UFRGS
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Tese de Doutorado

Deslocamentos em $\mathbb{Z}^2$: equação cohomológica e operadores de transferência

Autor:
Everton Artuso

Orientador:
Prof. Dr. Alexandre Tavares Baraviera

Porto Alegre
31 de agosto de 2016

Tese submetida por Everton Artuso como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Orientador:
Prof. Dr. Alexandre Tavares Baraviera

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Alexandre Tavares Baraviera (UFRGS, Orientador)
Prof. Dr. Artur Oscar Lopes (UFRGS)
Prof. Dr. Ali Messaoudi (UNESP - SJRP)
Prof. Dr. Manuel Stadlbauer (UFRJ)

Porto Alegre, 31 de Agosto de 2016

À Nice, dedico.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela vida e pelo caminho que tenho trilhado, pelas oportunidades, pelas dificuldades e pela graça de ser lapidado.

Agradeço a minha esposa, Nice, que presenteou com seu amor, sua prudência e sua presença nestes longos anos, pela profundidade de sua consciência e capacidade de enxergar diamantes sujos entre cascalhos. Agradeço aos meus pais, José e Florentina, pelo incentivo e orações, a minhas irmãs Érica e Eliane pelo carinho.

Agradeço ao professor Alexandre, por toda ajuda, paciência, amizade e perseverança nesses quatro anos. Agradeço aos professores Artur, Ali e Manuel, pela disponibilidade de compor a banca. Em especial, agradeço aos professores Ali e Manuel pelo empenho em fazer correções minuciosas do trabalho inteiro e pelas observações valiosas.

Agradeço aos amigos que fiz aqui, e a todos que de alguma forma contribuíram com sua amizade e companhia.

Agradeço a Rosane, secretária da Pós, pela paciência e por todo o auxílio.

Agradeço a Capes pelo apoio financeiro, sem o qual, este trabalho não teria sido feito.

...imagino que uma das mais fortes motivações para uma obra artística ou científica consiste na vontade de evasão do cotidiano com seu cruel rigor e monotonia desesperadora, na necessidade de escapar das cadeias dos desejos pessoais eternamente instáveis. Causas que impelem os seres sensíveis a se libertarem da existência pessoal, para procurar o universo da contemplação e da compreensão objetivas. Esta motivação assemelha-se à nostalgia que atrai o morador das cidades para longe de seu ambiente ruidoso e complicado, para as pacíficas paisagens das altas montanhas, onde o olhar vagueia por uma atmosfera calma e pura e se perde em perspectivas repousantes, que parecem ter sido criadas para a eternidade.

Como vejo o mundo
Albert Einstein

Resumo

Nosso objetivo nesse trabalho é estudar o comportamento dos operadores de transferência em $\{0,1\}^{\mathbb{N}^2}$, um associado ao deslocamento horizontal (σ^{e_1}) e outro associado ao deslocamento vertical (σ^{e_2}). Construímos uma equação cohomológica para fins de ampliar a gama de funções às quais os operadores de transferência se aplicam. Estudamos também o comportamento do operador de transferência obtido pela composição dos dois operadores citados e, em condições de comutatividade, encontramos um autovalor e uma autofunção associada, ambos estritamente positivos, e uma automedida para o operador dual, associada ao mesmo autovalor. Tal automedida é um estado de equilíbrio. Além disso, estudamos algumas propriedades ergódicas de transformações de blocos.

Palavras-chave: Operadores de transferência, deslocamentos em $\mathbb{Z}^2$, equação cohomológica, estados de equilíbrio, transformações de blocos.

Abstract

In this work we study the behavior of the transfer operators in $\{0,1\}^{\mathbb{N}^2}$, one associated with horizontal shift (σ^{e_1}) and other associated with vertical shift (σ^{e_2}). We build a cohomological equation for the purpose of expanding the range of functions to which the transfer operators apply. We also study the behavior of the transfer operator obtained by the composition of the two cited operators and, in the conditions of commutativity, we find an eigenvalue and an associated eigenfunction, both strictly positive, and an eigen measuse for the dual operator, associated with the same eigenvalue. This eigen measure is an equilibrium state. Furthermore, we study some ergodic properties of block transformations.

Key-words: Transfer operators, shifts on $\mathbb{Z}^2$, cohomological equation, equilibrium states, block transformations.

Conteúdo

Introdução

Em 1907, Oskar Perron publicou em [22] resultados sobre o espectro de matrizes positivas irredutíveis, dentre os quais, mostra que tal matriz possui um autovalor maximal, simples e estritamente positivo, cujo módulo é o raio espectral e não há nenhum outro autovalor com mesmo módulo, com autovetor associado cujas componentes também são estritamente positivas. Em 1912, Ferdinand Frobenius estende em [11] alguns dos resultados de Perron, agora válidos para matrizes não negativas. Uma demonstração muito elegante do Teorema de Perron-Frobenius pode ser encontrada em [25]. O Teorema de Perron-Frobenius tem aplicação nas mais variadas áreas, como por exemplo Equações Diferenciais Ordinárias e Parciais, Equações Integrais, Economia, Pesquisa Operacional, Cadeias de Markov, Probabilidade e Estatística.

Em 1968, David Ruelle define em [26] o Operador de Transferência, cuja ideia básica é baseada no método da matriz de transferência introduzido por Kramers e Wannier e, independentemente, por Montroll para calcular explicitamente funções de partição em Mecânica Estatística. O Operador de Transferência, também conhecido como Operador de Ruelle, generaliza a matriz de Perron-Frobenius para espaços de dimensão infinita. Assim como a matriz, o operador possui um autovalor maximal, simples e estritamente positivo associado a uma autofunção também positiva. O operador de transferência é definido como

$$L_f(w)(x) = \sum_{\sigma y = x} e^{f(y)} w(y),$$

onde σ é a transformação *shift* e f, w são funções satisfazendo certas condições que serão explicitadas no Capítulo 2. Supondo que $\lambda > 0$ seja o autovalor maximal mencionado acima e $h > 0$ a auto-função associada a λ, temos $L_f(h) = \lambda h$. O operador dual L_f^* satisfaz $L_f^*(\mu) = \lambda\mu$ para alguma medida de probabilidade μ, e a medida de probabilidade dada por $\nu = h\mu$ é invariante pela transformação f, ou seja, $\nu(A) = \nu(f^{-1}(A))$ para todo A boreleano do espaço em questão. Além disso, ν é uma medida de Gibbs para a transformação f.

Willian Parry e Mark Pollicott provam este resultado em [21] de maneira muito elegante para a transformação *shift* definida no espaço de Bernoulli $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Nosso objetivo nesse trabalho é tentar entender o comportamento do operador em $\{0,1\}^{\mathbb{N}^2}$. De fato, a transformação *shift* definida em $\{0,1\}^{\mathbb{N}^2}$ é uma ação do semigrupo $(\mathbb{N}^2, +)$ dada por $(m,n) \to \sigma^{(m,n)}$ com $\sigma^{(m_1+m_2, n_1+n_2)} = \sigma^{(m_1,n_1)} \circ \sigma^{(m_2,n_2)}$, onde $\sigma^{(m,n)}$ pode ser decomposto como $\sigma^{(m,n)} = \sigma^{m(1,0)} \circ \sigma^{n(0,1)}$ em duas transformações $\sigma^{(1,0)}$ e $\sigma^{(0,1)}$, logo definiremos também dois operadores de transferência, um para cada transformação. Cada transformação *shift* $\sigma^{(1,0)}$ e $\sigma^{(0,1)}$ deixa de ter apenas duas pré-imagens e passa a ter um número não enumerável de pré-imagens, o que torna a soma na definição de cada um dos operadores em uma integral, o que exigirá uma medida *a priori*.

A automedida do operador normalizado obtido pela composição dos dois operadores de transferência é invariante para ambos os shifts e é um estado de equilíbrio. Estados de Gibbs, estados de equilíbrio e as possíveis relações entre estes estados em subshifts são estudados desde a década de 60. Roland L. Dobrushin [9] mostra, em 1968, que em condições, qualquer estado de Gibbs invariante por translações é um estado de equilíbrio. Em 1969, Oscar Lanford e David Ruelle mostram, em [15], que, em condições, todo estado de equilíbrio é um estado de Gibbs. Em [19] há um resumo detalhado desses fatos. Além desses, outros trabalhos que devem ser citados são [1], [5], [20].

No capítulo 1, introduzimos uma nova métrica d que, embora não seja equivalente, gera a mesma topologia da métrica usual. Essa métrica d é fundamental na obtenção de propriedades de cohomologia.

No capítulo 2, introduzimos brevemente, mas de maneira formal, o Teorema de Ruelle-Perron-Frobenius mencionado acima. Definimos os operadores de transferência com um determinado potencial para as transformações $\sigma^{(1,0)}$ e $\sigma^{(0,1)}$ e provamos algumas propriedades, como o Teorema de Ruelle-Perron-Frobenius, a existência da medida de probabilidade invariante oriunda do operador dual e mostramos que tal medida é um estado de Gibbs e um estado de equilíbrio, isto feito para cada operador separadamente.

No capítulo 3, provamos propriedades fundamentais de cohomologia. Como sabido, o operador de transferência se resume ao operador inverso à esquerda do operador de Koopman quando consideramos shifts bilaterais, logo se faz necessário um procedimento que converta funções definidas em $\{0,1\}^{\mathbb{Z}^2}$ para funções definidas em $\{0,1\}^{\mathbb{N}^2}$ de maneira que os operadores de transferência, quando aplicados nessas funções, façam sentido.

No capítulo 4, definimos o operador de transferência composto como a composição dos dois operadores de transferência trabalhados no capítulo 2. Usando propriedades lineares e a comutatividade desses operadores, podemos estudar seus autovalores, autofunções e automedidas usando os resultados obtidos no capítulo 2. Provamos que a automedida do operador composto normalizado é uma medida de Gibbs e um estado de equilíbrio. Os primeiros 4 capítulos foram construídos em parceria com Alexandre Tavares Baraviera e Eduardo Garibaldi.

No capítulo 5, analisamos algumas propriedades básicas de duas transformações de blocos no espaço de Bernoulli $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. O resultado mais trabalhoso deste capítulo é a prova combinatória de mistura do sistema dinâmico (M,μ) onde M é a transformação *majority rule* e μ é a media de Bernoulli $B(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. Esta transformação M tem motivação oriunda da física, sendo uma aplicação de grupo de renormalização da Mecânica Estatística. Os resultados do capítulo 4 foram construídos no espaço de Bernoulli $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, mas boa parte dos resultados ainda valem em $\{0,1\}^{\mathbb{N}^2}$, e pretendemos estendê-los futuramente. O capítulo 5 é uma construção conjunta com Alexandre Tavares Baraviera, Fagner Bernardini Rodrigues e Lucas Spillere Barchinski.

Capítulo 1

Métricas em $\{0,1\}^{\mathbb{Z}^2}$

Considere o conjunto $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2}$ e a família de aplicações $\sigma^{(n,m)} : \Omega \to \Omega$, para $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$ definida por $\sigma^{(n,m)}(x_{i,j}) = x_{(i+n,j+m)}$, correspondendo aos shifts completos, que são aplicações bijetivas. Claramente esta família é gerada por $T = \sigma^{e_1}$ e $S = \sigma^{e_2}$ e satisfaz $S \circ T = T \circ S$.

Considere também o conjunto $\Omega^+ = \{0,1\}^{\mathbb{N}^2}$ e as mesmas aplicações acima definidas. Neste caso, elas não são bijeções, são apenas aplicações sobrejetivas com infinitas pré-imagens.

Dados $\theta \in (0,1)$ fixo e arbitrário e $x, y \in \Omega$, tome $N(x,y)$ como sendo $N(x,y) = \min\{|j|_\infty : x_j \neq y_j\}$ onde $j = (j_1, j_2) \in \mathbb{Z}^2$ e $|j|_\infty = \max\{|j_1|, |j_2|\}$. Então

$$d_\theta(x,y) = \begin{cases} \theta^{N(x,y)}, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}.$$

A família das métricas d_θ é compatível com a topologia produto. Podemos introduzir outra métrica que será útil no que se segue. Defina

$$d_2(x,y) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} \frac{(1 - \delta_{x_j, y_j})}{2^{|j|_1}}$$

onde $j = (j_1, j_2) \in \mathbb{Z}^2$, $|j|_1 = |j_1| + |j_2|$ e $\delta_{a,b} = \begin{cases} 1 & \text{se } a = b \\ 0 & \text{se } a \neq b \end{cases}$.

De fato, d_2 está bem definida, uma vez que,

$$\begin{aligned} d_2(x,y) &= \sum_{j_1, j_2 \geq 0} \frac{(1 - \delta_{x_j, y_j})}{2^{|j_1| + |j_2|}} \leq \sum_{j_1, j_2 \geq 0} \frac{1}{2^{|j_1| + |j_2|}} = \sum_{j_1, j_2 \geq 0} \frac{1}{2^{|j_1|}} \frac{1}{2^{|j_2|}} \\ &= \sum_{j_1 \geq 0} \frac{1}{2^{|j_1|}} \sum_{j_2 \geq 0} \frac{1}{2^{|j_2|}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 4 < +\infty. \end{aligned}$$

Proposição 1.0.1. *Valem as seguintes afirmações:*

(i) d_2 é uma métrica,

(ii) para todo $x, y \in \Omega$, temos

$$(d_{\frac{1}{2}}(x,y))^2 \leq d_2(x,y) \leq d_{\frac{1}{2}}(x,y)(6 - 4\log_2 d_{\frac{1}{2}}(x,y)).$$

Demonstração. (i) De fato, para $x, y, z \in \Omega$, temos

$$d_2(x,y) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} \frac{(1-\delta_{x_j,y_j})}{2^{|j|_1}} \geq 0$$

pois $1-\delta_{x_j,y_j} \geq 0$, para todo $j \in \mathbb{Z}^2$. Se $x = y$ então $\delta_{x_j,y_j} = 1$, para todo $j \in \mathbb{Z}^2$, logo se $x = y$ temos $d_2(x,y) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} \frac{(1-\delta_{x_j,y_j})}{2^{|j|_1}} = 0$. Claramente,

$$d_2(x,y) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} \frac{(1-\delta_{x_j,y_j})}{2^{|j|_1}} = \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} \frac{(1-\delta_{y_j,x_j})}{2^{|j|_1}} = d_2(y,x).$$

Além disso, para a desigualdade triangular, considere

$$\begin{aligned}
\delta_{x_j,y_j} + \delta_{y_j,z_j} &= \begin{cases} 1 & \text{se } x_j = y_j \\ 0 & \text{se } x_j \neq y_j \end{cases} + \begin{cases} 1 & \text{se } y_j = z_j \\ 0 & \text{se } y_j \neq z_j \end{cases} \\
&= \begin{cases} 2 & \text{se } x_j = y_j = z_j \\ 1 & \text{se } (x_j \neq y_j \wedge y_j = z_j) \vee (x_j = y_j \wedge y_j \neq z_j) \\ 0 & \text{se } x_j \neq y_j \text{ e } y_j \neq z_j \end{cases},
\end{aligned}$$

então $2 - (\delta_{x_j,y_j} + \delta_{y_j,z_j}) \geq 1 - \delta_{x_j,z_j}$, portanto

$$\begin{aligned}
d_2(x,y) + d_2(y,z) &= \sum_{j \in \mathbb{N}^2} \frac{(1-\delta_{x_j,y_j})}{2^{|j|_1}} + \sum_{j \in \mathbb{N}^2} \frac{(1-\delta_{y_j,z_j})}{2^{|j|_1}} \\
&= \sum_{j \in \mathbb{N}^2} \frac{(2-(\delta_{x_j,y_j} + \delta_{y_j,z_j}))}{2^{|j|_1}} \\
&\geq \sum_{j \in \mathbb{N}^2} \frac{(1-\delta_{x_j,z_j})}{2^{|j|_1}} = d_2(x,z).
\end{aligned}$$

(ii)Temos

$$|j|_\infty = \max\{|j_1|, |j_2|\} \leq |j_1| + |j_2| = |j|_1 \leq \max\{|j_1|, |j_2|\} + \max\{|j_1|, |j_2|\} = 2|j|_\infty,$$

logo temos $|j|_\infty \leq |j|_1 \leq 2|j|_\infty$. Assim,

$$\frac{1}{2^{2|j|_\infty}} = \left(\frac{1}{2^{|j|_\infty}}\right)^2 \leq \frac{1}{2^{|j|_1}},$$

logo,

$$d_{\frac{1}{2}}(x,y) = \left(\frac{1}{2}\right)^{N(x,y)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{|j|_\infty} = \frac{1}{2^{|j|_\infty}},$$

para um $j \in \mathbb{N}^2$ com $|j|_\infty = N(x,y) = \min\{|k|_\infty : x_k \neq y_k\}$. De onde vem

$$\left(d_{\frac{1}{2}}(x,y)\right)^2 = \left(\frac{1}{2^{|j|_\infty}}\right)^2 \leq \frac{1}{2^{|j|_1}} \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \frac{(1-\delta_{x_k,y_k})}{2^{|k|_1}} = d_2(x,y).$$

Considere os seguintes fatos:

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 0}\frac{(2k+1)-2\log_2 d_{\frac{1}{2}}(x,y)}{2^k} &= \sum_{k\geq 0}\frac{2k+1}{2^k}-\sum_{k\geq 0}\frac{2\log_2 d_{\frac{1}{2}}(x,y)}{2^k} \\ &\leq 6-2\log_2 d_{\frac{1}{2}}(x,y)\sum_{k\geq 0}\frac{1}{2^k} \\ &= 6-4\log_2 d_{\frac{1}{2}}(x,y).\end{aligned} \tag{1.1}$$

Como $d_{\frac{1}{2}}(x,y)=\frac{1}{2^{N(x,y)}}$, logo

$$\log_2 d_{\frac{1}{2}}(x,y)=-N(x,y)\log_2 2=-N(x,y),$$

e daí $N(x,y)=-\log_2 d_{\frac{1}{2}}(x,y)$. Mas $N(x,y)=\min\{|k|_\infty : x_k\neq y_k\}\leq |j|_\infty$, então $s=|j|_\infty\geq -\log_2 d_{\frac{1}{2}}(x,y)$. Como $1-\delta_{x_j,y_j}\leq 1$, temos

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}^2}\frac{1-\delta_{x_j,y_j}}{2^{|j|_\infty}}\leq\sum_{j\in\mathbb{Z}^2}\frac{1}{2^{|j|_\infty}}=\sum_{s\geq -\log_2 d_{\frac{1}{2}}(x,y)}\ \sum_{|j|_\infty=s}\frac{1}{2^{|j|_\infty}}, \tag{1.2}$$

onde

$$\sum_{|j|_\infty=s}\frac{1}{2^{|j|_\infty}}=\frac{2s+1}{2^s}.$$

Considerando a mudança de variáveis $s':=s+\log_2 d_{\frac{1}{2}}(x,y)$, vem

$$\frac{2s+1}{2^s}=\frac{2(s'-\log_2 d_{\frac{1}{2}}(x,y))+1}{2^{(s'-\log_2 d_{\frac{1}{2}}(x,y))}}=d_{\frac{1}{2}}(x,y)\frac{(2s'+1)-2\log_2 d_{\frac{1}{2}}(x,y)}{2^{s'}}. \tag{1.3}$$

Com efeito,

$$\begin{aligned}d_2(x,y) &= \sum_{j\in\mathbb{Z}^2}\frac{1-\delta_{x_j,y_j}}{2^{|j|_\infty}}\overset{(1.2)}{\leq}\sum_{s\geq -\log_2 d_{\frac{1}{2}}(x,y)}\ \sum_{|j|_\infty=s}\frac{1}{2^{|j|_\infty}}=\sum_{s\geq -\log_2 d_{\frac{1}{2}}(x,y)}\frac{2s+1}{2^s} \\ &\overset{(1.3)}{=} d_{\frac{1}{2}}(x,y)\sum_{s'\geq 0}\frac{2s'+1-2\log_2 d_{\frac{1}{2}}(x,y)}{2^{s'}}\overset{(1.1)}{\leq} d_{\frac{1}{2}}(x,y)(6-4\log_2 d_{\frac{1}{2}}(x,y)).\end{aligned}$$

Portanto, vale

$$(d_{\frac{1}{2}}(x,y))^2\leq d_2(x,y)\leq d_{\frac{1}{2}}(x,y)(6-4\log_2 d_{\frac{1}{2}}(x,y)).\ \blacksquare$$

Proposição 1.0.2. *As métricas d_2 e $d_{\frac{1}{2}}$ geram a mesma topologia em $\{0,1\}^{\mathbb{Z}^2}$, isto é, determinam os mesmos conjuntos abertos. Assim, d_2 também é compatível com a topologia produto.*

Demonstração. Vamos mostrar que as topologias τ_{d_2} e $\tau_{d_{\frac{1}{2}}}$ são equivalentes, ou seja, $\tau_{d_2}\leq\tau_{d_{\frac{1}{2}}}$ e $\tau_{d_2}\geq\tau_{d_{\frac{1}{2}}}$. De fato, sejam $r>0$ e $x_0\in\Omega$, então

$$B_{d_{\frac{1}{2}}}(x_0,r)=\{x\in\Omega : d_{\frac{1}{2}}(x,x_0)<r\},$$

e temos $d_2(x, x_0) < r(6 - 4\log_2 r)$ se, e só se,

$$r > d_{\frac{1}{2}}(x, x_0) \geq \frac{d_2(x, x_0)}{6 - 4\log_2 d_{\frac{1}{2}(x,x_0)}} \geq \frac{d_2(x, x_0)}{6 - 4\log_2 r}.$$

Logo, para todo aberto $B_{d_{\frac{1}{2}}}(x_0, r)$ em $\tau_{d_{\frac{1}{2}}}$ existe um aberto $B_{d_2}(x_0, r(6 - 4\log_2 r))$ em τ_{d_2} tal que $B_{d_2}(x_0, r(6 - 4\log_2 r)) \subset B_{d_{\frac{1}{2}}}(x_0, r)$, e daí $\tau_{d_{\frac{1}{2}}} \leq \tau_{d_2}$. Por outro lado, considere $s > 0$ e $x_0 \in \Omega$. Temos $B_{d_2}(x_0, s) = \{x \in \Omega : d_2(x, x_0) < s\}$. Assim, vale

$$s > d_2(x, x_0) \geq (d_{\frac{1}{2}}(x, x_0))^2 \Leftrightarrow d_{\frac{1}{2}}(x, x_0) < s^{\frac{1}{2}}.$$

Dessa forma, para todo aberto $B_{d_2}(x_0, s)$ em τ_{d_2} existe um aberto $B_{d_{\frac{1}{2}}}(x_0, s^{\frac{1}{2}})$ em $\tau_{d_{\frac{1}{2}}}$ tal que $B_{d_{\frac{1}{2}}}(x_0, s^{\frac{1}{2}}) \subset B_{d_2}(x_0, s)$, logo $\tau_{d_2} \leq \tau_{d_{\frac{1}{2}}}$. Portanto $\tau_{d_2} \equiv \tau_{d_{\frac{1}{2}}}$. ■

Capítulo 2

Operadores de Transferência

2.1 Operador de Transferência unidimensional

Sejam $X = \{1,\ldots,k\}^{\mathbb{Z}}$ e $X^+ = \{1,\ldots,k\}^{\mathbb{N}}$. Seja A uma matriz $k \times k$ de zeros e uns ($k \geq 2$). Definimos

$$X = X_A = \{x = (x_n)_{-\infty}^{+\infty} : x_n \in \{1,\ldots,k\}, n \in \mathbb{Z}, A(x_n, x_{n+1}) = 1\}.$$

Se $\{1,\ldots,k\}$ é dado com a topologia discreta, então X_A é compacto, pelo teorema de Tychonov, e tem dimensão topológica zero na correspondente topologia produto. O *shift* é definido por $\sigma((x)_n) = (x)_{n+1}$, e o par (X,σ) é chamado *shift de tipo finito*.

Assumiremos que A é *irredutível*, isto é, para cada (i,j), existe $n \geq 1$ tal que $A^n(i,j) > 0$, onde $A^n = A \times \cdots \times A$, n vezes. Nessas condições, definimos o *período d* de A como sendo o maior divisor comum de $\{n \in \mathbb{N} : A^n(i,j) > 0, 1 \leq i,j \leq k\}$. Quando $d = 1$, A é chamada *aperiódica*.

Para todo shift bilateral de tipo finito nós podemos associar um shift unilateral de tipo finito (X_A^+, σ_A^+):

$$X^+ = X_A^+ = \{x = (x_n)_{n=0}^{\infty} : A(x_n, x_{n+1}) = 1, n \geq 0\}$$

e $\sigma^+ = \sigma_A^+$. Como antes, X^+ é um espaço compacto, pelo teorema de Tychonov, e de dimensão topológica zero com a topologia produto. Um caso particular seria considerar simplesmente o espaço $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ e $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, ou seja, não há palavras proibidas.

Uma diferença essencial entre o shift bilateral e o unilateral é que o shift bilateral $\sigma : X \to X$ é um homeomorfismo, enquanto o shift unilateral $\sigma^+ : X^+ \to X^+$ não é invertível (mas apenas um homeomorfismo local com $\sharp(\sigma^+)^{-1}(x) \leq k$). Então existe uma sobrejeção natural contínua $\pi : X \to X^+$ com $\pi(x) = y$ para $y_n = x_n$ quando $n \geq 0$, isto é, apaga os termos x_n para $n < 0$. Esta sobrejeção claramente satisfaz a identidade $\pi\sigma = \sigma^+\pi$.

Para um ponto $x = (x_n)_{n=-\infty}^{\infty} \in X$ descrevemos $(x_n)_{n=-\infty}^{0}$ com sendo o "passado", x_0 com sendo o presente, e $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ como sendo o futuro. Para simplificar nossa notação, escreveremos σ para ambos σ, σ^+.

Dados $0 < \theta < 1$ e $N(x,y) = \min\{|i| : x_i \neq y_i\}$, definimos a métrica d_θ sobre X por

$$d_\theta(x,y) = \begin{cases} \theta^{N}(x,y), & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}.$$

Dados $x, y \in X$, para uma função contínua $f : X \to \mathbb{R}$ e $n \geq 0$, definimos a variação de f por

$$var_n f = \sup\{|f(x) - f(y)| : x_i = y_i, |i| < n\}.$$

De fato, $|f(x) - f(y)| \leq C d_\theta(x, y)$ ocorre, para algum $C > 0$, se, e somente se, $var_n f \leq C\theta^n$, para $n \in \mathbb{N}$. Seja

$$\mathbb{F}_\theta = \mathbb{F}_\theta(X) = \{f : X \to \mathbb{R} : \exists C > 0 \text{ tal que } var_n f \leq C\theta^n, \ \forall\, n \in \mathbb{N}\},$$

logo $\mathbb{F}_\theta(X)$ é o espaço das funções de Lipschitz com respeito à métrica d_θ. Para $f \in \mathbb{F}_\theta(X)$, sejam $|f|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$ e $|f|_\theta = \sup\left\{\frac{var_n f}{\theta^n} : n \geq 0\right\}$. Logo, podemos definir uma norma sobre $\mathbb{F}_\theta$ por $\|f\|_\theta = |f|_\infty + |f|_\theta$. Note que $|f|_\theta$ é realmente a menor constante de Lipschitz.

O caso de X^+ é similar. Dado $0 < \theta < 1$, e $N(x, y) = \min\{i \in \mathbb{N} : x_i \neq y_i\}$, defina d_θ^+ sobre X^+ por

$$d_\theta^+(x, y) = \begin{cases} \theta^{N(x,y)}, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}.$$

Dados $x, y \in X^+$, para uma função contínua $f : X^+ \to \mathbb{R}$ e $n \geq 0$, definimos

$$var_n f = \sup\{|f(x) - f(y)| : x_i = y_i, 0 \leq i < n\},$$

$|f|_\theta = \sup\left\{\frac{var_n f}{\theta^n} : n \geq 0\right\}$ e $|f|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in X^+\}$. Com isso, definimos

$$\mathbb{F}_\theta^+ = \mathbb{F}_\theta^+(X^+) = \{f : X^+ \to \mathbb{R} : \exists C > 0 \text{ tal que } var_n f \leq C\theta^n, \ \forall\, n \in \mathbb{N}\},$$

e novamente defina a norma $\|\cdot\|_\theta$ em $\mathbb{F}_\theta^+$ por $\|f\|_\theta = |f|_\infty + |f|_\theta$.

As demonstrações dos próximos resultados constam em [21].

Proposição 2.1.1. *[21] Os espaços $(\mathbb{F}_\theta, \|\ \|_\theta)$ e $(\mathbb{F}_\theta^+, \|\ \|_\theta)$ são espaços de Banach.*

Definição 2.1.2. Duas funções são ditas *cohomólogas* ($f \sim g$) se existe uma função contínua h tal que $f = g + h \circ \sigma - h$. Esta é uma relação de equivalência em $\mathbb{F}_\theta(X)$. Uma função que é cohomóloga a função identicamente nula é chamada de *cobordo*.

De fato, na definição de cohomólogo, pode-se escolher sempre $h \in \mathbb{F}_\theta(X)$.

Proposição 2.1.3. *[21] Se $f \in \mathbb{F}_\theta(X)$ então existem $g, h \in \mathbb{F}_{\theta^{\frac{1}{2}}}(X)$ tais que $f = g + h - h \circ \sigma$ e $g(x) = g(y)$ sempre que $x_i = y_i$ para todo $i \geq 0$, isto é, g só depende das coordenadas "futuras".*

A aplicação da proposição $f \overset{W}{\mapsto} g$ é uma aplicação linear contínua de $\mathbb{F}_\theta$ em $\mathbb{F}_{\theta^{\frac{1}{2}}}$. Além disso, g pode ser identificada com um elemento de $\mathbb{F}^+_{\theta^{\frac{1}{2}}}$. Quando $f \in \mathbb{F}_\theta$ já depende das coorenadas futuras, então $W(f) = f$, com

$$\mathbb{F}_\theta(X^+) \hookrightarrow \mathbb{F}_\theta(X) \overset{W}{\to} \mathbb{F}_{\theta^{\frac{1}{2}}}(X^+). \tag{2.1}$$

Seja $f \in \mathbb{F}_\theta^+$ e defina o *operador de Ruelle-Perron-Frobenius* $L_f : \mathbb{F}_\theta^+ \to \mathbb{F}_\theta^+$, ou mais geralmente $L_f : C(X^+) \to C(X^+)$, para $w \in \mathbb{F}_\theta^+$, por

$$L_f(w)(x) = \sum_{\sigma y = x} e^{f(y)} w(y).$$

O operador L_f é um operador linear contínuo, e se f é real e $L_f 1 = 1$, dizemos que f ou L_f é *normalizado*.

Proposição 2.1.4 (Teorema de Ruelle-Perron-Frobenius). *[21] Seja $f \in \mathbb{F}_\theta^+$ uma função real e suponha que A é aperiódica.*

(i) Existe um autovalor positivo, maximal e simples β de $L_f : C(X^+) \to C(X^+)$ com uma autofunção correspondente estritamente positiva $h \in \mathbb{F}_\theta^+$.

(ii) O espectro de L_f menos o autovalor β está contido no disco $D(0,r)$ de raio $r < \beta$.

(iii) Existe uma única probabilidade μ tal que $L_f^*\mu = \beta\mu$, isto é,

$$\int L_f v d\mu = \beta \int v d\mu, \quad \forall v \in C(X^+).$$

(iv) Para todo $v \in C(X^+)$, existe o limite uniforme

$$\frac{1}{\beta^n} L_f^n v \to h \int v d\mu \quad e \quad \int h d\mu = 1.$$

Corolário 2.1.5. *[21] A medida $\nu = h\mu$ é invariante por f. Além disso, ν é uma medida de Gibbs com relação a transformação f.*

2.2 Operadores de Transferência bidimensionais

Considere o conjunto $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2}$ e a família de aplicações $\sigma^{(n,m)} : \Omega \to \Omega$, para $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$ definida por $\sigma^{(n,m)}(x_{i,j}) = x_{(i+n,j+m)}$, correspondendo aos shifts completos, que são aplicações bijetivas. Claramente esta família é gerada por $T = \sigma^{e_1}$ e $S = \sigma^{e_2}$ e satisfaz $S \circ T = T \circ S$.

Considere também o conjunto $\Omega^+ = \{0,1\}^{\mathbb{N}^2}$ e as aplicações $\sigma_+^{(n,m)} : \Omega \to \Omega$, para $(n,m) \in \mathbb{N}^2$ definidas por $\sigma_+^{(n,m)}(x_{i,j}) = x_{(i+n,j+m)}$. Neste caso, elas não são bijeções, são apenas aplicações sobrejetivas com infinitas pré-imagens. Denotaremos ambas as famílias de aplicações por $\sigma^{(n,m)}$ fazendo a referencia a qual estaremos utilizando em cada caso.

Assim como no caso unidimensional, podemos introduzir uma distância da seguinte forma: Dado $\theta \in (0,1)$ fixo e arbitrário, dados $x,y \in \Omega$, tome $N(x,y)$ como sendo $N(x,y) = \min\{|j|_\infty : x_j \neq y_j\}$ onde $j = (j_1, j_2) \in \mathbb{N}^2$ e $|j|_\infty = \max\{|j_1|, |j_2|\}$. Então

$$d_\theta(x,y) = \begin{cases} \theta^{N(x,y)}, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}.$$

Tomando $f : \Omega \to \mathbb{R}$ contínua, defina

$$var_N f := \sup\{|f(x) - f(y)| : x_{ij} = y_{ij}; |i|, |j| < N\},$$

$$\mathbb{F}_\theta(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} : \exists C > 0 \text{ tal que } var_n f \leq C\theta^n, \forall\, n \in \mathbb{N}\},$$

$$\mathbb{F}_\theta(\Omega^+) = \{f : \Omega^+ \to \mathbb{R} : \exists C > 0 \text{ tal que } var_n f \leq C\theta^n, \forall\, n \in \mathbb{N}\},$$

e para cada $f \in \mathbb{F}_\theta(\Omega)$ defina $|f|_\infty = \sup_{x\in\Omega} |f(x)|$ e $|f|_\theta = \sup_{n\geq 0} \left\{\frac{var_n f}{\theta^n}\right\}$, respectivamente para Ω^+. Defina ainda a norma $\|\cdot\|_\theta$ dada por $\|f\|_\theta := |f|_\infty + |f|_\theta$.

Proposição 2.2.1. *A norma $\|\cdot\|_\theta$ torna $\mathbb{F}_\theta(\Omega)$ e $\mathbb{F}_\theta(\Omega^+)$ espaços de Banach.*

Considerando o espaço métrico (Ω, d) com $d = d_2$ definida no capítulo 1, defina o espaço das funções Hölder contínuas como usualmente, para $0 < \alpha \leq 1$, por

$$\mathcal{H}^\alpha(\Omega) := \mathcal{H}^\alpha(\Omega, d) = \{\varphi : \Omega \to \mathbb{R} : \exists C > 0 \text{ tal que } |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq Cd(x,y)^\alpha\},$$

munindo $\mathcal{H}^\alpha(\Omega)$ com a norma $\|\cdot\|_\alpha = |\cdot|_\infty + [\cdot]_\alpha$, onde $|\varphi|_\infty = \sup_{x\in\Omega} |\varphi(x)|$ é a norma do supremo e $[\varphi]_\alpha = \sup\limits_{w \neq z} \dfrac{|\varphi(w) - \varphi(z)|}{d(w,z)^\alpha}$ é uma semi-norma.

Proposição 2.2.2. *O espaço $(\mathcal{H}^\alpha(\Omega), \|\cdot\|_\alpha)$ é um espaço de Banach.*

Os mesmos resultados valem para

$$\mathcal{H}^\alpha_+(\Omega) := \mathcal{H}^\alpha(\Omega^+, d) = \{\varphi : \Omega^+ \to \mathbb{R} : \exists C > 0 \text{ tal que } |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq Cd(x,y)^\alpha\}.$$

O espaço $\mathbb{F}_\theta$ é espaço de Hölder com $\alpha = 1$ munido com a norma $\|\cdot\|_\theta = |\cdot|_\infty + |\cdot|_\theta$ que, em momentos oportunos, pode ser denotado por $\mathbb{F}_\theta(\Omega) = \mathcal{H}(\Omega, d_\theta)$. Consideramos, em particular, $\theta = \frac{1}{2}$. Como em (2.1), temos

$$\mathcal{H}^\alpha_+(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{H}^\alpha(\Omega) \xrightarrow{W} \mathcal{H}^{\frac{\alpha}{4}}_+(\Omega),$$

com $W : \mathcal{H}^\alpha(\Omega) \to \mathcal{H}^{\frac{\alpha}{4}}_+(\Omega)$ satisfazendo $W(g) = g$ quando g depende somente das coordenadas "futuras". A definição precisa de W e este resultado serão provados no capítulo 3.

Lema 2.2.3. *Para $\theta = \frac{1}{2}$ e $0 < \alpha \leq 1$, temos $\mathbb{F}_\theta(\Omega) \subset \mathcal{H}^{\frac{\alpha}{2}}(\Omega)$.*

Demonstração. De fato, dada $f \in \mathbb{F}_\theta(\Omega)$, temos para $x, y \in \Omega$, $|f(x) - f(y)| \leq Cd_\theta(x,y)$. Pela Proposição 1.0.1, vale $d_\theta(x,y) \leq d(x,y)^{\frac{1}{2}}$. Como $d(x,y) \leq 1$, então $d(x,y)^{\frac{1}{2}} \leq d(x,y)^{\frac{\alpha}{2}}$, logo temos $|f(x) - f(y)| \leq Cd(x,y)^{\frac{\alpha}{2}}$, de onde $f \in \mathcal{H}^{\frac{\alpha}{2}}(\Omega)$. ■

Seja μ_0 uma medida de probabilidade sobre $\{0,1\}$, ou seja, $\mu_0(0) + \mu_0(1) = 1$. Defina sobre $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ a medida *a priori* dada pela medida produto $\mu = \prod_i \mu_0$.

Definimos os operadores de transferência bidimensionais como sendo os operadores $\mathcal{L}_{e_1}, \mathcal{L}_{e_2} : \mathbb{F}_\theta(\Omega^+) \to \mathbb{F}_\theta(\Omega^+)$ dados por

$$\mathcal{L}_{e_1}\varphi(x) = \int_{y\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}} \varphi(yx)d\nu(y) \quad \text{e}$$

$$\mathcal{L}_{e_2}\varphi(x) = \int_{z\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}} \varphi\left(\frac{x}{z}\right) d\nu(z)$$

onde yx e $\frac{x}{z}$ são dados, respectivamente, por

$$\begin{array}{ccccc}
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \iddots \\
y_n & x_{(0,n)} & x_{(1,n)} & x_{(2,n)} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\
y_2 & x_{(0,2)} & x_{(1,2)} & x_{(2,2)} & \cdots \\
y_1 & x_{(0,1)} & x_{(1,1)} & x_{(2,1)} & \cdots \\
y_0 & x_{(0,0)} & x_{(1,0)} & x_{(2,0)} & \cdots
\end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccccc}
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \iddots \\
x_{(0,n)} & x_{(1,n)} & x_{(2,n)} & x_{(3,n)} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\
x_{(0,1)} & x_{(1,1)} & x_{(2,1)} & x_{(3,1)} & \cdots \\
x_{(0,0)} & x_{(1,0)} & x_{(2,0)} & x_{(3,0)} & \cdots \\
z_0 & z_1 & z_2 & z_3 & \cdots
\end{array}$$

para $y, z \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

Definindo $\psi_1(x) := \int_{z\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}} \varphi\left(\frac{x}{z}\right) d\nu(z)$ e $\psi_2(x) := \int_{y\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}} \varphi(yx) d\nu(y)$, considere

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{e_1} \circ \mathcal{L}_{e_2}\varphi(x) &= \mathcal{L}_{e_1}\left(\int_{z\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}} \varphi\left(\frac{x}{z}\right) d\nu(z)\right) \\
&= \mathcal{L}_{e_1}(\psi_1(x)) \\
&= \int_{y\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}} \psi_1(yx) d\nu(y) \\
&= \int_{y\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}} \int_{z\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}} \varphi\left(y\frac{x}{z}\right) d\nu(z) d\nu(y).
\end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{e_2} \circ \mathcal{L}_{e_1}\varphi(x) &= \mathcal{L}_{e_2}\left(\int_{y\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}} \varphi(yx) d\nu(y)\right) \\
&= \mathcal{L}_{e_2}(\psi_2(x)) \\
&= \int_{z\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}} \psi_2\left(\frac{x}{z}\right) d\nu(z) \\
&= \int_{z\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}} \int_{y\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}} \varphi\left(\frac{yx}{z}\right) d\nu(y) d\nu(z).
\end{aligned}$$

Ao efetuarmos as somas de φ sobre todas as possíveis configurações, é indiferente considerarmos em Ω as configurações $\left(\frac{yx}{z}\right)$ ou $\left(y\frac{x}{z}\right)$, uma vez que claramente existe uma bijeção $\left(\frac{y^1x}{z^1}\right) \mapsto \left(y^2\frac{x}{z^2}\right)$ com $z^1_{(0,0)} = y^2_{(0,0)}$, $z^1_{(n,0)} = z^2_{(n-1,0)}$, para $n \geq 1$, $y^1_{(n-1,0)} = y^2_{(n,0)}$, para $n \geq 1$, e $x \in \Omega$ qualquer, embora tenhamos $\phi\left(\frac{yx}{z}\right) \neq \phi\left(y\frac{x}{z}\right)$, $i = 1, 2$, em geral, o que garante

$$\int_{y\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}} \int_{z\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}} \varphi\left(y\frac{x}{z}\right) d\nu(z) d\nu(y) = \int_{z\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}} \int_{y\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}} \varphi\left(\frac{yx}{z}\right) d\nu(y) d\nu(z).$$

Isto prova o seguinte resultado:

Lema 2.2.4. *Temos $\mathcal{L}_{e_1} \circ \mathcal{L}_{e_2} = \mathcal{L}_{e_2} \circ \mathcal{L}_{e_1}$, ou seja, os operadores de transferência comutam.*

2.3 Operadores de Transferência com Potencial

Assim como definimos $\mathcal{L}_{e_1}$ e $\mathcal{L}_{e_2}$, podemos definir, para $f, \varphi \in \mathbb{F}_\theta$, o operador de transferência com um potencial, a saber

$$\mathcal{L}_{f,e_1}(\varphi(x)) = \int_{y\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}} e^{f(yx)} \varphi(yx) d\nu(y) \quad \text{e}$$

$$\mathcal{L}_{f,e_2}(\varphi(x)) = \int_{z\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}} e^{f(\frac{x}{z})} \varphi\left(\frac{x}{z}\right) d\nu(z).$$

Proposição 2.3.1. *O operador de transferência $\mathcal{L}_{f,e_i}$, para $i = 1, 2$, é linear e contínuo em $\mathbb{F}_\theta(\Omega^+)$.*

Demonstração. De fato, o operador é linear, pois para $\varphi, \psi \in \mathbb{F}_\theta(\Omega^+)$, $\gamma \in \mathbb{C}$ e $j \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{f,e_1}(\gamma\varphi+\psi)(x) &= \int e^{f(jx)}(\gamma\varphi+\psi)(jx)d\nu(j)\\ &= \gamma\int e^{f(jx)}\varphi(jx)d\nu(j)+\int e^{f(jx)}\psi(jx)d\nu(j)\\ &= \gamma\mathcal{L}_{f,e_1}\varphi(x)+\mathcal{L}_{f,e_1}\psi(x).\end{aligned}$$

Sem perda de generalidade considere $\mathcal{L}_{f,e_1}1 = 1$. Assim,

$$\begin{aligned}|\mathcal{L}_{f,e_1}\varphi(x)|_\infty &= \left|\int e^{f(jx)}\varphi(jx)d\nu(j)\right|\\ &\leq |\varphi|_\infty\int e^{f(jx)}d\nu(j) = |\varphi|_\infty.\end{aligned} \tag{2.2}$$

Ora, como $f \in \mathbb{F}_\theta$, então $\exp\circ f \in \mathbb{F}_\theta$, logo existe um $k > 0$ tal que

$$\frac{|e^{f(jx)} - e^{f(jy)}|}{\theta^N} \leq k. \tag{2.3}$$

Tomando $x, y \in \Omega^+$ tais que $d(x,y) \leq \theta^N$, logo $x_j = y_j$ para todo $0 \leq j \leq N$, e temos

$$\begin{aligned}\frac{|\mathcal{L}_{f,e_1}(\varphi(x)) - \mathcal{L}_{f,e_1}(\varphi(y))|}{\theta^N} &= \frac{1}{\theta^N}\left|\int(e^{f(jx)}\varphi(jx)-e^{f(jy)}\varphi(jy))d\nu(j)\right|\\ &\leq \frac{1}{\theta^N}\int|e^{f(jx)}\varphi(jx)-e^{f(jy)}\varphi(jy)|d\nu(j)\\ &= \int\frac{|e^{f(jx)}\varphi(jx)-e^{f(jy)}\varphi(jx)+e^{f(jy)}\varphi(jx)-e^{f(jy)}\varphi(jy)|}{\theta^N}d\nu(j)\\ &\leq \int\frac{|e^{f(jx)}-e^{f(jy)}||\varphi(jx)|}{\theta^N}d\nu(j)+\int\frac{|e^{f(jy)}||\varphi(jx)-\varphi(jy)|}{\theta^N}d\nu(j)\\ &\overset{(2.3)}{\leq} k|\varphi|_\infty+\int\frac{|e^{f(jy)}||\varphi(jx)-\varphi(jy)|}{\theta^N}d\nu(j)\\ &\leq k|\varphi|_\infty+\theta|\varphi|_\theta\int e^{f(jy)}d\nu(j) = k|\varphi|_\infty+\theta|\varphi|_\theta\\ &\leq \bar{C}(|\varphi|_\infty+|\varphi|_\theta),\end{aligned}$$

para $\bar{C} = \max\{k, \theta\}$, logo

$$|\mathcal{L}_{f,e_1}\varphi|_\theta = \sup_{N\geq 0}\frac{|\mathcal{L}_f(\varphi(x)) - \mathcal{L}_f(\varphi(y))|}{\theta^N} \leq \bar{C}(|\varphi|_\infty+|\varphi|_\theta).$$

Assim, $|\mathcal{L}_{f,e_1}\varphi|_\theta \leq \bar{C}(|\varphi|_\infty+|\varphi|_\theta)$, e por (2.2) temos

$$\|\mathcal{L}_{f,e_1}\varphi\|_\theta \leq \bar{\bar{C}}(|\varphi|_\infty+|\varphi|_\theta) = \bar{\bar{C}}\|\varphi\|_\theta$$

com $\bar{\bar{C}} = \bar{C}+1$, logo o operador $\mathcal{L}_{f,e_1}$ é contínuo. O mesmo vale para $\mathcal{L}_{f,e_2}$. ∎

Proposição 2.3.2. *Seja* $\Phi \in \mathbb{F}_{\frac{1}{2}}(\Omega)$. *Então existem* $u, \psi \in \mathcal{H}^{\frac{1}{4}}(\Omega, d)$ *tais que*

$$\Phi = \psi + u - u\circ\sigma^{e_1}. \tag{2.4}$$

Além disso, $\psi(x) = \psi(y)$ *se* $x_{|\mathbb{N}\times\mathbb{Z}} = y_{|\mathbb{N}\times\mathbb{Z}}$.

Demonstração. Ver primeira parte da demonstração do Teorema 3.1. ■

Lema 2.3.3 (Desigualdade Básica). *Seja $f \in \mathbb{F}_\theta(\Omega)$. Se $\mathcal{L}_{f,e_1}1 = 1$ então*

$$|\mathcal{L}^n_{f,e_1}\varphi|_\theta \leq C|\varphi|_\infty + \theta^n|\varphi|_\theta$$

para toda $\varphi \in \mathbb{F}_\theta$ e $n \geq 0$. O mesmo vale para $\mathcal{L}^n_{f,e_2}$.

Demonstração. Provemos por indução. Considere um $C_1 > 0$ e escolha $x, y \in \Omega$ com $d(x,y) \leq \theta^N$, logo $x_j = y_j$ para todo $0 \leq j \leq N$. Logo,

$$\frac{|\mathcal{L}_{f,e_1}(\varphi(x)) - \mathcal{L}_{f,e_1}(\varphi(y))|}{\theta^N} \overset{(2.3)}{\leq} k|\varphi|_\infty + \theta|\varphi|_\theta = C_1|\varphi|_\infty + \theta|\varphi|_\theta$$

com $C_1 = k$ e $1 = \mathcal{L}_{f,e_1}1 = \int e^{f(jy)}d\nu(j)$. Portanto temos

$$|\mathcal{L}_{f,e_1}\varphi|_\theta \leq C_1|\varphi|_\infty + \theta|\varphi|_\theta.$$

Suponha que $|\mathcal{L}^n_{f,e_1}\varphi|_\theta \leq C_n|\varphi|_\infty + \theta^n|\varphi|_\theta$, então

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}^{n+1}_{f,e_1}\varphi|_\theta &= |\mathcal{L}^n_{f,e_1}(\mathcal{L}_{f,e_1}\varphi)|_\theta \leq C_n|\mathcal{L}_{f,e_1}\varphi|_\infty + \theta^n|\mathcal{L}_{f,e_1}\varphi|_\theta \\ &\leq C_n|\varphi|_\infty + \theta^n(C_1|\varphi|_\infty + \theta|\varphi|_\theta) \\ &= C_n|\varphi|_\infty + C_1\theta^n|\varphi|_\infty + \theta^{n+1}|\varphi|_\theta \\ &= (C_n + \theta^n C_1)|\varphi|_\infty + \theta^{n+1}|\varphi|_\theta, \end{aligned}$$

com $C_{n+1} = C_n + \theta^n C_1 = \left(\sum_{k=0}^{n}\theta^k\right)C_1 = \left(\frac{1-\theta^{n+1}}{1-\theta}\right)C_1 \leq \frac{C_1}{1-\theta}$, logo $C_{n+1} = \frac{C_1}{1-\theta}$, e temos $|\mathcal{L}^{n+1}_{f,e_1}\varphi|_\theta \leq C_{n+1}|\varphi|_\infty + \theta^{n+1}|\varphi|_\theta$. ■

Pelo Lema 2.2.3, considerando $f \in \mathbb{F}_\theta(\Omega)$ e $\varphi \in \mathbb{F}_\theta(\Omega)$, tanto f quanto φ pertencem a $\mathcal{H}^{\frac{\alpha}{2}}(\Omega, d)$ para $0 < \alpha \leq 1$. Os próximos resultados nos permitem encontrar, para os operadores $\mathcal{L}_{\varphi,e_i}$, um autovalor simples (com multiplicidade algébrica um) e uma autofunção, ambos estritamente positivos. Além disso, encontramos uma automedida associada ao autovalor simples para o operador dual. Os Teoremas 2.1 e 2.2 adaptam resultados de [21].

Teorema 2.1. *Seja $\varphi \in \mathbb{F}_\theta(\Omega^+)$. Então existem um autovalor simples λ e uma autofunção $f \in \mathbb{F}_\theta(\Omega^+)$ associada, com $\lambda > 0$ e $f > 0$, para o operador $\mathcal{L}_{\varphi,e_1}$, ou seja, $\mathcal{L}_{\varphi,e_1}f = \lambda f$.*

Demonstração. Como $f \in \mathbb{F}_\theta(\Omega^+)$ e $\varphi \in \mathbb{F}_\theta(\Omega^+)$, tanto f quanto φ pertencem a $\mathcal{H}^\alpha(\Omega^+, d)$ com $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$. Considere $c \geq \frac{C(\varphi)}{2^\alpha - 1}$ e $x, y \in \Omega^+$ com $d(x,y) \leq 1$. Defina o conjunto

$$\Omega_c := \{f \in \mathcal{H}^\alpha((\Omega^+, d), [0,1]) : f(x) \leq f(y)e^{cd(x,y)^\alpha}\}.$$

Ora, Ω_c é um conjunto convexo e fechado na topologia uniforme. De fato, dados $t \in (0,1)$ e $f, g \in \Omega_c$, temos

$$\begin{aligned} (tf + (1-t)g)(x) &= tf(x) + (1-t)g(x) \\ &\leq tf(y)e^{cd(x,y)^\alpha} + (1-t)g(y)e^{cd(x,y)^\alpha} \\ &= (tf(y) + (1-t)g(y))e^{cd(x,y)^\alpha} \\ &= (tf + (1-t)g)(y)e^{cd(x,y)^\alpha}. \end{aligned}$$

Logo $tf+(1-t)g \in \Omega_c$ e portanto Ω_c é convexo. Uma vez que a constante de Hölder é uniformemente limitada, considere uma sequência de funções $f_n \in \Omega_c$ e $f:(\Omega,d) \to [0,1]$ tais que, para todo $\varepsilon > 0$ existe um $N > 0$ tal que para todo $n \geq N$ tem-se $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, para todo $x \in \Omega$, isto é, $f_n \to f$ uniformemente. Como $f_n \in \Omega_c$, para todo n, tem-se para x_0 fixado com $d(x,x_0)^\alpha < \delta$ que $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon$, para algum $\delta > 0$. Logo, para algum $\delta > 0$ com $d(x,x_0)^\alpha < \delta$ temos $|f(x) - f(x_0)| < 3\varepsilon$, o que nos dá que f é α-Hölder contínua em x_0, e como x_0 é arbitrário, temos f α-Hölder contínua. Além disso,

$$f(x) = \lim f_n(x) \leq \lim f_n(y)e^{cd(x,y)^\alpha} = f(y)e^{cd(x,y^\alpha)},$$

logo $f \in \Omega_c$, e daí Ω_c é fechado. Ora, o conjunto Ω_c é também equicontínuo, pois para $f \in \Omega_c$, temos $\|f\|_\infty \leq 1$ e, para $y \in \Omega^+$ fixado, pelo Teorema do Valor Médio, existe um $z \in \Omega$ com $d(z,y) = td(x,y) + (1-t)d(y,y) = td(x,y)$ para $t \in (0,1)$, logo $kd(x,y) \leq d(z,y) \leq d(x,y)$ para $0 < k \leq t$, tal que

$$\frac{e^{cd(x,y)^\alpha} - 1}{d(x,y)} = (e^{cd(z,y)^\alpha})' = c\alpha e^{cd(z,y)^\alpha} d(z,y)^{\alpha-1} \leq c\alpha k e^{cd(x,y)^\alpha} d(x,y)^{\alpha-1},$$

de onde vem $e^{cd(x,y)^\alpha} - 1 \leq c\alpha k e^{cd(x,y)^\alpha} d(x,y)^\alpha$. Denote $\mathfrak{d} = diam(\Omega)$. Como $x, y \in \Omega^+$ são arbitrários, temos $f(x) \leq f(y)e^{cd(x,y)^\alpha}$ e $f(y) \leq f(x)e^{cd(x,y)^\alpha}$, então se $f(x) \geq f(y)$, temos

$$f(x) - f(y) \leq f(y)e^{cd(x,y)^\alpha} - f(y) \leq \|f\|_\infty (e^{cd(x,y)^\alpha} - 1),$$

e se $f(x) \leq f(y)$, segue

$$f(y) - f(x) \leq f(x)e^{cd(x,y)^\alpha} - f(x) \leq \|f\|_\infty (e^{cd(x,y)^\alpha} - 1),$$

portanto temos

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq \|f\|_\infty (e^{cd(x,y)^\alpha} - 1) \\ &\leq c\alpha k e^{cd(x,y)^\alpha} d(x,y)^\alpha \\ &\leq c\alpha k e^{c\mathfrak{d}^\alpha} d(x,y)^\alpha. \end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema de Arzelà-Ascoli temos Ω_c é compacto na topologia uniforme. Ainda, temos claramente $\Omega_c \subset \mathcal{H}^\alpha(\Omega^+)$. Tomando $N \in \mathbb{N}$ defina, para $f \in \Omega_c$,

$$L_N(f) = \frac{\mathcal{L}_{\varphi,e_1}(f + \frac{1}{N})}{\|\mathcal{L}_{\varphi,e_1}(f + \frac{1}{N})\|_\infty}.$$

De fato, $L_N(\Omega_c) \subset \Omega_c$. Como c foi escolhido de modo que tivéssemos $c \geq \frac{C(\varphi)}{2^\alpha - 1}$, temos que $f \in \Omega_c$ implica $f(ix) \leq f(iy)e^{cd(ix,iy)^\alpha}$ e $\varphi \in \mathcal{H}^\alpha(\Omega^+)$ implica

$$\varphi(ix) \leq \varphi(iy) + C(\varphi)d(ix,iy)^\alpha,$$

assim sendo,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\varphi,e_1}\left(f + \frac{1}{N}\right)(x) &= \int e^{\varphi(ix)} \left(f(ix) + \frac{1}{N}\right) d\mu(i) \\ &\leq e^{(c+C(\varphi))d(ix,iy)^\alpha} \int e^{\varphi(iy)} \left(f(iy) + \frac{1}{N}\right) d\mu(i) \\ &= e^{2^{-\alpha}(c+C(\varphi))d(x,y)^\alpha} \int e^{\varphi(iy)} \left(f(iy) + \frac{1}{N}\right) d\mu(i) \\ &\leq \mathcal{L}_{\varphi,e_1}\left(f + \frac{1}{N}\right)(y)e^{cd(x,y)^\alpha}, \end{aligned}$$

uma vez que

$$
\begin{aligned}
d(ix,iy) &= \sum_{j\in\mathbb{N}^2} \frac{1-\delta_{ix_j,iy_j}}{2^{|j|_1}} = \sum_{j\in\mathbb{N}^2} \frac{1-\delta_{ix_{(j_1,j_2)},iy_{(j_1,j_2)}}}{2^{|j_1|+|j_2|}} \\
&= \sum_{j\in\mathbb{N}^2} \frac{1-\delta_{x_{(j_1-1,j_2)},y_{(j_1-1,j_2)}}}{2^{|j_1|+|j_2|}} = \sum_{j\in\mathbb{N}^2} \frac{1-\delta_{x_{(j_1,j_2)},y_{(j_1,j_2)}}}{2^{|j_1+1|+|j_2|}} \\
&= \sum_{j\in\mathbb{N}^2} \frac{1-\delta_{x_{(j_1,j_2)},y_{(j_1,j_2)}}}{2^{|j_1|+|j_2|+1}} = \frac{1}{2}\sum_{j\in\mathbb{N}^2} \frac{1-\delta_{x_j,y_j}}{2^{|j|_1}} = \frac{1}{2}d(x,y). \qquad (2.5)
\end{aligned}
$$

Portanto, temos que Ω_c é um conjunto invariante por L_N, convexo e compacto. Logo, pelo Teorema do Ponto Fixo de Schauder-Tychonov, existe, para cada $N \in \mathbb{N}$, um $h_N \in \Omega_c$ tal que

$$\mathcal{L}_{\varphi,e_1}\left(h_N + \frac{1}{N}\right) = \lambda_N h_N \text{ onde } \lambda_N = \left\|\mathcal{L}_{\varphi,e_1}\left(h_N + \frac{1}{N}\right)\right\|_\infty .$$

Considere agora f como sendo um ponto de acumulação de $\{h_N\}_{N\in\mathbb{N}}$, que pelo fato de Ω_c ser compacto, $f \in \Omega_c$. Seja $\{h_N\}_{N\in\mathbb{N}'}$ subsequência de $\{h_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ com $h_N \to f$. Então

$$\mathcal{L}_{\varphi,e_1}(f) = \lim_{N\to+\infty} \mathcal{L}_{\varphi,e_1}\left(h_N + \frac{1}{N}\right) = \lim_{N\to+\infty} \lambda_N h_N = \lambda f,$$

onde $\lambda = \|\mathcal{L}_{\varphi,e_1}(f)\|_\infty$, logo λ é autovalor de $\mathcal{L}_{\varphi,e_1}$. Além disso, λ é positivo, uma vez que $-\|\varphi\| \leq |\varphi(x)| \leq \|\varphi\|$, temos

$$
\begin{aligned}
\lambda_N h_N(x) &= \mathcal{L}_{\varphi,e_1}\left(h_N + \frac{1}{N}\right)(x) \\
&= \int e^{\varphi(ix)}\left(h_N(ix) + \frac{1}{N}\right) d\mu(i) \\
&\geq e^{-\|\varphi\|}\left(\min_N\left(h_N + \frac{1}{N}\right)\right),
\end{aligned}
$$

pois $\min_N(h_N + 1/N) \leq h_N(x) + 1/N$, logo

$$\lambda_N \min_N h_N \geq e^{-\|\varphi\|}\left(\min_N h_N + \frac{1}{N}\right) \geq e^{-\|\varphi\|} \min_N h_N,$$

e daí $\lambda_N \geq e^{-\|\varphi\|}$, de onde segue que $\lambda \geq e^{-\|\varphi\|} > 0$.

Ainda precisamos mostrar que f é estritamente positiva. De fato, temos $f \in \Omega_c$, logo $f(\Omega) \subset [0,1]$, então suponhamos que $f(x) = 0$ para algum $x \in \Omega$. Logo

$$0 = \lambda f(x) = \mathcal{L}_{\varphi,e_1}(f)(x) = \int e^{\varphi(ix)} f(ix) d\mu(i),$$

o que implica $f(ix) = 0$ para μ-quase todo ponto $i \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, mas isto nos mostra que $f(ix) = 0$ para todo $i \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, pois caso contrário, isto é, se $f(ix) > 0$ para algum $i \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, por continuidade temos $f(jx) > 0$ para todo $j \in [i_0, \ldots, i_L]$ para L suficientemente grande, contradizendo o fato de μ ser positiva em cilindros. Repetindo o argumento, podemos mostrar que $f(i^0 i^1 \ldots i^M x) = 0$, para todo $i^0, i^1, \ldots, i^M \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

e para todo $M \in \mathbb{N}$, o que nos mostra que $f \equiv 0$, todavia temos $\|\mathcal{L}_{\varphi,e_1}(f)\|_\infty = \lambda > 0$, uma contradição. Portanto $f > 0$.

Para mostrar que λ é simples, utilizamos a mesma estratégia. Considere $g \in \Omega_c$ tal que $\mathcal{L}_{\varphi,e_1}(g) = \lambda g$ e seja $t = \inf\left\{\frac{g(x)}{f(x)}\right\} = \frac{g(y)}{f(y)}$ para algum $y \in \Omega$. Assim $g(x) - tf(x) \geq 0$ para todo $x \in \Omega$ e $g(y) - tf(y) = (g - tf)(y) = 0$ para algum $y \in \Omega$. Logo

$$0 = \lambda(g - tf)(y) = \mathcal{L}_{\varphi,e_1}(g - tf)(y) = \int e^{\varphi(iy)}(g - tf)(iy)d\mu(i)$$

nos dá $(g - tf)(iy) = 0$ para μ-quase todo ponto $i \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ e daí $(g - tf)(iy) = 0$ para todo $i \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Repetindo o argumento, temos $(g - tf)(i^0 i^1 \dots i^M y) = 0$, para todo $i^0, i^1, \dots, i^M \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ e para todo $M \in \mathbb{N}$, logo $g - tf \equiv 0$, de onde $g \equiv tf$, isto é, g é um múltiplo escalar de f, logo λ é um autovalor simples. ∎

Denote por $\mathscr{P}(\Omega^+)$ o conjunto das probabilidades em Ω^+. Definimos o operador dual de $\mathcal{L}_{\varphi,e_1}$ por $\mathcal{L}^*_{\varphi,e_1} : \mathscr{P}(\Omega^+) \to \mathscr{P}(\Omega^+)$ dado por

$$\int g d\left(\mathcal{L}^*_{\varphi,e_1}\mu\right) = \int \mathcal{L}_{\varphi,e_1}(g)d\mu.$$

Dizemos que dois potenciais ϕ, ψ são *cohomólogos* ($\phi \sim \psi$) relativamente a σ^{e_1} se a sua diferença pode ser escrita na forma $u \circ \sigma^{e_1} - u$ para alguma função contínua $u : \Omega \to \mathbb{R}$, isto é, $\psi = \varphi + u - u \circ \sigma^{e_1}$, onde φ depende apenas das coordenadas em $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$, conforme Proposição 2.3.2. Dizemos que um potencial $\phi - \psi$ é cohomólogo a uma constante $c \in \mathbb{R}$ quando $\phi - \psi = c + u \circ \sigma^{e_1} - u$ para alguma função $u : \Omega \to \mathbb{R}$ Hölder. Dizer que ϕ é cohomólogo a ψ é o mesmo que dizer que $\phi - \psi$ é cohomólogo a zero.

Denote por $\mathcal{M}_{\sigma^{e_1}}(\Omega^+)$ o conjunto das probabilidades invariantes por σ^{e_1}. No caso a seguir, tomamos $u = \log f$ e $c = \log \lambda$.

Teorema 2.2. *Seja $\psi := \varphi - \log f \circ \sigma^{e_1} + \log f - \log \lambda$, onde $f \in \mathcal{H}^\alpha(\Omega^+, d)$ e $\lambda > 0$ satisfazem $\mathcal{L}_{\varphi,e_1}(f) = \lambda f$. Então existe alguma medida de probabilidade $\nu \in \mathcal{M}(\Omega^+, d)$ tal que $\mathcal{L}^*_{\psi,e_1}\nu = \nu$. Além do mais, $\nu \in \mathcal{M}_{\sigma^{e_1}}(\Omega)$, isto é, ν é σ^{e_1}-invariante.*

Demonstração. Temos $\mathcal{L}^*_{\psi,e_1}(\mathscr{P}(\Omega^+, d)) \subset \mathscr{P}(\Omega^+, d)$. De fato, $\mathcal{L}_{\psi,e_1}(1) = 1$, pois dado $x \in \Omega$, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\psi,e_1}(1)(x) &= \int e^{\psi(ix)}d\mu(i) = \int e^{(\varphi - \log f \circ \sigma^{e_1} + \log f - \log \lambda)(ix)}d\mu(i) \\
&= \frac{1}{\lambda f(x)}\int e^{\varphi(ix)}f(ix)d\mu(i) = \frac{1}{\lambda f(x)}\mathcal{L}_{\varphi,e_1}(f)(x) \\
&= \frac{1}{\lambda f(x)}\lambda f(x) = 1,
\end{aligned} \tag{2.6}$$

e dada $\eta \in \mathscr{P}(\Omega^+, d)$ qualquer, temos que $\mathcal{L}^*_{\psi,e_1}\eta$ é uma probabilidade, uma vez que

$$\int d(\mathcal{L}^*_{\psi,e_1}\eta) = \int \mathcal{L}_{\psi,e_1}(1)d\eta \overset{(2.6)}{=} \int d\eta = 1.$$

Como $\mathscr{P}(\Omega^+, d)$ munido da topologia fraca* é compacto e convexo, o Teorema do Ponto Fixo de Schauder-Tychonoff nos garante que existe uma probabilidade ν tal que

$\mathcal{L}^*_{\psi,e_1}\nu = \nu$. Além disso, temos

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\psi,e_1}(f\circ\sigma^{e_1})(x) &= \int e^{\psi(ix)} f\circ\sigma^{e_1}(ix)d\mu(i)\\
&= \int e^{(\varphi-\log f\circ\sigma^{e_1}+\log f-\log\lambda)(ix)} f(x)d\mu(i)\\
&= \lambda^{-1}f(x)\int e^{\varphi(ix)}e^{-\log f(x)}f(ix)d\mu(i)\\
&= \lambda^{-1}\int e^{\varphi(ix)}f(ix)d\mu(i)\\
&= \lambda^{-1}\mathcal{L}_{\varphi,e_1}(f) = \lambda^{-1}\lambda f = f. \qquad (2.7)
\end{aligned}
$$

Dessa forma, segue que

$$\int f\circ\sigma^{e_1}d\nu = \int f\circ\sigma^{e_1}d(\mathcal{L}^*_{\psi,e_1}\nu) = \int \mathcal{L}_{\psi,e_1}(f\circ\sigma^{e_1})d\nu \overset{(2.7)}{=} \int f d\nu,$$

o que mostra que a probabilidade ν é σ^{e_1}-invariante. ■

Corolário 2.3.4. *Nas mesmas condições do Teorema 2.2, existe uma medida de probabilidade $\tau\in\mathcal{M}(\Omega,d)$ tal que $\mathcal{L}^*_{\psi_2,e_2}\tau=\tau$ que é σ^{e_2}-invariante.*

A medida de probabilidade ν invariante por σ^{e_1} obtida no Teorema 2.2 foi encontrada através do operador de transferência normalizado, isto é, $\mathcal{L}_{\psi,e_1}$, logo existe uma medida η (que chamaremos de *medida de referência*) que é a automedida do operador $\mathcal{L}^*_{\varphi,e_1}$ e satisfaz $\mathcal{L}^*_{\varphi,e_1}\eta = \lambda\eta$. Ao contrário da medida ν, a medida η não é invariante por σ^{e_1}. A relação entre estas duas medidas é dada por $\nu = f\eta$, isto é, para cada A boreleano de Ω^+,

$$\nu(A) = \int_A f d\eta.$$

Um fato importante no Teorema 2.2 é $\psi\in\mathcal{H}^\alpha(\Omega^+,d)$. De fato, uma vez que supomos, sem perda de generalidade, $f(\sigma^{(n+1)e_1}(x)) \geq f(x)$, temos $\frac{f(x)}{f(\sigma^{(n+1)e_1}(x))}\geq\frac{1}{K_4}$ com $K_4>1$, pois $f\in\mathbb{F}_\theta(\Omega^+,d)$, logo $\log\left(\frac{f(x)}{f(\sigma^{(n+1)e_1}(x))}\right)\geq\log\frac{1}{K_4}$, ou seja, para qualquer $x\in\Omega$, a função $\log\left(\frac{f(x)}{f(\sigma^{(n+1)e_1}(x))}\right)$ tem domínio no compacto $[\frac{1}{K_4},K_4]$, logo esta função é lipschitziana em $[\frac{1}{K_4},K_4]$ com constante $L_{log}=\sup\{\frac{1}{z}:z\in(\frac{1}{K_4},K_4)\}$, assim $\log\left(\frac{f}{f\circ\sigma^{(n+1)e_1}}\right)\in\mathcal{H}^\alpha(\Omega^+,d)$. Como $\varphi\in\mathcal{H}^\alpha(\Omega^+,d)$ e $\psi:=\varphi-\log f\circ\sigma^{e_1}+\log f-\log\lambda$, temos $\psi\in\mathcal{H}^\alpha(\Omega^+,d)$. Para mais detalhes, consulte [21].

2.3.1 Estados de Gibbs

O objetivo dessa seção é mostrar que a medida de probabilidade obtida pelo operador dual do operador de transferência $\mathcal{L}^*_{\psi,e_1}$ (respectivamente $\mathcal{L}^*_{\psi,e_2}$) é uma medida de Gibbs para a transformação σ^{e_1} (respectivamente para σ^{e_2}). Consideremos as seguintes caixas (nossos cilindros em $\mathbb{Z}^2_+$):

$$\Lambda = \begin{matrix} x_{(n,0)} & \cdots & x_{(n,n)}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ x_{(0,0)} & \cdots & x_{(0,n)}\end{matrix},\ldots,\Lambda_j = \begin{matrix} x_{(n,j)} & \cdots & x_{(n,n)}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ x_{(0,j)} & \cdots & x_{(0,n)}\end{matrix},\ldots,\Lambda_n = \begin{matrix} x_{(n,n)}\\ \vdots\\ x_{(0,n)}\end{matrix},$$

e a função normalizada $\psi = \varphi + \log f - \log f \circ \sigma^{e_1} - \log \lambda$, com $\psi \in \mathbb{F}_\theta$.

A caracterização de medidas de Gibbs dada por G. Keller em [14] para uma ação de $\mathbb{Z}^d$ nos diz que, para um potencial ψ, existe uma constante C_ψ tal que para cada medida de Gibbs μ e cada $x \in \Omega$, com $x \in \Lambda$ (caixa $n \times n$), tem-se

$$\exp\left(-C_\psi n^{d-1}\right) \leq \frac{\mu(\Lambda)}{\exp\left(\sum_{i_1,\ldots,i_d=0}^{n-1} \psi \circ \sigma^{(i_1,\ldots,i_d)}(x) - n^d P\right)} \leq \exp\left(C_\psi n^{d-1}\right). \tag{2.8}$$

Embora definida no espaço $\{0,1\}^{\mathbb{Z}_+^d}$, σ^{e_1} é uma ação de $\mathbb{Z}_+$, pois depende de apenas uma direção, e nesse caso, a caracterização fica um pouco mais simples, uma vez que os membros extremos da desigualdade são constantes ($d = 1$), logo para $A, B > 0$ e $P \in \mathbb{R}$, uma *medida de Gibbs* com relação a transformação σ^{e_1} é uma medida μ positiva em caixas que satisfaz

$$A \leq \frac{\mu(\Lambda)}{\exp\left(\sum_{i=0}^{n-1} \psi \circ \sigma^{ie_1}(x) - nP\right)} \leq B.$$

Dados $x, w \in \Lambda$ e a métrica $d(x,w) = \sum_{k \in \mathbb{N}^2} \frac{1-\delta_{x_k,w_k}}{2^{|k|_1}}$, defina o número ϱ^n por

$$\varrho^n := \left(\sum_{k_1,k_2 > n} \frac{1-\delta_{x_k,w_k}}{2^{|k_1|+|k_2|}}\right)^\alpha,$$

e temos $|\psi(x) - \psi(w)| \leq |\psi|\varrho^n$. Em geral, para $x, w \in \Lambda_j$, para $1 \leq j \leq n$, teremos

$$\varrho^{n-j} = \left(\sum_{\substack{k_1 > n-j \\ k_2 > n}} \frac{1-\delta_{x_k,w_k}}{2^{|k_1|+|k_2|}}\right)^\alpha.$$

Lema 2.3.5. *Para $\psi \in \mathcal{H}^\alpha(\Omega^+, d)$ e $\nu \in \mathscr{P}(\Omega, d)$ como no Teorema 2.2, temos*

$$e^{-|\psi|\varrho^n} \leq \frac{\nu(\Lambda)}{\nu(\Lambda_1)} e^{-\psi(x)} \leq e^{|\psi|\varrho^n}.$$

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned}
\nu(\Lambda_1) &= \int \chi_{\Lambda_1}(x) d\nu(x) = \iint_{\sigma^{e_1}(y)=x} \chi_\Lambda(y) d\mu(y) d\nu(y) \\
&= \iint_{\sigma^{e_1}(y)=x} e^{\psi(y)} \chi_\Lambda(y) e^{-\psi(y)} d\mu(y) d\nu(y) \\
&= \int \mathcal{L}_{\psi,e_1}(\chi_\Lambda e^{-\psi})(x) d\nu(x) \\
&= \int_\Lambda e^{-\psi}(x) d\mathcal{L}^*_{\psi,e_1}(\nu)(x) \overset{2.2}{=} \int_\Lambda e^{-\psi(x)} d\nu(x).
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Como $x, w \in \Lambda$ e $|\psi(x) - \psi(w)| \leq |\psi|\varrho^n$ então $e^{-|\psi|\varrho^n} \leq e^{\psi(x)-\psi(w)} \leq e^{|\psi|\varrho^n}$. Daí vem $\nu(\Lambda)e^{-|\psi|\varrho^n} \leq \nu(\Lambda_1)e^{\psi(x)} \leq \nu(\Lambda)e^{|\psi|\varrho^n}$, já que

$$\nu(\Lambda)e^{-|\psi|\varrho^n} = \int_\Lambda d\nu e^{-|\psi|\varrho^n} \leq \int_\Lambda e^{\psi(x)-\psi(w)} d\nu(w) \leq \nu(\Lambda)e^{|\psi|\varrho^n}, \text{ e}$$

$$\int_\Lambda e^{\psi(x)-\psi(w)} d\nu(w) = e^{\psi(x)} \int_\Lambda e^{-\psi(w)} d\nu(w) \overset{(2.9)}{=} e^{\psi(x)}\nu(\Lambda_1).$$

Portanto vale $e^{-|\psi|\varrho^n} \leq \dfrac{\nu(\Lambda)}{\nu(\Lambda_1)} e^{-\psi(x)} \leq e^{|\psi|\varrho^n}$. ■

O Teorema 2.3 tem o intuito de mostrar que a medida de probabilidade obtida no Teorema 2.2 (ν satisfazendo $\mathcal{L}^*_{\psi,e_1}\nu = \nu$) é uma medida de Gibbs, e é uma adaptação de [21].

Teorema 2.3. *A medida $\nu \in \mathcal{M}_{\sigma^{e_1}}(\Omega, d)$ satisfazendo $\mathcal{L}^*_{\psi,e_1}\nu = \nu$ é Gibbs para $P = 0$.*

Demonstração. Fixe $x \in \Lambda$. Temos

$$e^{-|\psi|\varrho^n} \leq \frac{\nu(\Lambda)}{\nu(\Lambda_1)} e^{-\psi(x)} \leq e^{|\psi|\varrho^n},$$

e efetuando o mesmo cálculo realizado no Lema 2.3.5, para $w \in \Lambda_1$, obtemos

$$e^{-|\psi|\varrho^{n-1}} \leq \frac{\nu(\Lambda_1)}{\nu(\Lambda_2)} e^{-\psi(\sigma^{e_1}(x))} \leq e^{|\psi|\varrho^{n-1}},$$

e o repetimos até obter $e^{-|\psi|\varrho^0} \leq \nu(\Lambda_n)e^{-\psi(\sigma^{ne_1}(x))} \leq e^{|\psi|\varrho^0}$, onde $\varrho^0 = \sum_{\substack{k_1>0\\k_2>n}} \dfrac{1-\delta_{x_k,w_k}}{2^{|k_1|+|k_2|}}$ para $w \in \Lambda_n$, $\varrho^{n-j} = \sum_{\substack{k_1>n-j\\k_2>n}} \dfrac{1-\delta_{x_k,w_k}}{2^{|k_1|+|k_2|}}$ para $w \in \Lambda_j$ e $\varrho^{n-1} = \sum_{\substack{k_1>n-1\\k_2>n}} \dfrac{1-\delta_{x_k,w_k}}{2^{|k_1|+|k_2|}}$ para $w \in \Lambda_1$. De fato,

$$e^{|\psi|(\varrho^n+\varrho^{n-1}+\cdots+\varrho^0)} = \exp\left(|\psi| \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{\substack{k_1>j\\k_2>n}} \frac{1-\delta_{x_k,w_k}}{2^{|k_1|+|k_2|}}\right)^\alpha\right) < +\infty, \text{ pois}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{\substack{k_1>j\\k_2>n}} \frac{1-\delta_{x_k,w_k}}{2^{|k_1|+|k_2|}}\right)^\alpha &\leq \sum_{n\geq 0}\sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{\substack{k_1>j\\k_2>n}} \frac{1-\delta_{x_k,w_k}}{2^{|k_1|+|k_2|}}\right)^\alpha \leq \sum_{n\geq 0}\sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{\substack{k_1>j\\k_2>n}} \frac{1}{2^{|k_1|+|k_2|}}\right)^\alpha \\
&= \sum_{n\geq 0}\sum_{j=0}^{n} \left(\frac{1}{2^{j+n}}\right)^\alpha = \frac{1}{2^\alpha - 1} \sum_{n\geq 0} \left(2^{-\alpha(n-1)} - 2^{-2\alpha n}\right) \\
&= \frac{2^{3\alpha}}{(2^\alpha-1)^2(2^\alpha+1)} =: s_\alpha,
\end{aligned}$$

ou seja, $\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n}\sum_{\substack{k_1>j\\k_2>n}}\frac{1-\delta_{x_k,w_k}}{2^{|k_1|+|k_2|}}\right)^{\alpha}\leq s_\alpha$, e multiplicando todas as etapas, temos

$$\exp\left(-|\psi|\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{\substack{k_1>j\\k_2>n}}\frac{1-\delta_{x_k,w_k}}{2^{|k_1|+|k_2|}}\right)^{\alpha}\right)\leq\frac{\nu(\Lambda)}{\exp\left(\sum_{j=0}^{n}\psi\circ\sigma^{je_1}(x)\right)}\leq\exp\left(|\psi|\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{\substack{k_1>j\\k_2>n}}\frac{1-\delta_{x_k,w_k}}{2^{|k_1|+|k_2|}}\right)^{\alpha}\right),$$

e daí, $e^{-s_\alpha|\psi|}\leq\dfrac{\nu(\Lambda)}{\exp\left(\sum_{j=0}^{n}\psi\circ\sigma^{je_1}(x)\right)}\leq e^{s_\alpha|\psi|}$, o que mostra que ν é de Gibbs. ■

Corolário 2.3.6. *A medida $\nu=f\eta\in\mathcal{M}_{\sigma^{e_1}}(\Omega,d)$ satisfazendo $\mathcal{L}^*_{\varphi,e_1}\eta=\lambda\eta$ é Gibbs.*

Demonstração. Ao desenvolvermos a função $\psi=\varphi-\log f\circ\sigma^{e_1}+\log f-\log\lambda$, temos

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n}\psi\circ\sigma^{je_1}(x) &= \sum_{j=0}^{n}(\varphi-\log f\circ\sigma^{e_1}+\log f-\log\lambda)\circ\sigma^{je_1}(x)\\ &= \sum_{j=0}^{n}\varphi\circ\sigma^{je_1}(x)-\sum_{j=0}^{n}\log f\circ\sigma^{(j+1)e_1}(x)+\sum_{j=0}^{n}\log f\circ\sigma^{je_1}(x)-(n+1)\log\lambda\\ &= \left(\sum_{j=0}^{n}\varphi\circ\sigma^{je_1}(x)-(n+1)\log\lambda\right)+\log f(x)-\log f\circ\sigma^{(n+1)e_1}(x).\end{aligned}$$

Assim, obtemos

$$\exp\left(\sum_{j=0}^{n}\psi\circ\sigma^{je_1}(x)\right)=\exp\left(\sum_{j=0}^{n}\varphi\circ\sigma^{je_1}(x)-(n+1)\log\lambda\right)\frac{f(x)}{f\circ\sigma^{(n+1)e_1}(x)}.$$

Por outro lado, temos $e^{s_\alpha|\psi|}\leq K_1$ para algum $K_1>0$, e como $f\in\mathcal{H}^\alpha(\Omega^+,d)$, para algum $K_2>0$, temos

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)^\alpha}\leq K_2\Leftrightarrow|f(x)-f(y)|\leq K_2d(x,y)^\alpha\leq\mathfrak{d}^\alpha K_2\leq K_3,$$

para algum $K_3>0$. Supondo, sem perda de generalidade, $f(x)\geq f(y)$, para algum $K_4>1$ temos $f(x)\leq f(y)+K_3\leq K_4f(y)$. Substituindo y por $\sigma^{(n+1)e_1}(x)$, como $f>0$ temos

$$\frac{f(x)}{f(\sigma^{(n+1)e_1}(x))}\leq K_4\Rightarrow e^{s_\alpha|\psi|_d}\frac{f(x)}{f(\sigma^{(n+1)e_1}(x))}\leq K_1K_4=:B.$$

Da mesma forma, $\frac{f(x)}{f(\sigma^{(n+1)e_1}(x))}\geq1\geq\frac{f(\sigma^{(n+1)e_1}(x))}{f(x)}\geq\frac{1}{K_4}$, e definindo $A:=\frac{1}{K_1K_4}$ e $m=n+1$, temos

$$A\leq\frac{\nu(\Lambda)}{\exp\left(\sum_{j=0}^{m-1}\varphi\circ\sigma^{je_1}(x)-m\log\lambda\right)}\leq B.\ ■$$

O mesmo raciocínio pode ser aplicado para provar que a automedida $\nu \in \mathcal{M}_{\sigma^{e_2}}(\Omega, d)$ de $\mathcal{L}_{\varphi,e_2}$ é uma medida de Gibbs para σ^{e_2}.

2.3.2 Entropia

Seja $\alpha = \{A_i\}_{i\in I}$ uma partição finita ou enumerável mensurável de um espaço de probabilidade $(X, \mathcal{B}, \mu)$, isto é, a menos de conjuntos de medida μ zero,

(i) $X = \cup_i A_i$,

(ii) $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$.

Definimos a função de informação $I(\alpha) : X \to \mathbb{R}$ por

$$I(\alpha)(x) = -\sum_i \log \mu(A_i)\chi_{A_i}(x),$$

isto é, $I(\alpha)(x) = -\log \mu(A_i)$ se $x \in A_i$.

Quando $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são duas σ-álgebras com $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, dizemos que $\mathcal{A}$ é *sub-σ-álgebra* de $\mathcal{B}$. Definimos $\Sigma(\cup_i\{A_i\})$ como a menor σ-álgebra que contém $\cup_i\{A_i\}$, chamada de *σ-álgebra gerada* por $\cup_i\{A_i\}$.

Considere a sub-σ-álgebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ dada por $\mathcal{A} = \Sigma(\cup_i\{A_i\})$, então podemos definir um espaço de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Para cada $f \in L^1(X, \mathcal{B}, d\mu)$ podemos definir uma medida no espaço de medidas $(X, \mathcal{A}, \mu)$ por $\mu_{\mathcal{A}}(A) = \int_A f d\mu$, para $A \in \mathcal{A}$. Claramente $\mu_{\mathcal{A}} \ll \mu$, sendo aqui μ definida sobre $\mathcal{A}$. Pelo Teorema de Radon-Nikodym existe uma única função em $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$, chamada *esperança condicional*, dada por

$$\mathbb{E}(f|\mathcal{A}) := \frac{d\mu_{\mathcal{A}}}{d\mu}. \tag{2.10}$$

Como, em geral, $\mathcal{A} \subsetneq \mathcal{B}$ então $\mathbb{E}(f|\mathcal{A})$ pode ser bastante diferente de f, uma vez que deve ser mensurável na menor σ-álgebra, por exemplo, se $\mathcal{A} = \{X, \emptyset\}$ então $\mathbb{E}(f|\mathcal{A})$ é a função constante $\int f d\mu$. Caso $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, mostraremos $\mathbb{E}(f|\mathcal{A}) = f$ μ-quase todo ponto.

Proposição 2.3.7. *Sejam $(X, \mathcal{B}, \mu)$ espaço de probabilidade e $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ uma sub-σ-álgebra. Então existe a aplicação $\mathbb{E}(\cdot|\mathcal{A}) : L^1(X, \mathcal{B}, \mu) \to L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$, cujas principais propriedades são:*

(i) Para $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$, a função imagem $\mathbb{E}(f|\mathcal{A})$ é caracterizada em μ-quase todo ponto por duas propriedades:

(a) $\mathbb{E}(f|\mathcal{A})$ é $\mathcal{A}$-mensurável;

(b) para todo $A \in \mathcal{A}$, $\int_A \mathbb{E}(f|\mathcal{A})d\mu = \int_A f d\mu$.

(ii) $\mathbb{E}(\cdot|\mathcal{A})$ é um operador linear de norma 1. Além disso, $\mathbb{E}(\cdot|\mathcal{A})$ é positivo.

(iii) Se $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ e $g \in L^\infty(X, \mathcal{A}, d\mu)$ então $\mathbb{E}(fg|\mathcal{A}) = g\mathbb{E}(f|\mathcal{A})$ μ-quase todo ponto.

(iv) Se $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ e $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}_1 \subset \mathcal{B}$ então $\mathbb{E}(\mathbb{E}(f|\mathcal{A}_1)|\mathcal{A}_2) = \mathbb{E}(f|\mathcal{A}_2)$ μ-quase todo ponto.

(v) Se $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ então $\mathbb{E}(f|\mathcal{A}) = f$ μ-quase todo ponto.

(vi) Se $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ então $|\mathbb{E}(f|\mathcal{A})| \leq \mathbb{E}(|f||\mathcal{A})$ μ-quase todo ponto.

Demonstração. Ver [2]. ■

Considerando a sub-σ-álgebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ dada por $\mathcal{A} = \Sigma(\cup_i\{A_i\})$, podemos definir a *função de informação condicional* $I_\mu(\alpha|\mathcal{A}) : X \to \mathbb{R}$ dada por

$$I_\mu(\alpha|\mathcal{A})(x) = -\sum_i \log \mu(A_i|\mathcal{A})(x)\chi_{A_i}(x),$$

onde escrevemos $\mu(A_i|\mathcal{A})(x) = \mathbb{E}(\chi_{A_i}|\mathcal{A})(x)$, chamada de *medida condicional*.

Note que a medida condicional só pode ser definida por $\mu(A_i|\mathcal{A}) = \mathbb{E}(\chi_{A_i}|\mathcal{A})$ quando o espaço em questão é um espaço polonês.

Dadas duas partições α e β finitas ou enumeráveis de X, definimos o seu *refinamento* como

$$\alpha \vee \beta = \{A_i \cap B_i : A_i \in \alpha, B_i \in \beta\}.$$

Dadas duas σ-álgebra $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, denotamos por $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ a σ-álgebra gerada por $\{A \cap B : A \in \alpha, B \in \beta\}$.

Definimos a *entropia* de uma partição α finita ou enumerável de X por

$$H_\mu(\alpha) = \int I_\mu(\alpha)(x)d\mu(x) = -\sum_{A\in\alpha} \mu(A)\log\mu(A).$$

Dada uma partição α e uma sub-σ-álgebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, definimos a *entropia condicional* por $H_\mu(\alpha|\mathcal{A}) = \int I_\mu(\alpha|\mathcal{A})(x)d\mu(x)$.

Seja $m \overset{\mathbb{Z}^2}{\mapsto} T_m$ uma ação contínua de $\mathbb{Z}^2$ em X com $m = (m_1, m_2)$, onde $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$. Para todo retângulo $Q = \{b_1, \ldots, b_1 + l_1 - 1\} \times \{b_2, \ldots, b_2 + l_2 - 1\} \subset \mathbb{Z}^2$ com $b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$, sejam $\langle Q\rangle = \min_{j\in\{1,2\}} l_j$ e $|Q| = \sharp Q$. Se T preserva μ, dada uma partição α, escrevemos

$$\bigvee_{m\in Q} T_{-m}\alpha = \left\{ \bigcap_{m\in Q} T_{-m}A_m : A_m \in \alpha \right\}.$$

Considere os retângulos $Q \subset R \subset \mathbb{Z}^2$ de maneira que $P = R \setminus Q$ seja um retângulo. Denote $H_\mu^Q(\alpha) = H_\mu\left(\vee_{m\in Q} T_{-m}\alpha\right)$. Estimando, temos

$$\begin{aligned} H_\mu^{P\cup Q}(\alpha) &= H_\mu\left(\vee_{m\in P\cup Q} T_{-m}\alpha\right) = H_\mu\left(\vee_{m\in Q} T_{-m}\alpha\right) + H_\mu\left(\vee_{m\in P} T_{-m}\alpha | \vee_{m\in Q} T_{-m}\alpha\right) \\ &\leq H_\mu\left(\vee_{m\in Q} T_{-m}\alpha\right) + H_\mu\left(\vee_{m\in P} T_{-m}\alpha\right) = H_\mu^Q(\alpha) + H_\mu^P(\alpha), \end{aligned}$$

o que mostra que a sequência $\left(H_\mu^Q(\alpha)\right)_Q$ é subaditiva, e daí vem que o limite

$$h_\mu(T, \alpha) = \lim_{\langle Q\rangle\to+\infty} \frac{1}{|Q|} H_\mu\left(\bigvee_{m\in Q} T_{-m}(\alpha)\right)$$

existe, e $h_\mu(T, \alpha)$ é definida como a *entropia da partição* α relativa a transformação T. A *entropia métrica* da transformação T para o espaço de probabilidade $(X, \mathcal{B}, \mu)$ sobre partições finitas é dada por

$$h_\mu(T) = \sup_\alpha h_\mu(T, \alpha).$$

Uma partição α com $H_\mu(\alpha) < +\infty$ é chamada *partição geradora* para o espaço de probabilidade $(X, \mathcal{B}, \mu)$ se $\vee_{i=0}^\infty T^{-i}\alpha = \mathcal{B}$. Se α é uma partição geradora então

$$h_\mu(T) = h_\mu(T, \alpha).$$

Para mais detalhes sobre a entropia em $\mathbb{Z}^2$, veja [27].

2.3.3 Estados de Equilíbrio

Lema 2.3.8. *Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de probabilidade com $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{B}_N \subset \mathcal{B}$ uma sequência de σ-álgebras e $\xi > 0$. Se $F = \{x \in X : \max_{1 \le n \le N} \mathbb{E}(f|\mathcal{B}_n)(x) > \xi\}$ então para $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$,*

$$\mu(F) \le \frac{1}{\xi} \int |f| d\mu.$$

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $f > 0$ (de outra forma, substituímos f por $\max\{f(x), 0\}$). Podemos particionar $F = F_1 \cup \cdots \cup F_N$ onde

$$F_n = \{x \in X : \mathbb{E}(f|\mathcal{B}_n)(x) > \xi,\ \mathbb{E}(f|\mathcal{B}_i)(x) \le \xi,\ i = 1, 2, \ldots, n-1\}.$$

Logo $F_n \in \mathcal{B}_n$ e $F_i \cap F_j = \emptyset$ para $i \neq j$. Então,

$$\int_F f d\mu = \sum_{n=1}^{N} \int_{F_n} f d\mu = \sum_{n=1}^{N} \int_{F_n} \mathbb{E}(f|\mathcal{B}_n) d\mu \ge \sum_{n=1}^{N} \xi \mu(F_n) = \xi \mu(F).$$

Portanto, $\mu(F) \le \frac{1}{\xi} \int f d\mu = \frac{1}{\xi} |f| d\mu$. ■

A desigualdade do Lema 2.3.8 é muito similar a *desigualdade de Chebyshev* para $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ e $\xi > 0$ que pode ser escrita como

$$\mu(\{x \in X : f(x) > \xi\}) \le \frac{1}{\xi} \int |f| d\mu.$$

Sejam $(Y_n)_{n \ge 0}$ uma sequência de variáveis aleatórias no espaço de probabilidade $(X, \mathcal{B}, \mu)$ e $(\mathcal{B}_n)_{n \ge 0}$ uma sequência de sub-σ-álgebras em $\mathcal{B}$. A sequência $(\{Y_n, \mathcal{B}_n\})_{n \ge 0}$ é um *martingal* se

(i) $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{B}_{n+1}$,
(ii) Y_n é mensurável em $\mathcal{B}_n$,
(iii) $\mathbb{E}(|Y_n|) < \infty$,
(iv) Com probabilidade 1, tem-se $\mathbb{E}(Y_{n+k}|\mathcal{B}_n) = Y_n$, para $k \ge 1$.

Assim, dada um função $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$, a esperança condicional $\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_n)$ nas condições do Lema 2.3.8 é, para cada $n \ge 0$, um martingal. Claramente satisfaz as três primeiras condições e no caso da quarta, basta observar que, pelo item (iv) da Proposição 2.3.7, temos $\mathbb{E}(\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_{n+k})|\mathcal{B}_n) = \mathbb{E}(f|\mathcal{B}_n)$, para qualquer $k \ge 1$.

Proposição 2.3.9 (Teorema do Martingal Crescente)**.** *Seja $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$. Assuma que $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{B}_n \subset \cdots \subset \mathcal{B}$ é uma sequência crescente de σ-álgebras e que a união $\cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n$ gera $\mathcal{B}$ (denotando $\mathcal{B}_n \to \mathcal{B}$). Então $\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_n) \to f$ em $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ e $\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_n)(x) \to f(x)$, μ-quase todo ponto x.*

Demonstração. Ver [2]. ■

Para uma função $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ e $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ uma sub-σ-álgebra, o Teorema do Martingal Crescente descreve como $\mathbb{E}(f|\mathcal{A})$ depende da σ-álgebra $\mathcal{A}$. Para mais detalhes, veja [2], [10] e [24].

Considerando $x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}^2}$ e $y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, sejam $[y]_{e_1} = \cup_x \{yx\}$, $[y]_{e_1}^n \subset \{0,1\}^{\mathbb{N}^2}$ a caixa retangular de tamanho $1 \times n$ com um extremo na origem, $[x]_n \subset \{0,1\}^{\mathbb{N}^2}$ a caixa quadrada de tamanho $n \times n$ com um extremo na origem e a partição γ que gera a σ-álgebra $\mathcal{B}$ dos boreleanos de $\{0,1\}^{\mathbb{N}^2}$, defina

$$\mu_n[y|\sigma^{-e_1}x] := \frac{\mu\left([y]_{e_1}^n \cap \sigma^{-e_1}[x]_n\right)}{\mu\left([x]_n\right)} = \frac{\mu\left([yx]_{(n+1)\times n}\right)}{\mu\left([x]_n\right)} = \mu\left([y]_{e_1}^n | \bigvee_{i=1}^{n-1} \sigma^{-ie_1}\gamma\right)(x).$$

De fato, $\mu_n \geq 0$ pois $\mu \geq 0$ e $\mu_n(\emptyset) = 0$ pois $\mu(\emptyset) = 0$. Para $[y_i]_{e_1}^n \cap [y_j]_{e_1}^n = \emptyset$, $i \neq j$,

$$\begin{aligned}
\mu_n\left[(y_1 \cup \cdots \cup y_k)|\sigma^{-e_1}x\right] &= \frac{\mu\left(\left([y_1]_{e_1}^n \cup \cdots \cup [y_k]_{e_1}^n\right) \cap \sigma^{-e_1}[x]_n\right)}{\mu\left([x]_n\right)} \\
&= \frac{\mu\left(\left([y_1]_{e_1}^n \cap \sigma^{-e_1}[x]_n\right) \cup \cdots \cup \left([y_k]_{e_1}^n \cap \sigma^{-e_1}[x]_n\right)\right)}{\mu\left([x]_n\right)} \\
&= \frac{\mu\left([y_1]_{e_1}^n \cap \sigma^{-e_1}[x]_n\right)}{\mu\left([x]_n\right)} + \cdots + \frac{\mu\left([y_k]_{e_1}^n \cap \sigma^{-e_1}[x]_n\right)}{\mu\left([x]_n\right)} \\
&= \mu_n[y_1|\sigma^{-e_1}x] + \cdots + \mu_n[y_k|\sigma^{-e_1}x].
\end{aligned}$$

Para a σ-aditividade, considere $[y_i]_{e_1}^n \cap [y_j]_{e_1}^n = \emptyset$, $i \neq j$, então

$$\begin{aligned}
\mu_n\left[\bigcup_{s\in\mathbb{N}} y_s|\sigma^{-e_1}x\right] &= \frac{\mu\left(\left(\bigcup_{s\in\mathbb{N}}[y_s]_{e_1}^n\right) \cap \sigma^{-e_1}[x]_n\right)}{\mu\left([x]_n\right)} \\
&= \frac{\mu\left(\bigcup_{s\in\mathbb{N}}\left([y_s]_{e_1}^n \cap \sigma^{-e_1}[x]_n\right)\right)}{\mu\left([x]_n\right)} \\
&= \sum_{s\in\mathbb{N}} \frac{\mu\left([y_s]_{e_1}^n \cap \sigma^{-e_1}[x]_n\right)}{\mu\left([x]_n\right)} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n\left[y_s|\sigma^{-e_1}x\right],
\end{aligned}$$

logo μ_n é uma medida condicional.

Corolário 2.3.10 (Teorema do Martingal Crescente)**.** *Seja $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ espaço de probabilidade. Então, o limite $\mu_n[y|\sigma^{-e_1}x] \to \mu\left([y]_{e_1}|\sigma^{-e_1}\mathcal{B}\right)(x)$ existe para μ-quase todo ponto x, para cada $y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, tal que $\mu[y|\sigma^{-e_1}x] = \mu\left([y]_{e_1}|\sigma^{-e_1}\mathcal{B}\right)(x)$ é, para μ-quase todo x, uma distribuição de probabilidade bem definida sobre $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{B}_n = \vee_{i=1}^{n-1}\sigma^{-ie_1}\gamma = \{A_0 \cap \sigma^{-e_1}A_1 \cap \cdots \cap \sigma^{-(n-1)e_1}A_{n-1}, A_i \in \gamma\}$, podendo considerar $A_0 = [z]_{1\times 1}$ uma caixa 1×1, $A_1 = [z]_{1\times 2}$ uma caixa 1×2, logo $\sigma^{-e_1}A_1 = [z]_{2\times 2}$ é uma caixa 2×2, e prosseguindo para cada n, com $A_{n-1} = [z]_{1\times n}$ uma caixa $1 \times n$ e $\sigma^{-(n-1)e_1}A_{n-1} = [z]_{n\times n}$ uma caixa $n \times n$. Temos $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{B}_{n+1}$, pois a partição $\mathcal{B}_{n+1} = \vee_{i=1}^{n}\sigma^{-ie_1}\gamma$ é mais fina que $\mathcal{B}_n = \vee_{i=1}^{n-1}\sigma^{-ie_1}\gamma$, logo todo átomo de $\mathcal{B}_n$ é um elemento de $\mathcal{B}_{n+1}$. Como γ gera a σ-álgebra $\mathcal{B}$, temos $\mathcal{B}_n \to \mathcal{B}$. Claramente $[y]_{e_1}^n$ é mensurável em $\mathcal{B}_n$ e $\mathbb{E}(|[y]_{e_1}^n|) < \infty$, para cada $n \geq 1$. Além disso, $\mathbb{E}\left([y]_{e_1}^{n+1}|\mathcal{B}_n\right) = [y]_{e_1}^n$. Assim, $\left(\{[y]_{e_1}^n, \mathcal{B}_n\}\right)_{n\geq 1}$ é um martingal. Como $\mu_n[y|\sigma^{-e_1}x]$ é uma medida condicional, temos

$$\mu_n[y|\sigma^{-e_1}x] = \mu\left([y]_{e_1}^n | \bigvee_{i=1}^{n-1}\sigma^{-ie_1}\gamma\right)(x) \overset{(2.10)}{=} \mathbb{E}\left(\chi_{[y]_{e_1}^n}|\mathcal{B}_n\right),$$

logo pelo Teorema do Martingal Crescente temos $\mathbb{E}\left(\chi_{[y]^n_{e_1}}|\mathcal{B}_n\right)(x) \to \mathbb{E}\left(\chi_{[y]_{e_1}}|\mathcal{B}\right)(x)$ μ-quase todo ponto x. Como

$$\mathbb{E}\left(\chi_{[y]_{e_1}}|\mathcal{B}\right)(x) = \mu\left([y]_{e_1}|\sigma^{-e_1}\mathcal{B}\right)(x) = \mu[y|\sigma^{-e_1}x],$$

temos $\mu_n[y|\sigma^{-e_1}x] \to \mu[y|\sigma^{-e_1}x]$ μ-quase todo ponto x. A variável aleatória $\mathbb{E}(\cdot|\mathcal{B})$ é bem definida pelo fato de ser uma função, logo $x = z$ implica $\mathbb{E}(\cdot|\mathcal{B})(x) = \mathbb{E}(\cdot|\mathcal{B})(z)$. Por consequência, $\mu[y|\sigma^{-e_1}x] = \mu[y|\sigma^{-e_1}z]$, logo a distribuição está bem definida μ-quase todo ponto x, uma vez que a convergência se dá em μ-quase todo ponto. ■

Pelo Corolário do Teorema do Martingal Crescente temos a existência do limite de μ_n e

$$\lim_{n\to\infty}\mu_n[y|\sigma^{-e_1}x] = \mu[y|\sigma^{-e_1}x].$$

Note que a distribuição $\mu[y|\sigma^{-e_1}x]$ é uma função densidade, pois

$$\int \mu[y|\sigma^{-e_1}x]d\mu(y) = \int \mathbb{E}\left(\chi_{[y]_{e_1}}|\mathcal{B}\right)(x)d\mu(y) = 1 \tag{2.11}$$

Definição 2.3.11. Definimos a *entropia métrica* de σ^{e_1} com respeito a medida μ por

$$h_\mu(\sigma^{e_1}) = \int I_\mu(\sigma^{e_1})(x)d\mu(x),$$

onde

$$I_\mu(\sigma^{e_1})(x) = -\int \chi_{[y]_{e_1}}(x)\log\mu[y|\sigma^{-e_1}x]d\mu(y)$$

é a informação de σ^{e_1} com respeito a medida μ, $y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ e $\chi_{[y]_{e_1}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [y]_{e_1} \\ 0 & \text{c.c.}\end{cases}$.
Definimos a função $\wp : C(X) \to \mathbb{R}$, um análogo da *pressão topológica* em $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, dada por

$$\wp(\phi) = \sup_{\mu\in\mathcal{M}_{\sigma^{e_1}}(\Omega)}\left\{h_\mu(\sigma^{e_1}) + \int\phi d\mu\right\}.$$

Um *estado de equilíbrio* é uma probabilidade invariante $\nu \in \mathcal{M}_{\sigma^{e_1}}(\Omega)$ que realiza esse supremo.

Lema 2.3.12 (Desigualdade de Jensen). *Se $\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função côncava e $r \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R},\mu)$ é uma densidade, isto é, $r(x) \geq 0$ e $\int r(x)d\mu(x) = 1$, então, para todo $x \in Dom(\tau)$, temos*

$$\int \tau(x)r(x)d\mu(x) \leq \tau\left(\int xr(x)d\mu(x)\right). \tag{2.12}$$

Demonstração. Ver [2]. ■

Lema 2.3.13. *Sejam $\mu[y|\sigma^{-e_1}x]$ e $\nu[y|\sigma^{-e_1}x]$ distribuições de probabilidade sobre $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ com $\nu[y|\sigma^{-e_1}x] = e^{\psi(yx)}$, $\mathcal{L}^*_{\psi,e_1}\nu = \nu$ e $\mathcal{L}_{\psi,e_1}1 = 1$. Então*

$$-\int \mu[y|\sigma^{-e_1}x]\log\mu[y|\sigma^{-e_1}x]d\mu(y) + \int \mu[y|\sigma^{-e_1}x]\psi(yx)d\mu(y) \leq 0. \tag{2.13}$$

Demonstração. Como $\nu[y|\sigma^{-e_1}x] = e^{\psi(yx)}$, temos $\log \nu[y|\sigma^{-e_1}x] = \psi(yx)$. Ainda,

$$\begin{aligned}
-\int \mu[y|\sigma^{-e_1}x] \log \mu[y|\sigma^{-e_1}x] d\mu(y) + \int \mu[y|\sigma^{-e_1}x] \log \nu[y|\sigma^{-e_1}x] d\mu(y) \\
= \int -\nu[y|\sigma^{-e_1}x] \left(\frac{\mu[y|\sigma^{-e_1}x]}{\nu[y|\sigma^{-e_1}x]} \right) \log \left(\frac{\mu[y|\sigma^{-e_1}x]}{\nu[y|\sigma^{-e_1}x]} \right) d\mu(y) \\
= \int \nu[y|\sigma^{-e_1}x] \tau \left(\frac{\mu[y|\sigma^{-e_1}x]}{\nu[y|\sigma^{-e_1}x]} \right) d\mu(y) \\
\overset{(2.12)}{\leq} \tau \left(\int \nu[y|\sigma^{-e_1}x] \left(\frac{\mu[y|\sigma^{-e_1}x]}{\nu[y|\sigma^{-e_1}x]} \right) d\mu(y) \right) = \tau(1) = 0,
\end{aligned}$$

pois a função $\tau(x) = -x \log x$ é estritamente côncava. ■

Proposição 2.3.14. *Seja $f \in \mathbb{F}_\theta(\Omega, d)$ tal que $\mathcal{L}_{\psi,e_1} 1 = 1$ e $\mathcal{L}^*_{\psi,e_1} \nu = \nu$, então para qualquer $\mu \in \mathcal{M}_{\sigma^{e_1}}(\Omega)$ temos*

$$h_\mu(\sigma^{e_1}) + \int \psi d\mu \leq 0.$$

Demonstração. Sejam $\mu \in \mathcal{M}_{\sigma^{e_1}}(\Omega)$ e $\mu[y|\sigma^{-e_1}x]$ a distribuição sobre $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, para $x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}^2}$ e $y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. De fato,

$$\begin{aligned}
h_\mu(\sigma^{e_1}) &= \int I_\mu(\sigma^{e_1})(x) d\mu(x) \\
&= \iint -\chi_{[y]_{e_1}}(x) \log \mu[y|\sigma^{-e_1}x] d\mu(y) d\mu(x) \\
&= \iint -\mathbb{E}\left(\chi_{[y]_{e_1}} | \mathcal{B}\right)(x) \log \mu[y|\sigma^{-e_1}x] d\mu(y) d\mu(x) \\
&= \iint -\mu[y|\sigma^{-e_1}x] \log \mu[y|\sigma^{-e_1}x] d\mu(y) d\mu(x).
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Além disso, considerando a função $g = \chi_A$ onde $A \subset \{0,1\}^{\mathbb{N}^2}$ é uma caixa quadrada, temos

$$\begin{aligned}
\iint \mu[y|\sigma^{-e_1}x] g(yx) d\mu(y) d\mu(x) &= \iint \chi_A(yx) \mu[y|\sigma^{-e_1}x] d\mu(y) d\mu(x) \\
&= \lim_{n\to\infty} \iint \chi_A(yx) \mu_n[y|\sigma^{-e_1}x] d\mu(y) d\mu(x) \\
&= \lim_{n\to\infty} \iint_A \mu_n[y|\sigma^{-e_1}x] d\mu(y) d\mu(x) \\
&\overset{(2.11)}{=} \iint_A d\mu(y) d\mu(x) = \int \chi_A d\mu \\
&= \int g d\mu.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Por linearidade, (2.15) vale para funções simples, e por convergência para funções integráveis. Considerando as igualdades (4.10) e (2.15) e integrando a equação (2.13), temos

$$\begin{aligned}
\iint -\mu[y|\sigma^{-e_1}x] \log \mu[y|\sigma^{-e_1}x] d\mu(y) d\mu(x) + \iint \mu[y|\sigma^{-e_1}x] \psi(yx) d\mu(y) d\mu(x) \\
= h_\mu(\sigma^{e_1}) + \int \psi d\mu,
\end{aligned}$$

e pelo Lema 2.3.13 temos $h_\mu(\sigma^{e_1}) + \int \psi d\mu \leq 0$. ■

Teorema 2.4. *A medida $\nu \in \mathcal{M}(\Omega, d)$ do Teorema 2.2 é um estado de equilíbrio, isto é, para toda $\mu \in \mathcal{M}_{\sigma^{e_1}}(\Omega)$, temos*

$$h_\mu(\sigma^{e_1}) + \int \psi d\mu \leq h_\nu(\sigma^{e_1}) + \int \psi d\nu = 0.$$

Demonstração. De fato, conforme demonstração da Proposição 2.3.13, temos claramente

$$\int -\nu[y|\sigma^{-e_1}x] \log \nu[y|\sigma^{-e_1}x] d\nu(y) + \int \nu[y|\sigma^{-e_1}x] \log \nu[y|\sigma^{-e_1}x] d\nu(y) = 0,$$

e ao integrarmos novamente, obtemos $h_\nu(\sigma^{e_1}) + \int \psi d\nu = 0$, logo $\nu \in \mathcal{M}_{\sigma^{e_1}}(\Omega)$ é um estado de equilíbrio. ■

Definimos anteriormente que um potencial $\phi - \psi$ é cohomólogo a uma constante $c \in \mathbb{R}$ quando $\phi - \psi = c + u \circ \sigma^{e_1} - u$ para alguma função $u : \Omega \to \mathbb{R}$ Hölder.

Teorema 2.5. *Sejam ϕ, ψ dois potenciais em Ω. Se $\phi - \psi$ é cohomólogo a alguma constante $c \in \mathbb{R}$, então $\mu_\phi = \mu_\psi$, isto é, o estado de equilíbrio para ϕ (respectivamente ψ) é estado de equilíbrio para ψ (respectivamente ϕ).*

Demonstração. Se ϕ é cohomólogo a $\psi + c$ então $\wp(\phi) = \wp(\psi + c) = \wp(\psi) + c$ pois, uma vez que $\mu \in \mathcal{M}_{\sigma^{e_1}}(\Omega)$, segue

$$\begin{aligned} \int \phi d\mu &= \int (\psi + c + u \circ \sigma^{e_1} - u) d\mu \\ &= \int (\psi + c) d\mu - \int u \circ \sigma^{e_1} d\mu - \int u d\mu \\ &= \int (\psi + c) d\mu, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \wp(\phi) &= \sup_{\mu \in \mathcal{M}_{\sigma^{e_1}}(\Omega)} \left\{ h_\mu(\sigma^{e_1}) + \int \phi d\mu \right\} = \sup_{\mu \in \mathcal{M}_{\sigma^{e_1}}(\Omega)} \left\{ h_\mu(\sigma^{e_1}) + \int (\psi + c) d\mu \right\} \\ &= \sup_{\mu \in \mathcal{M}_{\sigma^{e_1}}(\Omega)} \left\{ h_\mu(\sigma^{e_1}) + \int \psi d\mu \right\} + c = \wp(\psi) + c. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos para toda $\mu \in \mathcal{M}_{\sigma^{e_1}}(\Omega)$

$$h_\mu(\sigma^{e_1}) + \int \phi d\mu = h_\mu(\sigma^{e_1}) + \int (\psi + c) d\mu = h_\mu(\sigma^{e_1}) + \int \psi d\mu + c.$$

Logo, μ é estado de equilíbrio para ϕ se, e só se, μ é estado de equilíbrio para ψ, e portanto $\mu_\phi = \mu_\psi$. ■

O Teorema acima nos mostra que o estado de equilíbrio ν do Teorema 2.4 para a função ψ também é um estado de equilíbrio para a função φ, uma vez que $\psi = \varphi - \log f \circ \sigma^{e_1} + \log f - \log \lambda$, isto é, $\psi \sim \varphi$. Os resultados provados para σ^{e_1} também valem para σ^{e_2} com as devidas modificações.

Capítulo 3

Cohomologia

3.1 Potenciais Cohomólogos

Definição 3.1.1. Dizemos que dois potenciais ϕ, ψ são *cohomólogos* ($\phi \sim \psi$) relativamente a σ se a sua diferença pode ser escrita na forma $u \circ \sigma^{e_1} - u + v \circ \sigma^{e_2} - v$ para alguma função contínua $u : \Omega \to \mathbb{R}$ e alguma função contínua $v : \Omega \to \mathbb{R}$, isto é, $\psi = \phi + u - u \circ \sigma^{e_1} + v - v \circ \sigma^{e_2}$. Uma função que é cohomóloga a zero é chamada um *cobordo*.

Dada $\psi : \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2} \to \mathbb{R}$ é possível encontrar uma outra $\phi : \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2} \to \mathbb{R}$, ambas definidas em todo $\{0,1\}^{\mathbb{Z}^2}$ e tais que ambas sejam cohomólogas. Esta ϕ satisfaz $\phi(x) = \phi(y)$ quando $x_{i,j} = y_{i,j}$ para todos os $i, j \geq 0$, ou em outros termos, ϕ depende apenas das coordenadas futuras, conforme Teorema 3.1. Logo ϕ pode ser identificada com uma função em $\{0,1\}^{\mathbb{N}^2}$ para a qual, o operador de transferência faz sentido, uma vez que em $\{0,1\}^{\mathbb{N}^2}$ os shifts não são bijetivos e portanto, tem mais de uma pré-imagem. Para mais informações sobre cohomologia em sistemas dinâmicos, veja [16].

Uma vez que obtemos ϕ e analisamos o operador de transferência com este potencial, a medida invariante obtida através do dual do operador de transferência η_ϕ pode ser relacionada com a medida relativa a função ψ. A saber, as medidas são equivalentes, conforme Teorema 4.3. O resultado a seguir generaliza a Proposição 2.3.2. O Teorema 3.1 adapta um resultado de [4].

Teorema 3.1. *Seja $\Phi \in \mathcal{H}^\alpha(\Omega, d)$ função com $\alpha \in (0, 1]$. Então existem $u, v, \phi \in \mathcal{H}^{\frac{\alpha}{4}}(\Omega, d)$ tais que*

$$\Phi = \phi + u - u \circ \sigma^{e_1} + v - v \circ \sigma^{e_2}. \tag{3.1}$$

Além disso, temos $\phi(x) = \phi(y)$ se $x_{|_{\mathbb{N}^2}} = y_{|_{\mathbb{N}^2}}$.

Demonstração. Definimos a função u como

$$u(x) = \sum_{j \geq 0} \left(\Phi \circ \sigma^{je_1}(x) - \Phi \circ \sigma^{je_1}(\pi_1(x)) \right),$$

onde

$$(\pi_1(x))_m = \begin{cases} x_m & \text{se } m_1 \geq 0 \\ 0 & \text{se } m_1 < 0 \end{cases}.$$

Por definição, $|\Phi(x) - \Phi(y)| \leq C_\alpha(\Phi) d(x,y)^\alpha$. De fato,

$$\begin{aligned} \left| \Phi \circ \sigma^{je_1}(x) - \Phi \circ \sigma^{je_1}(\pi_1(x)) \right| &\leq C_\alpha(\Phi) d^\alpha(\sigma^{je_1}(x), \sigma^{je_1}(\pi_1(x))) \\ &\leq C_\alpha(\Phi) \left(2 \sum_{\substack{l \geq j \\ n \geq 0}} \frac{1}{2^{l+n}} \right)^\alpha, \end{aligned}$$

pois $\delta_{((\sigma^{je_1}(x))_t, (\sigma^{je_1}(\pi_1(x)))_t)} = 0$ apenas para $t = (t_1, t_2)$ com $t_1 < -j$, com $j \geq 0$ fixado, então $|t_1| > j$, logo $|t_1| - 1 \geq j$. Definimos $l := |t_1| - 1$. Para $t_2 = n \in \mathbb{Z}$, temos

$$d(\sigma^{je_1}(x), \sigma^{je_1}(\pi_1(x)))^\alpha \leq \left(\sum_{\substack{|t_1| > j \\ n \in \mathbb{Z}}} \frac{1}{2^{|t_1| + |n|}} \right)^\alpha \leq \left(\sum_{\substack{l \geq j \\ n \geq 0}} \frac{1}{2^{l+n}} + \sum_{\substack{l \geq j \\ n \leq 0}} \frac{1}{2^{l+|n|}} \right)^\alpha = 2^\alpha \left(\sum_{\substack{l \geq j \\ n \geq 0}} \frac{1}{2^{l+n}} \right)^\alpha.$$

Por indução, temos

$$\sum_{j \geq 0} \sum_{\substack{l \geq j \\ n \geq 0}} \frac{1}{2^{l+n}} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2^{n+j}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{2^n} = 8,$$

então

$$u(x) \leq 2^\alpha C_\alpha(\Phi) \left(\sum_{j \geq 0} \sum_{\substack{l \geq j \\ n \geq 0}} \frac{1}{2^{l+n}} \right)^\alpha \leq 2^\alpha 8^\alpha C_\alpha(\Phi) = 2^{4\alpha} C_\alpha(\Phi). \tag{3.2}$$

Em outros termos, a função u está bem definida. Agora, defina a função

$$(u - u \circ \sigma^{e_1})(x) = \Phi(x) - \sum_{j \geq 0} \left(\Phi \circ \sigma^{je_1}(\pi_1(x)) - \Phi \circ \sigma^{je_1}(\pi_1(\sigma^{e_1}(x))) \right) = (\Phi - \psi)(x) \tag{3.3}$$

onde $\psi(x) := \sum_{j \geq 0} \left(\Phi \circ \sigma^{je_1}(\pi_1(x)) - \Phi \circ \sigma^{je_1}(\pi_1(\sigma^{e_1}(x))) \right)$. A equação (3.3) é valida pois

$$\begin{aligned} (u - u \circ \sigma^{e_1})(x) &= \sum_{j \geq 0} \left(\Phi \circ \sigma^{je_1}(x) - \Phi \circ \sigma^{je_1}(\pi_1(x)) - \Phi \circ \sigma^{(j+1)e_1}(x) + \Phi \circ \sigma^{je_1}(\pi_1(\sigma^{e_1}(x))) \right) \\ &= \sum_{j \geq 0} \left(\Phi \circ \sigma^{je_1}(x) - \Phi \circ \sigma^{(j-1)e_1}(x) \right) - \sum_{j \geq 0} \left(\Phi \circ \sigma^{je_1}(\pi_1(x)) - \Phi \circ \sigma^{je_1}(\pi_1(\sigma^{e_1}(x))) \right) \\ &= \Phi(x) - \sum_{j \geq 0} \left(\Phi \circ \sigma^{je_1}(\pi_1(x)) - \Phi \circ \sigma^{je_1}(\pi_1(\sigma^{e_1}(x))) \right). \end{aligned}$$

Se $x_{|\mathbb{N} \times \mathbb{Z}} = y_{|\mathbb{N} \times \mathbb{Z}}$, claramente $\psi(x) = \psi(y)$. Afirmamos que u e ψ pertencem a $\mathcal{H}^{\frac{\alpha}{2}}(\Omega, d)$. De fato, tomando $x, y \in \Omega$ tais que $\frac{1}{2^{2N}} \leq d(x,y) \leq \frac{1}{2^{2N-1}}$, então

$$\frac{1}{2^{2N\alpha}} \leq d(x,y)^\alpha \leq \frac{1}{2^{(2N-1)\alpha}} \tag{3.4}$$

para algum $N \in \mathbb{N}$. Como

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{j\geq 0}\Big(\Phi\circ\sigma^{je_1}(x) - \Phi\circ\sigma^{je_1}(\pi_1(x))\Big)\\ &= \sum_{j=0}^{N}\Big(\Phi\circ\sigma^{je_1}(x) - \Phi\circ\sigma^{je_1}(\pi_1(x))\Big) + \sum_{j>N}\Big(\Phi\circ\sigma^{je_1}(x) - \Phi\circ\sigma^{je_1}(\pi_1(x))\Big)\\ &\overset{(3.2)}{\leq} \sum_{j=0}^{N}\Big(\Phi\circ\sigma^{je_1}(x) - \Phi\circ\sigma^{je_1}(\pi_1(x))\Big) + 2^{\alpha}C_{\alpha}(\Phi)\left(\sum_{j>N}\sum_{\substack{l\geq j\\ n\geq 0}}\frac{1}{2^{l+n}}\right)^{\alpha}, \end{aligned}$$

o mesmo é válido para $u(y)$, isto é,

$$u(y) \leq \sum_{j=0}^{N}\Big(\Phi\circ\sigma^{je_1}(y) - \Phi\circ\sigma^{je_1}(\pi_1(y))\Big) + 2^{\alpha}C_{\alpha}(\Phi)\left(\sum_{j>N}\sum_{\substack{l\geq j\\ n\geq 0}}\frac{1}{2^{l+n}}\right)^{\alpha}, \tag{3.5}$$

então temos

$$\begin{aligned} |u(x)-u(y)| &= \left|\sum_{j\geq 0}\Big(\Phi\circ\sigma^{je_1}(x) - \Phi\circ\sigma^{je_1}(\pi_1(x))\Big) - \sum_{j\geq 0}\Big(\Phi\circ\sigma^{je_1}(y) - \Phi\circ\sigma^{je_1}(\pi_1(y))\Big)\right|\\ &= \left|\sum_{j=0}^{N}\Big(\Phi\circ\sigma^{je_1}(x) - \Phi\circ\sigma^{je_1}(\pi_1(x))\Big) + \sum_{j>N}\Big(\Phi\circ\sigma^{je_1}(x) - \Phi\circ\sigma^{je_1}(\pi_1(x))\Big)\right.\\ &- \left.\sum_{j=0}^{N}\Big(\Phi\circ\sigma^{je_1}(y) - \Phi\circ\sigma^{je_1}(\pi_1(y))\Big) - \sum_{j>N}\Big(\Phi\circ\sigma^{je_1}(y) - \Phi\circ\sigma^{je_1}(\pi_1(y))\Big)\right|, \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} |u(x)-u(y)| &= \left|\sum_{j=0}^{N}\Big(\Big(\Phi\circ\sigma^{je_1}(x) - \Phi\circ\sigma^{je_1}(\pi_1(x))\Big) - \Big(\Phi\circ\sigma^{je_1}(y) - \Phi\circ\sigma^{je_1}(\pi_1(y))\Big)\Big)\right.\\ &+ \left.\sum_{j>N}\Big(\Big(\Phi\circ\sigma^{je_1}(x) - \Phi\circ\sigma^{je_1}(\pi_1(x))\Big) - \Big(\Phi\circ\sigma^{je_1}(y) - \Phi\circ\sigma^{je_1}(\pi_1(y))\Big)\Big)\right|\\ &\leq \left|\sum_{j=0}^{N}\Big(\Big(\Phi\circ\sigma^{je_1}(x) - \Phi\circ\sigma^{je_1}(\pi_1(x))\Big) - \Big(\Phi\circ\sigma^{je_1}(y) - \Phi\circ\sigma^{je_1}(\pi_1(y))\Big)\Big)\right|\\ &+ \left|\sum_{j>N}\Big(\Big(\Phi\circ\sigma^{je_1}(x) - \Phi\circ\sigma^{je_1}(\pi_1(x))\Big) - \Big(\Phi\circ\sigma^{je_1}(y) - \Phi\circ\sigma^{je_1}(\pi_1(y))\Big)\Big)\right|, \end{aligned}$$

assim

$$
\begin{aligned}
|u(x)-u(y)| &\leq \sum_{j=0}^{N}\left|\left(\Phi\circ\sigma^{je_1}(x)-\Phi\circ\sigma^{je_1}(\pi_1(x))\right)-\left(\Phi\circ\sigma^{je_1}(y)-\Phi\circ\sigma^{je_1}(\pi_1(y))\right)\right| \\
&+ \left|\sum_{j>N}\left(\Phi\circ\sigma^{je_1}(x)-\Phi\circ\sigma^{je_1}(\pi_1(x))\right)\right|+\left|\sum_{j>N}\left(\Phi\circ\sigma^{je_1}(y)-\Phi\circ\sigma^{je_1}(\pi_1(y))\right)\right| \\
&\overset{(3.5)}{\leq} \sum_{j=0}^{N}\left|\Phi\circ\sigma^{je_1}(x)-\Phi\circ\sigma^{je_1}(y)-\Phi\circ\sigma^{je_1}(\pi_1(x))+\Phi\circ\sigma^{je_1}(\pi_1(y))\right| \\
&+ 2^{\alpha}C_{\alpha}(\Phi)\left(\sum_{j>N}\sum_{\substack{l\geq j\\ n\geq 0}}\frac{1}{2^{l+n}}\right)^{\alpha}+2^{\alpha}C_{\alpha}(\Phi)\left(\sum_{j>N}\sum_{\substack{l\geq j\\ n\geq 0}}\frac{1}{2^{l+n}}\right)^{\alpha},
\end{aligned}
$$

e portanto

$$
\begin{aligned}
|u(x)-u(y)| &\leq \sum_{j=0}^{N}|\Phi\circ\sigma^{je_1}(x)-\Phi\circ\sigma^{je_1}(y)|+\sum_{j=0}^{N}|\Phi\circ\sigma^{je_1}(\pi_1(x))-\Phi\circ\sigma^{je_1}(\pi_1(y))| \\
&+ 2^{\alpha+1}C_{\alpha}(\Phi)\left(\sum_{j>N}\sum_{\substack{l\geq j\\ n\geq 0}}\frac{1}{2^{l+n}}\right)^{\alpha}.
\end{aligned}
$$

Como $2^{|m-je_1|-|m|}\leq 2^{|m-je_1-m|}=2^{|je_1|}=2^{|j|}$, para $m\in\mathbb{Z}^2$ e $j\in\mathbb{N}$, temos

$$
\begin{aligned}
d(\sigma^{je_1}(x),\sigma^{je_1}(y))^{\alpha} &= \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}^2}\frac{1-\delta_{x_{m-je_1},y_{m-je_1}}}{2^{|m|}}\right)^{\alpha} \\
&= \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}^2}\frac{1-\delta_{x_{m-je_1},y_{m-je_1}}}{2^{|m|}}\frac{2^{|m-je_1|}}{2^{|m-je_1|}}\right)^{\alpha} \\
&= \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}^2}\frac{1-\delta_{x_{m-je_1},y_{m-je_1}}}{2^{|m-je_1|}}\frac{2^{|m-je_1|}}{2^{|m|}}\right)^{\alpha} \\
&\leq 2^{j\alpha}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^2}\frac{1-\delta_{x_k,y_k}}{2^{|k|}}\right)^{\alpha}=2^{j\alpha}d(x,y)^{\alpha},
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

e como

$$
\sum_{j>N}\sum_{\substack{l\geq j\\ n\geq 0}}\frac{1}{2^{l+n}}2^{N+1}=\sum_{j>N}\sum_{\substack{l\geq j\\ n\geq 0}}\frac{1}{2^{l-N-1+n}}=\sum_{k\geq 0}\sum_{\substack{s\geq k\\ n\geq 0}}\frac{1}{2^{s+n}}\leq 8,
$$

para $k=j-N-1$, $s=l-N-1$, e por (3.2), temos

$$
2^{\alpha+1}C_{\alpha}(\Phi)\left(\sum_{j>N}\sum_{\substack{l\geq j\\ n\geq 0}}\frac{1}{2^{l+n}}2^{N}\right)^{\alpha}\leq 2^{\alpha+1}C_{\alpha}(\Phi)\left(\sum_{k\geq 0}\sum_{\substack{s\geq k\\ n\geq 0}}\frac{1}{2^{s+n}}\right)^{\alpha}\leq 2^{\alpha+1}8^{\alpha}C_{\alpha}(\Phi)\leq 2^{4\alpha+1}C_{\alpha}(\Phi),
$$

$$
2^{\alpha+1}C_{\alpha}(\Phi)\left(\sum_{j>N}\sum_{\substack{l\geq j\\ n\geq 0}}\frac{1}{2^{l+n}}\right)^{\alpha}\leq 2^{4\alpha+1}C_{\alpha}(\Phi)\frac{1}{2^{N\alpha}},
\tag{3.7}
$$

então pelo Teorema do Valor Médio, por (3.4) e por (3.6), temos

$$\begin{aligned}
|u(x)-u(y)| &\leq C_\alpha(\Phi)\sum_{j=0}^{N} d(\sigma^{je_1}(x),\sigma^{je_1}(y))^\alpha + C_\alpha(\Phi)\sum_{j=0}^{N} d(\sigma^{je_1}(\pi_1(x)),\sigma^{je_1}(\pi_1(y)))^\alpha \\
&+ 2^{4\alpha+1}C_\alpha(\Phi)\frac{1}{2^{N\alpha}} \\
&\overset{(3.6)}{\leq} C_\alpha(\Phi)d(x,y)^\alpha\sum_{j=0}^{N}2^{j\alpha} + C_\alpha(\Phi)d(\pi_1(x),\pi_1(y))^\alpha\sum_{j=0}^{N}2^{j\alpha} + 2^{4\alpha+1}C_\alpha(\Phi)\frac{1}{2^{N\alpha}} \\
&\leq C_\alpha(\Phi)\frac{1}{2^{(2N-1)\alpha}}\sum_{j=0}^{N}2^{j\alpha} + C_\alpha(\Phi)\frac{1}{2^{(2N-1)\alpha}}\sum_{j=0}^{N}2^{j\alpha} + 2^{4\alpha+1}C_\alpha(\Phi)\frac{1}{2^{N\alpha}} \\
&= 2C_\alpha(\Phi)\frac{1}{2^{N\alpha}}\sum_{j=0}^{N}\frac{2^{j\alpha}}{2^{(N-1)\alpha}} + 2^{4\alpha+1}C_\alpha(\Phi)\frac{1}{2^{N\alpha}} \\
&= 2C_\alpha(\Phi)\frac{1}{2^{N\alpha}}\left(\frac{2^{(N+1)\alpha}-1}{(2^\alpha-1)2^{(N-1)\alpha}}\right) + 2^{4\alpha+1}C_\alpha(\Phi)\frac{1}{2^{N\alpha}} \\
&= 2\left[\left(\frac{2^{(N+1)\alpha}-1}{(2^\alpha-1)2^{(N-1)\alpha}}\right)+2^{4\alpha}\right]C_\alpha(\Phi)\frac{1}{2^{N\alpha}} \\
&\overset{(3.4)}{\leq} 2\left[\left(\frac{2^{(N+1)\alpha}-1}{(2^\alpha-1)2^{(N-1)\alpha}}\right)+2^{4\alpha}\right]C_\alpha(\Phi)d(x,y)^{\frac{\alpha}{2}} \equiv C_{\frac{\alpha}{2}}(u)d(x,y)^{\frac{\alpha}{2}},
\end{aligned}$$

pois, por (3.4), temos $\frac{1}{2^{N\alpha}} \leq d(x,y)^{\frac{\alpha}{2}}$. Portanto $|u(x)-u(y)| \leq C_{\frac{\alpha}{2}}(u)d(x,y)^{\frac{\alpha}{2}}$, o que implica $u \in \mathcal{H}^{\frac{\alpha}{2}}(\Omega,d)$.

Nas mesmas condições de u, temos $\psi \in \mathcal{H}^{\frac{\alpha}{2}}(\Omega,d)$ com $\psi = \Phi - u + u\circ\sigma^{e_1}$. De fato,

$$\begin{aligned}
|\psi(x)-\psi(y)| &= |\Phi(x)-u(x)+u\circ\sigma^{e_1}(x)-\Phi(y)+u(y)-u\circ\sigma^{e_1}(y)| \\
&\leq |\Phi(x)-\Phi(y)|+|u(x)-u(y)|+|u\circ\sigma^{e_1}(x)-u\circ\sigma^{e_1}(y)| \\
&\overset{(3.6)}{\leq} C_\alpha(\Phi)d(x,y)^\alpha + C_{\frac{\alpha}{2}}(u)d(x,y)^{\frac{\alpha}{2}} + 2^{\frac{\alpha}{2}}C_{\frac{\alpha}{2}}(u)d(x,y)^{\frac{\alpha}{2}} \\
&= C_\alpha(\Phi)d(x,y)^\alpha + (1+2^{\frac{\alpha}{2}})C_{\frac{\alpha}{2}}(u)d(x,y)^{\frac{\alpha}{2}} \\
&= \left[C_\alpha(\Phi)d(x,y)^{\frac{\alpha}{2}} + (1+2^{\frac{\alpha}{2}})C_{\frac{\alpha}{2}}(u)\right]d(x,y)^{\frac{\alpha}{2}} \\
&\leq \left(\frac{C_\alpha(\Phi)}{2^{N\alpha-\frac{\alpha}{2}}} + (1+2^{\frac{\alpha}{2}})C_{\frac{\alpha}{2}}(u)\right)d(x,y)^{\frac{\alpha}{2}} \equiv C_{\frac{\alpha}{2}}(\psi)d(x,y)^{\frac{\alpha}{2}}.
\end{aligned}$$

O mesmo argumento usado na função Φ pode ser aplicado para a função ψ trocando σ^{e_1} por σ^{e_2} e a projeção π_1 por

$$(\pi_2(x))_m = \begin{cases} x_m & \text{se } m_2 \geq 0 \\ 0 & \text{se } m_2 < 0 \end{cases},$$

definindo $v(x) = \sum_{j\geq 0}\left(\psi\circ\sigma^{je_2}(x) - \psi\circ\sigma^{je_2}(\pi_2(x))\right)$ e $v - v\circ\sigma^{e_2} = \psi - \phi$.

Como $\Phi \in \mathcal{H}^\alpha(\Omega,d)$ implica $u,\psi \in \mathcal{H}^{\frac{\alpha}{2}}(\Omega,d)$, usando o mesmo raciocínio, temos que $\psi \in \mathcal{H}^{\frac{\alpha}{2}}(\Omega, d)$ implica $v, \phi \in \mathcal{H}^{\frac{\alpha}{4}}(\Omega, d)$. De fato, similarmente a u, temos

$$d(\sigma^{je_2}(x), \sigma^{je_2}(\pi_2(x)))^{\frac{\alpha}{2}} \leq 2^{\frac{\alpha}{2}} \left(\sum_{\substack{l \geq j \\ n \geq 0}} \frac{1}{2^{l+n}} \right)^{\frac{\alpha}{2}},$$

e $v(x) \leq 2^{2\alpha} C_{\frac{\alpha}{2}}(\psi)$, então v está bem definida. Então,

$$\begin{aligned}
v(x) &= \sum_{j \geq 0} \left(\psi \circ \sigma^{je_2}(x) - \psi \circ \sigma^{je_2}(\pi_2(x)) \right) \\
&= \sum_{j=0}^{N} \left(\psi \circ \sigma^{je_2}(x) - \psi \circ \sigma^{je_2}(\pi_2(x)) \right) + \sum_{j > N} \left(\psi \circ \sigma^{je_2}(x) - \psi \circ \sigma^{je_2}(\pi_2(x)) \right) \\
&\leq \sum_{j=0}^{N} \left(\psi \circ \sigma^{je_2}(x) - \psi \circ \sigma^{je_2}(\pi_2(x)) \right) + 2^{\frac{\alpha}{2}} C_{\frac{\alpha}{2}}(\psi) \left(\sum_{j > N} \sum_{\substack{l \geq j \\ n \geq 0}} \frac{1}{2^{l+n}} \right)^{\frac{\alpha}{2}},
\end{aligned}$$

e o mesmo é valido para $v(y)$, isto é,

$$v(y) \leq \sum_{j=0}^{N} \left(\psi \circ \sigma^{je_2}(y) - \psi \circ \sigma^{je_2}(\pi_2(y)) \right) + 2^{\frac{\alpha}{2}} C_{\frac{\alpha}{2}}(\psi) \left(\sum_{j > N} \sum_{\substack{l \geq j \\ n \geq 0}} \frac{1}{2^{l+n}} \right)^{\frac{\alpha}{2}}.$$

Tomando $x, y \in \Omega$ tais que $\frac{1}{2^{4N}} \leq d(x,y) \leq \frac{1}{2^{4N-1}}$, então

$$\frac{1}{2^{2N\alpha}} \leq d(x,y)^{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{1}{2^{2N\alpha - \frac{\alpha}{2}}} \tag{3.8}$$

para algum $N \in \mathbb{N}$. Então

$$\begin{aligned}
|v(x) - v(y)| &\leq \sum_{j=0}^{N} |\psi \circ \sigma^{je_2}(x) - \psi \circ \sigma^{je_2}(y)| + \sum_{j=0}^{N} |\psi \circ \sigma^{je_2}(\pi_2(x)) - \psi \circ \sigma^{je_2}(\pi_2(y))| \\
&+ 2^{\frac{\alpha}{2}+1} C_{\frac{\alpha}{2}}(\psi) \left(\sum_{j > N} \sum_{\substack{l \geq j \\ n \geq 0}} \frac{1}{2^{l+n}} \right)^{\frac{\alpha}{2}} \\
&\overset{(3.7)}{\leq} C_{\frac{\alpha}{2}}(\psi) \sum_{j=0}^{N} d(\sigma^{je_2}(x), \sigma^{je_2}(y))^{\frac{\alpha}{2}} + C_{\frac{\alpha}{2}}(\psi) \sum_{j=0}^{N} d(\sigma^{je_2}(\pi_2(x)), \sigma^{je_2}(\pi_2(y)))^{\frac{\alpha}{2}} \\
&+ 2^{2\alpha+1} C_{\frac{\alpha}{2}}(\psi) \frac{1}{2^{N\alpha}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|v(x)-v(y)| &\leq C_{\frac{\alpha}{2}}(\psi)\left(\sum_{j=0}^{N} 2^{j\frac{\alpha}{2}} d(x,y)^{\frac{\alpha}{2}} + \sum_{j=0}^{N} 2^{j\frac{\alpha}{2}} d(\pi_2(x),\pi_2(y))^{\frac{\alpha}{2}} + 2^{2\alpha+1}\frac{1}{2^{N\alpha}}\right) \\
&\overset{(3.8)}{\leq} C_{\frac{\alpha}{2}}(\psi)\frac{1}{2^{N\alpha}}\left(2\sum_{j=0}^{N}\frac{2^{j\frac{\alpha}{2}}}{2^{N\alpha-\frac{\alpha}{2}}} + 2^{2\alpha+1}\right) \\
&= C_{\frac{\alpha}{2}}(\psi)\frac{1}{2^{N\alpha}}\left(\frac{2^{(1-2N)\frac{\alpha}{2}+1}\left(2^{(N+1)\frac{\alpha}{2}}-1\right)}{2^{\frac{\alpha}{2}}-1} + 2^{2\alpha+1}\right) \\
&\overset{(3.8)}{\leq} \left(\frac{2^{(1-2N)\frac{\alpha}{2}+1}\left(2^{(N+1)\frac{\alpha}{2}}-1\right)}{2^{\frac{\alpha}{2}}-1} + 2^{2\alpha+1}\right) C_{\frac{\alpha}{2}}(\psi)d(x,y)^{\frac{\alpha}{4}} \equiv C_{\frac{\alpha}{4}}(v)d(x,y)^{\frac{\alpha}{4}}.
\end{aligned}$$

Portanto $|v(x)-v(y)| \leq C_{\frac{\alpha}{4}}(v)d(x,y)^{\frac{\alpha}{4}}$ implica $v \in \mathcal{H}^{\frac{\alpha}{4}}(\Omega,d)$. Como $\phi = \psi - v + v\circ\sigma^{e_2}$,

$$\begin{aligned}
|\phi(x)-\phi(y)| &\leq |\psi(x)-\psi(y)| + |v(x)-v(y)| + |v\circ\sigma^{e_2}(x) - v\circ\sigma^{e_2}(y)| \\
&\overset{(3.6)}{\leq} C_{\frac{\alpha}{2}}(\psi)d(x,y)^{\frac{\alpha}{2}} + C_{\frac{\alpha}{4}}(v)d(x,y)^{\frac{\alpha}{4}} + 2^{\frac{\alpha}{4}}C_{\frac{\alpha}{4}}(v)d(x,y)^{\frac{\alpha}{4}} \\
&= \left[C_{\frac{\alpha}{2}}(\psi)d(x,y)^{\frac{\alpha}{4}} + (1+2^{\frac{\alpha}{4}})C_{\frac{\alpha}{4}}(v)\right] d(x,y)^{\frac{\alpha}{4}} \\
&\overset{(3.8)}{\leq} \left(\frac{C_{\frac{\alpha}{2}}(\psi)}{2^{N\alpha-\frac{\alpha}{4}}} + (1+2^{\frac{\alpha}{4}})C_{\frac{\alpha}{4}}(v)\right) d(x,y)^{\frac{\alpha}{4}} \equiv C_{\frac{\alpha}{4}}(\phi)d(x,y)^{\frac{\alpha}{4}},
\end{aligned}$$

e $|\phi(x)-\phi(y)| \leq C_{\frac{\alpha}{4}}(\phi)d(x,y)^{\frac{\alpha}{4}}$. Assim, existem $v,\phi \in \mathcal{H}^{\frac{\alpha}{4}}(\Omega,d)$ tais que $\psi = \phi + v - v\circ\sigma^{e_2}$. Portanto, por (3.3) segue $\Phi = \psi + u - u\circ\sigma^{e_1} = \phi + v - v\circ\sigma^{e_2} + u - u\circ\sigma^{e_1}$, e daí

$$\Phi = \phi + u - u\circ\sigma^{e_1} + v - v\circ\sigma^{e_2}. \tag{3.9}$$

Por construção, temos $\phi(x) = \sum_{j\geq 0}\left(\psi\circ\sigma^{je_2}(\pi_2(x)) - \psi\circ\sigma^{je_2}(\pi_2(\sigma^{e_2}(x)))\right)$, e $x_{|\mathbb{N}\times\mathbb{Z}} = y_{|\mathbb{N}\times\mathbb{Z}}$ implica $\psi(x) = \psi(y)$, o que mostra que $\phi(x) = \phi(y)$ se $x_{|\mathbb{N}^2} = y_{|\mathbb{N}^2}$, o que conclui a prova. ■

3.1.1 Estados de Equilíbrio

Um potencial $\phi - \psi$ é cohomólogo a uma constante $c \in \mathbb{R}$ quando

$$\phi - \psi = c + u\circ\sigma^{e_1} - u + v\circ\sigma^{e_2} - v$$

para alguma função $u : \Omega \to \mathbb{R}$ Hölder e alguma função $v : \Omega \to \mathbb{R}$ Hölder. Dizer que ϕ é cohomólogo a ψ é o mesmo que dizer que $\phi - \psi$ é cohomólogo a zero. Considere o conjunto das medidas invariantes por σ^{e_1} e σ^{e_2} simultaneamente e denote-o por $\mathcal{M}_\sigma$. Dado o potencial ϕ, defina a quantidade $\wp : C(X) \to \mathbb{R}$, um análogo à pressão topológica do potencial ϕ, dada por

$$\wp(\phi) = \sup_{\mu\in\mathcal{M}_\sigma}\left\{h_\mu(\sigma) + \int \phi d\mu\right\}.$$

A dinâmica $\sigma^{(i,j)} : \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2} \to \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2}$ denotada simplesmente por σ é uma ação do grupo $(\mathbb{Z}^2,+)$, que para os nossos propósitos será considerada no semi-grupo $(\mathbb{Z}^2_+,+)$.

Em [27] Klaus Schmidt define entropia de ações de grupos $\mathbb{Z}^d$. Para mais informações, consulte também [14] e [23].

Teorema 3.2. *Sejam ϕ, ψ dois potenciais definidos em Ω. Se $\phi - \psi$ é cohomólogo a alguma constante $c \in \mathbb{R}$, então $\mu_\phi = \mu_\psi$, isto é, o estado de equilíbrio para ϕ (respectivamente ψ) é estado de equilíbrio para ψ (respectivamente ϕ).*

Demonstração. Ver Teorema 4.3. ■

Consideremos uma caixa quadrada Λ_L de lado L dada por

$$\Lambda_L = \begin{matrix} x_{(n,0)} & \cdots & x_{(n,n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{(0,0)} & \cdots & x_{(0,n)} \end{matrix} .$$

Como $\Phi = \phi + u - u \circ \sigma^{e_1} + v - v \circ \sigma^{e_2}$, a soma de Birkhoff em Λ_L, para $x \in \Lambda_L$ nos dá

$$\sum_{i,j=1-L}^{L-1} \Phi \circ \sigma^{(i,j)}(x) = \sum_{i,j=0}^{L-1} \phi \circ \sigma^{(i,j)}(x) + \sum_{i=0}^{L-1} \left(u \circ \sigma^{(0,i)} - u \circ \sigma^{(L,i)} + v \circ \sigma^{(i,0)} - v \circ \sigma^{(i,L)} \right)(x).$$

De fato, a função ϕ depende de L^2 sítios, já as funções u, v dependem de menos que $4L$ sítios. Como $|\Lambda_L| = L^2$ e fazendo

$$c = c(x) = \max_{0 \le i \le L-1} \left\{ |u \circ \sigma^{(0,i)}(x)|, |u \circ \sigma^{(L,i)}(x)|, |v \circ \sigma^{(i,0)}(x)|, |v \circ \sigma^{(i,L)}(x)| \right\},$$

logo

$$\left| \frac{1}{|\Lambda_L|} \sum_{i=0}^{L-1} \left(u \circ \sigma^{(0,i)} - u \circ \sigma^{(L,i)} + v \circ \sigma^{(i,0)} - v \circ \sigma^{(i,L)} \right)(x) \right| \le \frac{4Lc}{L^2} = \frac{4c}{L}.$$

Fazendo $L \to \infty$, ou seja, quando $\Lambda_L \uparrow \mathbb{N}^2$, temos

$$\left| \lim_{L \to \infty} \frac{1}{|\Lambda_L|} \sum_{i=0}^{L-1} \left(u \circ \sigma^{(0,i)} - u \circ \sigma^{(L,i)} + v \circ \sigma^{(i,0)} - v \circ \sigma^{(i,L)} \right)(x) \right| \le \lim_{L \to \infty} \frac{4c}{L} = 0.$$

Assim,

$$\left| \frac{1}{2L^2 - L} \sum_{i,j=1-L}^{L-1} \Phi \circ \sigma^{(i,j)}(x) \right| \le \left| \frac{1}{|\Lambda_L|} \sum_{i,j=0}^{L-1} \phi \circ \sigma^{(i,j)}(x) \right| + \frac{4c}{L},$$

$$\left| \frac{1}{2L^2 - L} \sum_{i,j=1-L}^{L-1} \Phi \circ \sigma^{(i,j)}(x) - \frac{1}{L^2} \sum_{i,j=0}^{L-1} \phi \circ \sigma^{(i,j)}(x) \right| \le \frac{4c}{L}.$$

Para L suficientemente grande e quase todo ponto x temos

$$\frac{1}{2L^2 - L} \sum_{i,j=1-L}^{L-1} \Phi \circ \sigma^{(i,j)}(x) \approx \frac{1}{L^2} \sum_{i,j=0}^{L-1} \phi \circ \sigma^{(i,j)}(x). \tag{3.10}$$

Em outros termos,

$$\frac{1}{2L^2 - L} \sum_{i,j=1-L}^{L-1} \Phi \circ \sigma^{(i,j)}(x) = \frac{1}{L^2} \sum_{i,j=0}^{L-1} \phi \circ \sigma^{(i,j)}(x) + O\left(\frac{1}{L}\right).$$

Pelo Teorema 4.3 temos $\eta_\Phi = \eta_\phi$, logo por (3.10), para cada $x \in \Lambda_L$ com L suficientemente grande, temos

$$\frac{\eta_\Phi(\Lambda_L)}{\exp\left(\sum_{(i,j)\in\Lambda} \Phi \circ \sigma^{(i,j)}(x)\right)} \approx \frac{\eta_\phi(\Lambda_L) \cdot e^{\left(2-\frac{1}{L}\right)}}{\exp\left(\sum_{(i,j)\in\Lambda} \phi \circ \sigma^{(i,j)}(x)\right)}.$$

Em particular, considerando $u = \log f \circ \sigma^{e_2}$, $v = \log f \circ \sigma^{e_1}$ e $c = \log \lambda\kappa$, temos

$$\Phi = \phi - \log f \circ \sigma^{(1,1)} + \log f \circ \sigma^{e_2} - \log f \circ \sigma^{(1,1)} + \log f \circ \sigma^{e_1} - \log \lambda\kappa.$$

Capítulo 4

Operadores de Transferência Compostos

Considere $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}^2}$ e os potenciais $g, h : \Omega \to \mathbb{R}$. Sejam $\psi_1(x) = \displaystyle\int g(yx)\varphi(yx)d\nu(y)$ e $\psi_2(x) = \displaystyle\int h\left(\frac{x}{z}\right)\varphi\left(\frac{x}{z}\right)d\nu(z)$. Para $y, z \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, definimos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{h,e_2} \circ \mathcal{L}_{g,e_1}\varphi(x) &= \mathcal{L}_{h,e_2}\left(\int g(yx)\varphi(yx)d\nu(y)\right) = \mathcal{L}_{h,e_2}\psi_1(x) \\
&= \int h\left(\frac{x}{z}\right)\psi_1\left(\frac{x}{z}\right)d\nu(z) \\
&= \int h\left(\frac{x}{z}\right)\int g\left(\frac{yx}{z}\right)\varphi\left(\frac{yx}{z}\right)d\nu(y)d\nu(z), \qquad (4.1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{g,e_1} \circ \mathcal{L}_{h,e_2}\varphi(x) &= \mathcal{L}_{g,e_1}\left(\int h\left(\frac{x}{z}\right)\varphi\left(\frac{x}{z}\right)d\nu(z)\right) = \mathcal{L}_{g,e_1}\psi_2(x) \\
&= \int g(yx)\psi_2(yx)d\nu(y) \\
&= \int g\left(yx\right)\int h\left(y\frac{x}{z}\right)\varphi\left(y\frac{x}{z}\right)d\nu(z)d\nu(y). \qquad (4.2)
\end{aligned}$$

Dado $m \in \mathbb{N}$, com $i_k \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, defina

$$\mathcal{L}^m_{g_1,e_1}\varphi(x) = \int_{\mathbf{i}=(i_{m-1}\dots i_0)} \exp\left(\sum_{i=0}^{m-1} g_1 \circ \sigma^{ie_1}(\mathbf{i}x)\right)\varphi(\mathbf{i}x)d\prod_{k=0}^{m-1}\mu(i_k).$$

4.1 Operadores Compostos Comutativos

Veremos exemplos de potenciais $g, h : \Omega \to \mathbb{R}$ de forma que os operadores de transferência compostos sejam comutativos. Consideremos os conjuntos

$$C_0 = \{x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : x_{(0,0)} = 0\} \text{ e } C_1 = \{x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : x_{(0,0)} = 1\}.$$

Seja $g : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que g depende apenas de um sítio, ou seja, $g(x) = g(x_{(0,0)})$. Assim $g\left(\frac{x}{z}\right) = g(z_{(0,0)})$ e $g(yx) = g(y_{(0,0)})$. Daí, para $\varphi \in \mathbb{F}_\theta$,

$$\begin{aligned}\iint g\left(y\frac{x}{z}\right)\varphi\left(y\frac{x}{z}\right)d\nu(z)d\nu(y) &= \iint g(y_{(0,0)})\varphi\left(y\frac{x}{z}\right)d\nu(z)d\nu(y)\\ &= g(0)\int_{y\in C_0}\int\varphi\left(y\frac{x}{z}\right)d\nu(z)d\nu(y)\\ &+ g(1)\int_{y\in C_1}\int\varphi\left(y\frac{x}{z}\right)d\nu(z)d\nu(y),\end{aligned}$$

e por outro lado,

$$\begin{aligned}\iint g\left(\frac{yx}{z}\right)\varphi\left(\frac{yx}{z}\right)d\nu(y)d\nu(z) &= \iint g(z_{(0,0)})\varphi\left(\frac{yx}{z}\right)d\nu(y)d\nu(z)\\ &= g(0)\int_{z\in C_0}\int\varphi\left(\frac{yx}{z}\right)d\nu(y)d\nu(z)\\ &+ g(1)\int_{z\in C_1}\int\varphi\left(\frac{yx}{z}\right)d\nu(y)d\nu(z).\end{aligned}$$

Assim,

$$\iint g\left(y\frac{x}{z}\right)\varphi\left(y\frac{x}{z}\right)d\nu(z)d\nu(y) = \iint g\left(\frac{yx}{z}\right)\varphi\left(\frac{yx}{z}\right)d\nu(y)d\nu(z). \tag{4.3}$$

Logo

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{g,e_1}\circ\mathcal{L}_{g,e_2}\varphi(x) &= \iint g(yx)\,g\left(y\frac{x}{z}\right)\varphi\left(y\frac{x}{z}\right)d\nu(z)d\nu(y)\\ &= \iint g\left(y_{(0,0)}\right)g\left(y\frac{x}{z}\right)\varphi\left(y\frac{x}{z}\right)d\nu(z)d\nu(y)\\ &= \sum_{i\in\{0,1\}}\int_{y\in C_i} g(i)\int g\left(y\frac{x}{z}\right)\varphi\left(y\frac{x}{z}\right)d\nu(z)d\nu(y)\\ &\overset{(4.3)}{=} \sum_{i\in\{0,1\}}\int_{z\in C_i}\int g(i)\,g\left(\frac{yx}{z}\right)\varphi\left(\frac{yx}{z}\right)d\nu(y)d\nu(z)\\ &= \iint g\left(z_{(0,0)}\right)g\left(\frac{yx}{z}\right)\varphi\left(\frac{yx}{z}\right)d\nu(y)d\nu(z)\\ &= \iint g\left(\frac{x}{z}\right)g\left(\frac{yx}{z}\right)\varphi\left(\frac{yx}{z}\right)d\nu(y)d\nu(z)\\ &= \mathcal{L}_{g,e_2}\circ\mathcal{L}_{g,e_1}\varphi(x).\end{aligned}$$

Portanto para $g(x) = g(x_{(0,0)})$, de (4.1) e (4.2) temos $\mathcal{L}_{g,e_2}\circ\mathcal{L}_{g,e_1} = \mathcal{L}_{g,e_1}\circ\mathcal{L}_{g,e_2}$.

Dadas as funções $g, h : \Omega \to \mathbb{R}$ dependendo de apenas dois sítios cada, com $g(x) = g(x_{(0,0)}, x_{(0,1)})$ e $h(x) = h(x_{(0,0)}, x_{(1,0)})$, considere os potenciais e^g, e^h. O Lema 4.1.1 nos diz que, nessas condições, os operadores de transferência comutam.

Lema 4.1.1. *Sejam $g, h : \Omega \to \mathbb{R}$ funções quaisquer tais que $g(x) = g(x_{(0,0)}, x_{(0,1)})$ e $h(x) = h(x_{(0,0)}, x_{(1,0)})$. Então os operadores de transferência comutam, isto é,*

$$\mathcal{L}_{g,e_1}\circ\mathcal{L}_{h,e_2} = \mathcal{L}_{h,e_2}\circ\mathcal{L}_{g,e_1}.$$

Demonstração. Dadas duas funções simétricas, $g, h : \Omega \to \mathbb{R}$ com

$$g(x) = g(x_{(0,0)}, x_{(0,1)}) = g(x_{(0,1)}, x_{(0,0)}) \text{ e } h(x) = h(x_{(0,0)}, x_{(1,0)}) = h(x_{(1,0)}, x_{(0,0)}).$$

Assim $g(y\frac{x}{z}) = g(y_{(0,0)}, y_{(0,1)})$, $g(\frac{yx}{z}) = g(z_{(0,0)}, y_{(0,0)})$, $h(y\frac{x}{z}) = h(y_{(0,0)}, z_{(0,0)})$, $h(\frac{yx}{z}) = h(z_{(0,0)}, z_{(1,0)})$, $g(yx) = g(y_{(0,0)}, y_{(0,1)})$ e $h(\frac{x}{z}) = h(z_{(0,0)}, z_{(1,0)})$. Temos $\mathcal{L}_{g,e_2} \circ \mathcal{L}_{h,e_1} = \mathcal{L}_{h,e_1} \circ \mathcal{L}_{g,e_2}$, pois

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{g,e_1} \circ \mathcal{L}_{h,e_2}\varphi(x) &= \iint e^{g(yx)} e^{h\left(y\frac{x}{z}\right)} \varphi\left(y\frac{x}{z}\right) d\nu(z) d\nu(y) \\
&= \iint e^{g(y_{(0,0)}, y_{(0,1)})} e^{h(y_{(0,0)}, z_{(0,0)})} \varphi\left(y\frac{x}{z}\right) d\nu(z) d\nu(y),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{h,e_2} \circ \mathcal{L}_{g,e_1}\varphi(x) &= \iint e^{h\left(\frac{x}{z}\right)} e^{g\left(\frac{yx}{z}\right)} \varphi\left(\frac{yx}{z}\right) d\nu(y) d\nu(z) \\
&= \iint e^{h(z_{(0,0)}, z_{(1,0)})} e^{g(z_{(0,0)}, y_{(0,0)})} \varphi\left(\frac{yx}{z}\right) d\nu(y) d\nu(z).
\end{aligned}$$

Observe que o mesmo vale para para as funções anti-simétricas, isto é, funções que satisfazem a condição $f(x,y) = -f(y,x)$, bastando substituir as funções acima por $g(x) = g(x_{(0,0)}, x_{(0,1)}) = -g(x_{(0,1)}, x_{(0,0)})$ e $h(x) = h(x_{(0,0)}, x_{(1,0)}) = -h(x_{(1,0)}, x_{(0,0)})$. É fato que podemos escrever qualquer função como sendo a soma de uma função simétrica com uma função anti-simétrica, isto é,

$$f(x,y) = \frac{f(x,y) + f(y,x)}{2} + \frac{f(x,y) - f(y,x)}{2},$$

onde $f(x,y) + f(y,x) = f(y,x) + f(x,y)$ e $f(x,y) - f(y,x) = -(f(y,x) - f(x,y))$. A comutatividade dos operadores de transferência também vale para para a soma de funções simétricas e funções anti-simétricas, pois dadas $g_1(x) = g_1(x_{(0,0)}, x_{(0,1)}) = g_1(x_{(0,1)}, x_{(0,0)})$, $g_2(x) = g_2(x_{(0,0)}, x_{(0,1)}) = -g_2(x_{(0,1)}, x_{(0,0)})$, $h_1(x) = h_1(x_{(0,0)}, x_{(1,0)}) = h_1(x_{(1,0)}, x_{(0,0)})$ e $h_2(x) = h_2(x_{(0,0)}, x_{(1,0)}) = -h_2(x_{(1,0)}, x_{(0,0)})$, com $g = 2g_3 = g_1 + g_2$ e $h = 2h_3 = h_1 + h_2$, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{g,e_1} \circ \mathcal{L}_{h,e_2}\varphi(x) &= \iint e^{g(yx)} e^{h\left(y\frac{x}{z}\right)} \varphi\left(y\frac{x}{z}\right) d\nu(z) d\nu(y) \\
&= \iint e^{g(y_{(0,0)}, y_{(0,1)})} e^{h(y_{(0,0)}, z_{(0,0)})} \varphi\left(y\frac{x}{z}\right) d\nu(z) d\nu(y) \\
&= \iint e^{(g_1+g_2)(y_{(0,0)}, y_{(0,1)})} e^{(h_1+h_2)(y_{(0,0)}, z_{(0,0)})} \varphi\left(y\frac{x}{z}\right) d\nu(z) d\nu(y) \\
&= \iint e^{(g_1-g_2)(y_{(0,1)}, y_{(0,0)})} e^{(h_1-h_2)(z_{(0,0)}, y_{(0,0)})} \varphi\left(y\frac{x}{z}\right) d\nu(z) d\nu(y),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{h,e_2} \circ \mathcal{L}_{g,e_1}\varphi(x) &= \iint e^{h\left(\frac{x}{z}\right)} e^{g\left(\frac{yx}{z}\right)} \varphi\left(\frac{yx}{z}\right) d\nu(y) d\nu(z) \\
&= \iint e^{h(z_{(0,0)}, z_{(1,0)})} e^{g(z_{(0,0)}, y_{(0,0)})} \varphi\left(\frac{yx}{z}\right) d\nu(y) d\nu(z) \\
&= \iint e^{(h_1+h_2)(z_{(0,0)}, z_{(1,0)})} e^{(g_1+g_2)(z_{(0,0)}, y_{(0,0)})} \varphi\left(\frac{yx}{z}\right) d\nu(y) d\nu(z) \\
&= \iint e^{(g_1-g_2)(y_{(0,0)}, z_{(0,0)})} e^{(h_1-h_2)(z_{(1,0)}, z_{(0,0)})} \varphi\left(\frac{yx}{z}\right) d\nu(y) d\nu(z).
\end{aligned}$$

Dessa forma, a comutatividade dos operadores, $\mathcal{L}_{g,e_2} \circ \mathcal{L}_{h,e_1} = \mathcal{L}_{h,e_1} \circ \mathcal{L}_{g,e_2}$, vale para quaisquer funções g, h satisfazendo $g(x) = g(x_{(0,0)}, x_{(0,1)})$ e $h(x) = h(x_{(0,0)}, x_{(1,0)})$. ■

Por simplicidade, denotemos os potenciais que tornam os operadores comutativos por ϖ.

Proposição 4.1.2. *Seja $\varpi : \Omega \to \mathbb{R}$ um potencial que torna os operadores comutativos. Então, para todo $m, n \in \mathbb{N}$,*

$$\mathcal{L}^n_{\varpi,e_1} \circ \mathcal{L}^m_{\varpi,e_2} = \mathcal{L}^m_{\varpi,e_2} \circ \mathcal{L}^n_{\varpi,e_1}.$$

Demonstração. Provemos por indução. Fixando $n = 1$, consideremos a indução sobre m. Seja $m = 1$, então por hipótese temos $\mathcal{L}_{\varpi,e_1} \circ \mathcal{L}_{\varpi,e_2} = \mathcal{L}_{\varpi,e_2} \circ \mathcal{L}_{\varpi,e_1}$. Supondo válido $\mathcal{L}_{\varpi,e_1} \circ \mathcal{L}^k_{\varpi,e_2} = \mathcal{L}^k_{\varpi,e_2} \circ \mathcal{L}_{\varpi,e_1}$ para $m = k$, temos para $m = k+1$:

$$\mathcal{L}_{\varpi,e_1} \circ \mathcal{L}^{k+1}_{\varpi,e_2} = \left(\mathcal{L}_{\varpi,e_1} \circ \mathcal{L}^k_{\varpi,e_2}\right) \circ \mathcal{L}_{\varpi,e_2} = \left(\mathcal{L}^k_{\varpi,e_2} \circ \mathcal{L}_{\varpi,e_1}\right) \circ \mathcal{L}_{\varpi,e_2} = \mathcal{L}^{k+1}_{\varpi,e_2} \circ \mathcal{L}_{\varpi,e_1},$$

e provamos a indução sobre m. Supondo válido $\mathcal{L}^k_{\varpi,e_1} \circ \mathcal{L}^m_{\varpi,e_2} = \mathcal{L}^m_{\varpi,e_2} \circ \mathcal{L}^k_{\varpi,e_1}$ para $n = k$, para $n = k+1$, temos

$$\mathcal{L}^{k+1}_{\varpi,e_1} \circ \mathcal{L}^m_{\varpi,e_2} = \mathcal{L}_{\varpi,e_1} \circ \left(\mathcal{L}^k_{\varpi,e_1} \circ \mathcal{L}^m_{\varpi,e_2}\right) = \mathcal{L}_{\varpi,e_1} \circ \left(\mathcal{L}^m_{\varpi,e_2} \circ \mathcal{L}^k_{\varpi,e_1}\right) = \mathcal{L}^m_{\varpi,e_2} \circ \mathcal{L}^{k+1}_{\varpi,e_1},$$

o que prova a indução sobre n. Portanto, para todo $m, n \in \mathbb{N}$, temos

$$\mathcal{L}^n_{\varpi,e_1} \circ \mathcal{L}^m_{\varpi,e_2} = \mathcal{L}^m_{\varpi,e_2} \circ \mathcal{L}^n_{\varpi,e_1}. \blacksquare$$

4.1.1 Autovalores e Automedidas

Dada f autofunção de $\mathcal{L}_{\varpi,e_1}$ relativa ao autovalor λ, temos

$$\mathcal{L}_{\varpi,e_1} \circ \mathcal{L}_{\varpi,e_2}(f) = \mathcal{L}_{\varpi,e_2} \circ \mathcal{L}_{\varpi,e_1}(f) = \mathcal{L}_{\varpi,e_2}(\lambda f) = \lambda \mathcal{L}_{\varpi,e_2}(f),$$

o que nos dá $\mathcal{L}_{\varpi,e_1}(\mathcal{L}_{\varpi,e_2}(f)) = \lambda \mathcal{L}_{\varpi,e_2}(f)$, logo $\mathcal{L}_{\varpi,e_2}(f)$ é também autofunção de $\mathcal{L}_{\varpi,e_1}$ associada a λ, mas pelo Teorema 2.1 o autovalor λ é simples, logo existe κ tal que $\mathcal{L}_{\varpi,e_2}(f) = \kappa f$, e $\kappa > 0$ pelo mesmo motivo que $\lambda > 0$, pois podemos reescrever o Teorema 2.1 para o operador $\mathcal{L}_{\varpi,e_2}$. Logo

$$\mathcal{L}_{\varpi,e_1} \circ \mathcal{L}_{\varpi,e_2}(f) = \lambda \kappa f, \tag{4.4}$$

e $\lambda\kappa$ é autovalor operador $\mathcal{L}_{\varpi,e_1} \circ \mathcal{L}_{\varpi,e_2} = \mathcal{L}_{\varpi,e_1} \circ \mathcal{L}_{\varpi,e_2}$. Uma vez que tanto λ quanto κ são autovalores simples, temos que $\lambda\kappa$ também é um autovalor simples para o operador composto. Como a medida de referência η satisfaz $\mathcal{L}^*_{\varpi,e_1}\eta = \lambda\eta$ então

$$\mathcal{L}^*_{\varpi,e_1} \circ \mathcal{L}^*_{\varpi,e_2}\eta = (\mathcal{L}_{\varpi,e_2} \circ \mathcal{L}_{\varpi,e_1})^*\eta = (\mathcal{L}_{\varpi,e_1} \circ \mathcal{L}_{\varpi,e_2})^*\eta = \mathcal{L}^*_{\varpi,e_2} \circ \mathcal{L}^*_{\varpi,e_1}\eta = \lambda \mathcal{L}^*_{\varpi,e_2}\eta,$$

logo $\mathcal{L}^*_{\varpi,e_1}(\mathcal{L}^*_{\varpi,e_2}\eta) = \lambda \mathcal{L}^*_{\varpi,e_2}\eta$ mostra que $\mathcal{L}^*_{\varpi,e_2}\eta$ é automedida de $\mathcal{L}^*_{\varpi,e_1}$ relativa ao autovalor λ, e novamente como λ é um autovalor simples, temos $\mathcal{L}^*_{\varpi,e_2}\eta = \kappa_1\eta$, para algum κ_1. De fato, $\kappa_1 = \kappa$, uma vez que

$$\kappa \int f d\eta = \int \kappa f d\eta = \int \mathcal{L}_{\varpi,e_2} f d\eta = \int f d(\mathcal{L}^*_{\varpi,e_2}\eta) = \int f d(\kappa_1\eta) = \kappa_1 \int f d\eta.$$

Assim, η é automedida do operador de transferência composto dual $(\mathcal{L}_{\varpi,e_1} \circ \mathcal{L}_{\varpi,e_2})^*$ com autovalor $\lambda\kappa$, isto é, $(\mathcal{L}_{\varpi,e_1} \circ \mathcal{L}_{\varpi,e_2})^*\eta = \lambda\kappa\eta$. Muitas vezes, η neste contexto é chamada de *medida conforme* (para detalhes, ver [8]).

Definição 4.1.3. Definimos $\mathbf{L}_\varpi := \mathcal{L}_{\varpi,e_1} \circ \mathcal{L}_{\varpi,e_2}$ com potencial ϖ. Além disso, definimos

$$\mathbf{L}_\varpi^{(m,n)} := \mathcal{L}_{\varpi,e_1}^m \circ \mathcal{L}_{\varpi,e_2}^n \qquad \text{e} \qquad \mathbf{L}_\varpi^{(m,n)^*} := (\mathcal{L}_{\varpi,e_1}^m \circ \mathcal{L}_{\varpi,e_2}^n)^* = \mathcal{L}_{\varpi,e_2}^{n^*} \circ \mathcal{L}_{\varpi,e_1}^{m^*}.$$

Com essa definição, por (4.4), vale $\mathbf{L}_\varpi f = \lambda\kappa f$.

Proposição 4.1.4. *Temos* $\mathbf{L}_\varpi^{(m,n)}(f) = \lambda^m\kappa^n f$ *e* $\mathbf{L}_\varpi^{(m,n)^*}\eta = \lambda^m\kappa^n\eta$.

Demonstração. Pela linearidade e comutatividade dos operadores, para $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\mathbf{L}_\varpi^{(n,n)}(f) = \mathbf{L}_\varpi^{(n-1,n-1)} \circ \mathbf{L}_\varpi(f) = \lambda\kappa\mathbf{L}_\varpi^{(n-1,n-1)}(f) = \cdots = \lambda^{n-1}\kappa^{n-1}\mathbf{L}_\varpi(f) = \lambda^n\kappa^n f.$$

Considerando $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $m > n$, temos

$$\mathbf{L}_\varpi^{(m,n)}(f) = \mathcal{L}_{\varpi,e_1}^{m-n} \circ \mathbf{L}_\varpi^{(n,n)}(f) = \mathcal{L}_{\varpi,e_1}^{m-n}(\lambda^n\kappa^n f) = \lambda^n\kappa^n\mathcal{L}_{\varpi,e_1}^{m-n}(f) = \lambda^m\kappa^n f.$$

As provas para $m < n$ e $\mathbf{L}_\varpi^{(m,n)^*}\eta = \lambda^m\kappa^n\eta$ são análogas. ∎

Considerando o potencial $\Phi = \Phi_1 \circ \sigma^{e_2} + \Phi_2$ com $\Phi_1 = \varpi + u - u \circ \sigma^{e_1} - c_1$ e $\Phi_2 = \varpi + v - v \circ \sigma^{e_2} - c_2$ onde $u = \log f$, $v = \log f$, $c_1 = \log\lambda$ e $c_2 = \log\kappa$, temos

$$\Phi\left(y\frac{x}{z}\right) = \Phi_1(yx) + \Phi_2\left(y\frac{x}{z}\right) = \varpi(yx) + \varpi\left(y\frac{x}{z}\right) + \log f\left(y\frac{x}{z}\right) - \log f(x) - \log\lambda\kappa. \tag{4.5}$$

Conforme o Teorema 3.1, para $\varpi' = \varpi \circ \sigma^{e_2} + \varpi$, $u' = u \circ \sigma^{e_2}$ e $v' = v = u$, temos

$$\Phi = \varpi' + u' - u' \circ \sigma^{e_1} + v' - v' \circ \sigma^{e_2} - c.$$

De fato, $\mathbf{L}_\Phi(1) = 1$, pois

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_\Phi(1) &= \iint \exp\left(\Phi_1(yx) + \Phi_2\left(y\frac{x}{z}\right)\right) 1 d\mu(y)d\mu(z) \\
&= \iint \exp\left(\varpi(yx) + \varpi\left(y\frac{x}{z}\right) + \log f\left(y\frac{x}{z}\right) - \log f(x) - \log\lambda\kappa\right) d\mu(y)d\mu(z) \\
&= \frac{1}{\lambda\kappa f(x)} \iint \exp\left(\varpi(yx) + \varpi\left(y\frac{x}{z}\right)\right) f\left(y\frac{x}{z}\right) d\mu(y)d\mu(z) \\
&= \frac{1}{\lambda\kappa f(x)}\mathbf{L}_\varpi(f) = \frac{1}{\lambda\kappa f(x)}\lambda\kappa f(x) = 1,
\end{aligned}$$

logo $\nu \in \mathcal{M}_\sigma(\Omega)$ é ponto fixo de $\mathbf{L}_\Phi^*$, isto é, $\mathbf{L}_\Phi^*\nu = \nu$, pois

$$\int 1 d(\mathbf{L}_\Phi^*\nu) = \int \mathbf{L}_\Phi(1)d\nu = \int 1 d\nu$$

e

$$\mathbf{L}_\Phi^*\nu = (\mathcal{L}_{\Phi_1,e_1} \circ \mathcal{L}_{\Phi_2,e_2})^*\nu = \mathcal{L}_{\Phi_2,e_2}^*\left(\mathcal{L}_{\Phi_1,e_1}^*\nu\right) = \mathcal{L}_{\Phi_2,e_2}^*\nu = \nu.$$

Além disso, ν é invariante para cada um dos shifts σ^{e_1} e σ^{e_2}. De fato, considere

$$
\begin{aligned}
\mathbf{L}_\Phi(1.f\circ\sigma^{e_2})(x) &= \mathcal{L}_{\Phi_1,e_1}\circ\mathcal{L}_{\Phi_2,e_2}(1.f\circ\sigma^{e_2})(x)\\
&= \mathcal{L}_{\Phi_1,e_1}\left(\int e^{\Phi_2\left(\frac{x}{z}\right)}1.f\circ\sigma^{e_2}\left(\frac{x}{z}\right)d\mu\right)\\
&= \mathcal{L}_{\Phi_1,e_1}\left(\int e^{\Phi_2\left(\frac{x}{z}\right)}1.f(x)d\mu\right)\\
&= \mathcal{L}_{\Phi_1,e_1}\left(f(x)\int e^{\Phi_2\left(\frac{x}{z}\right)}1d\mu\right)\\
&= \mathcal{L}_{\Phi_1,e_1}\left(f(x)\mathcal{L}_{\Phi_2,e_2}(1)\right)\\
&= \mathcal{L}_{\Phi_1,e_1}\left(f\right)(x), \qquad (4.6)
\end{aligned}
$$

então

$$
\begin{aligned}
\int f\circ\sigma^{e_2}(x)d\nu &= \int f\circ\sigma^{e_2}(x)d\left(\mathbf{L}_\Phi^*\nu\right)\\
&= \int \mathbf{L}_\Phi\left(f\circ\sigma^{e_2}\right)(x)d\nu\\
&\overset{(4.6)}{=} \int \mathcal{L}_{\Phi_1,e_1}\left(f\right)(x)d\nu\\
&= \int f(x)d\left(\mathcal{L}_{\Phi_1,e_1}^*\nu\right)\\
&= \int f(x)d\nu,
\end{aligned}
$$

o que mostra que ν é invariante por σ^{e_2}. O mesmo pode ser feito para σ^{e_1}.

4.1.2 Estados de Equilíbrio

Revisitando alguns conceitos e resultados, temos:

Lema 4.1.5. *Seja $(X,\mathcal{B},\mu)$ um espaço de probabilidade com $\mathcal{B}_1\subset\mathcal{B}_2\subset\cdots\subset\mathcal{B}_N\subset\mathcal{B}$ uma sequência de σ-álgebras e $\xi>0$. Se $F=\{x\in X:\max_{1\le n\le N}\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_n)(x)>\xi\}$ então para $f\in L^1(X,\mathcal{B},\mu)$,*

$$\mu(F)\le\frac{1}{\xi}\int|f|d\mu.$$

Demonstração. Veja Lema 2.3.8. ∎

A desigualdade do Lema 4.1.5 é muito similar a *desigualdade de Chebyshev* para $f\in L^1(X,\mathcal{B},\mu)$ e $\xi>0$ que pode ser escrita como

$$\mu(\{x\in X:f(x)>\xi\})\le\frac{1}{\xi}\int|f|d\mu.$$

Sejam $(Y_n)_{n\ge0}$ uma sequência de variáveis aleatórias no espaço de probabilidade $(X,\mathcal{B},\mu)$ e $(\mathcal{B}_n)_{n\ge0}$ uma sequência de sub-σ-álgebras em $\mathcal{B}$. A sequência $(\{Y_n,\mathcal{B}_n\})_{n\ge0}$ é um *martingal* se

(i) $\mathcal{B}_n\subset\mathcal{B}_{n+1}$,
(ii) Y_n é mensurável em $\mathcal{B}_n$,
(iii) $\mathbb{E}(|Y_n|)<\infty$,

(iv) Com probabilidade 1, tem-se $\mathbb{E}(Y_{n+k}|\mathcal{B}_n) = Y_n$, para $k \geq 1$.

Assim, dada um função $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$, a esperança condicional $\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_n)$ nas condições do Lema 4.1.5 é, para cada $n \geq 0$, um martingal. Claramente satisfaz as três primeiras condições e no caso da quarta, basta observar que, pelo item (iv) da Proposição 2.3.7, temos $\mathbb{E}(\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_{n+k})|\mathcal{B}_n) = \mathbb{E}(f|\mathcal{B}_n)$, para qualquer $k \geq 1$.

Teorema 4.1 (Teorema do Martingal Crescente)**.** *Seja $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$. Assuma que $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{B}_n \subset \cdots \subset \mathcal{B}$ é uma sequência crescente de σ-álgebras e que a união $\cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n$ gera $\mathcal{B}$ (denotanto $\mathcal{B}_n \to \mathcal{B}$). Então $\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_n) \to f$ em $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ e $\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_n)(x) \to f(x)$, μ-quase todo ponto x.*

Demonstração. Veja Teorema 2.3.9. ∎

Para uma função $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ e $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ uma sub-σ-álgebra, o Teorema do Martingal Crescente descreve como $\mathbb{E}(f|\mathcal{A})$ depende da σ-álgebra $\mathcal{A}$. Os conceitos que seguem são adaptados de [3].

Considere $x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}^2}$, $y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ e $z \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, sejam $\left[\frac{y}{z}\right] = \bigcup_{x \in \Omega} \left\{ y\frac{x}{z} \right\}$, $[\frac{y}{z}]^n \subset \{0,1\}^{\mathbb{N}^2}$ o produto cartesiano em $\{0,1\}^{\mathbb{N}^2}$ de caixas retangulares de tamanho $1 \times n$ e $n \times 1$ que se interceptam (nos extremos) na origem, $[x]_n \subset \{0,1\}^{\mathbb{N}^2}$ a caixa quadrada de tamanho $n \times n$ com um extremo na origem e a partição γ que gera a σ-álgebra $\mathcal{B}$ dos boreleanos de $\{0,1\}^{\mathbb{N}^2}$, defina

$$\mu_n \left[\frac{y}{z} | \sigma^{-(1,1)} x\right] := \frac{\mu\left([\frac{y}{z}]^n \cap \sigma^{-(1,1)}[x]_n\right)}{\mu([x]_n)} = \frac{\mu\left([y\frac{x}{z}]_{(n+1)\times(n+1)}\right)}{\mu([x]_n)} = \mu\left(\left[\frac{y}{z}\right]^n | \bigvee_{i,j=1}^{n-1} \sigma^{-(i,j)}\gamma\right)(x).$$

De fato, $\mu_n \geq 0$ pois $\mu \geq 0$ e $\mu_n(\emptyset) = 0$ pois $\mu(\emptyset) = 0$. Para $[\frac{y_i}{z}]^n \cap [\frac{y_j}{z}]^n = \emptyset$, $i \neq j$,

$$\begin{aligned}
\mu_n \left[\left(\frac{y_1}{z} \cup \cdots \cup \frac{y_k}{z}\right) | \sigma^{-(1,1)} x\right] &= \frac{\mu\left(\left([\frac{y_1}{z}]^n \cup \cdots \cup [\frac{y_k}{z}]^n\right) \cap \sigma^{-(1,1)}[x]_n\right)}{\mu([x]_n)} \\
&= \frac{\mu\left(\left([\frac{y_1}{z}]^n \cap \sigma^{-(1,1)}[x]_n\right) \cup \cdots \cup \left([\frac{y_k}{z}]^n \cap \sigma^{-(1,1)}[x]_n\right)\right)}{\mu([x]_n)} \\
&= \frac{\mu\left([\frac{y_1}{z}]^n \cap \sigma^{-(1,1)}[x]_n\right)}{\mu([x]_n)} + \cdots + \frac{\mu\left([\frac{y_k}{z}]^n \cap \sigma^{-(1,1)}[x]_n\right)}{\mu([x]_n)} \\
&= \mu_n\left[\frac{y_1}{z} | \sigma^{-(1,1)} x\right] + \cdots + \mu_n\left[\frac{y_k}{z} | \sigma^{-(1,1)} x\right].
\end{aligned}$$

Para provar a σ-aditividade, considere $[\frac{y_i}{z}]^n \cap [\frac{y_j}{z}]^n = \emptyset$, $i \neq j$, logo

$$\begin{aligned}
\mu_n\left[\bigcup_{s\in\mathbb{N}} \frac{y_s}{z}|\sigma^{-(1,1)}x\right] &= \frac{\mu\left(\left(\bigcup_{s\in\mathbb{N}}[\frac{y_s}{z}]^n\right)\cap\sigma^{-(1,1)}[x]_n\right)}{\mu\left([x]_n\right)}\\
&= \frac{\mu\left(\bigcup_{s\in\mathbb{N}}\left([\frac{y_s}{z}]^n\cap\sigma^{-(1,1)}[x]_n\right)\right)}{\mu\left([x]_n\right)}\\
&= \sum_{s\in\mathbb{N}}\frac{\mu\left([\frac{y_s}{z}]^n\cap\sigma^{-(1,1)}[x]_n\right)}{\mu\left([x]_n\right)}\\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}}\mu_n\left[\frac{y_1}{z}|\sigma^{-(1,1)}x\right],
\end{aligned}$$

logo μ_n é uma medida condicional.

Corolário 4.1.6 (Teorema do Martingal Crescente)**.** *Seja $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ espaço de probabilidade. Então, o limite $\mu_n\left[\frac{y}{z}|\sigma^{-(1,1)}x\right] \to \mu\left([\frac{y}{z}]|\sigma^{-(1,1)}\mathcal{B}\right)(x)$ existe para μ-quase todo ponto x, para cada $y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, tal que $\mu\left[\frac{y}{z}|\sigma^{-(1,1)}x\right] = \mu\left([\frac{y}{z}]|\sigma^{-(1,1)}\mathcal{B}\right)(x)$ é, para μ-quase todo x, uma distribuição de probabilidade bem definida sobre $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.*

Pelo Corolário do Teorema do Martingal Crescente temos a existência do limite de μ_n e
$$\lim_{n\to\infty}\mu_n\left[\frac{y}{z}|\sigma^{-(1,1)}x\right] = \mu\left[\frac{y}{z}|\sigma^{-(1,1)}x\right].$$

Note que a distribuição $\mu\left[\frac{y}{z}|\sigma^{-(1,1)}x\right]$ é uma função densidade, pois

$$\int \mu\left[\frac{y}{z}|\sigma^{-(1,1)}x\right]d\mu(y)d\mu(z) = \int \mathbb{E}\left(\chi_{[\frac{y}{z}]}|\mathcal{B}\right)(x)d\mu(y)d\mu(z) = 1. \tag{4.7}$$

Definição 4.1.7. Denotemos por σ a ação em $\mathbb{Z}_+^2$ dada por $(m,n) \stackrel{\sigma}{\mapsto} \sigma^{(m,n)}$. Definimos a *entropia métrica* de σ com respeito a medida μ por

$$h_\mu(\sigma) = \int I_\mu(\sigma)(x)d\mu(x),$$

onde
$$I_\mu(\sigma)(x) = -\int \chi_{[\frac{y}{z}]}(x)\log\mu\left[\frac{y}{z}|\sigma^{-(1,1)}x\right]d\mu(y)d\mu(z)$$

é a *informação* de σ com respeito a medida μ, $y, z \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ e $\chi_{[\frac{y}{z}]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [\frac{y}{z}] \\ 0 & \text{caso contrário}\end{cases}$.
Definimos a função $\wp : C(X) \to \mathbb{R}$, um análogo da *pressão topológica* em $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, dada por

$$\wp(\Phi) = \sup_{\mu\in\mathcal{M}_\sigma(\Omega)}\left\{h_\mu(\sigma) + \int\Phi d\mu\right\}.$$

Um *estado de equilíbrio* é uma probabilidade invariante $\nu \in \mathcal{M}_\sigma(\Omega)$ que realiza esse supremo.

Lema 4.1.8 (Desigualdade de Jensen). *Se $\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função côncava e $r \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}, \mu)$ é uma densidade, isto é, $r(x) \geq 0$ e $\int r(x)d\mu(x) = 1$, então, para todo $x \in Dom(\tau)$, temos*

$$\int \tau(x)r(x)d\mu(x) \leq \tau\left(\int xr(x)d\mu(x)\right). \tag{4.8}$$

Lema 4.1.9. *Sejam $\mu\left[\frac{y}{z}|\sigma^{-(1,1)}x\right]$ e $\nu\left[\frac{y}{z}|\sigma^{-(1,1)}x\right]$ distribuições de probabilidade sobre $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ com $\nu\left[\frac{y}{z}|\sigma^{-(1,1)}x\right] = e^{\Phi\left(y\frac{x}{z}\right)}$, $\mathbf{L}_{\Phi}^{*}\nu = \nu$ e $\mathbf{L}_{\Phi}1 = 1$. Então*

$$-\int \mu\left[\frac{y}{z}|\sigma^{-(1,1)}x\right]\log\mu\left[\frac{y}{z}|\sigma^{-(1,1)}x\right]d\mu(y)d\mu(z) + \int \mu\left[\frac{y}{z}|\sigma^{-(1,1)}x\right]\Phi\left(y\frac{x}{z}\right)d\mu(y)d\mu(z) \leq 0. \tag{4.9}$$

Demonstração. Como $\nu\left[\frac{y}{z}|\sigma^{-(1,1)}x\right] = e^{\Phi\left(y\frac{x}{z}\right)}$, temos $\log\nu\left[\frac{y}{z}|\sigma^{-(1,1)}x\right] = \Phi\left(y\frac{x}{z}\right)$. Ainda,

$$\begin{aligned}
& -\int \mu\left[\frac{y}{z}|\sigma^{-(1,1)}x\right]\log\mu\left[\frac{y}{z}|\sigma^{-(1,1)}x\right]d\mu(y)d\mu(z) \\
& + \int \mu\left[\frac{y}{z}|\sigma^{-(1,1)}x\right]\log\nu\left[\frac{y}{z}|\sigma^{-(1,1)}x\right]d\mu(y)d\mu(z) \\
= & \int -\nu\left[\frac{y}{z}|\sigma^{-(1,1)}x\right]\left(\frac{\mu[\frac{y}{z}|\sigma^{-(1,1)}x]}{\nu[\frac{y}{z}|\sigma^{-(1,1)}x]}\right)\log\left(\frac{\mu[\frac{y}{z}|\sigma^{-(1,1)}x]}{\nu[\frac{y}{z}|\sigma^{-(1,1)}x]}\right)d\mu(y)d\mu(z) \\
= & \int \nu\left[\frac{y}{z}|\sigma^{-(1,1)}x\right]\tau\left(\frac{\mu[\frac{y}{z}|\sigma^{-(1,1)}x]}{\nu[\frac{y}{z}|\sigma^{-(1,1)}x]}\right)d\mu(y)d\mu(z) \\
\overset{(4.8)}{\leq} & \ \tau\left(\int \nu\left[\frac{y}{z}|\sigma^{-(1,1)}x\right]\left(\frac{\mu[\frac{y}{z}|\sigma^{-(1,1)}x]}{\nu[\frac{y}{z}|\sigma^{-(1,1)}x]}\right)d\mu(y)d\mu(z)\right) = \tau(1) = 0,
\end{aligned}$$

pois a função $\tau(x) = -x\log x$ é estritamente côncava. ■

Proposição 4.1.10. *Seja $\Phi \in \mathcal{H}^{\alpha}(\Omega, d)$ tal que $\mathbf{L}_{\Phi}1 = 1$ e $\mathbf{L}_{\Phi}^{*}\nu = \nu$, então para qualquer $\mu \in \mathcal{M}_{\sigma}(\Omega)$ temos*

$$h_{\mu}(\sigma) + \int \Phi d\mu \leq 0.$$

Demonstração. Sejam $\mu \in \mathcal{M}_{\sigma}(\Omega)$ e $\mu\left[\frac{y}{z}|\sigma^{-(1,1)}x\right]$ a distribuição sobre $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, para $x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}^2}$ e $y, z \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. De fato,

$$\begin{aligned}
h_{\mu}(\sigma) &= \int I_{\mu}(\sigma)(x)d\mu(x) \\
&= \iint -\chi_{[\frac{y}{z}]}(x)\log\mu\left[\frac{y}{z}|\sigma^{-(1,1)}x\right]d\mu(y)d\mu(z)d\mu(x) \\
&= \iint -\mathbb{E}\left(\chi_{[\frac{y}{z}]}|\mathcal{B}\right)(x)\log\mu\left[\frac{y}{z}|\sigma^{-(1,1)}x\right]d\mu(y)d\mu(z)d\mu(x) \\
&= \iint -\mu\left[\frac{y}{z}|\sigma^{-(1,1)}x\right]\log\mu\left[\frac{y}{z}|\sigma^{-(1,1)}x\right]d\mu(y)d\mu(z)d\mu(x).
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Além disso, considerando a função $g = \chi_A$ onde $A \subset \{0,1\}^{\mathbb{N}^2}$ é uma caixa quadrada, temos

$$\begin{aligned}
&\iint \mu\left[\frac{y}{z}|\sigma^{-(1,1)}x\right] g\left(y\frac{x}{z}\right) d\mu(y)d\mu(z)d\mu(x)\\
&= \iint \chi_A\left(y\frac{x}{z}\right) \mu\left[\frac{y}{z}|\sigma^{-(1,1)}x\right] d\mu(y)d\mu(z)d\mu(x)\\
&= \lim_{n\to\infty} \iint \chi_A\left(y\frac{x}{z}\right) \mu_n\left[\frac{y}{z}|\sigma^{-(1,1)}x\right] d\mu(y)d\mu(z)d\mu(x)\\
&= \lim_{n\to\infty} \iint_A \mu_n\left[\frac{y}{z}|\sigma^{-(1,1)}x\right] d\mu(y)d\mu(z)d\mu(x)\\
&\overset{(4.7)}{=} \iint_A d\mu(y)d\mu(z)d\mu(x) = \int \chi_A d\mu\\
&= \int g d\mu.
\end{aligned}$$

Por linearidade, (4.9) vale para funções simples, e por convergência para funções integráveis. Considerando as igualdades (4.10) e (4.11) e integrando a equação (4.9), temos

$$\begin{aligned}
&\iint -\mu\left[\frac{y}{z}|\sigma^{-(1,1)}x\right] \log\mu\left[\frac{y}{z}|\sigma^{-(1,1)}x\right] d\mu(y)d\mu(z)d\mu(x)\\
&+ \iint \mu\left[\frac{y}{z}|\sigma^{-(1,1)}x\right] \Phi\left(y\frac{x}{z}\right) d\mu(y)d\mu(z)d\mu(x)\\
&= h_\mu(\sigma) + \int \Phi d\mu,
\end{aligned}$$

e pelo Lema 4.1.9 temos $h_\mu(\sigma) + \int \Phi d\mu \leq 0$. ■

Teorema 4.2. *A medida $\nu \in \mathcal{M}_\sigma(\Omega, d)$ que satisfaz $\mathbf{L}_\Phi^*\nu = \nu$ é um estado de equilíbrio, isto é, para toda $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(\Omega)$, temos*

$$h_\mu(\sigma) + \int \Phi d\mu \leq h_\nu(\sigma) + \int \Phi d\nu = 0.$$

Demonstração. De fato, conforme demonstração da Proposição 2.3.13, temos claramente

$$\begin{aligned}
&\int -\nu\left[\frac{y}{z}|\sigma^{-(1,1)}x\right] \log\nu\left[\frac{y}{z}|\sigma^{-(1,1)}x\right] d\nu(y)d\nu(z)\\
&+ \int \nu\left[\frac{y}{z}|\sigma^{-(1,1)}x\right] \log\nu\left[\frac{y}{z}|\sigma^{-(1,1)}x\right] d\nu(y)d\nu(z) = 0,
\end{aligned}$$

e ao integrarmos novamente, obtemos $h_\nu(\sigma) + \int \Phi d\nu = 0$, logo $\nu \in \mathcal{M}_\sigma(\Omega)$ é um estado de equilíbrio. ■

Definimos anteriormente que um potencial $\phi - \Phi$ é cohomólogo a uma constante $c \in \mathbb{R}$ quando $\phi - \Phi = c + u \circ \sigma^{e_1} - u + v \circ \sigma^{e_2} - v$ para alguma função $u : \Omega \to \mathbb{R}$ Hölder e alguma função $v : \Omega \to \mathbb{R}$ Hölder.

Teorema 4.3. *Sejam ϕ, Φ dois potenciais em Ω. Se $\Phi - \phi$ é cohomólogo a alguma constante $c \in \mathbb{R}$, então $\mu_\phi = \mu_\Phi$, isto é, o estado de equilíbrio para ϕ (respectivamente Φ) é estado de equilíbrio para Φ (respectivamente ϕ).*

Demonstração. Se ϕ é cohomólogo a $\psi + c$ então $\wp(\phi) = \wp(\psi + c) = \wp(\psi) + c$, pois como $\mu \in \mathcal{M}_\sigma$,

$$\begin{aligned} \int \phi d\mu &= \int (\psi + c + u \circ \sigma^{e_1} - u + v \circ \sigma^{e_2} - v) d\mu \\ &= \int (\psi + c) d\mu + \int u \circ \sigma^{e_1} d\mu - \int u d\mu + \int v \circ \sigma^{e_2} d\mu - \int v d\mu \\ &= \int (\psi + c) d\mu, \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} \wp(\phi) &= \sup_{\mu \in \mathcal{M}_\sigma} \left\{ h_\mu(\sigma) + \int \phi d\mu \right\} = \sup_{\mu \in \mathcal{M}_\sigma} \left\{ h_\mu(\sigma) + \int (\psi + c) d\mu \right\} \\ &= \sup_{\mu \in \mathcal{M}_\sigma} \left\{ h_\mu(\sigma) + \int \psi d\mu \right\} + c = \wp(\psi) + c. \end{aligned}$$

Além disso, temos para toda $\nu \in \mathcal{M}_\sigma(\Omega)$

$$h(\mu) + \int \phi d\mu = h_\mu(\sigma) + \int (\psi + c) d\mu = h_\mu(\sigma) + \int \psi d\mu + c.$$

Logo, μ é estado de equilíbrio para ϕ se, e só se, μ é estado de equilíbrio para ψ, de onde $\mu_\phi = \mu_\psi$. ■

O Teorema acima nos mostra que o estado de equilíbrio ν do Teorema 4.2 para a função Φ também é um estado de equilíbrio para a função ϕ, uma vez que $\Phi = \phi + u - u \circ \sigma^{e_1} + v - v \circ \sigma^{e_2} + c$, isto é, $\Phi \sim \phi$. Mais detalhes em [12] e [28].

Capítulo 5

Aplicações de Blocos

Seja $X = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ o espaço simbólico. Considere $N(x,y) = \min\{|i| \in \mathbb{N} : x_i \neq y_i\}$. Munimo o espaço X com a métrica usual dada por

$$d_{\frac{1}{2}}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{N(x,y)}}, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}.$$

Definimos uma dinâmica de blocos fixando um inteiro $L \geq 2$, que indica o tamanho dos cilindros, e uma aplicação $f\colon \{0,1\}^L \to \{0,1\}$. Definimos uma *transformação de blocos* $F : X \to X$ como

$$\begin{aligned} &F(\ldots, x_{L-1}, \ldots, x_0, x_1, \ldots, x_L, x_{L+1}, \ldots, x_{2L}, \ldots) \\ &= (\ldots, f(x_{L-1}, \ldots, x_0), f(x_1, \ldots, x_L), f(x_{L+1}, \ldots, x_{2L}), \ldots). \end{aligned}$$

Lema 5.0.1. *As transformações de blocos $F\colon X \to X$ são contínuas.*

Demonstração. De fato, fixamos um $k \in \mathbb{N}$ arbitrário e tomamos $\varepsilon = \frac{1}{2^{\lfloor \frac{k}{L} \rfloor}} > 0$, onde $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{N} : n \leq x\}$. Então existe $\delta = \frac{1}{2^k} > 0$ tal que, para todo $x, y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ com $d(x,y) < \delta$, temos $d(F(x), F(y)) = \frac{1}{2^{\lfloor \frac{k}{L} \rfloor + 1}} < \frac{1}{2^{\lfloor \frac{k}{L} \rfloor}} = \varepsilon$, pois se $x_k = y_k$, mas $x_{k+1} \neq y_{k+1}$, então $x'_{\lfloor \frac{k}{L} \rfloor} = y'_{\lfloor \frac{k}{L} \rfloor}$ e $x'_{\lfloor \frac{k}{L} \rfloor + 1} \neq y'_{\lfloor \frac{k}{L} \rfloor + 1}$, onde $w' = F(w)$. ■

Lema 5.0.2. *As transformações de blocos, em geral, não comutam com o shift σ, isto é, $F \circ \sigma \neq \sigma \circ F$.*

Demonstração. Tomando a sequência arbitrária $x = x_1 \ldots x_L x_{L+1} \ldots x_{2L} \ldots$ em X, temos

$$\sigma \circ F(x) = \sigma \circ F(x_1 \ldots x_L x_{L+1} \ldots x_{2L} \ldots) = f(x_{L+1} \ldots x_{2L}) f(x_{2L+1} \ldots x_{3L}) \ldots,$$

$$F \circ \sigma(x) = F \circ \sigma(x_1 \ldots x_L x_{L+1} \ldots x_{2L} \ldots) = f(x_2 \ldots x_{L+1}) f(x_{L+2} \ldots x_{2L+1}) \ldots.$$

Se $f(x_{L+1} \ldots x_{2L}) \neq f(x_2 \ldots x_{L+1})$, por exemplo, teremos $\sigma \circ F \neq F \circ \sigma$. ■

Definição 5.0.3. Um *autômato celular* sobre o grupo $\mathbb{Z}$ e o conjunto $\{0,1\}$ é uma transformação $\tau : \{0,1\}^{\mathbb{Z}} \to \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ satisfazendo a seguinte propriedade: existe um subconjunto finito $S \subset \mathbb{Z}$ e uma transformação $\zeta : \{0,1\}^S \to \{0,1\}$ tal que

$$\tau(x)(n) = \zeta((n^{-1}x)|_S)$$

para todo $x \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ e $n \in \mathbb{Z}$, onde $(n^{-1}x)|_S$ denota a restrição da configuração $n^{-1}x$ a S. Tal conjunto S é chamado de *conjunto de memória* e ζ é chamada *transformação de regra local* para τ.

Lema 5.0.4 (Teorema de Curtis-Hedlund). *[13] Considerando o espaço $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ munido com a topologia discreta, seja $\tau : \{0,1\}^{\mathbb{Z}} \to \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ uma transformação. São equivalentes:*
(i) a transformação τ é um automato celular;
(ii) a transformação τ é contínua e comuta com o shift.

Demonstração. Veja [6]. ■

Corolário 5.0.5. *As transformações de blocos não são autômatos celulares.*

Demonstração. Como F não comuta com o shift, pelo Teorema de Hedlund, temos que F não é um autômato celular. ■

Pelo Lema 5.0.1, (X, F) é um sistema dinâmico topológico.

5.1 Transformação Majority Rule

Defina a transformação *majority rule* por $M\colon X \to X$ dada por

$$M : (x_1, x_2, x_3, ...) \mapsto (m(x_1, x_2, x_3), m(x_4, x_5, x_6), ...), \text{ onde}$$

$$m(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) = \begin{cases} 1 & \text{if } x_i + x_{i+1} + x_{i+2} \geq 2 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}.$$

Pelo Lema 5.0.1, (X, M) é um sistema dinâmico topológico.

Proposição 5.1.1. *A transformação majority rule M é topologicamente transitiva.*

Demonstração. Considere dois cilindros (portanto dois conjuntos abertos), $[x_1 \dots x_k]$ e $[y_1 \dots y_s]$. Vamos provar que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $M^n([x_1 \dots x_k]) \cap [y_1 \dots y_s] \neq \emptyset$. Tomando $z \in [x_1 \dots x_k]$ dado por

$$z = x_1 \dots x_k \underbrace{y_1 \dots y_1}_{3^{\lfloor \frac{k}{3} \rfloor + 1}} \dots \underbrace{y_s \dots y_s}_{3^{\lfloor \frac{k}{3} \rfloor + 1}} y^{\infty}$$

e $n = \lfloor \frac{k}{3} \rfloor + 1$, temos $M^n(z) = y_1 \dots y_s y^{\infty}$ e portanto $M^n(z) \in [y_1 \dots y_s]$. ■

Proposição 5.1.2. *A transformação majority rule M não é expansiva.*

Demonstração. Por contra-exemplo, fixando um $k \in \mathbb{N}$ arbitrário, e tomando $y = 0^\infty$ e $x = \underbrace{0 \cdots 0}_{k} 10^\infty$. Então, x e y estão arbitrariamente próximos, mas $d(x,y) = \frac{1}{2^{k+1}} > \frac{1}{2^{k+2}}$, ou seja, $x \neq y$ e $M(x) = 0^\infty = M(y)$ implica $d(M^n(x), M^n(y)) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto M é uma aplicação não expansiva. ■

Proposição 5.1.3. *A bacia de atração de* 0^∞ *e* 1^∞ *são conjuntos densos.*

Demonstração. Consideremos a bacia de atração de 0^∞. Sejam $\varepsilon = \frac{1}{2^k}$ com $k \in \mathbb{N}$ e $x = x_1 ... x_k \bar{x} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ com $\bar{x} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Seja $B(x, \varepsilon)$ uma bola aberta de centro x e raio ε. Note que o ponto $y = x_1 ... x_{k+1} 0^\infty$ pertence a $B(x, \varepsilon)$ e $M^n(y) = 0^\infty$ para n suficientemente grande. Isso implica que y está na bacia de atração de 0^∞, logo é um conjunto denso em X. A prova para 1^∞ é análoga. ■

Definição 5.1.4. Sejam $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ e $K \subset X$ um subconjunto compacto de X. Um subconjuto $S \subset X$ é dito (n, ε)*-separado* para K com respeito a transformação F se, para todo $x \in K$, existe $y \in S$ tal que

$$d_n(x,y) =\leq \varepsilon.$$

Em outros termos, S é (n, ε)-separado para K com respeito a F quando

$$K \subset \bigcup_{y \in S} \bigcap_{i=0}^{n-1} F^{-i} \bar{B}(T^i(y); \varepsilon).$$

Denotamos por $r_n(\varepsilon, K)$ a menor cardinalidade de qualquer dos conjunto (n, ε)-separados para K com respeito a F. Defina também

$$r(\varepsilon, K, F) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log r_n(\varepsilon, K).$$

Proposição 5.1.5. *Seja* M *a transformação majority rule. Então* $h_{top}(M) = \infty$.

Demonstração. De fato, iremos considerar a cardinalidade de um conjunto (n, ε)-gerado. Sejam $\varepsilon = \frac{1}{2^{3^m}}$, com $m \in \mathbb{N}$, e fixemos $\bar{x} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Se

$$d_n(\bar{x}, y) = \max\{d(\bar{x}, y), d(M(\bar{x}), M(y)), ..., d(M^{n-1}(\bar{x}), M^{n-1}(y))\} \leq \varepsilon,$$

então $\bar{x}$ e y devem coincidir nos primeiros 3^m símbolos, e o mesmo acontece com $M^k(\bar{x})$ e $M^k(y)$ for $2 \leq k \leq n-1$. Observe que M aplica um bloco de tamanho 3^m em um bloco de tamanho 3^{m-1}, isto é, se dividirmos um bloco de tamanho 3^m em blocos consecutivos de tamanho 3, teremos 3^{m-1} blocos de tamanho 3, e ao aplicarmos M, teremos 3^{m-2} blocos de tamanho 3. Como $d(\bar{x}, y) \leq \varepsilon$, $M(\bar{x})$ e $M(y)$ coincidem nos primeiros 3^{m-1} blocos, e como $d(M(\bar{x}), M(y)) \leq \varepsilon$ coincidem nos primeiros 3^m símbolos, temos que analisar o segundo bloco de tamanho 3^{m+1} e o terceiro bloco de tamanho 3^{m+1} de $\bar{x}$:

$$\bar{x} = \underbrace{x_1 x_2 x_3 \cdots x_{3^m-2} x_{3^m-1} x_{3^m}}_{3^m} \; \underbrace{x_{3^m+1} x_{3^m+2} x_{3^m+3} \cdots x_{2.3^m-2} x_{2.3^m-1} x_{2.3^m}}_{3^m}$$
$$\underbrace{x_{2.3^m+1} x_{2.3^m+2} x_{2.3^m+3} \cdots x_{3.3^m-2} x_{3.3^m-1} x_{3.3^m}}_{3^m} \ldots$$

Se considerarmos o cilindro $[x_{3^m+1}x_{3^m+2}...x_{3.3^m}]$, teremos $2^{3^{m-1}}$ possibilidades de imagens por M para este conjunto, o que implica que um conjunto $(1,\varepsilon)$-gerado, E_1, no cilindro $[x_1...x_{3^m}]$ tem ao menos $2^{3^{m-1}}$ pontos. Para construirmos um conjunto $(2,\varepsilon)$-gerado no cilindro $[x_1...x_{3^m}]$, temos que considerar as palavras finitas de $\bar{x}$ de tamanho $3^2.3^m$, $x_1...x_{3^2.3^m}$, e pela mesma razão, teremos que a cardinalidade de um conjunto $(2,\varepsilon)$-gerado, E_2, no cilindro $[x_1...x_{3^m}]$ é maior ou igual que $(2^{3^{m-1}})^{3^2-1}$. Por indução, temos $\sharp\{E_n : E_n \text{ é } (n,\varepsilon)-\text{gerado}\} \geq 2^{3^m}(2^{3^{m-1}})^{3^n-1}$, o que implica

$$h_\varepsilon(M) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(\sharp E_n) \geq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log 2^{3^m}2^{3^{m-1+n}-3^{m-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3^{m-1}(2+3^n)}{n}\log 2$$
$$\geq \lim_{n\to\infty}\frac{3^{m-1}(2+n)}{n}\log 2 = 3^{m-1}.$$

Portanto, $h(M) = \lim_{\varepsilon\to 0} h_\varepsilon(M) \geq \lim_{m\to\infty} 3^{m-1} = \infty$. ■

5.1.1 Propriedade Ergódicas

Discutiremos aspectos ergódicos da transformação majority rule. Como referências Teoria Ergódica, citamos [7], [10], [18], [29] e [30].

Proposição 5.1.6. *A medida de Bernoulli uniforme $\mu := B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ é invariante pela transformação majority rule M.*

Demonstração. Tomando o cilindro $[i]$, $i \in \{0,1\}$, temos

$$\mu(M^{-1}[i]) = \mu([iii]\cup[iij]\cup[iji]\cup[jii]) = \frac{4}{2^3} = \frac{1}{2} = \mu([i]).$$

Em geral, considere o cilindro $[i_1\dots i_s]$ para algum $s \in \mathbb{N}$. Note que $\sharp\{M^{-1}(i_j)\} = 4$ para cada $j = 1,\dots,s$, então $\sharp\{\{M^{-1}(i_j)\}_{j=1}^{s}\} = 4^s$, $i_j \in \{0,1\}$, e portanto

$$\begin{aligned}\mu(M^{-1}[i_1\dots i_s]) &= \mu\left(\bigcup[i_{11}i_{12}i_{13}\dots i_{s1}i_{s2}i_{s3}]\right) = \sum\mu([i_{11}i_{12}i_{13}\dots i_{s1}i_{s2}i_{s3}])\\ &= \sum\frac{1}{2^{3s}} = \frac{4^s}{2^{3s}} = \frac{1}{2^s} = \mu([i_1\dots i_s]).\end{aligned}$$

Como os cilindros geram a σ-álgebra de Borel, temos o resultado. ■

Definição 5.1.7. Defina o conjunto dos pontos *não-errantes* para M como sendo o conjunto fechado $\Omega(M)$ dado por

$$\Omega(M) = \{x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \mid \forall\ U \ni x, \exists\, n \geq 0 : M^{-n}U \cap U \neq \emptyset\}.$$

Proposição 5.1.8. *Seja $\left(M, B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right)$ o sistema dinâmico dado pela transformação majority rule, então $\mu(\Omega(M)) = 1$.*

Demonstração. Seja $U_n = \bigcup_{\text{arbitrária}} \bigcap_{\text{finita}} [i_1 \dots i_n]$ com $i_j \in \{0,1\}$ e $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ base da topologia sobre X. Então o aberto $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \setminus \Omega(M)$ é a união dos U_n tais que, os conjuntos $U_n, M^{-1}U_n, \dots, M^{-k}U_n, \dots$ são dois a dois disjuntos. Suponha, por contradição, que $\mu(U_n) = c > 0$. Como $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ é M-invariante, temos

$$\mu(U_n) = \mu(M^{-1}U_n) = \dots = \mu(M^{-k}U_n) = \cdots$$

e portanto,

$$\mu\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} M^{-k}U_n\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(M^{-k}U_n) = \sum_{k=0}^{\infty} c = +\infty,$$

e isso é uma contradição, pois $\mu = B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ é uma probabilidade. Então, $\mu(U_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e concluímos $\mu(\{0,1\}^{\mathbb{N}} \setminus \Omega(M)) = 0$, ou seja, $\mu(\Omega(M)) = 1$. ∎

Teorema 5.1. *Seja $\mu = B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ a medida de Bernoulli uniforme, então o sistema (M, μ) é misturador.*

Demonstração. Provaremos primeiramente para cilindros de tamanho um, e depois construiremos as condições necessárias para demonstrar utilizando cilindros de tamanho qualquer.

Lema 5.1.9. *Para cilindros de comprimento um, a transformação majority rule satisfaz*

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(M^{-n}([i]) \cap [j]\right) = \mu([i])\mu([j]).$$

Demonstração. Considere os símbolos i^0 e j^0 com $i \neq j$ e os respectivos cilindros $[i^0]$ e $[j^0]$. Como $M^{-1}([i]) = \{[iii], [iij], [iji], [jii]\}$, consideremos $i^1 = 3i^0 + j^0$ e $j^1 = i^0 + 3j^0$. Genericamente, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{cases} i^n &= 3i^{n-1} + j^{n-1} \\ j^n &= i^{n-1} + 3j^{n-1} \end{cases}.$$

Escrevendo de modo matricial, temos

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

e por consequência,

$$\begin{pmatrix} i^n \\ j^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i^{n-1} \\ j^{n-1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} i^{n-1} \\ j^{n-1} \end{pmatrix} = \dots = A^n \begin{pmatrix} i^0 \\ j^0 \end{pmatrix}.$$

A matriz A tem autovalores $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 2$, associados aos autovetores $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ respectivamente. Temos $\begin{pmatrix} i^0 \\ j^0 \end{pmatrix} = \frac{i^0 + j^0}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{i^0 - j^0}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, logo

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} i^n \\ j^n \end{pmatrix} &= A^n \begin{pmatrix} i^0 \\ j^0 \end{pmatrix} = A^n \left(\frac{i^0 + j^0}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{i^0 - j^0}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{i^0 + j^0}{2} \begin{pmatrix} 4^n \\ 4^n \end{pmatrix} + \frac{i^0 - j^0}{2} \begin{pmatrix} 2^n \\ -2^n \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i^0(4^n + 2^n) + j^0(4^n - 2^n) \\ i^0(4^n - 2^n) + j^0(4^n + 2^n) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

de onde vem

$$\begin{cases} i^n &= \frac{1}{2}\left(i^0(4^n+2^n)+j^0(4^n-2^n)\right) \\ j^n &= \frac{1}{2}\left(i^0(4^n-2^n)+j^0(4^n+2^n)\right) \end{cases}. \tag{5.1}$$

Temos que a proporção de i's e de j's é dada, respectivamente, por

$$\frac{i^n}{i^n+j^n} \quad \text{e} \quad \frac{j^n}{i^n+j^n},$$

onde

$$i_n+j_n=\frac{1}{2}\left(i^0(4^n+2^n)+j^0(4^n-2^n)\right)+\frac{1}{2}\left(i^0(4^n-2^n)+j^0(4^n+2^n)\right)=4^n(i^0+j^0). \tag{5.2}$$

De fato,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{i^n}{i^n+j^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{j^n}{i^n+j^n}\right)=\frac{1}{2}, \tag{5.3}$$

pois

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{i^n}{i^n+j^n}\right)\overset{(5.2)}{=}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{2}\left(i^0(4^n+2^n)+j^0(4^n-2^n)\right)}{4^n(i^0+j^0)}\right)=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{(i^0-j^0)}{2^n(i^0+j^0)}\right)=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{j^n}{i^n+j^n}\right)\overset{(5.2)}{=}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{2}\left(i^0(4^n-2^n)+j^0(4^n+2^n)\right)}{4^n(i^0+j^0)}\right)=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{(-i^0+j^0)}{2^n(i^0+j^0)}\right)=\frac{1}{2}.$$

Com efeito, temos

$$\lim_{n\to\infty}\mu\left(M^{-n}([i^0])\cap[j]\right)=\lim_{n\to\infty}\mu([i^0])\left(\frac{j^n}{i^n+j^n}\right)=\frac{\mu([i^0])}{2}.$$

Portanto

$$\lim_{n\to\infty}\mu\left(M^{-n}([i^0])\cap[j]\right)=\mu([i^0])\mu([j]).\ \blacksquare \tag{5.4}$$

Para cilindros de tamanho arbitrário, com $m,s\in\mathbb{N}$, devemos provar

$$\lim_{n\to\infty}\mu(M^{-n}([i_1\dots i_m])\cap[j_1\dots j_s])=\mu([i_1\dots i_m])\mu([j_1\dots j_s]).$$

Sejam $x_{|_t}=x_0x_1\dots x_{t-1}$ os primeiros t símbolos de $x\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Note que, para descrever $M^{-n}([i_1\dots i_m])\cap[j_1\dots j_s]$, é suficiente analisar $M^{-n}([i_1])\cap[j_1\dots j_s]$ para $n\geq\log_3 s$, uma vez que o cilindro de $\log_3 s$ pré-imagens de $[i_1]$ tem comprimento s, logo na interseção com $[j_1\dots j_s]$ não é necessário o cálculo das pré-imagens de $i_2,\dots,i_m$ pois cada pré-imagem de i_k pode ser tanto i quanto j. De fato, para $[i_1\dots i_m]$ com i_1 fixado, temos 2^{m-1} possibilidades das quais somente uma será o cilindro $[i_1\dots i_m]$, então, para $n\geq\log_3 s$, temos

$$\begin{aligned} \mu(M^{-n}([i_1\dots i_m])\cap[j_1\dots j_s]) &= \frac{1}{2^{m-1}}\mu(M^{-n}([i_1])\cap[j_1\dots j_s]) \\ &= \prod_{t=2}^{m}\mu(i_t)\mu(M^{-n}([i_1])\cap[j_1\dots j_s]). \end{aligned} \tag{5.5}$$

Dessa forma, é suficiente tomar $s = 3^t$, $t \in \mathbb{N}$, pois $3^{t-1} < r < 3^t$ e $r + |a| = 3^t$ com $A = \{\{0,1\}^d : d = |a| = 3^t - r)$ nos dá

$$[j_1 \dots j_r] = \bigcup_{a \in A} [j_1 \dots j_r a],$$

então

$$\begin{aligned}
\mu(M^{-n}([i_1 \dots i_m]) \cap [j_1 \dots j_w]) &= \mu\left(M^{-n}([i_1 \dots i_m]) \cap \left(\bigcup_{a\in A} [j_1 \dots j_w a]\right)\right) \\
&= \mu\left(\bigcup_{a\in A} \left(M^{-n}([i_1 \dots i_m]) \cap [j_1 \dots j_w a]\right)\right) \\
&= \sum_{a\in A} \mu\left(M^{-n}([i_1 \dots i_m]) \cap [j_1 \dots j_w a]\right).
\end{aligned}$$

Ora, a notação usada no Lema 5.1.9 se torna muito carregada para cilindros de tamanhos maiores. Consideremos então uma nova notação a fim de facilitar a compreensão dos argumentos. Seja $i^n := T_n(i \mapsto i)$, logo a proporção é dada por

$$\frac{i^n}{i^n + j^n} = \frac{T_n(i \mapsto i)}{T_n(i \mapsto i) + T_n(i \mapsto j)} = \frac{T_n(i \mapsto i)}{\sum_{k=i,j} T_n(i \mapsto k)}.$$

Assim sendo, para $l = i, j$, temos

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{T_n(i \mapsto l)}{\sum_{k=i,j} T_n(i \mapsto k)}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{l^n}{i^n + j^n}\right) = \frac{1}{2}. \tag{5.6}$$

Assim, tomando apenas as potências de 3, temos: Se $t = 1$, $s = 3^t = 3$. Para $i \neq j$, sem perda de generalidade, vale

$$\frac{T_n(i_1 \mapsto v_1 v_2 v_3)}{\sum\limits_{k_1,k_2,k_3=i,j} T_n(i_1 \mapsto k_1 k_2 k_3)} = \frac{1}{2^2}\left(\frac{l^n}{i^n + j^n}\right), \tag{5.7}$$

uma vez que i_1 se torna i_n na n-ésima pré-imagem de T, logo $[j_1 j_2 j_3]$ com é apenas uma das quatro opções de $[i_n k_2 k_3]$ com $i_n = v_1$ fixo. Por sua vez, o denominador expressa todas os possíveis cilindros de comprimento três, $[k_1 k_2 k_3]$ com $k_1, k_2, k_3 = i, j$, o que pode ser expresso por $[i] \cup [j]$. Portanto, temos

$$\begin{aligned}
\mu(M^{-n}([i_1]) \cap [v_1 v_2 v_3]) &= \mu([i_1]) \left(\frac{T_n(i_1 \mapsto v_1 v_2 v_3)}{\sum\limits_{k_1,k_2,k_3=i,j} T_n(i_1 \mapsto k_1 k_2 k_3)}\right) \\
&\overset{(5.7)}{=} \frac{\mu([i_1])}{2^2}\left(\frac{i^n}{i^n + j^n}\right) = \frac{\mu([i_1])}{2^3} \\
&= \mu([i_1])\mu([v_1 v_2 v_3]).
\end{aligned}$$

Para $t = 2$ segue $s = 3^2 = 9$, logo

$$\frac{T_n(i_1 \mapsto w_1^0 \dots w_{27}^0)}{\sum\limits_{\substack{w_d=i,j\\ d\in\{1,\dots,9\}}} T_n(i_1 \mapsto w_1^0 \dots w_9^0)}$$

$$= \frac{T_{n-2}\left(i_1 \mapsto w_1^2\right) T\left(w_1^2 \mapsto w_1^1 w_2^1 w_3^1\right) T\left(w_1^1 w_2^1 w_3^1 \mapsto w_1^0 \dots w_9^0\right)}{\sum\limits_{\substack{w_c^b=i,j\\ b\in\{0,1,2\}\\ c\in\{1,\dots,9\}}} T_{n-2}\left(i_1 \mapsto w_1^2\right) T\left(w_1^2 \mapsto w_1^1 w_2^1 w_3^1\right) T\left(w_1^1 w_2^1 w_3^1 \mapsto w_1^0 \dots w_9^0\right)}. \tag{5.8}$$

Uma vez que

$$\frac{T\left(w_1^1 w_2^1 w_3^1 \mapsto w_1^0 \dots w_9^0\right)}{\sum\limits_{\substack{w_c^b=i,j\\ b\in\{0,1\}\\ c\in\{1,\dots,9\}}} T\left(w_1^1 w_2^1 w_3^1 \mapsto w_1^0 \dots w_9^0\right)} = \frac{1}{4^3},$$

$$\frac{T\left(w_1^3 \mapsto w_1^2 w_2^2 w_3^2\right)}{\sum\limits_{\substack{w_c^b=i,j\\ b\in\{2,3\}\\ c\in\{1,\dots,3\}}} T\left(w_1^3 \mapsto w_1^2 w_2^2 w_3^2\right)} = \frac{1}{4},$$

então de (5.8) temos

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{T_n(i_1 \mapsto w_1^0 \dots w_9^0)}{\sum\limits_{\substack{w_d=i,j\\ d\in\{1,\dots,9\}}} T_n(i_1 \mapsto w_1^0 \dots w_9^0)}\right) &= \frac{1}{4^3}\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{T_{n-2}\left(i_1 \mapsto w_1^2\right)}{\sum\limits_{w_1^2=i,j} T_{n-2}\left(i_1 \mapsto w_1^2\right)}\right)\\
&= \frac{1}{2^6}\frac{1}{2^2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{i^{n-2}}{i^{n-2}+j^{n-2}}\right) = \frac{1}{2^9}.
\end{aligned}$$

Portanto, temos

$$\lim_{n\to\infty} \mu(M^{-n}([i_1]) \cap [v_1 \dots v_9]) = \frac{\mu([i_1])}{2^9} = \mu([i_1])\mu([v_1 \dots v_9]).$$

Para $t = 3$ segue $s = 3^3 = 27$, logo

$$\frac{T_n(i_1 \mapsto w_1^0 \dots w_{27}^0)}{\sum\limits_{\substack{w_d=i,j\\ d\in\{1,\dots,27\}}} T_n(i_1 \mapsto w_1^0 \dots w_{27}^0)} =$$

$$\frac{T_{n-3}\left(i_1 \mapsto w_1^3\right) T\left(w_1^3 \mapsto w_1^2 w_2^2 w_3^2\right) T\left(w_1^2 w_2^2 w_3^2 \mapsto w_1^1 \dots w_9^1\right) T\left(w_1^1 \dots w_9^1 \mapsto w_1^0 \dots w_{27}^0\right)}{\sum\limits_{\substack{w_c^b=i,j\\ b\in\{0,1,2,3\}\\ c\in\{1,\dots,27\}}} T_{n-3}\left(i_1 \mapsto w_1^3\right) T\left(w_1^3 \mapsto w_1^2 w_2^2 w_3^2\right) T\left(w_1^2 w_2^2 w_3^2 \mapsto w_1^1 \dots w_9^1\right) T\left(w_1^1 \dots w_9^1 \mapsto w_1^0 \dots w_{27}^0\right)}. \tag{5.9}$$

Como

$$\frac{T\left(w_1^1\dots w_9^1 \mapsto w_1^0\dots w_{27}^0\right)}{\sum\limits_{\substack{w_c^b=i,j\\ b\in\{0,1\}\\ c\in\{1,\dots,27\}}} T\left(w_1^1\dots w_9^1 \mapsto w_1^0\dots w_{27}^0\right)} = \frac{1}{4^9},$$

$$\frac{T\left(w_1^2w_2^2w_3^2 \mapsto w_1^1\dots w_9^1\right)}{\sum\limits_{\substack{w_c^b=i,j\\ b\in\{1,2\}\\ c\in\{1,\dots,9\}}} T\left(w_1^2w_2^2w_3^2 \mapsto w_1^1\dots w_9^1\right)} = \frac{1}{4^3},$$

$$\text{e}\quad \frac{T\left(w_1^3 \mapsto w_1^2w_2^2w_3^2\right)}{\sum\limits_{\substack{w_c^b=i,j\\ b\in\{2,3\}\\ c\in\{1,\dots,3\}}} T\left(w_1^3 \mapsto w_1^2w_2^2w_3^2\right)} = \frac{1}{4},$$

então de (5.9), temos

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{T_n(i_1 \mapsto w_1^0\dots w_{27}^0)}{\sum\limits_{\substack{w_d=i,j\\ d\in\{1,\dots,27\}}} T_n(i_1 \mapsto w_1^0\dots w_{27}^0)}\right) &= \frac{1}{4^9}\frac{1}{4^3}\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{T_{n-3}\left(i_1 \mapsto w_1^3\right)}{\sum\limits_{w_1^3=i,j} T_{n-3}\left(i_1 \mapsto w_1^3\right)}\right)\\
&= \frac{1}{2^{18}}\frac{1}{2^6}\frac{1}{2^2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{i^{n-3}}{i^{n-3}+j^{n-3}}\right) = \frac{1}{27}.
\end{aligned}$$

Portanto, temos

$$\lim_{n\to\infty}\mu(M^{-n}([i_1])\cap[v_1\dots v_{27}]) = \frac{\mu([i_1])}{2^{27}} = \mu([i_1])\mu([v_1\dots v_{27}]).$$

Defina a função $\xi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ dada por $\xi_d(s) = \frac{s}{3^d}$ com $s = 3^t$ para $t\in\mathbb{N}$ e $0\le d\le \log_3 s$. Em outros termos, temos $\xi_0(s) = s$, $\xi_1(s) = \frac{s}{3}$, $\xi_2(s) = \frac{s}{9}$ e assim por diante.

Lema 5.1.10. *Para $s\in\mathbb{N}$ e $q\in\mathbb{N}$ com $s = 3^t$ para $t\in\mathbb{N}$ e $q = \log_3 s$, vale*

$$\begin{aligned}
&\frac{T_n(i_1 \mapsto v_1\dots v_s)}{\sum\limits_{\substack{k_d=i,j\\ d\in\{1,\dots,s\}}} T_n(i_1 \mapsto k_1\dots k_s)}\\
&= \frac{T_{n-q}\left(i_1 \mapsto w_1^q\dots w_{\xi_q(s)}^q\right)\prod\limits_{r=1}^{q} T\left(w_1^r\dots w_{\xi_r(s)}^r \mapsto w_1^{r-1}\dots w_{\xi_{r-1}(s)}^{r-1}\right)}{\sum\limits_{\substack{w_c^b=i,j\\ b\in\{1,\dots,q\}\\ c\in\{1,\dots,\xi_b(s)\}}} T_{n-q}\left(i_1 \mapsto w_1^q\dots w_{\xi_q(s)}^q\right)\prod\limits_{r=1}^{q} T\left(w_1^r\dots w_{\xi_r(s)}^r \mapsto w_1^{r-1}\dots w_{\xi_{r-1}(s)}^{r-1}\right)}.
\end{aligned}\tag{5.10}$$

Demonstração. Definindo $s = 3^t$, provemos por indução sobre t. Para $t = 0, 1, 2$, como visto acima, a fórmula é válida. Supondo válida para $t = k$, e portanto para $s = 3^k$, provemos para $t = k+1$, ou seja, para $3s = 3^{k+1}$. De fato, para $t = k$, vale:

$$\frac{T_n(i_1 \mapsto v_1 \dots v_s)}{\sum\limits_{\substack{k_d=i,j \\ d\in\{1,\dots,s\}}} T_n(i_1 \mapsto k_1 \dots k_s)}$$

$$= \frac{T_{n-q}\left(i_1 \mapsto w_1^q \dots w_{\xi_q(s)}^q\right) \prod\limits_{r=1}^{q} T\left(w_1^r \dots w_{\xi_r(s)}^r \mapsto w_1^{r-1} \dots w_{\xi_{r-1}(s)}^{r-1}\right)}{\sum\limits_{\substack{w_c^b=i,j \\ b\in\{1,\dots,q\} \\ c\in\{1,\dots,\xi_b(s)\}}} T_{n-q}\left(i_1 \mapsto w_1^q \dots w_{\xi_q(s)}^q\right) \prod\limits_{r=1}^{q} T\left(w_1^r \dots w_{\xi_r(s)}^r \mapsto w_1^{r-1} \dots w_{\xi_{r-1}(s)}^{r-1}\right)}. \tag{5.11}$$

De fato, temos

$$\frac{T_n(i_1 \mapsto v_1 \dots v_{3s})}{\sum\limits_{\substack{k_d=i,j \\ d\in\{1,\dots,3s\}}} T_n(i_1 \mapsto k_1 \dots k_{3s})}$$

$$= \frac{T_n(i_1 \mapsto w_1 \dots w_s) T(w_1 \dots w_s \mapsto v_1 \dots v_{3s})}{\sum\limits_{\substack{k_d=i,j \\ d\in\{1,\dots,3s\}}} T_n(i_1 \mapsto w_1 \dots w_s) T(w_1 \dots w_s \mapsto k_1 \dots k_{3s})}$$

$$= \frac{T_n(i_1 \mapsto w_1 \dots w_s)}{\sum\limits_{\substack{w_d=i,j \\ d\in\{1,\dots,s\}}} T_n(i_1 \mapsto w_1 \dots w_s)} \frac{T(w_1 \dots w_s \mapsto v_1 \dots v_{3s})}{\sum\limits_{\substack{k_d=i,j \\ d\in\{1,\dots,3s\}}} T(w_1 \dots w_s \mapsto k_1 \dots k_{3s})}$$

$$\overset{(5.11)}{=} \frac{T_{n-q}\left(i_1 \mapsto w_1^q \dots w_{\xi_q(s)}^q\right) \prod\limits_{r=1}^{q} T\left(w_1^r \dots w_{\xi_r(s)}^r \mapsto w_1^{r-1} \dots w_{\xi_{r-1}(s)}^{r-1}\right)}{\sum\limits_{\substack{w_c^b=i,j \\ b\in\{1,\dots,q\} \\ c\in\{1,\dots,\xi_b(s)\}}} T_{n-q}\left(i_1 \mapsto w_1^q \dots w_{\xi_q(s)}^q\right) \prod\limits_{r=1}^{q} T\left(w_1^r \dots w_{\xi_r(s)}^r \mapsto w_1^{r-1} \dots w_{\xi_{r-1}(s)}^{r-1}\right)}$$

$$\times \frac{T(w_1 \dots w_s \mapsto v_1 \dots v_{3s})}{\sum\limits_{\substack{k_d=i,j \\ d\in\{1,\dots,3s\}}} T(w_1 \dots w_s \mapsto k_1 \dots k_{3s})}$$

$$= \frac{T_{n-(q+1)}\left(i_1 \mapsto w_1^{q+1} \dots w_{\xi_{q+1}(s)}^{q+1}\right) \prod\limits_{r=1}^{q+1} T\left(w_1^r \dots w_{\xi_r(s)}^r \mapsto w_1^{r-1} \dots w_{\xi_{r-1}(s)}^{r-1}\right)}{\sum\limits_{\substack{w_c^b=i,j \\ b\in\{1,\dots,q+1\} \\ c\in\{1,\dots,\xi_b(s)\}}} T_{n-(q+1)}\left(i_1 \mapsto w_1^{q+1} \dots w_{\xi_{q+1}(s)}^{q+1}\right) \prod\limits_{r=1}^{q+1} T\left(w_1^r \dots w_{\xi_r(s)}^r \mapsto w_1^{r-1} \dots w_{\xi_{r-1}(s)}^{r-1}\right)}$$

o que mostra o resultado. ■

Assim, temos

$$\frac{T_n(i_1 \mapsto v_1 \dots v_s)}{\sum\limits_{\substack{k_d=i,j \\ d\in\{1,\dots,s\}}} T_n(i_1 \mapsto k_1 \dots k_s)}$$

$$= \frac{T_{n-q}\left(i_1 \mapsto w_1^q \dots w_{\xi_q(s)}^q\right) \prod\limits_{r=1}^{q} T\left(w_1^r \dots w_{\xi_r(s)}^r \mapsto w_1^{r-1} \dots w_{\xi_{r-1}(s)}^{r-1}\right)}{\sum\limits_{\substack{w_c^b=i,j \\ b\in\{1,\dots,q\} \\ c\in\{1,\dots,\xi_b(s)\}}} T_{n-q}\left(i_1 \mapsto w_1^q \dots w_{\xi_q(s)}^q\right) \prod\limits_{r=1}^{q} T\left(w_1^r \dots w_{\xi_r(s)}^r \mapsto w_1^{r-1} \dots w_{\xi_{r-1}(s)}^{r-1}\right)}$$

$$= \left(\frac{T_{n-q}\left(i_1 \mapsto w_1^q \dots w_{\xi_q(s)}^q\right)}{\sum\limits_{\substack{w_c^b=i,j \\ b\in\{1,\dots,q\} \\ c\in\{1,\dots,\xi_b(s)\}}} T_{n-q}\left(i_1 \mapsto w_1^q \dots w_{\xi_q(s)}^q\right)} \right) \prod_{r=1}^{q} \frac{1}{4^{\xi_r(s)}} = \frac{1}{2^{2\sum_{r=1}^{q}\xi_r(s)}} \left(\frac{i^{n-q}}{i^{n-q}+j^{n-q}} \right)$$

$$= \frac{1}{2^{2\sum_{r=1}^{q}\xi_r(s)}} \left(\frac{\frac{1}{2}\left(i_1(4^{n-q}-2^{n-q}) + j_1(4^{n-q}+2^{n-q})\right)}{4^{n-q}(i_1+j_1)} \right) = \frac{1}{2^{2\sum_{r=1}^{q}\xi_r(s)+1}} \left(1 + \frac{(-i_1+j_1)}{2^{n-q}(i_1+j_1)} \right).$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mu(M^{-n}([i_1]) \cap [j_1 \dots j_s]) &= \lim_{n\to\infty} \mu([i_1]) \left(\frac{T_n(i_1 \mapsto j_1 \dots j_s)}{\sum\limits_{\substack{k_d=i,j \\ d\in\{1,\dots,s\}}} T_n(i_1 \mapsto k_1 \dots k_s)} \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\mu([i_1])}{2^{2\sum_{r=1}^{q}\xi_r(s)+1}} \left(1 + \frac{(-i_1+j_1)}{2^{n-q}(i_1+j_1)} \right) \\
&= \frac{\mu([i_1])}{2^{2\sum_{r=1}^{q}\frac{s}{3^r}+1}} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{(-i_1+j_1)}{2^{n-q}(i_1+j_1)} \right) \\
&= \frac{\mu([i_1])}{2^{2s\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{3^r}+1}} = \frac{\mu([i_1])}{2^{2s\left(\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^q}\right)\right)+1}} \\
&= \frac{\mu([i_1])}{2^s} = \mu([i_1])\mu([j_1 \dots j_s]),
\end{aligned}$$

uma vez que $q = \log_3 s$, logo $3^q = s$, de onde vem $2s\sum_{r=1}^{q} \frac{1}{3^r} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^q}\right)2s = s - 1$.

Por (5.5), temos

$$\lim_{n\to\infty} \mu(M^{-n}([i_1 \dots i_m]) \cap [j_1 \dots j_s]) = \mu([i_1 \dots i_m])\mu([j_1 \dots j_s]).$$

Como m, s são arbitrários, o resultado está provado para quaisquer cilindros. A demonstração para conjuntos gerais segue os passos da demonstração do Teorema 5.32 de [17]. Portanto (M, μ) é misturadora. ■

Corolário 5.1.11. *O sistema* $\left(M, B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right)$ *é fracamente misturador e ergódico.*

Demonstração. Ver [30]. ■

Seja f uma transformação ergódica. Se f^k é ergódica, para todo $k \geq 1$, então a transformação f é dita *totalmente ergódica*.

Corolário 5.1.12. *O sistema* $\left(M, B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right)$ *é totalmente ergódico.*

Demonstração. De fato, como M é misturadora, temos M^2 misturadora pois, para todos A,B mensuráveis, temos

$$\lim_{n\to\infty} \mu(M^{-2n}(A) \cap B) \to \mu(A)\mu(B).$$

Claramente, M^k é misturadora pois $(M^{-kn})_{n\geq 1}$ é uma subsequência da sequência $(M^{-n})_{n\geq 1}$, então para $n \to +\infty$, para todo A, B conjuntos mensuráveis, $\lim \mu(M^{-n}(A) \cap B) = \mu(A)\mu(B)$ implica

$$\lim_{n\to\infty} \mu((M^k)^{-n}(A) \cap B) = \lim_{n\to\infty} \mu(M^{-kn}(A) \cap B) = \mu(A)\mu(B).$$

Portanto, M^k é misturadora para todo $k \geq 1$ e M^k é ergódica para todo $k \geq 1$, então M é totalmente ergódica. ■

Defina o *operador de Koopman* de M como $K_M : L^2(\mu) \to L^2(\mu)$ dado por $\varphi \overset{K_M}{\to} \varphi \circ M$, $\varphi \in L^2(\mu)$. O operador K_M é linear, contínuo, positivo e satisfaz $\|K_M\varphi\|_{L^2} = \|\varphi\|_{L^2}$ e $spec(K_M) \subset \mathbb{S}^1$.

Corolário 5.1.13. *Seja M a transformação majority rule e* $\left(M, B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right)$ *fracamente misturador, então M tem espectro contínuo, ou seja, o único autovalor de K_M é o autovalor simples* 1 *com autofunções constantes.*

Demonstração. Ver [30]. ■

Como definido anteriormente, um sistema dinâmico topológico $(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, M)$ é dito *minimal* quando $\overline{\mathcal{O}_M(x)} = X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ para todo $x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

Proposição 5.1.14. *O sistema* $\left(M, B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right)$ *não é minimal, mas* $\mu(\{x : \overline{\mathcal{O}_M(x)} = X\}) = 1$.

Demonstração. Considere uma base enumerável de cilindros $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ para a topologia em X, então $\cup_{k=0}^{\infty} M^{-k}U_n$ é um aberto. Afirmamos

$$\{x : \overline{\mathcal{O}_M(x)} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}\} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{\infty} M^{-k}U_n.$$

De fato, $y \in \{x : \overline{\mathcal{O}_M(x)} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}\}$ se, e só se, $\overline{\mathcal{O}_M(y)} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ se, e só se, para todo n existe k tal que $M^k(y) \in U_n$ se, e só se, para todo n existe k tal que $y \in M^{-k}U_n$ se, e só se, $y \in \cap_{n=0}^{\infty} \cup_{k=0}^{\infty} M^{-k}U_n$. Para cada n, temos

$$M^{-1}\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} M^{-k}U_n\right) = \bigcup_{k=0}^{\infty} M^{-(k+1)}U_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} M^{-k}U_n \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} M^{-k}U_n,$$

então $\cup_{k=0}^{\infty} M^{-k}U_n$ é um conjunto M-invariante. Pela ergodicidade de M e por $\mu(U_n) > 0$, temos $\mu(\cup_{k=0}^{\infty} M^{-k}U_n) = 1$ para cada n. Portanto

$$\mu\left(\bigcap_{n=0}^{\infty}\bigcup_{k=0}^{\infty} M^{-k}U_n\right) = 1 - \mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty}\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} M^{-k}U_n\right)^C\right) \geq 1 - \sum_{n=0}^{\infty}\mu\left(\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} M^{-k}U_n\right)^C\right) = 1$$

e segue $\mu(\{x : \overline{\mathcal{O}_M(x)} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}\}) = 1$. Assim, M não é minimal pois existem pontos cuja órbita não é densa, por exemplo. $\overline{\mathcal{O}_M(0^\infty)} = 0^\infty \neq \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. ■

Proposição 5.1.15. *Considere o sistema $\left(M, B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right)$. Então a entropia métrica do sistema em $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ é infinita.*

Demonstração. Fixemos a partição mensurável de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ dada por $\alpha = \{[0],[1]\}$. Observe que

$$M^{-1}([0]) = [001] \cup [010] \cup [100] \cup [000],$$
$$M^{-1}([1]) = [111] \cup [110] \cup [101] \cup [011],$$

então

$$\alpha \vee M^{-1}(\alpha) = [001] \cup [010] \cup [100] \cup [000] \cup [111] \cup [110] \cup [101] \cup [011],$$

e portanto

$$H(\alpha \vee M^{-1}(\alpha)) = -\sum_{A_{i_1}, A_{i_2} \in \alpha \vee M^{-1}(\alpha)} \mu(A_{i_1} \cap M^{-1}(A_{i_2})) \log \mu(A_{i_1} \cap M^{-1}(A_{i_2})) = 3 \log 2.$$

Além disso, $\vee_{i=0}^{n-1} M^{-i}(\alpha)$ é dado por 2^{3^n} cilindros disjuntos de tamanho 3^n. Logo,

$$H(\vee_{i=0}^{n-1} M^{-i}(\alpha)) = -\sum_{A \in \vee_{i=0}^{n-1} M^{-i}(\alpha)} \mu(A) \log \mu(A) = -2^{3^n} \frac{1}{2^{3^n}} \log\left(\frac{1}{2^{3^n}}\right) = 3^n \log 2,$$

e portanto $h(\mu) \geq \lim_{n\to\infty} H(\vee_{i=0}^{n-1} M^{-i}(\alpha)) = \infty$. ■

Como no Teorema 5.1.5, a entropia topológica vale ∞ e pode ser encontrada via Princípio Variacional:

Corolário 5.1.16. *Seja $h(M)$ a entropia topológica da transformação majority rule M. Então $h(M) = \infty$.*

Demonstração. Pelo Princípio Variacional, temos $h(M) = \sup_{\nu \in \mathcal{M}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})} h(\nu)$, e como $\mu = B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in \mathcal{M}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$, pela Proposição 5.1.15, temos $\infty = h(\mu) \leq h(M)$. ■

5.2 Aplicação Decimation

Considerando $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ e $b \in \mathbb{N}$, definimos a aplicação *decimation* como sendo $S : \Omega \to \Omega$, dada por $S(\omega) = \omega_b\omega_{2b}\omega_{3b}\ldots$, onde $\omega = \omega_1\omega_2\omega_3\ldots$.

Proposição 5.2.1. *A medida de Bernoulli $\mu := B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ é invariante por S.*

Demonstração. Note que, dado um cilindro $[i_1 i_2 ... i_n]$, sua pré-imagem $S^{-1}([i_1 i_2 ... i_n])$, é dada por $2^{(b-1)n}$ cilindros de comprimento nb, o que implica

$$\mu(S^{-1}([i_1 i_2 ... i_n])) = 2^{(b-1)n} 2^{-nb} = 2^{-n} = \mu([i_1 i_2 ... i_n]). \blacksquare$$

Proposição 5.2.2. *A entropia da medida de Bernoulli $\mu = B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ é infinita.*

Demonstração. Tomando a partição α de Ω dada por $\alpha = \{[0], [1]\}$. Assim

$$S^{-n}([0]) = \bigcup_{i_1, i_2, \ldots, i_{nb-1} \in \{0,1\}} [i_1 i_2 ... i_{nb-1} 0] \ \text{ e } \ S^{-n}([1]) = \bigcup_{i_1, i_2, \ldots, i_{nb-1} \in \{0,1\}} [i_1 i_2 ... i_{nb-1} 1].$$

Então

$$H(\vee_{i=0}^{n-1} S^{-i}(\alpha)) = - \sum_{A \in \vee_{i=0}^{n-1} S^{-i}(\alpha)} \mu(A) \log \mu(A) = 2.2^{nb-1} \frac{1}{2^{nb}} \log 2^{nb} = nb \log 2.$$

Portanto $\lim_{n\to\infty} H(\vee_{i=0}^{n-1} S^{-i}(\alpha)) = \infty$, o que implica $h(\mu) = \infty$. $\blacksquare$

Pelo Princípio Variacional, segue:

Corolário 5.2.3. *A entropia topológica da aplicação decimation é infinita.*

Bibliografia

[1] Aaronson, J., Nakada, H., and Sarig, O. Exchangeable measures for subshifts. *Annales de l'I.H.P. Probabilités et statistiques 42* (2006), 727–751. vii

[2] Billingsley, P. *Probability and Measure*, 3rd ed. John Wiley and Sons Inc, 1995. 19, 21, 23

[3] Bogenschütz, T., and Gundlach, V. M. Ruelle's transfer operator for random subshifts of finite type. *Ergodic Theory & Dynamical Systems* (1995). 41

[4] Bowen, R. *Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms*. 470. Springer, New York, Berlin, 1975. 26

[5] Burton, R., and Steif, J. E. Non-uniqueness of measures of maximal entropy for subshifts of finite type. *Ergodic Theory & Dynamical Systems 14* (1994), 213–235. vii

[6] Ceccherini-Silberstein, T., and Coornaert, M. *Cellular automata and groups*. Springer, 2010. 47

[7] Cornfeld, I. P., Fomin, S. V., and Sinai, Y. G. *Ergodic Theory*. Springer-Verlag, Berlin, Heildelberg, New York, 1982. 49

[8] Denker, M., and Urbanski, M. On the existence of conformal measures. *Trans. Amer. Math. Soc. 328* (1991), 563–587. 39

[9] Dobrushin, R. L. Gibbsian random fields for lattice systems with pairwise interactions. *Funkcional. Anal. i Prilozen 2* (1968), 31–43. vii

[10] Einsiedler, M., and Ward, T. *Ergodic Theory with a view towards Number Theory*. Springer-Verlag, 2011. 21, 49

[11] Frobenius, F. G. Über matrizen aus nicht negativen element. *S.B. Preuss Acad. Wiss. Berlin* (1912), 456–477. vi

[12] Georgii, H.-O. *Gibbs measures and phase transitions*, vol. 9 of *Gruyter Studies in Mathematics*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1988. 45

[13] Hedlund, G. A. Endomorphisms and automorphisms of the shift dynamical system. *Math. Systems Theory 3* (1969), 320–375. 47

[14] Keller, G. *Equilibrium States in Ergodic Theory*. Cambridge University Press, 1998. 16, 33

[15] Lanford, O. E., and Ruelle, D. Observables at infinity and states with short range correlations in statistical mechanics. *Commun. Math. Phys. 13* (1969), 194–215. vii

[16] Livsic, A. N. Cohomology of dynamical systems. *Math. USSR-Izvestiya 6*, 6 (1972), 1278–1301. 26

[17] Lopes, A. O., and Lopes, S. R. C. *Introdução aos Processos Estocásticos para estudantes de Matemática*. preprint, 2016. 57

[18] Mañé, R. *Ergodic Theory and Differentiable Dynamics*. Springer Verlag, 1987. 49

[19] Meyerovitch, T. Gibbs and equilibrium measures for some families of subshifts. *Ergodic Theory & Dynamical Systems 33* (2013), 934–953. vii

[20] Misiurewicz, M. A short proof of the variational principle for $\mathbb{Z}_+^n$ action on compact space. *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. 24* (1976), 1069–1075. vii

[21] Parry, W., and Pollicott, M. *Zeta Functions and the Periodic Orbit Structure of Hyperbolic Dynamics*. Société mathématique de France, 1990. vi, 6, 7, 11, 15, 17

[22] Perron, O. Zur theorie der matrizen. *Math. Ann. 64* (1907), 248–263. vi

[23] Pollicott, M., and Schmidt, K. *Ergodic Theory of $\mathbb{Z}^d$ Actions*. Cambridge University Press, 1996. 33

[24] Pollicott, M., and Yuri, M. *Dynamical Systems and Ergodic Theory*. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, 1998. 21

[25] Queffélec, M. *Substitution Dynamical Systems - Spectral Analysis*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2010. vi

[26] Ruelle, D. Statistical mechanics of a one-dimensional lattice gas. *Comm. Math. Phys. 9* (1968), 267–278. vi

[27] Schmidt, K. *Dynamical Systems of Algebraic Origin*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1995. 20, 33

[28] van Enter, A. C. D., Fernandez, R., and Sokal, A. D. Regularity properties and pathologies of position-space renormalization-group transformations. *JSP 72* (1993), 879–1167. 45

[29] Viana, M., and Oliveira, K. *Fundamentos da Teoria Ergódica*. Sociedade Brasileira de Matemática, 2014. 49

[30] Walters, P. *An Introduction to Ergodic Theory*, 2 ed. Springer-Verlag, 1982. 49, 57