

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

ESTUDO COMPARATIVO ENTRE MÉTODOS NUMÉRICOS NO DOMÍNIO DO TEMPO E DA
FREQUÊNCIA PARA ANÁLISE DINÂMICA DE ESTRUTURAS SUBMETIDAS A EVENTOS
SÍSMICOS ARTIFICIAIS

por

André de Vargas Veit

Monografia apresentada ao Departamento de Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Engenheiro Mecânico.

Porto Alegre, junho de 2016.



Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Escola de Engenharia

Departamento de Engenharia Mecânica

ESTUDO COMPARATIVO ENTRE MÉTODOS NUMÉRICOS NO DOMÍNIO DO TEMPO E DA
FREQUÊNCIA PARA ANÁLISE DINÂMICA DE ESTRUTURAS SUBMETIDAS A EVENTOS
SÍSMICOS ARTIFICIAIS

por

André de Vargas Veit

ESTA MONOGRAFIA FOI JULGADA ADEQUADA COMO PARTE DOS
REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
ENGENHEIRO MECÂNICO
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELA BANCA EXAMINADORA DO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Prof. Alcy Rodolfo dos Santos Carrara
Coordenador do Curso de Engenharia Mecânica

Área de Concentração: **Mecânica dos Sólidos**

Orientador: Prof^a. Dr^a. Letícia Fleck Fadel Miguel

Comissão de Avaliação:

Prof. Dr. Edson Hikaro Aseka

Prof. Dr. Herbert Martins Gomes

Prof. Dr. Juan Pablo Raggio Quintas

Porto Alegre, junho de 2016.

À minha família, namorada e amigos.

VEIT, A. V. **Estudo comparativo entre métodos numéricos no domínio do tempo e da frequência para análise dinâmica de estruturas submetidas a eventos sísmicos artificiais.** 2016. 16. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2016.

RESUMO

O presente trabalho apresenta um estudo comparativo entre métodos para análise dinâmica de uma estrutura submetida a uma excitação sísmica definida pelo espectro de Kanai-Tajimi. Para essa análise, foram desenvolvidas rotinas computacionais por meio do *software* MATLAB. O primeiro método trata o problema no domínio do tempo, utilizando as equações de Newmark para solução numérica do problema. É utilizado o método proposto por Shinozuka para transformar o espectro sísmico para o domínio do tempo. O segundo método aborda o problema pelo domínio da frequência, utilizando a análise espectral para obtenção das respostas. Conclui-se que o método que trata o problema pelo domínio da frequência é mais preciso e mais eficiente, visto que o método definido no domínio do tempo possui um certo grau de aleatoriedade em suas respostas e um maior custo computacional.

PALAVRAS-CHAVE: Análise Dinâmica, Carregamento Sísmico, Densidade Espectral, Análise Espectral, Método de Newmark, Espectro de Kanai-Tajimi.

VEIT, A. V. **Comparative study of numerical methods in the time and frequency domain for dynamic analysis of structures subjected to artificial seismic events.** 2016. 16. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2016.

ABSTRACT

This work presents a comparative study between methods for dynamic analysis of a structure subjected to seismic excitation defined by the Kanai-Tajimi spectrum. For this analysis, computational routines were developed using MATLAB software. The first method manages the problem in the time domain using Newmark equations for numerical solution of the problem. The method proposed by Shinozuka is used to transform the seismic spectrum to the time domain. The second method deals with the problem in the frequency domain using spectral analysis to obtain the responses. It is concluded that the method in the frequency domain is more accurate and more efficient, since the method defined in the time domain has a certain degree of randomness in its responses and a higher computational cost.

KEYWORDS: Dynamic Analysis, Seismic Loading, Spectral Density, Spectral Analysis, Newmark Method, Kanai-Tajimi Spectrum.

ÍNDICE

	Pág.
1. INTRODUÇÃO.....	1
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	1
3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	1
3.1 Função de Autocorrelação.....	1
3.2 Densidade Espectral de Potência.....	2
3.3 Método de Newmark.....	3
4 METODOLOGIA.....	4
4.1 Organização Geral do Trabalho.....	4
4.2 Sistema Avaliado.....	6
4.3 Geração do Sinal Sísmico Aleatório – Rotina 1.....	6
4.4 Método de Shinozuka – Rotina 2.....	7
4.5 Solução pelo Método de Newmark – Rotina 3.....	7
4.6 Solução Analítica do Sistema Sujeito à Excitação Harmônica – Rotina 4.....	7
4.7 Geração do Espectro de Excitação Harmônica – Rotina 5.....	8
4.8 Solução pela Análise Espectral no DF – Rotina 6.....	8
5 RESULTADOS E DISCUSSÃO.....	9
5.1 Validação do Sinal Sísmico Aleatório.....	9
5.2 Validação do Sinal da Excitação Harmônica.....	10
5.3 Validação da Implementação do Método de Newmark.....	10
5.4 Validação da Implementação no Domínio da Frequência.....	12
5.5 Avaliação e Comparação entre os Procedimentos de Cálculo.....	13
5.5.1 Custo Computacional.....	13
5.5.2 Aleatoriedades na Solução pelo Domínio do Tempo.....	13
6. CONCLUSÕES.....	14
7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	15
Apêndice.....	16

1. INTRODUÇÃO

O crescente aumento populacional e a valorização das áreas urbanas centrais estão tornando as edificações cada vez mais altas e esbeltas. Tais características fazem com que essas novas estruturas sejam mais suscetíveis a carregamentos dinâmicos. Uma condição severa a que uma edificação poderá estar sujeita, tratando-se de carregamentos dinâmicos, ocorre durante um abalo sísmico. Esse cenário exige uma atenção especial ao projeto de estruturas localizadas em áreas onde há a probabilidade de terremotos. Por conta disso, é cada vez mais importante o estudo e desenvolvimento de métodos mais precisos e mais eficientes para verificações estruturais desse tipo.

O objetivo do presente trabalho é a comparação entre dois métodos para análise dinâmica de uma estrutura sujeita a uma excitação sísmica. Um método no domínio do tempo (DT) e o outro no domínio da frequência (DF). O primeiro método é definido no DT, onde as equações de movimento do sistema são resolvidas numericamente utilizando o método de integração direta proposto por Newmark (1959). O segundo método de cálculo é definido no DF, sendo as respostas da estrutura determinadas diretamente a partir do espectro da excitação.

O sinal sísmico aleatório de excitação da estrutura é determinado por meio do espectro de potência de Kanai-Tajimi (Kanai, 1961; Tajimi, 1960). E a transformação deste sinal para análise no DT é feita utilizando o método proposto por Shinozuka e Jan (1972).

Todos os métodos utilizados nesta análise foram implementados computacionalmente por meio do *software* MATLAB.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Kanai (1961) e Tajimi (1960) propuseram um modelo empírico para gerar um acelerograma de excitação sísmica artificial. A excitação é modelada como um processo aleatório estacionário idealizado, a partir de um ruído branco gaussiano filtrado, utilizando a frequência natural e a razão de amortecimento crítico próprios do solo. A excitação é definida a partir de um espectro de densidade de potência. Este modelo é amplamente utilizado na análise de estruturas sob ação de sismos.

Shinozuka e Jan (1972) apresentaram um método eficiente para análise no domínio do tempo de estruturas lineares sob excitações aleatórias definidas por uma função de densidade espectral de potência. O método possibilita a avaliação da evolução temporal da excitação. O sinal é gerado através de uma série de funções cosseno, frequências igualmente espaçadas e ângulos de fase aleatórios.

Mohebbi *et al.* (2012) estudaram as respostas de estruturas com amortecedores de massa sintonizados e submetidas a um abalo sísmico. Foi avaliado um edifício de 10 pavimentos modelado como um *shear building*, sujeito a uma excitação unidimensional gerada pelo espectro de Kanai-Tajimi atuando em sua base. Os resultados demonstraram a simplicidade e convergência do método.

Schaan (2012) estudou o processo de geração de um registro de excitação sísmica utilizando o espectro de densidade de potência proposto por Kanai-Tajimi. Através do método de Shinozuka e Jan (1972) simulou a excitação em relação ao tempo e utilizou estes dados para avaliar a resposta dinâmica da mesma estrutura analisada por Mohebbi *et al.* (2012).

Drehmer, (2012) avaliou a otimização de parâmetros concentrados de suspensão em veículos para minimizar a aceleração vertical rms transmitida ao motorista. Para tanto, realizou a análise dinâmica dos modelos veiculares propostos por meio da análise espectral no DF.

3. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

3.1 Função de Autocorrelação

De acordo com Newland (1987), a função de autocorrelação de um processo aleatório $x(t)$ pode ser determinada pelo valor médio do produto $x(t)x(t + \tau)$. Esta função mede a

correlação do sinal com ele mesmo, comparando seus valores em diferentes instantes de tempo. No caso de um processo estacionário, $E[x(t)x(t+\tau)]$ será independente do tempo absoluto t e dependerá somente da variável de separação do tempo τ . Por tanto, para um processo aleatório estacionário, Newland (1987) define a função de autocorrelação $R_x(\tau)$ como:

$$R_x(\tau) = E[x(t)x(t+\tau)] \quad (3.1)$$

sendo $x(t)$ o valor do sinal em um instante de tempo t , $x(t+\tau)$ o valor do sinal em um instante de tempo $(t+\tau)$, ou seja, um instante subsequente a t . $E[\]$ representa o valor esperado. Os valores de $R_x(\tau)$ variam no intervalo de -1 a 1, sendo 1 a indicação de uma correlação perfeita, -1 para uma anticorrelação perfeita e 0 para ausência total de correlação.

3.2 Densidade Espectral de Potência

De acordo com Newland (1987), o histórico de tempo $x(t)$ de uma função que descreve um processo aleatório natural é não periódico. Isso implica que $x(t)$ não pode ser representada por uma série de Fourier discreta. Para o processo aleatório estacionário $x(t)$, a condição

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty \quad (3.2)$$

exigida para a existência da transformada de Fourier não é satisfeita. Sendo assim, há uma dificuldade para a obtenção dos dados sobre a composição de frequências de um processo aleatório. Tal dificuldade pode ser contornada através da análise da função de autocorrelação do processo.

Segundo Newland (1987), a função de autocorrelação transmite indiretamente a informação sobre as frequências presentes no processo aleatório, visto que assume valores máximos para valores de τ em que $x(t)$ e $x(t+\tau)$ estão em fase e mínimos para quando estão em antifase. Desse modo, quando plotado o gráfico da função $R_x(\tau)$ por τ , as frequências encontradas são as mesmas presentes na função de amostra $x(t)$. Ajustando o valor zero do processo aleatório $x(t)$, o valor médio do processo deverá ser igual a zero, isto é, $E[x] = 0$, e como $x(t)$ é não periódico

$$R_x(\tau \rightarrow \infty) = 0 \quad (3.3)$$

Com isso a condição para existência da transformada de Fourier é satisfeita.

Newland (1987) define a densidade espectral de potência de um processo x através da transformada de Fourier da função de autocorrelação

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (3.4)$$

e sua transformada inversa

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (3.5)$$

Onde a densidade espectral $S_x(\omega)$, é função da frequência angular ω .

Segundo Newland (1987), a propriedade mais importante da densidade espectral fica evidente quando faz-se $\tau = 0$, na Eq. (3.5).

$$R_x(\tau = 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega) d\omega \quad (3.6)$$

E pela definição fundamental da função de autocorrelação $R_x(\tau)$ obtém-se:

$$E[x^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega) d\omega \quad (3.7)$$

Ou seja, a variância de um processo aleatório estacionário com média zero é dado pela área abaixo do gráfico da densidade espectral de potência S_x em função da frequência angular ω . O valor eficaz (RMS) pode ser obtido fazendo-se a raiz quadrada da variância obtida pela Eq. (3.7).

3.3 Método de Newmark

Newmark (1959) desenvolveu um método implícito de integração direta das equações de movimento de um sistema dinâmico. Segundo Miguel (2006), métodos de integração direta consistem em procedimentos numéricos do tipo passo a passo que não requerem o cálculo prévio das características dinâmicas da estrutura, como autovetores e autovalores. A convergência do procedimento depende do tamanho do intervalo de tempo definido e da precisão da função adotada para representar a aceleração dentro desse intervalo. Os métodos implícitos utilizam a equação do movimento no instante $t + \Delta t$ para calcular a resposta nesse mesmo instante, sendo o procedimento proposto por Newmark o mais eficiente entre métodos implícitos (Miguel, 2006).

A variação do deslocamento, velocidade e aceleração são descritas pelas equações Eq. (3.8), Eq. (3.9) e Eq. (3.10), respectivamente.

$$\vec{x}(t_{i+1}) = (a_0 \mathbf{M} + a_5 \mathbf{C} + \mathbf{K})^{-1} \left[\vec{F}(t_{i+1}) + \mathbf{M} [a_0 \vec{x}(t_i) + a_1 \dot{\vec{x}}(t_i) + a_2 \ddot{\vec{x}}(t_i)] + \mathbf{C} [a_5 \vec{x}(t_i) + a_6 \dot{\vec{x}}(t_i) + a_7 \ddot{\vec{x}}(t_i)] \right] \quad (3.8)$$

$$\dot{\vec{x}}(t_{i+1}) = a_5 [\dot{\vec{x}}(t_{i+1}) - \dot{\vec{x}}(t_i)] - a_6 \dot{\vec{x}}(t_i) - a_7 \ddot{\vec{x}}(t_i) \quad (3.9)$$

$$\ddot{\vec{x}}(t_{i+1}) = a_0 [\ddot{\vec{x}}(t_{i+1}) - \ddot{\vec{x}}(t_i)] - a_1 \dot{\vec{x}}(t_i) - a_2 \ddot{\vec{x}}(t_i) \quad (3.10)$$

Onde os vetores $\vec{x}(t_{i+1})$, $\dot{\vec{x}}(t_{i+1})$ e $\ddot{\vec{x}}(t_{i+1})$ representam o deslocamento, a velocidade e a aceleração no instante de tempo $t + \Delta t$. Os vetores $\vec{x}(t_i)$, $\dot{\vec{x}}(t_i)$ e $\ddot{\vec{x}}(t_i)$ representam o deslocamento, a velocidade e a aceleração no instante de tempo t . \mathbf{M} , \mathbf{K} e \mathbf{C} são as matrizes de massa, rigidez e amortecimento do sistema, respectivamente.

As constantes a_0, a_1, a_2, a_5, a_6 e a_7 são parâmetros do método de Newmark definidos pelo conjunto de equações

$$a_0 = \frac{1}{\alpha \Delta t^2}; \quad a_1 = \frac{1}{\alpha \Delta t}; \quad a_2 = \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right); \quad (3.11)$$

$$a_5 = \frac{\delta}{\alpha \Delta t}; \quad a_6 = \left(\frac{\delta}{\alpha} - 1 \right); \quad a_7 = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\delta}{\alpha} - 2 \right).$$

Os parâmetros α e δ estão diretamente relacionados à estabilidade do processo. Quando definidos como $\alpha = 0,25$ e $\delta = 0,5$ o método é incondicionalmente estável no tratamento de problemas lineares (Miguel, 2006).

Para o início do processo iterativo, os vetores de deslocamento e velocidade no instante inicial de tempo devem ser definidos de acordo com as condições iniciais do problema. A aceleração inicial é calculada isolando a mesma na equação de movimento do sistema

$$\ddot{\vec{x}}(t_0) = \mathbf{M}^{-1}[\vec{F}(t_0) - \mathbf{C}\dot{\vec{x}}(t_0) - \mathbf{K}\vec{x}(t_0)] \quad (3.12)$$

4. METODOLOGIA

4.1 Organização do Trabalho

Para a realização do estudo comparativo entre os métodos no domínio do tempo e no domínio da frequência, foram criados programas utilizando o *software* MATLAB. Estão listadas na Tabela 4.1 todas as rotinas computacionais desenvolvidas. A numeração será utilizada para facilitar suas referências no decorrer do texto.

Tabela 4.1 – Listagem das rotinas computacionais desenvolvidas.

Nº da rotina	Finalidade / Características
1	Geração do Espectro de Kanai-Tajimi
2	Transformação do sinal para o domínio do tempo - Método de Shinozuka
3	Solução do problema dinâmico - Método numérico - Newmark - Domínio do tempo
4	Solução do problema dinâmico - Método analítico - Excitação harmônica - Domínio do tempo (para validação)
5	Geração do espectro de excitação harmônica (para validação)
6	Solução do problema dinâmico - Método numérico - Análise espectral - Domínio da frequência

O desenvolvimento deste estudo foi dividido em cinco etapas. A Figura 4.1 mostra um diagrama que representa a organização geral do trabalho, enquanto a Figura 4.2 mostra um diagrama mais detalhado.

Na primeira parte do trabalho (1ª etapa) é imposta ao sistema a excitação sísmica aleatória proveniente do espectro de potência proposto por Kanai-Tajimi (Kanai, 1961 e Tajimi, 1960). Para a análise do problema no DT, aplicou-se o método proposto por Shinuzuka e Jan (1972) que transformou o sinal sísmico do domínio da frequência para o domínio do tempo. As equações de movimento foram resolvidas pelo método de Newmark (1959).

O objetivo da segunda parte é a validação do cálculo dinâmico feito na primeira etapa. Com esse propósito foi gerado um sinal harmônico no domínio da frequência para excitar a estrutura. Este sinal foi transformado para o domínio do tempo, novamente pelo método de Shinozuka e Jan (1972). As equações são resolvidas por Newmark (1959). A validação é feita pela comparação das respostas obtidas com o programa numérico desenvolvido com as respostas obtidas através da solução analítica do problema.

A terceira parte compreende o cálculo do mesmo sistema avaliado durante primeira etapa, porém com uma abordagem pelo DF. É gerado o sinal da excitação sísmica pelo espectro de Kanai-Tajimi, que é utilizado como entrada na rotina número seis. Este programa obtém as respostas dinâmicas da estrutura diretamente através do espectro de excitação.

Na etapa seguinte é feita a validação do procedimento de cálculo da 3ª parte. Determinam-se as respostas do sistema para uma excitação harmônica através da análise espectral no DF e compara-se com a solução analítica.

Na quinta etapa é feita a avaliação e discussão dos resultados.

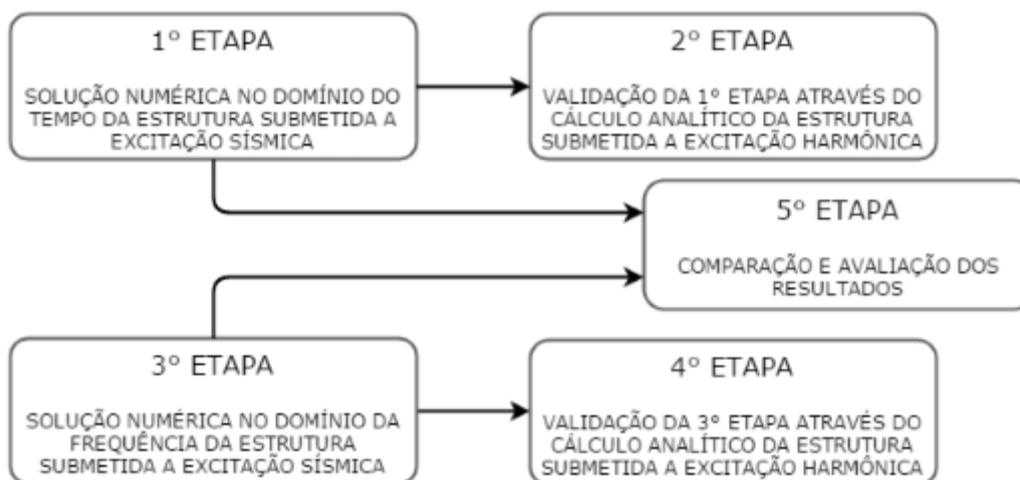


Figura 4.1 – Diagrama representando a organização das etapas do trabalho.

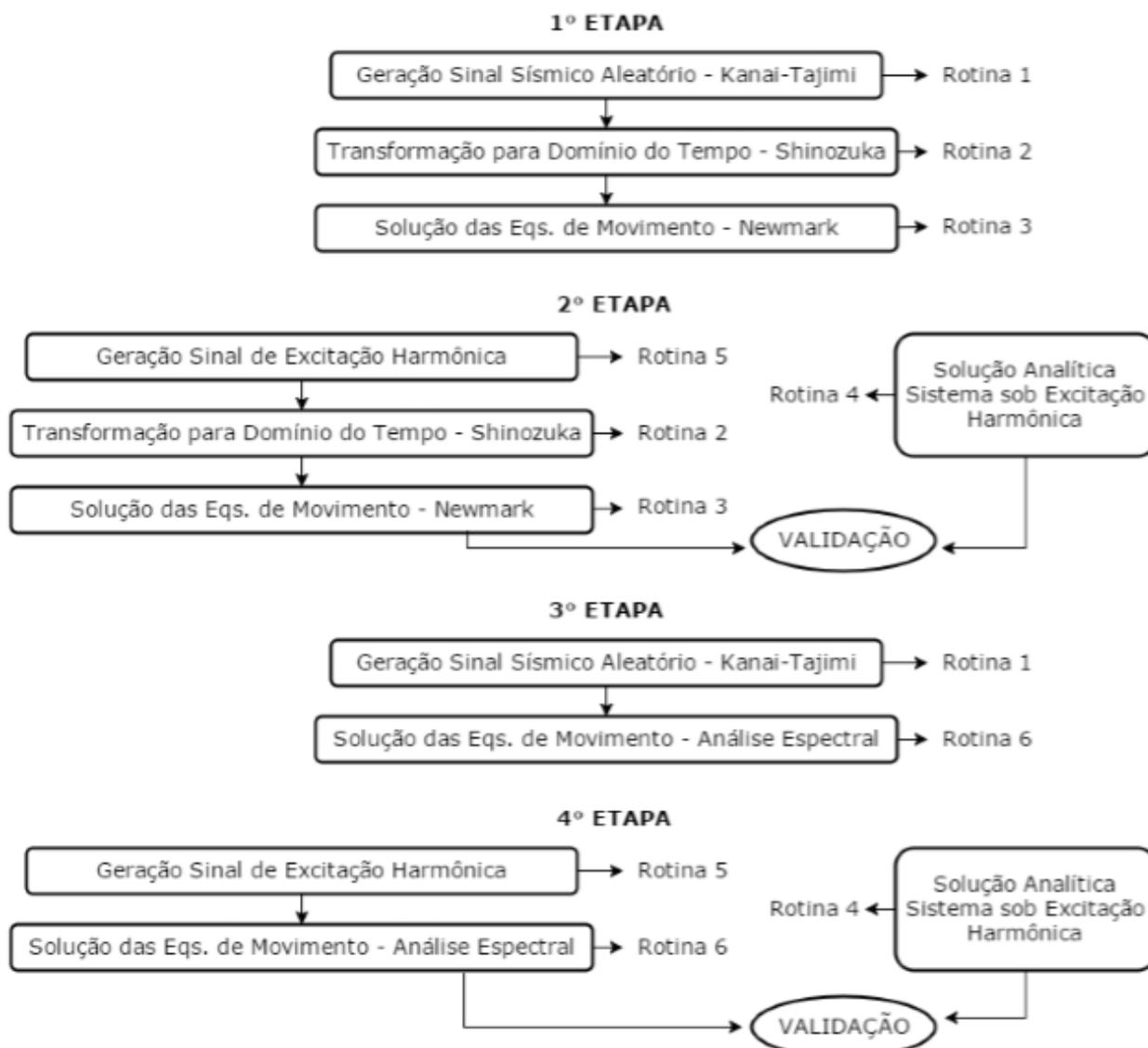


Figura 4.2 – Diagrama representando a metodologia aplicada às etapas de obtenção de dados e as rotinas computacionais desenvolvidas para cada etapa.

4.2 Sistema Avaliado

A estrutura adotada neste trabalho é a mesma estudada por Mohebbi *et al.* (2012), um edifício modelado como um *shear building* de dez graus de liberdade (NGDL = 10), um para cada pavimento. As propriedades de cada andar estão listadas abaixo:

$$m_i = 360.000 \text{ kg} \quad c_i = 6,2 \text{ M Ns/m} \quad k_i = 650 \text{ M N/m}$$

para

$$i = 1, 2, \dots, 10$$

As matrizes de massa M , rigidez K e amortecimento C do sistema, são definidas pelas seguintes equações

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & m_{NGDL} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & \dots & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & \dots & 0 \\ \vdots & -k_3 & k_3 + k_4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k_{NGDL} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & \dots & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 & \dots & 0 \\ \vdots & -c_3 & c_3 + c_4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{NGDL} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

A avaliação da estrutura é feita frente a uma excitação dada pela aceleração do solo. Segundo Rao (1995), o sistema de equações diferenciais em forma matricial que descreve a dinâmica de um sistema de múltiplos graus de liberdade sujeito a uma aceleração na base é representado pela seguinte equação

$$\mathbf{M}\ddot{\vec{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\vec{x}}(t) + \mathbf{K}\vec{x}(t) = -\mathbf{M}\ddot{\vec{y}}_g(t) \quad (4.4)$$

onde $\ddot{\vec{y}}_g(t)$ é o vetor de acelerações impostas pelo solo em função do tempo, $\vec{x}(t)$ é o vetor deslocamento do sistema, $\dot{\vec{x}}(t)$ é o vetor velocidade e $\ddot{\vec{x}}(t)$ é o vetor aceleração do sistema.

4.3 Geração do Sinal Sísmico Aleatório – Rotina 1

A geração do sinal de excitação sísmica consiste no cálculo da função de densidade espectral de potência proposta por Kanai-Tajimi (Kanai, 1961 e Tajimi, 1960), definida pelas equações:

$$S_w(\omega) = S_0 \frac{\omega_g^4 + 4\omega_g^2 \xi_g^2 \omega^2}{(\omega^2 - \omega_g^2)^2 + 4\omega_g^2 \xi_g^2 \omega^2} \quad (4.5)$$

$$S_0 = \frac{pga^2(2\xi_g)}{\pi\omega_g(4\xi_g^2 + 1)} \quad (4.6)$$

$$\omega = 2\pi f \quad (4.7)$$

onde S_0 é a densidade espectral constante, $S_w(\omega)$ a densidade espectral de potência do sinal sísmico, pga representa o pico de aceleração do solo (*peak ground acceleration*), ω_g é a frequência do solo, ξ_g a razão de amortecimento do solo e ω frequência em rad/s.

Para fins de comparação, serão adotados os mesmos valores dos parâmetros utilizados por Mohebbi *et al.* (2012), listados a seguir: $f_{\min} = 0,001$ Hz, $f_{\max} = 25$ Hz, incremento $df = 0,001$ Hz, $\omega_g = 37,3$ rad/s, $\xi_g = 0,3$ e $pga = 0,475g$ sendo g a aceleração da gravidade ($9,81$ m/s²). O gráfico do espectro para estes parâmetros é apresentado na Figura A.1 do Apêndice.

4.4 Método de Shinozuka – Rotina 2

Utilizando a excitação definida no domínio da frequência como um dado de entrada, a rotina número 2 transforma este sinal para o domínio do tempo através do método proposto por Shinozuka e Jan (1972), definido pela seguinte equação

$$\ddot{y}_g = \sum_{k=1}^N \sqrt{2S_w(f_k)\Delta f_k} \cos(2\pi f_k t + \phi_k) \quad (4.8)$$

sendo $\ddot{y}_g(t)$ o sinal da aceleração imposta pela excitação em função do tempo, em m/s². N é o número de intervalos Δf_k da banda de frequências na qual o espectro está definido, sendo $\Delta f_k = f_{k+1} - f_k$, medido em Hz. O ângulo de fase aleatório ϕ_k medido em radianos, varia de 0 a 2π com função distribuição de probabilidade uniforme. Esta artifício do método implica um certo grau de aleatoriedade na determinação do registro temporal da excitação.

O tempo de duração do sismo foi considerado 50 segundos, sendo o tempo inicial $t_i = 0$, o tempo final $t_f = 50$ s e o incremento de tempo $dt = 0,002$ s.

4.5 – Solução pelo Método de Newmark - Rotina 3

O método de Newmark é utilizado para a solução da equação diferencial que governa a dinâmica do sistema no domínio do tempo. Os parâmetros de entrada do processo são as matrizes de massa, rigidez e amortecimento da estrutura junto com o sinal de excitação definido no tempo. A solução é determinada através do vetor de tempo $\vec{t} = [t_i : dt : t_f]$.

4.6 – Solução Analítica do Sistema Sujeito à Excitação Harmônica - Rotina 4

De acordo com Miguel (2006), a solução analítica para um sistema definido pela equação

$$\mathbf{M}\ddot{\vec{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\vec{x}}(t) + \mathbf{K}\vec{x}(t) = \vec{F}_A \text{sen}(\omega t) + \vec{F}_B \text{cos}(\omega t) \quad (4.9)$$

é dada através de

$$\begin{bmatrix} (-\mathbf{M}\omega^2 + \mathbf{K}) & -\mathbf{C}\omega \\ \mathbf{C}\omega & (-\mathbf{M}\omega^2 + \mathbf{K}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{A} \\ \vec{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{F}_A \\ \vec{F}_B \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

onde a resposta é determinada por

$$\vec{x}(t) = \vec{A} \text{sen}(\omega t) + \vec{B} \text{cos}(\omega t) \quad (4.11)$$

Define-se a aceleração harmônica que será imposta à base do sistema como um cosseno, a título de ilustração, de forma que quando a aceleração for definida no domínio da frequência seja apenas um pico na frequência escolhida. A frequência de excitação escolhida é igual a 1Hz (próxima à frequência fundamental da estrutura) e a amplitude $A_m = 5 \text{ m/s}^2$. Dessa maneira

$$\ddot{y}_g(t) = 5 \cos(2\pi t) \quad (4.12)$$

Sabendo que a equação que define a dinâmica do sistema em estudo é representada pela Eq. (4.4), tem-se que, neste caso

$$\vec{F}_A = \vec{0} \quad e \quad \vec{F}_B = -\text{diag}(\mathbf{M}) \cdot 5 \quad (4.13)$$

Resolvendo o sistema apresentado na Eq. (4.10) encontra-se a solução dada pela Eq. (4.11).

4.7 – Geração do Espectro de Excitação Harmônica – Rotina 5

O espectro de frequência $S_h(f)$ da excitação harmônica $5 \cos(2\pi t)$ é definido como uma função delta $\delta(f)$ aplicada em $f = 1$, como mostra a Figura 4.3.

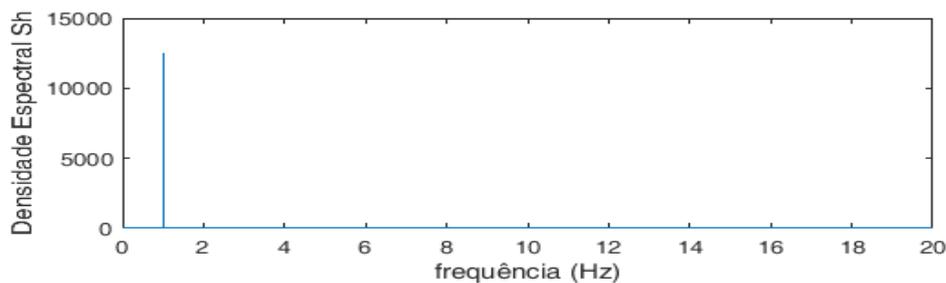


Figura 4.3 – Densidade espectral da excitação harmônica.

4.8 – Solução pela Análise Espectral no DF - Rotina 6

Segundo Newland (1987), a densidade espectral de potência de saída de um processo aleatório ergódico $S_y(\omega)$ pode ser determinada pela seguinte equação

$$S_y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_x(\omega) \quad (4.14)$$

onde $S_x(\omega)$ representa um espectro de potência de entrada no sistema e $H(\omega)$ é a função de resposta em frequência, que pode ser determinada dividindo a resposta do sistema pela excitação imposta a ele (para um sistema de 1 GDL).

Como o sistema em análise apresenta múltiplos graus de liberdade, $H(\omega)$ será uma matriz, determinada a partir da equação de movimento, Eq. (4.4). Aplicando-se a transformada de Fourier, encontra-se

$$\frac{X(\omega)}{Y(\omega)} = \frac{\mathbf{M}\omega^2}{-\omega^2\mathbf{M} + i\omega\mathbf{C} + \mathbf{K}} = \mathbf{H}(\omega) \quad (4.15)$$

Portanto, para o caso em consideração, a função de resposta em frequência vale

$$\mathbf{H}(\omega) = (\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M} + i\omega\mathbf{C})^{-1}(\mathbf{M}\omega^2) \quad (4.16)$$

Logo, a matriz densidade espectral da resposta do sistema (saída) que representa a aceleração é dada por,

$$\mathbf{S}_a(\omega) = \mathbf{H}(\omega) \mathbf{S}_g(\omega) \mathbf{H}^*(\omega)^T \quad (4.17)$$

onde $\mathbf{S}_g(\omega)$ é a matriz densidade espectral da aceleração do solo (excitação, entrada) e $\mathbf{H}^*(\omega)$ é o conjugado complexo da matriz $\mathbf{H}(\omega)$.

A partir de $\mathbf{S}_a(\omega)$ pode-se encontrar a matriz da densidade espectral da resposta do sistema que representa o deslocamento, $\mathbf{S}_d(\omega)$.

$$\mathbf{S}_d(\omega) = \frac{\mathbf{S}_a(\omega)}{\omega^4} \quad (4.18)$$

E fazendo

$$\vec{S}_d(\omega) = \text{diag}(\mathbf{S}_d(\omega)) \quad (4.19)$$

obtém-se o vetor da densidade espectral de potência da resposta do sistema que representa o deslocamento. Os elementos fora da diagonal da matriz $\mathbf{S}_d(\omega)$ não são utilizados neste trabalho.

A Eq. 3.7 permite encontrar a variância do deslocamento de cada grau de liberdade pela integração das componentes do vetor $\vec{S}_p(\omega)$ em relação à frequência. Os limites dessa integração são definidos pelo intervalo de frequência utilizado para gerar a excitação.

$$E[x^2]_i = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{p_i}(\omega) d\omega \quad (4.20)$$

sendo S_{p_i} a i -ésima componente do vetor \vec{S}_p . A rotina número 6 realiza essa integração de forma numérica, a partir do método do trapézio, definido no MATLAB como a função *trapz*.

A partir disso, o valor RMS do deslocamento para cada grau de liberdade é obtido fazendo a raiz quadrada da variância encontrada através da Eq. (4.20), pois se trata de um processo com média zero.

5. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Neste capítulo serão apresentados os resultados obtidos através das rotinas computacionais desenvolvidas e demonstradas as devidas validações destes procedimentos. Por fim, será feita uma comparação entre os dados obtidos pelo cálculo da estrutura sujeita a uma excitação sísmica através do método no domínio do tempo, com os dados determinados a partir da análise espectral no DF.

5.1 – Validação do Sinal Sísmico Aleatório

A validação do sinal sísmico gerado pela rotina 1, através espectro de Kanai-Tajimi, é realizada pela comparação com o mesmo registro no tempo encontrado na literatura. É validada neste mesmo processo ainda, a rotina número 2, que transforma o sinal para o domínio do tempo. A Figura 5.1 mostra a comparação do sinal sísmico gerado pela rotina 1 com o sinal obtido por Mohebbi *et al.* (2012).

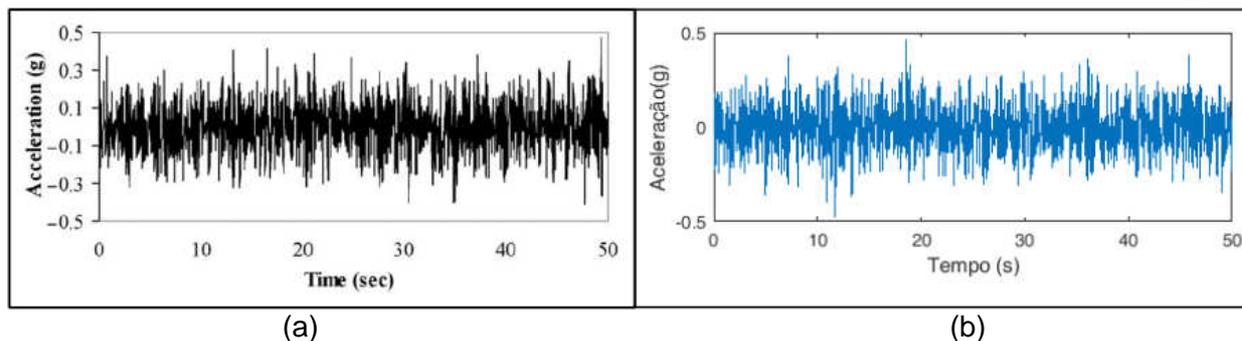


Figura 5.1 – (a) aceleração obtida por Mohebbi *et al.* (2012), (b) aceleração obtida no presente estudo. ($pga = 4,75g$).

Pela análise da Figura 5.1 nota-se a semelhança entre os sinais (mesmo pga e mesmo conteúdo de frequências). A diferença entre eles se dá pelo uso de ângulos de fase aleatórios no método de Shinozuka e Jan (1972), gerando para cada execução da rotina, um registro diferente.

5.2 – Validação do Sinal da Excitação Harmônica

A validação do sinal da excitação harmônica gerado no domínio da frequência também é feita por comparação. Na Figura 5.2 (a) está representado o gráfico de evolução temporal da excitação gerada diretamente no domínio do tempo, enquanto na Figura 5.2 (b) apresenta-se o gráfico de evolução temporal do sinal gerado pela rotina 5 e transformado para o domínio do tempo pela rotina 2.

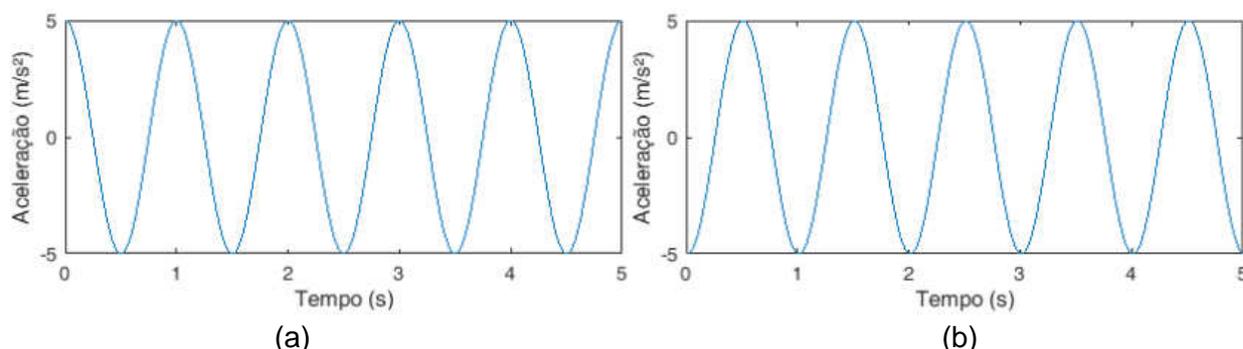


Figura 5.2 – (a) excitação harmônica definida diretamente no domínio do tempo, (b) excitação gerada pelas rotinas 5 e 2.

Novamente, os gráficos são similares (mesma amplitude e mesmo conteúdo de frequência), porém não são iguais. Pode-se perceber que a frequência e a amplitude dos sinais são as mesmas, no entanto, existe uma defasagem entre eles. Esta defasagem é aleatória e novamente originada pela transformação do sinal para o domínio do tempo, através do método de Shinozuka e Jan, 1972.

5.3 – Validação da Implementação do Método de Newmark

Nesta seção são apresentados os dados referentes à segunda etapa do trabalho, que tem o objetivo de validar a implementação do método de Newmark (rotina 3). A validação é feita comparando as respostas obtidas pelo procedimento executado pelo domínio do tempo (rotinas 5, 2 e 3), com a solução analítica do sistema (rotina 4). Foram realizadas 500 iterações por segundo, ao longo de 50 segundos. Na Tabela 5.1 são exibidos os valores RMS dos deslocamentos de cada andar da edificação, para os dois procedimentos de cálculo.

Tabela 5.1 – Comparação dos valores RMS de deslocamento de cada pavimento considerando todas iterações do cálculo.

Pavimento	Valor RMS dos deslocamentos (cm)	
	Solução Analítica	Solução Numérica no DT
1	26,25	24,40
2	51,84	48,19
3	76,24	70,87
4	98,89	91,93
5	119,31	110,92
6	137,06	127,42
7	151,74	141,07
8	163,04	151,58
9	170,72	158,72
10	174,60	162,33

Pela análise da Tabela 5.1, percebe-se que os resultados não chegaram tão próximos quanto se esperava. Isso acontece pois na solução numérica foram impostas ao sistema condições iniciais nulas. Sendo assim, a estrutura demora algum tempo para estabilizar suas oscilações. Na Figura 5.3 foi representado o deslocamento do décimo pavimento (pavimento com maior amplitude de oscilações) em função das iterações.

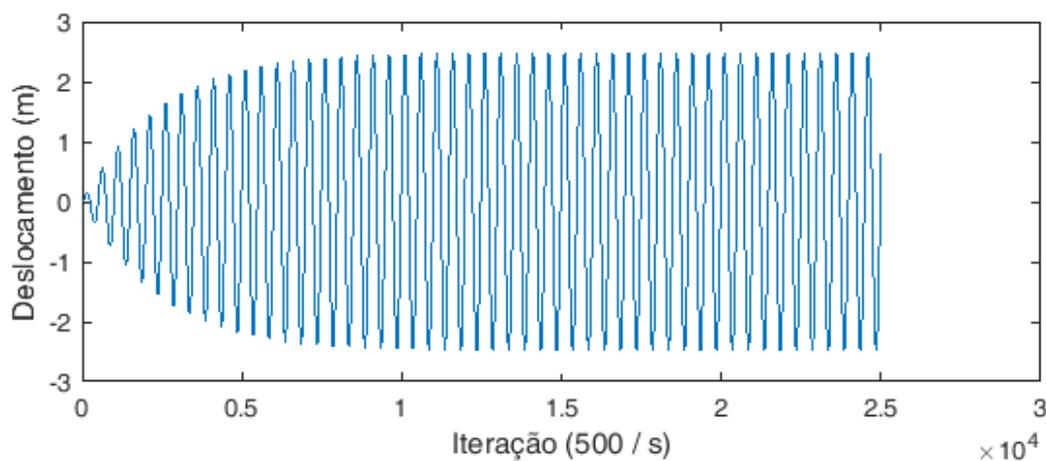


Figura 5.3 – Valores de deslocamento do décimo pavimento da estrutura para cada iteração. Sendo $t_i = 0$, $t_f = 50$ s e $dt = 0,002$ s.

Uma nova comparação é realizada utilizando somente os valores dos deslocamentos após a estabilização do sistema. A resposta foi considerada estável a partir da iteração 8000. Os resultados estão expressos na Tabela 5.2.

Tabela 5.2 – Comparação dos valores RMS de deslocamento de cada pavimento considerando valores a partir da iteração 8000.

Valor RMS dos deslocamentos (cm)		
Pavimento	Solução Analítica	Solução Numérica no DT
1	26,25	26,21
2	51,84	51,77
3	76,24	76,13
4	98,89	98,76
5	119,31	119,15
6	137,06	136,88
7	151,74	151,54
8	163,04	162,83
9	170,72	170,50
10	174,60	174,37

Pelos valores exibidos na Tabela 5.2, fica claro que, após a estabilização do sistema, a solução pelo cálculo numérico no DT fica muito próxima da solução analítica. Portanto, considera-se válida a implementação do método de Newmark.

5.4 – Validação da Implementação no Domínio da Frequência

A validação do procedimento de cálculo no domínio da frequência é feita de maneira muito semelhante à utilizada para a validação da implementação do método de Newmark, no DT. As respostas da estrutura sujeita a uma excitação harmônica obtidas pelas rotinas de cálculo no DF (rotinas 5 e 6) são comparadas com as respostas obtidas pela solução analítica. Na Tabela 5.3 apresenta-se uma comparação dos valores RMS de deslocamento de cada pavimento determinados pelos dois métodos.

Tabela 5.3 – Comparação dos valores RMS de deslocamento de cada pavimento.

Valor RMS dos deslocamentos (cm)		
Pavimento	Solução Analítica	Solução Numérica no DF
1	26,25	26,25
2	51,84	51,85
3	76,24	76,24
4	98,89	98,89
5	119,31	119,32
6	137,06	137,06
7	151,74	151,75
8	163,04	163,05
9	170,72	170,73
10	174,60	174,61

Nota-se que as respostas da estrutura para os dois métodos são extremamente próximas, portanto, considera-se válida a implementação desenvolvida no DF para determinação da resposta dinâmica do sistema estudado.

5.5 – Avaliação e Comparação entre os Procedimentos de Cálculo

Como já explicado, o principal objetivo deste estudo é desenvolver ferramentas para determinação da resposta dinâmica de estruturas submetidas à excitação sísmica, tanto no DT quanto no DF, e a comparação entre estes métodos, quando aplicados para avaliação de um edifício submetido a uma excitação sísmica artificial (determinada pelo espectro de Kanai-Tajimi).

Avaliando os procedimentos de cálculo desenvolvidos, destacaram-se dois fatores: primeiro, a diferença do custo computacional entre os dois métodos; segundo, o alto grau de aleatoriedade presente na solução determinada pelo domínio do tempo.

5.5.1 – Custo Computacional

Para fim de ilustração, o custo computacional envolvido para uma execução de cada um dos procedimentos de cálculo foi medido através da função *tictoc* do MATLAB. Com exceção do incremento de tempo, que sofreu alterações em cada execução, os parâmetros de entrada utilizados foram os mesmos definidos nas seções anteriores. Os resultados são exibidos na Tabela 5.4.

Tabela 5.4 – Tempos computacionais para uma execução das rotinas de cálculo.

		Tempo de execução das rotinas (s)
Solução pelo DT	$dt = 0,002$ s	11,77
	$dt = 0,005$ s	4,77
	$dt = 0,01$ s	2,41
	$dt = 0,02$ s	1,25
	$dt = 0,05$ s	0,53
Solução pelo DF		0,35

Nota-se que mesmo para um incremento de tempo grande, o tempo computacional para execução da rotina no DT ainda é mais elevado que o tempo envolvido na solução pelo DF. Isto é, mesmo para o $dt = 0,05$ s, o tempo computacional para a solução no DF é reduzido em 34% em relação ao tempo para a solução no DT, chegando a uma redução de 97% para o menor incremento de tempo testado ($dt = 0,002$ s). As causas dessa diferença são atribuídas a dois aspectos: um é o fato de que na solução pelo DF não é necessário transformar o sinal para o domínio do tempo; outro, o mais influente, é que a quantidade de operações matemáticas necessárias para resolver as equações de movimento pelo domínio do tempo, é muito maior do que a quantidade exigida para solução pelo domínio da frequência. Sendo assim, para a solução de problemas com mais graus de liberdade, a diferença entre o custo computacional de cada método tende a aumentar.

5.5.2 – Aleatoriedades na Solução pelo Domínio do Tempo

Na Tabela 5.5 são apresentados os valores RMS dos deslocamentos determinados pelos métodos no domínio do tempo e da frequência. O objetivo é demonstrar a aleatoriedade da solução pelo DT.

A Figura 5.4 mostra em azul os valores RMS do deslocamento do décimo pavimento da estrutura, determinados por 100 execuções do procedimento de cálculo pelo domínio do tempo, utilizando um incremento de tempo $dt = 0,002$ s. A linha em vermelho representa o valor da resposta determinada pelo DF, e a linha tracejada verde indica o valor médio da solução pelo DT.

Analisando os dados da Tabela 5.5 e a Figura 5.4, fica claro que a solução pelo domínio do tempo de uma estrutura excitada pelo espectro de Kanai-Tajimi tem um caráter aleatório significativo. Este comportamento está associado ao método de Shinozuka, que faz uso de

ângulos de fase randômicos na transformação do sinal para o domínio do tempo. Espera-se que para um número suficientemente grande de execuções, a média das respostas venha a convergir para os valores encontrados através dos cálculos no domínio da frequência.

Tabela 5.5 – Comparação dos resultados, valor RMS dos deslocamentos.

Valor RMS dos deslocamentos (cm)						
Nº Andar	Solução Numérica no DF	Solução Numérica no DT				
		1 Execução	1 Execução	1 Execução	Média de 60 Execuções	Média de 100 Execuções
1	0,72	0,80	0,63	0,68	0,71	0,70
2	1,41	1,57	1,24	1,33	1,40	1,38
3	2,07	2,30	1,81	1,96	2,06	2,03
4	2,68	2,98	2,35	2,53	2,66	2,63
5	3,23	3,59	2,82	3,05	3,21	3,17
6	3,71	4,13	3,24	3,50	3,68	3,64
7	4,11	4,57	3,58	3,87	4,07	4,03
8	4,42	4,91	3,85	4,16	4,38	4,33
9	4,63	5,14	4,03	4,35	4,59	4,53
10	4,74	5,26	4,13	4,45	4,70	4,64

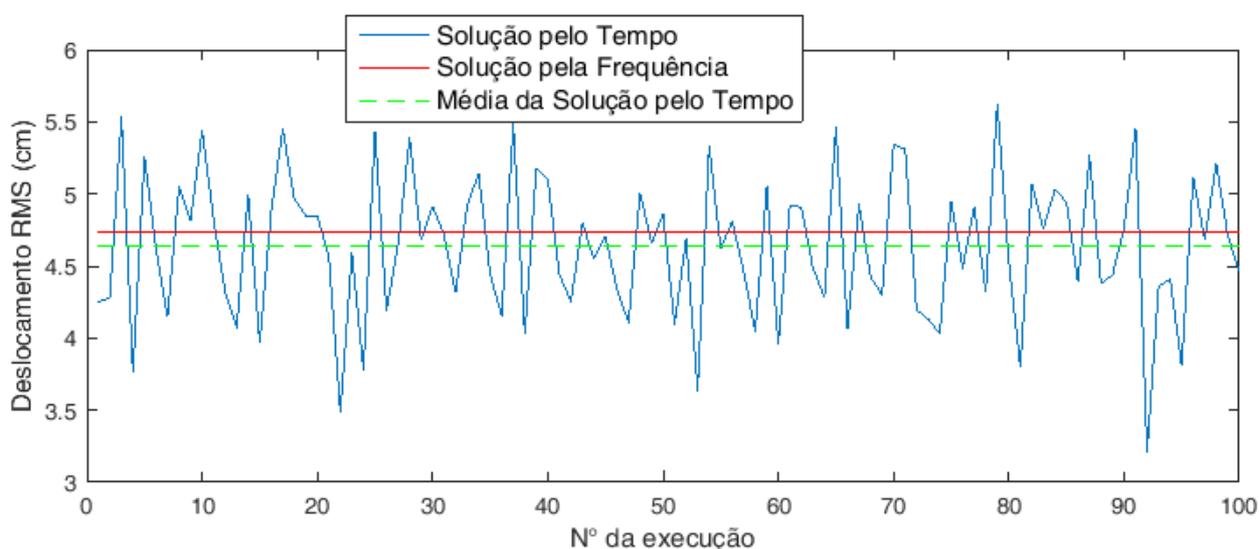


Figura 5.4 – Representação gráfica do comportamento aleatório dos resultados determinados pelo cálculo das respostas no DT.

6. CONCLUSÕES

Os resultados apresentados ao longo deste texto demonstram que o estudo foi exitoso. Foram construídos e validados dois procedimentos de cálculo para análise de uma estrutura sujeita a uma excitação sísmica artificial, por meio de rotinas computacionais programadas a partir do *software* MATLAB. Com isso, foi possível avaliar e comparar os dois métodos, objetivo principal do trabalho.

Sobre o método implementado pelo domínio do tempo, pode-se dizer que tem como vantagem o registro temporal das respostas, podendo indicar o deslocamento, velocidade, ou aceleração em qualquer instante de tempo. Foi constatado que este procedimento de cálculo possui menor eficiência com relação ao custo computacional. Além disso, este método apresentou um alto grau de aleatoriedade na solução, o que de certa forma restringe o uso do

registro das respostas no tempo. Por este caráter randômico, para obtenção de respostas mais refinadas se faz necessário encontrar a média das respostas, aumentando ainda mais o custo computacional necessário.

Portanto, a metodologia para avaliação do sistema no domínio da frequência se mostrou muito mais eficiente, obtendo as respostas de forma mais precisa e com custo computacional mais baixo. Sua desvantagem se dá pela ausência do registro das respostas ao longo do tempo, porém, a partir do espectro da resposta, o sinal de resposta em função do tempo poderia ser obtido.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Drehmer, L. R. C.; **“Otimização de Parâmetros Concentrados de Suspensão para Conforto e Segurança Veicular.”** 2012. 98 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

Kanai, K.; **“An empirical formula for the spectrum of strong earthquake motions.”** Bulletin Earthquake Research Institute, University of Tokyo 39: 85–95. 1961.

Miguel, L. F. F.; **“Introdução ao Estudo de Vibrações”** Notas de Aula, UFRGS, 1a ed., 2006.

Mohebbi, M. et al; **“Designing optimal multiple tuned mass dampers using genetic algorithms (GAs) for mitigating the seismic response of structures.”** Journal of Vibration and Control 2012; DOI: 10.1177/1077546311434520.

Newland, D. E.; **“An Introduction to Random Vibration and Spectral Analysis”**, 2aed, Longman, New York, 1987.

Newmark, N. M.; **“A Method of Computation for Structural Dynamics”**, ASCE Journal of Engineering Mechanics Division, Vol. 85, No. EM3, 1959.

Rao, S. S.; **“Mechanical Vibrations.”** Prentice Hall, 5ª ed, 1995.

Schaan, P. S. **“Geração de Excitação Sísmica Através do Espectro de Kanai-Tajimi”**. Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2014.

Shinozuka, M, Jan C.M.; **“Digital simulation of random process and its applications.”** J Sound Vib 1972; 25:111–8.

Tajimi, H.; **“A statistical method of determining the maximum response of a building structure during an earth- quake.”** In Proceedings of 2nd World Conference in Earthquake Engineering, Tokyo, Japan, July, pp. 781–797. 1960.

APÊNDICE

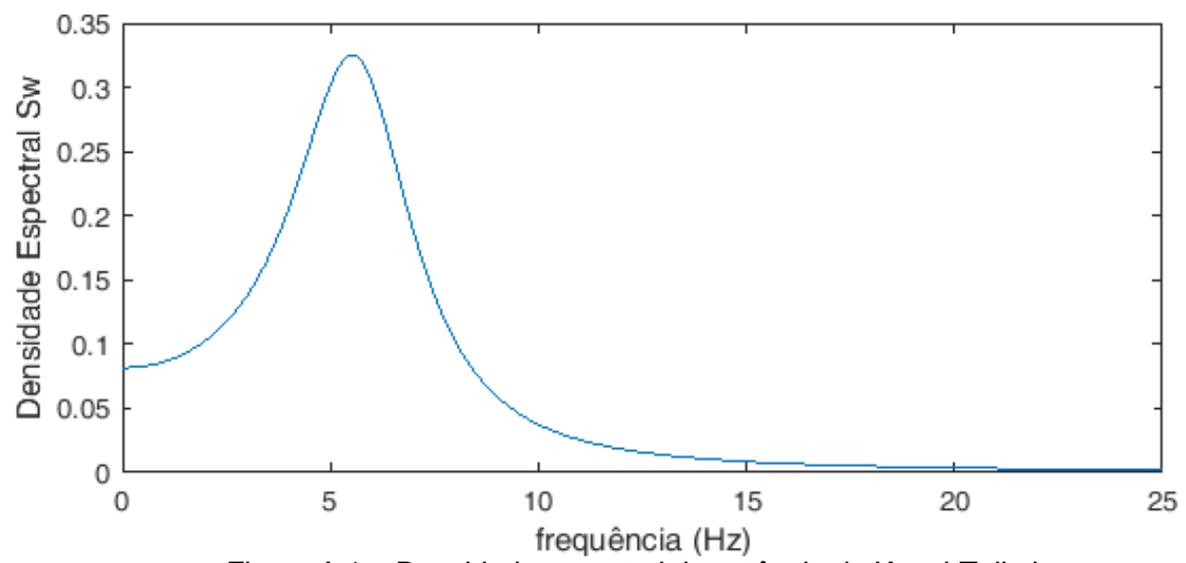


Figura A.1 – Densidade espectral de potência de Kanai-Tajimi.