limite.

6.4.5 Qual a relação entre a construção do número e o conceito de limite?

Em (Piaget, 1975, pág. 15) o conceito de número aparece como: uma síntese, num único sistema, de duas estruturas mais simples que, que são a inclusão de classes (A + A' = B; B+ B' = C; C+C'= D; etc.) e o da seriação ou das relações de ordem (A-A'-B'- C', etc.). Ele comenta que tal síntese só se constitui por volta dos 7-8 anos. Sobre o conceito de número Battro (1965, pág. 128) ao falar dos experimentos feitos por Piaget sobre a reconstrução de correspondência cardinal, na qual são utilizados bonecos e bastões, comenta que a compreensão de que um enésimo elementos de uma série é necessariamente o último termo de n elementos, supõe-se que a criança pode fazer abstração das qualidades dos elementos para considerar que cada um é equivalente a qualquer de todos os outros e diferente apenas por sua posição de ordem. Este conceito de número tem suas bases em operações lógicas, pois a criança faz abstração das qualidades para considerar equivalências e diferenças (no caso a posição na reta) entre eles. Este tipo de relação não considera a dimensão espaço temporal. Sendo assim, os números, descritos se apresentam de forma discreta na reta, ou seja, podem ser separáveis (são discretos) pela intuição. Mesmo os números racionais, que pela intuição podem parecer estar associados a todos os pontos da reta, deixam lacunas. Como preencher tais lacunas?

O conceito de limite tem suas bases assentadas no conceito do continuo da reta real. O conjunto dos números naturais (N) não poderia, obviamente, fornecer essa base, pois os naturais são discretos. Os inteiros (Z) possuem também a características de serem discretos. Quando passamos a tratar com os racionais (Q) nossa intuição poderia sugerir, enganosamente, que teríamos cada ponto da reta real associada a uma fração, entretanto conforme (Courant 2000, pág. 84)

> "Uma vez que os números racionais são densos[1] na reta, é impossível determinar por qualquer operação física, por mais precisa que seja, se um dado comprimento é racional ou irracional. Assim poderia parecer que os números irracionais são desnecessários para a descrição de fenômenos físicos.... a verdadeira vantagem que a introdução de números irracionais trouxe para a descrição matemática de fenômenos físicos é que esta descrição torna-se muito simplificada pela livre utilização do conceito de limite, para o qual o contínuo numérico constitui a base".

Assim o conceito de limite depende do contínuo numérico que possui relação com a continuidade da reta e o conceito do contínuo, por sua vez, depende da existência dos números irracionais. Os números irracionais permitiram "fechar" as lacunas da reta real, uma vez que os

[1] Vide definição no Anexo B

conjuntos N, Z e Q deixam lacunas. Assim o reino dos números pode ser associado ao reino da geometria.

6.4.6 Por que Piaget afirma que os números irracionais são o "ponto de solda" entre operações lógico-aritméticas e operações infralógicas?

Primeiro é possível mostrar, conforme (Courant, 2000, pág. 71), que uma construção geométrica simples (exemplo: a construção da raiz de 2) pode resultar em um segmento incomensurável com a unidade, ou seja, um número irracional, o que significa que este segmento não pode ser representado por uma fração de números inteiros. Este tipo de segmento quando demarcado sobre a reta numérica não pode coincidir com nenhum número racional. Os pontos extremos desses segmentos, quando demarcados a partir do ponto 0 da reta numérica, são chamados de pontos irracionais. Como relacionar a medida deste comprimento com um número, que é uma construção feita em cima de relações lógico-aritméticas? Se considerarmos que a reta numérica não pode ter lacunas devido a sua condição de continuidade, então deve haver uma correspondência mútua entre números por um lado e pontos da reta por outro. Daí a necessidade de introduzir o conceito de números irracionais. Estes são construídos em cima do conceito de limite, que por sua vez é construído sobre as relações topológicas de vizinhança, separação, ordem e envolvimento. Estas relações segundo Piaget (ibid. pág. 480) "acabam na construção de esquemas únicos e contínuos, que são os espaços totais, ao passo que as relações lógico-aritméticas acabam em sistemas de conjuntos descontínuos".

Ao mesmo tempo em que os números irracionais foram construídos em cima de considerações do espaço (grandezas incomensuráveis) eles podem ser pensados como limites de séries de números racionais, os quais são construídos sobre números relativos, estes por sua vez são construídos sobre os inteiros, construídos sobre os naturais, que por sua vez são a síntese da inclusão de classes e relações de ordem. Por isso eles conseguem fazer a ligação entre operações infralógicas com operações lógicas.

Com base nestas reflexões, no histórico do conceito de limite e no estudo que será realizado sobre objetos de aprendizagem, foram elaborados objetos digitais com a finalidade de pesquisar quais os mecanismos cognitivos envolvidos na aprendizagem deste conceito matemático.

6.5 Objetos digitais: por que usá-los?

Nesta seção haverá um estudo sobre objetos digitais de aprendizagem com o objetivo de delimitar os aspectos gerais necessários em objetos que possam ser utilizados numa investigação não só da aprendizagem de conteúdos curriculares, mas, prioritariamente, que sejam recursos para investigar mecanismos cognitivos na construção de conceitos matemáticos. Outro ponto importante será a possível relação dos objetos digitais com o conceito matemático de limite neste processo investigativo.

A justificativa para o uso de objetos digitais nesta investigação pode ser apoiada na afirmação encontrada em (Fagundes, 1986, pág. 314): "O que encontramos foi uma situação especialmente estimuladora ao nível de trocas simbólicas, que permitiu a observação do funcionamento de mecanismos presentes na construção de conhecimentos. Só que, neste caso, o conhecimento que aparece sendo construído é um conhecimento sobre a própria ação de representar". Neste trabalho foi investigado o uso da programação em LOGO e a construção de conhecimentos de crianças ao usar esta linguagem. O aspecto comum com o estudo ora realizado é o uso de objetos simbólicos na investigação de mecanismos cognitivos, embora haja níveis de interação diferentes nos dois casos. As operações e relações realizadas pelo sujeito ao tratar com formas geométricas poderiam ser feitas com objetos tangíveis de papel ou outro material, mas sempre seriam dificultadas por outros atributos existentes, por exemplo textura, cor, peso. As abstrações poderiam ser empíricas, pseudo-empíricas e reflexionantes. Já no computador as abstrações sobre objetos representados na tela são, ao menos, pseudo-empíricas, pois atuam sobre representações dos objetos. Os objetos digitais permitem verificar facilmente as antecipações referentes aos conceitos em foco, se elas estão corretas bem como o retorno caso não estejam, ou seja, existe mais facilidade para a construção do pensamento operatório. O sujeito faz hipóteses sobre a configuração espacial das figuras geométricas e tem a possibilidade de verificar rapidamente a hipótese criada. No problema do estudo deste do presente trabalho o papel do computador permitiu criar uma situação em que o sujeito se deparou com interações envolvendo configurações espaciais, atingindo uma situação de desequilíbrio: por que o lado ao quadrado não resulta no valor dois?

Pode-se argumentar que o ambiente digital está limitado às propriedades que o programador atribui ao objeto, sendo um recorte da realidade. Porém, tais recortes podem incidir sobre aspectos relevantes do conceito que se deseja elaborar, permitindo focalização da inteligência e da vontade.

6.5.1 Definição de Objetos Digitais de Aprendizagem

No texto seguinte foram apresentadas algumas definições relativas a objetos de aprendizagem encontradas na literatura e em sites da internet de instituições que realizam trabalhos com estudos sobre objetos digitais de aprendizagem. Segundo o *Learning Technology Standards Committee* (LTSC, 2006), órgão da IEEE responsável pela regulamentação de normas referentes ao assunto, objetos de aprendizagem (*learning objects*) são definidos como sendo qualquer entidade, digital ou não digital, que possa ser utilizada para aprendizagem, instrução ou treinamento. Esta definição abre um grande espectro de possibilidades e a partir dessa definição, os objetos de aprendizagem podem incluir apresentações multimídia, conteúdos instrucionais, ferramentas de software, pessoas, organizações ou eventos que podem ser utilizados, reutilizados ou referenciados durante a aprendizagem suportada por TIC's (Tecnologias da Informação e Comunicação).

Em Wiley (2000) tem-se uma definição que destaca itens como a reusabilidade, a possibilidade de serem utilizados em diferentes contextos de aprendizagem, as entidades digitais passíveis de serem compartilhadas, em qualquer lugar da internet, por diversas pessoas e ao mesmo tempo, bem como a possibilidade dos usuários contribuírem para a melhoria dos objetos. Wiley apresenta, ainda, uma taxonomia que aponta características como a possibilidade de combinação dos objetos, considerando o número e o tipo, a função comum (como o objeto é geralmente usado) e a necessidade de metadados sobre outros objetos ('por exemplo, a localização de um outro objeto na rede). Na definição de proposta objetos de aprendizagem são componentes instrucionais que podem ser reutilizados diversas vezes em diferentes contextos de aprendizagem.

No site do Rived (Rede Interativa virtual de Educação da Secretaria de Educação a Distância – Ministério da Educação e Cultura) há a seguinte definição de objetos de aprendizagem:

> “Um objeto de aprendizagem é qualquer recurso que possa ser reutilizado para dar suporte ao aprendizado. Sua principal idéia é "quebrar" o conteúdo educacional disciplinar em pequenos trechos que podem ser reutilizados em vários ambientes de aprendizagem. Qualquer material eletrônico que provém informações para a construção de conhecimento pode ser considerado um objeto de aprendizagem, seja essa informação em forma de uma imagem, uma página HTM, uma animação ou simulação”. (RIVED, 2007).

Segundo SÁ FILHO e MACHADO (2004) um objeto de aprendizagem pode ser uma montagem de recursos disponíveis e criados por outros desenvolvedores, tais como imagens, textos e algum outro elemento que possa causar reflexão por parte dos alunos. Para esses autores, os objetos devem fazer parte dos ambientes de aprendizagem para torná-los ricos e flexíveis. Eles podem ser utilizados como recursos simples ou combinados, formando uma unidade maior. Podem ser utilizados em um determinado contexto e reutilizados posteriormente em contextos similares.

Estes autores apontam algumas características necessárias aos objetos de aprendizagem, tais como:

- A reutilização dos mesmos. Um curso deve ser projetado em estrutura modular obedecendo às regras da orientação a objetos, com um objetivo educacional explícito.
- Devem ser projetados para serem úteis sem causar problemas de atualização de hardware ou software.
- Podem ser criados em qualquer tipo de mídia (texto, imagem, som, vídeo, etc.).
- Devem ser padronizados em protocolos TCP/IP, HTTP e HTML para permitir sua difusão na rede e serem utilizados a distância.
- Devem permitir a busca de soluções de problemas e não apenas apresentarem certezas prontas.

Dada a grande quantidade de objetos digitais de aprendizagem e a idéia de permitir ao seu compartilhamento atualmente eles são reunidos em repositórios, que utilizam metadados e que permitem sua fácil localização, tais como:

- CLOE (Cooperative Learn-Ware Object Exchange) - University Waterloo – Canadá.

- MERLOT (Multimedia Educational Repository for Learning and On-line Teaching) – Califórnia – USA.
- CAREO – (Campus Alberta Repository of Educational Objects) – Canadá.
- ROSA – (Repository of objects with Semantic Acess for Learning).
- RIVED – (Rede Internacional Virtual de Educação).
- CESTA – (Coletânea de Entidades de Suporte ao uso de Tecnologia na Aprendizagem) – CINTED – UFRGS – Brasil.

As definições de objetos de aprendizagem apresentadas até o momento destacam características como a reusabilidade, a possibilidade de compartilhamento e permitem incluir nesta classe um amplo espectro de objetos e até pessoas.

Considerando a noção de aprendizagem entendida na Epistemologia Genética de Jean Piaget e a utilização de objetos digitais interativos utilizados no processo de investigação de construções conceituais, o autor deste texto entende que a construção de um objeto de aprendizagem digital deve considerar as características apresentadas em (Menezes ,2006):

a) No virtual existe a possibilidade de criar objetos de diversos níveis de interação, tal como ocorre com os videogames, onde os jogos possuem vários graus de dificuldade;

b) Aos objetos digitais podem ser integrados agentes inteligentes que desempenhem, de alguma forma, o papel de um assistente que poderia instigar a exploração por parte do aluno;

c) Objetos digitais podem fazer os registros dos usos, por diferentes sujeitos, possibilitando a criação de ferramentas de apoio à análise do professor e reflexão do aluno;

d) Objetos digitais são mais fáceis de serem reutilizados (disponíveis na rede), dando acesso a um grupo maior de usuários em interação;

e) Objetos digitais são reconfiguráveis, extensíveis, adaptativos e componíveis, ampliando suas possibilidades de uso.

A importância dos objetos construídos considerando tais características reside no fato de que eles podem ser utilizados para investigar mecanismos cognitivos e também podem ser utilizados em atividades pedagógicas em diversas áreas do conhecimento.

6.5.2 Objetos digitais e o conceito matemático de limite

Para realizar uma pesquisa sobre a construção do conceito de limite é necessária escolha de uma teoria que servirá como elemento de análise nesse processo investigativo, mas ao mesmo tempo existe outra necessidade, que é a realização de experimentos, nos quais tal teoria possa ser aplicada. Conforme já foi explicitado ao longo deste trabalho, a teoria escolhida foi a epistemologia Genética de Jean Piaget, considerando os conceitos envolvidos com as operações infralógicas e lógicas. Para realizar os experimentos existe a necessidade de construir objetos digitais que possam permitir a investigação proposta neste trabalho. Como devem ser construídos e utilizados tais objetos? Nos conceitos de objetos digitais apresentados anteriormente as características mais comuns apontavam para a reusabilidade, o compartilhamento e a possibilidade de combinação de objetos "atômicos" em objetos ou sistemas maiores de forma a uma possibilidade maior de utilização do objeto. A estas características o autor deste texto propõe que se deva considerar também, além daquelas apresentadas em (Menezes, ibid.), outras propriedades para que tais objetos sejam utilizados como recurso na investigação de mecanismos cognitivos, tal como configurado na questão de investigação deste estudo. Buscando resposta não para serem usados na aprendizagem, mas para servirem de instrumentos na investigação proponho que sejam consideradas:

- O histórico do desenvolvimento do conceito, ou sistemas de conceitos, envolvido com o objeto;
- Teoria sobre como acontece a construção do conhecimento;
- Relação entre os mecanismos cognitivos envolvidos no processo de aprendizagem do conceito e os aspectos computacionais do objeto de aprendizagem.

O **aspecto histórico** do conceito foi considerado na realização de pesquisas sobre os precursores do conceito de limite, quando surgiu a necessidade deste conceito e qual o tipo de desequilíbrio foi enfrentado no momento de resolver um problema do tipo calcular o valor de Π, calcular a área de um círculo ou achar a raiz quadrada de dois ou ainda os paradoxos de Zenão de Élea. Estes problemas foram encontrados em (Maor, 2003) e (Enzensberger, 1997) e eles serviram de inspiração para construir os objetos digitais utilizados na investigação da construção conceitual de limite.

A **teoria** adotada para explicar a construção do conhecimento, a **Epistemologia Genética**, supõe que a partir dos desequilíbrios e reequilíbrios do sistema de significações do sujeito é construído o conhecimento. Sendo assim, o objeto de aprendizagem é concebido e utilizado sempre partindo de um problema a ser resolvido e durante o uso do objeto em experimentos partindo-se de um desequilíbrio inicial e das respostas fornecidas pelos sujeitos propõem-se novos desequilíbrios, de forma que o sistema de significações do sujeito possa ser reconstruído através das certezas provisórias e dúvidas que possam ser levantadas no experimento.

Quanto ao terceiro aspecto deve-se pensar em como construir e utilizar objetos digitais de aprendizagem que contemplem os conceitos e mecanismos cognitivos envolvidos que servem de base ao conceito de limite. Assim surge o questionamento: como construir objetos digitais que contemplem os conceitos de vizinhança, ponto de acumulação, os quais são a base do conceito de limite? Ainda há também o conceito do contínuo, que sintetiza as noções vizinhança, separação ordem e envolvimento. Como considera-los?

Uma possível resposta a estes questionamentos é proposta através de dois objetos de aprendizagem desenvolvidos em Flash, utilizando linguagem *action script*, com a colaboração dos bolsistas Carlos Eduardo Souza Ferreira e Hélio Corrêa da Silva Neto do Projeto Laboratório Virtual de Psicologia Genética da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. O endereço para acessar e baixar os objetos digitais é **http://leg.lec.ufrgs.br/index.php/Objetos_de_Aprendizagem**. Mais detalhes descritivos dos objetos são apresentados no capítulo sobre Método, Técnicas e Ferramentas.

6.5.3 Considerações sobre objetos digitais e limites

Os objetos digitais de aprendizagem existentes nos vários repositórios espalhados no mundo e, da forma como estão definidos na maior parte da bibliografia pesquisada, possuem preocupações voltadas mais para a reusabilidade, compartilhamento, modularidade e outros aspectos que são característicos do aspecto computacional do assunto. Quando procuramos analisar os aspectos enfatizados fica o questionamento sobre a concepção de aprendizagem que apóia a construção destes objetos. Outro ponto importante é: como avaliar se houve alguma aprendizagem na utilização do objeto?

Os objetos digitais concebidos e utilizados na pesquisa do presente trabalho não podem, ainda, serem considerados de aprendizagem, pois ainda não atendem aos requisitos listados anteriormente, que apontam para os níveis de interação, a integração de agentes inteligentes, o registro do uso do objeto, a reusabilidade e a reconfiguração. Os objetos aqui propostos podem ser úteis para a investigação da construção conceitual de limite quando apoiados por programas como o Wink (Debugmode, 2007), que permite gravar a entrevista e as telas de computador resultantes da utilização do objeto digital e uma planilha eletrônica, que permitiu registrar os valores resultantes dos cálculos realizados.

7 – Método, Técnicas e Ferramentas

O método de pesquisa utilizado implementou estudo investigativo empírico, relacionado com o conceito matemático de limite, para evidenciar os processos e mecanismos cognitivos envolvidos quando o sujeito realiza atividades com objetos digitais interativos.

7.1 Tipo de Pesquisa

A pesquisa desenvolvida foi um estudo qualitativo, pois "A palavra qualitativa implica uma ênfase sobre as qualidades das entidades e sobre os processos e os significados que não são examinados ou medidos experimentalmente (se é que são medidos de alguma forma) em termos de quantidades, volume, intensidade ou freqüência. " (Denzin, 2006 ,pág. 23).

O método de pesquisa foi Método Clínico (também chamado de Método de Exploração Crítica) (Carraher. 1994, pág. 13). Este método implica uma ênfase na análise das qualidades dos fenômenos envolvidos nos mecanismos cognitivos relativos ao conceito de limite. Os sujeitos foram entrevistados durante a utilização de objetos digitais interativos. Cada atividade com tais objetos parte sempre de um desequilíbrio cognitivo inicial e a partir desta situação o sujeito é novamente questionado em suas respostas de forma a promover novos desequilíbrios e reequilíbrios de suas estruturas cognitivas até que não haja novidades e os argumentos apresentados pelo sujeito permitam análise.

7.2 Hipóteses

As hipóteses iniciais são:

- Objetos digitais podem ser utilizados para evidenciar e investigar os mecanismos cognitivos envolvendo o conceito matemático de limite.
- Os sujeitos no estádio formal (11 -12 anos em diante) possuem as noções envolvidas na construção do conceito de contínuo (vizinhança, separação, ordem e envolvimento) o que evidenciaria que eles estão no processo de construção das noções necessárias ao conceito de limite;

7.3 Situação experimental

7.3.1 Objetos Digitais

Foram criados dois objetos digitais:

I Objeto digital do experimento da fita

O objeto do experimento da fita veja figura 8, possui um palco, duas barras azuis (uma superior, outra inferior), quatro botões (instruções, dividir, reiniciar e créditos), uma tesoura e uma fita verde que toca as duas barras. As funções de cada botão são apresentadas a seguir:

- O botão “instruções” apresenta as instruções de uso do objeto.
- O botão “dividir” divide qualquer pedaço de fita, ou a fita total, em dois pedaços iguais.
- O botão “reiniciar” faz o objeto digital retornar às configurações iniciais.
- O botão “créditos” apresenta os envolvidos na construção do objeto digital.
- A “tesoura” tem a mesma função do botão dividir.

Na explicação do uso do objeto pede-se ao sujeito que atravesse uma sala com supostos 100 metros de comprimento através de uma seqüência de passos. A cada passo o sujeito anda metade do percurso que resta. Depois de um número limitado de passos realizados pergunta-se ao sujeito se ele irá atingir o outro lado da sala. A fita verde (inteira na tela maior da figura) à esquerda representa o percurso total. A cada passo dado ocorre a divisão da fita verde da esquerda pela metade. Cada metade obtida é colocada do lado direito do palco. O conjunto de pedaços de fitas verdes obtidos é colocado um sobre o outro do lado direito do palco, conforme mostrado nas duas telas de baixo na figura 8. As operações de partição da fita no lado esquerdo e recomposição desta mesma fita do lado direito da tela do objeto de aprendizagem são realizadas pelo sujeito durante o experimento.

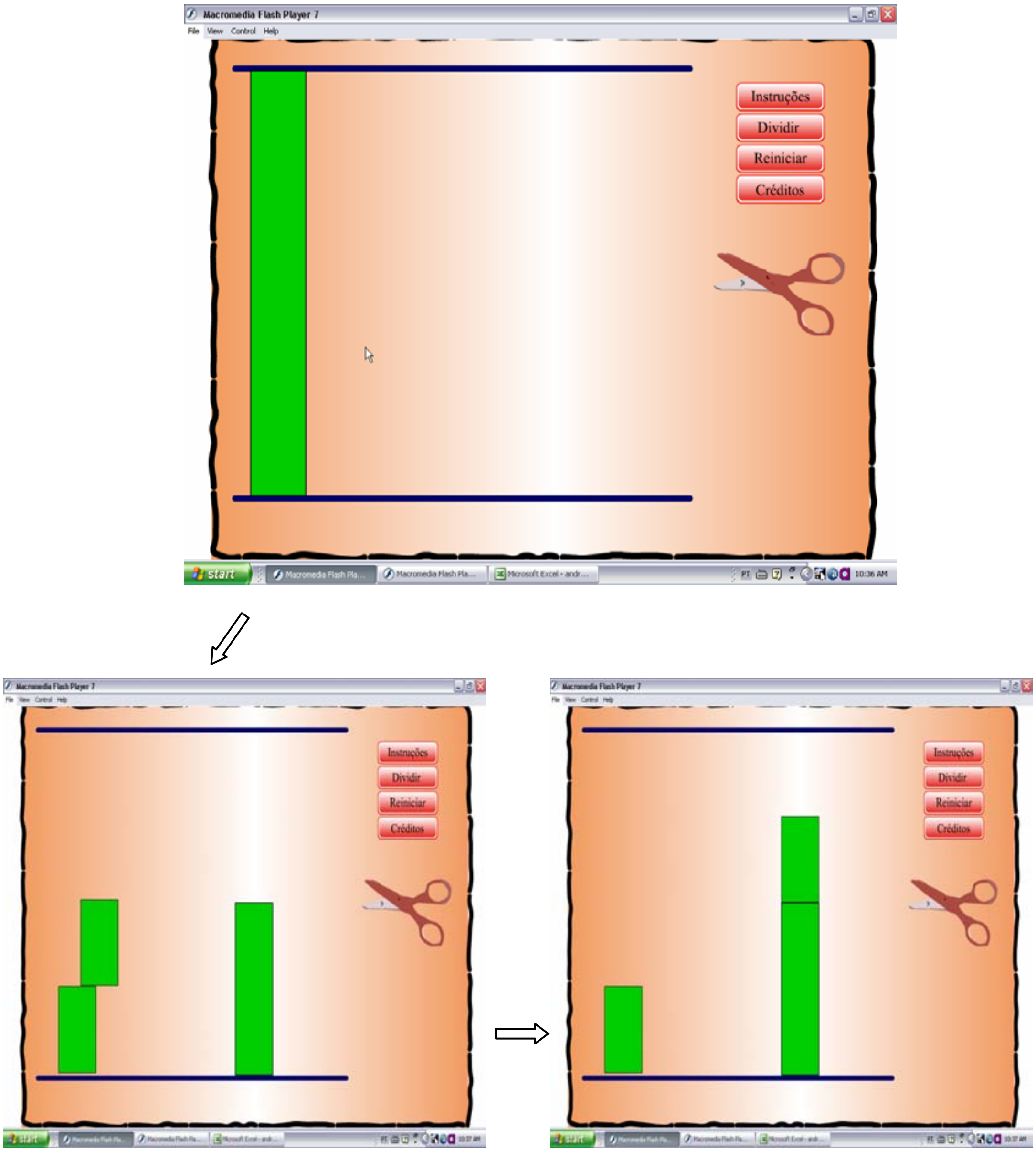

Figura 8 – Aspectos do objeto digital do experimento da fita

II Objeto para o experimento da raiz quadrada de dois

O objeto digital para o experimento da raiz de dois (figura 9) possui um palco, no qual são realizadas as ações. Na esquerda do palco há um quadrado e triângulos de diversos tamanhos. Ao clicar sobre este quadrado ou triângulos o usuário cria a cada clique uma instância da forma geométrica clicada. Logo ao lado destes triângulos há um quadrado vermelho que é uma borracha para os riscos formados pelo lápis, também localizado à esquerda do palco. Abaixo dos diversos triângulos há uma régua que pode ser deslocada e girada. Esta será usada para medir o tamanho dos lados das figuras geométricas. No lado direito do palco há cinco botões:

- Instruções – apresenta as instruções para interagir com o objeto digital;
- Rotacionar – rotaciona todos os triângulos, o quadrado e a régua;
- Apagar – apaga qualquer das formas geométricas formadas (triângulos e quadrados);
- Reiniciar – restabelece a situação inicial do objeto digital;
- Créditos – apresenta o nome das pessoas envolvidas com o desenvolvimento do objeto digital.

Na parte inferior do palco existem dois segmentos de reta que permitem, usando o lápis, que o usuário marque os valores encontrados durante o experimento.

Relatando brevemente pode-se dizer que no experimento da raiz de dois pede-se ao sujeito que crie um quadrado de área 1 e calcule a área deste quadrado. Depois se pede que utilizando vários quadrados crie um quadrado de área 4, em seguida um outro quadrado de área 9. Pergunta-se a ele qual tamanho dos lados destes quadrados. Pergunta-se também o tamanho do lado de um quadrado de área 25, 36, 49... Em seguida pede-se ao sujeito que construa, utilizando os triângulos marrons de área 0,5 cm^2 uma figura geométrica qualquer, mas que tenha área 2 cm^2. Antes da construção o sujeito calcula a área do triângulo. Caso haja sucesso pede-se que construa com estes mesmos triângulos um quadrado de área 2. No caso de sucesso pede-se para medir o lado do quadrado. Como este lado pertence a um quadrado de área 2 quando ele for elevado ao quadrado tem que dar 2. O que não acontece. Então se pergunta o que fazer para diminuir esta diferença. Esta pergunta é o ponto de partida para outras e finalmente pede-se para o sujeito responder como, partindo da diferença, achar o lado.

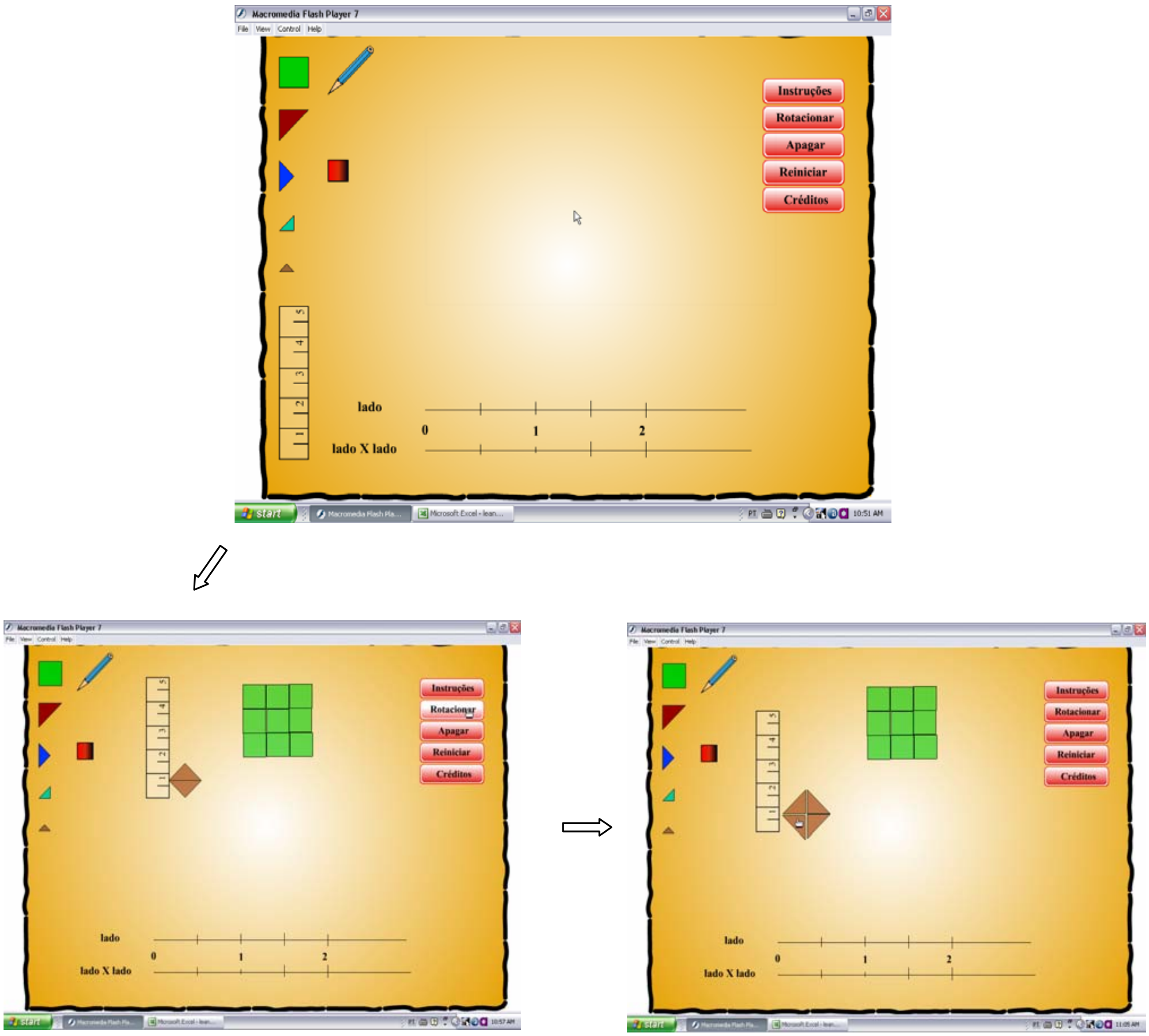

Figura 9 – Aspectos do objeto digital do experimento da raiz de dois

7.4 Os sujeitos do experimento

Para verificar as hipóteses houve a aplicação do método clínico de Piaget em experimentos envolvendo objetos de aprendizagem digitais com alunos da sétima série até o terceiro ano do ensino médio. Foram realizados experimentos com objetos digitais interativos e entrevistas com alunos de escolas públicas (Centro Federal de Educação Tecnológica do Amazonas – CEFET/AM, Escola Estadual Luciana Ribeiro – Porto Alegre, Escola Estadual Padre Agostinho Martins – Manaus). Esta escolha se deve ao fato de que Piaget já estudou o conceito de contínuo e ponto em crianças até quase treze anos (doze anos e nove meses). Ele conclui que as crianças nesta fase (início do pensamento formal ou hipotético dedutivo) possuem uma síntese operatória do contínuo. Neste ponto faz-se necessário um esclarecimento: **O contínuo a que nos referimos, principalmente nos experimentos, é qualitativo** (vide Anexo E – Conclusões de Piaget sobre as Noções do ponto e do contínuo), pois o contínuo extensivo seria aquele definido formalmente em Matemática. Esta definição formal os sujeitos, mesmo aqueles do segundo grau e em muitos alunos de cursos superiores de exatas, ainda não têm. Daí a razão de serem escolhidos alunos acima de doze anos e que já tivessem alguma experiência com cálculo de áreas de figuras geométricas. De outra forma poderia inviabilizar o uso dos objetos digitais propostos, considerando que era necessário o cálculo de área de triângulos e quadrados. Outro ponto importante a observar é o de que quando **se usa o termo noção da irracionalidade da raiz de dois neste trabalho, especialmente nos experimentos, entende-se: a convicção do sujeito quanto à possibilidade de expressão do número através de uma lista decimal finita.**

7.5 Quantidade de experimentos

A quantidade de experimentos foi determinada pelo surgimento de novidades no processo de investigação. A princípio pretendeu-se fazer entrevistas com 20 alunos entre as escolas listadas, mas a evolução do entendimento do conceito de limite por parte do autor do projeto demandou um número maior de experimentos (38).

7.6 O registro dos dados

O registro dos eventos foi feito através de gravação das atividades realizadas pelos alunos no uso de objetos digitais. Houve a gravação da tela do computador nos momentos em que o aluno irá interagiu com os objetos digitais. Há um programa chamado WINK (disponível no endereço eletrônico www.debugmode.com, em 27.05.2007), que permite a gravação das telas do computador durante o uso dos objetos digitais e, ao mesmo tempo, ele grava a entrevista realizada. Este programa cria arquivos em formato wnk, que podem ser transformados ao final da gravação em arquivos de formato flash ou html, o que permite compartilhar o resultado do experimento na internet. Como o sincronismo entre a imagem e o som fica deficiente o autor deste trabalho optou por fazer a gravação da entrevista com um aparelho de MP4, em formato wave (wav), permitindo uma gravação com qualidade adequada para a análise das entrevistas realizadas.

7.7 Análise dos dados

A análise do experimento foi feita sobre os registros da utilização do computador e das gravações das entrevistas. As fontes de informação e análise são as respostas dos sujeitos do experimento, com base na epistemologia genética de Jean Piaget. Dentro desta teoria geral foram utilizados os conceitos e noções de operações lógicas(grupo INRC e implicação lógica) e infralógicas(vizinhança separação, ordem, envolvimento e o continuo numérico) para tentar evidenciar os mecanismos cognitivos envolvidos na construção conceitual de limite, o qual tem suas bases assentadas sobre o conceito do contínuo. Além disso, foram considerados os questionamentos do item 6.4, no qual se discutiu a natureza do conceito de limite.

Foram realizados experimentos envolvendo um objeto digital interativo relativo à raiz quadrada de dois. O experimento envolvendo a divisão da fita não foi analisado por que as primeiras análises mostraram que seria redundante o seu uso junto com o experimento da raiz de dois e que este último preenchia melhor as necessidade para evidenciar os elementos da teoria durante as experiências. Entretanto num trabalho posterior sobre o conceito de progressão geométrica esse experimento se mostra uma boa alternativa. As perguntas aplicadas no experimento foram baseadas nas seguintes sentenças:

1. Sempre que eu fizer o valor do lado aumentar/diminuir, escolhendo valores que se aproximam (convergentes), eu vou ter o valor do lado ao quadrado mais próximo de 2? **(Identidade - p→q)**
2. É possível que eu escolha valores de lado convergentes (aumente/diminua) para o valor do lado e o valor do lado ao quadrado não fique mais próximo de 2? (**Inversa via negação – p.~q**).
3. Se partir da diminuição da diferença entre o 2 e o valor do lado ao quadrado então eu chego ao tamanho de lados tão convergentes e próximos quanto eu queira? **(Recíproca - q→p).**
4. É possível escolher valores de lados divergentes (que não estão se tornando tão próximo quanto eu queira) e obter valores do lado ao quadrado convergentes para o valor dois?**(Correlativa - ~p.q)**

7.8 A realização do experimento

Durante os meses de maio, junho e novembro de 2007 e maio de 2008 foram realizados 38 experimentos, seis na Escola Estadual Luciana de Abreu, em Porto Alegre, e 28 no CEFET-AM e quatro na escola Estadual Padre Agostinho Martin em Manaus. Nas três Escolas foram utilizados os dois objetos digitais já apresentados. Foram coletados os dados na forma de entrevistas e transcrições foram realizadas para permitir a análise das informações obtidas. A análise escolhida foi relativa ao experimento com alunos, cursando o ensino médio do Centro Federal de Educação Tecnológica do Amazonas- CEFET/AM, da Unidade de Ensino Descentralizada de Manaus.

Na análise do conceito de limite deve-se considerar como evidenciar dois tipos principais de categorias de relações e /ou operações:

- I Operações infralógicas (que permitem evidenciar as operações de natureza dependente da configuração espacial).

- II Operações lógicas, que permitem evidenciar as estruturas de grupo e rede, o que fornece o indício de pensamento formal.

A seguir serão apresentadas quatro entrevistas, consideradas representativas, escolhidas entre 28 realizadas no CEFET/AM(Centro Federal de Educação Tecnológica do Amazonas) entre junho de 2007 e maio de 2008. Os nomes dos sujeitos envolvidos nos experimentos foram substituídos por abreviações para preservar a identidade dos mesmos.

Entrevista 1-Fran[15] aluno do segundo ano nível médio com 15 anos de idade.

A composição das figuras geométricas é facilmente executada por Fran[15]. Logo ele constrói o quadrado de área 2. Quando questionado qual o tamanho do lado do quadrado de área 2 ele responde prontamente que é raiz de dois, evidenciando que já tem noção do valor.

Experimentador	esse quadrado que tem área dois qual é o tamanho do lado dele?	
Fran[15]	raiz de dois	mostra ter noção da raiz de dois
Experimentador	e quanto é que isso mede?	
Fran[15]	1,.......	já se confronta com o fato de que não dá um valor exato
Experimentador	1, quanto? Quer medir na régua?	
Fran[15]	vou usar a régua vou tentar um método aproximado	já tem a noção de que tem que aproximar

Noção de ordem/seriação

Ele evidencia a noção de ordem quando questionado se é possível achar uma diferença (entre o valor da área do quadrado, que é dois, e área calculada) menor ainda

Experimentador	anote na planilha. Me diga 1.41 vezes 1.41 da dois realmente?	
Fran[15]	Não, dá aproximadamente 1.9881	
Experimentador	Quanto é a diferença pra dois	
Fran[15]	aproximadamente 0.0119	
Experimentador	é possível diminuir essa diferença?	
Fran[15]	sim	noção de ordem
Experimentador	como?	
Fran[15]	adicionando mais casas decimais	relação de ordem, seriação
Experimentador	onde?	
Fran[15]	ao lado, pra ficar um numero mais preciso	Ocorre ainda uma relação de ordem
Experimentador	qual seria esse outro numero?	
Fran[15]	1.4142	
Experimentador	você ta lembrando o que você achou na calculadora?	
Fran[15]	hum, hum (sim).	

Pensamento reversível/operativo (recíproca)

Fran[15] evidencia domínio completo do pensamento reversível, quer permite partir dos valores das diferenças e achar os valores dos lados respectivos.

Experimentador	se você aumentou o numero de cada decimal você obteve 1,4142 e fez a diferença ficar menor , se eu te der a diferença você sabe chegar ao valor do lado?	pensamento reversível, operação
Fran[15]	hum, hum (sim).	
Experimentador	Exemplo dez elevado a menos cinco?Qual o tamanho do lado?	

Fran[15]	subtrairia essa diferença de dois e tiraria a raiz quadrada	
Experimentador	então faça	
Fran[15]	1.41421	

Noção de ordem

Fran[15] evidencia que desenvolveu a generalização do processo de ordenação dos intervalos quando afirma que é sempre possível diminuir a diferença e quando diz que nunca o valor do lado vai ser exatamente raiz de dois

Experimentador	é possível sempre diminuir essa diferença?	
Fran[15]	com certeza	relação de ordem de intervalos,
Experimentador	mas em algum momento você vai chegar na raiz de dois?	
Fran[15]	hum...Poderia chegar a um valor bem próximo, mas sempre não, por que o valor tenderia a diminuir muito ai seria um valor bem aproximado que seria um número próximo	vizinhança, separação, intervalos encaixados, ordem
Experimentador	você chega a um número próximo mas nunca chega?	
Fran[15]	nunca chega	coordenação feita pela generalização dos intervalos que diminuem sempre

Seriação, ordem, envolvimento, encaixe de números.

Fran[15] evidencia também seriação, ordem, envolvimento e encaixe ao demonstrar capacidade de saber a localização aproximada da raiz de dois em um eixo cartesiano e saber onde ficariam outros valores em relação a esse valor.

Experimentador	você conseguiria representar esses números num eixo (cartesiano)(abre o programa no Cabri Géomètre II	
Fran[15]	(através de manipulação do mouse e de ponto sobre o eixo x localiza onde seria aproximadamente a raiz de dois) (demonstra saber a localização e a posição dos outros valores em relação a este valor	seriação, ordem, envolvimento, encaixe de números

Noção da irracionalidade da raiz de dois e da diferença arbitrária

Experimentador	Eu vou conseguir chegar na raiz de dois exato?	
Fran[15]	exato não, vai dar um valor aproximado	noção da irracionalidade da raiz de dois
Experimentador	por quê?	
Fran[15]	por que sempre que for colocar uma diferença nunca vai ficar uma diferença inexistente, não vai dar um valor exato	já tem as ferramentas pra falar da diferença arbitrária

Fran [15] mostrou segurança em todas as operações lógicas do grupo INRC, ele já tinha demonstrado segurança na recíproca quando questionado anteriormente sobre o pensamento reversível e na inversa e recíproca ele evidenciou a mesma segurança, conforme pode ser evidenciado nos trechos de entrevistas listados a seguir.

Identidade e recíproca

Experimentador	você lembra do experimento que fizemos em junho no qual eu perguntava assim : do lado você chegava na área do quadrado de área dois, da diferença em relação a dois você chegava no	

	lado. Eu perguntava o que tem que fazer pra diminuir a diferença em relação a dois?	
Fran[15]	tem que ir aproximando da raiz de dois de 1,4142...tem que aumentar o numero de casas decimais	Identidade
Experimentador	se eu propuser uma diferença de 10 a menos 7 você sabe chegar na diferença	Recíproca
Fran[15]	sei. (calcula o valor do lado 1.414213527)	executa o que representa a recíproca

Inversa

Experimentador	é possível que eu faça o valor do lado chegue sempre mais próximo da raiz de dois e o valor da diferença não diminua	teste da inversa por negação
Fran[15]	a diferença vai sempre diminuindo mas nunca vai ter um limite pra isso porque os números são infinitos , sempre vai ter um número que vai ter uma diferença entre eles	
Experimentador	é possível você fazer uma aproximação da raiz de dois e a diferença não diminuir	
Fran[15]	quando a gente vai aproximando da raiz de dois a diferença é essa diferença diminuir cada vez mais, o lado vai se aproximando da raiz de dois , a área vai se aproximando de dois e a diferença vai se aproximando de zero.	certeza da inversão por negação
Experimentador	é possível algum caso em que isso não aconteça?	
Fran[15]	não que a gente for se aproximando do valor a diferença vai sempre diminuindo.	certeza da inversão por negação

Correlativa

Na correlativa Fran[15] mostra segurança com relação ao comportamento do valor da diferença.

Experimentador	é possível que eu me afaste de 1.4142 e o valor da diferença diminua.	teste da correlativa
Fran[15]	vai sempre aumentar a diferença, o valor fica mais longe da raiz de dois e a diferença vai sempre aumentar	segurança na correlativa.

Entrevista 2 - Ric [15] primeiro ano do nível médio com 15 anos de idade

Mesmo realizando com segurança as operações de composição e recomposição das figuras geométricas Ric[15] só consegue construir o quadrado de área 2 com a ajuda do Experimentador. Quando perguntado sobre qual o tamanho do lado que poderá gerar o quadrado de área 2 ele responde prontamente " Raiz quadrada de dois" demonstrando que já tem noção da raiz quadrada de dois, então o experimentador procura testar as noções das relações infralógicas e lógicas:

Ordem (processo de aproximação)

Experimentador	anote na planilha. Como faço pra essa conta ficar mais próximo de dois?	começa o processo de aproximação
Ric[15]	vai aumentar 004 no 1.4. Vai colocar 1.404	
Experimentador	por que você vai colocar 0.04 lá no lado?	
Ric[15]	por que tem aumentar pra dar.....	
Experimentador	tem que aumentar o lado pra dar mais próximo de dois. É isso?	
Ric[15]	sim	
Experimentador	quanto tem que aumentar o lado pra dar mais próximo de dois, você sabe?	
Ric[15]	não	
Experimentador	você ta chutando 0.04?	

Ric[15]	isso	tem noção do processo de aproximação e ordem mas ainda não domina pois faz tentativas sem maior consciência do que faz
Experimentador	então tente	
Ric[15]	(executa)	
Experimentador	1.404 ao quadrado vai dar dois?	
Ric[15]	não sei	
Experimentador	vamos testar	

Ric[15] possui noção do processo de convergência e de ordenação pois quando perguntado como fazer pra fazer o valor da área ficar mais próximo de dois ele sugere aumentos de 0.04, mas na forma de "chutes"

Experimentador	é possível fazer essa diferença menor ainda?	
Ric[15]	é aumentando o lado do quadrado	noção de ordem
Experimentador	pra quanto vai esse lado agora?	
Ric[15]	1.408	
Experimentador	experimenta	
Ric[15]	(obtém 1.982464)	
Experimentador	quanto é a diferncá pra dois?	
Ric[15]	0.017536	
Experimentador	a diferença ficou menor ainda?	
Ric[15]	ficou	
Experimentador	eu quero um diferença menor, como você faria?	
Ric[15]	1.412	noção de ordem
Experimentador	por que 1.412?	
Ric[15]	por que ta aumentando de 0.04 em 0.04	

Experimentador	anote os valores	
Ric[15]	(obtém 1.993744)	
Experimentador	quanto dá a diferença prá dois?	
Ric[15]	0.006256	
Experimentador	da pra ficar menor essa diferença	
Ric[15]	teria que aumentar o lado do quadrado	
Experimentador	pra quanto?	
Ric[15]	1.414	noção de ordem
Experimentador	tente	
Ric[15]	(obtém 1.999396 com diferença 0.000604)	
Experimentador	ficou menor a diferença?	
Ric[15]	ficou	

Encaixe /envolvimento

Experimentador	quanto menor a diferença entre as áreas o que acontece com a diferença entre os lados?	percebe o comportamento dos valores, mas falta testar o encaixe
Ric[15]	tão diminuindo também?	
Experimentador	qual seria o próximo numero que você colocaria depois do 1.41403677	
Ric[15]	1.4141	
Experimentador	depois do 1.4141?	
Ric[15]	1.4141 alguma coisa	
Experimentador	escreva	
Ric[15]	1.41411	
Experimentador	é possível colocar algum número entre 1.4141 e o 1.41411	
Ric[15]	1.414101	
Experimentador	é possível colocar algum número entre 1.41411 e o 1.414101?	
Ric[15]	É	
Experimentador	qual seria?	

Ric[15]	1.414102	tem noção do encaixe/envolvimento
Experimentador	e entre o 1.414101 e o 1.414102 é possível colocar algum número entre eles?	
Ric[15]	é sim	
Experimentador	sempre é possível colocar entre dois números um outro número?	
Ric[15]	é sim	
Experimentador	esse processo é finito ou finito? Chega uma hora que você não pode mais colocar número?	
Ric[15]	acho que é infinito	
Experimentador	sempre vou poder colocar entre dois números um outro número	
Ric[15]	hum, hum (sim).	
Experimentador	não tem fim isso. Vai ser sempre possível?	
Ric[15]	acho que sim	já tem noção embora não demonstre total segurança da generalização do processo de encaixe
Experimentador	tem certeza?	
Ric[15]	eu acho	
Experimentador	mas não tem certeza?	Idem
Ric[15]	Sim	

Quando questionado sobre diferenças menores ainda ele responde prontamente e confirma a noção de ordem. No desenvolvimento do experimento ele evidencia que percebe o comportamento dos valores da área calculada e apresenta noção do encaixe, embora **não apresente segurança na generalização do encaixe/envolvimento**, pois ele diz que não em certeza de que o processo de colocar números entre dois números iniciais dados é infinito.

Irracionalidade da raiz de dois

Experimentador	essa diferença essa diferença vai ser zero?	
Ric[15]	Vai	
Experimentador	quanto vai ser o lado com diferença zero.é possível achar o valor do lado?	
Ric[15]	não é possível	
Experimentador	por quê ?	
Ric[15]	vai ser raiz quadrada de dois	
Experimentador	é possível achar a raiz quadrada de dois?	
Ric[15]	Não	Noção da irracionalidade da raiz de dois

A resposta de Ric[17] sobre a possibilidade de achar a raiz quadrada de dois evidencia que ele tem noção sobre a irracionalidade deste número e de que a diferença entre a área calculada e dois nunca vai ser zero.

Recíproca/pensamento reversível (recíproca)

Experimentador	agora vamos pra outra pergunta : sempre é possível da diferença chegar no lado ou tem algum caso que eu vou e dar o valor da diferença e você não vai chegar no valor do lado?	
Ric[15]	acho que sempre vai ser possível	noção da operação recíproca
Experimentador	essa diferença essa diferença vai ser zero?	
Ric[15]	Vai	

Experimentador	sempre que os valores do lado vão ficando próximos os valores da diferença vão ficar próximos?	
Ric[15]	Vão	recíproca e pensamento reversível

Inversa

Experimentador	é possível que os valores do lado se aproximem e os valores da diferença não se aproximem	Verificando a Inversa
Ric[15]	Não	noção da inversa
Experimentador	é impossível ?	
Ric[15]	hum, hum.	

Correlativa

Experimentador	é possível que os valores da diferença diminuam e os valores dos lados não se aproximem um do outro?	noção da correlativa
Ric[15]	É impossível. Eu acho que não	
Experimentador	(repete a pergunta)	
Ric[15]	eu acho que é impossível	

Ric[15] evidencia uma relação entre os valores dos lados e os valores das diferenças. Isso pode ser percebido nas respostas envolvendo as operações de recíproca, inversa e correlativa. Uma forma de evidenciar o pensamento reversível está presente nas perguntas sobre a recíproca.

Entrevista 3 - Cas[17] terceiro ano do nível médio com 17 anos de idade

Cas[17] precisou da intervenção do experimentador para construir o quadrado de área 2.Evidenciou a noção de ordem, entretanto não atingiu a generalização do processo de ordenação.

Cas[17]	2.00052736 com diferença 0.00052736	
Experimentador	é a menor diferença?	
Cas[17]	É	
Experimentador	1.4144 ,dá pra achar menor?	
Cas[17]	Sim	
Experimentador	qual seria?	
Cas[17]	1.41444	
Experimentador	Experimente	

Cas[17]	2.0006405136 com diferença 0.0006405136	
Experimentador	esse valor não deu a menor diferença 1.413 também não deu você vai usar o que?	
Cas[17]	....	
Experimentador	é possível sempre essa diferença diminuir?	
Cas[17]	é aumentando os lados	
Experimentador	esse processo da diferença diminuir ele é finito ou infinito?	
Cas[17]	eu acho que é finito por que ele chega num fim	não generalizou o processo de ordenação

Pensamento reversível/operatório e noção da irracionalidade da raiz de dois

Ela não evidenciou noção da irracionalidade da raiz de dois, mas evidencia o pensamento reversível/operatório que na verdade é operação recíproca do grupo INRC.

Experimentador	esse processo da diferença diminuir ele é finito ou infinito?	
Cas[17]	eu acho que é finito por que ele chega num fim	não generalizou o processo de ordenação
Experimentador	a diferença pode ser zero?	não tem noção da irracionalidade da raiz de dois
Cas[17]	Isso	
Experimentador	eu vou sugerir um diferença 0.00001	
Cas[17]	Ok	
Experimentador	do lado eu achei a diferença, da diferença é possível achar o lado?	pensamento reversível/operatório

Cas[17]	Sim	evidencia pensamento reversível operatório
Experimentador	como você faria?	
Cas[17]	do lado eu elevo ao quadrado e diminuo de dois então eu somaria de dois e dividiria por dois	
Experimentador	esse é o processo inverso do que tu fizestes? O lado você elevou ao quadrado e depois subtraiu de dois, se eu te der a diferença você vai somar com dois?	
Cas[17]	só somar	
Experimentador	somar ou subtrair	
Cas[17]	só somar	
Experimentador	e pra achar o lado você vai dividir por dois.	
Cas[17]	é pois o número ta ao quadrado	
Experimentador	então o inverso do quadrado é a divisão?	não tem consciência plena do processo para achar o valor do lado
Cas[17]	não, é a raiz	
Experimentador	então tira a raiz	
Cas[17]	(obtém lado 1.4142170979 para a diferença 0.00001)	

Encaixe

Não tem consciência plena do processo para achar o valor do lado do quadrado de área 2. Após realizar contas para achar a diferença toma consciência de que o processo é infinito.Toma consciência de que o processo de mudança do tamanho do lado é infinito.Tem dificuldade na noção do encaixe, achando, inicialmente, que o encaixe é impossível. Então o Experimentador compara o encaixe com a diferença menor sempre possível, mesmo assim ela não consegue atingir a noção do encaixe embora afirme "*tem hora que dá pra pensar que dá. Quando eu vou tentar achar o número que dá pra botar só vem números após esse um aqui, no caso o dois ou outro um depois desse número aqui sempre seria depois disso aqui, não aqui.*". Quando interrogada sobre a possibilidade do encaixe ela afirma que sabe que o encaixe é possível, mas não sabe fazer.

Experimentador	você acha que tem um número entre eles ou você acha que tem mais de um número ou você acha que não tem número algum entre eles?	
Cas[17]	não tem nenhum número	tem dificuldade na noção do encaixe
Experimentador	é impossível?	
Cas[17]	É	acha que o encaixe é impossível
Experimentador	mas como é possível achar sempre uma diferença menor ainda , como você conseguiu fazer essas contas?	o Experimentador compara o encaixe com a diferença menor sempre possível
Cas[17]	é verdade	
Experimentador	é possível colocar esse número entre 1.414 e 1.4141? Qual seria esse próximo número?	
Cas[17]	tem hora que dá pra pensar que dá.Quando eu vou tentar achar o número que dá pra botar só vem números após esse um aqui, no caso o dois ou outro um depois desse número aqui sempre seria depois disso aqui, não aqui...	
Experimentador	você acha que da mas você não sabe fazer ?	
Cas[17]	Isso	sabe que o encaixe é possível mas não sabe fazer

Convergência dos valores do lado do quadrado de área 2

Quando o Experimentador tenta testar a noção de convergência de valores Cas[17] a princípio não evidencia a noção da convergência dos valores do lado do quadrado de área 2. O Experimentador não faz a pergunta de forma adequada, pois pode induzir ao erro ou a construção de uma relação que o sujeito não faria sem a pergunta..

Experimentador	se a diferença diminuir cada vez mais a diferença entre os lados vai diminuir?	testando a noção da convergência dos valores do lado
Cas[17]	vai diminuir	
Experimentador	o que vai acontecer com os valores dos lados?	
Cas[17]	vão diminuir	
Experimentador	mas eles aumentaram aqui. O que ta diminuindo o valor dos lados?	
Cas[17]	não....é	
Experimentador	o valor dos lados ta diminuindo?	
Cas[17]	.....	a princípio não tem noção da convergência dos valores do lado
Experimentador	quando as diferenças diminuem o que acontece com os valor dos lados comparando entre eles ?	
Cas[17]	são maiores	
Experimentador	aconteceu algo mais? Sempre que os valores dos lados cresceram as diferenças diminuíram e os valores dos lados fiquem próximos de um valor?	o Experimentador não faz a pergunta de forma adequada, pois pode induzir ao erro
Cas[17]	É	
Experimentador	sempre é possível?	
Cas[17]	Sempre	

Inversa e Correlativa

Experimentador	é possível que os valores dos lados não se aproximem um do outro e a diferença fique menor?	testando a correlativa
Cas[17]	não se a diferença ficar menor os valores dos lados vão se aproximando	tem noção da correlativa
Experimentador	é possível que os valores dos lados se aproximem e os valores da diferença não diminuam?	testando a inversa
Cas[17]	não	
Experimentador	é impossível?	
Cas[17]	acho que é	tem noção da inversa
Experimentador	é possível que os valores da diferença diminuam e os valores do lado não se aproximem	Correlativa
Cas[17]	não por que o inverso que tem não	tem noção da correlativa
Experimentador	é possível que os valores da diferença diminuam e os valores do lado não se aproximem	
Cas[17]	também não	
Experimentador	é possível os valores do lado se aproximar e os valores da diferença não diminuir?	tem noção da inversa
Cas[17]	não. É impossível	
Experimentador	é possível os valores da diferença não diminuir e os valores do lado não se aproximar?	recíproca na forma de negação
Cas[17]	Não	houve confusão causada pela pergunta

Cas [17] evidenciou ter a noção da inversa e da correlativa e talvez tenha se confundido na resposta sobre a recíproca, pois esta foi feita na forma de negação o que pode ter gerado confusão, talvez a pergunta devesse ser feita de outra forma.

Entrevista 4 – Nil[17] aluno do segundo ano do ensino médio com 17 anos de idade

Com alguma intervenção do autor Nil[17] consegue montar a figura do quadrado de área 2. Como primeiro valor para o lado quadrado ele faz a medida e propõe 1,5, mas diante do resultado do cálculo da área com valor 2,25 e depois de questionado sobre esse valor Nil[17] refaz a medida do lado do triângulo e chega a um valor mais próximo. Começa então a verificação da existência dos mecanismos infralógicos(vizinhança, separação, e envolvimento com as operações separar, recompor, ordenar, envolver) e lógicos e da implicação lógica entre intervalos.

Ordem, vizinhança e separação (elementos do grupo INRC)

Ator	Diálogo	Comentário
Experimentador	1.42 ficou melhor que 1.5 pra dois ficou uma diferença de 0.0164 você acha que é possível que fique mais próximo de dois ainda?	teste da noção de ordem
Nil[17]	é sim	Apresenta noção de ordem
Experimentador	como?	
Nil[17]	diminuindo o lado.	
Experimentador	de 1.42 eu vou jogar que valor agora?	
Nil[17]	1.415 (e obtém 2.002225)	
Experimentador	qual o que ficou mais próximo de dois?	
Nil[17]	1.415	
Experimentador	quanto deu a diferença dele pro lado anterior?	

Nil[17]	0.005	
Experimentador	qual seria o próximo número que você usaria?	Vizinhança e separação
Nil[17]	1.412	
Experimentador	por que você ta usando o 1.412?	
Nil[17]	por que é menor que o 1.415	Ordem e encaixe do novo número
Experimentador	por que ele é menor que o 1.415 e maior que o 1.411 é isso?	Ordem e encaixe (envolvimento)
Nil[17]	Sim	
Experimentador	então vamos testar com o 1.412 pra ver o que vai dar	
Nil[17]	obtém 1.993744 com diferença 0.006256	
Experimentador	qual é a menor diferença de todos?	
Nil[17]	ainda é a resultante do 1.415	
Experimentador	qual é o próximo número que você usaria (pra diminuir a diferença)?	
Nil[17]	1.414 (deu área 1.999396 com diferença 0.000604)	
Experimentador	qual é menor diferençadas 4 ?	
Nil[17]	essa ultima	

(Continuação)

Experimentador	1.415 fez ficar mais próximo de dois, qual seria o número que faria ficar mais próximo ainda de dois a área?	ordem e encaixe
Nil[17]	tem que diminuir, né? Acho que 1,411.	Ordem e encaixe

Experimentador	experimenta. (comenta os resultados)	
Nil[17]	deu 1,990921	
Experimentador	qual é que tá mais próximo de dois é esse ou o anterior(2.002225)	Ordem
Nil[17]	o de cima (2.002225)	
Experimentador	qual é a menor diferença?	
Nil[17]	o de cima	
Experimentador	dá pra achar uma diferença menor ainda?	
Nil[17]	Da	

Ordem e encaixe de números

Experimentador	É possível fazer essa diferença fincar menor ainda?	Ordem e encaixe de intervalos
Nil[17]	1.4142	
Experimentador	por que esse número você ta lembrando de alguma coisa?	
Nil[17]	ele é maior que 1.414	
Experimentador	vamos testar	
Nil[17]	obtém 1.99996164 (com diferença 0.00003836)	
Experimentador	é possível uma diferença menor ainda?	
Nil[17]	Sim	
Experimentador	qual seria o próximo número que você usaria?	
Nil[17]	1.41424	Ordem e encaixe
Experimentador	é possível fazer essa diferença igual a zero? Em algum momento ela vai ser zero ?	
Nil[17]	ela vai chegar bem próximo, talvez ela não se iguale, mas bem próximo ela vai chegar	

Experimentador	você acha que ela vai chegar a zero em algum momento ou você acha que ela nunca vai chegar a zero, mas que eu vou poder ficar me aproximando dela ?	testando a generalização da operação de ordenação
Nil[17]	acho que pode se aproximar	
Experimentador	esse processo em que eu vou me aproximar ele é finito ou ele é infinito, ou seja, em algum momento eu vou chegar na diferença zero ou eu continuar sempre e nunca vou chegar a zero. Esse processo ele é finito ou infinito ?	não tem certeza da generalização da operação de ordenação e não tem noção da irracionalidade da raiz de dois
Nil[17]	acho que você pode determinar algum espaço, se você chegar ao zero ele é finito , mas se você pode se aproximar mais do zero ele é infinito	não tem certeza sobre a infinitude do processo de aproximação, mas já domina as duas possibilidades
Experimentador	eu vou chegar a zero ou nunca vou chegar?	
Nil[17]	eu acho que da pra chegar	
Experimentador	você falou "se eu continuar eu vou ficar me aproximando ". VOCÊ acha que da pra controlar o quanto eu vou ficar próximo de zero esse valor, da pra controlar o quanto eu vou me aproximar de dois na área. Se eu te digo eu quero uma diferença de 10 a menos 6 (0.000001) eu vou conseguir o valor do lado que me dê essa diferença?	Testando noção da ordenação infinita ou do intervalo arbitrário
Nil[17]	Acho que dá	

Nil[17] obviamente possui a noção de ordem, mas não tem certeza da generalização da operação de ordenação, não tem noção da irracionalidade da raiz de dois, não tem certeza sobre a infinitude do processo de aproximação, mas admite a possibilidade do processo ser finito ou infinito e tem noção do intervalo de tamanho arbitrário.

Ordem, vizinhança e separação - Processo de Convergência dos valores do lado do quadrado de área 2

Experimentador	e o que aconteceu com a diferença entre os lados?	
Nil[17]	ta diminuindo	percebe a convergência dos valores dos lados
Experimentador	o que ta acontecendo com os lados	
Nil[17]	chegando mais próximo ele diminui, o lado	
Experimentador	quem ta chegando mais próximo?	
Nil[17]	o lado , quando lado chega mais próximo a área também vai chegar mais próximo .	percebe a relação variação dos lados, convergindo, convergência da diferença
Experimentador	quando a área chega mais próximo o lado também chega mais próximo?	
Nil[17]	Isso	
Experimentador	olha só pros lados o que ta acontecendo com eles	
Nil[17]	estão diminuindo	
Experimentador	estão diminuindo?	
Nil[17]	o lado ta aumentando, ta diminuindo a diferença entre eles	Percebe o processo de convergência dos lados

Encaixes (ordem e envolvimento) e contínuo numérico

Experimentador	da pra e achar um numero mais próximo que esse que você falou?(usa um desenho da reta representando intervalo numérico)é possível um número entre 1.41424 e	a princípio não percebe a possibilidade do encaixe mesmo vendo um desenho representando o

	1.414241?	intervalo
Nil[17]	não ...não	
Experimentador	é impossível?	
Nil[17]	é, por que depois dele já vem o outro	
Experimentador	quer analisar?(usa a figura do intervalo de novo)	
Nil[17]	Dá	toma consciência da possibilidade do intervalo entre os dois números
Experimentador	por que você conclui isso?	
Nil[17]	por que acrescentando mais zero entre o quatro e...	possibilidade de encaixes diversos
Experimentador	o desenho serviu pra te ajudar?	
Nil[17]	Sim	
Experimentador	o que o desenho te deu que você chegou a conclusão que da pra colocar mais um número?	
Nil[17]	por que ainda há um espaço entre os dois números	
Experimentador	foi por causa do espaço foi isso que te ajudou?	o desenho ajudou , pois a sua resposta correta sobre a possibilidade de fazer um novo encaixe só veio depois de ele olhar para o desenho
Nil[17]	não ...não, ajudou	
Experimentador	por que você chegou à conclusão que podia colocar mais zeros	
Nil[17]	daria pra ser 1.41424001 (conclui que o espaço na reta diminuiu)	
Experimentador	(usando o desenho da reta) ainda assim é possível colocar outro número entre 1.41424 e 1.41424001?	
Nil[17]	Sim	
Experimentador	qual seria o próximo número que você usaria?	
Nil[17]	1.41424000001	mais encaixes

		possíveis
Experimentador	eu sempre vou poder colocar um número entre dois números reais? Sempre eu vou ter um número mais próximo?	
Nil[17]	Sim	
Experimentador	esse processo é finito ou infinito?	
Nil[17]	Infinito	generalização do encaixe

A princípio o sujeito não percebe a possibilidade de encaixar um outro número entre 1.41424 e 1.414241 mesmo vendo um desenho representando o intervalo. Mas ao visualizar um desenho representando o intervalo (Figura 10) ele admite a possibilidade do intervalo entre os dois números e depois a possibilidade de fazer vários encaixes, como no trecho em que ele diz " *por que acrescentando mais zero entre o quatro e....*" e depois "por que ainda há um espaço entre os dois números". O desenho do intervalo, uma forma de intuição, ajudou , pois a sua resposta correta sobre a possibilidade de fazer um novo encaixe só veio depois de ele olhar para o desenho. O Experimentador testa a generalização do processo de encaixe com a pergunta " eu sempre vou poder colocar um número entre dois números reais? Sempre eu vou ter um número mais próximo?" e Nil[17] responde que sim. Finalmente quando ele é questionado se o processo é finito ou infinito ele responde que o processo é infinito, o que permite concluir que houve a generalização do processo de encaixe entre dois números reais.

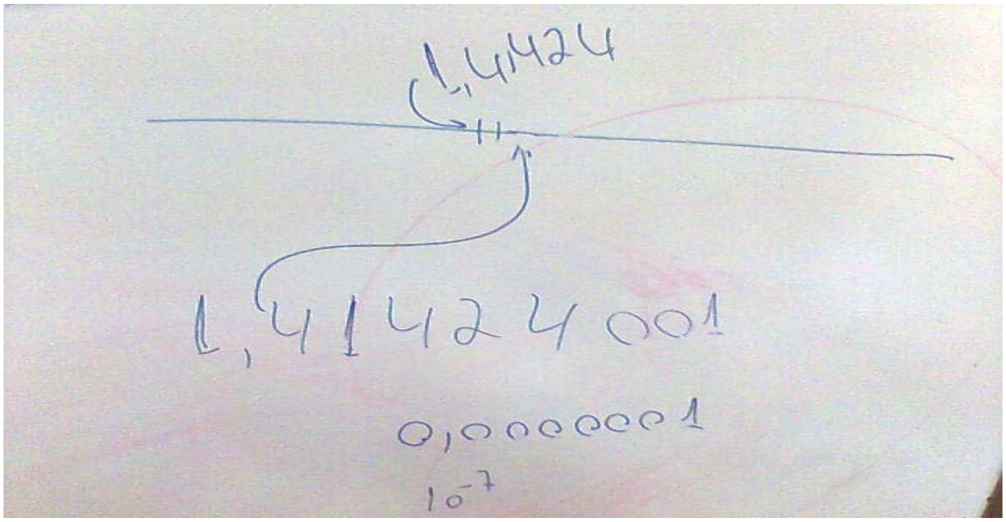

Figura 10 – Visualização da possibilidade de encaixe de números

Após verificação dos mecanismos infralógicos o Experimentador tentou testar a vidência de mecanismos e processo lógicos:

Domínio da operação Recíproca

Experimentador	você partiu do tamanho do lado e achou a diferença , se eu te apresentar um valor de diferença você pode fazer o caminho contrário, você chega no tamanho do lado?	
Nil[17]	acho que dá	noção da recíproca
Experimentador	então calcule com essa diferença 10 a menos 7	
Nil[17]	(tirou a raiz de 10 a menos 7,depois de questionado achou 1.414213555884, usa a lousa escrevendo fórmulas)	domínio, com auxílio do entrevistador, da recíproca
Experimentador	se eu te der um diferença menor você acha o lado?	ordem e encaixe
Nil[17]	Sim	
Experimentador	é possível que essa diferença seja zero?	
Nil[17]	ai não	

Experimentador	por quê?	
Nil[17]	não sei dizer	
Experimentador	sempre é possível de o lado chegar na diferença e da diferença chegar no lado?	
Nil[17]	sim, sempre	domínio da recíproca

Domínio da inversa e da correlativa

Experimentador	É possível que eu escolha valores do lado bem próximo e os valores da diferença não diminuam?	Inversa
Nil[17]	acho que é impossível	domínio da inversa
Experimentador	É possível que a diferença diminua e os valores do lado não fiquem próximos?	Correlativa
Nil[17]	acho que não , é impossível	domínio da correlativa

Nil[17]apresentou o domínio das operações lógicas da inversa, correlativa e da recíproca, na verificação desta última houve a necessidade da intervenção do Experimentador, logo depois ele já apresenta segurança em responder que sempre é possível partir do valor da diferença e obter o valor do lado.

Relação entre as variações dos lados e o valor das diferenças (Identidade).

Experimentador	e dos lados o que você pode concluir?	
Nil[17]	eles tão diminuindo	
Experimentador	quando diminui a diferença entre dois valores o que acontece?	
Nil[17]	fica bem próximo, o lado ta aumentando e a diferença ta diminuindo	Identidade - relação entre variação dos lados e a diferença
Experimentador	da pra concluir alguma coisa disso?	
Nil[17]	a área ta ficando mais próxima	

Experimentador	você acha que sempre vai ter uma relação entre os valores dos lados e a diferença?	
Nil[17]	nesse caso acho que sim	relação entre variação dos lados e a diferença
Experimentador	sempre vai ter relação ?tanto na ida quanto na volta quando os valores dos lados se aproximarem os valores das diferenças vão ficar menores e se os valores da diferença ficarem menores os valores dos lados vão ficar mais próximos?	relação entre variação dos lados e a diferença

Nil[17] evidenciou a noção da relação de implicação entre a convergência do valor dos lados do triângulo e o seu efeito na convergência dos valores da diferença da área em relação a dois.

7.9 Considerações sobre os experimentos

As entrevistas realizadas permitiram evidenciar as seguintes categorias:

- Relação entre as variações dos lados e o valor das diferenças
- Domínio de noções sobre as relações infralógicas da vizinhança, separação, ordem, envolvimento e sua participação na construção da noção do contínuo .
- Domínio das noções das operações infralógicas do Grupo INRC (identidade, reciprocidade, inversão e correlatividade).
- Encaixes de números (ordem e envolvimento) que se relacionam com as noções do contínuo numérico
- Processo de convergência dos valores do lado do quadrado de área 2 e dos valores da diferença entre área calculada do quadrado e a área 2.

- Pensamento reversível (partindo valores do lado do quadrado calcular a diferença entre 2 e a área calculada e vice-versa).
- Generalização do processo de encaixe e ordem dos valores do lado do quadrado e dos valores da diferença entre a área obtida e o valor 2.
- Noção da racionalidade da raiz quadrada de dois (a convicção do sujeito quanto à possibilidade de expressão do número através de uma lista decimal finita, sem o envolvimento de prova matemática).

Considerando a definição de limite, os mecanismos cognitivos envolvidos e o desempenho dos sujeitos pode-se dividir o experimento em 4 partes:

- Na primeira é testada a capacidade do indivíduo de realizar partições e adições, basicamente adições, pois as figuras geométricas são dadas e ele tem como principal atividade montar figuras geométricas, dada a restrição de ter uma área determinada (dois). Mas existem partições quando o sujeito faz tentativas sem sucesso e tem que desagrupar a figura obtida para fazer novas tentativas. Esta não é a fase principal do experimento. Entretanto sem ela o sujeito não se vê diante do desequilíbrio principal que é achar um número que elevado ao quadrado permita obter o a área do quadrado de área 2.

- Na segunda parte, após o sujeito verificar que o lado elevado ao quadrado não permite obter o valor dois, ele se confronta com o questionamento de por que não deu dois. Em seguida ele é desafiado a obter uma diferença, entre o valor do lado ao quadrado e dois, menor que aquela obtida pela primeira vez. Sucessivamente o sujeito é desafiado a achar diferenças menores. Pergunta-se também o que deve ser feito para diminuir essa diferença. Nesta parte verificam-se as noções de vizinhança, separação, ordem e envolvimento, contínuo e finalmente se é possível achar uma diferença arbitrária, o que implica na generalização do processo de diminuição da diferença e consequentemente da generalização da relação de ordem. Verifica-se ainda na noção do contínuo numérico o aspecto da generalização do encaixe de números reais.

- Na terceira parte verifica-se o pensamento operativo do sujeito através da pergunta: "Se tenho o lado você acha a diferença. Caso você tenha um valor de diferença você poderia achar o lado?". Este pensamento operativo esta relacionado com a definição formal de limite (e com a operação lógica da recíproca), pois nela temos a correspondência sempre existente, no caso de existir o limite, entre duas vizinhanças que são denominadas de épsilon e delta.

- Na quarta parte verificam-se as operações lógicas que o sujeito realiza a partir da proposição escolhida como Identidade e atingir ou decidir sobre a falsidade/verdade das proposições possíveis de ser geradas pelas operações lógicas da Inversão, Reciprocidade e Correlatividade.

A avaliação do desempenho dos sujeitos durante a realização do experimento pode ser feita da seguinte maneira: se ele evidencia domínio das operações lógicas e infralógicas e sabe decidir sobre a verdade/falsidade verdade das proposições possíveis de ser geradas pelas operações lógicas da Inversão, Reciprocidade e Correlatividade pode-se dizer que ele está no nível IV. Se ele tem domínio do pensamento operativo, mas ainda não sabe afirmar sobre verdade/falsidade sobre as proposições lógicas e também tem domínio sobre as relações infralógicas pode-se dizer que o sujeito está no nível III. Quando o sujeito tem domínio da generalização do encaixe e da ordem pode-se dizer que ele está no nível II. Quando sujeito apenas consegue construir o quadrado de área 2, mas não consegue atingir a generalização do encaixe e da ordem ele está no nível I.

As relações de vizinhança e separação não foram exploradas de forma explícita durante o experimento. Isso se deve ao fato de que a relação de envolvimento é dada perceptivamente tão logo sejam organizadas as vizinhanças, as separações e os diversos tipos de ordem (vide item 6.2.2 – Relação entre operações infralógicas e operações lógicas) estas duas relações estão entre as relações mais primitivas, logo a vizinhança e separação já estão sendo verificadas quando verifica-se as relações de ordem e também quando se verifica o encaixe entre dois números reais certamente é necessário que o sujeito já tenha a vizinhança e a separação.

Foram escolhidas quatro entrevistas para serem apresentadas no presente trabalho escrito, o motivo da escolha é que as entrevistas iniciais, devido à fase de apropriação da teoria e do Método Clínico, ainda não possuem alguns dos elementos teóricos que o autor tentava evidenciar, sendo que o processo de investigação sofreu um influência significativa das reflexões sobre o conceito de contínuo numérico o que se refletiu nas últimas entrevistas realizadas. Como conseqüência o autor privilegiou estas entrevistas consideradas como mais representativas entre todas realizadas:

Entrevista 1-Fran[15] aluno do segundo ano nível médio com 15 anos de idade.

A composição das figuras geométricas é facilmente executada por Fran[15]. Logo ele constrói o quadrado de área 2. Ele evidencia a noção de ordem quando questionado se é possível achar uma diferença (entre o valor da área do quadrado, que é dois, e área calculada) menor ainda. Evidencia pensamento reversível/operativo (recíproca) com domínio completo do pensamento reversível, quer permite partir dos valores das diferenças e achar os valores dos lados respectivos. Evidencia que desenvolveu a generalização do processo de ordenação dos intervalos quando afirma que é sempre possível diminuir a diferença. Ao dizer que nunca o valor do lado vai ser exatamente raiz de dois evidencia que possui noção da irracionalidade da raiz quadrada de dois. Fran[15] mostra que possui noções de seriação, ordem, envolvimento e encaixe ao demonstrar capacidade de saber a localização aproximada da raiz de dois em um eixo cartesiano e saber onde ficariam outros números em relação a esse valor.

Fran [15] mostrou segurança em todas as operações lógicas do grupo INRC, ele já tinha demonstrado segurança na recíproca quando questionado anteriormente sobre o pensamento reversível e na inversa ele evidenciou a mesma segurança,conforme pode ser evidenciado nos trechos de entrevistas. Na correlativa Fran[15] mostra segurança com relação ao comportamento do valor da diferença quando questionado sobre o que aconteceria se os valores do lado não convergissem ele responde: “vai sempre aumentar a diferença, o valor fica mais longe da raiz de dois e a diferença vai sempre aumentar”. **Fran [15] poderia ser classificado no nível IV**, pois ele conseguiu construir sem intervenção do experimentado o quadrado de área 2, apresentou domínio das operações lógicas e infralógicas. Evidenciou ter a noção de ordem e encaixe, embora não se tenha verificado adequadamente a generalização destas duas relações, pois no momento de sua entrevistas ainda não havia sido feita a última reflexão sobre o conceito de limite quanto as questões sobre generalização de encaixe e ordem. Quanto às operações do grupo INRC ele evidenciou ter a noção de todas elas.

Entrevista 2 - Ric [15] primeiro ano do nível médio com 15 anos de idade

Mesmo realizando com segurança as operações de composição e recomposição das figuras geométricas Ric[15] só consegue construir o quadrado de área 2 com a ajuda do Experimentador. Quando perguntado sobre qual o tamanho do lado que poderá gerar o quadrado de área 2, ele responde prontamente " Raiz quadrada de dois" demonstrando que já tem noção da raiz quadrada de dois, então o experimentador procura testar as noções das relações infralógicas e lógicas. Ric[15] evidencia possuir noção do processo de convergência e de ordenação, pois quando perguntado como fazer para o valor da área ficar mais próximo de dois ele sugere aumentos de 0.04, mas na forma de "chutes". Quando questionado sobre diferenças menores ainda ele responde prontamente e confirma a noção de ordem. No desenvolvimento do experimento ele evidencia que percebe o comportamento dos valores da área calculada e apresenta noção do encaixe, embora **não apresente segurança na generalização do encaixe/envolvimento**, pois ele diz que não em certeza de que o processo de colocar números entre dois números iniciais dados é infinito. A resposta de Ric[17] sobre a possibilidade de achar a raiz quadrada de dois evidencia que ele tem noção sobre a irracionalidade deste número e de que a diferença entre a área calculada e dois nunca vai ser zero. Ric[15] evidencia uma relação entre os valores dos lados e os valores das diferenças. Isso pode ser percebido nas respostas envolvendo as operações de recíproca, inversa e correlativa. Uma forma de evidenciar o pensamento reversível está presente nas perguntas sobre a recíproca. Quando perguntado se é possível partir da diferença e chegar ao valor do lado ele responde que vai ser sempre possível fazer isso, entretanto ele diz que essa diferença vai ser zero, contradizendo o que já afirmara sobre a diferença entre a área calculada e dois. Durante o experimento consegue fazer o cálculo certo. Depois quando questionado se o valor dessa diferença poderá ser zero ele responde que sim, mas quando questionado sobre o tamanho do lado que vai dar diferença zero ele recua e diz que é impossível tal diferença. Pois sabe que não existe número racional para exprimir tal raiz quadrada. Ric[15] evidencia uma relação entre os valores dos lados e os valores das diferenças. Isso pode ser percebido nas respostas envolvendo as operações de recíproca, inversa e correlativa, nas quais evidenciou ter as três noções. O pensamento reversível ficou evidente nas perguntas sobre a recíproca.

Ric[15] poderia avaliado como tendo evidenciando domínio das operações e relações presentes nas partes três e quatro do experimento, mas teve desempenho fraco nas partes 1 e 2. Quando não consegue fazer a generalização do encaixe de números mostra que possui deficiências em sua conceituação de número real e do contínuo, o que o impede de uma conceituação de limite. Ele poderia se avaliado como tendo nível II em transição para o três. Talvez fosse necessário fazer o experimento de novo com ele.

Entrevista 3 - Cas[17] terceiro ano do nível médio com 17 anos de idade

Cas[17] precisou da intervenção do experimentador para construir o quadrado de área 2. Evidenciou a noção de ordem, entretanto n**ão atingiu a generalização do processo de ordenação**. Ela não evidenciou noção da irracionalidade da raiz de dois, mas evidencia o pensamento reversível/operatório que na verdade é operação recíproca do grupo INRC. Não tem consciência plena do processo para achar o valor do lado do quadrado de área 2. Após realizar contas para achar a diferença toma consciência de que o processo é infinito. Toma consciência de que o processo de mudança do tamanho do lado é infinito. **Tem dificuldade na noção do encaixe, achando, inicialmente, que o encaixe é impossível. Então o Experimentador compara o encaixe com a diferença menor sempre possível, mesmo assim ela não consegue atingir a noção do encaixe**, embora afirme "*tem hora que dá pra pensar que dá. Quando eu vou tentar achar o número que dá pra botar só vem números após esse um aqui, no caso o dois ou outro um depois desse número aqui sempre seria depois disso aqui, não aqui.*". **Quando interrogada sobre a possibilidade do encaixe ela afirma que sabe que o encaixe é possível, mas não sabe fazer.**. Quando o Experimentador tenta testar a noção de convergência de valores Cas[17] a **princípio não evidencia a noção da convergência dos valores do lado do quadrado de área 2**. O Experimentador não fez a pergunta de forma adequada, pois da forma que foi executada poderia induzir ao erro ou a construção de uma relação que o sujeito não faria sem a pergunta. Cas [17] evidenciou ter a noção da inversa e da correlativa e talvez tenha se confundido na resposta sobre a recíproca, pois esta foi feita na forma de negação o que pode ter gerado confusão, talvez a pergunta devesse ser feita de outra forma. Cas[17] poderia ser avaliada, no máximo, como estando no nível II.

Entrevista 4 – Nil[17] aluno do segundo ano do ensino médio com 17 anos de idade

Com alguma intervenção do autor Nil[17] consegue montar a figura do quadrado de área 2. Como primeiro valor para o lado quadrado ele faz a medida e propõe 1,5, mas diante do resultado do cálculo da área com valor 2,25 e depois de questionado sobre esse valor Nil[17] refaz a medida do lado do triângulo e chega a um valor mais próximo. Nil[17] obviamente possui a noção de ordem, mas não **tem certeza da generalização da operação de ordenação** e parece não ter noção da irracionalidade da raiz de dois, **não tem certeza sobre a infinitude do processo de aproximação, mas admite a possibilidade do processo ser finito ou infinito e tem noção do intervalo de tamanho arbitrário**. A princípio o sujeito não percebe a possibilidade de encaixar um outro número entre 1.41424 e 1.414241 mesmo vendo um desenho representando o intervalo. Mas ao visualizar um desenho representando o intervalo ele admite a possibilidade do intervalo entre os dois números e depois a possibilidade de fazer vários encaixes, como no trecho em que ele diz *“ por que acrescentando mais zero entre o quatro e....“* e depois “por que ainda há um espaço entre os dois números”. O desenho do intervalo, uma forma de intuição, ajudou, pois a sua resposta correta sobre a possibilidade de fazer um novo encaixe só veio depois de ele olhar para o desenho. O Experimentador testa a generalização do processo de encaixe com a pergunta “ eu sempre vou poder colocar um número entre dois números reais? Sempre eu vou ter um número mais próximo?” e Nil[17] responde que sim. Finalmente quando ele é questionado se o processo é finito ou infinito ele responde que o processo é infinito, o que permite concluir que **houve a generalização do processo de encaixe entre dois números reais**. Após verificação dos mecanismos infralógicos o Experimentador tentou testar a evidência de mecanismos e processo lógicos. Nil[17]apresentou o domínio das operações lógicas da inversa, correlativa e da recíproca, na verificação desta última houve a necessidade da intervenção do experimentador, logo depois ele já apresenta segurança em responder que sempre é possível partir do valor da diferença e obter o valor do lado. Relação entre as variações dos lados e o valor das diferenças

O sujeito evidenciou a noção da relação de implicação entre a convergência do valor dos lados do quadrado e o seu efeito na convergência dos valores da diferença da área em relação a dois. Nil[17] poderia ser avaliado como estando na transição entre o nível III e IV.

7.10 Considerações sobre conceito, conceito de limite e pensamento formal

Conforme o estudo sobre caracterização do pensamento formal, uma de suas características mais forte é a possibilidade de reversibilidade dentro da rede, reversibilidade possibilitada pelas operações lógicas presentes no grupo INRC. No conceito uma das características mais fortes também é a reversibilidade, que é a expressão do equilíbrio permanente alcançado entre uma acomodação generalizada e uma assimilação que se tornou não-deformante. A reversibilidade é a possibilidade de encontrar um estado anterior dos dados, não se opondo ao estado atual (assimilação); e um estado tão real ou realizável quanto esse estado atual (acomodação).

A análise dos mecanismos cognitivos do conceito de limite passa pela verificação da reversibilidade do pensamento quando o sujeito é confrontado com este conceito, que é apresentado na forma de uma implicação lógica. Como esta tem negação, correlativa e recíproca a análise deste conceito matemático passa pela verificação da existência destas operações lógicas durante o experimento. Outros elementos importantes na análise dos mecanismos cognitivos do sujeito são as relações infralógicas, de natureza topológica (vizinhança, separação, ordem, envolvimento e contínuo), pois o conceito de limite possui estas estruturas como base e os experimentos realizados mostraram que estas estruturas podem ser evidenciadas com a utilização de um objeto digital interativo. Durante o experimento foi possível verificar as operações lógicas atuando sobre elementos de natureza infralógica, pois a identidade, a inversa, a recíproca e a correlativa foram construídas sobre sentenças que envolviam intervalos, vizinhança, separação, ordem, envolvimento e contínuo.

Pode-se concluir que é a reversibilidade o principal elemento comum entre conceito e pensamento formal e esta relação pode ser visualizada na figura seguinte, na qual está desenhado o sistema conceitual relativo a conceito e pensamento formal.

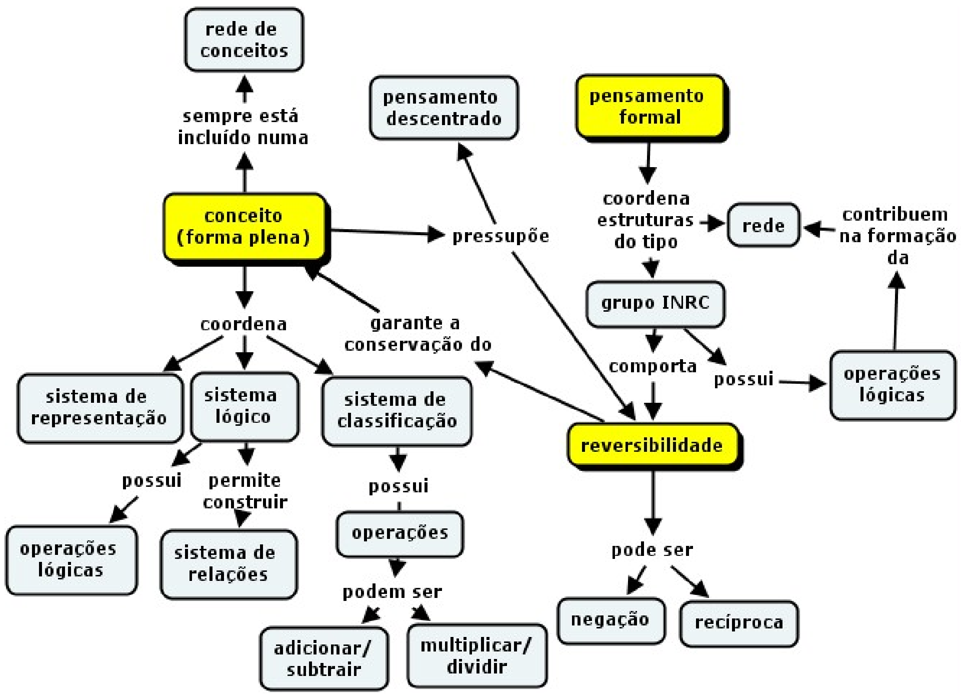

Figura 11 – Relacionamento entre conceito e pensamento formal

7.11 Conclusões parciais

Ao final do estudo realizado neste capítulo conclui-se que:

- Os mecanismos cognitivos do conceito de limite podem ser evidenciados através do uso de objetos digitais interativos, entretanto para que tal evidência seja possível é necessária uma teoria epistemológica que possibilite este processo de investigação, tal teoria é a Epistemologia Genética de Jean Piaget, que modela o pensamento humano utilizando estruturas matemáticas do tipo conjuntos, agrupamentos, grupos e redes. Além destes elementos de natureza lógica a teoria de Piaget permite evidenciar os elementos de natureza espacial.

- Outra conclusão é a de que a reversibilidade do pensamento é um dos pontos mais importantes na construção dos conceitos. A reversibilidade presente no conceito do contínuo que é a síntese de vizinhança e separação, ordem e envolvimento, ela está presente também em estruturas do tipo agrupamento, grupo e rede. O desenvolvimento cognitivo passa pela construção desta reversibilidade por parte do sujeito e é o pleno domínio desta capacidade de operar, quando o sujeito também é capaz de fazer composições entre operações (que comportam a reversibilidade) que mostra se o sujeito construiu o pensamento formal.
- Por último pode-se concluir que o conceito de limite coordena operações de natureza espacial (topológicas) e lógica (grupo INRC e relações lógicas envolvidas no conceito de número inteiro e real). Estas operações e as relações envolvidas já foram explicadas anteriormente.

8 – Conclusões Finais

Ao final do processo de estudo da história do conceito de limite, de uma teoria epistemológica que permitisse avaliar os mecanismos cognitivos envolvidos com este conceito, da construção de objetos digitais interativos que consideraram estes dois aspectos anteriores e finalmente da realização de experimentos envolvendo alunos utilizando tais objetos digitais, o autor deste trabalho chegou às seguintes conclusões:

É possível identificar os mecanismos cognitivos envolvidos com o conceito de limite em objetos digitais interativos, dentre eles as relações de vizinhança, separação, ordem, envolvimento e o contínuo. Há ainda as operações de separação, recomposição, ordenação encaixe e envolvimento. Estas relações e operações são de natureza infralógica e topológica.

Existem operações lógicas envolvidas no conceito de número inteiro que serve de base para construir os nmeros racionais e também as operações lógicas envolvidas na construção do grupo INRC relacionado com a implicação lógica que define limite.

Depois de identificados os mecanismos cognitivos deve-se pensar no que pode ser feito de forma a propor intervenções em sala de aula. Como sugestões o autor propõe:

1 Utilizar objetos digitais que permitam a interação do sujeito com um problema relacionado ao conceito de limite, notadamente deve haver momentos em que o sujeito se envolva com problemas relativos a ordem e a encaixes de números reais. Dois exemplos foram apresentados neste trabalho. Um envolvendo a raiz quadrada de dois e o outro relacionado à soma dos termos de uma progressão geométrica infinita. Somente depois de tratar com problema que envolva o conceito é que seria apresentada a definição formal do conceito. Para utilizar tais objetos é necessário um estudo anterior para definir as perguntas que devem ser feitas e os desequilíbrios propostos aos usuários dos objetos.

2 Utilizar mapas conceituais para tentar identificar o sistema conceitual que o aluno possui de forma a identificar dificuldades de estruturação do conhecimento. Como exemplo do uso de mapas e a evolução conceitual o autor deste trabalho apresenta as figuras seguintes que mostram a sua evolução conceitual ao longo deste projeto.

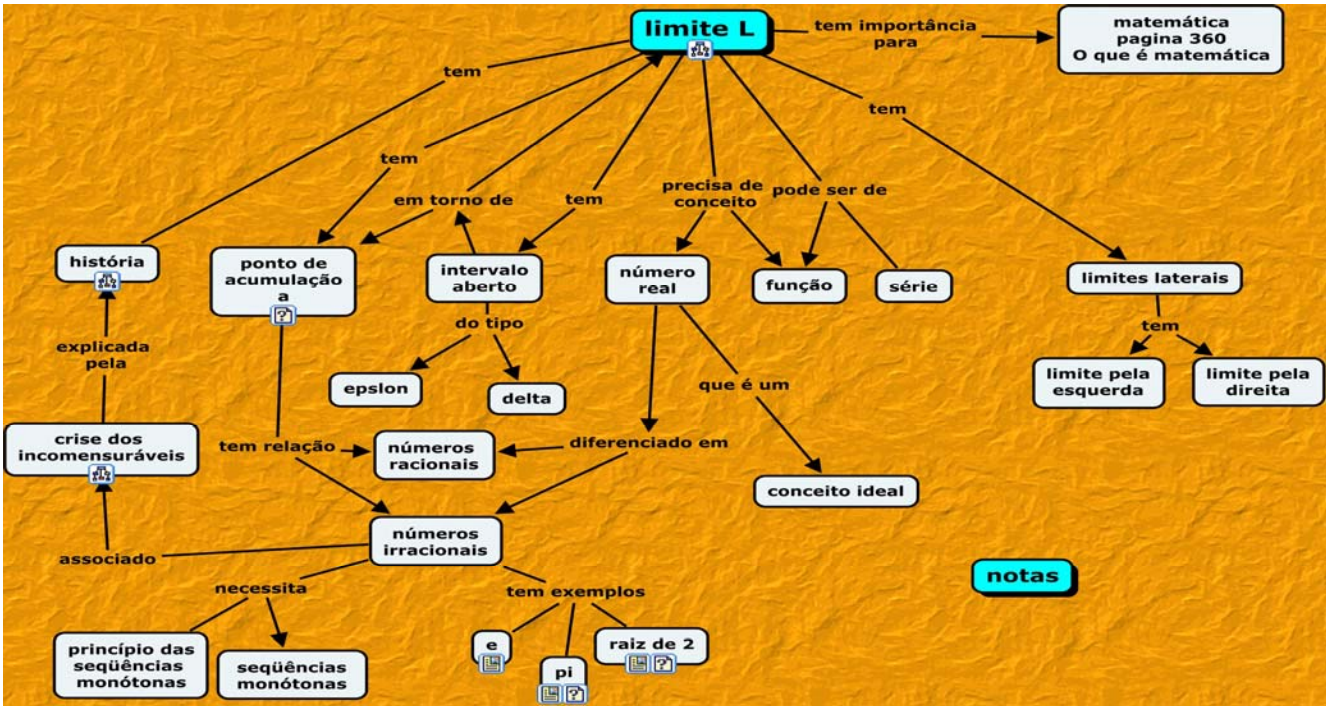

Figura 12– Sistema conceitual de limite (1)

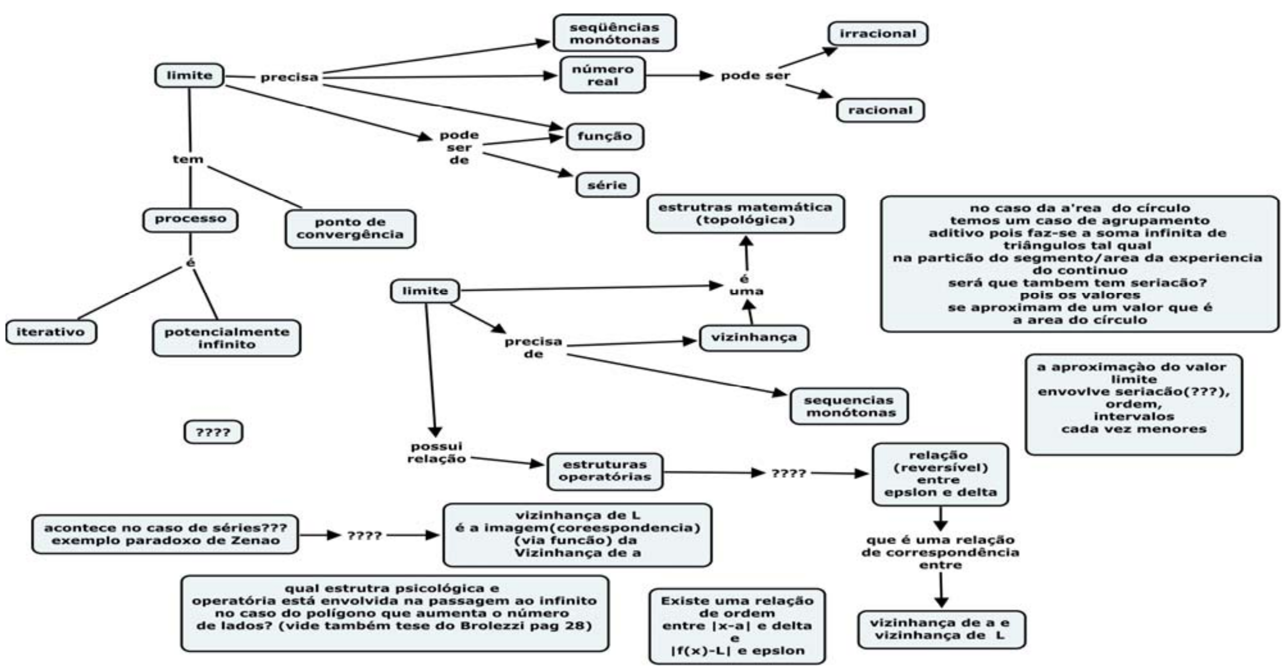

Figura 13 – Sistema conceitual de limite (2)

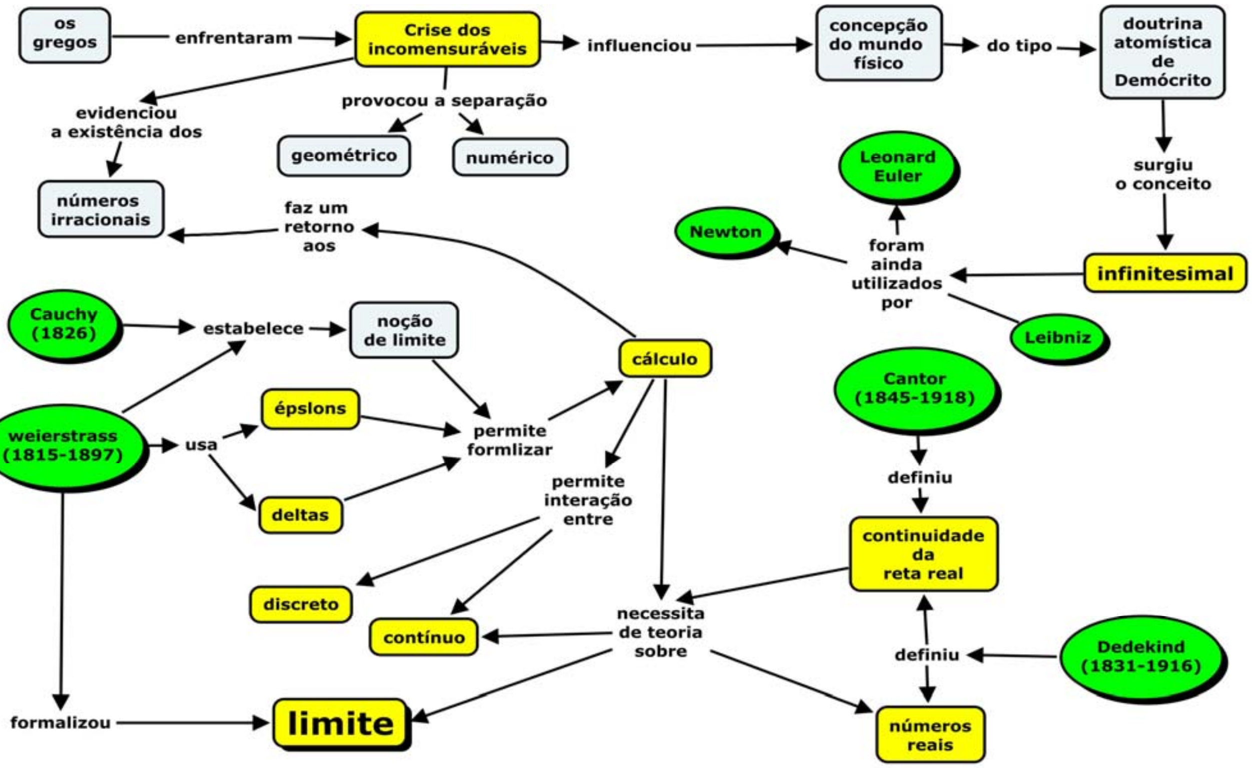

Figura 14 – Sistema conceitual de limite (3)

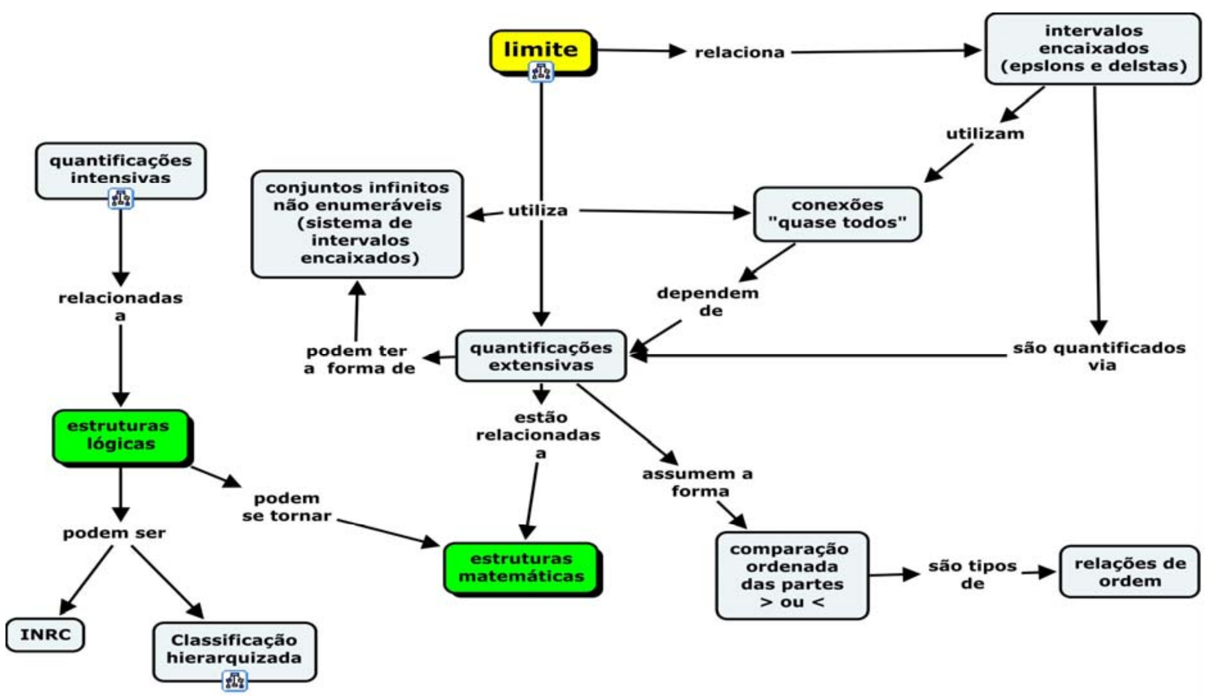

Figura 15 – Sistema conceitual de limite (4)

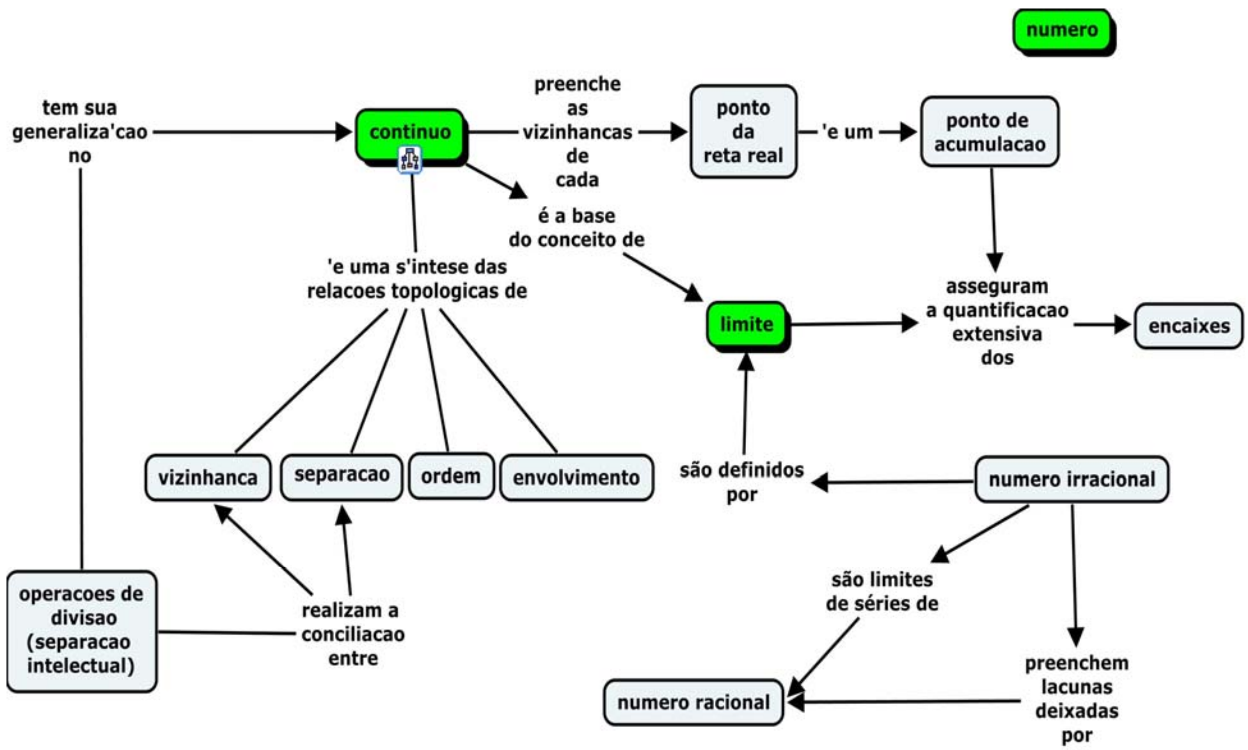

Figura 16 – Sistema conceitual de limite (5)

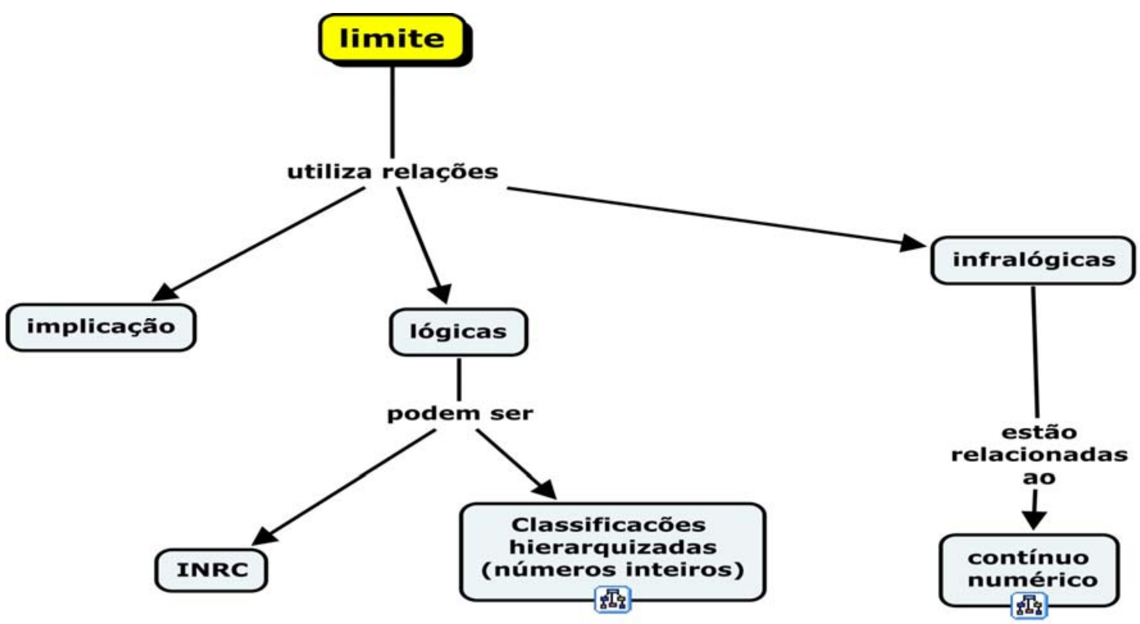

Figura 17 – Sistema conceitual de limite (6)

A figura 12 mostra uma “visão” que poderia ser chamada de senso comum do autor sobre o conceito, o sistema de conceitos estava baseado em suas lembranças dos cursos de cálculo e leituras de livros da área. A figura 13 apresenta um conjunto de conceitos misturados com questionamentos construídos somente sobre definições matemáticas sem considerar ainda os mecanismos cognitivos. A figura 14 mostra, de forma resumida o levantamento histórico do conceito, o que já aponta na direção da importância do entendimento da natureza da definição de número real para entender o conceito de limite. As figuras 15,16 e 17 já apresentam estruturas conceituais melhor organizadas e refletindo um estudo aprofundado sobre o conceito de limite que contemplam a natureza do conceito com suas relações lógicas e infralógicas.

Para a realização deste trabalho foram criados dois objetos digitais com a finalidade de propor situações em que os sujeitos se deparassem com desequilíbrios envolvendo o conceito de limite. A importância dos objetos digitais se deve a possibilidade de criar: objetos com diversos níveis de interação, capazes de realizar o registro dos passos executados pelo sujeito (o que permite avaliar aspectos do seu processo de aprendizagem), passíveis de serem disponibilizados em rede, passíveis de serem reconfigurados e com a possibilidade de incorporar agentes inteligentes.

Como resultado da pesquisa realizada neste projeto o autor apresenta algumas propostas que podem servir de diretrizes de uma metodologia para desenvolver objetos digitais interativos para serem utilizados na aprendizagem de conceitos:

1. Verificar o sistema conceitual envolvido com o conceito em questão utilizando mapas conceituais.
2. Fazer um estudo sobre a natureza do conceito: se é na forma de proposição lógica ou se é de natureza infralógica, a natureza das relações envolvidas no sistema conceitual.
3. Pesquisar a história do conceito e levantar os sistemas conceituais desde sua origem e as variações que tal sistema sofre ao longo do tempo.
4. Considerar a evolução histórica do conceito, o sistema conceitual no qual ele está inserido e os desequilíbrios epistemológicos ocorridos no processo histórico. Estes desequilíbrios são importantes para criar os objetos digitais interativos.

5. Sempre tomar como ponto de partida um problema para desenvolver um objeto digital interativo.
6. Considerar a possibilidade de fazer o registro das atividades do sujeito quando da interação com o objeto.
7. Considerar a possibilidade integrar um agente inteligente para interagir com o usuário do objeto digital.

Como seqüência da pesquisa realizada no presente trabalho, o autor propõe que sejam desenvolvidos trabalhos no sentido de entender os mecanismos cognitivos relacionados aos conceitos de derivada e integral. Considerando que eles dependem do conceito de limite seria apropriado desenvolver mais objetos digitais voltados para o conceito de limite e novos objetos voltados para derivada e integral. O autor teve como meta contribuir na formação de uma base teórica para estas futuras pesquisas. Uma ilustração de proposta de objeto digital interativo voltado para o ensino de derivada é apresentada na figura seguinte. Trata-se de uma atividade desenvolvida no programa Cabri-Géomètre –II, que permite interagir com uma reta secante a uma curva de forma que a reta, dependendo da manipulação que o usuário fizer, pode sumir. Neste momento pode-se questionar o sujeito a explicar a razão do desaparecimento. Na resposta a tal pergunta o sujeito se defronta com os conceitos de reta secante, tangente e consequentemente com derivada.

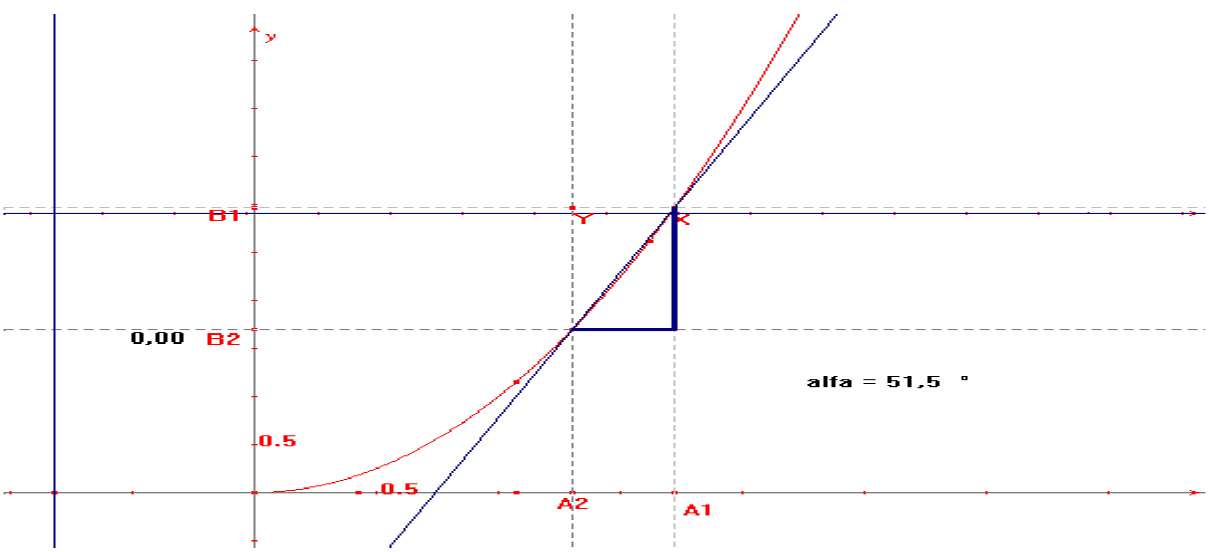

Figura 18 – Objeto digital interativo utilizando o conceito de derivada

O estudo realizado nesta pesquisa permitiu concluir que o conceito de limite engloba muito mais que a definição. Ele envolve mecanismos cognitivos, os quais no exercitamos desde criança tais como ordenar seriar encaixar, separar, recompor e realizar envolvimentos, ou seja, relações topológicas estudadas por Piaget junto a crianças. Para atingir tais mecanismos na formalização avançada é necessário construir o conceito de contínuo numérico, que necessita destas relações, mas realizadas de forma infinita. Existe ainda a necessidade de generalização destas relações e das operações envolvidas. Atuando sobre este sistema de relações e operações infralógicas estão as operações lógicas do INRC que também agem sobre a implicação lógica que é a definição formal de limite. Qualquer intervenção no processo de ensino aprendizagem deste conceito deve considerar tais relações infralógicas e lógicas.

9 - Bibliografia

ABBAGNANO, Nicola. Dicionário de Filosofia, Editora Mestre Jou, São Paulo, 1970.

ÁVILA, Geraldo Severo de Souza. Introdução à Análise Matemática. Editora Edgard Blücher Ltda. Sao Paulo. 1993.

BACHELARD, G. (1938) (reprinted 1983), La Formation de l'espirit scinetifique. I Vinn, Paris.

BATTRO, Antonio M., O pensamento de Jean Piaget. Tradução de Lino de Macedo. Editora Forense Universitária Ltda. Rio e Janeiro. 1969.

BOYER, Carl B., História da Matemática, Tradução de Elza F. Gomide, Editora Edgard Blücher Ltda. São Paulo. 2001.

BOYER, Carl B. The History of the Calculus and its Conceptual Development. Dover Publications, Inc. New York, USA, 1959.

BROLEZZI, Antonio Carlos. A Tensão entre o Discreto e o Contínuo na História da Matemática e no Ensino de Matemática. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo. Faculdade de Educação. 1996.

CARRAHER, Terezinha Nunes. O Método Clínico: Usando os Exames de Piaget. – 4ª. Edição. Editora Cortez. São Paulo. 1994.

COURANT, Richard e Robbins, Herbert. O que é Matemática ? Tradução de Adalberto da Silva Brito. Editora Ciência Moderna Ltda. Rio de Janeiro. 2000.

DAVIS, Philip J., Hersh, Reuben. A Experiência Matemática; tradução de João Bosco Pitombeiras. – Rio de Janeiro. Editora F. Alves. 1986.

DENZIN, Norman K., Lincoln, Yvonna S., O Planejamento da Pesquisa Qualitativa Teorias e Abordagens. Tradução Sandra Regina Netz. Artmed. Porto Alegre 2006.

ENZENSBERGER, Hans Magnus. O Diabo dos Números; tradução Sérgio Tellaroli. Companhia das Letras. São Paulo. 1997.

FAGUNDES, Léa da Cruz. Psicogênese das Condutas Cognitivas da Criança em Interação com o Mundo do Computador. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo. 1986. São Paulo.

GOLDBARG, Marco Cesar. Luna, Henrique Pacca L. Otimização Combinatória e Programação Linear, 2ª. Edição. Editora Campus, pág.485.

MAOR, Eli. E: a História de um número; tradução de Jorge Calife. Record. Rio de Janeiro. 2003.

LEITHOLD, Louis. O Cálculo com Geometria Analítica. Tradução de Cyro de Carvalho Patarra. Terceira Edição. Editora Harbra Ltda. São Paulo. 1994.

LIMA, Elon Lages. Análise Real. Volume 1(6ª. Edição). Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada. Rio de Janeiro , 2002.

LIMA, Isolda Giani de. A equilibração dos processos Cognitivos na aprendizagem de matemática no Ambiente Mecam. Tese de doutorado. Universidade Federal do Rio Grande do Sul.Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação. Porto Alegre. 2004.

LTSC, Learning Technology Standards Committee, pág.ina da internet disponível em http://ltsc.ieee.org/wg12/index.html em 20/03/2006**.**

MENEZES, Crediné S.de. LIRA, Antonio da F., FERRETTI, Cláudio, et al. ODAI - Objetos Digitais para Aprendizagem Interacionista.SBIE2006 – Simpósio Brasileiro de Informática na Educação.

MONTANGERO, Jacques. Maurice-Naville, Danielle. Tradução de Fernando Becker e Tânia Beatriz Iwaszko. Editora Artmed. Porto Alegre. 1998.

MOREIRA, Marco A.; Buchweitz, Bernardo. Novas Estratégias de Ensino e Aprendizagem – os Mapas Conceituais e o Vê Epistemológico. Plátano Edições Técnicas: Lisboa, 1997.

PAIVA, Manoel Rodrigues. Matemática, Volume 3. Primeira Edição.Editora Moderna. São Paulo. 1995

PIAGET, Jean. Lógica e Conhecimento Científico. Tradução de Souza dias e FilipeAraújo. Edições Gallimard. Portugal, 1967.

PIAGET, Jean. A formação do Símbolo na Criança; trad. Álvaro Cabral e Christiano Monteiro Oiticica. Rio de Janeiro. Zahar Editores, 1978.

PIAGET, Jean. Inhelder, Bärbel. A representação do espaço na criança: trad. De Bernardina Machado de Albuquerque. – Porto Alegre : Artes Médicas, 1993.

PIAGET, Jean. Szeminska, Alina. A Gênese do Número na Criança. Tradução de Crhristiano Monteiro Oiticica. Zahar Editores. Rio de Janeiro. 1975.

PIAGET, Jean. A equilibração das Estruturas Cognitivas. Tradução de Marion Merlone dos Santos Penna. Zahar Editores. Rio de Janeiro. 1976.

PIAGET, Jean. Ensaio de Lógica Operatória. Tradução de Maria Ângela Vinagre de Almeida. Editora Globo, Porto Alegre, 1976/2.

RIVED - (Rede Interativa virtual de Educação da Secretaria de Educação a Distância – Ministério da Educação e Cultura) disponível no endereço eletrônico http://rived.proinfo.mec.gov.br/projeto.php em 14/03/2007**.**

SAUER, Laurete Zanol Sauer. O Diálogo Matemático e o Processo de Tomada de Consciência da Aprendizagem em Ambientes Telemáticos. Tese de Doutorado. Universidade Federal do Rio Grande do Sul.Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação. Porto Alegre. 2004.

SÁ FILHO, Clovis S. e MACHADO, Elian de Castro – “O computador como agente transformador da Educação e o papel dos objeto de aprendizagem”. In http://www.universiabrasil.net/materia/materia.jsp?id=5939, obtido em 10/05/2006.

SIERPINSKA, A. Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. In: Recherches en Didactique des Mathématiques, 6, 1985, p. 5-68.

TALL, David(Ed.), Advanced Mathematical Thinking. Kluwers Academic Publishers. Netherlands. 1991.

TALL, David (with Eddie Gray), Duality, Ambiguity & Flexibility in Successful Mathematical Thinking, PME 15, Assisi, 2 72-79. 1991

TALL, D. e VINNER, S., Imagem conceito and definição conceito in mathematics with particular reference to limits and continuity. In: *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 1981, p. 151-169.

TALL, David Li, Lan, Constructing Different Concept Images of Sequences and Limits by Programming, *Proceedings of PME 17*, Japan, 2, 41-48. **1993**

WILEY, D. A. (2000). Connecting learning objects to instructional design theory: A definition, a metaphor, and a taxonomy. In D. A. Wiley (Ed.), *The Instructional Use of Learning Objects: Online Version*. Retrieved March 20, 2004, from *http://reusability.org/read/chapters/wiley.doc.*

Anexos

Anexo A – Gênese e evolução do Conceito para Piaget

A gênese e evolução do conceito é apresentada no texto a seguir, que foi construído com base na leitura do capítulo 8 de Piaget (1978).

Na tentativa de evidenciar o processo de construção do conceito serão abordados inicialmente os esquemas representativos:

1 Os primeiros esboços de conceitos: os esquemas verbais (entre18 meses a 2 anos).

A formação da representação necessária aos conceitos começa a partir dos **esquemas verbais**, eles são intermediários entre os esquemas sensório-motores e os esquemas conceituais. Os primeiros esquemas verbais ("tch, tch" para o trem que aparece e desaparece, para automóveis, etc.; "au au" para um cavalo, para automóveis,etc.) são os primeiros **signos verbais** que servem de expressão à criança, estes são intermediários entre significantes simbólicos ou imitativos e verdadeiros signos. A reunião dos objetos sob uma mesma denominação se prende em parte a uma **assimilação direta** entre eles (objetos) fundamentada em qualidades objetivas com uma assimilação das coisas do próprio ponto de vista do sujeito. Em um conceito a assimilação dos objetos é realizada através de uma classe **generalizadora**, que reúne os objetos segundo relações de equivalência. O signo semiverbal "tch-tch" é aplicado ao que aparece e desaparece visto de uma janela. O sinal "au-au" designa cães e o que se lhes assemelha, como tudo aquilo que a criança vê da perspectiva de uma sacada. Para a criança o termo "papai" são os personagens que acendem o cachimbo ou estendem os braços como papai. Além da assimilação direta dos objetos há também a **generalização,** relacionada com o aspecto do universal, que se processa do ponto de vista do próprio sujeito. Uma das crianças, denominada T., designa um dia Papai todos os homens afastados de 15 a 20 m e andando (por oposição aos personagens imóveis) antes de englobar em seguida qualquer um nessa classe de homens semelhantes ao pai. Tanto a assimilação quanto a generalização são centradas na perspectiva do sujeito o que indica um egocentrismo que influencia a assimilação. Esses **primeiros esquemas verbais** são **esquemas sensório-motores em processo de conceituação**. Mesmo não sendo esquemas sensório-motores puros nem conceitos, apresentam características dos dois. Dos **esquemas sensório-motores** conservam o fato de serem modos de ação generalizáveis que se aplicam a objetos cada vez mais numerosos, ou seja, esquemas de ação. Dos **conceitos** já apresentam um semidesligamento em relação à própria atividade e uma situação que de ação pura, tendendo a anunciar o **elemento característico de comunicação**, pois eles são designados por fonemas verbais que colocam o sujeito (criança) em relação com a ação de outrem. Entre os símbolos lúdicos e estes esquemas verbais **existem intermediários** conforme pode ser observado em (Piaget, ibid. pág. 282). Nos conceitos há inclusão de um objeto **numa classe** e de uma classe numa outra (por exemplo, um cão qualquer é um cão e esta incluído na classe dos animais.). Num esquema verbal existe simplesmente uma espécie de parentesco (ligação), sentido em função do sujeito, entre todos os objetos ligados uns aos outros. As primeiras palavras empregadas ("vuvu", "papai") são anteriores aos **signos**[2] propriamente ditos. Elas permanecem intermediárias entre o **símbolo individual** ou **imagem imitativa** e o **signo** propriamente social. Elas conservam do símbolo o seu caráter imitativo quando são onomatopéias (imitação do objeto designado) ou quando são extraídas da linguagem adulta e imitadas em estado isolado. Possuem ainda como característica do símbolo a mobilidade desconcertante em oposição à fixidez do signo.

Considerando a definição de conceito apresentada anteriormente em (Abbagnano, id.) e o que foi exposto com base em (Piaget, idem) pode-se fazer um quadro, figura 19, para evidenciar a ocorrência nos primeiros esquemas verbais dos aspectos relacionados anteriormente.

Aspecto	Ocorrência
Permite Descrição	Não
Permite Classificação	Não
Permite Previsão	Não
Comunicação (Signo)	Sim, mas sem estabilidade e ocupando uma posição entre o símbolo e o signo, mas com um predomínio do símbolo, pois a assimilação egocêntrica

[2] Signos são elementos articulados entre si de uma linguagem já organizada (Piaget,1978, pág. 283)

	tem predomínio.
Contempla o Aspecto de Universal	Não
Contempla o Aspecto de individual	Não
Permite a Representação	Sim, sob a forma de esquemas verbais
É um sistema	Sim, por que um esquema sempre está inserido em um sistema de esquemas, exceto nos primeiros dias de vida da criança. Possui ainda a diferenciação e coordenação entre significado e significante

Figura 19 - Aspectos dos esquemas verbais

Depois dos esquemas verbais Piaget aponta como próxima fase da evolução dos esquemas de representação a manifestação dos pré-conceitos.

2 Os pré-conceitos. (1 Ano e sete meses até 7 anos)

Esta fase corresponde ao segundo período do desenvolvimento de esquemas **representativos**. A linguagem inicial é feita, principalmente, de ordens e expressões de desejo e neste nível a **denominação** não é simples atribuição de um nome, mas o enunciado de uma ação possível e a **palavra se limita quase a traduzir a organização de esquemas sensório-motores**. O interesse de Piaget consistia em saber como da linguagem ligada ao ato imediato e presente a criança passa à construção de representações verbais propriamente ditas (**de juízos de ação a juízos de constatação**).

A **narrativa** é um intermediário que se inicia entre o período dos esquemas verbais e o dos pré-conceitos. As narrativas são dirigidas pelo sujeito tanto a ele próprio como aos outros. **Elas permitem assistir o momento em que a linguagem em formação deixa de acompanhar simplesmente o ato em curso para reconstituir a ação passada e fornecer-lhe assim um começo de representação**. A **palavra** começa então a funcionar como **signo**, ou seja, **não mais**

como uma simples parte do ato, mas como evocação deste. É então que o esquema verbal vem a destacar-se do esquema sensório-motor para adquirir a função de **representação**. Enquanto a **imitação** só pode reproduzir o ato tal qual, imitando-o exteriormente pelo gesto ou interiormente pela imagem a **narrativa** acrescenta a isso uma espécie particular de objetivação e que está ligada à **comunicação ou socialização do próprio pensamento**. Entretanto a **narrativa** ainda é a reconstituição de uma ação.

Quando a narrativa atualiza-se é que ela, dando um passo a mais, passa da expressão dos atos à constatação propriamente dita. Ela acompanha a ação em curso, mas descrevendo-a em vez de fazer parte integrante dela. A **descrição** se torna, então, representação atual, duplicando a representação perceptiva no presente como também representação tocante ao passado.

Um indicador do progresso no sentido da conceitualização é o aparecimento da pergunta "**O que é?**" que se relaciona com o nome e o conceito ou a classe do objeto designado. Esta espécie de narrativa continuada e atual, com as denominações e descrições que comporta acrescenta ao esquema sensório-motor, inerente à própria ação, um esquema representativo, traduzindo-o em uma espécie de conceito. A linguagem da criança neste nível permanece a meio caminho entre a comunicação com outrem e o monólogo egocêntrico. As narrativas e descrições se dirigem tanto a si mesmo quanto a outrem e a socialização é ainda é uma indiferenciação entre o eu e os outros, em vez de troca fundada em diferenciação nítida de ponto de vista.

Entre os dois e os quatro anos na narração ou na descrição atual acontece o **emprego dos esquemas verbais** que mais parecem aproximar-se daquilo que virão a ser mais tarde os conceitos. Tais esquemas verbais são os **pré-conceitos**. A criança desse nível não atinge nem a generalidade nem a individualidade verdadeiras. As noções que a criança emprega sem cessar oscilam entre esses dois extremos e ainda lembram a estrutura dos esquemas sensório-motores, bem como das imagens imitativas ou lúdicas daí derivadas. Como exemplo temos a pergunta: "Este senhor é um papai?". Quando perguntada o que é um papai a criança responde: "Ele tem muitas Lucienes e muitas Jacquelines", numa referência a suas duas irmãs. Os indivíduos particulares aos quais o pensamento visa têm menos **individualidade**. Isto pode ser percebido quando J. (uma das crianças observadas por Piaget) dissocia-se a si própria conforme as imagens que vê de sua pessoa, em "J. no espelho", "J. faz assim" e J. da fotografia". O mesmo indivíduo pode ser composto de personagens distintos. Nesta fase do **pré-conceito** as classes são menos genéricas e estáveis do que serão a seguir, e **uma classe é uma espécie de indivíduo-tipo** repetido em vários exemplares. Num dos exemplos citados por Piaget as lesmas são todas "a lesma" que reaparecem sob novas formas.

O pré-conceito infantil está a meio caminho do individual e do geral e se caracteriza pela ausência de inclusão num todo e identificação direta dos elementos parciais entre si, sem mediação desse todo. Esta relação do todo com as partes tem um vínculo importante com questões do tipo: "Um besouro e pequenas minhocas são 'bichos' ?". Para responder tal pergunta seria preciso que a criança soubesse reunir as partes num todo segundo um modo de composição reversível. Essas estruturas pré-conceituais são aparentadas com a estrutura dos símbolos no plano lúdico. **O pré-conceito e o símbolo lúdico** procedem ambos por assimilação direta, sem generalidades verdadeiras, por "participação" pré-lógica e não por operações.

Piaget aponta outros intermediários entre o **símbolo lúdico, a imagem imitativa e o pré-conceito**, os quais oscilam entre a "analogia atuante" e a simples comparação concreta. Exemplo de analogia atuante:

> *"Aos 4,7 (26) [3], ainda, ela (J.) pergunta se o xarope que se pode fazer com as bagas de uma certa espécie de espinheiro é "o xarope que arde"".(Piaget, idem, pág.291.*
>
> *"Uma haste de madeira curva: "É como uma máquina para colocar gasolina" (torneira curva). ...". (idem).*

No **símbolo lúdico** o objeto dado é assimilado a quaisquer realidades, graças às imagens imitativas que servem de significantes. No **pré-conceito** o objeto dado é também assimilado a outros por uma espécie de participação direta. No conceito a **classe geral** serve de **esquema operatório de assimilação**. Tal assimilação conceitual dos objetos entre si seria feita simplesmente através do fato de considerá-los através de uma relação de equivalência dada pela classe que formam. O "**significante**" desse esquema conceitual seria a palavra ou o signo verbal e a imagem imitativa só serviria de símbolo individual que duplicasse o signo coletivo e seria reduzida à categoria de puro significante, em oposição ao conteúdo significado. Como neste nível

[3] Quatro anos sete meses e 26 dias

ainda não existem classes gerais funcionando a título de esquemas operatórios e como a assimilação dos objetos entre si se efetua diretamente graças a esquemas meio-gerais meio individualizados que são os **pré-conceitos**, a **palavra ou o signo coletivo** permanece inadequado ao conteúdo dessas assimilações egocêntricas. Pelo fato de os objetos estarem diretamente assimilados uns aos outros, o objeto assimilante torna-se uma espécie de exemplo ou de exemplar privilegiado em relação ao objeto assimilado. A "lesma" é assim o protótipo ou representante de todas as lesmas. Em um conceito geral todas as lesmas são equivalentes graças as seus caracteres comuns e abstratos. O pré-conceito é um esquema a meio caminho do individual e do geral, esquema que se baseia na existência do protótipo individual. **A imagem**, que conserva uma função herdada de sua origem imitativa, constitui um significante em relação ao pré-conceito e ela dele representa o indivíduo essencial e não um objeto qualquer. Ela é o representante do objeto que exerce a função de substituto de todos os outros.

No meio-caminho entre o símbolo lúdico e o conceito, o pré-conceito implica a imagem e é em parte determinado por ela. O conceito dela se liberta por sua própria generalidade e não a emprega mais senão a título de ilustração. **O Conceito operatório realiza um equilíbrio permanente entre a assimilação dos objetos entre si e a acomodação a cada um deles**. Esta acomodação não se prolonga em imagem e quando intervém fica num plano inferior.

Na fase dos 4 aos 7 anos os diversos caracteres do "pré-conceito" tendem na direção do conceito operatório, pela construção de imbricações hierárquicas que tornam a assimilação mediata e levam a uma generalidade progressiva. A generalidade completa só é atingida com a reversibilidade das operações. Entre o pré-conceito e o sistema de conceitos ligados operatoriamente ocorre uma articulação gradual do **pensamento intuitivo (que é pré-lógico)**. Essas intuições articuladas levam a construções parciais, ainda ligadas à configuração perceptiva e à imagem, mas já lógicas no interior do campo assim delimitado. Exemplo de intuições articuladas : *"J. aos 6;7 (8) : 'Os cogumelos são o nome de tudo, não é assim? Os licopódios (que procuramos nos prados) são cogumelos?'" (Piaget,id.,pág. 294).*

Nesta e em outras perguntas apresentadas existe a utilização das relações entre a parte e o todo, seja a propósito de uma objeto coletivo como uma aldeia, seja a propósito de inclusões abstratas como as classes zoológicas..

Novamente podemos fazer um quadro para evidenciar a ocorrência nos pré-conceitos dos aspectos relacionados anteriormente

Aspecto	Ocorrência
Permite Descrição	Utilizando pré-conceitos a **descrição** se torna, então, representação atual, duplicando a representação perceptiva no presente como também representação tocante ao passado.
Permite Classificação	o aparecimento da pergunta "**O que é?**" que se relaciona com o nome e o conceito ou a classe do objeto designado
Permite Previsão	Não. Utilizando pré-conceitos a narrativa ainda é a reconstituição de uma ação.
Comunicação (Signo)	Através do uso de pré-conceitos, a **narrativa** acrescenta ao ato uma espécie particular de objetivação e que está ligada à **comunicação ou socialização do próprio pensamento.** As narrativas e descrições se dirigem tanto a si mesmo quanto a outrem
Contempla o Aspecto de Universal	O pré-conceito infantil está a meio caminho do indivíduo e do geral e se caracteriza pela ausência de inclusão num todo e identificação direta dos elementos parciais entre si, sem mediação desse todo.
Contempla o Aspecto de individual	Idem
Permite a Representação	Sim, na narrativa o esquema verbal se desliga do sensório motor. A narrativa

	ainda é a reconstituição de uma ação. **A imagem**, que conserva uma função herdada de sua origem imitativa, constitui um significante em relação ao pré-conceito e ela dele **representa** o indivíduo essencial e não um objeto qualquer
É um sistema	Sim

Figura 20 - Aspectos dos Pré-conceitos

No texto a seguir Piaget faz uma análise da evolução da inteligência sensório-motora até a representação cognitiva. Tal evolução é abordada pela ótica do invariante funcional da assimilação/acomodação em sua relação com a função simbólica. Nesta análise são considerados também os aspectos figurativos e operativos do pensamento, ou seja, as formas de representação (esquemas representativos), o raciocínio e como ele age sobre as primeiras**:**

3 Da inteligência sensório-motora à representação cognitiva.

Os esquemas sensório-motores podem ser considerados como os "ancestrais" dos esquemas conceituais, esses permitem a realização da assimilação sensório-motora, que consiste numa espécie de juízo de ordem prática. Os esquemas da inteligência sensório-motora constituem o equivalente funcional dos conceitos e das relações. As coordenações de esquemas entre si equivalem a um raciocínio sensório-motor.

Entre a inteligência sensório-motora e a inteligência conceitual existem quatro diferenças fundamentais. Elas são:

1 - As conexões estabelecidas pela inteligência sensório-motora só chegam a ligar percepções e movimentos sucessivos, sem representação de conjunto que domine os estados, distintos no tempo, das ações assim organizadas e que os reflita em um quadro total e simultâneo. Exemplo: é em vão, por exemplo, que o sistema de deslocamentos que intervêm quando se faz a pesquisa de um objeto desaparecido, se coordena em uma espécie de "grupo" experimental, pois

não há relação, a não ser entre movimentos sucessivos, em vez de representação do conjunto do sistema.

2 - A inteligência sensório-motora tende ao êxito e não à verdade; satisfaz-se com a chegada ao êxito prático a que visa e não com a constatação (classificação ou seriação) ou com a explicação. É inteligência puramente vivida e não pensamento.

3 – Os esquemas sensório-motores tendo o domínio delimitado pelo emprego dos instrumentos perceptivos e motores, só trabalha nas próprias realidades, nos seus indícios perceptivos e sinais motores, e não nos signos, símbolos e esquemas que a elas se referem.

4 – A inteligência sensório-motora é, pois, essencialmente, individual em oposição aos enriquecimentos sociais adquiridos com o emprego dos signos.

Admitindo-se a continuidade funcional entre a **inteligência sensório-motora** e o **pensamento conceitual** para passar da primeira à segunda forma de inteligência quatro condições bastam:

1 – Uma aceleração geral dos movimentos, fundindo-se as ações sucessivas numa abreviação ou encurtamento móvel da ação de conjunto. O desenrolar rápido do filme da conduta constituiria, assim, a **representação interior**, concebida como esboço ou esquema antecipador do ato;

2 – Uma **tomada de consciência** que esclarece esse esboço abreviado, isto é, que desenrola o filme nos dois sentidos: a constatação e a explicação, fundadas na classificação hierárquica e na seriação das relações, substituiriam, pois, a simples busca do objetivo prático;

3 – **Um sistema de signos, que se acresce às ações**, permitiria a construção dos conceitos gerais necessários a essas classificações e seriações **(eis a conexão entre o conceito e a operação: um esquema representativo, no qual há a representação cognitiva, coordenado com um esquema operatório, no qual as ações são totalmente reversíveis)**;

4 – A socialização que acompanha o emprego dos signos inseriria o pensamento individual em uma realidade objetiva e comum.

Estas quatro condições podem ser reduzidas a duas:

a- Um sistema de operações que transponha as ações exteriores de sentido único para ações mentais móveis e reversíveis (condições 1 e 2).

b – Uma coordenação interindividual das operações, que assegure, ao mesmo tempo, a reciprocidade geral dos pontos de vista e a correspondência do pormenor das operações e dos resultados respectivos (condições 3 e 4). Daí a necessidade de um sistema de signos que permita tal coordenação.

O processo de construção das operações (ou seu "grupamento") e a coordenação social são dois processos interdependentes. Um sistema de operações não pode ser geral, se elas não corresponderem, termo a termo, às operações alheias, mas essa própria socialização das operações supõe o respectivo agrupamento possível.

Em sua reflexão sobre a relação entre o processo de conceituação e a forma de atuação do raciocínio sobre as formas representativas, ou seja, como o conceito pode ser relacionado com o aspecto operativo do pensamento, Piaget faz dois questionamentos:

1) Quais são os meios efetivos que permitem que a criança que fala, imita e brinca consiga realizar as quatro ou duas condições definidas anteriormente? Graças à coordenação crescente dos esquemas sensório-motores, e, portanto à aceleração dos movimentos e à interiorização das ações (utilizando esquemas representativos) sob a forma de esboços antecipadores, a criança já chega (na faixa etária compreendida entre um ano e seis meses ate dois anos desse desenvolvimento) a:

- esboços representativos, quando há equilíbrio atual entre a assimilação e a acomodação;
- a imitações diferidas quando é a acomodação que domina;
- a esquemas lúdicos simbólicos quando é a assimilação que domina.

2) Neste momento a aquisição da linguagem se torna possível e a palavra ou signo coletivo permite evocar os esquemas ate então simplesmente práticos? Mas como esta evocação há de acarretar a construção das operações, núcleo motor da inteligência refletida?

Na reflexão sobre estas perguntas Piaget afirma, com base em suas pesquisas, que as primeiras palavras limitam-se a atrair ou facilitar a conceitualizacao dos esquemas sensório-motores sem, porém completa-la de modo algum. Por sua vez o conceito (que é um esquema de ação) supõe um jogo complexo de assimilações (sendo a assimilação conceitual o juízo) e de acomodações, isto é, aplicações a experiência. O conceito supõe dupla acomodação suplementar:

- a todos os dados a que ele se refere fora do campo perceptivo atual ou do campo das antecipações e reconstituições próximas, que interessam apenas a ação em curso;
- ao pensamento dos outros e às experiências particulares deles.

Além da assimilação de dados perceptivos e motores os conceitos têm de assimilar também:

- Todos os outros conceitos em sistemas de conjuntos coerentes (classificações e seriações);
- Os conceitos correspondentes alheios.

Outra reflexão de Piaget: a assimilação e a acomodação sensório-motoras vão prolongar-se diretamente, graças à **linguagem**, numa assimilação e acomodação operatórias, ou seja, ao nível de ações interiorizadas pelo sujeito, as quais desde logo, constituem sistemas lógicos? A resposta é não. As extensões definidas no momento da assimilação e da acomodação, que são todas necessárias à realização das quatro condições acima indicadas para o desenvolvimento da inteligência conceitual, supõem equilíbrio permanente entre os processos assimiladores e acomodadores. São as **operações** que garantem tal equilíbrio. Uma **operação** é uma imitação das transformações possíveis do real e, portanto, **acomodaçã**o estável e contínua aos dados experimentais; ao mesmo tempo é uma ação do sujeito, ação que se assimila aos dados a que diz respeito, apresentado essa assimilação o caráter de reversibilidade, ou seja, em vez de deformar os objetos, reduzindo-os à atividade própria, ela os liga entre si mediante conexões possíveis de se desenrolar nos dois sentidos. Essa **reversibilidade** é a expressão do equilíbrio permanente alcançado entre uma acomodação generalizada e uma assimilação que se tornou não-deformante. A reversibilidade é a possibilidade de encontrar um estado anterior dos dados, não se opondo ao estado atual (assimilação); e um estado tão real ou realizável quanto esse estado atual (acomodação). Esse equilíbrio móvel e reversível garante a conservação dos conceitos e dos juízos e regula tanto as correspondências das operações entre indivíduos (intercâmbio social de pensamento) quanto o sistema conceitual interior a cada um**. A assimilação e a acomodação que atingiram o equilíbrio provisório na fase final da inteligência sensório-motora se dissociam**

no plano da representação e da linguagem pela intervenção das realidades novas, de ordem extraperceptiva e social, para reencontrar o equilíbrio no plano representativo, tem-se, pois, de novamente percorrer caminho semelhante ao que elas (crianças) acabam de completar.

Antes dos sete anos, em média, não aparece sistema algum de operações reversíveis e entre si agrupadas. O **grupamento**, apenas, é que atesta a existência de equilíbrio permanente entre a assimilação e a acomodação. De quatro a sete anos (fase II), só se apresentam algumas intuições articuláveis (números suscetíveis de formar figuras, inclusões simples e coordenações intuitivas de relações familiares), sem generalizações , porém, nem reversibilidade. No período de 1;6 a 4;6 anos (fase I), é notável constatar que o pensamento nunca atinge, nesse período, equilíbrio permanente entre a assimilação e a acomodação, mas, pelo contrário, apresenta uma série de equilíbrios parciais ou instáveis, cuja gama explica, precisamente o conjunto dos esquemas que vão do símbolo lúdico e da imagem imitativa ao pré-conceito e à transdução.

O processo fundamental que assinala, realmente, a passagem do equilíbrio sensório-motor para o equilíbrio representativo consiste em que, no primeiro a assimilação e a acomodação são sempre atuais, enquanto que no equilíbrio representativo as assimilações e as acomodações anteriores interferem com as presentes. O esquema sensório-motor já é ação do passado sobre o presente, mas não está localizado no passado. O próprio da representação é que as acomodações anteriores se conservam no presente a título de “significantes” e as assimilações anteriores, a título de significações. A imagem mental, prolongamento das acomodações anteriores, intervém na atividade das acomodações anteriores, intervém na atividade tanto lúdica quanto conceitual a título de simbolizante. Graças a imagem mental e, naturalmente, aos signos verbais e coletivos que ela duplica no pensamento individual, os dados atuais podem ser assimilados a objetos não percebidos e simplesmente evocados, ou seja, esses dados podem ser revestidos de significações fornecidas pelas assimilações anteriores.

As **acomodações** são, no plano representativo, duplas: atuais (acomodações simples) e anteriores (imitações representativas e imagens); as **assimilações** também são atuais (incorporações dos dados aos esquemas adequados) e anteriores (conexões estabelecidas entre esses esquemas e outros, cujas significações são apenas evocadas, sem serem provocadas pela percepção presente).

Assim como no plano sensório-motor o equilíbrio entre assimilação e acomodação não acontece desde logo, no plano representativo o caminho percorrido no primeiro plano será refeito até a coordenação completa dos diferentes processos assim diferenciados. A assimilação representativa, assim como no plano sensório-motor, começa por mecanismo de centração, conforme vimos nos exemplos de pré-conceito e transdução. Este mecanismo explica a irreversibilidade inicial do pensamento. Uma assimilação reversível entre objetos leva à formação de classes reais e ao raciocínio indutivo ou dedutivo. À assimilação incompleta, porque irreversível, que caracteriza o esquema pré-conceitual corresponde, pois, acomodação incompleta, por que também centrada num objeto, de constitui a imagem a título de "significante" do esquema. Segue-se, então, que a assimilação e a acomodação atuais, ou seja, relativas aos objetos novos e não ao protótipo, são uma deformante e a outra inadequada; por isso a instabilidade do respectivo equilíbrio. É pó isso que o pré-conceito está ligado, por uma série de termos intermediários, aos símbolos lúdicos, (e a transdução aos raciocínios simbólicos ou coordenações fictícias), que subordinam a acomodação atual à assimilação. O pré-conceito está ligado ainda por outra série de termos intermediários, às imitações representativas (e a transdução à experiência mental ou reprodução de um desenrolar empírico pela imagem). Sendo o ponto de partida do processo representativo baseado em mecanismos de centração Piaget afirma que fica claro que tal processo só se equilibrará no rumo da descentração. O pensamento que se centre em um objeto ao qual assimila os outros não pode estar em equilíbrio, ao passo que, atribuindo-lhes alternativamente igual valor, a assimilação recíproca que nasce dessa descentração leva a equilíbrio estável entre os dados atuais e anteriores. A acomodação a todos os elementos (tanto atuais quanto anteriores) que resultam dessa mesma descentração mantém a respectiva diferenciação, e a assimilação recíproca que os reúne conduz, portanto, à elaboração de esquemas a um só termo gerais e abstratos, isto é, de conceitos que assumem a forma de classes ou relações. Da descentração resulta equilíbrio entre a assimilação e a acomodação, equilíbrio que tende, necessariamente, para uma estrutura reversível.

Pode-se intercalar entre o **pensamento pré-conceitual** - caracterizado por assimilação centrada num objeto típico e por acomodação que simboliza o esquema de conjunto pela imagem desse tipo – e o **pensamento operatório**, de outro lado – caracterizado pela descentração e pelo equilíbrio permanente entre a assimilação e a acomodação- certo número de termos intermediários, conforme o grau de reversibilidade atingido pelo raciocínio. Esses intermediários que ocorrem entre os quatro e os sete anos, com o nome de **pensamento intuitivo** cujas formas superiores são constituídas de raciocínios aparentemente operatórios, porém ligados a dada configuração perceptiva. Viu-se por exemplo que L. (uma das crianças observadas por Piaget) é capaz de antecipar, mentalmente, a correspondência entre três cadeiras de grandeza desigual e três meninas de tamanhos diferentes. Dos cinco aos sete anos, a criança é até capaz de efetuar correspondências, termo a termo, entre conjuntos de seis a dez elementos, no caso desses números é preciso que a correspondência se apóie numa figura ou representação imagística, se a figura é destruída (por exemplo, duas fileiras opticamente correspondentes), o sujeito nem acredita mais na equivalência das coleções, cuja correspondência, elemento a elemento, acaba de constatar visualmente.

Essas intuições articuladas (formas superiores de **pensamento intuitivo**) revelam assimilação ainda insuficientemente descentrada. Já a **acomodação** não se liga à imagem de um objeto individual, como nos esquemas pré-conceituais, mas continua a ser fonte de imagens: o esquema geral, não sendo ainda bastante abstrato para alcançar a mobilidade reversível característica da operação, ainda não dá lugar a acomodação igual para todas as situações possíveis, daí ficar preso a uma "**configuração**". Mas uma configuração, que é uma estrutura que não se refere a um só objeto, e sim a um conjunto de elementos ligados por forma total simples, ainda é uma imagem. Já não é a imagem de um objeto, mas do esquema que, no pensamento intuitivo, é necessária à existência do esquema (exatamente como a imagem do objeto individual típico é necessária à existência do pré-conceito). Assim é que, nas seriações intuitivas, nas inclusões intuitivas, nas diversas formas cardinais ou ordinais de correspondências intuitivas etc., a percepção ou a imagem da configuração vêm a ser indispensáveis ao pensamento, então constituindo o que, por último, resta desse caráter simbólico e imagístico que constatamos em todas as formas iniciais do pensamento representativo.

Somente com o pensamento operatório (que se inicia aos 7 - 8 anos) é que a assimilação se torna completamente reversível, porque a acomodação está inteiramente generalizada, cessando, assim, de traduzir-se em imagens. Subsiste a imagem, mas a título de puro símbolo do esquema operatório, sem mais fazer dele parte integrante; pode-se, portanto intuicionar uma série de números por meio de uma figura especial; é livre, contudo, a opção entre as representações. A operação independe de cada figura particular do sistema escolhido, por que, essencialmente, já não exprime o estado como tal e sim a transformação de um estado em outro. A figura já não é, então, mais que a ilustração capaz de acompanhar ou não o esquema operatório, este já não é exprimível, de modo adequado, senão por meio de sinais coletivos (linguagem ou símbolos matemáticos e logísticos) convenientemente definidos. Assim ficam preenchidas as quatro condições necessárias à passagem da inteligência sensório-motora para o pensamento lógico. As operações constituem ações possíveis, reduzidas, porém, a esquema antecipador que lhes acelera as velocidades, embora podendo desenrolá-las nos dois sentidos; são, além disso, **ações expressas por signos**, e não realmente executadas; enfim, asseguram a correspondência entre os pontos de vista individuais, cuja objetividade só a coordenação garante.

Anexo B – Definições lógicas e/ou matemáticas.

Algumas definições são encontradas em (Lima, 2002).

Ponto aderente - diz-que um ponto *a* é aderente ao conjunto X contido em R (reais) quando *a* é limite de alguma seqüência de pontos x_n pertencente a X.

Fecho – Chama-se fecho de um conjunto X ao conjunto X' com todos os pontos aderentes a X. Tem-se X contido em X'. Se X está contido em Y então X' está contido em Y'.

Denso – Seja X contido em Y. Diz-se que X é denso em Y quando Y está contido em X', isto é, quando todo b pertencente a Y é aderente a X.

Por exemplo, Q é denso em R, pois Q esta contido em R e todo ponto de R, seja ele racional ou irracional é um ponto de aderência de Q, ou seja, todo ponto de R é limite de alguma seqüência de pontos de Q, em outras palavras todo ponto de R é limite de uma seqüência de frações decimais.

Ponto de Acumulação – dize-se que a pertencente a R é ponto de acumulação do conjunto X contido em R quando toda vizinhança V de *a* contém algum ponto de X diferente do próprio *a*.

Ponto interior – Diz-se que um ponto *a* é interior ao conjunto X contido em R quando existe um número $\varepsilon>0$ tal que o intervalo aberto $(a- \varepsilon, a + \varepsilon)$ está contido em X. O conjunto dos pontos interiores a X chama-se interior do conjunto X e pode ser representado pela notação *int* X.

Vizinhança – quando *a* pertence a *int* X diz-se que o conjunto X é uma *vizinhança* do ponto *a*.

Noção de limite elaborada por Cauchy (Boyer, 1959) – Quando sucessivos valores atribuídos a uma variável se aproximam indefinidamente de um valor fixo de tal forma que possam se diferenciar deste valor por uma quantidade tão pequena quanto se queira, tal valor fixo é chamado de limite.

Paradoxo de Russel (Davis, 1986,pág. 373) – Um R-conjunto é aquele que se inclui. (Exemplo: “ o conjunto de todos os objetos descritos por exatamente treze palavras em português”). Considere outro conjunto M: o conjunto cujos membros são todos os conjuntos possíveis, exceto os R- conjuntos. M é um R-conjunto ? Não. Assim a definição de M é autocontraditória.

Relações intensivas (Piaget ,1976/2, pág. 67) – são as relações quantitativas que compreendem exclusivamente a desigualdade da parte e do todo ou a identidade, sem consideração de relações quantitativas entre uma parte e as outras partes disjuntas pertencentes ao mesmo todo, ou entre as partes de um todo e as de um outro todo.

Relações extensivas (Piaget ,1976/2, pág. 67) – são relações quantitativas entre classes disjuntas, especialmente as relações entre uma parte e as outras partes disjuntas pertencentes ao mesmo todo, ou entre uma parte e as partes quaisquer de outras totalidades.

Distinção entre relações extensivas simples/ extensivas numéricas (Piaget ,1976/2, pág. 67) - Faremos a distinção entre as relações extensivas numéricas (ou métricas) que implicam uma iteração de uma unidade e as relações extensivas simples que englobam relações quantitativas entre partes disjuntas, mas sem iteração de unidades.

Quantidades intensivas - são as quantidades formadas pelas relações intensivas. Exemplo : todos, alguns, um e algum. (o um lógico não é unidade aritmética, já que ignora a iteração {sócrates} ∪ {sócrates}= {sócrates} e não 2 sócrates.

Quantidades extensivas – são as quantidades formadas pelas relações extensivas. Exemplo : “quase todos” quer dizer todos menos um número finito. Se a classe B representa o conjunto total, a classe A “quase todos” e a classe A’ o conjunto fracamente representado ou finito correspondente a B-A; poder-se-á então conferir uma significação à relação quantitativa A> A’.

Corpo (Lima 2002, pág.s. 11 – 19)

R(conjunto dos números reais) é um Corpo –

Estão definidas em R duas operações, chamadas adição e multiplicação, que cumprem certas condições, abaixo especificadas. A adição faz corresponder a cada par de elementos $x,y \in R$, sua soma $x+y \in R$, enquanto a multiplicação associa a esses elementos o seu produto $x.y \in R$.

Os axiomas a que essas operações obedecem são:

- Associatividade: para quaisquer $x,y, z \in R$ tem-se $(x + y)+z = x + (y +z)$.
- Comutatividade: para quaisquer $x,y \in R$ tem-se $x + y = y + x$ e $x.y = y.x$.
- Elementos Neutros: Existem em R dois elementos distintos 0 e 1 tais que $x + 0 = x$ e $x.1= x$ para qualquer $x \in$.
- Inversos: Todo $x \in R$ possui um inverso Aditivo $–x \in R$ tal que $x + (-x) = 0$ e, se $x \neq 0$, existe também um inverso multiplicativo $x^{-1} \in R$ tal que $x.x^{-1} = 1$.
- Distributividade: para $x, y, z \in R$ quaisquer, tem-se $x. (y+z) = x.y + x.z$.

Definição de cota superior

Um conjunto $X \subset R$ diz-se limitado superiormente quando existe algum b tal $\in R$ tal que $x\leq b$ para todo $x \in X$. Diz-se que b é uma cota superior de X.

Definição de cota inferior

Um conjunto $X \subset R$ diz-se limitado inferiormente quando existe algum $a \in R$ tal que $a\leq x$ para todo $x \in X$. Diz-se que a é uma cota inferior de X.

Definição de supremo (Lima, 2002, pág. 16).

Seja $X \subset R$ limitado superiormente e não-vazio. Um número $b \in R$ Chama-se o supremo do conjunto X Quando é a menor das cotas superiores de X. Isto equivale a duas afirmações:

- Para todo $x \in X$, tem-se $x \leq b$;
- Se $c \in R$ é tal que $x \leq c$ para todo $x \in X$ então $b\leq c$.

Definição de ínfimo (Lima, 2002, idem).

Seja $X \subset R$ limitado superiormente e não-vazio. Um número $a \in R$ Chama-se o ínfimo do conjunto X Quando é a maior da cotas inferiores de X. Isto equivale a duas afirmações :

- Para todo $x \in X$, tem-se $a \leq x$;
- Se $c \in R$ é tal que $c \leq x$ para todo $x \in X$ então $c \leq a$.

Definição de Corte de Dedekind (Courant 2000, pág. 85)

Suponhamos que seja dado algum método para dividir o conjunto dos números racionais em duas classes, A e B de tal modo que cada elemento b da classe B seja maior do que cada elemento a da classe A. Qualquer classificação desse tipo é denominada de corte no conjunto de números racionais. Para um corte existem apenas três possibilidades, sendo que uma e somente uma deve ser válida:

- Existe um maior elemento a* em A. Este é, por exemplo, o caso em que A é o conjunto de todos os números racionais ≤ 1 e B de todos os números racionais >1.
- Existe um menor elemento b* em B. Este é, por exemplo, o caso em que A é o conjunto de todos os números racionais <1 e B de todos os números racionais ≥ 1.
- Não existe nem um maior elemento em A nem um menor elemento em B. Este é, por exemplo, o caso em que a é o conjunto de todos os números racionais negativos, 0, e de todos os números racionais positivos com quadrado menor que 2 e B de todos os números racionais com quadrado maior que 2. A e B juntos incluem todos os números racionais, pois já foi provado que não existe número racional cujo quadrado seja igual a 2.

No terceiro caso, em que não há nem um maior número racional em A, nem um menor número racional em B, o corte, segundo afirma Dedekind, define ou simplesmente é um número irracional. Esta definição está de acordo com a definição de número real por intervalos encaixados; qualquer seqüência I_1, I_2, I_3,... de intervalos encaixados define um corte se colocarmos na classe A todos aqueles números racionais que são excedidos pela extremidade do lado esquerdo de pelo menos um dos intervalos In, e em B, todos os outros números racionais.

Anexo C – Roteiro do experimento da fita

Material: será utilizada uma fita e uma tesoura uma régua lápis e borracha e calculadora. Veja figura relativa ao experimento da fita.

Conceitos matemáticos – vizinhança e ponto de acumulação. Soma dos termos de uma progressão geométrica.

Desequilíbrio inicial – cortar a fita no meio e deixar uma metade no lugar inicial e a outra metade será cortada no meio, gerando dois quartos, um quarto é colocado sobre o meio inicial e intacto, o outro quarto é cortado no meio gerando dois oitavos um oitavo é colocado sobre a fita cumulativa gerada pelas somas anteriores. Este processo prossegue enquanto for possível. O desequilíbrio é perguntar se é possível após um número muito grande de operações de cortar somar geometricamente chegar ao tamanho inicial da fita

Procedimentos:

Procedimento	Elemento lógico e/ou infralógico
1. Solicitar ao sujeito que corte a fita no meio. Uma metade será cortada de novo e a outra servirá de suporte para os pedaços de fita que serão acrescentados na forma de uma soma geométrica. Solicitar ao sujeito que marque o primeiro valor encontrado em uma reta. Este valor representa o tamanho do pedaço que resultara da soma das partes acrescentadas e será marcado em uma régua lateral. Exemplo o primeiro valor será meio.	Elemento infralógico: Partição e adição primitiva. Representação de um valor por um ponto na reta.(o que há de lógico neste ultimo ?)
2. Solicitar que a segunda metade seja cortada de novo gerando dois quartos. Um quarto será colocado sobre o meio de fita que ficou como base para a soma geométrica. Pede-se a sujeito que marque na reta lateral o valor resultante da soma do meio com o quarto de fita	Idem
3. Prossegue-se tal seqüência de passos enquanto for possível fisicamente fazer as partições.	Idem
4. Após fazer três ou quatro divisões	Noção de infinito contínuo e ponto de

Pergunta-se ao sujeito qual seria o valor mais próximo possível do tamanho inicial da fita. Pedir para marcar na régua lateral. Perguntar se é possível achar um valor mais próximo ainda.	acumulação. Ordem
5. Perguntar quantas vezes seria possível fazer esta seqüência de cortes e montagens.	Verificar se a noção de separação pode ser ilimitada
6. Pergunta-se qual o tamanho do intervalo correspondente ao menor valor possível. Pedir para desenhar o intervalo na régua lateral. Perguntar se é possível construir um intervalo menor e que esteja dentro deste intervalo inicial	Envolvimento de vizinhanças
7. Quantos pontos poderiam ser colocados dentro deste intervalo menor construído? Poderiam ser colocados outros intervalos dentro deste intervalo. Pedir para representar na reta	Noção de contínuo, envolvimento e ordem de colocação dos intervalos, pontos de acumulação
8. Perguntar se seria possível através dos cortes e montagens chegar ao valor inicial da fita e quantas vezes seriam necessárias pra atingir tal valor	Noção do conceito de limite, noção de ordem entre envolvimentos ou vizinhanças, ponto de acumulação, separação de forma infinita.

Figura 21 - Quadro de Procedimentos das experiência da fita

Anexo D – Roteiro do experimento do cálculo da raiz quadrada de dois.

Material: serão utilizadas figuras geométricas quadrados e triângulos conforme a figura relativa ao experimento da raiz quadrada de dois, uma régua, uma calculadora, um lápis e uma borracha.

Conceitos matemáticos – vizinhança e ponto de acumulação, área de uma figura geométrica.

Desequilíbrio inicial – encontrar o tamanho do lado de um quadrado, de forma que com este valor se possa formar um quadrado com uma área determinada.

Procedimentos :

Procedimento	Elemento lógico e/ou infralógico
1. Escolhe se um quadrado e combina-se com o sujeito que a medida da lateral do quadrado vale uma unidade de comprimentos que pode ser centímetro, decímetro ou metro.	Verificar se o sujeito é capaz de compor a área de uma superfície quadrada ou retangular a traves da multiplicação dos valores relativos aos comprimentos dos lados.
2. Solicita-se ao sujeito que calcule a área do quadrado	Idem
3. Pede-se ao sujeito que monte um quadrado de área 4 e pergunta-se qual o tamanho do lado necessário para montar um quadrado de área 4.	Idem
4. Pede-se ao sujeito que monte um quadrado de área 9 e pergunta se qual o tamanho do lado necessário para montar um quadrado de área 9.	Idem
5. Pede-se ao sujeito que monte um quadrado de área 16 e pergunta-se qual o tamanho do lado necessário para montar um quadrado de área 16.	Idem
6. Pede-se ao sujeito que utilizando qualquer uma das formas disponíveis (quadrados e triângulos) de qualquer tamanho monte um quadrado de área 2	**I - Partição e adição primitiva** e composição do valor da área de uma superfície quadrada ou retangular através da multiplicação dos valores

e pergunta-se qual o tamanho do lado necessário para montar esta figura.	relativos aos comprimentos dos lados.
7. Pede-se ao sujeito que marque em uma reta o valor que ele encontrou para o lado e, em outra reta, também para este mesmo valor elevado ao quadrado. Depois que seja verificado se o valor encontrado elevado ao quadrado é igual a 2.	Representação do ponto na reta,
8. Solicita-se que seja verificada a diferença entre o valor encontrado (resultante da elevação ao quadrado) e 2. Pede-se para o sujeito representar na reta o intervalo que seria formado com 2 +- esta diferença.	Comparação extensiva que envolve uma unidade métrica. O intervalo representa uma seqüência de envolvimentos, vizinhanças e ordem de envolvimentos.
9. Pergunta-se se é possível fazer uma diferença menor e qual seria este valor do lado. Perguntar se valor do lado quando marcado na reta estaria contido na vizinhança anterior	Relação de ordem dos pontos na reta, envolvimento entre vizinhanças (uma vizinhança maior envolvendo uma menor), relação de ordem de colocação do envolvimentos de um elemento.
10. Pede-se para o sujeito representar o novo valor (quadrado) na reta e verificar se esse valor é mais próximo ou não de 2.	Relação de ordem dos pontos na reta
11. Pergunta-se quantos números poderiam ser colocados no intervalo criado entre o valor quadrado encontrado e 2. Pede-se para o sujeito dar alguns exemplos e que ele marque estes pontos na	Verificar se o conceito de infinito e a noção sobre a reta real

reta.(Quantos intervalos menores eu poderia colocar no intervalo criado). Quantas vizinhanças (considerando distâncias, ou seja modulo da diferença) e de que tamanho elas poderiam ser criadas em torno do valor de 2?	
12. É possível achar algum intervalo (ou vizinhança) muito pequeno em torno de 2 que não contenha algum ponto nele?	Ponto de acumulação (envolvimento de vizinhanças)
13. Indica-se na reta (dos valores elevados ao quadrado) um valor de intervalo de diferença (para mais e para menos) em relação a 2 pede-se ao sujeito que encontre os valores que irão gerar aquela diferença (após ser elevado ao quadrado) e que marque estes valores na reta relativa ao lado do quadrado.	Correspondência biunívoca entre dois pontos das retas vos valores quadrados e a reta dos valores do lado do quadrado.
14. Pergunta-se se é possível fazer um intervalo menor dentro do intervalo criado pelos pontos e qual seria o menor intervalo possível de fazer.	Envolvimento de intervalos
15. Perguntar se vai ser possível achar um valor de lado tal que sendo elevado ao quadrado será obtido o valor 2. Se em algum momento será achada a raiz quadrada de 2 e quantas vezes seria necessário fazer os cálculos pra achar tal valor.	Noção do conceito de infinito, de limite e da irracionalidade de raiz de 2.

Figura 22 - Quadro de Procedimentos do Cálculo da Raiz quadrada de dois

Anexo E – Conclusões de Piaget sobre as Noções do ponto e do contínuo.

Em seus estudo sobre as noções do ponto e do contínuo em (Piaget,1993. pág.s. 160 – 163) ele chegou a várias conclusões, elas serão apresentadas de forma resumida no presente texto.

Piaget constatou que no nível hipotético-dedutivo, no qual as operações destacam-se do seu conteúdo concreto para funcionar em virtude de sua única composição formal, o sujeito consegue ultrapassar as noções de divisão e de ponto perceptíveis para realizar as decomposições e recomposições além de todo limite efetivo, razão pela qual uma síntese operatória do contínuo torna-se possível. Ele aponta um indicador forte e suficiente para falar do contínuo operatório: num dado momento o sujeito toma consciência do dinamismo da operação enquanto composição formal indefinida. Neste momento a divisão (partição de uma figura ou linha até seus contornos últimos) ou recomposição cessam de figurar como simples operações aditivas que se apóiam em objetos concretos e finitos para ligar-se à série ilimitada, como tal, dos encaixes ou desencaixes. Na análise de seus experimentos Piaget concluiu que as crianças entrevêem que o infinitamente pequeno não é um resíduo estático, mas a expressão de um processo indefinido de decomposição. O essencial é a capacidade de prosseguir as operações de modo ilimitado, por oposição aos limites do concreto e esse dinamismo ilimitado divide-se em duas direções complementares e é a sua reunião que constitui o contínuo. **A primeira direção** é a separação entre pontos vizinhos que pode prosseguir indefinidamente, as noções de vizinhança e de separação não são mais opostas como na intuição perceptiva, a separação intelectual devida à divisão operatória, prevalece sobre a operação intuitiva e apóia-se na própria vizinhança. **Em segundo lugar**, toda vizinhança de um ponto é suscetível de ser preenchida por novos pontos. Uma das crianças entrevistadas diz: “terá mais espaços entre eles”. As imediações ordenadas (envolvimentos a uma dimensão para a linha: lacunas situadas “entre”os pontos; ou a duas dimensões para as superfícies: lacunas “em volta”do ponto) são tornadas pontos vizinhos e intelectualmente separáveis, o que assegura a síntese entre as quatro relações de vizinhança, de separação, de ordem e de envolvimento já adquiridas no estádio III (10 - anos), mas não componíveis entre si nesse nível por ausência de divisões ou de encaixes ilimitados.

Piaget afirma que a estrutura lógica do contínuo é adquirida graças às operações formais, mas ainda se trata essencialmente de uma estrutura qualitativa. O que falta aos sujeitos para fundamentar sua noção de contínuo é a noção do número irracional. Eles fazem corresponder os pontos às seqüências dos números inteiros e ignoram a espécie especial dos números destinados a preencher as lacunas que subsistem entre os pontos não enumeráveis. Falta também uma teoria dos limites ou dos pontos de condensação (pontos de acumulação) que asseguram uma quantificação extensiva dos encaixes em oposição aos puros encaixes lógicos (intensivos). Piaget se questiona: essa noção do contínuo extensivo faz realmente falta ou eles (sujeitos) não conseguem simplesmente formulá-la? Ele aponta uma possibilidade observando que a relação do "sempre menor" invocada por umas das crianças mostra não estar certamente longe.

Piaget conclui que a construção do contínuo, observada nos sujeitos do estádio IV (10-12), acaba numa síntese das relações topológicas elaboradas durante o estágio I a III (4-7 a 10 - 11 anos). As operações de divisão não são mais somente perceptivas ou intuitivas, mas separações intelectuais dos pontos vizinhos. Tais operações de divisão encontram no contínuo a sua expressão generalizada e realizam a conciliação entre as relações de vizinhança e de separação. Ao preencher as vizinhanças de cada ponto, o contínuo permite às operações de ordem e envolvimento encontrar também sua forma geral aplicável às linhas, superfícies e espaços a três dimensões e fornece um fundamento racional às suas manifestações intuitivas, de abertura e fechamento. O contínuo termina mais tardiamente a sua elaboração do que todas as outras relações, pois ele constitui a síntese delas.

Anexo F - Outros estudos sobre o conceito de limite.

Existem diversos estudos realizados que abordam o conceito de limite. Entre eles podemos citar as pesquisas realizadas por David Tall (Tall,1981), (Tall,1983), Cornu (Tall, 1991,pág. 153) e Sierpinska (Sierpinska ,1985).:

1. **David Tall** – em suas pesquisas sobre o aprendizado de matemática em nível médio e superior ele desenvolveu uma teoria que aborda estruturas cognitivas envolvidas na aprendizagem. Alguns dos conceitos desenvolvidos são:
    - Definição Conceito- é disposição de palavras para especificar conceitos

- Imagem Conceito - consiste de todas as estruturas cognitivas associadas a conceitos (figuras mentais, propriedades e processos).
- Conceitos – são símbolos e nomes que permitem manipulação mental e comunicação.
- Fator de Conflito Potencial - fazem parte da imagem conceito e da definição conceito.
- A noção de limite – é estudada utilizando estas categorias teóricas e explorando os conflitos cognitivos entre imagem conceito e definições conceitos, considerando que "... as imagem conceito de limite e continuidade têm bastante probabilidade de possuírem conflitos com a definição conceito. ...".

2. **Bernard Cornu** – faz um estudo sobre as dificuldades e obstáculos no aprendizado do conceito de limite neste estudo ele utiliza os seguintes conceitos:

Concepções espontâneas – são idéias, intuições, imagens e conhecimento, anteriores ao ensino formal, os quais são adquiridos na experiência diária(ele não explica como são adquiridos**),** tais como o uso coloquial dos termos**.** Essas idéias espontâneas são combinadas com novos conhecimentos adquiridos, são modificadas e adaptadas para formar as concepções pessoais dos estudantes.

Obstáculo cognitivo – não foi definido, mas ele observa que é importante estudar os obstáculos cognitivos com a finalidade de identificar as dificuldades encontradas , e determinar as estratégias apropriadas para o ensino. Ele diferencia os obstáculos cognitivos em:

Obstáculos genéticos e obstáculos psicológicos – ocorrem como resultado desenvolvimento pessoal do estudante.

Obstáculos Didáticos – ocorrem devido à natureza de ensinar e do professor.

Obstáculos Epistemológicos (Bachelard, 1983) - ocorrem devido à natureza própria dos conceitos matemáticos. Ele é, no ato de aquisição de conhecimento em si, saber intimamente, o que aparece, como inevitável resultado de necessidade funcional, para retardar a velocidade de aprendizagem e causar dificuldades cognitivas. É neste ponto que podemos encontrar as causas da estagnação e até da regressão, que nós podemos perceber as razões da inércia, os quais podem ser chamados de obstáculos epistemológicos.

Cornu apontou quatro obstáculos epistemológicos no desenvolvimento histórico do conceito de limite:

- A impossibilidade de estabelecer a ligação entre o geométrico e o numérico;
- A noção de infinitamente grande e infinitamente pequeno;
- Aspecto metafísico da noção de limite concepções espontâneas.
- A dúvida se o limite é atingido ou não.
- O estudo de Cornu tem ênfase nos obstáculos epistemológicos e concepções espontâneas.

3. **Anka Sierpinska** – A sua pesquisa procura evidenciar os obstáculos epistemológicos relativos à noção de limite.

Ele baseia seu estudo sobre o aprendizado de limite na noção de obstáculo epistemológico, o mesmo utilizado por Cornu. O estudo de Sierpinska foi feito com experimentos nos quais foram observados o comportamento dos alunos em situação de elaboração operatória da noção de limite.

Com base no estudo do desenvolvimento histórico da noção de limite e nos experimentos realizados em seu estudo foram propostos os seguintes obstáculos epistemológicos relacionados às noções deste conceito matemático:

- *Horror Infiniti*
- Obstáculos ligados à noção de função
- Obstáculos geométricos
- Obstáculos lógicos
- Obstáculos do símbolo.

4. **Lan Li e David Tall (Tall, 1993).**

Fazem um estudo de uma introdução ao conceito de limite usando programação. Este foi concebido para mostrar que ao trabalhar com limites em termos de decimais finitas existem dificuldades inerentes. O estudo envolve a um ambiente de programação como a transição entre o paradigma informal, no qual o limite é visto como um processo infinito , e o paradigma formal (ε–N). O paradigma computacional permite ao símbolo do termo de uma seqüência se comportar ora como processo, ora como objeto mental permitindo que este símbolo seja visto como um *procept*. No sentido de (Gray & Tall, 1991). O conceito de limite pode ser investigado pelo cálculo, usando programa, da seqüência de termos s(n) para n grande para verificar se os valores estabilizam em torno de um valor fixo. Os experimentos mostraram que uma seqüência é vista como um tipo de *procep*t, mas que a noção de limite permanece mais no plano de processo.

Anexo G - Considerações de Piaget: a relação entre classes e números inteiros

As conclusões de Piaget sobre a relação entre as estruturas lógicas e matemáticas são relacionadas em (Piaget, 1976, pág. 181 - 202) e estão resumidas no texto seguinte:

Ao se fazer a interpretação da passagem da lógica das classes e das relações ao sistema de números, não se reduz o número a esta lógica intensiva, mas simplesmente se marca a continuidade das transformações que os ligam. Ao generalizar as operações constitutivas da classe e da relação assimétrica, obtêm-se os números inteiros. O número inteiro é uma síntese da classe e da relação assimétrica: é uma composição de unidades ao mesmo tempo substituíveis e seriáveis. Ele não é nem redutível à lógica intensiva, nem radicalmente distinto. Ele constitui uma síntese operatória nova das operações (substituição e seriação) que permanecem necessariamente separadas em lógica.

A passagem da lógica intensiva ao número efetua-se, essencialmente, por uma generalização das conexões das partes entre elas, ou dos elementos entre eles, das operações que a lógica aplica apenas às conexões das partes ao todo. Tal generalização permite liberar os elementos ou as partes de suas totalidades encaixantes para ligá-las diretamente uma à outra. A transformação dos agrupamentos da adição das classes e da adição das relações assimétricas no grupo aditivo dos números inteiros equivale a satisfazer três condições, que exprimem o relacionamento das partes ou elementos entre eles, sem passar pelo todo:

- Supressão das limitações devidas à continuidade, isto é, relações de complementaridade entre as classes (A e A’ em B, B e B’em C; etc.). O que significa um relacionamento direto das classes elementares (A, A’, B’, C'...) entre si. O número desencaixa as unidades para conferir-lhes uma mobilidade operatória completa.

- Generalização da equivalência e da similitude, o que significa uma substituição ou uma permutação possíveis entre quaisquer elementos, independentemente de novo de seus encaixes.
- Supressão da tautologia em proveito da iteração (por fusão da adição da classe e da adição das relações) o que torna possível a composição direta de toda unidade com uma outra.

O fato de desencaixar as classes elementares de suas classes primarias encaixantes transforma essas classes elementares em classes disjuntas.

Além da passagem da lógica intensiva à teoria dos conjuntos seria necessário considerar toda a passagem da quantidade intensiva à quantidade extensiva não numérica. No caso de conjunto infinitos não enumeráveis como um sistema de intervalos encaixados tendendo para um ponto limite, ocorre uma série de conexões "quase todos"que dependem de uma quantificação extensiva que ultrapassa a lógica intensiva, sem, entretanto implicar uma sucessão de unidades se se parte dos agrupamentos aditivo de classe e do agrupamento aditivo de relações, há então simplesmente o relacionamento direto das partes ou das diferenças existentes entre elas, por exemplo sob a forma:

$$A' > B' > C' > \dots$$

$$a' > b' > c\dots$$

$$\rightarrow \quad \rightarrow \quad \rightarrow$$

Neste caso há a comparação ordenada das partes, sem fusão das classes e da relação assimétrica, ou seja, sem iteração, como no caso dos números inteiros infinitos.

Uma forma de representação do sistema conceitual contido neste anexo esta representado nas três figuras seguintes. Elas possuem mapas conceituais, construídos pelo autor do presente trabalho que mostram as relações entre classes e números inteiros segundo a visão de Piaget .

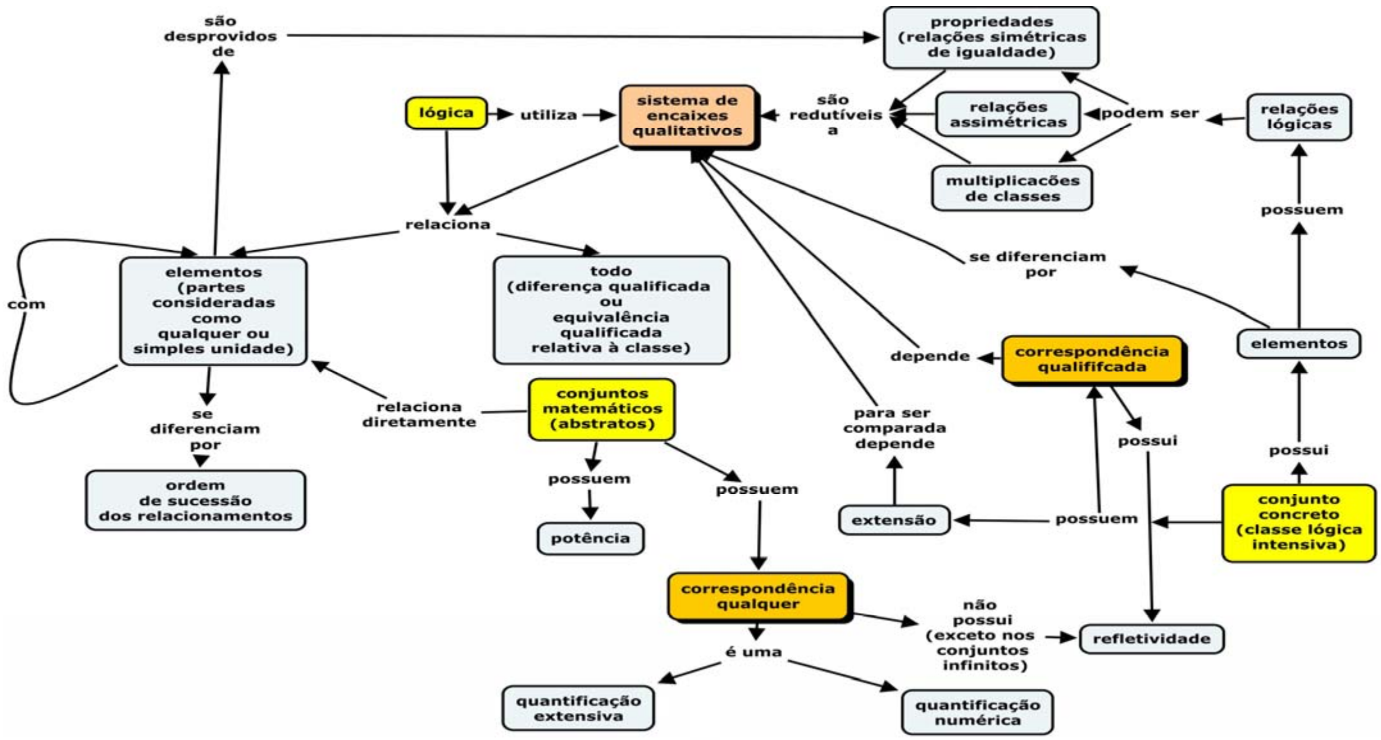

Figura 23 - Da classe ao número (1)

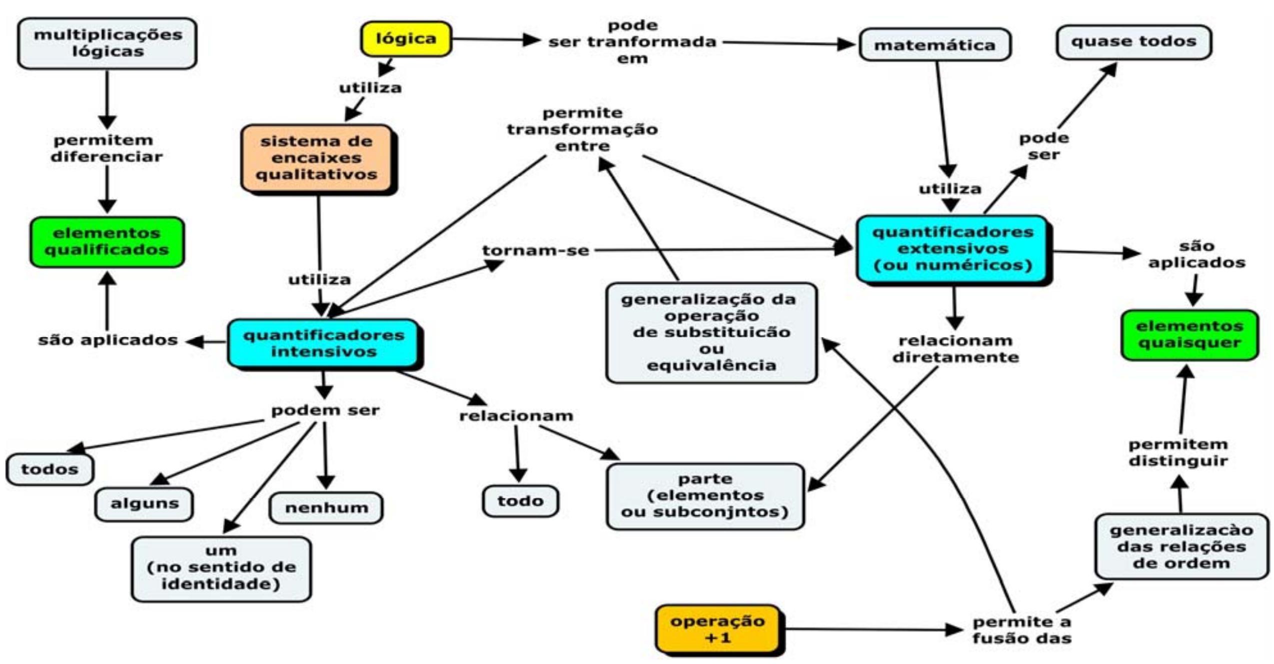

Figura 24 – Da classe ao número (2)

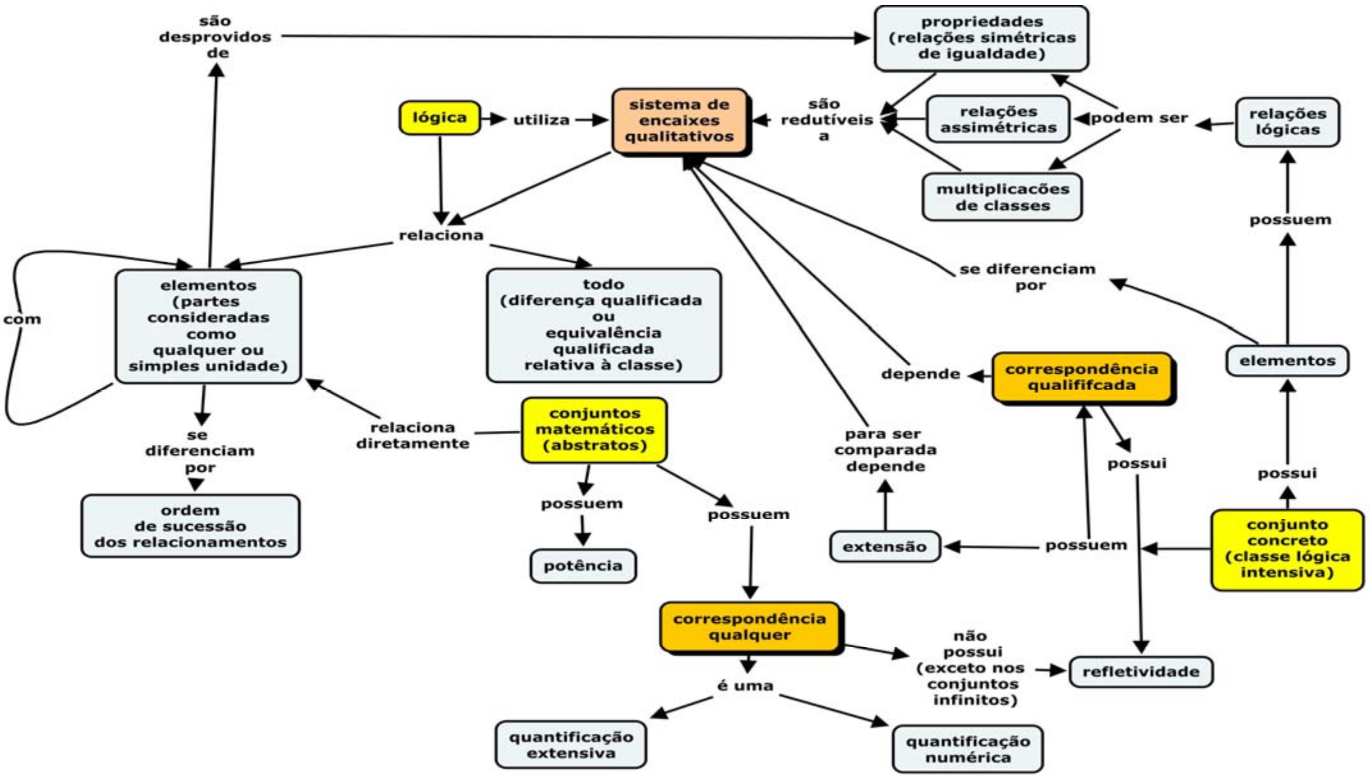

Figura 25 – Da Classe ao número (3)

Anexo H – Algumas definições de termos relativos a classes e conjuntos

Estas definições e comentários foram retirados de (Piaget, 1976).

Classe – Uma classe é um conjunto dos termos que podem ser substituídos uns pelo outros a título de argumentos conferindo um valor de verdade a uma função proposicional, ou seja, é um conjunto de termos equivalentes, que possuem o mesmo valor de um atributo.

União de Classes - é a operação que, dadas duas classes, determina a menor classe que contenha uma e outra.

Intersecção ou multiplicação simples de classes - é a operação que, sendo dadas duas classes A e B, determina a maior das classes incluídas simultaneamente em A e em B, quer dizer, sua “parte comum”.

Conjunto - Piaget apresenta a definição de conjunto do grupo Bourbaki: "é formado de elementos suscetíveis de possuir certas propriedades e de terem entre si, ou com outros elementos de outros conjuntos certas relações".

Piaget pergunta:

1. O que significam propriedades e relações?
    a. Este problema não é específico da matemática e ele afirma que isto foi tratado do ponto de vista lógico.
    b. Exemplo: a classe dos homens pode ser considerada como um "conjunto"de elementos que possuem certas propriedades (relações simétricas de co-humanidade) que mantêm entre si certas relações (mais ou menos altos, inteligentes, etc.) Estas propriedades e relações são todas redutíveis a relações de parte ao todo. O todo é a diferença qualificada, ou seja, é a equivalência qualificada relativa à classe em questão. As partes seriam as diferenças parciais ou as subclasses com suas equivalências próprias
2. O que significa para os elementos dos conjuntos a capacidade de "ter relações com elementos de outros conjuntos"? Esta afirmação não ultrapassa necessariamente o domínio da lógica das classes e das relações intensivas.

Sobre a relação entre elementos de conjuntos diferentes Piaget afirma que no caso das relações lógicas tais relações podem ser de três tipos:

1. A classe dos homens pode ser relacionada com a classe dos mamíferos, dos vertebrados. Assim o um homem x_A estará relacionado não somente com outros homens, mas com mamíferos, com os vertebrados, etc. São relações simétricas de igualdade.
2. Os homens podem ser comparados com qualquer outra coisa por meio de relações assimétricas qualificadas. Um homem pode ser considerado mais inteligente que um macaco, maior que uma formiga.
3. Os relacionamentos podem consistir em multiplicações de classes ou de relações, quer dizer, em correspondências biunívocas ou co-unívocas.

Estas três relações são todas baseadas na relação do encaixe da parte (diferença menor) no todo (diferença maior).

Relacionar elementos de conjuntos matemáticos "E" e "F" é imaginar um conjunto de aplicações de "E" a "F" que não estão sujeitas a essa condição limitativa. A diferença é que enquanto **o lógico** considera um elemento do conjunto relativamente aos encaixes ou às relações que o qualificam e o diferenciam, o **matemático** fala de um elemento *qualquer* independente de encaixes diferenciados.

Vejamos como exemplo o produto de diversos conjuntos:

- Seja E conjunto composto de dois objetos x_1 e x_2; e seja F o conjunto formado de três objetos y_1, y_2 e y_3. O produto destes dois dará seis associações x_1y_1, x_1y_2, x_1y_3, x_2y_1, x_2y_2 e x_2y_3. Neste caso cada par xy é equivalente a cada um dos outros pares por que composto de elementos "quaisquer".
- Seja uma classe B_1 constituída por duas classes singulares A_1 e A'_1, e uma classe C_2 constituída por três classes singulares A_2, A'_2 e B'_2. A multiplicação lógica de B_1 por C_2 só tem significado na medida em que ela confere certas qualidades distintas a cada par A_1A_2, $A_1A'_2$; etc. de tal modo que nenhuma destas classes multiplicativas elementares é equivalente às outras, senão como parte da classe total B_1C_2.

Anexo I – Considerações de Frege sobre o Nome

Em (Campos, 2004. pág. 55-78) as idéias de Frege são apresentadas: "Um conceito é predicativo. (...) Por outro lado, um nome de um objeto, um nome próprio, é totalmente incapaz de ser usado como um predicado gramatical". Ele propõe a noção de extensão de conceito, que é um macro-objeto semântico constituído por todos aqueles objetos que caem sob o conceito, o qual foi mais relacionado à fundamentação lógica de seu sistema. Segundo Campos (ibid.) é o conteúdo do juízo ou pensamento que interessa à lógica, não a ação privada de pensar, mediante o instrumento de idéias, aquele conteúdo. Pensamentos não são entidades psicológicas e não consistem de idéias no sentido psicológico. É o caráter experimental e objetivo do pensamento que sustenta a sua propriedade de ser verdadeiro ou falso. O pensamento, algo objetivo que pode ser apreendido por nossa mente, parece sempre depender de uma outra forma de linguagem, mas não por qualquer vínculo de caráter necessário e universal. À medida que a utilização da linguagem natural vai muito além da pura verificação da verdade ou falsidade dos pensamentos, **esta(a linguagem natural) em seus termos e formas gramaticais não reflete necessariamente, as formas lógicas do pensamento, constituindo-se, nesse sentido, num instrumento de mediação inadequado e problemático**. Ele observa que o desencontro entre a linguagem natural e o pensamento não é apenas uma forte dificuldade a ser contornada, mas o grande obstáculo subjacente a toda fundamentação da lógica.

Para Frege ao se pretender a lógica como uma ciência legisladora do modo como o pensamento veicula a verdade de tal modo depende de uma linguagem, cuja forma natural de ser não pode expressá-lo precisa e adequadamente, trata-se de construir um outro código eficiente e especializado para isso. Ele propôs a conceitografia, como sendo essa linguagem pretendida. Como forma ela se aproxima da linguagem matemática, em sua propriedade sintática de expressão de outro modo, ela, diferentemente do puro cálculo, deve ser capaz de captar o conteúdo do pensamento à semelhança da linguagem natural, mas, com a precisão que esta última não tem para os propósitos científicos.

O fato semântico de que o indivíduo caia sob um conceito justifica a necessidade de distingui-los é extremamente importante para a lógica. Com esta análise da distinção indivíduo conceito, paralela à de argumento e função, como par destinado a substituir o sujeito e predicado, Frege começa a se envolver com a problemática categoria de nome próprio. Ao vincular o conceito à idéia de função, sua preocupação estava voltada exclusivamente para a filosofia da matemática. Com a finalidade de eliminar a confusão que se estabelece entre nome próprio e conceito Frege procura acentuar a distinção nome próprio-termo conceitual. Este tem como papel designar um conceito. Somente quando combinado com um artigo definido ou pronome demonstrativo pode corresponder a um nome próprio. Mas nesse caso pára de corresponder a um termo conceitual geral. O nome de uma coisa é um nome próprio. Ele vinculou o conceito à idéia de função, pois sua preocupação estava voltada exclusivamente para a filosofia da matemática, e usou a dupla argumento–função para substituir a dupla sujeito-predicado, considerada pela lógica clássica. Frege pensava que a função só pode cumprir seu papel lógico se relacionada à idéia de verdade. O Valor de uma função é um valor-de-verdade. Ele distingue entre o valor-de-verdade do verdadeiro (verdadeiro) e o valor-de-verdade do falso (falso). Conceito é uma função cujo valor é sempre um valor-de-verdade.

Na época de seu trabalho havia uma corrida para a matematização da lógica e esta é uma ciência de caráter normativo a expressar as leis mais gerais da verdade. A finalidade da lógica é estabelecer as leis ou normas do pensamento correto ou julgamento, cujo conteúdo é o objeto essencial de sua investigação. Julgar é reconhecer que um pensamento é verdadeiro, e fazer uma asserção é comunicar este reconhecimento. Como ciência da inferência válida, então a Lógica examina a legitimidade da passagem de asserções para asserções, ou seja, busca determinar a validade de um argumento a partir do conteúdo dos juízos tomados como verdadeiros. Ela é um instrumento prescritivo de como o pensamento pode alcançar a verdade e possibilitar a sua propagação, independente de cada área específica de conhecimento. Essas regras, mesmo que sejam normativas, não são arbitrárias.

Anexo J – Entrevistas na íntegra e cálculos realizados

Neste anexo estão relacionadas as quatro entrevistas, na íntegra, entre aquelas realizadas no CEFET/AM.

	Sujeito: Fran[15] 12/06/2007 segundo ano do nível médio com 15 anos	
	Objeto com raiz quadrada de dois	
Prof.	(após explicação pede ao aluno para criar um quadrado de área 1 e em seguida pede pra criar um quadrado de área 4 utilizando os quadrados verde que possuem 1 cm quadrado de área.) Você criou um quadrado de área 4. Qual é o tamanho do lado do quadrado de área 4?	
Fran[15]	2 cm	
Prof.	e se eu quisesse um quadrado de área 9 dava pra criar?	
Fran[15]	sim	
Prof.	como?	
Fran[15]	(criou o quadrado de área 9)	
Prof.	qual o tamanho do lado deste quadrado?	
Fran[15]	3 cm	
Prof.	um quadrado de área 16, qual seria o tamanho do lado.	
Fran[15]	4 cm	
Prof.	e de área 25	
Fran[15]	5 cm	
Prof.	e um quadrado de área 36	
Fran[15]	6 cm	
Prof.	Utilizando este quadrado ou este triangulo maior ou combinando eles eu queria que você fizesse um quadrado de área 2	desequilíbrio
Fran[15]	...	

Prof.	qual é a área deste quadrado verde?e a área deste triângulo marrom embaixo do quadrado verde?	
Fran[15]	meio centímetro quadrado	
Prof.	da pra formar, utilizando os triângulos (marrons), um quadrado de área 2?	
Fran[15]	é possível	
Prof.	você pode fazer?	
Fran[15]	posso (executa)	composição
Prof.	quantos triângulos você vai precisar Francisco?	
Fran[15]	4	
Prof.	por que 4?	
Fran[15]	pra poder formar...	
Prof.	esse quadrado que tem área dois qual é o tamanho do lado dele?	
Fran[15]	raiz de dois	mostra ter noção da raiz de dois
Prof.	e quanto é que isso mede?	
Fran[15]	1,...	já se confronta com o fato de que não dá um valor exato
Prof.	1, quanto? Quer medir na régua?	
Fran[15]	vou usar a régua vou tentar um método aproximado	já tem a noção de que tem que aproximar
Prof.	ok	
Fran[15]	1,41	
Prof.	anote na planilha. Diga-me 1.41 vezes 1.41 da dois realmente?	
Fran[15]	Não, dá aproximadamente 1.9881.	
Prof.	quanto é a diferença pra dois	
Fran[15]	aproximadamente 0.0119	
Prof.	é possível diminuir essa diferença?	
Fran[15]	sim	noção de ordem
Prof.	como?	
Fran[15]	adicionando mais casas decimais	relação de ordem, seriação.
Prof.	onde?	
Fran[15]	ao lado, pra ficar um numero mais preciso.	Ocorre ainda uma relação de ordem

Prof.	qual seria esse outro numero?	
Fran[15]	1.4142	
Prof.	você ta lembrando o que você achou na calculadora?	
Fran[15]	hum, hum. (sim)	
Prof.	quanto vai dar se você elevar esse numero ao quadrado?isso é a área não e'?	
Fran[15]	sim	
Prof.		
Fran[15]	(obtém 1,4142 e anota na planilha), (obtém a área de 1,99962 e diferença de 0.00004).	
Prof.	qual que é diferença pra dois?	
Fran[15]	0.00004	
Prof.	se você aumentou o numero de cada decimal você obteve 1,4142 e fez a diferença ficar menor, se eu te der a diferença você sabe chegar ao valor do lado?	pensamento reversível, operação.
Fran[15]	hum, hum. (sim)	
Prof.	exemplo dez elevado a menos cinco?Qual o tamanho do lado?	
Fran[15]	subtrairia essa diferença de dois e tiraria a raiz quadrada	
Prof.	então faça	
Fran[15]	1.41421	
Prof.	que valor é esse?	
Fran[15]	um numero bem aproximado da raiz quadrada de dois.	noção de ordem,
Prof.	que é o lado, certo?	
Fran[15]	hum, hum. (sim)	
Prof.	Então vamos revisar, se eu te dou o valor do lado você acha a diferença, se eu te dou o valor da diferença você vai achar o valor do lado?	
Fran[15]	sim	
Prof.	é possível sempre diminuir essa diferença?	
Fran[15]	com certeza	relação de ordem de intervalos,
Prof.	mas em algum momento você vai chegar na raiz de dois?	

Fran[15]	hum... Poderia chegar a um valor bem próximo, mas sempre não, por que o valor tenderia a diminuir muito ai seria um valor bem aproximado que seria um número próximo.	vizinhança, separação, intervalos encaixados, ordem.
Prof.	você chega a um número próximo, mas nunca chega?	
Fran[15]	nunca chega	coordenação feita pela generalização dos intervalos que diminuem sempre
Prof.	mas qualquer diferença que eu te der você consegue achar o valor?	
Fran[15]	com certeza	
Prof.	você conseguiria representar esses números num eixo (cartesiano)(abre o programa no cabri Geometre II)?	
Fran[15]	(através de manipulação do mouse e de ponto sobre o eixo x localiza onde seria aproximadamente a raiz de dois) (demonstra saber a localização e a posição dos outros valores em relação a este valor).	seriação, ordem, envolvimento, encaixe de números.
Prof.	então se eu te de o valor da diferença você acha o lado e se eu te der o valor do lado você acha a diferença?	
Fran[15]	sim	
Prof.	Eu vou conseguir chegar à raiz de dois exato?	
Fran[15]	exato não, vai dar um valor aproximado.	conceito da irracionalidade da raiz de dois
Prof.	por quê?	
Fran[15]	por que sempre que for colocar uma diferença nunca vai ficar uma diferença inexistente, não vai dar um valor exato.	já tem as ferramentas pra falar da diferença arbitrária
Prof.	Qualquer diferença que eu propuser você sabe achar o lado e pra qualquer lado você sabe achara diferença?	
Fran[15]	sim	

	data 26/11/2007 continuação	
	Objeto com raiz quadrada de dois	

Prof.	você lembra do experimento que fizemos em junho no qual eu perguntava assim: do lado você chegava à área do quadrado de área dois, da diferença em relação a dois você chegava no lado. Eu perguntava o que tem que fazer pra diminuir a diferença em relação a dois?	
Fran[15]	tem que ir aproximando da raiz de dois de 1,4142... tem que aumentar o numero de casas decimais	identidade
Prof.	se eu propuser uma diferença de 10 a menos 7 você sabe chegar na diferença	recíproca
Fran[15]	sei. (calcula o valor do lado 1.414213527)	executa o que representa a recíproca
Prof.	é possível que eu faça o valor do lado chegue sempre mais próximo da raiz de dois e o valor da diferença não diminua	teste da inversa por negação
Fran[15]	a diferença vai sempre diminuindo, mas nunca vai ter um limite pra isso porque os números são infinitos, sempre vai ter um número que vai ter uma diferença entre eles.	
Prof.	é possível você fazer uma aproximação da raiz de dois e a diferença não diminuir	
Fran[15]	quando a gente vai aproximando da raiz de dois a diferença é essa diferença diminuir cada vez mais, o lado vai se aproximando da raiz de dois, a área vai se aproximando de dois e a diferença vai se aproximando de zero.	certeza da inversão por negação
Prof.	é possível algum caso em que isso não aconteça?	
Fran[15]	não que a gente for se aproximando do valor a diferença vai sempre diminuindo.	certeza da inversão por negação
Prof.	é possível que eu não me aproxime de1,4142 e use 1,44 , 1.45 e mesmo assim os valores do lado ao quadrado não se aproximem de dois?	erro do entrevistador
Fran[15]	não é impossível, a gente vai multiplicar um valor por ele mesmo , elevando ao quadrado e não tem como não diminuir, a gente ta diminuindo um número e esse outro continuar aumentando.	
Prof.	é possível que eu me afaste de 1.4142 e o valor da diferença diminua.	teste da correlativa
Fran[15]	vai sempre aumentar a diferença, o valor fica mais longe da raiz de dois e a diferença vai sempre aumentar	segurança na correlativa.

Tabela de valores - Experimento sobre conceito de limite - raiz quadrada de 2			
Escola cefet am uned Manaus			
Nome Fran[15]			
Série 2 c Idade 15 Data_12__/06___/___2007			
Cálculo e Anotações			
lado = L	L(i+1) -L(i)	Área = A = L X L	| A - 2 |
2.00000		4.00000	
3.00000		9.00000	
4.00000		16.00000	
1,41		1.98810	0.01190
1.41420		1.99996	0.00004
1.41421		1.99999	0.00001
1.41421352700000		1.99999990000000	0.00000010000000

	Sujeito:Ric[15] 15 anos primeiro ano nível médio 07/05/2008 Cefet/AM	
	Objeto com raiz quadrada de dois	
Prof.	Por favor crie um quadrado usando o objeto digital interativo	
Ric[15]	(executa)	
Prof.	quanto vale o lado desse quadrado?	
Ric[15]	1 cm	
Prof.	quanto é a área desse quadrado?	
Ric[15]	1 cm ao quadrado	
Prof.	juntando mais quadrados é possível formar um quadrado de área 4?	

Ric[15]	sim (executa)	separação e recomposição
Prof.	esse quadrado de área 4 qual é o tamanho do lado dele?	
Ric[15]	2	
Prof.	eu queria um quadrado de área 9	
Ric[15]	(executa)	
Prof.	qual o tamanho do lado dele?	
Ric[15]	3 cm	
Prof.	um quadrado de área 16 qual seria o tamanho do lado dele?	
Ric[15]	4cm e um de área 25?	
Prof.	5cm	
Ric[15]	(anota os valores na planilha).	
Prof.	área 9 lado 2, área 16 lado 4, área 15 lado 5, se eu quiser um quadrado de área 2 , quanto é o tamanho do lado?	
Ric[15]	raiz quadrada de dois	já tem noção da raiz quadrada de dois
Prof.	como você escreveria isso em forma de número decimal? Que medida daria?	
Ric[15]	um vírgula alguma coisa	
Prof.	é possível usando só quadrado verde criar uma afigura de área 2?	
Ric[15]	dá (executa, mas precisa de questionamentos do experimentador)	
Prof.	eu quero que você forme um quadrado de área 2. Da pra formar um quadrado de área 2 só com os quadrados verdes?	
Ric[15]	Não	
Prof.	É impossível?	

Ric[15]	Eu acho que é?	
Prof.	(pede pra calcular a área do triângulo marrom)	
Ric[15]	da um vírgula alguma coisa	
Prof.	essa é a única base que você pode usar pra calcular a área dele?	
Ric[15]	Não	
Prof.	calcule a área desse triângulo pra mim.	
Ric[15]	dá meio	
Prof.	usando só triangulo marrom é possível fazer uma figura geométrica de área 2?	
Ric[15]	dá sim	
Prof.	então tente	
Ric[15]	(forma um retângulo de área 2)	
Prof.	é possível transformar este retângulo de área 2 num quadrado de área 2?	composição/recomposição de figuras
Ric[15]	usando estes aqui ou pode pegar mais?	
Prof.	se você escolher mais um da pra formar um quadrado de área 2	
Ric[15]	não	
Prof.	então tente só com estes que você tem, você pode afastar girar...	
Ric[15]	faz outro retângulo	
Prof.	(pede pra ele tentar de novo).	
Ric[15]	pode ter espaço vazio no meio do quadrado?	
Prof.	tenta	
Ric[15]	(não consegue)	
Prof.	é impossível?	

Ric[15]	acho que é	
Prof.	experimente outras formas de colocar os triângulos juntos	
Ric[15]	(é necessária a intervenção do experimentador para que seja formado o quadrado)	o experimentador teve que intervir para que fosse montado o quadrado de área 2
Prof.	qual é a área desse quadrado?	
Ric[15]	2	
Prof.	área 9 lado 3 área 16 lado 4 e área 2 qual é o tamanho do lado?	
Ric[15]	1.5	
Prof.	você mediu direito?	
Ric[15]	não.deu aproximadamente 1.4	
Prof.	o que tu fizeste de quatro pra dar 16 de três pra dar 9	
Ric[15]	ao quadrado	
Prof.	1.4 ao quadrado dá dois?	
Ric[15]	deu 1.96	
Prof.	se a área é dois o lado ao quadrado deveria dar dois. Por que não deu?	
Ric[15]	por que é 1.40 alguma coisa	
Prof.	quanto faltou pra dois?	
Ric[15]	0.4	
Prof.	0.4?	
Ric[15]	é	
Prof.	faça a conta na calculadora	
Ric[15]	0.04	

Prof.	anote na planilha. Como faço pra essa conta ficar mais próximo de dois?	começa o processo de aproximação
Ric[15]	vai aumentar 004 no 1.4. Vai colocar 1.404	
Prof.	por que você vai colocar 0.04 lá no lado?	
Ric[15]	por que tem aumentar pra dar.....	
Prof.	tem que aumentar o lado pra dar mais próximo de dois. É isso?	
Ric[15]	sim	
Prof.	quanto tem que aumentar o lado pra dar mais próximo de dois, você sabe?	
Ric[15]	não	
Prof.	você ta chutando 0.04?	
Ric[15]	isso	tem noção do processo de aproximação e ordem mas ainda não domina pois faz tentativas sem maior consciência do que faz
Prof.	então tente	
Ric[15]	(executa)	
Prof.	1.404 ao quadrado vai dar dois?	
Ric[15]	não sei	
Prof.	vamos testar	
Ric[15]	deu 1.971216	
Prof.	anote na planilha.	
Ric[15]	executa	
Prof.	quanto é a diferença pra dois	
Ric[15]	(calcula e obtém) 0.028784	

Prof.	qual das duas é a menor diferença que você fez essa ou a anterior?	
Ric[15]	essa ai	
Prof.	é possível fazer essa diferença menor ainda?	
Ric[15]	é aumentando o lado do quadrado	noção de ordem
Prof.	pra quanto vai esse lado agora?	
Ric[15]	1.408	
Prof.	experimenta	
Ric[15]	(obtém 1.982464)	
Prof.	quanto é a diferncá pra dois?	
Ric[15]	0.017536	
Prof.	a diferença ficou menor ainda?	
Ric[15]	ficou	
Prof.	eu quero um diferença menor, como você faria?	
Ric[15]	1.412	noção de ordem
Prof.	por que 1.412?	
Ric[15]	por que ta aumentando de 0.04 em 0.04	
Prof.	anote os valores	
Ric[15]	(obtém 1.993744)	
Prof.	quanto dá a diferença pra dois?	
Ric[15]	0.006256	
Prof.	da pra ficar menor essa diferença	
Ric[15]	teria que aumentar o lado do quadrado	
Prof.	pra quanto?	

Ric[15]	1.414	noção de ordem
Prof.	tente	
Ric[15]	(obtém 1.999396 com diferença 0.000604)	
Prof.	ficou menor a diferença?	
Ric[15]	ficou	
Prof.	(pede ao sujeito para fazer a diferença entre os lados do triangulo, sempre o último valor usado menos o penúltimo) Qual seria o próximo número que você usuário para o lado	
Ric[15]	(escolhe 1.4149 com área 2.00194201 e diferença 0.00194201)	
Prof.	qual é a menor diferença de todas	
Ric[15]	0.000604	
Prof.	desses valores de área que você usou qual é o mais próximo de dois?	
Ric[15]	1.009396	
Prof.	qual é a diferença do 1.4149 pro 1.414	
Ric[15]	0.0009	
Prof.	qual é a menor diferença de todas e o que ta acontecendo com a diferença entre os lados?	
Ric[15]	estão aumentando	
Prof.	(revisa os cálculos feitos entre as diferenças)	
Ric[15]	(conclui que as diferenças entre os lados diminuíram)	

Prof.	do lado eu achei a diferença se eu te der a diferença da pra achar o lado? Por exemplo 0.0005.(relembra na lousa o processo que parte do lado para a diferença e pergunta de novo)	testando o pensamento reversível/operatório
Ric[15]	acho que sim, só que maior que dois	
Prof.	eu quero partir da diferença e chegar ao lado como se faz?	
Ric[15]	acho que soma com dois e eleva ao quadrado	tem uma noção inicial incorreta
Prof.	tente.	
Ric[15]	(tenta)	
Prof.	se a diferença for negativa a área vai dar maior ou menor que dois?	noção de ordem
Ric[15]	ela vai somar com dois se for negativa	noção de ordem pois sabe a relação da diferença com a área
Prof.	ok então tente	
Ric[15]	(obteve área 1.9995)	
Prof.	e o lado quanto é?	
Ric[15]	é a raiz quadrada da área (1.4140367746)	
Prof.	comparando os valores da diferença pra área esse 1.4149 é um número bom a ser usado se eu comparar ele com o 1.4140367746?	
Ric[15]	não	
Prof.	calcule a diferença desse ultimo lado pro 1.4140	
Ric[15]	0.00086	
Prof.	o que ta acontecendo com a diferença (entre os lados)?	
Ric[15]	ta diminuindo	

Prof.	quanto menor a diferença entre as áreas o que acontece com a diferença entre os lados?	percebe o comportamento dos valores, mas falta testar o encaixe
Ric[15]	tão diminuindo também?	
Prof.	qual seria o próximo numero que você colocaria depois do 1.41403677	
Ric[15]	1.4141	
Prof.	depois do 1.4141?	
Ric[15]	1.4141 alguma coisa	
Prof.	escreva	
Ric[15]	1.41411	
Prof.	é possível colocar algum número entre 1.4141 e o 1.41411	
Ric[15]	1.414101	
Prof.	é possível colocar algum número entre 1.41411 e o 1.414101?	
Ric[15]	é	
Prof.	qual seria?	
Ric[15]	1.414102	tem noção do encaixe/envolvimento
Prof.	e entre o 1.414101 e o 1.414102 é possível colocar algum número entre eles?	
Ric[15]	é sim	
Prof.	sempre é possível colocar entre dois números um outro número?	
Ric[15]	é sim	
Prof.	esse processo é finito ou finito? Chega uma hora que você não pode mais colocar número?	

Ric[15]	acho que é infinito	
Prof.	sempre vou poder colocar entre dois números um outro número	
Ric[15]	hum, hum.	
Prof.	não tem fim isso. Vai ser sempre possível?	
Ric[15]	acho que sim	já tem noção embora não demonstre total segurança da generalização do processo de encaixe
Prof.	tem certeza?	
Ric[15]	eu acho	
Prof.	mas não tem certeza?	Idem
Ric[15]	sim	
Prof.	agora vamos pra outra pergunta : sempre é possível da diferença chegar ao lado ou tem algum caso que eu vou e dar o valor da diferença e você não vai chegar ao valor do lado?	
Ric[15]	acho que sempre vai ser possível	noção da operação recíproca
Prof.	essa diferença essa diferença vai ser zero?	
Ric[15]	vai	
Prof.	quanto vai ser o lado com diferença zero.é possível achar o valor do lado?	
Ric[15]	não é possível	
Prof.	por quê ?	
Ric[15]	vai ser raiz quadrada de dois	
Prof.	é possível achar a raiz quadrada de dois?	

Ric[15]	não	noção da irracionalidade da raiz de dois
Prof.	sempre que os valores do lado vão ficando próximos os valores da diferença vão ficar próximos?	
Ric[15]	vão	recíproca e pensamento reversível
Prof.	é possível que os valores do lado se aproximem e os valores da diferença não se aproximem	Inversa
Ric[15]	não	noção da inversa
Prof.	é impossível ?	
Ric[15]	hum, hum.	
Prof.	é possível que os valores da diferença diminuam e os valores dos lados não se aproximem um do outro?	noção da correlativa
Ric[15]	. É impossível. Eu acho que não	
Prof.	repete a pergunta	
Ric[15]	eu acho que é impossível	

Tabela de valores - Experimento sobre conceito de limite- raiz quadrada de 2			
Escola cefet AM uned Manaus			
Nome Ric[15] 15 anos primeiro ano c			
Série 1 c Idade 15	Data_07__/05___/___2008		
Cálculo e Anotações			
lado = L	L(i+1) -L(i)	Área = A = L X L	| A - 2 |
2.00000		4.00000	
3.00000		9.00000	
4.00000		16.00000	
1.40000		1.96000	0.04000
1.40400	0.00400000	1.97121600	0.02878400
1.40800000000000	0.00400000	1.98246400	0.01753600

1.41200000000000	0.0040000000	1.9937440000	0.0062560000
1.41400000000000	0.0020000000	1.9993960000	0.0006040000
1.41490000000000	0.0009000000	2.0019420100	0.0019420100
1.41403677460000	0.0008600000	1.9995000000	0.0005000000
1.4141000000000			
1.4141100000000			
1.4141010000000			
1.4141020000000			

	Nil[17] segundo anodo nível médio com 17 anos aluno do CEFET/AM 05/05/2008	
	Objeto com raiz quadrada de dois	**Relações e operações lógicas e infralógicas**
Prof.	suponha que esse quadrado verde , o lado dele vale 1, centímetro, metro, o que você quiser. Crie um quadrado	
Nil[17]	(executa)	
Prof.	quanto é área desse quadrado?	
Nil[17]	1m quadrado	
Prof.	porque 1 metro quadrado?	
Nil[17]	por que base X base dá um metro quadrado	
Prof.	eu gostaria que você criasse um quadrado de 4 metros quadrados	
Nil[17]	(executa)	divisão e recomposição
Prof.	qual o tamanho do lado desse quadrado?	
Nil[17]	2 metros	
Prof.	(pede ao sujeito para lançar os dados em planilha)	
Nil[17]	executa	
Prof.	eu gostaria que você criasse um quadrado de 9 metros quadrados	divisão e recomposição
Nil[17]	(executa)	

Prof.	esse quadrado de área 9 , quanto é o tamanho do lado dele?	
Nil[17]	3 metros	
Prof.	se esse quadrado tem área 1 quanto de área tem esse triângulo?(triangulo marrom)	
Nil[17]	0.5	
Prof.	crie um triângulo	
Nil[17]	(executa)	
Prof.	como você mede a área do triângulo?	
Nil[17]	....	
Prof.	qual é a área desse triângulo?	
Nil[17]	0.5	
Prof.	você chutou ou calculou?	
Nil[17]	calculei	
Prof.	então você tem certeza...	
Nil[17]	sim	
Prof.	se eu quisesse um quadrado de área 16 de quanto quadrados eu precisaria?	
Nil[17]	16	
Prof.	que tamanho vai ser o lado?	
Nil[17]	vai ser 4	
Prof.	anote na planilha por favor	
Nil[17]		
Prof.	Se eu quiser um quadrado de área 2 da pra fazer utilizando qualquer dessas figuras ?	
Nil[17]	faz um retângulo de área 2 usando os triângulos marrons e azuis, mas quando questionado a fazer um quadrado apaga os azuis e usa só os marrons formando um retângulo de área 2	
Prof.	eu gostaria que você formasse um quadrado de área 2 . Dá pra formar?	
Nil[17]	dá (forma o quadrado depois de questionamentos) tem alguma dificuldade, acha impossível, mas encontra a solução.	divisão e recomposição
Prof.	se o quadrado tem área 2 quanto mede cada lado desse quadrado?	
Nil[17]	1.5	
Prof.	tem certeza?	
Nil[17]	sim (anota na planilha e calcula área de2,25).	
Prof.	quanto mede a área?	

Nil[17]	2,25	
Prof.	1,5 ao quadrado deu 2,25 ,mas a área é 2, por que não deu 2?	desequilíbrio confrontado aquilo que parece evidente
Nil[17]	por que as figuras não têm tamanho pra dar dois	
Prof.	se a área é dois o lado ao quadrado teria que dar dois, por que não deu dois? Ta correta a tua medida de 1,5?	
Nil[17]	(refaz a medida)é um pouco menor	diante do fato da medida não confere com os resultados ele revisa a medição do lado
Prof.	quanto seria a medida?	
Nil[17]	1,42 (anota)	
Prof.	quanto vai dar a área agora?	
Nil[17]	2.0164	
Prof.	quem tá mais próximo de dois 2.25 ou 2.0164?	
Nil[17]	2.0164	
Prof.	quanto é a diferença de lado desse que você fez agora pro anterior?	
Nil[17]	0.8 (corrige pra 0.08)	
Prof.	1.42 ficou melhor que 1.5 pra dois ficou uma diferença de 0.0164 você acha que é possível que fique mais próximo de dois ainda?	teste da noção de ordem
Nil[17]	é sim	noção de ordem
Prof.	como?	
Nil[17]	diminuindo o lado.	ordem
Prof.	de 1.42 eu vou jogar que valor agora?	
Nil[17]	1.415 (e obtém 2.002225)	
Prof.	qual o que ficou mais próximo de dois?	
Nil[17]	1.415	
Prof.	quanto deu a diferença dele pro lado anterior?	
Nil[17]	0.005	
Prof.	1.415 fez ficar mais próximo de dois, qual seria o número que faria ficar mais próximo ainda de dois a área?	ordem e encaixe
Nil[17]	tem que diminuir, né? Acho que 1,411.	ordem e encaixe

Prof.	experimenta. (comenta os resultados)	
Nil[17]	deu 1,990921	
Prof.	qual é que tá mais próximo de dois é esse ou o anterior(2.002225)	ordem
Nil[17]	o de cima (2.002225)	
Prof.	qual é a menor diferença?	
Nil[17]	o de cima	
Prof.	dá pra achar uma diferença menor ainda?	
Nil[17]	da	
Prof.	qual seria o próximo número que você usaria?	
Nil[17]	1.412	
Prof.	por que você ta usando o 1.412?	
Nil[17]	por que é menor que o 1.415	ordem e encaixe do novo número
Prof.	por que ele é menor que o 1.415 e maior que o 1.411 é isso?	ordem e encaixe (envolvimento)
Nil[17]	sim	
Prof.	então vamos testar com o 1.412 pra ver o que vai dar	
Nil[17]	obtém 1.993744 com diferença 0.006256	
Prof.	qual é a menor diferença de todos?	
Nil[17]	ainda é a resultante do 1.415	
Prof.	qual é o próximo número que você usaria (pra diminuir a diferença)?	
Nil[17]	1.414 (deu área 1.999396 com diferença 0.000604)	
Prof.	qual é menor diferençadas 4 ?	
Nil[17]	essa ultima	
Prof.	É possível fazer essa diferença fincar menor ainda?	ordem e encaixe de intervalos
Nil[17]	1.4142	
Prof.	por que esse número você ta lembrando de alguma coisa?	
Nil[17]	ele é maior que 1.414	
Prof.	vamos testar	
Nil[17]	obtém 1.99996164 (com diferença 0.00003836)	
Prof.	é possível uma diferença menor ainda?	
Nil[17]	Sim	
Prof.	qual seria o próximo número que você usaria?	
Nil[17]	1.41424	ordem e encaixe

Prof.	é possível fazer essa diferença igual a zero? Em algum momento ela vai ser zero ?	
Nil[17]	ela vai chegar bem próximo, talvez ela não se iguale, mas bem próximo ela vai chegar	
Prof.	você acha que ela vai chegar a zero em algum momento ou você acha que ela nunca vai chegar a zero, mas que eu vou poder ficar me aproximando dela ?	testando a generalização da operação de ordenação
Nil[17]	acho que pode se aproximar	
Prof.	esse processo em que eu vou me aproximar ele é finito ou ele é infinito, ou seja, em algum momento eu vou chegar na diferença zero ou eu continuar sempre e nunca vou chegar a zero. Esse processo ele é finito ou infinito ?	não tem certeza da generalização da operação e não tem noção da irracionalidade da raiz de dois
Nil[17]	acho que você pode determinar algum espaço, se você chegar ao zero ele é finito , mas se você pode se aproximar mais do zero ele é infinito	não tem certeza , mas já domina as duas possibilidades
Prof.	eu vou chegar a zero ou nunca vou chegar?	
Nil[17]	eu acho que da pra chegar	
Prof.	você falou "se eu continuar eu vou ficar me aproximando ". VOCÊ acha que da pra controlar o quanto eu vou ficar próximo de zero esse valor, da pra controlar o quanto eu vou me aproximar de dois na área. Se eu te digo eu quero uma diferença de 10 a menos 6 (0.000001) eu vou conseguir o valor do lado que me dê essa diferença?	tem noção da ordenação infinita ou do intervalo arbitrário
Nil[17]	acho que dá	
Prof.	o processo é finito ou infinito?	
Nil[17]	é finito	
Prof.	calcule as diferenças entre os valores dos lados	

Nil[17]	(executa)	
Prof.	o que está acontecendo com essas diferenças entre os lados?	
Nil[17]	ela ta diminuindo	
Prof.	qual a menor diferença da área para dois?	
Nil[17]	foi essa ultima (0.00003836)	
Prof.	e o que aconteceu com a diferença entre os lados?	
Nil[17]	ta diminuindo	percebe a convergência dos valores dos lados
Prof.	o que ta acontecendo com os lados	
Nil[17]	chegando mais próximo ele diminui, o lado	
Prof.	quem ta chegando mais próximo?	
Nil[17]	o lado , quando lado chega mais próximo a área também vai chegar mais próximo .	percebe a relação variação dos lados, convergindo, convergência da diferença
Prof.	quando a área chega mais próximo o lado também chega mais próximo?	
Nil[17]	Isso	
Prof.	olha só pros lados o que ta acontecendo com eles	
Nil[17]	estão diminuindo	
Prof.	estão diminuindo?	
Nil[17]	o lado ta aumentando, ta diminuindo a diferença entre eles	percebe o processo de convergência dos lados
Prof.	quando diminui a diferença entre dois valores o que acontece	
Nil[17]	fica bem próximo, o lado ta aumentando e a diferença ta diminuindo	relação entre variação dos lados e a diferença
Prof.	da pra concluir alguma coisa disso?	
Nil[17]	a área ta ficando mais próxima	
Prof.	e dos lados o que você pode concluir?	
Nil[17]	eles tão aumentando	
Prof.	ok. 1.414 se eu te pergunto qual é o próximo número que eu posso colocar ai o que você me diria?	
Nil[17]	eu teria que fazer um cálculo	

Prof.	precisa você calcular?(faz questionamento e perguntas para melhor explicar a questão)	
Nil[17]	1.414241	
Prof.	da pra e achar um numero mais próximo que esse que você falou?(usa um desenho da reta representando intervalo numérico)é possível um número entre 1.41424 e 1.414241?	a princípio não percebe a possibilidade do encaixe mesmo vendo um desenho representando o intervalo
Nil[17]	não ...não	
Prof.	é impossível?	
Nil[17]	é, por que depois dele já vem o outro	
Prof.	quer analisar?(usa a figura do intervalo de novo)	
Nil[17]	Da	toma consciência da possibilidade do intervalo
Prof.	por que você conclui isso?	
Nil[17]	por que acrescentando mais zero entre o quatro e...	possibilidade de encaixes diversos
Prof.	o desenho serviu pra te ajudar?	
Nil[17]	Sim	
Prof.	o que o desenho te deu que você chegou a conclusão que da pra colocar mais um número?	
Nil[17]	por que ainda há um espaço entre os dois números	
Prof.	foi por causa do espaço foi isso que te ajudou?	o desenho ajudou , pois a sua resposta correta sobre a possibilidade de fazer um novo encaixe só veio depois de ele olhar para o desenho
Nil[17]	não ...não, ajudou	
Prof.	por que você chegou à conclusão que podia colocar mais zeros	
Nil[17]	daria pra ser 1.41424001 (conclui que o espaço na reta diminuiu)	
Prof.	(usando o desenho da reta) ainda assim é possível colocar outro número entre 1.41424 e 1.41424001	
Nil[17]	sim	

Prof.	qual seria o próximo número que você usaria?	
Nil[17]	1.41424000001	mais encaixes possíveis
Prof.	eu sempre vou poder colocar um número entre dois números reais?sempre eu vou ter um número mais próximo?	
Nil[17]	sim	
Prof.	esse processo é finito ou infinito?	
Nil[17]	infinito	generalização do encaixe
Prof.	você partiu do tamanho do lado e achou a diferença , se eu te apresentar um valor de diferença você pode fazer o caminho contrário, você chega no tamanho do lado?	
Nil[17]	acho que dá	noção da recíproca
Prof.	então calcule com essa diferença 10 a menos 7	
Nil[17]	(tirou a raiz de 10 a menos 7,depois de questionado achou 1.414213555884, usa a lousa escrevendo fórmulas)	domínio, com auxílio do entrevistador, da recíproca
Prof.	se eu te der um diferença menor você acha o lado?	ordem e encaixe
Nil[17]	sim	
Prof.	é possível que essa diferença seja zero?	
Nil[17]	ai não	
Prof.	por quê?	
Nil[17]	não sei dizer	
Prof.	sempre é possível do lado chegar na diferença e da diferença chegar no lado?	
Nil[17]	sim, sempre	domínio da recíproca
Prof.	você acha que sempre é possível que os valores do lado se aproximem os valores da diferença fiquem menores?	
Nil[17]	sim	
Prof.	é possível que eu escolha valores do lado bem próximo e os valores da diferença não diminuam?	Inversa
Nil[17]	acho que é impossível	domínio da inversa

Prof.	é possível que a diferença diminua e os valores do lado não fiquem próximos?	Correlativa
Nil[17]	acho que não , é impossível	domínio da correlativa
Prof.	você acha que sempre vai ter uma relação entre os valores dos lados e a diferença?	
Nil[17]	nesse caso acho que sim	relação entre variação dos lados e a diferença
Prof.	sempre vai ter relação ?tanto na ida quanto na volta quando os valores dos lados se aproximarem os valores das diferenças vão ficar menores e se os valores da diferença ficarem menores os valores dos lados vão ficar mais próximos?	relação entre variação dos lados e a diferença
Nil[17]	Sim	

Tabela de valores - Experimento sobre conceito de limite- raiz quadrada de 2			
Escola cefet AM uned Manaus			
Nome Nil[17]			
Série 2 c Idade 17	Data_05__/05___/___2008		
Cálculo e Anotações			
lado = L	L(i+1) -L(i)	Área = A = L X L	| A - 2 |
2.00000		4.00000	
3.00000		9.00000	
4.00000		16.00000	
1.50000		2.25000	
1.42000	0.08000	2.01640	
1.41500000000000	0.0050000000	2.0022250000	0.0022250000
1.41100000000000	0.0010000000	1.9909210000	0.0090790000
1.41200000000000	0.0020000000	1.9937440000	0.0062560000
1.41400000000000	0.0002000000	1.9993960000	0.0006040000
1.41420000000000	0.0002400000	1.9999616400	0.0000383600
1.4142400000000			
1.4142410000000			
1.4142400100000			
1.4142400000100			
1.414213555884			0.0000001000

	Sujeito:Cás [17] com 17 anos 3 ano do	

	nível médio CEFET/AM 07/05/08	
	Objeto com raiz quadrada de dois	
Prof.	Crie um quadrado	
Cas[17]	(executa)	
Prof.	quanto é a área desse quadrado?	
Cas[17]	um	
Prof.	você conseguiria formar um quadrado de área 4?	composição /decomposição
Cas[17]	(executa)	
Prof.	qual é o tamanho do lado desse quadrado?	
Cas[17]	2	
Prof.	você conseguiria formar um quadrado de área 9?	
Cas[17]	(executa)	
Prof.	qual é o tamanho do lado desse quadrado?	
Cas[17]	3	
Prof.	um quadrado de área 16 de quantos quadrados (de um cm quadrado) eu precisaria?	
Cas[17]	6	
Prof.	faça	
Cas[17]	(se da conta do erro e responde 16)	
Prof.	qual é o tamanho do lado desse quadrado?	
Cas[17]	4	
Prof.	vamos pra planilha.	
Cas[17]		
Prof.	é possível formar uma figura geométrica de área 2 usando este objetos (quadrados e triângulos).por exemplo da pra formar um retângulo de área 2	
Cas[17]	(executa formando um retângulo de área 2 com dois quadrados verdes)	
Prof.	forme uma figura geométrica de área 2 com os triângulos marrons.	
Cas[17]	(executa)	
Prof.	essa figura que você criou tem área 2?	
Cas[17]	tem	

Prof.	utilizando essas figuras e sem sobre por ou cortar dá pra criar um quadrado de área 2?	
Cas[17]	não	
Prof.	você pode girar e deslocar os triângulos	
Cas[17]	(não consegue)	
Prof.	(realiza intervenção para possibilitar a construção do quadrado)	precisou da intervenção do experimentador para construir o quadrado de área 2
Cas[17]	(executa)	
Prof.	com o quadrado de área 2 qual é o tamanho do lado?	
Cas[17]	1.5	
Prof.	você quer medir?	
Cas[17]	(mede)deu 1.4	
Prof.	anote	
Cas[17]	anota os valores	
Prof.	quanto falta pra dois?	
Cas[17]	0.04	
Prof.	por que não deu dois?	desequilíbrio
Cas[17]	a medida(do lado) seria um pouco mais	ordem
Prof.	é possível a diferença pra dois ficar menor?	
Cas[17]	dá	
Prof.	como eu faria pra essa difernçá ficar menor?	ordem
Cas[17]	aumentando o lado	
Prof.	pra quanto?	
Cas[17]	1.42	
Prof.	experimente	
Cas[17]	deu 2.0164	
Prof.	quanto foi a diferença pra dois?	
Cas[17]	0.0164	
Prof.	qual é a menor diferença dessas duas que você achou ?	
Cas[17]	a segunda	
Prof.	da pra achar uma diferença menor ainda?	
Cas[17]	dá	
Prof.	como?	
Cas[17]	aumentando o lado	ordem
Prof.	pra quanto?	
Cas[17]	1.415 com área 2.002225	
Prof.	quanto é a diferença pra dois	
Cas[17]	0.002225	
Prof.	qual é a menor diferença dessas que você achou ?	
Cas[17]	essa	
Prof.	é possível fazer uma diferença menor	

	ainda?	
Cas[17]	é	
Prof.	onde você mexeria?	
Cas[17]	no tamanho do lado	
Prof.	qual seria?	
Cas[17]	1.41	ordem/encaixe
Prof.	então tente	
Cas[17]	(obtém 1.9881 com diferença 0.0119)	
Prof.	qual é a menor diferença?	
Cas[17]	0.002225	
Prof.	como você faria pra diminuir essa diferença?	
Cas[17]	usaria 1.412	
Prof.	então tente	
Cas[17]	(obtém 1.993744 com diferença 0.006256)	
Prof.	qual é a menor diferença?	
Cas[17]	é a do 1.415	
Prof.	o que fazer pra diferença ficar menor ainda	
Cas[17]	usar1.4155	
Prof.	calcule	
Cas[17]	(obtém 2.00364025 com diferença 0.0036402500	
Prof.	qual é a menor diferença	
Cas[17]	0.002225	
Prof.	o que ta faltando pra diferença ficar menor que aquela diferença 0.0022...? Que número você teria que usar?	
Cas[17]	1.414 não vai dar	
Prof.	por que você acha que não vai dar?você já experimentou	
Cas[17]	não	
Prof.	por que você falou esse valor?	
Cas[17]	diminuindo um vai dar uma diferença menor	
Prof.	experimente com 1.414	
Cas[17]	(obtém 1.999396 e diferença 0.000604)	
Prof.	qual é a menor diferença?	
Cas[17]	essa	
Prof.	é possível fazer um diferença menor ainda?	
Cas[17]	se for 1.413?	
Prof.	(experimenta)	
Cas[17]	1.996569 com diferença 0.003431	ordem
Prof.	ficou a menor diferença	
Cas[17]	não	
Prof.	como faria pra ter um diferença menor ainda?	

Cas[17]	1.4145	
Prof.	por que você chutou esse número?	
Cas[17]	por que eu tentei o 1.415 e não deu certo	
Prof.	anote	
Cas[17]	a diferença é 0.00081025	
Prof.	é menor diferença ?	
Cas[17]	não	
Prof.	qual você vai usar?	
Cas[17]	1.4144	
Prof.	experimente	
Cas[17]	2.00052736 com diferença 0.00052736	
Prof.	é a menor diferença?	
Cas[17]	é	
Prof.	1.4144 ,dá pra achar menor?	
Cas[17]	sim	
Prof.	qual seria?	
Cas[17]	1.41444	
Prof.	experimente	
Cas[17]	2.0006405136 com diferença 0.0006405136	
Prof.	esse valor não deu a menor diferença 1.413 também não deu você vai usar o que?	
Cas[17]	....	
Prof.	é possível sempre essa diferença diminuir?	
Cas[17]	é aumentando os lados	
Prof.	esse processo da diferença diminuir ele é finito ou infinito?	
Cas[17]	eu acho que é finito por que ele chega num fim	não generalizou o processo de ordenação
Prof.	a diferença pode ser zero?	não tem noção da irracionalidade da raiz de dois
Cas[17]	isso	
Prof.	eu vou sugerir um diferença 0.00001	
Cas[17]	ok	
Prof.	do lado eu achei a diferença, da diferença é possível achar o lado?	pensamento reversível/operatório
Cas[17]	sim	evidencia pensamento reversível operatório
Prof.	como você faria?	
Cas[17]	do lado eu elevo ao quadrado e diminuo de dois então eu somaria de dois e dividiria por dois	
Prof.	esse é o processo inverso do que tu fizeste? O lado você elevou ao quadrado e depois subtraiu de dois, se eu te der a diferença você vai somar com dois?	

Cas[17]	só somar	
Prof.	somar ou subtrair	
Cas[17]	só somar	
Prof.	e pra achar o lado você vai dividir por dois.	
Cas[17]	é pois o número ta ao quadrado	
Prof.	então o inverso do quadrado é a divisão?	não tem consciência plena do processo para achar o valor do lado
Cas[17]	não, é a raiz	
Prof.	então tira a raiz	
Cas[17]	(obtém lado 1.4142170979 para a diferença 0.00001)	
Prof.	esse processo da diferença menor é sempre possível?	
Cas[17]	é sempre possível	
Prof.	ele é finito?	
Cas[17]	não	
Prof.	ele é infinito?	após realizar contas para achar a diferença toma consciência de que o processo é infinito.
Cas[17]	é	
Prof.	agora você mudou de idéia	
Cas[17]	agora eu mudei de idéia	
Prof.	esse processo do lado ele é finito ou infinito?	
Cas[17]	é infinito	toma consciência de que o processo de mudança do tamanho do lado é infinito
Prof.	1.414 qual é o próximo número que eu posso colocar do lado dele?	
Cas[17]	1.4141	
Prof.	entre o 1.414 e o 1.4141 tem algum número que eu posso colocar entre eles dois?(desenha no papel para ajudar na visualização)	testando a noção do encaixe
Cas[17]	1.41400000000	
Prof.	é a mesma coisa que 1.414	
Cas[17]	não dá	
Prof.	é impossível?	
Cas[17]	não é impossível	
Prof.	você acha que tem um número entre eles ou você acha que tem mais de um número ou você acha que não tem número algum entre eles?	
Cas[17]	não tem nenhum número	tem dificuldade na noção do encaixe
Prof.	é impossível?	

Cas[17]	é	acha que o encaixe é impossível
Prof.	mas como é possível achar sempre uma diferença menor ainda , como você conseguiu fazer essas contas?	o experimentador compara o encaixe com a diferença menor sempre possível
Cas[17]	é verdade	
Prof.	é possível colocar esse número entre 1.414 e 1.4141? Qual seria esses próximo número?	
Cas[17]	tem hora que dá pra pensar que dá.Quando eu vou tentar achar o número que dá pra botar só vem números após esse um aqui, no caso o dois ou outro um depois desse número aqui sempre seria depois disso aqui, não aqui...	
Prof.	você acha que da mas você não sabe fazer ?	
Cas[17]	isso	sabe que o encaixe é possível mas não sabe fazer
Prof.	do lado eu achei a diferença é possível fazer o contrario . Da diferença achar o lado	
Cas[17]	é	
Prof.	sempre é possível?	
Cas[17]	vai dar um número muito extenso	
Prof.	se a diferença diminuir cada vez mais a diferença entre os lados vai diminuir?	testando a noção da convergencia dos valores do lado
Cas[17]	vai diminuir	
Prof.	o que vai acontecer com os valores dos lados?	
Cas[17]	vão diminuir	
Prof.	mas eles aumentaram aqui. O que ta diminuindo o valor dos lados?	
Cas[17]	não....é	
Prof.	o valor dos lados ta diminuendo?	
Cas[17]	.....	a princípio não tem noção da convergência dos valores do lado
Prof.	quando as diferenças diminuem o que acontece com os valor dos lados comparando entre eles ?	
Cas[17]	são maiores	
Prof.	aconteceu algo mais? Sempre que os valores dos lados cresceram as diferenças diminuíram e os valores dos lados fiquem próximo de um valor?	o experimentador não faz a pergunta de forma adequada, pois pode induzir ao erro
Cas[17]	é	
Prof.	sempre é possível?	
Cas[17]	sempre	

Prof.	é possível que os valores dos lados não se aproximem um do outro e a diferença fique menor?	testando a correlativa
Cas[17]	não se a diferença ficar menor os valores dos lados vão se aproximando	tem noção da correlativa
Prof.	é possível que os valores dos lados se aproximem e os valores da diferença não diminuam?	testando a inversa
Cas[17]	não	
Prof.	é impossível?	
Cas[17]	acho que é	tem noção da inversa
Prof.	é possível que os valores da diferença diminuam e os valores do lado não se aproximem	correlativa
Cas[17]	não por que o inverso que tem não	tem noção da correlativa
Prof.	é possível que os valores da diferença diminuam e os valores do lado não se aproximem	
Cas[17]	também não	
Prof.	é possível os valores do lado se aproximar e os valores da diferença não diminuir?	tem noção da inversa
Cas[17]	não. É impossível	
Prof.	é possível os valores do lado não se aproximar e a diferença diminuir	correlativa
Cas[17]	também não	tem noção da correlativa
Prof.	é possível os valores da diferença não diminuir e os valores do lado não se aproximar?	recíproca na forma de negação
Cas[17]	não	houve confusão causada pela pergunta

Tabela de valores - Experimento sobre conceito de limite- raiz quadrada de 2			
Escola cefet AM uned Manaus			
Nome Cássia Santos de Sousa 17 anos 3a telecomunicações 07/05/08			
Série 1 c Idade 15 Data_07__/05___/___2008			
Cálculo e Anotações			
lado = L	L(i+1) -L(i)	Área = A = L X L	| A - 2 |
2.00000		4.00000	
3.00000		9.00000	
4.00000		16.00000	
5.00000		25.00000	
1.40000		1.96000	0.04000
1.42000000000000		2.0164000000	0.0164000000
1.41500000000000		2.0022250000	0.0022250000

1.41000000000000		1.9881000000	0.0119000000
1.41200000000000		1.9937440000	0.0062560000
1.41550000000000		2.0036402500	0.0036402500
1.4140000000000		1.9993960000	0.0006040000
1.4130000000000		1.9965690000	0.0034310000
1.4145000000000		2.0008102500	0.0008102500
1.4144000000000		2.0005273600	0.0005273600
1.414400000000		2.0006405136	0.0006405136
1.414217097900			0.000010000000
1.4141000000			