

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
FACULDADE DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA

MATHEUS COSTA MONTEIRO LOPES

ANÁLISE DA EFICIÊNCIA DO GASTO PÚBLICO EM EDUCAÇÃO PARA  
OS MUNICÍPIOS BRASILEIROS

Porto Alegre  
2016

**MATHEUS COSTA MONTEIRO LOPES**

**ANÁLISE DA EFICIÊNCIA DO GASTO PÚBLICO EM EDUCAÇÃO PARA  
OS MUNICÍPIOS BRASILEIROS**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Economia da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Economia, com ênfase em Economia Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Flávio A. Ziegelmann  
Co-Orientador: Prof. Dr. Hudson da Silva  
Torrent

**Porto Alegre  
2016**

## CIP - Catalogação na Publicação

Lopes, Matheus  
Análise da eficiência do gasto público em educação  
para os municípios brasileiros / Matheus Lopes. --  
2016.  
45 f.

Orientador: Flávio Ziegelmann.  
Coorientador: Hudson Torrent.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal do  
Rio Grande do Sul, Faculdade de Ciências Econômicas,  
Programa de Pós-Graduação em Economia, Porto Alegre,  
BR-RS, 2016.

1. Economia do Setor Público. 2. Econometria. 3.  
Eficiência do Gasto Público. 4. Economia da Educação  
. I. Ziegelmann, Flávio, orient. II. Torrent,  
Hudson, coorient. III. Título.

**MATHEUS COSTA MONTEIRO LOPES**

**ANÁLISE DA EFICIÊNCIA DO GASTO PÚBLICO EM EDUCAÇÃO PARA  
OS MUNICÍPIOS BRASILEIROS**

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Economia da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Economia, com ênfase em Economia Aplicada.

**Aprovada em Porto Alegre, 8 de abril de 2016**

**Banca Examinadora**

---

Prof. Dr. Flávio Augusto Ziegelmann - Orientador  
Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS

---

Prof. Dr. Paulo de Andrade Jacinto  
Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul – PUCRS.

---

Prof. Dr. Flávio Vasconcellos Comim  
Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS

---

Prof. Dr. Sabino da Silva Porto Junior  
Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS

# AGRADECIMENTOS

Agradeço:

Aos professores e, em especial, aos orientadores;

À minha família;

Aos amigos;

Aos softwares livres R e LaTeX;

À Capes, pelo apoio financeiro.

## RESUMO

Este artigo analisa a eficiência do gasto público em educação nos municípios brasileiros para o ano de 2011. Utilizaram-se os resultados da Prova Brasil para as disciplinas de matemática e língua portuguesa como medida de produto e foi feita a construção de uma fronteira de eficiência através dos métodos DEA e FDH. Os resultados mostram que a distribuição da eficiência não é uniforme, sendo as regiões Norte e Nordeste menos eficientes que as demais, notadamente em relação ao Sul e ao Sudeste. Na análise dos determinantes da eficiência, os resultados indicam que número de professores com ensino superior e IDHM contribuem positivamente para maior eficiência, ao passo que o abandono escolar e a distorção idade-série impactam negativamente. Via regressão quantílica, evidencia-se que o efeito dessas variáveis é distinto em função dos quantis da distribuição da eficiência. Interpretações adicionais dos resultados são obtidos através do método de fronteira Order- $\alpha$ . O estudo sugere que, a partir de um determinado nível, não há evidência de que maior gasto público implique aumento da aprendizagem. Uma melhor aplicação dos recursos pode elevar a nota das provas sem aumento de gasto público.

**Palavras-chave:** Gasto público. Eficiência. DEA. Order- $\alpha$ . Resultados educacionais.

## ABSTRACT

This paper analyzes the efficiency of public spending on education in Brazilian municipalities for the year 2011. The results of the Prova Brazil for math and portuguese language were used as product measure and the construction of an efficient frontier was made through DEA and FDH methods. The results show that the distribution of efficiency is not uniform. The North and Northeast regions are more inefficient than others, especially with respect to South and Southeast. In the analysis of the determinants of efficiency, the results indicate that the number of teachers with higher education and IDHM contribute positively to greater efficiency, while school dropouts and age/grade distortion impact negatively. By quantile regression, it is evident that the effect of these variables is different depending on the quantile distribution efficiency. Additional interpretations of the results are obtained through the partial frontier approaches, with Order- $\alpha$  method. This study suggests that, from a certain level, there is no evidence that higher levels of public spending implies increased learning. A better use of resources can raise the test scores without increasing public spending.

**Keywords:** Expenditure on education. Efficiency. DEA. Order- $\alpha$ . Educational outcomes.

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>ESTRATÉGIA EMPÍRICA E METODOLOGIA</b>	<b>10</b>
2.1	Estimadores DEA, FDH e Order- $\alpha$ . . . . .	12
2.2	Método Tobit . . . . .	16
2.3	Regressão Quantílica . . . . .	17
2.4	Fonte de dados . . . . .	18
<b>3</b>	<b>ANÁLISE DEA, FDH e ORDER-<math>\alpha</math> DA EFICIÊNCIA DO GASTO PÚBLICO EM EDUCAÇÃO</b>	<b>20</b>
<b>4</b>	<b>DETERMINANTES DA EFICIÊNCIA</b>	<b>30</b>
<b>5</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>36</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>37</b>
	<b>APÊNDICE A - MAPAS E TABELA DOS ESTADOS E REGIÕES</b>	<b>40</b>

# 1 INTRODUÇÃO

A discussão sobre a importância da intervenção do Estado na economia é ampla. De um lado, estudos indicam uma elevação da produtividade do setor privado e do crescimento econômico a curto prazo como consequências do gasto público. Entretanto, a expansão do gasto público também gera custos que prejudicam o crescimento a longo prazo do país; de forma que são muitos os efeitos negativos de um Estado que combina tamanho grande e ineficiência. Diante da impossibilidade de manter o ritmo acelerado de crescimento da carga tributária confrontada à necessidade de execução dos gastos essenciais ao país, uma possível alternativa seria a melhoria da qualidade do gasto público e o alcance de maior eficiência. Nesse contexto, a demanda por uma administração pública de qualidade é cada vez maior por parte da sociedade, a fim de ocorrer um menor desperdício de recursos públicos.

De forma mais específica, este artigo analisa essa abordagem da qualidade do gasto público para a área de educação, diante das contribuições que esta área implica para o desenvolvimento socioeconômico brasileiro. Segundo Silva e Almeida (2012), diversos estudos do Banco Mundial e da Organização para a Educação, a Ciência e a Cultura das Nações Unidas (UNESCO) revelam que nenhum país conseguiu um desenvolvimento sustentável sem investir substancialmente em educação e saúde. A educação induz maior expectativa de vida, redução da criminalidade e envolvimento na vida comunitária. Os gastos nessa área atingem desde retornos em termos de prosperidade individual, como maiores salários e estabilidade no emprego, ao melhor desempenho da economia nacional, por meio do aumento da produtividade e do capital humano, como argumenta Almeida e Gasparini (2011). Ainda, Lopes e Toyoshima(2013) citam que tanto os modelos de crescimento clássicos como os endógenos apontam que as regiões que investem adequadamente em educação e saúde tendem a apresentar expansão da atividade econômica mais acelerada do que as outras, através do aumento da produtividade dos fatores. Uma educação de qualidade também é uma política que permite acesso da população menos privilegiada a condições de sair da pobreza.

Para Zoghbi (2011), a intervenção pública na provisão de educação é justificada, constatando que alto percentual da população não tem os recursos necessários para esse investimento e pelo fato de que não temos um sistema de crédito capaz de viabilizá-lo. No Brasil, duas grandes políticas educacionais podem ser descritas pelo FUNDEF e o FUNDEB. O primeiro, Fundo de Manutenção e Desenvolvimento do Ensino Fundamental e de Valorização do Magistério, foi criado em 1996 e se originou da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Lei nº 9.394/1996), que representou uma grande evolução para o sistema de ensino fundamental brasileiro e visava a alcançar a universalização do ensino e uma política de valorização dos professores.

Posteriormente, foi criado o Fundo de Manutenção e Desenvolvimento da Educação Básica e de Valorização dos Profissionais da Educação (FUNDEB), que se estende até 2020, e inclui financiamentos para o ensino médio e educação infantil. Quando analisamos o gasto público municipal por função, os maiores gastos se

destinam às áreas de educação, saúde, administração e urbanismo <sup>1</sup>. Ainda, a educação lidera esse ranking, correspondendo a 1,87% do PIB em 2011, o que corrobora a abordagem deste estudo, voltada para essa área.

Observa-se um maior esforço do governo em termos de gastos em educação nos últimos anos. Houve também uma evolução dos indicadores educacionais, tais como um menor índice de evasão escolar, melhoria da escolaridade média da população; o acesso à educação básica para crianças e jovens de 4 a 17 anos evoluiu de 89,5% em 2005 para 93,6% em 2014; segundo relatório do Movimento Todos pela Educação, que utiliza dados do IBGE; refletindo o objetivo de atingir a universalização do ensino fundamental. Além disso, os avanços, de acordo com a pesquisa, foram maiores em estratos sociais historicamente mais vulneráveis, pobres e negros, o que reflete também um caráter de equidade promovido pela educação.

Entretanto, quando utilizamos avaliações internacionais, o país apresenta um desempenho bem abaixo do esperado. Os resultados do PISA (*Programme for International Student Assessment*) mostram que o Brasil apresenta um resultado bem abaixo da média dos países da OCDE (*Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico*), e, mesmo quando comparado a países de renda per capita e gasto por aluno relativamente semelhante, como o México, apresenta resultados insatisfatórios, indicando um baixo retorno dos gastos em educação. Ainda, o país está atrás de países como Coreia do Sul, Hong Kong, Cingapura, Tailândia, Chile, Uruguai e Colômbia. De acordo com o relatório do PISA 2012, o Brasil ocupa as posições 58º, 55º, e 59º em matemática, leitura e ciências, respectivamente; de um total de 65 países. Além disso, outros estudos apontam para o fato de que os resultados das avaliações dos alunos não acompanharam o aumento de gastos proporcionalmente, questionando a qualidade da educação brasileira.

Esse debate entre gestores e especialistas em educação confronta de um lado a necessidade por aumento de recursos públicos, e de outro a ineficiência na aplicação desses recursos. Assim, é preciso verificar o porquê de, uma vez que houve aumento no gasto em educação, os resultados obtidos não cresceram na mesma proporção. Dessa forma, a ideia básica que motiva um estudo de mensuração da eficiência do gasto público consiste em verificar qual poderia ser o aumento de desempenho obtido a partir de um mesmo nível de gasto público, se esses recursos fossem utilizados de forma mais eficiente.

Este estudo foi realizado para 3230 municípios brasileiros, exceto os municípios nos quais não havia dados. As justificativas para o foco nessa esfera governamental são várias. Nas últimas décadas, houve no Brasil um processo de municipalização e descentralização fiscal. Um outro fator relevante para escolha desse ente governamental é o crescimento do investimento municipal em relação às outras esferas de governo de forma a superar os investimentos estadual e federal por volume de recursos, o que explicita a necessidade de avaliação da aplicação dos recursos desse ente governamental.

A Constituição atribui aos municípios responsabilidade pela educação básica, de forma que este estudo analisa a eficiência do gasto público municipal em educação para os municípios brasileiros, utilizando do Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb) e de outros indicadores educacionais disponibilizados pelo

---

<sup>1</sup>ver miranda (2006)

INEP nos últimos anos. Este trabalho contém, inicialmente, a construção de fronteiras de eficiência pelos métodos DEA e FDH, seguida de uma análise dos determinantes dessa eficiência, em que é utilizado o modelo de regressão censurada Tobit e, para uma análise mais completa, este estudo traz como contribuição uma aplicação do método de Regressão Quantílica na eficiência dos municípios. Esse método corresponde a uma análise em que são feitas várias curvas de regressão para cada ponto percentual na distribuição da eficiência. Ou seja, é possível dessa forma analisar as diferenças no efeito das variáveis explicativas sobre o nível de eficiência das unidades.

O avanço da computação possibilitou a disseminação de técnicas de regressão mais robustas, mais insensíveis a pequenos desvios das suposições básicas dos modelos. A regressão quantílica faz parte dessa classe de métodos mais robustos de estimação e sua eficácia pode ser notada nos casos em que os erros não têm distribuição normal ou quando a variável dependente apresenta valores extremos, Maciel, Campêlo, e Raposo (2001). O método aplicado por Buchinsky (1996, 1998), para analisar as mudanças na estrutura de salários nos Estados Unidos, em particular os retornos em educação, é amplamente utilizado na literatura nacional e internacional.

Com a utilização dos modelos não-paramétricos para mensuração da eficiência recentes tem sugerido também outra abordagem, a chamada *partial frontier approaches*, denominada eficiência order-m, Cazals et al. (2002) e order- $\alpha$ , Aragon, Daouia ; Thomas-Agnan (2005). Este estudo inclui a implementação dessa metodologia, que traz algumas novidades para os estudos de mensuração da eficiência e constitui uma contribuição à literatura nacional, uma vez que a metodologia é recente, porém vem sendo utilizada na literatura internacional, devido à qualidade e à robustez do método.

Este estudo é composto, em seguida, por uma seção de estratégia empírica e metodologia, que apresenta uma breve revisão de literatura acerca da eficiência e irá detalhar a formulação dos métodos utilizados (metodologia) referente a cada um dos modelos, o que se constitui em 3 subseções. A estratégia deste estudo consiste em, inicialmente, construir fronteiras de eficiência através dos métodos DEA, FDH e também para o modelo Order- $\alpha$ . Dessa forma, será atribuído o escore de eficiência para cada unidade avaliada, que, nesse caso, são os municípios brasileiros. As informações dadas pelos diversos escores de eficiência serão traduzidas através de uma análise descritiva que permite classificar as unidades e apresentar a distribuição espacial da eficiência no território brasileiro. Em seguida, será apresentada uma análise dos determinantes da eficiência, que consiste em utilizar variáveis educacionais e do ambiente social do município, e relacioná-las à eficiência através do modelo Tobit. Uma análise completa da distribuição da eficiência é feita para os pontos da distribuição da eficiência, utilizando o método de Regressão Quantílica, que permite ver a evolução dos coeficientes dessas variáveis utilizadas, ao longo de cada percentil, em uma análise mais completa. Por fim, algumas considerações finais e referências.

## 2 ESTRATÉGIA EMPÍRICA E METODOLOGIA

Afonso, Schuknecht e Tanzi (2006) indicam que o crescente interesse pelo tema da eficiência do gasto público foi motivado não apenas pelas restrições de política macroeconômica, que em geral consideram um escopo limitado para o aumento das despesas públicas, como também pela qualidade da política fiscal, que se tornou uma exigência na medida em que surgiram leis com a imposição de maior controle e transparência ao setor público. A criação da lei de responsabilidade fiscal (lei nº 101/2000) se enquadra nesse contexto, e outro fator relevante foi a inclusão do princípio da eficiência na administração pública brasileira por meio da Emenda Constitucional 19/98.

Nesse contexto, a discussão acerca de eficiência, eficácia, efetividade passou a ser central para a administração pública. Em relação ao gasto público com educação, uma literatura que abordasse a eficiência passou a ser fundamental para servir de base a políticas públicas que tenham o objetivo de aumentar o desempenho alcançado nesse setor. Nesse sentido, Godoy (2014) realiza um trabalho analisando a eficiência nos municípios brasileiros, para as áreas de educação e saúde. O trabalho utilizou a metodologia de Análise Envoltória de Dados (DEA) e também uma análise de cluster para agrupar os municípios com características mais similares. O artigo de Faria, Jannuzzi e Silva (2008) também analisou a eficiência dessas áreas no Estado do Rio de Janeiro, no período 1999/2000. Delgado e Machado (2007), também utilizando o DEA, construíram a fronteira de eficiência para escolas públicas estaduais de Minas Gerais no ensino fundamental e médio.

No Brasil, o Saeb - Sistema de Avaliação do Ensino Básico, realizado pelo ministério da educação, permite a prática de um sistema de avaliação consistente. A Prova Brasil é um dos seus componentes e avalia os alunos em matemática e língua portuguesa; sendo uma importante ferramenta de medida do aprendizado educacional. Utilizando esse sistema de avaliação, Almeida e Gasparini (2011) propõem um índice de eficiência e qualidade dos gastos públicos em educação para os municípios do Estado da Paraíba. Para tanto, usam o método DEA; e os resultados indicam que municípios menores estão em pior situação e os grandes centros do Estado influenciam positivamente a performance dos municípios vizinhos. Menezes-Filho e Amaral (2009) verificaram se os gastos com educação aumenta o aprendizado dos alunos das 4<sup>a</sup> e 8<sup>a</sup> séries do ensino fundamental, e, neste estudo foram feitos controles pela escolaridade média da população do município, número de horas-aula, proporção de docentes com nível superior e pelas *dummies* de cada UF.

Zoghbi (2011) avaliou a eficiência dos municípios paulistas relacionada aos gastos em educação fundamental em 2005. Foram utilizados como insumos o gasto público no ensino fundamental por aluno e outros indicadores educacionais e como produto resultados da prova Brasil, dentre outros. Buscou-se, ainda, relacionar os escores de eficiência com o PIB *per capita*, o tamanho da população e o partido político no poder nos municípios. Miranda (2006) realiza um estudo para os municípios brasileiros, analisando a eficiência nas áreas de educação, saúde, habitação e urbanismo, e Ribeiro (2008) avaliou a eficiência do gasto público no Brasil, comparando um conjunto de países da América Latina no período de 1998 e 2002. As áreas selecionadas

para a análise do desempenho foram: saúde, educação, desempenho econômico e equidade. Worthington (2001) faz uma boa revisão de literatura da aplicação de fronteiras de eficiência na educação. Ainda, Portela e Thanassoulis (2001) utiliza a análise envoltória de dados para eficiência na educação.

Existe grande dificuldade na mensuração da eficiência em instituições públicas, uma vez que os dados de despesa muitas vezes carecem de confiabilidade. Por outro lado, é importante citar o avanço das metodologias para a análise de eficiência. Em geral, elas são distintas. A primeira representa os métodos não paramétricos, o que consiste em usar um conjunto de *inputs*, e de *outputs* para a construção de uma fronteira para o conjunto de possibilidades de produção. A segunda é a das fronteiras paramétricas estocásticas, em que uma função de produção é previamente estabelecida, com a especificação de um erro estocástico com distribuição bastante específica. Neste artigo é utilizada a primeira abordagem, visto que não há erros de medida ou outliers na medida de produto considerada.

A partir dos anos 50, técnicas não paramétricas vêm sendo utilizadas no tema da eficiência. Charnes, Cooper e Edward Rhodes (1978) generalizaram os estudos de Farrell (1957), o que originou a técnica de Análise Envoltória de Dados. A nomenclatura *envelopment* decorre do fato de a fronteira representar a forma de um “envelope” que contém todas as combinações de insumo e produto. DEA e FDH fazem parte do que é conhecido na literatura como fronteira determinística, em contraposição à fronteira estocástica. Ou seja, pressupõe-se que todas as combinações de insumo e produto observadas estão abaixo da fronteira. Entretanto, o modelo adotava a suposição de retornos constantes de escala. Posteriormente, Banker, Charnes e Cooper (1984), contribuíram com o modelo para especificar o caso de rendimentos variáveis de escala.

A literatura tem utilizado da aplicação dessas técnicas não paramétricas, como o Free Disposal Hull (FDH) e o DEA. A metodologia consiste em medir a eficiência comparada das unidades de decisão avaliadas (decision making units - DMU). O cálculo da eficiência é feito comparando a melhor relação de insumos/produtos entre as unidades observadas. A eficiência seria então a razão entre a soma ponderada dos outputs pela soma ponderada dos inputs utilizados. Como é um método não paramétrico, não realiza estimações de coeficientes. Em um segundo momento da análise, por meio do uso de modelos Tobit, variáveis não discricionárias ou exógenas podem ser usadas para explicar em parte o grau de ineficiência detectado no primeiro passo, Afonso (2006). A metodologia DEA apresenta a vantagem de ser invariante com a escala de medida, os dados não necessitam de normalização. É um método flexível e não impõe padrões às unidades avaliadas.

Alternativamente, a chamada *partial frontier approaches* é uma abordagem recente, presente na literatura internacional, onde a fronteira envolve apenas um subconjunto da amostra. Dessa forma, esse método tem a vantagem de permitir que as unidades mais eficientes fiquem localizadas além da fronteira eficiente e, assim, que sejam menos vulneráveis a *outliers*, blindagem que não é possível no DEA e FDH, uma vez que eles envelopam todos os dados. Essa é uma vantagem interessante do método, uma vez que as observações atípicas podem representar as melhores ou piores práticas, conforme argumenta Witte e Marques (2010), que sugere um procedimento de detecção de *outliers* em um modelo aplicado ao setor de água potável Português

e utiliza do método não paramétrico order-m, Cazals et al. (2002). Com o objetivo de aplicar alguns dos métodos mais recentemente desenvolvidos na literatura de análise de eficiência para estimar as medidas de desempenho escolar em um contexto internacional, Cordero, Santín e Simancas (2015) também utilizam da *partial frontier approaches*, a fim de evitar alguns dos principais inconvenientes dos métodos não paramétricos.

Silva, Martins-filho e Ribeiro (2016) comparam seis estimadores não paramétricos para avaliar a eficiência do sector bancário no Brasil, utilizando de uma amostra de 184 bancos brasileiros. Os resultados indicam que pode haver grande diferença nos escores de eficiência estimados. Os estimadores Order-m and Order- $\alpha$  provaram ser ferramentas úteis na identificação de valores extremos e ser bastante robustos em relação ao DEA e FDH. Mugerá (2014) aplica essa técnica de fronteiras parciais robustas order-m, com a justificativa de robustez do modelo a *outliers*, para estimar os escores de eficiência técnica pela orientação dos insumos em 256 fazendas no Kansas. Ainda, é importante o conhecimento de que, embora os métodos order-m e order- $\alpha$  usem de abordagens diferentes para a construção da fronteira, eles geram resultados similares, conforme Hardeman e Roy (2013). A utilização desse método no presente artigo, permite, além de uma forma de contestar ou corroborar o DEA e FDH, encontrar novas evidências.

## 2.1 Estimadores DEA, FDH e Order- $\alpha$

O DEA é um método de programação matemática para estimação de uma fronteira de eficiência de diferentes unidades avaliadas. O modelo que aqui será representado segue a notação e abordagem utilizada por Bogetoft e Otto (2010). Primeiro, definem-se os insumos (inputs) usados pela unidade  $k = 1, \dots, K$ , como  $x^k = (x_1^k, \dots, x_m^k) \in \mathbb{R}_+^m$  e os produtos (outputs) por  $y^k = (y_1^k, \dots, y_n^k) \in \mathbb{R}_+^n$ . O conjunto de possibilidades de produção, seguindo a teoria microeconômica da produção, é definido por:

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^n \mid x \text{ produz } y\} \quad (1)$$

No DEA, a estimação da tecnologia  $T$  é construída de acordo com o *minimal extrapolation principle*, onde  $T^*$  é o menor subconjunto de  $\mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^n$  que contém  $(x^k, y^k)$ ,  $k = 1, \dots, K$  e satisfazendo os supostos de convexidade e *Free disposability*.

As abordagens do DEA podem diferir quanto às suposições acerca da tecnologia  $T$ . Os principais supostos são:

- *A1 Free disposability* : Pode-se produzir menos com mais, ou seja, podemos livremente descartar os insumos desnecessários e produtos indesejáveis  $(x, y) \in T, x' \geq x, ey' \leq y \rightarrow (x', y') \in T$
- *A2 Convexidade*: Qualquer soma ponderada de planos de produção factíveis é também factível.  $(x, y) \in T, \alpha \in [0, 1] \rightarrow \alpha(x, y) + (1 - \alpha)(x', y') \in T$
- *A3  $\gamma$  retornos de escala*.  $(x, y) \in T, k \in \Gamma(\gamma) \rightarrow k.(x, y) \in T$

- A4 Aditividade, replicabilidade. A soma de quaisquer dois planos de produção factíveis é também factível:  $(x, y) \in T(x', y') \in T \rightarrow (x + x', y + y') \in T$

Assim, as distintas aplicações do método DEA se dão em função dos diferentes supostos. Basicamente, os modelos clássicos são 6: os que utilizam retornos constantes de escala, os que utilizam retornos crescentes, decrescentes e variáveis de escala. E os modelos que seguem a *free disposability hull* e em outros a *free replicability hull*.

A tecnologia com os modelos distintos é representada abaixo, em que  $\Lambda$  varia de acordo com o modelo utilizado.

$$T^* = \{(x, y) \in \mathfrak{R}_+^m \times \mathfrak{R}_+^n \mid \exists \lambda \in \Lambda^K(\lambda) : x \geq \sum_{k=1}^k \lambda^k x^k, y \leq \sum_{k=1}^K \lambda^k y^K\} \quad (2)$$

A orientação do problema por insumos analisa quanto de cada insumo pode ser proporcionalmente reduzido sem que os produtos/resultados sejam alterados. Alternativamente, a orientação pelo produto calcula quanto dos produtos/resultados podem ser proporcionalmente aumentados sem variar a quantidade de insumos. Pela orientação do produto, definindo:

$$F^0 = F((x^0, y^0); T^*) = \max F \in \mathfrak{R}_+ \mid (x^0, Fy^0) \in T^* \quad (3)$$

Inserindo a formulação da tecnologia  $T^*$ , o problema de programação linear é dado por:

$$\max_{F, \lambda^1, \dots, \lambda^K} F \quad (4)$$

$$s.t. Ex^0 \geq \sum_{j=1}^k \lambda^k x^k, \quad (5)$$

$$y^0 \leq \sum_{j=1}^K \lambda^k y^K \quad (6)$$

$$\lambda \in \Lambda^K(\gamma). \quad (7)$$

Vale ressaltar que uma unidade que se enquadrar como tecnicamente ineficiente sob a orientação por insumo também será ineficiente na orientação pelo produto. Este estudo utiliza a orientação pelo produto, já que a própria vinculação dos gastos em educação e definição de seu valor mínimo por lei provoca uma rigidez deles. O mais viável, portanto, seria obter o máximo de retorno de um mesmo nível de gasto público. No FDH, a eficiência também é estimada comparando as unidades de decisão (DMU),  $k = (1, \dots, K)$  pela orientação por produtos ou dos insumos e, assim como o DEA, é um modelo não paramétrico. O par de DMUs que apresenta o consumo mínimo de insumos dentre o total é então referência para  $i$  e o parâmetro

$\hat{\theta}_i^{FDH}$  é representado pela seguinte formulação matemática:

$$\hat{\theta}_i^{FDH} = \min_{j \in B_i} \{ \max_{k=1, \dots, K} \{ \frac{x_{kj}}{x_{ki}} \} \} \quad (8)$$

O FDH é altamente sensível a *outliers* e erros de medida. Diferentemente do DEA e FDH, na *partial frontier approaches*, o parâmetro de eficiência pode ser maior que uma unidade e a fronteira não envelopa todas as unidades, sendo imune a essas distorções. Para formulação do modelo, é importante entender o modelo de fronteira parcial *Order-m*, que generaliza o FDH. Em vez de se determinar a eficiência comparando toda a amostra, o modelo sugere comparar dentro de uma amostra de tamanho  $m$ . A natureza determinista de modelos de fronteira não paramétricos pode ser moderado, limitando o número de parceiros de referência potenciais que constituem a fronteira. Seguindo Daraio and Simar (2007), a implementação segue as seguintes etapas:

1. Da amostra inicial, é obtida uma amostra de tamanho  $m$  através de um sorteio sem reposição.
2. É calculada a eficiência FDH, isto é,  $\hat{\theta}_k^{FDH}$  utilizando esta nova amostra de referência.
3. A etapa 2 é repedita um número de  $D$  vezes.
4. A eficiência order- $m$  é calculada através da média da pseudoeficiência FDH encontrada:

$$\hat{\theta}_m^{OM_i} = \frac{1}{D} \sum_{d=1}^D \hat{\theta}_{m_i}^{FDH_d} \quad (9)$$

Ou seja, o processo de geração do estimador order- $m$  é repetido um número de  $D$  vezes e, no fim, é computada uma média simples desses estimadores. O *order-m* permite que as unidades tenham valor superior a uma unidade, ou seja, consideradas super eficientes e fiquem localizadas além da fronteira de produção eficiente. Essa é a diferença chave em relação ao FDH, que, portanto, representa um caso especial do *order-m* em que a amostra  $m$  passa a ser a amostra total inicial. Note que, para o cálculo da eficiência, é necessário determinar o valor  $D$  e o valor  $m$ . Quanto menor for o valor de  $m$ , espera-se maior proporção de unidades super eficientes no resultados do modelo. Observações discrepantes distorcem os escores de eficiência relativa das unidades. Essas observações implicam redução do valor informativo dos escores de eficiência e, por outro lado, poderiam indicar as melhores práticas bem como as observações eficientes. Esse papel ambíguo dos *outliers* indica a importância de detectá-los, permitindo um olhar mais atento sobre essas unidades, como indica Witte e Marques (2010). O modelo de fronteira parcial tem a vantagem de dar o benefício da dúvida a observações atípicas.

Outro modelo de fronteira parcial é o *order- $\alpha$* , desenvolvido por Aragon, Daouia e Thomas-Agnan (2005). Esse modelo partilha da maioria das propriedades do modelo *order-m* e de seu estimador, conforme mostrado pelos autores. Segue-se a mesma lógica, deixando de fora as observações extremas para definir a fronteira de

produção. Nesse caso também ocorre a generalização do FDH, entretanto, de uma outra forma. Em vez de se utilizar um certo número de municípios  $m$  que irão servir como referência, o modelo Order- $\alpha$  utiliza um percentual predeterminado de DMU's. Ele atua como uma subamostra em vez de utilizar toda a amostra, que é o caso do DEA. Em vez de se utilizar o consumo mínimo de insumos entre os pares disponíveis como referência, o modelo *order- $\alpha$*  propõe utilizar o  $(100 - \alpha)th$  percentil. Essa alternativa é baseada nos quantis condicionais da  $F(y/x)$ . A fronteira de produção pode ser escrita por

$$y^\delta(x) = q_1(x) = \sup\{y \geq 0 : F(y/x) < 1\} \quad (10)$$

Onde  $y^\delta$  corresponde ao nível de produto no limite da tecnologia dados o insumo  $x_i$  e  $q_1(x)$  denota o quantil de ordem 1 para  $F(y/x)$ . Isso sugere a definição da função de produção de ordem  $\alpha \in [0, 1]$  como

$$q_\alpha(x) = y_\alpha^\delta(x) = \sup\{y \geq 0 : F(y/x) < \alpha\} \quad (11)$$

Pela definição de quantil, é possível verificar que  $q_\alpha(x) < q_1(x) \forall \alpha \in (0, 1)$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} q_\alpha(x) = q_1(x) \quad (12)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} \theta_\alpha(x, y) = \theta(x, y). \quad (13)$$

A implementação do quantil  $\alpha$  é direta. Primeiro, seja  $N_x = \sum_{i=1}^n I(x_i \leq x)$  o número de observações para as quais  $x_i \leq x$  e a ordem dos produtos nesta amostra  $y_{i1} \leq \dots \leq y_{iN_x}$ . Então,  $\forall \alpha$

$$\hat{q}_\alpha(x) = \begin{cases} y_{i\alpha N_x}, & \text{se } x \notin N \\ y_{i\alpha N_{x+1}}, & \text{se } x \notin N \end{cases} \quad (14)$$

onde  $N$  representa os números naturais. Aragon, Daouia & Thomas-Agnan (2005) mostraram que  $\hat{q}_\alpha(x)$  é um estimador consistente para  $q_\alpha(x)$  e que  $\sqrt{n}(\hat{q}_\alpha(x) - q_\alpha(x))$  é assintoticamente normal, (ver Silva, Martins-filho, e Ribeiro (2016)). O estimador order- $\alpha$  pode ser escrito por:

$$\hat{\theta}_{\alpha_i}^{OA} = P_{(100-\alpha)j \in B_i} \left\{ \max_{k=1, \dots, K} \frac{x_{kj}}{x_{kl}} \right\} \quad (15)$$

Sendo que para valor de  $\alpha = 100$ , o *order- $\alpha$*  coincide com o FDH. Com o valor de  $\alpha \leq 100$  algumas unidades serão consideradas super eficientes e, dessa forma, nem todas serão envelopadas pela fronteira de produção  $\alpha$ . Assim como o parâmetro  $m$  no modelo Order- $m$ ,  $\alpha$  pode ser visto como o parâmetro que determina a quantidade de unidades super eficientes, entretanto o processo não utiliza reamostragem e é de

mais rápida implementação computacional.

## 2.2 Método Tobit

Nos modelos DEA e FDH, os escores de eficiência têm o valor máximo igual a 1, e representa uma análise comparada das unidades. As unidades mais eficientes alcançam o valor 1 e conseqüentemente a variável dependente em um modelo para explicar a eficiência é limitado no valor 1. Utilizou-se do método de regressão censurada Tobit, para esse caso em que a variável dependente é censurada acima ou abaixo de um valor limite, nesse caso o intervalo  $[0,1]$ . Segundo Wooldridge (2006), no caso em que a variável dependente é limitada, o método de regressão que utiliza a técnica dos mínimos quadrados ordinários não é adequado. O Tobit seria o mais apropriado para essa situação. Segundo Souza (2006), uma vantagem adicional dos modelos censurados é que eles podem ser utilizados no ajuste das próprias medidas de eficiência em qualquer contexto em que elas estão definidas, desde que se tenham razões para acreditar que as firmas tomem suas decisões de produção independentemente. Nessas condições, acredita-se que as correlações observadas entre as medidas de eficiência não serão fortes o suficiente para invalidar a análise.

A formulação do modelo apresenta:

$$Y_i = X\beta + \varepsilon \quad (16)$$

Onde  $Y_i^*$  é a eficiência em escores;  $X_i^*$  o vetor das variáveis explicativas; e  $\beta$  o vetor dos parâmetros a serem estimados. Há a suposição de que os erros sejam normalmente distribuídos com média zero e variância  $\sigma^2$ . Considerando o limite da eficiência o valor 1, as variáveis ( $Y_i$ ) são definidas como:

$$\begin{cases} Sey_i^* < y_c; entoy_i = y_i^* \\ Sey_i^* \geq y_c; entoy_i = y_i^c \end{cases} \quad (17)$$

A estimativa dos parâmetros no modelo Tobit são, em geral, obtidas pelo método de máxima verossimilhança, o qual garante consistência e estimadores assintoticamente eficientes para os parâmetros e variância, conforme em Greene (2003). A formulação da função Log-verossimilhança do modelo Tobit, unindo as con-

tribuições das observações censuradas e não censuradas para se obter o vetor de parâmetros  $\beta$  e para  $\sigma$  da regressão, pode ser representada pela seguinte equação, Vasconcellos and Alves (2000):

$$L(\beta, \sigma) = \sum_{y=y_i^c} \log \left[ 1 - \Phi\left(\frac{y_i^c - X_i\beta}{\sigma}\right) \right] + \sum_{y_i < y_i^c} \log \left[ \frac{1}{\sigma} \varphi - \Phi\left(\frac{y_i - X_i\beta}{\sigma}\right) \right] \quad (18)$$

### 2.3 Regressão Quantílica

O método de mínimos quadrados é amplamente conhecido e utilizado para estimação de regressões. Esse método promove a minimização dos quadrados dos erros da regressão, em uma análise de regressão na média, que se apresenta adequada desde que os erros apresentem distribuição normal. Alternativamente, outro método de minimização que utiliza os erros absolutos ponderados havia sido desenvolvido e originou o modelo de regressão quantílica. Porém, esse método não era de fácil implementação, motivo pelo qual não foi amplamente aceito inicialmente. A minimização da soma dos erros absolutos ponderados, o chamado LAD (*Least Absolute Deviations*), implica uma maior complexidade computacional na solução de problemas, com a necessidade de um número de maior de operações.<sup>2</sup> <sup>3</sup>.

O modelo de regressão quantílica computa várias regressões associadas aos pontos percentuais da distribuição da variável em questão, permitindo uma análise mais completa, apresentada neste estudo. Além disso, esse método se apresenta como uma estimação mais robusta à presença de *outliers*, sendo uma vantagem em relação à estimação por mínimos quadrados. Define-se o quantil de ordem  $\tau$  de uma população como o valor  $m$  de forma que 100m% dos valores populacionais são inferiores a esse valor; com  $0 < \tau < 1$ . A intuição básica desse modelo é estimar o  $\tau$ -ésimo quantil de eficiência condicional sobre as variáveis explicativas. A definição pode ser feita a partir da função de distribuição acumulada:

$$F(x) = P(X \leq x). \quad (19)$$

onde sua inversa em  $\tau$  é representada por:

<sup>2</sup>Vale mencionar que essa complexidade que foi minimizada após a criação de algoritmos de programação linear

<sup>3</sup> Para maiores detalhes, esta formulação do modelo se baseou em Buchinsky (1998) e Santos(2012). A estimação segue como referência o pacote `quantreg` no software `r`

$$F^{-1}(\tau) = \inf\{x : F(x) \geq \tau\} \quad (20)$$

No caso da variável dependente  $Y$ , em que  $Y = X\beta_i + \varepsilon_i$ , com  $\beta$  o vetor de parâmetros e  $\varepsilon$  o vetor de erros aleatórios. A função quantílica da variável dependente condicional é então definida por:

$$Q_\tau(Y|X) = X\beta_\tau, \tau \in [0, 1] \quad (21)$$

O estimador  $\beta_\tau$  é obtido através da seguinte minimização:

$$\frac{1}{n} \min_{\beta_\tau} \sum_{y_i \geq X'\beta_\tau} \tau |Y - X'\beta_\tau| + \sum_{y_i \leq X'\beta_\tau} (1 - \tau) |Y - X'\beta_\tau| = \frac{1}{n} \min_{\beta_\tau} \rho_\tau(Y - X'\beta_\tau) \quad (22)$$

,

sendo

$$\rho_\tau(\lambda) = \lambda(\tau - I(\lambda < 0)) \quad (23)$$

$I(\cdot)$  é a função indicadora

## 2.4 Fonte de dados

Para construção da fronteira de eficiência utilizou-se como insumo o gasto público municipal no ensino fundamental, e como produto utilizam-se as notas da Prova Brasil em português e matemática. A escolha dessa avaliação como produto ocorre por representar uma medida de aprendizado, de resultado e de qualidade da educação; e não apenas de quantidade. Na etapa seguinte, o objetivo é verificar o quanto variáveis de ambiente, como os IDH's Longevidade e Renda; e indicadores educacionais como abandono, horas-aula por dia, professores com ensino superior e distorção idade-série podem afetar o nível de eficiência do município, que é a unidade considerada. Essa segunda etapa é importante, pois a literatura da educação muitas vezes diverge acerca do efeito de cada uma delas no aprendizado. Denominamos esta última etapa como análise dos determinantes da eficiência. A tabela 1 descreve as variáveis utilizadas neste estudo e a fonte de obtenção dos dados.

Tabela 1: Variáveis Utilizadas

Variáveis	Descrição	Fonte
Prova Brasil: Português	Média ponderada pelo número de alunos	INEP
Prova Brasil: Matemática	Média ponderada pelo número de alunos	INEP
Gasto/Aluno no fundamental	Gasto municipal /número de matrículas	FINBRA e INEP
Docentes com ensino superior	% desses docentes por município	INEP
Horas-aula por dia	Número de horas-aula por dia	INEP
Abandono escolar	Taxa de abandono do ensino fundamental	INEP
Distorção idade série	Taxa de distorção idade série	INEP
IDHM	Média geométrica : IDHM's Longevidade e Renda	IBGE

Fonte: Elaboração Própria

### 3 ANÁLISE DEA, FDH e ORDER- $\alpha$ DA EFICIÊNCIA DO GASTO PÚBLICO EM EDUCAÇÃO

Ao construir a fronteira de eficiência, é necessário utilizar os dados de municípios com informações para todas as variáveis utilizadas. Aqueles sem informação completa foram excluídos. Adicionalmente, foi preciso excluir também os municípios com dados discrepantes, pois a presença de *outliers*<sup>4</sup> distorce o modelo de eficiência proposto. Assim, foram mantidos os municípios nos quais o gasto público está compreendido no intervalo  $[0, 20000]$ . Essa escolha foi feita após uma sequência de testes e visualizações. Dessa forma, a amostra inicial, contendo 5564 municípios, reduziu para 3230, porém ganha-se em maior confiabilidade.<sup>5</sup>

A figura 1 mostra que as notas da Prova Brasil(média) se concentra entre os valores 190 e 230, sendo que ainda mais entre 210 e 230 que entre 190 e 210. Em relação às diferenças de notas entre as disciplinas, observa-se que o resultado é um pouco melhor em matemática que em português. De acordo com a literatura, o desempenho dos alunos em língua portuguesa afeta positivamente o aprendizado nas outras disciplinas, com a justificativa de que a disciplina de língua portuguesa deve promover o desenvolvimento cultural e social do indivíduo por meio da leitura e da escrita, de forma que é essencial a melhoria do aprendizado desta disciplina. Já em relação ao gasto por aluno, é possível notar que os valores se concentram entre R\$3000 e R\$6000, mais ainda próximo ao primeiro valor.

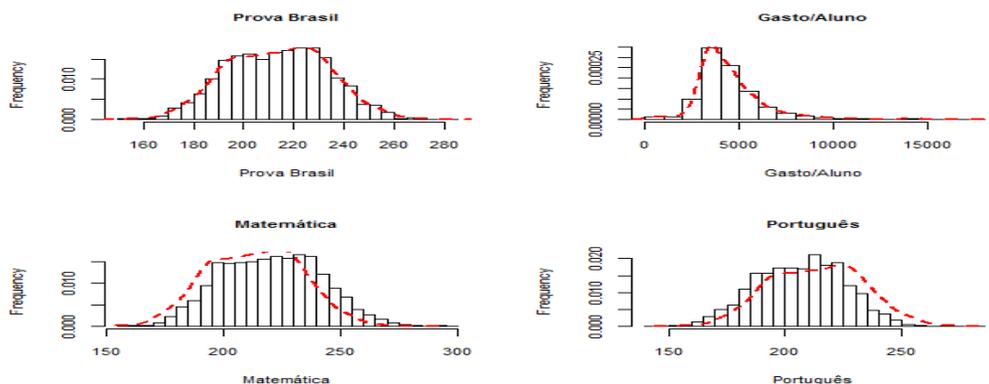
As estatísticas descritivas já mostram que, à medida que a faixa de população dos municípios é aumentada, ocorre uma concentração da distribuição em torno de notas mais altas, exceto pela última faixa que contém um número muito pequeno de municípios, e um gasto um pouco abaixo da faixa anterior; sugerindo que municípios maiores tendem a ser mais eficientes que municípios menores. Isso ocorre também para o caso em que as notas sejam desagregadas em português e matemática.

A figura 2 representa o conjunto de possibilidades de produção e, para um mesmo nível de gasto público por aluno, observam-se diferentes resultados entre os municípios, o que já indica a grande diferença de

<sup>4</sup> Foram eliminados outliers nos dados relativos aos insumos, o que não afeta a robustez dos modelos empregados neste trabalho, conforme discutido na seção de metodologia.

<sup>5</sup> Há indícios de que a análise é subestimada, pois espera-se dos municípios excluídos um menor nível de eficiência. Aos argumentos incluem-se a própria carência administrativa que os exclui da amostra, e, porque há evidências (ver Miranda, 2006) de que, quanto maior a faixa de população, mais eficiente tende a ser o município. Os municípios excluídos têm, em sua maior parte, população pequena.

Figura 1: Histograma - Prova Brasil



Fonte: INEP

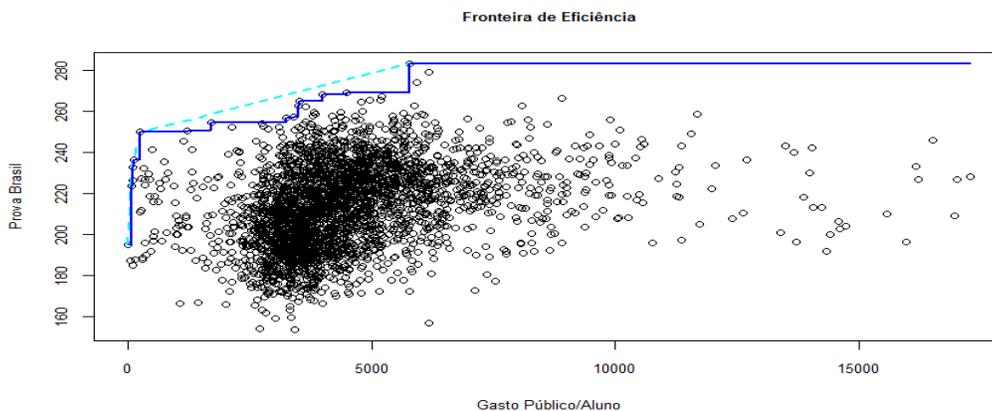
Tabela 2: Notas por faixa de população

Faixa de População	Municípios	Média Gasto	Média nota	Mediana Gasto	Mediana Nota
0 < Pop < 30000	2.432	4,547	212.8	4,180	212.5
30000 Pop < 100000	580	4,129	214.3	3,794	216.2
100000 Pop < 250000	142	4,329	220.4	4,152	223.4
250000 Pop < 1000000	65	4,654	220.1	4,188	222.1
100000 Pop	11	4,506	214.8	4,571	212.0

Fonte: FINBRA, IBGE e INEP

desempenho entre essas unidades, em termos da nota em matemática e português na prova Brasil. As fronteiras de eficiência representam os métodos DEA e FDH.

Figura 2: Fronteiras DEA e FDH de Eficiência



Elaboração própria no software R

Utilizou-se a fronteira com retornos decrescentes de escala, de forma a supor que o aumento do gasto

impacta mais em municípios com baixo gasto público em educação que em municípios com níveis elevados. Através da tabela 3, observa-se a distribuição da eficiência DEA em função do território brasileiro. Os municípios mais eficientes se concentram mais nas regiões Sul e Sudeste, enquanto as regiões Norte e Nordeste têm a maior quantidade de municípios com baixos escores de eficiência. A região Centro-Oeste apresenta um nível intermediário de eficiência. Essa diferença também é mostrada por Pieri e Santos (2014), entre outros estudos.

Tabela 3: Eficiência por região - DEA

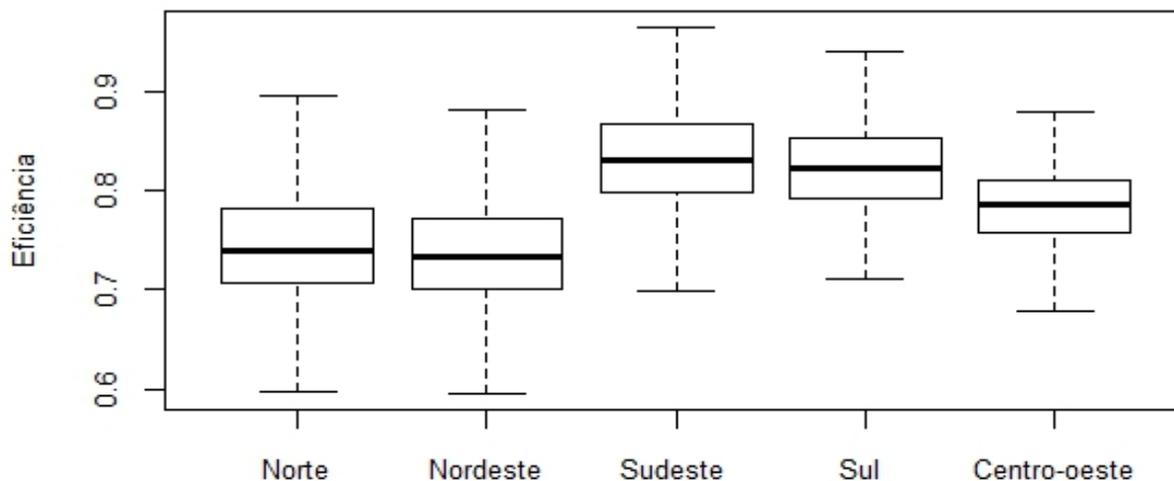
Região	Número de Municípios	Eficiência Média	Mediana	Valor Mín	Valor Máx
Norte	268	0.7440	0.7390	0.5540	0.9653
Nordeste	1.343	0.7362	0.7330	0.5710	1000
Centro-oeste	281	0.7850	0.7866	0.6709	1000
Sudeste	925	0.8342	0.8304	0.6734	1000
Sul	413	0.8228	0.8225	0.6765	0.9842
Brasil	3.230	0.7802	0.7807	0.5540	1000

Fonte: FINBRA, IBGE e INEP

A comparação entre as regiões também pode ser feita utilizando o Box-Plot da figura 3, onde fica clara a diferença entre um Brasil com menor eficiência, composto pelas regiões Norte e Nordeste, outro mais eficiente composto pelas regiões Sul e Sudeste e uma região intermediária representada pela região Centro-Oeste. Na figura 4, é apresentada a distribuição de eficiência nos estados brasileiros, a um  $\alpha$  de 0.90. Os quatro estados da região sudeste (MG, ES, RJ e SP) e os 3 estados da região Sul (PR, SC e RS) apresentam municípios com os escores mais elevados de eficiência; ao passo que RR e AP (pertencentes à região Norte) e AL (parte da região Nordeste) se destacam pela baixa eficiência. Está clara a divisão do nível de eficiência no Brasil. Essa desigualdade entre os estados sugere atuações distintas das políticas públicas, analisando as especificidades de cada um deles.

Uma análise das estatísticas por estado é apresentada pela tabela 7, no Apêndice, que também confirma a diferença nos escores para cada modelo. Os estados da região nordeste são menos eficientes. O modelo DEA apresenta como os 5 estados menos eficientes RR, AP, AL, MA e RN; ao passo que no modelo FDH o estado de SE ocupa a posição do RN. Já em relação aos estados mais eficientes, o modelo DEA apresenta a seguinte ordem: MG, RS, ES, PR e SC; já o modelo FDH difere apenas pela 4ª posição, ocupada pelo estado de SP.

Figura 3: Box-Plot Eficiência por Região

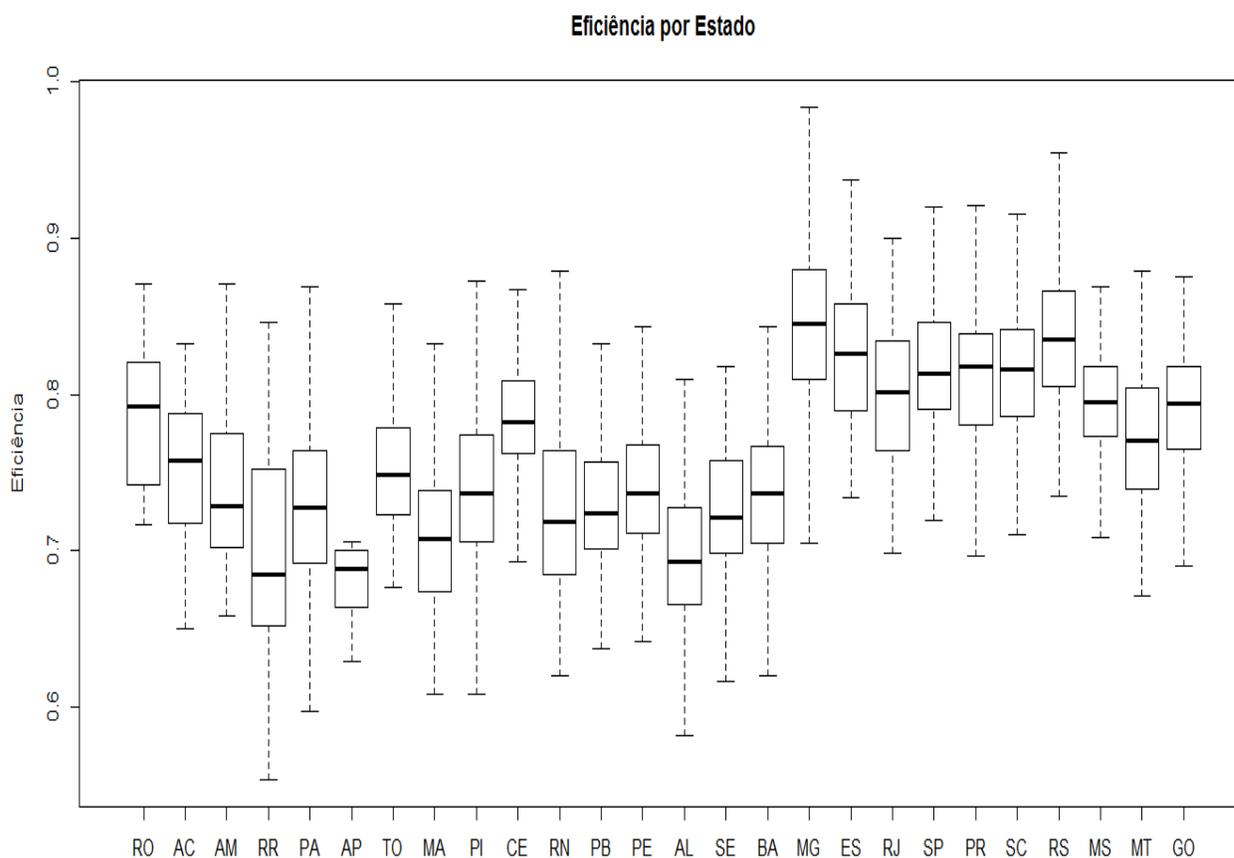


Elaboração própria com uso do software R

A distribuição da eficiência pelo território brasileiro, na forma de mapas, pode ser vista através da figura 11, no apêndice. As regiões em branco representam os municípios que foram excluídos da análise. O mapa reflete o Brasil com diversos desempenhos. Para uma melhor visualização da desigualdade dos escores de eficiência, analisa-se o mapa para cada região. Observamos que as regiões Sul e Sudeste apresentam maiores escores de eficiência enquanto que a região Norte e nordeste tem menor nível de eficiência. A região Norte apresenta heterogeneidade na distribuição de eficiência, com regiões com nível alto ao lado de outras, com nível baixo. O oeste da região apresenta mais pontos em vermelho, de baixa eficiência, ao passo que o sudeste tem eficiência mais alta.

Em relação à região nordeste, é preocupante que, exceto uma baixa parcela de municípios, a região apresenta eficiência muito baixa, com muitos fragmentos com as cores da ineficiência. É possível inferir que há muito espaço para políticas públicas. A própria região apresenta casos de sucesso, como o município de Sobral, exemplo para o Brasil, por se destacar em avaliações nacionais mesmo em meio à vulnerabilidade socioeconômica. O benchmarking e disseminação de boas práticas é importante para a melhoria educacional.

Figura 4: Distribuição da Eficiência por Estado



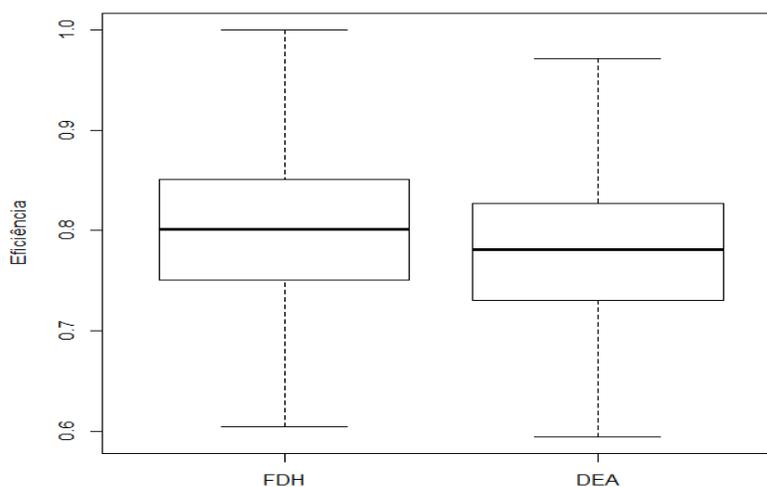
Elaboração própria com uso do software R

A região centro-oeste marca uma clara mudança em relação às regiões anteriores. Essa região pode ser vista com um nível intermediário de eficiência.

Já a região sudeste apresenta elevados escores de eficiência, como era esperado. Entretanto, há um destaque para a região Norte de Minas Gerais, que apresenta os piores indicadores da região e é historicamente caracterizada por ser carente de serviços básicos e de qualidade de vida. Dentro da região sudeste, é possível observar que existe uma forte subdivisão entre um Sul eficiente e um Norte menos eficiente. Mesmo dentro de um mesmo estado, é preciso a adoção de políticas distintas, visando atenuar essa desigualdade interna. Por fim, na região Sul encontramos valores razoáveis de eficiência, com apenas alguns pontos que destoam do restante. Esse fato pode indicar uma necessidade de uniformizar algumas práticas já adotadas nas regiões

que apresentam melhores resultados. Comparando a distribuição da eficiência, observa-se que os modelos DEA e FDH encontram resultados parecidos, o que é importante para confiança nos valores encontrados. Os resultados para o modelo FDH são um pouco maiores que no DEA, dado o rigor levemente maior deste último.

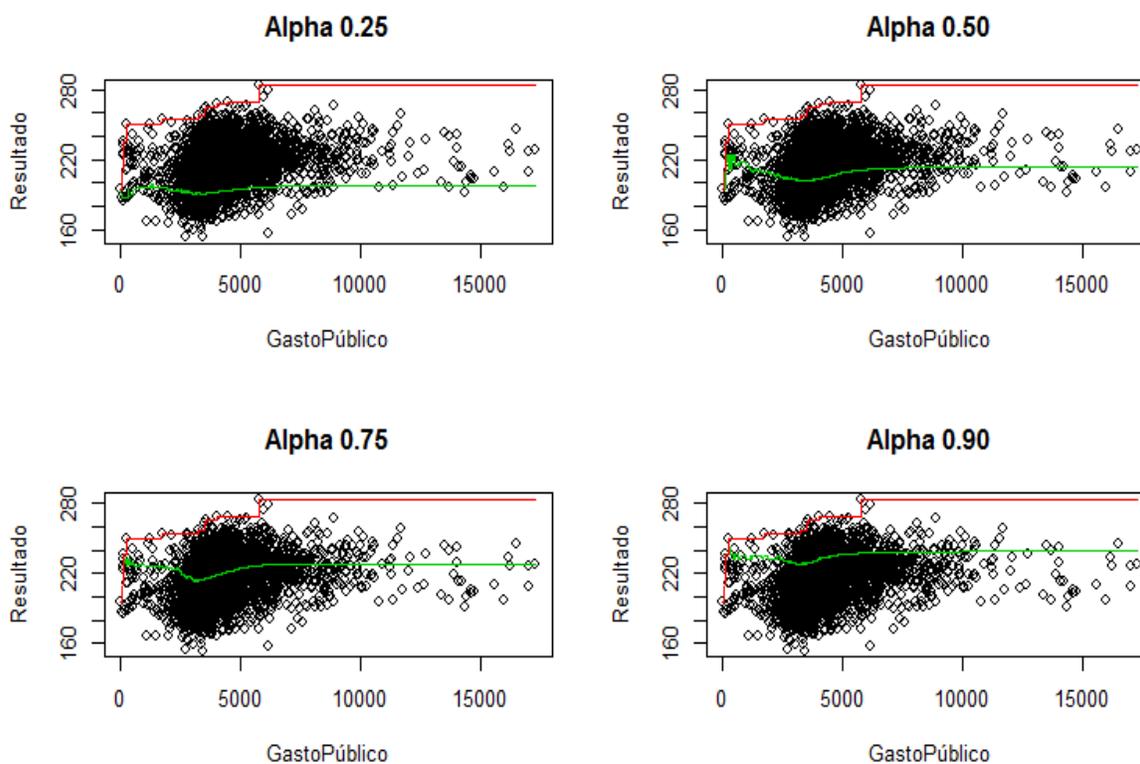
Figura 5: Boxplot FDH e DEA



Elaboração própria

Para o modelo order- $\alpha$ , estimaram-se fronteiras para 4 valores de  $\alpha$ . A estimação resulta em unidades com um escore de eficiência maior, menor ou igual a 1; e assim, para cada valor de  $\alpha$ , será feita a divisão das unidades em dois grupos, em que denominaremos unidades "sub eficientes" as unidades com  $\alpha \leq 1$  e "super eficientes" aquelas onde  $\alpha > 1$ , consoante à literatura. A figura 6 apresenta as fronteiras  $\alpha$ , e também a fronteira FDH, que corresponde ao valor de  $\alpha = 1$ .

A tabela 4 mostra que, à medida que o valor de  $\alpha$  cresce, a proporção de unidades consideradas super eficientes diminui, uma vez que mais unidades são envelopadas pela fronteira. Ocorre a redução da média e mediana de todas as unidades com a elevação do valor de  $\alpha$ , uma vez que menos unidades mantêm eficiência de valor maior que 1, e as unidades subeficientes ficam cada vez mais longe da fronteira, o que contribui para reduzir o escore associado. Assim, os valores de máximo e mínimo também são funções inversas do aumento de  $\alpha$ . Escolhendo-se os resultados para  $\alpha = 0.90$ , os 5 municípios mais eficientes são: Tupandi(RS),

Figura 6: Fronteira para distintos valores de  $\alpha$ 

Estimação elaborada com uso do R

Senador Firmino (MG), Itaú de Minas(MG); Pareci Novo(RS), Chiador(MG). Já os 5 de menor eficiência são Uiramutã (RR), Roteiro (AL), Barreiras do Piauí(PI), Santa Cruz do Arari(PA) e Guaribas(PI). Esse resultado já é um reflexo das diferenças entre as regiões Sul e Sudeste de um lado; e a região Norte e Nordeste de outro. A região Centro-Oeste ocupa uma posição intermediária, conforme será abordado na tabela 5.

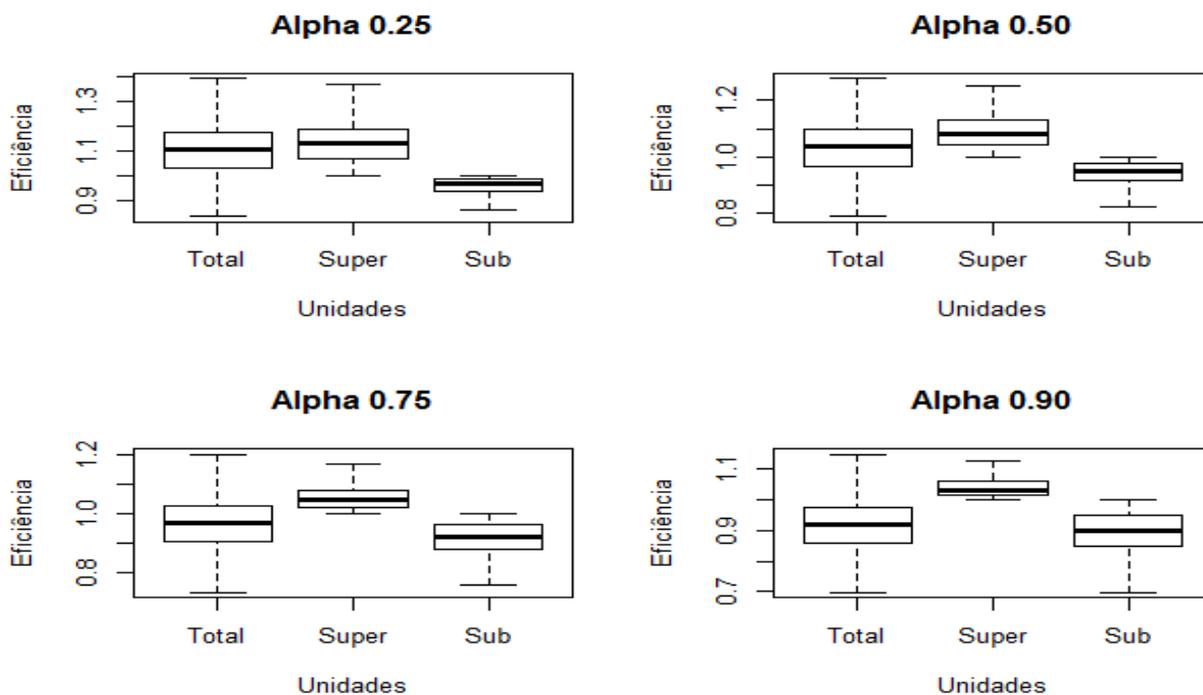
A figura 7 apresenta o boxplot para cada modelo  $\alpha$ , onde é possível observar a distribuição da eficiência. Há uma queda na eficiência à medida que o valor de  $\alpha$  cresce. O resultado é intuitivo, pois, conforme se eleva o valor de  $\alpha$ , também se eleva o rigor do modelo quanto ao valor do escore de eficiência atribuído às unidades.

A tabela 5 apresenta os resultados em função das regiões brasileiras e para cada valor de  $\alpha$ . É fácil perceber que as regiões Sul, Sudeste e Centro-Oeste têm mais municípios supereficientes que subeficientes; ao passo que o contrário ocorre nas regiões Norte e Nordeste, onde é maior a proporção de municípios de baixa eficiência. É importante mencionar que os municípios da região Sudeste respondem por aproximadamente

Tabela 4: Eficiência por grupo - Order- $\alpha$ 

Modelo	Nº Municípios	mín	1º quartil	mediana	média	3º quartil	máx
Alpha=0.25	3,230	0.795	1.029	1.104	1.103	1.174	1.443
Supereficientes	2,697	1	1.066	1.128	1.132	1.188	1.443
Subeficientes	533	0.795	0.937	0.967	0.957	0.986	1
Alpha=0.50	3,230	0.741	0.967	1.034	1.034	1.098	1.342
Supereficientes	2,030	1	1.042	1.081	1.090	1.128	1.342
Subeficientes	1,200	0.741	0.913	0.947	0.939	0.975	1
Alpha=0.75	3,230	0.690	0.906	0.968	0.967	1.026	1.249
Supereficientes	1,157	1	1.022	1.046	1.056	1.081	1.249
Subeficientes	2,073	0.690	0.879	0.923	0.917	0.964	1
Alpha=0.90	3,230	0.659	0.857	0.917	0.916	0.973	1.192
Supereficientes	481	1	1.015	1.031	1.040	1.059	1.192
Subeficientes	2,749	0.659	0.846	0.900	0.894	0.948	1

Fonte: Elaboração própria a partir do R

Figura 7: Distribuição das unidades por valor de  $\alpha$ 

Elaboração com uso do R

42% da população do Brasil, seguidos pelas regiões Nordeste(27,7%), Sul(14,3%), Norte(8,5%) e Centro-Oeste(7,5%).

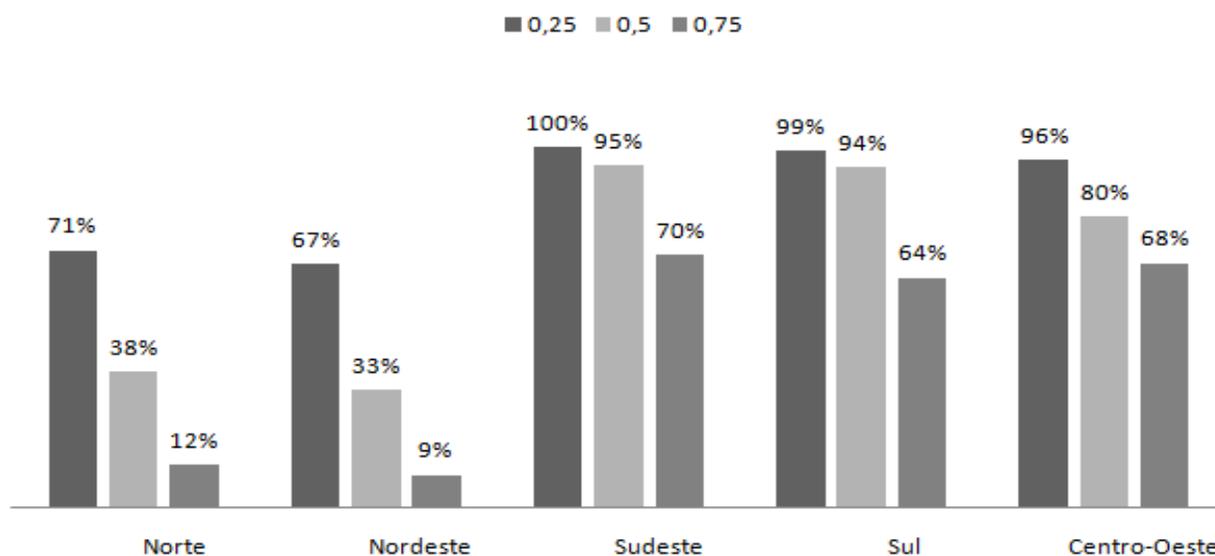
Tabela 5: Estatísticas por grupo e valor de  $\alpha$ 

	alpha=0.25		alpha=0.50		alpha=0.75		alpha=0.90	
	N Municípios	média	N Mun.	média	N Mun.	média	N Municípios	média
Norte	268	1.0449	268	0.9797	268	0.9162	268	0.8682
Supereficientes	191	1.08	101	1.054	32	1.0329	6	1.0269
Subeficientes	77	0.9563	167	0.9349	236	0.9003	262	0.8647
Nordeste	1343	1.034	1343	0.9731	1343	0.9118	1343	0.8614
Supereficientes	906	1.0720	438	1.05	125	1.034	18	1.038
Subeficientes	437	0.8647	905	0.8647	1218	0.9004	1325	0.8647
Sudeste	925	1.1839	925	1.1080	925	1.0349	925	0.9814
Supereficientes	922	1.1850	876	1.1160	646	1.0660	328	1.044
Subeficientes	3	0.9751	49	0.9778	279	0.9629	597	0.9472
Sul	413	1.1719	413	1.0940	413	1.0209	413	0.9703
Supereficientes	408	1.1739	389	1.1020	263	1.054	113	1.0349
Subeficientes	5	0.9887	24	0.9708	150	0.9627	300	0.9458
Centro-Oeste	281	1.119	281	1.0449	281	0.9749	281	0.9263
Supereficientes	270	1.1240	226	1.0649	190	0.9627	16	1.018
Subeficientes	11	0.9458	55	0.9458	91	1.0309	265	0.9458

Fonte: Resultados das estimações com uso do R

Está nítido que as regiões Sul e Sudeste representam municípios com eficiências mais altas. A região centro-oeste é uma região intermediária, com eficiência nem alta nem baixa. Já as regiões Norte e Nordeste são as que apresentam menor eficiência, sendo que, a um  $\alpha = 0,75$ , 88,88% das unidades da região Norte está no grupo dos municípios subeficientes, ao passo que essa proporção sobe para 90,00% na região Nordeste. Na região Centro-Oeste, ocorre o inverso, com 32% das suas unidades sendo subeficientes. Nas regiões Sudeste e Sul, essa porcentagem é de 30% e 36%, respectivamente. A figura 8 apresenta a porcentagem de municípios super eficientes para cada região para os valores de  $\alpha$  iguais a 0,25; 0,50; 0,75. É possível notar que essa porcentagem diminui à medida que aumenta o valor de  $\alpha$ , e que os valores para a região Norte e Nordeste são bem menores que as demais, para cada um dos valores de  $\alpha$ .

Figura 8: % de municípios supereficientes

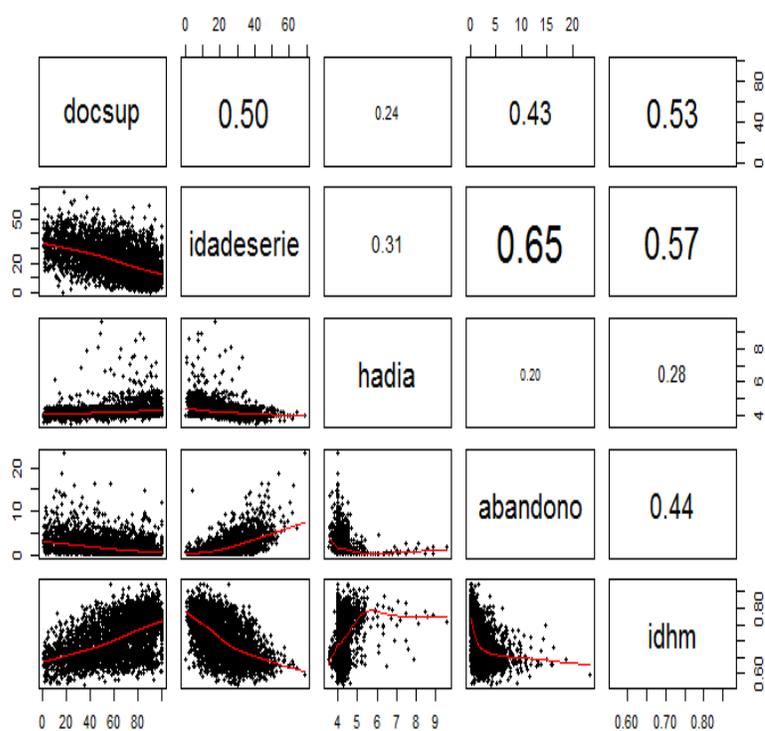


Fonte: Elaboração própria

## 4 DETERMINANTES DA EFICIÊNCIA

Nesta etapa estuda-se a relação de outras variáveis com a eficiência alcançada pelos municípios. O resultado encontrado para a correlação entre as variáveis presentes neste estágio (Figura 9) mostra que as variáveis em regra apresentam um nível de correlação aceitável, sendo os maiores valores observados entre a variável *abandono* e *idadeserie* e entre *idmh* e *idadeserie*.

Figura 9: Matriz de Correlação



Fonte: Elaboração com uso do R

A tabela 6 apresenta os resultados para os métodos Tobit e Regressão Quantílica.

Tabela 6: Regressão Quantílica e Tobit

	<i>Dependent variable:</i>					
	rq=0.25	rq=0.50	rq=0.75	rq=0.90	DEA	FDH
		<i>quantile regression</i>			<i>censored regression</i>	<i>censored regression</i>
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
docsup	0.0004*** (0.0001)	0.0004*** (0.0001)	0.001*** (0.0001)	0.001*** (0.0001)	0.0005*** (0.00004)	0.0004*** (0.00005)
idadeserie	0.00001 (0.0002)	-0.0001 (0.0002)	-0.0001 (0.0002)	-0.0004 (0.0003)	-0.0001 (0.0001)	-0.00003 (0.0001)
hadia	-0.002 (0.003)	-0.0001 (0.003)	-0.001 (0.003)	-0.001 (0.009)	-0.0004 (0.002)	-0.002 (0.002)
abandono	-0.007*** (0.001)	-0.007*** (0.001)	-0.007*** (0.001)	-0.005*** (0.002)	-0.006*** (0.001)	-0.007*** (0.001)
idhm	0.508*** (0.025)	0.443*** (0.024)	0.421*** (0.025)	0.350*** (0.046)	0.450*** (0.019)	0.432*** (0.021)
logSigma					-2.954*** (0.012)	-2.885*** (0.012)
Constant	0.386*** (0.022)	0.453*** (0.021)	0.505*** (0.022)	0.610*** (0.049)	0.451*** (0.017)	0.491*** (0.018)
TRUE						
Observations	3,230	3,230	3,230	3,230	3,230	3,230
Akaike Inf. Crit.					-9,865.781	-9,368.433
Bayesian Inf. Crit.					-9,823.219	-9,325.871

Note:

\*p&lt;0.1; \*\*p&lt;0.05; \*\*\*p&lt;0.01

Fonte: Elaboração própria a partir do R ( stargazer package)

A valorização do magistério é condição fundamental para uma Educação de qualidade, com remuneração e formação adequada, foco na aprendizagem dos alunos, e uma carreira mais atraente. Assegurar que todos os educadores de Educação Básica tenham formação em nível superior, objetivo já presente na Lei de Diretrizes e Bases de 1996, é fundamental. Entretanto, dos 2,1 milhões de docentes da Educação Básica, cerca de 25% ainda possuem, no máximo, o Ensino Médio ou Magistério, segundo o Anuário da educação básica, TODOS (2015).

A situação de desigualdade fica evidenciada com a utilização dos dados regionais a respeito da formação dos professores. Segundo o Censo Escolar, enquanto nos Estados do Centro-Oeste, 86,7% dos professores já possuem formação em nível superior, isso é verdade para 59,9% dos educadores da Educação Básica do Nordeste e para 65,7% dos professores que atuam no Norte do País. O Sudeste concentra a maior parte dos docentes da Educação Básica e 82,7% possuem ensino superior, enquanto na região sul esse número é de 82,2%. A Educação a Distância seria uma ferramenta bastante útil para elevar o nível de formação dos docentes brasileiros.

Além do efeito de cada variável na eficiência, pode-se analisar o efeito nos diferentes quantis da distribuição condicional da eficiência. A variável (*docsup*) tem resultados significantes e positivos também para cada quantil. Pode-se ainda observar que o efeito positivo é menor para quantis mais baixos (0.25 e 0.50), com a magnitude de 0.0004; que para os mais altos (0.75 e 0.95), que apresentam a magnitude de 0.001. Sugere-se, portanto, que municípios mais eficientes obtêm maior retorno com aumento de professores mais qualificados do que os menos eficientes. Em unidades mais eficientes o professor trabalha em condições mais favoráveis a sua atuação. A figura 10 mostra o gráfico dos coeficientes quantílicos, que apresenta os valores ajustados dos coeficientes em função dos quantis, além do valor ajustado para regressão feita por Mínimos Quadrados Ordinários. Por meio desses gráficos, é possível analisar o efeito das diferentes variáveis na eficiência em pontos distintos da sua distribuição condicional; tanto na cauda inferior como a superior. Além das estimativas dos parâmetros, a figura apresenta os limites inferiores e superiores que representam 2 desvios para cima e para baixo.

Observa-se que o impacto da variável *docsup* na eficiência do modelo cresce nos primeiros quantis, apresentando maior magnitude dos coeficientes na cauda superior da distribuição. Sugere-se, portanto, que

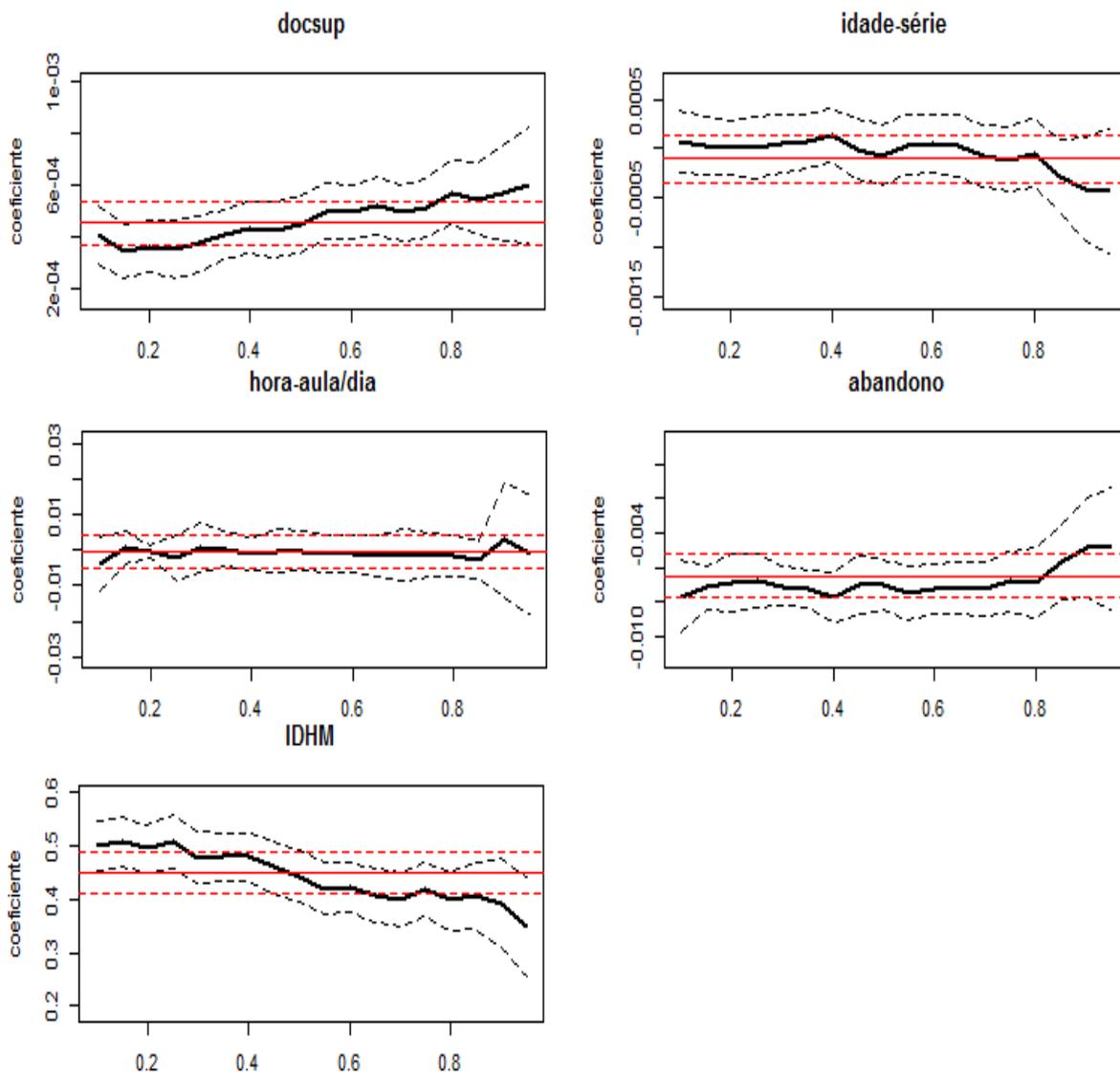
professores mais qualificados têm maior impacto em municípios mais eficientes. Além disso, esse crescimento é cada vez menor e vai se estabilizando a partir do quantil 0,3. Comparado ao método de mínimos quadrados, o modelo de regressão quantílica mostra coeficientes menores para essa variável até o quantil 0,4, e depois inverte, tornando-se um pouco maior para os quantis superiores.

Em relação à distorção idade série, essa variável caiu entre 2011 e 2013, tanto no Ensino Fundamental como no Ensino Médio. No primeiro caso, passou de 22,9% para 21%; no segundo, de 32,8% para 29,5%. Porém, ainda representa um dos problemas mais graves da Educação brasileira, com raízes em questões como ingresso tardio, repetência e abandono, conforme TODOS (2015). Ainda, as regiões Norte e Nordeste apresentam os piores indicadores. O sinal negativo dessa variável foi captado pelo modelo Tobit e nos quantis 0,5, 0,75 e 0,95 do modelo de regressão quantílica, entretanto o resultado é não significativo. Ainda, essa variável está associada ao abandono escolar. Com a realização de testes, os autores constataram que, quando o abandono escolar é excluído do modelo, os resultados para a variável idade-série passam a se apresentar significativos e com o sinal esperado pela literatura (negativo).

Pela figura 10, a *idadeserie* mostra um resultado da regressão quantílica bem parecido com o MQO. Essa variável contribui negativamente para a eficiência, com um impacto relativamente estável ao longo da distribuição, com um leve crescimento a partir do quantil 0,9. Assim, o modelo sugere que o impacto é similar, comparando unidades muito eficientes quanto em outras menos eficientes. Ainda com relação essa variável, o estudo de Machado, Firpo e Gonzaga (2013) encontra que a qualificação dos docentes pode reverter esses problemas de dispersão etária nas turmas. Em um estudo relevante, Pereira e Reis (2014) mostram que os efeitos de longo prazo da repetência no desempenho dos estudantes em Portugal são negativos, o que corrobora para a adoção de métodos alternativos de apoio aos alunos que revelem dificuldades na aprendizagem nas etapas iniciais da vida escolar. Vale citar que, em Portugal, os alunos com piores condições socioeconômicas têm uma maior probabilidade de repetir. Ferrão, Beltrão e Santos (2002) mostram que a proficiência dos alunos com defasagem idade-série é inferior comparativamente à dos alunos em idade adequada.

Em relação à variável *hadia* (horas-aula por dia), o coeficiente é negativo, também para todos os quantis analisados. Porém não é significativo. Os modelos poderiam indicar que o aumento de aulas não só não melhora a eficiência, como também piora o patamar já alcançado. Entretanto, o resultado é não significativo

Figura 10: Coeficientes em função dos quantis



Elaboração própria com uso do R

e, portanto, não pode ser considerado válido. Ela começa com um impacto negativo e, assim, continua por toda a distribuição. Quanto ao abandono escolar, o modelo reflete o impacto negativo e significativo dessa variável. Esse sinal é intuitivo, uma vez que se espera que todos os alunos avancem em sua escolaridade com aprendizado adequado ao ano em que estão matriculados. Essa taxa vinha aumentando ao longo dos anos e assim é preciso estabilizar o processo de reversão. Ela passou de 2,7% para 2,2% entre 2012 e 2013. Além disso, pode-se dizer que a variável apresenta um paralelismo entre os 3 primeiros quantis, ou seja, com a mesma inclinação e efeito sobre a eficiência, com o coeficiente no valor de  $-0.007$ . No quantil de 0.95, o

efeito negativo se reduz um pouco, sendo de -0.005. Essa variável inicia com um impacto negativo de baixa magnitude e o efeito dessa variável reduz em direção à cauda superior dessa distribuição.

Por fim, em relação ao IDHM do município, o objetivo é captar a relação entre o ambiente socioeconômico e eficiência e observou-se que essa variável apresenta um impacto positivo nos escores de eficiência. Ainda, esse coeficiente é muito significativo e de magnitude elevada. Entretanto, esse efeito é ainda maior quanto menor o quantil analisado, de menores eficiências, sugerindo que a baixa eficiência está muito relacionada com a qualidade de vida e renda da população. Por fim, o IDHM inicia com um elevado impacto na eficiência, que depois apresenta uma trajetória de queda lenta ao longo da distribuição. Essa variável tem maior impacto em municípios com eficiência menor, portanto, apesar de continuar com um impacto significativo para todas as unidades. Albernaz et al. (2002) indicam que a variável docsup gera um benefício que é crescente com o nível socioeconômico familiar do aluno, de modo que professores mais qualificados contribuem para o aprendizado de todos, mas de forma mais efetiva para o dos alunos de nível socioeconômico mais elevado. Assim, é importante levar em consideração esses efeitos cruzados das variáveis de forma a potencializar os resultados educacionais.

Os municípios mais pobres em geral apresentam menor Ideb, entretanto essa tendência geral contém exceções, conforme Gouveia et al (2009). Porém, ainda que os resultados escolares se devam, em parte, às condições sociais dos municípios em que as escolas estão inseridas, há outros elementos que influenciam tais resultados.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste estudo, analisou-se a eficiência do gasto público em educação para 3230 municípios brasileiros. Além do DEA, outros métodos foram utilizados com o objetivo de contestar os resultados obtidos bem como produzir um estudo mais completo. O insumo foi o gasto público na educação fundamental e como produtos/resultados as notas da Prova Brasil, para a primeira etapa do ensino fundamental. As estatísticas descritivas apontam que as notas em matemática são maiores que em português e que municípios mais populosos tendem a apresentar maior eficiência na alocação do gasto público. O conjunto de possibilidades de produção permite concluir que, para o Brasil, não há evidências de relação direta entre gastos educacionais e desempenho escolar, medido pelos resultados da Prova Brasil.

A fronteira eficiente quantifica a desigualdade de eficiência no Brasil. As regiões Norte e Nordeste apresentam índices de eficiência bem menores que as outras regiões, notadamente as regiões Sul e Sudeste; deixando clara a distinção entre dois brasis: um mais e outro menos eficiente. Os modelos DEA e FDH apresentaram resultados parecidos. Analisando os determinantes da eficiência, o modelo Tobit resulta na relação positiva entre o número de docentes com ensino superior e o IDHM com o nível de eficiência do município. A distorção idade-série e o abandono escolar, conforme esperado, mantêm uma relação inversa. Através da regressão quantílica, o modelo indica, ainda, que professores com ensino superior exercem ainda mais impacto positivo em municípios mais eficientes ao passo que o IDHM exerce maior influência positiva nos municípios menos eficientes, indicando que a melhoria da qualidade de vida e renda da população desses municípios é um forte aliado ao desenvolvimento educacional.

O modelo Order- $\alpha$ , mais robusto a *outliers*, mostra que regiões Sul, Sudeste e Centro-Oeste têm mais municípios supereficientes que subeficientes; ao passo que o contrário ocorre nas regiões Norte e Nordeste. Quanto maior o valor de  $\alpha$ , menor o número de municípios supereficientes, uma vez que o modelo fica mais rigoroso na definição da eficiência. Os modelos indicam que obter maior eficiência deve ser objetivo primordial do governo ante o aumento de gastos, caso contrário o desperdício de recursos continuará em grande montante e não haverá a conversão de recursos em aprendizado.

## REFERÊNCIAS

- AFONSO, A. A Eficiência do estado. **Boletim de desenvolvimento fiscal**. IPEA, Brasília, fev. 2006.
- AFONSO, A.; SCHUKNECHT, L.; e TANZI, V. Public Sector Efficiency: Evidence for New EU Member States and Emerging Markets. **ECB Working Paper** No. 581, jan. 2006.
- ALBERNAZ, A.; FERREIRA, F.; FRANCO, C. (2002). Qualidade e equidade na educação fundamental brasileira. **Pesquisa e Planejamento Econômico**, Brasília, v.32, n.3, dez., p.453-476, 2002.
- ALMEIDA, A. T. C.; and C. E. GASPARINI. Gastos públicos municipais e educação fundamental na Paraíba: uma avaliação usando DEA. **Revista Econômica do Nordeste**, Fortaleza, v.42, n.3, p. 621-640, 2011.
- ALVES, F. Políticas educacionais e desempenho escolar nas capitais brasileiras. **Cadernos de Pesquisa**, São Paulo, v. 38, n.134, p. 413-440, 2013.
- ARAGON, Y.; DAOUIA, A. e THOMAS-AGNAN, C. Nonparametric frontier estimation: a conditional quantilebased approach. **Econometric Theory**, New York, v. 21, n. 2, p. 358-389, 2005.
- BANKER, R. D.; CHARNES, A.; e COOPER, W. W. . Some Models for Estimating Technical and Scale Inefficiencies in Data Envelopment Analysis. **Management Science**. Catonsville, v. 30, n.9, p. 1078–1092, 1984.
- BELTRÃO, K. J.; dos SANTOS, D. P. Políticas de não repetência e a qualidade da educação: evidências a partir da modelagem dos dados da 4ª série do SAEB-99. **Estudos em Avaliação Educacional**, São Paulo, n. 26, p. 47-72, jul./dez. 2002.
- BOGETOFT, P.; e OTTO, L. **Benchmarking with DEA, SFA, and R**. New York, Springer Science & Business Media, 2010.
- BUCHINSKY, M. Women's return to education in the U.S.: Exploration by quantile regression with nonparametric sample selection correction, 1996. Providence, **Brown University**, 1996.
- BUCHINSKY, M. Recent advances in quantile regression: a practical guideline for empirical research. **The Journal of Human Resources**, Madison, v.33, n.1, p.88-126, 1998.
- CAZALS, C.; FLORENS, J. e SIMAR, L. (2002). Nonparametric frontier estimation: a robust approach. **Journal of Econometrics**, v.106, n. 1, p.1-25, 2002.
- CHARNES, A., COOPER, W. W., RHODES, E. Measuring the efficiency of decision making units. **European Journal of Operational Research**, v. 2, p. 429-444, 1978.
- CORDERO, J. M., SANTÍN, D., e SIMANCAS, R. (2015). Assessing European primary school performance through a conditional nonparametric model. **Journal of the Operational Research Society, Basings-toke, v.1, p.13**.
- DARAIÓ, C. and SIMAR, L. **Advanced Robust and Nonparametric Methods in Efficiency Analysis: Methodology and Applications**. New York, **Springer Science e Business Media**, 2010.
- DELGADO, V. M. S.; MACHADO, A. F. Eficiência das escolas públicas estaduais de Minas Gerais. **Pesquisa e Planejamento Econômico**, Brasília, v. 37. n. 3, dez. 2007.
- FARIA, F. P.; JANNUZZI, P. M.; SILVA, S. J. Eficiência dos gastos municipais em saúde e educação: uma investigação através da análise envoltória no Estado do Rio de Janeiro. **Revista de Administração Pública**, Rio de Janeiro, v. 42, n. 1, p. 155- 177, 2008.
- FARRELL, M. The Measurement of Productive Efficiency. **Journal of Royal Statistical Society**, v. A, n° 120, p. 253-281, 1957.
- GOUVEIA, A. B., de SOUZA, Â. R., e TAVARES, T. M. (2009). O IDEB e as políticas educacionais na

- região metropolitana de Curitiba. **Estudos em Avaliação Educacional**, São Paulo, v.20, n.42, p. 45-57.
- GREENE, W. **Econometric analysis**. 5.ed. New Jersey: Prentice Hall, 2003.
- HARDEMAN, S.; ROY, V. V. **An analysis of national research systems(II)**: Efficiency in the production of research excellence. Luxembourg, Publications Office, 2013.
- LOPES, L. S.; TOYOSHIMA, S. H. Evidências do impacto da corrupção sobre a eficiência das políticas de saúde e educação nos estados brasileiros. **Planejamento e políticas públicas**. Brasília, n. 41, p. 200-228, jul./dez. 2013
- MACHADO, D. C.; GONZAGA, G.; FIRPO, S. P. A relação entre proficiência e dispersão de idade na sala de aula: a influência do nível de qualificação do professor. **Pesquisa e Planejamento Econômico**, Brasília, v. 43, n. 3, p. 419-445, dez. 2013
- MACIEL, M. C.; CAMPÊLO, A. C.; e Raposo, M. C. F. A dinâmica das mudanças na distribuição salarial e no retorno em educação para mulheres: uma aplicação de regressão quantílica. In: XXIX ENCONTRO NACIONAL DE ECONOMIA, 29., 2001, Salvador. **Anais...** Brasília: ANPEC, 2001.
- MENDES, M. J. **A Despesa Federal em Educação: 2004-2014**. Brasília: Núcleo de Estudos e Pesquisas/CONLEG/Senado, 2015. (Boletim Legislativo, 26). < Disponível em: [ww.senado.leg.br/estudos](http://ww.senado.leg.br/estudos) >. Acesso em: 24/11/2015
- MENEZES FILHO, N. A. et al. **A Relação entre Gastos Educacionais e Desempenho Escolar**. São Paulo, Insper Instituto de Ensino e Pesquisa, 2009. (Working Paper, 200)
- MIRANDA, R. B. **Uma avaliação da eficiência dos municípios brasileiros na provisão de serviços públicos usando “data envelopment analysis”**. Brasília: IPEA, 2006. (Boletim de Desenvolvimento Fiscal, 3)
- MORAES, M. S.; BECKER, K. L. (2016). O efeito do trabalho do professor sobre o desempenho dos alunos na prova brasil de 2011. **Gestão Pública: Práticas e Desafios**, Pernambuco, v.7, n.1, p. 19-36, abr. 2015.
- MUGERA, A. W. (2014). Benchmarking the performance of farms using the expected minimum input functions: a robust frontier approach. **Recent Developments in Data Envelopment Analysis and its Applications**, Kuala Lumpur, v.1, n.7, p. 87.
- ORGANISATION FOR ECONOMIC CO-OPERATION AND DEVELOPMENT - OECD. **Low-Performing Students: Why They Fall Behind and How to Help Them Succeed**, PISA. Paris, 2016. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1787/9789264250246-en>>. Acesso em: 20/02/2016.
- PEREIRA, M. C.; e REIS, H. **Retenção escolar no ensino básico em Portugal**: determinantes e impacto no desempenho dos estudantes. Lisboa: Banco de Portugal, 2014. (Boletim económico).
- PIERI, R. G., SANTOS, A. A. **Uma Proposta para o Índice de Infraestrutura Escolar e o Índice de Formação de Professores**. Brasília: INEP, 2014.
- PORTELA, M. C. A. S.; THANASSOULIS, E. Decomposing school and school-type efficiency. **European Journal of Operational Research**, v.132, n.2, p. 357-373, 2001
- RIBEIRO, M. B. **Desempenho e eficiência do gasto público**: uma análise comparativa do Brasil em relação a um conjunto de países da América Latina. Brasília, DF: Esaf, 2008. (Prêmio Tesouro Nacional, 12).
- SANTOS, B. R. **Modelos de Regressão Quantílica**. 2012. Dissertação (Mestrado em Estatística) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.
- SILVA, J. L. M. da; ALMEIDA, J. C. L. Eficiência no gasto público com educação: uma análise dos municípios do Rio Grande do Norte. **Planejamento e Políticas Públicas**, Brasília, n.39, páginas 221-242, 2012.
- SILVA, T. da, MARTINS-FILHO, C.; RIBEIRO, E. A comparison of nonparametric efficiency estimators: DEA, FDH, DEAC, FDHC, order-m and quantile. **Economics Bulletin**, v.36, n.1, p.118-131, 2016
- SOUZA, G. D. S. Significância de efeitos técnicos na eficiência de produção da pesquisa agropecuária. **Revista**

**Brasileira de Economia**, Rio de Janeiro, v.60, n.1, p.69-86, 2006

TODOS, P. E. **Anuário brasileiro da educação básica**. São Paulo: Moderna, 2014.

VASCONCELLOS, M. A. S.; ALVES, D. **Manual de econometria: nível intermediário**. São Paulo: Atlas, 2000.

De WITTE, K.; MARQUES, R. C. Influential observations in frontier models, a robust nonoriented approach to the water sector. **Annals of Operations Research**, v.181, n.1, p.377-392, 2010.

WOOLDRIDGE, J. M. **Introdução à econometria: uma abordagem moderna**. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.

WORTHINGTON, A. An empirical survey of frontier efficiency measurement techniques in education. **Education Economics**, v.9, n.3, p.245-268, 2001.

ZOGHBI, A. C.; MATTOS, E. M.; ROCHA, F. Uma análise da eficiência nos gastos em educação fundamental para os municípios paulistas. **Planejamento e Políticas Públicas**, Brasília, n.36, páginas 9-61, 2011.

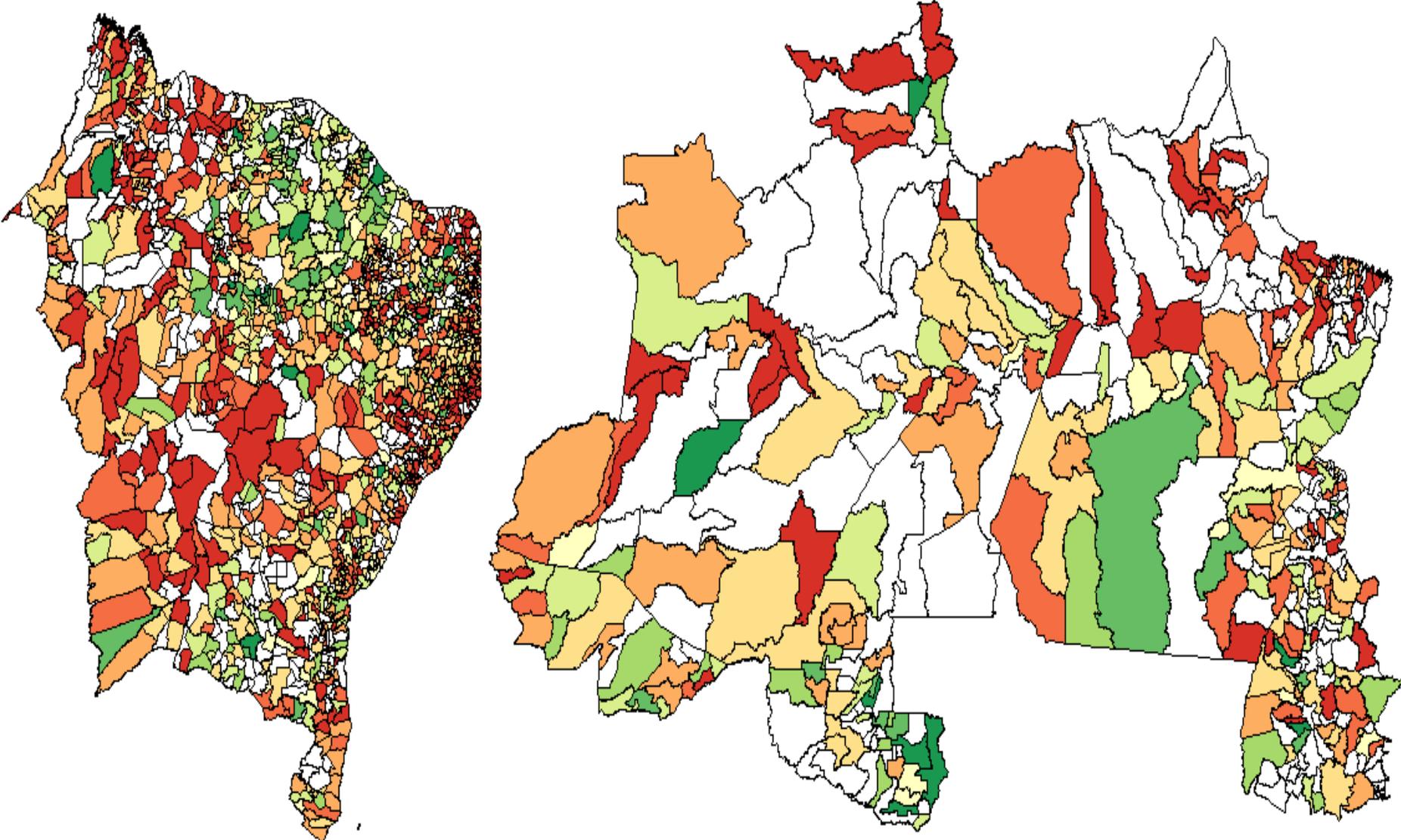
APÊNDICE A - MAPAS E TABELA DOS ESTADOS E REGIÕES

Tabela 7: Estatísticas descritivas por estado

Modelo	Estatística	RO	AC	AM	RR	PA	AP	TO	MA	PI	CE	RN	PB	PE
N Mun.	1181	32	19	41	8	87	7	74	135	173	150	118	175	162
DEA	Mín	0.7164	0.6499	0.6584	0.5540	0.5977	0.6297	0.6771	0.6084	0.5710	0.6929	0.6206	0.6090	0.6186
	1Q	0.7469	0.7182	0.7018	0.6617	0.6925	0.6636	0.7231	0.6744	0.7057	0.7624	0.6851	0.7013	0.7115
	Mediana	0.7924	0.7582	0.7291	0.6849	0.7278	0.6884	0.7489	0.7077	0.7371	0.7828	0.7190	0.7240	0.7371
	Média	0.7875	0.7519	0.7452	0.6973	0.7272	0.6788	0.7533	0.7099	0.7377	0.7842	0.7239	0.7321	0.7413
	3Q	0.8201	0.7879	0.7754	0.7243	0.7639	0.7003	0.7786	0.7390	0.7739	0.8085	0.7634	0.7573	0.7672
	Máx	0.8704	0.8323	0.9653	0.8462	0.8685	0.7055	0.8978	0.8591	0.8878	0.8971	0.8786	0.9158	0.9843
FDH	Mín	0.7280	0.6720	0.6754	0.5540	0.6258	0.6610	0.6771	0.6356	0.5971	0.7126	0.6263	0.6090	0.6337
	1Q	0.7664	0.7416	0.7297	0.6819	0.7129	0.6711	0.7333	0.7033	0.7278	0.7890	0.7030	0.7163	0.7295
	Mediana	0.8141	0.7747	0.7561	0.6954	0.7575	0.7017	0.7627	0.7333	0.7620	0.8134	0.7429	0.7391	0.7635
	Média	0.8070	0.7740	0.7707	0.7165	0.7534	0.6987	0.7700	0.7348	0.7618	0.8138	0.7452	0.7511	0.7638
	3Q	0.8379	0.8048	0.8040	0.7501	0.7891	0.7235	0.7999	0.7613	0.7979	0.8356	0.7911	0.7781	0.7939
	Máx	0.8971	0.8496	0.9901	0.8936	0.8749	0.7392	0.9088	0.9604	0.9067	0.9434	0.9066	0.9321	1000
Modelo	Estatística	AL	SE	BA	MG	ES	RJ	SP	PR	SC	RS	MS	MT	GO
N Mun.	2049	84	49	297	554	61	77	233	153	97	163	58	101	122
DEA	Mín	0.5816	0.6166	0.6200	0.6734	0.7338	0.6990	0.7199	0.6861	0.6765	0.6923	0.6990	0.6709	0.6786
	1Q	0.6665	0.6988	0.7053	0.8093	0.7898	0.7645	0.7905	0.7802	0.7861	0.8053	0.7740	0.7399	0.7657
	Mediana	0.6931	0.7214	0.7364	0.8452	0.8265	0.8016	0.8137	0.8180	0.8158	0.8350	0.7948	0.7703	0.7944
	Média	0.7027	0.7365	0.7370	0.8446	0.8274	0.8035	0.8215	0.8153	0.8130	0.8357	0.7972	0.7706	0.7912
	3Q	0.7274	0.7578	0.7667	0.8797	0.8576	0.8342	0.8464	0.8392	0.8412	0.8659	0.8165	0.8044	0.8181
	Máx	0.8801	1000	0.8756	1000	0.9369	0.8996	1000	0.9620	0.9266	0.9842	1000	0.9080	0.8751
FDH	Mín	0.6046	0.6403	0.6343	0.6734	0.7415	0.7186	0.7199	0.6861	0.6765	0.7197	0.7090	0.6709	0.6786
	1Q	0.6922	0.7155	0.7273	0.8279	0.8106	0.7738	0.8067	0.7988	0.7946	0.8200	0.7818	0.7569	0.7766
	Mediana	0.7192	0.7385	0.7604	0.8688	0.8529	0.8236	0.8364	0.8346	0.8348	0.8556	0.8149	0.7855	0.8090
	Média	0.7306	0.7548	0.7608	0.8672	0.8525	0.8202	0.8389	0.8357	0.8284	0.8530	0.8127	0.7861	0.8079
	3Q	0.7545	0.7794	0.7930	0.9049	0.8906	0.8551	0.8650	0.8663	0.8643	0.8875	0.8362	0.8203	0.8411
	Máx	0.9195	1000	0.9093	1000	0.9605	0.9299	1000	0.9828	0.9354	0.9925	1000	0.9491	0.9119

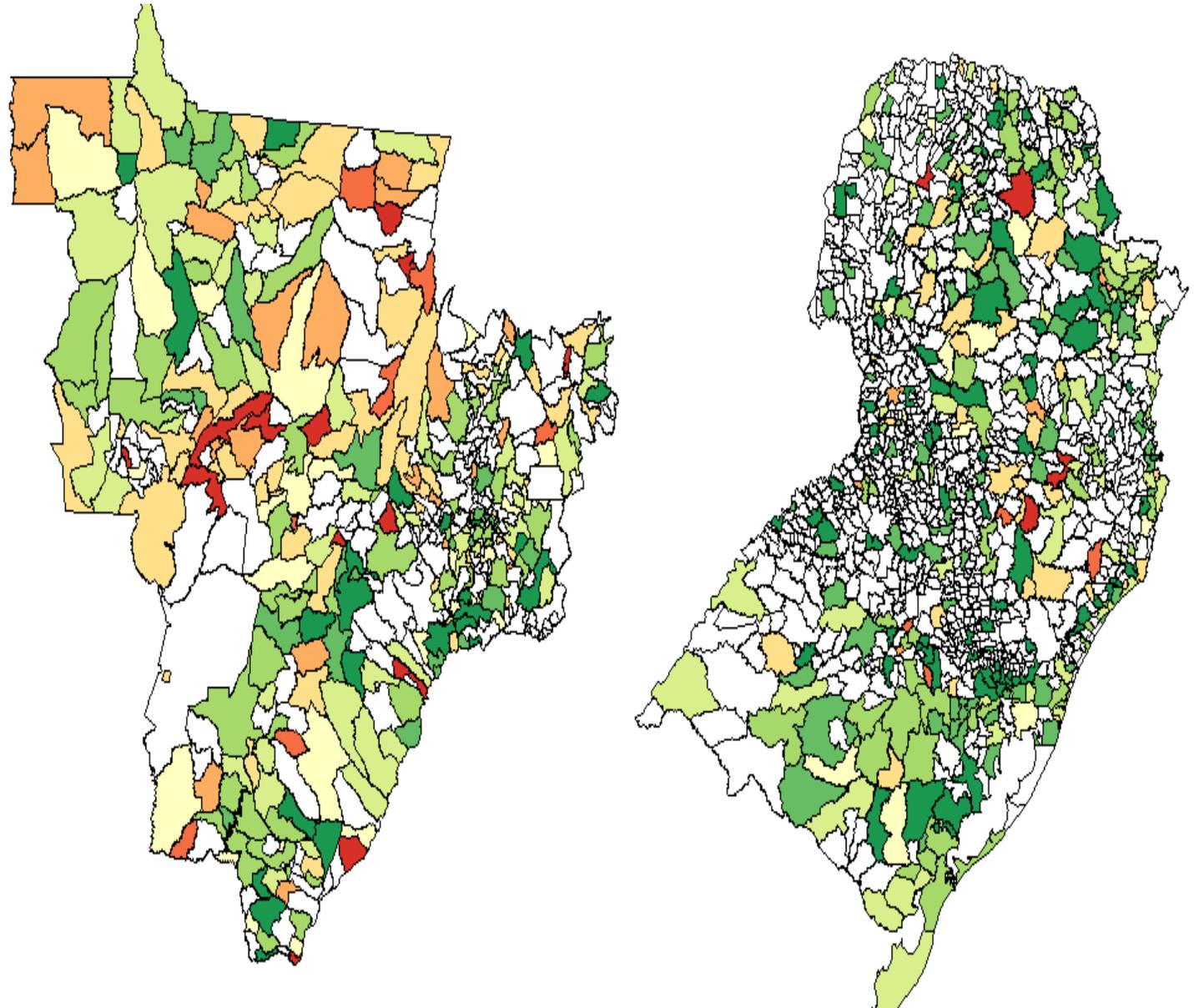
Fonte: Elaboração a partir de resultados gerados no R

Figura 11: Eficiência Norte e Nordeste



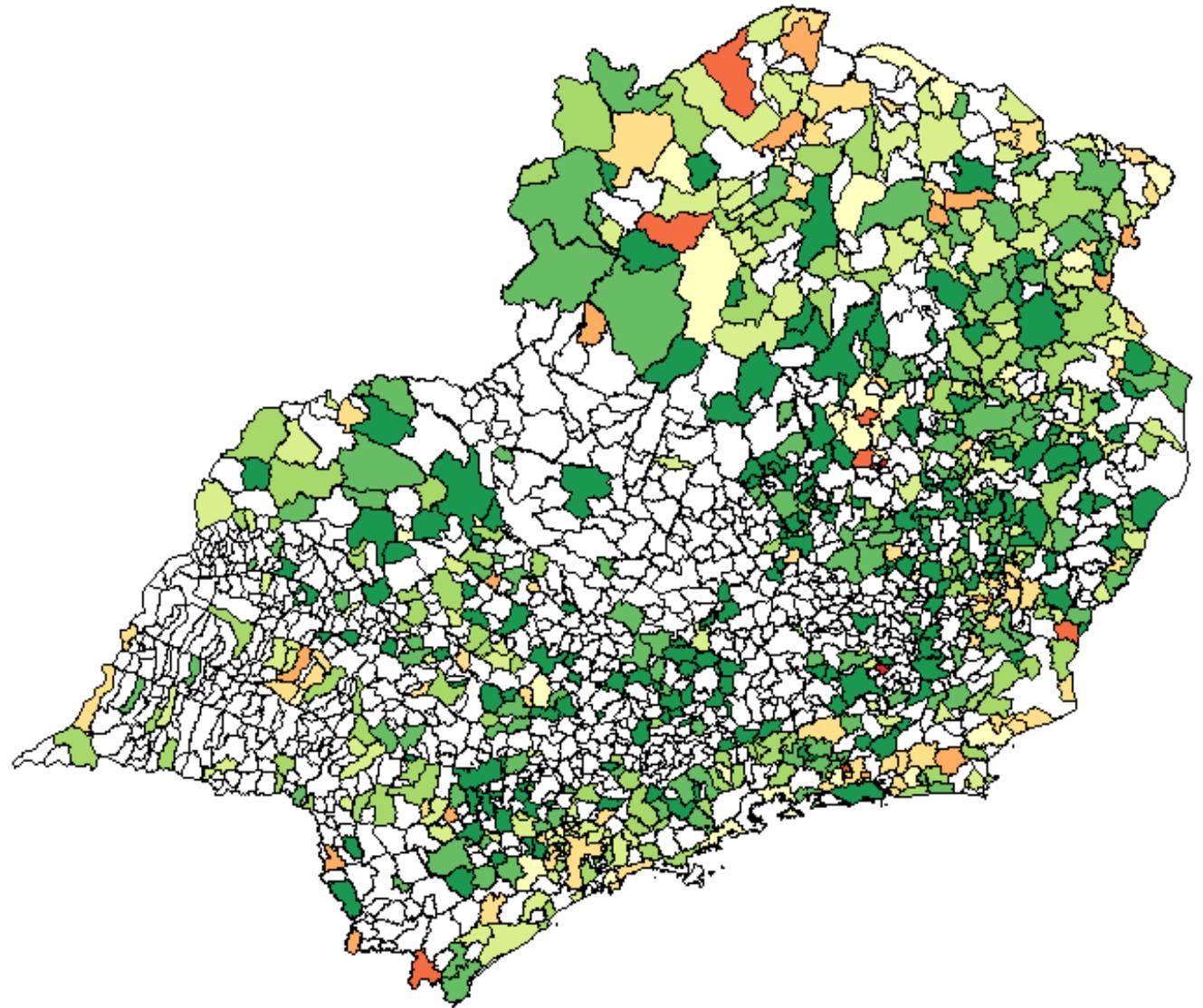
Elaboração própria com o uso do R

Figura 12: Eficiência Centro-Oeste e Sul



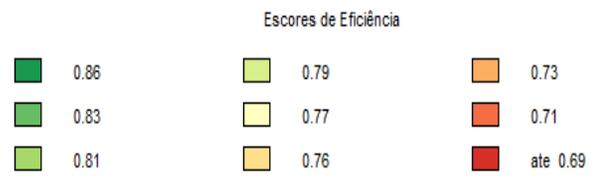
Elaboração própria com o uso do R

Figura 13: Eficiência Sudeste



Elaboração própria com o uso do R

Figura 14: legendas



Elaboração própria com o uso do R