

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA ESTRUTURAL DE UM SISTEMA FLUIDO-ESTRUTURA COM
MALHA NÃO ESTRUTURADA

por

Emanuel Moutinho Cesconeto

Monografia apresentada ao Departamento de Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Engenheiro Mecânico.

Porto Alegre, junho de 2016

Emanuel Moutinho Cesconeto

Otimização Topológica Estrutural de um Sistema Fluido-Estrutura com Malha Não Estruturada/ Emanuel Moutinho Cesconeto. – Porto Alegre, junho de 2016-
20 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. Walter Jesus Paucar Casas

Trabalho de conclusão de curso – MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA, junho de 2016.

1. Otimização Topológica. 2. FEM. I. Prof. Dr. Walter Jesus Paucar Casas. II. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. III. Faculdade de Engenharia Mecânica. IV. Otimização Topológica Estrutural de um Sistema Fluido-Estrutura com Malha Não Estruturada

CDU 02:141:005.7



Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Escola de Engenharia
Departamento de Engenharia Mecânica

OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA ESTRUTURAL DE UM SISTEMA FLUIDO-ESTRUTURA COM
MALHA NÃO ESTRUTURADA

por

Emanuel Moutinho Cesconeto

ESTA MONOGRAFIA FOI JULGADA ADEQUADA COMO PARTE DOS
REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
ENGENHEIRO MECÂNICO
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELA BANCA EXAMINADORA DO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Prof. Alcy Rodolfo dos Santos Carrara
Coordenador do Curso de Engenharia Mecânica

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Dr. Walter Jesus Paucar Casas

Comissão de avaliação:

Prof. Dr. Ignácio Iturrioz

Prof. Dr. Rogério José Marczak

Prof. Dr. Rodrigo Rossi

Porto Alegre, junho de 2016

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente ao professor Dr. Walter Jesus Paucar Casas, meu orientador, pela confiança na realização deste trabalho e pela orientação ao longo da graduação.

A minha família, pelo seu apoio durante toda a graduação.

Ao professor Dr. Rogério Marczak, pelo auxílio com o projeto e demais assuntos ao longo deste trabalho.

À professora Dra. Leticia F. F. Miguel, pela sua ajuda com diversas dúvidas encontradas durante o trabalho.

Ao doutorando Ederval de Souza Lisboa, pelo seu suporte na elaboração desta monografia.

Ao professor Dr. Jun Sérgio Ono Fonseca, pela grande ajuda prestada no início deste trabalho. Sentiremos sua falta.

Cesconeto, E. M. **Otimização Topológica Estrutural de um Sistema Fluido-Estrutura com Malha Não Estruturada**. 2016. 28. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2016.

RESUMO

Este trabalho trata do desenvolvimento de um novo software aberto que realiza a otimização, ou maximização, da rigidez de uma estrutura enquanto seu volume estrutural é gradualmente removido, com o objetivo de obter uma estrutura que tenha uma rigidez próxima à da original mas que utilize uma fração do seu material. Esta estrutura pode fazer parte de um sistema Fluido-Estrutura e estar sujeita a carregamentos externos estáticos, bem como carregamentos causados pelo fluido. A discretização pode ser feita com uma malha não estruturada e não regular, e é usado o método BEFSO (Bi-Directional Evolutionary Fluid-Structural Optimization, Otimização Evolucionária Bi-Direcional Fluido-Estrutura). Este método foi ampliado para comportar malhas não regulares. O software desenvolvido foi capaz de otimizar casos encontrados na literatura para sua verificação, e também possibilitou a otimização de casos não facilmente otimizados quando são utilizados os métodos convencionais de malha regular encontrados em programas não comerciais.

PALAVRAS-CHAVE: Otimização topológica, FEM, fluido-estrutura, malha não estruturada

Cesconeto, E. M. **Topological structure optimization of a fluid-structure system with non-structured mesh**. 2016. 28. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2016.

ABSTRACT

This study presents the development of a software that will perform the optimization, or maximization, of the rigidity of a structure while its structural volume is gradually removed, with the goal of obtaining an structure that possesses a rigidity close to that of the original one while utilizing a fraction of its materials. This structure may be part of a fluid-structural system and be subjected to static external loads, as well as loads imposed by the fluid. The discretization can be made with a non-structured and non-regular mesh, and the BEFSO (Bi-Directional Evolutionary Fluid-Structural Optimization) method is used. The developed software was capable of optimizing cases found in the literature and was thus verified, and also allowed the optimization of cases not easily optimized when conventional methods that use regular mesh, found in non-commercial software, are used.

KEYWORDS: Topology optimization, FEM, fluid-Structure, non structured mesh

SUMÁRIO

	Lista de ilustrações	vii
1	INTRODUÇÃO	1
2	Objetivos	1
3	Justificativa	1
4	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	1
4.1	Otimização estrutural	1
4.2	Otimização topológica	2
4.3	Fluido-estrutura	3
4.4	O método BESO	3
4.4.1	Discretização do domínio e variáveis otimizadas	3
4.4.2	Sensibilidade	4
4.4.3	Condição restritiva e taxa de evolução	5
4.4.4	Critério de remoção/adição de elementos	6
4.4.5	Critério de parada	6
4.5	Malha estruturada, não estruturada e regular	7
5	METODOLOGIA	7
5.1	Formulação do problema	7
5.2	Configuração atual da estrutura	8
5.3	Análise por elementos finitos	8
5.4	Cálculo inicial das sensibilidades	9
5.5	Modificação da estrutura	9
5.6	Condição de parada	11
6	RESULTADOS	11
6.1	Verificação	11
6.2	Novo caso	12
7	DISCUSSÃO	12
8	CONCLUSÃO	14
	 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	 15
	 A – MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	 16
1	Domínio Estrutural e Fluido	16
2	Interface	17
3	Solução do sistema acoplado	18
	 B – HISTÓRICO DA OTIMIZAÇÃO DA ASA NACA 4412	 18
	 C – GEOMETRIAS INICIAIS DOS CASOS DE VALIDAÇÃO	 19
	 D – FILTRAGEM DE VALORES DE SENSIBILIDADE	 20

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 4.1 – Exemplo de otimização estrutural aplicada a uma viga de seção quadrada, mostrada à esquerda. Material que não contribui muito para a rigidez da viga é removido, dando origem à viga de seção I mostrada à direita	2
Figura 4.2 – Exemplo de malhas regulares e não regulares, estruturadas e não estruturadas	7
Figura 5.1 – Esquema mostrando o procedimento geral de otimização pelo método BEFSO usado	8
Figura 5.2 – Exemplo do resultado da junção de elementos ao longo de suas interfaces, mostrando que o resultado são vetores apenas na interface externa do grupo de elementos	9
Figura 5.3 – Exemplo de aplicação do filtro. À esquerda temos os valores de sensibilidade iniciais calculados, e a direita os valores de sensibilidade filtrados referentes à mesma estrutura. O círculo vermelho destaca que elementos que não pertencem à estrutura possuem valores de sensibilidade inicial zero, mas se estiverem próximos à elementos estruturais eles podem receber valores devido ao processo de filtragem	10
Figura 6.1 – Comparação dos resultados encontrados por Vicente, 2013, à esquerda, e pelo <i>software</i> desenvolvido, à direita. As regiões coloridas representam o fluido, com as cores indicando sua pressão.	12
Figura 6.2 – Resultado para a otimização da estrutura transversal interna de uma asa com o perfil NACA 4412. As regiões coloridas representam o fluido, com as cores indicando a pressão. A região circular cinzenta representa uma viga transversal à imagem, a longarina, e é onde são aplicadas as condições de engaste.	13
Figura B.1 – Histórico da função objetivo e fração do volume da otimização da asa de perfil NACA 4412 e corda de 2m	18
Figura C.1 – Geometria inicial, com condições de contorno, dos casos otimizados para validar o programa desenvolvido. As regiões cinzentas são inicialmente ocupadas pela estrutura, enquanto que as partes coloridas são ocupadas pelo fluido	19
Figura D.1 – Efeito xadrez típico emergente em otimizações sem filtro de independência de malha. Imagem de Huang e Xie, 2010	20

1 INTRODUÇÃO

Os métodos de otimização topológica vem sendo amplamente estudados recentemente como uma boa alternativa ao desenvolvimento de conceitos estruturais ótimos, especialmente em situações em que a massa da estrutura é de grande importância, como na indústria aeronáutica e aeroespacial. Uma apresentação destes estudos pode ser encontrado em [Paulino *et al.*, 2013](#). Estes conceitos são utilizados nas fases iniciais de um projeto, onde se busca uma forma inicial à estrutura que será então melhorada ao longo de seu processo de desenvolvimento, e são portanto críticos pois limitam as formas que a estrutura final poderá ter.

Existem vários métodos gerais de otimização topológica, os principais deles sendo o BESO (*Bi-directional Evolutionary Structural Optimization*) e o SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*), como descrito por [Huang e Xie, 2010](#). A principal diferença entre estes métodos consiste no tratamento da variável otimizada, no caso sendo os elementos da estrutura: o método BESO os trata de maneira discreta, isto é, cada elemento pode ter um valor que representa sua presença ou outro valor que representa sua ausência, enquanto que o método SIMP os trata de maneira contínua, isto é, cada elemento possui um valor de densidade entre 100% e 0%. Uma análise detalhada das diferenças pode ser encontrada em [Huang e Xie, 2010](#). Uma variação do método BESO é o método BEFSO (*Bi-directional Evolutionary Fluid-Structural Optimization*), citado por [Vicente, 2013](#). Este trabalho compreende uma modificação ao método BEFSO, ao qual trata especificamente da otimização topológica evolucionária aplicada à sistemas com interação fluido estrutura.

2 OBJETIVOS

O objetivo principal deste trabalho é contribuir com o aprimoramento do método BEFSO. Este se desdobra em dois objetivos específicos: propor e testar uma ampliação ao método que possibilite seu uso com malhas não regulares e não estruturadas, e desenvolver e testar um *software* com código aberto, programado do zero e completamente pelo autor, que implemente um método BEFSO que utilize malhas não estruturadas e não regulares, para possibilitar seu uso em casos com geometrias dos contornos mais complexas, inclusive a parte de análise por elementos finitos 2D com elementos sólidos e fluidos. Para verificar estes desenvolvimentos são feitas comparações com casos encontrados na literatura, e um novo caso é otimizado para exemplificar as capacidades do método ampliado e do *software* desenvolvido. A ampliação proposta consiste em uma mudança no cálculo dos valores de sensibilidade.

3 JUSTIFICATIVA

Vários casos onde deseja-se encontrar uma estrutura ótima não podem ser eficientemente discretizados com malhas regulares, como em asas de aeronaves, pois o domínio não pode ser dividido em elementos regulares. Nesses casos pode-se aproximar o domínio usando-se uma maior quantidade de elementos regulares, mas com o método proposto é possível discretizá-los com menos elementos sem perder o perfil das fronteiras do domínio. Além disto, o *software* desenvolvido, por não depender de programas comerciais externos, há de servir como plataforma de desenvolvimento para estudos futuros, facilitando o aprimoramento do método BEFSO.

4 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

4.1 Otimização estrutural

O projeto de estruturas faz parte das competências de um engenheiro mecânico. No entanto, o projeto de uma estrutura que simplesmente suporte uma dada carga é relativamente fácil, e não necessita de um engenheiro; a construção de estruturas precede esta profissão, bem como quase todas as ferramentas auxiliares de projeto utilizadas atualmente, como cálculo ou elementos finitos. Uma estrutura projetada sem um engenheiro, entretanto, deverá usar muito

mais material do que o necessário. Caso contrário, correrá risco de desmoronar, pois apenas calculando se obtém precisão e sem isso se deve errar para o lado da segurança. Estruturas construídas dessa forma são então muito mais caras. É responsabilidade de um engenheiro, portanto, projetar estruturas que não apenas suportem a carga, mas que também utilizem apenas o material necessário, reduzindo o peso e os custos com materiais e montagem.

Otimização estrutural é o nome que se dá ao processo de aumento da eficiência de estruturas, onde se busca obter uma performance ótima segundo alguma medida de desempenho pré-definida (mínima massa, máxima rigidez, máxima carga de flambagem, etc.), visando no final das contas reduzir custo. Um exemplo de otimização estrutural é a remoção de material desnecessário em vigas de seção quadrada, dando origem às vigas em I, como pode ser visto na figura 4.1, que possuem menor peso e consomem menos material, sendo mais econômicas. A otimização também deve levar em conta restrições, como a tensão de falha, frequência natural crítica, deslocamentos permitidos, etc.

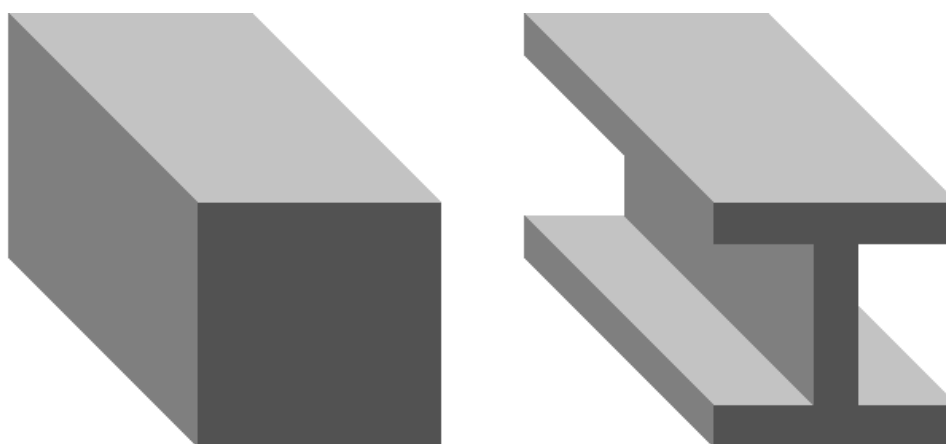


Figura 4.1 – Exemplo de otimização estrutural aplicada a uma viga de seção quadrada, mostrada à esquerda. Material que não contribui muito para a rigidez da viga é removido, dando origem à viga de seção I mostrada à direita

Pode-se definir três categorias de otimizações estruturais: otimização dimensional ou de tamanho, otimização de forma, e otimização topológica. Esta primeira busca modificar apenas as dimensões dos membros que compõe uma estrutura. Um exemplo seria dimensionar a altura e largura da seção transversal de uma viga para suportar uma carga. Otimização de forma também dimensiona a seção transversal dos membros, e além disto pode modificar a posição dos membros para mais eficientemente suportar o carregamento. Ambos estes métodos dependem, no entanto, de um conceito estrutural inicial, como uma treliça de uma torre, e não é capaz de adicionar ou remover membros; se o conceito definir uma treliça de 10 barras, a estrutura otimizada também terá 10 barras, mesmo que pudesse ser mais eficiente o uso de 9 ou 11 barras. Diferentemente dos outros métodos, otimização topológica é utilizada para gerar este conceito inicial.

4.2 Otimização topológica

A otimização topológica serve para gerar uma estrutura conceitual que seja melhor em alguma área. No caso deste trabalho, busca-se melhorar a eficiência estrutural. Para tal, deve-se aumentar a rigidez e diminuir o material utilizado. Assim, começando com uma estrutura maciça sujeita a carregamentos e restrições, como engastes, a otimização busca remover material de áreas que não estejam muito solicitadas. Este material portanto não contribui muito para a rigidez da estrutura, e ao ser removido não diminui muito a rigidez geral da estrutura.

Todos os métodos de otimização topológica necessitam de uma discretização do domínio, ou seja, separação em elementos, uma função objetivo, que representa a performance da estrutura, e um conjunto de restrições, que limitam o que pode ser modificado. Neste

trabalho é usado o método BEFSO, modificação do método BESO que considera sistemas fluido-estruturais, e este é descrito nos próximos itens da fundamentação teórica e metodologia. Usa-se como função objetivo a energia absorvida pela estrutura porque esta é uma forma de quantificar sua rigidez, e a quantidade de material utilizada é considerada uma restrição. Isto porque uma estrutura que utilize mais material é mais rígida, o que melhora a função objetivo e faz com que a otimização busque sempre adicionar material, o que torna a estrutura menos eficiente. Para impedir que isto aconteça, a quantidade de material que pode ser utilizada é limitada, e assim a otimização busca a melhoria da rigidez de uma estrutura que obrigatoriamente usa menos material.

4.3 Fluido-estrutura

Um domínio fluido-estrutural é um domínio composto por elementos fluidos e elementos estruturais. Como exemplos podemos citar uma tubulação, um pistão de bombeamento e uma asa de avião. É dito um sistema acoplado quando cada domínio afeta o outro, o que acontece em casos dinâmicos e impossibilita sua separação em dois problemas separados, forçando sua resolução conjunta. Em casos estáticos como o deste trabalho, no entanto, geralmente os dois domínios podem ser resolvidos separadamente: primeiro se calcula o fluido, e com as pressões calculadas se carrega a estrutura. O método de resolução deste problema é descrito no apêndice A.

Embora o cálculo por elementos finitos seja realizado separadamente para cada domínio, a modificação da estrutura durante a otimização topológica pode afetar ambos os domínios ao mesmo tempo, caso elementos na interface sejam adicionados ou removidos. Com isso, toda vez que a estrutura é modificada o fluido precisa ser recalculado, e não se pode ignorar o efeito que modificar a estrutura têm sobre o fluido. Assim, algumas modificações ao método utilizado devem ser feitas, o que é descrito no item 5.4.

4.4 O método BESO

O método BESO é a base do método BEFSO, e seu objetivo é a otimização de uma função objetivo por meio da remoção ou inclusão de elementos de uma estrutura que pode estar sujeita a uma dada restrição, sendo esta restrição aplicada parcialmente, incrementada de forma gradual, ao longo de várias iterações. Ele é composto de uma série de módulos, cada um tendo uma finalidade específica, mas não uma forma fixa. Detalhes de uma implementação do método podem ser encontradas em [Huang e Xie, 2010](#), sendo aqui apresentado um resumo geral. A forma específica usada no trabalho é descrita no item 5.

Em [Huang e Xie, 2010](#), é feita uma comparação entre os métodos SIMP, BESO, ESO e variação contínua. Embora este último apresente melhores resultados, o método BESO alcança um resultado praticamente igual, ao mesmo tempo que necessita do menor tempo de processamento dentre todos os métodos comparados. Além disto, este método também apresenta benefícios em sua modularidade e relativa simplicidade, e devido a estes foi escolhido como foco deste trabalho.

Este método necessita de uma função objetivo, a qual quantifica uma característica estrutural que se deseja otimizar. Esta depende da configuração da estrutura em cada iteração. A função objetivo é utilizada para definir a função de sensibilidade, descrita no item 4.4.2, e como a condição de parada. As funções mais frequentemente utilizadas são resposta em frequência ([Yoon *et al.*, 2007](#), [Vicente, 2013](#)) e rigidez ([Huang e Xie, 2010](#)), mas inúmeras outras também existem, como taxa de dissipação de energia devido à viscosidade de um fluido ([Hansen *et al.*, 2005](#)) ou difusividade efetiva de nutrientes através de uma estrutura porosa ([Chang, 2015](#)).

4.4.1 Discretização do domínio e variáveis otimizadas

O domínio deve ser discretizado em vários elementos, formando uma malha. Esta discretização será usada na análise do sistema por um método numérico, que neste trabalho

consiste do método dos elementos finitos. A malha elementar permanece constante em uma dada execução do método. Cada elemento pode ou não fazer parte da estrutura; existe um vetor \mathbf{x} de tamanho $N \times 1$, onde N é o número de elementos, que representa o estado de cada elemento. Assim, o problema de otimização possui N variáveis de projeto independentes. No método BESO cada elemento pode assumir um valor de dois valores possíveis: um representa sua presença, e outro sua ausência, da seguinte forma:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{se o elemento } i \text{ fizer parte da estrutura} \\ x_{min} & \text{se o elemento } i \text{ não fizer parte da estrutura} \end{cases} \quad (4.1)$$

com $0 \leq x_{min} < 1$. Este vetor é utilizado para calcular um novo coeficiente de elasticidade E_i para o elemento i , com base na elasticidade original E_i^0 , da seguinte forma:

$$E_i = (x_i)^p E_i^0 \quad (4.2)$$

onde p é um expoente chamado de fator de penalidade, como descrito por Huang e Xie, 2010.

Assim, caso x_{min} seja igual a 0, a rigidez de um elemento ausente se torna 0 e ele é efetivamente removido da estrutura. Métodos BESO que utilizam isto são chamados de *hard-kill BESO*, e o fator de penalidade deve ser 1. No entanto, dependendo da implementação pode ser melhor a utilização de um valor pequeno, mas não zero, para elementos ausentes. Neste caso o método é chamado de *soft-kill BESO* e p pode ser qualquer valor maior do que 1. Métodos *hard-kill* são mais rápidos para computar, ao passo que métodos *soft-kill* não precisam de um filtro de sensibilidade, descrito no apêndice D, para adicionar elementos anteriormente removidos à estrutura. Quanto a capacidade de convergência do método *hard-kill*, Huang e Xie, 2010 mostram que com o uso correto de filtros este é capaz de alcançar a mesma estrutura final alcançada pelo método *soft-kill*.

4.4.2 Sensibilidade

A determinação de como a estrutura deve ser modificada é realizada com base em uma estimativa de como a função objetivo se comporta diante da remoção ou adição dos elementos. Para tanto, é calculado o diferencial desta função em relação a cada elemento, sabendo estes são tratados como variáveis de projeto, o que equivale ao cálculo da derivada local feita em um método como Newton-Raphson ou o método do gradiente. Este cálculo é feito com base na resposta obtida na análise da estrutura, que é feita usando-se um método como elementos finitos ou elementos de contorno. Neste trabalho são utilizados elementos finitos, e um resumo de seu funcionamento é apresentado no apêndice A segundo o exposto por Petyt, 1990, e Vicente, 2013.

Neste trabalho é usada a rigidez estrutural como característica a ser maximizada em uma estrutura com menos material, e portanto a otimização busca a minimização da energia absorvida pela estrutura. Neste caso deve-se minimizar a seguinte função objetivo:

$$C = \frac{1}{2} \mathbf{f}^T \mathbf{u} \quad (4.3)$$

onde \mathbf{u} é o vetor de deslocamentos da estrutura e \mathbf{f} é o seu vetor de forças. Este vetor pode ser escrito em função da matriz de rigidez do sistema e do vetor de deslocamentos, $\mathbf{f} = \mathbf{K}\mathbf{u}$. Esta matriz de rigidez global é constituída pelas matrizes de rigidez elementares \mathbf{K}_i^e . Estas dependem do coeficiente de elasticidade E_i de cada elemento estrutural, e este por sua vez depende da variável de projeto x_i como mostrado na equação 4.2, tal que $\mathbf{K}_i^e = (x_i)^p \mathbf{K}_i^{0e}$. As matrizes elementares possuem mesmo tamanho que a matriz global, mas apenas valores referentes aos GDLs de seus respectivos elementos, já nas suas corretas posições. Assim, pode-se escrever a matriz \mathbf{K} da seguinte forma:

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^N (x_i)^p \mathbf{K}_i^{0e} \quad (4.4)$$

onde \mathbf{K}_i^{0e} é a matriz de rigidez elementar do elemento i em função de E_i^0 ao invés de E_i e N é o número de elementos.

Ao se derivar \mathbf{K} por um componente x_i específico se tem como resultado apenas a matriz elementar \mathbf{K}_i^{0e} do elemento i , pois $\frac{\partial x_j}{\partial x_i} = 0$ para $j \neq i$. Assim, derivando-se a função objetivo em função de x_i obtemos a seguinte equação:

$$\alpha_i = p (x_i)^{(p-1)} \frac{1}{2} (\mathbf{u}_i^e)^T \mathbf{K}_i^{0e} \mathbf{u}_i^e \quad (4.5)$$

onde o índice e indica valores elementares. Os vetores \mathbf{u} não dependem de x_i e portanto permanecem iguais, mas todos os seus componentes que não se referem aos graus de liberdade do elemento i são multiplicados por zeros na matriz de rigidez e portanto podem ser descartados, restando o vetor de deslocamentos elementar \mathbf{u}_i^e . p só é relevante para métodos *soft-kill*; no caso *hard-kill* p deve ser igual a 1 e a equação é simplificada.

A função descrita na equação 4.5 representa a variação de energia da estrutura que espera-se que ocorra quando um dado elemento for removido ou adicionado para o caso em que a função objetivo é a energia estrutural. Similarmente, outras funções objetivos são diferenciadas para obtenção de suas respectivas equações de sensibilidade.

A sensibilidade deve ser calculada para cada elemento. Para a determinação de quais elementos devem ser removidos ou adicionados, é feito um *ranking* que coloca todos os valores calculados em ordem. No entanto, não é correto afirmar que o valor final da função objetivo é reduzida ou aumentada pelos valores de sensibilidade calculados quando o elemento correspondente é adicionado ou removido. Estes valores indicam uma modificação, mas esta pode se referir à transferência da característica quantificada per eles de um elemento à outro. Como exemplo, no caso da maximização da rigidez os valores de sensibilidade correspondem às energias elementares, mas caso um elemento com alta energia seja removido o resultado seria o aumento da energia dos demais elementos, sendo que a soma da energia adicionada à eles seria maior do que a energia possuída pelo elemento removido. Assim, para minimizar a energia da estrutura deve-se remover os elementos com energia mais baixa, ou seja, com os menores valores de sensibilidade, pois eles causam o menor aumento da energia estrutural quando removidos.

O valor da sensibilidade também deve levar em consideração o custo da inclusão dos elementos. No caso das otimizações realizadas neste trabalho o custo é o material que compõe o elemento, pois deseja-se minimizar a quantidade de material utilizada. Um elemento maior absorve mais energia, mas também utiliza mais material, do que um elemento menor. Para compensar este efeito deve-se dividir o valor de sensibilidade de cada elemento pelo seu respectivo volume, calculando-se então a energia específica.

4.4.3 Condição restritiva e taxa de evolução

A condição restritiva é um parâmetro de projeto que impõe uma modificação do domínio. Um exemplo seria a otimização da rigidez de uma estrutura sujeita à redução de seu volume. Neste caso a condição restritiva é um certo novo volume, menor que o original, que a estrutura deve alcançar.

O termo *Evolutionary*, ou Evolucionário, do BESO vêm do fato de que nesses casos não é viável impor esta condição desde o momento inicial. Isto porque as simulações realizadas são lineares, e a modificação da estrutura pelo método causa efeitos de ordens maiores. As modificações na estrutura são feitas com base nestas simulações, e portanto são provocados efeitos não esperados. Assim, não é possível prever o comportamento de uma estrutura que sofre uma certa modificação; é possível apenas a obtenção de uma estimativa baseada no comportamento da estrutura em seu estado atual. Quanto maior a modificação da estrutura, menos precisa é esta estimativa.

Para otimizar a estrutura com a maior precisão possível a condição restritiva é aplicada gradativamente até ela ser alcançada, sendo necessárias várias iterações. É necessário portanto o uso de um limite às modificações na estrutura, sejam elas impostas pela condição

restritiva ou apenas causadas pela busca da otimização da função objetivo, limite este que é imposto pela taxa de evolução, que é geralmente definida em termos de porcentagem do volume inicial. Quanto menor é, mais a otimização segue o caminho de máximos ou mínimos valores da função objetivo e mais iterações são necessárias. Além disto, não é possível garantir que caminho percorrido irá chegar à um máximo ou mínimo global. A otimização tende à um mínimo ou máximo, mas este pode ser local ao invés de global; não há como o método distinguir entre os dois. Otimizações com taxas de evolução maiores tendem a ser mais caóticas, e assim pode fazer com que a otimização se afaste de um mínimo local próximo e tenda a outro mínimo que pode inclusive levar à uma estrutura otimizada melhor. Dessa forma pode ser afirmado que não existe um valor para a taxa de evolução aceita como melhor. Para a definição da taxa ideal para um problema, pode-se começar com um valor relativamente alto, como 10%, e caso a otimização falhe em convergir deve-se reduzir a taxa gradativamente até que seja alcançada uma estrutura final aceitável.

4.4.4 Critério de remoção/adição de elementos

Conforme explicado no item 4.4.2 as sensibilidades de todos os elementos são ordenadas, e alguns deles são adicionados ou removidos. A quantidade de elementos mantidos corresponde ao comprimento da condição restritiva, se houver, ou a um valor de sensibilidade de corte, observando-se a máxima modificação estrutural definida pela taxa de evolução. Esta sensibilidade de corte pode ser usada em casos de otimização de resposta em frequência, por exemplo, onde elementos devem ser removidos para melhorar a resposta do sistema. A quantidade de elementos adicionados também está atrelada à uma restrição, geralmente de 1% do volume. Isto porque caso contrário a estrutura pode perder sua integridade estrutural durante as primeiras iterações.

Para determinar a quantidade de elementos a serem mantidos ou removidos não é suficiente apenas impor as restrições mencionadas anteriormente. Grupos de elementos podem possuir valores de sensibilidade muito próximos, e caso as condições fossem simplesmente impostas alguns destes elementos seriam removidos enquanto que outros seriam mantidos. Isto deve ser evitado, especialmente em casos simétricos, pois provoca desbalanços na estrutura. Assim, o algoritmo usado para a determinação da quantidade de elementos removidos deve levar em consideração a similaridade dos valores de sensibilidade de elementos: grupos com valores próximos devem ser removidos ou mantidos juntos, mesmo que isto faça com que as condições de restrição não sejam completamente obedecidas.

4.4.5 Critério de parada

Devido ao erro inerente ao método usado para prever os efeitos da remoção ou adição de elementos à estrutura, as configurações da estrutura durante o processo de otimização não correspondem às configurações ótimas possíveis para uma estrutura sob as mesmas restrições instantâneas. É necessário mais do que uma iteração para que a configuração ótima de um certo problema seja alcançada, e cada vez que as condições de restrição são modificadas o problema é efetivamente modificado, algo que ocorre durante a etapa de aplicação gradual da condição restritiva. Nesta etapa este erro pode ser desconsiderado, pois as mudanças na função objetivo causadas pelas grandes mudanças estruturais são muito maiores. Após ela, no entanto, quando a estrutura já satisfaz as restrições, é necessária a realização de mais algumas iterações para a determinação da estrutura final. Durante estas iterações a quantidade de elementos modificados é menor, portanto a previsão é mais precisa.

Para a determinação do instante em que a otimização não é mais capaz de melhorar a estrutura é utilizado um critério de parada que depende da modificação do valor da função objetivo global do sistema. Esta função é utilizada para calcular um valor para a estrutura a cada iteração, e caso a diferença entre a atual e a iteração anterior seja menor do que um certo valor de tolerância a estrutura é considerada otimizada e o processo BESO é terminado. Além disto, a otimização pode ser finalizada caso a função objetivo não demonstre melhoras durante um certo número de iterações.

4.5 Malha estruturada, não estruturada e regular

Uma malha estruturada é uma malha em que a numeração dos elementos segue uma ordem definida. Como exemplo, considere uma malha de quadriláteros, com 5 elementos na horizontal e 4 na vertical. Exemplos de malhas com estas características são mostrados na coluna esquerda da figura 4.2.

	Estruturada					Não estruturada				
Regular	1	2	3	4	5	5	12	11	20	1
	6	7	8	9	10	4	7	8	13	9
	11	12	13	14	15	19	18	2	6	3
	16	17	18	19	20	15	14	10	16	17
Não regular	1	2	3	4	5	5	12	11	20	1
	6	7	8	9	10	4	7	8	13	9
	11	12	13	14	15	19	18	2	6	3
	16	17	18	19	20	15	14	10	16	17

Figura 4.2 – Exemplo de malhas regulares e não regulares, estruturadas e não estruturadas

Para um dado elemento interno i de uma malha estruturada, pode-se dizer que o elemento à sua esquerda possui número $i-1$, o à sua direita $i+1$, acima $i-5$ e abaixo $i+5$. A vantagem disto é que não é necessário informações extras para determinar a conectividade dos elementos; malhas não estruturadas dependem de uma matriz de conectividade que determina quais elementos estão ligados entre si, o que aumenta a complexidade da implementação e aumenta um pouco o custo computacional.

Uma malha regular é uma malha onde todos os elementos são idênticos. Exemplos de malhas com esta característica são mostrados na linha superior da figura 4.2. A grande vantagem disto é que só é necessário o cálculo e armazenamento de uma matriz de rigidez elementar; malhas não regulares necessitam do cálculo da matriz elementar de cada elemento, o que aumenta significativamente o custo computacional.

Geralmente a otimização topológica de um sistema é realizada discretizando-o com uma malha estruturada e regular. Isto diminui o custo computacional e simplifica a implementação, mas impõe limitações quanto ao tipo de sistema que se pode otimizar. Uma alternativa ao uso deste tipo de malha é o uso de malhas convencionais mais refinadas; o aumento do número de elementos possibilita a discretização de curvas e outras características através de "escadas". Porém, o uso de mais elementos causa um aumento do custo computacional da otimização ao elevar significativamente o número de variáveis.

5 METODOLOGIA

Durante este trabalho foi programado um *software* em MATLAB[®] que implementa um método BEFSO *hard-kill* 2D. A escolha deste método sobre um *soft-kill* se deve ao menor custo computacional do primeiro, que possui resultados bastante similares ao segundo. Os detalhes da implementação são descritos nesta seção. O procedimento geral do programa é mostrado na figura 5.1.

5.1 Formulação do problema

Os problemas analisados consistem da otimização estrutural de sistemas fluido-estrutura, buscando-se a minimização da flexibilidade, ou *compliance*, o que equivale à maximização da rigidez. A malha dos sistemas não é modificada durante a otimização. Todos os problemas são primeiramente descritos por uma série de dados referentes à sua malha (posição dos nós e

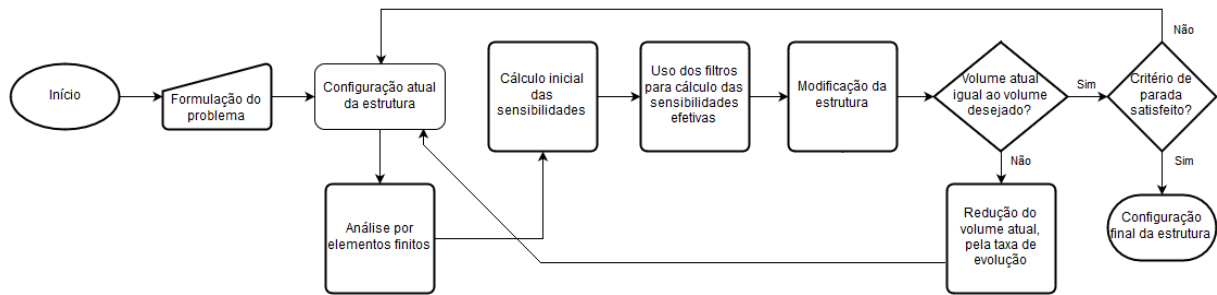


Figura 5.1 – Esquema mostrando o procedimento geral de otimização pelo método BEFSO usado

matriz de conectividade), condições de contorno (forças e deslocamentos ou pressões prescritos sobre determinados graus de liberdade), propriedades do material estrutural (coeficiente de Poisson e módulo de Young), e regiões iniciais do fluido. Também se informa a fração de volume final desejada e a taxa de evolução, bem como regiões em que a estrutura não pode ser removida.

5.2 Configuração atual da estrutura

A configuração da estrutura em uma dada iteração é determinada por um vetor \mathbf{x} de tamanho igual ao número de elementos utilizados para discretizar o domínio. Cada elemento deste vetor pode assumir um valor 0, representando um espaço vazio ou preenchido por fluido, ou 1, representando um elemento estrutural. Um segundo vetor faz a distinção entre elementos vazios, que não possuem nenhuma rigidez e portanto são removidos das matrizes de rigidez globais, ou fluidos.

Um espaço vazio será ocupado pelo fluido se possuir um vizinho fluido. Alguns elementos são sempre fluidos, definidos na formulação do problema. Para determinação dos elementos fluidos é usado o método de preenchimento por enchente (*flood-fill*), onde elementos vazios ao lado de elementos fluidos são ocupados, repetindo-se o processo até que não haja mais elementos vazios nesta condição.

5.3 Análise por elementos finitos

O *software* desenvolvido implementa o método segundo as equações descritas no apêndice A. São usados 4 pontos na integração de Gauss, e as funções de forma são variáveis de ξ e η , que variam de -1 a 1 sobre o domínio elementar, sendo utilizado a matriz Jacobiana para a transformação ao sistema de coordenadas global. São considerados apenas elementos quadriláteros de 4 nós.

Para reduzir o custo computacional que seria necessário para o cálculo das matrizes de cada elemento, cada matriz é calculada apenas uma vez, ao invés de a cada iteração do processo de otimização, e então armazenada em matrizes cujas dimensões refletem seus graus de liberdade. São também pré-calculadas as matrizes dos elementos de interface. Para tal, é calculado a rigidez equivalente para todos os lados do quadrilátero elementar, menos os que fazem fronteira com o contorno do domínio geral do sistema. São colocados na matriz completa de interface as matrizes de interface correspondente à todos os elementos determinados como sendo atualmente fluido. Como a direção normal de um lado de um elemento se opõe à direção normal de um outro elemento que compartilhe este lado, a soma de todos os elementos de interface resulta em valores 0 para todos os lados internos do domínio fluido, restando apenas os valores dos lados que fazem interface com a estrutura. Isto é demonstrado na figura 5.2.

As três matrizes completas do sistema, referentes às matrizes de rigidez estrutural, rigidez equivalente do fluido e matriz de interface, podem ser montadas uma vez e armazenadas; a cada iteração são subtraídos destas matrizes os valores de rigidez armazenados para os elementos removidos naquela iteração, e somada as dos adicionados. Por meio do método dos

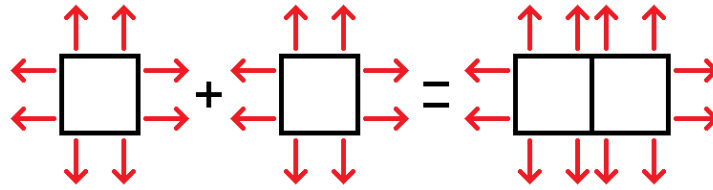


Figura 5.2 – Exemplo do resultado da junção de elementos ao longo de suas interfaces, mostrando que o resultado são vetores apenas na interface externa do grupo de elementos

elementos finitos se calcula os vetores de deslocamentos e de pressões, necessários para o cálculo das sensibilidades elementares.

5.4 Cálculo inicial das sensibilidades

O cálculo das sensibilidades é primeiramente dado pela equação 4.5 com $p = 1$. Ela é calculada usando-se a matriz de rigidez estrutural elementar e as componentes do vetor de deslocamentos referentes aos graus de liberdade de cada elemento, caso este faça atualmente parte da estrutura. Isto resulta em um valor por elemento ativo.

Para elementos estruturais que façam fronteira com o fluido também é calculada a variação da função objetivo devido à modificação da fronteira fluido-estrutura. Esta variação é calculada com base na modificação da matriz de interface, \mathbf{L}_{Sf} , que ocorreria caso o elemento fosse removido. A sensibilidade é então calculada segundo a equação 5.1, com base na expressão utilizada por Vicente, 2013, mas modificada para considerar o volume dos elementos (Huang e Xie, 2010).

$$\alpha_i = \frac{\partial C}{\partial x_i} = \begin{cases} \left[\frac{1}{2}(\mathbf{u}_S)^T \mathbf{K}_S^i \mathbf{u}_S + (\mathbf{u}_S)^T \mathbf{L}_{Sf}^i \mathbf{p}_f \right] / V_e & x_i = 1 \\ 0 & x_i \neq 1 \end{cases} \quad (5.1)$$

Neste caso, o volume dos elementos é equivalente à sua área, pois o problema é bidimensional, e o índice s refere-se ao domínio estrutural.

A matriz \mathbf{L}_{Sf}^i é a matriz de acoplamento elementar referente ao elemento estrutural na interface, e aponta para todos os seus vizinhos. Caso este elemento fosse removido fluido ocuparia seu espaço e aplicaria um carregamento sobre os seus vizinhos, e por meio desta parcela na equação de sensibilidade é possível estimar qual seria a variação de energia no sistema devido a este aumento no carregamento.

Esta equação depende das pressões do fluido em todos os nós do elemento na interface. Como este é estrutural, não há um valor de pressão para todos eles. É feita então a aproximação de que a pressão nos nós sem pressão calculada é igual a média das pressões nos nós da interface do elemento estrutural com o fluido.

Após o cálculo inicial das sensibilidades deve-se aplicar o processo de filtragem descrito no apêndice D. Este processo suaviza os valores de sensibilidade pelo espaço, e inclusive atribui valores para elementos que não pertencem à estrutura. Um exemplo de aplicação do filtro é mostrado na figura 5.3.

5.5 Modificação da estrutura

Após o cálculo de todas as sensibilidades elementares filtradas, os elementos são ordenados de acordo com seus valores de sensibilidade, e os elementos com os menores valores são removidos, segundo descrito no item 4.4.2, até que o volume dos elementos mantidos seja igual ao volume definido pela restrição. Isto corresponde à remoção dos elementos que contribuem menos para a estrutura. Isto é, os elementos menos carregados são removidos, porque sua remoção tem o menor impacto para a estrutura como um todo quando comparado com o

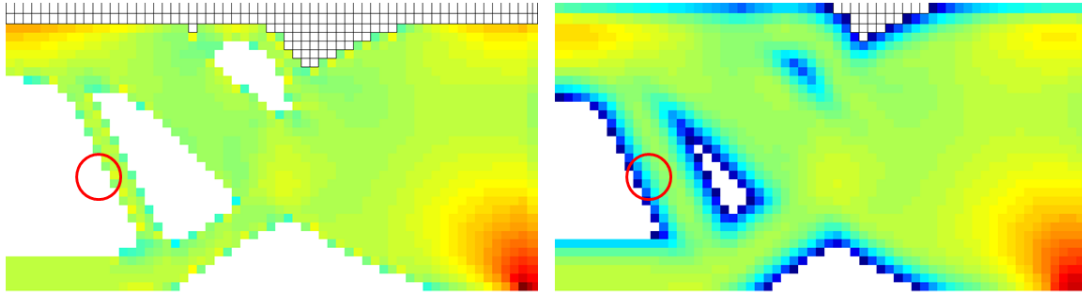


Figura 5.3 – Exemplo de aplicação do filtro. À esquerda temos os valores de sensibilidade iniciais calculados, e a direita os valores de sensibilidade filtrados referentes à mesma estrutura. O círculo vermelho destaca que elementos que não pertencem à estrutura possuem valores de sensibilidade inicial zero, mas se estiverem próximos à elementos estruturais eles podem receber valores devido ao processo de filtragem

impacto da remoção de outros elementos mais carregados. Nessa ordenação são considerados também elementos previamente removidos, que possuem um valor de sensibilidade devido ao processo de filtragem. Assim, caso um elemento removido possua um valor maior do que um elemento que seria mantido, o primeiro é re-incluído e o segundo removido. No entanto, apenas um volume determinado de elementos poderá ser re-incluído, como descrito no item 4.4.4.

Embora a determinação do elemento de corte seja feito primariamente devido à condição restritiva de volume, também é levada em consideração a mudança relativa do valor de sensibilidade entre um elemento e os que possuam os valores mais próximos: se dois elementos possuem valores muito próximos, não se deve remover um enquanto se mantém outro; ambos devem ser mantidos ou removidos juntos. Para implementar estas características, primeiramente deve-se determinar quais elementos previamente removidos poderão vir a ser reincluídos na estrutura. Para tal, deve-se determinar um valor de corte da sensibilidade, tal que todos os elementos não estruturais com valores maiores que este, e apenas estes elementos, poderão voltar a fazer parte da estrutura.

Como a restrição é o volume total de elementos que podem ser adicionados em uma iteração, deve-se encontrar um valor de corte x' para a função $y(x)$ tal que $y(x') = 0$, onde $y(x)$ é a diferença entre a soma do volume de todos os elementos ativos que possuam valores de sensibilidade maiores do que o valor de entrada x e o volume de restrição. Isto pode ser escrito da seguinte forma:

$$\text{encontre } x' \quad | \quad y(x') = 0 \quad (5.2)$$

$$y(x) = \sum_{j=1}^N V_j^{te}(x) - V_{ad} \quad (5.3)$$

$$V_j^{te}(x) = \begin{cases} V_j^e & \text{caso } j \text{ se referira a um elemento ativo e } \alpha_j > x \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (5.4)$$

onde N é o número de elementos, V_{ad} é o volume que pode ser adicionado a cada iteração, V_j^e é a área do elemento j e α_j é o valor de sensibilidade filtrada dele. Para resolver este problema é utilizado o método da biseção. Os elementos ativos são nesse caso os elementos não estruturais que não são obrigatoriamente fluidos pela definição do problema. Os elementos que podem ser adicionados são então os elementos ativos com valores de sensibilidade maiores do que x' .

Determinados quais elementos podem ser re-adicionados, repete-se o mesmo processo, mas desta vez os elementos ativos serão os elementos estruturais, e V_{ad} é substituído por V_i ,

que é a fração de volume definida pela condição restritiva para a iteração i atual. No caso 2D as áreas são para efeito de cálculo equivalentes ao volume, então no *software* são usadas áreas ao invés de volumes. Além disto, alguns elementos estruturais podem ser definidos como obrigatórios, e não podem ser removidos, e a eles são efetivamente dados valores de sensibilidade infinitos para este teste. Assim, a configuração da estrutura para a próxima iteração é composta pelos elementos ativos considerados neste teste que possuam valores de sensibilidade acima do valor de corte calculado.

5.6 Condição de parada

Para o fim da otimização são considerados três quesitos. Primeiramente a condição restritiva, que é aplicada gradativamente, deve estar sendo aplicada por completo para que a otimização seja considerada terminada. Por exemplo, se a restrição é aplicada durante 10 iterações, a restrição da 11ª iteração será igual à da 10ª, pois a restrição já teria sido completamente aplicada na 10ª iteração, e apenas a partir da 11ª iteração o processo poderia ser terminado.

Após o primeiro quesito ser alcançado, algumas iterações ainda são executadas até que a mudança no valor da função objetivo, no caso a energia absorvida pela estrutura, seja menor do que um valor de tolerância. Durante estas iterações o volume da estrutura não varia muito, mas sua configuração pode mudar enquanto elementos são adicionados e removidos. Esta condição é necessária porque como mencionado os diferenciais usados para modificar a estrutura são apenas aproximações, que embora suficientes para guiar a redução do volume durante a primeira parte da otimização não são capazes de chegar à uma posição ótima em apenas uma iteração. Assim, durante várias iterações extras a estrutura se estabiliza e converge para sua forma final.

Concorrentemente com o segundo quesito, o valor da função objetivo da iteração atual é comparado com o melhor valor encontrado desde o alcance do primeiro quesito. Caso este seja melhor, ele é armazenado como o melhor valor, e a configuração da estrutura também é salva. Caso o processo de otimização falhe em alcançar uma melhora em um certo número de iterações ele é finalizado. Matematicamente, estas condições são representadas pelas seguintes equações:

$$V_i = V^* \quad (5.5)$$

$$abs\left(\frac{C_i - C_{i-1}}{C_i}\right) < tol \quad ou \quad C_{(i-K)...i} > C_{min} \quad (5.6)$$

onde V_i é o valor do volume da estrutura na iteração i , V^* é o volume final desejado, C_i é o valor da função objetivo na iteração i , tol é a variação aceitável, em porcentagem, para considerar que a forma da estrutura está convergida, e K é o número de iterações que podem ter valores de C piores do que C_{min} , o menor valor encontrado, antes da otimização ser interrompida. Ambos V^* , tol e K são dados de entrada da otimização.

6 RESULTADOS

6.1 Verificação

Primeiramente foi realizada uma comparação entre os resultados obtidos pelo programa desenvolvido e os obtidos por Vicente, 2013, em dois casos apresentados por ele. O apêndice C mostra a geometria e configuração originais destes casos, e a figura 6.1 mostra a comparação entre os resultados.

Estes casos são apresentados em Vicente, 2013, nos itens 5.1.1 e 5.3.2. O primeiro se refere a um sistema de tubulações, e o segundo a metade de um pistão, dividido ao meio devido à sua simetria. O caso das tubulações possui malha não regular e interface fluido-estrutura fixa, enquanto que o caso do pistão possui malha regular e interface móvel.

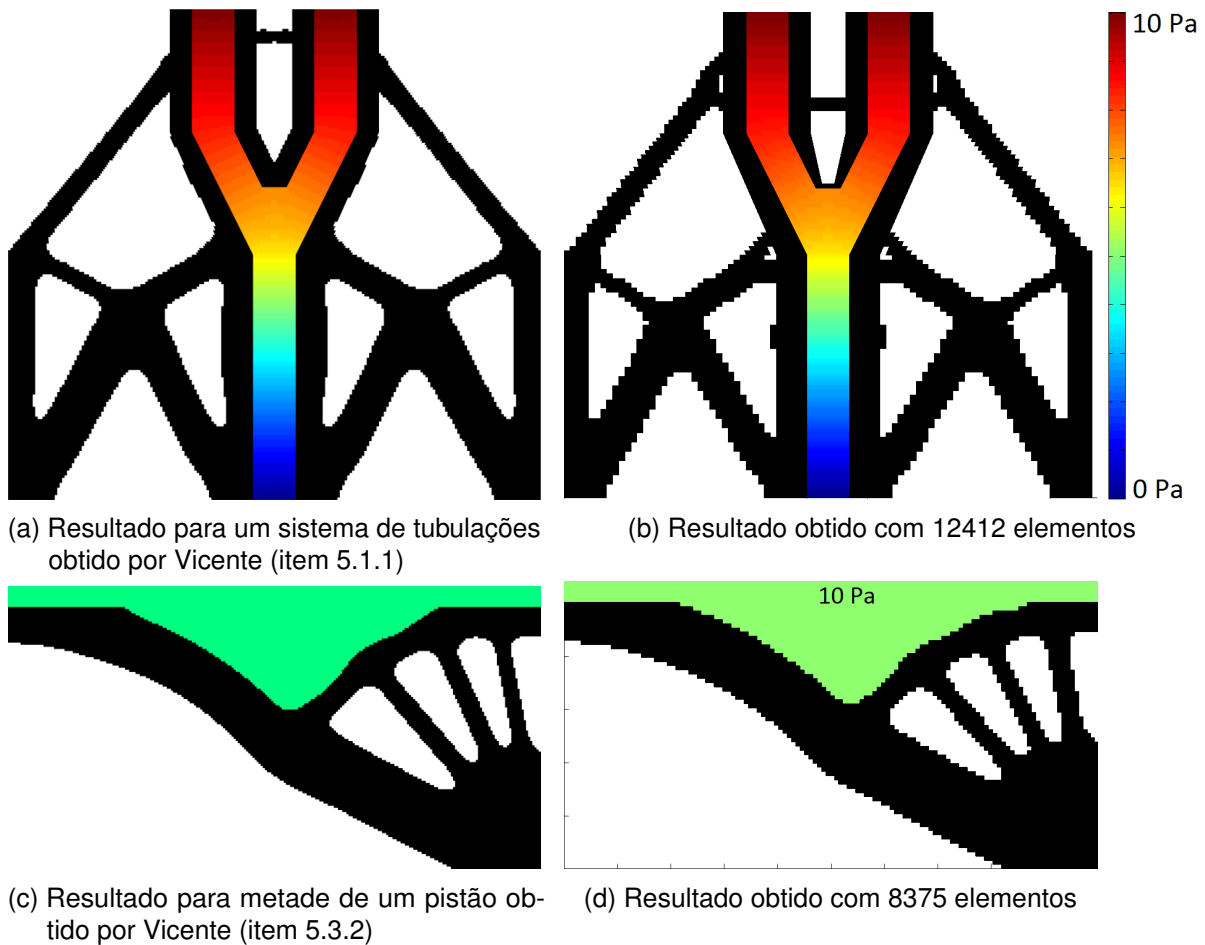


Figura 6.1 – Comparação dos resultados encontrados por Vicente, 2013, à esquerda, e pelo *software* desenvolvido, à direita. As regiões coloridas representam o fluido, com as cores indicando sua pressão.

6.2 Novo caso

Como exemplo das capacidades do programa foi proposto um caso de otimização da estrutura transversal interna de uma asa de avião. Neste caso, há uma interface fixa entre o fluido e a estrutura, pois o perfil externo da asa é determinado pelo seu comportamento aerodinâmico, que não é simulado aqui. Foi escolhido um perfil NACA 4412, e a distribuição das pressões externas causadas pelo ar durante sua operação é dada por Allen, 1939, em função da pressão dinâmica, que é dada por:

$$q = \frac{1}{2} \rho_{ar} U^2 \quad (6.1)$$

onde ρ_{ar} é a densidade do ar e U é a velocidade do escoamento. A tabela 6.1 mostra os valores utilizados para a simulação.

Para gerar a malha deste caso foi usado o programa gratuito Gmsh. Foi desenvolvida uma função em MATLAB capaz de ler seus arquivos de saída e convertê-los para o formato usado pelo *software* desenvolvido. O resultado da otimização é mostrado na figura 6.2.

7 DISCUSSÃO

Na validação a comparação entre os casos demonstra que o *software* desenvolvido é capaz de otimizar casos com malha regular ou não regular, e com ou sem interface móvel. As malhas utilizadas nestes casos são estruturadas, mas para o programa desenvolvido não há

Tabela 6.1 – Valores usados na simulação da asa de perfil NACA 4412

Velocidade do escoamento	U	200 Km/h (55,57 m/s)
Densidade do ar	ρ_{ar}	1.007 Kg/m ³
Pressão dinâmica	q	1554.0 Pa
Altitude	H	2000 m
Perfil da asa		NACA 4412
Ângulo de ataque	α	13°57'
Cordeira	c	2 m
Espessura da camada fixa da interface	t	10 mm
Número de elementos	N	15790

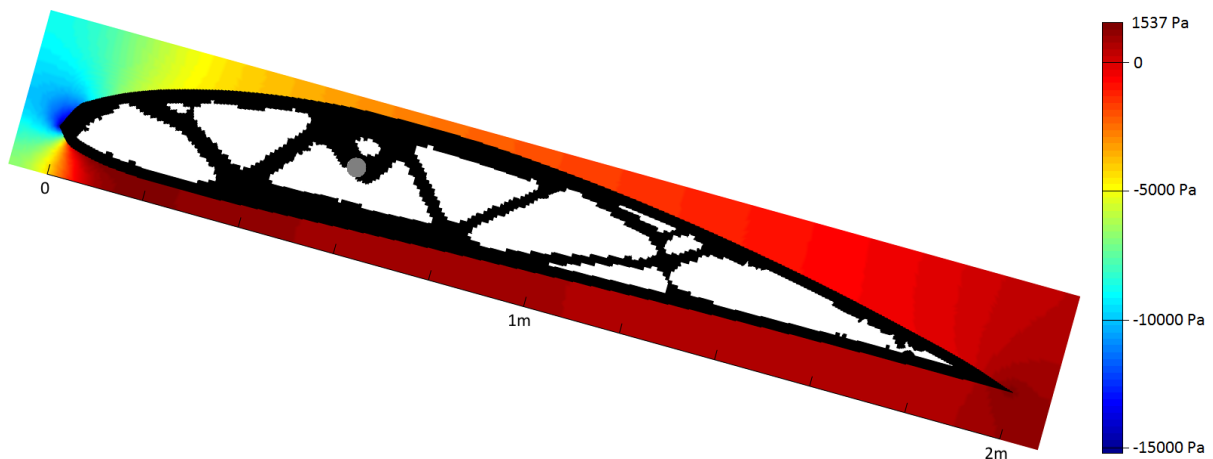


Figura 6.2 – Resultado para a otimização da estrutura transversal interna de uma asa com o perfil NACA 4412. As regiões coloridas representam o fluido, com as cores indicando a pressão. A região circular cinzenta representa uma viga transversal à imagem, a longarina, e é onde são aplicadas as condições de engaste.

diferença entre malhas estruturadas e não estruturadas pois ele não faz uso das simplificações que beneficiam o uso das primeiras.

No caso 5.1.1 há uma certa diferença entre os resultados devido a diferença na camada de material fixo, que não pode ser removido pela otimização, ao redor dos canos; a tese comparada não menciona qual a espessura desta camada, então uma aproximação foi feita com base nos resultados mostrados. Além disto, não é mencionado o uso da divisão dos valores de sensibilidade dos elementos por seus volumes para calcular a densidade de energia como é feito no *software* desenvolvido; nos casos apresentados não há grande diferença pois o tamanho dos elementos não varia muito.

O *software* desenvolvido contém uma implementação do método FEM como uma de suas partes. Com isso, não se depende de outros programas comerciais para realizar otimizações, mas o algoritmo não é tão eficiente. É relativamente simples fazer uma interface com um programa como o ANSYS, mas foi escolhida a criação de um módulo de FEM para manter o código aberto e didático. Devido a isso, no entanto, foram usadas malhas menos refinadas neste trabalho do que em Vicente, 2013.

No caso apresentado no item 6.2 é utilizada uma malha não estruturada e não regular. Foi escolhido o engaste como estando em uma única viga. Asas de aeronaves diferentes, mesmo com o mesmo perfil, podem possuir estruturas diferentes; a asa simulada não se refere a nenhuma em específico, sendo usada como um exemplo da funcionalidade do *software* desenvolvido.

No anexo B é apresentado o histórico da função objetivo do caso da asa NACA 4412. É possível ver vários picos na função objetivo ao longo da otimização; estes ocorrem quando

uma estrutura representando uma viga é eliminada. O resultado final mostrado corresponde à configuração da estrutura que apresentou o menor valor de energia, pois o programa salva a melhor configuração encontrada durante o processo de melhoria.

8 CONCLUSÃO

Foi possível implementar um código de otimização topológica BEFSO em MATLAB® sem nenhuma dependência à programas comerciais externos. Este foi verificado com dois casos encontrados na literatura, e foi otimizado um caso de exemplo para demonstrar suas capacidades. Desta forma foram atingidos os objetivos de implementar uma melhoria ao método BEFSO e desenvolver um *software* aberto que poderá ser usado como base para outros trabalhos, bem como para otimizar estruturas em processo de desenvolvimento.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Allen, H. J. **A simplified method for the calculation of airfoil pressure distribution**. Washington: Langley Memorial Aeronautical Laboratory, 1939. No. 708.
- Chang, C. **"Design and Topology Optimization of Tissue Scaffolds"**. Tese de doutorado, University of Sydney, Australia, 2015.
- Hansen, A. G., Sigmund, O., Haber, R. B. **"Topology optimization of channel flow problems"**. Struct. Multidisc. Optim., USA, v.30, p.181–192, 2005.
- Huang, X., Xie, Y. M. **"Evolutionary Topology Optimization Of Continuum Structures: methods and applications"**. 1ª edição.ed. Chichester, UK: John Wiley & Sons, Ltd, 2010. 237p.
- Paulino, G. H., Willett, D., Willet, B. **"Where are we in topology optimization?"**. 2013. Disponível em: <<http://www2.mae.ufl.edu/mdo/Papers/Panel1.pdf> >. Acesso em: 22 abr. 2016.
- Petyt, M. **"Introduction to Finite Element Vibration Analysis"**. 1ª edição.ed. UK: Cambridge University Press, 1990. 564p.
- Vicente, W. M. **"Otimização Topológica Evolucionária Aplicada a Sistemas Elasto-Acústicos"**. Tese de doutorado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brasil, 2013.
- Yoon, G. H., Jensen, J. S., Sigmund, O. **"Topology optimization of acoustic–structure interaction problems using a mixed finite element formulation"**. International Journal for Numerical Methods in Engineering, USA, v.70, p.1049–1075, 2007.

APÊNDICE A – MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Aqui é exposto um resumo do método dos elementos finitos para sólidos e fluidos, com base em Petyt, 1990 e Vicente, 2013.

1 DOMÍNIO ESTRUTURAL E FLUIDO

As equações base para o domínio estrutural são as de movimento de corpo contínuo. Como hipóteses consideram-se pequenas deformações, e material homogêneo e isotrópico. São considerados apenas os esforços sobre dois eixos principais, portanto um domínio bidimensional. Com isso pode ser usada a equação de elasticidade linear:

$$\boldsymbol{\sigma}_S = \mathbf{D}_S \boldsymbol{\varepsilon}_S \quad (\text{A.1.1})$$

onde \mathbf{D}_S é a matriz constitutiva do material, que depende de seu módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson, e o subscrito s é referente ao nome do domínio, vindo do inglês *structural*. O domínio está sujeito as condições de contorno de um meio elástico contínuo, descritas pela equação de contorno do domínio, as condições de Dirichlet, e as condições de Neumann. A condição de contorno do domínio é dada pela seguinte equação:

$$\tilde{\nabla}^T \boldsymbol{\sigma}_S + \mathbf{b}_S = \rho_S \frac{\partial^2 \mathbf{u}_S}{\partial t^2} \quad (\text{A.1.2})$$

que para casos estáticos pode ser reduzida a:

$$\tilde{\nabla}^T \boldsymbol{\sigma}_S + \mathbf{b}_S = 0 \quad (\text{A.1.3})$$

onde $\tilde{\nabla}^T$ é a matriz transposta do operador diferencial e \mathbf{b}_S são as forças de corpo. As condições de Dirichlet dizem que o deslocamento na fronteira do domínio devem ser iguais ao deslocamento prescrito nela, e as condições de Neumann dizem que os esforços na fronteira devem ser iguais aos esforços prescritos nela. Com as equações A.1.1 e A.1.3, além das condições de contorno, é possível calcular o campo de tensões $\boldsymbol{\sigma}_S$ e de deslocamentos \mathbf{u}_S do domínio. No entanto, a resolução analítica destas equações só é possível para casos simples, portanto é utilizado o método dos elementos finitos. Utilizam-se equações ponderadoras lineares que descrevem o campo de deslocamentos e tensões em um corpo em função de valores calculados em pontos específicos, chamados de nós. Para o caso estudado são utilizados elementos quadrilaterais de 4 nós, portanto existem 4 funções ponderadoras, chamadas funções de forma. Estas são escolhidas tal que seu valor seja 1 no seu nó referente, decaindo linearmente para 0 sobre os outros nós. O deslocamento dentro do corpo é portanto dado pela soma destas 4 funções, cada uma multiplicada pelo deslocamento de seu nó referente. São considerados apenas os deslocamentos sobre os dois eixos principais, portanto 2 graus de liberdade por nó. Isto pode ser escrito da seguinte forma:

$$\mathbf{u}_S^e = \mathbf{N}_S^e \tilde{\mathbf{u}}_S^e \quad (\text{A.1.4})$$

onde \mathbf{N}_S^e são as funções de forma organizadas em um vetor linha, $\tilde{\mathbf{u}}_S^e$ são os valores dos deslocamentos nodais organizados em uma matriz 4 por 2, referentes aos 4 nós e 2 graus de liberdade dos elementos utilizados, e \mathbf{u}_S^e é vetor de deslocamentos no domínio do elemento em uma posição xy . Os componentes de \mathbf{N}_S^e e \mathbf{u}_S^e são funções de x e y , enquanto que os componentes de $\tilde{\mathbf{u}}_S^e$ são constantes.

Para calcular os esforços e deslocamentos da estrutura, é utilizada a equação do movimento de corpos elásticos, com aceleração e amortecimento iguais a zero. Esta equação é dada por:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (\text{A.1.5})$$

Para resolvê-la, é necessário termos a matriz de rigidez global da estrutura \mathbf{K} . Esta matriz é montada com base nas matrizes de rigidez de cada elemento. A matriz de rigidez elementar \mathbf{K}^e é dada por:

$$\mathbf{K}^e = \int (\nabla \mathbf{N}^e)^T \mathbf{D}_S (\nabla \mathbf{N}^e) dv \quad (\text{A.1.6})$$

Seu desenvolvimento pode ser encontrado em Petyt, 1990. Os diferenciais das funções de forma podem ser calculados analiticamente, pois elas são apenas funções bilineares, mas a integral deve ser calculada numericamente utilizando-se integração de Gauss. Como a equação envolve a multiplicação das funções o domínio pode estar sendo descrito por uma função bi-quadrática, ou bi-cúbica dependendo do sistema de coordenadas. Em ambos os casos é suficiente a utilização de 4 pontos sobre o domínio.

As funções de forma podem ser formuladas em um outro sistema de coordenadas que é então mapeado ao sistema utilizado na estrutura. Neste caso deve-se usar um método para transformar as derivadas locais das funções de forma em derivadas no sistema global. Para tal é utilizada uma matriz, chamada de matriz Jacobiana. Os detalhes de sua formulação podem ser encontradas em Petyt, 1990. Esta matriz é dada por:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.7})$$

Para o cálculo das matrizes de rigidez elementares usando funções de forma normalizadas é então usada a seguinte equação:

$$\mathbf{K}^e = \int (\mathbf{J}^{-1} \nabla \mathbf{N}^e)^T \mathbf{D}_S (\mathbf{J}^{-1} \nabla \mathbf{N}^e) \det(\mathbf{J}) dv \quad (\text{A.1.8})$$

Ao contrário de estruturas com elementos retangulares, não é possível a obtenção de uma matriz de rigidez elementar que dependa apenas de parâmetros do elemento como altura ou largura; o procedimento de integração numérica deve ser realizado para cada elemento para obtenção de sua matriz de rigidez.

O procedimento para descrever o domínio fluido é semelhante ao do domínio estrutural. As diferenças são que ao invés de dois graus de liberdade por nó representando os deslocamentos em x e y o fluido possui apenas um grau de liberdade por nó, sua pressão, e a sua matriz constitutiva \mathbf{D}_f é a matriz identidade. A matriz de rigidez elementar \mathbf{K}^e é portanto dada por:

$$\mathbf{K}^e = \int (\mathbf{J}^{-1} \nabla \mathbf{N}^e)^T (\mathbf{J}^{-1} \nabla \mathbf{N}^e) \det(\mathbf{J}) dv \quad (\text{A.1.9})$$

2 INTERFACE

A interface entre os dois domínios no caso 2D é dada por uma linha S , onde ocorre a transmissão de forças. O carregamento total na estrutura deve ser igual à força total aplicada pelo fluido. Esta força é dada pela distribuição de pressão no fluido, e ocorre na direção normal. O carregamento na estrutura também segue uma distribuição ao longo da linha. A força aplicada pelo fluido sobre a estrutura é dada então por:

$$\mathbf{f}_{Sf}^e = \int (\mathbf{N}_S^e)^T \mathbf{n} \mathbf{N}_f^e dS \tilde{\mathbf{p}}_f^e \quad (\text{A.2.1})$$

onde \mathbf{N}_S^e e \mathbf{N}_f^e são as funções de forma da estrutura e do fluido respectivamente, ao longo da linha, \mathbf{n} é o vetor que aponta na direção normal e $\tilde{\mathbf{p}}_f^e$ é o vetor de pressões nos nós compartilhados pelos domínios.

É considerado que a estrutura não aplica carregamento estático sobre o fluido, isto é, que o fluido possui uma superfície livre. No caso dinâmico a estrutura aplica ondas de pressão sobre o fluido, mas aqui está sendo considerado apenas o caso estático.

Caso sejam usadas funções de forma normalizadas a equação A.2.1 ainda pode ser usada, sendo integrada sobre o sistema de coordenadas local, mas deve ser multiplicada pelo comprimento da linha de contato.

Separando o vetor de pressão elementar da força é possível a obtenção de uma submatriz que pode ser colocada na matriz de rigidez global, servindo como acoplamento entre os domínios. No entanto, devido à hipótese mencionada acima, isto faz com que a matriz global perca sua simetria. Esta submatriz é dada por:

$$\mathbf{L}_{Sf}^e = \int (\mathbf{N}_S^e)^T \mathbf{n} \mathbf{N}_f^e dS \quad (\text{A.2.2})$$

3 SOLUÇÃO DO SISTEMA ACOPLADO

A solução do sistema é dada pela resolução do sistema de equações de movimento representado pela seguinte equação matricial:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (\text{A.3.1})$$

As parcelas de aceleração e amortecimento são desconsideradas porque é considerado neste trabalho apenas o caso estático. Expandindo as matrizes, mostra-se a divisão dos domínios:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_S & \mathbf{L}_{Sf} \\ 0 & \mathbf{K}_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_S \\ \mathbf{p}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_S \\ \mathbf{f}_f \end{bmatrix} \quad (\text{A.3.2})$$

Este sistema de equações descreve um sistema fracamente acoplado, isto é, que pode ser resolvido em partes. Neste caso, é possível calcular o campo de pressões independentemente da estrutura, e aplicar estas pressões na estrutura como um carregamento:

$$\mathbf{p}_f = \mathbf{K}_f^{-1} \mathbf{f}_f \quad (\text{A.3.3})$$

$$\mathbf{u}_S = \mathbf{K}_S^{-1} (\mathbf{f}_S - \mathbf{L}_{Sf} \mathbf{K}_f^{-1} \mathbf{f}_f) \quad (\text{A.3.4})$$

APÊNDICE B – HISTÓRICO DA OTIMIZAÇÃO DA ASA NACA 4412

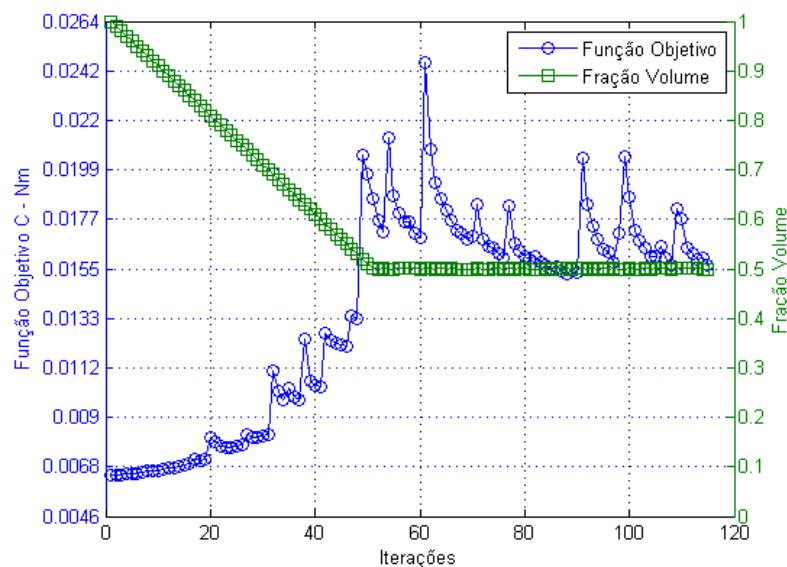
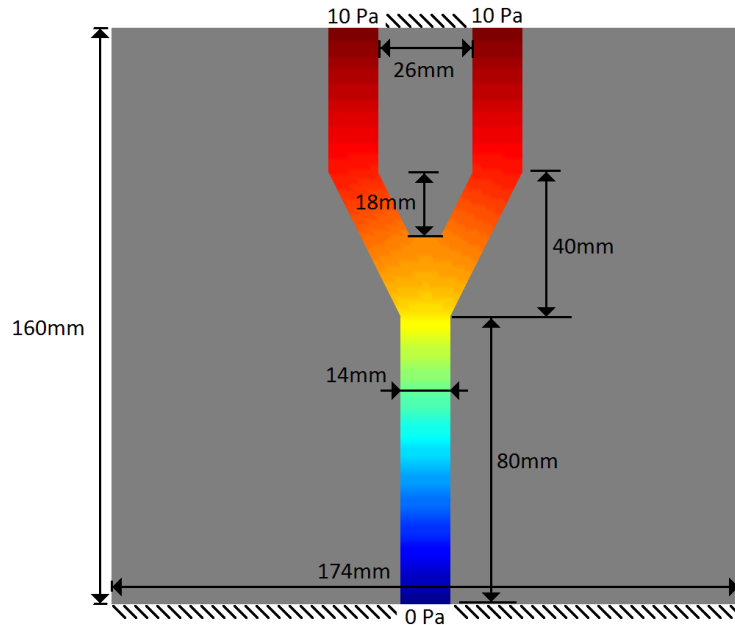
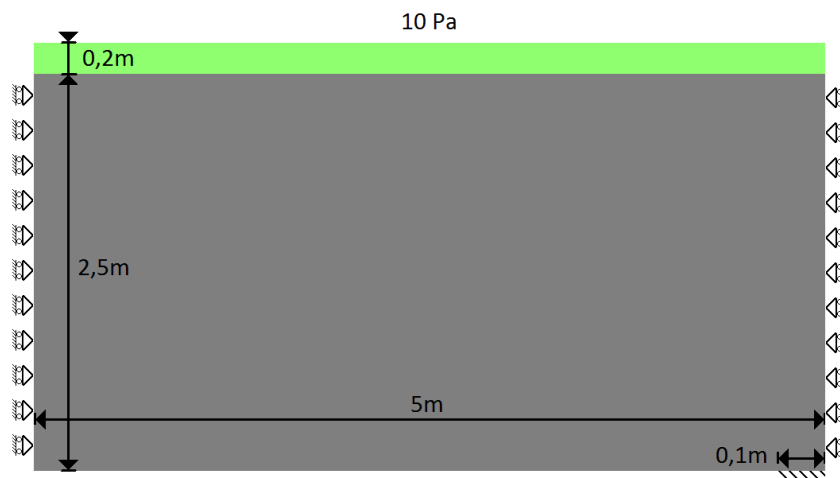


Figura B.1 – Histórico da função objetivo e fração do volume da otimização da asa de perfil NACA 4412 e corda de 2m

APÊNDICE C – GEOMETRIAS INICIAIS DOS CASOS DE VALIDAÇÃO



(a) Geometria do caso de validação 5.1.1



(b) Geometria do caso de validação 5.3.2

Figura C.1 – Geometria inicial, com condições de contorno, dos casos otimizados para validar o programa desenvolvido. As regiões cinzentas são inicialmente ocupadas pela estrutura, enquanto que as partes coloridas são ocupadas pelo fluido

APÊNDICE D – FILTRAGEM DE VALORES DE SENSIBILIDADE

A otimização de uma estrutura depende do número de elementos usados para discretizá-la. Quanto mais refinada a malha, mais detalhes podem ser incluídos. No entanto, a otimização tende a modificar a estrutura causando o chamado efeito xadrez, onde elementos são ligados apenas por seus vértices e não pelos seus lados, como pode ser visto na figura D.1. Isto causa erros numéricos e não representa uma estrutura fabricável, e portanto deve ser evitado.

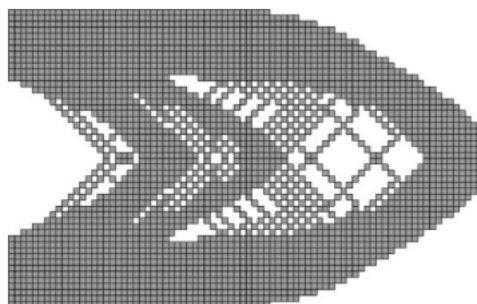


Figura D.1 – Efeito xadrez típico emergente em otimizações sem filtro de independência de malha. Imagem de [Huang e Xie, 2010](#)

Além disto, o método BESO é baseado no método ESO, mas possui a capacidade de adicionar elementos previamente removidos. A letra B da sigla, que significa *Bi-directional*, representa esta possibilidade. Para tal é necessário um valor de sensibilidade para elementos ausentes da estrutura, porém como estes possuem um coeficiente de elasticidade nulo, ou quase nulo, o cálculo de seus valores de sensibilidade não representa a variação da função objetivo que seria causada pela sua adição à estrutura.

Para resolver estes problemas, é introduzido um filtro de malha. Este filtro é aplicado após o cálculo das sensibilidades de cada elemento, e seu objetivo é suavizar estes valores no espaço. Cada elemento deve receber uma parcela dos valores de sensibilidade de outros elementos próximos, multiplicado por um fator que depende de suas distâncias. Isto faz com que elementos que tenham muitos vizinhos removidos recebam valores de sensibilidade menores em módulo do que elementos com vários vizinhos ativos. Além disto, elementos removidos que tenham um ou mais elementos ativos como vizinhos recebem parte dos valores de suas sensibilidades, tendo então um valor que pode ser usado para comparação com os demais, sendo possível inclusive a determinação de que é vantajoso a sua re-inclusão. O número de vizinhos considerados na filtragem pode ser modificado ao mesmo tempo em que se modifica o tamanho dos elementos na malha; desta forma, é possível refinar a malha enquanto se mantém a forma geral da estrutura otimizada.

No trabalho é utilizado o filtro de independência de malha descrito em [Huang e Xie, 2010](#). Ele baseia-se no cálculo de valores de sensibilidade para os nós, o que não representa nenhum valor físico, que são então usados para o cálculo dos valores elementares filtrados que serão utilizados.