

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA

Dinâmica Não Linear de Pulsos Eletromagnéticos em um Plasma Relativístico Frio

Alexandre Bonatto

Dissertação de mestrado realizada sob orientação do Prof. Dr. Felipe B. Rizzato e co-orientação do Prof. Dr. Renato Pakter, apresentada ao Instituto de Física da UFRGS em preenchimento do requisito final para a obtenção do título de Mestre em Física.

Porto Alegre - RS
Maio de 2008

*Aos meus pais,
Nilton Bonatto e Regina T. Bonatto
(In Memoriam)*

Agradecimentos

- Aos meus orientadores Felipe Rizzato e Renato Pakter pela paciência que sempre tiveram, pelas dezenas de e-mails respondidos nas noites e nos finais de semana durante a elaboração deste trabalho e, principalmente, pela oportunidade que me proporcionaram de fazer ciência.
- À minha esposa Viviane, pelo apoio constante e incondicional.
- À minha família, em especial ao meu irmão Cristian pelo suporte técnico e pelas conversas agradáveis sobre a Física.
- Aos professores do instituto, em especial à professora Ruth Schneider e ao professor Luiz Fernando Ziebell por suas aulas exemplares.
- Aos amigos, pela convivência agradável (e, muitas vezes, divertida) dentro e fora do instituto.
- Aos colegas Everaldo e Marcelo, pelo suporte durante a elaboração deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho investigamos a propagação auto-consistente de pulsos eletromagnéticos em um plasma relativístico frio de dois fluidos (iônico-eletrônico). A aplicação do formalismo Hamiltoniano em um modelo cujas soluções foram previamente estudadas na literatura de forma numérica e analítica nos permite interpretar o problema sob a perspectiva da dinâmica não linear de uma quase-partícula em um potencial efetivo, fornecendo informações relevantes sobre questões de interesse. São analisadas a existência e a estabilidade de soluções com pequenas amplitudes propagando-se em alta e em baixa velocidade, com ênfase no mecanismo de destruição dessas soluções que resulta na perda do movimento adiabático. Pulsos com grandes amplitudes propagando-se em baixa velocidade também são estudados com a finalidade de se conhecer mais detalhes sobre o espectro dessas soluções. As simulações mostram que esses pulsos não são soluções isoladas como descrito na literatura, e sim periódicas.

Abstract

In this work we investigate the self-consistent propagation of nonlinear electromagnetic pulses in a cold relativistic two-fluids plasma model. Application of Hamiltonian formalism in a model whose solutions had been studied in the literature both numerically and analytically allows us to interpret the system from the perspective of nonlinear dynamics as a quasi-particle in an effective potential, addressing issues of current interest. Existence and stability of small amplitude solutions propagating at both high and low speeds are analyzed focusing on how these solutions are destroyed and adiabatic motion is broken. Larger amplitude pulses propagating at low speeds are also investigated in order to have a better understanding of these solutions spectra. Simulations show that pulses with larger amplitudes are not isolated as described in the literature, but rather periodic solutions.

Sumário

Resumo	vi
Abstract	viii
1 Introdução	1
1.1 Contexto e motivação	1
1.2 Aceleradores baseados em plasmas	2
1.3 Estrutura do trabalho	3
2 O Modelo	5
2.1 O plasma	5
2.2 Os campos	6
2.3 A aproximação de fluido	8
2.3.1 A equação de movimento do fluido	8
2.3.2 Equação da continuidade	9
2.4 Separação das equações em componentes longitudinais e transversais	9
2.4.1 Equação da onda	10
2.4.2 Equação de movimento do fluido	10
2.5 Obtenção da velocidade de propagação das partículas \mathbf{v}_α	12
2.6 Obtenção da densidade de corrente \mathbf{J}	12
2.7 Obtenção da densidade de partículas n_α	14
2.8 Obtenção do fator relativístico γ_α	15
2.9 Obtenção da integral de movimento	16
2.10 Expressando γ_α em termos dos potenciais	18
2.11 Expressando β_α em termos dos potenciais	20
2.12 Expressando n_α em termos dos potenciais	21
2.13 Expressando \mathbf{J}_\perp em termos dos potenciais	22
2.14 Expressando δn em termos dos potenciais	23

2.15	Obtenção das equações diferenciais não lineares acopladas para a evolução dos potenciais	23
3	O formalismo Hamiltoniano e suas implicações	28
3.1	O formalismo Hamiltoniano	28
3.2	A dinâmica	29
3.2.1	Condições impostas pelo Hamiltoniano	29
3.2.2	A quebra de onda (<i>wave breaking</i>)	31
3.2.3	Análise linear	32
3.2.4	Regimes esperados	34
3.3	Análise da dinâmica não linear	35
3.3.1	Os parâmetros	35
3.3.2	Seção de Poincaré	35
3.3.3	Índice de estabilidade α	36
4	Propagação em alta velocidade	37
4.1	O regime	38
4.2	O potencial $\Delta U(\varphi)$	38
4.3	A dinâmica	39
5	Propagação em baixa velocidade	44
5.1	O regime	44
5.2	O potencial $\Delta U(\varphi)$	45
5.3	A dinâmica	46
5.3.1	Pulsos com amplitudes pequenas	46
5.3.2	Pulsos com amplitudes grandes	47
6	Conclusões	51
	Referências	53

Lista de Figuras

1.1	utilização do <i>wakefield</i> para a aceleração de elétrons [12]	2
3.1	gráficos do potencial $U(\varphi, 0)$ traçados para (a) $V_0 = 0,01$, (b) $V_0 = 0,51$ e (c) $V_0 = 0,99$. Embora os extremos à esquerda dos gráficos correspondam aos valores de φ_{min} referentes às velocidades citadas, os extremos à direita não correspondem aos valores de φ_{max} (os gráficos foram truncados nesta direção)	31
4.1	potencial ΔU para $\psi = 0$. Soluções na região <i>I</i> são periódicas. Na região <i>II</i> , como o potencial não é confinante, a quebra de onda para os elétrons ocorre quando φ atinge se valor mínimo φ_{min}	39
4.2	4.2(a) seção de Poincaré mostrando o espaço de fase próximo ao limiar da estabilidade modulacional, com $\eta = 1,00001\eta_*$; 4.2(b) índice de estabilidade α em função da razão η/η_* ; 4.2(c) seção de Poincaré após a tangência inversa vista em 4.2(b) , com $\eta = 1,0001\eta_*$; $\epsilon = 10^{-11}$	41
4.3	representação da dinâmica através de e_φ no espaço Φ : 4.3(a) $\eta = 1,00001\eta_*$; 4.3(b) $\eta = 1,00021\eta_*$. $e_{wbr} \equiv \chi_e E_{wbr}/(\chi_e + E_{wbr})$	42
4.4	série temporal para o campo elétrico $ d\varphi/d\xi $ para $\eta = 1,0004\eta_*$	43
5.1	região periódica (<i>I</i>) e de quebra de onda (<i>II</i>) para o potencial ΔU em $\psi = 0$	45
5.2	5.2(a) seção de Poincaré mostrando o espaço de fase próximo ao limiar da estabilidade modulacional, com $\eta = 1,001\eta_*$; 5.2(b) índice de estabilidade α em função de η ; $\epsilon = 10^{-11}$	47
5.3	5.3(a) índice de estabilidade α alcança +1; 5.2(b) seção de Poincaré mostrando o espaço de fase após a tangência inversa; 5.3(c) difusão de φ em direção a níveis superiores de $\Delta U(\varphi)$; $\epsilon = 10^{-11}$	48

5.4	5.4(a) índice de estabilidade α em função de η mostra a coexistência de soluções estáveis e instáveis para pulsos com amplitudes grandes; 5.4(b) séries temporais para os potenciais ($\eta = 1,999999215$); em ambas as figuras $\epsilon = 0$.	50
-----	---	----

Capítulo 1

Introdução

1.1 Contexto e motivação

A propagação de pulsos eletromagnéticos intensos em plasmas é um assunto de interesse comum a diversas áreas, dentre as quais podemos citar a aceleração de fótons e partículas, a óptica não-linear, a fusão à laser e outras [1, 2, 3, 4, 5]. Esses pulsos ao propagarem-se no plasma deslocam seus elétrons, criando um campo elétrico com os campos de densidade associados. Sob condições adequadas é possível obter coerência entre estes campos de modo que o pulso mantém a sua forma. Estudos numéricos e analíticos têm sido conduzidos para investigar a localização desses pulsos e suas propriedades. Kozlov et al. [6] investigaram numericamente a propagação de modos eletrostáticos e eletromagnéticos acoplados em plasmas relativísticos frios de elétrons e íons e concluíram que soluções localizadas com pequenas e grandes amplitudes podem estar presentes. Mofiz e de Angelis [7] aplicaram aproximações analíticas para o mesmo modelo e sugeriram como essas soluções localizadas podem ser obtidas. Trabalhos mais recentes fornecem uma melhor compreensão de diversas características que têm sido estudadas, tais como a influência do movimento dos íons em sólitons lentos para a aceleração destas partículas [8], a existência de sólitons propagantes [4], a existência de oscilações de plasma residuais seguindo pulsos isolados [9, 10] e outras. Alguns pontos entretanto, tais como de que maneira soluções localizadas de pequenas amplitudes são destruídas e quais são as características do espectro de soluções em regimes de grandes amplitudes, por exemplo, ainda não são completamente compreendidos. Essas são questões relevantes a quem desejar estabelecer as propriedades da faixa de existência e da estabilidade de soluções localizadas.

1.2 Aceleradores baseados em plasmas

À medida que um pulso eletromagnético intenso (gerado por um laser de alta intensidade, por exemplo) se propaga em um plasma, seu campo elétrico separa os elétrons dos íons. Como os elétrons são muito mais leves, eles se deslocam muito mais que os íons, criando uma separação de cargas. Quando o pulso se afasta, os elétrons são fortemente atraídos de volta pelos íons (que praticamente não se deslocaram), ganhando velocidade durante a trajetória de tal modo que se acumulam (por um curto período) de forma massiva antes de perderem esta energia por *colisões* e retornarem a uma distribuição mais equilibrada. Embora as partículas não estejam se movendo com muita velocidade durante esse período, macroscopicamente parece que há uma “bolha” de carga se movendo através do plasma a velocidades próximas à velocidade da luz. A bolha é de fato a região livre de elétrons (sendo portanto positivamente carregada), seguida por uma região de acúmulo dos mesmos (ou seja, negativamente carregada). Essa configuração, ilustrada na figura 1.1, resulta em um campo elétrico muito intenso no rastro do pulso eletromagnético, o qual é conhecido por *wakefield* (ou, em uma tradução livre, *campo de rastro*). A utilização desses *wakefields* para acelerar partículas tem sido exaustivamente estudada, pois o plasma oferece a vantagem de suportar campos elétricos da ordem de centenas de gigavolts por metro [5], ou seja, algumas ordens de grandeza maiores que os campos suportados nas cavidades (metálicas ou supercondutoras) de aceleradores convencionais. De fato, em experimentos recentes realizados no SLAC (Stanford Linear Accelerator Center), uma certa fração de elétrons inicialmente com 42GeV teve sua energia dobrada ao passar por um acelerador baseado em plasma com 85cm de comprimento [11].

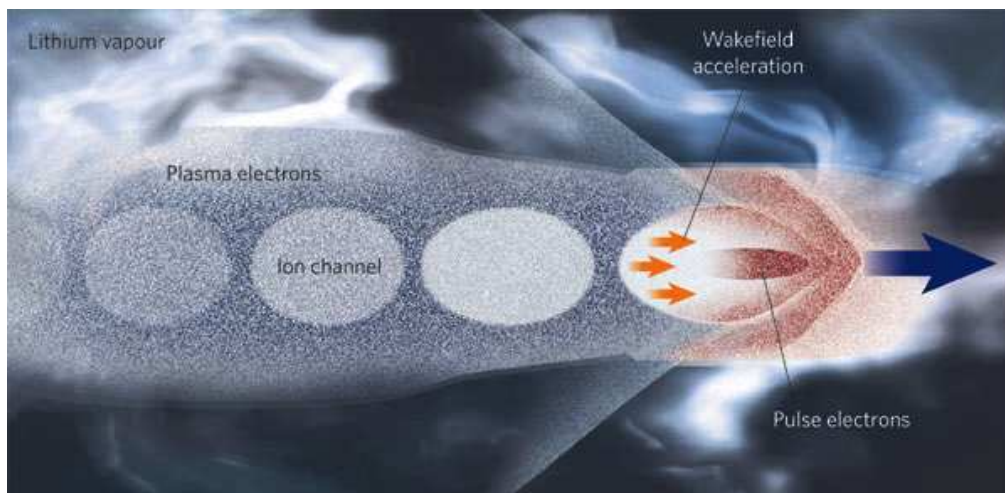


Figura 1.1: utilização do *wakefield* para a aceleração de elétrons [12]

1.3 Estrutura do trabalho

Este trabalho está dividido em seis capítulos, os quais apresentam a introdução do problema, o modelo adotado, o formalismo Hamiltoniano e suas implicações, a propagação de pulsos em alta velocidade, a propagação de pulsos em baixa velocidade e, finalmente, as conclusões obtidas a partir das análises aqui realizadas.

O capítulo 2 apresenta uma derivação detalhada do modelo a ser utilizado. Partindo das equações de Maxwell e da aproximação de fluido, obtemos as equações diferenciais que governam a evolução temporal dos potenciais vetor e escalar (ψ e φ , respectivamente). O potencial vetor ψ está associado ao pulso eletromagnético que se propaga no plasma (produzido por um laser de alta intensidade por exemplo); o potencial escalar φ está associado ao campo elétrico gerado no plasma (o *wakefield*, por exemplo).

No capítulo 3 apresentamos um Hamiltoniano a partir do qual as equações que governam a dinâmica dos potenciais podem ser obtidas. Esse Hamiltoniano nos permite comparar qualitativamente a dinâmica do sistema com uma quase-partícula sob a ação de um potencial efetivo. Além disso, sua forma impõe restrições sobre os valores de φ permitidos para a existência de soluções periódicas e determina o limite de energia dessa quase-partícula, a partir do qual ocorre a quebra de onda. A linearização das equações dos potenciais nos permite determinar as condições necessárias para o surgimento de instabilidade no sistema para pequenas oscilações. Essa instabilidade desempenha um papel importante na obtenção de campos intensos a partir de soluções com amplitudes pequenas. Ainda nesse capítulo discutimos sobre algumas ferramentas de análise não linear, tais como a seção de Poincaré e o índice de estabilidade α , que serão utilizados nos capítulos seguintes.

Tajima e Dawson [2] observaram que a propagação em alta velocidade de pulsos eletromagnéticos em plasmas relativísticos do tipo *underdense*, para os quais a frequência do plasma ω_e é muito menor que a frequência do pulso ω , é um regime conveniente para a aceleração de elétrons por esquemas de *wakefield* (como citado no item 1.2). No capítulo 4, estudamos a existência e a estabilidade de soluções com amplitudes pequenas para esse regime. Um de nossos interesses principais é analisar do ponto de vista da dinâmica não linear qual mecanismo está por trás da destruição de soluções com amplitudes pequenas e do regime adiabático.

No capítulo 5 estudamos pulsos se propagando em baixa velocidade. Partimos da análise de soluções com amplitudes pequenas, de forma análoga ao que fizemos para a propagação em alta velocidade no capítulo 4. Feito isso, analisamos um regime específico, estudado por Kozlov et al. [6], para o qual a existência de soluções com amplitudes grandes

é conhecida. Nosso objetivo é obter mais informações sobre o espectro de soluções com amplitudes grandes, até então apresentado como sendo discreto no espaço de parâmetros, e verificar se essas soluções são realmente pulsos solitários.

No capítulo 6 apresentamos as conclusões obtidas a partir das análises que realizamos para os diferentes regimes citados.

Capítulo 2

O Modelo

Neste capítulo fazemos uma derivação detalhada do modelo adotado. Definimos as características do plasma e (a partir das equações de Maxwell) expressamos os campos elétrico e magnético em termos dos potenciais escalar e vetor. Manipulando estas expressões, concluímos que estes potenciais devem satisfazer as equações de Poisson e da onda inhomogênea, respectivamente.

Aplicando a segunda lei de Newton em partículas sujeitas à força de Lorentz e utilizando a aproximação de fluido, obtemos as equações de movimento que descrevem a resposta do plasma aos campos (e nos permitem resolver o problema auto-consistente).

A partir da equação da continuidade obtemos uma expressão para as densidades dos fluidos de elétrons e íons. Aproveitando a simetria cilíndrica do problema abordado, separamos as equações até então obtidas em componentes longitudinais e transversais.

A seguir, obtemos expressões para as grandezas envolvidas e, utilizando uma integral de movimento, as escrevemos em função dos potenciais. Finalmente, obtemos um conjunto de equações diferenciais não lineares acopladas que descrevem a evolução dos potenciais [6, 7].

2.1 O plasma

Podemos definir um plasma como um gás quase neutro, parcial ou totalmente ionizado, cuja dinâmica é dominada pelos efeitos coletivos (interação entre as partículas carregadas devido às forças coulombianas)¹.

Neste trabalho, consideramos um plasma composto por elétrons e por uma única espécie de íons. Da quase neutralidade, temos que a densidade de elétrons é aproximadamente

¹Uma definição mais rigorosa envolveria a verificação do atendimento a certas condições ou critérios, pois nem todo gás ionizado pode ser classificado como um plasma.

igual à densidade de íons ($n_e \approx n_i \equiv n$, onde n é a densidade do plasma. Além disso, desprezamos as colisões (uma consideração razoável dado que o mecanismo primário de interação entre partículas é via potencial eletromagnético) e os efeitos térmicos.

2.2 Os campos

Para um dado estado do plasma (ou seja, uma distribuição de cargas conhecida), podemos obter os campos elétrico (\mathbf{E}) e magnético (\mathbf{B}) utilizando as equações de Maxwell:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2.4)$$

onde $\mathbf{J} = \sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}$ é densidade de corrente total e $\rho = \sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha}$ é a carga total. O índice α indica o tipo de partícula (i para íons, e para elétrons). Neste trabalho expressamos esses campos em termos dos potenciais escalar (ϕ) e vetor (\mathbf{A}):

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (2.5)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.6)$$

Substituindo (2.5) em (2.1),

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\rho \\ \nabla \cdot \left(-\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) &= 4\pi\rho \\ \nabla^2\phi + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}) &= -4\pi\rho \end{aligned} \quad (2.7)$$

e usando (2.5) e (2.6) em (2.4),

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\
\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \\
\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} - \frac{1}{c} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \phi) - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right]
\end{aligned} \tag{2.8}$$

chegamos a um sistema de duas equações acopladas para os potenciais.

Neste momento, é conveniente definirmos mais algumas características do problema que pretendemos tratar neste trabalho.

Com relação às variáveis, supomos que todas são funções de uma dimensão espacial (a coordenada na direção de propagação da onda, definida como z) e do tempo t . Nessa abordagem unidimensional, o problema pode ser interpretado como uma onda plana que se propaga em um plasma infinito (sem bordas). Embora essa situação seja simplificada em relação ao fenômeno físico em questão (que seria descrito de forma mais completa introduzindo-se um perfil transversal no modelo), ela pode ser utilizada para descrever a dinâmica longitudinal ao longo das linhas de campos magnéticos externos e para descrever a dinâmica na frente de ondas (onde essas são localmente planas). Além disso, temos também a intenção de estabelecer conexões entre nossos resultados e investigações previamente conduzidas nesse modelo unidimensional [6, 7].

A onda (pulso eletromagnético propagando-se no plasma, cuja dinâmica será estudada) é circularmente polarizada no plano xy (direção perpendicular à propagação) e tem a seguinte forma:

$$\mathbf{A}(z, t) = \tilde{\psi}(\tilde{\xi}) [\hat{x} \cos \theta(z, t) + \hat{y} \sin \theta(z, t)] \quad , \quad \theta \equiv kz - \omega t \tag{2.9}$$

que corresponde a uma amplitude, dependente do espaço e do tempo através da variável $\tilde{\xi} = z - Vt$ (V é a velocidade de propagação da onda), modulando uma onda plana.

A utilização dos potenciais ao invés dos campos em geral requer a escolha de um calibre. Considerando-se as características acima definidas, o calibre de Coulomb, em que $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, é uma escolha adequada. Aplicando este calibre nas equações (2.7) e (2.8)

temos que

$$\nabla^2\phi = -4\pi\rho \quad (2.10)$$

ou seja, o potencial escalar deve satisfazer a equação de Poisson, e

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2\mathbf{A} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} - c\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\phi) \quad (2.11)$$

o potencial vetor deve satisfazer a equação da onda inhomogênea.

2.3 A aproximação de fluido

Para descrever o plasma fazemos uso da aproximação de fluido: consideramos este composto por dois fluidos com carga elétrica interpenetrados. Utilizamos então duas equações de movimento (uma para o fluido iônico, com carga positiva, outra para o fluido eletrônico, com carga negativa) para descrever a resposta do plasma aos campos \mathbf{E} e \mathbf{B} (e resolver o problema auto-consistente).

2.3.1 A equação de movimento do fluido

Uma partícula carregada imersa em um campo eletromagnético está sujeita à ação da força de Lorentz e obedece a seguinte equação de movimento:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = q\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c}\right) \quad (2.12)$$

Como em nosso modelo as colisões e efeitos térmicos são desprezados, podemos considerar que todas as partículas de um elemento de fluido se movem juntas, com uma velocidade média igual à velocidade individual das mesmas. Abrindo a derivada total com relação ao tempo

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{P}(\mathbf{r}, \mathbf{t})}{dt} &= \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial r_i} \frac{dr_i}{dt} \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \right] \mathbf{P} \end{aligned}$$

podemos reescrever a equação (2.12):

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \right] \mathbf{P} = q \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right) \quad (2.13)$$

Substituindo os campos elétrico e magnético pelos potenciais escalar e vetor, através das equações (2.5) e (2.6), podemos reescrever (2.13):

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \right] \mathbf{P} = q \left[-\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \right] \quad (2.14)$$

Como temos dois fluidos, utilizamos a partir deste ponto um índice nas equações. Desse modo, a equação (2.14) por exemplo passa a ser

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla) \right] \mathbf{P}_\alpha = q_\alpha \left[-\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{1}{c} \mathbf{v}_\alpha \times (\nabla \times \mathbf{A}) \right] \quad (2.15)$$

Essa é a equação de movimento do fluido, com $\alpha = i$ para o fluido iônico e $\alpha = e$ para o fluido eletrônico.

2.3.2 Equação da continuidade

Esta é a equação da continuidade do fluido:

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (n_\alpha \mathbf{v}_\alpha) = 0 \quad (2.16)$$

2.4 Separação das equações em componentes longitudinais e transversais

Dada a simetria cilíndrica do nosso problema, é interessante separarmos as equações relevantes em componentes longitudinal (na direção de propagação z , de acordo com nosso sistema de coordenadas definido) e transversal (no plano xy). Um vetor \mathbf{G} qualquer, por exemplo, pode ser decomposto da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= G_x \hat{\mathbf{i}} + G_y \hat{\mathbf{j}} + G_z \hat{\mathbf{k}} \\ &= (G_x \hat{\mathbf{i}} + G_y \hat{\mathbf{j}}) + G_z \hat{\mathbf{k}} \\ &= \mathbf{G}_\perp + \mathbf{G}_z \end{aligned}$$

A mesma decomposição pode ser utilizada no operador diferencial ∇ :

$$\begin{aligned}\nabla &= \left(\hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} \right) + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z} \\ &= \nabla_{\perp} + \nabla_z\end{aligned}$$

Através da aplicação deste procedimento (e de algumas manipulações algébricas) nas equações de interesse, podemos separá-las em componentes longitudinal e transversal.

2.4.1 Equação da onda

Como ϕ só possui dependência na coordenada longitudinal z , podemos expressar $\nabla\phi$ como $\hat{\mathbf{k}}(\partial\phi/\partial z)$. Fazendo isto na equação (2.11) e expressando a densidade de corrente como $\mathbf{J} = \mathbf{J}_z + \mathbf{J}_{\perp}$ temos que

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) - \frac{4\pi}{c} J_z \right] \hat{\mathbf{k}} - \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_{\perp}$$

Esta equação pode ser separada em duas partes:

uma transversal,

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_{\perp} \quad (2.17)$$

outra longitudinal,

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \frac{4\pi}{c} J_z \quad (2.18)$$

2.4.2 Equação de movimento do fluido

À esquerda da igualdade na equação de movimento (2.15) temos o produto escalar $\mathbf{v}_{\alpha} \cdot \nabla$, que pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{\alpha} \cdot \nabla &= (\mathbf{v}_{\alpha z} + \mathbf{v}_{\alpha \perp}) \cdot (\nabla_z + \nabla_{\perp}) \\ &= \mathbf{v}_{\alpha z} \cdot \nabla_z + \mathbf{v}_{\alpha z} \cdot \nabla_{\perp} + \mathbf{v}_{\alpha \perp} \cdot \nabla_z + \mathbf{v}_{\alpha \perp} \cdot \nabla_{\perp} \\ &= \mathbf{v}_{\alpha z} \cdot \nabla_z + \mathbf{v}_{\alpha \perp} \cdot \nabla_{\perp}\end{aligned}$$

Mas, como só há dependência espacial em z (direção longitudinal), ∇_{\perp} aplicado a qualquer termo será nulo. Assim,

$$\mathbf{v}_{\alpha} \cdot \nabla = \mathbf{v}_{\alpha z} \cdot \nabla_z = v_{\alpha z} \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.19)$$

Ainda na equação (2.15), à direita da igualdade, temos o produto vetorial $\mathbf{v}_\alpha \times (\nabla \times \mathbf{A})$, que pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_\alpha \times (\nabla \times \mathbf{A}) &= (\mathbf{v}_{\alpha\perp} + \mathbf{v}_{\alpha z}) \times \left[\left(\nabla_\perp + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \times \mathbf{A} \right] \\
&= (\mathbf{v}_{\alpha\perp} + \mathbf{v}_{\alpha z}) \times \left(\hat{k} \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \right)_\perp \\
&= (\mathbf{v}_\perp + \mathbf{v}_{\alpha z}) \times \left(-\frac{\partial A_y}{\partial z} \hat{i} + \frac{\partial A_x}{\partial z} \hat{j} \right) \\
&= \mathbf{v}_{\alpha\perp} \times \left(-\frac{\partial A_y}{\partial z} \hat{i} + \frac{\partial A_x}{\partial z} \hat{j} \right) + \mathbf{v}_{\alpha z} \times \left(-\frac{\partial A_y}{\partial z} \hat{i} + \frac{\partial A_x}{\partial z} \hat{j} \right) \\
&= \left(v_{\alpha x} \frac{\partial A_y}{\partial z} + v_{\alpha y} \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) \hat{k} - v_{\alpha z} \frac{\partial A_y}{\partial z} \hat{i} - v_{\alpha z} \frac{\partial A_x}{\partial z} \hat{j} \\
&= \left(\mathbf{v}_{\alpha\perp} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \right) \hat{k} - v_{\alpha z} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z}
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Aplicando agora (2.20) e (2.19) em (2.15) e abrindo o vetor $\mathbf{P}_\alpha = \mathbf{P}_{\alpha z} + \mathbf{P}_{\alpha\perp}$ temos

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_{\alpha z} \frac{\partial}{\partial z} \right) (\mathbf{P}_{\alpha z} + \mathbf{P}_{\alpha\perp}) = q_\alpha \left[-\frac{\partial \phi}{\partial z} \hat{k} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{1}{c} \left(\mathbf{v}_{\alpha\perp} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \right)_z \hat{k} - \frac{1}{c} \left(v_{\alpha z} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \right)_\perp \right]$$

Dividindo agora ambos os lados da igualdade por mc e definindo $\mathbf{U} = \frac{\mathbf{P}}{mc}$,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_{\alpha z} \frac{\partial}{\partial z} \right) (\mathbf{U}_{\alpha z} + \mathbf{U}_{\alpha\perp}) = \frac{q_\alpha}{mc} \left[-\frac{\partial \phi}{\partial z} \hat{k} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{1}{c} \left(\mathbf{v}_{\alpha\perp} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \right)_z \hat{k} - \frac{1}{c} \left(v_{\alpha z} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \right)_\perp \right]$$

temos uma equação que pode ser separada em duas partes:

uma transversal,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_{\alpha z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{U}_{\alpha\perp} &= -\frac{q_\alpha}{mc^2} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + v_{\alpha z} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \right) \\
\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_{\alpha z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{U}_{\alpha\perp} + \frac{q_\alpha}{mc^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_{\alpha z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{A} &= 0 \\
\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_{\alpha z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\mathbf{U}_{\alpha\perp} + \frac{q_\alpha}{mc^2} \mathbf{A} \right) &= 0
\end{aligned} \tag{2.21}$$

parte transversal da equação de movimento

outra longitudinal,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_{\alpha z} \frac{\partial}{\partial z} \right) U_{\alpha z} = \frac{q_\alpha}{mc} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{c} \mathbf{v}_{\alpha\perp} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \right)$$

que pode ser reescrita como

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_{\alpha z} \frac{\partial}{\partial z}\right) U_{\alpha z} = \frac{q_{\alpha}}{mc^2} \left(-c \frac{\partial \phi}{\partial z} + \mathbf{v}_{\alpha \perp} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z}\right) \quad (2.22)$$

parte longitudinal da equação de movimento

2.5 Obtenção da velocidade de propagação das partículas \mathbf{v}_{α}

Podemos expressar \mathbf{v}_{α} como a soma de suas componentes longitudinal e transversal $\mathbf{v}_{\alpha} = \mathbf{v}_{\alpha z} + \mathbf{v}_{\alpha \perp}$, onde a componente $\mathbf{v}_{\alpha \perp}$ pode ser calculada a partir da parte transversal da equação de movimento (2.21), que nos leva a concluir que

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{U}_{\alpha \perp} + \frac{q_{\alpha}}{mc^2} \mathbf{A}\right) &= \text{constante} \\ \mathbf{U}_{\alpha \perp} &= \text{constante} - \frac{q_{\alpha}}{mc^2} \mathbf{A} \end{aligned}$$

Tomando a constante igual a zero (ou seja, assumindo que os elétrons e íons sejam imóveis no infinito onde o campo é nulo) e considerando que $\mathbf{U} = \frac{\mathbf{P}}{mc} = \frac{\gamma \mathbf{v}}{c}$ temos que

$$\mathbf{v}_{\alpha \perp} = -\frac{q_{\alpha}}{mc\gamma_{\alpha}} \mathbf{A} \quad (2.23)$$

CALCULAR $v_{\alpha z}$???

2.6 Obtenção da densidade de corrente \mathbf{J}

De forma análoga ao que fizemos com a velocidade \mathbf{v} , vamos expressar a densidade de corrente \mathbf{J} em função de suas componentes longitudinal e transversal $\mathbf{J} = \mathbf{J}_z + \mathbf{J}_{\perp}$. Para obtermos a componente J_z vamos utilizar a parte longitudinal da equação da onda (2.18)

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) = \frac{4\pi}{c} J_z$$

Como pretendemos expressar todas as equações como funções da variável $\tilde{\xi} = z - Vt$, é interessante explicitarmos as relações entre z , t e $\tilde{\xi}$. Partindo da definição de $\tilde{\xi}$, temos

que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial z} &= 1 \\ \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial t} &= -V\end{aligned}$$

ou seja, podemos estabelecer uma equivalência entre as derivadas parciais em relação a z e t e as derivadas parciais em relação a $\tilde{\xi}$

$$\frac{\partial}{\partial z} \equiv \frac{\partial}{\partial \tilde{\xi}} \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \equiv -V \frac{\partial}{\partial \tilde{\xi}} \quad (2.25)$$

Aplicando essas relações na equação (2.18) podemos obter uma expressão para J_z :

$$J_z = -\frac{V}{4\pi} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tilde{\xi}^2} \quad (2.26)$$

Essa expressão pode ainda ser simplificada se aplicarmos a relação (2.25) na equação de Poisson (2.7)

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -4\pi\rho \rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tilde{\xi}^2} = -4\pi\rho \quad (2.27)$$

e abrirmos a expressão da carga total

$$\begin{aligned}\rho &= \sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{\alpha} \\ &= (e)n_i + (-e)n_e \\ \rho &= e\delta n\end{aligned} \quad (2.28)$$

onde n_i é a densidade de íons, n_e é a densidade de elétrons e $\delta n = n_i - n_e$. Finalmente, aplicando (2.28) e (2.27) em (2.26),

$$J_z = eV\delta n \quad (2.29)$$

parte longitudinal da densidade de corrente

que pode ser interpretada como a densidade de corrente líquida no referencial da onda.

A componente \mathbf{J}_{\perp} pode ser obtida aplicando-se a componente transversal da velocidade

$\mathbf{v}_{\alpha\perp}$ (2.23) na expressão $\mathbf{J} = \sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}$

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_{\perp} &= \sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha\perp} \\
&= - \sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} \left(\frac{q_{\alpha}}{m c \gamma_{\alpha}} \mathbf{A} \right) \\
&= - \sum_{\alpha} \frac{n_{\alpha} q_{\alpha}^2}{m c \gamma_{\alpha}} \mathbf{A} \\
&= - \frac{n_e e^2}{m_e c \gamma_e} \mathbf{A} - \frac{n_i e^2}{m_i c \gamma_i} \mathbf{A} \\
&= - \frac{e^2}{m_e c} \left(\frac{n_e}{\gamma_e} + \frac{m_e n_i}{m_i \gamma_i} \right) \mathbf{A}
\end{aligned}$$

ou ainda, definindo $\mu = m_e/m_i$,

$$\mathbf{J}_{\perp} = - \frac{e^2}{m_e c} \left(\frac{n_e}{\gamma_e} + \mu \frac{n_i}{\gamma_i} \right) \mathbf{A} \quad (2.30)$$

parte transversal da densidade de corrente

2.7 Obtenção da densidade de partículas n_{α}

Abrindo o operador diferencial ∇ na equação da continuidade (2.16)

$$\frac{\partial n_{\alpha}}{\partial t} + (\nabla_z + \nabla_{\perp}) \cdot (n_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}) = 0$$

Dado que só há dependência espacial em z , o produto escalar de ∇_{\perp} com qualquer outro vetor terá resultado nulo. Podemos então simplificar a expressão acima:

$$\frac{\partial n_{\alpha}}{\partial t} + \nabla_z \cdot (n_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}) = 0$$

Além disso, $\nabla_z \cdot \mathbf{v}_{\alpha} = \nabla_z \cdot (\mathbf{v}_{\alpha z} + \mathbf{v}_{\alpha\perp}) = \nabla_z \cdot \mathbf{v}_{\alpha z} = (\partial/\partial z)(v_{\alpha z})$, ou seja

$$\frac{\partial n_{\alpha}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (n_{\alpha} v_{\alpha z}) = 0$$

Definindo $\beta_{\alpha} \equiv v_{\alpha z}/c$ e aplicando essa definição na equação anterior

$$\frac{\partial n_{\alpha}}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial z} (n_{\alpha} \beta_{\alpha}) = 0$$

Utilizando as relações entre as derivadas em z e t e as derivadas em $\tilde{\xi}$, (2.24) e (2.25)

$$\begin{aligned} -V \frac{\partial n_\alpha}{\partial \tilde{\xi}} + c \frac{\partial}{\partial \tilde{\xi}}(n_\alpha \beta_\alpha) &= 0 \\ \frac{\partial n_\alpha}{\partial \tilde{\xi}} - \frac{c}{V} \frac{\partial}{\partial \tilde{\xi}}(n_\alpha \beta_\alpha) &= 0 \end{aligned}$$

e definindo $V_0 \equiv V/c$

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_\alpha}{\partial \tilde{\xi}} - \frac{1}{V_0} \frac{\partial}{\partial \tilde{\xi}}(n_\alpha \beta_\alpha) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{\xi}} \left(n_\alpha - \frac{n_\alpha \beta_\alpha}{V_0} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (2.31)$$

podemos a partir da equação (2.31) obter n_α :

$$n_\alpha - \frac{n_\alpha \beta_\alpha}{V_0} = \text{constante} \equiv n_0 \quad (2.32)$$

Dessa expressão vemos que se as partículas se deslocarem com a mesma velocidade que a onda ($\beta_\alpha = V_0$), a constante $n_0 = 0$. Ou seja, todas as partículas a acompanham e a densidade de fundo é nula. Considerando o caso em que n_0 não é nula e isolando n_α em (2.32) temos que

$$n_\alpha = \frac{n_0 V_0}{V_0 - \beta_\alpha} \quad (2.33)$$

Essa expressão nos permite observar que $n_\alpha \rightarrow \infty$ à medida que $\beta_\alpha \rightarrow V_0$, uma condição que caracteriza a quebra de onda.²

2.8 Obtenção do fator relativístico γ_α

Por definição,

$$\gamma_\alpha = \sqrt{\frac{1}{1 - v_{\alpha z}^2/c^2}}$$

Faremos algumas manipulações algébricas para expressar γ_α^2 como função de U_α^2 :

$$\begin{aligned} \gamma_\alpha^2 &= \frac{1}{1 - v_{\alpha z}^2/c^2} = \frac{1 - v_{\alpha z}^2/c^2 + v_{\alpha z}^2/c^2}{1 - v_{\alpha z}^2/c^2} = 1 + \frac{v_{\alpha z}^2/c^2}{1 - v_{\alpha z}^2/c^2} \\ &= 1 + \frac{\gamma_\alpha^2 v_\alpha^2}{c^2} = 1 + \frac{m^2 \gamma_\alpha^2 v_\alpha^2}{m^2 c^2} = 1 + \frac{P_\alpha^2}{m^2 c^2} = 1 + U_\alpha^2 \end{aligned}$$

²A quebra de onda será discutida na seção 3.2.2.

Com isso, temos a seguinte expressão para γ_α^2 :

$$\gamma_\alpha^2 = 1 + U_\alpha^2 \quad (2.34)$$

2.9 Obtenção da integral de movimento

Substituindo $\mathbf{v}_{\alpha\perp}$ (2.23) e $v_{\alpha z}$ por β_α na parte longitudinal da equação de movimento (2.22) temos

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\beta_\alpha \frac{\partial}{\partial z} \right) U_{\alpha z} = -\frac{q_\alpha}{m_\alpha c^2} \left(c \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha c \gamma_\alpha} \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \right)$$

ou ainda,

$$\frac{\partial U_{\alpha z}}{\partial t} + c\beta_\alpha \frac{\partial U_{\alpha z}}{\partial z} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha c} \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{q_\alpha^2}{m_\alpha^2 c^3 \gamma_\alpha} \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} = 0$$

Reescrevendo o produto entre o potencial vetor e sua derivada em relação a z

$$\mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial |\mathbf{A}|^2}{\partial z}$$

e aplicando as relações entre as derivadas em z e t e as derivadas em $\tilde{\xi}$, (2.24) e (2.25) temos ³

$$-V \frac{dU_{\alpha z}}{d\tilde{\xi}} + c\beta_\alpha \frac{dU_{\alpha z}}{d\tilde{\xi}} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha c} \frac{d\phi}{d\tilde{\xi}} + \frac{q_\alpha^2}{m_\alpha^2 c^3 \gamma_\alpha} \frac{1}{2} \frac{d|\mathbf{A}|^2}{d\tilde{\xi}} = 0$$

Definindo $\lambda_\alpha \equiv \frac{q_\alpha^2}{m_\alpha^2 c^4} = \frac{e^2}{m_\alpha^2 c^4}$, esta expressão pode ser reescrita como

$$\left(\beta_\alpha - \frac{V}{c} \right) \frac{dU_{\alpha z}}{d\tilde{\xi}} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha c^2} \frac{d\phi}{d\tilde{\xi}} + \frac{\lambda_\alpha}{2\gamma_\alpha} \frac{d|\mathbf{A}|^2}{d\tilde{\xi}} = 0$$

Substituindo V/c por V_0 (conforme definimos anteriormente), obtemos a seguinte expressão

$$(\beta_\alpha - V_0) \frac{dU_{\alpha z}}{d\tilde{\xi}} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha c^2} \frac{d\phi}{d\tilde{\xi}} + \frac{\lambda_\alpha}{2\gamma_\alpha} \frac{d|\mathbf{A}|^2}{d\tilde{\xi}} = 0 \quad (2.35)$$

Como queremos obter uma integral de movimento a partir dessa equação, tentamos reescrevê-la de uma forma mais *compacta*. Expressando β_α como função de $U_{\alpha z}$

$$U_{\alpha z} = \frac{P_{\alpha z}}{m_\alpha c} = \frac{m_\alpha \gamma_\alpha v_{\alpha z}}{m_\alpha c} = \gamma_\alpha \beta_\alpha \rightarrow \beta_\alpha = \frac{U_{\alpha z}}{\gamma_\alpha} \quad (2.36)$$

³Nessa expressão as derivadas parciais foram substituídas por derivadas totais sem perda de generalidade, dado que todas as variáveis são funções somente de $\tilde{\xi}$.

e aplicando (2.36) em (2.35) temos

$$\frac{U_{\alpha z}}{\gamma_{\alpha}} \frac{dU_{\alpha z}}{d\tilde{\xi}} - V_0 \frac{dU_{\alpha z}}{d\tilde{\xi}} + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha} c^2} \frac{d\phi}{d\tilde{\xi}} + \frac{\lambda_{\alpha}}{2\gamma_{\alpha}} \frac{d|\mathbf{A}|^2}{d\tilde{\xi}} = 0 \quad (2.37)$$

Analisando os termos desta equação que contém $1/\gamma_{\alpha}$ (ou seja, o primeiro e o quarto termos):

$$\begin{aligned} \frac{U_{\alpha z}}{\gamma_{\alpha}} \frac{dU_{\alpha z}}{d\tilde{\xi}} + \frac{\lambda_{\alpha}}{2\gamma_{\alpha}} \frac{d|\mathbf{A}|^2}{d\tilde{\xi}} &= \frac{1}{2\gamma_{\alpha}} \frac{dU_{\alpha z}^2}{d\tilde{\xi}} + \frac{\lambda_{\alpha}}{2\gamma_{\alpha}} \frac{d|\mathbf{A}|^2}{d\tilde{\xi}} \\ &= \frac{1}{2\gamma_{\alpha}} \left(\frac{dU_{\alpha z}^2}{d\tilde{\xi}} + \lambda_{\alpha} \frac{d|\mathbf{A}|^2}{d\tilde{\xi}} \right) \end{aligned} \quad (2.38)$$

Mas, de (2.34) temos que

$$\gamma_{\alpha}^2 = 1 + \mathbf{U}_{\alpha}^2 = 1 + \mathbf{U}_{\alpha\perp}^2 + U_{\alpha z}^2 \quad (2.39)$$

e de (2.23) podemos expressar $\mathbf{U}_{\alpha\perp}$ em função de $|\mathbf{A}|^2$

$$\mathbf{U}_{\alpha\perp}^2 = \frac{(-q_{\alpha})^2}{m_{\alpha}^2 c^4} |\mathbf{A}|^2 = \frac{e^2}{m_{\alpha}^2 c^4} |\mathbf{A}|^2 = \lambda_{\alpha} |\mathbf{A}|^2 \quad (2.40)$$

Substituindo então (2.40) em (2.39),

$$\gamma_{\alpha}^2 = 1 + \lambda_{\alpha} |\mathbf{A}|^2 + U_{\alpha z}^2 \quad (2.41)$$

derivando esta expressão em relação a $\tilde{\xi}$

$$\frac{d\gamma_{\alpha}^2}{d\tilde{\xi}} = \frac{dU_{\alpha z}^2}{d\tilde{\xi}} + \lambda_{\alpha} \frac{d|\mathbf{A}|^2}{d\tilde{\xi}} \quad (2.42)$$

e aplicando (2.42) em (2.38), temos

$$\begin{aligned} \frac{U_{\alpha z}}{\gamma_{\alpha}} \frac{dU_{\alpha z}}{d\tilde{\xi}} + \frac{\lambda_{\alpha}}{2\gamma_{\alpha}} \frac{d|\mathbf{A}|^2}{d\tilde{\xi}} &= \frac{1}{2\gamma_{\alpha}} \left(\frac{dU_{\alpha z}^2}{d\tilde{\xi}} + \frac{d|\mathbf{A}|^2}{d\tilde{\xi}} \right) \\ &= \frac{1}{2\gamma_{\alpha}} \left(\frac{d\gamma_{\alpha}^2}{d\tilde{\xi}} \right) \\ &= \frac{1}{2\gamma_{\alpha}} \left(2\gamma_{\alpha} \frac{d\gamma_{\alpha}}{d\tilde{\xi}} \right) \\ \frac{U_{\alpha z}}{\gamma_{\alpha}} \frac{dU_{\alpha z}}{d\tilde{\xi}} + \frac{\lambda_{\alpha}}{2\gamma_{\alpha}} \frac{d|\mathbf{A}|^2}{d\tilde{\xi}} &= \frac{d\gamma_{\alpha}}{d\tilde{\xi}} \end{aligned} \quad (2.43)$$

Utilizando (2.43) podemos reescrever (2.37),

$$\begin{aligned}\frac{d\gamma_\alpha}{d\tilde{\xi}} - V_0 \frac{dU_{\alpha z}}{d\tilde{\xi}} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha c^2} \frac{d\phi}{d\tilde{\xi}} &= 0 \\ \frac{d}{d\tilde{\xi}} \left(\gamma_\alpha - V_0 U_{\alpha z} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha c^2} \phi \right) &= 0\end{aligned}$$

ou seja,

$$\gamma_\alpha - V_0 U_{\alpha z} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha c^2} \phi = \text{constante} \quad (2.44)$$

Podemos ainda aplicar a relação (2.36), entre $U_{\alpha z}$ e $\gamma_\alpha \beta_\alpha$, em (2.44)

$$\gamma_\alpha (1 - \beta_\alpha V_0) + \frac{q_\alpha}{m_\alpha c^2} \phi = \text{constante}$$

Considerando que, para $|\tilde{\xi}| \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned}\gamma_\alpha &\rightarrow 1 \\ \beta_\alpha, \phi &\rightarrow 0\end{aligned}$$

podemos concluir que a constante é igual a 1. Finalmente, temos a integral de movimento

$$\gamma_\alpha (1 - \beta_\alpha V_0) + \frac{q_\alpha}{m_\alpha c^2} \phi = 1 \quad (2.45)$$

a partir da qual poderemos expressar todas as quantidades em termos dos potenciais ϕ e \mathbf{A} .

2.10 Expressando γ_α em termos dos potenciais

Partindo da integral de movimento (2.45)

$$\begin{aligned}\gamma_\alpha (1 - \beta_\alpha V_0) &= 1 - \frac{q_\alpha}{m_\alpha c^2} \phi \\ \gamma_\alpha^2 (1 - \beta_\alpha V_0)^2 &= \left(1 - \frac{q_\alpha}{m_\alpha c^2} \phi \right)^2 \\ \gamma_\alpha^2 \left(1 - 2 \frac{U_{\alpha z}}{\gamma_\alpha} V_0 + \frac{U_{\alpha z}^2}{\gamma_\alpha^2} V_0^2 \right) &= \left(1 - \frac{q_\alpha}{m_\alpha c^2} \phi \right)^2 \\ \gamma_\alpha^2 - 2\gamma_\alpha U_{\alpha z} V_0 + U_{\alpha z}^2 V_0^2 &= \left(1 - \frac{q_\alpha}{m_\alpha c^2} \phi \right)^2\end{aligned} \quad (2.46)$$

De (2.41) temos que $U_{\alpha z}^2 = \gamma_\alpha^2 - 1 - \lambda_\alpha |\mathbf{A}|^2$. Aplicando esta relação em (2.46),

$$\begin{aligned}\gamma_\alpha^2 - 2\gamma_\alpha U_{\alpha z} V_0 + (\gamma_\alpha^2 - 1 - \lambda_\alpha |\mathbf{A}|^2) V_0^2 &= \left(1 - \frac{q_\alpha}{m_\alpha c^2} \phi\right)^2 \\ \gamma_\alpha^2 + \gamma_\alpha^2 V_0^2 - 2\gamma_\alpha U_{\alpha z} V_0 &= \left(1 - \frac{q_\alpha}{m_\alpha c^2} \phi\right)^2 + (1 + \lambda_\alpha |\mathbf{A}|^2) V_0^2\end{aligned}\quad (2.47)$$

Manipulando o lado esquerdo da igualdade

$$\begin{aligned}\gamma_\alpha^2 + \gamma_\alpha^2 V_0^2 - 2\gamma_\alpha U_{\alpha z} V_0 &= \gamma_\alpha^2 + \gamma_\alpha^2 V_0^2 - 2\gamma_\alpha (\gamma_\alpha \beta_\alpha) V_0 \\ &= \gamma_\alpha^2 + \gamma_\alpha^2 V_0^2 - 2\gamma_\alpha^2 \beta_\alpha V_0 + \gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 - \gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \\ &= \gamma_\alpha^2 + \gamma_\alpha^2 (V_0 - \beta_\alpha)^2 - \gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \\ &= \gamma_\alpha^2 + \gamma_\alpha^2 (V_0 - \beta_\alpha)^2 - (U_{\alpha z}^2) \\ &= \gamma_\alpha^2 + \gamma_\alpha^2 (V_0 - \beta_\alpha)^2 - (\gamma_\alpha^2 - 1 - \lambda_\alpha |\mathbf{A}|^2) \\ \gamma_\alpha^2 + \gamma_\alpha^2 V_0^2 - 2\gamma_\alpha U_{\alpha z} V_0 &= \gamma_\alpha^2 (V_0 - \beta_\alpha)^2 + 1 + \lambda_\alpha |\mathbf{A}|^2\end{aligned}\quad (2.48)$$

podemos reescrever (2.47):

$$\begin{aligned}\gamma_\alpha^2 (V_0 - \beta_\alpha)^2 + 1 + \lambda_\alpha |\mathbf{A}|^2 &= \left(1 - \frac{q_\alpha}{m_\alpha c^2} \phi\right)^2 + (1 + \lambda_\alpha |\mathbf{A}|^2) V_0^2 \\ \gamma_\alpha^2 (V_0 - \beta_\alpha)^2 &= \left(1 - \frac{q_\alpha}{m_\alpha c^2} \phi\right)^2 + (1 + \lambda_\alpha |\mathbf{A}|^2) V_0^2 - (1 + \lambda_\alpha |\mathbf{A}|^2) \\ \gamma_\alpha^2 (V_0 - \beta_\alpha)^2 &= \left(1 - \frac{q_\alpha}{m_\alpha c^2} \phi\right)^2 + (V_0^2 - 1)(1 + \lambda_\alpha |\mathbf{A}|^2)\end{aligned}$$

Definindo $p \equiv 1 - V_0^2$

$$\begin{aligned}\gamma_\alpha^2 (V_0 - \beta_\alpha)^2 &= \left(1 - \frac{q_\alpha}{m_\alpha c^2} \phi\right)^2 - p(1 + \lambda_\alpha |\mathbf{A}|^2) \\ \gamma_\alpha (V_0 - \beta_\alpha) &= \left[\left(1 - \frac{q_\alpha}{m_\alpha c^2} \phi\right)^2 - p(1 + \lambda_\alpha |\mathbf{A}|^2)\right]^{\frac{1}{2}}\end{aligned}\quad (2.49)$$

e multiplicando $-V_0$, obtemos a seguinte expressão

$$-\gamma_\alpha V_0^2 + \gamma_\alpha V_0 \beta_\alpha = -V_0 \left[\left(1 - \frac{q_\alpha}{m_\alpha c^2} \phi\right)^2 - p(1 + \lambda_\alpha |\mathbf{A}|^2)\right]^{\frac{1}{2}}$$

cujo lado esquerdo da igualdade pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \gamma_\alpha V_0 \beta_\alpha - \gamma_\alpha V_0^2 &= \gamma_\alpha V_0 \beta_\alpha - \gamma_\alpha V_0^2 + \gamma_\alpha - \gamma_\alpha \\
 &= \gamma_\alpha (1 - V_0^2) - \gamma_\alpha (1 - \beta_\alpha V_0) \\
 \gamma_\alpha V_0 \beta_\alpha - \gamma_\alpha V_0^2 &= p\gamma_\alpha - \gamma_\alpha (1 - \beta_\alpha V_0)
 \end{aligned} \tag{2.50}$$

Da integral de movimento (2.45) temos

$$\gamma_\alpha (1 - \beta_\alpha V_0) = 1 - \frac{q_\alpha}{m_\alpha c^2} \phi \tag{2.51}$$

que, ao ser aplicada em (2.50), resulta na seguinte expressão :

$$\begin{aligned}
 p\gamma_\alpha - \left(1 - \frac{q_\alpha}{m_\alpha c^2} \phi\right) &= -V_0 \left[\left(1 - \frac{q_\alpha}{m_\alpha c^2} \phi\right)^2 - p(1 + \lambda_\alpha |\mathbf{A}|^2) \right]^{\frac{1}{2}} \\
 \gamma_\alpha &= \left\{ \left(1 - \frac{q_\alpha}{m_\alpha c^2} \phi\right) - V_0 \left[\left(1 - \frac{q_\alpha}{m_\alpha c^2} \phi\right)^2 - p(1 + \lambda_\alpha |\mathbf{A}|^2) \right]^{\frac{1}{2}} \right\} / p
 \end{aligned} \tag{2.52}$$

γ_α em função dos potenciais

2.11 Expressando β_α em termos dos potenciais

Dividindo (2.49) por V_0

$$\gamma_\alpha - \frac{\gamma_\alpha \beta_\alpha}{V_0} = \frac{1}{V_0} \left[\left(1 - \frac{q_\alpha}{m_\alpha c^2} \phi\right)^2 - p(1 + \lambda_\alpha |\mathbf{A}|^2) \right]^{\frac{1}{2}}$$

podemos reescrever o lado esquerdo da igualdade da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \gamma_\alpha - \frac{\gamma_\alpha \beta_\alpha}{V_0} &= \gamma_\alpha - \frac{\gamma_\alpha \beta_\alpha}{V_0} + \gamma_\alpha \beta_\alpha V_0 - \gamma_\alpha \beta_\alpha V_0 \\
 \gamma_\alpha - \frac{\gamma_\alpha \beta_\alpha}{V_0} &= \gamma_\alpha (1 - \beta_\alpha V_0) + \gamma_\alpha \beta_\alpha V_0 - \frac{\gamma_\alpha \beta_\alpha}{V_0}
 \end{aligned} \tag{2.53}$$

ou ainda, utilizando a relação (2.51),

$$\gamma_\alpha - \frac{\gamma_\alpha \beta_\alpha}{V_0} = \left(1 - \frac{q_\alpha}{m_\alpha c^2} \phi\right) + \gamma_\alpha \beta_\alpha V_0 - \frac{\gamma_\alpha \beta_\alpha}{V_0}$$

Substituindo a expressão acima em (2.53)

$$\left(1 - \frac{q_\alpha}{m_\alpha c^2} \phi\right) + \gamma_\alpha \beta_\alpha V_0 - \frac{\gamma_\alpha \beta_\alpha}{V_0} = \frac{1}{V_0} \left[\left(1 - \frac{q_\alpha}{m_\alpha c^2} \phi\right)^2 - p(1 + \lambda_\alpha |\mathbf{A}|^2) \right]^{\frac{1}{2}}$$

e multiplicando-a por $-V_0$

$$\begin{aligned} -V_0 \left(1 - \frac{q_\alpha}{m_\alpha c^2} \phi\right) + \gamma_\alpha \beta_\alpha V_0^2 - \gamma_\alpha \beta_\alpha &= - \left[\left(1 - \frac{q_\alpha}{m_\alpha c^2} \phi\right)^2 - p(1 + \lambda_\alpha |\mathbf{A}|^2) \right]^{\frac{1}{2}} \\ -V_0 \left(1 - \frac{q_\alpha}{m_\alpha c^2} \phi\right) + \gamma_\alpha \beta_\alpha (1 - V_0^2) &= - \left[\left(1 - \frac{q_\alpha}{m_\alpha c^2} \phi\right)^2 - p(1 + \lambda_\alpha |\mathbf{A}|^2) \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Mas, como já definimos, $p \equiv 1 - V_0^2$:

$$-V_0 \left(1 - \frac{q_\alpha}{m_\alpha c^2} \phi\right) + p \gamma_\alpha \beta_\alpha = - \left[\left(1 - \frac{q_\alpha}{m_\alpha c^2} \phi\right)^2 - p(1 + \lambda_\alpha |\mathbf{A}|^2) \right]^{\frac{1}{2}}$$

Finalmente, podemos isolar β_α e expressá-lo em função dos potenciais

$$\beta_\alpha = \left\{ V_0 \left(1 - \frac{q_\alpha}{m_\alpha c^2} \phi\right) - \left[\left(1 - \frac{q_\alpha}{m_\alpha c^2} \phi\right)^2 - p(1 + \lambda_\alpha |\mathbf{A}|^2) \right]^{\frac{1}{2}} \right\} / p \gamma_\alpha \quad (2.54)$$

2.12 Expressando n_α em termos dos potenciais

Tomando a inversa de (2.49)

$$\frac{1}{\gamma_\alpha (V_0 - \beta_\alpha)} = \left[\left(1 - \frac{q_\alpha}{m_\alpha c^2} \phi\right)^2 - p(1 + \lambda_\alpha |\mathbf{A}|^2) \right]^{-\frac{1}{2}}$$

e multiplicando-a por $n_0 V_0$

$$\frac{n_0 V_0}{(V_0 - \beta_\alpha)} = n_0 V_0 \gamma_\alpha \left[\left(1 - \frac{q_\alpha}{m_\alpha c^2} \phi\right)^2 - p(1 + \lambda_\alpha |\mathbf{A}|^2) \right]^{-\frac{1}{2}}$$

Mas, de (2.33), temos que o lado esquerdo da igualdade é o próprio n_α . Ou seja, esta é a expressão de n_α em função dos potenciais:

$$n_\alpha = n_0 V_0 \gamma_\alpha \left[\left(1 - \frac{q_\alpha}{m_\alpha c^2} \phi\right)^2 - p(1 + \lambda_\alpha |\mathbf{A}|^2) \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (2.55)$$

2.13 Expressando \mathbf{J}_\perp em termos dos potenciais

Utilizando a expressão obtida para n_α (2.55) na equação da \mathbf{J}_\perp (2.30)

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_\perp = & - \frac{e^2}{m_e c} \left\{ \frac{n_0 V_0 \gamma_e}{\gamma_e} \left[\left(1 - \frac{q_e}{m_e c^2} \phi \right)^2 - p(1 + \lambda_e |\mathbf{A}|^2) \right]^{-\frac{1}{2}} + \right. \\ & \left. + \frac{n_0 V_0 \gamma_i}{\gamma_i} \mu \left[\left(1 - \frac{q_i}{m_i c^2} \phi \right)^2 - p(1 + \lambda_i |\mathbf{A}|^2) \right]^{-\frac{1}{2}} \right\} \mathbf{A} \end{aligned} \quad (2.56)$$

Expressando λ_i em função de λ_e

$$\lambda_i = \frac{e^2}{m_i^2 c^4} = \frac{m_e^2}{m_e^2} \frac{e^2}{m_i^2 c^4} = \frac{m_e^2}{m_i^2} \frac{e^2}{m_e^2 c^4} = \mu \lambda_e \quad (2.57)$$

e considerando que a carga dos elétrons é $q_e = -e$ e a carga dos íons é $q_i = e$

$$\frac{q_i}{m_i c^2} \phi = \frac{m_e}{m_e} \frac{q_i}{m_i c^2} \phi = \frac{m_e}{m_i} \frac{q_i}{m_e c^2} \phi = \mu \frac{e}{m_e c^2} \phi = \lambda_e^{\frac{1}{2}} \phi$$

podemos reescrever a expressão (2.56) da seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_\perp = & - \frac{n_0 e^2}{m_e c} V_0 \left\{ \frac{1}{[(1 + \lambda_e^{\frac{1}{2}} \phi)^2 - p(1 + \lambda_e |\mathbf{A}|^2)]^{\frac{1}{2}}} + \right. \\ & \left. + \frac{\mu}{[(1 - \mu \lambda_e^{\frac{1}{2}} \phi)^2 - p(1 + \mu^2 \lambda_e |\mathbf{A}|^2)]^{\frac{1}{2}}} \right\} \mathbf{A} \end{aligned} \quad (2.58)$$

Definindo

$$\varphi^2 \equiv \lambda_e \phi^2 \quad (2.59)$$

$$\psi^2 \equiv \lambda_e |\mathbf{A}|^2 \quad (2.60)$$

e aplicando (2.59) e (2.60) em (2.58) temos

$$\mathbf{J}_\perp = - \frac{n_0 e^2}{m_e c} V_0 \left[\frac{1}{\sqrt{(1 + \varphi)^2 - p(1 + \psi^2)}} + \frac{\mu}{\sqrt{(1 - \mu \varphi)^2 - p(1 + \mu^2 \psi^2)}} \right] \mathbf{A}$$

ou ainda, se definirmos (por simplicidade de notação)

$$r_e(\varphi, \psi) \equiv \sqrt{(1 + \varphi)^2 - p(1 + \psi^2)} \quad (2.61)$$

$$r_i(\varphi, \psi) \equiv \sqrt{(1 - \mu \varphi)^2 - p(1 + \mu^2 \psi^2)} \quad (2.62)$$

temos finalmente \mathbf{J}_\perp em função dos potenciais

$$\mathbf{J}_\perp = -\frac{n_0 e^2}{m_e c} V_0 \left[\frac{1}{r_e(\varphi, \psi)} + \frac{\mu}{r_i(\varphi, \psi)} \right] \mathbf{A} \quad (2.63)$$

2.14 Expressando δn em termos dos potenciais

Como $\delta n = n_i - n_e$, temos:

$$\delta n = n_0 V_0 \left\{ \gamma_i \left[\left(1 - \frac{q_i}{m_i c^2} \phi \right)^2 - p(1 + \lambda_i |\mathbf{A}|^2) \right]^{-\frac{1}{2}} - \gamma_e \left[\left(1 - \frac{q_e}{m_e c^2} \phi \right)^2 - p(1 + \lambda_e |\mathbf{A}|^2) \right]^{-\frac{1}{2}} \right\}$$

Utilizando a expressão (2.52) para substituir γ_i e γ_e na equação anterior e aplicando as definições (2.59), (2.60), (2.61) e (2.62) temos

$$\begin{aligned} \delta n &= \frac{n_0 V_0}{p} \left[\frac{(1 - \mu\varphi) - r_i(\varphi, \psi)V_0}{r_i(\varphi, \psi)} - \frac{(1 + \varphi) - r_e(\varphi, \psi)V_0}{r_e(\varphi, \psi)} \right] \\ \delta n &= \frac{n_0 V_0}{p} \left[\frac{(1 - \mu\varphi)}{r_i(\varphi, \psi)} - \frac{(1 + \varphi)}{r_e(\varphi, \psi)} \right] \end{aligned} \quad (2.64)$$

δn em função dos potenciais

2.15 Obtenção das equações diferenciais não lineares acopladas para a evolução dos potenciais

Aplicando $\rho = e\delta n$ (2.28) na equação de Poisson escrita como função da variável $\tilde{\xi}$ (2.27) e substituindo δn pela sua expressão (2.64) temos

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \tilde{\xi}^2} = -4\pi e \frac{n_0 V_0}{p} \left[\frac{1 - \mu\varphi}{r_i(\varphi, \psi)} - \frac{1 + \varphi}{r_e(\varphi, \psi)} \right]$$

Como $\varphi = \lambda^{\frac{1}{2}} \phi = (e/m_e c^2) \phi$, multiplicando ambos os lados da igualdade por $(e/m_e c^2)$ temos

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tilde{\xi}^2} = \frac{-4\pi e^2 n_0 V_0}{m_e c^2 p} \left[\frac{1 - \mu\varphi}{r_i(\varphi, \psi)} - \frac{1 + \varphi}{r_e(\varphi, \psi)} \right]$$

Definindo a frequência de plasma dos elétrons $\omega_e^2 \equiv (4\pi e^2 n_0)/(m_e)$,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tilde{\xi}^2} = \frac{V_0 \omega_e^2}{c^2 p} \left[\frac{1 + \varphi}{r_e(\varphi, \psi)} - \frac{1 - \mu \varphi}{r_i(\varphi, \psi)} \right]$$

e redefinindo a variável $\tilde{\xi}$:

$$\xi = \frac{\omega_e}{c} \tilde{\xi} \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial \tilde{\xi}^2} = \frac{\omega_e^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \quad (2.65)$$

temos finalmente a seguinte equação diferencial para a evolução de φ :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} = \frac{V_0}{p} \left[\frac{1 + \varphi}{r_e(\varphi, \psi)} - \frac{1 - \mu \varphi}{r_i(\varphi, \psi)} \right] \quad (2.66)$$

Substituindo \mathbf{J}_\perp (2.30) na parte transversal da equação da onda (2.17) e considerando as definições (2.61) e (2.62),

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \left\{ -\frac{n_0 e^2}{m_e c} V_0 \left[\frac{1}{r_e(\varphi, \psi)} + \frac{\mu}{r_i(\varphi, \psi)} \right] \mathbf{A} \right\}$$

Multiplicando essa equação por c^2 , utilizando a definição da frequência ω_e^2 e introduzindo a variável complexa $\tilde{A}(z, t) \equiv \lambda_e^{-1/2} \psi(\tilde{\xi}) e^{i\theta(z, t)}$ tal que $|\tilde{A}|^2 = |\mathbf{A}|^2 = \lambda_e^{-1} \psi^2$,

$$c^2 \frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial t^2} = V_0 \omega_e^2 \left[\frac{1}{r_e(\varphi, \psi)} + \frac{\mu}{r_i(\varphi, \psi)} \right] \tilde{A} \quad (2.67)$$

Utilizando essa definição, que nos permite relacionar ψ com $\tilde{\psi}$ (da definição de \mathbf{A} temos que $|\mathbf{A}|^2 = \tilde{\psi}^2$, ou seja, $\tilde{\psi} = \lambda_e^{-1} \psi^2$), podemos reescrever o primeiro termo à esquerda da igualdade em (2.67) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} c^2 \frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial z^2} &= c^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} [\lambda_e^{-\frac{1}{2}} \psi(\tilde{\xi}) e^{i\theta(z, t)}] \\ &= c^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} e^{i\theta} + \psi \frac{\partial e^{i\theta}}{\partial z} \right) \lambda_e^{-\frac{1}{2}} \\ &= c^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} e^{i\theta} + 2 \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial e^{i\theta}}{\partial z} + \psi \frac{\partial^2 e^{i\theta}}{\partial z^2} \right) \lambda_e^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

ou ainda, como $(\partial\theta/\partial z) = k$,

$$c^2 \frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial z^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + 2ik \frac{\partial \psi}{\partial z} - k^2 \psi \right) \lambda_e^{-\frac{1}{2}} e^{i\theta} \quad (2.68)$$

Analogamente, o segundo termo à esquerda da igualdade em (2.67) pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\psi(\tilde{\xi}) \lambda_e^{-\frac{1}{2}} e^{i\theta(z,t)}] \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} e^{i\theta} + \psi \frac{\partial e^{i\theta}}{\partial t} \right) \lambda_e^{-\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} e^{i\theta} + 2 \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial e^{i\theta}}{\partial t} + \psi \frac{\partial^2 e^{i\theta}}{\partial t^2} \right) \lambda_e^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

ou ainda, como $(\partial\theta/\partial t) = -\omega$,

$$\frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - 2i\omega \frac{\partial \psi}{\partial t} - \omega^2 \psi \right) \lambda_e^{-\frac{1}{2}} e^{i\theta} \quad (2.69)$$

O lado esquerdo da igualdade em (2.67) pode ser reescrito como

$$c^2 \frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial t^2} = \left[\left(c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - k^2 c^2 \psi + \omega^2 \psi \right) + 2i \left(kc^2 \frac{\partial \psi}{\partial z} + \omega \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \right] \lambda_e^{-\frac{1}{2}} e^{i\theta} \quad (2.70)$$

Aplicando essa expressão na equação (2.67) temos

$$\left(c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - k^2 c^2 \psi + \omega^2 \psi \right) + 2i \left(kc^2 \frac{\partial \psi}{\partial z} + \omega \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) = \left[\frac{V_0 \omega_e^2}{r_e(\varphi, \psi)} + \frac{\mu V_0 \omega_e^2}{r_i(\varphi, \psi)} \right] \psi \quad (2.71)$$

Como o lado direito da igualdade em (2.71) não possui termos imaginários, os termos imaginários do lado esquerdo devem se anular⁴. Ou seja,

$$c^2 \frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial t^2} = \lambda_e^{-\frac{1}{2}} e^{i\theta} \left[c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + (\omega^2 - k^2 c^2) \psi \right] \quad (2.72)$$

Através das relações (2.24) e (2.25) podemos expressar as derivadas parciais em relação

⁴Desta equação podemos concluir que $V = c^2 k / \omega$, onde V pode ser interpretada como a velocidade de grupo não linear, dado que estamos trabalhando em regimes onde ω e k estão relacionados por uma relação de dispersão não linear.

à z e t como derivadas parciais em relação à $\tilde{\xi}$

$$\begin{aligned}
c^2 \frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial t^2} &= \lambda_e^{-\frac{1}{2}} e^{i\theta} \left[(c^2 - V^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tilde{\xi}^2} + (\omega^2 - k^2 c^2) \psi \right] \\
&= \lambda_e^{-\frac{1}{2}} e^{i\theta} \left[c^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tilde{\xi}^2} + (\omega^2 - k^2 c^2) \psi \right] \\
&= \lambda_e^{-\frac{1}{2}} e^{i\theta} \left[c^2 (1 - V_0^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tilde{\xi}^2} + (\omega^2 - k^2 c^2) \psi \right] \\
c^2 \frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial t^2} &= c^2 \lambda_e^{-\frac{1}{2}} e^{i\theta} \left[p \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tilde{\xi}^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \psi \right] \tag{2.73}
\end{aligned}$$

Aplicando então a relação (2.73) na equação (2.67) e substituindo nessa a expressão $\tilde{A} = \lambda_e^{-\frac{1}{2}} \psi e^{i\theta}$ temos

$$\begin{aligned}
c^2 \lambda_e^{-\frac{1}{2}} e^{i\theta} \left[p \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tilde{\xi}^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \psi \right] &= V_0 \omega_e^2 \left[\frac{1}{r_e(\varphi, \psi)} + \frac{\mu}{r_i(\varphi, \psi)} \right] \psi \lambda_e^{-\frac{1}{2}} e^{i\theta} \\
p \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tilde{\xi}^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \psi &= \frac{V_0 \omega_e^2}{c^2} \left[\frac{1}{r_e(\varphi, \psi)} + \frac{\mu}{r_i(\varphi, \psi)} \right] \psi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p \frac{\omega_e^2}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tilde{\xi}^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \psi &= \frac{V_0 \omega_e^2}{c^2} \psi \left[\frac{1}{r_e(\varphi, \psi)} + \frac{\mu}{r_i(\varphi, \psi)} \right] \\
p \frac{\omega_e^2}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tilde{\xi}^2} &= \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \psi + V_0 \frac{\omega_e^2}{c^2} \psi \left[\frac{1}{r_e(\varphi, \psi)} + \frac{\mu}{r_i(\varphi, \psi)} \right] \\
\frac{\partial^2 \psi}{\partial \tilde{\xi}^2} &= \frac{c^2}{p \omega_e^2} \left\{ \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \psi + V_0 \frac{\omega_e^2}{c^2} \psi \left[\frac{1}{r_e(\varphi, \psi)} + \frac{\mu}{r_i(\varphi, \psi)} \right] \right\} \\
\frac{\partial^2 \psi}{\partial \tilde{\xi}^2} &= \frac{(k^2 c^2 - \omega^2)}{p \omega_e^2} \psi + \frac{V_0}{p} \psi \left[\frac{1}{r_e(\varphi, \psi)} + \frac{\mu}{r_i(\varphi, \psi)} \right]
\end{aligned}$$

Como $V_0 = V/c = (kc/\omega) \rightarrow k^2c^2 = \omega^2V_0^2$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} &= \frac{(\omega^2V_0^2 - \omega^2)}{p\omega_e^2}\psi + \frac{V_0}{p}\psi \left[\frac{1}{r_e(\varphi, \psi)} + \frac{\mu}{r_i(\varphi, \psi)} \right] \\ \frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} &= -\frac{(1 - V_0^2)}{p\omega_e^2}\omega^2\psi + \frac{V_0}{p}\psi \left[\frac{1}{r_e(\varphi, \psi)} + \frac{\mu}{r_i(\varphi, \psi)} \right] \\ \frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} &= -\frac{p}{p\omega_e^2}\omega^2\psi + \frac{V_0}{p}\psi \left[\frac{1}{r_e(\varphi, \psi)} + \frac{\mu}{r_i(\varphi, \psi)} \right] \\ \frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} &= -\frac{\omega^2}{\omega_e^2}\psi + \frac{V_0}{p}\psi \left[\frac{1}{r_e(\varphi, \psi)} + \frac{\mu}{r_i(\varphi, \psi)} \right]\end{aligned}$$

Definindo $\omega_e^2/\omega^2 = \eta$, temos a seguinte equação diferencial para a evolução de ψ :

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} = -\frac{1}{\eta}\psi + \frac{V_0}{p}\psi \left[\frac{1}{r_e(\varphi, \psi)} + \frac{\mu}{r_i(\varphi, \psi)} \right] \quad (2.74)$$

Finalmente, alterando (por simplicidade) a notação das derivadas em relação a ξ ,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2} &= \varphi'' \\ \frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} &= \psi''\end{aligned}$$

podemos reescrever as equações (2.66) e (2.74):

$$\varphi'' = \frac{V_0}{p} \left[\frac{1 + \varphi}{r_e(\varphi, \psi)} - \frac{1 - \mu\varphi}{r_i(\varphi, \psi)} \right] \quad (2.75)$$

equação diferencial para a evolução de φ

$$\psi'' = -\frac{1}{\eta}\psi + \frac{V_0}{p}\psi \left[\frac{1}{r_e(\varphi, \psi)} + \frac{\mu}{r_i(\varphi, \psi)} \right] \quad (2.76)$$

equação diferencial para a evolução de ψ

As equações (2.75) e (2.76), que governam a dinâmica dos pulsos eletromagnéticos no plasma, nos fornecem a base necessária para estudarmos os fenômenos de interesse. A partir desse momento, por simplicidade, re-escalamos $\omega/ck \rightarrow \omega$ e $\omega_e/ck \rightarrow \omega_e$. Com isso η preserva a sua forma e $\omega = 1/V_0$.

Capítulo 3

O formalismo Hamiltoniano e suas implicações

Neste capítulo apresentamos um Hamiltoniano a partir do qual as equações para a evolução temporal dos potenciais (2.76) e (2.75) podem ser obtidas. Essa formulação nos permite interpretar o problema abordado como uma quase-partícula com dois graus de liberdade, sob a ação de um potencial efetivo [13]. Vemos também que a presença de raízes nesse Hamiltoniano restringe os valores possíveis de φ , e que a forma assimétrica do potencial efetivo o divide em duas regiões distintas e estabelece um limite de energias para a existência de órbitas periódicas. Por fim, discutimos sobre as técnicas de análise de dinâmica não linear utilizadas para abordar o problema, buscar soluções e avaliar a estabilidade das mesmas.

3.1 O formalismo Hamiltoniano

A existência de uma constante de movimento calculada por Mofiz e de Angelis [7] é um forte indício de que o sistema pode ser descrito por um Hamiltoniano das coordenadas ψ e φ e seus respectivos momenta conjugados P_ψ e P_φ . A percepção de que o momentum conjugado P_φ não é φ' (forma “tradicional”), mas $-\varphi'/p$, nos conduziu à obtenção desse Hamiltoniano

$$H = \frac{P_\psi^2}{2} - p \frac{P_\varphi^2}{2} + \frac{1}{2\eta} \psi^2 + \frac{V_0}{p^2} \left[r_e(\varphi, \psi) + \frac{1}{\mu} r_i(\varphi, \psi) \right] \quad (3.1)$$

a partir do qual podemos calcular as variáveis de interesse através das equações de Hamilton

$$\psi' = \frac{\partial H}{\partial P_\psi} = P_\psi \quad (3.2)$$

$$P'_\psi = -\frac{\partial H}{\partial \psi} = -\frac{1}{\eta}\psi + \frac{V_0}{p}\psi \left[\frac{1}{r_e(\varphi, \psi)} + \frac{\mu}{r_i(\varphi, \psi)} \right] = \psi'' \quad (3.3)$$

$$\varphi' = \frac{\partial H}{\partial P_\varphi} = -pP_\varphi \quad (3.4)$$

$$P'_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -\frac{V_0}{p^2} \left[\frac{1+\varphi}{r_e(\varphi, \psi)} - \frac{1-\mu\varphi}{r_i(\varphi, \psi)} \right] = -\frac{\varphi''}{p} \quad (3.5)$$

resgatando (como esperado) as equações diferenciais para a evolução temporal dos potenciais (2.76) e (2.75).

Essa formulação nos permite interpretar o problema como uma quase-partícula sob a ação de um potencial efetivo $U(\varphi, \psi)$,

$$U(\varphi, \psi) \equiv -\frac{1}{2\eta}\psi^2 - \frac{V_0}{p^2} \left[r_e(\varphi, \psi) + \frac{1}{\mu}r_i(\varphi, \psi) \right] \quad (3.6)$$

onde o sinal é negativo devido à massa efetiva negativa de φ , como pode ser visto no Hamiltoniano (3.1).

H é constante, dado que não depende da variável “tempo” ξ , e seu valor E pode ser calculado após especificarmos condições iniciais adequadas. Como estamos interessados na propagação de pulsos localizados, que desaparecem para $|\xi| \rightarrow \infty$, sabemos que as condições $P_\psi = P_\varphi = \varphi = \psi = 0$ devem pertencer à dinâmica relevante. Aplicando essas condições no Hamiltoniano podemos calcular o seu valor (que corresponde à energia do sistema):

$$E = \left(\frac{V_0}{p} \right)^2 \left(1 + \frac{1}{\mu} \right) \quad (3.7)$$

3.2 A dinâmica

3.2.1 Condições impostas pelo Hamiltoniano

Dado que estamos interessados em quantidades que são reais, a presença de raízes no Hamiltoniano limita a dinâmica da quase-partícula à região em que $r_e^2, r_i^2 > 0$ simultaneamente. Para garantir essa condição, precisamos aplicar restrições sobre os possíveis

valores de φ . Considerando que $p = 1 - V_0 > 0$,

$$\begin{aligned} r_e^2(\varphi, \psi) &> 0 \\ (1 + \varphi)^2 - p(1 + \psi^2) &> 0 \\ \varphi &> \sqrt{p(1 + \psi^2)} - 1 \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} r_i^2(\varphi, \psi) &> 0 \\ (1 - \mu\varphi)^2 - p(1 + \mu^2\psi^2) &> 0 \\ \frac{1}{\mu}[1 - \sqrt{p(1 + \mu^2\psi^2)}] &> \varphi \end{aligned} \quad (3.9)$$

Ou seja, φ deve ser maior que a quantidade calculada em (3.8), a qual denominamos φ_{min} , e menor que a quantidade calculada em (3.9), a qual denominamos φ_{max} . Combinando as desigualdades, concluímos que a dinâmica deve evoluir dentro da seguinte região física

$$\varphi_{min} \equiv \sqrt{p(1 + \psi^2)} - 1 < \varphi < \frac{1}{\mu}[1 - \sqrt{p(1 + \mu^2\psi^2)}] \equiv \varphi_{max} \quad (3.10)$$

Como estamos interessados na resposta do plasma à propagação dos pulsos eletromagnéticos, fixamos a nossa atenção no comportamento do potencial eletrostático, analisando a evolução temporal de φ e P_φ para diferentes pulsos (caracterizados por valores de parâmetro¹ distintos). Como o sistema possui dois graus de liberdade², a análise do comportamento de φ e P_φ requer condições sobre ψ e P_ψ . Em nosso caso, realizamos essa análise quando o plano $\psi = 0$ é cruzado com $P_\psi < 0$. Nessa condição, o potencial efetivo

$$U(\varphi, 0) = -\frac{V_0}{p^2} \left[\sqrt{(1 + \varphi)^2 - p} + \frac{1}{\mu} \sqrt{(1 - \mu\varphi)^2 - p} \right] \quad (3.11)$$

tem um mínimo em $\varphi = 0$, o qual é um ponto fixo estável para pequenas oscilações de φ , e a desigualdade (3.10) se resume a

$$\varphi_{min} = \sqrt{p} - 1 < \varphi < \frac{1}{\mu}[1 - \sqrt{p}] = \varphi_{max} \quad (3.12)$$

Outra característica relevante de $U(\varphi, 0)$ pode ser observada se utilizarmos os valores

¹Detalhes são discutidos na seção 3.3.1.

²Consideramos cada par formado por coordenada e momentum conjugado como um grau de liberdade.

extremos de φ : calculando a diferença entre os quadrados

$$U^2(\varphi_{min}) - U^2(\varphi_{max}) = \frac{2(1 - \mu^2)(1 - \sqrt{p})V_0^2}{\mu^2 p^{7/2}} > 0 \quad (3.13)$$

vemos que o valor é sempre positivo. Como $U < 0$, podemos afirmar que $U(\varphi_{min}) < U(\varphi_{max})$. Ou seja, a “altura” do potencial em φ_{max} é sempre maior que em φ_{min} .

Essa assimetria, exemplificada na Figura 3.1, divide o potencial em duas regiões distintas, estabelecendo um limite para órbitas cíclicas: φ deve ser tal que o correspondente potencial nunca esteja acima do nível $U(\varphi_{min})$.

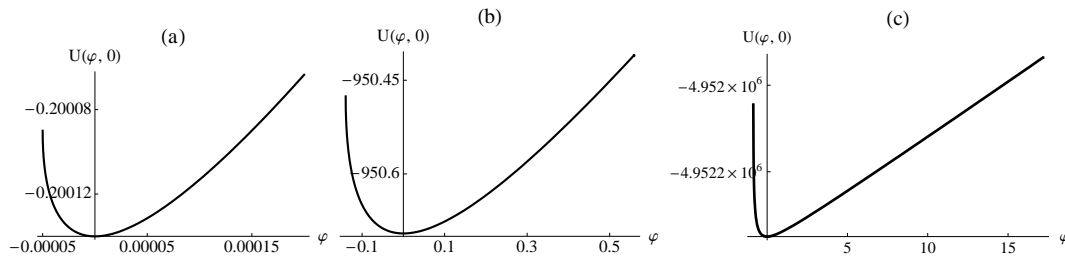


Figura 3.1: gráficos do potencial $U(\varphi, 0)$ traçados para (a) $V_0 = 0,01$, (b) $V_0 = 0,51$ e (c) $V_0 = 0,99$. Embora os extremos à esquerda dos gráficos correspondam aos valores de φ_{min} referentes às velocidades citadas, os extremos à direita não correspondem aos valores de φ_{max} (os gráficos foram truncados nesta direção)

3.2.2 A quebra de onda (*wave breaking*)

Além de limitarem os possíveis valores de φ para evitar resultados complexos, as raízes $r_e(\varphi, \psi)$ e $r_i(\varphi, \psi)$ também desempenham um papel relevante na ocorrência do fenômeno conhecido como quebra de onda (*wave breaking*), onde a amplitude da onda de densidade das partículas (elétrons ou íons, dependendo do caso) cresce tanto (e de forma tão abrupta) que as partículas do plasma não conseguem ultrapassar seu pico e são arrastadas, criando singularidades na densidade do plasma. Quando isso ocorre, o modelo deixa de ser válido para descrever o problema.

Podemos compreender a relação entre essas raízes e a quebra de onda através da análise das densidades de elétrons e íons: partindo da equação de n_α expressa em função dos potenciais (2.55) e fazendo uso da equação de γ_α (2.52), da relação entre λ_e e λ_i (2.57) e das definições de φ (2.59), ψ (2.60), r_e (2.61) e r_i (2.62), chegamos às seguintes

equações:

$$n_e = \frac{n_0 V_0}{p} \left[\frac{(1 + \varphi) - r_e(\varphi, \psi) V_0}{r_e(\varphi, \psi)} \right] \quad (3.14)$$

$$n_i = \frac{n_0 V_0}{p} \left[\frac{(1 - \mu\varphi) - r_i(\varphi, \psi) V_0}{r_i(\varphi, \psi)} \right] \quad (3.15)$$

Dessas equações vemos que as densidades das partículas são inversamente proporcionais às raízes ($n_\alpha \propto r_\alpha^{-1}$), ou seja, n_α diverge à medida que $r_\alpha \rightarrow 0$, caracterizando a ocorrência da quebra de onda.

É importante enfatizarmos que, embora essa divergência da densidade sirva para indicar a ocorrência do fenômeno de quebra de onda, ela é de fato uma limitação do modelo de plasma frio; em um modelo com efeitos térmicos, estes limitam a quantidade de partículas capturadas pela onda e impedem o surgimento de singularidades na densidade do plasma.

Quando a velocidade de grupo da onda está próxima da velocidade da luz temos que $V_0 \rightarrow 1$ e, conseqüentemente, $p \equiv 1 - V_0^2 \rightarrow 0$; podemos então concluir a partir de (3.13) que $U^2(\varphi_{min}) \ll U^2(\varphi_{max})$ e que essa é uma condição em que a ocorrência da quebra de onda é muito mais provável para os elétrons do que para os íons. Já quando $V_0 \rightarrow 0$ ($p \rightarrow 1$), temos que $U^2(\varphi_{min}) \sim U^2(\varphi_{max})$; nessa condição, a quebra de onda também pode ocorrer para os íons.

3.2.3 Análise linear

Podemos avaliar o comportamento do potencial vetor ψ , associado à amplitude (e, conseqüentemente, à intensidade) do pulso eletromagnético (um laser, por exemplo) e do potencial eletrostático φ (associado ao *wakefield*, o campo elétrico gerado pela propagação do pulso eletromagnético) frente a pequenas perturbações calculando as freqüências lineares associadas a pequenas flutuações dos mesmos. A aplicação de uma expansão do tipo

$$f(\varphi, \psi) = f(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial \varphi}(0, 0)\varphi + \frac{\partial f}{\partial \psi}(0, 0)\psi + \dots \quad (3.16)$$

nas equações (2.75) e (2.76) nos permite reescrevê-las da seguinte forma:

$$\psi'' = \Omega_\psi^2 \psi \quad (3.17)$$

$$\varphi'' = -\Omega_\varphi^2 \varphi \quad (3.18)$$

onde Ω_ψ e Ω_φ são as frequências lineares que estamos procurando

$$\Omega_\psi^2 \equiv -\frac{1}{\eta} + \frac{1}{p}(1 + \mu) \quad (3.19)$$

$$\Omega_\varphi^2 \equiv \frac{1}{V_0^2}(1 + \mu) \quad (3.20)$$

De (3.20) temos que a frequência Ω_φ é real, condição que aplicada à equação (3.18) garante a estabilidade do potencial φ . Já a frequência Ω_ψ pode ser imaginária ($\Omega_\psi^2 < 0$, que implica em um comportamento oscilatório) ou real ($\Omega_\psi^2 \geq 0$, que implica em um comportamento instável, dado que perturbações crescem indefinidamente). De fato, a igualdade $\Omega_\psi^2 = 0$ nos permite obter o valor limiar de η

$$\eta_* = \frac{p}{1 + \mu} \quad (3.21)$$

a partir do qual $\Omega_\psi^2 > 0$ e a instabilidade está presente. Essa é uma condição necessária para que ψ alcance valores grandes a partir de oscilações muito pequenas, que pode ser garantida se a seguinte relação, expressa em função de ω e obtida a partir de (3.19) e da definição de $\eta \equiv \omega_e^2/\omega^2$, for atendida:

$$\begin{aligned} \Omega_\psi^2 &\geq 0 \\ \frac{1}{p}(1 + \mu) &\geq \frac{1}{\eta} \\ \frac{1}{p}(1 + \mu) &\geq \frac{\omega^2}{\omega_e^2} \\ \omega_e^2(1 + \mu) &\geq p\omega^2 \end{aligned} \quad (3.22)$$

Como $p = 1 - V_0^2$ e $\omega = 1/V_0$, temos que $p\omega^2 = \omega^2 - 1$. Podemos então reescrever a expressão (3.22) da seguinte forma:

$$1 + \omega_e^2(1 + \mu) \geq \omega^2 \quad (3.23)$$

Finalmente, considerando também a limitação $\omega > 1$ (imposta pela condição $V_0 < 1$), temos a relação para ω que garante a presença da instabilidade:

$$1 < \omega^2 \leq 1 + \omega_e^2(1 + \mu) \quad (3.24)$$

Tomando o sinal de igualdade na relação (3.23), podemos calcular o valor limiar de ω na condição $\Omega_\psi^2 = 0$

$$\omega_* = \sqrt{1 + \omega_e^2(1 + \mu)} \quad (3.25)$$

de modo que para $\omega < \omega_*$ a instabilidade está presente. Se expressarmos (3.25) como função das das grandezas *originais* (não adimensionalizadas), vemos que ω_* é também a relação de dispersão linear para ondas eletromagnéticas: $\omega_*^2 = k^2 c^2 + \omega_e^2(1 + \mu)$.

3.2.4 Regimes esperados

Iniciando a propagação de um pulso com ω ligeiramente menor que ω_* , esperamos ver ondas com amplitudes pequenas, que crescem à medida que nos distanciamos desse limiar. Além disso, nessa condição de proximidade do limiar as modulações da amplitude do campo do laser (ψ) são extremamente lentas, enquanto que as oscilações do potencial elétrico φ permanecem relativamente altas. Essa disparidade entre as frequências fornece as condições necessárias para uma dinâmica lenta adiabática onde, para um dado potencial vetor ψ (que varia lentamente), o potencial elétrico φ sempre se acomoda nas proximidades do mínimo do potencial efetivo (3.6).

Um fato relevante na procura por soluções adiabáticas é o quão próximo do mínimo de U deve-se estar para encontrá-las: se não posicionarmos φ exatamente sobre esse mínimo, haverá movimento oscilatório em torno deste ponto (que se desloca lentamente devido à ação do ψ). Porém, essas oscilações só ocorrem de forma consistente se a órbita estiver livre para vagar tanto para a esquerda quanto para a direita do mínimo $\varphi = 0$, ou seja, se ela estiver inteiramente aprisionada no potencial U .

É importante observarmos em (3.10) que φ_{min} refere-se ao menor valor de φ disponível, e não ao mínimo de U . À medida que nos afastamos do limiar ω_* , esperamos que modulações mais rápidas e amplitudes maiores comecem a introduzir comportamento caótico no sistema, fazendo com que este deixe de ser integrável. Esse tipo de perspectiva concorda com o resultado de trabalhos anteriores [6, 7], onde regiões adiabáticas têm sido interpretadas como estando essencialmente associadas com dinâmicas quase-neutras.

Para a análise de pulsos com amplitudes grandes (a ser discutida no capítulo 5), partimos de condições previamente estudadas para as quais a existência desse tipo de solução é conhecida [6].

3.3 Análise da dinâmica não linear

3.3.1 Os parâmetros

Partindo do valor de V_0 (o qual define o regime em que estamos trabalhando) calculamos $\omega = 1/V_0$, que deve ser maior que a unidade para que a condição (3.22) seja satisfeita, e η_* , o valor limiar de η , a partir da expressão (3.21). Esse valor limiar aplicado na definição do parâmetro $\eta \equiv \omega_e^2/\omega^2$ nos permite calcular a frequência de plasma dos elétrons no limite da estabilidade: $\omega_e^2 = \eta_*\omega^2$. Parametrizando η em relação a η_* , como $\eta = (1 + \delta)\eta_*$ com $0 < \delta \ll 1$, por exemplo, podemos estudar a dinâmica do problema à medida que nos afastamos desse limiar.

3.3.2 Seção de Poincaré

O espaço de fase de um Hamiltoniano contém informações que possibilitam a análise qualitativa da dinâmica do sistema em estudo. Vamos visualizá-lo através de seções de Poincaré traçadas para o par de variáveis (φ, P_φ) , cujos valores são registrados cada vez que o plano $\psi = 0$ é cruzado com $P_\psi < 0$.

Como pulsos isolados não podem ser vistos em seções periódicas, temos que fazer uma pequena alteração na energia

$$E = \frac{V_0}{p^2} \left(1 + \frac{1}{\mu} \right) (1 + \epsilon) \quad (3.26)$$

onde $\epsilon \ll 1$. Este artifício nos permite evitar a cauda evanescente $P_\psi = P_\varphi = \varphi = \psi = 0$ e converte pulsos isolados em trens de pulsos quase-isolados. Nas simulações, nós nos certificamos da convergência desses trens de pulsos para soluções solitárias à medida que $\epsilon \rightarrow 0$.

Na simulação numérica realizada para obtermos os dados necessários para traçar as seções de Poincaré, integramos o conjunto de equações acopladas (3.2) a (3.5) para calcular a evolução temporal de 20 partículas com condições iniciais distintas (previamente definidas) durante 10.000 períodos do potencial vetor ψ . Os valores do par (φ, P_φ) foram registrados cada vez que $\psi = 0$ e $P_\psi < 0$. Desse modo, as seções de Poincaré representam o espaço de fase no plano $\psi = 0$, onde um ponto (φ, P_φ) é traçado cada vez que P_ψ cruza esse plano no sentido definido por $P_\psi < 0$.

Para estudarmos a transição de um regime quase-integrável para um regime caótico, fizemos simulações numéricas para diversos regimes, basicamente caracterizados por valores de V_0 e η distintos (em geral, foram traçadas seções de Poincaré variando-se o valor

de η para um dado valor de V_0).

3.3.3 Índice de estabilidade α

O comportamento dos pontos fixos (que representam as soluções periódicas) pode ser estudado utilizando-se o algoritmo de Newton-Raphson para órbitas periódicas. Esse método nos permite traçar diagramas de estabilidade, que mostram o comportamento do chamado índice de estabilidade α [14] como função de um certo parâmetro perturbador que, em nosso caso, é o η .

Enquanto o módulo do índice de estabilidade $|\alpha|$ permanece menor que 1, o ponto fixo para o qual ele está sendo calculado é estável; caso $|\alpha|$ atinja a unidade, o ponto fixo se instabiliza. Nessa situação, seu sinal fornece um indicativo do mecanismo que instabilizou o ponto fixo:

- para $\alpha = -1$ temos um dobramento de período, que pode ser direto ou inverso. No dobramento de período direto uma órbita estável torna-se instável e dá origem a duas novas órbitas periódicas estáveis com períodos iguais ao dobro da órbita que perdeu a estabilidade. Caso a bifurcação ocorra no sentido contrário, o dobramento de período é dito inverso.
- para $\alpha = +1$ temos duas possibilidades: a bifurcação tangente ou a bifurcação de forquilha sem dobramento de período. A bifurcação tangente (que pode ser direta ou inversa, dependendo do sentido) ocorre quando duas órbitas de mesma periodicidade (uma instável, outra estável) colidem e deixam de existir [15]; a bifurcação de forquilha ocorre quando uma órbita estável se instabiliza e surgem duas órbitas estáveis com períodos iguais ao da órbita que perdeu a estabilidade.

Após localizarmos uma determinada solução, utilizamos o índice α como uma ferramenta para calcular o valor do parâmetro η em que ela se instabiliza e deixa de existir. Assim, podemos traçar seções de Poincaré imediatamente após esse valor limite de η e analisar a dinâmica do sistema nesse regime.

Capítulo 4

Propagação em alta velocidade

Tendo como motivação o estudo de uma configuração adequada à aceleração de elétrons por esquemas de wakefield, analisamos a propagação em alta velocidade ($V_0 \rightarrow 1$) de pulsos em plasmas rarefeitos que satisfazem o critério $\omega_e \ll \omega$, conhecidos como plasmas do tipo *underdense* [2]. Além disso, como os elétrons apresentam grande mobilidade, pulsos com amplitudes pequenas são suficientes para esta finalidade.

Simulações numéricas (onde essencialmente integramos numericamente nosso conjunto de equações acopladas) fornecem os dados necessários para estudarmos a existência e a estabilidade de soluções através da aplicação de ferramentas de dinâmica não linear.

Dado que pulsos isolados não podem ser vistos em seções periódicas, é necessário que a energia E seja ligeiramente alterada; com isto convertemos pulsos isolados em trens de pulsos quase-isolados.

O espaço de fase do Hamiltoniano, visualizado com o auxílio de seções de Poincaré, nos permite analisar de forma qualitativa a dinâmica do potencial eletrostático (variáveis φ, P_φ). Para tanto, partimos de um regime em que η é ligeiramente maior que seu limiar η_* (ou seja, imediatamente após o início da instabilidade modulacional do pulso), onde aproximações adiabáticas são plenamente válidas, e analisamos a estabilidade deste pulso utilizando o método de Newton-Raphson e calculando o índice de estabilidade α [16]. A análise de um segundo regime, com η ligeiramente acima do valor limite para a existência do pulso (ou seja, imediatamente após $\alpha = +1$), mostra a dinâmica após a destruição da solução (ponto fixo da seção de Poincaré) [13].

Um dos nossos interesses é ver precisamente como a dinâmica adiabática é quebrada à medida que entramos nos regimes não integráveis.

4.1 O regime

Uma dos objetivos mais freqüentes na pesquisa da propagação de pulsos eletromagnéticos intensos em plasmas têm sido a possibilidade de utilizar esquemas de *wakefield* para acelerar partículas. Por isso, analisamos inicialmente uma configuração relevante para a aceleração de elétrons ¹: a propagação em alta velocidade de pulsos com amplitudes pequenas em um plasma rarefeito do tipo *underdense* (onde o critério $\omega_e \ll \omega$ deve ser satisfeito). Esse regime foi caracterizado definindo-se $V_0 = 0,99$, ou seja, uma velocidade próxima à velocidade da luz. Além disso, como pretendemos estabelecer conexão com resultados anteriores obtidos por Kozlov et al. [6] e Farina e Bulanov [8], tomamos μ , a razão entre a massa do elétron e a massa do próton, igual a 0,0005 em todas as simulações realizadas. A partir dos valores de V_0 e μ podemos calcular o limiar para a instabilidade do potencial vetor $\eta_* = p/(1 + \mu) \simeq 0.0199$ (ou seja, para esses valores dos parâmetros o critério para que o plasma seja do tipo *underdense* é satisfeito).

4.2 O potencial $\Delta U(\varphi)$

Por conveniência fizemos uma translação vertical no potencial, localizando a origem das coordenadas no mínimo do mesmo. Passamos a partir de agora a trabalhar com $\Delta U(\varphi)$, calculado da seguinte maneira:

$$\Delta U(\varphi) \equiv U(\varphi, \psi = 0) - U(\varphi = 0, \psi = 0) \quad (4.1)$$

Para o regime em estudo ($V_0 = 0.99$, $\mu = 0.0005$), a forma do potencial $\Delta U(\varphi)$ pode ser visualizada através da figura 4.1. Órbitas na região *I*, com energias inferiores à energia de quebra de onda E_{wbr} , oscilam confinadas em $\varphi_{min} < \varphi < \tilde{\varphi}$; órbitas na região *II* (com energias maiores que E_{wbr}) eventualmente alcançam φ_{min} , fato que resulta na quebra de onda. A energia de quebra de onda E_{wbr} , que define o limite entre as regiões *I* e *II*, é equivalente ao valor do potencial ΔU calculado em φ_{min} :

$$E_{wbr} \equiv \Delta U(\varphi_{min}) = \frac{V_0^2}{p^2} \left[1 + \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu V_0} \sqrt{(1 - \mu \varphi_{min})^2 - p} \right] \quad (4.2)$$

A expressão (4.2) pode ainda ser simplificada aplicando-se algumas aproximações, válidas

¹Tajima e Dawson [2] demonstraram que o ganho de energia dos elétrons é proporcional à razão ω/ω_p ; desse modo, quanto maior for ω em relação a ω_e , maior será o ganho de energia dos elétrons.

para $\mu, p \ll 1$ (que são adequadas ao regime que estamos estudando):

$$E_{wbr} \sim \frac{\omega^3}{\omega_e^3} \quad (4.3)$$

Usando então a conservação de energia e o valor da energia de quebra E_{wbr} , podemos mostrar que o campo elétrico $|\varphi'| = |pP_\varphi|$ na quebra de onda vale

$$|\varphi'| \sim \sqrt{\frac{2\omega}{\omega_e}} \quad (4.4)$$

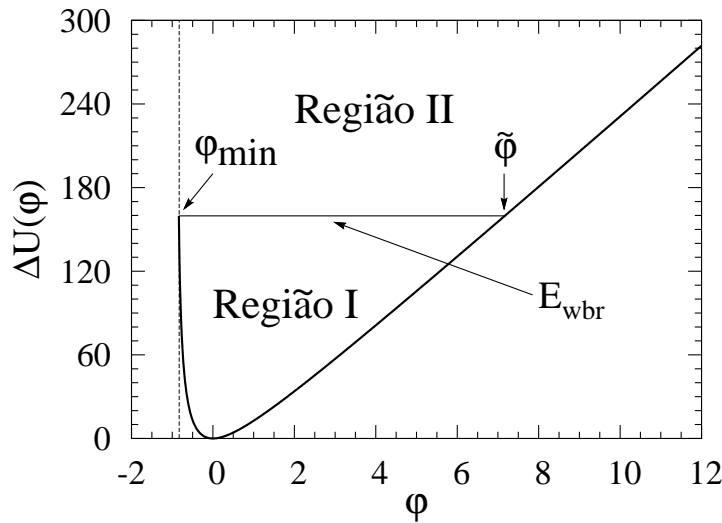


Figura 4.1: potencial ΔU para $\psi = 0$. Soluções na região *I* são periódicas. Na região *II*, como o potencial não é confinante, a quebra de onda para os elétrons ocorre quando φ atinge se valor mínimo φ_{min} .

4.3 A dinâmica

Para investigarmos o regime adiabático da dinâmica não linear relevante analisamos seções de Poincaré traçadas para valores de η ligeiramente maiores que η_* . Na figura 4.2(a) vemos o espaço de fase para $\eta = 1,00001\eta_*$; com esse afastamento relativamente pequeno da estabilidade marginal, as modulações são lentas com $|\Omega_\varphi| \gg |\Omega_\psi|$. Nessas condições, aproximações adiabáticas são plenamente aceitáveis e o que vemos no espaço de fase é apenas um conjunto de curvas KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser), fazendo com que o sistema seja aproximadamente integrável. O ponto fixo central corresponde a uma órbita periódica isolada, dado que representa uma solução com fases sincronizadas que retorna periodicamente para $\psi = 0$ quando $\varphi \rightarrow 0$, e as curvas que circundam o ponto fixo

representam regimes de flutuações quase-periódicas de φ . Ilhas de ressonância já estão presentes mas ainda não afetam a região central do retrato de fase onde a solução solitária se encontra.

O comportamento do ponto fixo à medida que η aumenta pode ser observado em termos do seu índice de estabilidade representado na figura 4.2(b). Inicialmente o índice oscila dentro de uma faixa estável, a qual marca a existência de um ponto elíptico central próximo à origem, até que ele finalmente alcança $\alpha = +1$, como pode ser visto na figura citada. Além deste ponto a órbita central deixa de existir: isto indica uma bifurcação tangente com uma órbita vizinha, a qual extingue a existência do ponto central [17]. Imediatamente após a tangência, o retrato de fase em $\psi = 0$ ainda está restrito a pequenos valores de φ como pode ser visto na figura 4.2(c), onde $\eta = 1,0001\eta_*$.

Valores maiores de η causam difusão para níveis superiores de $\Delta U(\varphi)$, como pode ser visto na figura 4.3 onde nós investigamos o comportamento da energia E_φ , correspondente ao campo eletrostático φ , definida a seguir:

$$E_\varphi \equiv p \frac{P_\varphi^2}{2} + \Delta U(\varphi) \quad (4.5)$$

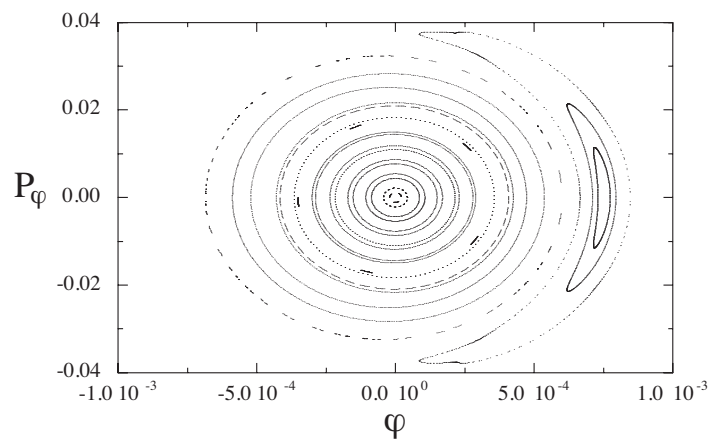
Neste ponto introduzimos as variáveis compactas e_φ e Φ ,

$$e_\varphi \equiv \frac{\chi_e E_\varphi}{\chi_e + E_\varphi} \quad (4.6)$$

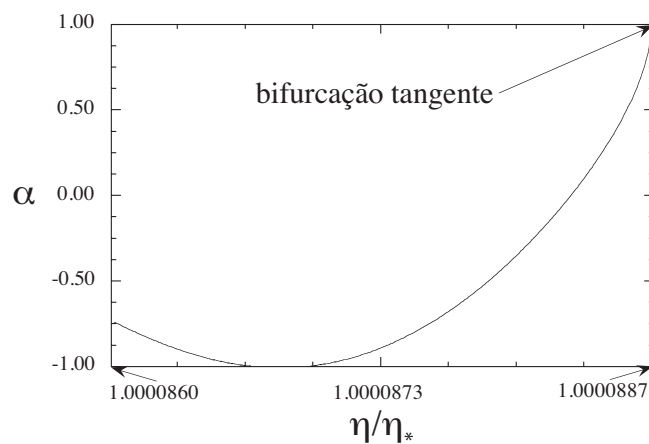
$$\Phi \equiv \frac{\chi_\varphi \varphi}{\chi_\varphi + |\varphi|} \quad (4.7)$$

que nos permitem representar no mesmo gráfico grandes variações de energia e do potencial elétrico sem deformar estas quantidades quando elas são pequenas (nas proximidades das condições iniciais, por exemplo). Em (4.6) e (4.7) os termos χ_e e χ_φ representam a escala sobre a qual as variáveis correspondentes são compactadas; para o estudo da difusão, definimos após alguns testes $\chi_e = \chi_\varphi = 0,0001$.

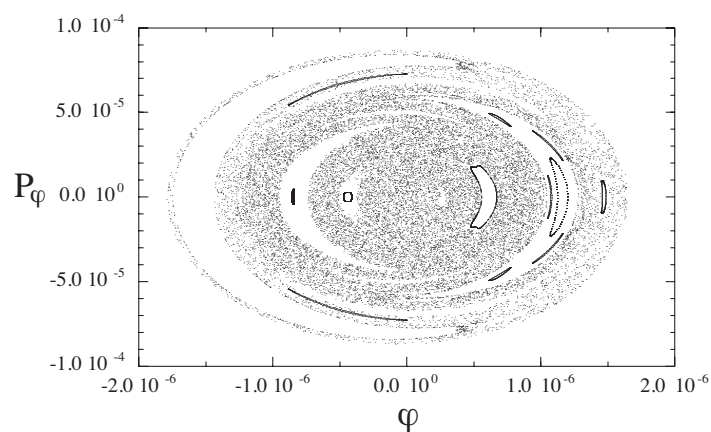
Em um regime regular como o representado na figura 4.3(a), onde $\eta = 1,00001\eta_*$, não ocorre nenhuma difusão e a quase-partícula permanece próxima das suas condições iniciais $P_\varphi = 0$, $\varphi = 10^{-8}$. Para $\eta = 1,00021\eta_*$, o ponto fixo central e as curvas KAM (que isolavam a região central do retrato de fase) não mais existem. Nesse regime a difusão é observada, como mostra a figura 4.3(b): a quase-partícula se move na direção de E_{wbr} e eventualmente alcança esse valor crítico de energia, produzindo a quebra de onda nos elétrons. A difusão começa de forma lenta, tornando-se rápida à medida que a energia da quase-partícula aumenta. As regiões vazias existentes na figura correspondem a ilhas de



(a)



(b)



(c)

Figura 4.2: 4.2(a) seção de Poincaré mostrando o espaço de fase próximo ao limiar da estabilidade modulacional, com $\eta = 1,00001\eta_*$; 4.2(b) índice de estabilidade α em função da razão η/η_* ; 4.2(c) seção de Poincaré após a tangência inversa vista em 4.2(b), com $\eta = 1,0001\eta_*$; $\epsilon = 10^{-11}$.

ressonância no espaço de fase: durante o processo de difusão a quase-partícula vai subindo nos contornos destas ressonâncias, que aumentam progressivamente. Esta é a razão pela qual o processo de difusão é lento no início e rápido em estágios mais avançados. Ainda no caso da figura 4.3(b), vários pulsos são vistos antes da quebra de onda mas, para valores de η grandes a ponto de não haver ressonâncias, a quebra de onda pode ocorrer instantaneamente.

Um fato relevante de ser mencionado é que, embora as amplitudes de pulsos eletromagnéticos sejam pequenas quando $V_0 \rightarrow 1$ [4], o processo de difusão permite que amplitudes muito altas sejam alcançadas para as ondas eletrostáticas mesmo a partir de pulsos inicialmente pequenos. Um exemplo desse comportamento, que pode ser de interesse para esquemas de aceleração por *wakefield*, pode ser observado através da figura 4.4 onde, em um regime difusivo com $\eta = 1,0004\eta_*$, o campo elétrico $-\varphi' = pP_\varphi$ evolui de pequenos

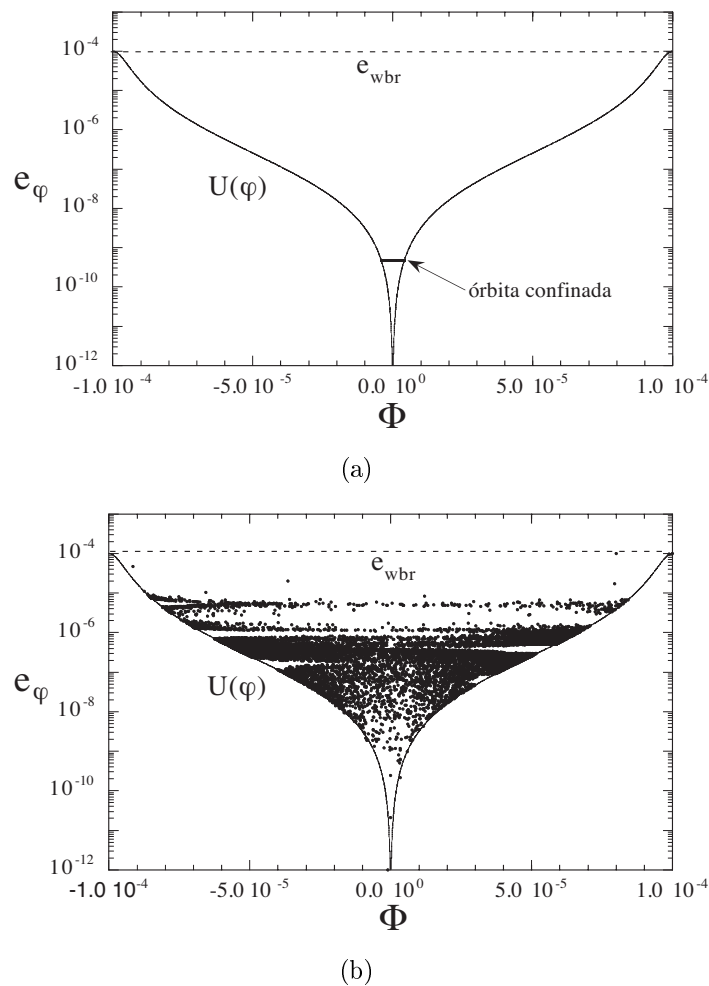


Figura 4.3: representação da dinâmica através de e_φ no espaço Φ : 4.3(a) $\eta = 1,00001\eta_*$; 4.3(b) $\eta = 1,00021\eta_*$. $e_{wbr} \equiv \chi_e E_{wbr} / (\chi_e + E_{wbr})$.

valores próximos às condições iniciais até o valor da quebra de onda, que apresenta uma concordância razoável com o valor calculado a partir da figura 4.1 e da expressão 4.2:

$$|\varphi'| \sim \sqrt{\frac{2\omega}{\omega_e}} \sim 3,5 \quad (4.8)$$

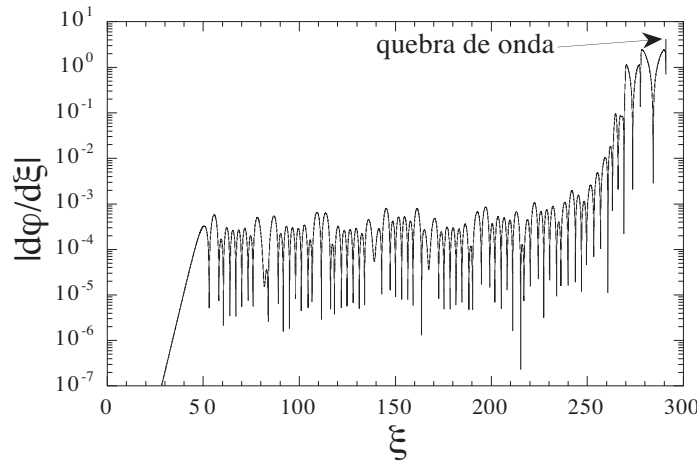


Figura 4.4: série temporal para o campo elétrico $|d\varphi/d\xi|$ para $\eta = 1,0004\eta_*$.

A seguir vamos resumir a dinâmica estudada para a propagação de pulsos em alta velocidade. Para valores de η suficientemente pequenos, existem soluções confinadas que representam pulsos isolados coexistindo com soluções quase-periódicas (que as circundam); estas soluções quase-periódicas continuam existindo quando ψ vai a zero. Aumentando-se η a um valor que passe da bifurcação tangente mas que não chegue à destruição completa das curvas KAM, encontramos ainda um regime de soluções periódicas cadenciadas por $\psi = 0$, embora já seja detectado um comportamento ligeiramente caótico no movimento de φ ; neste regime, os casos onde $\psi = 0$ mas $\varphi \neq 0$ correspondem a pulsos quase-neutros de ψ acompanhados por rastros de atividade de φ [9, 10], que podem ser regulares ou caóticos. Finalmente, para valores suficientemente grandes de η , não mais existem curvas KAM para impedir a difusão e a quebra de onda ocorre quando $r_e \rightarrow 0$, conforme discutimos previamente. Podemos interpretar esse ponto, onde o movimento adiabático é perdido, como o ponto em que soluções solitárias de amplitudes pequenas são completamente destruídas, como comentado por Poorkala et al. [4] e Farina e Burlanov [8].

Capítulo 5

Propagação em baixa velocidade

Motivados por estudos anteriores sobre a propagação de sólitons em baixa velocidade [6, 8], estudamos esse regime utilizando técnicas de análise de dinâmica não linear [18]. Inicialmente, analisamos o mecanismo de destruição das soluções com amplitudes pequenas (como fizemos para a propagação em alta velocidade, no capítulo 4). Feito isso, partimos para o estudo de pulsos com grandes amplitudes, apresentados até então como sólitons de espectro discreto em relação ao espaço de parâmetros. Nossas simulações nos mostram que essas soluções são de fato periódicas (e não solitárias) e existem para intervalos muito estreitos de parâmetros.

5.1 O regime

Kozlov et al. [6] estudaram a existência e as propriedades de sólitons se propagando em um plasma relativístico frio para diversos regimes, caracterizados por conjuntos de parâmetros distintos. Em um regime específico dentre os estudados, partindo de $\eta \equiv \omega_e^2/\omega^2 = 2,0$ eles encontraram um sóliton com grande amplitude para $V_0 \approx 0,235$. Um cálculo realizado com maior precisão numérica mostra que, de fato, para $\eta = 2,0$ as velocidades devem estar próximas a $0,235810877579131$ para encontrarmos a solução com amplitude grande. Como agora nosso interesse não se limita à análise de soluções com amplitudes pequenas, adotamos essa velocidade, $V_0 = 0,235810877579131$, para a qual sabemos da existência de pelo menos uma solução com grande amplitude; novamente, $\mu = 0,0005$.

Para analisar as soluções com amplitudes pequenas, seguimos a mesma metodologia adotada no capítulo sobre a propagação em alta velocidade. Com o valor de V_0 definido, calculamos o limiar para a instabilidade do potencial vetor $\eta_* = p/(1 + \mu) \simeq 0,943921$.

Nesse regime, o plasma não é do tipo *underdense*¹.

Com relação a soluções com grandes amplitudes, calculamos o índice de estabilidade α para valores de η próximos a 2,0 (um regime onde $\omega_e > \omega$), pois a existência desse tipo de solução para esses parâmetros é conhecida. Por fim, as séries temporais dos potenciais ψ e φ nos permitem observar a existência de periodicidade em soluções supostamente solitárias [8].

5.2 O potencial $\Delta U(\varphi)$

Utilizamos também para os íons a definição $\Delta U(\varphi) \equiv U(\varphi) - U(0)$, para que a energia seja zero no ponto mínimo do potencial. A figura 5.1 representa esse potencial para o regime em estudo ($V_0 = 0,235\dots$). Qualitativamente, a análise é similar ao caso da propagação em alta velocidade: órbitas na região *I*, com energias inferiores à energia de quebra de onda E_{wbr} , oscilam confinadas em $\varphi_{min} < \varphi < \tilde{\varphi}$, enquanto que órbitas na região *II* (com energias maiores que E_{wbr}) estão sujeitas à quebra de onda. Embora o valor de φ_{max} seja mais “acessível” em regimes de propagação em baixa velocidade (pois, conforme citado na seção 3.2.2, $U(\varphi_{min}) \sim U(\varphi_{max})$ à medida que a velocidade de propagação diminui), a quebra de onda continua sendo mais provável para os elétrons do que para os íons.

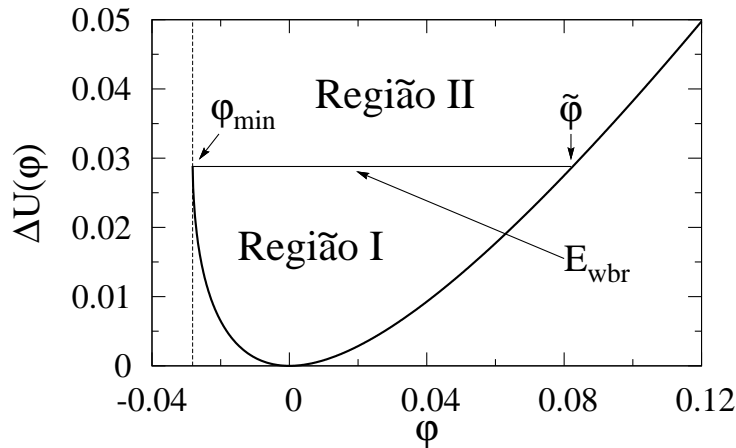


Figura 5.1: região periódica (*I*) e de quebra de onda (*II*) para o potencial ΔU em $\psi = 0$.

¹Como $\omega_e \lesssim \omega$, a condição para que o plasma seja *underdense* ($\omega_e \ll \omega$) não é atingida

5.3 A dinâmica

5.3.1 Pulsos com amplitudes pequenas

A análise da dinâmica de pulsos com amplitudes pequenas propagando-se em baixa velocidade é qualitativamente similar ao caso de propagação em alta velocidade. Para $\eta = 1,001\eta_*$, figura 5.2(a), as modulações são lentas de modo que aproximações adiabáticas são aceitáveis. Nessas condições, o espaço de fase apresenta apenas um conjunto de curvas KAM e o sistema é aproximadamente integrável. O ponto fixo central corresponde a uma órbita periódica isolada que retorna periodicamente para $\psi = 0$ quando $\varphi = 0$, e as curvas que circundam o ponto fixo representam regimes de flutuações quase-periódicas de φ (que não se extinguem quando $\psi = 0$). Para esse valor de η , ainda não há ilhas de ressonância no espaço de fase.

O comportamento do ponto fixo pode ser observado através do seu índice de estabilidade α . À medida que η aumenta, inicialmente α apresenta um comportamento oscilatório intenso, como pode ser visto na figura 5.2(b), mas o ponto permanece estável (pois $|\alpha| < 1$). Porém, para um certo valor de η o índice finalmente atinge o valor $+1$, como mostra a figura 5.3(a). Para esse valor de η o ponto fixo central se instabiliza e, imediatamente após ele, deixa de existir [17, 19, 20]. A figura 5.3(b) mostra o espaço de fase logo após a tangência: embora não existam curvas KAM e o comportamento caótico esteja presente, a dinâmica continua restrita a pequenos valores de φ . Valores maiores de η causam difusão em direção a níveis de energia superiores até que ocorra a quebra de onda para $r_e \rightarrow 0$ (ou, com menor probabilidade, $r_i \rightarrow 0$). Para ilustrar essa dinâmica difusiva, a figura 5.3(c) mostra a energia eletrostática $E_\varphi \equiv pP_\varphi/2 + \Delta U$ de uma trajetória que partiu da origem alcançando valores próximos à energia de quebra de onda.

A dinâmica dos pulsos com amplitudes pequenas se propagando em baixa velocidade é portanto análoga à estudada para a propagação em alta velocidade: para valores pequenos de η temos uma solução periódica (ponto fixo central, referente ao pulso isolado se propagando) cercada por soluções quase-periódicas (que não são nulas quando $\psi = 0$); Para η imediatamente após a instabilização do ponto fixo central ainda existem curvas KAM, mas já é percebida a existência de caos no movimento de φ . Casos onde $\psi = 0$ mas $\varphi \neq 0$ correspondem a pulsos quase-neutros de ψ acompanhados por rastros de atividade de φ [9, 10]. Por fim, para valores maiores de η as curvas KAM (que antes impediam a difusão) são destruídas; nesse ponto (onde aproximações adiabáticas não têm mais validade) nossas soluções (pulsos solitários com pequenas amplitudes) são totalmente destruídas [8, 4]. A difusão permite então que a quase-partícula ganhe energia suficiente

para atingir a quebra de onda.

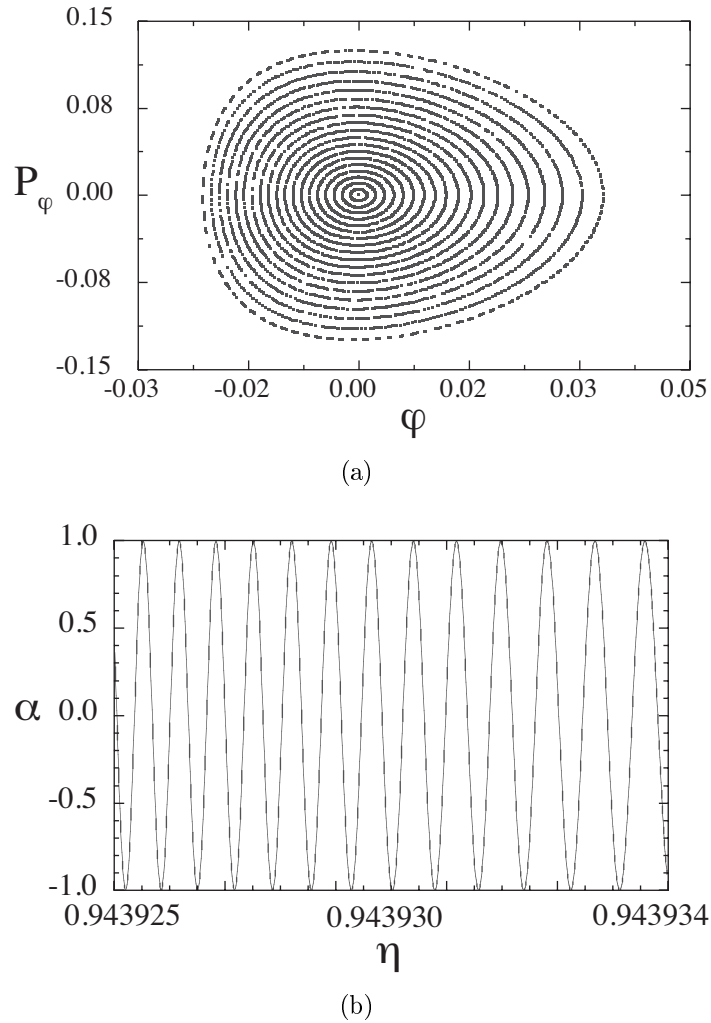


Figura 5.2: 5.2(a) seção de Poincaré mostrando o espaço de fase próximo ao limiar da estabilidade modulacional, com $\eta = 1,001\eta_*$; 5.2(b) índice de estabilidade α em função de η ; $\epsilon = 10^{-11}$.

5.3.2 Pulsos com amplitudes grandes

Já vimos que pulsos com amplitudes pequenas, estudados em regimes onde $\eta \leq 1$, existem para faixas de parâmetros. Para uma dada velocidade V_0 , por exemplo, existem soluções para uma faixa de valores de η . Por isso, diz-se que o espectro das soluções é contínuo. Pulsos com amplitudes grandes foram apresentados por Kozlov et al. [6] como sendo parte de um espectro discreto de soluções.

Para a nossa escolha de parâmetros, temos em $\eta \equiv \omega_e^2/\omega^2 \approx 2.0$ um pulso eletro-

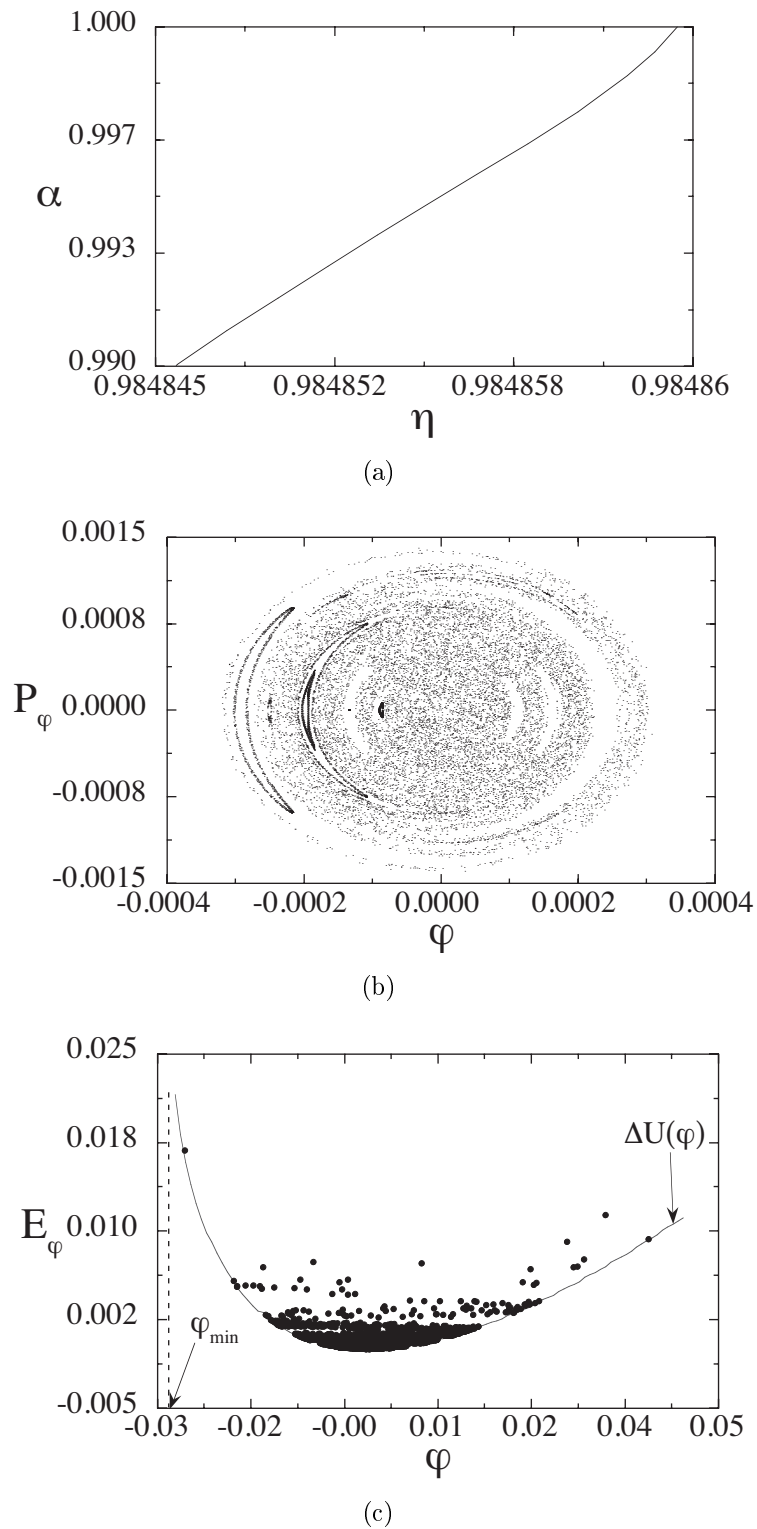


Figura 5.3: 5.3(a) índice de estabilidade α alcança +1; 5.2(b) seção de Poincaré mostrando o espaço de fase após a tangência inversa; 5.3(c) difusão de φ em direção a níveis superiores de $\Delta U(\varphi)$; $\epsilon = 10^{-11}$.

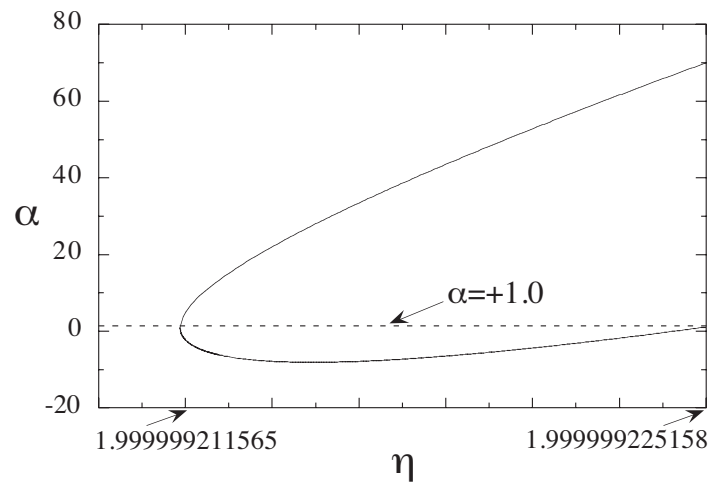
magnético se propagando cujo envelope apresenta um nó ². Soluções com mais nós (e também outras soluções com um nó) foram encontradas em algumas regiões específicas do espaço de parâmetros [8, 6, 4], mas restringimos nossa análise à solução citada dado que as características que vamos estudar são comuns a todos os casos.

Estudamos a existência e a estabilidade de soluções através do comportamento do índice de estabilidade α em relação a η . Partimos de um valor de η para o qual não encontramos nenhuma solução e, à medida que aumentamos esse parâmetro, cruzamos um certo valor limite onde o ponto fixo fica instável e surgem duas soluções, uma instável ($\alpha \geq +1$ em toda a sua extensão) e outra inicialmente estável. A figura 5.4(a) mostra o surgimento dessas soluções e o intervalo em η para o qual uma delas é estável. Além disso, vemos que a solução instável vai além de $\eta = 2,0$, sendo provavelmente a solução detectada por Kozlov et al. na referência [6].

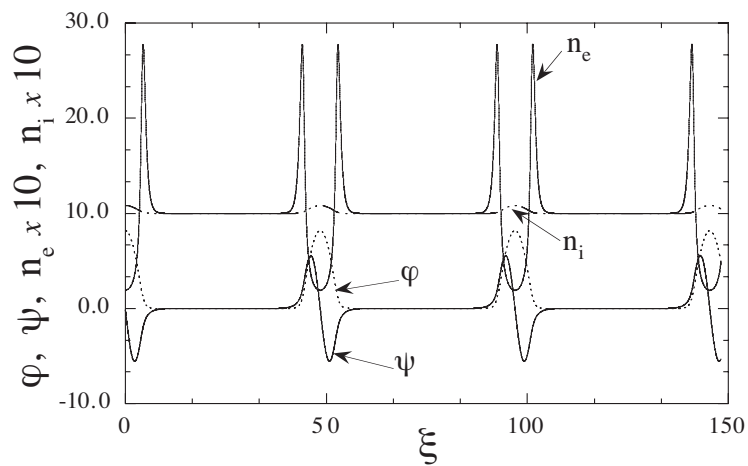
A mesma figura nos permite ainda observar que o intervalo de existência em η de ambas as soluções é curto, mas finito. Ou seja, o espectro de soluções com grandes amplitudes, interpretado até então como sendo discreto, é de fato um espectro contínuo localizado em uma banda muito estreita.

Outro resultado relevante para soluções com grandes amplitudes foi verificado ao fazermos $\epsilon \rightarrow 0$ nas simulações nesse regime. Ao contrário do que ocorreu em regimes de baixas amplitudes (tanto para a propagação em alta velocidade quanto para a propagação em baixa velocidade), as soluções não convergem para um pulso isolado, solitário. Esse comportamento pode ser observado na figura 5.4(b), que foi obtida com $\epsilon = 0$. Esse comportamento nos leva à conclusão de que os pontos fixos representados nas figuras são pontos periódicos intrínsecos do sistema, já que a existência desses pontos não está condicionada à alteração na energia causada pela utilização de um ϵ pequeno mas não nulo. Portanto, as soluções com amplitudes grandes não são soluções solitárias, e sim trens de pulsos não completamente isolados entre si.

²O pulso cruza uma vez o eixo zero; ver figura 5.4(b) para uma visualização.



(a)



(b)

Figura 5.4: 5.4(a) índice de estabilidade α em função de η mostra a coexistência de soluções estáveis e instáveis para pulsos com amplitudes grandes; 5.4(b) séries temporais para os potenciais ($\eta = 1,99999215$); em ambas as figuras $\epsilon = 0$.

Capítulo 6

Conclusões

Neste trabalho estudamos a propagação de pulsos eletromagnéticos em plasmas relativísticos frios. A partir de um modelo para o qual soluções numéricas e aproximações analíticas foram previamente estudadas, construímos um Hamiltoniano que nos permitiu interpretar o problema como uma quase-partícula sob a ação de um potencial efetivo. Condições impostas pela forma desse potencial definem uma faixa de valores de φ para os quais soluções periódicas são possíveis. Do ponto de vista da energia da quase-partícula, podemos calcular o valor limite E_{wbr} , a partir do qual ocorre a quebra de onda. A utilização de técnicas de análise de dinâmica não linear nos permitiu estudar de forma unificada o sistema em diferentes regimes, bem como os mecanismos de transição entre esses regimes.

Expandindo as equações que governam a dinâmica dos potenciais ψ e φ obtivemos as frequências lineares Ω_ψ e Ω_φ associadas aos mesmos. Utilizamos essas frequências para estudar a existência e a estabilidade de soluções com amplitudes pequenas: da equação linearizada $\psi'' = \Omega_\psi^2 \psi$ a condição de instabilização do potencial vetor $\Omega_\psi^2 \geq 0$ nos permitiu calcular o valor limiar do parâmetro de perturbação η_* . Ou seja, para $\eta = \eta_*$ o sistema se instabiliza e a partir desse valor surgem pulsos eletrostáticos, inicialmente com amplitudes pequenas.

Estudamos essas soluções (pulsos com pequenas amplitudes) propagando-se em alta velocidade, em um plasma do tipo *underdense* onde $\omega_e \ll \omega$ (uma configuração apropriada para esquemas de aceleração por *wakefield*), e em baixa velocidade (em um plasma onde $\omega_e \lesssim \omega$). Do ponto de vista qualitativo, as dinâmicas observadas nas propagações em alta velocidade e em baixa velocidade são equivalentes: em regimes caracterizados por η imediatamente após seu valor limiar η_* , vemos pulsos isolados ou pulsos coexistindo com rastros de φ regulares; à medida que aumentamos η (afastando-se assim desse limiar), o ponto fixo é aniquilado por uma bifurcação tangente e já existe atividade eletrostática

caótica (que ainda permanece confinada a pequenas amplitudes devido às curvas KAM que a circundam); finalmente, para valores ainda maiores de η as curvas KAM (que antes confinavam a atividade eletrostática) são destruídas, pulsos não são mais possíveis e a quebra de onda ocorre devido à difusão caótica. Esse corresponde ao ponto em que soluções solitárias com amplitudes pequenas são destruídas, como comentado por Farina e Bulanov [8] e Poornakala et al. [4]. Temos portanto três regimes claramente identificados na propagação de pulsos com amplitudes pequenas: (i) um regime regular ou adiabático, onde a dinâmica é aproximadamente integrável; (ii) um regime fracamente não linear, onde o caos está presente mas a difusão caótica ainda não ocorre devido à existência das curvas KAM e, finalmente, (iii) um regime caótico difusivo onde as curvas KAM isolantes estão ausentes. Esse processo de difusão caótica é o mecanismo responsável pela destruição das soluções adiabáticas: através dele, trajetórias inicialmente confinadas no potencial efetivo alcançam níveis superiores de energia e escapam do confinamento (nessa situação a energia da quase-partícula é maior ou igual à E_{ubr} e a quebra de onda ocorre).

No regime de grandes amplitudes utilizamos valores de parâmetros (V_0, η) para os quais a existência de soluções foi estudada por Kozlov et al. [6]. Mostramos que o espectro de soluções, pensado até então como sendo discreto e contendo um único ramo, é de fato um espectro que bifurca em dois ramos contínuos de soluções (um instável, outro estável) contidos em bandas paramétricas estreitas. Outro resultado relevante nesse mesmo regime é que todas as soluções periódicas persistem mesmo quando tomamos $\epsilon \rightarrow 0$. Isso nos leva à conclusão de que as soluções são de fato periódicas, ou seja, não temos sólitons com grandes amplitudes mas trens periódicos de pulsos quase-isolados.

Referências Bibliográficas

- [1] Mendonça J. *Theory of Photon Acceleration*. Bristol: IOP Publishing 2001;
- [2] Tajima T, Dawson J. *Laser Electron Accelerator*. Physical Review Letters **43**, 267, 1979;
- [3] Shukla P, Rao N, Yu M, Tsintsadze N. *Relativistic nonlinear effects in plasmas*. Physics Reports **138**, 1, 1986;
- [4] Poornakala S, Das A, Sen A, Kaw P. *Laser envelope solitons in cold overdense plasmas*. Physics of Plasmas **9**, 1820, 2002;
- [5] Bingham R. *Accelerator physics: In the wake of success*. Nature **424**, 258, 2003;
- [6] Kozlov VA, Litvak AG, Suvorov EV. *Envelope solitons of relativistic strong electromagnetic waves*. Sov Phys - JETP (Engl Transl) **76**, 148, 1979;
- [7] Mofiz UA, de Angelis U. *Nonlinear propagation and localization of intense electromagnetic waves in relativistic plasmas*. Journal of Plasma Physics **33**, 107, 1985;
- [8] Farina D, Bulanov S. *Relativistic Electromagnetic Solitons in the Electron-Ion Plasma*. Physical Review Letters **86**, 5289, 2001;
- [9] Kuehl H, Zhang C. *One-dimensional, weakly nonlinear electromagnetic solitary waves in a plasma*. Physical Review E **48**, 1316, 1993;
- [10] Sudan R, Dimant Y, Shiryayev O. *One-dimensional intense laser pulse solitons in a plasma*. Physics of Plasmas **4**, 1489, 1997;
- [11] Blumenfeld I, Clayton C, Decker F, Hogan M. *Energy doubling of 42 GeV electrons in a metre-scale plasma wakefield accelerator*. Nature, **445**, 741, 2007;
- [12] Bingham R. *Plasma physics: On the crest of a wake*. Nature **445**, 721, 2007;

-
- [13] Bonatto A, Pakter R, Rizzato F. *Nonlinear dynamics of electromagnetic pulses in cold relativistic plasmas*. Journal of Plasma Physics **72**, 179, 2005;
- [14] Polymilis C, Hizanidis K. *Transition to stochasticity in the relativistic and the non-relativistic versions of a dynamical system*. Physical Review E **41** vol 6, 4381, 1993;
- [15] Corso G, Rizzato F. *Hamiltonian bifurcations leading to chaos in a low-energy relativistic wave-particle system*. Physica D: Nonlinear Phenomena **80**, 296, 1995;
- [16] Pakter R, Rizzato F. *Stability of Periodically Focused Intense Particle Beams*. Physical Review Letters **87**, 044801, 2001;
- [17] Rizzato F, Pakter R. *Gap Bifurcations in Nonlinear Dynamical Systems*. Physical Review Letters **89**, 184102, 2002;
- [18] Bonatto A, Pakter R, Rizzato F. *Nonlinear field dynamics of electromagnetic pulses in plasmas*. Chaos Sol. & Fractals **32**, 951, 2007;
- [19] Gerhardt G, Frichebruder M, Rizzato F. *Sudden transition to spatiotemporal chaos in a nonlinear Klein–Gordon equation*. Chaos **13**, 1269, 2002;
- [20] Caetano T, Couto F, Corso G, Pakter R, Brunett L, Rizzato F. *Nonmonotonic maps and related bifurcations in laser accelerators*. Chaos Sol. & Fractals **7**, 165, 1996;