

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

SIMULAÇÃO DE ESCOAMENTOS COM INÉRCIA DE UM FLUIDO VISCOPLÁSTICO
ATRAVÉS DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS VIA GALERKIN
MÍNIMOS-QUADRADOS

por

Leonardo Zanforlin Lessa

Dissertação para obtenção do Título de
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, Outubro de 2008

SIMULAÇÃO DE ESCOAMENTOS COM INÉRCIA DE UM FLUIDO VISCOPLÁSTICO
ATRAVÉS DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS VIA GALERKIN
MÍNIMOS-QUADRADOS

por

Leonardo Zanforlin Lessa
Engenheiro Mecânico

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia Mecânica

Área de concentração: Fenômenos de Transporte

Orientador: Prof. Dr. Sérgio Luiz Frey

Aprovada por:

Prof. Dr. Adriane Prisco Petry – PROMEC / UFRGS

Prof. Dr. Horácio Antônio Vielmo – PROMEC / UFRGS

Prof. Dr. Flávia Schwarz Franceschini Zinani - UCS

Prof. Ph.D. Flávio José Lorini
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 03 outubro de 2008

RESUMO

O objetivo deste trabalho é simular numericamente o escoamento de um fluido viscoplástico através de um cilindro posicionado sobre duas placas planas paralelas, utilizando um algoritmo numérico baseado no método de elementos finitos. A modelagem mecânica do problema é baseada nas equações de conservação de massa e conservação da quantidade de movimento, acopladas ao modelo constitutivo recentemente proposto por Souza Mendes e Dutra [Souza Mendes e Dutra, 2004], por vezes mencionado apenas como fluido SMD ou simplesmente viscoplástico. A modelagem mecânica foi aproximada pelo método de Galerkin Mínimos-Quadrados (GLS), construído para superar a falha numérica presente no método de Galerkin clássico. De forma prévia avalia-se o escoamento de um fluido Newtoniano em uma cavidade forçada, sob condições de inércia desprezível ($Re=1$) e em condições inerciais onde o número de Reynolds é excursionado entre valores iguais a 100, 400 e 1000. Em seguida, avalia-se sob esta mesma geometria, duas outras situações reológicas distintas, pseudoplasticidade e dilatância, nestes casos considerando-se o modelo constitutivo definido para um fluido Newtoniano generalizado (GNL), tendo também como principal objetivo à avaliação do código numérico utilizado no presente trabalho, frente os resultados obtidos na literatura. Por fim aborda-se a análise do escoamento do fluido viscoplástico sob a geometria proposta. Avalia-se nesta condição, variações dos valores do índice de potência n , o valor do número de salto J e principalmente as condições de inércia do escoamento, através do número de Reynolds característico para a função SMD. Em todas as situações analisadas, apresentam-se os resultados numéricos, através das isobáricas de pressão, isolinhas de velocidade e isoregiões de tensão (caracterizando regiões de maior e menor rigidez do escoamento), sempre com a principal finalidade de fornecer importantes informações sobre o fenômeno físico envolvido no escoamento do fluido viscoplástico proposto, além da caracterização da topologia presente em cada condição, podendo na maioria dos casos avaliados serem corroborados com a literatura disponível.

ABSTRACT

The objective of this text is to simulate numerically the draining of a viscoplastic fluid through a cylinder located between two plain parallel plates, using a numerical algorithm based in the method of finite elements. The modeling mechanics of the problem is based on the equations of mass conservation and movement conservation, connected to the constitutive model recently considered by Souza Mendes and Dutra [Souza Mendes and Dutra, 2004], for times mentioned only as SMD fluid or simply viscoplastic. The modeling mechanics was approached by the method of Galerkin Least-Square (GLS), constructed to surpass the present numerical imperfection of the classic Galerkin method. Previously the text perform an analysis of the Newtonian fluid draining through a lid-driven cavity, under conditions of worthless inertia ($Re=1$) and in inertial conditions where the Reynolds number is varied between values of 100, 400 and 1000. After that, over the same geometry, two other distinct rheology situations are evaluated, shear-thinning and shear-thickening, in these cases considering itself the defined constitutive generalized Newtonian fluid (GNL) model, also having as main objective to evaluate the numerical code used in this present work, comparing with the results gotten in literature. Finally it is approached analysis of the draining of the viscoplastic fluid under proposed mentioned geometry. It is evaluated in this condition, variations of the values of the power-law index n , value of the jump number J and the conditions of inertia of the draining, through the characteristic of the Reynolds number specified for the SMD function. In all the analyzed situations the numerical results are showing through the isobaric lines, velocity profiles and the stress regions (characterizing regions of greater and minor rigidity of the draining), always with the main purpose to supply important information on the involved physical phenomena in the draining of the considered viscoplastic fluid, beyond the characterization of the present topology in each condition, being able in the majority of the evaluated cases to be corroborated with available literature.

ÍNDICE

	Pág.
1 INTRODUÇÃO	01
1.1 Introdução.....	01
1.2 Definições de fluido	01
1.3 Hipóteses do contínuo	02
1.4 Classificação dos fluidos	02
1.5 Elementos finitos em fluidos	04
1.5.1 Métodos de Galerkin e Métodos estabilizados.....	05
1.6 Objetivo e plano da dissertação.....	08
2 MECÂNICA DOS FLUIDOS NEWTONIANOS.....	09
2.1 Cinemática de fluidos	09
2.2 Leis de conservação.....	10
2.2.1 Conservação de Massa.....	10
2.2.2 Classificação das forças em um fluido	11
2.1.3 A tensão em um elemento puntual de fluido	12
2.2.4 Balanço da quantidade de movimento.....	13
2.2.5 O tensor das tensões	14
2.2.6 A pressão e o tensor das tensões viscosas	15
2.2.7 Conservação de energia.....	16
2.2.8 Fluidos Newtonianos e as equações de Navier-Stokes.....	17
2.2.9 As equações de Navier-Stokes	18
3 FLUIDOS E VISCOSIDADE.....	20
3.1 Fluidos e reologia	20
3.1.1 Fluidos não-Newtonianos independentes do tempo	23
3.1.2 Fluidos não-Newtonianos dependentes do tempo	27
3.1.3 Fluidos viscoelásticos	28
3.1.4 Outros modelos.....	38
3.2 Fluido Newtoniano Generalizado (GNL)	30
3.3 Fluidos viscoplásticos: O fluido SMD.....	32
4 APROXIMAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS.....	36
4.1 Introdução ao método	36
4.2 Princípios do método dos elementos finitos	36

4.3	Formulação forte ou clássica	37
4.4	Formulação fraca ou variacional	37
4.5	Equivalência entre as formas forte e fraca.....	38
4.6	Condições de contorno naturais.....	39
4.7	Método de aproximação de Galerkin.....	39
5	APROXIMAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS PARA ESCOAMENTOS	
	UTILIZANDO A APROXIMAÇÃO DE GALERKIN.....	43
5.1	Definição do problema proposto e abordagem matemática	43
5.1.1	Problema forte	43
5.1.2	Aproximação de Galerkin do problema.....	44
5.1.3	Aproximação de Galerkin/Mínimos-Quadrados	45
5.2	Elementos finitos isoparamétricos.....	46
5.2.1	Sistemas de referência global e local.....	47
5.2.2	Funções de forma	48
5.2.3	Elemento bidimensional linear	49
5.2.4	Elementos isoparamétricos	50
6	RESULTADOS	52
6.1	Escoamentos inerciais de fluidos Newtonianos.....	52
6.2	Escoamentos inerciais pseudoplásticos e dilatantes	57
6.3	Escoamento inercial de um fluido viscoplástico em torno do cilindro	65
7	CONCLUSÕES FINAIS E PERSPECTIVAS	78
7.1	Comentários finais.....	79
7.2	Perspectivas futuras	80
8	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	81

LISTA DE SÍMBOLOS

\mathcal{C}_h	Partição do domínio Ω em elementos finitos	[-]
$C^0(\Omega)$	Espaço das funções contínuas em Ω	[-]
C_p	Número de Euler.....	[-]
\mathbf{D}	Tensor taxa de deformação.....	[s ⁻¹]
\mathbf{g}	Aceleração da gravidade.....	[m/s ²]
h_K	Parâmetro relacionado ao tamanho do elemento K.....	[m]
$H^1(\Omega)$	Espaço de Sobolev formado pelas funções de $L^2(\Omega)$	[-]
$H_0^1(\Omega)$	Espaço das funções de $H^1(\Omega)$ que se anulam em Γ_g	[-]
\mathbf{I}	Tensor identidade	[-]
J	Número de salto.....	[-]
K	Índice de consistência.....	[-]
L	Comprimento característico do problema da cavidade forçada.....	[m]
L	Comprimento do canal do problema do escoamento em torno do cilindro	[m]
$L^2(\Omega)$	Espaço das funções de quadrado integráveis em Ω	[-]
$L_0^2(\Omega)$	Espaço das funções de $L^2(\Omega)$ com média nula em Ω	[-]
m	Grau de interpolação dos elementos finitos dos tipos P_m e Q_m	[-]
\mathbf{n}	Normal exterior unitária	[-]
n	Índice <i>power-law</i> (expoente de funções materiais)	[-]
N	Número de dimensões espaciais do problema.....	[-]
N_a	Função de aproximação do nó local a.....	[-]
N_A	Funções aproximação da velocidade	[-]
\tilde{N}_A	Funções aproximação da pressão	[-]
p	Pressão hidrostática do fluido	[Pa]
p^h	Aproximação do campo de pressão do fluido	[Pa]
P_m	Espaço polinomial de grau m para elemento triangular ou tetraédrico	[-]
P	Espaço funcional do campo de pressão	[-]
P_h	Espaço das funções aproximação por elementos finitos do campo de pressão	[Pa]
q^h	Espaço das funções peso do campo de pressão	[-]
Q_m	Espaço polinomial de grau m para elemento quadrilátero ou hexaédrico	[-]
Q_1	Elemento quadrangular bilinear.....	[-]

\mathcal{R}	Espaço dos números reais.....	[-]
R	Raio de entrada	[m]
R_m	Espaço polinomial de grau m	[-]
R_l	Espaço polinomial de grau l	[-]
R_k	Espaço polinomial de grau k	[-]
Re	Número de Reynolds	[-]
Re_{SMD}	Número de Reynolds definido para a função SMD	[-]
Re_K	Número de Reynolds de malha	[-]
\mathbf{t}	Vetor tensão.....	[N/m ²]
t	Tempo	[s]
\mathbf{T}	Tensor tensão de Cauchy	[N/m ²]
\mathbf{T}	Tensor tensão adimensional.....	[-]
\mathbf{u}	Campo velocidade	[m/s]
u_i	Componente da velocidade na direção i	[m/s]
\mathbf{u}^h	Aproximação do campo de velocidades	[m/s]
\mathbf{U}_h	Aproximação do conjunto de variáveis U	[-]
v^h	Função peso do campo de velocidades.....	[-]
\mathbf{v}	Velocidade de um elemento fluido infinitesimal.....	[m/s]
\mathbf{V}	Espaço funcional do campo de velocidade.....	[-]
\mathbf{V}_h	Subespaço de \mathbf{V}	[-]
\mathbf{x}	Posição em uma configuração deformada qualquer	[m]

LETRAS GREGAS

Γ	Fronteira do domínio Ω	[-]
Γ_g	Parte da fronteira Γ na qual são impostas condições de Dirichlet.....	[-]
Γ_h	Parte da fronteira Γ na qual são impostas condições de Neumann	[-]
λ	Tempo característico do fluido	[s]
μ	Viscosidade absoluta do fluido Newtoniano.....	[kg/m.s]
μ_p	Viscosidade plástica.....	[kg/m.s]
ρ	Densidade do fluido	[kg/m ³]
$\boldsymbol{\tau}$	Tensor desviatório ou viscoso	[N/m ²]
τ	Tensor de cisalhamento.....	[N/m ²]

α	Parâmetro de estabilidade	[-]
τ_0	Tensão limite de escoamento	[N/m ²]
Ω	Domínio do problema	[-]
$\bar{\Omega}$	Domínio limitado fechado do problema	[-]
Ω_K	Domínio do elemento finito K	[-]
$\dot{\gamma}$	Taxa de deformação	[s ⁻¹]
$\dot{\gamma}_0$	Taxa de cisalhamento na região onde começa o “salto” da tensão	[s ⁻¹]
$\dot{\gamma}_1$	Taxa de cisalhamento na região onde começa a região exponencial	[s ⁻¹]
η	Função viscosidade	[kg/m.s]
η_0	Viscosidade para baixas taxas de cisalhamento	[kg/m.s]

SOBRESCRITO

*	Símbolo que indica adimensionalização	[-]
---	---	-----

SUBSCRITO

A	Número do ponto nodal do elemento	[-]
g	Condição de contorno essencial (Dirichlet)	[-]
h	Condição de contorno natural (Neuman)	[-]
k	Grau dos polinômios dos termos de velocidade	[-]
K	Elemento finito da partição C_h	[-]

SÍMBOLOS MATEMÁTICOS

$\nabla(\cdot)$	Operador gradiente espacial	[-]
Δp	Queda de pressão	[Pa]
(\cdot, \cdot)	Produto interno de $L^2(\Omega)$	[-]
$(\cdot, \cdot)_K$	Produto interno de $L^2(\Omega_K)$	[-]
$\ \cdot\ $	Norma de $L^2(\Omega)$	[-]
$\ \cdot\ _{0,K}$	Norma de $L^2(\Omega_K)$	[-]

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura	Pág.
1.1 Caminho livre médio das moléculas	02
2.1 Descrição Lagrangeana do movimento.....	09
2.2 Descrição Euleriana do movimento	10
2.3 Volume arbitrário Ω , fixo no espaço	10
2.4 Representação das componentes do tensor das tensões	12
2.5 Corpo hipotético representando o tensor	14
2.6 Decomposição da tração	15
3.1 Força de cisalhamento aplicada sobre um fluido	20
3.2 Fluido não-Newtoniano – Retração elástica	22
3.3 Classificação dos fluidos segundo seu comportamento reológico	22
3.4 Curvas de escoamento de fluidos Newtoniano e não-Newtoniano de propriedades independentes do tempo de cisalhamento	23
3.5 Variação da viscosidade coma taxa de deformação.....	26
3.6 Curvas de escoamento de fluidos não-Newtonianos.....	28
3.7 Curva de escoamento de fluidos não-Newtonianos – Outros modelos.....	30
3.8 Curvas reológicas de soluções de carbopol.....	35
3.9 Gráfico da curva de escoamento de um material viscoplastico	35
5.1 Transformação entre os sistemas de referência global e local	47
5.2 Transformação entre os sistemas de referência global e local utilizando funções de forma.....	48
5.3 Elemento quadrangular linear	49
5.4 Elemento Lagrangeanos quadrangulares	50
5.5 Elementos finitos, subparamétricos, isoparamétricos e superparamétricos	50
6.1 Descrição do problema da cavidade	52
6.2 Isobáricas: (a)Re=1, (b)Re=100, (c)Re=1000.....	54
6.3 Isolinhas de velocidade: (a)Re=1, (b)Re=100, (c)Re=1000	55
6.4 Perfil de velocidade horizontal em $x=0,5$ e vertical em $y=0,5$; para Re=1	56
6.5 Perfil de velocidade horizontal em $x=0,5$ e vertical em $y=0,5$; para Re=100	56
6.6 Perfil de velocidade horizontal em $x=0,5$ e vertical em $y=0,5$; para Re=400	56
6.7 Perfil de velocidade horizontal em $x=0,5$ e vertical em $y=0,5$; para Re=1000	57
6.8 Isobáricas: (a)n=0,5, (b)n=1,0, (c)n=2,0 – Re=100	58
6.9 Isolinhas de velocidade: (a)n=0,5, (b)n=1,0, (c)n=2,0 – Re=100	59

6.10	Perfil de velocidade linha média($x=0,5$ e $y=0,5$); para $n=0,5$	60
6.11	Perfil de velocidade linha média($x=0,5$ e $y=0,5$); para $n=1,0$	60
6.12	Perfil de velocidade linha média($x=0,5$ e $y=0,5$); para $n=1,5$	61
6.13	Perfil de velocidade linha média($x=0,5$ e $y=0,5$); para $n=2,0$	61
6.14	Isobáricas: (a) $n=0,5$, (b) $n=1,5$ – $Re=500$	62
6.15	Isolinhas de velocidade: (a) $n=0,5$, (b) $n=1,5$ – $Re=500$	62
6.16	Perfil de velocidade linha média($x=0,5$ e $y=0,5$); $n=0,5$ – $Re=500$	63
6.17	Perfil de velocidade linha média($x=0,5$ e $y=0,5$); $n=1,5$ – $Re=500$	63
6.18	Perfil de velocidade linha média($x=0,5$); $n=0,5$; $n=1,5$	64
6.19	Perfil de velocidade linha média($y=0,5$); $n=0,5$; $n=1,5$	64
6.20	Perfil de velocidade linha média($x=0,5$ e $y=0,5$)- $Re=100$	65
6.21	Escoamento de um fluido viscoplástico em torno de um cilindro circular	66
6.22	Escoamento de um fluido SMD em torno de um cilindro circular: Teste independência de malha	67
6.23	Malha: $H/R=4$; 15600 pontos nodais	67
6.24	Isoregiões de τ^* para $n=0,5$; $\bar{u} = 1,0$: (A) $J=1$, (B) $J=10$, (C) $J=100$, (D) $J=1000$	69
6.25	Isobandas de pressão, $n=0,5$; $\bar{u} = 1,0$: (A) $J=1$, (B) $J=10$, (C) $J=100$, (D) $J=1000$	69
6.26	Gráficos perfil velocidade- ((a)Posição $x=0$, (b) Posição $x=2$), $n=0,5$; $\bar{u} = 1$: (A) $J=1$, (B) $J=10$, (C) $J=100$ (D) $J=1000$	70
6.27	Isolinhas de velocidade $n=0,5$; $\bar{u} = 1,0$: (A) $J=1$, (B) $J=10$, (C) $J=100$, (D) $J=1000$	70
6.28	Isobandas de pressão $n=0,5$, $J=100$: (E) $\bar{u} = 1$, (F) $\bar{u} = 2$, (G) $\bar{u} = 4$, (H) $\bar{u} = 8$	71
6.29	Isolinhas de velocidade, $n=0,5$, $J=100$: (E) $\bar{u} = 1$, (F) $\bar{u} = 2$, (G) $\bar{u} = 4$, (H) $\bar{u} = 8$	72
6.30	Gráficos perfil de velocidade – ((a)Posição $x=0$, (b) Posição $x=2$), $n=0,5$; $J=100$: (E) $\bar{u} = 1$, (F) $\bar{u} = 2$, (G) $\bar{u} = 4$, (H) $\bar{u} = 8$	72
6.31	Linhas de corrente $n=0,5$, $J=100$: (E) $\bar{u} = 1$, (F) $\bar{u} = 2$, (G) $\bar{u} = 4$, (H) $\bar{u} = 8$	73
6.32	Isoregiões de τ^* para $n=0,5$, $J=100$: (E) $\bar{u} = 1$, (F) $\bar{u} = 2$, (G) $\bar{u} = 4$, (H) $\bar{u} = 8$	73
6.33	Isoregiões de τ^* para $\bar{u} = 1,0$; $J=100$: (I) $n=0,25$, (J) $n=0,5$, (K) $n=0,75$, (L) $n=1,0$	75
6.34	Gráficos perfil velocidade – ((a)Posição $x=0$, (b) Posição $x=2$); $\bar{u} = 1,0$, $J=100$: (I) $n=0,25$, (J) $n=0,5$, (K) $n=0,75$, (L) $n=1,0$	75
6.35	Isolinhas de velocidade, $\bar{u} = 1,0$; $J=100$: (I) $n=0,25$, (J) $n=0,5$, (K) $n=0,75$, (L) $n=1,0$	76
6.36	Isobandas de pressão $\bar{u} = 1,0$; $J=100$: (I) $n=0,25$, (J) $n=0,5$, (K) $n=0,75$, (L) $n=1,0$	76
6.37	Gráfico da curva de escoamento de um material viscoplástico	77

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela	Pág.
1.0 Simulações realizadas – Identificação e valores das variáveis utilizadas	68

1. INTRODUÇÃO

1.1. INTRODUÇÃO

A mecânica é a parte da ciência que estuda o equilíbrio, o motivo e suas causas. Basicamente trata-se do problema das forças e suas conseqüências, ou seja, deformação, movimento, trabalho e dissipação de energia. É uma ciência cujo conhecimento e compreensão dos seus princípios básicos e conceitos são essenciais para analisar qualquer sistema no qual um fluido é utilizado. É neste ponto que reside a sua importância, pois, trabalho equivale a energia e, energia significa custo e benefício. Portanto, estudar mecânica dos fluidos representa poder dimensionar sistemas e processos em termos de eficiência, custo e resultados finais.

A mecânica dos fluidos insere-se no contexto da engenharia como uma ferramenta de capacitação ao engenheiro para dimensionar materiais, ou seja, através da mecânica dos fluidos é possível dimensionar fluxos, processos, barreiras para conter pressões provenientes de escoamentos, condutância de tubos de transporte.

A mecânica dos fluidos incluirá conceitos avançados estudados na Mecânica dos Sólidos, Geometria e no Cálculo Diferencial e Integral, que se relacionam, da seguinte forma;

Leis Fenomenológicas + Matemática (aritmética, álgebra, cálculo) = ciência física

1.2. DEFINIÇÃO DE FLUIDO

Fluido, é toda substância que se deforma continuamente sob a ação de um esforço (tensão) tangencial, não importando quão diminuto seja este esforço.

De acordo com a Lei de Hooke, quando se aplica um esforço ou tensão tangencial, a um sólido este se deforma proporcionalmente ao esforço aplicado sobre ele, mas não continuamente, porque isso somente acontecerá até o limite de sua resistência mecânica ao cisalhamento, que corresponderia a certo ângulo, ou seja;

$$\tau = G\gamma \quad (1.1)$$

onde G é chamado de módulo de cisalhamento e γ é a deformação tangencial.

De forma análoga, quando se aplica um esforço ou tensão tangencial a um fluido, a taxa temporal de deformação, é proporcional ao esforço nele aplicado, por isso ele segue uma equação análoga a Lei de Hooke, dada por:

$$\tau = \alpha\dot{\gamma} \quad (1.2)$$

Um fluido pode ser tratado como um sólido que se deforma continuamente. Isto significa que fixado a atenção em um determinado ponto A (arbitrário) no interior do fluido, nota-se que este ponto mudaria de posição continuamente com o passar do tempo. Desta forma pode-se convencionar que um fluido é uma substância incapaz de manter-se em repouso quando submetido a um esforço tangencial.

1.3. HIPÓTESE DO CONTINUO

Considera-se um gás; como exemplo o gás argônio, no interior de uma lâmpada fluorescente. O espaço percorrido por um átomo ou molécula do gás entre duas colisões consecutivas é chamado de caminho livre médio, l , é da mesma ordem de grandeza do volume de controle.

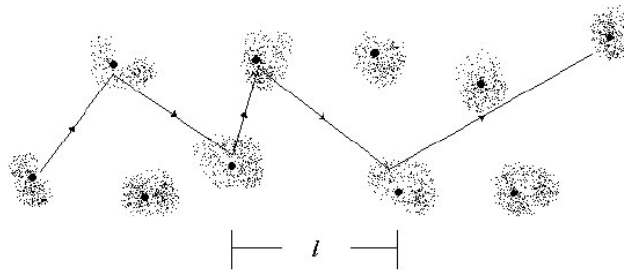


Figura – 1.1. Caminho livre médio, l , entre duas colisões consecutivas das moléculas de um gás

Neste caso, os fenômenos físicos existentes não fazem parte do âmbito da Mecânica do Contínuo ou da Mecânica dos Fluidos Clássica e sim da Mecânica Estatística.

Contudo, se o caminho médio livre de colisões, l , entre duas colisões consecutivas for muito menor do que a extensão física do volume de controle considerado, a ciência capaz de tratar os fenômenos envolvidos neste volume de observação é a Mecânica do Contínuo – ou Mecânica dos Fluidos Clássica.

A mecânica dos fluidos clássica pode ser considerada como uma mecânica dos meios contínuos, isto é, consideradas as substâncias como sendo contínua em sua estrutura, sem qualquer referência a sua estrutura molecular.

1.4. CLASSIFICAÇÃO DOS FLUIDOS

A viscosidade de um líquido (inverso da fluidez) mede a resistência interna oferecida ao movimento relativo de diferentes partes deste líquido. Em um escoamento laminar, diferentes “lâminas” do líquido move-se com velocidades diferentes. Em um viscosímetro capilar, o líquido em contato com a parede do capilar tem velocidade igual à zero, atingindo uma velocidade máxima no centro do capilar. Em um líquido muito viscoso, a velocidade varia pouco, da parede

para o centro do capilar e o líquido escoar lentamente. Note que a viscosidade é inversamente proporcional a este gradiente de velocidade, ou taxa de cisalhamento.

A viscosidade irá medir a resistência de um líquido em fluir (escoar) e não está diretamente relacionada com a densidade do líquido, que é a relação massa/volume. Por exemplo, o óleo de soja utilizado para cozimento é mais viscoso que a água, embora seja menos denso. Apesar da nítida diferença entre viscosidade e densidade, é comum ouvir a frase “este líquido é muito denso” para se referir a um líquido com dificuldade em escoar. A frase correta deveria ser “este líquido é muito viscoso” [Polito, 2005].

Matematicamente, a viscosidade (μ) será a derivada do gráfico da força de cisalhamento por unidade de área entre dois planos paralelos de líquido em movimento relativo (tensão de cisalhamento, τ) versus o gradiente de velocidade dV/dX (taxa de cisalhamento, $\dot{\gamma}$) entre os planos, isto é, $\tau = \mu \dot{\gamma}$, onde $\dot{\gamma} = dV/dX$ (taxa de cisalhamento); $\tau = \text{Força}/\text{Área}$ (tensão de cisalhamento), $\mu = d\tau/d\dot{\gamma}$ (viscosidade ou coeficiente de viscosidade) [Polito, 2005].

Em alguns casos é conveniente usar a viscosidade cinemática, que é o coeficiente angular da reta. A maioria dos líquidos puros e muitas soluções e dispersões apresentam este tipo de comportamento e são chamados de fluidos Newtonianos, pois foi Newton quem primeiro observou esta relação. A quantidade $d\tau/d\dot{\gamma}$, no caso de sistemas newtonianos, é a viscosidade absoluta.

Muitas soluções de polímeros (especialmente se forem concentradas) e dispersões (especialmente se contiverem partículas assimétricas, por exemplo, na forma de disco ou bastão) apresentam desvio deste comportamento e são denominados de sistemas não-Newtonianos. As principais causas do fluxo não-Newtoniano em sistemas coloidais são a formação de uma estrutura organizada através do sistema e a orientação de partículas assimétricas na direção do fluxo provocadas pelo gradiente de velocidade. A quantidade $d\tau/d\dot{\gamma}$, no caso destes sistemas é a viscosidade aparente, η , pois seu valor dependerá da tensão de cisalhamento aplicada ao líquido.

Os fluidos não-Newtonianos apresentam diversos comportamentos diferentes; aqueles que independem do tempo, denominados pseudoplásticos, viscoplásticos e dilatantes.

Fluidos nos quais existe a diminuição da viscosidade aparente com o aumento da tensão de cisalhamento são denominados pseudoplásticos (*shear-thinning*). Ou seja, para uma dada tensão de cisalhamento, a taxa de cisalhamento é menor que a do comportamento Newtoniano extrapolado. As causas mais comuns desse comportamento em suspensões coloidais são o fracionamento de agregados de partículas e a orientação de partículas assimétricas provocadas pelo aumento da taxa de cisalhamento.

Os fluidos que apresentam um aumento da viscosidade aparente com o aumento da tensão de cisalhamento são denominados dilatantes (*shear-thickening*), por apresentarem um efeito de dilatação. Estes fluidos se comportam como um líquido (escoam) a baixas tensões de cisalhamento, mas podem se tornar tão rígidos (não escoam) quanto um sólido quando submetidos a tensões de cisalhamento elevadas. Esse efeito é observado particularmente em pastas de partículas defloculadas densamente empactadas. Quando a taxa de cisalhamento é aumentada, esse empacotamento deve ser quebrado para permitir que as partículas se movam umas em relação as outras. A expansão resultante faz com que o fluido seja insuficiente para preencher os vazios criados. À essa expansão se opõe forças de tensão superficial do líquido “aprisionando” entre as partículas. Isso explica, por exemplo, o porquê é fácil empurrar com o pé a areia úmida da praia se isto for feito lentamente, entretanto pode-se machucar o pé chutando-se (for aplicado uma tensão de cisalhamento elevada) à areia; nessa situação ela se comporta como um sólido. Em tensões de cisalhamento pequenas o fluido tende a um comportamento Newtoniano.

Comportamento ainda mais complexo é apresentado por fluidos que não escoam a menos que sujeitos a uma tensão de cisalhamento crítica, chamada *tensão de escoamento* (τ_0). Estes fluidos são chamados *viscoplásticos*. Certos tipos de tintas, graxas, e colas são exemplos de fluidos viscoplásticos. Embora o conceito de tensão de escoamento tenha se mostrada de grande utilidade, sua existência foi contestada com base que todos os materiais escoam, desde que um tempo suficiente grande seja considerado. Por exemplo, um filme de tinta aplicado em um muro vertical certamente escoará, entretanto esse processo deve ser mais lento que a evaporação do solvente e possível mudança química na tinta. Desta forma, a tensão de escoamento transforma-se em uma propriedade constitutiva muito útil na descrição da tensão de cisalhamento, abaixo da qual o escoamento do fluido viscoplástico, torna-se desprezível.

1.5. ELEMENTOS FINITOS EM FLUIDOS

Se inicialmente o MEF (Método de Elementos Finitos) foi desenvolvido como método de simulação baseado em computação para análise de estruturas, no final dos anos 60 passou a ser utilizado para simulação de problemas não estruturais em fluidos, termomecânica e eletromagnetismo. Embora o método tenha sido extensivamente usado previamente no campo das estruturas mecânicas, hoje tem sido aplicado satisfatoriamente como uma técnica conveniente e bem estabilizada para a solução computacional de problemas complexos em diferentes campos da engenharia. O MEF é uma robusta ferramenta para a solução aproximada de equações diferenciais descrevendo diferentes processos físicos. Atualmente existem diversos

programas comerciais bastante complexos que permitem aplicar o MEF à análise de diferentes tipos de modelos físicos, citam-se como exemplos: COSMOS, NASTRAN, ASKA, SAP, TITUS, MARC, ABACUS, ANSYS, ADINA, entre outros. Existem ainda programas não comerciais desenvolvidos por universidades, como por exemplo, o algoritmo NNFEM, utilizado neste trabalho.

O MEF utiliza uma metodologia para resolver as equações diferenciais parciais ou integrais. Sua primeira característica é o campo contínuo, ou domínio, subdivido em células, chamados elementos, os quais formam uma malha. A malha não necessita ser estruturado, o que faz com que muitas geometrias complexas possam ser tratadas com relativa facilidade. Outra característica do MEF é que a solução deverá pertencer a um espaço de funções e este será constituído pelos valores da função variando numa dada maneira, por exemplo, linearmente ou quadraticamente, entre valores dos pontos nodais. Os pontos nodais, ou nós, são pontos típicos dos elementos como os vértices, os pontos médios dos lados, os pontos médios do elemento, entre outros. Devido à escolha, a representação da solução fica fortemente vinculada à representação geométrica do domínio. Ainda pode-se elucidar outra característica do método que será a procura por uma solução integral da equação diferencial parcial. Numa forma mais geral, a formulação, integral é obtida a partir da formulação residual ponderada. Por esta formulação, o método adquire a capacidade para incorporar naturalmente condições de contorno do tipo diferencial. Esta propriedade constitui a segunda importante vantagem do MEF, a qual não é partilhada por nenhum outro método. A combinação da representação da solução num dado espaço de funções com a formulação tratando rigorosamente as condições de contorno, dá ao método uma fundamentação matemática extremamente rigorosa e robusta e permite uma boa definição da precisão. Por fim outra característica do MEF é a maneira com que a discretização é obtida. As equações discretas são construídas a partir das contribuições de cada nível do elemento, os quais posteriormente são então reunidos.

1.5.1. MÉTODOS DE GALERKIN E MÉTODOS ESTABILIZADOS

O método de elementos finitos mais empregado é o método de Galerkin, o qual tem sido aplicado, nas últimas décadas, a uma vasta classe de problemas. No entanto, na extensão do método para problemas de escoamentos, foram detectadas algumas patologias numéricas em várias situações de interesse de engenharia. Constatou-se o surgimento de oscilações espúrias, sobre todo o domínio computacional, em problemas envolvendo operadores não simétricos, fazendo divergir as aproximações de escoamentos advectivo-dominados. Em um primeiro

momento, o refinamento da malha surgiu como uma primeira tentativa de eliminar o problema, mesmo acarretando no aumento do custo computacional. Em seguida, foram propostas novas estratégias, tais como o desenvolvimento de novos elementos finitos e a aplicação de regras de integração não convencionais [ver, por exemplo, Malkus e Hughes, 1978; Crouzeix e Raviart, 1973]. Alguns pesquisadores seguiram a linha da manutenção da formulação de Galerkin clássica com uso de elementos não conformes, enquanto, outros optaram pela manutenção de funções de interpolação usuais isoparamétricas com a alteração da formulação de Galerkin, visando adicionar ao problema a requerida estabilidade. Esta última opção gerou o que atualmente é conhecido como métodos estabilizados.

Especificamente a aproximação das equações de Navier-Stokes incompressível, via o método de Galerkin, enfrenta duas grandes dificuldades. Primeiro, a necessidade de compatibilizar os sub-espacos de velocidade e pressão, satisfazendo, dessa maneira, a chamada condição de Babuška-Brezzi [Babuška, 1973; Brezzi, 1974]. Em seguida, tem-se a instabilidade inerente a esquemas de discretização centrais, seja eles através de formulação de Galerkin ou através de esquemas de diferenças finitas na aproximação de escoamentos advectivo dominantes [Brooks and Hughes, 1982; Patankar e Spalding, 1972; Patankar, 1980]. O tratamento simétrico do termo de advecção pela formulação de Galerkin clássica, na qual as funções teste e peso pertencem ao mesmo espaço, é identificada como a fonte das instabilidades numéricas nos escoamentos de altos números de Reynolds.

Um grande passo no desenvolvimento de métodos estabilizados pode ser visto como a contribuição dada pelos trabalhos de Brooks and Hughes, 1982, e Hughes and Brooks, 1982, nos quais foi desenvolvido o método *streamline-upwind/Petrov-Galerkin*, ou, simplesmente, SUPG. Este método consiste em uma formulação de Petrov-Galerkin com funções peso descontínuas, construídas através da adição de uma perturbação (*streamline upwind*) - a qual atua somente na direção das linhas de corrente - às funções clássicas do método de Galerkin. O método SUPG apresenta elevada precisão, estabilidade e estimativas de erro ótimas ou quase-ótimas [Johnson et al., 1984] quando a solução exata é suficientemente regular.

Dentre as evoluções a partir do método SUPG, destaca-se, o chamado método Galerkin mínimos-quadrados (GLS), introduzido por Hughes et al., (1986) no contexto do problema de Stokes. Esta metodologia consiste na adição de termos dependentes da malha, ao método clássico de Galerkin. Estes termos de perturbação, analogamente ao método SUPG, são construídos de forma a aumentar a estabilidade da formulação de Galerkin original sem, contudo, prejudicar sua consistência, já que a solução exata do problema satisfaz aos resíduos de Euler-Lagrange. Dada a sua grande flexibilidade, a metodologia GLS vem sendo aplicada com sucesso a

uma extensa gama de problemas de fluidos, como atestam os trabalhos de Hughes and Shakib, 1988; Franca e Hughes, 1988; Gresho, 1991; Franca et al., 1992; Franca e Frey, 1992; Franceschini e Frey, 2003a; Franca e Hughes, 1993; Harari e Hughes, 1994.

Papanastasiou, (1987) estudou escoamentos permanentes bidimensionais de fluidos de Bingham, através de uma modelagem constitutiva, válida para todo escoamento, tanto para as regiões de escoamento quanto para as regiões rígidas. Neste estudo foi usada uma estratégia numérica que elimina a necessidade de rastrear superfícies do escoamento, através das equações de conservação e uma relação constitutiva usadas simultaneamente via método de Galerkin clássico e o esquema iterativo de Newton.

Zisis e Mitsoulis (2002) estudaram um escoamento sem inércia de um plástico de Bingham escoando em torno de um cilindro entre placas paralelas. O estudo analisou a determinação da extensão e da forma das regiões de escoamento e regiões rígidas com coeficiente de arrasto para uma larga variação do número de Bingham. A equação constitutiva de Bingham utilizada apresentava uma modificação apropriada, proposta por Papanastasiou, a qual é aplicada em toda parte no campo de escoamento em ambas as regiões analisadas. Todas as simulações numéricas apresentaram resultados para um escoamento sem inércia em um meio infinito e forneceram cálculos do coeficiente de arrasto em torno de um cilindro.

Souza Mendes e Dutra. (2004) e Souza Mendes et al. (2007), examinaram e propuseram uma nova função de viscosidade para líquidos com alta pseudoplasticidade ou com tensão limite de escoamento. A partir desta função contínua, foi apresentado um platô para baixas taxas de cisalhamento, seguido por uma queda brusca da viscosidade para valores da taxa de cisalhamento limiar (tensão limite), e uma subsequente região de *Power-law*. Diversas correções foram realizadas para soluções padrão estudadas o que resultou em uma excelente qualidade para a equação final proposta. Além destas correções os autores examinaram o deslocamento de líquidos viscoplásticos em tubos capilares por injeção de gás. A viscoplasticidade altera a cinemática do escoamento e muda dramaticamente a quantidade de massa aderida à parede do tubo, quando comparado ao caso Newtoniano. Uma função viscosidade recentemente proposta para líquidos viscoplásticos foi ajustada para dados reológicos da solução padrão, estudada pelos autores. Uma nova propriedade reológica adimensionalizada – o número de salto – foi introduzido na função viscosidade adimensional. Os resultados mostram o efeito do caráter da viscoplasticidade do líquido na forma de superfície livre na espessura da película do líquido unido à parede. Essa espessura diminui com o número de salto e aumenta com a taxa de escoamento. Observa-se, também, que existe uma taxa de escoamento crítica adimensional abaixo da qual o descolamento do líquido da parede é aparentemente perfeito. Este

comportamento mostra estar relacionado diretamente ao escoamento plenamente desenvolvido a jusante da interface ar-líquido.

1.6. OBJETIVO E PLANO DA DISSERTAÇÃO

O presente trabalho tem como objetivo a modelagem mecânica e simulação numérica via o método de Galerkin Mínimos-Quadrados (GLS), de escoamentos de fluidos Newtonianos, pseudoplásticos, dilatantes e viscoplásticos, este último utilizando o modelo SMD, sob condições sem e com a presença de inércia.

O primeiro capítulo apresenta um plano geral dos capítulos com a finalidade de melhor compreensão desta dissertação:

- Capítulo 1: Introdução do trabalho, sua motivação e estado da arte do método de elementos finitos em fluidos e de escoamentos de fluidos viscoplásticos.
- Capítulo 2: Apresentação da mecânica de fluidos e suas leis de conservação.
- Capítulo 3: Apresentação das relações entre fluido e viscosidade, os diferentes modelos de estudo das características dos fluidos não-Newtonianos.
- Capítulo 4: Descrição das aproximações de elementos finitos de Galerkin Mínimos-quadrados.
- Capítulo 5: Aproximação de elementos finitos para escoamentos utilizando a aproximação de Galerkin Mínimos-quadrados.
- Capítulo 6: Resultados numéricos, principais conclusões obtidas, observações finais e perspectivas futuras para o trabalho.
- Capítulo 7: Conclusões finais e perspectivas futuras.
- Capítulo 8: Referências bibliográficas citadas no texto.

2. MECÂNICA DOS FLUIDOS NEWTONIANOS

2.1. CINEMÁTICA DE FLUIDOS

Há essencialmente duas maneiras de descrever o movimento de um fluido, a Euleriana e a Lagrangeana. Estas duas visões de uma mesma realidade devem-se às duas principais maneiras de avaliarem-se medidas de velocidade de um escoamento.

Na especificação Lagrangeana descreve-se o movimento pela história das partículas individuais. Uma partícula de fluido é seguida, e nela realizam-se todas as medidas, anotando também o tempo e a posição. Desta forma utiliza-se o tempo e a posição inicial para “marcar” uma partícula ou volume elementar, de forma que em seguida possa ser descrita a evolução de uma propriedade qualquer no tempo, acompanhando essa mesma partícula. Sendo assim, qualquer variável que caracterize o fluxo é descrita como uma função do tempo e da posição inicial da partícula [Polito, 2005].

Em particular, a posição inicial da partícula, é descrita como:

$$\vec{x} = \vec{x}(\vec{x}_0, t) = x(x_0, y_0, z_0, t)\vec{i} + y(x_0, y_0, z_0, t)\vec{j} + z(x_0, y_0, z_0, t)\vec{k}.$$

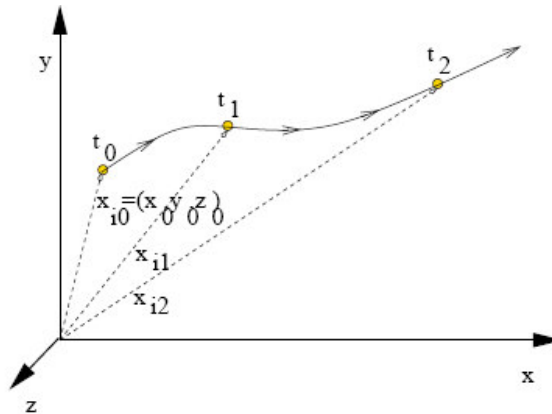


Figura 2.1 – Descrição Lagrangeana do movimento.

Na análise Euleriana o observador está fixo e observa as variáveis do escoamento no ponto x_i , sem se importar com as partículas individuais. As partículas passam pelo ponto de observação e caracterizam o escoamento naquele local e naquele momento específico. As variáveis que caracterizam o escoamento são, portanto da forma $f(x_i, t) = f(x, y, z, t)$.

É fundamental perceber que neste caso a derivada $\frac{\partial f}{\partial t}$ não dará uma descrição completa da variação de f , pois não está sendo considerada apenas uma única partícula. Necessita-se levar em conta a mudança nas características das partículas que estão chegando ao ponto de observação.

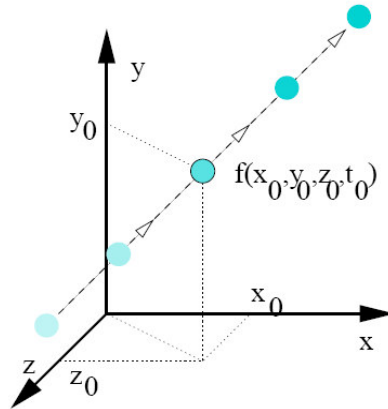


Figura 2.2 – Descrição Euleriana do movimento [Polito, 2005].

2.2. LEIS DE CONSERVAÇÃO

Um fluido qualquer poderá ser descrito pelas suas equações de conservação de massa, movimento e energia.

Considerando-se uma região arbitrária fixa do espaço, de volume Ω e superfície S (Fig.2.3), na qual, para toda superfície elementar δA , pode ser associado um vetor normal unitário exterior \mathbf{n} . Imagina-se, então, esta região fixa no meio do escoamento de um fluido, com o mesmo movendo-se através de suas fronteiras [Ferreira, 1999 e Polito, 2005]

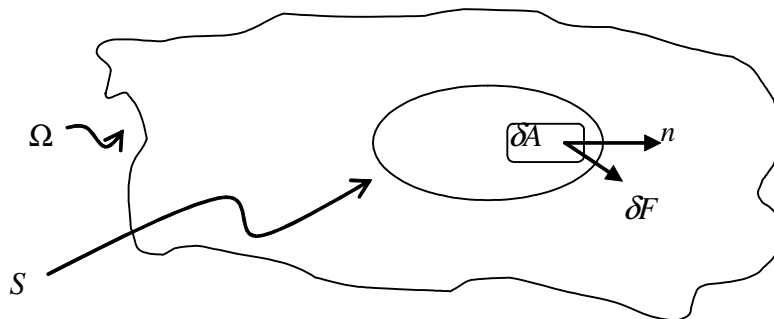


Figura 2.3: Volume arbitrário Ω fixo no espaço, de fronteira δA .

2.2.1. CONSERVAÇÃO DE MASSA

Sendo considerado um volume V fixo no espaço e limitado por uma área A . A massa dentro deste volume será caracterizado por $\int \rho dV$.

Taxa de variação temporal da massa do sistema coincidente com o volume de controle	=	Taxa de variação temporal da massa contida no volume de controle	+	Vazão líquida da massa através da superfície de controle
--	---	--	---	--

A taxa de aumento de massa dentro deste volume pode ser descrita por:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV, \quad (2.1)$$

Devido ao volume ser fixo. Por outro lado, a taxa de perda de massa para fora da área A é dada por:

$$\int_A \rho \vec{u} \cdot d\vec{A} \quad (2.2)$$

onde $d\vec{A} = \vec{n}dA$, e n será o versor normal ao elemento de área dA , apontando para fora. Note que $\rho \vec{u} \cdot d\vec{A}$ é o fluxo de massa através da área dA .

Se a massa se conserva, portanto a taxa de aumento de massa dentro deste volume deverá ser igual ao fluxo de massa para dentro da área A , ou seja:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_A \rho \vec{u} \cdot d\vec{A} \quad (2.3)$$

Para definir a forma diferencial recorre-se ao teorema de Gauss, aplica-se ao lado esquerdo da equação 2.3:

$$\int_A \rho \vec{u} \cdot d\vec{A} = \int_V \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) dV \quad (2.4)$$

Anulando-se o integrando em todos os pontos, é obtida a outra forma da equação da continuidade, expressa na forma diferencial da conservação de massa.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (2.5)$$

Desta forma, e substituindo na equação da continuidade é possível ordenar os termos e obter:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (2.6)$$

Onde para escoamentos aproximadamente incompressíveis, que dependam ou não do tempo, a equação da continuidade se reduzirá à:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (2.7)$$

2.2.2. CLASSIFICAÇÃO DAS FORÇAS EM UM FLUIDO

Forças agem em um fluido de diversas formas, e podem ser agrupadas dependendo do número de dimensões espaciais envolvidas nesta ação:

3D – Forças de Corpo; são as que atuam à distância, sem contato físico, através de um campo. Este pode ser gravitacional, elétrico ou magnético e evidentemente a atenção deste trabalho estará voltada apenas ao campo gravitacional. Neste caso a força é distribuída por todo o volume do fluido de acordo com a sua massa. No caso do campo gravitacional, a aceleração da gravidade (\vec{g}) expressa a força gravitacional por unidade de massa. O campo gravitacional é conservativo, na ausência de dissipação, e tais campos podem ser expressos como gradiente de um potencial. Note que o potencial gravitacional é o mesmo que a energia potencial por unidade de massa.

2D – Forças de Superfície; agem em um elemento de área por contato com a matéria imediatamente adjacente a ele e são proporcionais a esta área. Convenientemente tais forças são expressas por unidade de área e separadas em componente tangencial (tensão de cisalhamento) e normal (pressão) à superfície em que atuam. Embora sejam comuns os problemas que admitam uma simplificação para uma única componente de tensão, que nestes casos pode ser encarada como escalar, cabe lembrar que a tensão é um tensor com nove componentes.

1D – Forças de Linha; ou de tensão superficial atuam na interface (linha de separação) entre dois materiais e são proporcionais à extensão desta linha. Forças de linha não estão presentes diretamente nas equações do movimento, apenas nas condições de contorno [Polito, 2005].

2.2.3. A TENSÃO EM UM ELEMENTO PUNTUAL DE FLUIDO

As componentes diagonais indicadas pelos retângulos, na Fig.(2.4); são as pressões normais e as demais formam as tensões de cisalhamento. Todas são forças de superfície por unidade de área. O elemento infinitesimal somente é representado pelo cubo pela facilidade da explanação.

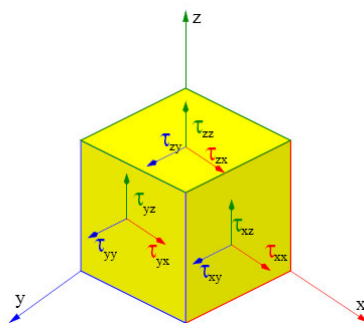


Figura 2.4: Representação das componentes do tensor das tensões

O tensor τ está representado na matriz abaixo; com todas as suas nove componentes, entretanto é útil ressaltar que este tensor é simétrico, ou seja, que $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, isto reduzirá o número de componentes independentes de nove para apenas seis. Esta consideração é possível, pois é definida uma condição de equilíbrio e de dimensões infinitesimais do cubo em análise. Ou seja,

considerando-se as dimensões do cubo tendendo a zero, a condição de equilíbrio do elemento somente é atendida quando for verificada que $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, sendo portanto simétrico o tensor.

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}$$

2.2.4. BALANÇO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO

As leis físicas são formuladas na descrição Lagrangeana e são necessárias na descrição Euleriana. Essa transformação é feita através de um importante teorema cinemático, derivado da identidade de Euler chamado Teorema de Transporte de Reynolds. O teorema não trata da variação de um volume material infinitesimal, mas sim de um volume material variando no tempo.

Seja $F=F(x_i,t)$ uma função qualquer (escalar, vetorial ou tensorial), representando alguma propriedade física do fluido. Se $V=V(t)$ é um volume material movendo-se com o fluido então, a função $G = G(t) = \int_{V(t)} F(x_i,t)dV$ é uma função do tempo e sua derivada material pode ser

calculada para a obtenção do Teorema de Transporte de Reynolds, Eq.(2.8)

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} F(x_i,t)dV = \int_{V(t)} \left[\frac{dF}{dt} + F(\nabla V) \right] dV \quad (2.8)$$

aplicado o teorema de Gauss , é obtido;

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} F(x_i,t)dV = \int_{V(t)} \frac{\partial F}{\partial t} dV + \int_{S(t)} Fv \cdot ndS \quad (2.9)$$

Taxa de variação temporal da quantidade de movimento linear do sistema	=	Taxa de variação temporal da quantidade de movimento linear do conteúdo do volume de controle	+	Fluxo líquido de quantidade de movimento linear através da superfície de controle
--	---	---	---	---

onde aplicado o teorema da divergência e fazendo $F=\rho v$, têm-se,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho v_i dV = \int_{V(t)} \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} dV + \int_{V(t)} \partial_j(\rho v_i v_j) dV \quad (2.10)$$

e pelo princípio da conservação de momento, a força resultante atuando sobre um volume material será igual à Eq.(2.10) [Ferreira, 1999].

As forças volumétricas, F_i , e as forças de superfície t_i , aplicadas a Eq.(2.10) e conjuntamente com a aplicação do teorema da divergência, em um volume $V(t)$ arbitrário, é obtido a Eq.(2.11); em notação simbólica

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V) + \nabla \cdot (\rho V V) = -\nabla p + \nabla \cdot \tau + \rho F \quad (2.11)$$

A Eq.(2.11) é a equação do movimento na forma diferencial e conservativa, e em conjunto com a equação da continuidade são as principais equações diferenciais parciais da mecânica dos fluidos clássica. É possível também interpretar a equação do movimento do ponto de vista de Lagrange, simplesmente efetuando as diferenciações do lado esquerdo da Eq.(2.11) e identificando a derivada material. O resultado final é a forma não conservativa e análoga a segunda Lei de Newton para uma partícula do contínuo. Ela afirma que o produto da massa por unidade de volume ρ , e a aceleração (Dv_i/Dt) da partícula material é a força resultante aplicada sobre a partícula do fluido [Ferreira, 1999].

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = -\partial_i p + \partial_j \tau_{ji} + \rho F_i \quad (2.12)$$

2.2.5. O TENSOR DAS TENSÕES

Considerando-se S uma superfície fechada dentro do corpo Ω , e as interações das partículas fora de S com aquelas dentro. Assim como já foi explicitado anteriormente, essas interações podem ser de duas espécies: uma devido à ação de forças que agem à distância, tais como as forças gravitacionais e eletromagnéticas; outra devido às forças que atuam diretamente na fronteira de S . As forças assim caracterizadas como forças de superfície e forças de contato, que podem ser descritas da seguinte forma;

Considerando um elemento de superfície de área δA sobre S , conforme a Fig. (2.5);

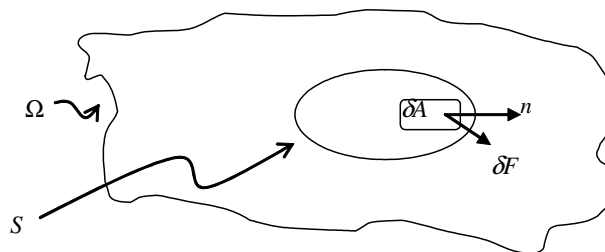


Figura 2.5: Corpo hipotético representando o tensor

em qualquer ponto de δA pode-se especificar o vetor normal exterior \mathbf{n} à δA , e também distinguir os dois lados de δA segundo a direção de \mathbf{n} . O lado em que \mathbf{n} aponta é tomado como sendo o lado positivo de δA e considerado que as partículas materiais que estão sobre este lado. As partículas de fluido exercem uma força δF sobre o lado negativo de δA que depende da

posição, do tamanho de δA e da orientação da normal. Se $\delta F / \delta A$ tende a um valor finito quando $\delta A \rightarrow 0$, então o vetor tensão ou vetor tração é definido como;

$$\mathbf{t} = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\delta F}{\delta A} \quad (2.13)$$

o vetor \mathbf{t} representa a força por unidade de área atuante sobre a superfície S .

Considerando agora um ponto O no corpo Ω e o elemento da área δA normal à esta superfície, como indicado na Fig. (2.6);

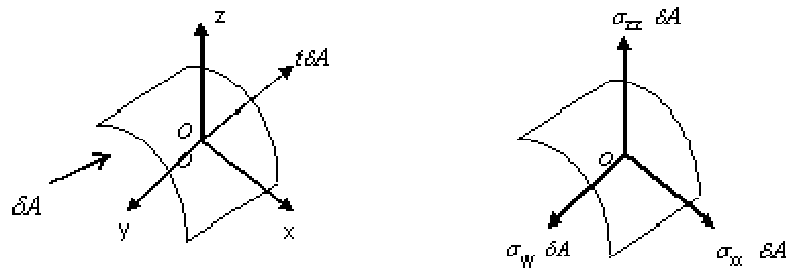


Figura 2.6: Decomposição da tração

A força $t\delta A$ pode ser decomposta em componentes ao longo das direções, conforme a Fig.(2.6). Assim as componentes da força por unidade de área são chamadas de tensões diretas. No caso de tensões de cisalhamento (τ_{ij}) o primeiro sufixo denotará a direção normal à área δA e o segundo representará a direção de resolução. Neste ponto faz-se a hipótese de que o tensor das tensões é simétrico, assim como foi descrito anteriormente. Se as componentes do tensor das tensões sobre a face normal \mathbf{n} são σ_{ij} ($i,j=1,2,3$), então as componentes t_i de t estão relacionadas às componentes de σ através da decomposição $t_i = \sigma_{ij}n_j$, onde n_j são as componentes do vetor normal exterior [Ferreira, 1999].

2.2.6. A PRESSÃO E O TENSOR DAS TENSÕES VISCOSAS

A pressão termodinâmica tem, conceitualmente, uma origem diferente das forças de superfície dadas em $t_i = \sigma_{ij}n_j$. As forças de superfície são forças mecânicas enquanto que a pressão termodinâmica é uma função do estado termodinâmico, isto é, $p_i = p_i(e, \rho)$, onde e será a energia interna e ρ é a massa específica. Devido a esta ambigüidade torna-se necessário relacionar as tensões diretas à pressão termodinâmica [Ferreira, 1999].

A fim de analisar esta questão, torna-se comum separar o tensor das tensões em duas partes:

$$\sigma_{ij} = -p_i \delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (2.14)$$

onde o tensor τ_{ij} é chamado tensor das tensões viscosas. Quando o fluido não está em movimento a tensão direta é a mesma da pressão termodinâmica, sendo que o tensor das tensões viscosas deverá ser nulo. Em geral a tensão direta, ao contrário da pressão, pode assumir diferentes valores para diferentes direções do vetor \mathbf{n}_i e é comum tomar a média das tensões diretas para definir a pressão mecânica:

$$p_m = -\frac{1}{3}\sigma_{ii} \quad (2.15)$$

Em um fluido incompressível não há pressão termodinâmica, mas sim a pressão mecânica [Ferreira, 1999]. Desta forma, quando se trata o fluido, como incompressíveis, a variável pressão é sempre interpretada como uma pressão mecânica. Esta é a chamada Hipótese de Stokes, isto é

$$p_t = p_m = -\frac{1}{3}\sigma_{ii} \quad (2.16)$$

2.2.7. CONSERVAÇÃO ENERGIA

Aplicando-se o princípio da conservação de energia, o Teorema de Transporte de Reynolds também pode ser usado para derivar a equação da energia. Diversos autores já se preocuparam em detalhar esta aplicabilidade, onde o resultado final e na forma conservativa será;

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) \right] + \partial_i \left[\rho v_i \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) \right] = -\partial_i q_i + \partial_i (\sigma_{ij} v_j) + \rho v_i F_i \quad (2.17)$$

ou a notação simbólica e na forma não conservativa;

$$\rho \frac{D}{Dt} \left[e + \frac{1}{2} v^2 \right] = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} \quad (2.18)$$

A equação na forma conservativa pode ser separada em duas equações: a equação da energia cinética e a equação da energia térmica. A equação da energia cinética é obtida da equação do momento e sua forma final definida como;

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{1}{2} v^2 \right) + \partial_i \left(\rho v_i \frac{1}{2} v^2 \right) = -v_i \partial_i p + v_i \partial_j \tau_{ji} + \rho v_i F_i \quad (2.19)$$

A equação da energia térmica é obtida subtraindo a Eq.(2.19) da Eq.(2.18), resultando em

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho e) + \partial_i (\rho v_i e) = -p \partial_i v_i + \tau_{ji} \partial_j v_i - \partial_i q_i \quad (2.20)$$

onde define-se nas equações anteriores, $\rho(e + v^2/2)$, como sendo a energia total da partícula material e q_i o fluxo de calor.

A equação da energia tendo a temperatura como variável dependente, também pode ser derivada; obtendo-se,

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T + \Phi \quad (2.21)$$

onde c_v é o calor específico, k a condutividade térmica e ϕ é a chamada função de dissipação [Ferreira, 1999].

2.2.8. FLUIDOS NEWTONIANOS E AS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES

O ponto de partida é assumir que o tensor τ_{ij} é uma função do estado termodinâmico local e do gradiente de velocidade

$$\tau_{ij} = \sigma_{ij}(\rho, e, \partial_k v_e) \quad (2.22)$$

A forma mais simples para a relação acima é uma função linear do gradiente de velocidade, cujos coeficientes dependem do estado termodinâmico

$$\sigma_{ij} = a_1 \delta_{ij} + a_2 \partial_k v_k \delta_{ij} + a_3 \partial_{(i} v_{j)} \quad (2.23)$$

Pode-se fixar a_1 argumentando que quando não há movimento do fluido, a equação acima deve reproduzir a pressão termodinâmica. Assim, $a_1 = -p_t$ e os coeficientes a_2 e a_3 são usualmente denotados como λ e 2μ , respectivamente. Esses coeficientes são chamados de segundo e primeiro coeficientes de viscosidade, respectivamente [Ferreira, 1999].

Através da equação da continuidade é possível definir;

$$p_t - p_m = \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \partial_k v_k = - \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}. \quad (2.24)$$

Desde que o segundo termo seja nulo em escoamentos incompressíveis, o segundo coeficiente de viscosidade λ desempenha um papel secundário nesses escoamentos. Entretanto, em escoamentos compressíveis λ tem muita importância. Pela hipótese de Stokes têm-se $p_t = p_m$ e, portanto, $\lambda = -\frac{2\mu}{3}$. Assim, a hipótese de Stokes é tomada como uma das características dos fluidos Newtonianos. Através desta definição, a Eq.(2.23) poderá ser escrita,

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} - \frac{2}{3} \mu \partial_k v_k \delta_{ij} + 2\mu \partial_{(i} v_{j)} \quad (2.25)$$

onde μ é definido usualmente como o coeficiente de viscosidade dinâmica ou molecular. Esta é a essência da Lei de Viscosidade de Newton.

Comparando-se a Eq.(2.25), o tensor das tensões viscosas assuma a forma;

$$\tau_{ij} = -\frac{2}{3} \mu \partial_k v_k \delta_{ij} + 2\mu \partial_{(i} v_{j)} \quad (2.26)$$

sendo para escoamentos incompressíveis;

$$\tau_{ij} = 2\mu\partial_{(i}v_{j)} \quad (2.27)$$

Desta forma, a Lei da Viscosidade de Newton para escoamentos incompressíveis é definida como,

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu\partial_{(i}v_{j)} \quad (2.28)$$

Fisicamente, esta equação representa que o tensor das tensões é proporcional a deformação, onde a constante de proporcionalidade contém o coeficiente de viscosidade molecular. É interessante observar que não é uma lei física e sim uma aproximação para o comportamento de muitos fluidos [Ferreira, 1999].

A lei de viscosidade de Newton implica que um fluido tenha as seguintes propriedades:

- i) as tensões são proporcionais às deformações;
- ii) o tensor das tensões é simétrico e
- iii) vale a hipótese de Stokes. Fluidos que satisfazem estas propriedades são chamados de fluidos Newtonianos.

2.2.9. AS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES

A equação da continuidade, a equação do movimento e a Lei da Viscosidade de Newton, são conhecidas na literatura como as equações de Navier-Stokes.

Em coordenadas cartesianas estas equações são encontradas pela substituição do tensor das tensões, na Eq.(2.11) para a quantidade de movimento e na Eq.(2.21) para a quantidade de energia. As equações de movimento e energia para um fluido Newtoniano e incompressível serão determinadas como;

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 V + \rho F \quad (2.29)$$

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T + \Phi \quad (2.30)$$

$$\nabla \cdot V = 0 \quad (2.31)$$

Comumente a literatura apresenta o termo das equações de Navier-Stokes com propriedades constantes, enfatizando que nas equações os coeficientes de transporte ρ , μ e c_v são aproximadamente constantes. Neste caso as equações para um fluido Newtoniano incompressível podem ser desacopladas da equação da energia (Eq.(2.30)). Existem situações em que a temperatura é sempre constante durante o movimento, nestes casos não é considerada e tais escoamentos são chamados de isotérmicos.

As equações de Navier-Stokes modelam qualquer escoamento viscoso, e matematicamente, constituem um sistema de equações diferenciais a derivadas parciais não lineares, nas variáveis v_i , P e T como variáveis dependentes. Os termos de mais alta ordem nestas equações, que aparecem devido aos efeitos viscosos são lineares e de segunda ordem, enquanto os termos convectivos são não lineares e de primeira ordem. Por estas razões estas equações são também chamadas quase lineares [Panton, 1984].

Qualquer conjunto de equações diferenciais parciais de segunda ordem pode ser classificado como elíptico parabólico ou hiperbólico, sendo que as equações de Navier-Stokes exibem todos os três tipos de comportamento. Até hoje não se conhece soluções analíticas para um escoamento viscoso e arbitrário; assim costuma-se adotar o tratamento numérico como forma de aproximação aos problemas físicos. O termo “dinâmica dos fluidos computacional” é utilizado para resolver escoamentos governados por estas equações via métodos numéricos [Ferreira, 1999].

As equações governantes de um escoamento incompressível, viscosidade constante e isotérmico, em coordenadas cartesianas e na forma conservativa. Seja $p = P_m/\rho$ e $\nu = \mu/\rho$ o coeficiente de viscosidade cinemática. As equações de Navier-Stokes em 3D e em notação usual;

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + F_x \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial vw}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + F_y \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial wu}{\partial x} + \frac{\partial wv}{\partial y} + \frac{\partial w^2}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + F_z \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.35)$$

3. FLUIDOS E VISCOSIDADE

3.1. FLUIDOS E REOLOGIA

A reologia é a ciência que estuda o comportamento deformacional e o fluxo de matéria submetido a tensões, sob determinadas condições termodinâmicas ao longo de um intervalo de tempo. Inclui propriedades como: elasticidade, viscosidade e plasticidade dos fluidos.

A viscosidade é a medida da resistência interna ou fricção interna de uma substância ao fluxo quando submetida a uma tensão. Quando mais viscosa a massa, mais difícil de escoar e maior o seu coeficiente de viscosidade. Um fluido é uma substância que se deforma continuamente quando sujeito à ação de uma força de cisalhamento. Os fluidos reais (líquidos, gases, sólidos fluidizados) apresentam uma resistência à deformação ou ao escoamento quando submetidos a uma determinada tensão. Para os gases, a viscosidade está relacionada com a transferência de impulso devido à agitação molecular. Já a viscosidade dos líquidos relaciona-se mais com as forças de coesão entre as moléculas [Bird e Lightfoot, 1960]

Os líquidos viscosos não possuem forma geométrica definida e escoam irreversivelmente quando submetidos a forças externas. Os sólidos elásticos apresentam forma geométrica bem definida e se deformados pela ação de forças externas, assumem outra forma de equilíbrio. Muitos materiais apresentam um comportamento mecânico intermediário entre estes dois extremos, evidenciando tanto características viscosas como elásticas e, por este motivo, são conhecidos como viscoelásticos.

Um fluido contido entre duas placas planas paralelas, de área A , separadas por uma distância y . Uma força \vec{F} é aplicada na parte superior, movimentando a placa a uma velocidade \vec{u} constante em relação à placa inferior, que é mantida fixa, conforme mostra a Fig.(3.1).

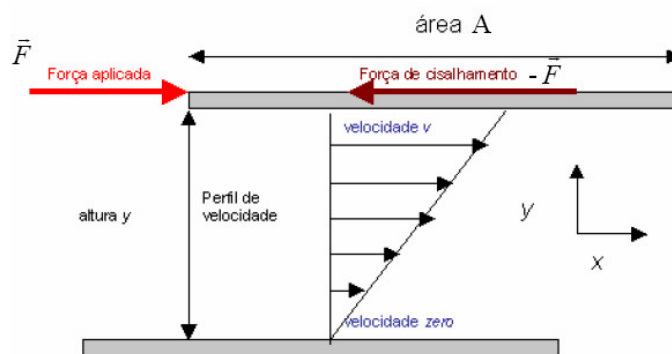


Figura 3.1 – Força de cisalhamento aplicada sobre um fluido.

Esta força \vec{F} dará origem a uma força de cisalhamento de mesma intensidade, porém em sentido contrário, que existe somente devido às forças de coesão do fluido com as paredes da

placa e entre as camadas de fluido, em caso de regime laminar. A força de cisalhamento dá origem a um gradiente de velocidade entre as placas.

Supondo que não haja deslizamento do fluido nas paredes das placas, a velocidade do fluido será igual à *zero* na placa inferior e igual a U na placa superior.

A Lei de Newton da Viscosidade relaciona a tensão de cisalhamento (produto da força de cisalhamento pela área) e o gradiente local de velocidade, definida através de uma relação linear, sendo a constante de proporcionalidade, a viscosidade do fluido. Assim, todos os fluidos que seguem este comportamento são denominados Fluidos Newtonianos.

$$\tau_{yx} = \mu \frac{du_x}{dy} \quad (3.1)$$

na qual;

τ_{yx} é a tensão de cisalhamento na direção do escoamento,

$\frac{du_x}{dy}$ é o gradiente de velocidade ou taxa de cisalhamento ($\dot{\gamma}$),

μ é a viscosidade,

A partir das definições, torna-se importante explicitar uma classificação dos fluidos quanto à sua deformação;

- Reversíveis ou Elásticos: São sistemas que não escoam; sua deformação é reversível e o sistema obedece à Lei de Hooke.
- Irreversíveis ou Viscosos: São sistemas que escoam; sua deformação é irreversível e o sistema obedece à Lei de Newton, de viscosidade constante.

Também podem ser classificados quanto à relação entre a taxa de deformação e a tensão de cisalhamento:

- Fluidos Newtonianos: sua viscosidade é constante, seguem a Lei de Newton.

Esta classe abrange todos os gases e líquidos não poliméricos e homogêneos. Por exemplo: água, leite, soluções de sacarose, óleos vegetais.

- Fluidos Não Newtonianos: a relação entre a taxa de deformação e a tensão de cisalhamento não é constante. Exemplo, a retração elástica ilustrada na Fig.(3.2).

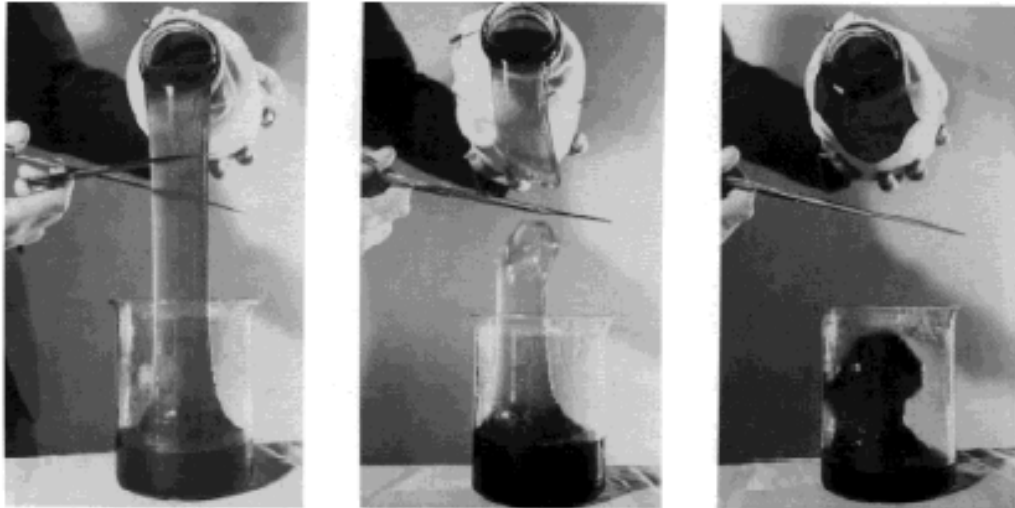


Figura 3.2- Fluido Não-Newtoniano – Retração Elástica

Os fluidos não Newtonianos ainda podem ser classificados em: viscoelásticos, dependentes e independentes do tempo.

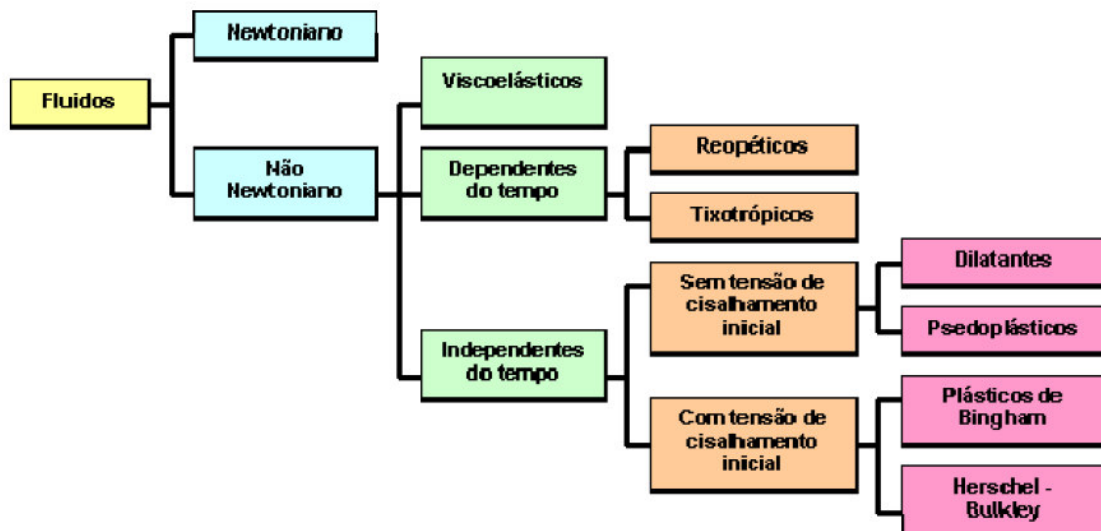


Figura 3.3- Classificação dos Fluidos segundo seu comportamento reológico

A Fig.(3.4) ilustra o comportamento reológico, através da relação entre tensão e taxa de cisalhamento, para fluidos, Newtoniano e não Newtonianos independentes do tempo.

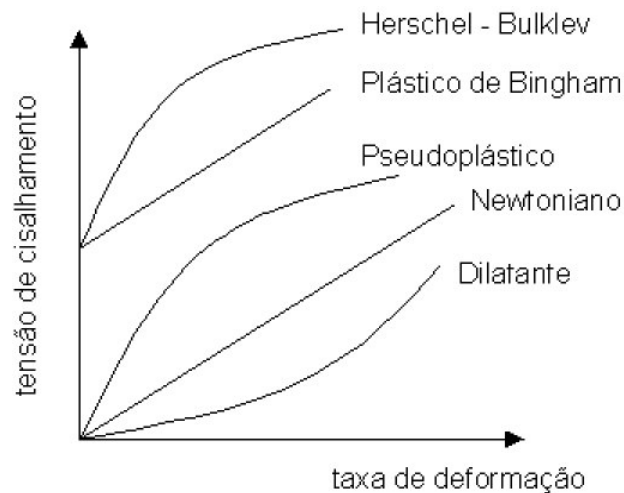


Figura 3.4- Curvas de escoamento de fluidos newtoniano e não newtonianos de propriedades independentes do tempo de cisalhamento.

3.1.1. FLUIDOS NÃO NEWTONIANOS INDEPENDENTES DO TEMPO

Classe de fluidos cujas propriedades reológicas independem do tempo de aplicação da tensão de cisalhamento. Podem ser caracterizados como;

Sem Tensão cisalhamento Inicial:

Aqueles que não necessitam de uma tensão de cisalhamento inicial para começarem a escoar. Compreende a maior parte dos fluidos não Newtonianos.

Fluidos Pseudoplásticos (shear-thinning):

São substâncias que em repouso apresentam suas moléculas em um estado desordenado, e quando submetidas a uma tensão de cisalhamento, suas moléculas tendem a se orientar na direção da força aplicada. E quanto maior esta força, maior será a ordenação e, conseqüentemente, menor será a viscosidade aparente.

A curva típica de fluidos pseudoplásticos indica que a viscosidade decai com o aumento da taxa de cisalhamento, tornando-se linear somente a taxas de cisalhamento altas. Uma interpretação física para este decaimento da viscosidade pode ser atribuído ao ordenamento molecular progressivo do fluido à medida que sofre um aumento da taxa de cisalhamento. Por exemplo, durante a deformação de um aglomerado de moléculas de elevado peso molecular, existirá um desdobramento, ou um desenrolamento, das cadeias poliméricas, ao contrário da situação que ocorre quando este emaranhado de moléculas estiver em repouso. Com o aumento da taxa de cisalhamento este efeito ficará pronunciado e causará um decréscimo progressivo da fricção intermolecular devido ao pequeno tamanho efetivo e pequena interação entre as macromoléculas.

Este fluido pode ser descrito pelo *Modelo de Ostwald-de-Waele ou Modelo Power Law* (1923, 1925), onde a função viscosidade é dada por uma lei de potência a dois parâmetros; n e K ; conforme a Eq.(3.2).

$$\eta = K (\dot{\gamma})^{(n-1)} \quad (3.2)$$

Em quase todos os problemas industriais, a região linear descendente (região *Power-law*) da Fig.(3.5), é sob o ponto de vista reológico, sua região mais importante.

O modelo *Power-law* para a viscosidade não Newtoniana $\eta(\dot{\gamma})$, é o mais conhecido e extensamente empregado em engenharia, com uma extensa gama de escoamentos tendo sido resolvidos analiticamente por este modelo. Pode-se obter uma estimativa aproximada do efeito da viscosidade não Newtoniana através de cálculos baseados na Eq.(3.2). Entretanto, as limitações do modelo *Power-law* não devem ser negligenciadas: (i) o modelo não pode determinar a viscosidade para taxas de cisalhamento muito pequenas, o que, em alguns problemas, pode conduzir a erros significativos; (ii) um tempo característico e uma viscosidade característica não podem ser construídos somente empregando os parâmetros K e n , o que pode não ser adequado do ponto de vista da análise dimensional; (iii) não é possível relacionar os parâmetros K e n com o peso molecular e concentração, já que as correlações padrões são descritas em termos de η_0 e η_∞

Outros modelos são capazes de corrigir esta deficiência através da predição de viscosidades limites η_0 e η_∞ , como o *Modelo de Carreau-Yasuda*,

Este modelo, a cinco parâmetros, tem suficiente flexibilidade para abranger uma grande variedade de curvas experimentais de $\eta(\dot{\gamma})$. Tem-se mostrado útil para simulações numéricas, nas quais é necessária uma expressão analítica para a curva de viscosidade não Newtoniana. Matematicamente, este modelo pode ser expresso por,

$$\frac{\eta - \eta_\infty}{\eta_0 - \eta_\infty} = \left[1 + (\lambda \dot{\gamma})^a \right]^{(n-1)/a} \quad (3.3)$$

onde η_0 e η_∞ são as viscosidades encontradas nos platôs de baixas e altas deformações, respectivamente; λ é um tempo característico do fluido, n o expoente *power-law* (visto descrever, na região *Power-law*, o coeficiente angular de $(\eta - \eta_\infty)/(\eta_0 - \eta_\infty)$), e a um parâmetro adimensional que descreve a região de transição entre a região para a taxa de cisalhamento muito baixas e a região *Power-law*.

Em diversas situações onde polímeros fundidos e ou soluções poliméricas concentradas, bons ajustes são obtidos para os valores de $a = 2$ e $\eta_\infty = 0$. Portanto, a Eq. (3.3), originalmente proposta a cinco parâmetros, passa a ter somente três parâmetros, a saber, η_∞ , λ , e n . A Eq. (3.3)

com $a=2$ é usualmente referida como modelo de Carreau, visto o parâmetro a ter sido introduzido posteriormente por Yasuda.

Da comparação das Eqs. (3.2) e (3.3), fica evidente que o expoente n no modelo *Power-law*, tem o mesmo significado que na equação de Carreau-Yasuda, sendo o parâmetro K , muitas vezes referido como índice de consistência, é dado por $\eta_0 \lambda^{n-1}$ no modelo de Carreau-Yasuda. Tomando $n=1$ e $K=\mu$ na Eq. (3.2), recupera-se o modelo de fluido Newtoniano.

Para $n<1$ na Eq. (3.2), o fluido é dito pseudoplástico ou *shear thinning*, e, se $n>1$, o fluido é chamado dilatante ou *shear thickening*. Importante ressaltar que ambos os parâmetros K e n são dependentes da temperatura, com o parâmetro K decaindo rapidamente com o aumento da temperatura.

Fluidos Dilatantes (shear-thickening):

São substâncias que apresentam um aumento de viscosidade aparente com a tensão de cisalhamento. No caso de suspensões, à medida que se aumenta a tensão de cisalhamento, o líquido intersticial que lubrifica a fricção entre as partículas é incapaz de preencher os espaços devido a um aumento de volume que freqüentemente acompanha o fenômeno. Ocorre, então, o contato direto entre as partículas sólidas e, conseqüentemente, um aumento da viscosidade aparente.

Em fluidos desse tipo, a viscosidade aumenta com o aumento da taxa de cisalhamento. Por exemplo, nas suspensões coloidais concentradas. Este comportamento foi primeiro discutido por Osborne Reynolds (1885), que sugeriu que quando essas suspensões concentradas estão em repouso, os espaços vazios estão no seu mínimo e o líquido é somente suficiente para preencher estes vazios. Quando estes materiais são cisalhados a baixas taxas, o líquido lubrifica o movimento de uma partícula, e conseqüentemente as tensões são baixas. A formação dessas estruturas causa um aumento rápido da viscosidade com o aumento da taxa de cisalhamento.

Ambos os fluidos *pseudoplásticos* e *dilatantes*, em escoamentos cisalhantes possuem três regiões:

- I- uma Newtoniana a baixas taxas de deformação, caracterizada por uma viscosidade μ_0 constante;
- II- uma de taxas de deformação intermediárias, caracterizada por uma viscosidade μ dependente dessa deformação
- III- uma segunda região Newtoniana, caracterizada por uma viscosidade μ_∞

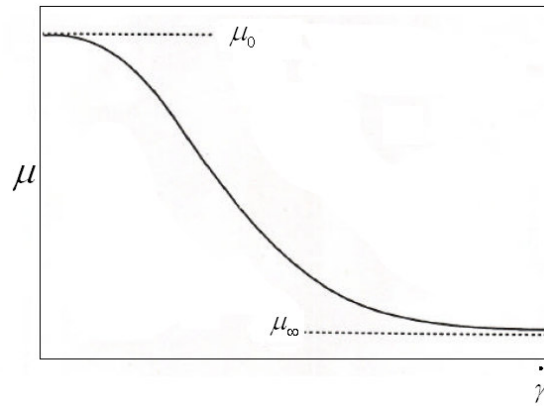


Figura 3.5- Variação da viscosidade com a taxa de deformação

Também podem ser representados pelo *Modelo de Ostwald-de-Waele (Power Law)*. No entanto para este caso, o fator que determina a inclinação da curva de comportamento do fluido terá valores superiores à unidade, enquanto que para os fluidos pseudoplásticos este valor é sempre inferior a unidade.

Com Tensão Cisalhamento Inicial:

São os que necessitam de uma tensão de cisalhamento inicial para começarem a escoar. Dentre os fluidos desta classe se encontram:

Plásticos de Bingham:

Este tipo de fluido apresenta uma relação linear entre a tensão de cisalhamento e a taxa de deformação, a partir do momento em que se atinge uma tensão de cisalhamento inicial. Este comportamento pode ser descrito pela equação;

$$\begin{aligned} \tau_{yx} &= \tau_0 + \mu_0 \frac{du_x}{dy}, \text{ para } |\tau_{yx}| > |\tau_0| \\ \frac{du_x}{dy} &= 0, \text{ para } |\tau_{yx}| < |\tau_0| \end{aligned} \quad (3.4)$$

Na qual τ_0 é a tensão de cisalhamento inicial, μ_0 é uma constante análoga à viscosidade de fluidos newtonianos.

Um plástico de Bingham se caracteriza por uma curva de fluxo que é uma reta tendo uma intersecção no eixo da tensão. O conceito de plástico idealizado de Bingham é conveniente e caracterizado na prática como o comportamento de certos fluidos quando em escoamento, por exemplo, pasta de dente e tinta. Em repouso, o fluido contém estruturas tridimensionais de rigidez suficientes para resistir a uma tensão menor que τ_0 . Se essa tensão é excedida, a estrutura

se desintegra e o sistema se comporta como um fluido newtoniano com tensão de cisalhamento $\tau > \tau_0$; quando a tensão é menor que τ_0 a estrutura é retomada.

Fluidos Herschel-Bulkley

Os fluidos viscoplásticos, também chamados de fluidos de Herschel-Bulkley ou de Bingham generalizados, também necessitam de uma tensão inicial para começar a escoar. Eles se comportam como sólidos quando a tensão local é inferior a τ_0 . Quando essa tensão é excedida, o material flui com uma relação tensão-deformação não linear como um pseudoplástico ou dilatante, ou seja, a relação entre a tensão de cisalhamento e a taxa de deformação não é linear. Para cada fluido caracterizado por esta classificação teremos um fator exponencial, adimensional, n , que definirá o seu comportamento.

$$\begin{aligned} \tau_{yx} &= \tau_0 + K \left(\frac{du_x}{dy} \right)^n, \text{ para } |\tau_{yx}| > |\tau_0| \\ \frac{du_x}{dy} &= 0, \text{ para } |\tau_{yx}| < |\tau_0| \end{aligned} \quad (3.5)$$

Existem ainda outros fluidos específicos, como sangue, iogurte, purê de tomate, etc. que são descritos por outro modelo matemático, o *Modelo de Casson*.

$$\begin{aligned} |\tau_{yx}|^{\frac{1}{2}} &= |\tau_0|^{\frac{1}{2}} + \left(\mu_0 \left| \frac{du_x}{dy} \right|^n \right)^{\frac{1}{2}}, \text{ para } |\tau_{yx}| > |\tau_0| \\ |\tau_{yx}| &= |\tau_0|, \text{ para } |\tau_{yx}| < |\tau_0| \end{aligned} \quad (3.6)$$

3.1.2. FLUIDOS NÃO NEWTONIANOS DEPENDENTES DO TEMPO

Os fluidos que possuem este tipo de comportamento apresentam propriedades que variam, além de cisalhamento, com o tempo de aplicação desta tensão, para uma velocidade de cisalhamento constante.

Fluidos Tixotrópicos:

Esta classe de fluidos tem sua viscosidade diminuída com o tempo de aplicação da tensão de cisalhamento, voltando a ficar mais viscoso com quando cessada a aplicação desta força. Por exemplo, suspensões concentradas, emulsões, soluções protéicas, petróleo cru, tintas, ketchup.

Fluidos Reopéticos:

Já este tipo de fluido apresenta um comportamento inverso ao dos tixotrópicos. Desta forma, a viscosidade destes fluidos aumenta com o tempo de aplicação da tensão, retornando à viscosidade inicial quando esta força cessa. Por exemplo, argila bentonita.

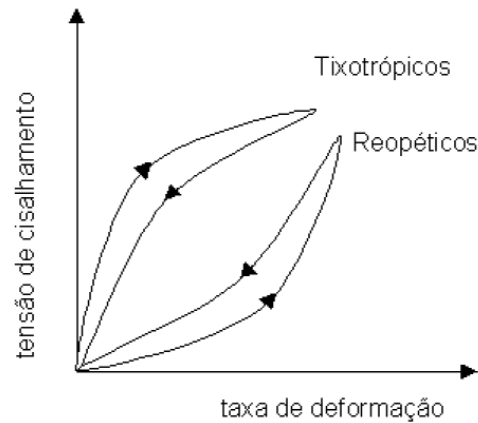


Figura 3.6- Curvas de escoamento de fluidos não newtonianos de propriedades dependentes do tempo de cisalhamento.

3.1.3. FLUIDOS VISCOELÁSTICOS

São fluidos que possuem características de líquidos viscosos com propriedades elásticas (Modelo de Maxwell) e de sólidos com propriedades viscosas (Modelo de Kevin-Voight), ou seja, possuem propriedades elásticas e viscosas acopladas. Estas substâncias quando submetidas à tensão de cisalhamento sofrem uma deformação e quando esta cessa, ocorre uma recuperação da deformação sofrida (comportamento elástico). O *Modelo de Maxwell (1957)* descreve este tipo de comportamento de fluidos exemplificados como: Massas de farinha de trigo, gelatinas, queijos, líquidos poliméricos, glicerina, plasma, biopolímeros, saliva.

$$\tau_{ij} + t_0 \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} = -\mu \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.7)$$

onde;

$t_0 = \mu/G$ é um tempo característico do fluido em estudo,

G é o módulo de rigidez cisalhante do fluido. Que significa uma medida da resistência do material contra a distorção cisalhante e seu valor é igual à inclinação da curva da tensão de cisalhamento vs. a taxa de deformação na região elástica.

3.1.4. OUTROS MODELOS

Além dos modelos apresentados anteriormente, existem modelos aplicáveis à fluidos que apresentam comportamento misto [Bailey, 1998]. Entre estes modelos citam-se os seguintes;

Modelo de Prandtl-Eyring

Este modelo baseia-se na Teoria Cinética de Eyring de líquidos e descreve o comportamento pseudoplástico para valores finitos de tensão de cisalhamento. Neste modelo

existem dois parâmetros característicos de cada tipo de fluido. Quando a tensão de cisalhamento tende a zero, o comportamento do fluido obedecerá a Lei de Newton da Viscosidade e estes parâmetros (A e B) particulares de cada fluido serão $\mu = \frac{A}{B}$.

$$\begin{aligned}\tau_{yx} &= A \arcsin h \left(-\frac{1}{B} \frac{du_x}{dy} \right), \tau_{yx} > 0 \\ \tau_{yx} &= -\mu \frac{du_x}{dy}, \tau_{yx} \rightarrow 0\end{aligned}\tag{3.8}$$

Modelo de Ellis

Este modelo é dado pela equação:

$$-\frac{du}{dy} = (\varphi_0 + \varphi_1 |\tau_{yx}|^{\alpha-1}) \tau_{yx}\tag{3.9}$$

Na qual, α , φ_0 , φ_1 , são parâmetros positivos, ajustáveis e característicos de cada fluido. Para um α muito maior que a unidade e baixos valores de τ_{yx} o modelo se aproxima do modelo de Newton. Já para um α muito menor que a unidade e altos valores de τ_{yx} , se aproxima do modelo de *Power-law*. Este comportamento torna o modelo bastante flexível e aplicável.

Modelo de Reiner-Philippoff

É representado pela equação:

$$-\frac{du}{dy} = \left[\frac{1}{\mu_\infty + \frac{\mu_0 - \mu_\infty}{1 + \left(\frac{\tau_{yx}}{\tau_s} \right)}} \right] \tau_{yx}\tag{3.10}$$

Na qual os parâmetros μ_0 , μ_∞ e τ_s são característicos para cada tipo de fluido. Esta equação se reduz ao modelo de Newton para valores muito baixos ou muito altos de τ_{yx} , quando $\mu = \mu_0 = \mu_\infty$.

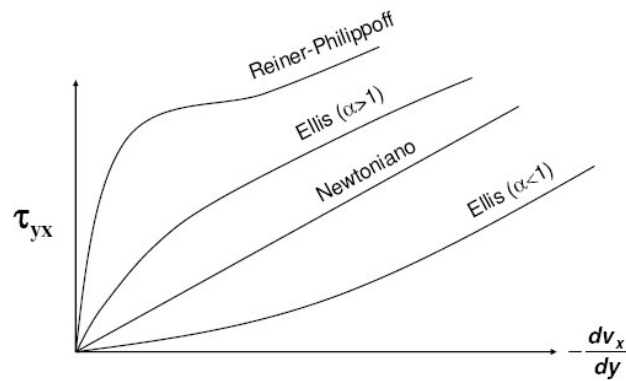


Figura 3.7- Curvas de escoamento de fluidos não newtonianos representadas por outros modelos.

Existem outros modelos empíricos descritos na literatura, cabendo ao engenheiro a correta escolha ou proposição de um novo modelo que possa representar o fluido de interesse adequadamente [Bailey, 1998].

3.2. FLUIDO NEWTONIANO GENERALIZADO (GNL)

Em escoamentos industriais de interesse a variação encontrada na viscosidade, remete a não poder desprezá-la nas avaliações matemáticas, conseqüentemente não é surpresa o fato de que o primeiro empirismo a ser introduzido foi uma modificação na lei de Newton da viscosidade, onde foi introduzida uma variação da viscosidade com a taxa de cisalhamento, simplificando-se o tensor das tensões. Estes modelos constitutivos de característica puramente viscosa podem ser também denominados como Modelos Newtonianos Generalizados.

Os modelos não Newtonianos puramente viscosos são bastante utilizados em problemas de engenharia, encontrando uma gama de aplicações. Isso se deve ao fato de que tais modelos, apesar de limitados, são capazes de representar importantes variações na viscosidade durante o processo de escoamentos em dutos e geometrias onde a deformação se dá preferencialmente por cisalhamento.

Matematicamente, a partir da generalização proposta da equação constitutiva Newtoniana, o modelo GNL pode ser expressão por,

$$\begin{aligned}\tau_{ij} &= -p_t \delta_{ij} + \tau_{ij} \\ \tau_{ij} &= -p_t \delta_{ij} + 2\eta(\dot{\gamma}) \mathbf{D}\end{aligned}\quad (3.11)$$

onde a viscosidade aparente $\eta(\dot{\gamma})$ é uma função de invariantes escalares do tensor taxa de deformação.

Se a viscosidade não-Newtoniana, $\eta(\dot{\gamma})$, é uma grandeza escalar, depende do tensor taxa de deformação, então, deverá depender, somente, de combinações particulares dos componentes

deste tensor, as quais sejam independentes do sistema de coordenadas adotado – os chamados invariantes do tensor taxa de deformação:

$$\begin{aligned} I_{\mathbf{D}} &= \text{tr}\mathbf{D} \\ II_{\mathbf{D}} &= (\text{tr}\mathbf{D}^2) \\ III_{\mathbf{D}} &= \det\mathbf{D} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Para um fluido incompressível, o primeiro invariante da Eq. (3.12) reduz-se a

$$\begin{aligned} I_{\mathbf{D}} &= \text{tr}\mathbf{D} \\ &= \nabla v = 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Já nos escoamentos puramente cisalhantes, o primeiro invariante da Eq. (3.12) se anula,

$$III_{\mathbf{D}} = \det\mathbf{D} = 0 \quad (3.14)$$

pois os elementos fluidos não sofrem alterações de volume. Como a Eq. (3.11) deve ser somente empregada para escoamentos cisalhantes, ou, ao menos, escoamentos quase cisalhantes, a omissão do invariante $III_{\mathbf{D}}$ não é uma séria limitação. Assim, a função viscosidade η dependerá somente do segundo invariante do tensor taxa de deformação, $II_{\mathbf{D}}$. Na prática, é preferível empregar-se a magnitude do tensor da taxa de deformação, $\dot{\gamma}$, em vez de $II_{\mathbf{D}}$,

$$\dot{\gamma} = \left(\frac{1}{2} \text{tr}\mathbf{D}^2 \right)^{1/2} = \left(\frac{1}{2} II_{\mathbf{D}} \right)^{1/2} \quad (3.15)$$

com a escolha apropriada do sinal da raiz quadrada da Eq. (3.15) para que $\dot{\gamma}$ tenha valor positivo. Nos escoamentos cisalhantes, $\dot{\gamma}$ é chamado simplesmente de taxa de cisalhamento.

A Eq. (3.11), com $\eta = \eta(\dot{\gamma})$, encontra sua principal utilidade nos cálculos das vazões nos escoamentos puramente cisalhantes em regime permanente, tais como: escoamento em dutos, escoamento anular axial, tangencial e helicoidal, escoamento entre placas paralelas, escoamentos entre discos rotativos e escoamento cone e placa.

Embora a Eq. (3.11) forneça resultados estritamente corretos para vazões e forças cisalhantes somente para escoamentos puramente cisalhantes em regime permanente, os engenheiros vêm aplicando esta equação para escoamentos mais complexos e sistemas levemente transientes. Uma avaliação dos erros inerentes em tais extensões não é disponível, com tal prática representando um bom empirismo em engenharia.

Entretanto para o cálculo da função viscosidade $\eta = \eta(\dot{\gamma})$, apesar de que, para alguns problemas, é possível empregar diretamente dados experimentais para a viscosidade $\eta = \eta(\dot{\gamma})$, é mais útil realizar cálculos e derivações com equações empíricas simples para $\eta = \eta(\dot{\gamma})$, as quais

descrevem os dados experimentais com suficiente exatidão, estas equações são os modelos de *Carreau-Yasuda* a cinco parâmetros e *Power-Law* a dois parâmetros. Estes modelos clássicos empíricos são dois, dentre as muitas correlações disponíveis na literatura [Astarita e Marrucci, 1974, Bird et al., 1987, e Slattery, 1999].

3.3. FLUIDOS VISCOPLÁSTICOS: O FLUIDO SMD

O fluido de Bingham possuiu as mesmas características do modelo de fluido Newtoniano, porém apresenta uma tensão limite de escoamento. Para o modelo Herschel-Bulkey o fluido é de potência, e não irá escoar até que a tensão de cisalhamento seja maior que a tensão limite do material. Ressalta-se ainda que, para outros sistemas viscoplásticos, nem o modelo de Bingham, nem o modelo Herschel-Bulkey fornecem bons ajustes de dados reológicos de materiais viscoplásticos, sendo necessária a introdução de outros modelos, como os modelos propostos por Casson e, recentemente por Souza Mendes e Dutra.

Como objetivo de melhorar a abrangência dos modelos viscoplásticos clássicos Papanastasiou estabeleceu um parâmetros de regularização para as funções viscoplásticas clássicas [Papanastasiou, 1987]. Foi estabelecido um parâmetro de regularização; que quando tende à zero, a função viscosidade regularizada pela equação de Papanastasiou tende à função viscosidade do modelo viscoplástico empregado, seja ele pseudoplástico, dilatante ou à viscosidade constante.

A regularização proposta gera funções de tensão de cisalhamento e viscosidade viscoplástica contínua, válidas tanto para as regiões de escoamento como para regiões rígidas. No caso particular do modelo de Herschel-Bulkley, a regularização proposta por Papanastasiou modifica a função *Herschel-Bulkley*, conforme a Eq.(3.16).

$$\tau = \tau_0 [1 - \exp(-m\dot{\gamma})] + K\dot{\gamma}^n \quad (3.16)$$

onde m é o parâmetro de regularização proposto por Papanastasiou.

Outro modelo proposto foi à função bi-viscosidade modificada, a qual apresenta um comportamento qualitativo bastante adequado para fluidos viscoplásticos [Soares, et al.,1999]. Matematicamente o modelo da bi-viscosidade é dado pela seguinte expressão:

$$\tau = \begin{cases} \tau_0 + K\dot{\gamma}^n, & \text{se } \dot{\gamma} > \dot{\gamma}_0 \\ \eta_0\dot{\gamma} & , \text{ se } \dot{\gamma} < \dot{\gamma}_0 \end{cases} \quad (3.17)$$

onde η_0 é a viscosidade do fluido para as baixas taxas de cisalhamento.

A função modificada de Papanastasiou para o modelo de Herschel-Bulkley e a função da bi-viscosidade definida na Eq.(3.17), são aplicadas para diferentes taxas da taxa de cisalhamento,

sendo essas faixas delimitadas pela taxa de cisalhamento limite do material. Este fato, juntamente com a descontinuidade da primeira derivada dessas funções, pode vir a inviabilizar a obtenção de ajustes de boa qualidade de materiais viscoplásticos. [Souza Mendes e Dutra, 2004].

Uma nova função viscosidade foi proposta para regularizar as dificuldades de ajustar os modelos viscoplásticos. Souza Mendes e Dutra (2004) propuseram uma nova função viscosidade, recentemente chamada de função *SMD*, que consiste em uma função viscosidade para líquidos altamente pseudoplásticos ou *yield-stress*. Essa nova função viscosidade é contínua e possuiu primeira derivada também contínua, o que representa uma grande vantagem em relação aos modelos clássicos. Seu comportamento é qualitativamente igual às demais funções viscosidade viscoplásticas. A função *SMD* apresenta um platô de altas viscosidades a baixas taxas de cisalhamento, seguido de uma queda abrupta da viscosidade (em $\tau=\tau_0$) e, em seguida prescreve uma região *Power-Law* para o campo de viscosidade a altas taxas de cisalhamento.

O modelo viscosidade *SMD* introduz a seguinte expressão matemática para as tensões de cisalhamento:

$$\tau = (1 - \exp(-\eta_0 \dot{\gamma} / \tau_0)) (\tau_0 + K \dot{\gamma}^n) \quad (3.18)$$

onde η_0 é a viscosidade para as baixas taxas de cisalhamento.

A função viscosidade do modelo *SMD* proposta para estes líquidos altamente pseudoplásticos ou sujeitos a um limite de escoamento, pode ser obtida a partir da equação anterior usando a definição de função viscosidade dada para um fluido Newtoniano generalizado (GNL).

Conforme a Eq.(3.18), quando a tensão de cisalhamento alcançar a tensão limite τ_0 , ocorre um aumento abrupto da taxa de cisalhamento, sem, contudo, considerável aumento na tensão de cisalhamento. Logo, $\tau \approx \tau_0$, quando a taxa de cisalhamento tiver um “salto” de um valor $\dot{\gamma}_0$ para um valor freqüentemente muito maior $\dot{\gamma}_1$, na vizinhança do início da região *Power-Law*. Portanto pode-se atribuir o comportamento da função viscosidade *SMD* e as definições como sendo;

$$\eta(\dot{\gamma}) = (1 - \exp(-\eta_0 \dot{\gamma} / \tau_0)) \left(\frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + K \dot{\gamma}^{n-1} \right) \quad (3.19)$$

$$\dot{\gamma}_0 \equiv \frac{\tau_0}{\eta_0} \quad \text{e} \quad \dot{\gamma}_1 \equiv \left(\frac{\tau_0}{K} \right)^{1/n} \quad (3.20)$$

O comportamento da função viscosidade *SMD*, bem como das definições dadas acima, levaram aos autores do modelo à introdução do seguinte número reológico adimensional

denominado por número de salto J , que por definição terá a função de fornecer uma medida relativa do aumento da taxa de cisalhamento que ocorre em $\tau=\tau_0$.

$$J = \frac{\dot{\gamma} - \dot{\gamma}_0}{\dot{\gamma}_0} \quad (3.21)$$

Quando o expoente $n=1$, ele torna-se independente de τ_0 e reduz-se a,

$$J = \left(\frac{\eta_0}{K} \right) - 1 \quad (3.22)$$

isto é, $J+1$ torna-se a razão entre η_0 e a viscosidade plástica K .

As propriedades reológicas das soluções, apresentadas na Fig.(3.8), exemplificam o comportamento viscoplástico de uma solução aquosa de Carbopol; nome comercial dado a uma família de polímeros hidrossolúveis que são empregados para espessar soluções e para estabilizar emulsões; obtidas por Souza Mendes et al. (2007) com o auxílio de um reômetro rotacional. Como é observado na Fig.(3.8.a) – onde os marcadores representam os dados experimentais – o modelo SMD caracterizado pela Eq.(3.18) – representado pelas linhas na figura – oferece um ajuste adequado aos dados obtidos experimentalmente. O comportamento viscoplástico das soluções mostra-se evidente na Fig.(3.8)(b) pela mudança abrupta da viscosidade quando a tensão se aproxima da tensão limite de escoamento, em $\tau^*=1$.

Os autores que determinaram tais propriedades reológicas encontraram problemas de convergência ao fazer as aproximações numéricas para escoamentos com J muito elevado. Esse foi o motivo de suas simulações se limitarem a valores de J da ordem de 104.

A função SMD pode ser adimensionalizada escolhendo τ_0 e $\dot{\gamma}_1$ como a tensão e taxa de cisalhamento características, ou seja, $\tau^* \equiv \tau / \tau_0$ e $\dot{\gamma}^* \equiv \dot{\gamma} / \dot{\gamma}_1$, assim podem-se escrever as seguintes versões adimensionais para as equações do modelo de viscosidade do fluido SMD, sendo a expressão matemática das tensões adimensionais e da função viscosidade adimensional.

$$\tau^* = (1 - \exp[-(J+1)\dot{\gamma}^*]) (1 + \dot{\gamma}^{*n}) \quad (3.23)$$

$$\eta^* = \frac{\tau^*}{\dot{\gamma}^*} = \frac{\eta}{\eta_0} (J+1) = (1 - \exp[-(J+1)\dot{\gamma}^*]) \left(\frac{1}{\dot{\gamma}^*} + \dot{\gamma}^{*n-1} \right) \quad (3.24)$$

As normalizações empregadas somente envolvem propriedades materiais e, conseqüentemente as quantidades adimensionais resultantes são também propriedades materiais. Logo, ela só é conveniente para materiais viscoplásticos, visto as quantidades características τ_0 e $\dot{\gamma}_1$, serem nulas para líquidos Newtonianos e *Power-Law*. No mais, o parâmetro de regularização do modelo é uma medida de uma propriedade reológica para todos os líquidos viscoplásticos.

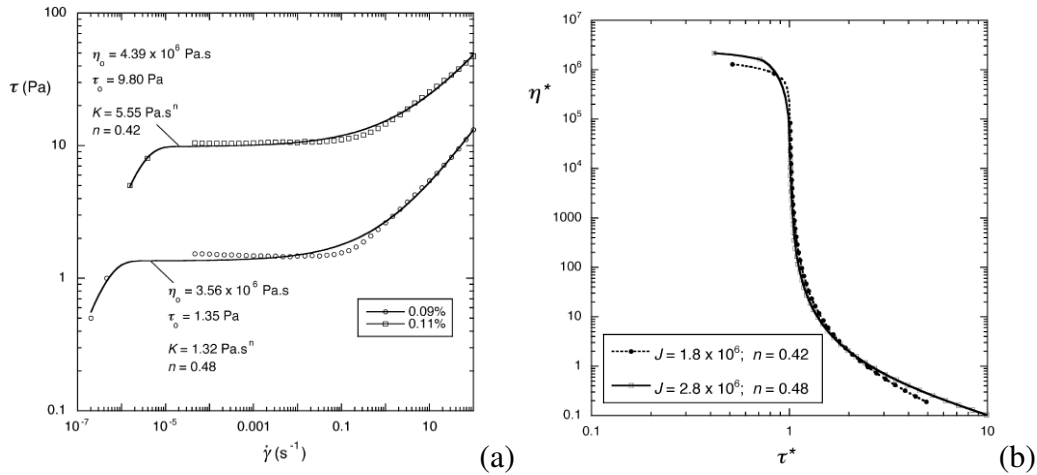


Figura 3.8 – Curvas reológicas de soluções de carbopol: (a) $\tau \times \dot{\gamma}$; (b) $\eta^* \times \tau^*$; (Fonte: Souza Mendes et al., 2007).

Outro exemplo do comportamento da função SMD é avaliado na Fig.(3.9), onde se apresenta uma simulação da curva de escoamento de um material viscoplástico realizada em uma planilha eletrônica de cálculos. Observa-se que, a medida relativa do salto da taxa de cisalhamento aumenta com o aumento do número de salto J , ou seja, a taxa de cisalhamento aumenta enquanto a tensão de cisalhamento permanece aproximadamente igual a τ_0 até o início da região *Power-law*.

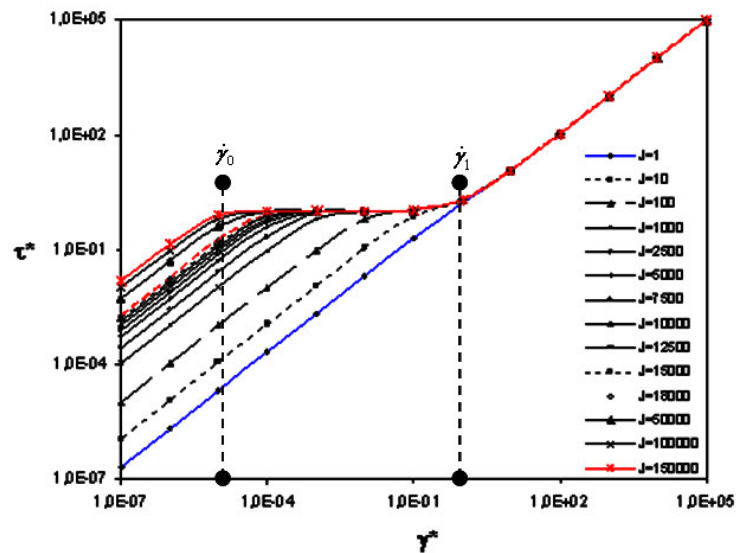


Figura 3.9. Curva de escoamento de um material viscoplástico, para índice *Power-law* $n=0,8$.

4. APROXIMAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS

4.1. INTRODUÇÃO AO MÉTODO

Esse capítulo pretende, além de revisar conceitualmente o Método dos Elementos Finitos (MEF), também o de apresentar a modelagem numérica para a solução do problema proposto por este trabalho. A apresentação conceitual se dará em uma dimensão estudando problemas de valor de contorno e facilitando a exposição dos principais conceitos e desenvolvimentos matemáticos empregados no MEF. Apresentar aspectos importantes do método como a diferenciação entre a formulação forte e fraca da resolução de equações diferenciais e o MEF do ponto de vista global e do elemento.

4.2. PRINCÍPIOS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Os principais constituintes do MEF para a solução de um problema de valor de contorno são:

- i. A formulação variacional ou fraca do problema;
- ii. A solução aproximada das equações variacionais através do uso de funções de elementos finitos.

Para esclarecer esses conceitos inicia-se com um simples exemplo.

Suponha-se que esteja interessado em resolver a seguinte equação diferencial para u :

$$u_{,xx} + f = 0 \quad (4.1)$$

onde a vírgula representa a diferenciação (ou seja, $u_{,xx} = \frac{d^2 y}{dx^2}$). Assume-se que f seja uma função de valores escalar contínua e suave num intervalo unitário. Pode-se escrever

$$f : [0,1] \rightarrow \mathfrak{R} \quad (4.2)$$

onde $[0,1]$ representa o intervalo unitário (isto é, o conjunto de pontos de x tal que $0 \leq x \leq 1$) e \mathfrak{R} representa os números reais. Em outras palavras, a Eq.(4.2) diz que para um dado x em $[0,1]$, $f(x)$ é um número real. (freqüentemente usa-se a notação \in que significa “pertence a”. Assim, para cada $x \in [0,1], f(x) \in \mathfrak{R}$). Também $[0,1]$ é dito ser o domínio de f , e \mathfrak{R} é sua faixa.

Tem-se descrito a função f como suave. Ou seja, se esboçar o gráfico da função, deseja-se que ela seja uma curva suave sem descontinuidade e torções. Faz-se isso para evitar dificuldades técnicas e complexidades matemáticas no desenvolvimento do MEF [Hughes, 1978].

Antes de prosseguir, deverão ser introduzidas algumas notações e terminologias adicionais. O intervalo $]0,1[$ denotará o intervalo unitário sem pontos finais. Os intervalos $]0,1[$ e $[0,1]$ são referenciados como intervalos unitários aberto e fechado respectivamente.

4.3. FORMULAÇÃO FORTE OU CLÁSSICA

Um problema de valor de contorno dado pela Eq.(4.1) envolve imposições de condições de contorno na função u . Há uma variedade de possibilidades. Assume-se que u é requerido a satisfazer:

$$u(1) = g \quad (4.3)$$

$$-u_{,x}(0) = h \quad (4.4)$$

onde g e h são constantes dadas. As Eq.(4.3) e (4.4) requerem que u tenha o valor de g em $x=1$ e a derivada de u (isso é, sua inclinação) tenha o valor de $-h$ em $x=0$, respectivamente. Este conjunto de condições de contorno irá possibilitar ilustrar certos aspectos chaves da formulação variacional. Por razões óbvias, as condições de contorno do tipo apresentado acima, conduzem para o chamado problema de valor de contorno de dois pontos.

A forma forte do problema do valor de contorno (S) é representado como se segue:

$$(S) \begin{cases} \text{Dado } f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathfrak{R}, \text{ onde } g, h, \text{ constantes, achar } u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathfrak{R}, \text{ tal que} \\ u_{,xx} + f = 0 \text{ em } \Omega \\ u(1) = g \\ -u_{,x}(0) = h \end{cases} \quad (4.5)$$

onde, quando se escreve $u_{,xx} + f = 0$ em Ω , significa que $u_{,xx} + f = 0$ para todo $x \in \Omega$.

Alguns métodos de aproximação começam diretamente com a formulação forte do problema. O exemplo mais notável é o Método das Diferenças Finitas. O MEF requer uma formulação diferente, a qual é tratada no próximo item [Hughes, et. al, 1978].

4.4. FORMULAÇÃO FRACA OU VARIACIONAL

Para definir a forma fraca ou variacional, contrapartida de (S), necessita-se caracterizar duas classes de funções. A primeira é composta de funções admissíveis. Neste conjunto de soluções admissíveis é importante impor que a condição de contorno $u(1)=g$ seja satisfeita. A outra condição de contorno não será requerida na definição. É importante também, para que certas expressões façam sentido, impor que as derivadas primeiras das funções admissíveis tenham quadrado integrável. Isto é, se u é uma solução trivial, então;

$$\int_0^1 (u_{,x})^2 dx < \infty \quad (4.6)$$

Funções que satisfazem Eq.(4.6) são chamadas de funções H^1 ; escreve-se $u \in H^1$. Algumas vezes o domínio é explicitado, isto é $u \in H^1([0,1])$. Então o conjunto de soluções

admissíveis, denotado por Y , consiste de todas as funções as quais tem derivada primeira com quadrado integrável e que tenham o valor de g para $x=1$. Isso é representado como se segue:

$$Y = \{u \mid u \in H^1, u(1) = g\} \quad (4.7)$$

O fato de que Y é um conjunto de funções é indicado pela chave na Eq.(4.7). A notação para um membro típico de um conjunto, neste caso u , vem em primeiro dentro no lado esquerdo das chaves, seguido à linha vertical e a propriedade satisfeita pelo membro do conjunto.

A segunda classe de funções é chamada de funções de teste ou funções de peso. Este conjunto é muito similar ao conjunto da solução admissível exceto que este requer que funções de teste, w , satisfaçam $w(1)=0$. O conjunto é denotado por v e definida por

$$v = \{w \mid w \in H^1, w(1) = 0\} \quad (4.8)$$

Isso simplifica o assunto no qual se quer ter $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ como sendo suave.

Em termos da definição anterior, pode-se agora estabelecer uma forma fraca apropriada (W), do problema de valor de contorno.

$$(W) \left\{ \begin{array}{l} \text{Dando } f, g, h, \text{ constantes, achar } u \in Y, \text{ tal que para todo } w \in v \\ \int_0^1 w_{,x} u_{,x} dx = \int_0^1 w f dx + w(0)h \end{array} \right. \quad (4.9)$$

Formulações deste tipo são freqüentemente chamadas de trabalho virtual ou deslocamento virtual na mecânica. Os w são os deslocamentos virtuais.

A Eq.(4.9) é chamada de equação variacional ou (especificamente na mecânica) a equação do trabalho virtual.

A solução de (W) é chamada de solução fraca ou generalizada. A definição dada da formulação fraca não é a única possível, mas é a mais natural para os problemas que serão considerados [Hughes, 1978].

4.5. EQUIVALÊNCIA ENTRE AS FORMAS FORTE E FRACA

Claramente, há algum relacionamento entre a formulação forte e fraca do problema, caso contrário não existiria razão para introduzir a forma fraca. Mostra-se que a solução fraca e forte são idênticas. Isso se estabelece assumindo que todas as funções são suaves. Isso permitirá prosseguir sem envolver condições técnicas que complique a matemática envolvida. Prova deste tipo exige algumas vezes provas formais. A intenção aqui não é de apresentar uma prova completamente rigorosa, mas tornar plausível se acreditar na proposição. Com esta filosofia em mente, prova-se o seguinte:

- i. Seja u uma solução de (S). Então u é também uma solução de (W)
- ii. Seja u uma solução de (W). Então u é também uma solução de (S)

Outro resultado, o qual não se preocupou verificar, mas que de fato é facilmente estabelecido, é que ambas (S) e (W) possuem solução única. Então de (i) e (ii), a solução forte e fraca é uma mesma. Conseqüentemente, (W) é equivalente a (S).

4.6. CONDIÇÕES DE CONTORNO NATURAIS

A condição de contorno $-u_{,x}(0) = h$ não é explicitamente mencionada na formulação de (W). Da prova anterior, vê-se que essa condição de contorno é, contudo, implícita para se satisfazer à equação variacional. Condições de contorno deste tipo são referenciadas como condições de contorno naturais. Por outro lado, as soluções admissíveis são explicitamente requeridas para satisfazer a condições de contorno essenciais. O fato de que a solução da equação variacional satisfaz a condição de contorno natural é extremamente importante em situações mais complicadas.

O método usado para provar a parte (ii) da proposição é na verdade o lema fundamental do cálculo variacional. Em essência, essa é a metodologia que possibilita deduzir equações diferenciais e condições de contorno envolvidas pela formulação fraca. Desenvolver formas fracas corretas de problemas complexos e multidimensionais é essencial para se ter um profundo entendimento deste procedimento.

Agora, vê-se que para obter solução aproximada para o problema de valor de contorno original, tem-se um ponto de partida alternativo, isso é a formulação forte ou fraca do problema. O MEF é baseado em cima do último. Em outras palavras, a idéia básica é aproximar Y e v por conjuntos convenientes de dimensões finitas de funções. A equação variacional é então solucionada no contexto de dimensões finitas [Hughes, 1978].

4.7. MÉTODO DE APROXIMAÇÃO DE GALERKIN

Agora se descreve um método de obter soluções aproximadas para problemas de valor de contorno baseados na formulação fraca. Introduce-se este assunto com um tratamento abstrato.

O primeiro passo no desenvolvimento do método é construir aproximações de dimensões finitas de Y e v . Estas coleções de funções são denotadas por Y^h e v^h , respectivamente. O sobre índice refere para associação de Y^h e v^h com uma divisão ou discretização do domínio Ω , o qual é parametrizado por um comprimento característico de escala h . Deseja-se ter que Y^h e v^h como sendo subconjuntos de Y e v , respectivamente. Isso pode ser escrito como;

$$Y^h \subset Y \text{ (isso e, se } u^h \in Y^h, \text{ entao } u^h \in Y) \quad (4.10)$$

$$v^h \subset v \text{ (isso e, se } w^h \in v^h, \text{ entao } w^h \in v) \quad (4.11)$$

onde o significado preciso é dado em parênteses. Conseqüentemente, de Eq.(4.10) e (4.11) são respectivamente que se $u^h \in Y^h$ e $w^h \in v^h$, então

$$u^h(1) = g \quad (4.12)$$

$$w^h(1) = 0 \quad (4.13)$$

As coleções Y , v , Y^h e v^h , são freqüentemente referenciadas como espaço de funções. A terminologia espaço em matemática usualmente conota uma estrutura linear. Este tem o seguinte significado: se c_1 e c_2 são constantes e v e w estão em v , então $c_1v + c_2w$ está também em v . Ambos v e v^h são assim vistos possuindo as propriedades do espaço linear. Contudo, essas propriedades não são claramente compartilhadas por Y e Y^h devido a não homogeneidade das condições de contorno. Por exemplo, u_1 e u_2 são membros de Y , então $u_1 + u_2 \notin Y$, uma vez que $u_1(1) + u_2(1) = g + g = 2g$ em violação a definição de Y . Contudo, a terminologia de espaço de funções ainda é aplicada para Y e Y^h .

No método de (Bubnov-) Galerkin, assume-se que o conjunto v^h seja dado. Então, para cada membro $v^h \in v^h$, constrói-se uma função $u^h \in Y^h$, tal que

$$u^h = v^h + g^h \quad (4.14)$$

onde g^h é uma função dada satisfazendo a condição de contorno essencial, isso é,

$$g^h(1) = g \quad (4.15)$$

Note que Eq.(4.14) satisfaz também as requeridas condições de contorno:

$$u^h(1) = v^h(1) + g^h(1) = 0 + g \quad (4.16)$$

Assim a Eq.(4.14) constitui uma definição de Y^h ; onde o ponto importante a observar é que, acima disto as funções g^h , Y^h e v^h , são compostas de conjuntos idênticos de funções.

Onde podemos agora escrever a equação variacional, em termos de $u^h \in Y^h$ e $w^h \in v^h$.

$$\int_0^1 w_{,x}^h u_{,x}^h dx = \int_0^1 w^h f^h dx + w^h(0)h \quad (4.17)$$

Essa equação é considerada como definindo ma solução aproximada (fraca), u^h . Efetuando-se as substituições adequadas e tomando-se a propriedade da bilinearidade de $a(\dots)$, nos possibilita escrever:

$$\int_0^1 w_{,x}^h u_{,x}^h dx = \int_0^1 w^h f^h dx + w^h(0)h - \int_0^1 w_{,x}^h g_{,x}^h dx \quad (4.18)$$

Onde o lado direito da equação consiste totalmente nos termos associados com dados fornecidos (isso é, f , g , e h). A Eq.(4.18) é usada para definir a parte desconhecida (v^h) de u^h .

A forma (Bubnov-Galerkin) do problema, denotada por (G) é representada como se segue:

$$(G) \left\{ \begin{array}{l} \text{Dado } f, g, \text{ e } h, \text{ como constantes, achar } u^h = v^h + g^h, \text{ onde } v^h \in \mathcal{V}^h, \\ \text{tal que para todo } w^h \in \mathcal{V}^h \\ \int_0^1 w_{,x}^h v_{,x}^h dx = \int_0^1 w^h f^h dx + w^h(0)h - \int_0^1 w_{,x}^h g_{,x}^h dx \end{array} \right. \quad (4.19)$$

Note que (G) é justamente uma versão de (W) em termos de uma coleção de funções com dimensões finitas em \mathcal{V}^h . O método de Bubnov-Galerkin é comumente referenciado como simplesmente método de Galerkin, terminologia que se adotará para frente. A Eq.(4.18) é algumas vezes referida como Equação de Galerkin. O método de aproximação do tipo considerado são exemplos do chamado Método dos Resíduos Ponderados.

O método de Galerkin conduz a um sistema de equações algébricas lineares. Assim \mathcal{V}^h consiste de toda combinação linear de funções dadas denotadas por $N_A: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, onde $A=1,2,\dots,n$. Isso significa que se $w^h \in \mathcal{V}^h$, então existe constantes c_A , $A=1,2,\dots,n$, tal que

$$w^h = \sum_{A=1}^n c_A N_A \quad (4.20)$$

Onde as N_A 's são referidas como funções de forma, base ou interpolação.

A partir deste ponto podemos realizar mais uma expansão onde serão definidos membros de Y^h , especificando-se g^h , através da introdução de outra função de forma, $N_{n+1}: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$.

Com estas definições e propriedades desta função de forma, um típico $u^h \in Y^h$ pode ser escrito como

$$u^h = v^h + g^h = \sum_{A=1}^n d_A N_A + g N_{n+1} \quad (4.21)$$

onde os d_A 's são constantes e das quais é aparente que $u^h(1) = g$.

Realizando as substituições apropriadas e se valendo da condição de bilinearidade de a ($.,.$) e ($.,.$), a equação de Galerkin pode ser redefinida, em notação simplificada [Hughes,1978], como sendo;

$$\sum_{B=1}^n a(N_A, N_B) d_B = (N_A, f) - N_A(0)h + a(N_A, N_{n+1})g \quad (4.22)$$

Onde todos os termos são conhecidos exceto os d_B 's. Então a Eq.(4.22) constitui um sistema de n equações e n incógnitas.

Neste ponto, pode-se representar a matriz equivalente (M), do problema de Galerkin,

$$(M) \left\{ \begin{array}{l} \text{Dados a matriz de coeficiente } K \text{ e o vetor } F, \text{ achar } d \text{ tal que} \\ Kd = F \end{array} \right. \quad (4.23)$$

onde podemos relembrar que, $(S) \Leftrightarrow (W) \approx (G) \Leftrightarrow (M)$, e portanto a única aproximação aparentemente feita está na resolução aproximada de (W) via (G). Sendo conveniente escrevermos a solução da aproximação de uma variável como sendo;

$$u^h(x) = \sum_{A=1}^{n+1} N_A(x) d_A \quad (4.24)$$

5. APROXIMAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS PARA ESCOAMENTOS UTILIZANDO A APROXIMAÇÃO DE GALERKIN

5.1. DEFINIÇÕES DO PROBLEMA PROPOSTO E ABORDAGEM MATEMÁTICA

Os problemas abordados serão definidos em um domínio aberto limitado $\Omega \subset \mathfrak{R}^N$, sendo N o número de dimensões espaciais consideradas no problema, com a fronteira Γ poligonal onde defnimos;

$$\begin{cases} \Gamma = \Gamma_g \cup \Gamma_h, \\ \Gamma_g \cap \Gamma_h = \emptyset, \quad \Gamma_g = 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

onde Γ_g será a parte da fronteira Γ na qual serão impostas as condições de contorno essenciais, também denominadas de Dirichlet; e Γ_h a região na qual são prescritas as condições de contorno naturais também denominadas de Neumann.

Sobre o domínio fechado $\bar{\Omega}$ realiza-se uma partição C_h de elementos finitos, na forma:

$$\begin{cases} \bar{\Omega} = \bigcup_{K \in C_h} \bar{\Omega}_K \\ \Omega_{K_1} \cap \Omega_{K_2} = \emptyset, \quad \forall K_1, K_2 \in C_h \end{cases} \quad (5.2)$$

Desta forma podemos aproximar a variável U por U^h , onde $U^h \in C_h$, é utilizando a expansão de Galerkin temos:

$$U^h = \sum_{A=1}^{n+1} N_A(\mathbf{x}) d_A \quad (5.3)$$

onde a função de base, N_A está associada ao ponto nodal global A da discretização C_h .

5.1.1 PROBLEMA FORTE

Baseado nos princípios de conservação de massa, e momentum, para um fluido newtoniano generalizado, escoando em regime laminar, pode-se montar o seguinte problema de valor de contorno:

$$\begin{aligned} \rho(\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v} &= -\nabla p + 2\eta(\dot{\gamma}) \operatorname{div} \mathbf{D} + \mathbf{g} && \text{em } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 && \text{em } \Omega \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_g && \text{sobre } \Gamma_g \\ \mathbf{Tn} &= \mathbf{t}_h && \text{sobre } \Gamma_h \end{aligned} \quad (5.4)$$

onde ρ é massa específica do fluido, \mathbf{u} a velocidade, p a pressão, $\nabla \mathbf{u}$ o tensor gradiente de velocidade, \mathbf{D} a parte simétrica do tensor gradiente de velocidade, \mathbf{g} a aceleração da gravidade, \mathbf{t} o vetor tensão e com o tensor tensão \mathbf{T} relacionando-se com a deformação do fluido através da expressão Eq.,

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} \\ \mathbf{T} &= -p\mathbf{I} + 2\eta(\dot{\gamma})\mathbf{D}(\mathbf{u})\end{aligned}\quad \text{em } \Omega \quad (5.5)$$

onde $\boldsymbol{\tau}$ é o tensor deviatório de tensão.

É importante nesta etapa do modelamento matemático, adimensionalizarmos algumas grandezas, como: comprimento de escala, velocidade de escala e viscosidade de referência como uma escala para os campos de pressão e tensão viscosa. Empregando a função viscosidade adimensional SMD, e as normalizações propostas por Souza Mendes et al. (2007) para o campo de velocidade, tensão e pressão,

$$\mathbf{u}^* = \frac{\mathbf{u}}{\dot{\gamma}_1 L_c} \quad ; \quad \mathbf{T}^* = \frac{\mathbf{T}}{\tau_0} \quad ; \quad p^* = \frac{p}{\tau_0} \quad (5.6)$$

sendo L_c um comprimento característico do escoamento, onde o sobrescrito (*) representa as formas adimensionais das grandezas mecânicas empregadas a forma adimensional das Eqs. (5.4) é dada por

$$\begin{aligned}(\nabla \mathbf{u}^*)\mathbf{u}^* &= -\nabla p^* + \text{Re}^{-1} \text{div} \boldsymbol{\tau}^* + \text{Fr}^{-2} = 0 && \text{em } \Omega \\ \text{div} \mathbf{u}^* &= 0 && \text{em } \Omega \\ \mathbf{u}^* &= \mathbf{u}_g^* && \text{sobre } \Gamma_g \\ \mathbf{T}^* \mathbf{n}^* &= \mathbf{t}_h^* && \text{sobre } \Gamma_h\end{aligned} \quad (5.7)$$

5.1.2. APROXIMAÇÃO DE GALERKIN DO PROBLEMA

O método de aproximações de Galerkin para o problema em estudo irá aproximar os espaços de dimensão infinita utilizados na formulação fraca do problema, definido pela Eq. (5.10) por subespaços de dimensão finita apropriados.

Definindo P e \mathbf{V} como sendo os espaços funcionais dos campos de pressão e velocidade, respectivamente, pode-se escrever

$$\begin{aligned}P_h &\subset P \quad (\text{isto é, se } p^h \in P_h, \text{ então } p_h \in P) \\ \mathbf{V}_h &\subset \mathbf{V} \quad (\text{isto é, se } \mathbf{v}^h \in \mathbf{V}_h, \text{ então } \mathbf{v}_h \in \mathbf{V})\end{aligned} \quad (5.8)$$

Conseqüentemente, se $\mathbf{u}^h \in P_h$ e $\mathbf{v}^h \in \mathbf{V}_h$, portanto;

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) &= \mathbf{u}_g \quad \text{sobre } \Gamma_g \\ \mathbf{v}^h(\mathbf{x}) &= 0 \quad \text{sobre } \Gamma_g\end{aligned} \quad (5.9)$$

onde \mathbf{u}_g é definida como a condição de contorno essencial (Dirichlet) do problema definido pela Eq. (5.7).

A aproximação de elementos finitos da Eq. (5.7) é construída sobre os subespaços usuais da dinâmica dos fluidos para os campos de velocidade (\mathbf{V}_h) e pressão (P_h) (Babuška, 1973; Brezzi, 1974),

$$\mathbf{V}_h = \{\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^N \mid \mathbf{v}|_K \in R_k(K)^N, K \in C_h\} \quad (5.10)$$

$$P_h = \{p \in C^0(\Omega) \cap L_0^2(\Omega) \mid p|_K \in R_l(K), K \in C_h\} \quad (5.11)$$

$$\mathbf{V}_h^g = \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^N \mid \mathbf{v}|_K \in R_k(K)^N, K \in C_h, \mathbf{v} = \mathbf{u}_g \text{ sobre } \Gamma_g\} \quad (5.12)$$

onde R_k , R_l denotam, respectivamente, espaços polinomiais de grau k e l [Ciarlet, 1978]

A aproximação de Galerkin para o problema definido pelas Eq. (5.7) pode ser escrito por:

Achar a dupla $(\mathbf{u}^h, p^h) \in \mathbf{V}_h \times P_h$ tal que:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{u}^h) \mathbf{u}^h \cdot \mathbf{v}^h d\Omega + \int_{\Omega} 2\eta(\dot{\gamma}) \mathbf{D}(\mathbf{u}^h) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{v}^h) d\Omega - \int_{\Omega} p^h \operatorname{div} \mathbf{v}^h d\Omega - \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}^h q^h d\Omega \\ & = \int_{\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}^h d\Omega + \int_{\Gamma_h} \mathbf{t}_h \cdot \mathbf{v}^h d\Gamma \quad (\mathbf{v}^h, q^h) \in \mathbf{V}_h \times P_h \end{aligned} \quad (5.13)$$

5.1.3 APROXIMAÇÃO DE GALERKIN MÍNIMOS-QUADRADOS

Baseado nas definições dos subespaços de pressão e velocidade, Eqs. (5.10)-(5.11), podemos escrever uma formulação de Galerkin Mínimos-Quadrados para o problema definido pela Eq. (5.7) como segue:

Achar o par $(\mathbf{u}^h, p^h) \in \mathbf{V}_h \times P_h$, tal que:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{u}^h) \mathbf{u}^h \cdot \mathbf{v}^h d\Omega + \int_{\Omega} 2\eta(\dot{\gamma}) \mathbf{D}(\mathbf{u}^h) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{v}^h) d\Omega - \int_{\Omega} p^h \operatorname{div} \mathbf{v}^h d\Omega - \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}^h q^h d\Omega \\ & = \int_{\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}^h d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{t}_h \cdot \mathbf{v}^h d\Gamma + \sum_{K \in C_h} \int_{\Omega_K} \left((\nabla \mathbf{u}^h) \mathbf{u}^h + \nabla p^h - 2\eta(\dot{\gamma}) \operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{u}^h) \right) \cdot \\ & \quad \cdot \tau(\operatorname{Re}_K) \left((\nabla \mathbf{v}^h) \mathbf{u}^h - \nabla q^h + 2\eta(\dot{\gamma}) \operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{v}^h) \right) d\Omega \quad (\mathbf{v}^h, q^h) \in \mathbf{V}_h \times P_h \end{aligned} \quad (5.14)$$

onde o parâmetro de estabilidade τ , avaliado a nível de elemento, é computado por:

$$\tau(\operatorname{Re}_K) = \frac{h_K}{2|\mathbf{u}|_p} \xi(\operatorname{Re}_K) \quad (5.15)$$

$$\xi(\operatorname{Re}_K) = \begin{cases} \operatorname{Re}_K, & 0 \leq \operatorname{Re}_K < 1 \\ 1, & \operatorname{Re}_K \geq 1 \end{cases} \quad (5.16)$$

$$\text{Re}_K = \frac{m_k |\mathbf{u}|_p h_K}{4\mu} \quad (5.17)$$

com $|\cdot|_p$ denotando a norma p do \mathfrak{R}^N

$$|\mathbf{u}|_p = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^N |u_i|^p \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty \\ \max_{i=1,N} |u_i|, & p = \infty \end{cases} \quad (5.18)$$

e o parâmetro m_k proveniente da análise de erro da formulação GLS introduzida em Franca and Frey (1992).

Devemos observar algumas ponderações importantes a partir das equações definidas acima:

- i. Fazendo-se τ igual a zero em qualquer formulação de Galerkin Mínimos-Quadrados (GLS-*Galerkin least-squares*) definida pela Eq. (5.14)-(5.17), recupera-se a aproximação clássica de Galerkin, definida pela Eq. (5.13).
- ii. A expressão usual do número de Reynolds de malha [Johnson, 1987] foi modificada com a inclusão do parâmetro m_k na Eq. (5.17), de modo a também considerar o grau de interpolação empregado. Com isto, as regiões advectivo-dominadas do escoamento ficam caracterizadas por $\text{Re}_K > 1$ e as difusivo-dominadas por $\text{Re}_K < 1$, independente do elemento considerado [Franca e Frey, 1992].
- iii. A discretização da Eq.((5.14)-(5.17)) é obtida expandindo as aproximações de elementos finitos dos pares (\mathbf{u}^h, p^h) e (\mathbf{v}^h, q^h) como uma combinação das suas respectivas funções de forma e graus de liberdade, gerando, dessa maneira, um sistema de equações discretas não lineares. Este sistema é solucionado por um método de quase Newton incremental, com um método de continuação atuando sobre o termo de aceleração convectiva da formulação GLS definida na Eq.((5.14)-(5.17)). Como estimativa inicial, o algoritmo emprega campos nulos de velocidade e pressão [Franceschini e Frey, 2003b].

5.2 ELEMENTOS FINITOS ISOPARAMÉTRICOS

Devem-se definir as funções de base de tal maneira que, ao se refinar a malha de elementos finitos, a solução da aproximação de Galerkin, definida nas Eq.(5.14)-(5.17) convirjam para a solução exata do problema forte estabelecido na Eq.(5.4)

5.2.1 SISTEMAS DE REFERÊNCIA GLOBAL E LOCAL

Para o caso geral de um elemento sólido, tem-se três coordenadas cartesianas x,y,z as quais devem ser transformadas para componentes ξ,η,ζ , respectivamente, como mostrado na figura 5.1.

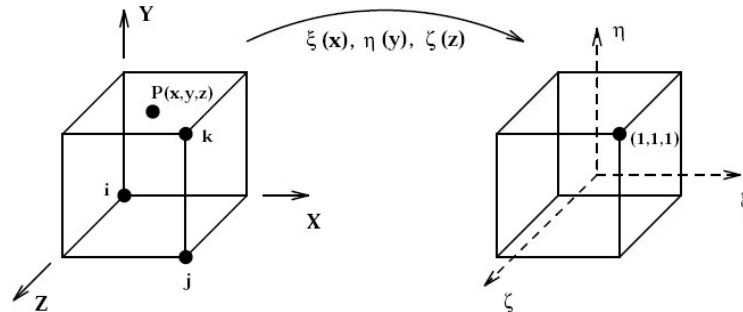


Figura 5.1: Transformação entre os sistemas de referência global e local.

O sistema cartesiano xyz é denominado sistema global de referência, enquanto $\xi\eta\zeta$ define o sistema local. A vantagem de se utilizar um sistema local está relacionada à mudança dos limites de integração nas expressões para o cálculo das matrizes de massa e rigidez dos elementos finitos, assim como para os vetores de carregamento. Neste caso, os limites inferior e superior de integração passam para -1 e 1, respectivamente.

A partir de um ponto P de coordenadas (x,y,z) segundo o sistema global, verifica-se que para se obter este ponto no sistema local, basta aplicarmos uma relação onde encontramos uma função $F(t)$ que transforme o ponto global no desejado ponto local. A Eq.(5.22) aplicada para cada uma das componentes traduz o mencionado.

$$F(t) = \frac{2}{x_j - x_i} t - \frac{x_j + x_i}{x_j - x_i} \quad (5.22)$$

onde a função $F(t)$ serão respectivamente as coordenadas locais, ξ,η,ζ .

No entanto, geralmente o elemento finito possui uma forma distorcida no sistema global e deseja-se obter uma transformação para um sistema local onde os lados do elemento permaneçam retos, como apresentado na Fig.(4.2). Esta transformação está baseada nas funções de forma.

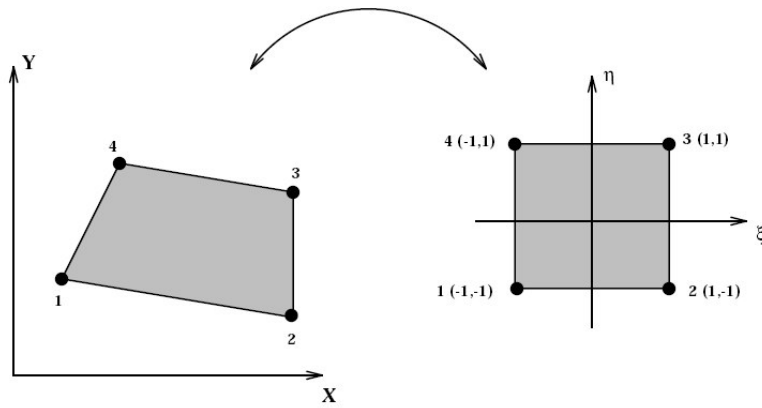


Figura 5.2: Transformação entre os sistemas de referência global e local utilizando funções de forma.

5.2.2 FUNÇÕES DE FORMA

Considerando o conjunto de pontos $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_a, \dots, \xi_b, \dots, \xi_n)$ definidos num sistema local de referência. O polinômio de Lagrange de ordem $(n-1)$ associado ao ponto ξ_a é dado por,

$$l_a^{(n-1)}(\xi) = \frac{\prod_{b=1(b \neq a)}^n (\xi - \xi_b)}{\prod_{b=1(b \neq a)}^n (\xi_a - \xi_b)} \quad (5.23)$$

Observa-se que o polinômio $l_a(\xi_a)$ representa a seguinte propriedade,

$$\begin{cases} l_a(\xi_a) = 1 & a = b \\ l_a(\xi_b) = 0 & a \neq b \end{cases} \quad (5.24)$$

Logo, $l_a(\xi_b) = \delta_{ab}$, onde δ_{ab} é tal que,

$$\delta_{ab} = \begin{cases} 1 & \text{se } a = b \\ 0 & \text{se } a \neq b \end{cases} \quad (5.25)$$

Deve-se associar uma função de forma para cada um dos nós de um elemento finito. Estas funções são tomadas como polinômios de Lagrange, cuja ordem depende do número de nós do elemento considerado. Para um elemento unidimensional com m nós, tem-se m funções de forma de ordens $m-1$. Logo,

$$N_a^{(m-1)}(\xi) = l_a^{(m-1)}(\xi) \quad a = 1, \dots, m \quad (5.26)$$

Para elementos bidimensionais, basta tornar o produto tensorial dos polinômios de Lagrange. Portanto, para um elemento com m e n nós nas direções ξ e η , tem-se um total de mn funções dadas por,

$$N_a(\xi, \eta) = l_b^{(m-1)}(\xi) l_c^{(n-1)}(\eta) \quad a = 1, \dots, mn \quad (5.27)$$

ou analogamente para o caso tridimensional com m, n, p nós nas direções ξ, η, ζ , definem-se mnp funções da seguinte maneira,

$$N_a(\xi, \eta, \zeta) = l_b^{(m-1)}(\xi) l_c^{(n-1)}(\eta) l_d^{(p-1)}(\zeta) \quad a = 1, \dots, mnp \quad (5.28)$$

Nas expressões anteriores, os índices a, b, c, d são escolhidos de maneira conveniente.

5.2.3 ELEMENTO BIDIMENSIONAL LINEAR

Considerando o elemento quadrangular ilustrado na figura 5.3. As funções de forma deste elemento são obtidas a partir da definição da Eq.(5.27), e dos polinômios definidos na Eq.(5.29), onde a relação entre os índices a, b, c está apresentada na tabela 4.1 e pode ser observada na figura 4.3. Portanto,

$$N_a^{(1)} = \frac{1}{2}(1 + \xi_a \xi) \quad a = 1, 2 \quad (5.29)$$

onde $\xi_a = \pm 1$

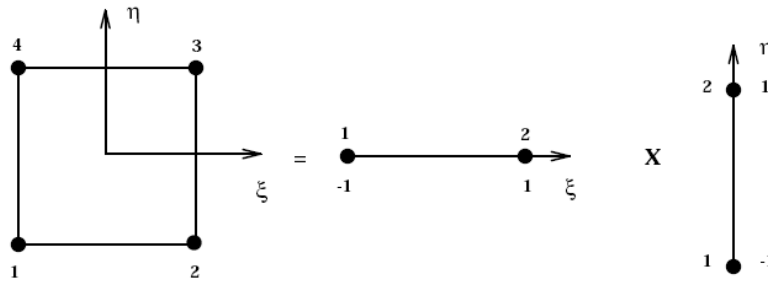


Figura 5.3: Elemento quadrangular linear.

Sendo, portanto definidas as funções de forma do elemento como sendo;

$$\begin{aligned} N_1^{(1)}(\xi, \eta) &= l_1^{(1)} \xi l_1^{(1)}(\eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \\ N_2^{(1)}(\xi, \eta) &= l_2^{(1)} \xi l_1^{(1)}(\eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \\ N_3^{(1)}(\xi, \eta) &= l_2^{(1)} \xi l_2^{(1)}(\eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \\ N_4^{(1)}(\xi, \eta) &= l_1^{(1)} \xi l_2^{(1)}(\eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \end{aligned} \quad (5.30)$$

ou ainda de forma resumida como apresentado na Eq.(5.31)

$$N_a(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_a \xi)(1 + \eta_a \eta) \quad a = 1, 2, 3, 4 \quad (5.31)$$

onde $\xi_a = \pm 1$ e $\eta_a = \pm 1$.

Outros elementos planos podem ser obtidos aumentando-se, progressivamente, um nó para cada lado do quadrado, como ilustrado na figura 5.4. Neste caso, verifica-se a presença de nós interiores, aumentando-se assim o número de variáveis do elemento. Estes conjuntos de

elementos assim obtidos pertencem à família Lagrangeana. Pode-se evitar a presença destes nós interiores. Define-se, desta forma os elementos finitos da família Serendipity e que podem ser encontrados na literatura disponível.

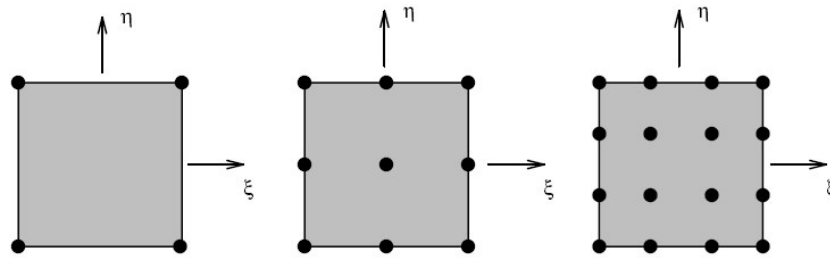


Figura 5.4: Elementos Lagrangeanos quadrangulares

5.2.4 ELEMENTOS ISOPARAMÉTRICOS

Ao se aplicar o MEF na análise de uma estrutura, deve-se interpolar a sua geometria, ou seja, as coordenadas dos pontos, assim como a grandeza a ser calculada, como, por exemplo, os deslocamentos nodais. Podem-se aplicar as funções de forma para efetuar estas interpolações. Neste caso, as três possibilidades ilustradas na Fig.(5.5) podem ser adotadas, ou seja,

- O número de nós usados para definir a forma do elemento é menor que aquele aplicado para a interpolação da grandeza de interesse;
- Utiliza-se o mesmo número de nós para interpolar a geometria e a grandeza;
- Adota-se um número de nós maior para a interpolação da geometria.

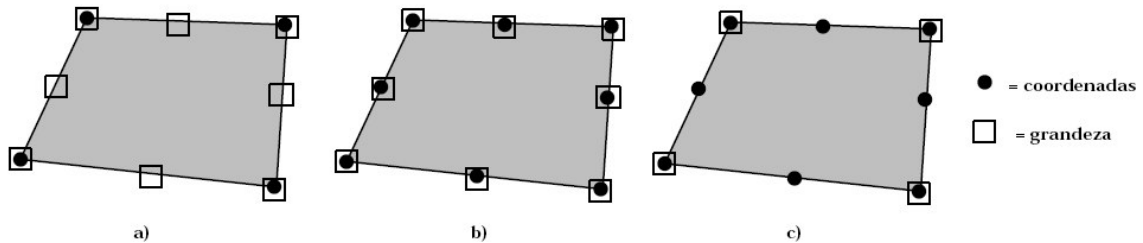


Figura 5.5: Elementos finitos subparamétricos, isoparamétricos e superparamétricos.

Estas três alternativas definem as classes dos elementos finitos. Observa-se que os elementos subparamétricos são mais utilizados, pois em geral deseja-se interpolar com maior precisão o campo da grandeza a ser calculada, tais como deslocamentos, temperaturas, etc... Neste trabalho, o interesse estará voltado ao estudo e utilização dos elementos finitos isoparamétricos.

Denotando por x, y, z as coordenadas dos pontos em relação a um sistema global de referência, pode-se escrever as seguintes relações:

$$\begin{aligned}
x(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{a=1}^n N_a(\xi, \eta, \zeta) X_a^e \\
y(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{a=1}^n N_a(\xi, \eta, \zeta) Y_a^e \\
z(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{a=1}^n N_a(\xi, \eta, \zeta) Z_a^e
\end{aligned} \tag{5.32}$$

onde n é o número de nós do elemento e X_a^e , Y_a^e , Z_a^e , são as coordenadas cartesianas globais dos nós do elemento e .

Analogamente, os deslocamentos $\{u\}$, $\{v\}$, $\{w\}$ dos pontos são dados por,

$$\begin{aligned}
u(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{a=1}^n N_a(\xi, \eta, \zeta) U_a^e \\
v(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{a=1}^n N_a(\xi, \eta, \zeta) V_a^e \\
w(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{a=1}^n N_a(\xi, \eta, \zeta) W_a^e
\end{aligned} \tag{5.33}$$

sendo U_a^e , V_a^e , W_a^e os deslocamentos nodais nas direções x, y, z , respectivamente, em relação ao sistema global de referência.

As transformações indicadas acima são baseadas nas funções de forma dos elementos e podem ser utilizadas para efetuar o mapeamento de um elemento distorcido num sistema global para uma forma regular no sistema local.

Algumas ponderações importantes sobre os elementos finitos isoparamétricos podem ainda ser ressaltadas como finalização deste capítulo:

- i. O produto das funções de forma (*Shape functions*) lineares unidimensionais nas direções ξ e η caracteriza o elemento quadrangular bilinear, também denominado elemento Q1, como um elemento Lagrangeano de baixa ordem.
- ii. O elemento quadrangular bilinear é dito um elemento isoparamétrico, isto é, as funções de forma que definem o mapeamento global são as mesmas funções de base utilizadas na aproximação das variáveis primas da formulação de Galerkin. A importância dos elementos isoparamétricos é que, para estes elementos, as condições de convergência do MEF são virtualmente satisfeitas [Hughes, 1987], garantindo desta maneira, que a solução aproximada da formulação GLS (Galerkin – Least Squares) irá convergir para a solução exata do problema forte, quando o comprimento de malha tender à zero. Além disto, do ponto de vista computacional, os elementos isoparamétricos são de implementação relativamente simples e concisa.

6. RESULTADOS

Neste capítulo será apresentada a aplicação do método de elementos finitos, com aproximações de Galerkin Mínimos-Quadrados (GLS) das equações de Navier-Stokes. Todos os resultados computacionais foram obtidos utilizando o código de elementos finitos NNFEM, em desenvolvimento no Laboratório de Mecânica dos Fluidos Aplicada e Computacional (LAMAC) do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Todos os testes computacionais foram processados e pós-processados, utilizando-se um processador Intel Pentium IV 3.2GHz, com 3Gb de memória RAM.

6.1 ESCOAMENTOS INERCIAIS DE FLUIDOS NEWTONIANOS

Objetiva-se apresentar uma avaliação computacional do código NNFEM para uma condição definida sob uma cavidade forçada, padrão; utilizando um sistema de coordenadas cartesianas retangular com origem localizada no canto inferior esquerdo conforme mostra a Fig.(6.1); escoamento este considerado como *benchmark* nas avaliações computacionais. Para a cavidade forçada, consideram-se condições de não-deslizamento nas paredes verticais e parede inferior, e uma condição de contorno de velocidade horizontal prescrita na parede superior do domínio. Nesta condição o domínio computacional é discretizado por uma malha com 120x120 elementos quadrangulares bilineares (Q1/Q1), gerando um total de 14400 pontos nodais, tendo como parâmetro de avaliação o número de Reynolds igual a um (1), *Creeping Flow*, e escoamentos com inércia, considerando Reynolds variando entre 100 e 1000.

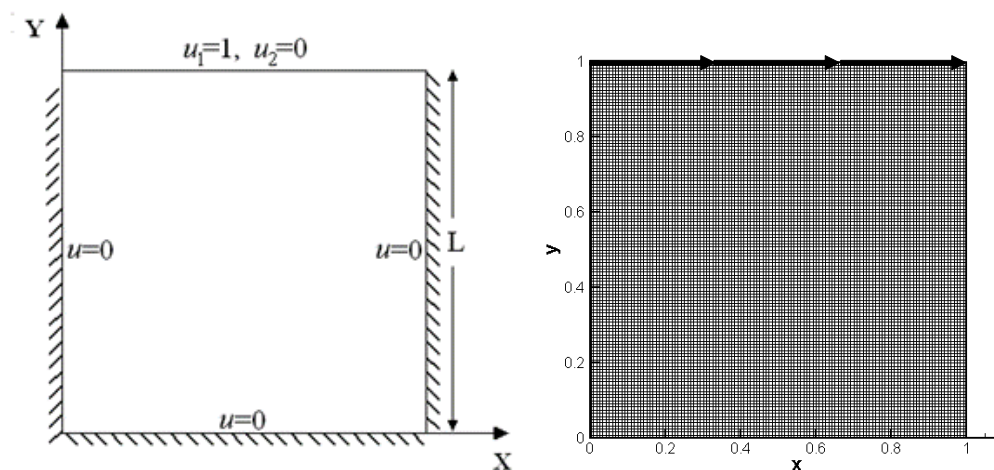


Figura 6.1: Descrição do problema da cavidade

Avaliou-se três condições distintas, para a validação computacional do código NNFEM, todas utilizando a mesma geometria definida como na Fig.(6.1), sendo as condições não-Newtonianas aproximadas pelo modelo de um fluido Newtoniano generalizado (GNL).

Na primeira condição avaliam-se os resultados processados pelo NNFEM, utilizando-se um modelo Newtoniano, com diferentes condições de inércia; sendo o número de Reynolds modificado entre, 1(condição hipotética de escoamento sem inércia, *creeping flow*), 100, 400 e 1000.

Nas Fig.(6.2) e (6.3) apresentam-se, respectivamente, as isoregiões do campo de pressão e as linhas de velocidade obtidas pela aproximação GLS do problema forte definido no capítulo anterior. Sendo que de modo geral tanto as isobáricas Fig. (6.2) como as linhas de velocidade Fig.(6.3) obtidas são bastante suaves, indicando que a formulação GLS estabilizou satisfatoriamente as oscilações espúrias inerentes ao método de Galerkin em escoamentos advectivos dominados, sujeitos à Reynolds 100, Reynolds 400 e Reynolds 1000.

Nas Fig. (6.3), observa-se que, a medida que o número de Reynolds aumenta, a recirculação principal do escoamento tende a se deslocar para o centro da cavidade, não mais ficando restrita às proximidades da parede superior da cavidade. Isto se deve ao fato que, para as situações com inércia, a região inferior da cavidade também irá recircular, centralizando, assim, a recirculação do escoamento principal. Este efeito também pode ser observado nas isoregiões do campo de pressão. Nestas figuras, o campo de pressão perde sua simetria inicial obtida para a situação sem inércia, criando, a medida que o número de Reynolds aumenta, uma depressão no campo de pressão associada à recirculação principal do fluido, a qual também se desloca para a região central da cavidade.

Ainda na Fig. (6.3), observa-se que, o aumento do número de Reynolds também cria e desenvolve recirculações secundários no escoamento junto às quinas inferiores da cavidade, originadas devido ao descolamento do fluido nos cantos vivos da sua parede inferior.

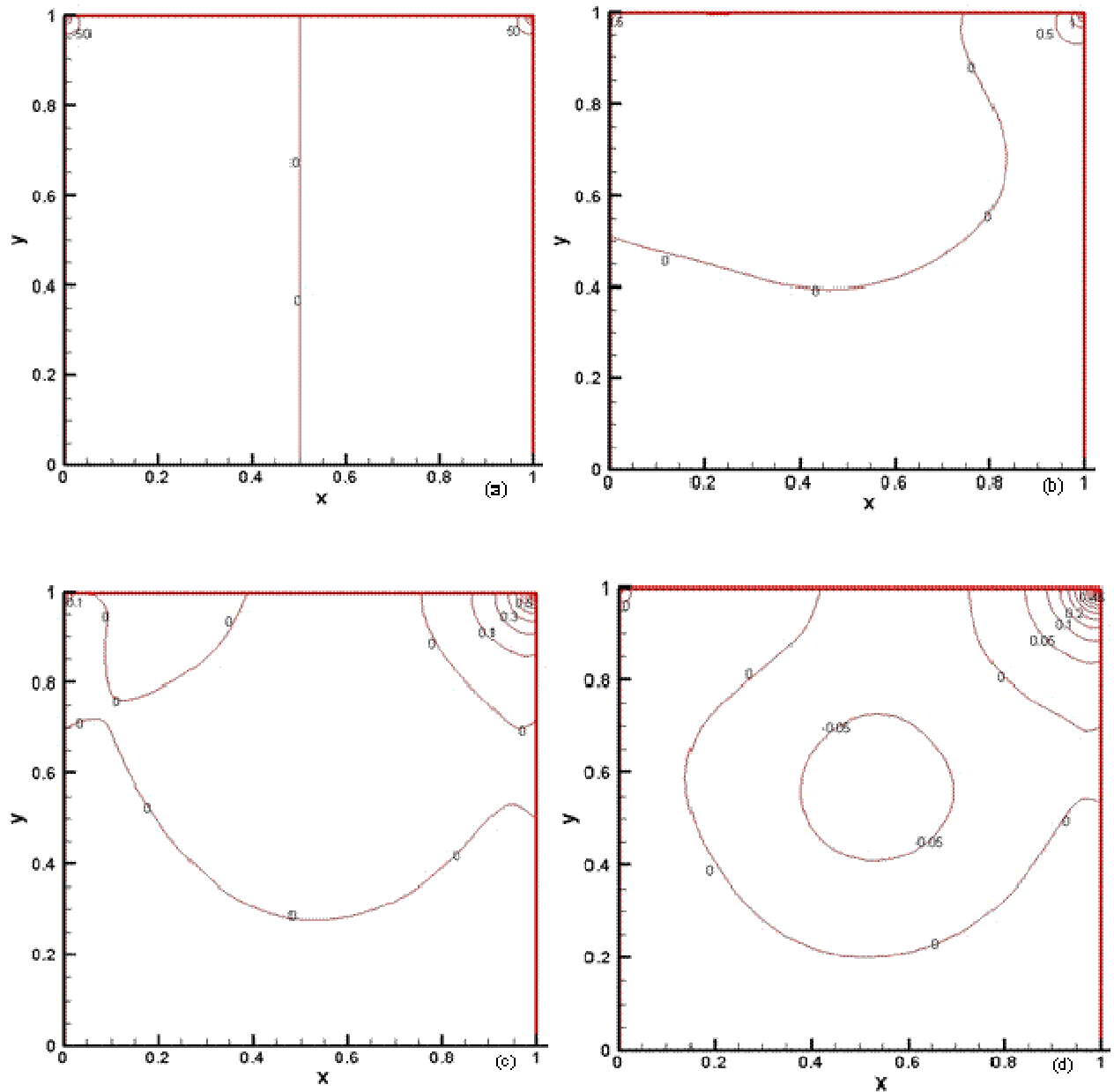


Figura 6.2: Isobáricas: (a) $Re = 1$, (b) $Re = 100$, (c) $Re = 400$, e (d) $Re=1000$.

Nas Fig.(6.4), (6.5), (6.6) e (6.7), apresenta-se os resultados obtidos com a formulação GLS, comparados com os resultados de Guia et al. (1982) para as situações com inércia, a saber $Re=100$, $Re=400$ e $Re=1000$; e Jurjevic. (1999) para a situação com inércia desprezível, $Re=1$. Tanto o perfil de velocidade horizontal em $x=0,5$, como o perfil de velocidade vertical em $y=0,5$, apresenta ótima concordância para os quatro valores do número de Reynolds investigados, a saber, $Re=1$, $Re=100$, $Re=400$ e $Re=1000$.

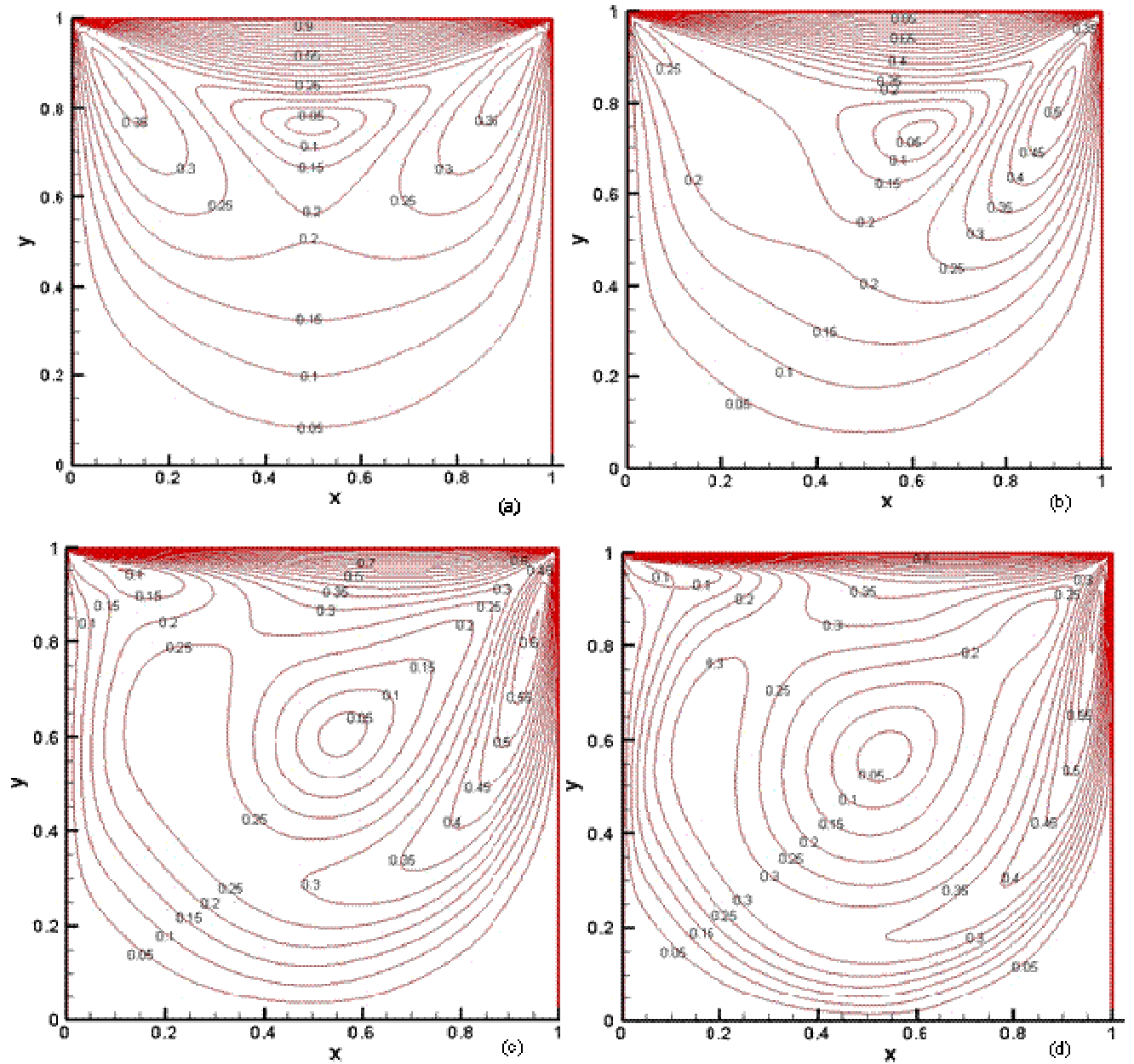


Figura 6.3: Isolinhas de velocidade: (a) $Re = 1$, (b) $Re = 100$, (c) $Re = 400$, e (d) $Re=1000$.

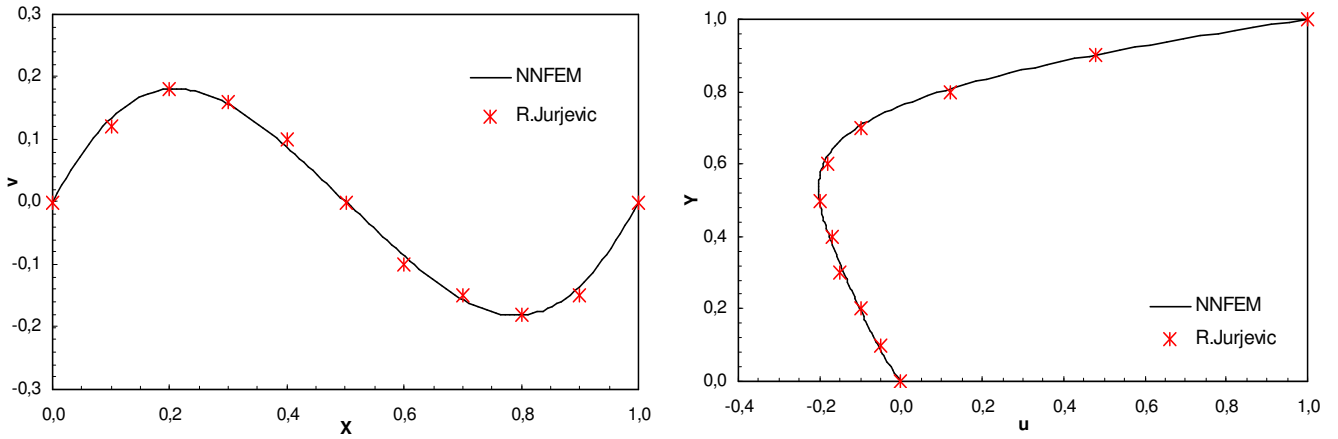


Figura 6.4: Perfil de velocidade horizontal em $x=0,5$ e Vertical em $y=0,5$: para $Re= 1$

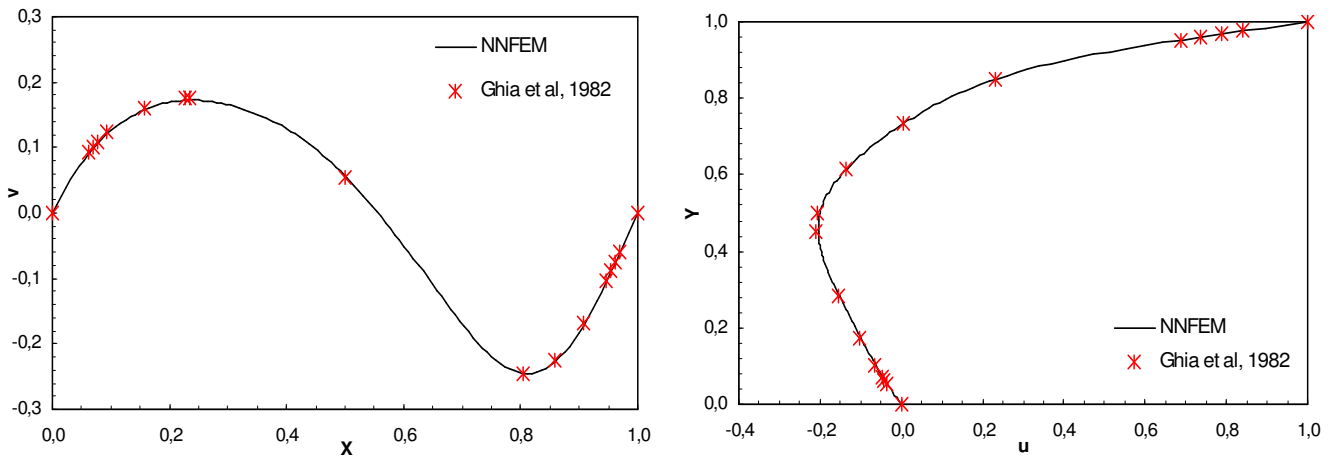


Figura 6.5: Perfil de velocidade horizontal em $x=0,5$ e Vertical em $y=0,5$: para $Re= 100$

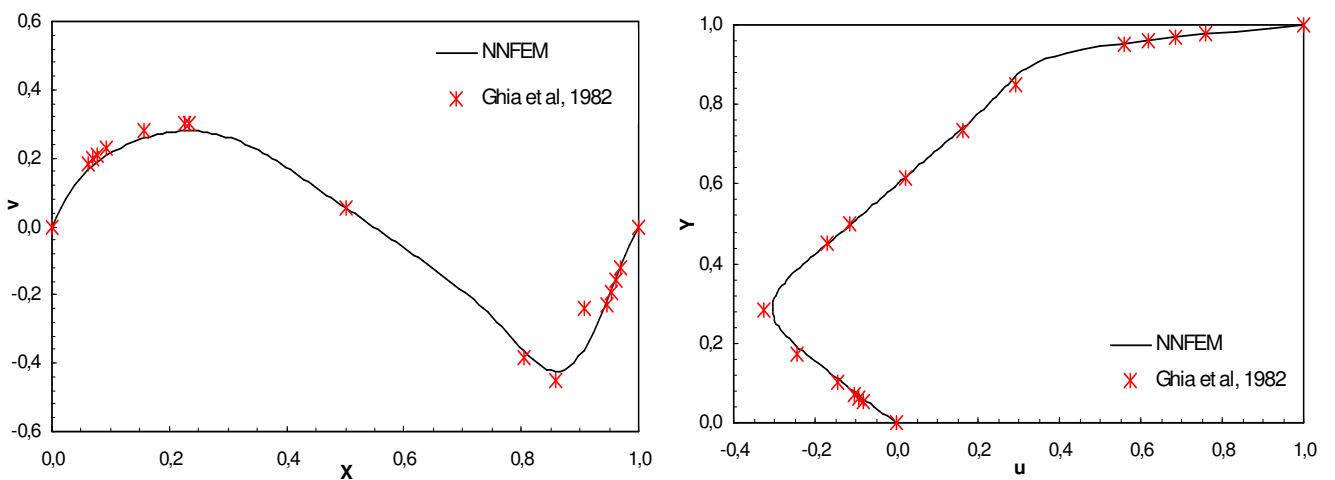


Figura 6.6: Perfil de velocidade horizontal em $x=0,5$ e Vertical em $y=0,5$: para $Re= 400$

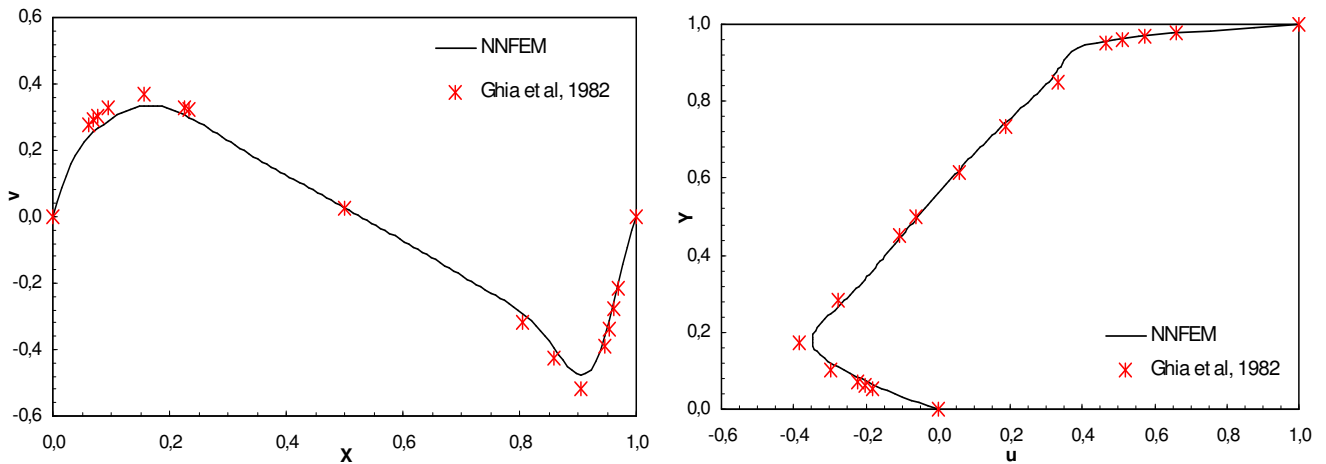


Figura 6.7: Perfil de velocidade horizontal em $x=0,5$ e Vertical em $y=0,5$: para $Re= 1000$

6.2 ESCOAMENTOS INERCIAIS PSEUDOPLÁSTICOS E DILATANTES

Além das avaliações do código NNFEM realizadas para a condição Newtoniana, também se considera uma avaliação da convergência da formulação GLS, quando exposta sob condições de pseudoplasticidade (*shear-thinning*) e dilatância (*shear-thickening*). Ambas as condições avaliadas utilizando o modelo de viscosidade de *Ostwald-de-Waele* ou *Modelo Power Law*.

Nas Fig.(6.8) e Fig.(6.9), são avaliadas respectivamente as isoregiões do campo de pressão e as linhas do campo de velocidade obtidas com a formulação GLS, em uma condição com inércia, sendo, Reynolds igual a 100 e o expoente adimensional n do modelo *Power Law* variando entre valores abaixo e acima da unidade, a saber, quando $n < 1$ (*shear-thinning*) e quando $n > 1$ (*shear-thickening*). Ainda avalia-se o expoente do modelo em $n=1,0$; aproximando o resultado obtido para uma condição onde o comportamento do escoamento se aproxima da condição newtoniana.

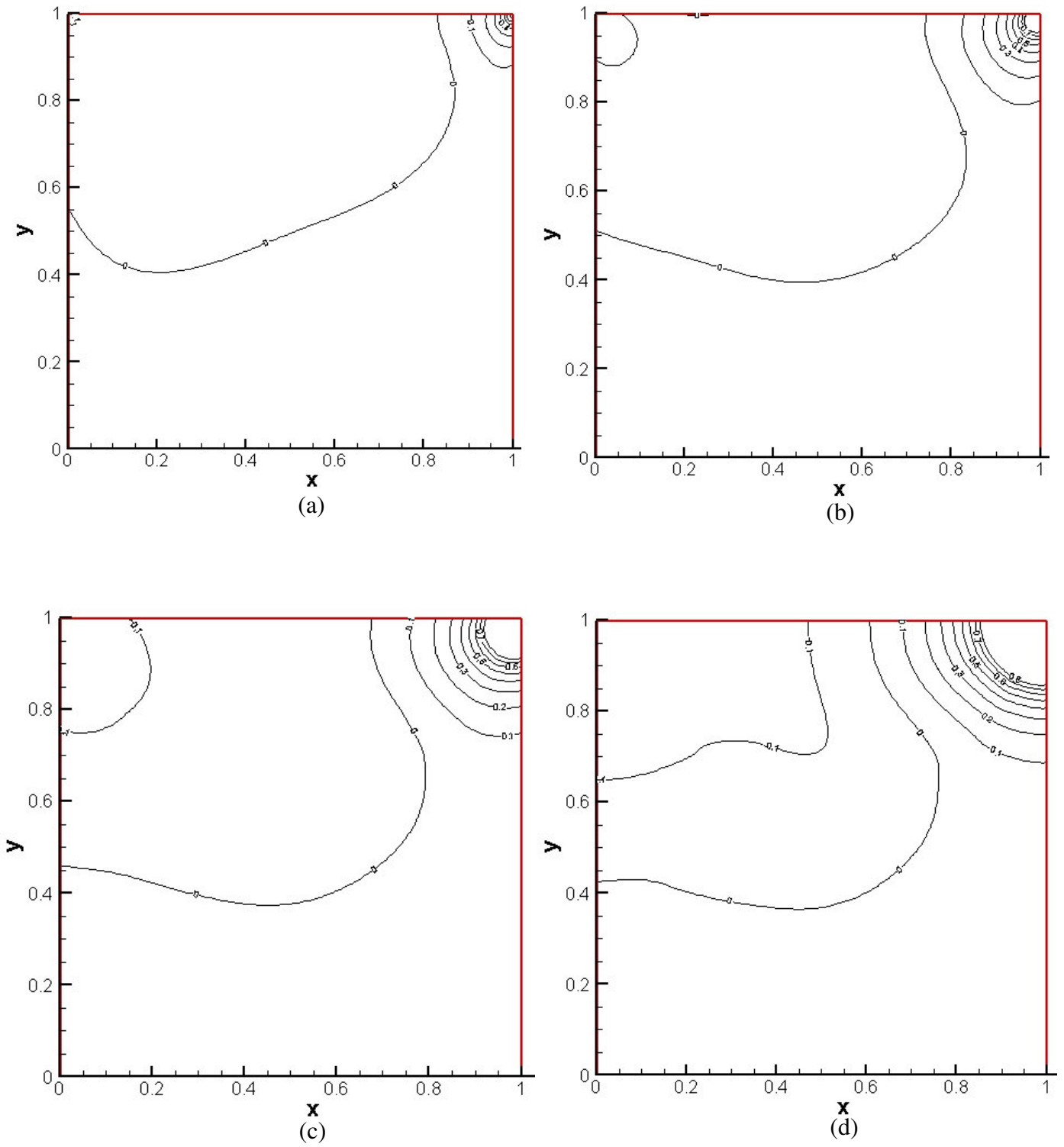


Figura 6.8: Isobáricas: (a) $n = 0,5$, (b) $n = 1,0$, (c) $n=1,5$, (d) $n=2,0$ _ $Re=100$.

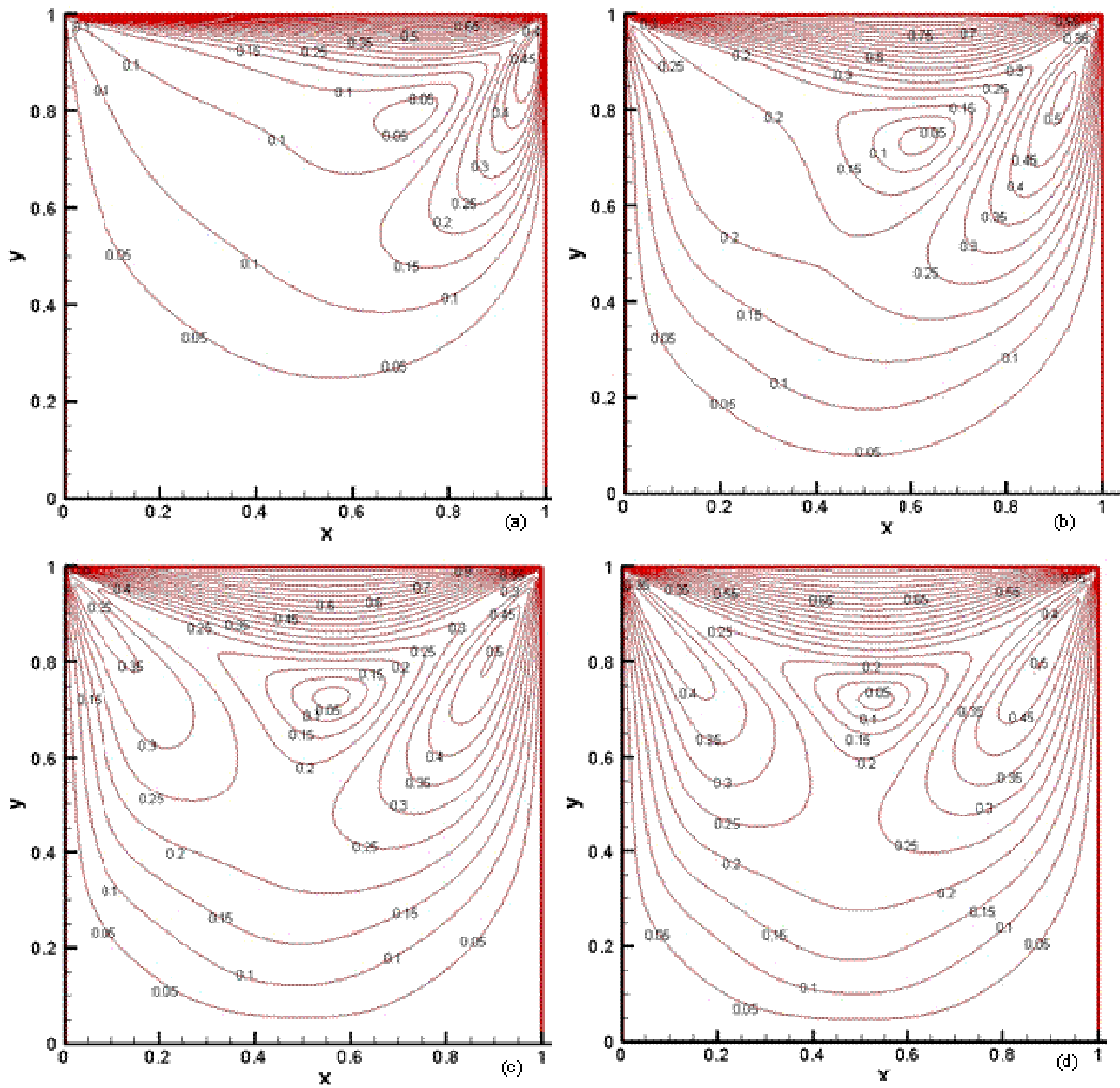


Figura 6.9: Isolinhas de velocidade: (a) $n = 0,5$, (b) $n = 1,0$, (c) $n = 1,5$, (d) $n = 2,0$ _ $Re = 100$.

Nas Fig.(6.10), (6.11), (6.12) e (6.13), os resultados obtidos com a formulação GLS, são comparados com os resultados de Neofytou (2005) para as situações com inércia ($Re=100$), utilizando o modelo *Power Law*, com $n<1$, $n=1$ e $n>1$. Observa-se que tanto o perfil de velocidade horizontal em $x=0,5$, como o perfil de velocidade vertical em $y=0,5$, apresenta ótima concordância para os valores do expoente n investigado, simulando o comportamento pseudoplástico, Newtoniano e dilatante do fluido.

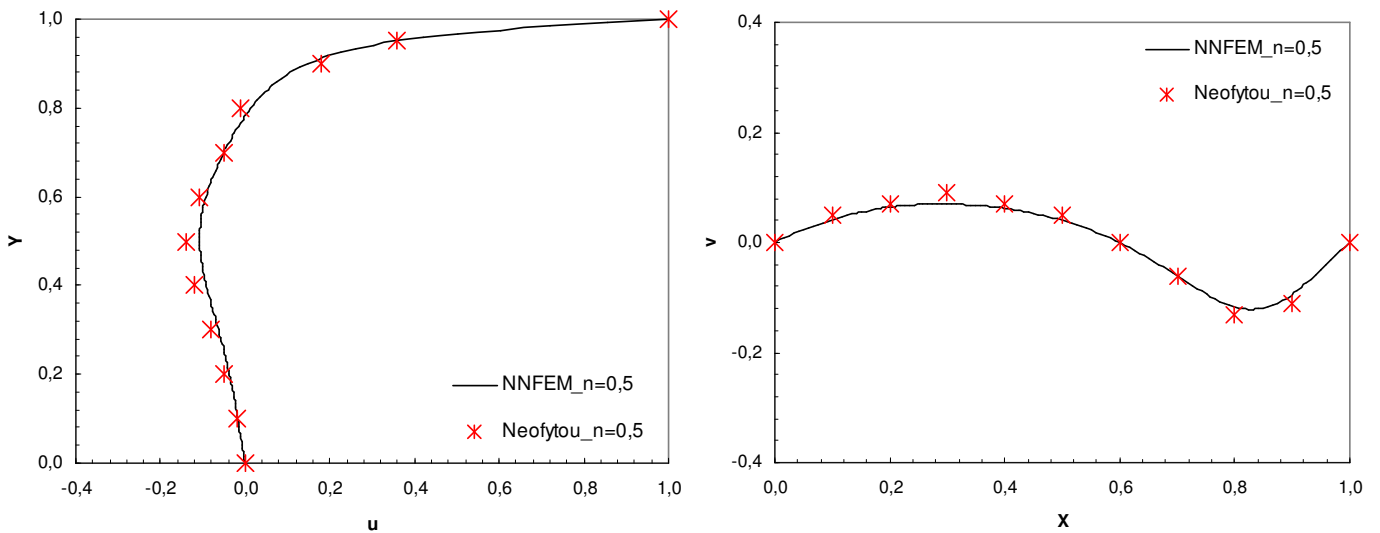


Figura 6.10: Perfil Velocidade Linha Média Cavidade ($x=0,5$ e $y=0,5$) _ $n=0,5$ _ $Re=100$

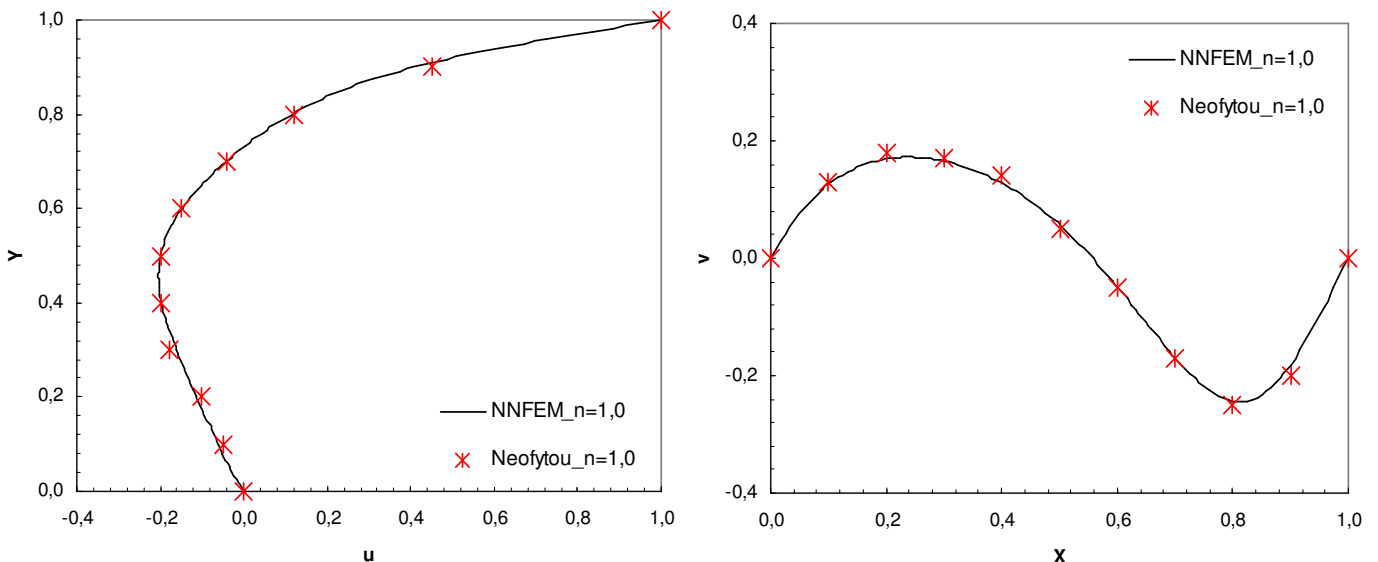


Figura 6.11: Perfil Velocidade Linha Média Cavidade ($x=0,5$ e $y=0,5$) _ $n=1,0$ _ $Re=100$

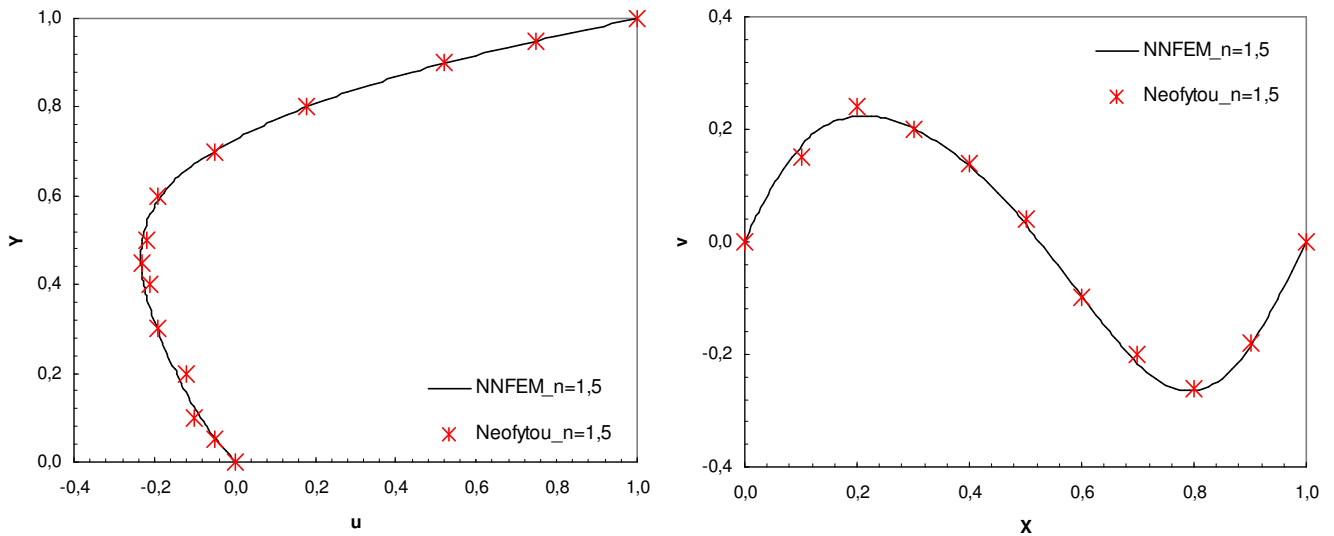


Figura 6.12: Perfil Velocidade Linha Média Cavidade ($x=0,5$ e $y=0,5$) _ $n=1,5$ _ $Re=100$

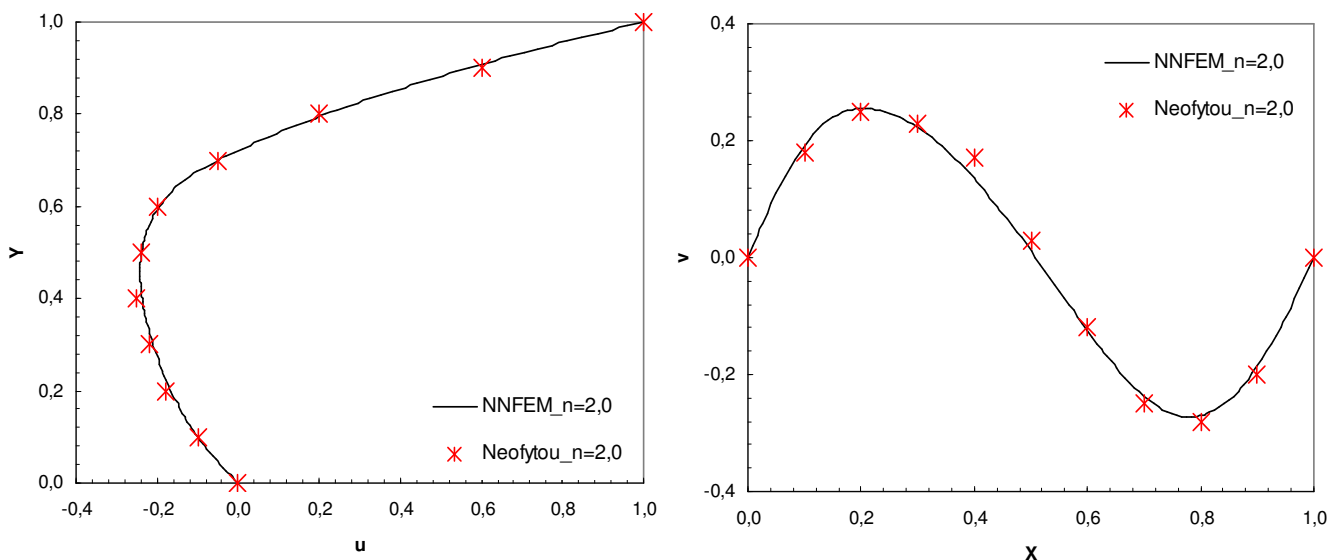


Figura 6.13: Perfil Velocidade Linha Média Cavidade ($x=0,5$ e $y=0,5$) _ $n=2,0$ _ $Re=100$

Outra avaliação importante do comportamento do expoente adimensional n , reside em avaliar de forma incremental valores para condições extremas do comportamento pseudoplástico ($n=0,5$) e dilatante ($n=2,0$), aliados a uma variação inercial do escoamento ($Re=100$ e $Re=500$). Nas Fig.(6.14) e (6.15), nas Fig.(6.8.a) e (6.8.c) e nas Fig.(6.9.a) e (6.9.c), verifica-se as isoregiões de pressão e linhas de velocidade quando os adimensionais n e Re são modificados.

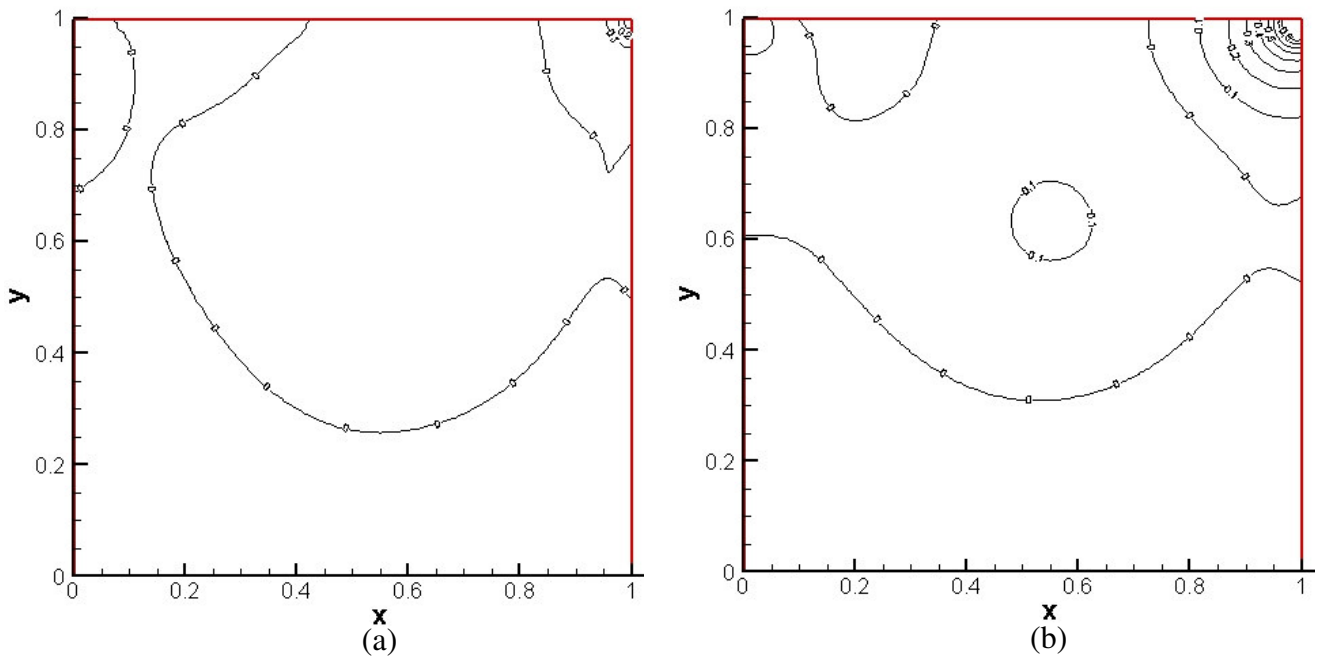


Figura 6.14: Isobáricas: (a) $n = 0,5$, (b) $n = 1,5$ _ $Re=500$.

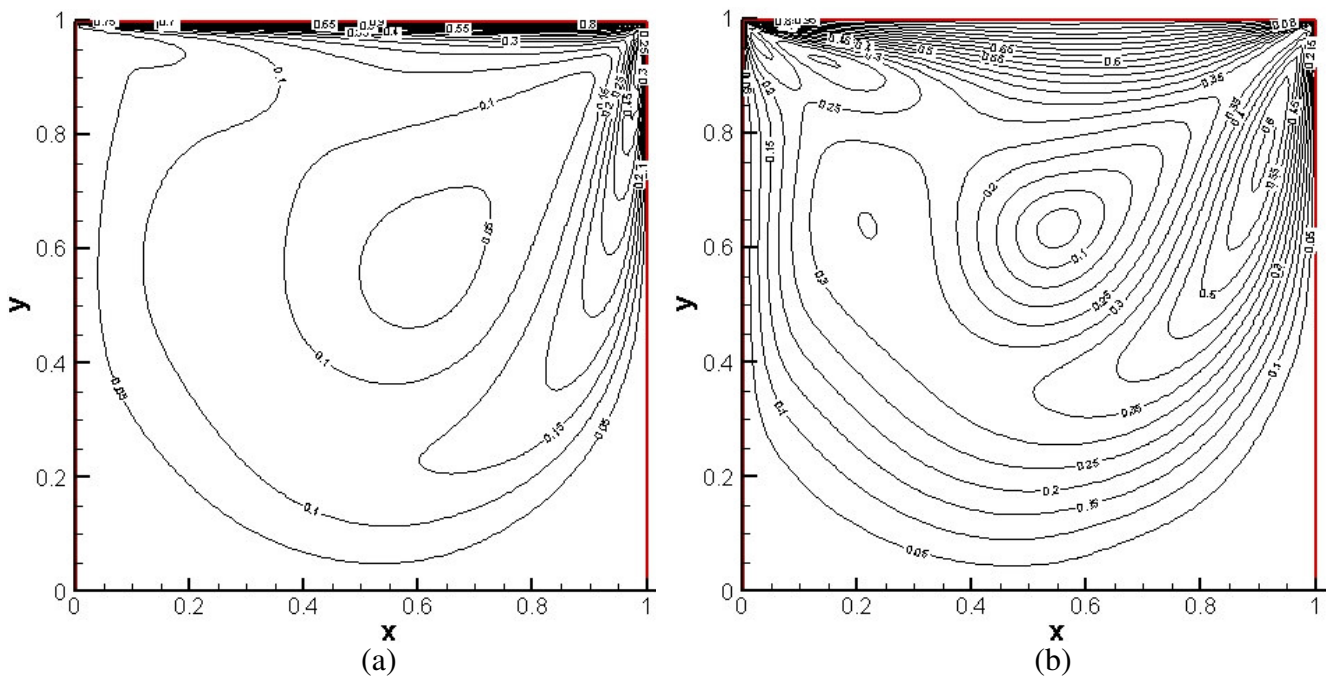


Figura 6.15: Isolinhas de Velocidade: (a) $n = 0,5$, (b) $n = 1,5$ _ $Re=500$.

Nas Fig.(6.16) e (6.17), verifica-se a concordância dos valores processados pelo método GLS, através do algoritmo NNFEM; com os valores de Neofytou (2005).

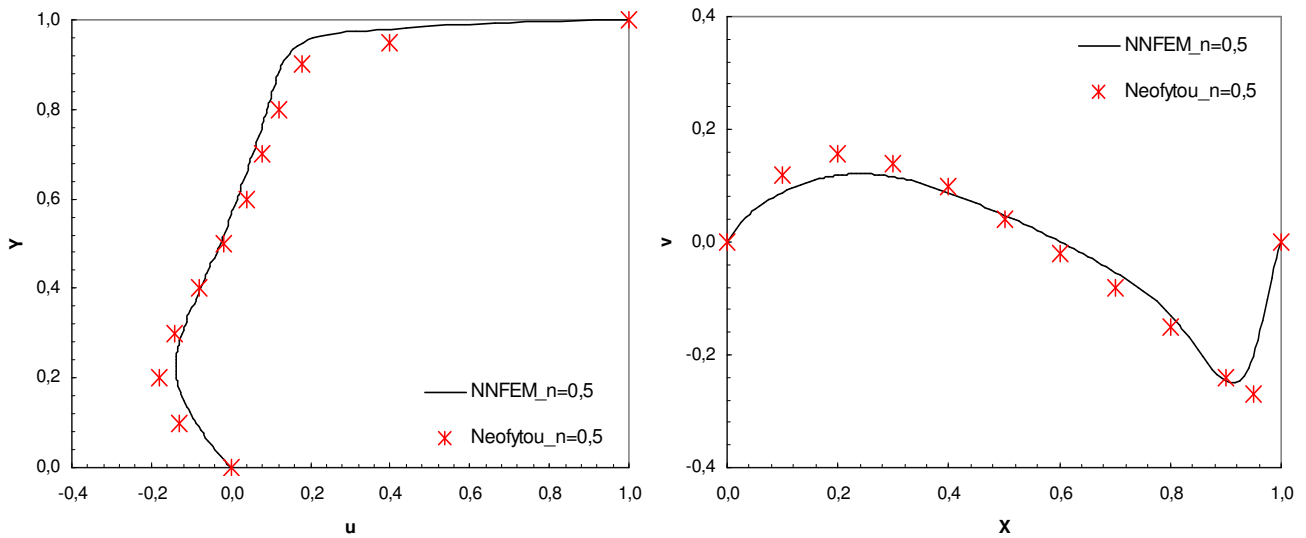


Figura 6.16: Perfil Velocidade Linha Média Cavidade ($x=0,5$ e $y=0,5$) $_n=0,5$ $_Re=500$

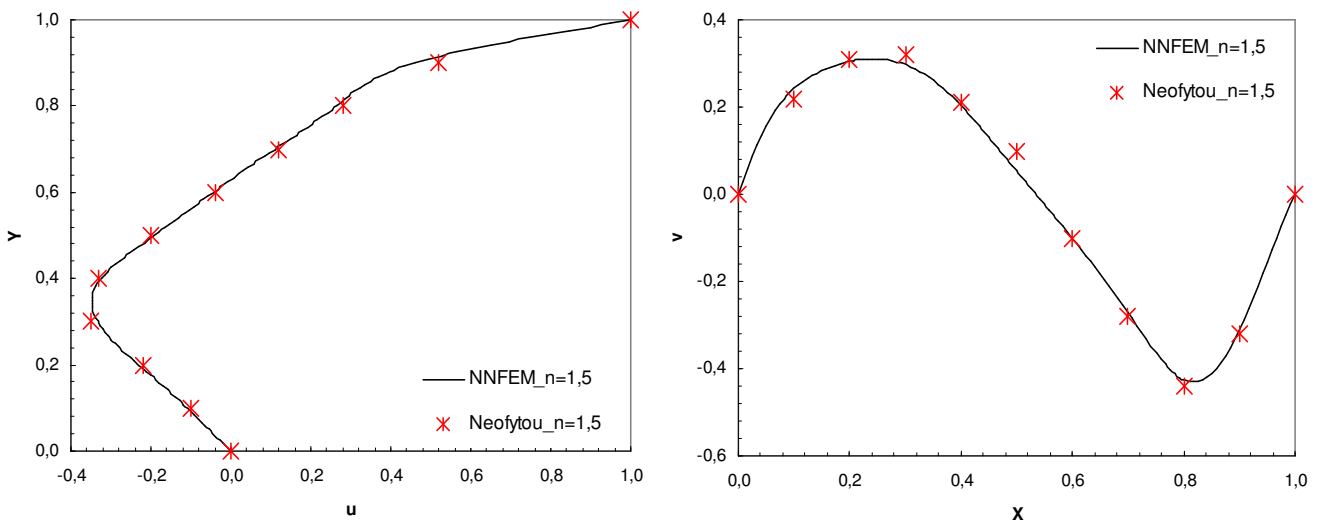


Figura 6.17: Perfil Velocidade Linha Média Cavidade ($x=0,5$ e $y=0,5$) $_n=1,5$ $_Re=500$

Assim como verificado para a condição Newtoniana, existe uma ótima concordância de resultados quando condições de comportamento pseudoplástico e dilatante do fluido estão sob investigação com o algoritmo proposto neste trabalho.

Nas Fig.(6.18) e (6.19), pode-se verificar o comportamento distinto do perfil de velocidade na linha média da geometria analisada, quando se considera as condições de escoamentos, com $Re=100$ e $Re=500$, e expoente $n=0,5$ e $n=1,5$.

É notório que as mudanças do perfil de velocidade são distintas para a condição de *shear-thinning* e *shear-thickening*. À medida que o índice n é incrementado nota-se um afilamento mais proeminente no perfil de velocidades. Sendo que o aumento do número de Reynolds promove uma variação, mais acentuada dos níveis de velocidade experimentados ao longo da linha média, horizontal e vertical, da cavidade.

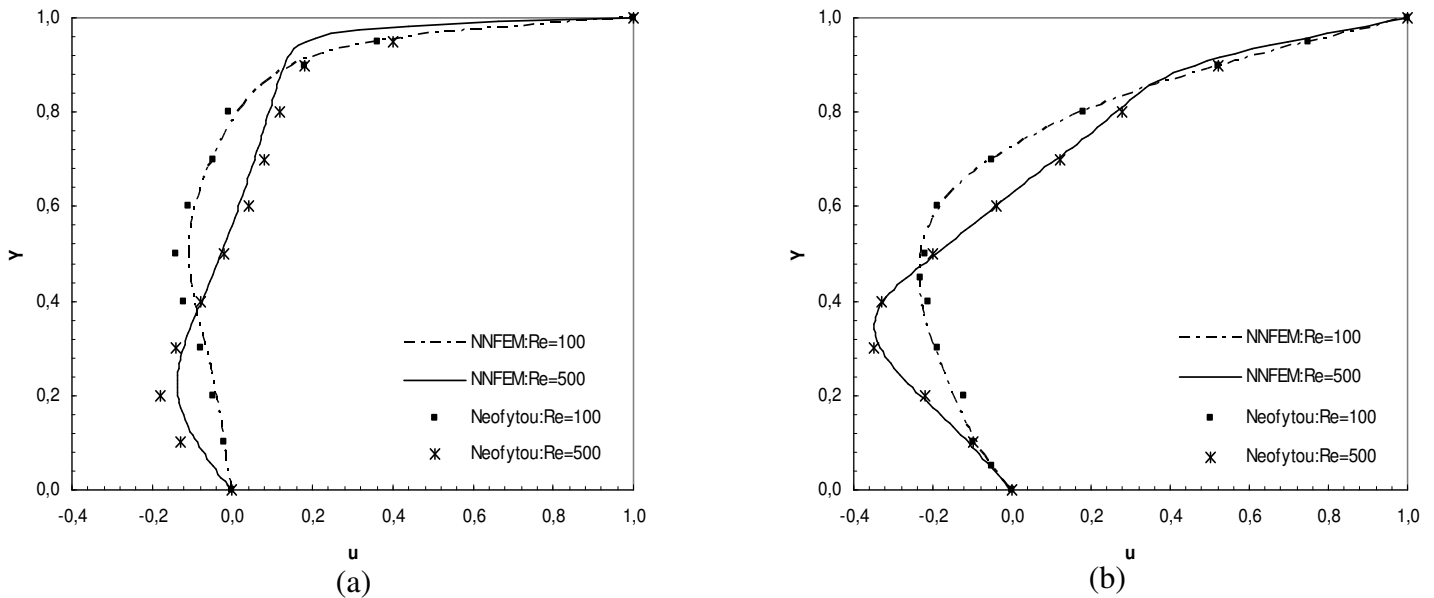


Figura 6.18: Perfil Velocidade Linha Média Cavidade ($x=0,5$) _ (a) $n=0,5$ e (b) $n=1,5$

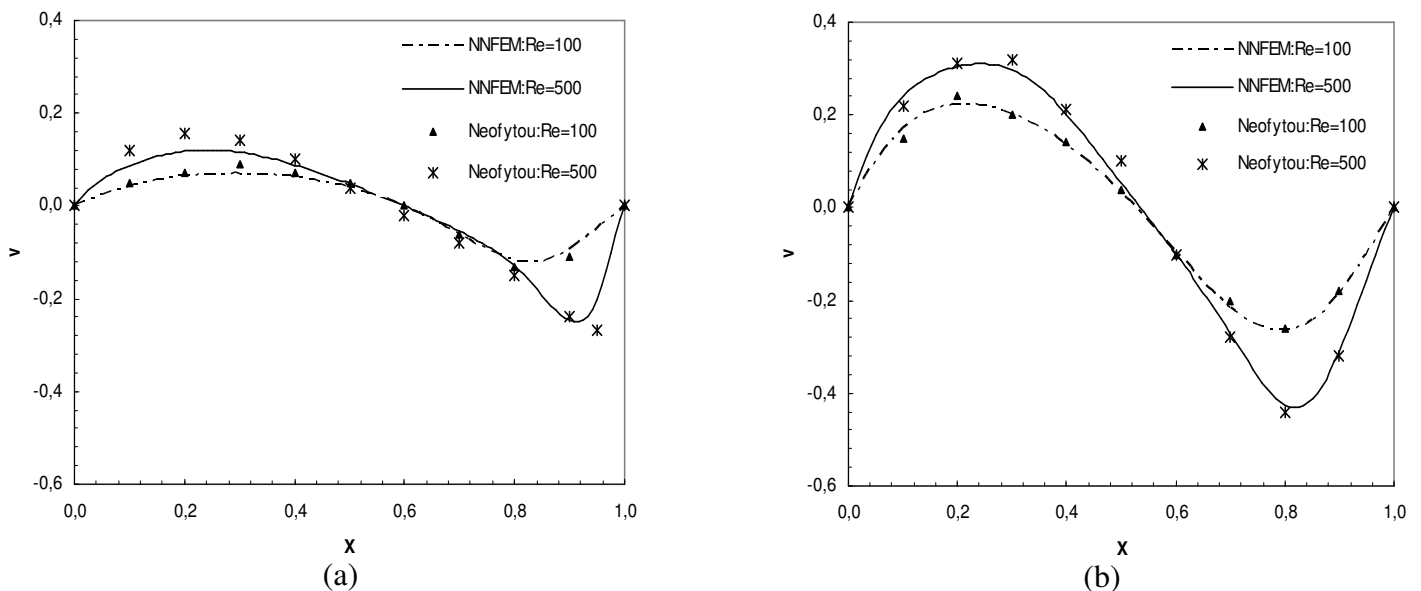


Figura 6.19: Perfil Velocidade Linha Média Cavidade ($y=0,5$) _ (a) $n=0,5$ e (b) $n=1,5$

Utilizando-se o código NNFEM, avaliaram-se os diferentes comportamentos do perfil de velocidade obtido nas simulações numéricas apresentadas. Com objetivo de salientar as diferenças causadas no perfil de velocidade quando o expoente n é modificado, estabelece-se

uma comparação entre os diferentes perfis de velocidade para um mesmo Reynolds. O comportamento para o número de Reynolds mais elevado ($Re=500$) apresenta a mesma característica, ou seja, à medida que se incrementa o expoente n , existe uma forte tendência ao perfil de velocidade assumir uma forma menos constante ao longo da linha média da cavidade, Fig.(6.20).

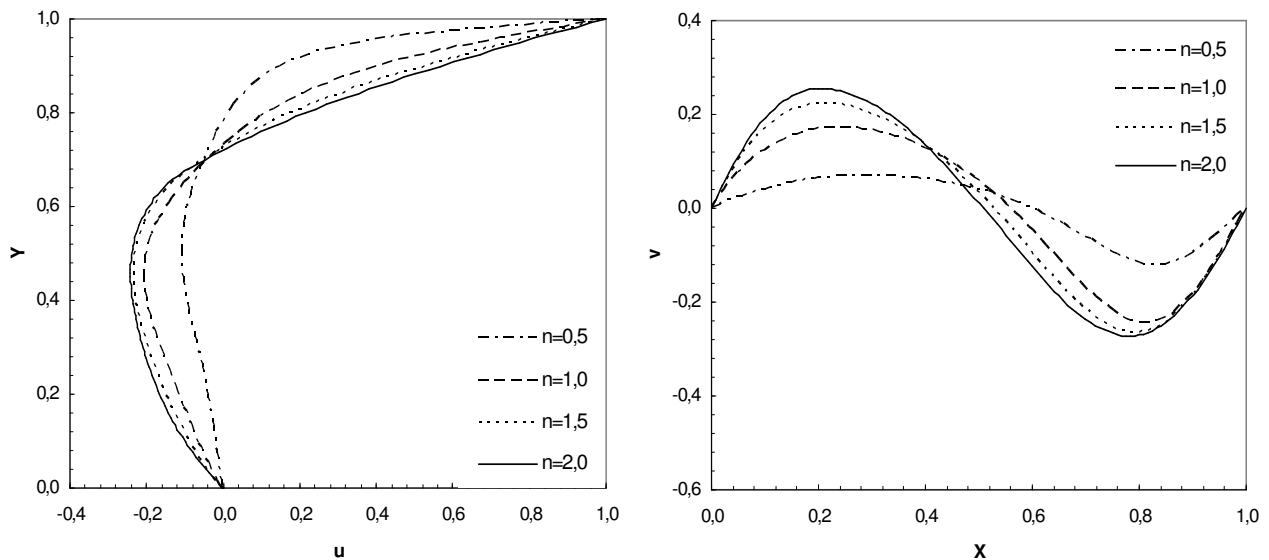


Figura 6.20: Variação Perfil Velocidade Linha Média Cavidade ($x=0,5$ e $y=0,5$) $Re=100$

6.3. ESCOAMENTO INERCIAL DE UM FLUIDO VISCOPLÁSTICO EM TORNO DO CILINDRO

De forma preliminar torna-se importante mencionar o nível de convergência do algoritmo utilizado no presente trabalho, quando as características viscoplásticas do fluido estão presentes. Visando corroborar a metodologia utilizada, e comparar os resultados já obtidos por outros autores [Souza e Mendes et al., 2007], torna-se importante a comparação entre os resultados obtidos pela metodologia aqui aplicada e os resultados presentes na literatura, [ver como exemplo, Schwarz, 2007, pag.50 à 57], onde se avalia a precisão do módulo de não-linearidade definido no algoritmo. A partir da literatura consultada observa-se que a comparação entre os resultados obtidos com o código NNFEM e resultados obtidos por Souza Mendes et al. (2007), são de ótima concordância, mesmo utilizando um problema com alta linearidade; no caso consultado, o escoamento em uma expansão seguido de uma contração abrupta.

Introduzida e referenciada questões pertinentes à metodologia da análise e convergência do algoritmo utilizado no presente trabalho, passa-se para a avaliação do problema estabelecido para esta seção.

Pretende-se simular o escoamento inercial de um fluido SMD em torno de um cilindro circular posicionado medianamente em um canal formado por duas placas planas paralelas. O problema estudado é mostrado na Fig.(6.21), para um sistema de coordenadas cartesianas com origem no centro do canal. Com a finalidade de minimizar o esforço computacional, apenas metade do domínio completo foi simulado. Cabe observar que o comprimento do canal empregado foi suficientemente longo para que o escoamento se desenvolvesse plenamente, conforme apresentado no trabalho de Zisis e Mitsoulis [Zisis et.al. 2002].

As condições de contorno impostas para velocidade foram um perfil parabólico na entrada, e tração livre na saída do canal. Condição de não-deslizamento e de impermeabilidade nas paredes do canal e na superfície do cilindro, além de condição de simetria na linha central do canal ($\partial_2 u_1 = u_2 = 0$).

No presente estudo foi avaliada a razão de aspecto, $H/R=4$, a velocidade média adimensional de entrada definida conforme $\bar{u}^* = \frac{\bar{u}}{\dot{\gamma}H}$ [Souza e Mendes et al., 2007]; o valor do número de salto J avaliado entre valores de 1 a 10^3 ; e o valor do expoente n avaliado entre 0,5 e 1,0. Com a finalidade de exposição do escoamento às condições advectivas, optou-se em estabelecer quatro diferentes condições de velocidade média na entrada do canal, $\bar{u} = 1,0$; $\bar{u} = 2,0$; $\bar{u} = 4,0$; $\bar{u} = 8,0$.

Utilizando-se as relações reológicas definidas para a função viscosidade $\eta(\dot{\gamma})$ e para as características do modelo constitutivo SMD, torna-se necessário estabelecer um relação para o número de Reynolds característico desta função, como apresentado na Eq.(6.1). As demais adimensionalizações estão definidas conforme a Eq.(5.6).

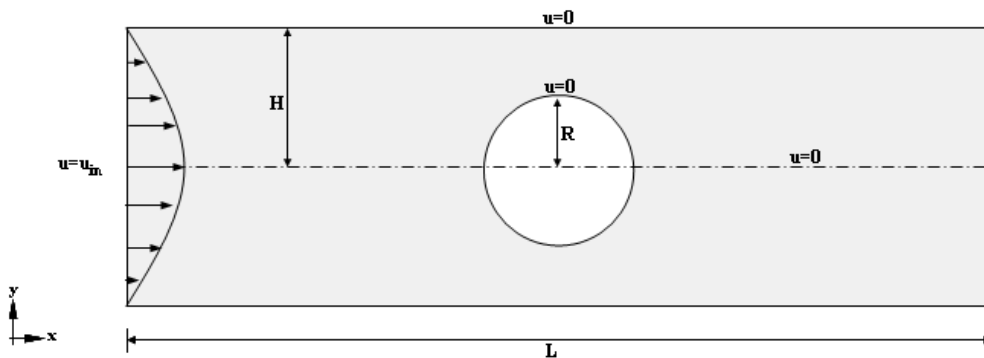


Figura 6.21: Escoamento de um fluido viscoplástico em torno de um cilindro circular.

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_1 = 1 &\rightarrow \dot{\gamma}_0 = \frac{\dot{\gamma}_1}{(J+1)} \\ \eta_0 &= 1 \\ \text{Re}_{SMD} &= \frac{\rho H (\dot{\gamma}_1 H)}{\eta_0} \end{aligned} \quad (6.1)$$

Como critério de independência de malha, da razão de aspecto analisada, define-se que a condição adequada deva apresentar uma diferença de queda da pressão inferior a três por cento (3%), quando comparada com a condição mais refinada [Schwarz, 2007].

Avaliou-se a malha em três diferentes condições de refinamento para a razão de aspecto H/R: 4:1. Onde se considera refinamentos nas direções radial e axial, e com especial atenção as regiões vizinhas, à montante, à jusante e sobre o cilindro.

Com base no critério estabelecido, e com o objetivo de reduzirmos os esforços computacionais, sendo que as três condições analisadas não apresentaram diferenças significantes na região de interesse, definiu-se uma condição de malha intermediária. A malha escolhida apresentou ótimo refinamento na direção radial e axial, possuindo ao todo 15.180 elementos bilineares do tipo Q1/Q1, e 15600 pontos nodais.

Na Fig.(6.22) apresenta-se o gráfico da queda de pressão adimensional ao longo do canal, obtidos com as três diferentes malhas estudadas. Apenas para a avaliação do teste de independência de malha, a queda de pressão foi adimensionalizada através do emprego, do

número de *Euler*; $C_p = \frac{(p - p_{ref})}{\frac{1}{2} \rho v_{ref}^2}$, e o comprimento do canal normalizado e adimensionalizado

pela sua altura $L^*=(L/H)$.

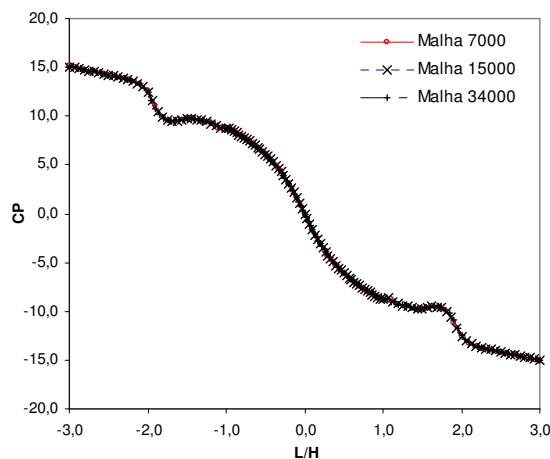


Figura 6.22: Teste de independência de malha:

Malha 7000: 6880 Elementos; Malha 15000: 15180 Elementos e Malha 34000: 34400 Elementos.

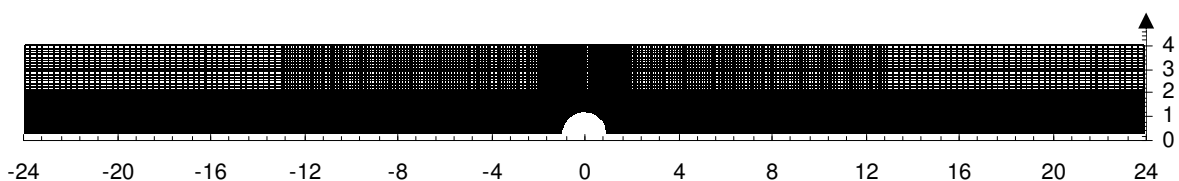


Figura 6.23: Malha: H/R=4; 15600 Pontos Nodais e 15180 Elementos.

Diversas simulações numéricas do escoamento foram analisadas. Variáveis reológicas, como número de salto (J) e expoente *Power-law* (n), além dos parâmetros de inércia, tiveram seus valores excursionados para que fosse possível uma avaliação do comportamento sobre o escoamento viscoplástico em análise.

Com a finalidade de facilitar as identificações posteriores, na tabela 1, apresentam-se as identificações das simulações avaliadas e das variáveis modificadas em cada avaliação.

Identificação Simulação	J	n	\bar{u}^*	\bar{u}	Re_{SD}	$\dot{\gamma}_0$	$\dot{\gamma}_1$	ρ
A	1	0,50	0,25	1	16	5,0E-01	1	1
B	10	0,50	0,25	1	16	9,1E-02	1	1
C	100	0,50	0,25	1	16	9,9E-03	1	1
D	1000	0,50	0,25	1	16	1,0E-03	1	1
E	100	0,50	0,25	1	16	9,9E-03	1	1
F	100	0,50	0,50	2	16	9,9E-03	1	1
G	100	0,50	1,00	4	16	9,9E-03	1	1
H	100	0,50	2,00	8	16	9,9E-03	1	1
I	100	0,25	0,25	1	16	9,9E-03	1	1
J	100	0,50	0,25	1	16	9,9E-03	1	1
K	100	0,75	0,25	1	16	9,9E-03	1	1
L	100	1,00	0,25	1	16	9,9E-03	1	1

Tabela 1.0. Simulações realizadas – Identificação e valores das variáveis utilizadas.

Na Fig.(6.24) são apresentados os resultados das isoregiões de τ^* para as simulações realizadas com diferentes números de salto J , identificadas conforme tabela (1), valores de J variando entre 1 a 10^3 , sendo mantidos constantes os valores do expoente *Power-law* em $n=0,5$, e a velocidade média na entrada do canal constante e igual a um, $\bar{u}=1,0$. Ressalta-se que nas figuras apresentadas para a análise das isoregiões de τ^* , as zonas mais escuras indicam as regiões de maior rigidez, ou seja, regiões onde $\tau < \tau_0$; já as regiões mais claras representam regiões de escoamento, onde $\tau > \tau_0$, e a transição entre estas regiões o comportamento entre tais regiões de rigidez máximas e mínimas.

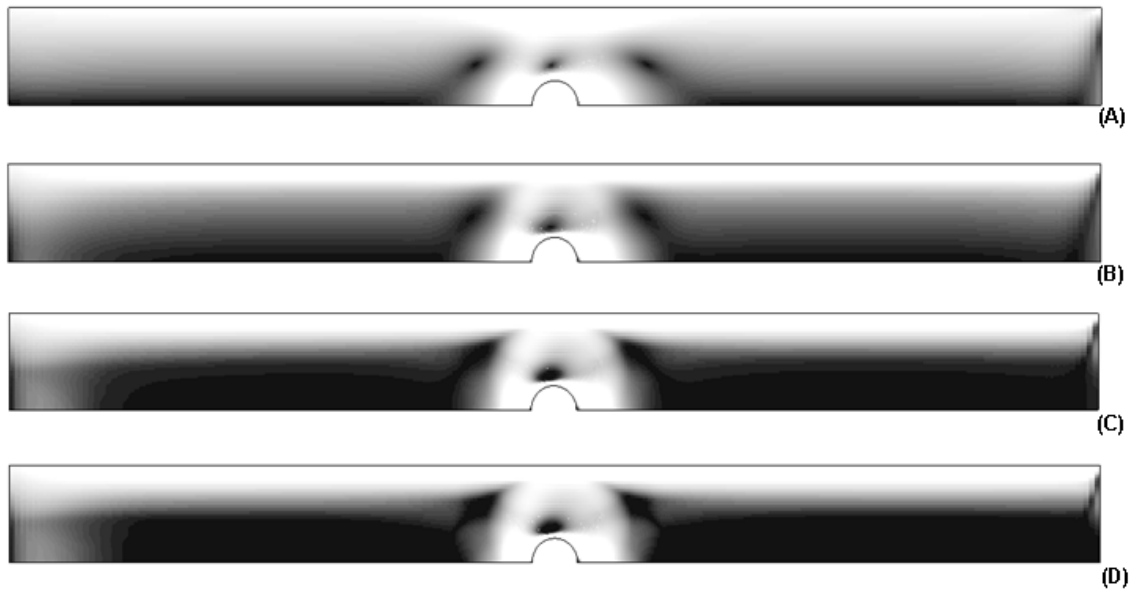


Figura 6.24: Isoregiões de τ^* para $n=0,5$; $\bar{u}=1,0$: (A) $J=1$, (B) $J=10$, (C) $J=100$, (D) $J=1000$

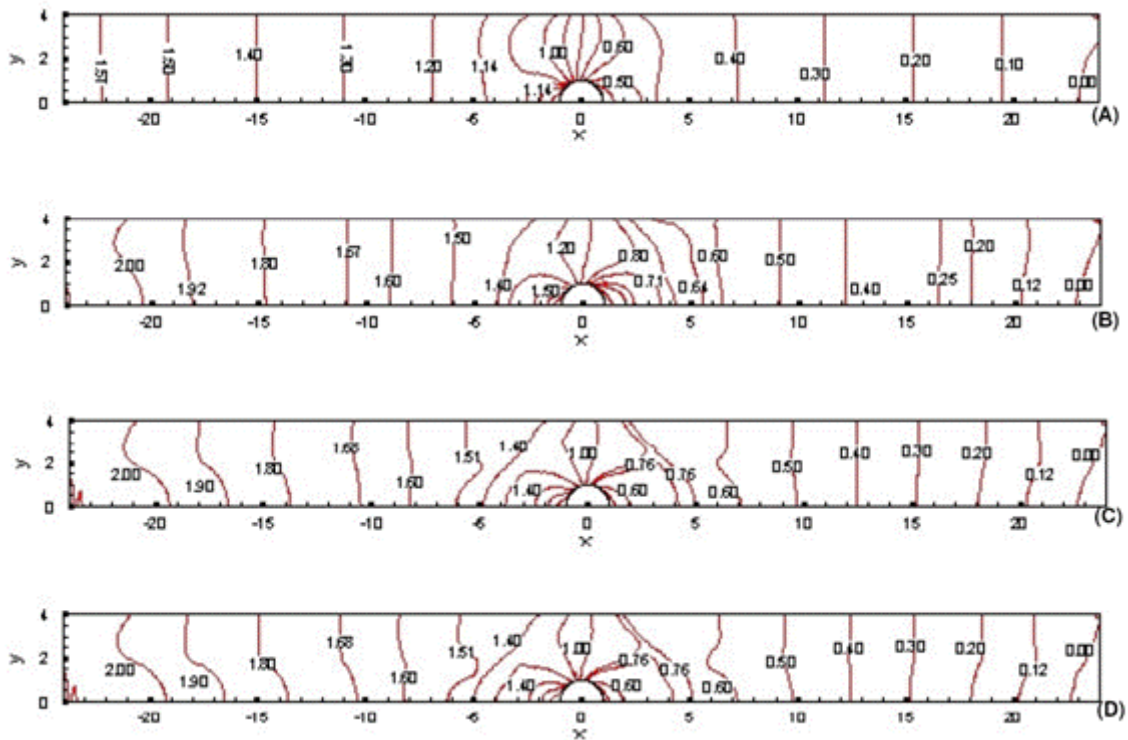


Figura 6.25: Isobandas de pressão, $n=0,5$; $\bar{u}=1,0$: (A) $J=1$, (B) $J=10$, (C) $J=100$, (D) $J=1000$

Nas Fig.(6.24) e (6.25), verifica-se que o aumento do adimensional J , provoca uma redução das regiões rígidas, ou seja, mais regiões do escoamento alcançam a tensão limite do material, iniciando o processo de escoamento. A região central do canal, junto à linha de simetria da geometria, experimenta um aumento do nível de tensão de cisalhamento, porém não o suficiente para atingir os valores mínimos para que o fluido inicie o escoamento. Na Fig.(6.26) se apresenta os gráficos comparativos dos diferentes perfis de velocidade medidos em duas

regiões distintas do escoamento, definidas na posição $x=0$ e na posição a jusante do cilindro em $x=2,0$; quando o adimensional J está sendo variado.

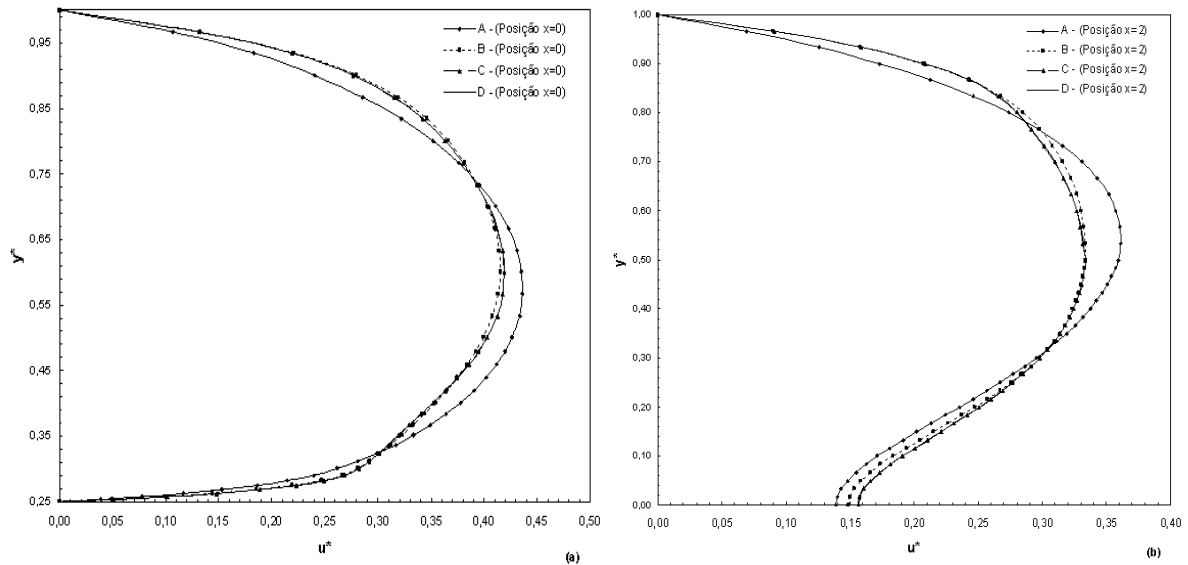


Figura 6.26. Gráficos perfis velocidade – ((a) Posição $x=0$, (b) Posição $x=2$), $n=0,5$; $\bar{u} = 1$:

A medida que J é incrementado mais regiões rígidas iniciam o escoamento, o que pode ser verificado no formato do perfil de velocidade dos gráficos da Fig.(6.26) e pelo formato das isolinhas de velocidade da Fig.(6.27). O perfil de velocidade se torna menos afilado, com regiões de maior velocidade junto à parede superior do canal, onde é experimentado taxas de cisalhamento maiores.

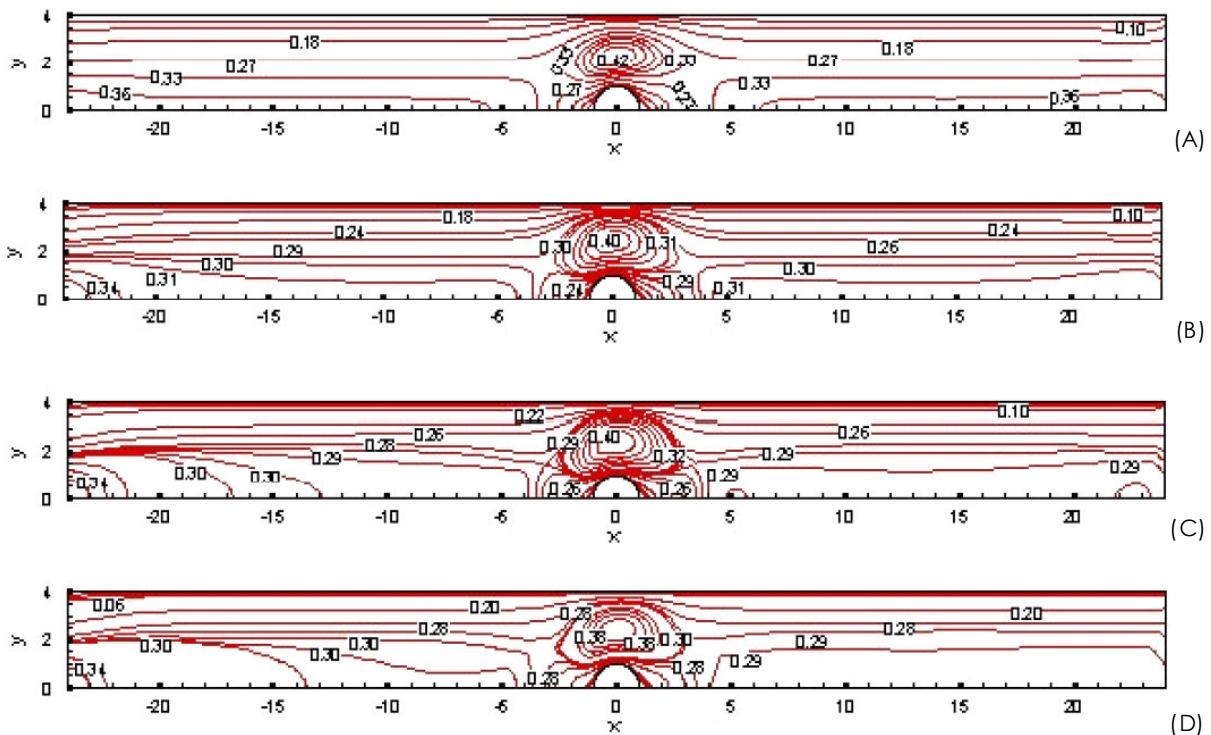


Figura 6.27. Isolinhas de velocidade $n=0,5$; $\bar{u} = 1$; (A) $J=1$, (B) $J=10$, (C) $J=100$ (D) $J=1000$

A partir do entendimento do comportamento isolado do adimensional J , realizam-se avaliações do escoamento na presença de condições advectivas dominantes, através do incremento da velocidade média de entrada no canal.

Nas Fig.(6.28) e (6.29), são apresentados respectivamente as avaliações das isobandas de pressão e as isolinhas de velocidade nas quatro condições de \bar{u} , consideradas (ver identificação das simulações na tabela 1.0).

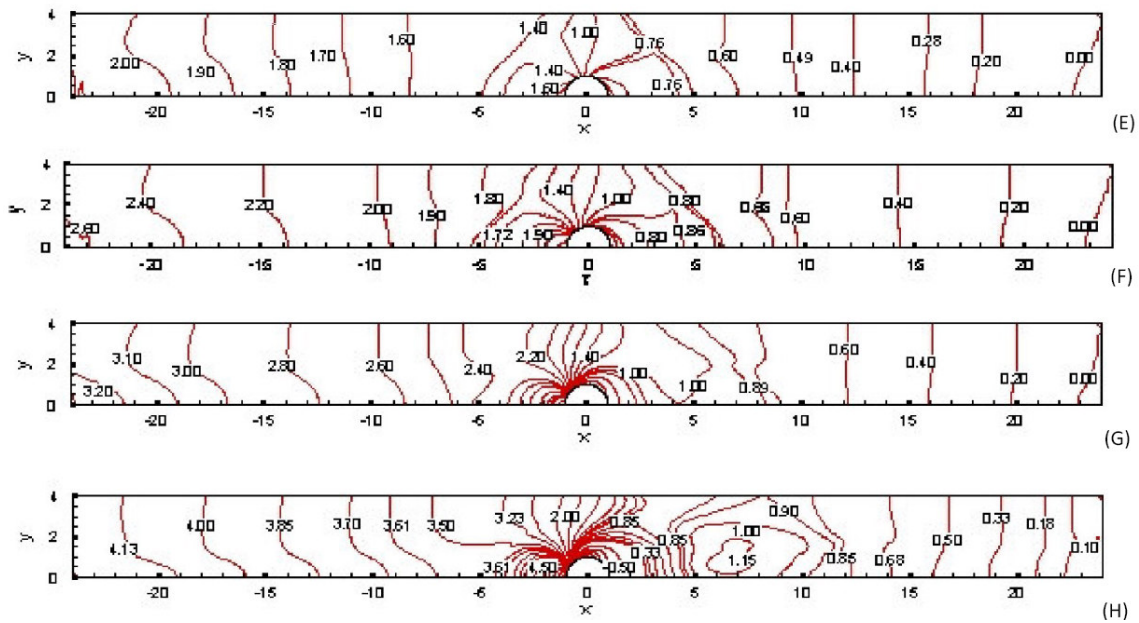


Figura 6.28. Isobandas de pressão, $n=0,5$, $J=100$: (E) $\bar{u} = 1$, (F) $\bar{u} = 2$, (G) $\bar{u} = 4$, (H) $\bar{u} = 8$

À medida que o valor da velocidade média é incrementado constata-se o aumento do vórtice gerado a jusante do cilindro, junto a sua superfície, Fig.(6.29). Verifica-se que as isobandas de pressão, apresentam um ponto de estagnação sobre a superfície do cilindro, originado pelo aumento da quantidade de movimento do escoamento com o aumento da velocidade. Na condição de velocidade média mais elevada, uma assimetria das isobandas é verificada em uma região próxima ao vórtice gerado a jusante do cilindro, o que é imediatamente estabilizado sem que exista uma propagação do distúrbio na região posterior do comprimento do canal.

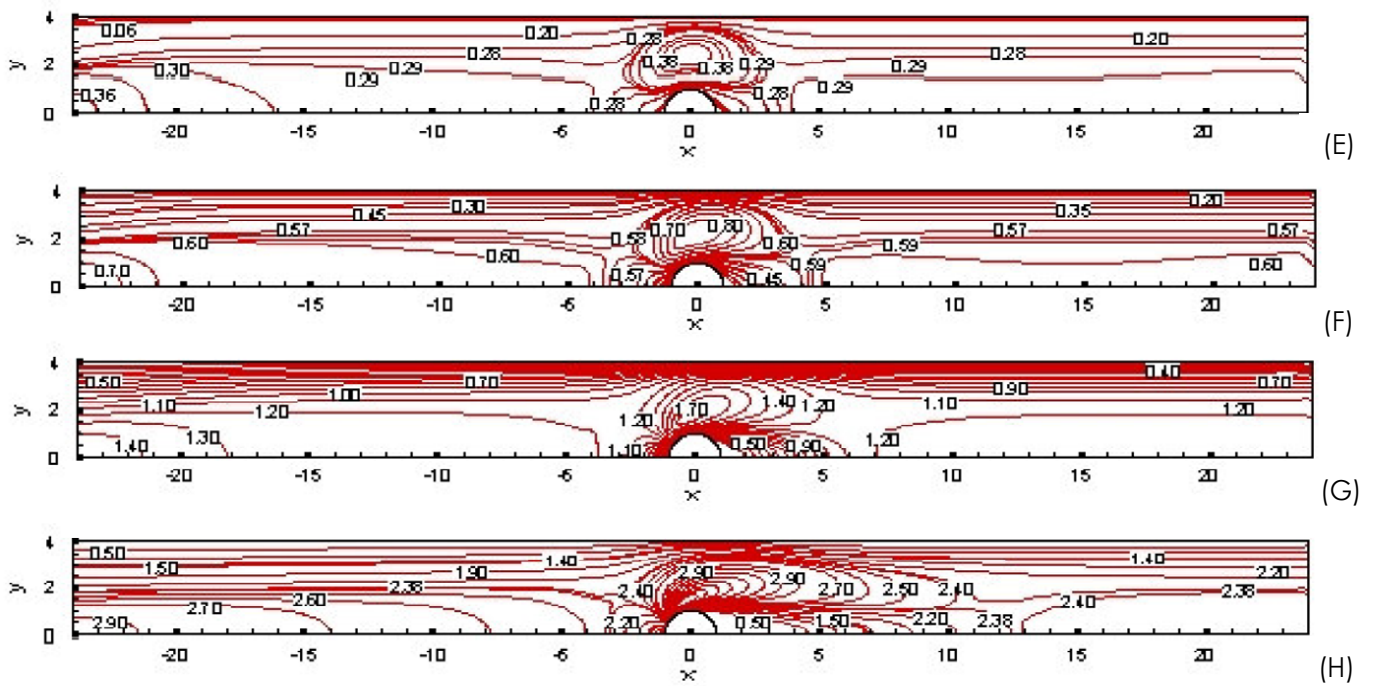


Figura 6.29 Isolinas de velocidade, $n=0,5$, $J=100$: (E) $\bar{u}=1$, (F) $\bar{u}=2$, (G) $\bar{u}=4$, (H) $\bar{u}=8$

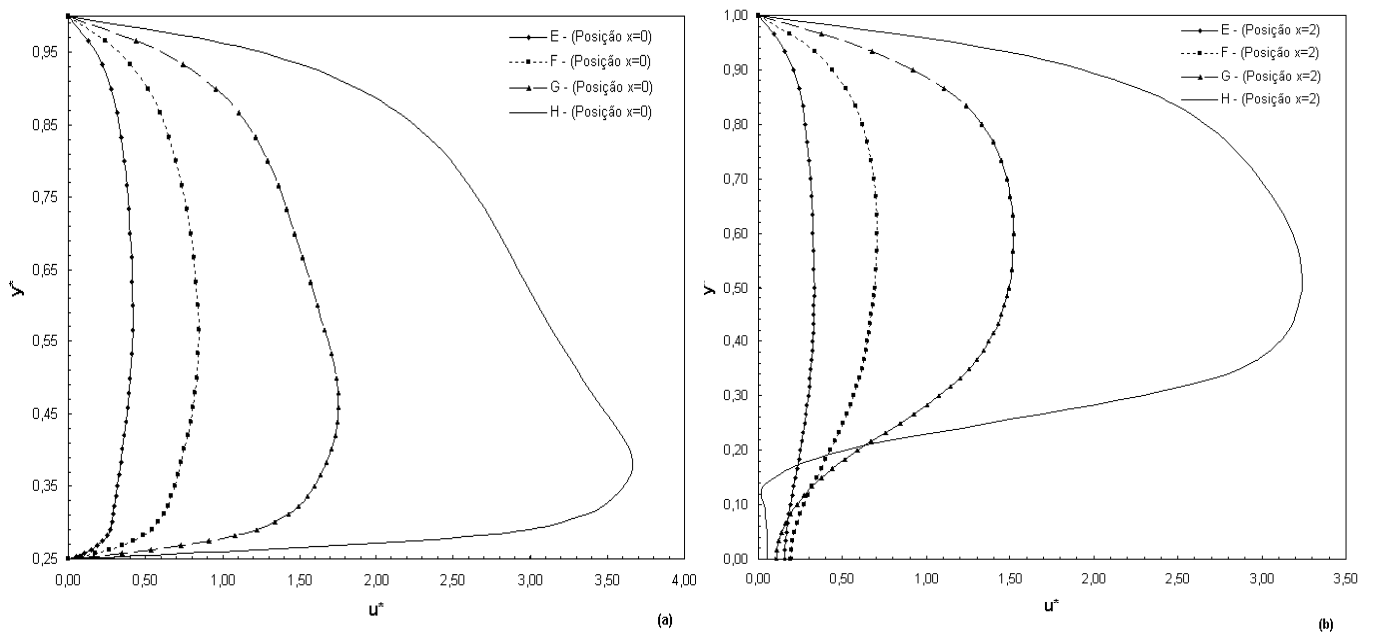


Figura 6.30. Gráficos perfis velocidade – ((a) Posição $x=0$, (b) Posição $x=2$), $n=0,5$; $J=100$:

Identificação da simulação: (E) $\bar{u}=1$, (F) $\bar{u}=2$, (G) $\bar{u}=4$, (H) $\bar{u}=8$

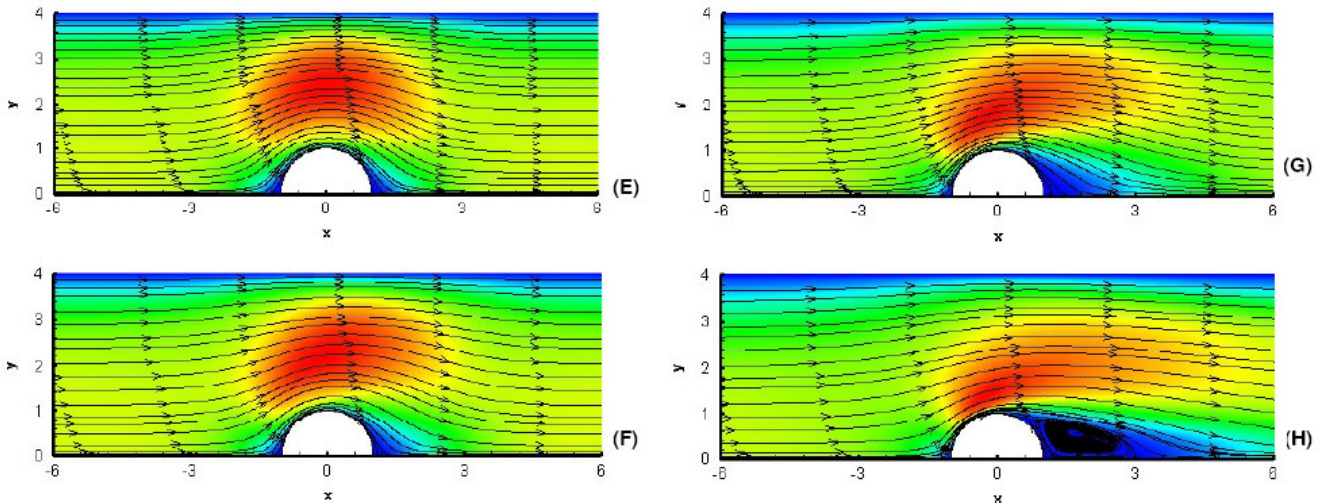


Figura 6.31 Linhas de corrente, $n=0,5$, $J=100$: (E) $\bar{u} = 1$, (F) $\bar{u} = 2$, (G) $\bar{u} = 4$, (H) $\bar{u} = 8$

Na Fig.(6.30) avaliam-se os perfis de velocidade nas diferentes condições de velocidade média de entrada analisada. Os perfis foram medidos em duas posições definidas, $x=0$ (gráfico (a)) e $x=2,0$ (à jusante do cilindro – gráfico (b)). Os perfis experimentam taxas de cisalhamento mais altas à medida que \bar{u} cresce. Pode-se corroborar tal explanação pela topologia da distribuição das isoregiões de τ^* , verificados na Fig.(6.32). O aumento da velocidade de entrada no canal reduz sensivelmente as regiões rígidas, e conseqüentemente aumenta a assimetria nas regiões à montante e jusante do cilindro.

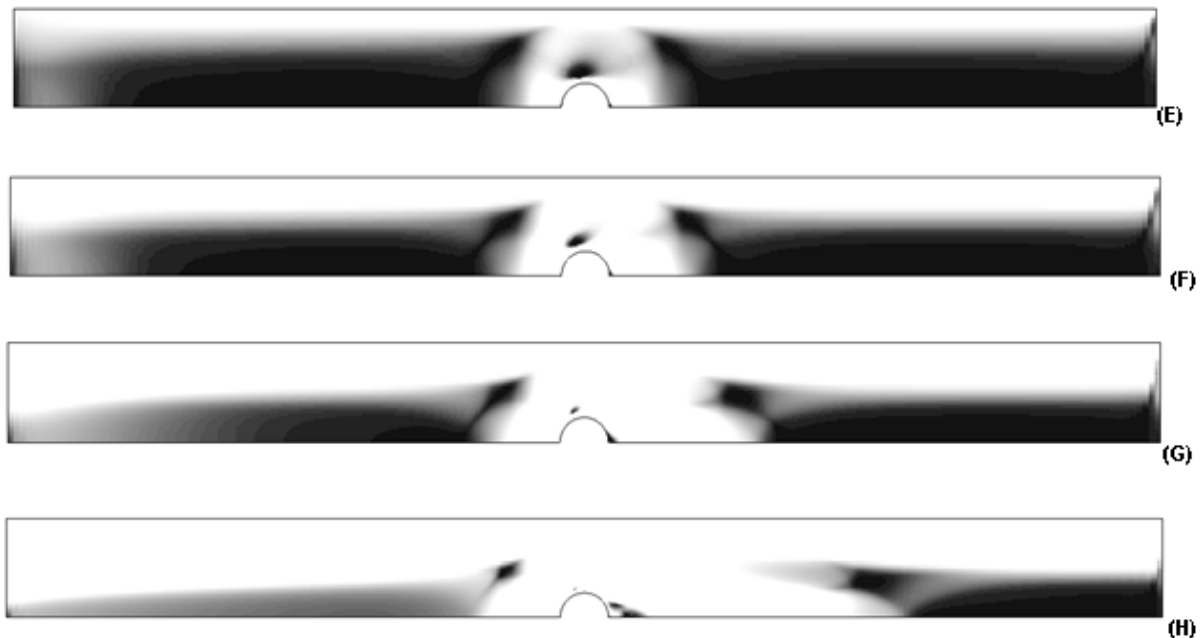


Figura 6.32: Isoregiões de τ^* para $n=0,5$, $J=100$: (E) $\bar{u} = 1$, (F) $\bar{u} = 2$, (G) $\bar{u} = 4$, (H) $\bar{u} = 8$

Verifica-se que as isolinhas de velocidade da Fig.(6.29) e linhas de corrente da Fig.(6.31), avaliadas na região sobre o cilindro (posição $x=0$) são sensivelmente afetadas com o aumento

da velocidade média de entrada no canal; explicado principalmente por argumentos de conservação de massa nesta posição. De forma proporcional a região de recirculação à jusante do cilindro junto à linha média do canal, também é sensivelmente afetada, apresentando um aumento do vórtice nesta região, como apresentado na Fig.(6.31).

Na Fig.(6.33) são apresentados os resultados das isoregiões de τ^* , quando se avalia o comportamento do escoamento quando o expoente n , índice *Power-law*, é incrementado. O valor da velocidade média na entrada no canal foi mantido constante, $\bar{u} = 1,0$, e o valor do número de J igualmente mantido constante, $J=100$.

As simulações mostram que a relação entre o expoente n e as regiões rígidas do escoamento são inversamente proporcionais. À medida que o expoente n é incrementado observa-se um decréscimo das regiões rígidas do escoamento, causado principalmente pela diminuição da taxa de cisalhamento. Pela análise dos perfis de velocidade da Fig.(6.32) constata-se que a variação do expoente *Power-law*, afeta diretamente as regiões mais rígidas posicionadas sobre o cilindro e junto à parede superior do canal. Estas regiões tendem a um aumento das tensões de cisalhamento. Ainda pelo gráfico da Fig.(6.34) e pelas isolinhas de velocidade da Fig.(6.35), pode-se avaliar o deslocamento do perfil de velocidade na *vena contracta* do canal (posição $x=0$). Sendo que, quanto maior for o índice n experimentado no escoamento, mais afilado será este perfil de velocidade, caracterizado por uma maior quantidade de movimento. Igualmente junto à parede superior do canal verifica-se a presença de uma camada limite mais acentuada a medida que o expoente n é incrementado. Ainda importante ressaltar que um menor índice n acarreta menores taxas de cisalhamento e mais achatado é verificado o perfil de velocidade, nas posições avaliadas.

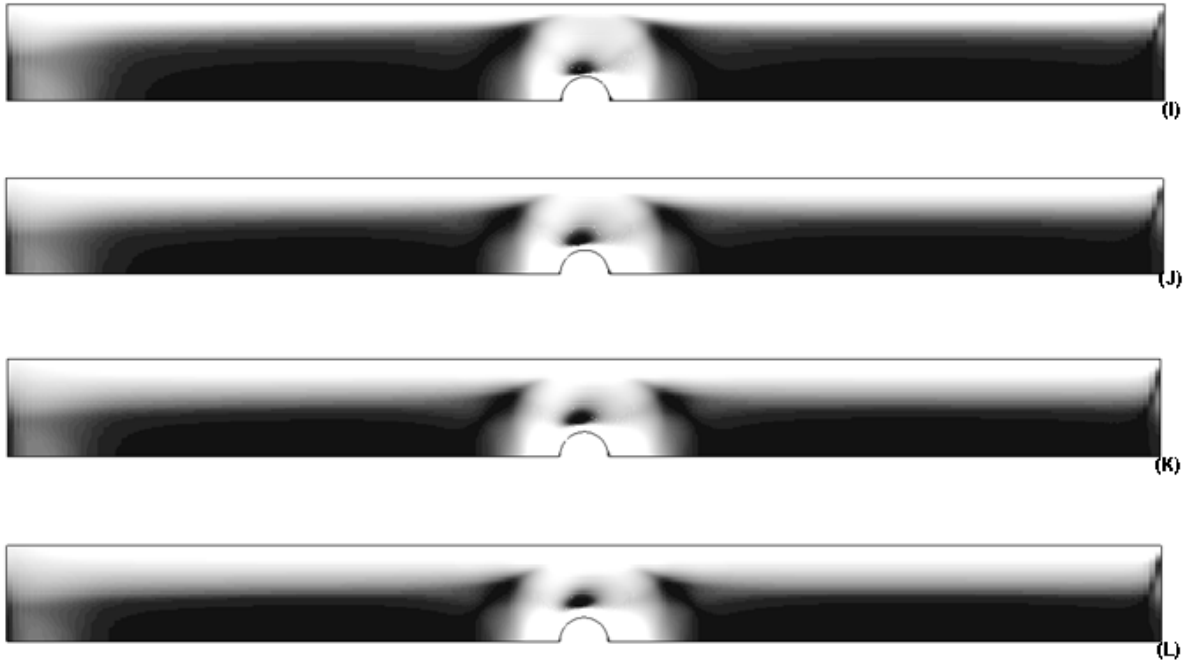


Figura 6.33: Isoregiões de τ^* para $\bar{u}=1,0$; $J=100$: (I) $n=0,25$, (J) $n=0,5$, (K) $n=0,75$, (L) $n=1,0$

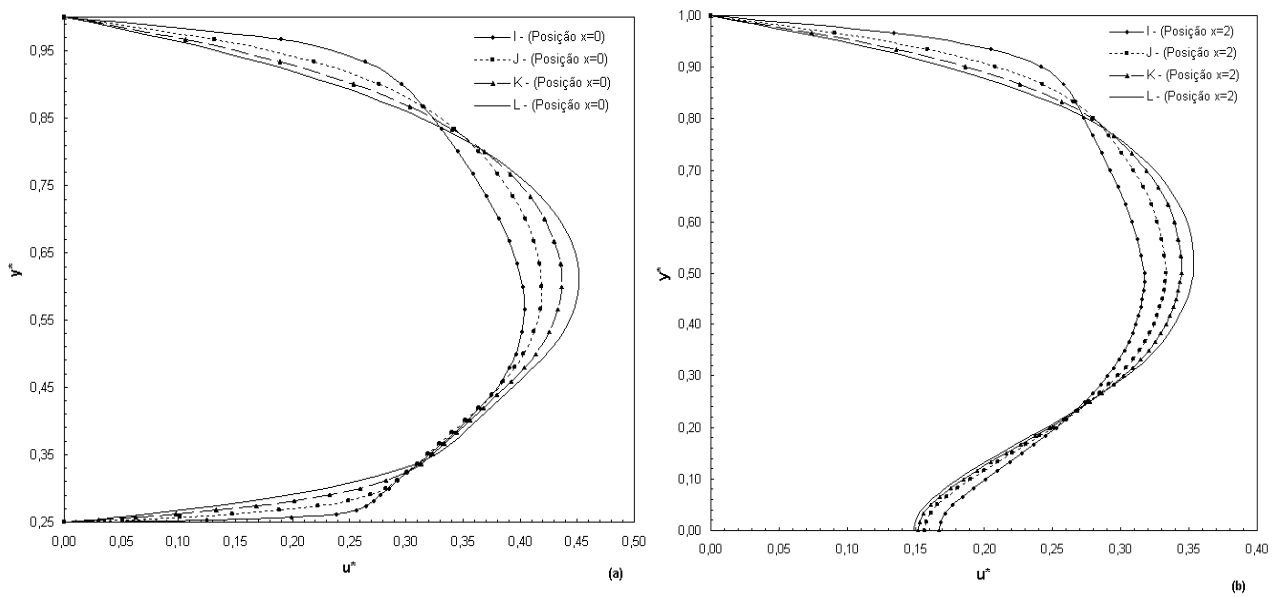


Figura 6.34. Gráficos perfis velocidade – ((a) Posição $x=0$, (b) Posição $x=2$); $\bar{u}=1,0$, $J=100$:

(I) $n=0,25$, (J) $n=0,5$, (K) $n=0,75$, (L) $n=1,0$

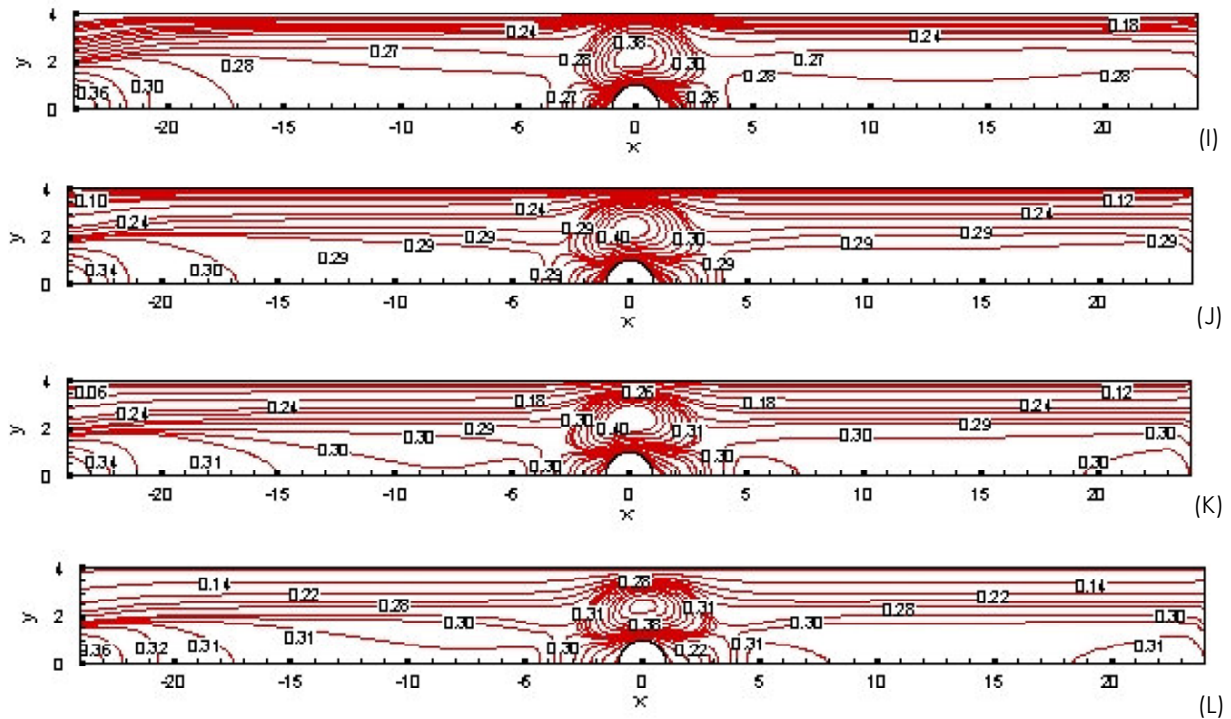


Figura 6.35: Isolinhas de velocidade para $\bar{u} = 1,0$; $J=100$: (I) $n=0,25$, (J) $n=0,5$, (K) $n=0,75$, (L) $n=1,0$

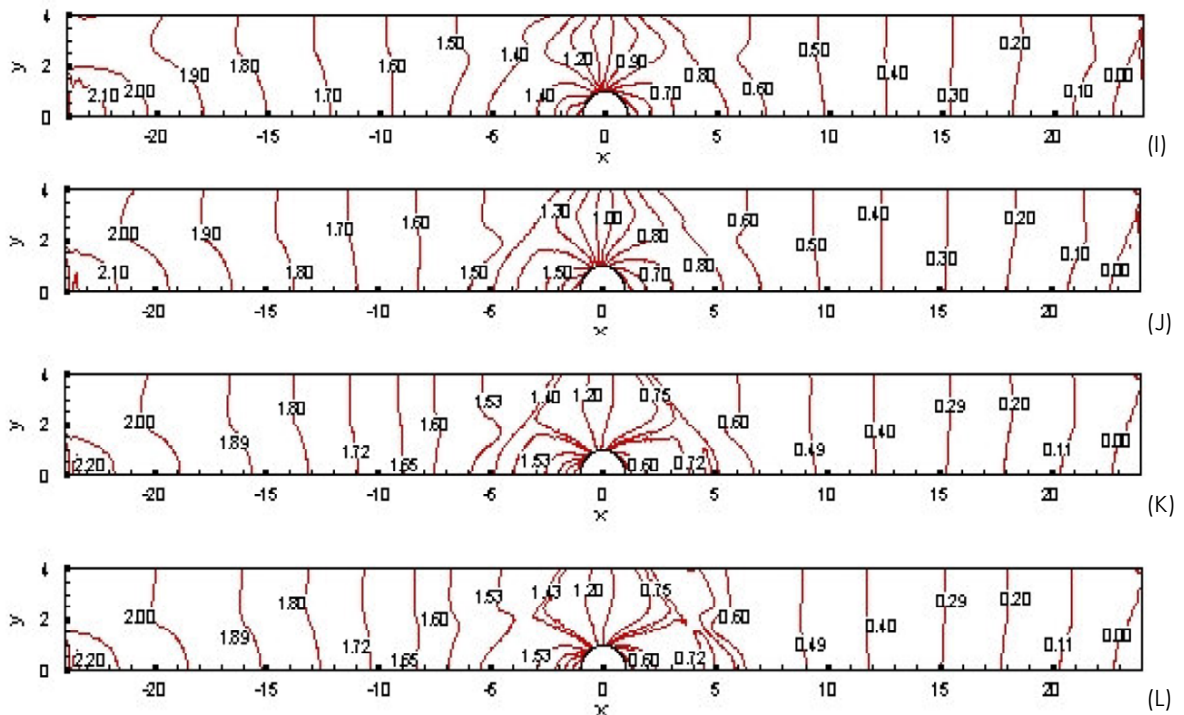


Figura 6.36: Isobandas de pressão para $\bar{u} = 1,0$; $J=100$: (I) $n=0,25$, (J) $n=0,5$, (K) $n=0,75$, (L) $n=1,0$

Por fim, com intuito de reforçar o entendimento sobre o comportamento entre o número de salto e a taxa de cisalhamento do escoamento viscoplástico; apresenta-se na Fig.(6.35) uma simulação analítica desta relação.

A medida relativa do salto da taxa de cisalhamento aumenta com o aumento do número de salto J . A taxa de cisalhamento aumenta enquanto a tensão de cisalhamento permanece aproximadamente igual a τ_0 até o início da região *Power-law*.

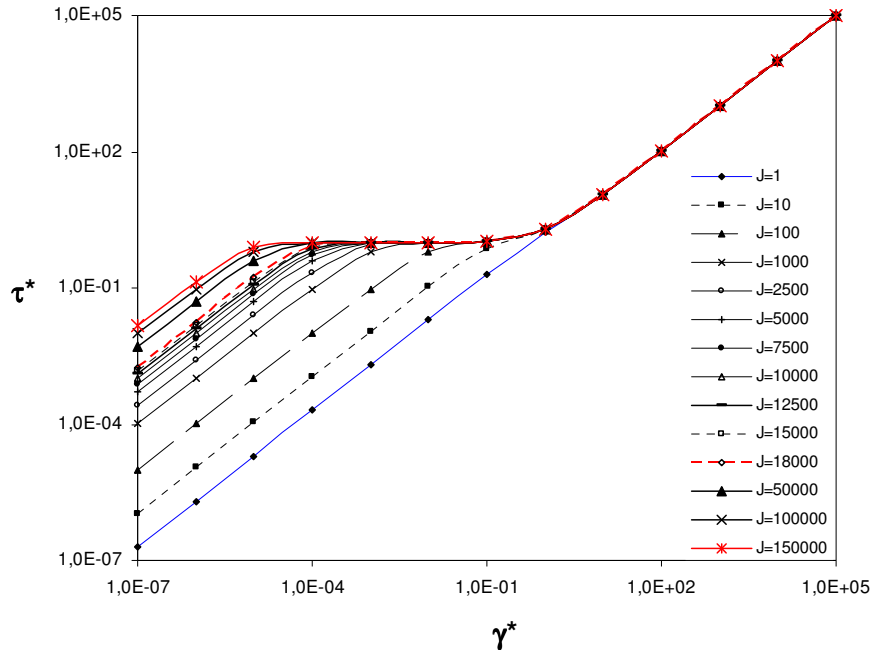


Figura 6.37. Gráfico da curva de escoamento de um material viscoplástico.

As variações encontradas na transição entre as regiões mais e menos rígidas se dão exclusivamente pelo incremento do adimensional J . À medida que é incrementado, as regiões rígidas tendem a diminuir, mantendo as regiões próximas à parede superior do canal e em torno do cilindro como áreas de menor rigidez e com maior tendência ao escoamento do fluido. Experimenta-se um decréscimo do valor de $\dot{\gamma}_0$, decorrente do crescimento de J , fazendo com que tais regiões alcancem a tensão limite do material iniciando o processo de escoamento.

7. CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

O presente trabalho objetivou a aproximação numérica, através do método de elementos finitos via Galerkin Mínimos-Quadrados, de escoamentos inerciais Newtonianos, pseudoplásticos e dilatantes, além do estudo do escoamento viscoplástico de um fluido aproximado pelo modelo SMD, em torno de um cilindro circular.

O Capítulo 1 do trabalho introduziu os princípios básicos da Mecânica dos Fluidos, a diferenciação do comportamento de um fluido não-Newtoniano de um Newtoniano, os princípios da aproximação de elementos finitos, as dificuldades encontradas nas aproximações de problemas de escoamentos de fluidos, o método estabilizado como alternativa ao método clássico de Galerkin, a metodologia de Galerkin Mínimos Quadrados (GLS), e, por fim, uma revisão de alguns artigos de interesse sobre a aproximação numérica de escoamentos de fluidos viscoplásticos.

No Capítulo 2 introduziu-se a modelagem mecânica utilizada, formada pelas equações de balanço de massa e movimento. Apresentou-se as formas Lagrangeanas destas equações, além das equações relativas ao tensor das tensões, conservação de energia e por fim as equações clássicas de Navier-Stokes para um fluido incompressível.

O comportamento material dos fluidos puramente viscosos foi apresentado no Capítulo 3. Analisado a relação do tensor tensão com o tensor taxa de deformação para os chamados fluidos Newtonianos generalizados; como também apresentado os modelos empíricos de funções viscosidades para fluidos viscoplásticos, através da generalização da viscosidade Newtoniana, de modo a permitir que a viscosidade do fluido passe a depender da taxa de cisalhamento. Por fim, introduz-se uma correlação empírica da função viscosidade: a função de viscosidade proposta por Souza Mendes e Dutra (2004) – a qual foi utilizada nas simulações numéricas do presente trabalho.

No Capítulo 4 e no Capítulo 5, apresenta-se a aproximação numérica do modelo mecânico introduzido no Capítulo 3, através do método de elementos finitos - tal aproximação numérica foi realizada via método de Galerkin Mínimos-Quadrados (GLS). Os subespaços de elementos finitos do campo de velocidade e pressão foram definidos. Introduzida a formulação GLS através da adição dos termos estabilizados na formulação de Galerkin clássica. Devido ao principal fato dos termos estabilizados terem sido inseridos na forma residual, a solução exata - ou soluções aproximadas obtidas a partir de malhas com refinamento ajustado – anula estes termos, o que torna a formulação GLS extremamente consistente.

A análise dos resultados numéricos obtidos a partir das simulações numéricas foi apresentada no Capítulo 6. Primeiramente, a implementação da formulação GLS foi avaliada para o problema clássico do escoamento forçado em uma cavidade, com os perfis de velocidade horizontal e vertical apresentando concordância adequada com a literatura. Em seguida, simulou-se numericamente, via método GLS, o escoamento isocórico com inércia variada de um fluido viscoplástico SMD em torno de um cilindro; para uma razão de aspecto fixa definida conforme a análise da literatura e de trabalhos anteriores; com análise das isobandas de pressão, isolinhas de velocidade e isoregiões de τ^* .

7.1 COMENTÁRIOS FINAIS

Sobre os comentários realizados no Capítulo 6, destacam-se os seguintes tópicos:

- O método Galerkin Mínimos-Quadrados, e em especial o algoritmo NNFEM utilizado no presente trabalho, mostram-se capazes de capturar os efeitos de pseudoplasticidade, assim como as regiões rígidas e escoantes do fluido, seja de comportamento Newtoniano ou não-Newtoniano (pseudoplástico, dilatante ou viscoplástico); mesmo em condições advectivo-dominantes;
- Verifica-se que as isobandas de τ^* apresentam simetria axial, quando avaliadas em condições com inércia desprezível; a medida que os termos advectivos da equação de movimento são incrementados, percebe-se uma assimetria nesta topologia;
- Para um índice de *Power-law* e número de salto J fixos, o aumento da velocidade média de entrada no canal traz sensíveis mudanças das regiões de escoamento do fluido. À medida que a velocidade média experimenta valores mais elevados, mais assimétrico e perturbado fica o escoamento nas regiões vizinhas à montante do cilindro; principalmente na posição da *vena-contracta* (posição $x=0$);
- O aumento do número de salto, tende a diminuir as regiões rígidas. Ou seja, à medida que J cresce, maiores serão as regiões sujeitas a taxas de cisalhamento muito baixas, sendo que alcançam o valor da tensão τ_0 e iniciam a escoar;
- Mantendo-se o valor da velocidade média de entrada no canal constante, e diferente de zero, para o mesmo número de salto; à medida que o expoente de *Power-law* diminui, as regiões materiais rígidas aumentam de dimensões, devido à redução dos níveis da tensão de cisalhamento;
- Para o número de salto e índice de *Power-law* fixo, o aumento da velocidade média de entrada no canal, apresenta um impacto nas regiões rígidas do escoamento, principalmente na região da *vena-contracta* (posição $x=0$);

- Mantendo-se o expoente de *Power-law* reduzido (abaixo de um) e a velocidade média na entrada do canal fixa (neste caso $\bar{u}=1,0$); percebe-se uma sutil modificação no perfil de velocidade com o aumento do número de salto J , influenciando uma mudança das regiões rígidas do escoamento;

7.2 PERSPECTIVAS FUTURAS

Para o prosseguimento da pesquisa computacional em dinâmica de Fluidos não-Newtonianos, pode-se sugerir a realização de novos trabalhos analisando algumas correlações experimentais com as simulações aqui realizadas, por exemplo, utilizando a solução aquosa de Carbopol, proposta por Souza Mendes e Dutra, (2004). Além de novas simulações numéricas em condições tridimensionais, para o escoamento em torno do cilindro, com a finalidade de maximizar as investigações nas transições geométricas existentes, além de evoluir na análise comparativa entre resultados experimentais e numéricos. Avaliar e calcular o arrasto na superfície do cilindro, na presença de escoamentos com inércia. Outro ponto importante seria o de evoluir na análise da sensibilidade do modelo SMD quanto imposta condições advectivas mais intensas ao escoamento, de forma a analisar qual a relação entre áreas de maior e de menor tensão de cisalhamento e, por conseguinte as variações das regiões de escoamento do fluido. Evoluir na formulação numérica multi-campos, com a aproximação de Galerkin acoplado, tensões, pressões e velocidade ($\boldsymbol{\tau}$ - p - \mathbf{u}) para o escoamento na geometria proposta neste trabalho.

8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Astarita, G., Marrucci, G., 1974, "**Principles of non-Newtonian fluid mechanics**", McGraw-Hill, Great Britain.

Babuška, I., 1973. "The finite element method with lagrangian multipliers", **Numer. Math.**, vol. 20, pp. 179-192.

Bailey, W. J., Weir, I.S. 1998, "**Investigation of methods for direct rheological model parameter estimation**", Journal of Petroleum Science and Engineering, vol. 21, pp.1-13.

Billington, E.W., and Tate, A., 1981. "**The physics of deformation and flow**", McGraw-Hill Inc, USA.

Bird, R. B. Armstrong, R. C. Hassager, O., 1987, "**Dynamics of polymeric liquids**". v.1, John Wiley & Sons, U.S.A.

Bird, R.B.,Steward, W.E., Lightfoot, E.N., 1960, "**Transport Phenomena**". John Wiley & Sons, U.S.A

Brezzi, F., 1974. "On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrange multipliers", **RAIRO Ser. Rouge** 8, pp. 129-151.

Brooks, A.N., and Hughes, T.J.R., 1982. "Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convective dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations", **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, vol. 32, pp. 199-259.

Ciarlet, P.G., 1978. "**The finite element method for elliptic problems**", North-Holland, Amsterdam.

Crouzeix, M., and Raviart, P.A., 1973. "Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations", **RAIRO**, pp. 33-76.

Dahlquist, G., and Bjorck, A., 1969. "Numerical Methods", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA.

Ferguson, J., and Kemblowsky, Z.,1991. "**Applied Fluid Rheology**" Elsevier Applied Science, London.

Ferreira, V.G., Melo, O.D., 1999. "**Tópicos Teóricos e Computacionais em Escoamentos**". Notas do Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação. São Carlos,SP.

Franca, L.P., and Frey, S., 1992. "Stabilized finite element methods: II. The incompressible Navier-Stokes equations", **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, vol. 99, pp. 209-233.

Franca, L.P., and Hughes, T.J.R., 1988. "Two classes of mixed finite element methods", **Computater Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 69, pp. 89-129.

Franca, L.P., and Hughes, T.J.R., 1993. "Convergence Analyses Of Galerkin Least-Squares Methods For Symmetrical Advective Diffusive Forms Of The Stokes And Incompressible Navier-Stokes Equations". **Computater Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 2, pp. 285-298.

Franca, L.P., Frey, S., and Hughes, T.J.R., 1992. "Stabilized finite element methods: I. Application to the advective-diffusive model", **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, vol. 95, pp. 253-276.

Franceschini, F.S., and Frey, S., 2003b. "Galerkin least-squares approximations for generalized newtonian flows", Preprint submitted to **Journal of Fluids Engineering**, USA.

Franceschini, F. S.; Frey, S.L., 2005. "Finite Element Approximation for Single-Phase Multicomponent Flows". **Mechanics Research Communications**, v. 32, n. 1, p. 53-64.

Ghia, U., Ghia, K.N., and Shin, C.T., 1982. "Hi-Re solution for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and the multigrid method", **J. Comput Physics.**, vol. 48, pp. 387-411.

Harari, I., and Hughes, T.J.R., 1994. "Stabilized Finite-Element Methods For Steady Advection-Diffusion With Production", **Computater Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 115, pp. 165-191.

Hughes , T.J.R., 1978. "**The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis**", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA.

Hughes, T.J.R., and Brooks, A., 1982. "A theoretical framework for Petrov-Galerkin Methods with discontinuous weighting functions: application to the streamline-upwind procedure", **Finite Elements in Fluids**, vol. 4.

Hughes, T.J.R., Franca, L.P., Balestra, M., 1986. "A new finite element formulation for computational fluid dynamics: V. Circumventing the Babuška-Brezzi condition: A stable Petrov-Galerkin formulation of the Stokes problem accomodating equal-order interpolations", **Computater Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 59, pp. 85-99.

Hughes. T.J.R., and Shakib, F., 1988. "Computational aerodynamics and the finite element method", **AIAA 26th Aerospace Sciences Meeting**, USA.

Johnson, C., 1987. "**Numerical solution of partial differential equations by the finite element method**", Cambridge University Press, Cambridge.

Johnson, C., Nävert, U., and Pitkäranta, J., 1984. “Finite element methods for linear hyperbolic problem”, **Computater Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 45, pp. 285-312.

Jurjevic, R., 1999. “Modelling of two-dimensional laminar flow using finite element method”, **International Journal for Numerical ethods in Fluids**, vol. 31, pp. 601-626.

Liu, B.T. et al., 2002. “Convergence of a regularization method for creeping flow of a Bingham material about a rigid sphere”, **J. Non-Newtonian Fluid Mech.** vol. 102, pp. 179–191

Malkus, D.S., and Hughes, T.J.R., 1978. “Mixed finite element methods – reduced and selective integration techniques: a unification of concepts”, **Computater Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 15, pp. 63-81.

Mitsoulis E., and Matsoukas, A., (2005) “Free surface effects in squeeze flow of Bingham plastics”. **J. Non-Newtonian Fluid Mech**, vol. 129, pp.182–187.

Navarro, R.F., 1997 “**Fundamentos de Reologia de Polímeros**” Universidade de Caxias do Sul, Caxias do Sul.

Papanastasiou, T.C., 1987. “Flows of Materials with Yield”, **Journal of Rheology**, vol. 31, pp.385-404.

Panton, R.L., 1984. “**Incompressible Flow**”, second edition. Mechanical Engineering Department. University of Texas. Austin, USA.

Patankar, S.V, 1980. "**Numerical heat transfer and fluid flow**", McGraw-Hill, New York.

Piau, J.M., 1996. “Flow of a field stress fluid in a long domain. Application to flow on an inclined plane” **Journal Rheology**. vol.40, pp.711-723.

Polito, P.S.,2005. “**Oceanografia Dinâmica I**”. Instituto de Oceanografia da USP, São Paulo,SP.

Potanza, J.P.and Reddy, J.N., 2006. “Least-squares finite element formulations for viscous incompressible and compressible fluid flows” **Computer Methods in Applied Mechanics and engineering**, vol 195, pp.2454-2494.

Reddy, J.N., and Gartling, D.K., 1994. “**The finite element method in heat transfer and fluid dynamics**”, CRC Press Inc., USA.

Reis Junior, L.A., and Naccache, M.F., 2003. “Analysis of non-Newtonian flows trough contractions and expansions”, **In: XVII Congresso Brasileiro de Engenharia Mecanica**, São Paulo/SP. vol. 1.

Rektorys, K., 1975. “**Variational methods in mathematics, science and engineering**”, D Reidel Publishing Co.

Slattery, J.C., 1999. “**Advanced transport phenomena**”, Cambridge University Press, Cambridge.

Soares, M., Naccache, M. F., Souza Mendes, P.R., 1999. “Heat Transfer to viscoplastic materials flowing lamarily in teh entrance region of tubes” *International Journal of Heat and Fluid Flow*, vol 20, pp. 60-67.

Souza Mendes, P.R. et al., 2004. “Viscosity function for Yield-Stress Liquids”, *Applied Rheology*, vol. 14, -pp. 296 – 302.

Souza Mendes, P.R. et al., 2007. “Flow of viscoplastic liquids through axisymmetric expansions- contractions”, *J. Non-Newtonian Fluid Mech*, vol. 142, pp. 207–217.

Souza Mendes, P.R. et al., 2007. “Gas displacement of viscoplastic liquids in capillary tubes”, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, vol.145, pp.30-40.

Schwarz, A.P., 2007. “**Simulação de elementos finitos de escoamentos de um fluido SMD via Galerkin Mínimos Quadrados**”. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre.RS.

Taig, I.C., 1961. “Structural analysis by the matrix displacement method”, *English Electric Aviation Report*, vol. S017.

Zinani, F., Frey, S. L., 2006. ”Numerical Investigation of a Galerkin Least-Squares Multi-Field Formulation for Viscous Flows in an Axisymmetric Domain.” **In: Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering - ENCIT 2006**, Curitiba. Proceedings of ENCIT 2006. vol: Único.

Zisis and Mitsoulis, 2002. “Viscoplastic flow around a cylinder kept between parallel plates”, *J. Non-Newtonian Fluid Mech*, vol. 105, pp.1-20.