

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

ROGER PIZZATO NUNES

**TERMALIZAÇÃO DE FEIXES NÃO-NEUTROS ULTRA-INTENSOS SOB CONFINAMENTO SOLENOIDAL EM
CANAIS LINEARES**

Porto Alegre

2008

ROGER PIZZATO NUNES

**TERMALIZAÇÃO DE FEIXES NÃO-NEUTROS ULTRA-INTENSOS SOB CONFINAMENTO SOLENOIDAL EM
CANAIS LINEARES**

Tese de Doutorado submetida ao Programa de Pós-graduação em Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências.

Orientador: Prof. Dr. Felipe Barbedo Rizzato

Porto Alegre

2008

**TERMALIZAÇÃO DE FEIXES NÃO-NEUTROS ULTRA-INTENSOS SOB CONFINAMENTO SOLENOIDAL EM
CANAIS LINEARES**

por

Roger Pizzato Nunes

Engenheiro Eletricista, Físico e Mestre em Engenharia

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física, PPG-Fís, do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Doutor em Ciências

Área de Concentração: Física de Plasmas

Orientador: Prof. Dr. Felipe Barbedo Rizzato

Comissão examinadora:

Prof. Dr. Antonio de Padua Brito Serbeto

Prof. Dr. Sergio Roberto Lopes

Prof. Dr. Yan Levin

Prof. Dr. Pedro Luis Grande

Prof. Dr. Márcia C. B. Barbosa
Coordenador do PPG-Fís

Porto Alegre, novembro de 2008

RESUMO

As aplicações envolvendo confinamento e aceleração de feixes de partículas carregadas em canais lineares são inúmeras em diversas áreas do conhecimento. A evolução da engenharia dos aceleradores lineares de partículas de próxima geração está fortemente condicionada ao melhor entendimento de fenômenos não-lineares como a formação de halo, inerentes aos atualmente cada vez mais perscrutados regimes de alta densidade de carga e energia. O presente trabalho visa investigar e caracterizar os aspectos dinâmicos e de equilíbrio envolvidos na transição de um feixe ultra-intenso de partículas com mesma carga de um estado inicial não-estacionário para um final estacionário. A alta densidade de partículas implica que as forças repulsivas naturais neste tipo de sistema sejam imprescindíveis para a sua correta descrição. O feixe em questão evolui em um canal linear encapsulado por um duto circular condutor e é focalizado por um campo magnético constante axial de origem solenoidal. Tal feixe inicialmente encontra-se perfeitamente alinhado com o eixo de simetria do sistema de confinamento magnético, sendo, portanto, as oscilações de sua centróide inexistentes. Por simplicidade, foi imposto também ao feixe o vínculo de simetria azimutal. Como condição inicial, considerou-se o estado não-estacionário do feixe descrito por uma densidade homogênea e outra não-homogênea. No primeiro caso, o descasamento e, no segundo, a magnitude da não-homogeneidade são os fatores precursores da instabilidade inicial que conduz o feixe ao estado de equilíbrio. Para ambos os casos, modelos foram desenvolvidos para determinar quantidades dinâmicas, relacionadas à escala de tempo característica da instabilidade inicial, e de equilíbrio, tais como a emitância e o envelope, grandezas estatísticas estas usualmente de interesse em Física de Feixes. Os resultados obtidos foram comparados com simulações numéricas autoconsistentes e o acordo foi satisfatório. Os modelos demonstraram-se eficientes não somente em prever tais quantidades de interesse como também em elucidar aspectos físicos fundamentais intrínsecos ao comportamento observado nas simulações numéricas autoconsistentes e experimentos.

Palavras-chave:

aceleradores de partículas — física de feixes — formação de halo

ABSTRACT

Applications involving confinement and acceleration of charged particle beams in linear channels are innumerable in many fields of the knowledge. The engineering evolution of next-generation particle linear accelerators is strongly conditioned to the better understanding of nonlinear phenomena like halo formation, inherent to the more and more currently explored regimes of high charge density and energy. The present work aims at investigating and characterizing dynamical and equilibrium aspects involved in the transition of a high-intensity beam of charged particles from an initial non-stationary state to a final stationary state. High particle densities mean that the repulsive forces naturally present in these kinds of systems are essential to their adequate description. The beam under analysis evolves inside a linear channel encapsulated by a circular conductor pipe, and is focalized by a constant axial magnetic field generated by solenoids. Such beam is initially perfectly aligned to the symmetry axis of the magnetic confinement system, being in this way its centroid oscillations non-existent. For simplicity, it has been imposed to the beam the constraint of azimuthal symmetry. As initial condition, the beam non-stationary state has been described by a homogeneous and an inhomogeneous particle density. In the first case, the mismatch and, in the second one, the magnitude of inhomogeneity, are the factors forerunner of the initial instability, which leads the beam to evolve to the equilibrium state. For both cases, models have been developed to determine dynamical quantities, related to the characteristic time scale of the initial instability, and equilibrium quantities, such as the emittance and envelope, usually of interest in Beam Physics. The obtained results have been compared with full self-consistent N -particle beam numerical simulations and the agreement has been reasonable. The models have shown to be efficient not only to predict beam quantities of interest as well as to elucidate fundamental physical aspects intrinsic to the behavior observed in the self-consistent numerical simulations and experiments.

Keywords:

particle accelerators — beam physics — halo formation

SUMÁRIO

Introdução	7
1 Descrição cinética de um feixe de partículas carregadas	13
1.1 Sistema de equações Vlasov-Maxwell	14
1.2 Sistema de equações alternativo	16
1.3 Sistema de equações para um confinamento solenoidal periódico	21
2 Descrição de quantidades macroscópicas de um feixe de partículas carregadas	26
2.1 Conservação do número de partículas por unidade de comprimento	28
2.2 Conservação do momento angular canônico	28
2.3 Conservação de energia	29
2.4 Equação dinâmica para o raio RMS e para a emitância RMS	30
3 Descrição das interações microscópicas em um feixe de partículas carregadas	34
3.1 Interações microscópicas em feixes com simetria azimutal	35
3.2 Interações microscópicas em um feixe homogêneo com simetria azimutal	37
3.3 Interações microscópicas em um feixe não-homogêneo com simetria azimutal	38
4 Termalização em feixes inicialmente homogêneos com simetria azimutal	43
4.1 Descrição do estado inicial não-estacionário	52
4.2 Descrição do estado final estacionário	54
4.2.1 Aproximação semicircular	62
4.2.2 Aproximação semi-elíptica	66
4.3 Conexão entre o estado final estacionário e o inicial não-estacionário	70
4.3.1 Aproximação semicircular	71
4.3.2 Aproximação semi-elíptica	72
4.4 Determinação das quantidades de equilíbrio	73
4.5 Escala de decaimento	80
4.6 Descrição por partícula-teste	87
5 Mecanismo físico precursor da termalização em feixes não-neutros	101
6 Termalização em feixes inicialmente não-homogêneos com simetria azimutal	108
6.1 Descrição do estado inicial não-estacionário	119
6.2 Descrição do estado final estacionário	121
6.3 Conexão entre o estado final estacionário e o inicial não-estacionário	130
6.4 Determinação das quantidades de equilíbrio	131
6.5 Abordagem Lagrangeana para a magnitude da não-homogeneidade	137
6.6 Descrição por partícula-teste	152
Conclusão	157
Trabalhos futuros	162
Referências bibliográficas	164

APÊNDICE A — Simulação numérica autoconsistente de um feixe de partículas carregadas com simetria azimutal.....	168
APÊNDICE B — Escalonamento adotado nas equações que descrevem quantidades de interesse do feixe de partículas carregadas.....	177
APÊNDICE C — Obtenção de uma solução analítica quase-exata para o modelo desenvolvido na aproximação semicircular de feixes inicialmente homogêneos	179
APÊNDICE D — Quantidades de equilíbrio obtidas para os valores de descasamento inicial r_0 de interesse	182
APÊNDICE E — Densidades de equilíbrio obtidas para os valores de descasamento inicial r_0 de interesse	184
APÊNDICE F — Escalas de decaimento obtidas para os valores de descasamento inicial r_0 de interesse	188
APÊNDICE G — Quantidades de equilíbrio obtidas para valores de magnitude da não-homogeneidade η de interesse.....	192
APÊNDICE H — Densidades de equilíbrio obtidas para valores de magnitude da não-homogeneidade η de interesse.....	193
APÊNDICE I — Dinâmica do raio RMS R_b e da emitância ϵ durante o estado inicial não-estacionário para valores de magnitude da não-homogeneidade η de interesse	196

INTRODUÇÃO

Aceleradores de partículas com mesma carga sofreram nas últimas décadas um franco desenvolvimento em aspectos envolvidos na sua concepção, no seu projeto e na sua implementação. A base tecnológica da sua concepção é consequência da solidificação científica dos conceitos introduzidos pela Teoria Eletromagnética e, em um amplo sentido, de sua interação com a matéria. Dentre os fatores que aperfeiçoaram o seu projeto e a sua implementação moderna destaca-se o surgimento de válvulas de microondas e posteriormente da supercondutividade, os quais permitiram um incremento substancial da eficiência das estruturas aceleradoras presentes neste tipo de máquinas.

O conceito básico envolvido em um acelerador consiste em fornecer energia para partículas inicialmente confinadas mediante aplicação de um campo elétrico. A sua versão mais simples são os eletrostáticos, os quais operam com um campo elétrico acelerador constante. Neste tipo de sistema, as partículas adquirem energia do campo elétrico em uma quantidade igual ao produto de sua carga pela diferença de potencial a qual são submetidas, sendo esta mensurada portanto em elétron-Volt eV . A principal limitação dos aceleradores eletrostáticos é a quantidade máxima de energia possível de ser transferida às partículas, uma vez que a tensão aplicada sobre estas últimas é restringida a aquela característica de rompimento do meio. No ar, para um exemplo, esta tensão cinge-se a $3kV/mm$. Outras questões envolvendo eficiência, potência dissipada e a engenharia de fontes de alimentação contínuas de alta tensão e potência podem ser citadas como limitantes importantes que impediram o emprego deste tipo de estrutura para aceleração de partículas a energias da ordem de centenas de MeV .¹

A limitação energética acima foi superada com a introdução de estruturas aceleradoras baseadas em campos elétricos dependentes do tempo. Neste tipo de método de aceleração, um campo elétrico que depende harmonicamente do tempo é aplicado sobre as partículas de forma que, durante sua excursão internamente ao acelerador, estas interagirão inúmeras vezes com um campo cuja polarização é adequada para que haja sempre transferência de energia. A dependência temporal do campo elétrico aplicado elimina a natural limitação de tensão comentada anteriormente e existente em um acelerador eletrostático, uma vez que inúmeras estruturas aceleradoras podem ser conectadas em série. No entanto, para aceleração progressiva, as partículas devem adequadamente ingressar em cada uma destas estruturas em fase com o campo elétrico excitador, mantendo sincronismo com as demais estruturas dispostas em seqüência, para que haja um ganho sustentado de energia por parte destas.

O primeiro conceito de acelerador empregando campos elétricos dependentes do tempo foi proposto por Gustaf Ising,² sendo composto por um tubo de vácuo reto e sucessivos tubos de

deslocamento metálicos, com orifícios em seu centro para o translado das partículas. Entre os tubos de deslocamento metálicos, pulsos de tensão curtos e intensos são aplicados para acelerar as partículas. O sincronismo entre os pulsos de tensão aplicados e as partículas em trânsito era obtido mediante inserção de linhas de transmissão cujo atraso era adequadamente determinado para cada tubo de deslocamento adjacente. Interessante também observar que, devido à aplicação em série das tensões, o potencial tanto na entrada quanto na saída do acelerador é nulo, sendo portanto a diferença de potencial também nula e podendo assim as extremidades serem referenciadas ou simplesmente aterradas. Ou seja, mediante campos elétricos dependentes do tempo, torna-se possível transferir energia para as partículas confinadas sem que uma diferença de potencial efetiva seja estabelecida nas extremidades do acelerador.

Embora não implementado, a concepção de uma estrutura de aceleração como a acima fomentou o desenvolvimento do método de aceleração proposto e construído por Rolf Wideröe,³ sendo este o precursor e no qual ainda baseiam-se os aceleradores de partículas modernos. Ao invés de linhas de transmissão com atraso, a estrutura de aceleração em questão utiliza tubos metálicos de deslocamento variáveis. Desta forma, sincronia entre a tensão aplicada e a evolução da partícula pode ser mais facilmente obtida, haja vista que o comprimento do tubo de deslocamento pode ser compativelmente dimensionado com a velocidade — e portanto a energia — projetada para as partículas em cada estágio de aceleração. Importante salientar que as partículas somente sofrem aceleração na interface entre cada tubo de deslocamento, pois internamente a estes, devido à sua constituição condutora, os campos elétricos são nulos. Portanto, dentro dos tubos de deslocamento, as partículas possuem velocidade constante, sendo este fato um simplificador na determinação do comprimento de cada estágio de aceleração. Entre cada tubo de deslocamento, uma tensão harmônica de alta-freqüência e amplitude é aplicada para permitir o fornecimento progressivo de energia às partículas. Valores típicos para a amplitude e freqüência da tensão aplicada neste tipo de acelerador residem respectivamente em $25kV$ e $1MHz$. A quantidade de estágios aceleradores empregados está diretamente relacionada à quantidade de energia desejada que as partículas absorvam. É pronta a constatação então que o ganho neste tipo de estrutura é dezenas de vezes maior que o obtido mediante um acelerador eletrostático com tensão nominal equivalente a amplitude da fonte alternada anterior. Mais: as partículas podem ser aceleradas individualmente, em grupos ou de forma contínua, constituindo o que se denomina de feixe.

Embora semelhantes em conceito, os aceleradores de partículas atuais diferem do construído originalmente por Rolf Wideröe com relação à origem do campo elétrico aplicado. Ao contrário de pulsos sincronizados de tensão, a injeção de radiação eletromagnética do tipo radiofreqüência (RF) torna-se muito mais vantajosa construtivamente. Desta forma — freqüências muito mais altas, usualmente compreendidas na região do VHF ou UHF — podem ser obtidas,

diminuindo o tamanho dos tubos de deslocamento e, conseqüentemente, propiciando que uma maior quantidade de energia por unidade de comprimento possa ser fornecida às partículas. A construção de aceleradores de partículas com dimensões realísticas e operando com centenas de *MeV* torna-se então completamente factível. As partículas podem ser aceleradas por inúmeras cavidades eletromagnéticas consecutivamente dispostas, as quais são sintonizadas em um modo eletromagnético particular e excitadas por uma fonte de radiação de alta-freqüência e alta-potência externa. O avanço considerável na confecção de fontes de RF de alto desempenho e o emprego de cavidades ressonantes supercondutoras conduziu as estruturas aceleradoras ao estado da arte.⁴

Tanto o acelerador proposto por Gustaf Ising quanto o construído por Rolf Wideröe são denominados de aceleradores lineares ou, abreviadamente, LINACs. A concepção deste tipo de acelerador fomentou o desenvolvimento de outros, tais como o cíclotron, propostos por E. O. Lawrence,⁵ e o síncrotron, independentemente por V. Veksler⁶ e por E. M. McMillan,⁷ dentre os principais cuja utilização é disseminada atualmente. Tais tipos de aceleradores diferem basicamente com relação à trajetória na qual as partículas sofrem aceleração. Enquanto em aceleradores lineares as partículas absorvem energia do campo elétrico aplicado em uma linha reta, em cíclotrons tal absorção ocorre em uma espiral e em síncrotrons, em um círculo perfeito. Todavia, todos estes aceleradores podem ser ditos do tipo aceleradores de ressonância,¹ uma vez que para um ganho efetivo de energia pelas partículas, estas devem interagir inúmeras vezes e possuir suas órbitas suficientemente sincronizadas com o campo elétrico aplicado, conforme já comentado em parágrafos anteriores.

Uma das maiores vantagens dos aceleradores lineares frente aos demais é a sua capacidade de produzir feixes de alta-energia, alta-intensidade e alta-qualidade. A qualidade está associada à possibilidade de obtenção de feixes de partículas carregadas altamente colimados e com pouca dispersão em energia. Do ponto de vista da Física Nuclear, estes são quesitos essenciais, pois em geral deseja-se utilizar o feixe produzido como sonda na investigação da estrutura da matéria. Outras características interessantes surgem como diferenciais neste tipo de acelerador, tais como a possibilidade de implementação de um sistema de focalização intenso para confinamento das partículas aceleradas, a ausência de ressonâncias artificiais existentes em cíclotrons e síncrotrons introduzidas pela passagem repetitiva das partículas pelo campo elétrico acelerador, ausência de intensa perda de potência por emissão de radiação como em cíclotrons e síncrotrons, fácil inserção e extração do feixe de partículas carregadas e operação em altos regimes de corrente elétrica média no tempo, permitindo que desde partículas individuais, grupos ou até feixes contínuos sejam produzidos.¹

Inúmeras aplicações de aceleradores lineares são identificadas atualmente. No caso de aceleradores lineares de elétrons pode-se citar a colisão de elétrons e pósitrons para pesquisas

elementares em física de partículas de alta-energia, feixes de alta-qualidade para LASERs de elétrons livres, fontes pulsadas de nêutrons para Física Nuclear e Ciências dos Materiais, fontes de raios-X de alta qualidade para radioterapia em hospitais e aplicações no meio industrial, utilizados em processos de esterilização e radiografias. Considerando aceleradores lineares de prótons, aplicações modernas incluem injetores para síncrotrons de alta-energia, fontes de nêutrons para Matéria Condensada, Ciências dos Materiais e aplicações médicas, produção de combustível nuclear, transmutação de lixo nuclear, reatores de fissão e fusão, produção de trítio e microeletrônica.^{1,8,9} Esta vasta gama de aplicações deste tipo de acelerador motivou a sua intensa e generalizada pesquisa em muitos países, totalizando 174 diferentes máquinas distribuídas nas Américas, Europa e Ásia,¹⁰ considerando somente aquelas presentes em laboratórios com fins unicamente para pesquisa científica e desenvolvimento tecnológico.

Contextualização deste trabalho

Trabalhos recentes investigaram a influência do sistema de confinamento magnético, mediante variação do seu perfil longitudinal,¹¹ e do alinhamento da inserção, caracterizada por desvios da centróide,¹² na dinâmica não-linear de um feixe de partículas carregadas em um canal linear de focalização.

Objetivo deste trabalho

Todavia, em aceleradores lineares de feixes não-neutros ultra-intensos de partículas carregadas, os efeitos oriundos das forças internas repulsivas presentes no sistema não podem ser desprezados.^{13,14} Como consequência, uma série de fenômenos não-lineares surge, instabilizando a dinâmica do feixe durante sua excursão no canal linear de confinamento até que o seu equilíbrio seja atingido. Talvez o mais notório destes fenômenos que conduz o feixe a um estado estacionário seja a formação do halo.^{15,16} Denomina-se de halo o conjunto de partículas com órbitas de grande amplitude que surgem e são observadas no entorno do feixe durante sua evolução no canal de confinamento.

Desta forma, o objetivo do presente trabalho é desenvolver modelos que determinem as características dinâmicas das instabilidades atuantes bem como os parâmetros que caracterizam o estado de equilíbrio do feixe após cessão destas últimas. De forma resumida, o interesse reside em quantificar a escala de tempo característica durante a qual estas instabilidades exercem influência na dinâmica do feixe bem como determinar quantidades estatísticas de interesse em Física de Feixes quando o equilíbrio é atingido, como o envelope e a emitância. O envelope designa o limite espacial — a borda — do feixe enquanto a emitância quantifica a sua área ocupada no espaço de fase, estando diretamente associada à entropia total do sistema.

Como condição inicial, atribuiu-se ao feixe uma densidade homogênea e outra não-homogênea. Desta forma, os dois fatores precursores da instabilidade inicial em cada um dos formatos de densidade anterior, a dizer, o descasamento e a magnitude da não-homogeneidade, puderam ter suas influências sobre o equilíbrio atingido pelo feixe escrutadas em detalhe. No caso não-homogêneo, para intensificar as influências da instabilidade inicial associada, ao feixe ainda foi imposto estar com seu envelope em equilíbrio.

Motivação deste trabalho

Os atuais aceleradores lineares operam em regimes de intensidade e energia cada vez maiores.¹⁷ Desta forma, o surgimento das instabilidades anteriormente comentadas torna-se irreversível, não podendo ser então negligenciado.¹³ A atuação destas instabilidades degrada a qualidade do feixe final obtido, requisito este indispensável em muitas das aplicações já comentadas. Mais, fenômenos como a formação do halo podem induzir a radioativação da estrutura de confinamento do acelerador, dificultando e encarecendo a sua manutenção assim como deteriorando os componentes eletrônicos envolvidos na sua instrumentação e no seu controle.⁹

Por conseguinte, a engenharia dos aceleradores de próxima geração possui sua evolução intimamente relacionada com o melhor entendimento da física envolvida nestes fenômenos não-lineares intrínsecos. Quão melhor compreendam-se estes fenômenos, melhores soluções podem ser adotadas para minimizar ou controlar seus efeitos. Enquanto a escala de tempo na qual o feixe atinge o equilíbrio é de fundamental importância no projeto dos colimadores empregados, a determinação de quantidades que caracterizam o equilíbrio é relevante no dimensionamento da estrutura de confinamento.

Haja vista que os efeitos destas instabilidades somente são observados nos aceleradores lineares reais^{13,15,16} e mediante simulações numéricas autoconsistentes,^{18,19} as quais são complexas e onerosas computacionalmente, torna-se interessante desenvolver então modelos compactos que isolem e descrevam com acuracidade o fenômeno. Desta forma, um melhor entendimento da física envolvida no processo pode ser obtida e conseqüentemente melhores soluções no âmbito da engenharia podem ser desenvolvidas.

Organização deste trabalho

Física de Feixes pode ser compreendida como um caso particular pertencente à Física de Plasmas Não-neutros, a qual corresponde a uma subárea pura e aplicada da Física de Plasmas. Muitos dos fenômenos coletivos presentes na área de Física de Plasmas também são observados na Física de Plasmas Não-neutros e, conseqüentemente, também na Física de Feixes.²⁰ Portanto, a abordagem adotada em uma das áreas, pode ser prontamente estendida a qualquer outra.

Desta forma, dividiu-se o presente trabalho nos capítulos descritos a seguir. Os Capítulos 1 e 2 constituem uma revisão bibliográfica dos conceitos necessários ao desenvolvimento dos modelos pretendidos. Os demais Capítulos constituem a contribuição deste trabalho ao assunto em questão.

No Capítulo 1, a descrição de um feixe não-neutro de partículas carregadas é efetuada mediante o arcabouço da Teoria Cinética. A adoção de uma formulação Hamiltoniana alternativa permitiu que a dinâmica transversal fosse desacoplada da longitudinal. A consideração de um campo de focalização do tipo solenoidal também contribuiu para que um sistema de equações Vlasov-Maxwell compacto fosse obtido para a descrição do sistema.

No Capítulo 2, equações dinâmicas para quantidades macroscópicas como o número de partículas, momento angular, energia, raio RMS e emitância RMS são obtidas. Para tanto, definiu-se o conceito de quantidade média por partícula da função distribuição, a qual representa o feixe no espaço de fase, e utilizaram-se os resultados do Capítulo 1 providos pela Teoria Cinética. Estas equações são de fundamental importância para caracterização do feixe em seu estado inicial e posteriormente em seu estado final, de equilíbrio.

No Capítulo 3, as interações microscópicas existentes na dinâmica de um feixe real são formalmente equacionadas tanto para um feixe inicialmente homogêneo quanto para um não-homogêneo, escopo deste trabalho. Por simplificação, considerou-se que as densidades são azimutalmente simétricas.

No Capítulo 4, modelos para determinação das quantidades de interesse do feixe no equilíbrio bem como a escala de tempo característica na qual este último é atingido foram desenvolvidos para um feixe inicialmente homogêneo. Estas grandezas foram computadas para diferentes valores de descasamento inicial de interesse no âmbito da Física de Feixes.

No Capítulo 5, o mecanismo fundamental envolvido na termalização de feixes não-neutros de partículas carregadas é discutido. Embora minimizável, a não-homogeneidade é uma característica presente e irrevogável em qualquer implementação numérica de uma densidade de partículas, mesmo no caso suposto inicialmente homogêneo.

No Capítulo 6, o mesmo procedimento adotado para modelar o feixe inicialmente homogêneo descrito no Capítulo 4 foi estendido também para o caso não-homogêneo. Tanto as quantidades médias de interesse do feixe no equilíbrio bem como a escala de tempo característica necessária para que este último seja atingido foram determinadas. Tais quantidades foram computadas como função de distintos valores de não-homogeneidade inicial. Adicionalmente, neste Capítulo uma abordagem Lagrangeana ao feixe de partículas carregadas foi desenvolvida.

Os Capítulos finais referem-se às conclusões obtidas mediante o presente trabalho e aos trabalhos futuros que se pretende desenvolver como complemento e continuidade ao que foi aqui apresentado.

1 DESCRIÇÃO CINÉTICA DE UM FEIXE DE PARTÍCULAS CARREGADAS

O comportamento de um conjunto de partículas de mesma espécie, esboçadas em um espaço heptadimensional apresentado na Figura 1, de acordo com a Teoria Cinética, pode ser completamente descrito no espaço de fase supondo uma função distribuição f_b com a seguinte dependência funcional^{21,22,23}

$$f_b = f_b(\mathbf{r}, \mathbf{p}; t), \quad (1.1)$$

na qual $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ é o vetor coordenada espacial, $\mathbf{p} = p_x\mathbf{e}_x + p_y\mathbf{e}_y + p_z\mathbf{e}_z$ representa o vetor coordenada de momento linear e t é a coordenada temporal. Os vetores \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y e \mathbf{e}_z formam a base retangular adotada e são unitários nas direções x , y e z , respectivamente.

A função distribuição f_b é definida como a densidade de partículas no espaço de fase.²⁴ Ou seja, f_b refere-se ao número de partículas $N_b(\mathbf{r}, \mathbf{p}; t)$ presente em um elemento infinitesimal de volume $d\mathbf{r}d\mathbf{p}$ delimitado no espaço de fase.²² Formalmente

$$f_b(\mathbf{r}, \mathbf{p}; t) \equiv \frac{d^6 N_b(\mathbf{r}, \mathbf{p}; t)}{d\mathbf{r}d\mathbf{p}}, \quad (1.2)$$

na qual é suposto que o número de partículas $N_b(\mathbf{r}, \mathbf{p}; t)$ varie suavemente entre elementos de volume $d\mathbf{r}d\mathbf{p}$ contíguos no espaço de fase. Desta forma, a função distribuição f_b pode ser considerada analítica para qualquer valor de seus argumentos.

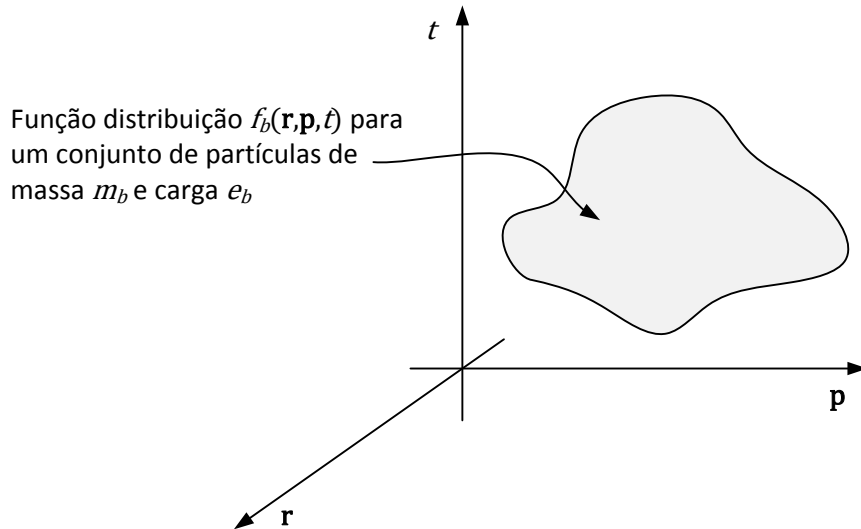


Figura 1: Representação da função distribuição.

Sendo tal conjunto de partículas um sistema físico limitado do ponto de vista do espaço de fase, a função distribuição f_b deve satisfazer a condição de localização espacial esboçada por²²

$$\lim_{r \rightarrow \pm\infty} f_b(\mathbf{r}, \mathbf{p}; t) = 0 \quad (1.3)$$

e de finitude em energia definida por²²

$$\lim_{p \rightarrow \pm\infty} f_b(\mathbf{r}, \mathbf{p}; t) = 0. \quad (1.4)$$

1.1 Sistema de equações Vlasov-Maxwell

Supondo que as colisões entre as partículas constituintes sejam desprezíveis, de tal forma que os efeitos coletivos prevaleçam sobre as interações binárias, então a energia pertencente à órbita de cada partícula constituinte do sistema é conservada.^{23,24} No espaço de fase, a conservação de energia implica em conservação do volume ocupado pelo sistema descrito pela distribuição f_b , devendo obedecer ao Teorema de Liouville^{25,26,27} formalmente enunciado por

$$df_b/dt = 0. \quad (1.5)$$

Embora as condições para a negligência das colisões dependam da formulação específica de cada problema físico, uma condição necessária é que a frequência das colisões binárias seja muito menor que a frequência de variação de quantidades pertinentes à distribuição f_b .²³ A suposição acima é uma aproximação adequada e realística em sistemas complexos de tamanho limitado no qual o número de constituintes $N \rightarrow \infty$, uma vez que o termo colisional da equação de transporte de Boltzmann escala com $1/N$.²⁸

Expandindo a derivada total presente na equação (1.5) em termos do funcional apresentado na equação (1.1) tem-se que^{23,24}

$$\frac{\partial f_b}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_b}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F} \cdot \frac{\partial f_b}{\partial \mathbf{p}} = 0, \quad (1.6)$$

na qual $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ é a velocidade e, segundo a 2ª Lei de Newton, $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ é a força total exercida sobre as partículas no espaço de fase.^{24,26} O operador gradiente com relação às coordenadas espaciais define-se por $\partial/\partial \mathbf{r} = \nabla = \sum_{\alpha=\{x,y,z\}} \mathbf{e}_\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha}$ e o seu equivalente com relação às coordenadas de momento linear define-se por $\partial/\partial \mathbf{p} = \sum_{\alpha=\{x,y,z\}} \mathbf{e}_\alpha \frac{\partial}{\partial p_\alpha}$. Considerando um sistema composto por partículas relativísticas de massa de repouso m_b , a velocidade \mathbf{v} de cada partícula relaciona-se com o seu momento \mathbf{p} através da expressão²⁹

$$\mathbf{v} = \mathbf{p}/\gamma m_b, \quad (1.7)$$

na qual γ é o fator de Lorentz definido por^{29,30}

$$\gamma \equiv (1 + \mathbf{p}^2/m_b^2 c^2)^{1/2} \quad (1.8)$$

e c é a velocidade da luz no vácuo.

Sendo o sistema composto por partículas elétricas de mesma carga e_b , a força total exercida em cada ponto do espaço de fase é a Força de Lorentz^{30,31}

$$\mathbf{F} = e_b [\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})/c], \quad (1.9)$$

na qual \mathbf{E} e \mathbf{B} correspondem, respectivamente, aos campos elétrico e de indução magnética totais (gerados externamente ou internamente) presentes no sistema, os quais, a princípio, podem ser funções das coordenadas espaciais e temporal, seguindo $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$.

Inserindo a equação (1.9) na equação (1.6) obtém-se a comumente denominada Equação de Vlasov na área de Física de Plasmas^{21,22,23,24}

$$\frac{\partial f_b}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_b}{\partial \mathbf{r}} + e_b \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right) \cdot \frac{\partial f_b}{\partial \mathbf{p}} = 0. \quad (1.10)$$

Autoconsistentemente, os campos elétricos e de induções magnéticas totais presentes na expressão logo acima são obtidos mediante as equações de Maxwell^{29,30,31,32}

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.11)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi e_b}{c} \int d\mathbf{p} \mathbf{v} f_b(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_{ext} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (1.12)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi e_b \int d\mathbf{p} f_b(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) + 4\pi \rho_{ext}, \quad (1.13)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (1.14)$$

nas quais \mathbf{J}_{ext} e ρ_{ext} representam respectivamente fontes de densidade de corrente de carga e de densidade de carga.^{21,22,23} O conjunto de equações (1.10)-(1.14) formam o sistema Vlasov-Maxwell de equações para descrição espacial e temporal do comportamento da distribuição f_b .²¹

Os campos elétrico e de indução magnética totais podem ser decompostos proveitosamente para a abordagem adotada no presente trabalho em^{20,33}

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{ext}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}^s(\mathbf{r}, t) \quad (1.15)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_{ext}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{B}^s(\mathbf{r}, t), \quad (1.16)$$

sendo $\mathbf{E}_{ext}(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{B}_{ext}(\mathbf{r}, t)$ campos gerados externamente que permeiam o sistema e $\mathbf{E}^s(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{B}^s(\mathbf{r}, t)$ os campos gerados internamente ao sistema, respectivamente devido à existência de uma densidade de cargas $4\pi e_b \int d\mathbf{p} f_b(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ e de uma densidade de corrente de carga $(4\pi e_b / c) \int d\mathbf{p} \mathbf{v} f_b(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$.

Contudo, torna-se conveniente analisar funcionalmente os campos totais \mathbf{E} e \mathbf{B} para uma situação particular e pertinente a este trabalho. Considerando que o campo indução magnética total \mathbf{B} independe do tempo t , tem-se que, segundo a equação (1.11), o campo elétrico \mathbf{E} é irrotacional. Assim, considerando ainda a equação (1.14), os campos \mathbf{E} e \mathbf{B} que proporcionam a Força de Lorentz na expressão logo acima podem ser reescritos através do potencial escalar elétrico ϕ e do potencial vetor \mathbf{A} , dados por respectivamente^{29,30}

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (1.17)$$

Nesta expressão, tanto ϕ quanto \mathbf{A} são potenciais totais que permeiam o sistema de partículas carregadas aqui descrito pela distribuição de partículas f_b . Note que a exclusiva dependência de $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r})$ em relação às coordenadas espaciais implica diretamente na invariância temporal do potencial vetor $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r})$.

Semelhantemente, sendo o campo de força \mathbf{F} na equação (1.6) do tipo conservativo (em relação à energia), então necessariamente também o potencial escalar elétrico ϕ deve ser independente do tempo.²⁶ Em resumo, para a descrição de um sistema representado por f_b , sujeito a forças do tipo conservativas e utilizando funções tipo potencial para representação dos campos eletromagnéticos totais presentes, tem-se, respectivamente, que

$$\phi = \phi(\mathbf{r}) \therefore \mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \text{ e } \mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r}) \therefore \mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}). \quad (1.18)$$

Em analogia às equações (1.15) e (1.16), estes potenciais escalar elétrico e vetor totais podem ser também subdivididos em^{20,33}

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \phi_{ext}(\mathbf{r}) + \phi^s(\mathbf{r}) \text{ e} \quad (1.19)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}_{ext}(\mathbf{r}) + \mathbf{A}^s(\mathbf{r}). \quad (1.20)$$

Devido à ausência de colisões entre as partículas constituintes, a equação de Vlasov (1.10) possui uma grande variedade de soluções estacionárias. São soluções estacionárias funções arbitrárias que dependam funcionalmente das órbitas características desenvolvidas pelas partículas, descritas pelos coeficientes da equação de Vlasov (1.10) e as quais são isolinhas de alguma quantidade conservada do seu movimento. A quantidade conservada mais notável em um sistema no qual as forças agentes sejam conservativas é a energia. Neste sentido, o Hamiltoniano das partículas imersas em um campo conservativo tal qual o da equação (1.9) assume o formato^{25,27,29}

$$H = (m_b^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2)^{1/2} + e_b \phi. \quad (1.21)$$

Introduzindo o momento linear canônico^{25,27,29}

$$\mathbf{P} = \mathbf{p} + \frac{e_b}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (1.22)$$

e inserindo esta última expressão na equação (1.21) tem-se que

$$H = \left[m_b^2 c^4 + \left(\mathbf{P} - \frac{e_b}{c} \mathbf{A} \right)^2 c^2 \right]^{1/2} + e_b \phi, \quad (1.23)$$

na qual \mathbf{r} e \mathbf{P} ainda são variáveis canonicamente conjugadas, satisfazendo as equações de Hamilton a seguir^{25,26,27,29}

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{P}} \text{ e} \quad (1.24)$$

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}}. \quad (1.25)$$

Após certo procedimento algébrico, constata-se que a inserção da equação (1.23) nas equações (1.24) e (1.25), respectivamente fornece as órbitas características descritas pelas equações (1.7) e (1.9), tal qual o esperado.

1.2 Sistema de equações alternativo

Uma abordagem alternativa torna-se muito conveniente quando a função distribuição f_b representa um feixe de partículas carregadas. Partículas que compõe um feixe são caracterizadas por

uma direção espacial preferencial de movimento frente às demais. Diretamente, isto implica que as partículas que constituem o feixe possuirão uma maior quantidade de energia cinética nesta direção espacial do que nas demais outras. É usual que tal diferença de energia cinética atinja patamares tais que uma abordagem relativística torne-se apenas necessária para a direção espacial preferencial de propagação do feixe, sendo as duas demais outras tratadas classicamente. Isto implica em uma aproximação tipo paraxial, uma vez que, supondo que o sentido preferencial de propagação do feixe ocorra em \mathbf{e}_z tem-se que^{8,20,33}

$$p_x^2, p_y^2, (p_z - p_b)^2 \ll p_b^2. \quad (1.26)$$

sendo p_b o momento linear médio por partícula na direção preferencial de propagação do feixe.

Neste caso paraxial, torna-se interessante ainda considerar que as partículas na direção preferencial de movimento possuem pequena dispersão nos valores dos seus momentos lineares cuja moda é $\gamma_b m_b \beta_b c$. Nestas condições, torna-se válido aproximar o momento p_z de cada partícula na direção preferencial de propagação do feixe por

$$p_b = \frac{\int d\mathbf{r} d\mathbf{p} p_z f_b(\mathbf{r}, \mathbf{p}; t)}{\int d\mathbf{r} d\mathbf{p} f_b(\mathbf{r}, \mathbf{p}; t)} \approx \gamma_b m_b \beta_b c, \quad (1.27)$$

uma constante. O termo $\int f_b(\mathbf{r}, \mathbf{p}; t) d\mathbf{r} d\mathbf{p}$ na expressão acima corresponde a um fator de normalização identificado — segundo a equação (1.2) — pelo número de partículas $N_b(\mathbf{r}, \mathbf{p}; t)$, γ_b é o fator de Lorentz obtido da expressão (1.8) através de $\mathbf{p} \rightarrow p_b$ e β_b é um parâmetro de velocidade, o qual será definido a seguir.

Este procedimento permite que o movimento nesta direção espacial preferencial seja desacoplado das demais duas outras, já que em \mathbf{e}_z , as partículas possuem órbitas características estabelecidas pelas seguintes equações^{21,22,24}

$$z \approx z_0 + \beta_b c t \quad (1.28)$$

$$\frac{dz}{dt} = v_z \approx v_b, \quad (1.29)$$

nas quais $z_0 = z(t = 0)$ é a posição inicial de cada partícula, $\beta_b = v_b/c$ é o parâmetro de velocidade²⁹ e v_b é a velocidade do feixe de partículas na direção preferencial. Adicionalmente, através destas imposições, as quais são fisicamente realísticas, torna-se possível descrever a variação de grandezas pertencentes ao plano xy — perpendicular à direção preferencial de propagação do feixe — em relação à coordenada z .

Tendo em vista estas aproximações, uma versão simplificada do Hamiltoniano H presente na equação (1.23) pode ser obtida. É possível definir uma transformação canônica sobre este Hamiltoniano H que substitua P_z por $-H$ bem como z por t , mantendo as demais outras variáveis do espaço de fase inalteradas. Neste sentido, propondo-se como novo Hamiltoniano³³

$$\mathcal{H}(x, P_x; y, P_y; t, -H; z) = -P_z(x, P_x; y, P_y; t, -H; z) \quad (1.30)$$

e resolvendo a equação (1.23) para a variável p_z , tem-se exatamente que³³

$$\mathcal{H} = -P_z = - \left[\left(\frac{H - e_b \phi}{c} \right)^2 - m_b^2 c^2 - \left(P_x - \frac{e_b}{c} A_x \right)^2 - \left(P_y - \frac{e_b}{c} A_y \right)^2 \right]^{1/2} - \frac{e_b}{c} A_z, \quad (1.31)$$

na qual a raiz positiva foi escolhida.

No contexto da aproximação paraxial definida mediante a equação (1.26) como também da condição de que $|e_b \phi| \ll H$, pode-se expandir por Taylor a expressão acima para \mathcal{H} com relação à quantidade $-2e_b H \phi / c^2 - (P_x - e_b A_x / c)^2 - (P_y - e_b A_y / c)^2$, tendo como, através da equação (1.21), $p_z(H) \approx (H^2 / c^2 - m_b^2 c^2)^{1/2}$. Considerando o resultado presente na equação (1.27), obtém-se então a versão simplificada do Hamiltoniano presente na equação (1.31)

$$\mathcal{H} \approx -\gamma_b m_b \beta_b c + \frac{1}{2\gamma_b m_b \beta_b c} \left[\left(P_x - \frac{e_b}{c} A_x \right)^2 + \left(P_y - \frac{e_b}{c} A_y \right)^2 \right] + \frac{e_b}{\beta_b c} \phi - \frac{e_b}{c} A_z, \quad (1.32)$$

na qual foram mantidos termos de segunda ordem na direção x e y e termos de primeira ordem em ϕ . Observe que, se p_z é uma distribuição com pequena dispersão, H também o é. Note que a condição de aproximação paraxial bem como a de pequena dispersão nos momento lineares p_z imposta sobre \mathcal{H} desacopla — tal qual comentado anteriormente — completamente a evolução das partículas na direção preferencial do feixe das duas demais outras. Observe que, tanto na equação exata (1.31) quanto na aproximada (1.32), \mathcal{H} não depende explicitamente de z e P_z .

Em termos do novo Hamiltoniano \mathcal{H} , as equações de Hamilton do movimento (1.24) e (1.25) tornam-se respectivamente³⁴

$$\frac{d\mathbf{r}_\perp}{dz} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{P}_\perp}, \quad \frac{dt}{dz} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (-H)} \quad \text{e} \quad (1.33)$$

$$\frac{d\mathbf{P}_\perp}{dz} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{r}_\perp} \quad \text{e} \quad \frac{d(-H)}{dz} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}. \quad (1.34)$$

Nas expressões logo acima $\mathbf{r}_\perp = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y$ é o vetor coordenada espacial e $\mathbf{P}_\perp = P_x\mathbf{e}_x + P_y\mathbf{e}_y$ é o momento linear canônico, ambos pertencentes ao plano perpendicular ao sentido preferencial \mathbf{e}_z de propagação do feixe.

Consistentemente com a abordagem em questão, um procedimento semelhante pode ser adotado para com a função distribuição f_b que descreve o feixe de partículas carregadas. Reexpressando f_b através das novas variáveis utilizadas na transformação canônica anterior tem-se que³³

$$f_b = f_b(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{P}_\perp, t, -H; z). \quad (1.35)$$

Através do Teorema de Liouville, inserindo a equação (1.35) na equação (1.5), obtém-se

$$\frac{\partial f_b}{\partial z} + \frac{d\mathbf{r}_\perp}{dz} \cdot \frac{\partial f_b}{\partial \mathbf{r}_\perp} + \frac{dt}{dz} \cdot \frac{\partial f_b}{\partial t} + \frac{d\mathbf{P}_\perp}{dz} \cdot \frac{\partial f_b}{\partial \mathbf{P}_\perp} + \frac{d(-H)}{dz} \cdot \frac{\partial f_b}{\partial (-H)} = 0. \quad (1.36)$$

a qual é uma expressão equivalente à equação (1.6) para a conservação do volume ocupado por f_b no espaço de fase, agora descrito pelas novas variáveis canônicas.

Esta abordagem torna-se atraente quando certas observações adicionais são efetuadas. Considerando-se o Hamiltoniano expresso na equação (1.32) — tendo em vista que devido à equação (1.18) $\partial\phi/\partial t = \partial\mathbf{A}/\partial t = 0$ — constata-se que há independência explícita deste último com relação ao tempo t : $\mathcal{H} \neq \mathcal{H}(t)$. Portanto, $\partial\mathcal{H}/\partial t = 0$ e, da segunda equação de Hamilton presente em (1.34), tem-se que igualmente $d(-H)/dz = 0$. Também, nos casos de um feixe em equilíbrio, então $f_b^0 \neq f_b^0(t)$ explicitamente. Em resumo, nestas circunstâncias³³

$$d(-H)/dz = \partial f_b^0/\partial t = 0. \quad (1.37)$$

Inserindo a equação (1.37) na equação (1.36), obtém-se uma expressão simplificada para a equação de conservação do volume ocupado por f_b no espaço de fase

$$\frac{\partial f_b^0}{\partial z} + \frac{d\mathbf{r}_\perp}{dz} \cdot \frac{\partial f_b^0}{\partial \mathbf{r}_\perp} + \frac{d\mathbf{P}_\perp}{dz} \cdot \frac{\partial f_b^0}{\partial \mathbf{P}_\perp} = 0, \quad (1.38)$$

a qual propicia que quantidades perpendiculares da distribuição f_b sejam descritas única e exclusivamente com relação à direção preferencial do movimento do feixe em \mathbf{e}_z .

Não obstante, a função distribuição f_b^0 ainda é dependente da variável canônica $-H$. Tendo em vista a conservação de H , expressa na equação (1.23), analiticamente pode-se impor como dependência funcional de f_b^0 em relação à H qualquer função com pequena dispersão. Esta imposição é consistente com a consideração previamente estabelecida de que, na direção preferencial de propagação do feixe, as partículas possuem uma pequena dispersão em seus momentos lineares p_z . A compatibilização ocorre no caso limite de uma distribuição $f_b^0(H)$ com dispersão nula, representada por uma função delta de Dirac. Assim, introduzindo a função distribuição reduzida²¹

$$F_b(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{P}_\perp; z) = \int d(-H) f_b^0(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{P}_\perp, -H; z) e \quad (1.39)$$

mediante integração da equação (1.38) em relação à $-H$ bem como considerando uma notação usualmente adotada na área de feixes na qual

$$s \equiv z \quad (1.40)$$

obtém-se que^{20,33}

$$\frac{\partial F_b}{\partial s} + \frac{d\mathbf{r}_\perp}{ds} \cdot \frac{\partial F_b}{\partial \mathbf{r}_\perp} + \frac{d\mathbf{P}_\perp}{ds} \cdot \frac{\partial F_b}{\partial \mathbf{P}_\perp} = 0. \quad (1.41)$$

Cabe salientar que, para obtenção da equação acima, apenas se impôs que f_b esteja em equilíbrio, que a evolução das partículas esteja condicionada a uma aproximação paraxial e que — na direção preferencial de propagação do feixe \mathbf{e}_z — as partículas possuam uma pequena dispersão em seus momentos lineares p_z . Embora s e z sejam variáveis que designem a mesma coordenada espacial, na nomenclatura das variáveis e operações optar-se-á em manter z nas indexações de vetores e adotar s nas diferenciações.

O potencial total $\phi(\mathbf{r})$ presente no feixe descrito pela equação (1.41) pode ser adimensionalizado da seguinte forma^{20,33}

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{K_b \phi(\mathbf{r})}{2N_b e_b}, \quad (1.42)$$

na qual $\psi(\mathbf{r})$ é o potencial elétrico adimensional, $N_b = \int d\mathbf{P}_\perp d\mathbf{r}_\perp F_b(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{P}_\perp; s)$ é o número total de partículas por unidade de comprimento s presente no feixe e^{20,33}

$$K_b = \frac{2N_b e_b^2}{\gamma_b^3 m_b \beta_b^2 c^2} \quad (1.43)$$

é uma quantidade comumente definida na área de Física de Feixes como perveância, neste caso em sua forma adimensional. Esta quantidade quantifica a intensidade das forças repulsivas em um feixe de partículas carregadas de mesma carga (não-neutro no jargão da área de Física de Feixes).

Por final, considerando que o feixe em questão seja espacialmente contínuo na direção \mathbf{e}_z — tal que a sua dimensão característica nesta direção seja muito maior que nas demais outras, um feixe fino — pode-se considerar que as variações de segunda ordem em relação a esta direção são desprezíveis frente às demais. Assim o operador Laplaciano pode ser aproximado por^{8,20,33}

$$\nabla^2 \approx \nabla_\perp^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (1.44)$$

Desta forma, inserindo a equação (1.42) em (1.17) e a sua expressão resultante em (1.13), considerando ausência de cargas elétricas de fontes externas — $\rho_{ext} = 0$ — juntamente com aproximação presente na equação (1.44) tem-se que^{20,33}

$$\nabla_\perp^2 \psi = -\frac{2\pi K_b}{N_b} \int d\mathbf{P}_\perp F_b(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{P}_\perp; s) = -\frac{2\pi K_b}{N_b} n_b(\mathbf{r}_\perp, s), \quad (1.45)$$

na qual a densidade de partículas em função da coordenada s é definida por^{21,22,23,24}

$$n_b(\mathbf{r}_\perp, s) = \int d\mathbf{P}_\perp F_b(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{P}_\perp; s). \quad (1.46)$$

Igualmente, tendo em vista o campo indução magnética definido em (1.18), considerando sua expressão através do potencial vetor em (1.17) e assumindo inexistência de densidades de correntes de carga externas — $\mathbf{J}_{ext} = 0$ — tem-se que a equação (1.12) torna-se

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \frac{4\pi e_b}{c} \int d\mathbf{P}_\perp \mathbf{v}_\perp F_b(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{P}_\perp; s) + 4\pi e_b \beta_b n_b \mathbf{e}_s \quad (1.47)$$

As equações (1.41), (1.45) e (1.47), supridas pela versão aproximada do Hamiltoniano \mathcal{H} presente na equação (1.32) bem como pelas equações para as órbitas características das partículas definidas em (1.33) e (1.34), formam um sistema acoplado não-linear de equações que autoconsistentemente descrevem a evolução da distribuição reduzida F_b e do potencial elétrico adimensional ψ — pertencentes ao espaço de fase definido pelas coordenadas \mathbf{r}_\perp e \mathbf{P}_\perp — em função da coordenada s . Para obtenção deste conjunto de equações, se utilizou como hipóteses —

realísticas — que o feixe é contínuo, é paraxial, está em equilíbrio e que suas partículas possuem pequena dispersão em seus momentos lineares p_z . Destaca-se que nenhuma consideração a respeito dos campos elétricos $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ e de induções magnéticas $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ totais foi ainda estabelecida. Em princípio, conforme as equações (1.15) e (1.16), os campos eletromagnéticos totais são oriundos de fontes externas e internas, esta última gerada autoconsistentemente pela dinâmica da distribuição reduzida F_b . Todavia, tratando-se de um feixe composto por partículas de mesma carga, a atribuição dos campos eletromagnéticos externos torna-se necessária para definição da configuração de confinamento adotada. Cada tipo de configuração fornece um conjunto distinto de órbitas características $d\mathbf{r}_\perp/ds$ e $d\mathbf{P}_\perp/ds$, termos estes que consistentemente são coeficientes da equação (1.41) e que impactam a evolução da função distribuição reduzida F_b em relação à coordenada s .

1.3 Sistema de equações para um confinamento solenoidal periódico

A configuração de interesse do sistema focalização para este trabalho consta na Figura 2. Nesta figura, um feixe de distribuição reduzida — que doravante terá seu adjetivo omitido por simplicidade — F_b arbitrária transversal, no plano xy , evolui axialmente, no sentido \mathbf{e}_s , em um canal linear de confinamento magnético muito longo. O feixe é encapsulado por um duto circular de raio r_w , confeccionado em material condutor, com centro ajustado ao eixo de propagação do feixe e submetido a um potencial elétrico constante V_0 . O espaço entre as partículas mais externas do feixe e o duto é vácuo. Como será demonstrado no próximo Capítulo, a inserção de um duto condutor no sistema de confinamento é fundamental para que certas grandezas relevantes pertinentes ao feixe sejam conservadas durante seu percurso no sentido \mathbf{e}_s .

O campo de focalização magnética de interesse neste trabalho é o proporcionado por um arranjo do tipo solenoidal. Este arranjo propicia, em sua forma mais geral, um campo de indução magnética periódico e alinhado ao eixo \mathbf{e}_s . Considerando ainda que o sistema não seja permeado por nenhum campo elétrico externo, então as equações (1.15) e (1.16) para os campos totais simplificam-se a

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_\perp, s) = \mathbf{E}^s(\mathbf{r}_\perp, s) \mathbf{e}_s \quad (1.48)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_\perp, s) = \mathbf{B}_{ext}(\mathbf{r}_\perp, s) + \mathbf{B}^s(\mathbf{r}_\perp). \quad (1.49)$$

Como consequência direta, as equações (1.19) e (1.20) também se simplificam a

$$\phi(\mathbf{r}_\perp, s) = \phi^s(\mathbf{r}_\perp, s) \mathbf{e}_s \quad (1.50)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_\perp, s) = \mathbf{A}_{ext}(\mathbf{r}_\perp, s) + \mathbf{A}^s(\mathbf{r}_\perp). \quad (1.51)$$

O campo de indução magnética externa $\mathbf{B}_{ext}(\mathbf{r}_\perp, s)$ na equação (1.49) é gerado pelo arranjo solenoidal de focalização e, na aproximação de feixe fino, pode ser estimado por^{20,33}

$$\mathbf{B}_{ext}(\mathbf{r}_\perp, s) \equiv \mathbf{B}_{sol}(\mathbf{r}_\perp, s) \approx -\frac{1}{2}B'_z(s)\mathbf{r}_\perp + B_z(s)\mathbf{e}_s, \quad (1.52)$$

na qual $B'_z(s) = \partial B_z / \partial s|_{r_\perp=0}$ e $B_z(s) = B_z(s + S)$ é a componente axial do campo indução magnética de focalização solenoidal, a qual é periódica e possui período S . Como consequência, o potencial vetor resultante deste campo é expresso por^{20,33}

$$\mathbf{A}_{ext}(\mathbf{r}_\perp, s) \equiv \mathbf{A}_{sol}(\mathbf{r}_\perp, s) \approx \frac{1}{2} B_z(s) (x\mathbf{e}_y - y\mathbf{e}_x). \quad (1.53)$$

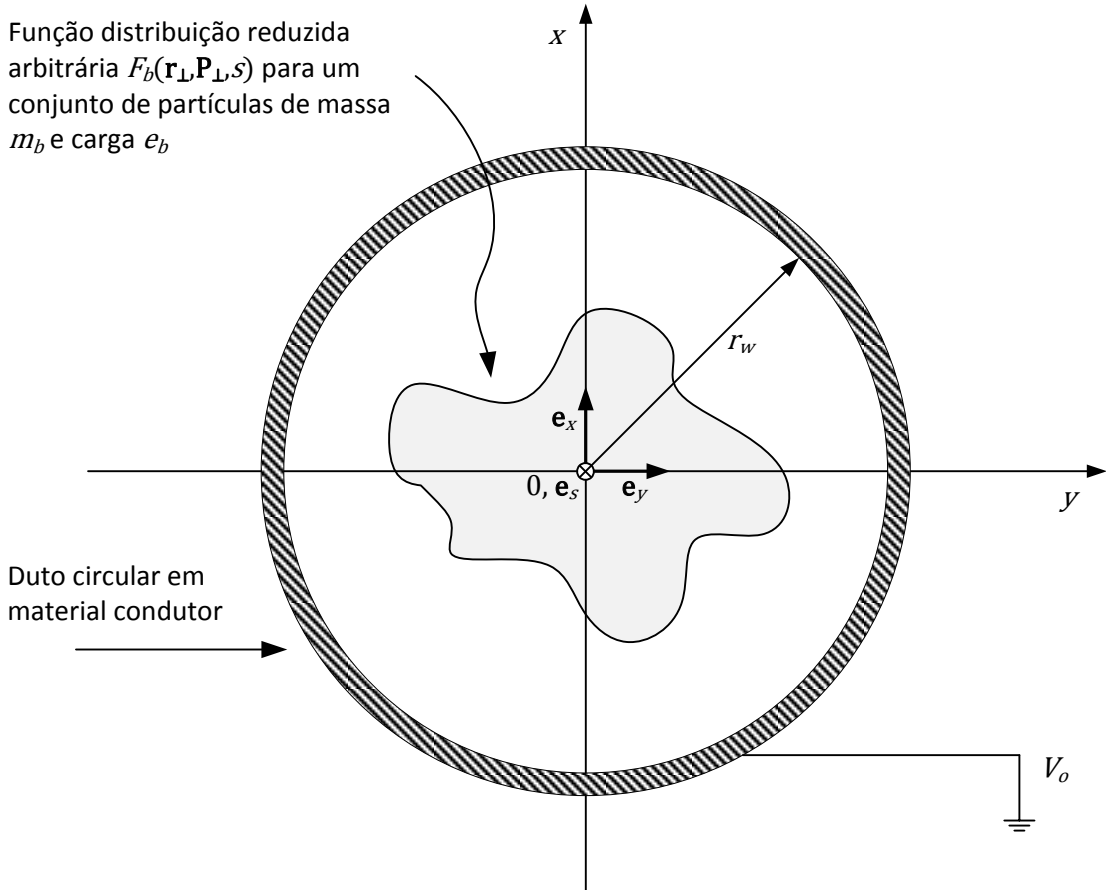


Figura 2: Função distribuição reduzida arbitrária $F_b(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{P}_\perp; s)$ evoluindo em um canal linear de focalização magnética encapsulado por um duto circular condutor de raio r_w e submetido a um potencial V_o .

Resta ainda determinar o campo indução magnética $\mathbf{B}^s(\mathbf{r}_\perp)$ presente na equação (1.49) — ou equivalentemente seu potencial vetor $\mathbf{A}^s(\mathbf{r}_\perp)$ — gerado autoconsistentemente pela distribuição F_b . Inserindo a equação (1.53) em (1.51) e, por sua vez, a expressão resultante na equação (1.47) para o potencial vetor total, obtém-se como equação para a componente em \mathbf{e}_s de \mathbf{A}^s

$$\nabla^2 A_z^s = -4\pi e_b \beta_b n_b. \quad (1.54)$$

Comparando-se a equação acima com a equação de Poisson presente na equação (1.45) na versão dimensional (obtida utilizando-se a relação para o potencial adimensional presente na equação (1.42) com auxílio da equação (1.43)), atinge-se a importante constatação que

$$A_z^s(\mathbf{r}_\perp, s) = \beta_b \phi(\mathbf{r}_\perp, s) = \frac{2N_b e_b \beta_b}{K_b} \psi(\mathbf{r}_\perp, s). \quad (1.55)$$

Com o suporte desta última equação, inserindo-a em conjunto com a equação (1.53) na equação (1.20), verifica-se que o potencial vetor total $\mathbf{A}(\mathbf{r}_\perp, s)$ torna-se completamente definido, para o arranjo de focalização solenoidal, através da expressão^{20,33}

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_\perp, s) = \frac{1}{2} B_z(s)(x\mathbf{e}_y - y\mathbf{e}_x) + \frac{2N_b e_b \beta_b}{K_b} \psi(\mathbf{r}_\perp, s)\mathbf{e}_s. \quad (1.56)$$

Obtida a expressão para o potencial vetor total \mathbf{A} , pode-se então determinar o Hamiltoniano \mathcal{H} referente ao sistema de focalização solenoidal. Inserindo a equação (1.56) na (1.32) tem-se que

$$\mathcal{H} \approx -\gamma_b m_b \beta_b c + \frac{1}{2\gamma_b m_b \beta_b c} \left[\left(P_x + \frac{e_b B_s}{2c} y \right)^2 + \left(P_y - \frac{e_b B_s}{2c} x \right)^2 \right] + \frac{2N_b e_b^2}{\gamma_b^2 K_b \beta_b c} \psi(\mathbf{r}_\perp, s). \quad (1.57)$$

Pode ser introduzido então um escalonamento nos momentos lineares canônicos \mathbf{P}_\perp pelo momento linear médio por partícula do feixe p_b no sentido \mathbf{e}_s

$$\bar{\mathbf{P}}_\perp = \mathbf{P}_\perp / \gamma_b m_b \beta_b c. \quad (1.58)$$

Multiplicando a equação (1.57) por $1/\gamma_b m_b \beta_b c$ e inserindo nesta as expressões presentes nas equações (1.58) e (1.43), obtém-se como resultado

$$\frac{\mathcal{H}}{\gamma_b m_b \beta_b c} \approx -1 + \frac{1}{2} [\bar{P}_x + \Omega_L(s)y]^2 + \frac{1}{2} [\bar{P}_y - \Omega_L(s)x]^2 + \psi(\mathbf{r}_\perp, s) \quad (1.59)$$

na qual^{20,33}

$$\Omega_L(s) \equiv \frac{e_b B_z(s)}{2\gamma_b m_b \beta_b c^2} \quad (1.60)$$

é definido como a freqüência de Larmor relativística desenvolvida pelas partículas em um campo solenoidal de confinamento magnético. Adicionalmente, reexpressando o Hamiltoniano \mathcal{H} por

$$H_\perp = \frac{\mathcal{H}}{\gamma_b m_b \beta_b c} + 1 \quad (1.61)$$

tem-se que a equação (1.59) torna-se simplesmente³³

$$H_\perp(\mathbf{r}_\perp, s) = \frac{1}{2} [\bar{P}_x + \Omega_L(s)y]^2 + \frac{1}{2} [\bar{P}_y - \Omega_L(s)x]^2 + \psi(\mathbf{r}_\perp, s), \quad (1.62)$$

a qual corresponde ao Hamiltoniano que descreve a dinâmica transversal das partículas.

Simplificação adicional pode ser obtida efetuando-se uma transformação de variáveis tais que a seção transversal do feixe no espaço de fase especificado por $(\mathbf{r}_\perp, \bar{\mathbf{P}}_\perp)$ seja descrita no referencial de Larmor mediante novas variáveis $(\mathbf{R}_\perp, \mathbf{V}_\perp)$, expressas por $\mathbf{R}_\perp = X(s)\mathbf{e}_x + Y(s)\mathbf{e}_y$ e $\mathbf{V}_\perp = d\mathbf{R}_\perp/ds$. Uma forma de proceder é definir a seguinte função geratriz³⁴

$$G(X, Y, X', Y', s) = [x(s) \cos \theta_L(s) + y(s) \sin \theta_L(s)] X' + [-x(s) \sin \theta_L(s) + y(s) \cos \theta_L(s)] Y' \quad (1.63)$$

na qual^{8,20,33}

$$\theta_L(s) = - \int_0^s ds \Omega_L(s) \quad (1.64)$$

é o ângulo de rotação no referencial de Larmor. Através das equações canônicas de Hamilton, a função geratriz da equação (1.63) fornece as seguintes relações de transformação entre as coordenadas espaciais

$$X = \frac{\partial G}{\partial X'} = x(s) \cos \theta_L(s) + y(s) \text{sen} \theta_L(s) \text{ e} \quad (1.65)$$

$$Y = \frac{\partial G}{\partial Y'} = -x(s) \text{sen} \theta_L(s) + y(s) \cos \theta_L(s), \quad (1.66)$$

e as seguintes relações de transformação entre as coordenadas de momento linear

$$\bar{P}_x = \frac{\partial G}{\partial x} = X' \cos \theta_L(s) - Y' \text{sen} \theta_L(s) \text{ e} \quad (1.67)$$

$$\bar{P}_y = \frac{\partial G}{\partial y} = X' \text{sen} \theta_L(s) + Y' \cos \theta_L(s). \quad (1.68)$$

Os vetores $(\mathbf{r}_\perp, \bar{\mathbf{P}}_\perp)$ e $(\mathbf{R}_\perp, \mathbf{V}_\perp)$ que exploram o espaço de fase transversal do feixe, respectivamente, antes e depois da transformação canônica definida por G , conservam sua norma durante a transformação conforme

$$\mathbf{r}_\perp^2 = \mathbf{R}_\perp^2 \text{ e } \bar{\mathbf{P}}_\perp^2 = \mathbf{V}_\perp^2. \quad (1.69)$$

O novo Hamiltoniano transversal no referencial de Larmor pode ser expresso por

$$\mathcal{H}_\perp = H_\perp + \frac{\partial G}{\partial s}. \quad (1.70)$$

Tendo em vista a equação (1.69), inserindo-se o par de equações (1.65)-(1.66) bem como o par (1.67)-(1.68), com auxílio da equação (1.62), nesta última equação (1.70), derradeiramente obtém-se a expressão final para o Hamiltoniano transversal \mathcal{H}_\perp no referencial de Larmor^{20,33}

$$\mathcal{H}_\perp(\mathbf{R}_\perp, s) = \frac{1}{2} \mathbf{V}_\perp^2 + \frac{1}{2} \kappa_z(s) \mathbf{R}_\perp^2 + \psi(\mathbf{R}_\perp, s), \quad (1.71)$$

na qual^{20,33}

$$\kappa_z(s) = [\theta_L(s)]^2 = \left[\frac{e_b B_z(s)}{2\gamma_b m_b \beta_b c^2} \right]^2 \quad (1.72)$$

é o coeficiente de focalização magnética para o campo solenoidal periódico $\kappa_z(s) = \kappa_z(s + S)$. Note que o potencial de confinamento presente no Hamiltoniano acima é isotrópico, depende apenas do módulo \mathbf{R}_\perp . Assim, caso o potencial ψ gerado pela distribuição de cargas do feixe seja também isotrópico (feixes com simetrias axiais em sua distribuição), o Hamiltoniano \mathcal{H}_\perp será completamente isotrópico e então as forças observadas pelas partículas durante a sua dinâmica no canal de confinamento serão puramente radiais.

As órbitas características das partículas descritas em relação à seção transversal do feixe podem ser então prontamente obtidas através das equações canônicas aplicadas ao Hamiltoniano

\mathcal{H}_\perp . Das equações (1.33) e (1.34), com $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_\perp$, inserindo nestas últimas a equação (1.71), tem-se que as órbitas características no referencial de Larmor assumem

$$\mathbf{V}_\perp = d\mathbf{R}_\perp/ds \text{ e} \quad (1.73)$$

$$\frac{d\mathbf{V}_\perp}{ds} = -\kappa_z(s)\mathbf{R}_\perp - \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{R}_\perp}. \quad (1.74)$$

A componente axial das órbitas características das partículas são aquelas já obtidas na Seção 1.2 e que constam nas equações (1.28) e (1.29).

No referencial de Larmor, a função distribuição F_b deve também satisfazer as condições de conservação impostas pelo teorema de Liouville constante na equação (1.5). Desta forma, obtém-se

$$\frac{\partial F_b}{\partial s} + \frac{d\mathbf{R}_\perp}{ds} \cdot \frac{\partial F_b}{\partial \mathbf{R}_\perp} + \frac{d\mathbf{V}_\perp}{ds} \cdot \frac{\partial F_b}{\partial \mathbf{V}_\perp} = 0. \quad (1.75)$$

Igualmente, a equação de Poisson presente em (1.45), no referencial de Larmor, assume o seguinte formato

$$\nabla_\perp^2 \psi = -\frac{2\pi K_b}{N_b} \int d\mathbf{V}_\perp F_b(\mathbf{R}_\perp, \mathbf{V}_\perp; s) = -\frac{2\pi K_b}{N_b} n_b(\mathbf{R}_\perp, s). \quad (1.76)$$

Note que os coeficientes da equação (1.75) são as órbitas características desenvolvidas pelas partículas que compõe o feixe descrito por F_b e focalizado mediante um sistema magnético de confinamento periódico solenoidal. Estas órbitas correspondem às equações (1.73) e (1.74). O sistema não-linear de equações formado por (1.73), (1.74), (1.75) e (1.76) pode ser empregado na investigação de qualquer distribuição reduzida arbitrária inicial F_b , com diferentes parâmetros e coeficientes de focalização magnética $\kappa_z(s)$. Importante salientar a relevância da representação das quantidades do referencial de Larmor, as quais propiciaram uma versão muito mais simplificada para as equações que descrevem o sistema de interesse.

2 DESCRIÇÃO DE QUANTIDADES MACROSCÓPICAS DE UM FEIXE DE PARTÍCULAS CARREGADAS

Uma descrição completa e formal da dinâmica não-linear e dos efeitos coletivos presentes em um feixe de partículas carregadas focalizado por um campo solenoidal — no contexto da aproximação paraxial, pequena dispersão nos momentos lineares axiais e de feixe fino — foi obtida no Capítulo 1 através do sistema de equações Vlasov-Maxwell (1.73)-(1.76), expresso no referencial de Larmor.

Contudo, do ponto de vista macroscópico, também é de interesse a obtenção de equações que descrevam a dinâmica não-linear de quantidades estatísticas transversais médias pertencentes à distribuição $F_b(\mathbf{R}_\perp, \mathbf{V}_\perp; s)$, tais como número de partículas, momento, energia, raio e a emitância, estes dois últimos a serem definidos em momento oportuno. Note que, tendo em vista a definição estabelecida na equação (1.40) tanto como a órbita presente na equação (1.28), descrever a evolução do sistema através da coordenada axial s ou da variável tempo independente t é exatamente equivalente no âmbito matemático, do ponto de vista das equações. Por este motivo, de agora em diante, a dependência de F_b em relação à coordenada s também receberá, conotativamente, o significado de dinâmica.

Genericamente, pode-se definir uma quantidade $\chi(\mathbf{R}_\perp, \mathbf{V}_\perp; s)$ cuja média em relação à distribuição $F_b(\mathbf{R}_\perp, \mathbf{V}_\perp; s)$ denota-se por $\langle \chi \rangle(s)$ e define-se através da expressão^{33,35}

$$\langle \chi \rangle(s) \equiv \frac{\int d\mathbf{R}_\perp d\mathbf{V}_\perp \chi F_b(\mathbf{R}_\perp, \mathbf{V}_\perp; s)}{\int d\mathbf{R}_\perp d\mathbf{V}_\perp F_b(\mathbf{R}_\perp, \mathbf{V}_\perp; s)} = \frac{1}{N_b} \int d\mathbf{R}_\perp d\mathbf{V}_\perp \chi F_b(\mathbf{R}_\perp, \mathbf{V}_\perp; s), \quad (2.1)$$

uma vez que

$$N_b = \int d\mathbf{R}_\perp d\mathbf{V}_\perp F_b(\mathbf{R}_\perp, \mathbf{V}_\perp; s) \quad (2.2)$$

é o número de partículas por unidade de comprimento axial s . A integração no espaço transversal do feixe acima pode ser também realizada em coordenadas polares

$$\int d\mathbf{R}_\perp d\mathbf{V}_\perp = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r_w} dR R \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{V}_\perp, \quad (2.3)$$

muito útil como será apresentado nas seções posteriores na obtenção de equações dinâmicas para as já anteriormente enunciadas quantidades macroscópicas quando pertinentes a um feixe com simetria azimutal.

A equação (1.17) para o campo elétrico $\mathbf{E}(\mathbf{R}_\perp)$ também pode ser reexpressa mediante coordenadas polares assumindo o formato

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_r \mathbf{e}_r + \mathbf{E}_\theta \mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_r \frac{\partial \psi}{\partial R} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad (2.4)$$

na qual R e θ são coordenadas polares obtidas das expressões usuais de transformação $X = R \cos \theta$ e $Y = R \sin \theta$. Neste mesmo sistema de coordenadas a equação de Poisson (1.76) torna-se

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \psi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = -\frac{2\pi K_b}{N_b} n_b(\mathbf{R}_\perp, s), \quad (2.5)$$

válida para $R \neq 0$.

Tendo em vista o sistema de confinamento mecânico imposto pela presença do duto circular, a condição de localização da distribuição F_b presente na equação (1.3) pode ser readequada através da seguinte expressão

$$F_b(\mathbf{R}_\perp, \mathbf{V}_\perp; s) = 0 \text{ para } \sqrt{\mathbf{R}_\perp^2} \geq r_l(\theta, s), \quad (2.6)$$

na qual r_l descreve o contorno espacial da distribuição F_b , é função da coordenada θ bem como da variável s e satisfaz $r_l < r_w$ durante toda a dinâmica. Posteriormente, ao se particularizar a análise para distribuições com simetria azimutal, ter-se-á que $r_l = r_l(s)$, podendo ser redefinida por $r_b(s)$, quantidade esta que designará a borda — ou o envelope — do feixe. Na região $r_l \leq R < r_w$ há vácuo. A condição de finitude estabelecida na equação (1.4) para F_b se mantém inalterada.

Convém também estabelecer a condição de contorno³³

$$E_\theta|_{R=r_w, R=0} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \psi(R, \theta) \Big|_{R=r_w, R=0} = 0, \quad (2.7)$$

na qual E_θ é o campo elétrico tangencial. Ou seja, o campo elétrico tangencial é nulo tanto na origem quanto na superfície descrita por $R = r_w$, haja vista a presença de uma equipotencial V_0 sobre o duto circular, instituída por ação externa. Possuindo a coordenada θ um significado físico espacial, tem-se ainda que o potencial ψ deve satisfazer a unicidade

$$\psi(R, \theta) = \psi(R, \theta + 2\pi), \quad (2.8)$$

sendo portanto periódico em θ a cada 2π .

A dependência dinâmica da quantidade macroscópica arbitrária $\chi(s)$ pertencente ao espaço de fase transversal do feixe pode ser determinada mediante derivação da expressão (2.1), obtendo-se³³

$$\frac{d}{ds} \langle \chi \rangle = \left\langle \frac{\partial \chi}{\partial s} \right\rangle + \int d\mathbf{R}_\perp d\mathbf{V}_\perp \chi \frac{\partial F_b}{\partial s}. \quad (2.9)$$

Isolando o termo $\partial F_b / \partial s$ na equação de Vlasov (1.75), inserindo-o na expressão logo acima e integrando por partes com relação à \mathbf{R}_\perp e \mathbf{V}_\perp as expressões que contenham χ , imediatamente obtém-se^{34,35}

$$\frac{d}{ds} \langle \chi \rangle = \left\langle \frac{\partial \chi}{\partial s} + \mathbf{V}_\perp \cdot \frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{R}_\perp} + \left(-\kappa_z(s) \mathbf{R}_\perp - \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{R}_\perp} \right) \cdot \frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{V}_\perp} \right\rangle \quad (2.10)$$

na qual se utilizou as expressões (1.73) e (1.74) para as órbitas características das partículas em um sistema de confinamento solenoidal. O termo à direita da equação (2.10) envolvendo as coordenadas espaciais transversais, se desejável, pode ser reescrito de forma compacta através do parênteses de Poisson entre o Hamiltoniano transversal \mathcal{H}_\perp da equação (1.71), para uma partícula sob confinamento solenoidal, e a quantidade arbitrária χ , formalmente representado por $[\chi, \mathcal{H}_\perp]$. É

importante observar que o termo presente no lado direito desta equação é definido pelo mesmo operador presente na equação de Vlasov (1.75). Isto implica que, qualquer função suave e derivável que seja unicamente dependente de F_b , também será uma quantidade conservada da dinâmica. Note também que segundo esta expressão

$$\frac{d\langle\chi\rangle}{ds} = \left\langle \frac{d\chi}{ds} \right\rangle, \quad (2.11)$$

ou seja, os operadores derivada temporal — axial — e média no espaço de fase transversal comutam.

2.1 Conservação do número de partículas por unidade de comprimento axial

A quantidade conservada mais evidente presente intrinsecamente na equação de Vlasov (1.75) é a do número de partículas por unidade de comprimento axial $N_b(s)$. Integrando esta equação nas coordenadas $(\mathbf{R}_\perp, \mathbf{V}_\perp)$ que descrevem o espaço de fase transversal do feixe obtém-se, com auxílio das condições de localização (2.6) e finitude (1.4), que³³

$$\int d\mathbf{R}_\perp d\mathbf{V}_\perp \frac{\partial F_b}{\partial s} = \frac{d}{ds} N_b = 0, \quad (2.12)$$

ou simplesmente que $N_b(s) = \text{constante}$, independentemente quão complicada seja a evolução não-linear do feixe no canal de focalização. Isto é consistente com a imposição adotada em (1.5) na descrição cinética do feixe de partículas carregadas mediante o teorema de Liouville.

2.2 Conservação do momento angular canônico

O momento angular canônico no referencial de Larmor é definido por^{33,34}

$$P_\theta = (\mathbf{R}_\perp \times \mathbf{V}_\perp) \cdot \mathbf{e}_z. \quad (2.13)$$

Operando a integração $1/N_b \int d\mathbf{R}_\perp d\mathbf{V}_\perp F_b$ sobre esta expressão e a derivando com relação à coordenada s resulta em

$$\frac{d}{ds} \langle P_\theta \rangle = \left\langle \left(\mathbf{R}_\perp \times \frac{d\mathbf{V}_\perp}{ds} \right) \cdot \mathbf{e}_z \right\rangle. \quad (2.14)$$

Inserindo a equação (1.74) nesta última conclui-se

$$\frac{d}{ds} \langle P_\theta \rangle = - \left\langle \left(\mathbf{R}_\perp \times \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{R}_\perp} \right) \cdot \mathbf{e}_z \right\rangle = - \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right\rangle \quad (2.15)$$

já que $\mathbf{R}_\perp = R\mathbf{e}_r$ e, na representação em coordenadas polares, o campo elétrico assume a forma presente na equação (2.4).

Através da definição de média constante na equação (2.1), considerando $\chi = \partial\psi/\partial\theta$ e a expressão para n_b obtida através da equação de Poisson em coordenadas polares (2.5), tem-se que, após integrações por partes em relação à coordenada radial R

$$\left\langle \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right\rangle = - \frac{1}{2\pi K_b} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r_w} dR R \left[- \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial R} \right)^2 + \frac{1}{2R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)^2 \right], \quad (2.16)$$

na qual se impôs a condição (2.7) quando $R = r_w$. Devido à condição de periodicidade de ψ exposta na equação (2.8), então $\partial\psi/\partial\theta$ e $\partial\psi/\partial R$ também são funções periódicas de θ com período 2π . Portanto, nestas condições, tem-se invariavelmente que

$$\left\langle \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \right\rangle = 0, \quad (2.17)$$

implicando que, da equação (2.15), o momento angular canônico médio $\langle P_\theta \rangle$ seja conservado e por conseqüência o torque axial sobre as partículas constituintes do feixe seja nulo. Observe que nenhuma consideração a respeito do sistema de focalização bem como da simetria espacial da função distribuição F_b foi realizada para tanto (feixes azimutalmente simétricos impõem que $\partial\psi/\partial\theta = 0$ para qualquer R). A simples presença de um duto circular condutor em $R = r_w$, que diretamente impõe uma superfície equipotencial azimutalmente simétrica nesta coordenada, foi suficiente para conservar esta importante grandeza do feixe.

2.3 Conservação de energia

A energia cinética de cada partícula imersa no campo magnético de focalização solenoidal é, segundo a equação (1.71), dada por $(1/2)\mathbf{V}_\perp^2$. Efetuando a sua média no espaço de fase transversal do feixe e derivando a expressão resultante com relação à coordenada axial s , considerando a expressão (1.74), obtém-se

$$\frac{d}{ds} \frac{1}{2} \langle \mathbf{V}_\perp^2 \rangle = -\kappa_z(s) \frac{d}{ds} \frac{1}{2} \langle \mathbf{R}_\perp^2 \rangle - \langle \mathbf{V}_\perp \cdot \frac{\partial\psi}{\partial \mathbf{R}_\perp} \rangle, \quad (2.18)$$

na qual o primeiro termo presente no lado direito da equação corresponde à variação de energia potencial média associada ao movimento das partículas no campo magnético de focalização periódico e o segundo, consistentemente, possui dimensão de potência, e está associado à variação de energia acumulada no campo elétrico gerado pela distribuição de cargas F_b . Há um balanço: as partículas coletivamente, durante sua dinâmica, fornecem ou absorvem a energia presente no campo elétrico do sistema, o qual é autoconsistentemente gerado pelos efeitos conjuntos oriundos da distribuição espacial de cargas do feixe descritas por n_b .

Da equação (2.10), considerando $\chi = \psi(\mathbf{R}_\perp)$, tem-se que

$$\left\langle \mathbf{V}_\perp \cdot \frac{\partial\psi}{\partial \mathbf{R}_\perp} \right\rangle = \frac{d}{ds} \langle \psi \rangle - \left\langle \frac{\partial\psi}{\partial s} \right\rangle. \quad (2.19)$$

O lado direito da equação acima pode ser determinado através da equação (2.9). Considerando nesta equação também $\chi = \psi(\mathbf{R}_\perp)$ e inserindo a expressão resultante em (2.19), obtém-se

$$\left\langle \mathbf{V}_\perp \cdot \frac{\partial\psi}{\partial \mathbf{R}_\perp} \right\rangle = \int d\mathbf{R}_\perp \psi \frac{\partial n_b}{\partial s}. \quad (2.20)$$

Nesta expressão, n_b pode ser representada como uma função de $\nabla_\perp^2 \psi$ através da equação de Poisson presente na equação (2.5). Após algumas integrações por partes, aplicações de identidades

vetoriais, emprego do teorema da divergência e da imposição da condição de contorno (2.7) verifica-se que a equação (2.20) assume o seguinte formato³³

$$\langle \mathbf{V}_\perp \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{R}_\perp} \rangle = \frac{d}{ds} \mathcal{E}_F(s), \quad (2.21)$$

na qual

$$\mathcal{E}_F(s) = \frac{1}{4\pi K_b} \int d\mathbf{R}_\perp |\nabla_\perp \psi|^2 \quad (2.22)$$

é a energia adimensional média armazenada no campo elétrico gerado autoconsistentemente pela distribuição espacial de cargas F_b . Inserindo a equação (2.21) na equação (2.18) e rearranjando alguns termos obtém-se

$$\frac{d}{ds} E_\perp \equiv \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{2} \langle \mathbf{V}_\perp^2 \rangle + \frac{1}{2} \kappa_z(s) \langle \mathbf{R}_\perp^2 \rangle + \mathcal{E}_F(s) \right] = \frac{1}{2} \frac{d\kappa_z(s)}{ds} \langle \mathbf{R}_\perp^2 \rangle. \quad (2.23)$$

O lado esquerdo da equação acima corresponde à variação da energia média total — armazenada pelas partículas e no campo elétrico — presente no espaço de fase transversal do feixe. Por outro lado, o termo à direita da igualdade, pode ser reconhecido como a variação da energia média na direção axial de propagação do feixe. Analisando esta equação, torna-se claro que a energia transversal média total apenas é conservada se $d\kappa_z/ds = 0 \therefore \kappa_z = \kappa_{z0} = \text{constante}$, ou seja, mediante confinamento sob campo indução magnética constante, haja vista que κ_z relaciona-se com $B_z(s)$ mediante a equação (1.72). Caso contrário, sendo $d\kappa_z/ds \neq 0$, haverá permanente troca de energia média entre a seção transversal do feixe e sua evolução axial no sistema de focalização. Esta troca ocorrerá de forma periódica, pois conforme estabelecido na Seção 1.3, $\kappa_z(s) = \kappa_z(s + S)$. Muitos casos de instabilidade interessantes originam-se sob estas condições.

2.4 Equação dinâmica para o raio RMS e para a emitância RMS

A coordenada radial de cada partícula na seção espacial transversal do feixe é especificada por $R = |\mathbf{R}_\perp|$. Considerando $\chi = \mathbf{R}_\perp^2$ na equação (2.1) e derivando a expressão resultante duas vezes com relação à coordenada axial s obtém-se

$$\frac{d^2}{ds^2} \frac{1}{2} \langle \mathbf{R}_\perp^2 \rangle = \langle \mathbf{V}_\perp^2 \rangle - \kappa_z(s) \langle \mathbf{R}_\perp^2 \rangle - \langle \mathbf{R}_\perp \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{R}_\perp} \rangle, \quad (2.24)$$

após manipulação algébrica e inserção das expressões para as órbitas características das partículas na seção transversal do feixe descritas pelas equações (1.73) e (1.74). Na equação acima, o raio ao quadrado médio do feixe $\langle \mathbf{R}_\perp^2 \rangle$ tem sua dinâmica acoplada com a energia cinética média das partículas que o compõe. O termo $\langle \mathbf{R}_\perp \cdot \partial \psi / \partial \mathbf{R}_\perp \rangle$ representa o trabalho médio proporcionado pelo potencial ψ sobre as partículas que compõe o feixe.

Na equação (2.24), o termo que envolve os campos autoconsistentemente gerados pela densidade de cargas n_b pode ser simplificado. Representando este termo em coordenadas polares, utilizando a equação (2.4) bem como a definição de média em (2.1), obtém-se

$$\langle \mathbf{R}_\perp \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{R}_\perp} \rangle = \frac{1}{N_b} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r_w} dR R^2 \frac{\partial \psi}{\partial R} n_b, \quad (2.25)$$

na qual a integração sobre as coordenadas de momentum já foi realizada. Considerando a equação de Poisson em coordenadas polares (2.5), isolando n_b e inserindo a expressão resultante na equação (2.25) obtém-se³³

$$\langle \mathbf{R}_\perp \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{R}_\perp} \rangle = -\frac{1}{4\pi K_b} \int_0^{2\pi} d\theta \left(R \frac{\partial \psi}{\partial R} \right)^2 \Big|_{R=r_w}, \quad (2.26)$$

na qual integrais por parte com relação à coordenada θ foram realizadas. Na expressão acima foi também utilizada a condição de contorno sobre a superfície do duto condutor (2.7) como também a condição de periodicidade do potencial presente na equação (2.8). Observando a expressão acima, torna-se conveniente decompor o potencial ψ da forma que segue

$$\psi(R, \theta; s) = \bar{\psi}(R, s) + \delta\psi(R, \theta; s) \quad (2.27)$$

na qual

$$\bar{\psi}(R, s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \psi(R, \theta; s) \quad (2.28)$$

é o valor médio de ψ em relação à θ e $\delta\psi(R, \theta; s)$ representa as flutuações de potencial elétrico em relação à coordenada angular θ , satisfazendo³³

$$\int_0^{2\pi} d\theta \delta\psi(R, \theta; s) = 0. \quad (2.29)$$

Cabe-se destacar que as flutuações de potencial $\delta\psi$ estão associadas à assimetria azimutal da densidade transversal de partículas n_b que descreve o feixe. No caso limite de um feixe azimutalmente simétrico, as superfícies equipotenciais são círculos concêntricos ao eixo de propagação do feixe e, portanto, $\delta\psi$ é nula não somente em média mas como também para qualquer coordenada θ . Assumindo $\delta\psi(R, \theta; s) = 0$, como conseqüência, da equação (2.27), $\psi(R, \theta; s) = \bar{\psi}(R, s)$.

Inserindo a equação (2.27) na equação (2.26) e adotando a condição (2.29), após considerável álgebra, tem-se que

$$\langle \mathbf{R}_\perp \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{R}_\perp} \rangle = -\frac{1}{2} K_b (1 + \Delta_b) \quad (2.30)$$

sendo Δ_b definido por³³

$$\Delta_b \equiv \frac{1}{2\pi K_b^2} \int_0^{2\pi} d\theta \left(R \frac{\partial}{\partial R} \delta\psi \right)^2 \Big|_{R=r_w}. \quad (2.31)$$

É interessante observar que os potenciais $\bar{\psi}(R, s)$ e $\delta\psi(R, \theta; s)$ contribuem, respectivamente, com trabalhos médios executados sobre as partículas do feixe de $-K_b/2$ e de $-K_b\Delta_b/2$, sendo o primeiro constante e o segundo dependente da coordenada axial s mediante Δ_b . Para feixes com densidades azimutalmente simétricas, pelos motivos previamente já comentados, tem-se que $\Delta_b = 0$. Cabe salientar que nenhuma consideração a respeito da dependência radial do potencial elétrico ψ foi estabelecida, podendo portanto esta ser arbitrária. A condição de simetria azimutal é suficiente para determinar a anulação de Δ_b . Situação muito semelhante ocorre no caso limite $r_w \rightarrow \infty$, ou seja, um duto posicionado muito distante do feixe. Neste caso, como $\lim_{R \rightarrow \infty} \psi(\mathbf{R}, s) = 0$, tem-se que também $\Delta_b = 0$.

Duas grandezas estatísticas de interesse da distribuição do feixe são a raiz do raio quadrático médio e a raiz da emitância quadrática média, denominados aqui de, respectivamente raio RMS e emitância RMS. Matematicamente, o raio RMS define-se por

$$R_b(s) = \sqrt{\langle \mathbf{R}_\perp^2 \rangle} \quad (2.32)$$

e a emitância RMS por^{1,8,33}

$$\epsilon(s) = \sqrt{4(\langle \mathbf{V}_\perp^2 \rangle \langle \mathbf{R}_\perp^2 \rangle - \langle \mathbf{R}_\perp \cdot \mathbf{V}_\perp \rangle^2)}. \quad (2.33)$$

Reexpressando esta última equação em termos da definição do raio RMS presente na equação (2.32), elevando esta expressão ao quadrado e considerando-se a equação (1.73) obtém-se que

$$\epsilon^2(s) = 4R_b^2 \left[\langle \mathbf{V}_\perp^2 \rangle - \left(\frac{dR_b}{ds} \right)^2 \right]. \quad (2.34)$$

Note que a emitância envolve um termo dependente da energia cinética média $\langle \mathbf{V}_\perp^2 \rangle$ das partículas presentes no feixe. Para determinação deste, não apenas basta definir inicialmente a distribuição F_b com relação às suas coordenadas espaciais, mas como também com relação às suas coordenadas de velocidade. Este procedimento é distinto de todos os demais até então realizados, nos quais era unicamente suficiente apenas a realização de médias sobre a densidade de partículas n_b .

Definidas estas grandezas, torna-se possível utilizá-las na representação de certos termos presentes na equação (2.24). Inserindo a equação (2.30), bem como as definições (2.32) e (2.33) na equação (2.24), tem-se que, após manipulações, esta última assume o seguinte formato

$$\frac{d^2}{ds^2} R_b(s) + \kappa_z(s) R_b(s) - \frac{K_b(1 + \Delta_b)}{2} \frac{1}{R_b(s)} - \frac{\epsilon^2(s)}{4R_b^3(s)} = 0. \quad (2.35)$$

Observe que enquanto o campo empregado no confinamento magnético focaliza as partículas, os termos dependentes tanto da perveância quanto da emitância representam forças desfocalizadoras. Pode-se constatar que a força de focalização é de origem externa, obtida mediante o arranjo solenoidal, enquanto as forças de desfocalização são oriundas das características da distribuição F_b , função esta que representa o feixe no espaço de fase, de caráter interno ao sistema. Convém ainda

comentar que enquanto κ_z e K_b são parâmetros que caracterizam respectivamente o campo magnético solenoidal e a distribuição, a emitância $\epsilon(s)$ está associada à distribuição F_b , tendo sua dinâmica completamente influenciada pelas condições iniciais desta última.

Para tornar a equação (2.35) completamente definida, torna-se necessário obter uma outra equação, que represente a dinâmica para a quantidade recentemente definida por emitância. Derivando a equação (2.33) com relação à coordenada axial s e inserindo apropriadamente nesta expressão obtida os resultados presentes nas equações (2.18) e (2.24) tem-se que

$$\frac{d}{ds} \frac{1}{8} \epsilon^2(s) = R_b^2 \left(\frac{1}{R_b} \frac{dR_b}{ds} \langle \mathbf{R}_\perp \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{R}_\perp} \rangle - \langle \mathbf{V}_\perp \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{R}_\perp} \rangle \right). \quad (2.36)$$

Nesta última equação, inserindo as expressões (2.21) e (2.30) obtém-se

$$\frac{d}{ds} \frac{1}{8} \epsilon^2(s) = -R_b^2 \left[\frac{1}{2} K_b (1 + \Delta_b) \frac{1}{R_b} \frac{dR_b}{ds} + \frac{d}{ds} \mathcal{E}_F(s) \right]. \quad (2.37)$$

Por final, torna-se relevante efetuar algumas considerações a respeito dos resultados obtidos. As equações dinâmicas para o raio RMS (2.35) bem como a equação acima (2.37) para a emitância RMS são absolutamente gerais, válidas para qualquer distribuição transversal reduzida F_b confinada em um canal linear de focalização solenoidal periódico. Estas equações foram derivadas do conjunto de equações Vlasov-Maxwell (1.75) e (1.76) — representadas no referencial de Larmor — e são válidas independentemente de quão complexa é a dinâmica não-linear do feixe. A única imposição estabelecida foi a da presença de um duto circular em $R = r_w$, confeccionado em material condutor e submetido a um potencial V_θ , a qual permitiu que o momento angular canônico médio $\langle P_\theta \rangle$ torne-se uma quantidade conservada do movimento, sendo irrelevante a dependência funcional de F_b com relação à θ . Simplificação adicional é obtida em casos de simetria azimutal para a parte espacial de F_b bem como em situações nas quais o duto circular encontra-se muito distante do feixe, $r_w \rightarrow \infty$. Nestes casos, observa-se que a condição de $\Delta_b = 0$ pode ser adotada irrestritamente nas equações.

3 DESCRIÇÃO DAS INTERAÇÕES MICROSCÓPICAS EM UM FEIXE DE PARTÍCULAS CARREGADAS

As equações obtidas no Capítulo 2 descrevem a dinâmica de grandezas estatísticas médias do feixe, no sentido de média tal qual definido na equação (2.1). Estas grandezas são portanto macroscópicas, pois descrevem em média no espaço de fase transversal o comportamento coletivo do conjunto de partículas que compõe o feixe, representadas por F_b no âmbito da Teoria Cinética.

Contudo, em situações reais, observa-se que não somente efeitos coletivos estão presentes e são importantes, mas como também os efeitos microscópicos se manifestam como determinantes para a descrição dinâmica do feixe. Em feixes reais, partículas individualmente interagem e absorvem considerável quantidade de energia do movimento macroscópico do feixe, proporcionando órbitas com amplitude muito maiores do que a descrita em média pelas partículas do feixe, quantidade esta estimada pelo raio RMS $R_b(s)$. Após algum tempo de evolução no canal de confinamento, observa-se que uma população rarefeita de partículas preenche o entorno do feixe, momento no qual o sistema atinge o equilíbrio. Ou seja, funções distribuições F_b que eram inicialmente limitadas espacialmente, após a evolução no sistema de confinamento, apresentam considerável dispersão espacial, podendo atingir, no equilíbrio, valores maiores que 2 ou 3 vezes o raio RMS inicial $R_b(s = 0)$ do feixe. Este fenômeno pelo qual partículas individualmente são compelidas a realizar órbitas de grande amplitude externas ao feixe é conhecido como formação de halo. Este fenômeno é uma característica de feixes ultra-intensos de partículas carregadas e é observado tanto em experimentos³⁶ quanto em simulações computacionais. Nesta categoria de feixes, as forças repulsivas, representadas pelo termo que envolve a perveância K_b , são de suma importância na caracterização da dinâmica do sistema, sendo responsáveis por eventuais instabilizações durante seu processo de confinamento.

Assim, para qualquer modelo que descreva a transição do estado inicial do feixe para seu estado de equilíbrio, torna-se interessante então perscrutar como e em quais circunstâncias tais partículas eventualmente podem interagir individualmente com o feixe, extraindo quantidades razoáveis de sua energia. Esta intensa interação pode ser do tipo caótica,^{37,38} o que acaba por se traduzir em órbitas erráticas com grande amplitude espacial. Uma forma de representar este comportamento é inserir uma partícula-teste ou uma carga-teste³⁹ no canal de confinamento^{40,41} e obter o sistema de equações que descreve a sua dinâmica. Nesta circunstância, supõe-se que a partícula-teste possua energia insignificante quando comparada com a energia total do feixe. Isto implica que as influências da partícula-teste sobre a dinâmica do feixe sejam absolutamente desprezíveis. Assim, também se assegura que o comportamento do sistema original e o do perturbado — devido à presença da partícula-teste — sejam totalmente coincidentes quando consideradas grandezas macroscópicas pertinentes ao feixe.

Na Seção 3.1, serão obtidas equações que descrevem a interação entre o feixe e a partícula-teste para o caso de feixes azimutalmente simétricos e que evoluem sob ação de um campo magnético solenoidal constante. Matematicamente, estas condições implicam que

$$\Delta_b = 0 \text{ e } \kappa_z(s) = \kappa_{zo} = \text{constante} \quad (3.1)$$

em todas as equações do Capítulo 2 nas quais estes parâmetros aparecem. A condição de campo magnético constante é importante, pois elimina o intercâmbio de energia entre o movimento axial e o transversal do feixe. Segundo a equação (2.23), nestas condições, a energia transversal total E_{\perp} do feixe torna-se uma quantidade conservada do movimento.

As equações obtidas serão gerais e válidas para descrever o sistema composto pelo feixe e pela partícula-teste para qualquer densidade n_b com simetria azimutal. Esta abordagem é importante, pois evidencia as implicações proporcionadas pela condição de simetria azimutal. Após, nas duas seções subseqüentes deste trabalho, as equações gerais obtidas serão particularizadas aos casos de interesse neste trabalho: de um feixe com densidade de partículas homogênea, presente na Seção 3.2, e com densidade de partículas não-homogênea, discutida na Seção 3.3.

Por final, ressalta-se que o estudo de feixes com densidades não-homogêneas se torna obrigatório para o entendimento da formação de halo em feixes homogêneos. De fato, como se discutirá no Capítulo 5, em feixes reais a não-homogeneidade — embora não desejada — é uma condição presente e que permeia qualquer sistema de partículas carregadas, tanto na realização de simulações computacionais quanto em experimentos. A influência da não-homogeneidade pode ser minimizada, porém nunca suprimida, em qualquer um dos casos comentados.

3.1 Interações microscópicas em feixes com simetria azimutal

A Figura 3 exemplifica a inserção da partícula-teste no sistema de confinamento já caracterizado nos Capítulos anteriores. A quantidade $r_b(s)$ descreve a borda do feixe de partículas, tanto no caso homogêneo como no caso não-homogêneo, e R é o módulo da coordenada radial \mathbf{R}_{\perp} da partícula-teste. A partícula-teste observa forças tanto com origem no campo magnético de confinamento quanto da ação do potencial elétrico gerado pelo feixe. A órbita transversal da partícula-teste é aquela característica presente nas equações (1.73) e (1.74) que, na condição de simetria azimutal imposta neste Capítulo ao problema, assume, de forma compacta, o simples formato

$$\frac{d^2}{ds^2}R = -\kappa_{zo}R - \frac{\partial\psi}{\partial R}, \quad (3.2)$$

expressão válida para qualquer coordenada radial R .

Durante sua interação com o feixe, a partícula-teste transitará por duas regiões distintas: uma interna ao feixe, para $0 \leq R \leq r_b(s)$, e uma externa ao feixe, na região de vácuo, para

$r_b(s) < R \leq r_w$. Em cada uma destas regiões, sendo a densidade de carga n_b distinta, tem-se que o potencial ψ proporcionado pelo feixe também o será. Portanto, a partícula-teste estará sujeita a forças distintas, descritas por $\partial\psi/\partial R$. No caso limite da interface $R = r_b(s)$ entre estas duas regiões, as forças devem possuir expressões coincidentes. A força observada pela partícula-teste — devido à ação do feixe — em cada uma dessas regiões pode ser obtida mediante a Lei de Gauss^{29,30,31,32}

$$\oint_C \nabla_{\perp} \psi \cdot \mathbf{n} dC = -\frac{2\pi K_b}{N_b} \int_0^{R_{\perp}} n_b(\mathbf{R}'_{\perp}, s) dR'_{\perp}, \quad (3.3)$$

tendo em vista o formato da equação de Poisson em (1.76). Nesta equação, C especifica o contorno definido pela posição \mathbf{R}_{\perp} na qual se deseja que a força exercida pelo feixe sobre a partícula-teste seja avaliada e \mathbf{R}'_{\perp} é apenas uma variável temporária para realização da integração.

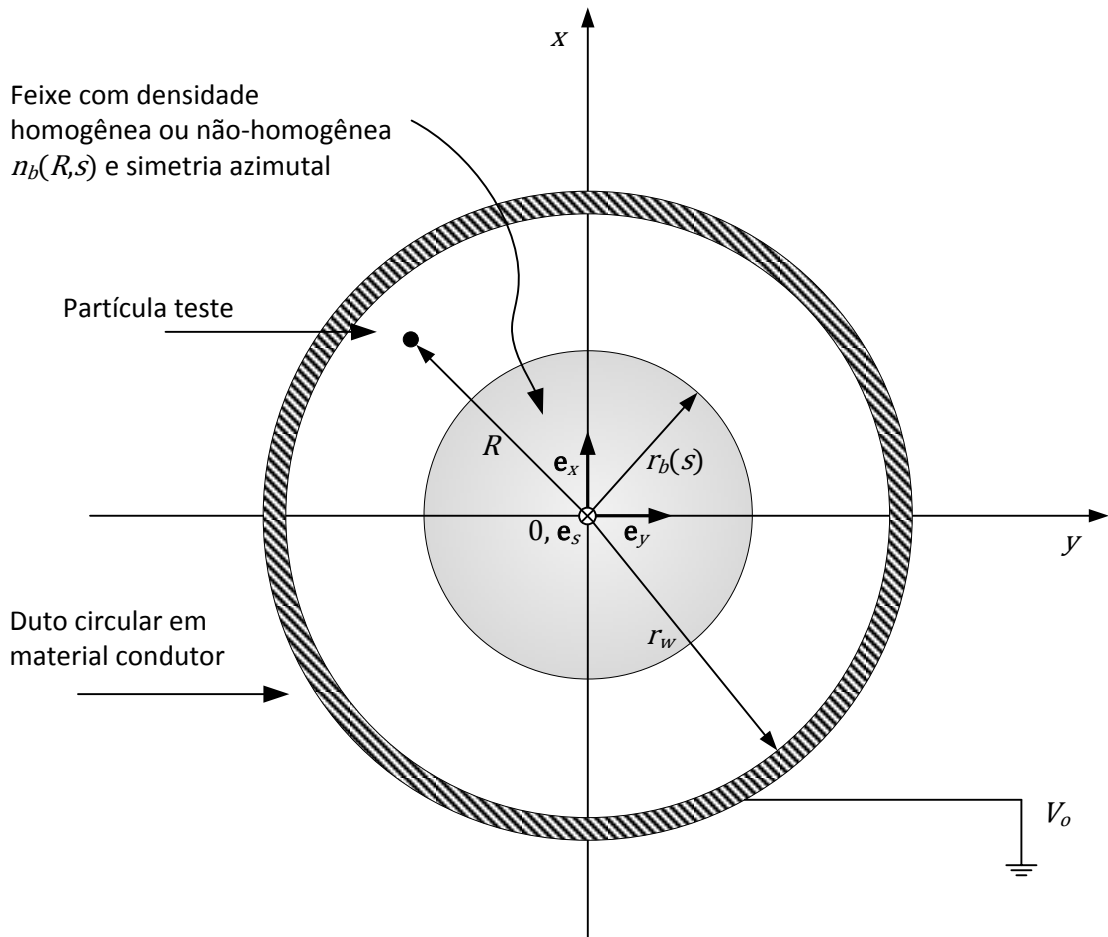


Figura 3: Inserção da partícula-teste no canal de confinamento de um feixe com simetria azimutal. O envelope $r_b(s)$ descreve a borda da densidade de partículas em consideração e \mathbf{R}_{\perp} é a coordenada radial da partícula-teste.

Contudo, devido à simetria azimutal do problema, as forças presentes possuem única e exclusiva dependência radial. Portanto o vetor normal torna-se $\mathbf{n} = \mathbf{e}_r$ e o contorno de Gauss na posição \mathbf{R}_{\perp} pode ser equacionado por $C = 2\pi R$. A expressão (3.3) então se simplifica a

$$\frac{\partial\psi}{\partial R} = -\frac{K_b}{N_b R} \int_0^{2\pi} \int_0^R R' dR' d\theta n_b(R', s), \quad (3.4)$$

sendo a integral presente no lado direito da equação dependente do formato da densidade de partículas n_b e da posição R onde se encontra a partícula-teste, podendo esta residir internamente ou externamente à borda do feixe $r_b(s)$. É este termo que determina a natureza da força experimentada pela partícula-teste devido à ação do feixe. Torna-se claro que apenas a força na região interna do feixe é influenciada pelo caráter da densidade de partículas n_b . Na região externa, tanto no caso homogêneo quanto no não-homogêneo, a força exercida pelo feixe sobre a partícula-teste é a mesma, uma vez que a integração espacial sobre a densidade n_b deve convergir ao número N_b de partículas por unidade de comprimento axial s .

Por conseguinte, para qualquer distribuição com simetria azimutal, tem-se que a força observada pela partícula-teste fora do feixe assume a forma

$$\frac{\partial\psi}{\partial R} = -\frac{K_b}{R}, \quad (3.5)$$

expressão esta válida, sem ônus da redundância, na região externa à borda do feixe, delimitada por $r_b(s) < R \leq r_w$.

3.2 Interações microscópicas em um feixe homogêneo com simetria azimutal

Devido à imposição de simetria azimutal, a densidade de partículas para o caso homogêneo pode assumir um único formato, dado por

$$n_b(R, s) = \begin{cases} N_b/\pi r_b^2, & \text{para } 0 \leq R \leq r_b \\ 0, & \text{para } r_b < R \leq r_w \end{cases} \quad (3.6)$$

na qual $r_b = r_b(s)$ é a quantidade que delimita a borda do feixe, denominada de envelope do feixe.

Inserindo a equação (3.6) em (3.4), para uma coordenada $0 \leq R \leq r_b(s)$, obtém-se que a força exercida sobre uma partícula em órbita interna ao feixe é dada por

$$\frac{\partial\psi}{\partial R} = -\frac{K_b}{r_b^2} R. \quad (3.7)$$

A equação em questão depende linearmente da coordenada radial R , sendo consistente com o caráter homogêneo da função densidade de partículas especificada. Note a compatibilidade dos resultados fornecidos pelas equações (3.5) e (3.7) na interface $R = r_b(s)$.

Estando a força exercida pelo feixe sobre a partícula-teste definida tanto dentro quanto fora do feixe, deve-se então obter uma expressão para o envelope $r_b(s)$ do feixe. Para a densidade especificada em (3.6), o raio RMS do feixe — segundo a definição presente na equação (2.32) — pode ser obtido, em coordenadas polares, através de

$$R_b(s) = \sqrt{\frac{1}{N_b} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r_b} R dR R^2 n_b(R, s)} = \frac{r_b(s)}{\sqrt{2}}. \quad (3.8)$$

Ou seja, o raio RMS do feixe relaciona-se com o seu envelope trivialmente mediante uma constante.

Contudo, a expressão para $R_b(s)$, e conseqüentemente para r_b , presente em (2.35) somente torna-se completamente determinada caso uma expressão para a emitância $\epsilon(s)$ presente na equação (2.37) seja também obtida. Especificamente, isto implica em determinar a energia média \mathcal{E}_F armazenada no campo elétrico E_r , cujas expressões dentro e fora do feixe já foram resolvidas e constam, respectivamente, nas equações (3.7) e (3.5). Sendo assim, inserindo tais expressões na equação (2.22), tem-se que

$$\mathcal{E}_F(s) = \frac{K_b}{2} \left[\frac{1}{4} + \ln \left(\frac{r_w}{r_b} \right) \right]. \quad (3.9)$$

Inserindo esta última expressão na equação (2.37), considerando as condições em (3.1), obtém-se

$$\frac{d}{ds} \epsilon^2(s) = 0, \quad (3.10)$$

ou seja, $\epsilon(s) = \epsilon_0 = \text{constante}$ é outra quantidade macroscópica conservada do feixe durante a sua evolução no canal de focalização magnética.

Tendo em vista as condições presentes na equação (3.1) bem como a equação (3.10) recentemente obtida, inserindo a equação (3.8) na equação (2.35), obtém-se a seguinte equação para descrição da dinâmica do envelope do feixe $r_b(s)$

$$\frac{d^2}{ds^2} r_b(s) + \kappa_{zo} r_b(s) - \frac{K_b}{r_b(s)} - \frac{\epsilon_0^2}{r_b^3(s)} = 0. \quad (3.11)$$

A equação para a órbita da partícula-teste torna-se então completamente determinável para um feixe homogêneo

$$\frac{d^2}{ds^2} R + \kappa_{zo} R = \begin{cases} K_b R / r_b^2, & \text{para } 0 \leq R \leq r_b \\ K_b / R, & \text{para } r_b < R \leq r_w \end{cases} \quad (3.12)$$

Equação esta obtida mediante a inserção das expressões (3.7) e (3.5) na equação (3.2). Note que a equação (3.12) é acoplada à equação (3.11) através do envelope do feixe $r_b(s)$. Para partículas externas ao raio do envelope, a força exercida pelo feixe é não-linear enquanto, para partículas internas, a força é linear. Observe que a interação entre a partícula-teste e o feixe contém todos os requisitos para ser do tipo caótica,⁴² já que o sistema de equações (3.11)-(3.12) depende da coordenada axial s mediante r_b e é não-linear para coordenadas radiais $R > r_b$. O sistema de equações (3.11)-(3.12) descreve completamente a interação entre a partícula-teste e o feixe de partículas carregadas. Cabe salientar-se que estas equações são válidas para o caso de um feixe azimutalmente simétrico, sob focalização a campo magnético constante e com uma densidade homogênea de partículas.

3.3 Interações microscópicas em um feixe não-homogêneo com simetria azimutal

No caso de uma densidade de partículas não-homogênea, uma série de perfis radiais que satisfazem a condição de simetria azimutal pode ser utilizada. Devido à facilidade no

desenvolvimento de cálculos analíticos, a densidade de partículas não-homogênea neste trabalho escolhida para análise é descrita pela seguinte expressão

$$n_b(R, s) = \begin{cases} \frac{N_b}{\pi r_b^2} + \eta \left[\frac{N_b}{\pi r_b^2} \left(\frac{2R^2}{r_b^2} - 1 \right) \right], & \text{para } 0 \leq R \leq r_b \\ 0, & \text{para } r_b < R \leq r_w \end{cases} \quad (3.13)$$

sendo $r_b = r_b(s)$. Esta densidade de partículas apresenta uma não-homogeneidade do tipo parabólica, uma vez que a dependência radial escala com R^2 . Analogamente ao caso homogêneo, $r_b(s)$ descreve o envelope do feixe. A quantidade $\eta \in [0,1]$ contabiliza a magnitude da não-homogeneidade. Quando $\eta = 0$, a densidade de partículas se reduz ao caso homogêneo. Quando $\eta = 1$, a densidade de partículas é completamente não-homogênea parabolicamente. A magnitude η não depende das coordenadas espaciais. Entretanto, nada impede que esta última seja função da coordenada temporal. De fato, considerar η dependente do tempo incorpora características mais realísticas à densidade não-homogênea de partículas do feixe n_b . Nesta situação, o perfil de densidade da equação (3.13) não será mais invariante no tempo como o obtido para $\eta = \text{constante}$, sendo possível que a carga elétrica descrita por n_b seja redistribuída conforme o feixe evolui no canal de confinamento magnético. O comportamento das interações microscópicas ao considerar-se $\eta = \eta(s)$ será abordado no Capítulo 6.

A força exercida pelo feixe sobre a partícula-teste na região interna do feixe pode ser determinada inserindo a equação (3.13) na (3.4). Realizando este procedimento, para uma coordenada $0 \leq R < r_b(s)$, obtém-se que a força exercida sobre uma partícula em órbita interna ao feixe é dada por

$$\frac{\partial \psi}{\partial R} = -K_b \left[\eta \frac{R^3}{r_b^4} + (1 - \eta) \frac{R}{r_b^2} \right]. \quad (3.14)$$

válida para, sem ônus de incorrer em redundância, uma coordenada $0 \leq R \leq r_b(s)$. Nesta equação, pode-se notar que a não-homogeneidade determina que a força exercida pelo feixe sobre a partícula-teste seja composta por também um termo não-linear, que escala com R^3 , na região interna ao feixe. Quando a magnitude da não-homogeneidade assume $\eta = 0$, caso totalmente homogêneo, então a força interna ao feixe torna-se completamente linear. Contudo, no outro caso extremo, quando $\eta = 1$, o termo linear é anulado e então a força interna ao feixe torna-se totalmente não-linear. A magnitude da não-homogeneidade η determina quão intensamente cada termo — de natureza linear e não-linear — estará presente na força total exercida pelo feixe sobre a partícula-teste na sua região interna.

Da mesma forma que no caso homogêneo, para o caso não-homogêneo, também se deve obter uma expressão para o envelope $r_b(s)$ do feixe. Considerando a densidade de partículas

especificada em (3.13), o raio RMS do feixe, segundo a sua definição presente na equação (2.32), relaciona-se com o envelope do feixe através de

$$R_b(s) = \sqrt{\frac{1}{N_b} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r_b} R dR R^2 n_b(R, s)} = \frac{r_b(s)}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{\eta}{3}}. \quad (3.15)$$

Ou seja, no caso não-homogêneo, o raio RMS do feixe também se relaciona com o seu envelope trivialmente mediante uma constante, agora dependente também da magnitude da não-homogeneidade η . Para $\eta = 0$, a equação (3.15) se reduz à equação (3.8), conforme esperado.

Resta então obter a expressão para a emitância $\epsilon(s)$ considerando a densidade presente na equação (3.13). Contudo, sabe-se que, conforme a Seção 3.2, isto implica em primeiramente determinar a energia média \mathcal{E}_F armazenada no campo elétrico E_r , cujas expressões dentro e fora do feixe já foram resolvidas e constam, respectivamente, nas equações (3.14) e (3.5). Sendo assim, inserindo tais expressões na equação (2.22), tem-se que

$$\mathcal{E}_F(s) = \frac{K_b}{2} \left[\frac{\eta^2}{8} + \frac{(1-\eta)^2}{4} + \frac{\eta(1-\eta)}{3} + \ln\left(\frac{r_w}{r_b}\right) \right]. \quad (3.16)$$

Observa-se que esta equação possui a mesma dependência com relação ao envelope do feixe $r_b(s)$ que a expressão (3.9). A diferença reside apenas em uma constante que no caso em questão agora depende da magnitude da não-homogeneidade η , a qual ao assumir o valor $\eta = 0$, torna a expressão acima idêntica à equação (3.9).

Assim, sendo a equação (3.16) dependente de s mediante r_b tal qual a equação (3.9), referente ao caso homogêneo, tem-se que, novamente, a inserção de (3.16) na expressão (2.37), considerando as condições dispostas na equação (3.1), produz

$$\frac{d}{ds} \epsilon^2(s) = 0, \quad (3.17)$$

ênfatizando-se que esta expressão apenas é válida quando a magnitude da não-homogeneidade η é constante. Portanto, no caso não-homogêneo com η independente da coordenada axial s , $\epsilon(s) = \epsilon_o = \text{constante}$ também é uma quantidade macroscópica conservada do feixe durante a sua evolução no canal de focalização magnética. De fato, pode-se demonstrar que qualquer densidade de partículas — que seja azimutalmente simétrica assim como somente função do termo $R/r_b(s)$ — conservará a emitância inicialmente atribuída.

As equações que descrevem o sistema envolvendo o feixe e a partícula-teste podem ser então obtidas prontamente. Com ciência das condições existentes na equação (3.1) bem como na equação (3.17), inserindo a equação (3.15) na equação (2.35), obtém-se a seguinte equação para descrição da dinâmica do envelope do feixe não-homogêneo

$$\frac{d^2}{ds^2} r_b(s) + \kappa_{zo} r_b(s) - \frac{1}{(1 + \eta/3)} \frac{K_b}{r_b(s)} - \frac{1}{(1 + \eta/3)^2} \frac{\epsilon_o^2}{r_b^3(s)} = 0, \quad (3.18)$$

a qual pode ser reescrita através de

$$\frac{d^2}{ds^2} r_b(s) + \kappa_{zo} r_b(s) - \frac{K_g}{r_b(s)} - \frac{\epsilon_g^2}{r_b^3(s)} = 0, \quad (3.19)$$

considerando que tanto a perveância quanto a emitância sejam reescaladas pelo fator dependente da magnitude da não-homogeneidade η tal como

$$K_g(\eta) \equiv \frac{K_b}{(1 + \eta/3)} \text{ e } \epsilon_g^2(\eta) \equiv \frac{\epsilon_o^2}{(1 + \eta/3)^2}. \quad (3.20)$$

Note que no caso de ausência de não-homogeneidade, $\eta = 0$, as expressões para a perveância K_g e para a emitância ϵ_g presentes na equação (3.20) se reduzem às obtidas no caso homogêneo e, como conseqüência, a equação para o envelope r_b do feixe (3.19) também.

A equação para a órbita da partícula-teste torna-se então completamente determinável para um feixe não-homogêneo através da seguinte equação

$$\frac{d^2}{ds^2} R + \kappa_{zo} R = \begin{cases} K_b \left[\eta \frac{R^3}{r_b^4} + (1 - \eta) \frac{R}{r_b^2} \right], & \text{para } 0 \leq R \leq r_b, \\ K_b/R, & \text{para } r_b < R \leq r_w \end{cases}, \quad (3.21)$$

obtida mediante a inserção das expressões (3.14) e (3.5) na equação (3.2). Note que a equação (3.21) se acoplada à equação (3.19) através do envelope $r_b(s)$ do feixe do mesmo modo que no caso homogêneo. Contudo, agora a partícula-teste sofre a ação de uma força não-linear em qualquer região do canal de confinamento $0 \leq R \leq r_w$. Note que isto é diferente do caso homogêneo, no qual, na região interna, as forças eram lineares. Observe, no entanto, que esta equação depende agora também da magnitude da não-homogeneidade η . Esta magnitude regulará a intensidade da força não-linear na região interna do feixe. O sistema de equações (3.19)-(3.21) descreve completamente a interação entre a partícula-teste e um feixe com densidade não-homogênea de partículas de formato parabólico. As condições de simetria azimutal da densidade bem como focalização através de campo magnético constante também estão presentes. Analogamente ao caso homogêneo, a interação entre a partícula-teste e o feixe é potencialmente caótica, pois a equação (3.21) é dependente da coordenada temporal s através de r_b e é não-linear para qualquer coordenada radial R considerando valores de $\eta \neq 0$. Tendo em vista que quando $\eta = 0$ obtém-se as equações para o caso homogêneo, pode-se considerar que o sistema de equações (3.19)-(3.21) é generalizado do ponto de vista da magnitude da não-homogeneidade parabólica η .

Pelo fato da equação para o envelope do feixe não-homogêneo (3.19) englobar a sua versão homogênea (3.11), mediante apenas o ajuste da magnitude η , torna-se interessante sucintamente analisar as características de suas soluções. A equação (3.19) possui uma solução de

equilíbrio a qual pode ser obtida impondo $dr_b/ds = 0$ e resolvendo a expressão resultante para $r_b(s)$. Assim procedendo, obtém-se

$$r_{bo} = \frac{K_g}{2\kappa_{zo}} + \sqrt{\frac{K_g^2}{4\kappa_{zo}^2} + \frac{\epsilon_g^2}{\kappa_{zo}}}, \quad (3.22)$$

uma vez que $\sqrt{K_g^2 + 4\kappa_{zo}\epsilon_g^2} \geq K_g$ para qualquer valor de κ_{zo} e ϵ_g .

Particularmente, é de interesse a influência das condições iniciais sobre o comportamento das soluções. Na Figura 4, soluções para $r_b(s)$ são apresentadas para 4 condições iniciais distintas, especificadas por $r_b(s=0) = \{1,0, 1,2, 1,4, 1,6\}$ e $dr_b/ds|_{s=0} = 0$. Considerou-se valores de $\kappa_{zo} = 1$ para o coeficiente de focalização, $K_g = 1$ para a perveância e $\epsilon_g = 0$ para emitância. Segundo a recém obtida equação (3.22), nestas condições o envelope de equilíbrio possui o valor $r_{bo} = 1$. Observa-se que para $r_b(s=0) \neq r_{bo}$ — feixes então ditos descasados no jargão da Física de Feixes — as soluções fornecidas por (3.19) são oscilações periódicas no entorno de um valor $r_b(s) \cong 1,0 = r_{bo}$. Esta oscilação, embora visualmente seja de difícil constatação, é muito diferente de um harmônico convencional, obtido caso a perveância e a emitância assumissem $K_g = \epsilon_g = 0$ pela equação (3.19). É possível também se observar que o período de oscilação do envelope r_b depende da condição inicial $r_b(s=0)$, sendo este um dos comportamentos resultantes do caráter não-linear da equação do envelope (3.19). Resumidamente, quanto maior for o valor da condição inicial $r_b(s=0)$, maior será a amplitude e menor será o período da solução oscilatória resultante.

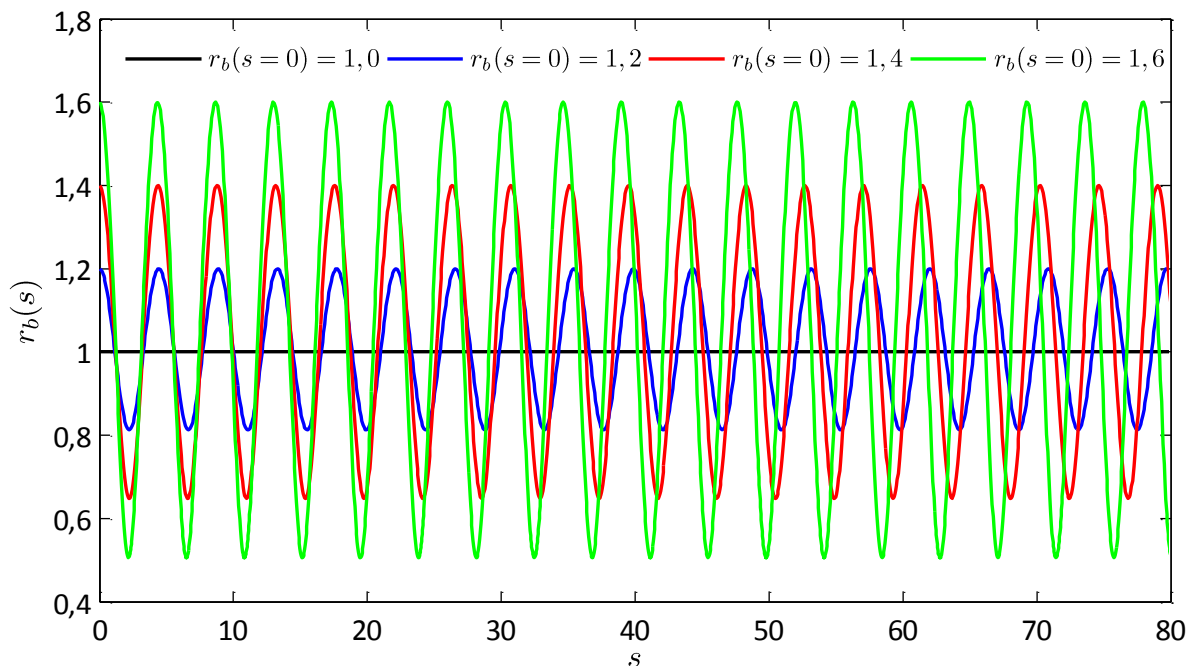


Figura 4: Diferentes soluções para o envelope do feixe $r_b(s)$ considerando como condições iniciais $r_b(s=0) = \{1,0, 1,2, 1,4, 1,6\}$ e $dr_b/ds|_{s=0} = 0$, tendo em vista $\kappa_{zo} = 1,0$, $K_g = 1,0$ e $\epsilon_g = 0$.

4 TERMALIZAÇÃO EM FEIXES INICIALMENTE HOMOGÊNEOS COM SIMETRIA AZIMUTAL

Em geral, feixes ultra-intensos de partículas carregadas transitam de um estado de não-equilíbrio (ou não-estacionário) para um estado de equilíbrio (ou estacionário) ao evoluir no sistema de confinamento magnético. Tanto em experimentos quanto em simulações computacionais, observa-se que a transição ao estado de equilíbrio ocorre mediante alteração significativa de duas quantidades macroscópicas do feixe — o envelope e a emitância — já adequadamente definidas na Seção 2.4. As condições iniciais estabelecidas para a distribuição F_b determinam qual tipo de instabilidade e/ou mecanismo que será precursor desta transição do sistema ao seu estado de equilíbrio. Entretanto, neste Capítulo, em específico o interesse residirá na investigação das influências do descasamento inicial do feixe $r_b(s=0) \neq r_{bo}$ na caracterização de suas quantidades de equilíbrio bem como de transição.

A dinâmica típica do envelope $r_b(s)$ e da emitância $\epsilon(s)$ de um feixe real durante sua evolução no sistema de confinamento solenoidal é apresentada na Figura 5. Os resultados para cada uma destas grandezas foram obtidos mediante simulações numéricas autoconsistentes das interações existentes entre as partículas que compõe o feixe quando imersas em um campo magnético constante de focalização solenoidal. Para fins de exemplificação, atribuiu-se à constante de confinamento bem como a perveância $K_b = \kappa_{z0} = 1$. Note que, nestas condições, tal qual o constatado ao final do Capítulo 3 através da equação (3.22), com $\eta = 0$, o envelope de equilíbrio do feixe é $r_{bo} = 1$. Como condição inicial, considerou-se a distribuição espacialmente homogênea presente na equação (3.6) com envelope inicial $r_b(s=0) = 1,5$, diferente de $r_{bo} = 1$ e, portanto, 50% descasado. Também, se considerou que a energia cinética inicial de todas as partículas é nula, uma distribuição portanto inicialmente sem temperatura, um feixe frio. Como conseqüência, tem-se então que a emitância inicial $\epsilon(s=0)$ também o é, uma vez que, segundo a sua definição presente em (2.33), $\mathbf{V}_\perp(s=0) = \mathbf{0}$ para todas as partículas que compõe a distribuição. Diz-se que o feixe então é dominado pelos efeitos da perveância, parâmetro este que, conforme já comentado na Seção 1.2, quantifica a intensidade das forças repulsivas existentes entre as partículas. O feixe considerado é composto por um total de $N_b = 10.000$ partículas, número este que assegurou convergência aos resultados numéricos obtidos. Tendo em vista a simetria azimutal da distribuição, a quantificação das interações entre as partículas foram baseadas na Lei de Gauss: a força exercida pelo feixe sobre uma partícula na coordenada R depende única e exclusivamente da carga aprisionada por uma superfície de Gauss imaginária em $R - dR$. Este método de simulação é muito conveniente, pois não inclui as interações binárias entre partículas do feixe, apenas os efeitos coletivos existentes entre estas. A energia total presente no feixe foi monitorada durante toda a simulação sendo a dissipação numérica resultante do processo de integração, em geral,

completamente desprezível. Maiores detalhes com relação ao método de simulação numérica autoconsistente bem como os aspectos envolvendo a convergência de seus resultados constam no APÊNDICE A.

Na Figura 5a, pode-se observar que inicialmente o envelope $r_b(s)$ oscila entre o valor inicial $r_b(s=0) = 1,5$ e um valor mínimo, próximo a 0,5. Para $s \lesssim 150$, a oscilação do envelope permanece aproximadamente estável. Contudo, para $s \gtrsim 150$, inicia-se um processo de decaimento no envelope $r_b(s)$, o qual se torna acentuado quando $s \cong 300$. Neste momento, o envelope do feixe transita rapidamente, atingindo um regime de oscilação que qualitativamente permanece estável indefinidamente. Concomitante ao decaimento do envelope $r_b(s)$, há o crescimento da emitância $\epsilon(s)$. Analisando a equação de conservação de energia (2.23) mediante as condições (3.1)

$$\frac{1}{2}\langle \mathbf{V}_\perp^2 \rangle + \frac{1}{2}\kappa_{z0}\langle \mathbf{R}_\perp^2 \rangle + \mathcal{E}_F(s) = E_\perp \quad (4.1)$$

constata-se que este comportamento observado diretamente implica em uma diminuição da energia potencial média do feixe que, obrigatoriamente, deve ser transformada ou em energia cinética média de suas partículas ou transferida em média ao campo elétrico autoconsistentemente gerado, uma vez que a energia transversal total E_\perp é uma constante do movimento. Verifique que a relação entre o envelope $r_b(s)$ e o raio RMS $R_b(s)$ é direta, estando definida mediante a equação (3.8).

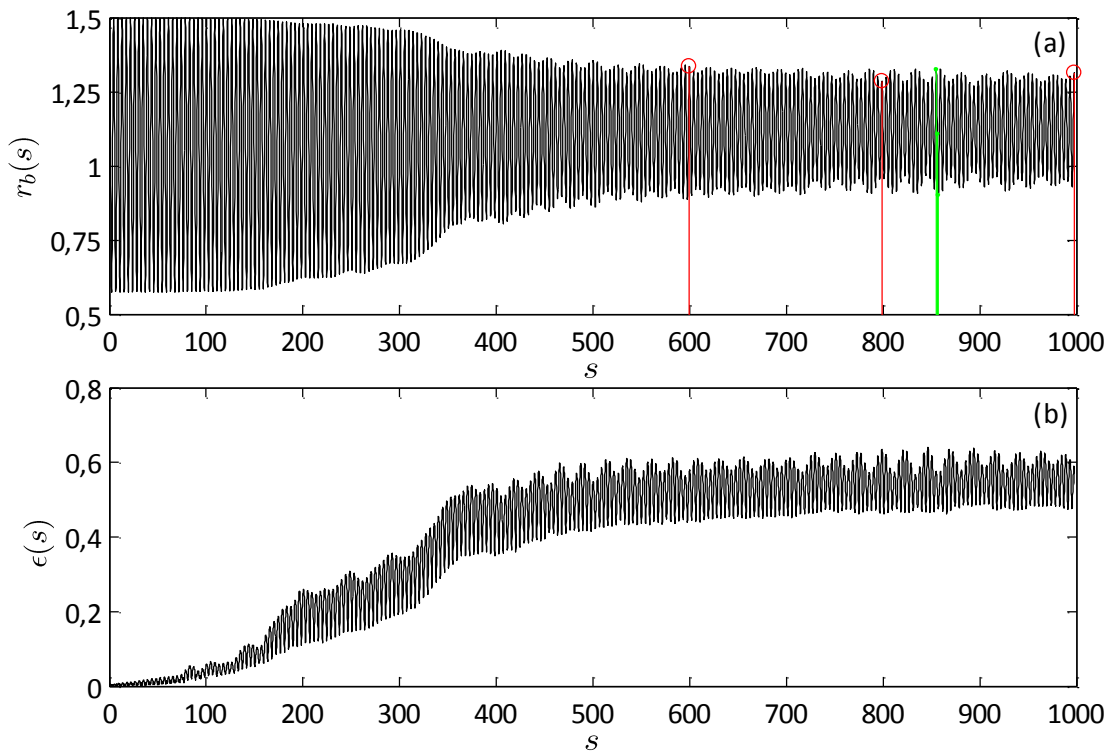


Figura 5: Simulações numéricas autoconsistentes com $K_b = \kappa_{z0} = 1$ e $r_b(s=0) = 1,5$ para um feixe inicialmente homogêneo composto de $N_b = 10.000$ partículas. Em (a) consta a dinâmica do envelope $r_b(s)$ e em (b) consta a dinâmica da emitância $\epsilon(s)$. Alterações abruptas em sincronia são observadas nos gráficos.

O comportamento descrito acima é evidenciado na Figura 6, na qual tanto a energia cinética média $1/2\langle\mathbf{V}_\perp^2\rangle$ quanto a energia potencial efetiva média do feixe definida por

$$\frac{1}{2}\langle\mathbf{U}_\perp^2\rangle \equiv \frac{1}{2}\left(\kappa_{z0}\langle\mathbf{R}_\perp^2\rangle + 2\mathcal{E}_F(s)\right), \quad (4.2)$$

são apresentadas, em unidades de E_\perp , durante a excursão do feixe no canal de confinamento. Inicialmente, a energia potencial efetiva média $1/2\langle\mathbf{U}_\perp^2\rangle$ é máxima, assumindo aproximadamente o valor E_\perp até $s \cong 150$ quando o decaimento inicia. Em $s \cong 300$, uma transição abrupta ocorre na energia potencial efetiva. Neste momento, observa-se também que a energia cinética média $1/2\langle\mathbf{V}_\perp^2\rangle$, a qual era inicialmente nula, sofre um crescimento acentuado. Porém, para instantes posteriores, tanto $1/2\langle\mathbf{U}_\perp^2\rangle$ quanto $1/2\langle\mathbf{V}_\perp^2\rangle$ rapidamente se estabilizam, assumindo valores aproximadamente de, respectivamente, $0,9E_\perp$ e $0,1E_\perp$. Nestas condições de descasamento, $E_\perp \cong 0,4843$.

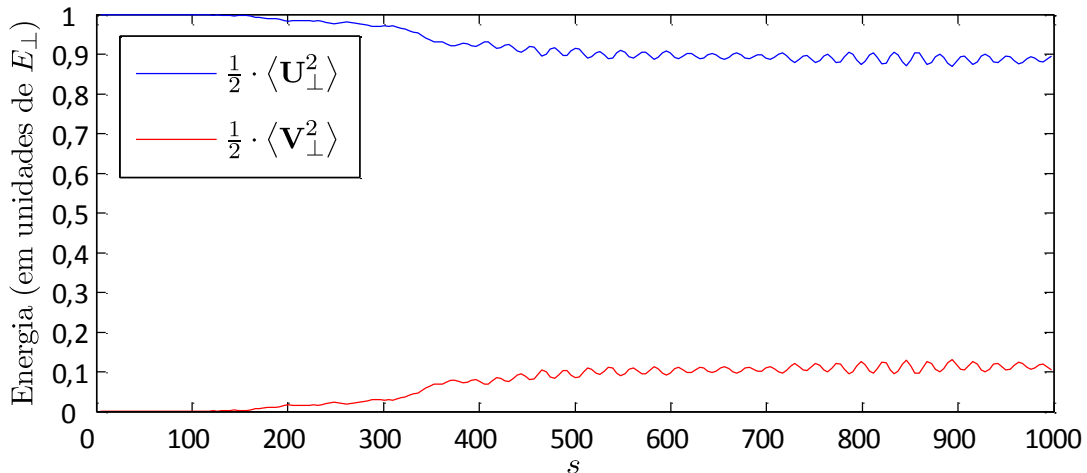


Figura 6: Comportamento dinâmico da energia potencial efetiva média $1/2\langle\mathbf{U}_\perp^2\rangle$ e da energia cinética média $1/2\langle\mathbf{V}_\perp^2\rangle$. Estes resultados foram obtidos através de simulações numéricas autoconsistentes com $K_b = \kappa_{z0} = 1$ e $r_b(s=0) = 1,5$ para um feixe composto de $N_b = 10.000$ partículas. Nesta circunstância, $E_\perp \cong 0,4843$.

Observe, todavia, que inicialmente ao feixe foi imposto ser frio. Portanto, há um mecanismo que permite a termalização do feixe durante sua excursão no canal de confinamento, convertendo em média energia potencial efetiva em energia cinética, o qual será avaliado em detalhe na Seção 4.6. Importante também salientar que a emitância acompanha a dinâmica de decaimento do envelope. Inicialmente é nula e, até $s \lesssim 150$, apresenta um crescimento insignificante. No momento do decaimento abrupto de $r_b(s)$, em $s \cong 300$, a emitância $\epsilon(s)$ apresenta um crescimento igualmente acentuado, tendendo a um valor estável para momentos da dinâmica imediatamente posteriores. A emitância, grandeza previamente definida na equação (2.33), é por conseguinte um indicador sensível de qualquer alteração observada no envelope do feixe. Mais, trata-se de uma quantidade que indiretamente quantifica o montante de energia potencial

efetiva média inicial que é convertida em energia cinética média durante a evolução do feixe no canal de confinamento.

Note que o decaimento sofrido pelo envelope $r_b(s)$ não é simétrico. A parte inferior do envelope, cujos limites são estabelecidos pelos seus mínimos locais, sofre um decaimento mais expressivo que a parte superior do envelope, cujos limites são seus máximos locais. Isto implica que o valor médio axial de $r_b(s)$ na região estacionária seja maior que o seu valor médio axial na região não-estacionária, anterior ao processo de decaimento. Na Figura 7, é apresentado o valor absoluto da Transformada de Fourier (espectro de potência)^{43,44} do envelope $r_b(s)$ presente na Figura 5a. Observa-se a existência de 3 picos bem definidos, um em $\nu = 0$ e dois em $\nu \cong \pm 0,23$. O pico em $\nu = 0$ representa o valor médio de $r_b(s)$ no intervalo de simulação $0 \leq s \leq 1000$. Os picos presentes nas bandas laterais correspondem à amplitude do harmônico fundamental observado em $r_b(s)$ na Figura 5a. Tendo em vista que a banda é extremamente estreita, pode-se considerar que a distância axial entre dois máximos locais — ou dois mínimos locais — do envelope permanece invariante ao longo de s com valor $S_b = 1/\nu \cong 4,35$. Isto é equivalente a aproximar o espectro contínuo da Figura 7 por um discreto. Portanto, para qualquer tempo s , a evolução axial do valor médio do envelope $r_b(s)$ pode ser obtida efetuando-se sobre este último sucessivas médias temporais da seguinte forma

$$\bar{r}_b(s) = \frac{1}{S_b} \int_0^{s+S_b} r_b(s) ds. \quad (4.3)$$

Note que, embora estreitas, as bandas laterais são assimétricas,⁴⁴ em sintonia com o decaimento de $r_b(s)$ observado na Figura 5a.

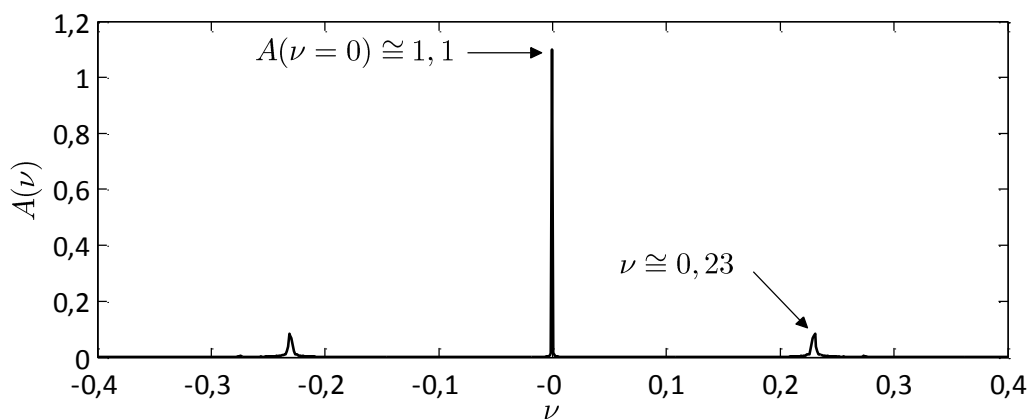


Figura 7: Transformada de Fourier do envelope $r_b(s)$ com $K_b = \kappa_{z0} = 1$ e $r_b(s = 0) = 1,5$ para um feixe composto de $N_b = 10.000$ partículas. Observe que os 2 picos laterais possuem banda estreita e assimétrica em torno da frequência fundamental $\nu \cong \pm 0,23$. O pico central possui a maior amplitude $A(\nu = 0) \cong 1,1$.

Na Figura 8, a dinâmica do valor médio do envelope do feixe $\bar{r}_b(s)$ descrito pela equação (4.3) é apresentado. Inicialmente, para $s \lesssim 150$, tem-se que $\bar{r}_b(s) \cong 1,07$. Contudo, após o decaimento abrupto do envelope $r_b(s)$, em $s \cong 300$, observa-se que o seu valor médio estabiliza

novamente, atingindo o valor de $\bar{r}_b(s) \cong 1,13$. As pequenas oscilações presentes neste gráfico devem-se ao efeito de discretização temporal presente na simulação numérica autoconsistente. Observe que o valor médio de $r_b(s)$ no intervalo $0 \leq s \leq 1000$ pode ser aproximado pela média aritmética dos 2 valores principais de $\bar{r}_b(s)$ anteriores, sendo absolutamente compatível com a amplitude $A(\nu = 0) \cong 1,1$ apresentada na Figura 7. É interessante notar que o comportamento de crescimento do valor médio $\bar{r}_b(s)$ é condizente com o decaimento do envelope $r_b(s)$ bem como o crescimento da emitância $\epsilon(s)$ expostos na Figura 5. Também, este comportamento está em harmonia com a dinâmica das energias médias potencial efetiva e cinética da Figura 6. As variações de cada uma destas quantidades estão intrinsecamente associadas, assunto este que será investigado com mais profundidade nas próximas seções deste Capítulo.

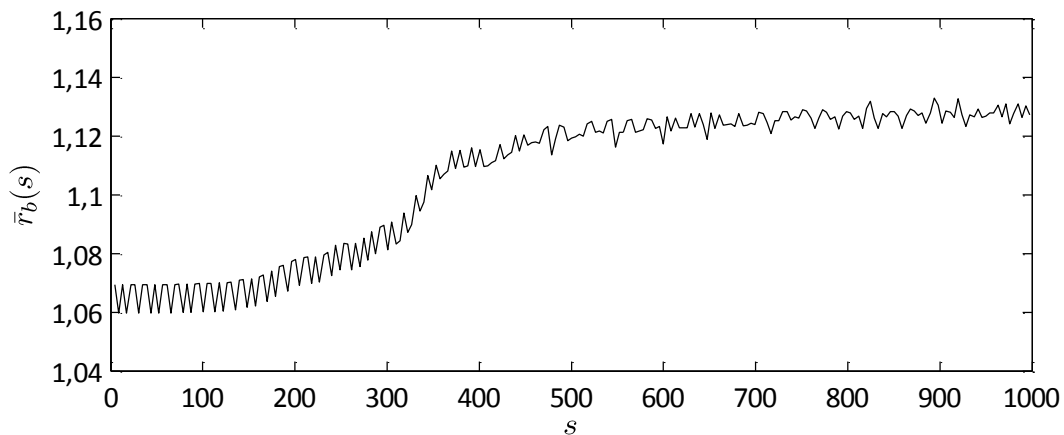


Figura 8: Dinâmica do valor médio do envelope do feixe $\bar{r}_b(s)$ durante o processo de confinamento magnético. O valor inicial $\bar{r}_b(s) \cong 1,07$ transita abruptamente em $s \cong 300$ para um valor estacionário de $\bar{r}_b(s) \cong 1,13$.

Considerando que o envelope relaciona-se trivialmente com o raio RMS do feixe mediante a equação (3.8), tem-se que o aumento de \bar{r}_b implica diretamente em um aumento de \bar{R}_b . Portanto, por inferência imediata, pode-se concluir que algumas partículas com órbitas de extensão espacial inicialmente restrita, após o tempo característico de decaimento do feixe, definido neste trabalho como τ , expandem suas órbitas no espaço de tal forma que uma alteração significativa no valor médio axial do envelope \bar{r}_b do feixe pode ser observada. Além de apresentarem um aumento da amplitude de sua órbita, tais partículas sofrem também um defasamento com relação às demais outras que compõe o feixe pois, embora \bar{r}_b cresça durante a evolução no canal de confinamento, a amplitude de oscilação do envelope $r_b(s)$ — e portanto do raio RMS $R_b(s)$ — diminui, conforme comentado anteriormente e constatado na Figura 5a. O defasamento sofrido por algumas partículas em relação às demais constituintes traduz-se em uma menor contribuição estatística ao raio RMS $R_b(s)$ — e portanto ao envelope $r_b(s)$ — que possui frequência fundamental apresentada na Figura 7, proporcionando o decaimento até então observado.

Da Figura 5, Figura 6 e da Figura 8, pode-se observar que, respectivamente, o envelope $r_b(s)$ e a emitância $\epsilon(s)$, a partição da energia total média E_{\perp} em energia potencial $1/2 \langle \mathbf{U}_{\perp}^2 \rangle$ e cinética $1/2 \langle \mathbf{V}_{\perp}^2 \rangle$ e o raio médio do envelope $\bar{r}_b(s)$ possuem um comportamento dinamicamente semelhante. Inicialmente, tais quantidades possuem um valor aproximadamente constante, perdurando até $s \cong 300$, momento no qual ocorre uma transição e as quantidades assumem outro valor, também aproximadamente constante, mas que permanecerá invariante durante o restante da dinâmica. Este comportamento sugere a existência de dois estados distintos durante a dinâmica do feixe de partículas carregadas. Um inicial, não-estacionário, e um final, estado no qual alterações no caráter dinâmico de grandezas pertinentes ao feixe cessam, podendo ser denominado portanto de estacionário. Estes dois estados são mediados por uma transição em $s = \tau$.

Observe que o caráter estacionário comentado logo acima não implica que quantidades do feixe possuam independência com relação à coordenada axial s . De fato, esta dependência continua a existir. O caráter estacionário do feixe possui uma interpretação mais geral, estando associado à invariância axial de sua topologia durante sua evolução no canal de confinamento. O feixe neste trabalho é dito estar no seu estado estacionário ou de equilíbrio se a geometria do seu espaço de fase torna-se invariante com relação à coordenada axial s .^{45,46} Este comportamento pode ser observado na Figura 9, na qual 3 seções do espaço de fase transversal do feixe em diferentes momentos de sua dinâmica são apresentadas. Os momentos em que cada uma destas seções foram extraídas são destacados com barras e círculos vermelhos na dinâmica do envelope $r_b(s)$ presente na Figura 5a. A primeira seção, exposta na Figura 9a, foi extraída da evolução axial do feixe quando $s = 599,7$, um pouco após o decaimento do seu envelope $r_b(s)$. As demais seções foram extraídas em $s = 798,7$, para Figura 9b e em $s = 997,6$, para Figura 9c. Nestas 3 seções, pode-se observar que as regiões ocupadas pelas partículas no espaço de fase são as mesmas, requisito este necessário ao critério de equilíbrio anteriormente definido.

Note que os pontos escolhidos para a aquisição das seções presentes na Figura 9 correspondem aos máximos locais do envelope do feixe. Contudo nada impede que outros pontos da dinâmica de $r_b(s)$ sejam escolhidos. Na Figura 10, são apresentadas seções transversais do espaço de fase do feixe quando o seu envelope encontra-se consecutivamente em seu máximo local, em seu valor médio \bar{r}_b e em seu mínimo local. Estes momentos constam destacados com barras e pontos verdes na dinâmica de $r_b(s)$ presente na Figura 5a. A seção presente na Figura 10a foi extraída em $s = 855$, a presente na Figura 10b foi extraída em $s = 856,1$ e a presente na Figura 10c foi extraída em $s = 857,1$. Note que, a menos de uma rotação, estas seções são absolutamente muito semelhantes no aspecto geométrico. Portanto, a invariância geométrica permanece presente, após o decaimento, para qualquer valor de coordenada s analisado. Ainda, como se observará nas próximas seções, esta característica é válida e assim extensível para os demais valores de descasamento

inicial $r_b(s = 0) \neq r_{bo}$ de interesse neste Capítulo. Desta forma, qualquer modelo desenvolvido e embasado sobre estes argumentos é potencialmente válido para qualquer descasamento inicial $r_b(s = 0)$.

A condição de invariância geométrica é necessária mas não suficiente para caracterizar o estado do sistema após o decaimento do feixe como topologicamente estacionário. No equilíbrio, é necessário ainda que as densidades de partícula em cada uma das distintas regiões do espaço de fase permaneçam constantes, independentes explicitamente da coordenada axial s . As partículas individualmente podem permanentemente migrar de uma região para outra no espaço de fase, mas a sua densidade deve permanecer aproximadamente invariante em relação à coordenada axial s . Ou seja, embora de fato as partículas que compõe o feixe explorem continuamente toda a região do espaço de fase a elas permitida, em qualquer instante s após o decaimento do envelope $r_b(s)$, a quantidade de partículas em cada região deve permanecer aproximadamente constante.^{45,46}

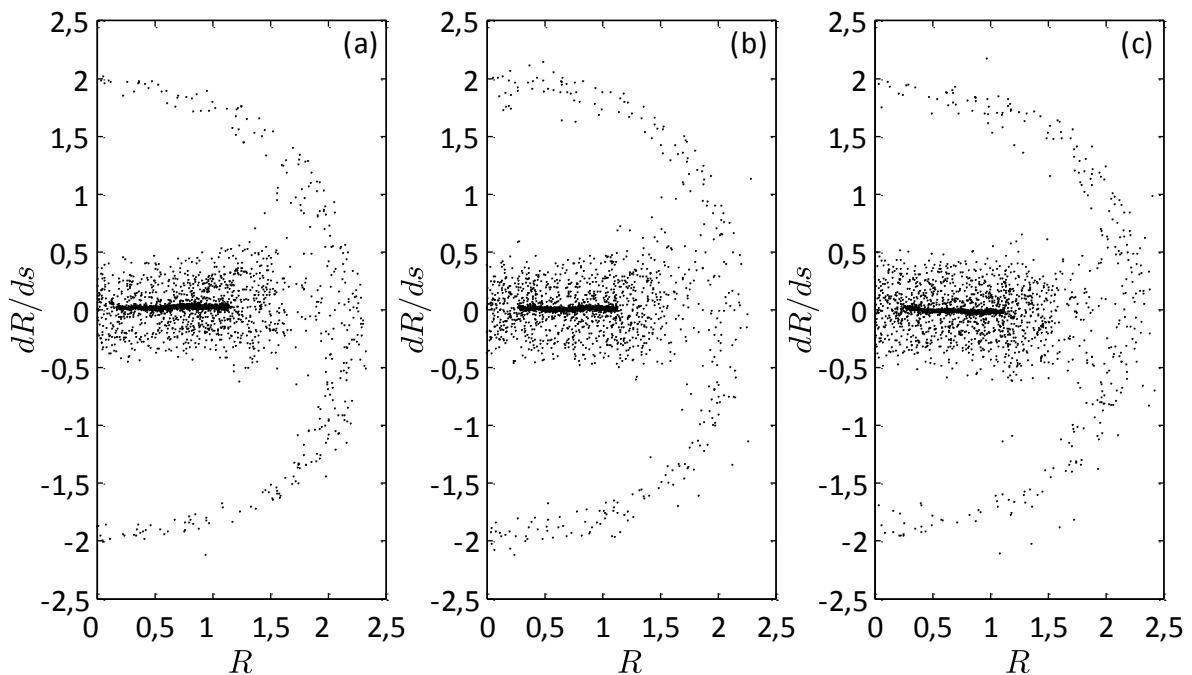


Figura 9: Seções transversais do espaço de fase do feixe obtidas mediante simulações numéricas autoconsistentes com $K_b = \kappa_{zo} = 1$ e $r_b(s = 0) = 1,5$ para um feixe composto de $N_b = 10.000$ partículas. As seções foram capturadas em (a) $s = 599,7$, (b) $s = 798,7$ e (c) $s = 997,6$. Note a invariância topológica.

Tal circunstância pode ser verificada elegendo-se uma região do espaço de fase para análise e quantificando o número de partículas a esta pertencente em cada instante de tempo s . Por motivos que serão esclarecidos na próxima Seção, torna-se interessante avaliar a quantidade de partículas pertinentes a região curva do espaço de fase presente tanto na Figura 9 quanto na Figura 10. Na Figura 11, é apresentada a evolução desta quantidade — denominada de N_h — com relação à coordenada axial s . Pode-se observar que inicialmente $N_h(s = 0) = 0$. Após $s \cong 150$, N_h apresenta um pequeno crescimento, o qual se torna acentuado quando $s \cong 300$. Neste momento, há uma

forte transição em N_h , que em momento imediatamente posterior tende a um valor aproximadamente constante $N_h(s \rightarrow \infty) \cong 632$. Esta tendência assintótica de N_h para um valor aproximadamente constante, independente explicitamente de s , corrobora as expectativas enunciadas anteriormente e fornece a última condição necessária ao conceito de equilíbrio neste trabalho definido. Neste ponto, há a homogeneização completa do espaço de fase transversal do feixe devido à mistura existente entre as órbitas desenvolvidas por cada partícula. Tal condição somente foi atingida pois o sistema de $2 \cdot N_b$ equações que descreve a simulação numérica autoconsistente é intrinsecamente não-linear, propiciando o surgimento de caos.

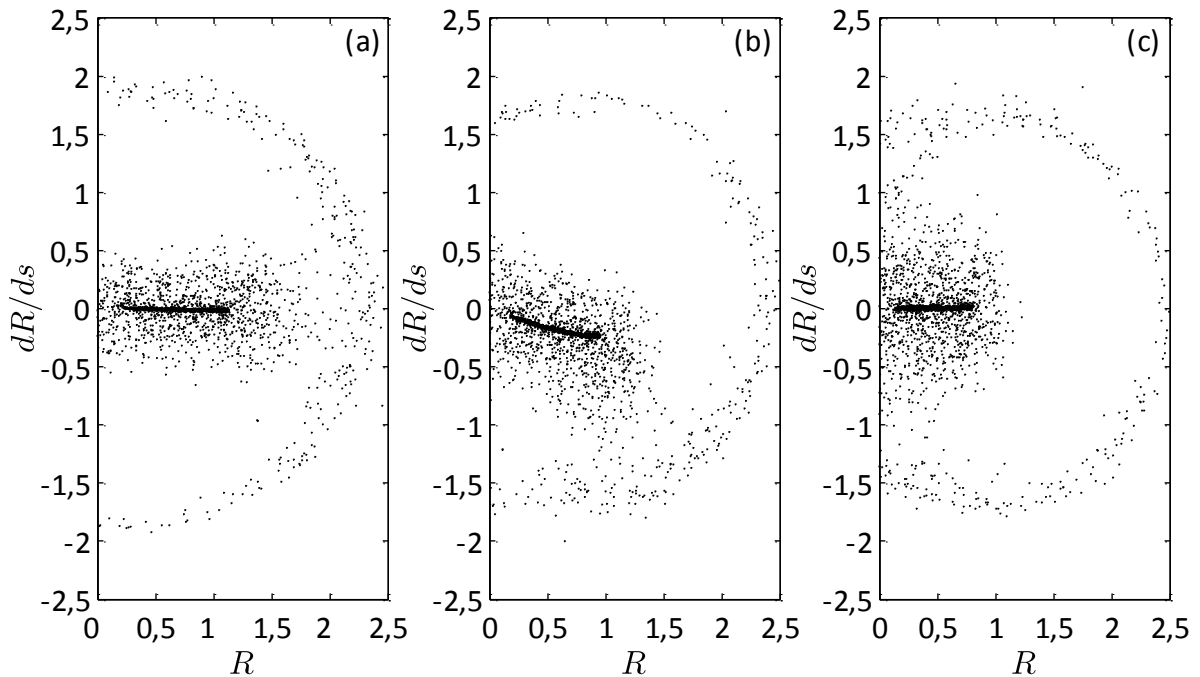


Figura 10: Seções transversais do espaço de fase do feixe obtidas mediante simulações numéricas autoconsistentes com $K_b = \kappa_{z0} = 1$ e $r_b(s=0) = 1,5$ para um feixe composto de $N_b = 10.000$ partículas. As seções foram capturadas em (a) $s = 855$, (b) $s = 856,1$ e (c) $s = 857,1$.

Novamente, é interessante observar a correspondência existente entre os gráficos para o número de partículas na região curva $N_h(s)$ presente na Figura 11 em questão, e os gráficos para a emitância $\epsilon(s)$, presente na Figura 5b, para a energia cinética média $1/2\langle V_{\perp}^2 \rangle$, presente na Figura 6, e para o valor médio axial do envelope $\bar{r}_b(s)$, presente na Figura 8. A população da região curva do espaço de fase por partículas está diretamente associada ao crescimento tanto da emitância $\epsilon(s)$, quanto da energia cinética média $1/2\langle V_{\perp}^2 \rangle$ e do valor médio axial do envelope $\bar{r}_b(s)$. O vínculo entre cada uma destas quantidades será abordado nas próximas seções deste Capítulo, sendo utilizado como subsídio para o desenvolvimento dos modelos propostos.

As grandezas importantes à descrição do processo de decaimento do feixe tornam-se então mais evidentes. Do ponto de vista da transição, é de suma importância obter – ou melhor compreender – a escala de tempo de decaimento do feixe, a qual é aqui denominada de τ . Em

relação ao regime estacionário do feixe, é de interesse a obtenção das grandezas macroscópicas já aqui mencionadas emitância e envelope. Conforme comentado, as grandezas pertinentes à transição bem como ao equilíbrio serão investigadas com relação à variação do descasamento inicial do feixe $r_b(s=0) \neq r_{bo}$. Note que, de fato, em um feixe real, outras variáveis influenciam seu processo de decaimento. Contudo, neste Capítulo, o interesse residirá em apenas avaliar e elucidar o comportamento do feixe durante seu confinamento magnético com relação ao seu descasamento inicial $r_b(s=0)$.

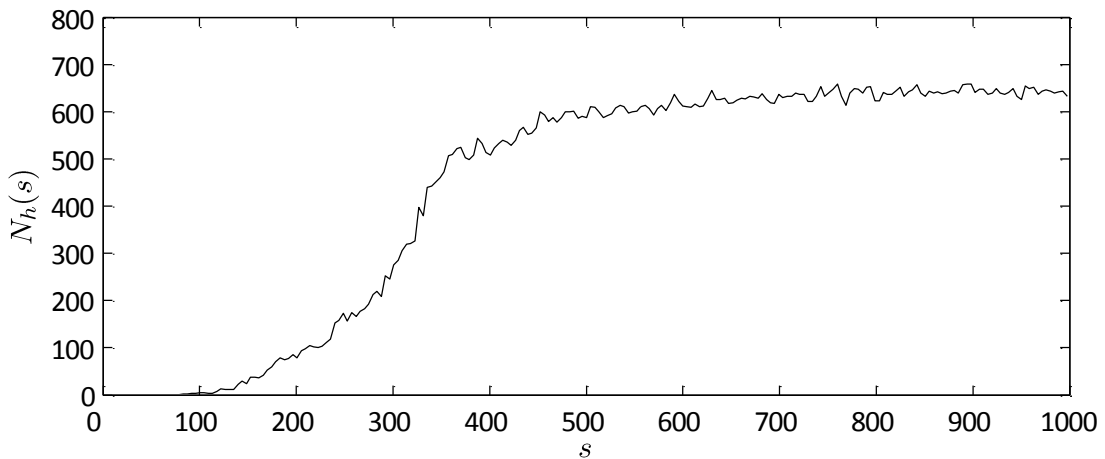


Figura 11: Evolução axial da quantidade de partículas pertencente à região curva do espaço de fase transversal do feixe. Resultados obtidos mediante simulações numéricas autoconsistentes com $K_b = \kappa_{z0} = 1$ e $r_b(s=0) = 1,5$ para um feixe composto de $N_b = 10.000$ partículas. Valor assintótico $N_h(s \rightarrow \infty) \cong 642$.

Haja vista que a emitância é uma grandeza cuja dinâmica está associada ao decaimento do envelope $r_b(s)$, torna-se oportuno considerar a emitância inicial nula $\epsilon(s=0) = 0$. Desta forma, durante a dinâmica do feixe, qualquer alteração no valor do seu envelope $r_b(s)$ significará em uma conseqüente alteração no valor da sua emitância, tornando-a então não-nula e permitindo assim pronta detecção de alterações de comportamento do feixe. Sob estas circunstâncias, torna-se interessante também efetuar um reescalonamento em todas as variáveis espaciais. Por conveniência, as coordenadas espaciais transversais \mathbf{R}_\perp podem ser reescaladas pelo envelope de equilíbrio $r_{bo} = \sqrt{K_b/\kappa_{z0}}$, obtido impondo-se $\eta = 0$ e $\epsilon(s=0) = 0$ na equação (3.22), e a coordenada longitudinal s por $\kappa_{z0}^{-1/2}$. Este procedimento é análogo a se efetuar

$$K_b \rightarrow 1 \text{ e } \kappa_{z0} \rightarrow 1 \quad (4.4)$$

em todas as equações até então aqui apresentadas nas quais estes parâmetros aparecem. Nestas condições, o envelope de equilíbrio do feixe torna-se $r_{bo} \rightarrow 1$. Observe que este reescalonamento permite investigar o comportamento do feixe durante seu processo de confinamento segundo apenas o seu descasamento inicial definido por

$$r_o \equiv r_b(s=0)/\sqrt{K_b/\kappa_{z0}}, \quad (4.5)$$

o qual se torna o único parâmetro livre para a descrição do estado não-estacionário do feixe.

Note que a emitância ϵ é uma função do tempo e , de fato, após o decaimento do feixe é esperado que o seu valor seja não-nulo como já reiteradamente comentado. Para tempos $s > 0$, considerando o reescalonamento adotado, a emitância estará expressa em unidades de $K_b/\kappa_{z0}^{1/2}$. Na verdade, tal qual será observado nas próximas seções, o comportamento da emitância outrossim é dependente do descasamento inicial e , deste modo, $\epsilon = \epsilon(r_0, s)$. Maiores detalhes com relação ao processo de reescalonamento das variáveis espaciais utilizado neste trabalho constam extensivamente descritas no APÊNDICE B.

Nas próximas seções, alguns modelos serão apresentados para a descrição do estado não-estacionário (Seção 4.1), do estado estacionário ou de equilíbrio (Seção 4.2)^{45,46,47} e do comportamento transiente de um feixe de partículas carregadas azimutalmente simétrico e inicialmente homogêneo.^{48,49,50} Como as equações que descrevem o feixe aqui considerado conservam energia — sistema Hamiltoniano³⁷ — a obtenção das quantidades de equilíbrio de interesse, como a emitância o envelope, residirá em conectar, mediante os modelos desenvolvidos, o estado não-estacionário com o estado estacionário do feixe (Seção 4.3).^{45,46,47,51} Diretamente, isto resultará na obtenção de equações para grandezas de interesse pertencentes a cada um destes estados, as quais serão funções de parâmetros que caracterizam o feixe em cada uma destas circunstâncias. Os resultados obtidos nesta etapa (Seção 4.4)^{45,46,47,49,51} se mostrarão de suma importância ao desenvolvimento de modelos que permitirão melhor compreender as escalas de tempo de decaimento do feixe (Seção 4.5 e Seção 4.6). Todas as equações apresentadas na próxima exceção já foram reescaladas segundo a expressão (4.4). Este mesmo procedimento também foi empregado nas simulações numéricas autoconsistentes, cujo número de partículas adotado foi $N_b = 10.000$ para qualquer valor de descasamento inicial r_0 . Portanto, a partir de então, nenhuma referência à constante de focalização magnética κ_{z0} bem como à perveância K_b será mais necessária e portanto efetuada.

4.1 Descrição do estado inicial não-estacionário

O sistema de interesse neste trabalho considerado, tal como já enunciado no Capítulo 3, é caracterizado por uma densidade de partículas n_b com simetria azimutal, evoluindo em um canal de focalização linear, encapsulado por um duto condutor de raio r_w e permeado por um campo magnético constante de origem solenoidal. Esta configuração é representada na Figura 3, presente no Capítulo 3, utilizada oportunamente para a descrição do sistema composto pelo feixe e pela partícula-teste. Nesta figura, constam o sistema de coordenadas adotado bem como algumas quantidades que serão utilizadas posteriormente nesta Seção. O feixe inicialmente encontra-se perfeitamente alinhado ao eixo axial e_s de propagação, de modo que eventuais oscilações em torno deste último são inexistentes. Conforme anteriormente comentado no início deste Capítulo, o feixe

inicialmente também não possui emitância — $\epsilon(s = 0) = 0$ — sendo totalmente dominado apenas pelos efeitos não-lineares da perveância, identificada nas equações não-reescaladas através do parâmetro K_b . Nesta situação, a atribuição de uma densidade homogênea de partículas como a da equação (3.6) ao estado inicial não-estacionário, além de útil para a simplificação dos cálculos, é factível como representação real do sistema físico neste Capítulo. Assim, considerando a definição presente na equação (4.5) e a inserindo na equação (3.6), para $s = 0$, obtém-se

$$n_b(R, s = 0) \equiv n_o = \begin{cases} N_b/\pi r_o^2, & \text{para } 0 \leq R \leq r_o \\ 0, & \text{para } r_o < R \leq r_w \end{cases} \quad (4.6)$$

na qual R é a coordenada radial que descreve o espaço transversal. A representação no espaço de fase deste tipo de densidade com um descasamento inicial de $r_o = 1,5$ consta na Figura 12a.

Uma vez definida a densidade de partículas inicial n_o torna-se possível determinar as expressões para os campos elétricos tanto dentro quanto fora do feixe. Tendo em vista a simetria azimutal da densidade presente na equação (4.6), então as equipotenciais são superfícies circulares concêntricas ao eixo axial no sentido \mathbf{e}_s e, portanto, o campo elétrico é representado única e exclusivamente por sua componente radial. Inserindo a expressão (4.6) na equação de Poisson (2.5) e resolvendo para E_r , obtém-se

$$E_r(R, s = 0) \equiv E_{r_o} = \begin{cases} -R/r_o^2, & \text{para } 0 \leq R \leq r_o \\ -1/R, & \text{para } r_o < R \leq r_w \end{cases}, \quad (4.7)$$

na qual uma das constantes de integração pôde ser eliminada mediante a condição de finitude do campo elétrico $E_r(R, s = 0)$ em $R = 0$ e a outra pôde ser determinada mediante a continuidade de $E_r(R, s = 0)$ em $R = r_o$. Note que esta expressão obviamente é idêntica a aquelas presentes nas equações (3.5) e (3.7), obtidas através da Lei de Gauss, uma vez que a influência da partícula-teste pode ser desprezada.

A energia média armazenada nos campos elétricos do estado inicial do feixe pode ser então prontamente computada. Inserindo a expressão (4.7) na equação (2.22) obtém-se

$$\mathcal{E}_F(s = 0) \equiv \mathcal{E}_o = -\frac{1}{2}\ln(r_o) + \frac{1}{2}\ln(r_w) + \frac{1}{8}, \quad (4.8)$$

a qual depende do descasamento inicial do feixe r_o e da coordenada radial r_w na qual o duto circular é posicionado.

Para a determinação da energia média inicial total do feixe, descrita na condição de focalização constante para qualquer coordenada axial s pela equação (4.1), deve-se ainda quantificar os termos $\langle \mathbf{R}_\perp^2 \rangle$ e $\langle \mathbf{V}_\perp^2 \rangle$ em $s = 0$. Da definição do raio RMS do feixe (2.32) e observando a relação entre este último e o envelope presente na equação (3.8), tem-se que, agregando também a definição (4.5)

$$\langle \mathbf{R}_\perp^2 \rangle(s = 0) = R_b^2 = r_o^2/2. \quad (4.9)$$

O termo $\langle \mathbf{V}_\perp^2 \rangle(s=0)$ torna-se completamente resolvido observando que a emitância inicial do feixe é nula. De acordo com a equação (2.33) que define a emitância e considerando que $\langle \mathbf{R}_\perp^2 \rangle(s=0) \neq 0$ devido à equação (4.9) logo acima, a única solução possível ao se considerar $\epsilon(s=0) = 0$ torna-se

$$\langle \mathbf{V}_\perp^2 \rangle(s=0) = 0. \quad (4.10)$$

Inserindo as equações (4.8)-(4.10) na equação (4.1) obtém-se

$$\frac{r_o^2}{4} - \frac{1}{2} \ln(r_o) + \frac{1}{2} \ln(r_w) + \frac{1}{8} = E_\perp(s=0) = E_\perp, \quad (4.11)$$

a qual representa a energia média total armazenada inicialmente no feixe em questão, inerente às partículas e aos campos elétricos autoconsistentemente gerados nele presentes, quando em confinamento solenoidal constante. Esta quantidade deve ser conservada para instantes s posteriores independentemente quão complicada seja a dinâmica e o formato da densidade de partículas $n_b(s)$. A densidade $n_b(s)$ pode perfeitamente tornar-se não-homogênea ao longo da dinâmica, devendo apenas manter o vínculo de simetria azimutal. Uma constatação importante é verificar que a energia E_\perp no estado inicial não-estacionário depende exclusivamente do descasamento inicial r_o e da distância radial do duto ao eixo de simetria r_w . Na realidade, como se observará na Seção 4.3 durante a conexão entre os estados, o único parâmetro livre do modelo se tornará r_o , pois a dependência de r_w se cancelará com termo análogo oriundo do estado estacionário. O reescalonamento das quantidades sumarizado pela equação (4.4) foi fundamental para a obtenção deste resultado.

4.2 Descrição do estado final estacionário

À medida que o feixe evolui no canal linear de confinamento magnético, partículas individualmente começam a interagir com o conjunto majoritário de partículas que compõe o feixe e que estão em movimento coerente. Nesta interação, estas partículas extraem energia suficiente do movimento oscilatório do feixe de forma que sua dinâmica se torna consideravelmente distinta das demais outras constituintes, propiciando o decaimento do envelope $r_b(s)$, o conseqüente crescimento da emitância $\epsilon(s)$ e então a formação do halo. No espaço de fase, esta distinção entre as dinâmicas das partículas constituintes se traduz no surgimento de novas órbitas permitidas, conforme demonstra a Figura 12b. Uma discussão mais detalhada com relação aos mecanismos físicos envolvidos nesta interação entre partículas individuais com a dinâmica coerente das demais outras em feixes homogêneos é escopo da Seção 4.6.

As observações efetuadas no parágrafo anterior tornam-se claras ao se comparar a geometria do espaço de fase inicial típico do feixe, presente na Figura 12a, com a sua geometria obtida no equilíbrio, presente na Figura 12b. A evolução do estado inicial não-estacionário da Figura 12a para o estado estacionário da Figura 12b foi determinada mediante simulações numéricas

autoconsistentes com um total de $N_b = 10.000$ partículas e descasamento inicial de $r_o = 1,5$. Inicialmente, o feixe é composto — conforme a equação (4.6) — por partículas com velocidade nula, sendo representado no espaço de fase por uma linha reta sobre o eixo da coordenada radial R tal qual exposto na Figura 12a. No decorrer da dinâmica, partículas individualmente extraem energia do movimento coerente do feixe e iniciam a população de outras regiões do espaço de fase até então indisponíveis. Esta população cessa quando o feixe atinge seu estado de equilíbrio, condição esta já verificada mediante a evolução da quantidade N_h com relação à coordenada s presente na Figura 11. Da Figura 12b, observa-se — no estado estacionário — a presença de duas novas regiões ocupadas por partículas no espaço de fase: uma curva, que circunscreve todas as demais e está contida entre as superfícies $r'_i(R)$ e $r'_f(R)$, e uma retangular, em forma de nuvem, circundando a região filamentar previamente definida, contudo desta vez com um tamanho r_c , este menor que o descasamento inicial r_o . Note que estas duas novas regiões necessitam agora da inclusão da coordenada dR/ds para a sua representação no espaço de fase. Isto difere substancialmente do caso inicial, no qual o feixe era suficientemente descrito mediante apenas a coordenada espacial R . Ou seja, durante a evolução do feixe no canal linear de confinamento magnético, partículas que inicialmente possuíam velocidade nula, adquiriram progressivamente energia cinética suficiente para que suas órbitas se expandissem verticalmente ao longo do eixo dR/ds do espaço de fase.

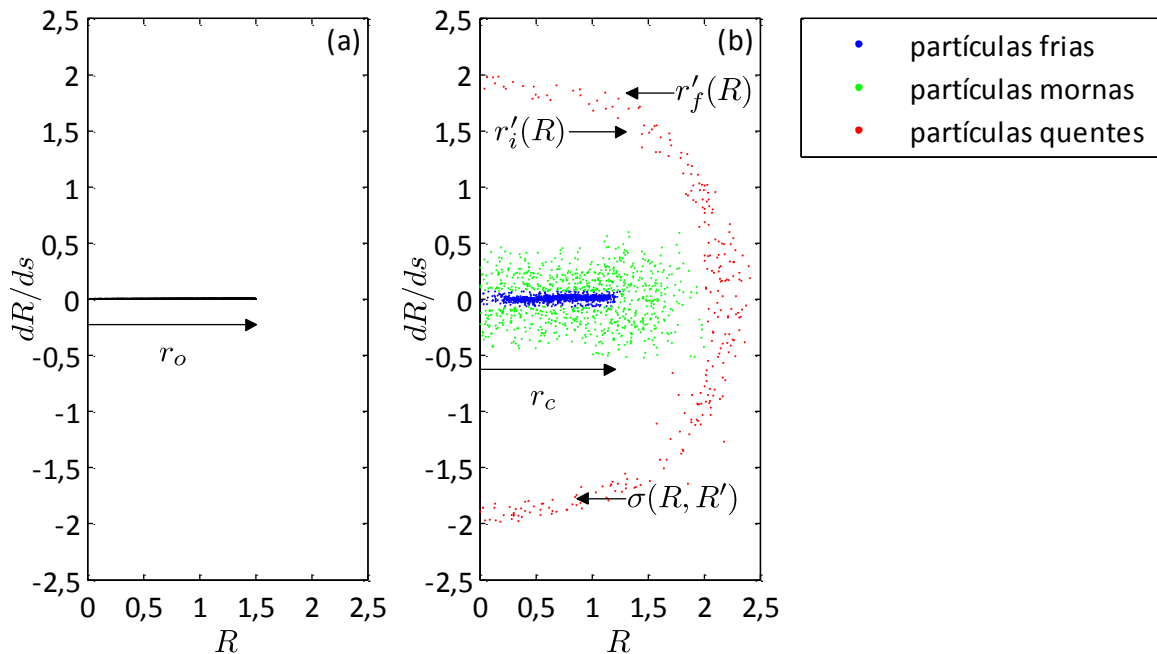


Figura 12: Seções transversais do espaço de fase de um feixe composto de $N_b = 10.000$ partículas e descasamento inicial $r_o = 1,5$. As seções foram capturadas em (a) $s = 0$ e em (b) $s = 547,8$. No painel (a) o único parâmetro que caracteriza o estado não-estacionário é apresentado. No painel (b) a classificação adotada para as partículas no estado estacionário bem como os parâmetros que o caracterizam são discriminados.

Pode-se então classificar cada uma destas regiões mediante a discriminação da energia cinética — ou da velocidade — pertencente às partículas que as populam. Segundo a Figura 12b,

pode-se observar que as partículas com maior energia cinética encontram-se sobre a região curva do espaço de fase. Estas partículas são então denominadas de quentes e destacadas em vermelho no espaço de fase. A segunda população de partículas com maior energia cinética encontra-se difusa ao redor da região filamentar, constituindo uma nuvem no espaço de fase. Seguindo o procedimento, estas partículas são denominadas de mornas e são então destacadas em verde no espaço de fase em questão. A última população de partículas possui a característica de uma linha reta sobre o eixo R , a qual é remanescente do estado inicial do feixe, mas com um tamanho agora definido por r_c , menor que r_o quando comparado ao espaço de fase não-estacionário da Figura 12a. Devido à ausência de velocidade, as partículas pertinentes a esta região são denominadas de frias, sendo representadas no espaço de fase em azul.

Este tipo de classificação é interessante pois permite identificar, no equilíbrio, as partículas que formam o halo como diretamente todas aquelas que não pertencem à região filamentar sobre o eixo R , característica esta que remanesce do estado inicial do feixe. De outra forma, segundo este critério, as partículas que pertencem ao halo são todas aquelas que no equilíbrio não podem ser denominadas de partículas frias, sendo o halo portanto, a princípio, composto pelas partículas mornas e pelas quentes. No entanto, torna-se vantajoso restringir ainda mais a definição das partículas que formam o halo para aquelas que residem apenas na região curva do espaço de fase. Além de ser conveniente, esta nova definição é também mais real, uma vez que, para feixes inicialmente descasados, a população de partículas mornas pode ser negligenciada no equilíbrio na composição do halo, embora esta última seja fundamental e imprescindível para a sua formação, conforme será detalhadamente discutido no Capítulo 5.

Elaborando-se então uma nova classificação, desta vez dicotômica, distinguindo partículas que compõem o núcleo ou o halo do feixe, neste contexto de feixes descasados homogêneos, como se constatará a frente, tem-se que as partículas mornas funcionalmente não pertencem a nenhuma destas últimas. Apesar de as partículas mornas serem imprescindíveis na permissão que partículas originalmente frias (pertencentes ao núcleo do feixe) se tornem quentes (compondo o halo do feixe), certamente estas não podem ser exatamente definidas como partículas do núcleo ou do halo do feixe. Todavia, uma aproximação para a classificação das partículas mornas pode ser efetuada. Na Figura 13, a energia cinética média concernente a cada classe de partícula (fria, morna e quente) anteriormente definida é apresentada. De fato, pode-se observar que, majoritariamente, toda energia potencial média convertida em energia cinética média durante a evolução do feixe no canal de confinamento é armazenada nas partículas ditas quentes. Visualmente isto pode ser constatado mediante comparação direta entre as curvas para a energia cinética média total $1/2\langle V_{\perp}^2 \rangle$ presente na Figura 6 e a acumulada pelas partículas classificadas como quentes da Figura 13. Enquanto as partículas quentes possuem aproximadamente $0,1E_{\perp}$ de energia cinética média no equilíbrio, as

partículas mornas possuem $0,01E_{\perp}$ e as partículas frias, em congruência com sua designação, possuem um valor insignificante. Verifique que, consistentemente, a energia cinética média das partículas frias é desprezível não somente no equilíbrio como também em qualquer instante s da dinâmica.

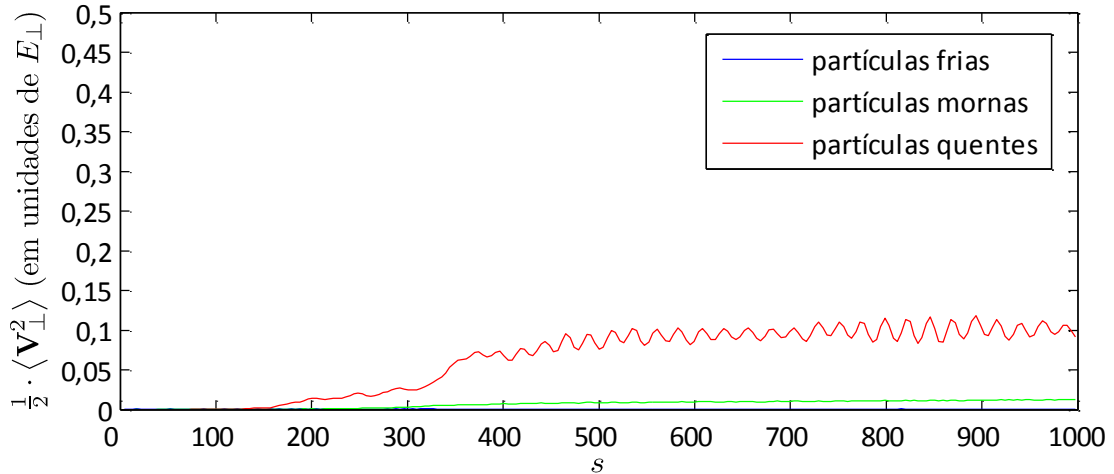


Figura 13: Evolução da energia cinética média referente à classificação adotada para as partículas que compõe o feixe como frias, mornas e quentes. Resultados obtidos mediante simulações numéricas autoconsistentes com descasamento inicial $r_0 = 1,5$. Nesta circunstância, $E_{\perp}(r_0 = 1,5) \cong 0,4843$.

Observe que a energia cinética média armazenada nas partículas quentes é aproximadamente 10 vezes maior que a pertencente às partículas mornas no equilíbrio. Esta constatação é relevante pois permite que a contribuição das partículas mornas na energia cinética média total seja negligenciada perante as partículas quentes. Ou seja, como uma aproximação, pode-se inserir as partículas mornas na classificação de partículas pertencentes ao núcleo do feixe, desprezando a sua pequena contribuição de energia cinética e assim as considerando como frias. Note que esta aproximação pode ser realizada com base direta na análise da energia cinética média referente às partículas frias, mornas e quentes. Em termos absolutos, a energia da população fria, morna e quente é obtida mediante simples multiplicação das curvas da Figura 13 pelo número total de partículas N_b , permanecendo assim a relação de energia cinética média por partícula ou da população entre cada uma das classificações fria, morna e quente inalterada. Ademais, além desta razão permanecer constante, para cálculo das quantidades de interesse da densidade n_b , tais como o envelope r_b e a emitância ϵ , de forma geral, para qualquer coordenada axial s , apenas a média por partícula é relevante. Isto se deve ao conceito de média definido na equação (2.1). Destaca-se que a adotar esta aproximação é de suma importância para a elaboração dos modelos que serão desenvolvidos nas próximas seções, uma vez que permite a utilização de uma classificação dicotômica, entre apenas partículas pertencentes ao núcleo ou ao halo do feixe. Cabe salientar que no presente caso a descrição das partículas mornas torna-se indispensável apenas na descrição da transição do feixe, estando diretamente relacionadas aos mecanismos de formação do halo. No

equilíbrio, para feixes inicialmente descasados, sua contribuição pode ser desconsiderada. Na Seção 4.6, será realizada uma discussão mais profunda neste tema.

Tendo em vista o aquecimento progressivo do feixe, torna-se claro que, para instantes da dinâmica maiores que a escala de seu decaimento τ , a densidade inicial presente na equação (4.6) não é mais válida. As partículas, no estado estacionário, não estão mais restritas somente a ocupar uma região sobre o eixo R mas como também as demais outras duas sobre o plano $R \times dR/ds$ já aqui enunciadas. No entanto, as suas densidades no espaço de fase devem permanecer aproximadamente constantes, satisfazendo a definição de equilíbrio neste trabalho adotada. Esta complexidade adicional observada no equilíbrio pode ser descrita supondo que a densidade de partículas n_b que descreve o feixe ao longo de sua dinâmica possa ser segmentada em duas outras, uma que considere apenas as partículas pertencentes ao núcleo do feixe, denominada de n_c , e outra que contemple àquelas pertencentes ao halo do feixe, designada por n_h . Matematicamente, no estado estacionário, a densidade de partículas n_b assume o seguinte formato

$$n_b(R, s \geq \tau) \equiv n_\tau = \begin{cases} n_c(R) + n_h(R), & \text{para } 0 \leq R \leq r_c \\ n_h(R), & \text{para } r_c < R \leq r_h, \\ 0, & \text{para } r_h < R \leq r_w \end{cases} \quad (4.12)$$

na qual a quantidade r_c delimita o comprimento da região filamentar (composta pelas partículas frias) sobre o eixo R , estando especificada na Figura 12b. A quantidade r_h demarca o comprimento da região curva (na qual as partículas quentes residem) projetado sobre o eixo R , sendo obtida mediante resolução da equação $r'_i(R \equiv r_h) = 0$, objeto das próximas seções. Em compatibilidade com a definição de equilíbrio adotada neste trabalho, a dependência temporal das densidades pode ser desconsiderada no estado do sistema em questão.

Independentemente do caráter das densidades do núcleo n_c e do halo n_h , a equação (2.2) para o número de partículas por unidade de comprimento axial bem como sua equação (2.12) de conservação permanecem válidas. Inserindo a expressão (4.12) na equação (2.2) obtém-se em coordenadas cilíndricas

$$N_b = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r_w} dR R n_\tau = N_c + N_h \quad (4.13)$$

na qual

$$N_\alpha = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r_\alpha} dR R n_\alpha, \text{ para } \alpha = \{c, h\}. \quad (4.14)$$

A densidade n_c agrega as partículas do feixe que não absorveram energia cinética durante a dinâmica e que, portanto, continuam frias no estado estacionário, característica esta que é remanescente do estado inicial não-estacionário. Desta forma, é razoável atribuir ao equilíbrio também uma densidade homogênea às partículas do núcleo, nos moldes da descrita pela equação (4.6). Assim, tem-se que, no equilíbrio, as partículas do núcleo são descritas por

$$n_c(R) = \begin{cases} N_c/\pi r_c^2, & \text{para } 0 \leq R \leq r_c \\ 0, & \text{para } r_c < R \leq r_w \end{cases} \quad (4.15)$$

Resta então determinar a expressão para a densidade de partículas que compõe o halo n_h . Esta densidade deve possuir um formato um tanto mais complicado, já que, mediante a simples projeção da região curva sobre o eixo R , observa-se prontamente o seu carácter não-homogêneo. Considerando-se que todas as quantidades pertinentes ao feixe são médias (por partícula), será interessante, como se constatará a seguir nas próximas seções, expressar n_h em função da fração de partículas que compõe o halo definida por

$$f \equiv N_h/N_b. \quad (4.16)$$

Dividindo a equação (4.13) pelo número total de partículas por unidade de comprimento axial N_b e inserindo nesta última a equação (4.16) obtém-se

$$N_c/N_b = 1 - f, \quad (4.17)$$

a qual representa a fração de partículas pertencentes ao núcleo do feixe e permite que a equação (4.15) seja reexpressa da seguinte forma

$$n_c(R) = \begin{cases} (1 - f)N_b/\pi r_c^2, & \text{para } 0 \leq R \leq r_c \\ 0, & \text{para } r_c < R \leq r_w \end{cases} \quad (4.18)$$

A investigação do comportamento dinâmico do feixe através de quantidades médias de sua densidade permite caracterizar as regiões nas quais as partículas do núcleo e do halo estão presentes por apenas uma variável — a fração de partículas f — ao invés das duas outras anteriores, N_c/N_b e N_h/N_b . Observe que, no equilíbrio, a fração f deve ser aproximadamente constante, uma vez que N_h também o é, conforme já constatado na Figura 11. No entanto, certamente, para instantes anteriores ao alcance do estado de equilíbrio, f será uma função da coordenada axial s . Esta dependência da fração f com relação à coordenada axial s será explorada na Seção 4.5.

A região curva na qual as partículas do halo residem pode ser delimitada no espaço de fase por duas funções, uma interna, denominada de $r'_i(R)$, e outra externa, denominada de $r'_f(R)$. Estas duas funções estão indicadas na Figura 12b. Determinados os seus limites, formalmente uma densidade linear de partículas para a região do halo pode ser expressa por

$$\lambda_h(R) = \int_{r'_i}^{r'_f} \sigma(R, R') dR', \quad (4.19)$$

na qual $\sigma(R, R')$ é definida como a densidade de partículas na região curva do espaço de fase pertencente ao halo. Como uma aproximação, ao averiguar-se a Figura 12b, pode-se considerar que

$$\sigma(R, R') \approx \text{constante} = \sigma. \quad (4.20)$$

Logo, inserindo esta última na equação (4.19) e considerando que $r'_i(R)$ e $r'_f(R)$ representam curvas no 1º quadrante do espaço de fase, o qual segundo a Figura 12b é aproximadamente simétrico com relação ao eixo da coordenada radial R , obtém-se a forma simplificada

$$\lambda_h(R) \approx 2\sigma \left(r'_f(R) - r'_i(R) \right), \quad (4.21)$$

a qual depende única e exclusivamente das funções que delimitam a região curva do halo no 1º quadrante do espaço de fase, dadas por $r'_i(R)$ e $r'_f(R)$. Ou seja, a densidade linear de partículas λ_h depende única e exclusivamente da geometria no espaço de fase atribuída à região curva.

Entretanto, observe que a equação (4.21) representa uma densidade linear de partículas para o halo, sendo inadequada à solução da versão radial da equação de Poisson radial (2.5). Deve-se efetuar então uma conversão nesta expressão. Como representam a mesma região do espaço de fase, tanto a densidade de partículas linear λ_h quanto a superficial n_h devem conservar a quantidade infinitesimal de partícula $dN_h(R)$ quando um elemento diferencial de, respectivamente, seu comprimento ou sua área sejam considerados. Desta forma, com vistas à simetria azimutal do problema, tem-se que, de forma absolutamente geral, tanto para densidades que descrevam partículas que compõem o núcleo e o halo do feixe

$$n_\alpha(R) \cdot 2\pi R dR = \lambda_\alpha(R) \cdot dR = dN_\alpha(R) \text{ para } \alpha = \{c, h\}. \quad (4.22)$$

Para $\alpha = h$, insalando-se n_h na equação logo acima e inserindo na expressão resultante a equação (4.21), obtém-se como formato final

$$n_h(R) = \frac{\sigma}{\pi R} \left(r'_f(R) - r'_i(R) \right), \quad (4.23)$$

na qual a dependência inversa da quantidade envolvendo a coordenada radial $2\pi R$ surge como o fator de conversão entre a densidade linear λ_h e a densidade superficial n_h .

De forma geral, independente do formato da densidade n_h , a qual será determinada nas próximas seções, expressões para o raio quadrático médio $\langle \mathbf{R}_\perp^2 \rangle$ e para a velocidade quadrática média $\langle \mathbf{V}_\perp^2 \rangle$ no equilíbrio, quando $s \geq \tau$, podem também ser obtidas. Igualmente ao estado não-estacionário, estas expressões são fundamentais para, respectivamente, determinar a energia potencial média e a energia cinética média armazenadas pelas partículas do feixe em seu estado estacionário. Por outro lado, com relação à energia armazenada no campo elétrico no equilíbrio $\mathcal{E}(s \geq \tau)$, nenhuma expressão geral poderá ser antecipadamente obtida. Isto ocorre pois, para a determinação dos campos elétricos, deve-se antes resolver a versão radial da equação de Poisson (2.5), a qual necessariamente depende da atribuição explícita de uma expressão para $n_h(s \geq \tau)$.

O raio quadrático médio $\langle \mathbf{R}_\perp^2 \rangle(s \geq \tau)$ no equilíbrio pode ser facilmente determinado inserindo a densidade estacionária obtida $n_b(R, s \geq \tau)$ da equação (4.12) na definição de média no espaço de fase presente na equação (2.1). Assim procedendo, obtém-se que

$$\langle \mathbf{R}_\perp^2 \rangle(s \geq \tau) = \frac{1}{N_b} \left(\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r_c} R dR R^2 n_c + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r_h} R dR R^2 n_h \right), \quad (4.24)$$

expressão esta absolutamente geral, válida para qualquer densidade de partículas do halo n_h que virá a ser modelada nas próximas seções.

No equilíbrio, em uma nova aproximação, pode-se desprezar as variações axiais de algumas quantidades. Objetivando a simplificação dos cálculos a serem efetuados nas próximas seções para o equacionamento da energia média total do feixe E_{\perp} , pode-se aplicar tal aproximação ao raio RMS do feixe R_b . Desta forma, considerando no equilíbrio

$$dR_b(s \geq \tau)/ds \cong 0 \quad (4.25)$$

e inserindo esta condição na equação para o raio quadrático médio (2.35), tendo em vista os critérios de reescalonamento (4.4) juntamente com a condição de simetria azimutal (3.1), resulta que

$$-r_b^4(s \geq \tau) + r_b^2(s \geq \tau) + \epsilon^2(s \geq \tau) = 0, \quad (4.26)$$

na qual também foi utilizada a relação entre o envelope e o raio RMS do feixe exposta na equação (3.8). Da mesma forma, aplicando a condição (4.25) na equação para o quadrado da emitância (2.34), tendo em vista a relação (3.8), tem-se que

$$\epsilon^2(s \geq \tau) = 2r_b^2(s \geq \tau)\langle \mathbf{V}_{\perp}^2 \rangle(s \geq \tau). \quad (4.27)$$

Isolando o termo envolvendo a emitância $\epsilon(s)$ na equação (4.26), inserindo a expressão obtida na equação (4.27) e resolvendo a expressão resultante para $\langle \mathbf{V}_{\perp}^2 \rangle(s \geq \tau)$ é constatado que

$$\langle \mathbf{V}_{\perp}^2 \rangle(s \geq \tau) = \frac{r_b^2(s \geq \tau) - 1}{2}. \quad (4.28)$$

Observe que a velocidade quadrática média $\langle \mathbf{V}_{\perp}^2 \rangle(s \geq \tau)$ — no equilíbrio — depende diretamente do envelope do feixe r_b , o qual, mediante a relação (3.8), é função do raio RMS do feixe $\langle \mathbf{R}_{\perp}^2 \rangle(s \geq \tau)$. Portanto, ao observar a equação (4.24), conclui-se que uma vez determinada a expressão para a densidade de partículas do halo n_h , pode-se imediatamente então calcular tanto $\langle \mathbf{R}_{\perp}^2 \rangle(s \geq \tau)$ quanto $\langle \mathbf{V}_{\perp}^2 \rangle(s \geq \tau)$, uma vez que n_c já foi quantificada.

Por final, de forma absolutamente geral, uma expressão para a energia média total E_{\perp} também pode ser formalmente equacionada, independentemente da atribuição explícita de uma expressão para n_h . Inserindo as equações (3.8) e (4.28) na equação de conservação de energia (4.1), tendo em vista o reescalonamento (4.4) adotado, tem-se que, no equilíbrio

$$\frac{r_b^2(s \geq \tau)}{2} - \frac{1}{4} + \mathcal{E}_F(s \geq \tau) = E_{\perp}(s \geq \tau) = E_{\perp}. \quad (4.29)$$

Nesta expressão, tanto o envelope $r_b(s \geq \tau)$ quanto a energia média armazenada no campo elétrico $\mathcal{E}_F(s \geq \tau)$ são funções da densidade de partículas do halo n_h . Ou seja, somente podem ser determinadas caso uma expressão seja designada a n_h .

Nas seções posteriores, as expressões obtidas para representar a densidade n_h serão apresentadas. Para tanto, invocar-se-á a particularidade de a região curva na qual as partículas que compõe o halo se encontram possuir uma geometria bem definida, possibilitando que as funções $r'_i(R)$ e $r'_f(R)$ sejam equacionadas. Na Seção 4.2.1, se atribuirá um caráter semicircular à região curva,^{45,46,47} consideração esta que implicará no modelo denominado neste Capítulo de circular n_h^c

para a densidade do halo. De outro modo, na Seção 4.2.2 será atribuído um aspecto semi-elíptico,⁴⁷ proporcionando o modelo denominado à frente de elíptico n_h^e para a densidade do halo. Este último modelo, como se verificará nesta Seção, é mais geral uma vez que melhor representa a região curva para vários valores de descasamento inicial r_o . No caso limite, este último se reduz ao modelo circular. Nestas duas seções, para cada modelo de densidade n_h , será realizado procedimento análogo ao executado ao estado inicial, obtendo-se as equações no equilíbrio para o raio RMS $\langle \mathbf{R}_\perp^2 \rangle$, para a velocidade quadrática média $\langle \mathbf{V}_\perp^2 \rangle$ e para a energia média armazenada no campo elétrico \mathcal{E}_F . Com estas quantidades, torna-se possível então obter uma expressão para a energia média total E_\perp armazenada no feixe em função dos parâmetros r_c , r_h , r_w e f que caracterizam o estado estacionário.

4.2.1 Aproximação semicircular

Do ponto de vista geométrico, conforme se observa na Figura 12b, a região curva na qual as partículas do halo residem pode ser aproximadamente delimitada por dois semicírculos concêntricos, um interno designado no espaço de fase pelas coordenadas $r'_i(R)$ e R , e outro externo, demarcado por coordenadas $r'_f(R)$ e R . Para o semicírculo interno, tem-se a seguinte equação para o 1º quadrante

$$\rho_i = \sqrt{r_i'^2 + R^2}, \quad (4.30)$$

na qual ρ_i é o raio do semicírculo interno no espaço de fase, uma constante na aproximação geométrica em questão. Da mesma forma, para o semicírculo externo, a seguinte equação pode ser designada

$$\rho_f = \sqrt{r_f'^2 + R^2}, \quad (4.31)$$

sendo agora ρ_f o raio do semicírculo externo no espaço de fase, também uma constante. Como os semicírculos são concêntricos, a distância radial no espaço de fase entre ambos é uma constante, de tal forma que, para qualquer coordenada radial R , a equação

$$\rho_f - \rho_i \approx w \quad (4.32)$$

deve ser satisfeita. A quantidade w é definida como a espessura radial no espaço de fase da região curva na qual se encontram partículas provenientes do halo. Constate que a informação contida na equação (4.32) é uma aproximação decorrente diretamente da atribuição de funções semicirculares a r'_i e r'_f para descrição da região curva do espaço de fase na qual se encontram as partículas do halo.

Importante avanço se atinge ao identificar que, quando a função r'_i intercepta o eixo R , obtém-se a grandeza definida anteriormente na Seção 4.2 como o tamanho do halo r_h . Matematicamente

$$r'_i(R \equiv r_h) = 0, \quad (4.33)$$

definição esta que naturalmente torna-se extensível para qualquer coordenada R uma vez que $\rho_i = \text{constante}$, devido à geometria semicircular nesta Seção imposta.

Isolando r'_i na expressão (4.30) tendo em vista o recente resultado presente na equação (4.33), obtém-se

$$r'_i(R) = \sqrt{r_h^2 - R^2}. \quad (4.34)$$

Em raciocínio semelhante, resolvendo a equação (4.31) para r'_f bem como a equação (4.32) para ρ_f , fundindo os dois resultados e considerando a definição (4.33) tem-se que

$$r'_f(R) = \sqrt{(r_h + w)^2 - R^2}. \quad (4.35)$$

Considerando que w seja uma quantidade muito pequena, pode-se expandir a equação (4.35) por séries de Taylor até segunda ordem nesta quantidade, obtendo-se

$$r'_f(R) \approx \sqrt{r_h^2 - R^2} + w \cdot \frac{r_h}{\sqrt{r_h^2 - R^2}}. \quad (4.36)$$

Prontamente, através dos últimos resultados, pode-se então determinar a densidade de partículas que compõe o halo na aproximação semicircular da região curva do espaço de fase. Inserindo as equações (4.34) e (4.36) na equação (4.23) atinge-se

$$n_h^c(R) = \frac{\sigma w r_h}{\pi R \sqrt{r_h^2 - R^2}}, \quad (4.37)$$

a qual depende de constantes que caracterizam a região curva do espaço de fase na qual estão as partículas do halo, como a sua densidade de partículas σ , a sua espessura radial w e o seu tamanho projetado r_h sobre o eixo R . No entanto, o produto destas constantes pode ser relacionada com o número de partículas N_h do halo mediante inserção da equação (4.37) na equação (4.14). Assim procedendo, surge que

$$N_h = \sigma w r_h \pi. \quad (4.38)$$

Resolvendo esta equação para $\sigma w r_h$ e inserindo o resultado na expressão (4.37) obtida para n_h^c conduz a

$$n_h^c(R) = \frac{N_h}{\pi^2 R \sqrt{r_h^2 - R^2}}, \quad (4.39)$$

a qual, devido à definição (4.16) para a fração f , permite o seguinte formato final para a densidade de partículas que compõe o halo do feixe

$$n_h^c(R) = \frac{f N_b}{\pi^2 R \sqrt{r_h^2 - R^2}}. \quad (4.40)$$

Pode-se observar que n_h^c torna-se função apenas de um parâmetro que ainda não foi quantificado, a fração f de partículas do halo, quantidade esta que deverá ser determinada na Seção 4.4. Observe que se $R \rightarrow r_h$, a densidade $n_h^c \rightarrow \infty$, característica esta decorrente da atribuição do formato semicircular às funções r_i' e r_f' .

Em analogia ao procedimento adotado no estado inicial não-estacionário, obtidas as expressões para a densidade de partículas que perfaz a população do núcleo do feixe (4.15) e a população do halo (4.40), pode-se então determinar as grandezas importantes que quantificam o estado final estacionário do feixe. O campo elétrico interno ao canal de confinamento pode ser imediatamente obtido inserindo as expressões (4.18) e (4.40) em (4.12) e, esta última, na equação de Poisson (2.5). Resolvendo a expressão resultante para E_r obtém-se

$$E_r(R, s \geq \tau) \equiv E_{r\tau} = \begin{cases} E_{r\tau,0-c}^c = -\frac{(1-f)R}{r_c^2} - \frac{2f}{\pi R} \arctan\left(\frac{R}{\sqrt{r_h^2 - R^2}}\right), & \text{para } 0 \leq R \leq r_c \\ E_{r\tau,c-h}^c = -\frac{2f}{\pi R} \arctan\left(\frac{R}{\sqrt{r_h^2 - R^2}}\right) - \frac{(1-f)}{R}, & \text{para } r_c < R \leq r_h \\ E_{r\tau,h-w}^c = -\frac{1}{R}, & \text{para } r_h < R \leq r_w \end{cases}, \quad (4.41)$$

na qual $E_{r\tau,0-c}^c$, $E_{r\tau,c-h}^c$ e $E_{r\tau,h-w}^c$ são os campos elétricos existentes, respectivamente, na região do núcleo do feixe, no halo do feixe e no vácuo. Uma das constantes de integração pode ser eliminada mediante a condição de finitude do campo elétrico $E_r(R, s \geq \tau)$ em $R = 0$. As outras duas são determinadas mediante a continuidade de $E_r(R, s \geq \tau)$ nas interfaces em $R = r_c$ e $R = r_h$.

A energia média armazenada nos campos elétricos do estado estacionário final do feixe pode ser então sem detença lograda como segue. Inserindo a expressão (4.41) na equação (2.22) tem-se que

$$\mathcal{E}_F(s \geq \tau) \equiv \mathcal{E}_\tau = \frac{1}{2} \left(\int_0^{r_c} |E_{r\tau,0-c}^c|^2 R dR + \int_{r_c}^{r_h} |E_{r\tau,c-h}^c|^2 R dR \right) + \frac{1}{2} \ln(r_w) - \frac{1}{2} \ln(r_h), \quad (4.42)$$

na qual as integrais contendo os campos elétricos na região do núcleo $E_{r\tau,0-c}^c$ e na região do halo $E_{r\tau,c-h}^c$ permanecem indicadas, por simplicidade. Embora estas integrais possam ser certamente resolvidas numericamente, talvez uma solução analítica exata não exista. Este assunto será abordado em detalhe na conexão entre o estado não-estacionário com o estacionário do feixe presente na Seção 4.3, quando uma metodologia de solução para as integrais acima deverá obrigatoriamente ser adotada para o equacionamento da fração f de partículas do halo.

Resta então determinar as energias potencial média e cinética média armazenadas pelas partículas do feixe em seu estado estacionário, as quais são proporcionais, respectivamente, aos termos $\langle \mathbf{R}_\perp^2 \rangle$ e $\langle \mathbf{V}_\perp^2 \rangle$, já genericamente equacionados na Seção 4.2. O raio quadrático médio

$\langle \mathbf{R}_\perp^2 \rangle(s \geq \tau)$ pode ser determinado inserindo as densidades, recentemente obtidas para as partículas do núcleo (4.15) e do halo (4.39) na aproximação semicircular, na equação (4.24). Assim procedendo, tem-se que

$$\langle \mathbf{R}_\perp^2 \rangle(s \geq \tau) = R_b^2(s \geq \tau) = \frac{1}{N_b} \cdot \frac{N_c r_c^2}{2} + \frac{1}{N_b} \cdot \frac{N_h r_h^2}{2}. \quad (4.43)$$

Esta expressão pode ser então reescrita em termos da fração f de partículas. Inserindo, nesta última equação, as equações (4.16) e (4.17) observa-se que

$$\langle \mathbf{R}_\perp^2 \rangle(s \geq \tau) = R_b^2(s \geq \tau) = \frac{(1-f)}{2} r_c^2 + \frac{f}{2} r_h^2. \quad (4.44)$$

Considerando a relação (3.8) entre o envelope e o raio RMS do feixe, tem-se que a equação logo acima se simplifica a

$$r_b^2(s \geq \tau) = (1-f)r_c^2 + fr_h^2, \quad (4.45)$$

na qual prontamente observa-se que, no equilíbrio da aproximação circular, o envelope r_b pode ser expresso por uma simples combinação linear dos parâmetros do espaço de fase r_c e r_h , os quais já foram definidos anteriormente na Seção 4.2.

Inserindo a equação (4.45) para $r_b^2(s \geq \tau)$ na equação (4.28) obtida anteriormente para a $\langle \mathbf{V}_\perp^2 \rangle(s \geq \tau)$ prontamente observa-se que

$$\langle \mathbf{V}_\perp^2 \rangle(s \geq \tau) = \frac{(1-f)r_c^2 + fr_h^2 - 1}{2}, \quad (4.46)$$

sendo a expressão final para a descrição da energia cinética média $\langle \mathbf{V}_\perp^2 \rangle$ no equilíbrio obtido através da aproximação circular.

Uma vez determinada as expressões para a energia média armazenada no campo elétrico $\mathcal{E}_F(s \geq \tau)$, para o envelope do feixe $r_b(s \geq \tau)$ e para a velocidade quadrática média $\langle \mathbf{V}_\perp^2 \rangle(s \geq \tau)$, pode-se então equacionar a energia média total no estado estacionário. Inserindo as equações (4.42), (4.45) e (4.46) na equação (4.29) obtém-se

$$\frac{(1-f)r_c^2 + fr_h^2}{2} - \frac{1}{4} + \mathcal{E}_\tau = E_\perp(s \geq 0) = E_\perp, \quad (4.47)$$

a qual representa a energia média total armazenada no estado de equilíbrio do feixe, inerente às partículas e aos campos elétricos autoconsistentemente gerados nele presentes. Por compactação, a energia média do campo elétrico no equilíbrio (4.42) foi expressa simplesmente por \mathcal{E}_τ . Pode-se constatar que no estado estacionário a energia E_\perp depende do tamanho do núcleo do feixe r_c , do tamanho do halo r_h e da fração f de partículas do halo. Observe que o termo dependente de r_w , o qual se encontra dentro da quantidade \mathcal{E}_τ , possui o mesmo formato que o presente no estado inicial.

Na próxima Seção, será apresentada a densidade para o halo no âmbito da aproximação semi-elíptica imposta à região curva no espaço de fase na qual as partículas quentes residem.

4.2.2 Aproximação semi-elíptica

Conforme se observa na Figura 12b, a geometria mais adequada para descrição da região curva do espaço de fase na qual as partículas do halo residem é a semi-elíptica. Esta região, tal qual o caso semicircular, pode ser aproximadamente delimitada por duas semi-elipses concêntricas, uma interna designada pelas coordenadas $r'_i(R)$ e R , e outra externa, demarcada pelas coordenadas $r'_f(R)$ e R . Para a semi-elipse interna, tem-se, para o 1º quadrante, a seguinte equação

$$1 = \sqrt{\frac{r'^2_i}{\rho_i'^2} + \frac{R^2}{\rho_i^2}}, \quad (4.48)$$

na qual ρ'_i e ρ_i são os raios da semi-elipse interna alinhados respectivamente com os eixos dR/ds e R , os quais são constantes. Da mesma forma, para a semi-elipse externa

$$1 = \sqrt{\frac{r'^2_f}{\rho_f'^2} + \frac{R^2}{\rho_f^2}}, \quad (4.49)$$

sendo agora ρ'_f e ρ_f os raios da semi-elipse externa alinhados respectivamente com os eixos dR/ds e R , também quantidades constantes. Como as semi-elipses são concêntricas, a distância radial no espaço de fase entre ambas é uma constante, de tal forma que, para qualquer coordenada radial R , a equação

$$\rho_f - \rho_i = \rho'_f - \rho'_i \approx w \quad (4.50)$$

deve ser satisfeita. A quantidade w representa a espessura radial no espaço de fase da região curva na qual se encontram partículas provenientes do halo, previamente já definida na Seção 4.2.1. Constate que a informação contida na equação (4.50) é uma aproximação decorrente diretamente da atribuição de funções semi-elípticas a r'_i e r'_f para descrição da região curva do espaço de fase na qual se encontram as partículas do halo.

Avanço adicional é atingido identificando-se que, quando a função r'_i intercepta o eixo dR/ds , obtém-se a grandeza aqui definida de r'_h . Matematicamente

$$r'_i(R = 0) = r'_h, \quad (4.51)$$

Isolando r'_i na expressão (4.48) tendo em vista o recente resultado presente na equação (4.51) e a definição (4.33) anteriormente obtida para r_h constata-se que

$$r'_i(R) = r'_h \sqrt{1 - \frac{R^2}{r_h'^2}}, \quad (4.52)$$

Semelhantemente, resolvendo a equação (4.49) para r'_f bem como a equação (4.50) para ρ_f e ρ'_f , unindo os dois resultados e considerando as definições (4.33) e (4.51) tem-se que

$$r'_f(R) = (r'_h + w) \sqrt{1 - \frac{R^2}{(r_h + w)^2}}. \quad (4.53)$$

Considerando que w seja uma quantidade muito pequena, pode-se expandir a equação (4.53) por séries de Taylor até segunda ordem nesta quantidade, obtendo-se

$$r_f'(R) \approx r_h' \sqrt{1 - \frac{R^2}{r_h'^2}} + w \cdot \frac{1 + \frac{R^2}{r_h'^2} \left(\frac{r_h'}{r_h} - 1 \right)}{\sqrt{1 - \frac{R^2}{r_h'^2}}}. \quad (4.54)$$

Por meio dos últimos resultados, torna-se possível então determinar a densidade de partículas que compõe o halo na aproximação semi-elíptica da região curva do espaço de fase. Inserindo as equações (4.52) e (4.54) na equação (4.23) e rearranjando o denominador da expressão obtida resulta em

$$n_h^e(R) = \sigma w r_h \cdot \frac{1 + \frac{R^2}{r_h'^2} \left(\frac{r_h'}{r_h} - 1 \right)}{\pi R \sqrt{r_h'^2 - R^2}}, \quad (4.55)$$

a qual depende, além das constantes σ , w e r_h que caracterizam a região curva do espaço de fase na qual as partículas do halo estão, também agora da constante r_h' , a qual quantifica a projeção da região curva sobre o eixo dR/ds . Portanto, na aproximação semi-elíptica, surge um novo parâmetro no modelo quando em comparação com o caso semicircular, o qual permite maior fidedignidade na descrição da região curva, visto que há uma maior proximidade com a geometria real modelada.

Tal qual a aproximação semicircular, as constantes acima comentadas podem ser relacionadas com o número de partículas N_h do halo. Inserindo a equação (4.55) na equação (4.14)

$$N_h = \frac{\sigma w \pi}{2} (r_h + r_h'). \quad (4.56)$$

Resolvendo esta equação para σw e inserindo o resultado na expressão (4.55) obtida conduz a

$$n_h^e(R) = \frac{2N_h}{(r_h + r_h')} r_h \cdot \frac{1 + \frac{R^2}{r_h'^2} \left(\frac{r_h'}{r_h} - 1 \right)}{\pi^2 R \sqrt{r_h'^2 - R^2}}, \quad (4.57)$$

a qual, devido à definição (4.16) para a fração f e ao efetuar-se algumas simplificações e expansões pode ser reescrita por

$$n_h^e(R) = \frac{2f N_b r_h}{\pi^2 R (r_h + r_h') \sqrt{r_h'^2 - R^2}} + \frac{2f N_b (r_h' - r_h) R}{\pi^2 r_h'^2 (r_h + r_h') \sqrt{r_h'^2 - R^2}}. \quad (4.58)$$

Observe que a densidade acima obtida na aproximação semi-elíptica para as partículas do halo se simplifica àquela calculada na aproximação semicircular quando $r_h' \rightarrow r_h$. Contudo, adicionalmente, no modelo em questão, pode-se observar que n_h^e torna-se função também de um novo parâmetro r_h' que caracteriza o espaço de fase do feixe no equilíbrio. Semelhantemente ao caso semicircular,

quando $R \rightarrow r_h$, a densidade $n_h^e \rightarrow \infty$, característica esta também decorrente da atribuição de um formato semi-elíptico às funções r_i' e r_f' .

Analogamente ao procedimento empregado na aproximação semicircular do estado estacionário, obtidas as expressões para a densidade de partículas que constitui a população do núcleo do feixe (4.18) e a população do halo (4.58) na aproximação semi-elíptica, pode-se então determinar as grandezas importantes que quantificam o estado final estacionário do feixe. Inserindo as equações (4.18) e (4.58) na (4.12), substituindo a expressão resultante na versão radial da equação de Poisson (2.5) e resolvendo para a componente radial do campo elétrico E_r obtém-se

$$E_r(R, s \geq \tau) \equiv E_{r\tau} = \begin{cases} E_{r\tau,0-c}^e = E_{r\tau,0-c}^c - \frac{2f(r_h - r_h') \sqrt{r_h^2 - R^2}}{\pi r_h^2 (r_h + r_h')}, & \text{para } 0 \leq R \leq r_c \\ E_{r\tau,c-h}^e = E_{r\tau,c-h}^c - \frac{2f(r_h - r_h') \sqrt{r_h^2 - R^2}}{\pi r_h^2 (r_h + r_h')}, & \text{para } r_c < R \leq r_h \\ E_{r\tau,h-w}^e = E_{r\tau,h-w}^c, & \text{para } r_h < R \leq r_w \end{cases}, \quad (4.59)$$

na qual $E_{r\tau,0-c}^e$, $E_{r\tau,c-h}^e$ e $E_{r\tau,h-w}^e$ são os campos elétricos existentes, respectivamente, na região do núcleo do feixe, do halo do feixe e do vácuo na aproximação semi-elíptica. As quantidades $E_{r\tau,0-c}^c$, $E_{r\tau,c-h}^c$ e $E_{r\tau,h-w}^c$ são os campos elétricos já calculados na aproximação semicircular e presentes na equação (4.41). Da mesma forma que no caso semicircular, as constantes de integração podem ser determinadas mediante a condição de finitude do campo elétrico $E_r(R, s \geq \tau)$ em $R = 0$ e a sua continuidade nas interfaces em $R = r_c$ e $R = r_h$.

A energia média armazenada nos campos elétricos do estado estacionário final do feixe pode ser então obtida. Inserindo a expressão (4.59) na equação (2.22) tem-se que

$$\mathcal{E}_F(s \geq \tau) \equiv \mathcal{E}_\tau = \frac{1}{2} \left(\int_0^{r_c} |E_{r\tau,0-c}^e|^2 R dR + \int_{r_c}^{r_h} |E_{r\tau,c-h}^e|^2 R dR \right) + \frac{1}{2} \ln(r_w) - \frac{1}{2} \ln(r_h), \quad (4.60)$$

na qual as integrais contendo os campos elétricos na região do núcleo $E_{r\tau,0-c}^e$ e na região do halo $E_{r\tau,c-h}^e$ permanecem indicadas, por simplicidade. Note que, a menos da diferença dos campos na região do núcleo e do halo do feixe, a expressão possui o mesmo formato que a obtida na equação (4.42) para o caso semicircular. O seu procedimento de solução será apresentado na Seção 4.3, propiciando o equacionamento da fração f de partículas do halo.

Deve-se ainda determinar o raio quadrático médio $\langle \mathbf{R}_\perp^2 \rangle$ e a velocidade média $\langle \mathbf{V}_\perp^2 \rangle$. Isto permitirá que, respectivamente, a energia potencial média e energia cinética média armazenada pelas partículas do feixe em seu estado estacionário sejam quantificadas na aproximação semi-elíptica. Estas expressões devem diferir substancialmente do caso semicircular, uma vez que, na aproximação semi-elíptica há a presença de um termo adicional na densidade obtida para as partículas do halo. O raio quadrático médio $\langle \mathbf{R}_\perp^2 \rangle (s \geq \tau)$ pode ser determinado inserindo as

densidades para as partículas do núcleo (4.15) e do halo (4.57) na aproximação semi-elíptica, na equação (4.24). Assim procedendo, tem-se que

$$\langle \mathbf{R}_\perp^2 \rangle (s \geq \tau) = R_b^2 (s \geq \tau) = \frac{1}{N_b} \cdot \frac{N_c r_c^2}{2} + \frac{1}{N_b} \cdot \frac{(3r_h' + r_h) N_h r_h^2}{2(r_h' + r_h) 2}. \quad (4.61)$$

Esta expressão pode ser então reescrita em termos da fração f de partículas. Inserindo, nesta última equação, as equações (4.16) e (4.17) observa-se que

$$\langle \mathbf{R}_\perp^2 \rangle (s \geq \tau) = R_b^2 (s \geq \tau) = \frac{(1-f)}{2} r_c^2 + \frac{f(3r_h' + r_h)}{2 \cdot 2(r_h' + r_h)} r_h^2. \quad (4.62)$$

Considerando a relação (3.8) entre o envelope e o raio RMS do feixe, tem-se que a equação logo acima se simplifica a

$$r_b^2 (s \geq \tau) = (1-f)r_c^2 + f \frac{(3r_h' + r_h)}{2(r_h' + r_h)} r_h^2, \quad (4.63)$$

na qual prontamente observa-se que, no equilíbrio da aproximação semi-elíptica, o envelope r_b depende adicionalmente do parâmetro r_h' , além de r_c e r_h , já presentes na aproximação semicircular.

Inserindo a equação (4.63) para $r_b^2 (s \geq \tau)$ na equação (4.28) obtida anteriormente para a $\langle \mathbf{V}_\perp^2 \rangle (s \geq \tau)$ imediatamente observa-se que

$$\langle \mathbf{V}_\perp^2 \rangle (s \geq \tau) = \frac{(1-f)r_c^2 + f \frac{(3r_h' + r_h)}{2(r_h' + r_h)} r_h^2 - 1}{2}, \quad (4.64)$$

sendo a expressão final para a descrição da energia cinética média $\langle \mathbf{V}_\perp^2 \rangle$ no equilíbrio obtida através da aproximação semi-elíptica.

Uma vez determinada as expressões para a energia média armazenada no campo elétrico $\mathcal{E}_F (s \geq \tau)$, para o envelope $r_b (s \geq \tau)$ e para a velocidade quadrática média $\langle \mathbf{V}_\perp^2 \rangle (s \geq \tau)$, pode-se então equacionar a energia média total no estado estacionário. Inserindo as equações (4.60), (4.63) e (4.64) na equação (4.29) obtém-se

$$\frac{(1-f)r_c^2 + f \frac{(3r_h' + r_h)}{2(r_h' + r_h)} r_h^2}{2} - \frac{1}{4} + \mathcal{E}_\tau = E_\perp (s \geq 0) = E_\perp, \quad (4.65)$$

a qual representa a energia média total armazenada no estado de equilíbrio do feixe, pertencente às partículas e aos campos elétricos autoconsistentemente gerados nele presentes. Por compactação, a energia média do campo elétrico no equilíbrio (4.60) foi expressa simplesmente por \mathcal{E}_τ . Pode-se constatar que no estado estacionário a energia E_\perp depende do tamanho do núcleo do feixe r_c , dos raios das elipses r_h e r_h' na qual residem as partículas do halo e da fração f de partículas do halo. Observe que o termo dependente de r_w , o qual se encontra dentro da quantidade \mathcal{E}_τ , possui o mesmo formato que o presente no estado inicial bem como no estado final na aproximação semicircular. Isto se deve ao fato de, externamente às fronteiras que delimitam um feixe com simetria azimutal, necessariamente, independentemente do caráter atribuído à densidade de

partículas, o campo elétrico será sempre descrito pela mesma expressão. Isto é decorrência direta da Lei de Gauss. Por final observe que as equações (4.55)-(4.65) se reduzem às suas equivalentes da Seção 4.2.1 na aproximação semicircular quando $r'_h = r_h$.

Na próxima Seção, será apresentada a conexão entre o estado inicial não-estacionário e o estado final estacionário, de equilíbrio. Observe que o feixe aqui abordado comporta-se como um sistema Hamiltoniano, sendo uma de suas quantidades conservadas do movimento a energia média total E_{\perp} . É este o vínculo que permitirá a união do estado inicial ao final. A conexão propiciará que, tanto numericamente como analiticamente, a fração f de partículas do halo seja equacionada como função dos parâmetros do espaço de fase do instante inicial, representado por r_o , e do instante final, de equilíbrio, representado por r_c , r_h e r'_h , em sua forma mais geral obtida através da aproximação semi-elíptica.

4.3 Conexão entre o estado final estacionário e o inicial não-estacionário

Após a descrição do estado inicial não-estacionário e do estado final estacionário, através dos modelos respectivamente apresentados nas seções 4.1 e 4.2, a conexão entre ambos torna-se direta. Devido à conservação de energia — $E_{\perp}(s = 0) = E_{\perp}(s \geq \tau) = E_{\perp}$ — unindo a equação (4.11) à (4.29) obtém-se de forma geral que

$$E_{\perp}(s = 0) = \frac{r_o^2}{4} - \frac{1}{2}\ln(r_o) + \frac{1}{2}\ln(r_w) + \frac{1}{8} = E_{\perp}(s \geq 0) = \frac{r_b^2(s \geq \tau)}{2} - \frac{1}{4} + \mathcal{E}_F(s \geq \tau). \quad (4.66)$$

Observe que nesta equação, as expressões para o envelope do feixe r_b e para a energia média \mathcal{E}_F armazenada no campo elétrico do equilíbrio podem assumir diferentes formatos, dependendo de qual aproximação — semicircular ou semi-elíptica — seja adotada para representação da região curva do espaço de fase na qual as partículas do halo se encontram.

Estritamente, note que conectar o estado não-estacionário ao estacionário consiste em relacionar o descasamento inicial r_o com os parâmetros que caracterizam o equilíbrio r_c , r_h e r'_h , em sua versão mais geral, referentes à aproximação semi-elíptica. Esta relação é efetuada mediante uma equação na qual a única variável presente é a fração f de partículas que compõe o halo. Note que os parâmetros do espaço de fase inicial e final r_o , r_c , r_h e r'_h são quantidades determináveis e previamente conhecidas. Portanto, apenas a equação (4.66) realmente torna-se suficiente para a obtenção da fração f de partículas que compõe o halo em cada uma das aproximações desenvolvidas na Seção anterior.

4.3.1 Aproximação semicircular

No âmbito da aproximação semicircular, inserindo a expressão (4.42) obtida para a energia média \mathcal{E}_F bem como a relação para o envelope do feixe (4.45) na última equação (4.66) tem-se que

$$\int_0^{r_c} |E_{r\tau,0-c}^c|^2 R dR + \int_{r_c}^{r_h} |E_{r\tau,c-h}^c|^2 R dR + f(r_h^2 - r_c^2) = \frac{r_o^2}{2} - r_c^2 + \ln\left(\frac{r_h}{r_o}\right) + \frac{3}{4}, \quad (4.67)$$

na qual os campos elétricos na região do núcleo $E_{r\tau,0-c}^c$ e na região do halo $E_{r\tau,c-h}^c$ constam discriminados na equação (4.41). Em conformidade com o que havia sido previamente comentado nas seções anteriores, pode-se constatar que nesta equação o termo dependente da coordenada radial r_w na qual o duto circular encontra-se posicionado desaparece. Isto se deve ao fato deste termo ser invariante para qualquer instante da dinâmica, independentemente da densidade n_b considerada, bastando apenas que a condição de simetria azimutal esteja presente. Nesta equação, os termos dependentes da fração f de partículas encontram-se arranjados no lado esquerdo enquanto os explicitamente dependentes dos parâmetros que caracterizam o estado não-estacionário e estacionário constam no lado direito.

Para obtenção de uma equação para a fração f de partículas do halo, deve-se resolver as integrais presentes na expressão (4.67). Observe que os seus integrandos dependem do quadrado do campo elétrico em cada região do feixe os quais, por sua vez, são proporcionais à fração f de partículas. Tendo em vista que r_o , r_c e r_h são quantidades conhecidas, determináveis *a priori* da resolução das equações em questão, então a dependência funcional de cada uma das integrais com relação a estes parâmetros pode ser inferida. Mais, devido ao tipo de dependência dos campos elétricos com relação à fração f , pode-se observar que, de forma absolutamente geral, a equação (4.67) possui um formato polinomial na variável em questão, a fração f . O termo de maior ordem neste polinômio será quadrático, uma vez que os integrandos dependem quadraticamente da amplitude do campo elétrico. Desta forma, a equação (4.67) pode ser diretamente representada por

$$A(r_c, r_h)f^2 + B(r_c, r_h)f + C(r_o, r_c, r_h) = 0, \quad (4.68)$$

na qual A , B e C são os coeficientes determinados resolvendo a equação (4.67) e agrupando os termos obtidos com relação ao grau da fração f . Embora uma expressão formal para A , B e C não tenha sido ainda obtida, a sua dependência funcional em relação aos parâmetros do espaço de fase inicial e final puderam ser explicitados pela simples inferência anteriormente enunciada. Este polinômio propicia duas soluções. Contudo, apenas uma destas possuirá significado físico, pois a fração f , de acordo com sua definição (4.16), deve satisfazer ainda $0 \leq f \leq 1$.

A obtenção de uma expressão explícita para os coeficientes A e B da equação (4.68) implica resolver analiticamente as integrais presentes na equação (4.67). Contudo, haja vista a complexidade de seus integrandos, os quais são dependentes do quadrado dos campos elétricos presentes na

equação (4.41), a obtenção de uma solução analítica exata é difícil senão impossível. No APÊNDICE C, uma aproximação sobre a expressão exata (4.41) para os campos elétricos na região do núcleo $E_{r\tau,0-c}^c$ e na região do halo $E_{r\tau,c-h}^c$ é efetuada, permitindo que após extensiva álgebra uma solução analítica quase-exata para a equação (4.67) seja viabilizada. Mediante o procedimento desenvolvido no APÊNDICE C, tem-se que os coeficientes A , B e C assumem as seguintes expressões⁵¹

$$\begin{aligned} A(r_c, r_h) &\approx \zeta(r_c, r_h) + \ln(r_c^2/r_h^2) + [72 \ln(2/3) + 24]/\pi^2 - 1/2 \\ B(r_c, r_h) &\approx -\zeta(r_c, r_h) - 2 \ln(r_c^2/r_h^2) + 1 + 2(r_c^2 - r_h^2) \\ C(r_o, r_c) &\approx 1 - 2r_c^2 + r_o^2 + \ln(r_c^2/r_o^2) \end{aligned} \quad (4.69)$$

nas quais a função ζ depende de r_c e r_h através da equação⁵¹

$$\begin{aligned} \zeta(r_c, r_h) = & - \left[\frac{48r_h^2\sqrt{3}}{\pi r_c^2} + \frac{16\sqrt{3}}{\pi} \right] \arctan \left[\frac{\sqrt{3}r_h}{3r_c} \left(1 + 2 \sqrt{1 - \frac{r_c^2}{r_h^2}} \right) \right] \\ & + \left[\frac{84r_h^2}{r_c^2} + \frac{24}{\pi} \right] \arcsin \left(\sqrt{1 - \frac{r_c^2}{r_h^2}} \right) + \frac{48 - 12 \sqrt{1 - \frac{r_c^2}{r_h^2}}}{\pi r_c/r_h} + \frac{24\sqrt{3} - 42}{r_c^2/r_h^2} + \frac{8\sqrt{3}}{2}. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Note que, devido à aproximação efetuada, a solução quase-exata para o coeficiente C não depende mais do tamanho do halo no equilíbrio r_h .

4.3.2 Aproximação semi-elíptica

Da mesma forma, no contexto da aproximação semi-elíptica, inserindo as equações (4.60) e (4.63) na equação (4.66) obtém-se

$$\int_0^{r_c} |E_{r\tau,0-c}^e|^2 R dR + \int_{r_c}^{r_h} |E_{r\tau,c-h}^e|^2 R dR + f \left[\frac{(3r_h' + r_h)}{2(r_h' + r_h)} r_h^2 - r_c^2 \right] = \frac{r_o^2}{2} - r_c^2 + \ln \left(\frac{r_h}{r_o} \right) + \frac{3}{4}, \quad (4.71)$$

sendo neste caso $E_{r\tau,0-c}^e$ e $E_{r\tau,c-h}^e$ respectivamente os campos elétricos na região do núcleo e na região do halo expostos na equação (4.59). Esta expressão, conforme esperado, torna-se também dependente da quantidade r_h' , necessária para a representação elíptica da região curva na qual se encontram partículas do halo. Note neste caso também a ausência de termos dependente da coordenada radial r_w do duto circular. Analogamente ao caso semicircular, os termos envolvendo a fração f constam agrupados à esquerda enquanto os termos dependentes explicitamente dos parâmetros do espaço de fase encontram-se a direita.

Por inferência, aplicando o mesmo procedimento adotado na aproximação semicircular, pode-se abstratamente representar a equação (4.71) através de um polinômio de segundo grau na fração f . Assim sendo, tem-se que

$$A(r_c, r_h, r_h') f^2 + B(r_c, r_h, r_h') f + C(r_o, r_c, r_h, r_h') = 0, \quad (4.72)$$

na qual A , B e C são os coeficientes obtidos resolvendo a equação (4.71) na aproximação semi-elíptica. Note que, neste caso, o parâmetro adicional r_h' consta em todos os coeficientes do

polinômio. Portanto, a elipsidade da região curva na qual as partículas do halo estão influencia todo o polinômio, corrigindo seus coeficientes e fornecendo uma descrição mais acurada nos casos em que este tipo de deformação da região do halo existe. Este polinômio também possui duas soluções, sendo somente uma fisicamente aceitável já que a fração f deve satisfazer $0 \leq f \leq 1$.

Conforme anteriormente comentado, as expressões para os campos elétricos (4.41) e (4.59), respectivamente na aproximação semicircular e semi-elíptica, possuem um formato relativamente complicado, dificultando a obtenção de uma expressão analítica exata para os coeficientes A , B e C . Este fato é exasperado ao se constar que a resolução das integrais das equações (4.67) e (4.71) dependem ainda do quadrado destes campos elétricos.

Contudo, numericamente as equações (4.67) e (4.71) podem ser facilmente resolvidas. Neste sentido, na próxima Seção o algoritmo para determinação da fração f para cada valor inicial de descasamento r_o será apresentado. Para tanto, serão utilizadas as expressões obtidas nesta Seção para f tanto na aproximação semicircular (4.67) quanto semi-elíptica (4.71) ao variar-se o descasamento inicial r_o . No caso circular em específico, serão apresentados adicionalmente os resultados obtidos através da solução quase-exata (4.69). Neste algoritmo, também estará presente o procedimento requerido para computar o envelope r_b e a emitância ϵ no equilíbrio. Para cada valor inicial de r_o , todo o procedimento será repetido de tal forma que sejam obtidos $f(r_o)$, $r_b(r_o)$ e $\epsilon(r_o)$. Por final, uma vez determinada $f(r_o)$, então as densidades n_c , n_h^c e n_h^e , descritas respectivamente pelas expressões (4.18), (4.40) e (4.58) no equilíbrio, serão comparadas com os resultados provenientes das simulações numéricas autoconsistentes, para cada um dos descasamentos iniciais r_o .

4.4 Determinação das quantidades de equilíbrio

A conexão anterior do estado inicial não-estacionário ao estado final estacionário permitiu que uma equação formal para a fração f de partículas fosse obtida. Embora os coeficientes A , B e C desta equação constem como dependentes, em sua forma mais geral obtida através da aproximação semi-elíptica, dos parâmetros r_o , r_c , r_h e r_h' , de fato fisicamente o único parâmetro livre é o descasamento inicial. A quantidade r_o agrega toda a informação inicial do feixe de partículas carregadas, já que o formato da densidade $n_b(s=0)$ é mantida invariante em todos os casos cuja análise é de interesse neste Capítulo. Ou seja, conquanto desconhecidas as relações, realmente

$$r_c = r_c(r_o), r_h = r_h(r_o) \text{ e } r_h' = r_h'(r_o), \quad (4.73)$$

condição esta que explicita r_o como o único parâmetro livre em investigação. Mais, esta equação permite salientar a relação de causa-efeito existente na dinâmica do feixe: tanto r_h e r_h' são não-

nulos como $r_c \neq r_o$ se $r_o \neq r_{bo} = 1$. Ou seja, os parâmetros que descrevem o estado de equilíbrio serão somente necessários se o seu agente precursor — o descasamento r_o — existir inicialmente. Ainda que o caos^{37,38,52} presente na dinâmica individual das partículas quentes que formam o halo seja determinante para que a equação (4.20) torne-se uma aproximação realística, a memória inicial dos parâmetros r_c , r_h e r'_h segundo r_o analiticamente permanece aos moldes descritos na equação (4.73). Esta é uma característica topológica da dinâmica do feixe em questão.

Contudo, a princípio, estas relações não são ainda determinadas, sendo necessário o desenvolvimento de um modelo específico para tanto. Desta forma, sem perda de consistência, os parâmetros gerais que descrevem o estado final r_c , r_h e r'_h , embora intrinsecamente funções de r_o , podem ser interpretados como independentes de r_o , sendo extraídos diretamente do espaço de fase do feixe quando no estado de equilíbrio.

Nesse sentido, os parâmetros r_o , r_c , r_h e r'_h são quantidades previamente conhecidas que devem ser inseridas nas equações (4.67) e (4.71), obtidas respectivamente na aproximação semicircular e semi-elíptica, para determinação da fração de partículas f do halo. Os parâmetros r_o , r_c , r_h e r'_h são assim entradas do procedimento de cálculo de f , quantidade esta imprescindível para a subseqüentemente avaliação do envelope r_b e da emitância ϵ no equilíbrio. Para cada valor desejado de descasamento inicial r_o , o algoritmo a ser seguido para a determinação das grandezas no estado estacionário resume-se a:

- 1) Do espaço de fase do feixe no equilíbrio, obter o tamanho do núcleo r_c . Mediante a equação (4.33), determinar o tamanho do halo r_h na aproximação semicircular. Na aproximação semi-elíptica, determinar adicionalmente r'_h através da equação (4.51);
- 2) Resolver as equações (4.67) e (4.71) respectivamente para obtenção da fração f de partículas do halo na aproximação semicircular e semi-elíptica. No caso da solução analítica quase-exata, resolver a equação (4.67) tendo em vista os coeficientes (4.69) e a equação auxiliar (4.70). Devendo a fração f estar compreendida no intervalo $0 \leq f \leq 1$, selecionar a raiz positiva destes polinômios de 2º grau;
- 3) Inserir cada um dos valores da fração f obtidos no passo 2 bem como os valores dos parâmetros r_c , r_h e r'_h obtidos no passo 1 nas equações (4.45) e (4.63) para respectivamente computar o envelope $r_b(s \geq \tau)$ na aproximação semicircular e na aproximação semi-elíptica;
- 4) Inserir os valores de $r_b(s \geq \tau)$ obtidos no passo anterior nas equações (4.46) e (4.64) para obtenção da velocidade quadrática média $\langle \mathbf{V}_\perp^2 \rangle(s \geq \tau)$ respectivamente na aproximação semicircular e semi-elíptica;

- 5) Finalmente, para determinação da emitância $\epsilon(s \geq \tau)$, inserir cada um dos valores obtidos no passo 3 para $r_b(s \geq \tau)$ e no passo 4 para $\langle \mathbf{V}_\perp^2 \rangle(s \geq \tau)$, através dos dois tipos de aproximações, na equação (4.27).

Os resultados de equilíbrio proporcionados pelos modelos desenvolvidos podem ser compactamente representados mediante 3 curvas distintas, funções do descasamento inicial r_o , sendo uma para a fração de partículas f , outra para o envelope do feixe r_b e outra para a emitância ϵ . Os valores escrutados de descasamento inicial estão compreendidos no intervalo $1 \leq r_o \leq 2$, discretizados em passos $\Delta r_o = 0,1$. Estes valores de descasamento são usuais no contexto experimental. Haja vista que quão mais o descasamento tenda ao valor de equilíbrio $r_o \rightarrow r_{bo} = 1$ a escala de decaimento do envelope do feixe tende à $\tau \rightarrow \infty$, simulações numéricas autoconsistentes para $r_o \leq 1,1$ tornam-se computacionalmente onerosas tanto em relação ao seu tempo de execução quanto ao conseqüente espaço físico necessário em disco rígido para armazenamento de seus dados gerados. Desta forma, para que a representação das curvas das quantidades de equilíbrio acima mencionadas não seja comprometida, os resultados obtidos para um feixe casado $r_o = 1,0$ foram estendidos também ao caso $r_o = 1,1$.

Para cada uma das curvas acima citadas, são apresentados os resultados obtidos através da resolução numérica dos modelos semicircular e semi-elíptico e através da solução analítica quase-exata do modelo circular. Para a validação do modelo, estas curvas também foram computadas mediante simulações numéricas autoconsistentes, cujo método já foi brevemente comentado no princípio desta Seção e é detalhadamente descrito no APÊNDICE A. A determinação da fração f mediante simulações numéricas autoconsistentes consiste em simplesmente quantificar diretamente no espaço de fase obtido o número de partículas que residem na região curva. Já o envelope r_b e a emitância ϵ simulados numericamente são computados mediante estatística sobre a densidade obtida no equilíbrio segundo, respectivamente, suas definições (3.8), com auxílio de (2.32), e (2.33). Os valores numéricos — obtidos através dos modelos e das simulações — de cada um dos pontos que compõe estas curvas constam nas tabelas presentes no APÊNDICE D. Nestas tabelas, estão expostos os valores dos parâmetros que caracterizam o estado de equilíbrio r_c e r_h na aproximação semicircular, e, na semi-elíptica, adicionalmente r'_h . Também nestas, os valores dos coeficientes A , B e C do polinômio obtido para a fração f são apresentados. Os resultados estão agrupados segundo a aproximação utilizada (semicircular ou semi-elíptica) e o método de solução (numérico ou analítico quase-exato), distinção esta estabelecida na coluna à esquerda. Os resultados providos pelas simulações numéricas autoconsistentes são registrados ao final destas tabelas.

Na Figura 14, Figura 15 e Figura 16 são apresentados os resultados obtidos respectivamente para as curvas f , r_b e ϵ no equilíbrio como função do descasamento inicial r_o . Note que, para qualquer valor de r_o e em qualquer tipo de aproximação, conforme o modelo aqui

proposto, o envelope $r_b(s \geq \tau)$ bem como a emitância $\epsilon(s \geq \tau)$ são funções da fração f de partículas do halo. Portanto, nesta abordagem, a fração f é a grandeza fundamental que descreve o equilíbrio. Ou seja, se o modelo desenvolvido representa realisticamente o caráter do feixe em seu estado estacionário, sendo as expressões (4.24) e (4.27) aproximações adequadas, então quanto mais fiéis os resultados modelados de f forem aos simulados, mais compatíveis também serão os resultados obtidos para $r_b(s \geq \tau)$ e $\epsilon(s \geq \tau)$, em ambos os casos. Qualquer discrepância entre os valores modelados e os simulados de f impactará diretamente em uma menor acuracidade na obtenção das quantidades de equilíbrio desejadas. A intensidade da influência em $r_b(s \geq \tau)$ e $\epsilon(s \geq \tau)$ de uma variação δf pode ser mensurada através de, respectivamente, suas derivadas $|\partial r_b(s \geq \tau)/\partial f|$ e $|\partial \epsilon(s \geq \tau)/\partial f|$. Considerando as equações (4.24) e (4.27), observa-se que esta influência é pequena, sendo o valor de $r_b(s \geq \tau)$ e $\epsilon(s \geq \tau)$ majoritariamente dependente dos parâmetros r_o , r_c , r_h e r_h' que caracterizam o espaço de fase inicial e final do feixe.

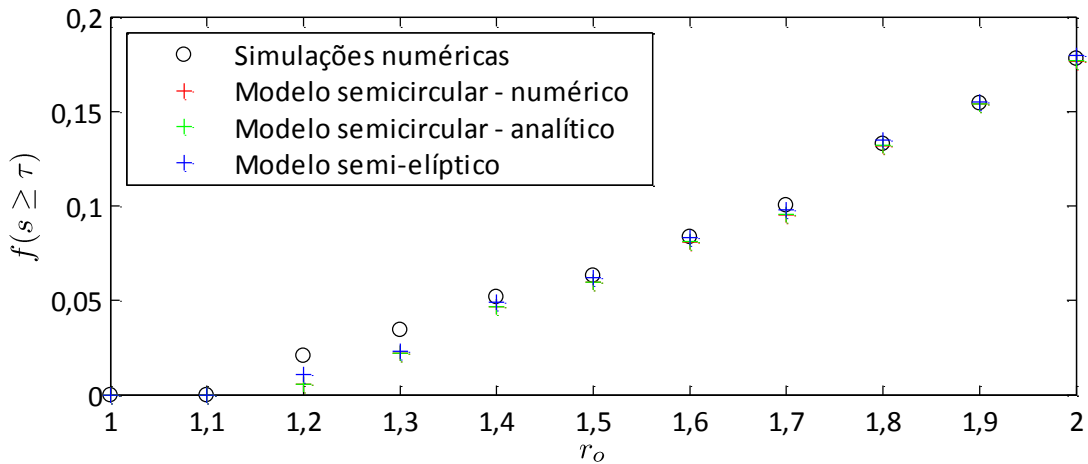


Figura 14: Comparação entre os resultados obtidos mediante os modelos desenvolvidos e os computados através de simulações numéricas autoconsistentes para a fração f de partículas do halo no equilíbrio como função do descasamento r_o .

Pode-se observar na Figura 14 que os resultados obtidos para f na aproximação semicircular, para valores de descasamento $r_o > 1,5$, aproximam-se muito daqueles obtidos mediante as simulações numéricas autoconsistentes. Contudo, para valores menores de r_o , pode-se constatar que um crescente distanciamento ocorre entre os resultados providos pela aproximação semicircular e as simulações. O modelo na aproximação semicircular torna-se um pouco menos preciso para estes valores de descasamento. De outra forma, os resultados providos pelo modelo elíptico apresentam-se mais condizentes com as simulações em um intervalo maior de descasamento. Para valores de $r_o > 1,5$, os resultados providos tanto pelo modelo circular quanto elíptico são semelhantes. Contudo, quando $r_o < 1,5$, a curva para f obtida na aproximação semi-elíptica descola-se daquela obtida na aproximação semicircular, propiciando resultados mais semelhantes àqueles fornecidos pelas simulações. Como se observa também nesta figura, a curva

para f calculada através da solução analítica quase-exata é quase coincidente com a sua versão obtida numericamente na aproximação semicircular.

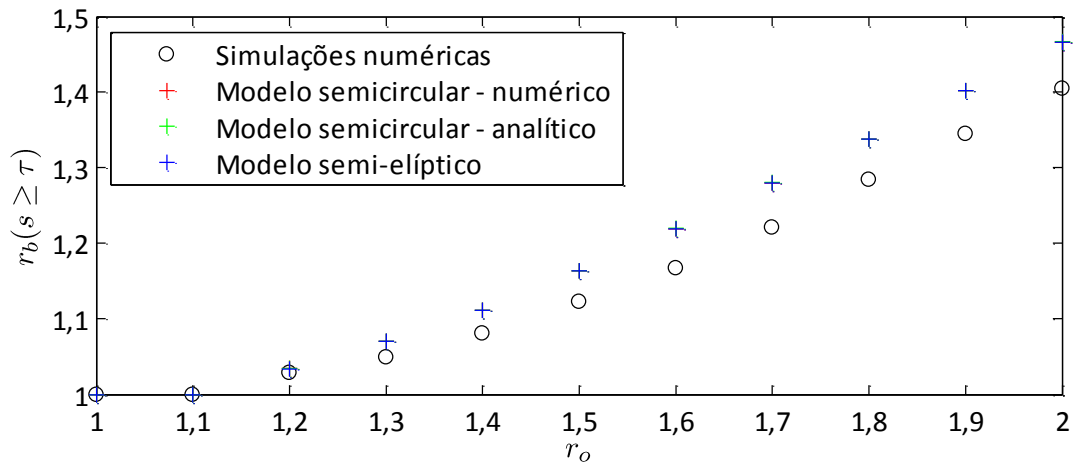


Figura 15: Comparação entre os resultados obtidos mediante os modelos desenvolvidos e os computados através de simulações numéricas autoconsistentes para o envelope r_b do feixe no equilíbrio como função do descasamento r_o .

De fato, à medida que o descasamento inicial r_o diminui, observa-se que a região curva do espaço de fase de equilíbrio na qual residem as partículas do halo inicia um processo de deformação em sua geometria. Objetivamente, para valores de descasamento $r_o > 1,5$, a região curva é aproximadamente semicircular. Contudo, para valores de descasamento $r_o < 1,5$, pode-se observar que a região curva sofre uma alteração de sua geometria, migrando de um formato semicircular para um formato semi-elíptico. Ou seja, para valores de $r_o < 1,5$, o parâmetro r'_h torna-se necessário para descrever de forma mais acurada o estado estacionário do feixe, contemplando e inserindo no modelo desenvolvido a elipsidade natural existente na região curva do espaço de fase neste regime de descasamento.

Entretanto, diferentemente, este mesmo comportamento não ocorre na Figura 15 e na Figura 16, nas quais são respectivamente apresentados os resultados para o envelope $r_b(s \geq \tau)$ e para emitância $\epsilon(s \geq \tau)$, obtidos mediante os modelos e as simulações numéricas autoconsistentes. Nestas figuras, para valores de descasamento $r_o > 1,3$, ocorre um progressivo distanciamento entre os valores previstos pelos modelos e os calculados através das simulações numéricas autoconsistentes. Considerando que para estes valores de descasamento ocorre o melhor acordo entre os valores modelados e simulados de f , pode-se concluir que então as equações (4.24) e (4.27) para respectivamente $r_b(s \geq \tau)$ e $\epsilon(s \geq \tau)$ tornam-se um pouco menos realísticas nestes casos. Observando o espaço de fase das simulações numéricas autoconsistentes, de fato, à medida que o descasamento aumenta, a espessura w da região curva do espaço de fase sofre um incremento substancial. Desta forma, a espessura w , embora ainda menor, aproxima-se mais das dimensões do halo r_h , tornando menos rigorosas as aproximações efetuadas nas equações (4.36) e (4.54). No

entanto, ressalva-se que parte considerável do aumento da espessura w ocorre pela dissipação numérica natural existente nas simulações numéricas autoconsistentes. O tempo de simulação é longo e o número de partículas é grande, devendo assim a tolerância do integrador assumir valores que permitam extrair resultados em tempo hábil. Uma diminuição adicional na tolerância do integrador propiciaria uma compressão no valor da espessura w , com ônus de um aumento relevante no tempo de simulação. Nestas figuras pode-se constatar também a questão anteriormente comentada: tanto $r_b(s \geq \tau)$ quanto $\epsilon(s \geq \tau)$ dependem fracamente de variações δf , haja vista que os resultados providos pelos modelos em ambas aproximações são expressos por curvas quase superpostas. Esta constatação é de suma importância ao desenvolvimento do modelo de baixa dimensionalidade baseado na descrição por partículas-testes a ser apresentado na Seção 4.6, o qual permite a pronta obtenção dos parâmetros r_c , r_h e r_h' que caracterizam o espaço de fase do feixe no equilíbrio.

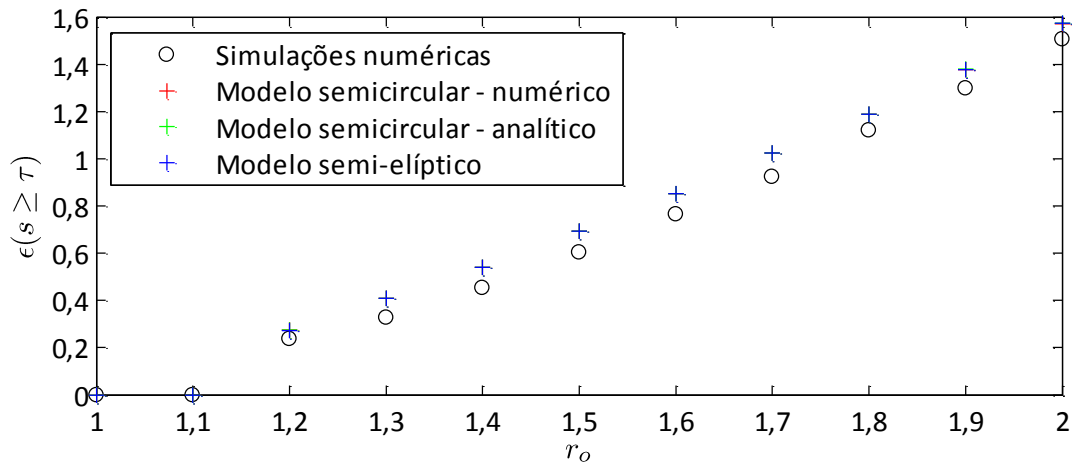


Figura 16: Comparação entre os resultados obtidos mediante os modelos desenvolvidos e os computados através de simulações numéricas autoconsistentes para a emitância ϵ do feixe no equilíbrio como função do descasamento r_o .

Para efeito adicional de comparação entre os resultados propiciados pelo modelo e aqueles obtidos mediante as simulações numéricas autoconsistentes, uma vez determinada a dependência da fração f no equilíbrio com relação ao descasamento inicial r_o , torna-se possível então comparar também as densidades de partículas propiciadas pelos modelos aqui propostos com aquelas resultantes das simulações numéricas autoconsistentes, para cada valor de r_o . Na Figura 17, o espaço de fase no equilíbrio obtido mediante simulação numérica autoconsistente é apresentado para $r_o = 1,5$, valor este adotado até então para exemplificação dos modelos desenvolvidos. Nesta figura, também constam os resultados obtidos para o equilíbrio através dos modelos desenvolvidos para a densidade do núcleo n_c e do halo n_h , juntamente com os seus correspondentes oriundos das simulações numéricas autoconsistentes. Os resultados na aproximação semicircular são expressos em vermelho e, os na aproximação semi-elíptica, em azul.

No APÊNDICE E, os resultados obtidos para os demais casos de descasamento r_o são expostos. Nas figuras adicionais presentes no APÊNDICE E, pode-se perfeitamente observar o comportamento descrito em parágrafo anterior. Realmente, à medida que o descasamento inicial diminui, em direção ao valor de equilíbrio $r_o = 1,0$, a região curva no espaço de fase migra de uma geometria circular para uma elíptica, tornando os resultados nesta aproximação mais fidedignos com os computados mediante as simulações numéricas autoconsistentes.

Na Figura 17a, é apresentado o espaço de fase capturado das simulações numéricas autoconsistentes no instante $s = 755,6$ para um feixe cujo descasamento inicial é $r_o = 1,5$. Trata-se do espaço de fase típico de um feixe inicialmente descasado, conforme extensamente abordado na Seção 4.2. Na Figura 17b, uma comparação entre os resultados do modelo e das simulações numéricas autoconsistentes é efetuada para as partículas frias que compõe o núcleo do feixe no equilíbrio. Para tanto, um histograma destas partículas foi efetuado com os resultados obtidos da simulação numérica autoconsistente. A quantização espacial, ou de outra forma, o tamanho do intervalo adotado para o cálculo da frequência de partículas com relação à coordenada R foi $\Delta_c \cong 0,0733$. Conjuntamente com o histograma, considerando os valores de r_c e f já calculados relativos à $r_o = 1,5$, a densidade de partículas do núcleo modelada, apresentada na equação (4.18), pode ser também plotada. Note que, por depender explicitamente da fração de partículas f , a densidade do núcleo também sobre influência da geometria da região curva do halo. Portanto, esta última também é obtida mediante a aproximação semicircular ou semi-elíptica. Contudo, para as partículas do núcleo do feixe, a variação da fração f de partículas para o presente valor de descasamento impacta fracamente nos resultados, haja vista que as densidades obtidas em cada uma das aproximações quase coincidem. Observa-se concordância razoável entre os resultados do modelo e das simulações numéricas autoconsistentes. O mesmo ocorre para os demais casos de descasamento inicial r_o presentes no APÊNDICE E.

Por final, na Figura 17c consta a comparação entre os resultados simulados e os proporcionados pelos modelos considerando as partículas quentes que compõe o halo do feixe. O tamanho do intervalo adotado para confecção do histograma neste caso foi $\Delta_h \cong 0,1662$. Juntamente, são apresentados os resultados do modelo, utilizando a aproximação semicircular, presente na equação (4.40), e empregando a aproximação semi-elíptica, descrita pela equação (4.58). Para tanto, considerou-se os valores já determinados para r_h , r'_h e f no caso de $r_o = 1,5$. Neste regime de descasamento, observou-se anteriormente que a elipsidade da região curva na qual se encontram as partículas que formam o halo torna-se relevante, estando então os resultados da aproximação semi-elíptica mais condizentes com aqueles obtidos por simulação numérica autoconsistente. Particularmente, pelos motivos já elucidados, o desempenho do modelo semi-elíptico em relação ao seu análogo semicircular torna-se consideravelmente melhor para os casos de

$r_0 < 1,5$. Todavia, a aproximação semicircular também fornece resultados razoáveis. Do ponto de vista da densidade, a maior diferença entre os resultados providos por ambas as aproximações reside no intervalo $0 \leq R \leq 1,5$. Neste intervalo, a densidade na aproximação semi-elíptica encontra-se mais distante do eixo R que a sua versão semicircular, estando coerente com valor maior de f obtido nesta aproximação. Note que a densidade possui seu formato invariante, sendo o seu comportamento particularizado para cada descasamento r_0 mediante a inserção dos parâmetros r_c , r_h , r_h' e f calculados.

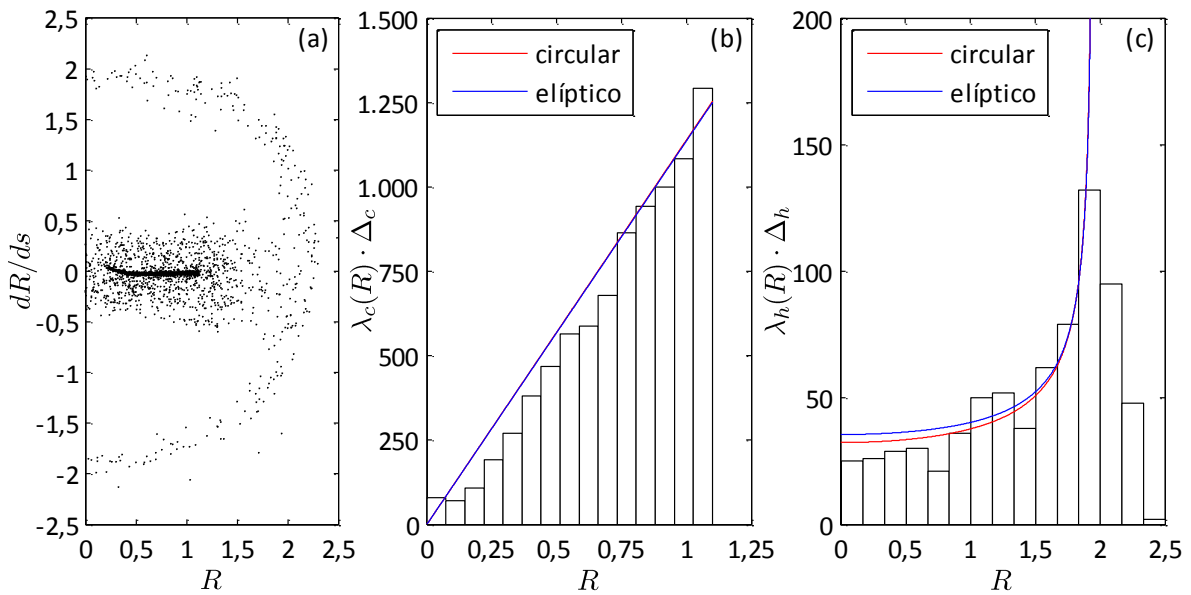


Figura 17: Espaço de fase capturado das simulações numéricas autoconsistentes em $s = 755,6$ para (a) $N_b = 10.000$ partículas e $r_0 = 1,5$. Os histogramas das partículas que compõem o núcleo e o halo do feixe computados mediante as simulações numéricas autoconsistentes são comparados com os modelos desenvolvidos para suas densidades respectivamente em (b) com $\Delta_c \cong 0,0733$ e em (c) com $\Delta_h \cong 0,1667$.

Note que, para efeito de compatibilidade na dimensionalidade das densidades modeladas para o halo e para o núcleo com os resultados providos pelas simulações numéricas autoconsistentes, deve-se considerar a densidade de partículas por unidade de comprimento. Ou seja, os histogramas das partículas que compõem o núcleo e o halo do feixe obtidos das simulações numéricas autoconsistentes devem ser comparados com a densidade linear de partículas λ_α , definida formalmente na equação (4.22), multiplicado pelo intervalo de quantização utilizado no histograma Δ_α . Para tanto, basta inserir nesta última equação as densidades superficiais obtidas para o núcleo, descrita pela equação (4.18), e para o halo, descrita pela equação (4.40) na aproximação semicircular e pela equação (4.58) na aproximação semi-elíptica.

4.5 Escala de decaimento

Observe que, no equilíbrio, a fração f deve ser obrigatoriamente quase constante, uma vez que o número de partículas que compõem o halo N_h também o é, conforme já visualizado na Figura 11. Esta constatação foi fundamental na conexão entre o estado não-estacionário e o estado

estacionário executada na Seção 4.3, permitindo que as grandezas de equilíbrio fossem determinadas na Seção 4.4.

No entanto, certamente, para instantes anteriores ao alcance do estado de equilíbrio pelo feixe, f será uma função da coordenada axial s . Esta dependência da fração f com relação à coordenada axial s já foi indiretamente descrita no princípio deste Capítulo, através da apresentação da curva para $N_h(s)$ existente na Figura 11. Adicionalmente, tendo em vista que a densidade inicial possui formato fixo (homogênea e azimutalmente simétrica), então, conforme comentado ao final da Seção 4.1, o descasamento r_o é o único parâmetro representativo das condições iniciais. Portanto, a fração f deve obrigatoriamente também depender desta quantidade. Assim sendo, matematicamente a dependência funcional da fração f torna-se completamente definida

$$f = f(r_o, s). \quad (4.74)$$

No sentido estrito, a fração f é um escalar que quantifica a população da região curva do espaço de fase, a qual se definiu como aquela na qual as partículas do halo se encontram. Na Seção 4.2, ao longo do desenvolvimento dos modelos para as densidades do núcleo $n_c(s \geq \tau)$ e do halo $n_h(s \geq \tau)$ que compõem a densidade do feixe $n_b(s \geq \tau)$, esta quantidade surgiu ao natural, determinando — no equilíbrio — o número de partículas na região do halo, uma constante. Entretanto, para tempos anteriores ao equilíbrio, $s < \tau$, esta grandeza varia, crescendo monotonamente até $s \approx \tau$, tempo característico este que escala a transição do estado inicial para o estado final para cada valor de descasamento inicial r_o . Pode-se então inferir que a progressiva população da região curva, e assim o conseqüente crescimento da fração f , é o fator que determina o alcance do equilíbrio por parte do feixe, sinalizado macroscopicamente pelo decaimento do seu envelope r_b e o concomitante crescimento de sua emitância ϵ . A migração de certa quantidade de partículas para outra região do espaço de fase distinta da inicial significa que suas variáveis de estado ao longo da dinâmica assumem outros valores substancialmente diferentes dos originais. Este fator precursor, de caráter microscópico e compactamente representado pela fração f no modelo desenvolvido, impacta fortemente nas quantidades estatísticas do feixe tais como o envelope r_b e a emitância ϵ . A quantidade f , embora pequena para qualquer valor de descasamento r_o , representa uma população de partículas imprescindíveis na descrição de quantidades médias do feixe. Ou seja, as variáveis de estado destas partículas não podem ser desconsideradas no cômputo das quantidades médias do feixe, pois impactam fortemente na obtenção de seus valores. É a microscopia governando os fenômenos macroscópicos observados nas simulações numéricas autoconsistentes e nos experimentos.

Este comportamento transiente do sistema pode ser incorporado ao modelo até então desenvolvido através da atribuição de uma expressão dinâmica para a fração de partículas f do halo. Das observações efetuadas sobre os resultados providos pelas simulações numéricas

autoconsistentes, constata-se que uma função adequada para a descrição da dependência axial de f é uma sigmóide, curva amplamente utilizada como função de transferência de neurônios na área de inteligência artificial.⁵³ Assim sendo

$$f(s) = \frac{a}{1 + be^{-cs}} + d. \quad (4.75)$$

Um ajuste de curva direto da expressão acima ao resultado obtido das simulações numéricas autoconsistentes poderia ser efetuado. No entanto, convém reduzir o número de parâmetros livres, haja vista que esta expressão deve cumprir certos requisitos. Objetivamente, a equação (4.75) deve satisfazer a seguinte condição em $s = 0$

$$\lim_{s \rightarrow 0} f(s) = 0. \quad (4.76)$$

Fisicamente, isto implica que inicialmente o feixe encontra-se completamente frio e que portanto todas as partículas estão dispersas sobre o eixo R , congruente com a definição do estado inicial presente na Seção 4.1. Adicionalmente, a equação (4.75) também deve satisfazer a condição assintótica para $s \rightarrow +\infty$

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} f(s) = f(s \geq \tau), \quad (4.77)$$

a qual, segundo a égide do modelo desenvolvido, implica que o resultado propiciado pela equação para $s \geq \tau$ seja idêntico ao fornecido pelo procedimento descrito na Seção 4.4.

Da aplicação da condição (4.76) bem como da condição (4.77) na equação (4.75) obtém-se duas equações que relacionam dois dos parâmetros — supostamente livres — com os parâmetros restantes. A dizer, obtém-se expressões para d e a com dependência funcional $d(a, b)$ e $a(b, f(s \geq \tau))$. Isto permite reexpressar a equação (4.75) mediante apenas 2 parâmetros livres, fornecendo o formato para $f(s)$ que segue

$$f(s) = \frac{\left(1 + \frac{1}{b}\right) f(s \geq \tau)}{1 + be^{-cs}} - \frac{f(s \geq \tau)}{b}. \quad (4.78)$$

Note que $f(s \geq \tau)$ é a quantidade obtida na conexão do estado inicial ao final presente na Seção 4.4. Dos 4 parâmetros livres iniciais, restam então apenas 2, os quais caracterizam completamente o comportamento dinâmico de f , podendo, em um primeiro momento, serem obtidos mediante ajuste numérico da curva (4.78) aos resultados extraídos das simulações numéricas autoconsistentes.

Na Figura 18 são apresentados os resultados dinâmicos obtidos para a fração f de partículas do halo mediante simulação numérica autoconsistente para um descasamento inicial de $r_0 = 1,5$. Juntamente, são apresentados os resultados obtidos através do modelo proposto, descrito pela equação (4.78). Note que a expressão $f(s)$ também pode ser obtida na aproximação semicircular ou semi-elíptica, dependendo de qual destas últimas foi utilizada na obtenção do valor $f(s \geq \tau)$. Estes valores já foram calculados e constam no APÊNDICE D. Os valores de b e c na equação (4.78) — independem — do valor de f no equilíbrio, já que estes últimos estão associados

ao comportamento transiente de f e não ao seu valor no estado inicial ou final. Para o descasamento em questão, os parâmetros assumem $b = 596,1$ e $c = 0,02125$, com 95% de confiança. Observe a excelente concordância entre os resultados. O desempenho é particularmente melhor no caso da aproximação semi-elíptica, pois o valor de f no equilíbrio se aproxima mais daquele obtido mediante as simulações numéricas autoconsistentes. Não obstante, a aproximação semicircular também fornece resultados aceitáveis.

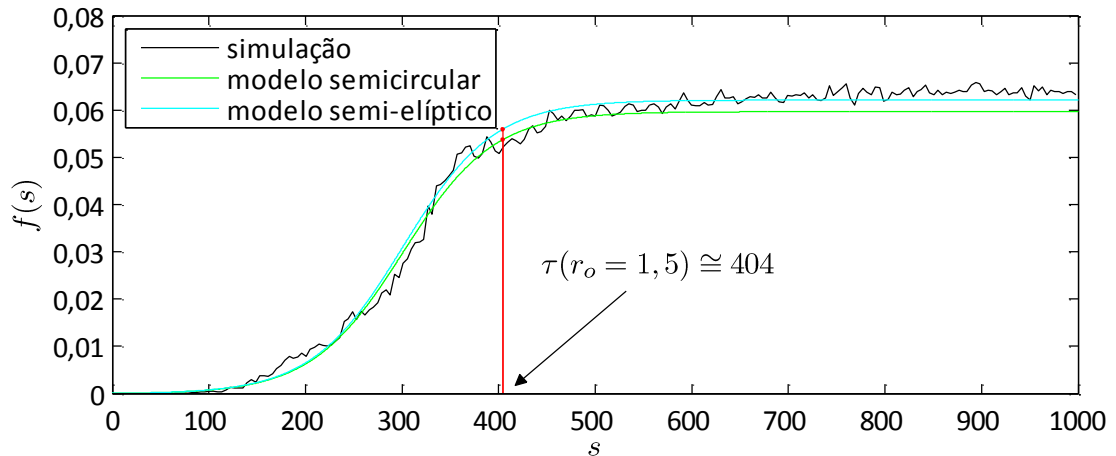


Figura 18: Comparação entre o resultado obtido através das simulações numéricas autoconsistentes e o propiciado pelo modelo analítico proposto tanto na aproximação semicircular como na semi-elíptica para a fração f de partículas do halo. Resultados referentes a um descasamento inicial de $r_0 = 1,5$.

No APÊNDICE F, os resultados computados para os demais valores de descasamento r_0 de interesse neste Capítulo são apresentados. Os parâmetros foram obtidos com 95% de confiança, em um intervalo de variabilidade muito pequeno. Os indicadores de desempenho usuais como a Soma dos Quadrados devido ao Erro (SQE) e o R – quadrado constam indicados para cada valor de descasamento r_0 . Por restrições computacionais, resultados para o descasamento de $r_0 = 1,2$ não puderam ser computados, haja vista a sua escala de tempo de decaimento, $\tau \cong 1600$, inferida mediante inspeção visual da dinâmica da emitância. A concordância entre as curvas para f obtidas por simulação e pelo modelo continuam visualmente muito satisfatórias, fato este corroborado pelos indicadores de qualidade, os quais possuem valores $SQE \cong 0$ e R – quadrado $\cong 1$. Os valores obtidos para b e c com relação aos descasamentos iniciais r_0 de interesse são apresentados na tabela constante neste mesmo APÊNDICE F.

Como o parâmetro que impacta mais fortemente a dinâmica de f é o c , pois consta no argumento da função exponencial, convém ainda efetuar certas considerações sobre o parâmetro b . O ajuste direto da expressão f — com b e c livres — para os valores de descasamento de interesse neste Capítulo forneceu valores de b compreendidos no intervalo $100 \leq b \leq 1500$. O parâmetro b funcionalmente insere um ponto de inflexão na curva f , sendo portanto necessário e não podendo ser eliminado. Contudo, majoritariamente, a escala de decaimento é descrita por c . Assim, como b

influencia fracamente o desempenho transitório de f , por simplificação, pode-se fixar este parâmetro em $b = 750$, valor médio aproximado do intervalo anteriormente mencionado. Esta restrição em b automaticamente implica em uma insignificante correção em c , permitindo que a concordância entre os resultados simulados e os do modelo continue bastante satisfatória. No APÊNDICE F, o parâmetro c foi recalculado para o caso de descasamento $r_o = 1,5$ considerando desta vez b fixo. Desta forma, uma comparação entre os resultados obtidos para c mediante o parâmetro b livre e fixo pode ser realizada. Constata-se que uma grande variação em b impacta em uma pequena variação em c , justificando a simplificação adotada no APÊNDICE F de tornar b fixo.

A fração de partículas f contém de forma enxuta portanto toda a informação — não somente do equilíbrio como também da dinâmica — do fator determinante para a formação do halo: a população da região curva do espaço de fase. Obtida uma expressão analítica para a fração f , torna-se possível então determinar a quantidade τ , escala de tempo esta até então mencionada mas ainda não calculada efetivamente. De forma geral, τ torna-se completamente equacionada especificando uma quantidade $c_{cri} \cdot f(s \geq \tau)$ tal que

$$f(s = \tau) = c_{cri} \cdot f(s \geq \tau), \quad (4.79)$$

na qual c_{cri} é um coeficiente crítico pertencente ao intervalo $0,6 \leq c_{cri} < 1,0$, podendo assumir qualquer um destes valores dependendo do critério adotado. Inserindo a equação (4.78) na expressão logo acima e resolvendo-se para τ obtém-se

$$\tau = -\frac{1}{c} \ln \left(\frac{1 - c_{cri}}{1 + b c_{cri}} \right), \quad (4.80)$$

na qual b e c são quantidades já previamente definidas. Observe que, caso seja adotado um critério aproximando-se da unidade $c_{cri} \rightarrow 1,0$, então $\tau \rightarrow +\infty$, resultado perfeitamente consistente com o caráter exponencial atribuído à expressão (4.75) para a fração f perante a coordenada axial s . Considerando um valor diferente da unidade, a dizer $c_{crit} = 0,9$, para um descasamento inicial $r_o = 1,5$, tendo em vista os valores já obtidos para b e c na análise em questão, tem-se que $\tau(r_o = 1,5) \cong 404$, quantidade esta discriminada na Figura 18.

Caso considere-se os parâmetros obtidos no APÊNDICE F para o descasamento anterior, determinados ao tornar b fixo, obtém-se $\tau(r_o = 1,5) \cong 401$, valor este muito próximo ao calculado com b variável logo acima. Isto confirma ser factível fixar o valor de b , permitindo que apenas c seja um parâmetro livre na descrição de f . Comparação análoga pode ser efetuada ao caráter dinâmico de f . Ao visualizar-se a Figura 18 e a Figura 54, pode-se observar que realmente b influencia fracamente a dinâmica de f , uma vez que ambas as curvas são muito semelhantes.

Por final, os resultados da escala de decaimento τ como função do descasamento r_o podem ser sucintamente apresentados através da curva presente na Figura 19. Nesta, torna-se visível os comportamentos assintóticos de τ . Para descasamentos tendendo $r_o \rightarrow 1$, ao envelope de equilíbrio

do feixe, então $\tau(r_o) \rightarrow \infty$. De forma oposta, para descasamentos $r_o \rightarrow \infty$, a escala de decaimento $\tau(r_o) \rightarrow 0$. Interessante é a rapidez com a qual estes limites são atingidos. No primeiro caso, $|d\tau/dr_o|$ é intensa, enquanto no segundo, $|d\tau/dr_o|$ varia lentamente, de forma monótona.

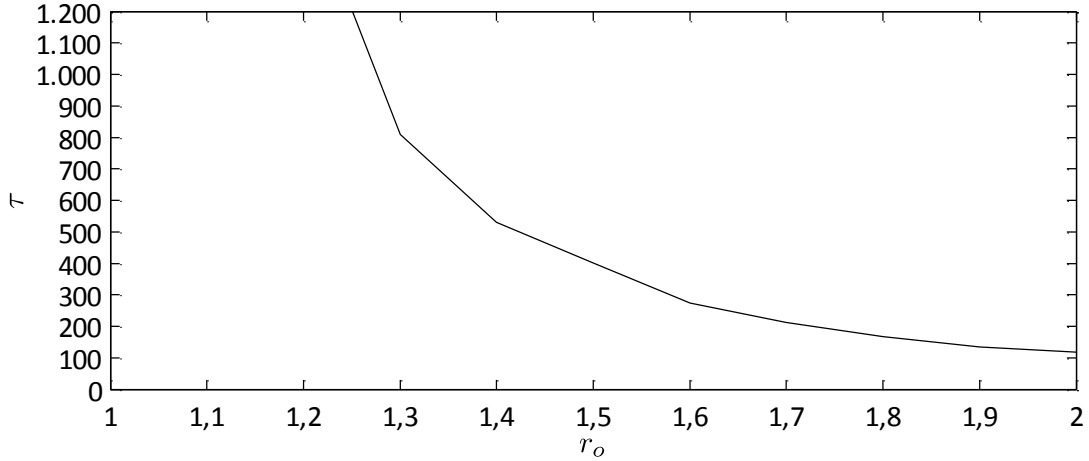


Figura 19: Dependência da escala de decaimento τ com relação ao descasamento inicial r_o . Comportamentos assintóticos em $r_o \rightarrow 1,0$ e $r_o \rightarrow \infty$ podem ser avaliados.

Observe que, em uma função do tipo sigmóide, a escala de tempo τ não depende exclusivamente do parâmetro presente no argumento da exponencial, neste caso o parâmetro c . Adicionalmente, considerando que c_{crit} deve ser arbitrado, a escala de tempo τ depende de um fator logaritmo envolvendo este último e também o parâmetro b . De fato, a equação (4.80) para a escala de tempo τ pode ser decomposta em duas escalas características tais como

$$\tau = -\frac{1}{c} \ln(1 - c_{cri}) - \frac{1}{c} \ln\left(\frac{1}{1 + bc_{cri}}\right) = \tau_\eta + \tau_\lambda, \quad (4.81)$$

na qual, por definição

$$\tau_\eta \equiv -\frac{1}{c} \ln(1 - c_{cri}) \quad (4.82)$$

$$\tau_\lambda \equiv -\frac{1}{c} \ln\left(\frac{1}{1 + bc_{cri}}\right). \quad (4.83)$$

Há portanto duas escalas características de crescimento, τ_η e τ_λ . Como $\tau_\eta \ll \tau_\lambda$, τ_η é escala de tempo relevante no intervalo $0 \leq s \lesssim \tau_\eta$ enquanto τ_λ é a escala que governa a dinâmica de $f(s)$ no intervalo de $\tau_\eta \lesssim s \lesssim \tau_\lambda$. Considerando os valores já comentados de b e c para o descasamento inicial em análise nesta Seção, tem-se que as escalas de tempo assumem $\tau_\eta(r_o = 1,5) \cong 108,37$ e $\tau_\lambda(r_o = 1,5) \cong 295,85$. Os valores destas quantidades para os demais casos de descasamento de interesse neste Capítulo são apresentados no APÊNDICE F. Observando a Figura 18, pode-se constatar que tanto τ_η e τ_λ são compatíveis com os diferentes tipos de crescimento desenvolvido pela fração f em cada um dos intervalos anteriores. Esta observação é importante caso deseje-se que τ seja relacionado com algum invariante dinâmico do sistema em investigação, tal qual o expoente de Lyapunov.^{37,38} A denominação adotada para cada uma destas quantidades τ_λ e τ_η se

tornará mais evidente respectivamente na Seção 4.6 próxima e no Capítulo 5, quando uma interpretação física com relação as suas origens será efetuada.

Torna-se então extremamente interessante estender a análise dinâmica para quantidades como o envelope r_b e a emitância ϵ . No presente modelo, a dependência temporal consta compactamente contida na fração de partículas do halo f . Deste modo, como tanto r_b quanto ϵ são quantidades obtidas mediante integração espacial sobre a densidade modelada n_b , as suas expressões obtidas no equilíbrio podem ter sua aplicação ampliada para qualquer s ao permitir-se que f dependa da coordenada axial conforme determina a equação (4.78). Esta dinâmica de f conectará o estado final estacionário descrito, em sua forma mais geral obtida da aproximação semi-elíptica, pelos parâmetros r_c , r_h e r_h' , ao estado inicial não-estacionário, descrito por r_o . Isto permite que todas as expressões obtidas no equilíbrio nas aproximações semicircular e semi-elíptica sejam válidas para qualquer s . Para tanto, estabelece-se

$$f(s \geq \tau) \rightarrow f(s). \quad (4.84)$$

em todas as expressões determinadas no equilíbrio e que são funções de $f(s \geq \tau)$.

Adicionalmente, torna-se importante discursar a respeito do caráter oscilatório inerente às partículas frias do feixe devido ao descasamento do envelope inicial. No princípio, todas as partículas do feixe oscilam coerentemente, em fase. Contudo, durante a evolução do feixe no canal de confinamento magnético, efeitos de origem microscópica determinam que algumas partículas percam sincronia em relação ao movimento oscilatório da maioria, absorvam energia e tenham a amplitude de suas órbitas amplificadas, havendo difusão no espaço de fase e assim o surgimento da região curva já descrita na Seção 4.2. As partículas com este comportamento são identificadas como as que formam o halo. No entanto, muitas partículas remanescem frias, oscilando com um período quase idêntico ao inicial. Ou seja, a frequência fundamental de oscilação no estado inicial continua sendo a de maior amplitude no estado final, com apenas uma pequena distorção da banda no seu entorno (vide Figura 7). Informações adicionais podem ser adquiridas observando a Figura 5, na qual consta a dependência axial do envelope r_b , e na Figura 10, na qual retratos do espaço de fase do feixe no equilíbrio são capturados em 3 pontos relevantes de sua dinâmica e apresentados.

Embora para a correta descrição dinâmica do envelope $r_b(s)$ do feixe seja necessário contemplar este caráter oscilatório remanescente das partículas frias que formam o seu núcleo, para determinação da emitância $\epsilon(s)$ este procedimento é desnecessário. As oscilações induzidas pelo envelope do feixe $r_b(s)$ na emitância $\epsilon(s)$, conforme visualiza-se na Figura 5b, são pequenas e portanto desprezíveis. Assim sendo, na aproximação semicircular da equação (4.45), considerando a atribuição presente na equação (4.84), tem-se que o envelope assume

$$r_b(s)|_{circular} = \sqrt{(1 - f(s))r_c^2 + f(s)r_h^2}. \quad (4.85)$$

Na aproximação semi-elíptica, procedimento análogo pode ser realizado, bastando apenas utilizar a expressão (4.63) obtida para o envelope r_b . Deste modo, desta última expressão

$$r_b(s)|_{el\acute{iptico}} = \sqrt{(1 - f(s))r_c^2 + f(s)\frac{(3r_h' + r_h)}{2(r_h' + r_h)}r_h^2}. \quad (4.86)$$

Inserindo a equação (4.28) na equação (4.27) obtém-se uma expressão para a emitância $\epsilon(s)$ como função do envelope $r_b(s)$, independente da aproximação utilizada, a qual assume o seguinte formato

$$\epsilon(s) = r_b(s)\sqrt{r_b^2(s) - 1}, \quad (4.87)$$

podendo $r_b(s)$ ser tanto descrito pela equação (4.85) ou pela equação (4.86), dependendo da aproximação adotada. Observe que, quando $s = 0$, o envelope do feixe tanto na aproximação semicircular (4.85) quanto na aproximação semi-elíptica (4.86) assumem $r_b(s)|_{circular} = r_b(s)|_{el\acute{iptico}} = r_c(s = 0) = r_o$ pois, conforme a equação (4.78), $f(s = 0) = 0$. Para coordenadas axiais $s \geq \tau$, $f(s) \approx f(s \geq \tau)$ e portanto as expressões de equilíbrio para r_b nas aproximações são recuperadas. Os resultados providos pelos modelos na aproximação semicircular e semi-elíptica são comparados com os oriundos das simulações numéricas autoconsistentes na Figura 20. Pode-se observar que, a menos da oscilação residual devido à dinâmica do envelope $r_b(s)$, os resultados obtidos para a emitância $\epsilon(s)$ são bastante condizentes. As curvas obtidas mediante os modelos constam quase superpostas pois, conforme comentado anteriormente, pequenas variações δf impactam fracamente em quantidades macroscópicas do feixe como a emitância ϵ .

4.6 Descrição por partícula-teste

O feixe homogêneo de partículas carregadas inicialmente descasado somente atinge seu estado final estacionário quando a fração de partículas $f(s)$ do halo também atinge seu valor de equilíbrio $f(s \geq \tau)$, obtido e apresentado na Seção 4.4 para todas as situações de descasamento inicial r_o de interesse neste trabalho. A fração de partículas f que compõe o halo do feixe, conforme enunciado na Seção 4.5, atinge seu valor de equilíbrio apenas quando a população da região curva do espaço de fase do feixe cessa. A fração de partículas f é então uma quantidade que contém toda a informação dinâmica que conduz o processo de estabilização do feixe durante sua evolução no canal de confinamento magnético. É um sensível indicador do direcionamento do feixe de seu estado inicial não-estacionário ao seu estado final estacionário.

Salienta-se que para o cálculo das quantidades de equilíbrio do feixe realizado na Seção 4.4, nenhuma suposição a respeito do motivo pelo qual partículas migram da região inicial filamentar para a região final curva do espaço de fase foi efetuada. Naquela situação, o mecanismo físico associado ao crescimento da fração f e ao conseqüente processo de aquecimento do feixe durante

sua focalização magnética no canal de confinamento era irrelevante. Para obtenção do envelope r_b e da emitância ϵ no equilíbrio, bastou apenas modelar tanto o seu estado inicial $s = 0$ e, segundo o conceito de equilíbrio neste trabalho desenvolvido, o seu estado final para $\forall s \geq \tau$. Mediante os modelos, a distribuição espacial das partículas — a sua densidade n_b — foi obtida tanto no estado inicial quanto no final, permitindo que a fração de partículas f fosse consistentemente avaliada, haja vista que a energia transversal do feixe E_{\perp} é uma quantidade conservada da dinâmica. Com a fração $f(s \geq \tau)$, segundo as equações obtidas na Seção 4.3, prontamente tornou-se possível determinar as quantidades de interesse pertinente ao feixe em seu estado de equilíbrio.

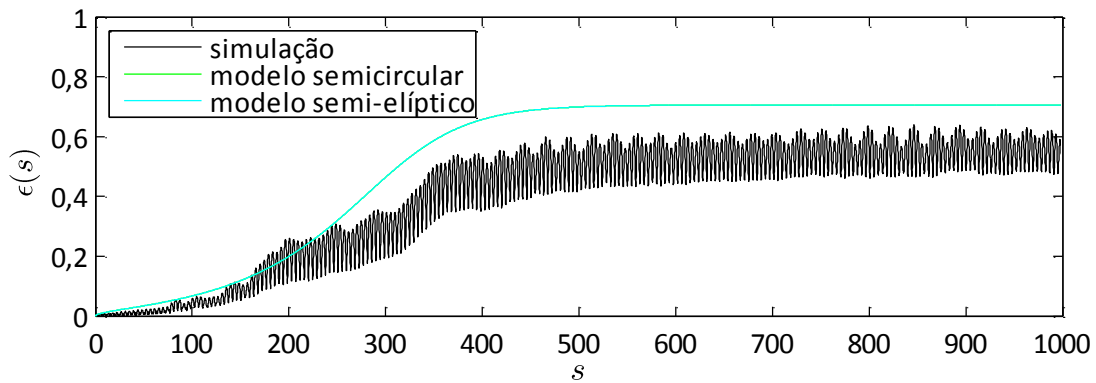


Figura 20: Comparação entre o resultado obtido através das simulações numéricas autoconsistentes e o propiciado pelo modelo analítico proposto tanto na aproximação semicircular como na semi-elíptica para a emitância ϵ do feixe. Resultados referentes a um descasamento inicial de $r_o = 1,5$.

De fato, à medida que o feixe evolui no canal de confinamento, partículas individualmente começam a interagir com o movimento macroscópico coerente das demais outras partículas que compõe a densidade n_b , descrito formalmente pela dinâmica do envelope $r_b(s)$. Esta interação progressivamente torna-se mais intensa, permitindo que para um tempo s posterior a escala de decaimento τ do feixe, uma quantidade de partículas representada pela fração $f(s \geq \tau)$ acople completamente com o envelope r_b , estabilizando a dinâmica do sistema como um todo. O acoplamento desta quantidade $N_b \cdot f(s \geq \tau)$ de partículas com a oscilação do envelope r_b somente ocorre pois, durante o intervalo $0 \leq s \lesssim \tau$, a dinâmica destas progressivamente se amarra — trava em relação — à dinâmica coerente das demais outras. Isto é resultado direto da natureza não-linear presente na interação feixe-partícula individual, presente nos experimentos e descrita no procedimento de simulação numérica autoconsistente adotado neste trabalho e exposto no APÊNDICE A.

Apenas para manter o rigorismo, uma ressalva. Devido à simetria azimutal do problema analisado, as partículas individualmente interagem com todas as demais outras — com o feixe completo — apenas caso localizem-se imediatamente após a partícula mais externa do feixe. Caso contrário, durante sua dinâmica na região interna do feixe, o que as partículas observarão de fato é a

ação de um feixe com carga fracionada. Por simplificação no discurso, doravante esta informação aparecerá subentendida. Maiores detalhes constam no APÊNDICE A.

Cabe salientar ser esta quantidade $N_b \cdot f(s \geq \tau)$ que, conforme enunciado no princípio do Capítulo 4, propicia a conversão — é o mecanismo conversor — de parte da energia potencial efetiva média $1/2 \langle \mathbf{U}_\perp^2 \rangle$ inicial em energia cinética média $1/2 \langle \mathbf{V}_\perp^2 \rangle$ final, comportamento este descrito na Figura 6. Ademais, o acoplamento desta quantidade $N_b \cdot f(s \geq \tau)$ de partículas com o feixe é do tipo ressonante, uma vez que considerável monta de energia cinética é obtida por estas últimas da oscilação do envelope r_b . Do ponto de vista da conservação de energia, sendo o feixe inicialmente frio, o progressivo aquecimento induzido pela quantidade $N_b \cdot f(s \geq \tau)$ de partículas impõe o crescimento de sua emitância ϵ definida na equação (2.34), a qual necessariamente, devido à conservação da energia E_\perp descrita pela equação (4.1), conduz ao decaimento do envelope r_b .

A energia macroscópica do sistema é assim convertida em energia cinética de uma quantidade $N_b \cdot f(s \geq \tau)$ de partículas individuais, microscópica. Observe que a dinâmica destas partículas individuais não pode ser desprezada pois, conforme enuncia a Seção 4.5, impactam fortemente na obtenção das quantidades médias do feixe no equilíbrio. Sendo assim, a seguir, um modelo dinâmico para esta interação feixe-partículas individuais será desenvolvido. Com isto, visa-se melhor compreender o processo de termalização do feixe, determinando quais as escalas de tempo características envolvidas. Contudo, as razões pelas quais partículas individualmente tornam-se habilitadas a acoplar ressonantemente com o movimento oscilatório do feixe durante o processo de simulação numérica autoconsistente e experimentos serão abordadas somente no Capítulo 5.

Por semelhança direta de comportamento, torna-se então interessante e sugestivo descrever a interação feixe-partícula individual comentada nos parágrafos anteriores desta Seção mediante uma população de partículas-testes, cuja dinâmica está sujeita ao conjunto de equações anteriormente obtidas na Seção 3.2. O sistema de equação (3.11)-(3.12) para uma partícula-teste em interação com um feixe de densidade homogênea possui 3 classes distintas de órbitas, conforme a condição inicial $R(s=0)$ atribuída à partícula. Por compatibilidade com o caráter frio do feixe neste trabalho adotado, a velocidade inicial da partícula-teste necessariamente deve assumir $dR/ds|_{s=0} = 0$. Para coordenadas radiais $R(s=0) \leq r_o$, a força que o feixe exerce sobre a partícula-teste é de natureza linear com relação à coordenada R . Portanto, a dinâmica da partícula-teste acompanhará fielmente o movimento oscilatório do envelope do feixe r_b , estando sempre limitada a excursões em uma região interna ao feixe, uma vez que sua amplitude máxima de oscilação sempre será $R(s) \leq r_b(s)$, para qualquer instante s . De outra forma, para condições iniciais $R(s=0) \gg r_o$, a partícula-teste acumula considerável energia potencial inicial, fato este que propicia a esta última possuir movimento próprio, já que sua dinâmica torna-se fracamente influenciada pela oscilação do envelope do feixe $r_b(s)$. A última classe envolve órbitas cuja condição inicial para a partícula-teste é

$R(s = 0) \approx r_o$, sendo necessariamente $R(s = 0) > r_o$. Nesta situação, a partícula-teste torna-se vulnerável à força de natureza não-linear proporcionada pelo feixe, sendo sua dinâmica fortemente influenciada pelo envelope $r_b(s)$. A órbita da partícula-teste pode então se acoplar com a dinâmica do envelope do feixe r_b . Caso este acoplamento seja do tipo ressonante, então um mecanismo vigoroso de conversão de energia potencial efetiva, descrita pela oscilação do envelope r_b , em energia cinética da partícula-teste é configurado. São estas então as órbitas de interesse neste trabalho para a partícula-teste.

A Figura 21 apresenta as órbitas de $N_p = 8$ partículas-testes homogeneamente dispersas em uma região

$$\mathcal{R} \in [r_o, r_o(1 + \delta)], \quad (4.88)$$

na qual a quantidade δ deve satisfazer $\delta \ll 1$ e será consistentemente obtida *a posteriori*. As partículas são distribuídas de forma homogênea na superfície especificada pela região \mathcal{R} da equação logo acima. Observe que esta região \mathcal{R} satisfaz plenamente as condições para as órbitas ressonantes enunciadas no parágrafo anterior, de que cada partícula possua $R(s = 0) \approx r_o$ mas com $R(s = 0) > r_o$. Segundo a Figura 21, haja vista as condições iniciais individuais serem muito próximas, a órbita de cada partícula-teste é muito semelhante no princípio de sua dinâmica. Contudo, quanto mais as partículas-testes evoluem no canal de confinamento magnético, mais suas órbitas diferem, resultado da cada vez mais intensa influência do feixe sobre a dinâmica individual de cada partícula-teste. Inicia-se assim o processo de acoplamento entre a órbita de cada partícula-teste com a dinâmica do envelope r_b , permitindo que as partículas-testes extraiam energia suficiente para que um crescimento considerável da amplitude espacial de suas órbitas seja observado. Após um tempo característico $s \gtrsim \tau_\lambda$, a amplitude espacial da órbita de cada partícula satura, estagnando em um valor máximo que não será ultrapassado para instantes posteriores da dinâmica. Neste momento, qualitativamente as órbitas das partículas-testes também são completamente distintas. É o caráter caótico do sistema de equações (3.11)-(3.12) — já previsto na Seção 3.2 — determinando as características evolutivas da interação entre o feixe e as partículas-testes durante o confinamento magnético.

A quantidade τ_λ pode ser identificada como o tempo de mistura das órbitas das partículas-testes no espaço de fase, sendo esta a grandeza característica envolvida na transferência de energia do movimento macroscópico do envelope r_b para a dinâmica caótica das partículas-testes. Salienta-se que a absorção e posterior saturação da energia de cada partícula-teste somente ocorre devido ao seu comportamento caótico induzido pela sua interação não-linear com o feixe em oscilação. É na escala de tempo característica τ_λ que as partículas perdem a memória em relação suas coordenadas espaciais R inicialmente atribuídas. O caos, inerente à natureza das interações entre o feixe e partículas-testes, aumenta a entropia total do sistema. Portanto, a escala de tempo τ_λ pode estar

fortemente vinculada ao expoente de Lyapunov,³⁷ uma medida invariante típica de sistemas dinâmicos não-lineares. Investigações preliminares sobre o sistema de equações (3.11)-(3.12) com condições iniciais da partícula-teste perto do ponto fixo hiperbólico instável, a ser abordado a seguir, fornecem um expoente de Lyapunov compatível com a escala de tempo τ_λ , satisfazendo a relação $\tau_\lambda \approx 1/\lambda$. O descasamento do feixe analisado é aquele até então utilizado no corpo deste trabalho, $r_o = 1,5$.

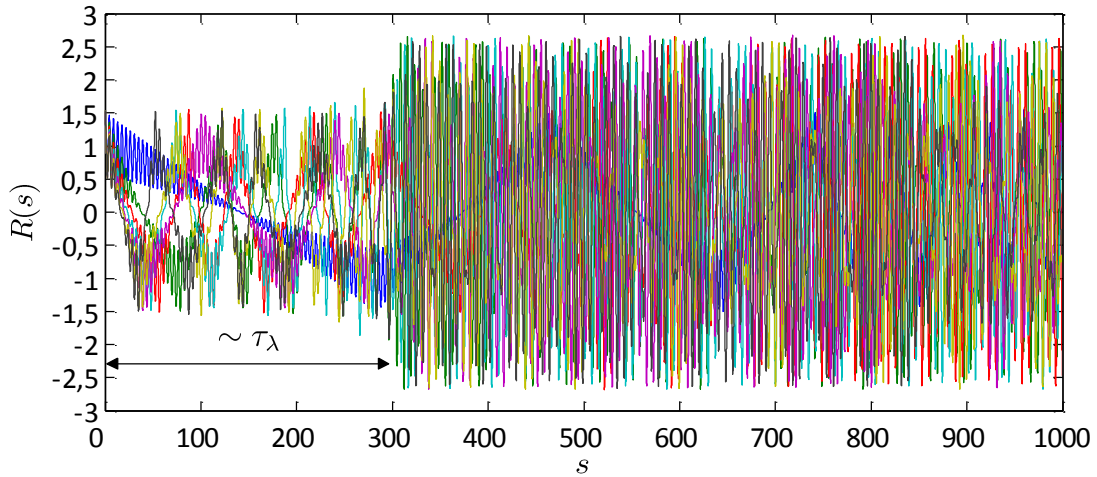


Figura 21: Dinâmica pertencente a $N_p = 8$ distintas partículas-testes dispersas homogeneamente na região \mathcal{R} externa ao envelope inicial do feixe formalmente satisfazendo $\mathcal{R} \in [r_o, r_o(1 + \delta)]$, sendo $r_o = 1,5$ e $\delta \ll 1$.

Topologicamente, o descasamento r_o do envelope do feixe induz o surgimento de grandes ilhas de ressonância³⁸ paramétricas em uma região externa à sua área ocupada no espaço de fase.⁵⁴ Desta forma, qualquer população de partículas-testes inicializadas na região $\mathcal{R} \in [r_o, r_o(1 + \delta)]$ será fortemente influenciada por estas ressonâncias. As ressonâncias excitam a população de partículas-testes, transferindo energia do movimento macroscópico oscilatório do envelope r_b ao seu movimento caótico no espaço de fase. O descasamento r_o é assim a fonte que excita a dinâmica individual das partículas-testes. Esta transferência de energia permite a progressiva difusão das órbitas das partículas-testes no espaço de fase, até o seu momento de saturação, em $s \approx \tau_\lambda$. Portanto, a quantidade τ_λ pode ser identificada como a escala de tempo na qual as ressonâncias atuam sobre a dinâmica do feixe, sendo diretamente

$$\tau_\lambda = \tau_\lambda(r_o) \quad (4.89)$$

função do descasamento inicial do feixe.

A equação (4.89) acima bem como a análise efetuada no parágrafo anterior fornecem um entendimento — embasamento — físico à escala de tempo τ_λ , a qual havia sido sucintamente introduzida na Seção 4.5 como uma quantidade emergente do caráter sigmóide atribuído à fração de partículas f do halo com relação à coordenada axial s . Para $r_o = 1,5$, segundo a Figura 21, $\tau_\lambda \cong 300$, valor absolutamente compatível com aquele previsto na Seção 4.5 pela equação (4.83) para este descasamento, também presente na Tabela 3 do APÊNDICE F. Estruturalmente, é esta a origem do

mecanismo envolvido no aquecimento do feixe durante sua focalização no canal de confinamento magnético, o qual converte energia potencial efetiva média $1/2 \langle \mathbf{U}_\perp^2 \rangle$ do movimento oscilatório do seu envelope em energia cinética média $1/2 \langle \mathbf{V}_\perp^2 \rangle$ de uma população restrita de partículas representadas por $f(s \geq \tau)$, aumentando a entropia total do sistema. Sendo os termos médios envolvendo a velocidade \mathbf{V}_\perp determinantes ao cálculo da emitância ϵ da equação (2.33), então um aumento da emitância ϵ do feixe durante o seu confinamento magnético está diretamente associado a um aumento da entropia total do sistema.

Torna-se interessante então averiguar a estrutura do espaço de fase resultante da população de partículas-testes com relação ao anteriormente obtido mediante simulações numéricas autoconsistentes. Convenientemente, este último é rerepresentado na Figura 22a. A estrutura do espaço de fase resultante da dinâmica de partículas-testes inicialmente dispersas na região \mathcal{R} da equação (4.88) é apresentada na Figura 22b. Nesta última Figura, para uma maior definição da sua estrutura, o espaço de fase foi confeccionado com um número de $N_p = 100$ partículas-testes, maior que o originalmente adotado na elaboração da Figura 21, pois o tempo final de integração do sistema de equações (3.11)-(3.12) para cada partícula-teste foi mantido constante, até $s = 1000$. Salienta-se que a Figura 22b foi obtida mediante seções cumulativas de Poincaré³⁷ quando $dr_b/ds = 0$ com $d^2r_b/ds^2 < 0$, ou no máximo do envelope do feixe. As seções de Poincaré devem ser cumulativas pois na abordagem por partículas-testes não se dispõe de um vasto número de entidades dinâmicas, tal qual nas simulações numéricas autoconsistentes.

Mediante comparação direta do espaço de fase da Figura 22a com o presente na Figura 22b, pode-se verificar que os resultados propiciados pela população de partículas-testes predizem satisfatoriamente aqueles obtidos mediante as simulações numéricas autoconsistentes. A geometria de ambos espaços de fases é muito semelhante, sendo a região curva anteriormente observada nas simulações numéricas autoconsistentes no equilíbrio muito bem descrita pela população de partículas inicialmente dispersas na região \mathcal{R} especificada pela equação (4.88). Na abordagem por partícula-teste, esta região curva do espaço de fase é denominada de separatriz do sistema dinâmico em análise, descrito pelas equações (3.11)-(3.12). Topologicamente, a separatriz segrega as duas demais classes de órbitas possíveis para as partículas-testes, as quais já foram analisadas anteriormente nesta Seção, sendo obtidas mediante atribuição de condições iniciais que satisfazem $R(s=0) \leq r_o$ e $R(s=0) \gg r_o$. É em uma região muito semelhante à separatriz do espaço de fase das partículas-testes que residem as partículas identificadas como aquelas que compõem o halo observado nas simulações numéricas autoconsistentes. Portanto, o efeito que proporciona a formação da região curva — do halo — nas simulações numéricas autoconsistentes realmente é resultante da interação entre feixe e partículas individuais, já oportunamente de forma breve introduzido no princípio do Capítulo 4. Adicionalmente, ao considerar a simetria vertical existente na

Figura 22b, por inspeção direta da topologia do espaço de fase nesta presente, pode-se constatar que o sistema de equações (3.11)-(3.12) congrega 4 distintos pontos fixos: 2 elípticos — estáveis — dispostos sobre o eixo dR/ds e ao centro das ressonâncias e 2 hiperbólicos — instáveis — sobre o eixo R externos ao feixe.

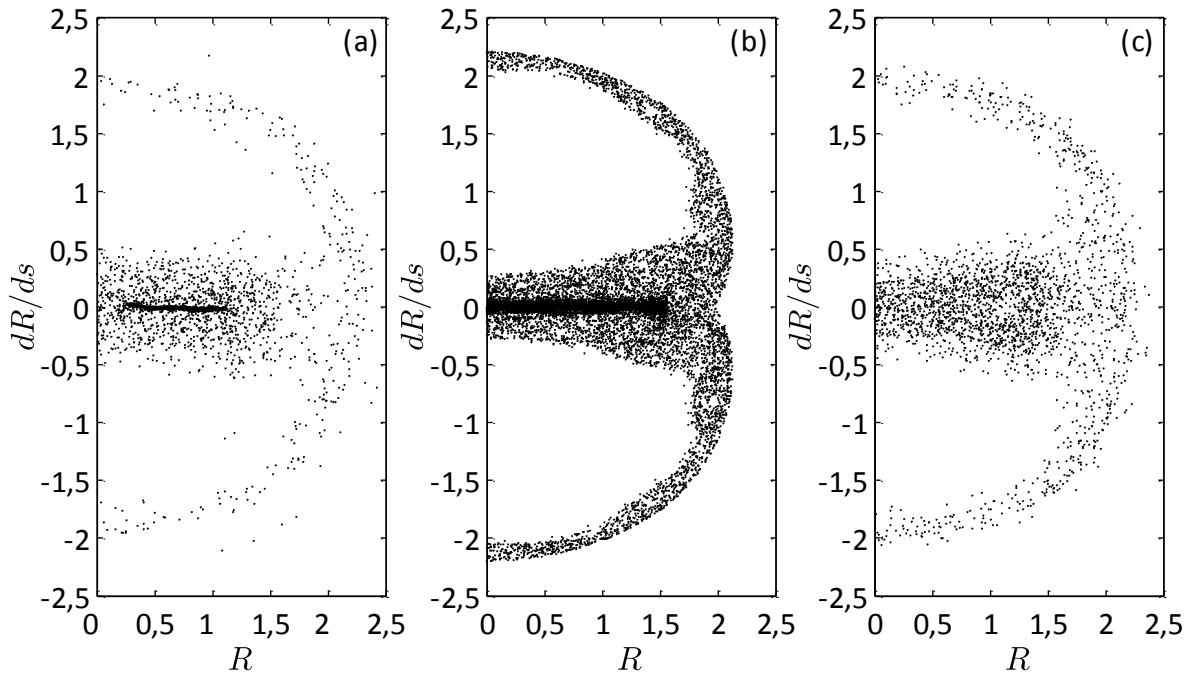


Figura 22: Estrutura do espaço de fase do feixe obtido mediante (a) simulações numéricas autoconsistentes de $N_b = 10.000$ partículas, (b) $N_p = 100$ partículas-testes homoganeamente dispersas na região $\mathcal{R} \in [r_o, r_o(1 + \delta)]$ e (c) $N_p = 100$ partículas-testes homoganeamente dispersas na região $\mathcal{R} \in [r_o, r_o(1 + \delta)]$ com decaimento do envelope do feixe r_b . Descasamento do envelope $r_o = 1,5$ em todos os casos.

Observe que os parâmetros pertinentes ao espaço de fase do feixe no equilíbrio, definidos na Seção 4.2, podem ser obtidos diretamente do modelo por partículas-testes, haja vista a razoável correspondência entre a geometria do espaço de fase proporcionado por este último com o resultante das simulações numéricas autoconsistentes. Isto é observável por comparação direta entre as geometrias do espaço de fase das Figura 22a e Figura 22b. Naturalmente, informação a respeito do parâmetro r_c não está presente no sistema de equação (3.11)-(3.12) inicializado por N_p partículas-testes dispersas em uma região \mathcal{R} dada pela equação (4.88) pois, nesta situação, não há decaimento do envelope r_b . Contudo, isto não constitui um empecilho porque, conforme a análise realizada na Seção 4.4, r_c depende fracamente do descasamento inicial r_o e, devido sua magnitude observada no APÊNDICE D, pode ser aproximado por $r_c \cong 1$, para qualquer r_o . A obtenção de r_h bem como r_h' é imediata, pois a região curva do espaço de fase das simulações numéricas autoconsistentes é adequadamente descrita pela separatriz do modelo envolvendo partículas-testes dispersas inicialmente na região \mathcal{R} da equação (4.88).

As vantagens em proceder desta forma, isto é, obter os parâmetros do espaço de fase no equilíbrio do feixe da dinâmica de partículas-testes, são diretas. Os modelos por partículas-testes possuem $2 \cdot N_p + 2$ equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem, enquanto simulações numéricas autoconsistentes envolvem $2 \cdot N_b$ equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem. Portanto, o modelo por partículas-testes é — de baixa dimensionalidade — quando comparado com as simulações numéricas autoconsistentes, uma vez que $N_p \ll N_b$. As implicações computacionais são impactantes, sendo a integração do modelo por partículas-testes muito mais veloz que a integração envolvida nas simulações numéricas autoconsistentes.

A quantidade δ pode ser prontamente e consistentemente determinada ao se considerar os resultados obtidos na Seção 4.4 para a fração f de partículas no equilíbrio. Para obtenção da separatriz, as partículas-testes tiveram de ser dispersas em uma região \mathcal{R} específica, indicada na equação (4.88). No entanto, sendo estas últimas cujas órbitas são identificadas como as do halo observado nas simulações numéricas autoconsistentes, então no equilíbrio devem compor uma população de $f(s \geq \tau) \cdot N_b$ partículas. Assim, pela conservação do número de partículas do estado inicial não-estacionário que compõem o halo no estado final estacionário

$$\int_{r_o}^{r_o(1+\delta)} n_b(R, s = 0) d\mathbf{R}_\perp = f(s \geq \tau) \cdot N_b. \quad (4.90)$$

Sendo $\delta \ll 1$, então a equação logo acima pode ser aproximada por

$$n_b(R, s = 0) 2\pi r_o \Delta r_o \approx f(s \geq \tau) \cdot N_b, \quad (4.91)$$

a qual ao considerar-se a densidade inicial descrita pela equação (4.6) com $r_o \rightarrow r_o(1 + \delta)$ simplifica-se à seguinte expressão

$$\frac{\delta}{(1 + \delta)^2} \approx \frac{f(s \geq \tau)}{2}. \quad (4.92)$$

Invocando novamente a condição $\delta \ll 1$ e expandindo assim por séries de Taylor até primeira ordem o termo presente no lado esquerdo da equação recentemente apresentada, finalmente obtém-se que a quantidade δ assume

$$\delta \approx \frac{f(s \geq \tau)}{2}. \quad (4.93)$$

Por conseguinte, mediante a equação (4.93) acima, constata-se que δ pode ser consistentemente quantificada através da já determinada fração f de partículas que compõe o halo do feixe no equilíbrio. Observe que, como a fração f no equilíbrio depende do descasamento inicial, então δ também dependerá. Desta forma, para um descasamento de $r_o = 1,5$, considerando os resultados calculados para f apresentados na Seção 4.4, o valor de δ utilizado na elaboração tanto da Figura 21 como da Figura 22 foi $\delta(r_o = 1,5) \cong 0,0316$.

Toda a informação dinâmica do processo no qual o feixe atinge o equilíbrio está então contida em ressonâncias que naturalmente emergem de interações entre o feixe e partículas individuais. Desta forma, para extrair esta informação presente na topologia dinâmica do feixe, torna-se sugestivo então utilizar uma população de partículas-testes dispersas na região da equação (4.88). Caso esta população seja composta por uma quantidade razoável de partículas-testes, então quantidades médias sobre esta última podem ser calculadas. Haja vista que cada partícula-teste é governada pelo sistema de equação (3.11)-(3.12), torna-se possível não apenas obter as quantidades médias como determinar dinamicamente, em qualquer instante s , seus valores durante sua evolução no canal de confinamento.

Com o objetivo estabelecido no parágrafo anterior, para qualquer instante s , a média de uma quantidade χ arbitrária da densidade n_b , definida na equação (2.1), pode ser decomposta em

$$\langle \chi \rangle(s) = \frac{1}{N_b} \int_{n\u00facleo} n_b(R, s) \chi d\mathbf{R}_\perp + \frac{1}{N_b} \int_{halo} n_b(R, s) \chi d\mathbf{R}_\perp, \quad (4.94)$$

ou seja, integrações distintas sobre partículas que compõe o núcleo e o halo do feixe. A equação acima pode ser adequadamente reescrita mediante a fração de partículas f do halo definida na equação (4.16)

$$\langle \chi \rangle(s) = (1 - f) \langle \chi \rangle_{n\u00facleo} + f \langle \chi \rangle_{halo}, \quad (4.95)$$

na qual a notação compacta por parênteses angulosos foi adotada. Note que na equação (4.95) imediatamente anterior, todas as quantidades envolvidas são, em princípio, funções da coordenada axial s .

A equação (4.95) permite que qualquer quantidade média do feixe seja decomposta segundo contribuições provenientes das populações de partículas que formam o halo e o núcleo do feixe. Para o raio quadrático médio do feixe R_b^2 , estabelecendo $\chi = \mathbf{R}_\perp^2$ na equação (4.95) obtém-se

$$\langle \mathbf{R}_\perp^2 \rangle(s) = (1 - f) R_c^2 + f \langle \mathbf{R}_\perp^2 \rangle_{halo}, \quad (4.96)$$

a qual, da relação presente na equação (3.8), simplifica-se à

$$r_b^2(s) = (1 - f) r_c^2 + 2f \langle \mathbf{R}_\perp^2 \rangle_{halo}, \quad (4.97)$$

sendo, novamente, todas as quantidades dependentes da coordenada axial s . Da mesma forma pode-se proceder com os termos médios da definição da emitância do feixe presente na equação (2.34). Considerando $\chi = \mathbf{V}_\perp^2$ na equação (4.95)

$$\langle \mathbf{V}_\perp^2 \rangle(s) = (1 - f) \left(\frac{dR_c}{ds} \right)^2 + f \langle \mathbf{V}_\perp^2 \rangle_{halo} \quad (4.98)$$

obtém-se a expressão para a velocidade quadrática média das partículas do feixe. Inserindo as equações (4.96) e (4.98) na equação (2.34) finalmente constata-se que a emitância ϵ pode ser expressa por

$$\epsilon^2(s) = r_b^2 \left[(1-f) \left(\frac{dr_c}{ds} \right)^2 + 2f \langle \mathbf{V}_\perp^2 \rangle_{halo} - \left(\frac{dr_b}{ds} \right)^2 \right], \quad (4.99)$$

na qual a definição de raio RMS presente na equação (2.32) foi também utilizada.

As quantidades $\langle \mathbf{R}_\perp^2 \rangle_{halo}$ e $\langle \mathbf{V}_\perp^2 \rangle_{halo}$, presentes respectivamente nas equações (4.97) e (4.99), referentes à população de partículas do halo são ainda indeterminadas. Da equação (4.99), é visível que o progressivo aquecimento sofrido pelo feixe é resultado do comportamento crescente do termo $\langle \mathbf{V}_\perp^2 \rangle_{halo}$ durante o processo de confinamento magnético do feixe. Destaca-se que inicialmente o termo $\langle \mathbf{V}_\perp^2 \rangle_{halo}$ é nulo, pois o feixe neste instante é frio. Isto está em perfeito acordo com o que fora discutido na Seção 4.2, na qual quase toda a energia cinética média $1/2 \langle \mathbf{V}_\perp^2 \rangle$ do feixe no equilíbrio é armazenada pelas partículas quentes. A dinâmica da quantidade $1/2 \langle \mathbf{V}_\perp^2 \rangle$ com relação à s segundo a classificação desenvolvida é apresentada na Figura 13. Sendo as partículas quentes aquelas que residem na região curva e considerando o acordo satisfatório entre os espaços de fase resultantes das simulações numéricas autoconsistentes e das partículas-testes, apresentados respectivamente nas Figura 22a e Figura 22b, pode-se substituir qualquer quantidade χ referente à população de partículas do halo por

$$\langle \chi \rangle_{halo} \rightarrow \langle \chi \rangle_{particulas-testes}. \quad (4.100)$$

A similitude das órbitas das partículas-testes dispersas inicialmente em uma região \mathcal{R} definida na equação (4.88) com aquelas que formam o halo nas simulações numéricas autoconsistentes permite que qualquer média da densidade efetuada sobre partículas ditas do halo seja inferida de um modelo baseado em uma população de partículas-testes. Mais, como a fração de partículas f é uma quantidade pequena para qualquer valor de descasamento r_o , conforme já constatado na Seção 4.4, na presente abordagem pode-se desprezar a sua dinâmica e assim substituí-la em qualquer instante s por

$$f(s) \rightarrow f(s \geq \tau), \quad (4.101)$$

seu valor de equilíbrio. Os modelos introduzidos pelas equações (4.100) e (4.101) definem completamente as equações (4.97) e (4.99).

Uma descrição autoconsistente por partículas-testes pode ser então desenvolvida para o envelope r_b e para a emitância ϵ . Ao envelope r_b do feixe, pode-se atribuir uma equação diferencial ordinária de segunda ordem ao estilo da apresentada na equação (2.35). Inserindo nesta equação as expressões presentes nas equações (3.1) e (3.8) obtém-se

$$\frac{d^2}{ds^2} r_b(s) + \kappa_{z0} r_b(s) - \frac{K_b}{r_b(s)} - \frac{\epsilon^2(s)}{r_b^3(s)} = 0, \quad (4.102)$$

na qual foi permitido apenas que a emitância ϵ dependa neste momento da coordenada axial s , sendo descrita de forma consistente pela equação (4.99) sob as condições do modelo presente na

equação (4.100). Por sua vez, a dinâmica de cada uma das partículas-testes dispersas na região \mathcal{R} da equação (4.88) torna-se descrita pela equação (3.12)

$$\frac{d^2}{ds^2}R + \kappa_{zo}R = \begin{cases} K_b R/r_c^2, & \text{para } 0 \leq R \leq r_c \\ K_b/R, & \text{para } r_c < R \leq r_w' \end{cases} \quad (4.103)$$

com apenas a observância de que agora $r_b \rightarrow r_c$. O envelope relacionado às partículas do núcleo r_c pode ser obtido, para qualquer instante s da dinâmica, diretamente da equação (4.97)

$$r_c(s) = \sqrt{\frac{r_b^2(s) - 2f\langle \mathbf{R}_\perp^2 \rangle_{halo}}{1-f}}. \quad (4.104)$$

Ou seja, a população de partículas-testes deve ser excitada apenas pelo descasamento do conjunto de partículas que formam o núcleo do feixe. As ressonâncias observadas na Figura 22b, responsáveis pelo fornecimento de energia para a cinética das partículas-testes, são portanto proporcionadas pela dinâmica de $r_c(s)$ ao longo do canal de confinamento. Esta suposição é inteiramente válida ao lembrar que a população de partículas sobre a região curva do espaço de fase é muito tênue (vide Seção 4.2), fato este que implica a fração f ser pequena para qualquer coordenada s . O halo é de fato então uma população de partículas não-interagentes, interagindo apenas com a população de partículas que compõe o núcleo do feixe, compactamente representado no presente modelo por $r_c(s)$. Não somente as partículas do núcleo influenciam a dinâmica da população de partículas-testes que formam o halo mediante a equação (4.103) como vice-versa, a população quente do halo reage sobre a população fria do núcleo induzindo o decaimento do seu envelope, conforme especifica a equação (4.104).

Note que há uma realimentação negativa na interação descrita no parágrafo anterior entre a população de partículas-testes e o núcleo do feixe. Enquanto o núcleo oscilante r_c progressivamente excita a população de partículas-testes, a emitância ϵ total do sistema descrita pela equação (4.99) gradualmente cresce, já que $\langle \mathbf{V}_\perp^2 \rangle_{halo}$ também cresce. Segundo a equação (4.102) para o envelope r_b , por conservação de energia associado a esta quantidade, então r_b deve diminuir. No entanto, este processo não continua indefinidamente, uma vez que, além de r_c progressivamente diminuir, devido à equação (4.104), a quantidade $\langle \mathbf{V}_\perp^2 \rangle_{halo}$ satura, pois em uma escala de tempo próxima a τ_λ as órbitas das partículas-testes tornam-se completamente difusas — misturadas — no espaço de fase. Por este motivo, o envelope do feixe $r_b(s)$ ainda apresenta uma oscilação residual no equilíbrio.

O modelo em questão propicia que tanto o envelope do feixe r_b como a sua emitância ϵ sejam avaliados em qualquer instante da dinâmica s durante o seu processo de confinamento magnético. Para tanto, o algoritmo que deve ser seguido sintetiza-se à:

- 1) Definir o valor do descasamento r_o de interesse e então determinar a quantidade δ de forma arbitrária, apenas satisfazendo a condição $\delta \ll 1$. Adotar o reescalonamento presente na equação (4.4);
- 2) Atribuir a até $N_p = 100$ partículas-testes condições iniciais homogeneamente distribuídas na região \mathcal{R} definida na equação (4.88) e evoluir cada uma destas partículas-testes mediante o sistema de equação (3.11)-(3.12), considerando o descasamento inicial do feixe r_o definido no passo 1;
- 3) Confeccionar o espaço de fase desta população de partículas-testes mediante seções cumulativas de Poincaré quando $dr_b/ds = 0$ com $d^2r_b/ds^2 < 0$. Extrair deste espaço de fase o valor do parâmetro r_h , no caso de uma aproximação semicircular, ou adicionalmente de r'_h , no caso de uma aproximação semi-elíptica, e conjuntamente com $r_c \cong 1$, inseri-los no procedimento de obtenção da fração $f(s \geq \tau)$ descrito na Seção 4.4;
- 4) Com o valor de $f(s \geq \tau)$, recalculer a quantidade δ mediante a equação (4.93) e executar novamente os passos 1, 2 e 3. Caso o valor atual do parâmetro r_h , ou adicionalmente de r'_h , diverja substancialmente do anterior, retornar ao passo 3. Caso contrário, proceder para o passo seguinte. Salienta-se que dificilmente haverá divergências entre os parâmetros obtidos, pois a localização da separatriz é uma característica topológica do sistema de equação (3.11)-(3.12) inicializado na região \mathcal{R} ;
- 5) Finalmente, resolver o sistema de equação (4.102)-(4.103) com auxílio das equações (4.99) e (4.104), considerando a aproximação presente na equação (4.101).

Os resultados obtidos mediante o algoritmo enunciado anteriormente para um descasamento inicial do feixe de $r_o = 1,5$ e um número total de partículas-testes $N_p = 100$ são apresentados na Figura 23. Nesta condição de descasamento do feixe, a quantidade δ utilizada para definição da região \mathcal{R} foi $\delta = 0,0316$. Por conveniência, a estrutura do espaço de fase resultante da dinâmica da população de partículas-testes também é esboçada na Figura 22c, tendo esta sido confeccionada por seções cumulativas de Poincaré quando $dr_b/ds = 0$ com $d^2r_b/ds^2 < 0$. Constate o melhor acordo deste espaço de fase com o oriundo das simulações numéricas autoconsistentes. Ao permitir que a população de partículas-testes interaja com o núcleo do feixe, propiciando o decaimento do seu envelope r_c através da equação (4.104), uma descrição mais acurada da geometria do espaço de fase real, principalmente de suas ressonâncias, é obtida. Constate que as ressonâncias presentes na Figura 22c são um pouco menores e com contornos menos definidos, mais condizentes com o resultado provido pelas simulações numéricas autoconsistentes. Destaca-se novamente que as ressonâncias são um produto de como oscila a população de partículas que

compõe o núcleo do feixe. No espaço de fase da Figura 22b, as partículas não interagem com o feixe, o qual permanece oscilando com seu envelope r_b sem qualquer decaimento. Situação esta muito diferente da empregada na confecção do espaço de fase da Figura 22c, na qual o envelope do feixe r_c é alterado conforme a dinâmica da população de partículas-testes, aos moldes da equação (4.104).

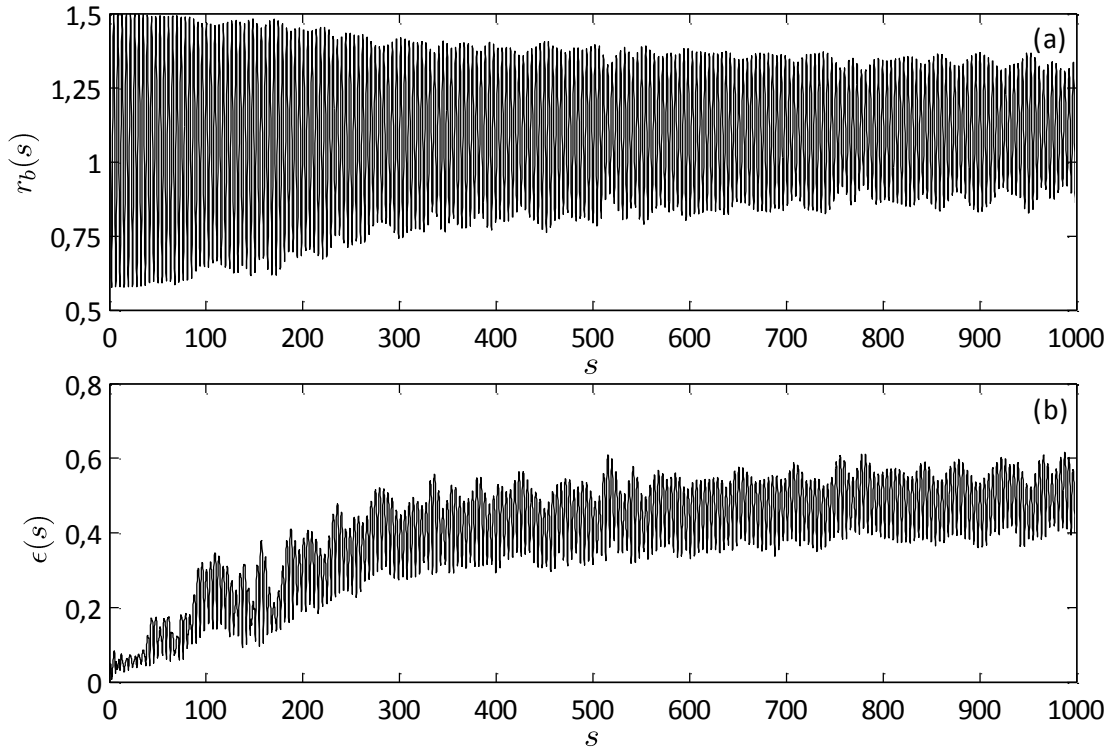


Figura 23: Resultados obtidos para dinâmica do feixe mediante o modelo por $N_p = 100$ partículas-testes inicializadas na região \mathcal{R} . Em (a) o seu envelope r_b e em (b) a sua emitância ϵ . Descasamento inicial do envelope do feixe investigado de $r_0 = 1,5$.

Na Figura 23a é apresentado a dinâmica do envelope do feixe r_b enquanto na Figura 23b é exposta a dinâmica da emitância do feixe ϵ referente ao modelo de baixa dimensionalidade desenvolvido nesta Seção. Os resultados são muito semelhantes aos obtidos mediante simulações numéricas autoconsistentes já apresentados no início do Capítulo 4, especificamente na Figura 5. Este fato permite que, mediante análise da curva dinâmica para a emitância ϵ do feixe, possa-se determinar os parâmetros b e c da função sigmóide atribuída à fração de partículas f na Seção 4.5, até então obtidos somente mediante ajuste numérico aos resultados oriundos da simulação numérica autoconsistente. Embora ambos possam ser obtidos, salienta-se que é apenas imprescindível obter o parâmetro c , já que o parâmetro b pode ser considerado aproximadamente constante, conforme já discutido na Seção 4.5.

No entanto, a concordância do modelo torna-se particularmente melhor na predição das quantidades no equilíbrio. Dinamicamente, o feixe modelado nesta Seção atinge o equilíbrio de forma prematura, em um tempo anterior ao computado mediante simulações numéricas autoconsistentes no Capítulo 4. Conforme a Figura 23b, observe que o valor da emitância modelada

ao início do processo de decaimento $\epsilon(s \cong 0)$ é muito semelhante ao valor da emitância simulado numericamente e autoconsistentemente em $s \cong 100$, $\epsilon(s \cong 100)$, presente na Figura 5b. Isto é, a concordância entre o modelo de baixa dimensionalidade desenvolvido nesta Seção e as simulações numéricas autoconsistentes ocorre com uma diferença temporal $\Delta s \cong 100$, para um descasamento inicial $r_o = 1,5$. Ratifica-se que a escala de decaimento do modelo é τ_λ enquanto a das simulações numéricas autoconsistentes é τ , definida na equação (4.81). Portanto, o modelo mediante partículas-testes não é capaz de descrever a escala τ_η , naturalmente presente nas simulações numéricas autoconsistentes e que, neste caso particular de descasamento r_o , possui um valor $\tau_\eta \cong 100$, segundo a tabela elaborada no APÊNDICE F. Valor este a propósito compatível com a diferença temporal Δs anteriormente verificada. Esta última constatação corrobora a informação introduzida pela equação (4.89) de que a escala de decaimento τ_λ é uma quantidade dinâmica apenas associada às ressonâncias estruturais resultantes do descasamento inicial do envelope r_o .

De fato, a escala de tempo τ_η está vinculada a outro mecanismo físico, associado ao tempo necessário para que as partículas individuais tornem-se aptas a serem excitas pelas ressonâncias. Este é o tópico motivador dos próximos Capítulos deste trabalho. Particularmente do Capítulo 5, no qual uma investigação detalhada da dinâmica do feixe inicialmente homogêneo será realizada no intervalo $0 \leq s \lesssim \tau_\eta$.

5 MECANISMO FÍSICO PRECURSOR DA TERMALIZAÇÃO EM FEIXES NÃO-NEUTROS

Uma questão crucial ao entendimento do processo que permite a formação do halo em feixes não-neutros de partículas carregadas permanece ainda pouco elucidada. Na Seção 4.6, uma população de partículas-testes foi utilizada para extrair quantidades topológicas existentes na interação do feixe com partículas individuais observadas tanto em simulações numéricas autoconsistentes como em experimentos. A abordagem por partículas-testes demonstrou ser bastante eficiente em não somente fornecer um entendimento físico à quantidade τ_λ como em descrever a região curva do espaço de fase que surge naturalmente nas simulações numéricas autoconsistentes, na qual residem as partículas ditas comporem o halo do feixe. Por comparação direta, esta região é muito semelhante à órbita separatriz do sistema de baixa dimensão envolvendo partículas-testes, fornecendo indícios suficientes de que somente há crescimento vultoso de emitância caso partículas acoplem ressonantemente com o movimento oscilatório do envelope do feixe r_b . Contudo é ainda obscura a razão pela qual partículas tornam-se habilitadas a interagirem ressonantemente com o feixe de partículas carregadas. Este é o motivo da presente discussão.

Talvez uma importante questão envolvendo crescimento de emitância em feixes inicialmente homogêneos não tenha sido suficientemente destacada. Conforme a Seção 3.2, feixes com uma densidade inicial homogênea tal qual a equação (3.6) não sofrem nenhum crescimento de sua emitância ϵ . Isto é demonstrado analiticamente pela equação (3.10). Mais, tal constatação pode ser estendida para qualquer densidade azimutalmente simétrica cuja dependência funcional seja apenas da quantidade $R/r_b(s)$. Ou seja, feixes arbitrários com uma densidade $n_b = n_b(R/r_b, s = 0)$, de formato invariante no tempo, não possuem nenhum crescimento de sua emitância ϵ . Todavia, este resultado é incompatível com aqueles obtidos por simulação numérica autoconsistente e apresentados em todo o Capítulo 4.

Incontestavelmente, tanto nas simulações numéricas autoconsistentes quanto nos experimentos envolvendo feixes homogêneos inicialmente descasados, a emitância ϵ é uma quantidade não-conservada da dinâmica. Sendo assim, seu valor de equilíbrio necessariamente difere do inicial, isto é, $\epsilon(s \geq \tau) \neq \epsilon(s = 0)$. Neste trabalho, o feixe é inicialmente frio, condição esta que implica em a emitância inicial ser $\epsilon(s = 0) = 0$. Ou seja, algo ocorre no intervalo $0 \leq s \lesssim \tau$ que induz o crescimento da emitância ϵ , tornando os resultados obtidos mediante simulações numéricas autoconsistentes e experimentos distintos daqueles previstos analiticamente. Conforme o Capítulo 4, o crescimento da emitância ϵ do feixe está diretamente associado à população da região curva do espaço de fase, quantificada dinamicamente pela fração $f(s)$. Portanto, uma vez identificada a região na qual residem as partículas quentes do halo, torna-se essencial à melhor

compreensão investigar as suas origens quando no estado inicial do feixe. Com este propósito, foi elaborada a Figura 24.

Na Figura 24a é apresentado o espaço de fase transversal do feixe em um instante posterior ao equilíbrio, a dizer $s \cong 902,5$, obtido mediante simulações numéricas autoconsistentes de um feixe com descasamento inicial $r_o = 1,5$. Nesta Figura, as partículas que compõe a região do halo no espaço de fase são destacadas em vermelho. Identificadas as partículas do halo, pode-se então rastreá-las ao estado inicial do feixe, analisando de qual região do feixe estas provêm. É direta a constatação: as partículas que, em qualquer instante $s \geq \tau$, comporão o halo são oriundas de toda a região interna do feixe. Ademais, estas partículas não somente provêm da região interna do feixe como aparentemente estão — homogeneamente — dispersas ao longo desta última. Esta observação é corroborada pela Figura 24c, na qual a densidade linear λ_h referente às partículas destacadas em vermelho na Figura 24a é computada no instante inicial $s = 0$.

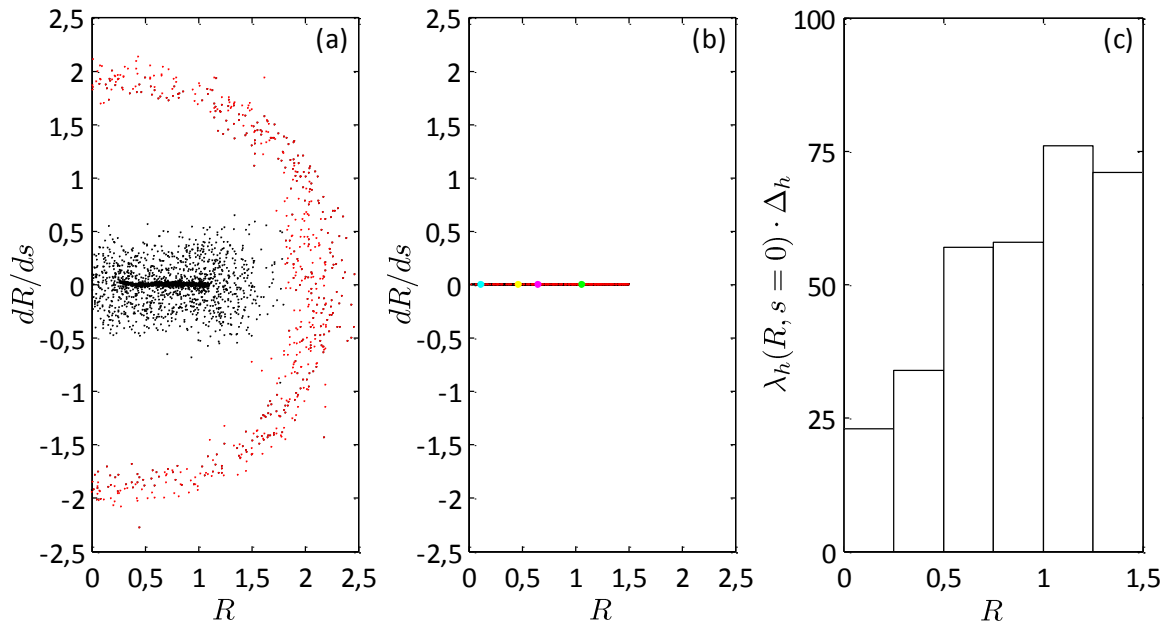


Figura 24: As partículas que compõe no equilíbrio (a) a região curva do espaço de fase em $s = 902,5$ rastreadas no estado inicial do feixe (b) em $s = 0$. Em (c) consta o histograma destas partículas no estado inicial $s = 0$ considerando $\Delta_h = 0,25$. Resultados providos por simulações numéricas autoconsistentes de $N_b = 10.000$ partículas com descasamento $r_o = 1,5$.

Note que a constatação anterior difere substancialmente da hipótese desenvolvida na Seção 4.6 para a origem das partículas do halo. Naquela Seção, as partículas que formam o halo foram identificadas como partículas-testes providas inicialmente de uma região \mathcal{R} restrita, externa ao feixe e matematicamente definida pela equação (4.88). É com estas condições iniciais que há o acoplamento ressonante entre o feixe e partículas individuais. É apenas com coordenadas iniciais dispersas nesta região \mathcal{R} que uma população de partículas-testes transitará sobre a órbita separatriz do sistema de equação (3.11)-(3.12), órbita esta muito semelhante às desenvolvidas pelas partículas do halo observada através das simulações numéricas autoconsistentes. Entretanto, é fato que as

partículas do halo provêm de toda a região interna ao feixe, uma vez que as simulações numéricas autoconsistentes contêm toda a fenomenologia do sistema em investigação. A abordagem por partículas-testes é um modelo de baixa dimensionalidade muito adequado — somente — para descrever o mecanismo físico que excita partículas individuais do feixe, transferindo energia macroscópica da oscilação do seu envelope r_b para a cinética caótica das partículas que compõem o halo. No entanto, o modelo por partículas-testes é insuficiente na descrição de como partículas individualmente tornam-se aptas a interagir com — ou suscetíveis à ação do — feixe. Portanto, há algum mecanismo físico adicional presente nas simulações numéricas autoconsistentes e nos experimentos (e não na abordagem por partículas-testes) que habilita partículas individuais a interagir ressonantemente com o movimento macroscópico do envelope r_b do feixe. Destaca-se que as ressonâncias estão presentes tanto nas simulações numéricas autoconsistentes quanto na abordagem por partículas-testes, uma vez que estas são consequência topológica do descasamento inicial r_0 do envelope do feixe. O mecanismo físico que não é contemplado no modelo de baixa dimensionalidade é aquele que propicia partículas individuais, oriundas de uma região interna ao feixe, serem influenciadas pelas ressonâncias naturalmente presentes no sistema. É este mecanismo físico que permite compreender porque há crescimento de emitância nas simulações numéricas autoconsistentes enquanto tal fenômeno não é observável analiticamente.

Torna-se interessante então perquirir minuciosamente o que ocorre na dinâmica do feixe do ponto de vista das simulações numéricas autoconsistentes no intervalo $0 \leq s \lesssim \tau$. Em outras palavras, é importante identificar por qual razão partículas inicialmente dispersas na região interna do feixe tornam-se habilitadas a interagir e acoplar com dinâmica macroscópica do envelope do feixe r_b e compor, no equilíbrio, o halo do feixe. Para instantes $s \cong 0$, o feixe apenas oscila devido ao seu descasamento inicial r_0 , possuindo um formato perfeitamente filamentar no espaço de fase. No entanto, durante o percurso do feixe no canal de confinamento, pode-se observar que gradualmente a sua representação no espaço de fase deforma-se, distanciando-se do formato filamentar original e tornando-se irregular ao longo do eixo dR/ds . Partículas do feixe que inicialmente oscilavam em fase, produzindo um formato perfeitamente filamentar, progressivamente perdem sincronismo, sofrendo um defasamento no espaço de fase e produzindo distorções ao longo do eixo dR/ds . O movimento coerente anterior do feixe, como um fluido, descaracteriza-se, necessitando ser representado no espaço de fase mediante também as coordenadas dR/ds . Tal comportamento consta na Figura 25, na qual seções transversais consecutivas do espaço de fase do feixe são apresentadas para um tempo anterior ao estado equilíbrio, $s \leq \tau$.

O defasamento entre as partículas que compõem o feixe somente ocorre nas simulações numéricas autoconsistentes pois estas não estão perfeitamente equidistantes umas das outras inicialmente. Macroscopicamente, a ausência de equidistância microscópica provoca o surgimento

de pequenas flutuações espaciais δn_b na densidade n_b , tornando-a fracamente não-homogênea. Portanto, cada partícula em órbita interna ao feixe estará sujeita a uma força exercida pelas demais — pelo feixe — que será quase-linear, possuindo uma contribuição fracamente não-linear. A ação desta componente não-linear da força é que propicia a progressiva perda de sincronismo entre as partículas constituintes do feixe. Note que inicialmente a densidade n_b do feixe era suposta homogênea, sendo então esta não-homogeneidade observada uma característica indesejada.

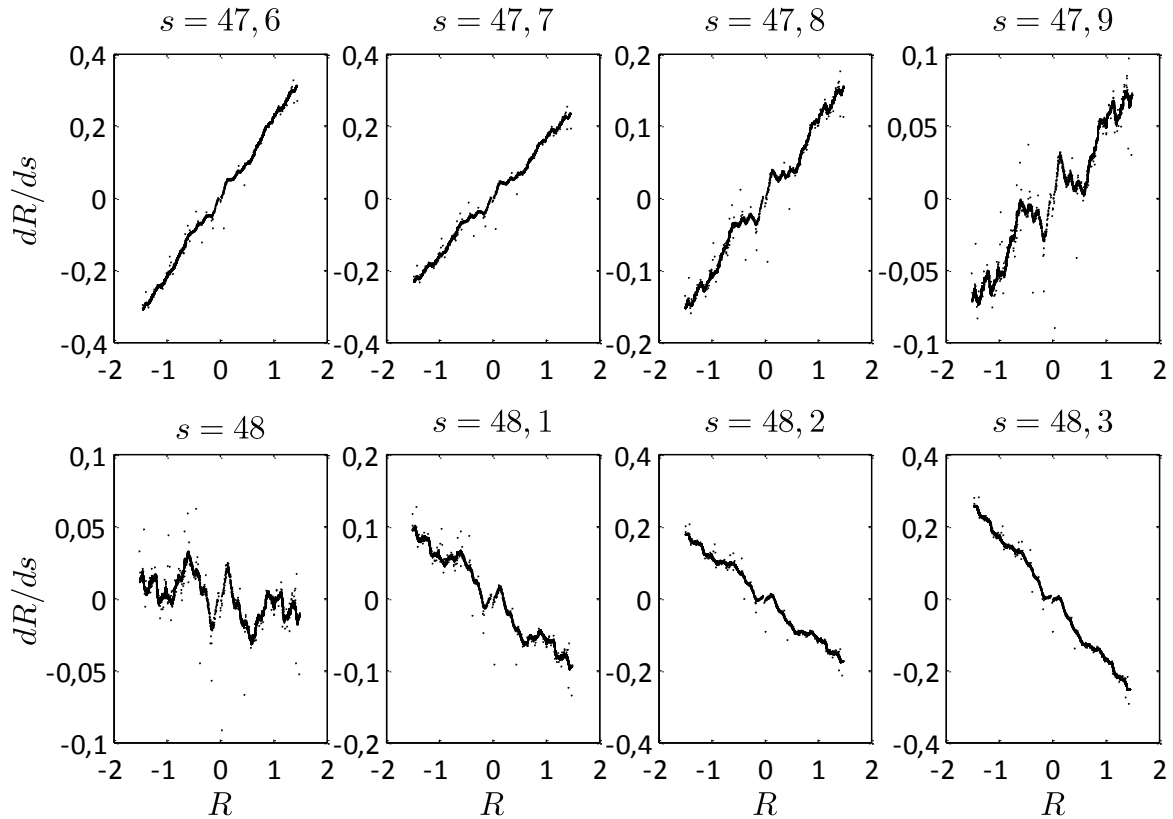


Figura 25: Sucessivos espaços de fase transversais do feixe durante o processo de confinamento magnético para $s \leq \tau$. Flutuações espaciais δn_b em sua densidade n_b induzem a formação de microjatos de partículas dispersos em toda a extensão do feixe. Resultados obtidos por simulações numéricas autoconsistentes de $N_b = 10.000$ partículas com descasamento inicial $r_0 = 1,5$.

De fato, a não-homogeneidade inicial é inerente ao processo de implementação numérica da densidade n_b , podendo ser minimizada, mas não completamente suprimida. É esta a causa da diferença entre os resultados providos pelas simulações numéricas autoconsistentes e os previstos analiticamente. Não há compatibilidade entre os resultados fornecidos por ambas pois as densidades do feixe não são exatamente idênticas inicialmente, sendo a implementada numericamente detentora de uma tênue não-homogeneidade. Embora a não-homogeneidade inicial seja quase desprezível, esta é determinante para que haja um crescimento substancial da emitância ϵ do feixe nas simulações numéricas autoconsistentes, proporcionando um equilíbrio completamente distinto daquele previsto analiticamente, no qual nenhum decaimento do envelope r_b do feixe é observado.

Uma discussão extensa a respeito de como o ato de implementar introduz não-homogeneidades espúrias é realizada no APÊNDICE A. Note que na abordagem analítica $\delta n_b = 0$.

A fraca não-homogeneidade espúria inicial pertinente a versão numérica da densidade n_b possui importantes implicações macroscópicas. Durante a oscilação do feixe no espaço de fase, algumas de suas partículas constituintes tornam-se gradualmente dessincronizadas do movimento macroscópico das demais outras. Após certo tempo de excursão do feixe no canal de confinamento, este fenômeno é intensificado. Cada compressão do feixe devido à ação do campo magnético confinador torna-se então crítica. Quando o feixe encontra-se em seu mínimo do envelope, $dr_b/ds = 0$ e $d^2r_b/ds^2 > 0$, as partículas dessincronizadas são compelidas a deslocar-se verticalmente, sobre os eixo dR/ds . No momento imediatamente posterior, quando $dr_b/ds > 0$ e $d^2r_b/ds^2 > 0$, isto é, quando o feixe inicia um processo de expansão, estas partículas sofrem um impulso, distanciando sua órbita cada vez mais daquelas que compõe o feixe. Este comportamento ocorre a cada ciclo S_b do envelope r_b , estando presente quase até o equilíbrio ser atingido e sendo responsável pela distorção do aspecto filamentar original do feixe evidenciado anteriormente.

As pequenas flutuações δn_b na densidade n_b de fato induzem a formação de microjatos de partículas no espaço de fase, sendo o diminutivo neste trabalho utilizado pois, no caso de uma densidade inicialmente quase-homogênea, os jatos não são tão proeminentes quanto na versão inicialmente não-homogênea.²⁸ A fraca não-homogeneidade inicial determina que elementos — ou anéis concêntricos, haja vista a simetria azimutal — infinitesimais adjacentes do feixe sofram um defasamento, devido a ação de uma força cuja natureza é fracamente não-linear. Em certo momento da dinâmica, estes discos se aproximam muito, colapsando e necessariamente impondo, por conservação, que partículas sejam ejetadas no espaço de fase. Interpretando cada um dos discos concêntricos como frentes de onda distintas, o colapso descrito anteriormente pode ser compreendido como uma quebra de onda. Neste momento, o feixe não pode ser mais descrito como um fluido, pois a sua densidade $n_b(R, s)$ torna-se multivalorada em relação à coordenada R na qual a ejeção ocorre. A formação dos microjatos indica o exato momento no qual o sistema deve ser analisado no contexto da Teoria Cinética.

Como a fraca não-homogeneidade inicial permeia toda a extensão do feixe, os microjatos ocorrem de forma uniforme sobre o feixe de partículas carregadas. As partículas oriundas dos microjatos podem ser distinguidas das demais outras pois a sua velocidade dR/ds não é mais desprezível. O mecanismo ejetor entrega às partículas pequena quantidade de energia cinética. Após certo tempo característico, de alguns ciclos S_b do envelope r_b , forma-se uma pequena população de partículas de pequena velocidade dR/ds , dispersas tenuemente no entorno do feixe. Esta população de partículas é exatamente aquela classificada como partículas mornas na Seção 4.2. São estas partículas que se tornam suscetíveis à ação das ressonâncias estruturais devido ao descasamento do

envelope do feixe. Conforme a Figura 13, a energia cinética média $1/2\langle\mathbf{V}_\perp^2\rangle$ destas partículas é desprezível, contribuindo, segundo a equação (2.33), muito pouco para o crescimento da emitância ϵ total do feixe. Contudo, esta população morna de partículas é essencial para a formação do halo, uma vez que somente após sua constituição as ressonâncias tornam-se atuantes, promovendo o surgimento da região curva no espaço de fase na qual residem as partículas do halo. As partículas somente sofrem a influência das ressonâncias pois, uma vez mornas, devido ao movimento oscilatório do feixe, são direcionadas a sua borda no espaço de fase, sendo fortemente excitadas pelas ressonâncias de forma análoga à população de partículas-testes da Seção 4.6.

Portanto, são os microjatos de partículas responsáveis pela composição progressiva da região retangular rarefeita e morna do espaço de fase no entorno do feixe. A escala característica de tempo na qual forma-se a população de partículas mornas é aquela τ_η anteriormente introduzida na Seção 4.5. Note que neste intervalo de tempo $0 \leq s \lesssim \tau_\eta$ da dinâmica do feixe, a ação das ressonâncias é ainda incipiente, pois o crescimento de emitância é ainda desprezível. A quantidade τ_η é assim a grandeza de tempo característica na qual apenas as não-homogeneidades espúrias atuam, permitindo que partículas anteriormente frias tornem-se mornas e assim sensíveis as influências das ressonâncias estruturais. A quantidade τ_η é destacada na Figura 26, na qual a dinâmica de 4 partículas aleatoriamente selecionadas no feixe são apresentadas. As condições iniciais destas partículas constam destacadas na Figura 25b pelas mesmas cores. Para $0 \leq s \lesssim \tau_\eta$, as partículas sofrem um aquecimento gradual, permitindo que no intervalo $\tau_\eta \lesssim s \lesssim \tau_\lambda$ sejam excitadas pelas ressonâncias e que suas órbitas, a partir de $s \gtrsim \tau_\lambda$, tornem-se completamente misturadas. Note que a quantidade τ_η , naturalmente presente na Figura 26 obtida mediante simulações numéricas autoconsistentes, não consta na dinâmica das partículas-testes expostas na Figura 21.

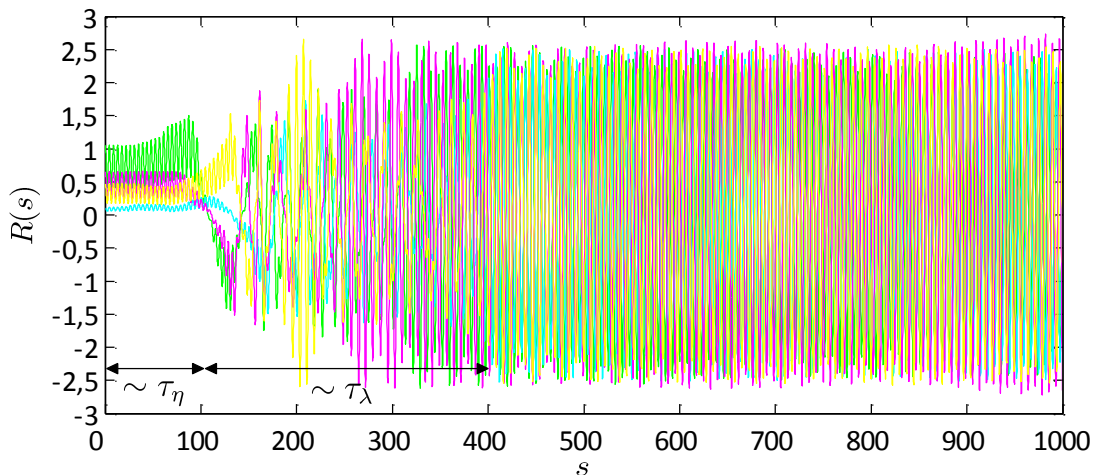


Figura 26: Dinâmica de 4 partículas distintas selecionadas aleatoriamente ao longo do feixe. No intervalo de tempo $0 \leq s \lesssim \tau_\eta$, as partículas recebem pequena quantidade de energia cinética e tornam-se mornas, permitindo que no intervalo $\tau_\eta \lesssim s \lesssim \tau_\lambda$ sejam excitadas pelas ressonâncias presentes na topologia do sistema. Resultados obtidos por simulações numéricas autoconsistentes de $N_b = 10.000$ partículas com descasamento inicial $r_0 = 1,5$.

Portanto, enquanto as ressonâncias estruturais do feixe são o mecanismo físico — formador — é a flutuação espacial da densidade δn_b e a conseqüente população de partículas mornas o mecanismo físico — precursor — do halo em feixes não-neutros inicialmente homogêneos e descasados. Tal constatação é suportada pelas simulações numéricas autoconsistentes e pelos experimentos.

Sucintamente, o mecanismo físico — precursor — que habilita partículas individuais a interagir ressonantemente com a dinâmica oscilatória do envelope r_b do feixe resume-se à:

- i) Na ausência de equidistância inicial entre as partículas constituintes do feixe, há o surgimento de pequenas flutuações espaciais δn_b em sua densidade n_b inicial. Cada partícula observa assim uma força exercida pelas demais que se torna fracamente não-linear. A não-linearidade nas interações permite que progressivamente certas partículas recebam uma pequena quantidade de energia cinética, populando uma região retangular no espaço de fase no entorno do feixe. Esta população ocorre mediante microjatos durante o intervalo de tempo $0 \leq s \lesssim \tau_\eta$;
- ii) O mecanismo descrito no estágio i) não é capaz de impor um decaimento observável no envelope do feixe r_b , uma vez que a quantidade de energia presente na população de partículas mornas é ainda pequena, condição esta que determina um inexpressivo crescimento da emitância ϵ do feixe;
- iii) No entanto, durante a dinâmica, as partículas que compõe a população morna são compelidas à borda do feixe — ao envelope do feixe descrito por r_b e dr_b/ds — no espaço de fase;
- iv) Havendo descasamento inicial do envelope r_b do feixe e estando as partículas próximas à sua borda no espaço de fase, então estas últimas passam a observar a ação do ponto fixo hiperbólico, sendo ejetadas para órbitas de grande amplitude no espaço de fase, formando a separatriz. Esse mecanismo sim é capaz de impor um forte decaimento no envelope, pois tais partículas ressonam com o movimento oscilatório do envelope do feixe r_b . Grande quantidade de energia do movimento macroscópico oscilatório do feixe é convertida em energia cinética para a dinâmica caótica de partículas individuais. Esta interação sim proporciona um crescimento acentuado na emitância do feixe, pois é do tipo ressonante;

As implicações resultantes da não-homogeneidade espúria intrínseca às simulações numéricas autoconsistentes de um feixe suposto homogêneo inicialmente como mecanismo físico determinante na formação do halo, comportamento não previsto analiticamente mas presente em experimentos, é o fator instigador da investigação a ser apresentada no Capítulo 6.

6 TERMALIZAÇÃO EM FEIXES INICIALMENTE NÃO-HOMOGÊNEOS COM SIMETRIA AZIMUTAL

O mecanismo físico indutor do equilíbrio em um feixe ultra-intenso de partículas carregadas depende diretamente das condições iniciais atribuídas à função distribuição F_b , a qual congrega toda informação a respeito do sistema — composto por partículas, campos e condições de contorno — sendo sua dinâmica adequadamente descrita pelo sistema de equações Vlasov-Maxwell (1.75) e (1.76). Entretanto, a forma como o equilíbrio é atingido geralmente é semelhante, sendo caracterizada pela formação de uma população difusa de partículas dispersas no entorno do feixe original, a qual é denominada de halo no âmbito da Física de Feixes.

No Capítulo 4, o comportamento de um feixe inicialmente homogêneo, azimutalmente simétrico, composto por partículas sem velocidade e sob confinamento magnético constante foi analisado segundo apenas o seu descasamento inicial $r_b(s=0) \neq r_{bo}$. Entretanto, no Capítulo 5 observou-se que embora o descasamento inicial seja o mecanismo formador do halo, de fato o mecanismo — precursor do seu surgimento — durante o confinamento são as não-homogeneidades espúrias que permeiam a implementação numérica da densidade de partículas $n_b(R, s=0)$, função esta atribuída inicialmente e que caracteriza completamente o feixe em questão neste estado. A fraca não-homogeneidade é irrevogável não apenas nas simulações numéricas autoconsistentes como também nos experimentos, haja vista o número finito de partículas constituintes e a sua intensa repulsão natural existente em feixes não-neutros reais implementados. Ampla discussão envolvendo esta questão no processo de simulação numérica é efetuada no APÊNDICE A. Esta importante constatação obtida no Capítulo 5 motiva o conteúdo do presente Capítulo.

Torna-se oportuno então investigar o comportamento de um feixe que seja inicialmente não-homogêneo por imposição. Assim, os efeitos que a não-homogeneidade inicial induz na dinâmica do feixe de partículas carregadas poderão ser identificados, por decorrência melhor compreendidos e talvez relacionados com o mecanismo precursor da termalização pertinente ao feixe homogêneo descrito no Capítulo 4. Ao impor um caráter inicialmente não-homogêneo ao feixe, pretende-se intensificar os efeitos da não-homogeneidade η sobre a dinâmica do sistema, observada de forma discreta no Capítulo 5 haja vista sua pequena magnitude, resultante de seu caráter espúrio intrínseco a implementação numérica.

O feixe de interesse neste Capítulo é suficientemente especificado por uma densidade n_b não-homogênea com formato parabólico, matematicamente descrita pela equação (3.13). Portanto, em semelhança à sua versão homogênea, a velocidade de cada partícula que compõe o feixe é inicialmente nula $\mathbf{V}_\perp(s=0) = \mathbf{0}$, um feixe logo completamente frio. Analogamente ao caso homogêneo do Capítulo 4, o feixe é mantido com o vínculo de simetria azimutal e submetido a uma focalização cuja constante de confinamento magnético κ_z é constante. Desta forma, as condições

descritas pela equação (3.1) continuam válidas para especificação corrente do sistema, sendo como decorrência a energia transversal total E_{\perp} descrita pela equação (2.23) ainda uma quantidade conservada do movimento como segue

$$\frac{1}{2}\langle \mathbf{V}_{\perp}^2 \rangle + \frac{1}{2}\kappa_{zo}\langle \mathbf{R}_{\perp}^2 \rangle + \mathcal{E}_F(s) = E_{\perp}, \quad (6.1)$$

sendo a energia potencial efetiva ainda definida por

$$\frac{1}{2}\langle \mathbf{U}_{\perp}^2 \rangle \equiv \frac{1}{2}\left(\kappa_{zo}\langle \mathbf{R}_{\perp}^2 \rangle + 2\mathcal{E}_F(s)\right). \quad (6.2)$$

Uma não-homogeneidade inicial do tipo parabólica é bastante conveniente ao desenvolvimento de modelos analíticos, propósito deste Capítulo, uma vez que sua forma é polinomial. Para que não haja dinâmica do envelope r_b , torna-se oportuno também considerar o feixe casado inicialmente,⁵⁵ isto é $r_b(s=0) = r_{bo}$. Ou seja, no princípio, as partículas estarão sujeitas a apenas transitar em uma região $0 \leq R \leq r_{bo}$, sendo os extremos do intervalo quantidades independentes do tempo, constantes. Note que esta característica não pertence ao feixe homogêneo do Capítulo 4, no qual o envelope r_b era uma função da coordenada axial s e, portanto, partículas inicializadas internamente ao feixe estavam aptas a excursionar em uma região cujo domínio era dependente do tempo, $0 \leq R \leq r_b(s)$, sendo $r_b(s)$ plenamente descrito pela equação (3.19). Portanto, para o presente caso não-homogêneo, a equação (3.19) para o envelope do feixe então se torna irrelevante na descrição dinâmica do sistema, sendo este último influenciado apenas pelo valor da magnitude da não-homogeneidade η atribuída para a densidade n_b da equação (3.13), pois tanto a dependência da perveância K_g como da constante de confinamento magnético κ_{zo} podem ser suprimidas mediante adoção do reescalonamento descrito no APÊNDICE B.

Portanto o ato de casar inicialmente o envelope r_b do presente feixe não-homogêneo mediante $r_b(s=0) = r_{bo}$ auxilia mitigar os efeitos do descasamento inicial r_o — e assim os efeitos das ressonâncias estruturais discutidas na Seção 4.6 — em favor apenas dos efeitos da magnitude da não-homogeneidade η . Note que aqui é desnecessário atribuir o subscrito o para designar o valor da quantidade η no estado inicial, em $s=0$. A magnitude da não-homogeneidade η é apenas definida em $s=0$, quando é externamente arbitrada para especificar a densidade n_b parabólica, a qual é estabelecida como condição inicial ao feixe. Para $s > 0$, de fato tem-se apenas um conjunto de partículas que evolui segundo o método de simulação descrito no APÊNDICE A, sendo a magnitude da não-homogeneidade η uma quantidade não mais definida. Isto é muito diferente da investigação realizada no Capítulo 4 para um feixe inicialmente homogêneo, na qual o envelope do feixe r_b era uma quantidade possível de ser calculada em qualquer instante s mediante estatística — descrita pela equação (3.8) — sobre a densidade n_b . Desta forma, o envelope r_b no Capítulo 4 era realmente

uma função da coordenada axial s , sendo relevante designar seu valor no estado inicial mediante a equação (4.5).

A dinâmica típica de um feixe real inicialmente não-homogêneo durante seu percurso no canal de confinamento solenoidal a campo magnético constante é apresentada na Figura 27. Tais resultados foram obtidos mediante simulações numéricas autoconsistentes das interações existentes entre as partículas que compõe o feixe empregando a Lei de Gauss, método este de simulação que é discriminado em detalhe no APÊNDICE A. Como condição inicial, considerou-se a distribuição espacialmente não-homogênea presente na equação (3.13) com envelope inicial $r_b(s=0) = r_{bo}$, casado conforme análise efetuada nos parágrafos anteriores, e magnitude da não-homogeneidade $\eta = 0,5$, ou seja, um feixe 50% não-homogêneo parabolicamente. Salienta-se novamente que se considerou a energia cinética inicial de todas as partículas nula, uma distribuição portanto inicialmente sem temperatura, um feixe frio. Como consequência, tem-se então que a emitância inicial $\epsilon(s=0)$ também é nula, uma vez que, segundo a sua definição presente em (2.33), $\mathbf{V}_\perp(s=0) = 0$ para todas as partículas que compõem a distribuição. Analogamente ao caso homogêneo, o feixe então é dominado pelos efeitos da perveância, parâmetro este que, conforme já comentado na Seção 1.2, quantifica a intensidade das forças repulsivas entre as partículas constituintes. O feixe considerado é composto por um total de $N_b = 10.000$ partículas, número este suficiente para assegurar convergência aos resultados numéricos obtidos. A energia total presente no feixe foi monitorada durante toda a simulação, sendo a dissipação numérica resultante do processo de integração desprezível nas escalas de tempo analisadas.

O raio RMS $R_b(s)$ e a emitância $\epsilon(s)$ do feixe são apresentados respectivamente na Figura 27a e Figura 27b. Observe que, embora inicialmente ao envelope do feixe r_b tenha sido atribuído o seu valor de equilíbrio r_{bo} , de fato, conforme demonstra a Figura 27a, uma oscilação residual de pequena amplitude ainda persiste para o raio RMS R_b do feixe. O motivo pelo qual isto ocorre será elucidado na Seção 6.5, quando uma abordagem Lagrangeana será desenvolvida para descrever o feixe. No princípio da dinâmica do feixe no canal de confinamento, o seu raio RMS R_b oscila em um intervalo compreendido entre seu valor máximo e o seu mínimo, adequadamente descrito por $0,76 \leq R_b \leq 0,66$. No entanto, quando $s \cong 300$, o raio RMS R_b sofre um pequeno decaimento, desenvolvendo assim, para tempos posteriores, uma oscilação compreendida em um novo intervalo, mais restrito, definido por $0,75 \leq R_b \leq 0,68$, no qual permanecerá indefinidamente. Comportamento dinamicamente semelhante é observado na Figura 27b para a emitância ϵ . Para $s \leq 300$, a emitância ϵ oscila de forma regular em um intervalo $0,09 \leq \epsilon \leq \epsilon_{min}(s)$, apenas possuindo um progressivo aumento em seus valores mínimos ϵ_{min} durante a evolução do feixe. Entretanto, para $s \cong 300$, o valor mínimo torna-se quase idêntico o seu valor máximo de oscilação $\epsilon_{min} \cong 0,09$, havendo para instantes posteriores da dinâmica uma rápida transição no valor da

emitância que atinge $\epsilon(s \cong 300) \cong 0,11$, permanecendo também estável neste valor indefinidamente. Diferentemente do raio RMS R_b do feixe, para a emitância ϵ também há um colapso de seu comportamento dinâmico em $s \cong 300$. Pode-se observar que para instantes imediatamente posteriores a $s \cong 300$, a emitância ϵ transita de uma oscilação cujo formato é regular para uma outra cujo formato é irregular. O instante $s \cong 300$ segrega comportamentos tanto do raio RMS R_b quanto da emitância ϵ que não somente são qualitativamente como quantitativamente distintos.

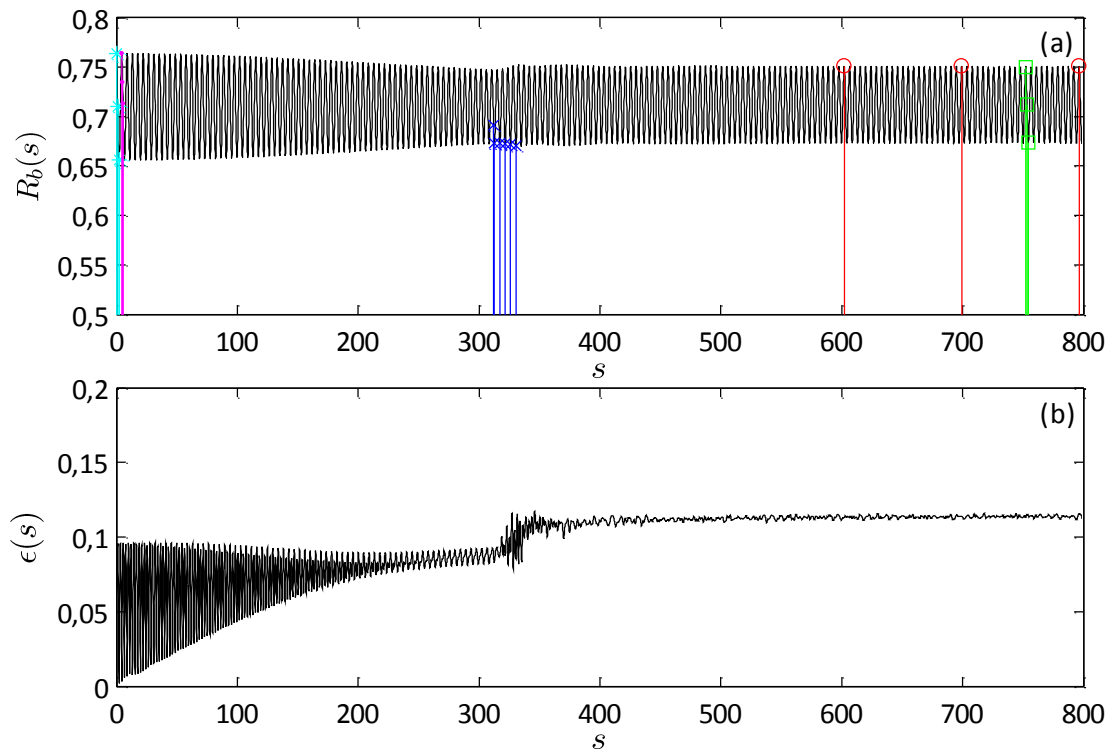


Figura 27: Simulações numéricas autoconsistentes para um feixe inicialmente não-homogêneo parabolicamente com $K_g = \kappa_{z0} = 1$, $r_b(s = 0) = r_{b0}$, $\eta = 0,5$ e composto por $N_b = 10.000$ partículas. Em (a) consta a dinâmica do raio RMS $R_b(s)$ e em (b) consta a dinâmica para a emitância $\epsilon(s)$.

Torna-se então evidente que, também no presente caso de uma densidade n_b inicialmente não-homogênea, há a existência de dois estados distintos que caracterizam o comportamento do feixe. Um inicial, não-estacionário, que durante a dinâmica do feixe no canal de confinamento modifica-se, transitando para um estado final, no qual o caráter dinâmico de grandezas pertinentes ao feixe permanece inalterado indefinidamente, podendo também, em analogia ao caso homogêneo, ser denominado de estacionário e/ou equilíbrio. Ambos estados são mediados por uma transição abrupta em $s = \tau$, sendo τ a escala de tempo característica na qual ocorre a transição. Abstratamente, o significado de τ é idêntico a aquele definido oportunamente no Capítulo 4 para um feixe inicialmente homogêneo. A quantidade τ designa a escala característica de tempo na qual o feixe atinge seu estado de equilíbrio, sendo irrelevante deste modo qual a instabilidade inicial é

precursora de tal. Para os resultados apresentados na Figura 27, quando $\eta(s=0) = 0,5$, a escala de tempo pode ser identificada como $\tau \cong 300$.

Note que, diferentemente do executado no Capítulo 4, a discussão desenvolvida nos parágrafos anteriores envolvendo grandezas do feixe restringiu-se a apenas o raio RMS R_b e a emitância ϵ . Uma análise mais abrangente contemplando a evolução da energia potencial efetiva média $1/2 \langle \mathbf{U}_\perp^2 \rangle$, energia cinética média $1/2 \langle \mathbf{V}_\perp^2 \rangle$ e o raio RMS médio $\bar{R}_b(s)$, adequadamente substituindo o raio médio do envelope $\bar{r}_b(s)$, poderia também ser apresentada. Considerando que o entendimento da dinâmica destas quantidades foi suficientemente explorado no Capítulo 4 e é diretamente extensível ao caso de um feixe inicialmente não-homogêneo, por síntese, seus gráficos serão omitidos e apenas uma análise sucinta será proferida.

Concretamente, o decaimento do raio RMS R_b do feixe impõe uma diminuição do valor da energia potencial efetiva média $1/2 \langle \mathbf{U}_\perp^2 \rangle$ no equilíbrio. Sendo a conservação de energia uma característica também pertinente ao presente feixe não-homogêneo, segundo a equação (6.1), então — necessariamente no equilíbrio — há um conseqüente aumento no valor da energia cinética média $1/2 \langle \mathbf{V}_\perp^2 \rangle$. Qualquer aumento na energia cinética média $1/2 \langle \mathbf{V}_\perp^2 \rangle$ indica que partículas, as quais inicialmente por imposição eram frias, tornam-se progressivamente mais velozes, mais quentes. O crescimento da energia cinética média $1/2 \langle \mathbf{V}_\perp^2 \rangle$ implica em um crescimento da emitância ϵ do feixe, tal como descreve a equação (2.33), estando em pleno acordo com o observado na Figura 27b. Embora menos perceptível quando comparado com a versão homogênea do feixe, o raio RMS médio $\bar{R}_b(s)$ também sofre um incremento no equilíbrio quando comparado com seu valor no estado inicial. O crescimento de $\bar{R}_b(s)$ durante a evolução do feixe no canal de confinamento indica que certa quantidade de suas partículas sofre defasamento, desvinculando sua dinâmica das demais outras constituintes, expandindo suas órbitas no espaço de fase e proporcionando o crescimento abrupto da emitância ϵ em $s \cong 300$ e o seu comportamento irregular posteriormente observado para $s \gtrsim 300$. Por final, em analogia ao verificado no Capítulo 4, a correspondência dinâmica entre a emitância $\epsilon(s)$, a energia cinética média $1/2 \langle \mathbf{V}_\perp^2 \rangle$ e o valor médio axial do raio RMS $\bar{R}_b(s)$ pode ser constatada, demonstrando que também no feixe inicialmente não-homogêneo estas quantidades estão intimamente relacionadas.

A transição entre o estado inicial não-estacionário e o estado final estacionário, de equilíbrio, de fato é muito mais abrupta no presente feixe não-homogêneo quando comparada com aquela ocorrida no caso homogêneo. Torna-se então indubitavelmente oportuno analisar em detalhe a dinâmica do feixe no canal de confinamento magnético quando $s \cong 300$. A Figura 28 apresenta uma seqüência de espaços de fase transversais capturados da dinâmica do feixe não-homogêneo durante sua excursão no canal de confinamento magnético para instantes de tempo imediatamente

após $s \cong 300$. Sendo o feixe inicialmente não-homogêneo, elementos – ou anéis concêntricos haja vista a simetria azimutal – infinitesimais adjacentes estão submetidos a uma força de natureza não-linear cuja intensidade é diretamente relacionada com a magnitude da não-homogeneidade η atribuída à densidade n_b . A força não-linear atuante determina que cada anel oscile com uma frequência distinta. A perda progressiva de sincronismo na oscilação de anéis infinitesimais consecutivos invariavelmente, após certa escala característica de tempo, provocará sua superposição, proporcionando a ejeção de partículas no espaço de fase. A formação dos jatos de partículas é uma consequência natural imposta pela equação da continuidade da densidade n_b do feixe. Neste momento, o feixe não se comporta mais como um fluido, tornando-se necessário expandir a sua representação no espaço de fase através de mais uma coordenada independente, a velocidade dR/ds . O feixe deve ser então descrito no espaço de fase sobre a égide da Teoria Cinética. Em analogia com a Mecânica dos Fluidos, a dinâmica de cada um dos anéis adjacentes pode ser interpretada como uma frente de onda distinta de densidade, sendo a sua superposição um indicativo do surgimento do fenômeno de quebra de onda, na qual partículas não possuem energia cinética suficiente para transpor o potencial da frente de onda incidente.²⁴ A escala de tempo na qual a primeira quebra de onda ocorre na dinâmica do feixe é neste trabalho representada por τ_{q0} .

A Figura 28a apresenta o caráter do espaço de fase típico do feixe imediatamente anterior a ocorrência da primeira quebra de onda, sendo obtida no instante $s = 312,0$. Tal instante de tempo antecede a primeira superposição de anéis infinitesimais adjacentes, fato este representado pela formação de uma deformação aguda — um pico — vertical. Para um instante de tempo posterior, a dizer $s = 312,7$, a Figura 28b apresenta a ocorrência do primeiro jato de partículas. Desencadeia-se então um processo permanente de ejeção de partículas. A cada período S_b do raio RMS R_b um novo jato se forma, sendo sua ocorrência imediatamente anterior a cada compressão máxima sofrida pelo feixe devido ao campo magnético, quando $dR_b/ds = 0$ e $d^2R_b/ds^2 > 0$. A Figura 28c apresenta o espaço de fase do feixe em $s = 317,2$ quando ocorre a formação do segundo jato, podendo também ainda ser observada a evolução das partículas provindas da primeira ejeção. Respectivamente, a Figura 28d, a Figura 28e e a Figura 28f apresentam a ocorrência do terceiro jato em $s = 321,6$, do quarto jato em $s = 326,0$ e do quinto jato em $s = 330,4$. O momento em que cada uma das seções transversais do espaço de fase do feixe da Figura 28 foram capturadas são destacadas com barras e cruzes azuis na dinâmica do raio RMS R_b do feixe da Figura 27a.

Os jatos de partículas presentes na Figura 28 são muito mais proeminentes que os observados na Figura 25, pertencentes a um feixe inicialmente homogêneo e que no Capítulo 5 foram compativelmente denominados de microjatos. Isto se deve ao fato de na presente análise a não-homogeneidade inicial ser uma qualidade imposta à densidade n_b do feixe, condição esta muito diferente do caso homogêneo, no qual a não-homogeneidade inicial permeava de forma espúria — e

portanto fracamente — a densidade n_b do feixe. Quanto maior a magnitude da não-homogeneidade η , mais precocemente e expressivos serão os jatos originados.⁵⁶ No entanto, à medida que certo número de jatos ocorre durante a evolução do feixe no canal de confinamento, a sua densidade n_b torna-se cada vez mais homogênea. A magnitude da não-homogeneidade por sua vez torna-se menor, implicando que os jatos desenvolvidos tornem-se também cada vez mais discretos. Neste momento, uma similaridade na formação dos jatos de partículas no presente feixe inicialmente não-homogêneo com aqueles observados em feixes inicialmente homogêneos é verificada. Os jatos proeminentes anteriormente observados tornam-se cada vez menores, fazendo jus à denominação de microjatos. Esta diminuição progressiva da amplitude dos jatos persiste até que ocorra a sua extinção, situação na qual o feixe pode ser considerado aproximadamente homogêneo.

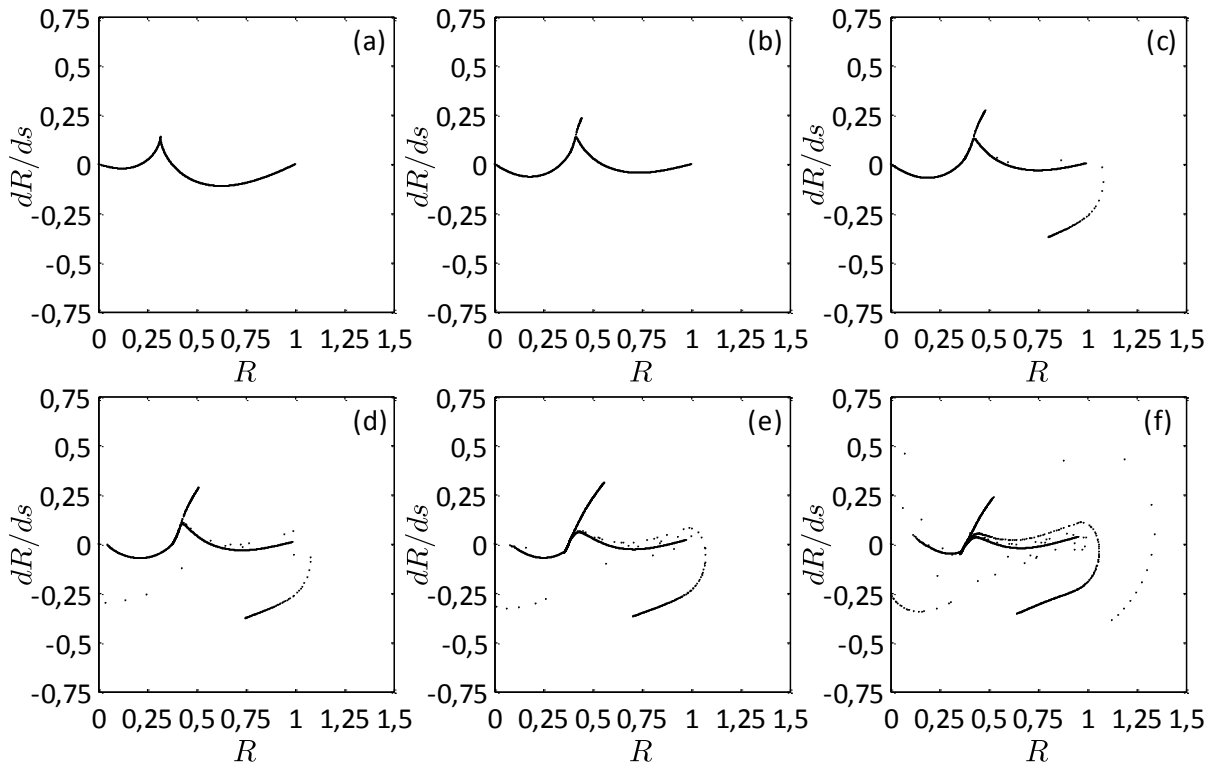


Figura 28: Sucessivas seções transversais do espaço de fase do feixe caracterizando as ejeções de partículas. Em (a) $s = 312,0$ o espaço de fase imediatamente antes da primeira ejeção, em (b) $s = 312,7$ após o primeiro, em (c) $s = 317,2$ após o segundo, em (d) $s = 321,6$ após o terceiro, em (e) $s = 326,0$ após o quarto e em (f) $s = 330,4$ após o quinto jato de partículas formado. Resultados obtidos por simulações numéricas autoconsistentes com $K_g = \kappa_{z0} = 1$, $r_b(s = 0) = r_{b0}$, $\eta = 0,5$ e $N_b = 10.000$ partículas.

Convém verificar se o conceito de equilíbrio desenvolvido de forma abstrata e geral no Capítulo 4 para um feixe inicialmente homogêneo ainda continua válido. Ou seja, para que o estado do feixe observado durante sua dinâmica quando $s \gtrsim 300$ seja de equilíbrio é necessário que a geometria do seu espaço de fase seja invariante para qualquer instante de tempo s após a transição. No equilíbrio, topologicamente, nenhuma órbita nova surge, permanecendo a estrutura do espaço de fase intacta para qualquer instante s de tempo. Por este motivo foi elaborada a Figura 29.

A Figura 29 congrega 3 seções do espaço de fase transversal do feixe computadas de forma consecutiva quando o raio RMS R_b atinge seu valor máximo. Os momentos no qual são extraídas tais seções do espaço de fase são destacados através de barras e círculos vermelhos na dinâmica do raio RMS R_b do feixe presente na Figura 27a. A primeira seção, exposta na Figura 29a, foi extraída da evolução axial do feixe quando $s = 602,1$, algum tempo após o decaimento do seu raio RMS $R_b(s)$. As demais seções foram extraídas em $s = 699,2$, para Figura 29b e em $s = 796,3$, para Figura 29c. Mediante análise destas 3 seções, pode-se observar que as regiões ocupadas pelas partículas permanecem as mesmas, requisito este o qual explicita que também em um feixe inicialmente não-homogêneo o equilíbrio é atingido mediante a invariância topológica do seu espaço de fase.

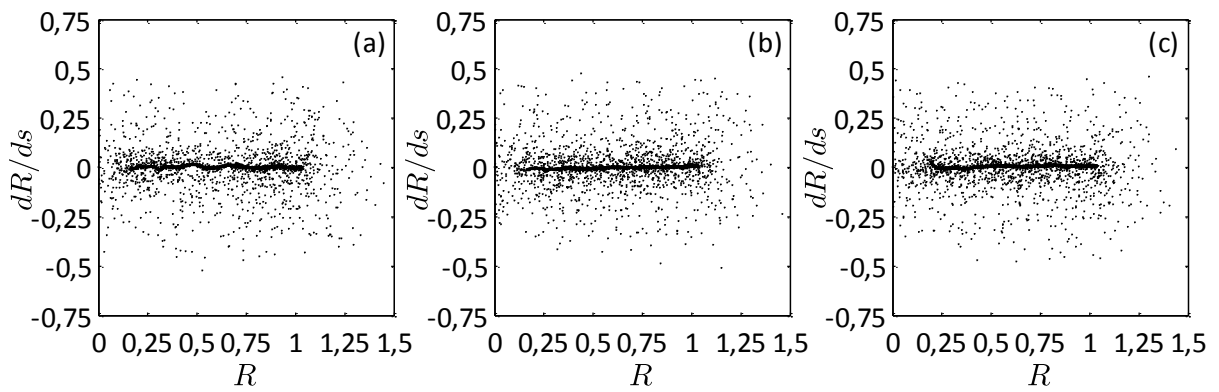


Figura 29: Seções transversais do espaço de fase do feixe obtidas mediante simulações numéricas autoconsistentes com $K_g = \kappa_{z0} = 1$, $r_b(s = 0) = r_{b0}$ e $\eta = 0,5$ para um feixe composto de $N_b = 10.000$ partículas. As seções foram capturadas em (a) $s = 602,1$, (b) $s = 699,2$ e (c) $s = 796,3$.

Embora os pontos anteriormente escolhidos para análise do espaço de fase do feixe na Figura 27 correspondam aos máximos de seu raio RMS $R_b(s)$, complementarmente, em analogia ao executado com o feixe inicialmente homogêneo do Capítulo 4, diversos outros instantes s da dinâmica podem ser utilizados para avaliar a topologia do espaço de fase do feixe. Na Figura 30, são apresentadas seções transversais do espaço de fase do feixe quando o seu raio RMS encontra-se consecutivamente em seu máximo local, em seu valor médio \bar{R}_b e em seu mínimo local. Estes valores da coordenada axial s constam destacados com barras e quadrados verdes na dinâmica de $R_b(s)$ presente na Figura 27a. A seção apresentada na Figura 30a foi extraída em $s = 752,2$, a apresentada na Figura 30b foi extraída em $s = 753,4$ e a apresentada na Figura 30c foi extraída em $s = 754,4$. Note que, a menos de uma microrotação, estas seções são absolutamente muito semelhantes no aspecto geométrico. Destaca-se que a menor amplitude de rotação observada nesta Figura para o feixe não-homogêneo quando comparada com a Figura 10 para o feixe homogêneo é produto do casamento inicial imposto ao seu envelope r_b . Portanto, a invariância geométrica permanece presente, após o decaimento, para qualquer valor de coordenada s . Ainda, como se observará nas próximas seções, esta característica é válida e assim extensível para os demais valores de magnitude

da não-homogeneidade η de interesse neste Capítulo. Desta forma, qualquer modelo desenvolvido e embasado sobre estes argumentos é lido para qualquer η .

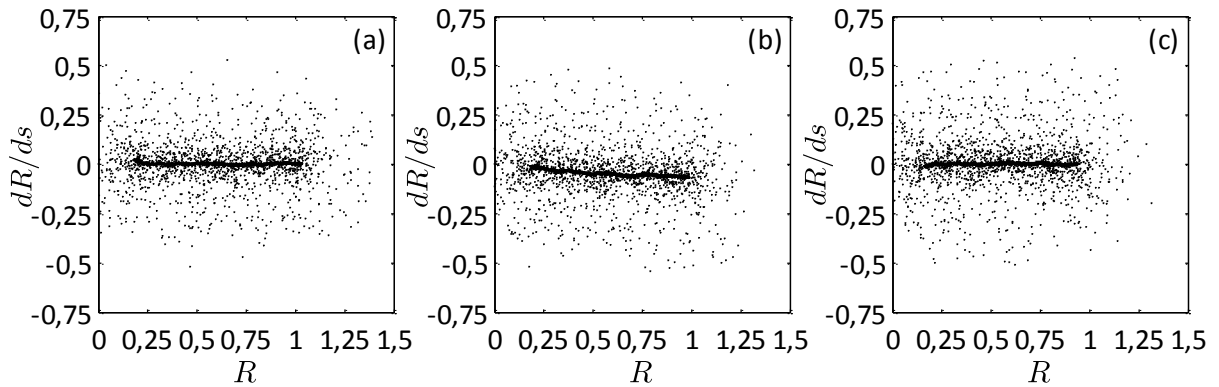


Figura 30: Seções transversais do espaço de fase do feixe obtidas mediante simulações numéricas autoconsistentes com $K_g = \kappa_{z0} = 1$, $r_b(s = 0) = r_{b0}$ e $\eta = 0,5$ para um feixe composto de $N_b = 10.000$ partículas. As seções foram capturadas em (a) $s = 752,2$, (b) $s = 753,4$ e (c) $s = 754,4$.

Cabe recordar que a condição de invariância geométrica é uma condição necessária mas não suficiente para caracterizar o estado do feixe após o seu decaimento como topologicamente estacionário. Este foi um importante enunciado do Capítulo 4, efetuado no momento da análise de um feixe inicialmente homogêneo. No equilíbrio, também é necessário ainda que a densidade de partícula em cada uma das distintas regiões do espaço de fase permaneça constante, independente explicitamente da coordenada axial s . As partículas individualmente podem permanentemente explorar todo o espaço de fase, mas a sua quantidade em cada região deve permanecer aproximadamente invariante ao longo do tempo.

Tal como desenvolvido no Capítulo 4, uma forma de averiguar a dinâmica da densidade de partículas em cada região é selecionar uma destas e computar o número de partículas a esta pertencente em cada instante de tempo s . Por motivos que se tornarão claros na Seção 6.2, é muito oportuno quantificar as partículas pertinentes à nuvem que circunda a região filamentar horizontal sobre o eixo das coordenadas radiais R , identificável tanto na Figura 29 quanto na Figura 30. Na Figura 31, é apresentada a evolução desta quantidade — neste Capítulo representada por N_m — com relação à coordenada axial s . Inicialmente, o número de partículas que compõe a nuvem, consistentemente, é nulo, assumindo $N_m(s = 0) = 0$. No entanto, para instantes posteriores, N_m cresce de forma acentuada até atingir um valor máximo em $s \cong 300$. O número de partículas N_m da nuvem sofre então uma drástica diminuição, seguido de um novo e acentuado crescimento. As alterações abruptas no valor de N_m tornam-se então gradativamente menos significativas até seu desaparecimento por completo, em $s \cong 550$. Neste momento, o número de partículas da nuvem estabiliza em seu valor de equilíbrio $N_m(s \rightarrow \infty) \cong 1244$.

Observe que o comportamento dinâmico de N_m no presente feixe homogêneo é distinto daquele verificado na Figura 11 para a quantidade N_h de um feixe inicialmente homogêneo. Na Figura 11, a quantidade N_h cresce de forma monótona, sendo o seu valor máximo aquele atingido no equilíbrio. Isto é muito diferente do comportamento observado na Figura 31 para a quantidade N_m de interesse aqui ao feixe inicialmente não-homogêneo, a qual apresenta um crescimento acentuado seguido de um progressivo decrescimento, sendo o seu valor máximo atingido distinto daquele computado no equilíbrio. O entendimento deste comportamento requer reavaliar a seqüência de espaços de fase apresentada na Figura 28. Anteriormente a formação do primeiro jato de partículas, a densidade n_b é distorcida pelas forças internas intrinsecamente não-lineares de sorte que quase todas suas partículas são compelidas a ocupar a região do espaço de fase na qual no equilíbrio encontra-se a nuvem. Esta distorção pode ser identificada como a formação dos picos já descritos e observados na seqüência de retratos do espaço de fase do feixe presente na Figura 28. No entanto, após a formação do primeiro jato, a dilatação natural sofrida pelo feixe sobre o eixo dR/ds torna-se cada vez menor a cada jato subsequente até que o valor de equilíbrio seja atingido. Cada pico seguido de um vale no intervalo $300 \lesssim s \lesssim 500$ representa a formação de um jato de partículas.

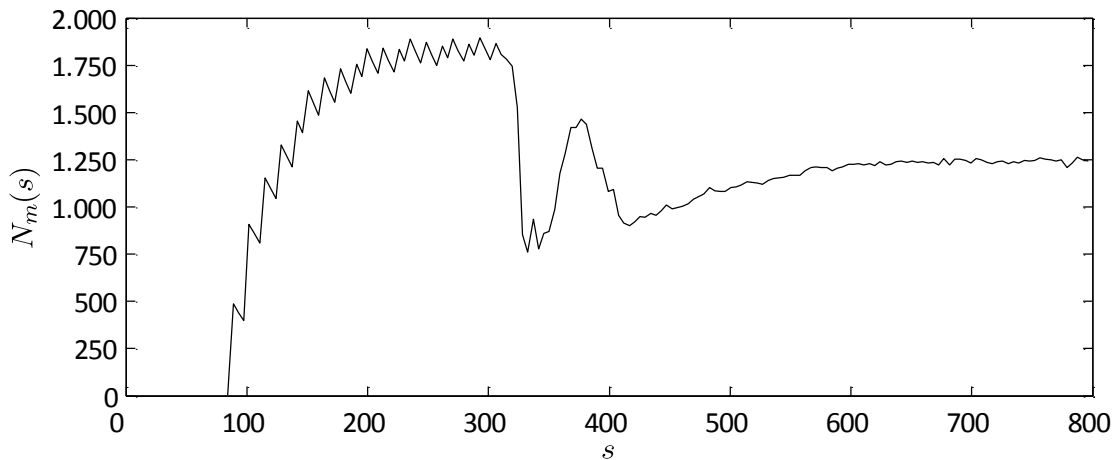


Figura 31: Dinâmica da quantidade de partículas pertencente à nuvem difusa do espaço de fase transversal do feixe. Resultados obtidos mediante simulações numéricas autoconsistentes com $K_g = \kappa_{z0} = 1$, $r_b(s=0) = r_{b0}$, $\eta = 0,5$ e $N_b = 10.000$ partículas. Valor assintótico $N_m(s \rightarrow \infty) \cong 1244$.

Assim, os valores computados para N_m e apresentados na Figura 31 não são válidos para instantes $s \lesssim 500$ pois de fato não correspondem ao seu sentido físico previamente atribuído: computar apenas partículas que no equilíbrio formarão a nuvem difusa no entorno do feixe. A determinação de N_m na transição no presente caso é mais complexa que o igual procedimento realizado para N_h no caso homogêneo do Capítulo 4. Em princípio, o descasamento que na situação homogênea compelia partículas a orbitar uma região curva externa — de fácil segregação da região horizontal filamentar — é aqui inexistente. O encontro entre frentes de onda de densidade de partículas n_b implica que, na transição do feixe, quantidade razoável de partículas seja deslocada

para a região que no equilíbrio será ocupada apenas pela nuvem. Todavia, esclarecida esta questão de cunho fundamental, pode-se averiguar que, após $s \gtrsim 500$, a quantidade de partículas N_m possui um valor assintótico, corroborando as expectativas enunciadas anteriormente e fornecendo a última condição necessária ao conceito de equilíbrio neste trabalho definido. Neste ponto, há a homogeneização completa do espaço de fase transversal do feixe devido à mistura existente entre as órbitas desenvolvidas por cada partícula. Tal condição somente foi atingida pois o sistema de $2 \cdot N_b$ equações que descreve a simulação numérica autoconsistente é intrinsecamente não-linear, propiciando o surgimento de caos.

As grandezas importantes para a descrição do processo pelo qual o feixe atinge o equilíbrio continuam as mesmas que as evidenciadas no caso homogêneo. Do ponto de vista da transição, é de suma importância obter — ou melhor compreender — a escala de tempo de decaimento do feixe, a qual é aqui denominada de τ . Para o equilíbrio, é de interesse a obtenção da emitância ϵ , haja vista que o raio RMS R_b do feixe permanece quase inalterado. Conforme comentado, as grandezas pertinentes à transição bem como ao equilíbrio serão investigadas com relação à variação da magnitude da não-homogeneidade η do feixe. Note que, de fato, em um feixe real, conforme reiteradamente já comentado, outras variáveis influenciam seu processo de decaimento. Contudo, neste Capítulo, o interesse residirá em apenas avaliar e elucidar o comportamento do feixe durante seu confinamento magnético com relação a η .

Haja vista que a emitância é uma grandeza cuja dinâmica está associada ao decaimento do raio RMS $R_b(s)$, torna-se oportuno considerar a emitância inicial nula $\epsilon(s=0) = 0$. Desta forma, durante a dinâmica do feixe, qualquer alteração no seu raio RMS $R_b(s)$ significará em uma conseqüente alteração no valor da sua emitância, tornando-a então não-nula e permitindo assim pronta detecção de alterações no comportamento do feixe.

Adicionalmente, o reescalamento descrito no APÊNDICE B de forma absolutamente geral, considerando $\eta \neq 0$, pode ser adotado. Nestas condições, o resultado obtido é análogo ao atribuir

$$K_y \rightarrow 1 \text{ e } \kappa_{z0} \rightarrow 1 \quad (6.3)$$

em todas as equações nas quais estes parâmetros aparecem. Por conseqüência o envelope de equilíbrio do feixe não-homogêneo também torna-se

$$r_{b0} \rightarrow 1. \quad (6.4)$$

Ou seja, na circunstância definida pelas equações (6.3) e (6.4), segundo a densidade da equação (3.13) inicialmente atribuída ao feixe, observa-se que — o único e exclusivo — parâmetro livre na análise em questão é a magnitude da não-homogeneidade η .

Analogamente ao desenvolvido no Capítulo 4 para o feixe inicialmente homogêneo, nas próximas seções modelos serão apresentados para a descrição dos dois distintos estados

identificados anteriormente no princípio deste Capítulo. O estado inicial não-estacionário será abordado na Seção 6.1 enquanto o estado final estacionário ou de equilíbrio será adequadamente tratado na Seção 6.2. Como as equações que descrevem o feixe aqui considerado também conservam energia — sistema dito Hamiltoniano³⁷ — as quantidades de equilíbrio de interesse, neste caso restritas à emitância ϵ pois o decaimento do raio RMS R_b é inexpressivo, serão obtidas mediante a relação de suas expressões obtidas no estado não-estacionário e no estado estacionário do feixe, objeto da Seção 6.3. Nesta última seção, os parâmetros que caracterizam o feixe em cada um destes estados serão apresentados. Os resultados numéricos providos pela vinculação estabelecida na Seção 6.3 serão apresentados em detalhe na Seção 6.4. Na Seção 6.5, uma abordagem Lagrangiana para a dinâmica do feixe será elaborada, propiciando que o seu comportamento anterior a primeira quebra de onda observado nas simulações numéricas autoconsistentes seja de forma compacta — com baixa dimensionalidade — descrito. Os resultados obtidos tanto na Seção 6.4 quanto na Seção 6.5 são de suma importância ao desenvolvimento do modelo⁵⁷ que permitirá melhor compreender a escala de tempo τ de decaimento do feixe não-homogêneo, discutido na Seção 6.6. Todas as equações apresentadas nas próximas seções já foram reescaladas segundo o método descrito no APÊNDICE B. Este mesmo procedimento também foi adotado com relação às simulações numéricas autoconsistentes, cujo número de partículas utilizado foi $N_b = 10.000$ para qualquer valor da magnitude da não-homogeneidade η . Portanto, a partir de então, referências à constante de focalização magnética κ_{z0} bem como à perveância K_b não serão mais necessárias e assim efetuadas.

6.1 Descrição do estado inicial não-estacionário

Conforme extensivamente já comentado, o feixe de interesse neste trabalho é caracterizado por uma densidade de partículas n_b azimutalmente simétrica, a qual evolui em um canal de focalização linear encapsulado por um duto condutor de raio r_w e permeado por um campo magnético constante de origem solenoidal. A configuração deste sistema é representada na Figura 3, presente no Capítulo 3, utilizada oportunamente para a descrição do sistema composto pelo feixe e pela partícula-teste. Esta figura contém o sistema de coordenadas adotado bem como algumas quantidades úteis posteriormente nesta Seção. O feixe inicialmente encontra-se perfeitamente alinhado ao eixo axial no sentido \mathbf{e}_s de propagação, sendo dinâmica de sua centróide desimportante. Conforme enunciado no princípio deste Capítulo, o feixe inicialmente também não possui emitância — $\epsilon(s=0) = 0$ — sendo totalmente dominado apenas pelos efeitos não-lineares da perveância, identificada nas equações não-reescaladas através do parâmetro K_g .

O sistema descrito no parágrafo anterior é idêntico ao analisado na Seção 4.1. A única diferença reside no formato inicial atribuído à densidade n_b do feixe. Enquanto no Capítulo 4 a

investigação ocorreu para um feixe inicialmente homogêneo, no presente Capítulo o interesse reside em um feixe inicialmente não-homogêneo, com o formato parabólico adotado por mera conveniência algébrica. Para minimizar os efeitos do descasamento e avaliar apenas as influências da magnitude da não-homogeneidade η , o envelope da densidade n_b foi considerado casado. Desta forma, adotando a expressão previamente definida na equação (3.13) para a densidade não-homogênea em conjunto com $r_b(s = 0) = r_{bo}$ obtém-se para $s = 0$ que

$$n_b(R, s = 0) \equiv n_o = \begin{cases} \frac{N_b}{\pi} + \eta \left[\frac{N_b}{\pi} (2R^2 - 1) \right], & \text{para } 0 \leq R \leq 1 \\ 0, & \text{para } 1 < R \leq r_w \end{cases} \quad (6.5)$$

na qual R é a coordenada radial que descreve o espaço transversal e η é a magnitude da não-homogeneidade designada inicialmente à densidade n_b . Note que haja vista o reescalonamento adotado e exposto no APÊNDICE B, neste caso o envelope de equilíbrio simplifica-se à unidade, obedecendo a equação (6.4). A representação pertencente a este formato de densidade para uma magnitude da não-homogeneidade de $\eta = 0,5$ consta na Figura 32a. O aspecto de n_o no espaço de fase é muito semelhante à densidade homogênea apresentada na Figura 12a, no entanto na presente análise n_o é não-homogênea parabolicamente, característica esta difícil de observar na representação corrente, sendo melhor discriminada no espaço de configuração.

Definida a densidade de partículas inicial n_o é pronta a determinação das expressões para os campos elétricos tanto na região interna quanto na região externa do feixe. Devido à simetria azimutal da equação (6.5) atribuída à densidade n_o , as superfícies equipotenciais são circulares e concêntricas ao eixo axial no sentido \mathbf{e}_s , sendo apenas necessário para a representação do campo elétrico a coordenada espacial R . Inserindo a expressão (6.5) na equação de Poisson (2.5) e resolvendo para E_r obtém-se

$$E_r(R, s = 0) \equiv E_{ro} = \begin{cases} -\eta R^3 + (\eta - 1)R, & \text{para } 0 \leq R \leq 1 \\ -1/R, & \text{para } 1 < R \leq r_w \end{cases}, \quad (6.6)$$

na qual uma das constantes de integração foi eliminada mediante a condição de finitude do campo elétrico $E_r(R, s = 0)$ em $R = 0$ e a outra foi determinada mediante a continuidade de $E_r(R, s = 0)$ em $R = r_{bo} = 1$. Note que esta expressão obviamente é idêntica àquelas presentes nas equações (3.5) e (3.14), obtidas através da Lei de Gauss. Constate que diferente do caso homogêneo, no presente caso não-homogêneo o campo elétrico também é não-linear na região interna do feixe.

Com a obtenção do campo elétrico $E_r(R, s = 0)$ interno ao canal de confinamento magnético, a energia média por este armazenada pode ser imediatamente computada. Inserindo a expressão (6.6) na equação (2.22) obtém-se

$$\mathcal{E}_F(s = 0) \equiv \mathcal{E}_o = \frac{\eta^2}{48} - \frac{\eta}{12} + \frac{1}{8} + \frac{\ln(r_w)}{2}, \quad (6.7)$$

a qual depende unicamente da magnitude da não-homogeneidade η e da coordenada radial r_w na qual o duto circular é posicionado.

A energia média total do feixe é descrita na condição de confinamento magnético constante para qualquer coordenada axial s pela equação (6.1). Segundo esta equação, para obtenção da energia média total E_{\perp} em $s = 0$, deve-se ainda quantificar os termos $\langle \mathbf{R}_{\perp}^2 \rangle$ e $\langle \mathbf{V}_{\perp}^2 \rangle$ em $s = 0$. Inserindo a densidade n_o da equação (6.5) na definição do raio RMS do feixe (2.32) obtém-se

$$\langle \mathbf{R}_{\perp}^2 \rangle(s = 0) = R_b^2 = (\eta + 3)/6. \quad (6.8)$$

O termo $\langle \mathbf{V}_{\perp}^2 \rangle(s = 0)$ é facilmente resolvido constatando que a emitância inicial do feixe é nula. Segundo a equação (2.33) que define a emitância e considerando que $\langle \mathbf{R}_{\perp}^2 \rangle(s = 0) \neq 0$ devido à equação (6.8) logo acima, a única solução possível ao se considerar $\epsilon(s = 0) = 0$ é

$$\langle \mathbf{V}_{\perp}^2 \rangle(s = 0) = 0. \quad (6.9)$$

Inserindo as equações (6.7)-(6.9) na equação (4.1) obtém-se

$$\frac{\eta^2}{48} + \frac{3}{8} + \frac{\ln(r_w)}{2} = E_{\perp}(s = 0) = E_{\perp}, \quad (6.10)$$

a qual representa a energia média total armazenada inicialmente no feixe não-homogêneo com formato parabólico em questão, contemplando as partículas e os campos elétricos autoconsistentemente gerados, quando em confinamento solenoidal constante. Sendo o sistema Hamiltoniano, da mesma forma que na versão homogênea da Seção 4.1, $E_{\perp}(s = 0)$ é uma quantidade necessariamente conservada para instantes s posteriores, independentemente do formato assumido pela densidade de partículas n_b durante a evolução do feixe no canal de confinamento. A densidade $n_b(s)$ pode perfeitamente homogeneizar-se ao longo da dinâmica, devendo apenas manter o vínculo de simetria azimutal. Importante é constatar que a energia E_{\perp} no estado inicial não-estacionário depende exclusivamente da magnitude da não-homogeneidade η e da distância radial r_w do duto ao eixo de simetria. A dependência do raio do duto circular r_w não é crítica pois, conforme observado para o feixe homogêneo na Seção 4.3, durante a conexão entre os estados do feixe não-homogêneo a ser realizada na Seção 6.3, o único parâmetro livre do modelo se tornará η . A dependência de r_w se cancelará com termo análogo oriundo do estado estacionário. O reescalamento das quantidades sumarizado pela equação (4.4) foi também nesta Seção fundamental para a obtenção deste resultado.

6.2 Descrição do estado final estacionário

Ao evoluir no canal de confinamento, conforme comentado no princípio deste Capítulo, anéis de partículas infinitesimais, concêntricos e adjacentes do feixe são submetidos à ação de uma força não-linear que progressivamente dessincroniza suas dinâmicas até que haja superposição. Esta superposição pode ser interpretada como um colapso de duas frentes de onda de densidade de

partículas, causando a expansão vertical de n_b ao longo do eixo dR/ds e determinando que partículas incondicionalmente sejam ejetadas por conservação. A formação destes jatos não somente possui implicações físicas importantes na dinâmica do feixe como também na sua descrição matemática, haja vista que para cada coordenada do espaço de fase R há agora inúmeros valores possíveis para dR/ds . Portanto, o feixe necessita ser descrito segundo a Teoria Cinética, na qual a coordenada dR/ds torna-se também uma variável independente, tal como a coordenada R . Tal fenômeno foi em detalhe ilustrado na Figura 28.

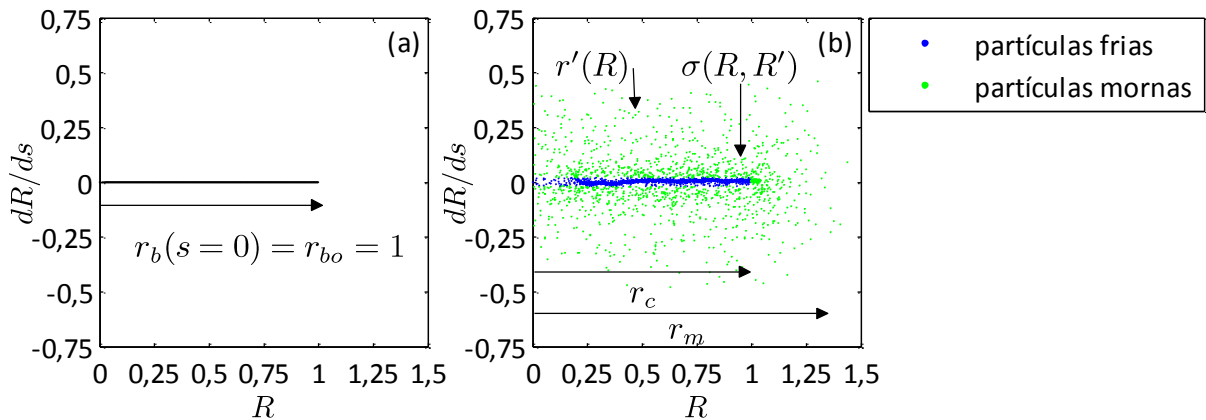


Figura 32: Seções transversais do espaço de fase de um feixe composto por $N_b = 10.000$ partículas e magnitude da não-homogeneidade $\eta = 0,5$. As seções foram capturadas para o estado inicial não-estacionário em (a) $s = 0$ e para o estado final estacionário em (b) $s = 796,3$.

A formação dos jatos acima comentada propicia que partículas, anteriormente restritas a transitar na região $0 \leq R \leq r_{bo}$ interna ao feixe, sejam compelidas a desenvolver órbitas externas ao seu domínio. Este é o estopim para o processo difusivo desenvolvido por partículas individuais no espaço de fase durante o confinamento magnético do feixe observado nas simulações numéricas autoconsistentes. O fenômeno de quebra de onda surge então como mecanismo físico que transfere energia para determinadas partículas, permitindo que estas sejam expelidas de seu interior mediante jatos no espaço de fase e que sejam excitadas pelo movimento coerente das que remanescem no feixe. A dinâmica individual das partículas ejetadas se torna suficientemente distinta das demais outras, proporcionando o decaimento do raio RMS $R_b(s)$, o conseqüente crescimento da emitância $\epsilon(s)$ e então a formação do halo. Este comportamento dinâmico, no espaço de fase, pode ser identificado pela formação de uma nova região na qual partículas do feixe estão aptas a transitar. O espaço de fase característico de um feixe inicialmente não-homogêneo de formato parabólico — no equilíbrio — é apresentado na Figura 32b. Uma discussão mais detalhada com relação aos mecanismos físicos envolvidos nesta interação entre partículas individuais com a dinâmica coerente das demais outras em feixes não-homogêneos é escopo da Seção 6.6.

As novas órbitas existentes comentadas acima se tornam visíveis ao comparar a geometria típica do espaço de fase inicial do feixe não-homogêneo, presente na Figura 32a, com a sua

geometria obtida no equilíbrio, presente na Figura 32b e capturada no instante $s = 796,3$. A evolução do estado inicial não-estacionário da Figura 12a para o estado estacionário da Figura 12b foi determinada mediante simulações numéricas autoconsistentes com um total de $N_b = 10.000$ partículas e magnitude da não-homogeneidade $\eta = 0,5$. Inicialmente, o feixe é composto — como descreve a equação (6.5) — por partículas com velocidade nula, sendo representado no espaço de fase por uma linha reta sobre o eixo da coordenada radial R . Entretanto, durante a excursão do feixe no canal de confinamento, partículas são ejetadas, iniciando a população de outra região do espaço de fase, até então não ocupada. Esta população cessa quando o feixe atinge seu estado de equilíbrio, momento no qual a quantidade N_m torna-se invariante com relação à coordenada s , comportamento este presente na Figura 31.

Ao analisar a topologia do espaço de fase exposta na Figura 32b constata-se a presença de uma nova região ocupada por partículas no espaço de fase, em formato retangular, delimitada sobre o eixo dR/ds por uma função $r'(R)$ e constituindo uma nuvem que envolve o feixe filamental original de tamanho r_c , valor este possivelmente distinto de $r_{bo} = 1$. Note que a região retangular — a nuvem — de partículas no entorno do feixe necessita agora ser matematicamente descrita no espaço de fase adicionalmente pela inserção da coordenada dR/ds . Isto difere substancialmente da descrição efetuada no estado inicial, no qual apenas a coordenada espacial R era suficiente. Ou seja, tal como o observado no caso homogêneo, também durante a excursão do presente feixe no canal linear de confinamento magnético, partículas que inicialmente possuíam velocidade nula adquiriram progressivamente energia cinética suficiente para que suas órbitas se expandissem verticalmente ao longo do eixo dR/ds do espaço de fase.

Em analogia ao procedimento adotado na Seção 4.2, uma segregação por energia cinética pode ser adotada para as partículas constituintes do feixe. Por observação direta da Figura 32b, constata-se que as partículas mais energéticas cineticamente são aquelas pertencentes à nuvem que circunda o feixe. Por coerência, tendo em vista que se encontram sobre uma região retangular muito semelhante a aquela ocupada pelas partículas mornas do feixe homogêneo na Figura 12b, no presente caso não-homogêneo estas partículas também são denominadas de mornas e destacadas em verde no espaço de fase da Figura 32b. As demais partículas restantes, por estarem dispostas de forma filamental sobre o eixo R e por conseqüência possuírem velocidades dR/ds quase nulas, são então denominadas de partículas frias e destacadas em azul no espaço de fase da Figura 32b. Observe a forte verossimilhança entre a região ocupada pelas partículas mornas e frias da Figura 32b, pertinente ao presente feixe não-homogêneo casado, com aquela ocupada também pelas partículas mornas e frias da Figura 12b, pertencente ao feixe inicialmente homogêneo descasado. As regiões retangulares são quase idênticas, fato este que corrobora a premissa desenvolvida no Capítulo 5

anterior, de ser a não-homogeneidade o mecanismo precursor da formação da população de partículas mornas.

Torna-se oportuno então efetuar uma relevante comparação com o feixe inicialmente homogêneo investigado previamente no Capítulo 4. Naquela oportunidade, o descasamento inicial do envelope $r_b(s)$ do feixe induzia a formação — no equilíbrio — de uma segunda região, de caráter curvo, muito distante das demais outras, composta por partículas com alta velocidade. Portanto, na Seção 4.2, a estrutura do espaço de fase demandava que uma classificação expandida — tricotômica — em partículas frias, mornas e quentes fosse adotada. No entanto, sendo a energia da cinética das partículas quentes muito mais significativa que a das partículas mornas, estas últimas puderam ser consideradas frias. Esta aproximação foi de fundamental importância, uma vez que permitiu adotar uma classificação dicotômica — em partículas do núcleo ou do halo — tornando o sistema completo apenas com a incorporação da equação (4.13) para a conservação de partículas no estado estacionário. O desenvolvimento de nenhum modelo adicional portanto tornou-se necessário naquela Seção.

Contudo, nesta Seção, a supressão do descasamento inicial do feixe, resultante da imposição $r_b(s=0) = r_{b0}$, implicou diretamente em uma menor complexidade do seu espaço de fase no equilíbrio, conforme demonstra a Figura 32b. Desta forma, no caso presente, ao natural, emerge uma classificação dicotômica para as partículas que compõe o feixe, as quais, a dizer, podem ser denominadas de partículas frias ou de partículas mornas. Apenas uma ressalva deve ser efetuada. As partículas mornas pertencentes ao feixe não-homogêneo não podem ter a sua velocidade dR/ds — no equilíbrio — desprezada conforme executado na Seção 4.2, o que implica considerá-las frias, já que estas são as responsáveis pelo crescimento majoritário da emitância ϵ pertinente ao feixe apresentada na Figura 27b. Assim sendo, ao contrário das partículas ditas quentes na Seção 4.2, referentes ao feixe homogêneo descasado, no presente feixe não-homogêneo casado, as partículas que formarão o halo serão as partículas ditas mornas. De forma exata, apenas por compatibilidade com a reclassificação adotada na Seção 4.2, então as partículas frias podem ser redefinidas como partículas do núcleo enquanto as partículas mornas podem ser denominadas de partículas do halo. Entretanto, o subscrito m continuará a ser adotado para designar as partículas do halo, ao invés do emprego de h tal qual efetuado na Seção 4.2 para o feixe homogêneo. Pretende-se com isto frisar a diferença existente entre as partículas que compõe o halo em um feixe inicialmente homogêneo descasado e em um feixe inicialmente não-homogêneo casado, sendo no primeiro caso este composto pelas partículas quentes e no segundo pelas partículas classificadas como mornas.

À medida que o feixe excursiona no canal de confinamento magnético, os sucessivos jatos de partículas tornam a sua densidade n_b cada vez menos não-homogênea. Os jatos progressivamente expõem as partículas que contribuem para formação da não-homogeneidade que,

inicialmente por imposição, permeia a densidade n_b que descreve o feixe. Quando a ocorrência dos jatos cessa e o equilíbrio é atingido, em $s \geq \tau$, pode ser inferido que então a densidade n_b torna-se completamente homogênea espacialmente, não sendo mais válida a sua expressão matemática n_o , inicialmente atribuída e presente na equação (6.5). Não somente a densidade n_b sofre um processo de homogeneização espacial como também, no estado estacionário, algumas partículas estão aptas a popular uma região retangular no entorno do feixe no espaço de fase. Após $s \geq \tau$, n_b também se torna invariante com relação à coordenada axial s , satisfazendo a definição de equilíbrio neste trabalho adotada.

Tal característica observada no equilíbrio pode ser descrita segmentando a densidade de partículas n_b em duas outras distintas, uma que considere apenas as partículas pertencentes ao núcleo do feixe, denominada de n_c , e outra que agregue as pertencentes ao halo do feixe, designada por n_m . Matematicamente, no estado estacionário, a densidade de partículas n_b assume o seguinte formato

$$n_b(R, s \geq \tau) \equiv n_\tau = \begin{cases} n_c(R) + n_m(R), & \text{para } 0 \leq R \leq r_c \\ n_m(R), & \text{para } r_c < R \leq r_m, \\ 0, & \text{para } r_m < R \leq r_w \end{cases} \quad (6.11)$$

na qual a quantidade r_c delimita o comprimento da região filamental sobre o eixo R , composta por partículas do tipo frias, sendo especificada na Figura 32b. A quantidade r_m delimita o comprimento da região retangular sobre o eixo R na qual encontram-se as partículas mornas, isto é, r_m corresponde a máxima amplitude espacial que as partículas mornas atingem durante sua dinâmica, sendo definida mediante resolução da equação

$$r'(R \equiv r_m) = 0. \quad (6.12)$$

Tanto r_c quanto r_m são quantidades invariantes neste estado final estacionário, condição esta plenamente compatível com a definição de equilíbrio aqui adotada.

De forma geral e análoga ao caso homogêneo da Seção 4, a equação (2.2) para o número de partículas por unidade de comprimento axial bem como sua equação (2.12) de conservação permanecem também aqui válidas. Inserindo a expressão (6.11) na equação (2.2) obtém-se

$$N_b = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r_w} dRR n_\tau = N_c + N_m \quad (6.13)$$

na qual, em coordenadas cilíndricas,

$$N_\alpha = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r_\alpha} dRR n_\alpha, \text{ para } \alpha = \{c, m\}. \quad (6.14)$$

A equação acima é geral, sendo completamente desimportante o caráter específico que será na seqüência modelado às densidades do núcleo n_c e do halo n_m .

A densidade n_c congrega as partículas que não foram ejetadas durante a excursão do feixe no canal de confinamento, as quais continuam frias no estado estacionário tal como no estado inicial

não-estacionário. As partículas não somente continuam frias como no equilíbrio se dispersam homoganeamente sobre o eixo R , pois os jatos expellem todas as partículas que inicialmente tornam a densidade n_b não-homogênea. Por conseqüência, também nesta circunstância é razoável atribuir ao equilíbrio uma densidade homogênea às partículas do núcleo, conforme já executado ao feixe inicialmente homogêneo da Seção 4.2 através da equação (4.15). Assim procedendo, reproduzindo abaixo aquela equação para as partículas do núcleo, tem-se que

$$n_c(R) = \begin{cases} N_c/\pi r_c^2, & \text{para } 0 \leq R \leq r_c \\ 0, & \text{para } r_c < R \leq r_w \end{cases} \quad (6.15)$$

Deve-se então determinar uma expressão para a densidade de partículas mornas que compõe o halo n_m . Como todas as quantidades macroscópicas de interesse do feixe são médias (por partícula), tal como o desenvolvido na Seção 4.2, é relevante definir a fração de partículas mornas de um feixe inicialmente não-homogêneo

$$f \equiv N_m/N_b, \quad (6.16)$$

sendo a fração f no equilíbrio aproximadamente constante, uma vez que N_m também o é, conforme demonstra a Figura 31. Dividindo a equação (6.13) pelo número total de partículas por unidade de comprimento axial N_b e inserindo nesta última a equação (6.16) obtém-se

$$N_c/N_b = 1 - f, \quad (6.17)$$

a qual representa a fração de partículas pertencentes ao núcleo do feixe. Inserindo a equação (6.17) acima na equação (6.15) permite que n_c seja reexpressa da seguinte forma

$$n_c(R) = \begin{cases} (1 - f)N_b/\pi r_c^2, & \text{para } 0 \leq R \leq r_c \\ 0, & \text{para } r_c < R \leq r_w \end{cases} \quad (6.18)$$

Note que, embora as equações (6.15), (6.17) e (6.18) sejam respectivamente absolutamente idênticas em formato às equações (4.15), (4.17) e (4.18) da Seção 4.2, optou-se por reproduzi-las nesta Seção para que a descrição matemática fosse completa. No entanto, uma discussão mais aprofundada a respeito da fração f é reservada apenas à anterior Seção 4.2.

Resta então apenas obter uma expressão que represente a nuvem difusa no entorno do feixe no espaço de fase na qual residem as partículas mornas. A geometria desta nuvem é um tanto regular, possuindo um aspecto retangular no espaço de fase, característica esta que permite convertê-la diretamente em uma expressão analítica. Considerando que a nuvem possa ser representada no espaço de fase por uma densidade $\sigma(R, R')$, formalmente uma densidade espacial linear de partículas pode ser introduzida

$$\lambda_m(R) = \int_{-r'}^{r'} \sigma(R, R') dR', \quad (6.19)$$

na qual as partículas mornas descritas por σ foram delimitadas por curvas $r'(R)$, adequadamente representadas na Figura 32. Em aproximação análoga ao caso homogêneo, pode-se considerar que

$$\sigma(R, R') \approx \text{constante} = \sigma. \quad (6.20)$$

Inserindo esta última na equação (6.19) e considerando a simetria existente na integração envolvendo como extremos a função $r'(R)$, obtém-se a forma simplificada

$$\lambda_m(R) \approx 2\sigma r'(R), \quad (6.21)$$

cuja dependência radial ocorre única e exclusivamente mediante a função $r'(R)$ que delimita a nuvem no 1º quadrante do espaço de fase. Ou seja, tal qual a densidade λ_h pertinente ao feixe homogêneo, a densidade linear de partículas λ_m depende única e exclusivamente da geometria no espaço de fase na qual residem as partículas ditas do halo.

Entretanto, para a solução da equação de Poisson radial (2.5), torna-se necessário obter uma densidade superficial de partículas. Ao adaptar a equação (4.22) de conservação de partículas em simetria azimutal obtida na Seção 4.2 ao caso presente obtém-se

$$n_\alpha(R) \cdot 2\pi R dR = \lambda_\alpha(R) \cdot dR = dN_\alpha(R) \text{ para } \alpha = \{c, m\}. \quad (6.22)$$

Para $\alpha = m$, insolando-se n_m na equação imediatamente anterior e inserindo na expressão resultante a equação (6.21), obtém-se como formato final

$$n_m(R) = \frac{\sigma}{\pi R} r'(R), \quad (6.23)$$

sendo a quantidade $1/2\pi R$ o fator de conversão entre a densidade linear λ_m e a densidade superficial n_m de partículas.

A função que delimita a nuvem de partículas mornas pode ser diretamente obtida com auxílio da Figura 32b, por inspeção da sua geometria no espaço de fase. Sendo a nuvem aproximadamente retangular, então sua delimitação no espaço de fase pode ser descrita por

$$r'(R) = \begin{cases} r'_m, & \text{para } 0 \leq R \leq r_m \\ 0, & \text{para } r_m < R \leq r_w' \end{cases} \quad (6.24)$$

na qual r'_m é uma constante que representa a velocidade dR/ds máxima atingida pelas partículas mornas. Geometricamente, r'_m corresponde à altura da região retangular anteriormente comentada.

A densidade de partículas n_m que descreve a população de partículas mornas do halo torna-se então completamente definida. Inserindo a equação (6.24) na equação (6.23) obtém-se

$$n_m(R) = \frac{\sigma r'_m}{\pi} \frac{1}{R}, \quad (6.25)$$

a qual depende de constantes que caracterizam a região retangular do espaço de fase na qual estão as partículas do halo, como a sua densidade de partículas σ e a sua altura r'_m . No entanto, o produto destas constantes pode ser relacionada com o número de partículas N_m , em procedimento semelhante ao realizado na Seção 4.2 para um feixe inicialmente homogêneo. Inserindo a equação (6.25) na equação (6.14) constata-se que

$$N_m = 2\sigma r'_m r'_m. \quad (6.26)$$

Resolvendo esta equação para $\sigma r'_m$ e inserindo o resultado na expressão (6.25) anterior

$$n_m(R) = \frac{N_m}{2\pi r_m} \frac{1}{R} \quad (6.27)$$

a qual, devido à definição (6.16) para a fração f , simplifica-se à

$$n_m(R) = \frac{f N_b}{2\pi r_m} \frac{1}{R}. \quad (6.28)$$

Esta recente expressão obtida para a densidade de partículas do halo n_m é inversamente proporcional a coordenada espacial R . Apenas a fração de partículas f constitui um parâmetro ainda indeterminado, sendo devidamente obtida mediante a conservação da energia transversal E_{\perp} do feixe na Seção 6.4. Por inspeção das equações (6.18) e (6.28), as quais definem completamente a densidade $n_b(R, s \geq \tau)$ presente na equação (6.11), pode-se observar que no equilíbrio o feixe não depende da magnitude da não-homogeneidade η . Esta independência com relação a η da densidade $n_b(R, s \geq \tau)$ é compatível com o pressuposto anterior: no equilíbrio as quebras de onda de densidade se extinguem.

Obtida a expressão para a densidade do feixe $n_b(R, s \geq \tau)$, torna-se possível computar grandezas macroscópicas importantes que quantificam o estado final estacionário do feixe. O campo elétrico interno ao canal de confinamento pode ser imediatamente obtido introduzindo a expressão resultante da integração das equações (6.11), (6.18) e (6.28) na equação de Poisson (2.5). Resolvendo a expressão resultante para E_r obtém-se

$$E_r(R, s \geq \tau) \equiv E_{r\tau} = \begin{cases} E_{r\tau,0-c} = -\frac{(1-f)R}{r_c^2} - \frac{f}{r_m}, & \text{para } 0 \leq R \leq r_c \\ E_{r\tau,c-h} = -\frac{f}{r_m} - \frac{(1-f)}{R}, & \text{para } r_c < R \leq r_m, \\ E_{r\tau,h-w} = -\frac{1}{R}, & \text{para } r_m < R \leq r_w \end{cases} \quad (6.29)$$

na qual $E_{r\tau,0-c}^c$, $E_{r\tau,c-h}^c$ e $E_{r\tau,h-w}^c$ são os campos elétricos respectivamente no núcleo do feixe, no halo do feixe e no vácuo. Uma das constantes de integração foi determinada pela condição de finitude do campo elétrico $E_r(R, s \geq \tau)$ em $R = 0$, enquanto as outras duas foram calculadas pela continuidade do campo elétrico $E_r(R, s \geq \tau)$ nas coordenadas $R = r_c$ e $R = r_m$.

Pode-se então prontamente determinar a energia média armazenada nos campos elétricos do estado estacionário final do feixe. Inserindo a expressão (6.29) na equação (2.22) tem-se que

$$\mathcal{E}_F(s \geq \tau) \equiv \mathcal{E}_{\tau} = \left[\frac{1}{2} \ln\left(\frac{r_m}{r_c}\right) + \frac{2r_c}{3r_m} - \frac{5}{8} \right] f^2 + \left[\ln\left(\frac{r_c}{r_m}\right) - \frac{2r_c}{3r_m} + \frac{3}{4} \right] f + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{r_w}{r_c}\right) + \frac{1}{8}, \quad (6.30)$$

sendo esta expressão função dos parâmetros r_c e r_m que caracterizam o feixe no estado estacionário e da fração de partículas f do halo, ainda uma incógnita a ser determinada na Seção 6.4 mediante conservação de energia entre o estado inicial não-estacionário e o final estacionário. Observe que, haja vista a simplicidade do campo elétrico $E_{r\tau}$ interno ao canal de confinamento descrito pela equação (6.29), uma expressão analítica exata para a sua energia armazenada \mathcal{E}_{τ} tornou-se possível

de ser obtida. Isto é diferente do observado na Seção 4.2 para um feixe homogêneo, no qual a densidade n_h presente na região curva do espaço de fase proporcionava um campo elétrico $E_{r\tau}$ cuja energia armazenada somente pode ser computada analiticamente com uma aproximação, assunto este discutido na Seção 4.3.1 e propósito do APÊNDICE C.

Para a avaliação da energia transversal total E_{\perp} do feixe no equilíbrio, por final deve-se então determinar neste estado a energia potencial média e a energia cinética média pertencente às partículas constituintes, atividade esta que diretamente implica determinar o raio quadrático médio $\langle \mathbf{R}_{\perp}^2 \rangle(s \geq \tau)$ e a velocidade quadrática média $\langle \mathbf{V}_{\perp}^2 \rangle(s \geq \tau)$. O raio quadrático médio $\langle \mathbf{R}_{\perp}^2 \rangle$ no equilíbrio pode ser facilmente determinado inserindo a densidade estacionária obtida $n_b(R, s \geq \tau)$ da equação (6.11) na definição de média no espaço de fase presente na equação (2.1) com $\chi = \mathbf{R}_{\perp}^2$. Assim procedendo, obtém-se

$$\langle \mathbf{R}_{\perp}^2 \rangle(s \geq \tau) = \frac{1}{N_b} \left(\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r_c} R dR R^2 n_c + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r_m} R dR R^2 n_m \right), \quad (6.31)$$

expressão esta absolutamente geral, válida para qualquer densidade de partículas n_c e n_m designadas, em ordem, ao núcleo e ao halo do feixe. No entanto, inserindo as equações (6.15) e (6.27), respectivamente para a densidade do núcleo n_c e do halo n_m desenvolvidas nesta Seção, na equação (6.31) logo acima se verifica que

$$\langle \mathbf{R}_{\perp}^2 \rangle(s \geq \tau) = \frac{1}{N_b} \frac{N_c r_c^2}{2} + \frac{1}{N_b} \frac{N_m r_m^2}{3}, \quad (6.32)$$

a qual, com inserção da equação (6.17) para a fração de partículas do núcleo e da equação (6.16) para a fração de partículas do halo, torna-se

$$\langle \mathbf{R}_{\perp}^2 \rangle(s \geq \tau) = \frac{(1-f)}{2} r_c^2 + \frac{f}{3} r_m^2, \quad (6.33)$$

ou seja, no equilíbrio, $\langle \mathbf{R}_{\perp}^2 \rangle(s \geq \tau)$ é apenas uma função dos parâmetros r_c e r_m que caracterizam o espaço de fase do feixe e da fração de partículas f do halo.

Mesmo após o casamento inicial do envelope $r_b(s=0) = r_{b0}$ do feixe, o seu raio RMS desenvolve oscilações residuais. No entanto, tais oscilações são de pequena amplitude, de forma que qualquer variação axial do raio RMS R_b do feixe, como aproximação, pode ser desprezada. Para o presente caso não-homogêneo, esta aproximação é muito mais realística que quando adotada na Seção 4.2 para um feixe inicialmente homogêneo. Portanto, no equilíbrio

$$dR_b(s \geq \tau)/ds \cong 0. \quad (6.34)$$

Inserindo a aproximação acima na equação para o raio quadrático médio (2.35) juntamente com a condição de simetria azimutal (3.1) verifica-se que

$$R_b(s \geq \tau) - \frac{1}{2R_b(s \geq \tau)} - \frac{\epsilon^2(s \geq \tau)}{4R_b^3} = 0. \quad (6.35)$$

Da mesma forma, aplicando a condição (6.34) na equação para o quadrado da emitância (2.34)

$$\epsilon^2(s \geq \tau) = 4R_b^2(s \geq \tau)\langle \mathbf{V}_\perp^2 \rangle(s \geq \tau). \quad (6.36)$$

Inserindo a equação (6.36) para a emitância $\epsilon(s \geq \tau)$ na equação (6.35) e resolvendo a expressão resultante para $\langle \mathbf{V}_\perp^2 \rangle(s \geq \tau)$ constata-se que

$$\langle \mathbf{V}_\perp^2 \rangle(s \geq \tau) = R_b^2(s \geq \tau) - 1/2. \quad (6.37)$$

Observe que a velocidade quadrática média $\langle \mathbf{V}_\perp^2 \rangle(s \geq \tau)$ — no equilíbrio — é uma função apenas do raio RMS R_b do feixe. Isto é consequência direta da aproximação descrita na equação (6.34) e adotada tanto no presente modelo quanto naquele desenvolvido na Seção 4.2 para um feixe inicialmente homogêneo.

A energia E_\perp no estado estacionário pode ser então de pronto obtida. Inserindo as equações (6.30), (6.33) e (6.37) na equação de conservação de energia (6.1), tendo em vista o reescalonamento (6.3) adotado, tem-se que, no equilíbrio

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{r_m}{r_c} \right) + \frac{2r_c}{3r_m} - \frac{5}{8} \right] f^2 + \left[\ln \left(\frac{r_c}{r_m} \right) - \frac{2r_c}{3r_m} - \frac{r_c^2}{2} + \frac{r_m^2}{3} + \frac{3}{4} \right] f + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{r_w}{r_c} \right) + \frac{r_c^2}{2} - \frac{1}{8} \\ & = E_\perp(s \geq \tau) = E_\perp. \end{aligned} \quad (6.38)$$

A energia média total descrita pela equação (6.38) é inerente às partículas e aos campos elétricos autoconsistentemente gerados no equilíbrio. Verifica-se que neste estado a energia E_\perp depende do tamanho do núcleo do feixe r_c , do tamanho do halo r_m e da fração f de partículas do halo. O termo envolvendo a posição r_w na qual se encontra o duto condutor é irrelevante para propósito deste trabalho, uma vez que naturalmente será suprimido no momento da conexão entre o estado inicial e o estado final, assunto este que será objeto da próxima Seção 6.3.

6.3 Conexão entre o estado final estacionário e o inicial não-estacionário

O estado inicial não-estacionário e o estado final estacionário, de equilíbrio, de um feixe inicialmente não-homogêneo parabolicamente foram respectivamente descritos nas Seções 6.1 e 6.2. Para cada estado, uma expressão matemática para a densidade n_b de partículas foi obtida, permitindo que diversas quantidades macroscópicas pertinentes ao feixe fossem calculadas como função da fração f de partículas, até então a única incógnita existente no modelo.

Entretanto, a dinâmica do feixe é do tipo Hamiltoniana, sendo por conseguinte a sua energia transversal total uma quantidade invariante do movimento. A conservação de energia — $E_\perp(s = 0) = E_\perp(s \geq \tau) = E_\perp$ — fornece então a última equação necessária à determinação autoconsistente da fração de partículas f do halo. Igualando as equações (6.10) e (6.38) obtém-se

$$\begin{aligned}
E_{\perp}(s=0) &= \frac{\eta^2}{48} + \frac{3}{8} + \frac{\ln(r_w)}{2} = E_{\perp}(s \geq 0) \\
&= \left[\frac{1}{2} \ln\left(\frac{r_m}{r_c}\right) + \frac{2r_c}{3r_m} - \frac{5}{8} \right] f^2 + \left[\ln\left(\frac{r_c}{r_m}\right) - \frac{2r_c}{3r_m} - \frac{r_c^2}{2} + \frac{r_m^2}{3} + \frac{3}{4} \right] f + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{r_w}{r_c}\right) \\
&\quad + \frac{r_c^2}{2} - \frac{1}{8}.
\end{aligned} \tag{6.39}$$

Note que conectar o estado não-estacionário ao estacionário precisamente significa relacionar a magnitude da não homogeneidade inicial η com os parâmetros que caracterizam o feixe no equilíbrio r_c e r_m . A equação resultante envolve uma única variável, a fração f de partículas que compõe o halo, pois os parâmetros do espaço de fase inicial e final η , r_c e r_m são quantidades determináveis e previamente conhecidas.

Manipulando algebricamente a equação (6.39) e agrupando termos segundo potências da fração de partículas f do halo obtém-se

$$D(r_c, r_m)f^2 + E(r_c, r_m)f + F(r_c, \eta) = 0, \tag{6.40}$$

na qual os coeficientes D , E e F são descritos analiticamente — de forma exata — por

$$\begin{aligned}
D(r_c, r_m) &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{r_m}{r_c}\right) + \frac{2r_c}{3r_m} - \frac{5}{8} \\
E(r_c, r_m) &= \ln\left(\frac{r_c}{r_m}\right) - \frac{2r_c}{3r_m} - \frac{r_c^2}{2} + \frac{r_m^2}{3} + \frac{3}{4} \\
F(r_c, \eta) &= -\frac{1}{2} \ln(r_c) + \frac{r_c^2}{2} - \frac{\eta^2}{48} - \frac{1}{2}
\end{aligned} \tag{6.41}$$

Em conformidade com o que havia sido previamente comentado nas seções anteriores deste Capítulo, bem como o que havia já sido observado na Seção 4.3 para um feixe inicialmente homogêneo, constata-se que a dependência da coordenada radial r_w na qual o duto circular é posicionado desaparece. Isto é resultado direto da simetria azimutal do problema. Segundo a Lei de Gauss, o campo elétrico \mathbf{E} no vácuo é invariante para qualquer instante s da dinâmica, independentemente de qual formato assume a densidade n_b ao longo do canal de confinamento magnético.

O polinômio exposto na equação (6.40) propicia duas soluções, contudo apenas uma com significado físico. A fração f , de acordo com sua definição (6.16), deve residir no intervalo $0 \leq f \leq 1$. Na próxima Seção, resultados numéricos para a fração de partículas f do halo e para emitância serão apresentados para diversos valores de magnitude da não-homogeneidade inicial η .

6.4 Determinação das quantidades de equilíbrio

A descrição de tanto o estado inicial não-estacionário na Seção 6.1 quanto o estado final estacionário na Seção 6.2 permitiu que uma densidade de partículas n_b fosse obtida para o feixe inicialmente não-homogêneo em cada um estes estados. Mediante n_b , quantidades macroscópicas

do feixe então foram avaliadas, dentre elas a energia transversal média E_{\perp} . Sendo E_{\perp} uma quantidade conservada da dinâmica, tornou-se possível conectar na Seção 6.3 ambos estados do feixe, fornecendo uma equação formal para direta determinação da fração f de partículas do halo.

Da forma como foram expostos na equação (6.41), os coeficientes D , E e F são funções de 3 variáveis aparentemente independentes, dadas pelos parâmetros η , r_c e r_m que caracterizam o espaço de fase do feixe no estado inicial e final. Entretanto, a única variável realmente independente na presente abordagem é a magnitude da não-homogeneidade η . Sendo o formato — parabólico — da densidade $n_b(s=0)$ invariante, o parâmetro η congrega toda a informação inicial do feixe de partículas carregadas. Constate que a densidade $n_b(s=0)$ presente na equação (6.5) possui um termo homogêneo e outro não-homogêneo, determinando η quão maior ou menor será a não-homogeneidade inicial. Sinteticamente, todavia ocultas as relações, de fato

$$r_c = r_c(\eta) \text{ e } r_m = r_m(\eta), \quad (6.42)$$

equação esta que explicita η como o único parâmetro livre da dinâmica. A equação (6.42) permite salientar a relação de causalidade existente na dinâmica do feixe: $r_m \neq r_c$ apenas se $\eta \neq 0$, sendo η passível de assumir valores no intervalo $0 \leq \eta \leq 1$. Isto é, o estado de equilíbrio deverá ser descrito por r_m somente se a sua instabilidade precursora — neste caso a magnitude da não-homogeneidade η — existir inicialmente. Embora o caos permeie o sistema e implique que a órbita de cada partícula que compõe o feixe não seja analítica com relação a sua condição inicial, a memória dos parâmetros r_c e r_m segundo η analiticamente permanece, aos moldes descritos em (6.42). As quantidades r_c e r_m caracterizam a topologia da dinâmica do feixe em questão. Note que o raciocínio anterior é análogo ao realizado para um feixe inicialmente homogêneo na Seção 4.4, apenas efetuando a permuta do descasamento inicial r_o pela magnitude da não-homogeneidade η e de algumas adaptações ao caso concreto desta Seção.

A determinação da forma funcional da equação (6.42) denota o desenvolvimento de modelos adicionais, os quais não pertencem ao escopo do presente trabalho. No entanto, em analogia ao efetuado para o feixe homogêneo da Seção 4.4, os parâmetros r_c e r_m , embora intrinsecamente sejam funções da magnitude da não-homogeneidade η , podem ser interpretados como independentes de η , sendo extraídos diretamente do espaço de fase do feixe no estado de equilíbrio. Os parâmetros r_c e r_m por conseguinte são quantidades previamente conhecidas que devem ser inseridas na equação (6.41) para a determinação dos coeficientes do polinômio da equação (6.40) e por conseqüência da fração de partículas f do halo. Sendo os parâmetros r_c e r_m entradas do procedimento de cálculo de f , para determinar no equilíbrio tanto o raio RMS R_b quanto a emitância ϵ do feixe, então, para cada valor desejado de não-homogeneidade η , deve-se executar o seguinte algoritmo:

- 1) Inspeccionando o espaço de fase do feixe não-homogêneo no equilíbrio, obter o tamanho do núcleo r_c e, através da equação (6.12), determinar o tamanho do halo r_m ;
- 2) Inserir os parâmetros obtidos no passo 1 na equação (6.41) para quantificar respectivamente os coeficientes D , E e F . Introduzir os resultados numéricos de D , E e F na equação (6.40) e resolver numericamente a expressão resultante para a fração f de partículas do halo. Devendo a fração f estar compreendida no intervalo $0 \leq f \leq 1$, selecionar a raiz positiva deste polinômio de 2º grau;
- 3) Inserir a fração f obtida no passo 2 e os parâmetros r_c e r_m obtidos no passo 1 na equação (6.31) para computar o raio RMS $R_b(s \geq \tau)$;
- 4) Inserir o resultado obtido no passo anterior para $R_b(s \geq \tau)$ na equação (6.37) para obtenção da velocidade quadrática média $\langle \mathbf{V}_\perp^2 \rangle(s \geq \tau)$;
- 5) Finalmente, para determinação da emitância $\epsilon(s \geq \tau)$, inserir os valores obtidos no passo 3 para $R_b(s \geq \tau)$ e no passo 4 para $\langle \mathbf{V}_\perp^2 \rangle(s \geq \tau)$ na equação (6.36).

Para que haja crescimento da emitância ϵ do feixe necessariamente deve ocorrer um decaimento do seu raio RMS R_b . A vinculação dinâmica destas quantidades é conseqüência direta da fundamental equação de conservação de energia (6.1), haja vista que qualquer diminuição na energia potencial efetiva média $1/2 \langle \mathbf{U}_\perp^2 \rangle$ deve representar aumento equivalente na energia cinética média $1/2 \langle \mathbf{V}_\perp^2 \rangle$. Extensa análise a respeito já foi realizada nas seções anteriores. No entanto, no presente feixe inicialmente não-homogêneo e casado, as alterações do raio RMS R_b não são substanciais, comportamento este muito condizente com aquele inicialmente desejado, uma vez que se efetuou o casamento inicial do envelope do feixe $r_b(s = 0) = r_{b0}$.

Por este motivo, os resultados proporcionados pelo algoritmo descrito anteriormente serão apenas sinteticamente apresentados mediante duas distintas curvas, uma para a fração de partículas f e outra para a emitância ϵ , ambas como funções da magnitude da não-homogeneidade η . Os valores investigados para magnitude da não-homogeneidade compreendem-se no intervalo $0 \leq \eta \leq 1$, sendo adotados passos discretizados de $\Delta\eta = 0,1$. Pretende-se com isto suficientemente avaliar o comportamento das quantidades de interesse com relação aos valores que eventualmente η possa assumir. Como quanto mais a não-homogeneidade $\eta \rightarrow 0$ a escala de decaimento característica do feixe $\tau \rightarrow \infty$, simulações numéricas autoconsistentes para $\eta = 0,1$ não foram executadas. Para $\eta \leq 0,1$, as simulações numéricas tornam-se computacionalmente muito onerosas em tempo de execução e em espaço físico ocupado em disco rígido para armazenamento dos seus dados gerados. Desta forma, para que a representação das curvas das quantidades de equilíbrio acima mencionadas não seja comprometida, os resultados para $\eta = 0,1$ foram quantificados mediante interpolação dos valores simulados para $\eta = 0$ e $\eta = 0,2$.

Para cada uma das curvas acima citadas, os resultados computados mediante simulações numéricas autoconsistentes serão apresentados em conjunto com os preditos pelo modelo analítico desenvolvido. O método de simulação numérica autoconsistente utilizou $N_b = 10.000$ partículas e é em detalhe descrito no APÊNDICE A. A determinação da fração f mediante simulações numéricas autoconsistentes, tal qual como efetuado na Seção 4.4 para o feixe homogêneo, consiste em simplesmente contar no espaço de fase obtido o número de partículas que residem na região retangular, na nuvem anteriormente descrita. Entretanto, esta tarefa no presente caso é muito mais árdua quando comparada com a realizada para o feixe homogêneo. Naquele caso, o descasamento determinava que as partículas do halo residissem em uma região curva do espaço de fase, muito distante das demais outras e de portanto fácil discriminação. No presente caso não-homogêneo casado, distinguir o que são partículas do núcleo e do halo denota uma resolução temporal muito grande das simulações numéricas autoconsistentes, com uma amostragem da ordem de 100 vezes — no mínimo — a frequência de Nyquist.⁴⁴ Portanto, flutuações axiais espúrias na fração de partículas f do halo obtida mediante simulações numéricas autoconsistentes são muito difíceis de serem eliminadas. O raio RMS R_b e a emitância ϵ são obtidos das simulações numéricas mediante estatística sobre a densidade n_b no equilíbrio segundo, respectivamente, suas definições (2.32) e (2.33). Os valores numéricos de $R_b(s \geq \tau)$ e $\epsilon(s \geq \tau)$ — obtidos através dos modelos e das simulações — para cada valor de η constam em uma tabela elaborada e presente no APÊNDICE G. Nesta tabela, estão expostos os valores dos parâmetros que caracterizam o estado de equilíbrio — r_c e r_m — e os valores dos coeficientes — D , E e F — do polinômio obtido para a fração f de partículas. Observe que, por simplicidade, adotou-se $r_c = 1$ e $r_m = 1,3$ para todos os valores de magnitude da não-homogeneidade, uma vez que estas quantidades demonstram depender fracamente de η . Logo abaixo, nas linhas restantes da tabela, primeiro constam os resultados providos pela solução analítica exata, sendo a seguir, para validação, apresentados os resultados computados através das simulações numéricas autoconsistentes.

Na Figura 33 são apresentados os resultados obtidos para as quantidades f e ϵ no equilíbrio como função da magnitude da não-homogeneidade η . Conforme o modelo desenvolvido, independentemente de qual valor específico seja atribuído a η , tanto o raio RMS $R_b(s \geq \tau)$ quanto a emitância $\epsilon(s \geq \tau)$ são funções da fração f de partículas do halo. Do mesmo modo que no caso homogêneo, a fração f é a grandeza fundamental que descreve o equilíbrio. Sendo as expressões (6.31) e (6.36) aproximações adequadas, então quanto mais próximos forem os resultados modelados de f dos simulados, mais compatíveis também serão os resultados obtidos para $R_b(s \geq \tau)$ e $\epsilon(s \geq \tau)$. Também no presente caso não-homogêneo, a sensibilidade do cálculo das quantidades $R_b(s \geq \tau)$ e $\epsilon(s \geq \tau)$ segundo uma variação δf pode ser mensurada. Tanto $|\partial R_b(s \geq \tau)/\partial f|$ quanto $|\partial \epsilon(s \geq \tau)/\partial f|$ — segundo as equações (6.31) e (6.36) — são pequenas, conferindo

estabilidade ao procedimento de obtenção de $R_b(s \geq \tau)$ e $\epsilon(s \geq \tau)$, quantidades que dependem majoritariamente dos parâmetros η , r_c e r_h que caracterizam o espaço de fase inicial e final do feixe.

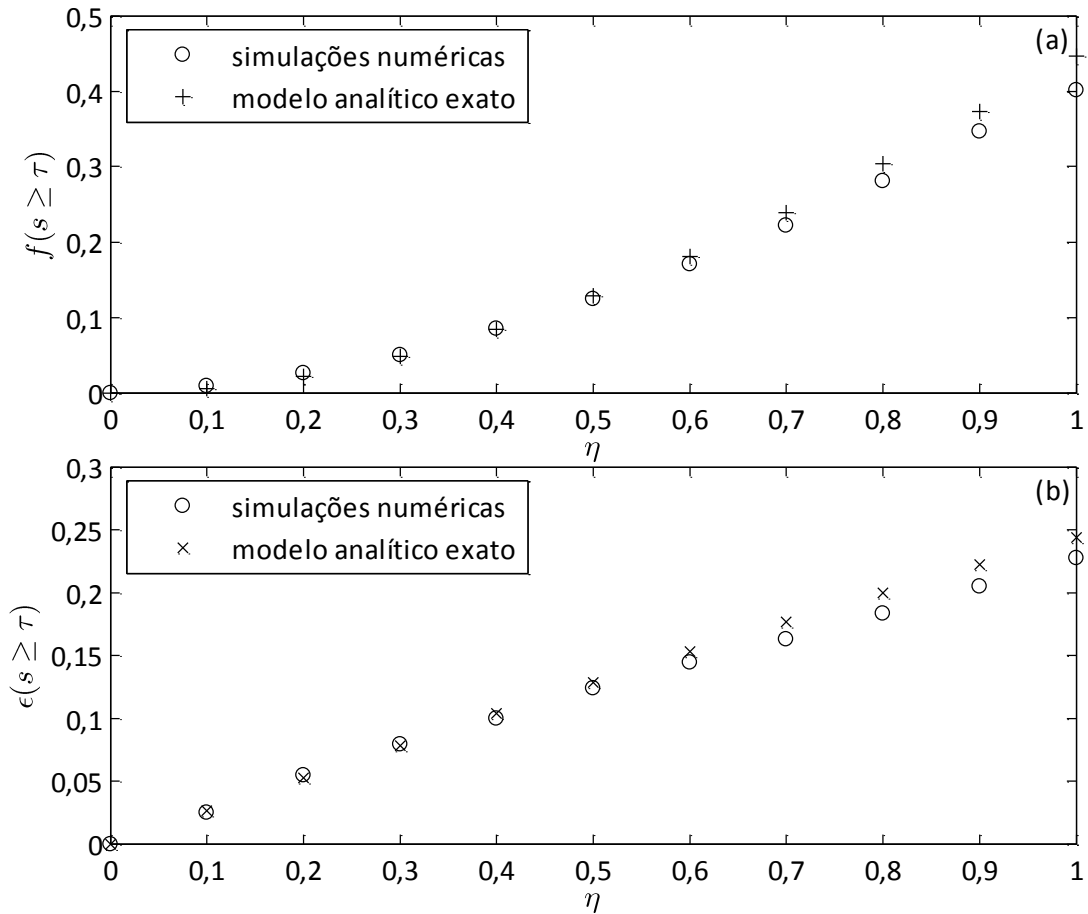


Figura 33: Comparação entre os resultados providos pelo modelo analítico exato desenvolvido e pelas simulações numéricas autoconsistentes como função da magnitude da não-homogeneidade η . Constam em (a) a fração de partículas f do halo e em (b) a emitância ϵ do feixe, ambas quantidades avaliadas no equilíbrio.

Os resultados providos pelo modelo analítico exato são, tal como demonstra a Figura 33, mais semelhantes às quantidades obtidas das simulações numéricas autoconsistentes quando os valores investigados da magnitude da não-homogeneidade são $\eta \leq 0,6$. Para magnitudes da não-homogeneidade $\eta \leq 0,6$ um acordo satisfatório entre o modelo e as simulações numéricas é observado, surgindo apenas um distanciamento, crescente, entre as curvas quando $\eta > 0,6$. Isto ocorre tanto para a fração de partículas $f(s \geq \tau)$ do halo, apresentada na Figura 33a, quanto para a emitância $\epsilon(s \geq \tau)$, apresentada na Figura 33b. De fato, para valores de não-homogeneidade $\eta \geq 0,6$ as expressões (6.31) e (6.36) calculadas no equilíbrio para respectivamente $R_b(s \geq \tau)$ e $\epsilon(s \geq \tau)$ tornam-se menos realísticas. No entanto, toda a diferença observada entre os resultados dos modelos e os das simulações para $\eta \geq 0,6$ não pode ser creditada à — ou à falta de — acuracidade do modelo desenvolvido na Seção 6.3. Os parâmetros r_c e r_m são funções da magnitude da não homogeneidade η e não contemplar esta dependência na determinação da fração f através

da resolução da equação (6.40) introduz imperfeições. Apesar disso, os resultados providos pelo modelo continuam razoáveis.

Adicionalmente, tal como efetuado para o feixe inicialmente homogêneo na Seção 4.4, uma vez quantificada a fração de partículas do halo f , torna-se possível e assim interessante também comparar a densidade n_b de partículas do feixe no equilíbrio modelada com a resultante das simulações numéricas autoconsistentes. Na Figura 34, o espaço de fase transversal do feixe no equilíbrio obtido mediante simulação numérica autoconsistente é apresentado para $\eta = 0,5$, valor até então utilizado para exemplificação dos modelos desenvolvidos. Nesta Figura, também constam os resultados obtidos no equilíbrio para a densidade linear do feixe, devidamente representada pela densidade do núcleo e do halo, por simulação numérica autoconsistente e pela modelagem analítica. No APÊNDICE H, os resultados obtidos para os demais casos de magnitude da não-homogeneidade η são expostos. Os espaços de fase apresentados nas figuras do APÊNDICE H confirmam a condição anteriormente enunciada e posteriormente adotada na resolução dos modelos de que tanto r_c quanto r_m são tênues funções da magnitude da não-homogeneidade η .

A Figura 34a contém o espaço de fase capturado das simulações numéricas autoconsistentes no instante $s = 796,3$ para um feixe cuja magnitude da não-homogeneidade é $\eta = 0,5$. Trata-se do espaço de fase típico de um feixe inicialmente não-homogêneo casado. Na Figura 34b, a densidade de partículas n_c do núcleo do feixe no equilíbrio computada mediante simulações numéricas é comparada com o resultado provido pelo modelo analítico exato. A densidade n_c obtida por simulação numérica foi quantificada mediante um histograma das partículas frias, sendo o tamanho do intervalo adotado para o cálculo da frequência de partículas com relação à coordenada R de $\Delta_c \cong 0,0866$. Conjuntamente com este histograma, considerando os valores de r_c e f para $\eta = 0,5$ presente no APÊNDICE G, a densidade de partículas do núcleo modelada, descrita pela equação (6.18), é também plotada. Observa-se uma concordância razoável entre os resultados do modelo e das simulações numéricas autoconsistentes. O mesmo ocorre para os demais casos de não-homogeneidade η presentes no APÊNDICE H.

Por final, na Figura 34c, a densidade obtida por simulação numérica autoconsistente para as partículas mornas que compõe o halo é comparada com aquela fornecida pelo modelo analítico desenvolvido. O tamanho do intervalo adotado para confecção do histograma foi $\Delta_m \cong 0,1195$. O resultado do modelo foi obtido mediante inserção das quantidades r_m e f para $\eta = 0,5$ presentes no APÊNDICE G na densidade n_m descrita pela equação (6.28). Da mesma forma que para a população de partículas do núcleo, um acordo razoável entre o resultado oriundo das simulações numéricas autoconsistentes e do modelo é verificado. Observe que diferentemente da densidade n_c do núcleo, a qual no equilíbrio é homogênea espacialmente, a densidade de partículas do halo é homogênea no espaço de fase. A homogeneidade no espaço de fase implica em uma densidade superficial n_m cuja

dependência espacial é do inverso da coordenada radial R , sendo a sua versão linear, descrita por λ_m , sim homogênea com relação à coordenada radial R . A propósito, destaca-se que, da mesma forma que o executado para o feixe homogêneo da Seção 4.4, para fins de comparação com o histograma elaborado mediante as simulações numéricas autoconsistentes, tanto para o núcleo como para o halo do feixe, a versão linear λ_α da densidade, definida formalmente na equação (6.22), multiplicado pelo intervalo de quantização utilizado no histograma Δ_α deve ser utilizado. Para tanto, basta inserir nesta última equação as densidades superficiais obtidas para o núcleo, descrita pela equação (6.18), e para o halo, descrita pela equação (6.28).

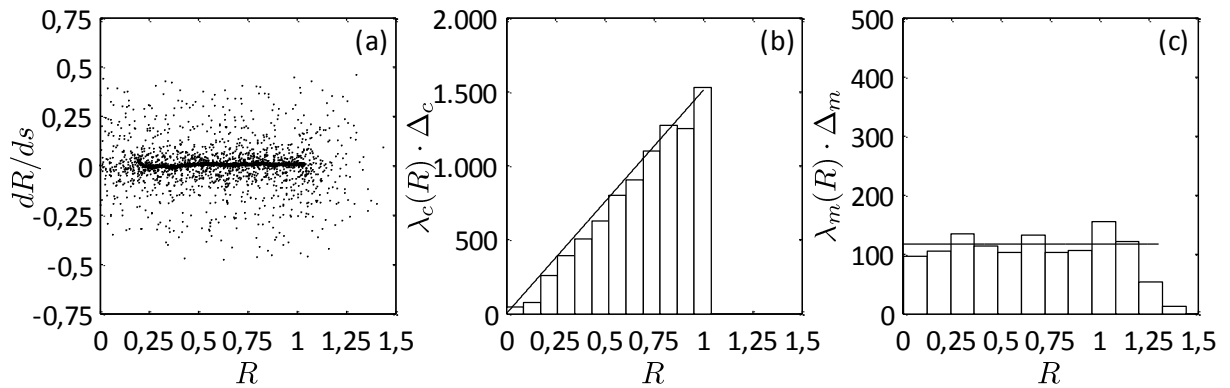


Figura 34: Espaço de fase capturado das simulações numéricas autoconsistentes em $s = 796,3$ para (a) $N_b = 10.000$ partículas e $\eta = 0,5$. Os histogramas das partículas do núcleo e do halo do feixe providos pelas simulações numéricas autoconsistentes são respectivamente comparados com os modelos desenvolvidos para suas densidades em (b) com $\Delta_c \cong 0,0866$ e em (c) com $\Delta_m \cong 0,1194$.

6.5 Abordagem Lagrangeana para a magnitude da não-homogeneidade

No princípio deste Capítulo, dois instantes particulares da dinâmica do feixe de partículas carregadas inicialmente não-homogêneo foram analisados. Para caracterizar o feixe no estado de equilíbrio, em $s \geq \tau$, investigou-se a sua topologia mediante análise direta de consecutivas seções transversais do seu espaço de fase, sendo esta de suma importância ao desenvolvimento dos modelos descritos na Seção 6.2. Posteriormente, visando identificar qual o comportamento do feixe em sua transição do estado inicial não-estacionário ao final estacionário, também se investigou o caráter do seu espaço de fase para um tempo $s \approx \tau_{q0}$, antes e após a primeira quebra de onda de densidade n_b de partícula que ocorre no sistema.

Entretanto, também é relevante melhor compreender qual é a dinâmica da densidade n_b de partículas do feixe quando $s \lesssim \tau_{q0}$. Isto é, torna-se interessante melhor compreender a dinâmica do feixe enquanto este ainda permanece em seu estado inicial não-estacionário, anterior a ocorrência do primeiro colapso entre anéis concêntricos e consecutivos de partículas. Para tanto, na Figura 35, um conjunto de seções do espaço de fase transversal do feixe não-homogêneo são apresentadas quando $s \cong 0$. Especificamente o espaço de fase apresentado na Figura 35a foi

capturado em $s = 0$, o apresentado na Figura 35b em $s = 1,1$ e o apresentado na Figura 35c em $s = 2,2$, em instantes incipientes da excursão do feixe no canal de confinamento magnético. Do ponto de vista do raio RMS R_b do feixe, tais instantes correspondem respectivamente ao momento em que $R_b(s)$ é máximo, ao momento em que $R_b(s)$ é igual ao seu valor médio axial $\bar{R}_b(s)$ e ao momento em que $R_b(s)$ é mínimo. Tais instantes são destacados na Figura 27a, na qual consta a evolução do raio RMS R_b , mediante barras e asteriscos em ciano.

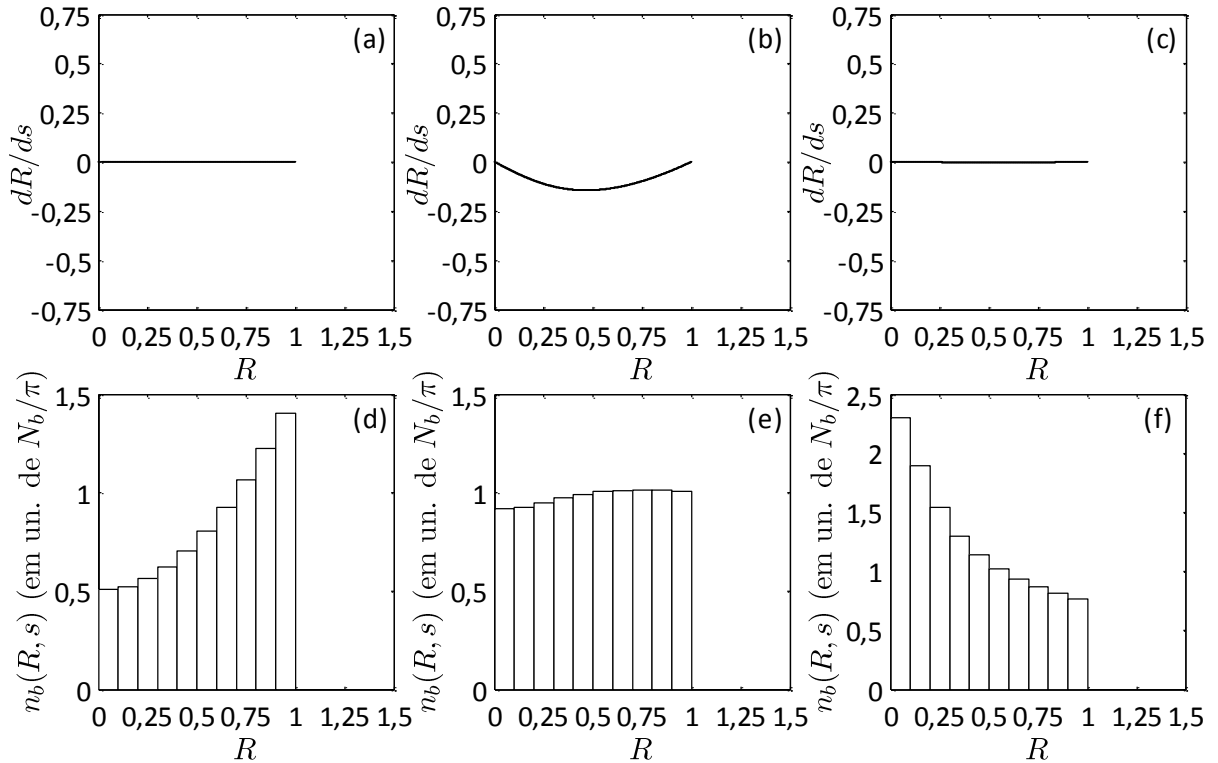


Figura 35: Dinâmica do feixe durante o estado inicial não-estacionário. As seções transversais do seu espaço de fase foram capturadas em (a) $s = 0$, (b) $s = 1,1$ e em (c) $s = 2,2$ sendo respectivamente também apresentado em (d), (e) e (f), a sua densidade de partículas $n_b(R, s)$ em cada um destes instantes com quantização $\Delta_b = 0,1$. Resultados obtidos por simulações numéricas autoconsistentes de $N_b = 10.000$ partículas com $\eta = 0,5$.

Por imposição, inicialmente o feixe encontra-se disposto sobre o eixo R das coordenadas radiais. Após sua introdução no canal de confinamento magnético, as forças não-lineares intrínsecas à região interna do feixe atuam sobre as partículas de forma que uma deflexão vertical macroscópica, sobre o eixo das velocidades dR/ds , seja observada. A deflexão máxima ocorre quando o raio RMS R_b do feixe encontra-se em seu valor axial médio $\bar{R}_b(s)$. O feixe retorna ao seu aspecto visual inicial quando o raio RMS R_b atinge seu valor mínimo, estando todas as suas partículas novamente dispersas somente sobre o eixo horizontal das coordenadas radiais R . Note que esta dinâmica do feixe ocorre com as suas extremidades no espaço de fase — $R = 0$ e $R = r_{b0}$ — fixas. Ou seja, para instantes de tempo $s \lesssim \tau_{q0}$, o feixe assemelha-se muito com uma corda vibrante cujas extremidades são estáticas. Portanto, o ato de casar o envelope inicial do feixe $r_b(s = 0) = r_{b0}$ de fato não somente impõe que partículas do feixe excursionem em uma região $0 \leq R \leq r_{b0}$ de área

invariante, tal como comentado nos primeiros parágrafos deste Capítulo, como também suas partículas mais externas — a sua borda — estejam casadas, estacionadas em $R = r_{bo}$ com $dR/ds = 0$. As partículas somente sofrerão difusão para uma região do espaço de fase $R > r_{bo}$ quando houver a primeira quebra de onda, momento no qual o feixe não se comporta mais como um fluido convencional, sendo o seu aspecto filamentar — de uma corda vibrante — anteriormente destacado não mais observado no espaço de fase.

O comportamento imediatamente anterior pode ser elucidado por simples inspeção direta do aspecto do feixe no espaço de fase. No entanto, somente esta análise não é suficiente, pois no presente caso não-homogêneo as forças internas ao feixe são de natureza não-linear. A análise anterior somente seria completa caso o feixe fosse inicialmente homogêneo, tal qual o do Capítulo 4, pois as forças lineares neste atuantes tendem a conservar o aspecto geométrico inicial da sua densidade n_b de partículas.

Neste sentido, para expandir a compreensão sobre a dinâmica do feixe inicialmente não-homogêneo, é importante também avaliar qual o caráter da densidade n_b de partículas em cada instante de tempo anteriormente comentado. Com este intuito, imediatamente abaixo de cada seção do espaço de fase capturada da dinâmica do feixe e apresentada na Figura 35, é computada e também exposta a sua respectiva densidade de partículas n_b naquele instante de tempo s . Assim, a densidade n_b de partículas é apresentada na Figura 35d para $s = 0$, na Figura 35e para $s = 1,1$ e na Figura 35f para $s = 2,2$. Inicialmente, o feixe é perfeitamente parabólico, tal qual determina a densidade n_o descrita pela equação (6.5). No entanto, à medida que evolui no canal de confinamento, as forças não-lineares internas impõem que a sua densidade $n_b(R, s)$ se deforme, de modo que, quando o seu raio RMS R_b atinge o seu valor médio axial \bar{R}_b , a densidade n_b seja uniforme, homogênea com relação a coordenada radial R . Como no instante de tempo s no qual $R_b(s) = \bar{R}_b$ as velocidades dos anéis infinitesimais concêntricos que compõe a região interna do feixe são não-nulas, $dR/ds \neq 0$, então a densidade n_b não permanece uniforme. As partículas são reacomodadas de tal forma que, quando o raio RMS R_b atinge seu valor mínimo, há uma reflexão da densidade n_b com relação ao seu eixo vertical de simetria: a densidade $n_b(R, s)$ de partículas possui um maior valor quando $R \rightarrow 0$, diferentemente do caso inicial, em $s = 0$, no qual o seu maior valor ocorria quando $R \rightarrow r_{bo}$. Este comportamento ocorre de forma recorrente até o momento da formação do primeiro jato de partículas, em $s \lesssim \tau_{qo}$. Ademais, é este o comportamento dinâmico da densidade de partículas n_b do feixe responsável, mesmo após o casamento inicial do seu envelope r_b , pela oscilação residual de seu raio RMS R_b observada na Figura 27a.

Fisicamente, a dinâmica da densidade n_b , acima comentada e ilustrada na Figura 35 para um feixe inicialmente não-homogêneo, pode ser interpretada como um processo de redistribuição de partículas. De forma mais consistente, sendo as partículas constituintes portadoras de carga

elétrica, a dinâmica da densidade n_b anterior à primeira quebra de onda assemelha-se muito a um processo de redistribuição de carga. Esta redistribuição de partículas/carga — fruto da ação das forças não-lineares — determina que o formato da densidade de partículas $n_b(R, s)$ torne-se dependente do tempo, situação esta completamente distinta daquela observada para o estado inicial do feixe inicialmente homogêneo do Capítulo 4. Sendo a magnitude da não-homogeneidade η a quantidade majoritária na distinção do feixe homogêneo do não-homogêneo, é sugestivo modelar este comportamento peculiar de redistribuição de carga observado permitindo que

$$\eta = \eta(s). \quad (6.43)$$

Isto é, que a magnitude da não-homogeneidade η torne-se uma quantidade dependente da coordenada axial s . É interessante reforçar uma afirmação já efetuada anteriormente. Do ponto de vista das simulações numéricas autoconsistentes, a magnitude da não-homogeneidade η é uma quantidade apenas definida em $s = 0$. Para instantes de tempo $s > 0$, o que de fato há é um conjunto de partículas cuja dinâmica é ditada pelo método de simulação numérica autoconsistente descrito no APÊNDICE A. Portanto, para $s > 0$, η é uma quantidade inexistente nas simulações numéricas autoconsistentes. Por este motivo, em todas as Seções anteriores deste Capítulo, o subscrito o não foi empregado para representar η , diferentemente do executado para o descasamento inicial r_o referente ao feixe inicialmente homogêneo do Capítulo 4.

É absolutamente relevante então obter uma equação que descreva a dinâmica da magnitude da não-homogeneidade η , agora função da coordenada axial s conforme especifica a equação (6.43). Uma forma para tanto é determinar exatamente quais as forças atuantes sobre um anel concêntrico de carga de espessura infinitesimal específico do feixe. Convém salientar que em parte estas equações já foram obtidas no Capítulo 3, na qual a interação entre o feixe e partículas individuais constituintes foi descrita. Devido à simetria azimutal do problema, as equações obtidas no Capítulo 3 para partículas individuais sob ação do feixe podem ser perfeitamente reaproveitadas no presente caso, pois cada elemento do anel com espessura infinitesimal e raio R_o , apreciará a mesma força que uma partícula também posicionada em R_o . Dinamicamente, haja vista a simetria azimutal, tanto uma partícula inicialmente em R_o como um anel infinitesimal de raio inicial R_o possuirão o mesmo comportamento.

Desta forma, considerando um anel de raio inicial R_o , a força exercida pelos demais anéis que compõe o feixe é perfeitamente descrita pela equação (3.4)

$$\frac{\partial \psi}{\partial R} = -\frac{K_b}{N_b R} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_o} R' dR' d\theta n_b(R', s), \quad (6.44)$$

sendo R' uma variável intermediária necessária à integração radial. Note que R_o é uma coordenada representativa de um anel infinitesimal específico do feixe. A quantidade R_o rotula um anel particular do feixe, sendo, uma vez atribuída, então uma característica própria deste último.

Portanto, a variável R_o pode ser interpretada como uma coordenada radial Lagrangeana do referido anel infinitesimal de carga. Da equação (6.44), pode-se definir a seguinte quantidade

$$Q(R_o) \equiv -\frac{K_b}{N_b} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_o} R' dR' d\theta n_b(R', s), \quad (6.45)$$

a qual corresponde a fração adimensional de carga aprisionada pela superfície — ou o contorno devido à simetria azimutal — de Gauss \mathcal{C} que é imediatamente interna ao anel infinitesimal com raio R_o . Esta expressão é absolutamente geral, independente de qual formato de densidade de partículas n_b ao feixe é considerada. Apenas o vínculo de simetria azimutal permanece. Portanto, inserindo a equação (6.45) na equação (6.44) e a expressão resultante na equação (3.12) obtém-se que um anel de carga infinitesimal de raio R_o está sujeito a seguinte equação dinâmica

$$\frac{d^2}{ds^2} R + \kappa_{zo} R - \frac{Q(R_o)}{R} = 0. \quad (6.46)$$

Antes da primeira quebra de onda, para $s \lesssim \tau_{qo}$, enquanto o feixe ainda comporta-se como um fluido ideal, inviscido, a energia de um anel — inteiro — infinitesimal pertinente ao feixe pode ser ainda determinada, sendo uma quantidade conservada para cada instante s da sua dinâmica. Após a primeira quebra de onda, para $s \gtrsim \tau_{qo}$, a descrição aqui adotada para cada anel deve ser substituída pela descrição de cada partícula individual do feixe, sob a égide da Teoria Cinética. A energia armazenada por um anel infinitesimal de raio R_o pode ser prontamente obtida multiplicando a equação (6.46) logo acima por dR/ds e integrando em relação à coordenada axial s . Assim procedendo, obtém-se a seguinte expressão

$$E_{\perp o} = \frac{1}{2} V^2 + \frac{1}{2} \kappa_{zo} R^2 - Q(R_o) \ln(R) = \text{constante}, \quad (6.47)$$

na qual $V \equiv dR/ds$ é a velocidade do anel de carga inicialmente em $R(s=0) = R_o$. Identificando o termo $(1/2)V^2$ como a energia cinética do anel e os termos restantes como

$$\frac{1}{2} U^2 \equiv \frac{1}{2} [\kappa_{zo} R^2 - 2Q(R_o) \ln(R)], \quad (6.48)$$

a energia potencial efetiva do anel de carga inicialmente em $R(s=0) = R_o$, então o Lagrangeano^{25,26,27} transversal intrinsecamente associado a equação (6.47) torna-se completamente definido pela expressão

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} V^2 - \frac{1}{2} \kappa_{zo} R^2 + Q(R_o) \ln(R). \quad (6.49)$$

Na equação imediatamente acima, o termo $(1/2)V^2$ corresponde a energia cinética do anel, $(1/2)\kappa_{zo} R^2$ corresponde a energia potencial do anel e $Q(R_o) \ln(R)$ é energia armazenada no anel inicialmente localizado em $R(s=0) = R_o$ devido ao campo elétrico autoconsistentemente gerado pelos demais anéis infinitesimais de carga que compõem a densidade de partículas n_b do feixe. Por analogia entre as equações (6.1) e (6.47), o termo $Q(R_o) \ln(R)$ é uma expressão unidimensional por

anel equivalente a energia média armazenada no campo elétrico autoconsistentemente gerado pela dinâmica das partículas constituintes do feixe, formalmente designada por $\mathcal{E}_F(s)$ na Seção 2.3. Por final, observe que inserindo a expressão (6.49) na equação de Euler-Lagrange^{25,26,27} unidimensional para a coordenada R é pronta a obtenção da equação (6.46).

Note que o Lagrangeano transversal exposto \mathcal{L} na equação (6.49) corresponde à apenas um anel específico do feixe, àquele ao qual se localizava inicialmente em $R(s = 0) = R_o$ e que por este motivo recebeu o rótulo R_o . Porém, o interesse desta Seção reside no Lagrangeano transversal total L , isto é, ao que englobe não somente um anel infinitesimal específico de raio R_o mas todos os anéis que compõe a densidade de partículas n_b . Somente considerando o sistema completo é que a magnitude da não-homogeneidade η incorpora-se a descrição do sistema, tal qual como o desejado.

Para obter o Lagrangeano total L pertinente a seção transversal do feixe, basta efetuar uma integração sobre todos os possíveis anéis que compõe o feixe. Desta forma, a coordenada R_o , a qual anteriormente designava um anel específico, pode ser agora utilizada como variável de integração, cuja finalidade é incluir a influência de todos os demais anéis infinitesimais de carga que compõem a densidade de partículas n_b , formando uma descrição completa do sistema em questão como um todo. Assim sendo, multiplicando o Lagrangeano \mathcal{L} do anel presente na equação (6.49) pela densidade parabólica n_b de partículas do feixe e integrando sobre toda a extensão radial do feixe formalmente designada por $\mathbf{R}_{\perp o}$ tem-se que

$$L = \int_0^{r_{bo}} \mathcal{L} n_b(\mathbf{R}_{\perp o}) d\mathbf{R}_{\perp o} \quad (6.50)$$

na qual, por compatibilidade e conseqüente realização da integração, observe que a coordenada R que representava anteriormente a dependência espacial da densidade n_b deve ser substituída por aquela que representa o anel infinitesimal de carga com raio inicial R_o . Note que um dos extremos de integração é r_{bo} , o qual corresponde ao valor de equilíbrio inicialmente atribuído ao envelope r_b — a borda — do feixe.

A equação (6.50) formalmente especifica completamente o Lagrangeano transversal total do feixe L . No entanto, a integração presente nesta equação não é realizável, uma vez que enquanto a densidade n_b é expressa como função da variável de integração $\mathbf{R}_{\perp o}$, o Lagrangeano \mathcal{L} de cada anel em $\mathbf{R}_{\perp o}$ depende tanto da coordenada espacial R quanto de sua derivada dR/ds . Há uma incompatibilidade nas variáveis que descrevem o feixe, a qual para integração e obtenção de uma expressão analítica irreduzível para o Lagrangeano total L deve ser eliminada. Enquanto o feixe comporta-se como um fluido ideal, a incompatibilidade anterior pode ser suprimida observando que, para qualquer instante s da dinâmica, um anel infinitesimal de raio arbitrário R deve conter o mesmo número de partículas que originalmente continha. Se o anel infinitesimal em questão possuía, no

princípio de sua dinâmica, um raio inicial $R(s = 0) = R_o$, então a relação de conservação de partículas abaixo naturalmente emerge

$$n_b(\mathbf{R}_{\perp o})d\mathbf{R}_{\perp o} = n_b(\mathbf{R}_{\perp})d\mathbf{R}_{\perp}. \quad (6.51)$$

Estritamente, a equação logo acima relaciona duas abordagens distintas ao feixe não-homogêneo de partículas carregadas, uma mediante coordenadas Lagrangeanas $\mathbf{R}_{\perp o}$ e a outra mediante coordenadas Eulerianas \mathbf{R}_{\perp} . Caso em $s = 0$ haja a seguinte correspondência

$$\mathbf{R}_{\perp}(s = 0) = \mathbf{R}_{\perp o}, \quad (6.52)$$

então para qualquer instante s posterior da dinâmica, a equação (6.51) que descreve a conservação de partículas em anéis infinitesimais da seção transversal do espaço de fase do feixe deve ser satisfeita. A equação (6.52) relaciona a coordenada Lagrangeana $\mathbf{R}_{\perp o}$ com a coordenada Euleriana \mathbf{R}_{\perp} , as quais inicialmente, por imposição, devem ser idênticas pois se referem ao mesmo anel.

Tendo em vista a recente equação (6.51) obtida, inserindo a expressão para a densidade n_b descrita pela equação (3.13) com $r_b(s = 0) = r_{bo}$ e a equação (6.49) para o Lagrangeano \mathcal{L} de cada anel na equação (6.50), tem-se que o Lagrangeano transversal do feixe assume

$$L = \int_0^{r_{bo}} \left[\frac{1}{2}V^2 - \frac{1}{2}\kappa_{zo}R^2 + Q(R)\ln(R) \right] \left[\frac{N_b}{\pi r_{bo}^2} + \eta \frac{N_b}{\pi r_{bo}^2} \left(\frac{2R^2}{r_{bo}^2} - 1 \right) \right] d\mathbf{R}_{\perp} \quad (6.53)$$

na qual também a fração adimensional de carga $Q(R_o)$, originalmente obtida em coordenada Lagrangeana R_o , foi também representada em coordenadas Eulerianas R . A equação (6.53) acima é válida para um feixe azimutalmente simétrico, focalizado por um campo magnético constante de origem solenoidal e inicialmente não-homogêneo parabolicamente. O envelope do feixe ainda foi considerado inicialmente casado $r_b(s = 0) = r_{bo}$, o que implica que o anel infinitesimal de partículas que compõe sua borda em $R = r_{bo}$ permanece estático com $V = dR/ds|_{R=r_{bo}} = 0$.

A equação (6.53) para o Lagrangeano transversal L do feixe ainda apresenta dois termos que devem ter suas expressões analíticas determinadas. Um destes é a fração adimensional de carga $Q(R)$ e o outro é o perfil de velocidades $V(R)$. Verifique que as duas quantidades são dependentes da coordenada radial R , sendo absolutamente necessária então sua determinação para a conseqüente realização da integração descrita na equação (6.53).

A fração adimensional de carga $Q(R)$ do feixe observada por um anel infinitesimal de raio R é prontamente obtida da sua definição anterior. Inserindo a equação (6.5) para a densidade n_b do feixe na equação (6.45) e realizando integração indefinida sobre a coordenada radial R obtém-se

$$Q(R) = \eta \frac{R^4}{r_{bo}^4} + (1 - \eta) \frac{R^2}{r_{bo}^2}, \quad (6.54)$$

quantidade esta válida para um feixe cuja densidade inicial é do tipo parabólica. A constante de integração é computada mediante a condição de ausência de carga na origem $Q(R = 0) = 0$.

O perfil de velocidades $V(R)$ por sua vez pode ser determinado invocando novamente a condição de conservação de partículas. Recordar-se que, conforme a equação (2.12), o número de partículas por unidade de comprimento axial N_b é uma quantidade conservada da dinâmica do feixe. Isto é, uma quantidade N_b de partículas presente na seção transversal do feixe inicialmente, em $s = 0$, deve permanecer invariante para qualquer instante posterior s da dinâmica do feixe. Torna-se possível então desenvolver uma equação de conservação de partículas para a coordenada axial s . Observe que o conceito físico envolvido no tipo atual de conservação de partículas difere daquele exposto na equação (6.51), na qual a conservação ocorria para cada anel infinitesimal que compunha a densidade n_b e pertencia à seção transversal do feixe. Do ponto de vista da densidade de partículas n_b , a conservação de partículas acima comentada matematicamente pode ser expressa por⁵⁸

$$\frac{\partial}{\partial s} n_b + \nabla_{\perp} \cdot (n_b \mathbf{V}_{\perp}) = 0, \quad (6.55)$$

a tradicional equação da continuidade em Mecânica dos Fluidos, a qual, no problema em questão, determina que qualquer alteração no número de partículas residentes em uma seção transversal específica do feixe deve implicar em uma alteração axial da quantidade N_b .

A velocidade \mathbf{V}_{\perp} torna-se então completamente definida. Resolvendo a equação (6.55) para \mathbf{V}_{\perp} , considerando o Teorema da Divergência com vista a simetria azimutal do problema abordado, formalmente obtém-se que

$$\mathbf{V}_{\perp} = -\frac{\mathbf{e}_r}{2\pi R n_b} \int \frac{\partial}{\partial s} n_b d\mathbf{R}_{\perp}. \quad (6.56)$$

Inserindo na equação (6.56) logo acima a densidade n_b de partículas descrita pela equação (3.13) com $r_b(s=0) = r_{b0}$ constata-se que o perfil de velocidades radial assume

$$V(R) = -\frac{1}{2} \frac{(R^3 - r_{b0}^2 R) d\eta/ds}{2\eta R^2 + r_{b0}^2 (1 - \eta)}, \quad (6.57)$$

na qual o vínculo de simetria azimutal do feixe teve de ser considerado na integração da equação (6.56) anterior e a constante de integração pode ser determinada pois a extremidade do feixe em $R = 0$ permanece estática com $V(R=0) = 0$, para qualquer instante s pertinente ao estado inicial não-estacionário. Constate que o perfil de velocidades descrito pela equação (6.57) anterior, além obviamente da coordenada radial R , depende adicionalmente tanto da magnitude da não-homogeneidade η quanto da sua derivada $d\eta/ds$, haja vista que no presente modelo η é considerada uma quantidade dependente do tempo, tal qual enunciado pela equação (6.43).

Torna-se completamente possível então obter o Lagrangeano transversal L do feixe. Inserindo tanto a equação (6.54) para a fração de carga adimensional $Q(R)$ quanto a equação (6.57) para o perfil de velocidades radial $V(R)$ na equação (6.53) bem como adotando nesta última a condição de reescalonamento das coordenadas transversais descrita por (6.3) tem-se que

$$L(\eta, \eta') = N_b \left(-\frac{\eta^2}{48} - \frac{1}{96} \frac{\eta'^2}{\eta} + \frac{1}{64} \frac{\eta'^2}{\eta^2} + \frac{1}{64} \frac{\eta'^2}{\eta^3} + \varpi + \frac{\varpi}{\eta} - \frac{\varpi}{\eta^2} - \frac{\varpi}{\eta^3} - \frac{3}{8} \right), \quad (6.58)$$

sendo ϖ uma quantidade designada pela seguinte equação

$$\varpi(\eta, \eta') = \frac{1}{128} \frac{\eta'^2}{\eta} \ln \left(\frac{1+\eta}{1-\eta} \right), \quad (6.59)$$

nas quais por definição $\eta' \equiv d\eta/ds$. Observe que na equação (6.58) o Lagrangeano transversal L do feixe depende única e exclusivamente da magnitude da não-homogeneidade η e de sua derivada temporal $d\eta/ds$, as quais são as variáveis dinâmicas conjugadas que representam de forma completa o modelo desenvolvido para a descrição do fenômeno de redistribuição de carga. Fenômeno este detectado no início desta Seção, mediante simulações numéricas autoconsistentes de um feixe inicialmente não-homogêneo parabolicamente e casado. O Lagrangeano transversal do feixe possui portanto formato unidimensional, com apenas um grau de liberdade. Mais, note que o Lagrangeano transversal L do feixe escala com o seu número total de partículas por unidade de comprimento axial N_b , fato este que permite identificar a expressão extensa envolvendo η e η' presente no lado direito da equação (6.58) como o Lagrangeano transversal médio $\langle L \rangle \equiv L/N_b$.

É notório no âmbito da Física que, uma vez obtido o Lagrangeano de um determinado sistema, toda a informação desejada a respeito da sua dinâmica o mesmo contém de forma compacta. O Lagrangeano é uma função escalar geradora de equações diferenciais. Segundo o princípio da mínima ação de Hamilton, todo o Lagrangeano deve satisfazer a uma equação de Euler-Lagrange para cada uma de suas variáveis dinâmicas.^{25,26,27} No presente caso, sendo o Lagrangeano L do feixe existente na equação (6.58) detentor de apenas um grau de liberdade, apenas uma equação de Euler-Lagrange é suficiente para descrever a dinâmica do processo de redistribuição de carga modelado. Objetivamente, a referida equação de Euler-Lagrange possui o formato

$$\frac{\partial L}{\partial \eta} - \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial \eta'} \right) = 0. \quad (6.60)$$

Com o Lagrangeano transversal L do feixe determinado e a sua respectiva equação de Euler-Lagrange identificada, o mecanismo de redistribuição de carga verificado nas simulações numéricas autoconsistentes torna-se matematicamente definido. A equação diferencial ordinária que rege a dinâmica da magnitude da não-homogeneidade $\eta(s)$ é de imediato obtida inserindo a equação (6.58) para L na equação (6.60) de Euler-Lagrange. Assim procedendo e isolando a segunda derivada obtém-se que

$$\frac{d^2}{ds^2} \eta = \frac{8\eta^5 - 192\eta^3\varpi - 384\eta^2\varpi + 576\eta\varpi + 768\varpi + 2\eta^2\eta'^2 - 9\eta\eta'^2 - 12\eta'^2}{-384\frac{\varpi\eta^4}{\eta^2} + 4\eta^3 - 384\frac{\varpi\eta^3}{\eta^2} - 6\eta^2 + 384\frac{\varpi\eta^2}{\eta^2} - 6\eta + 384\frac{\varpi\eta}{\eta^2}}, \quad (6.61)$$

a qual é uma equação diferencial ordinária de 2ª ordem completamente não-linear. Observe que a quantidade ϖ , conforme sua definição na equação (6.59), é uma função tanto da magnitude da não-

homogeneidade η quanto de sua derivada axial η' , isto é, $\varpi = \varpi(\eta, \eta')$. Sendo a equação (6.61) apenas função de η e η' , o comportamento da magnitude da não-homogeneidade $\eta(s)$ segundo a coordenada axial s é apenas influenciada por suas condições iniciais

$$\eta_o \equiv \eta(s = 0) \text{ e } \eta'_o \equiv \eta'(s = 0). \quad (6.62)$$

Uma solução analítica exata para a equação (6.61) é de difícil obtenção senão impossível. Soluções analíticas aproximadas talvez sejam viáveis nos limites em que $\eta \rightarrow 0$ ou $\eta \rightarrow 1$, pois o termo ϖ da equação (6.59) pode ser expandido por séries de Taylor. Entretanto, uma solução analítica para a equação (6.61) não pertence ao escopo do trabalho.

Informação considerável a respeito da dinâmica da magnitude da não-homogeneidade $\eta(s)$ pode ser extraída mediante integração numérica direta da equação (6.61). Na Figura 36, soluções para a magnitude da não-homogeneidade $\eta(s)$ são apresentadas para 4 distintas condições iniciais: a curva em preto é proporcionada por uma condição inicial $\eta_o = 0,2$, a em azul por $\eta_o = 0,4$, a em vermelho por $\eta_o = 0,6$ e a em verde por $\eta_o = 0,8$ sendo que, para todas estas, $\eta'_o = 0$ foi também considerado. Na Figura 36a, as soluções $\eta(s)$ para cada uma das condições iniciais anteriores são exibidas.

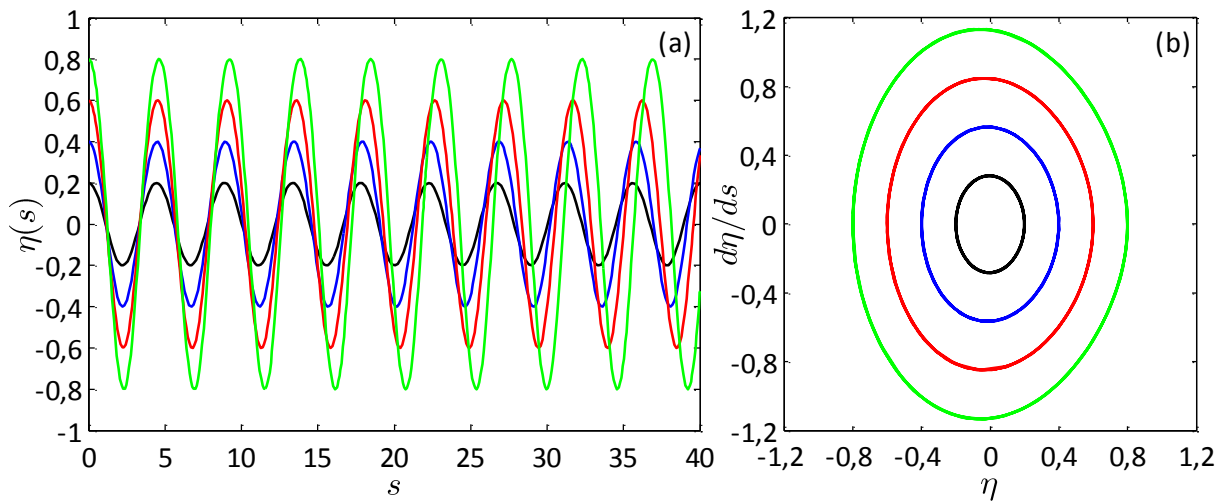


Figura 36: Soluções para a magnitude da não-homogeneidade $\eta(s)$ considerando diferentes condições iniciais η_o . No painel (a) constam as soluções calculadas para $\eta(s)$ para diversas condições iniciais η_o e no painel (b) as suas respectivas órbitas no espaço de fase $\eta \times d\eta/ds$. Curva em preto corresponde à $\eta_o = 0,2$, a em azul à $\eta_o = 0,4$, a em vermelho à $\eta_o = 0,6$ e a em verde à $\eta_o = 0,8$. Em todos os casos considerou-se $\eta'_o = 0$.

Pode-se observar que as soluções para $\eta(s)$ são periódicas, simétricas com relação a coordenada axial s e completamente — distintas — de um harmônico, embora visualmente esta última qualidade seja custosa constatar. Entretanto, a dependência do período de oscilação de $\eta(s)$ em relação a sua amplitude inicialmente atribuída η_o , uma característica típica das soluções providas por equações diferenciais ordinárias não-lineares, é plenamente distinguível. Quanto maior for o valor da condição inicial η_o , maior será o período de oscilação da solução computada para $\eta(s)$. Curiosamente, constate que este comportamento é o oposto do observado ao final do Capítulo 3

mediante a Figura 4 para o descasamento inicial r_o do feixe homogêneo, momento no qual o período de oscilação do envelope r_b diminuía a medida que r_o era incrementado. Para complementação, o espaço de fase $\eta \times d\eta/ds$ é apresentado na Figura 36b. Nesta Figura, pode-se observar que as órbitas de $\eta(s)$ neste espaço são ovais, mais alongadas sobre o eixo $d\eta/ds$, sendo portanto a amplitude da dinâmica da magnitude da não-homogeneidade η menor que a amplitude da sua derivada $d\eta/ds$. O espaço de fase da Figura 36b também torna explícito o caráter não-linear da dinâmica de $\eta(s)$ anteriormente comentada.

Com a obtenção de uma equação diferencial ordinária para a magnitude da não-homogeneidade η , avaliar o desempenho do modelo recentemente desenvolvido na predição do comportamento observado nas simulações numéricas autoconsistentes torna-se imprescindível. Representando $\eta(s)$, de forma compacta, a redistribuição de carga existente no estado inicial não-estacionário, pode-se supor então que, enquanto o feixe ainda comporta-se como um fluido ideal, a única dependência da sua densidade de partículas n_b com relação à coordenada axial s ocorre mediante $\eta(s)$. Assim, para $s \lesssim \tau_{qo}$, a dependência axial pode ser incorporada na densidade n_b de partículas do feixe da equação (6.5) ao se considerar que a magnitude da não-homogeneidade η satisfaça o modelo presente na equação (6.43) perfazendo

$$n_b(R, s) = \begin{cases} \frac{N_b}{\pi} + \eta(s) \left[\frac{N_b}{\pi} (2R^2 - 1) \right], & \text{para } 0 \leq R \leq 1, \\ 0, & \text{para } 1 < R \leq r_w \end{cases}, \quad (6.63)$$

na qual $\eta(s)$ é obtida mediante integração numérica da equação (6.61). Na Figura 37, a densidade de partículas n_b do feixe em 3 diferentes instantes de sua dinâmica no canal de confinamento magnético é apresentada. Os histogramas são os resultados fornecidos pelas simulações numéricas autoconsistentes enquanto as linhas sólidas correspondem aos resultados providos pelo modelo Lagrangeano da densidade n_b descrito pela equação (6.63). Os resultados simulados e modelados para n_b são apresentados na Figura 37a para $s = 4,4$, na Figura 37b para $s = 5$ e na Figura 37c para $s = 5,5$. Tais instantes de tempo são destacados por barras e pontos em magenta na Figura 27a. Pode-se constatar que o processo de redistribuição de carga é satisfatoriamente descrito pelo modelo desenvolvido.

Outra quantidade relevante e de interesse com a qual o modelo desenvolvido nesta Seção pode ser comparado durante o estado inicial não-estacionário do feixe é seu perfil de velocidade $V(R, s)$. Enquanto o feixe evolui como um fluido ideal, segundo a equação (6.57), ao se considerar a metodologia de reescalonamento descrita no APÊNDICE B e sumarizada na equação (6.3), pode-se constatar que o seu perfil de velocidade $V(R, s)$ não somente depende da coordenada axial s mediante a magnitude da não-homogeneidade η mas como também da sua respectiva derivada axial. Assim, integrando numericamente a equação diferencial ordinária (6.61) para as condições

iniciais desejadas e inserindo os resultados obtidos na equação (6.57), prontamente obtém-se, no arcabouço do modelo Lagrangeano aqui desenvolvido, o perfil radial de velocidade do feixe $V(R, s)$ para cada instante de tempo s . Na Figura 38 o perfil de velocidade $V(R, s)$ proveniente das simulações numéricas autoconsistentes é comparado com o provido pelo modelo Lagrangeano para 3 instantes distintos da dinâmica do feixe, na Figura 38a em $s = 4,4$, na Figura 38b em $s = 5$ e na Figura 38c em $s = 5,5$. A curva preta corresponde às simulações numéricas autoconsistentes e a curva em azul ao modelo Lagrangeano, sendo os instantes nos quais estes foram confeccionadas destacados na Figura 27a por barras e pontos em cor magenta. Um acordo razoável entre as simulações numéricas e o modelo para também esta quantidade é verificado.

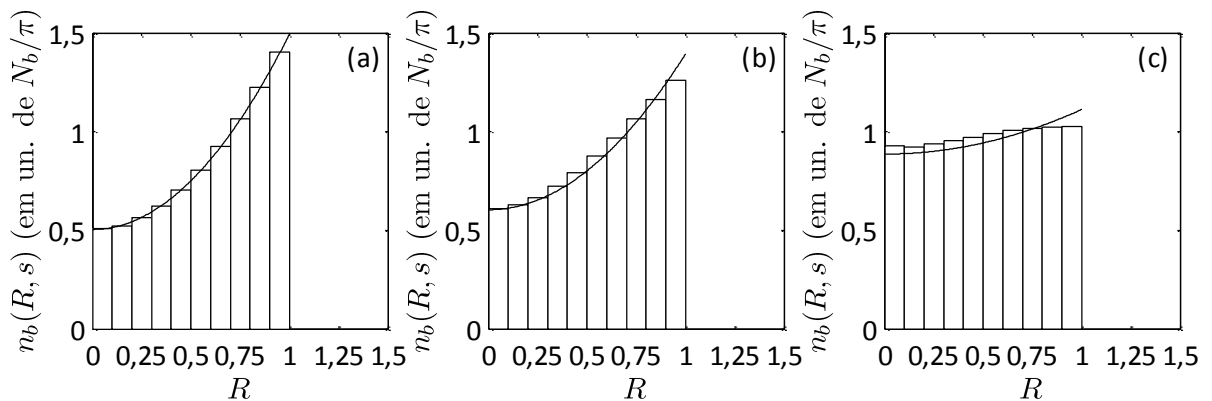


Figura 37: Densidade de partículas n_b do feixe durante o estado inicial não-estacionário em (a) $s = 4,4$, (b) $s = 5$ e em (c) $s = 5,5$. Resultados providos pelo modelo Lagrangeano desenvolvido e pelas simulações numéricas autoconsistentes de $N_b = 10.000$ partículas com $\eta = 0,5$ e quantização espacial $\Delta_b = 0,1$.

O fato de permitir obter uma equação para a densidade de partículas n_b do feixe amplia consideravelmente a aplicabilidade do modelo Lagrangeano aqui desenvolvido. Isto pois qualquer quantidade macroscópica χ do feixe é obtida mediante a média de χ sobre as suas partículas constituintes, isto é, mediante média sobre a densidade n_b que define o feixe, tal qual o conceito de média descrito pela equação (2.1) no Capítulo 2. Então, torna-se possível também comparar quantidades macroscópicas do feixe computadas através do modelo Lagrangeano e das simulações numéricas autoconsistentes. Embora quaisquer quantidades sejam possíveis de se comparar, por motivos já expostos anteriormente, o interesse neste trabalho reside apenas no raio RMS R_b e na emitância ϵ do feixe.

Para o raio RMS R_b do feixe é desnecessário qualquer cálculo adicional envolvendo a densidade n_b da equação (6.63). Basta recordar que na Seção 3.3 o raio RMS R_b de um feixe inicialmente não-homogêneo parabolicamente já foi computado. Embora naquela Seção o formato da densidade n_b do feixe era invariante no tempo, pois a magnitude da não-homogeneidade η havia sido considerada uma constante, o resultado obtido para o raio RMS R_b é extensível ao modelo da presente Seção, pois a operação de média descrita na equação (2.1) envolve apenas a coordenada transversal \mathbf{R}_\perp . Deve-se apenas permitir que η seja uma função da coordenada axial s , tal como

propõe o modelo Lagrangeano desta Seção através da equação (6.43). Assim, sendo o envelope do feixe em questão casado, adotando as condições de reescalonamento descritas pela equação (6.3) e impondo o modelo presente na equação (6.43) sobre a equação (3.15) obtém-se a seguinte expressão para o raio RMS R_b do feixe

$$R_b(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{\eta(s)}{3}}, \quad (6.64)$$

perfeitamente válida enquanto o feixe comporta-se como um fluido invíscido.

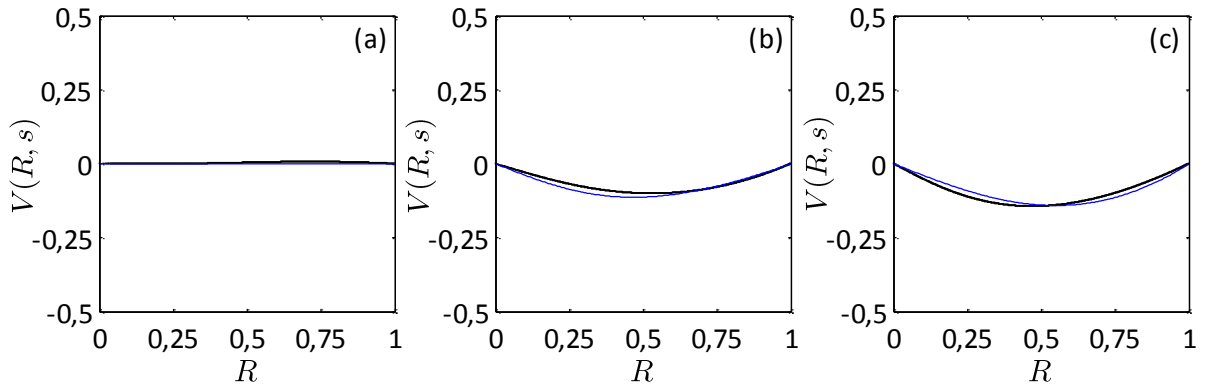


Figura 38: Perfil de velocidade $V(R, s)$ do feixe durante o estado inicial não-estacionário em (a) $s = 4,4$, (b) $s = 5$ e em (c) $s = 5,5$. Resultados providos pelas simulações numéricas autoconsistentes de $N_b = 10.000$ partículas com $\eta = 0,5$ (curva em preto) e pelo modelo Lagrangeano desenvolvido (curva em azul).

No entanto, mesmo procedimento anteriormente adotado para o raio RMS R_b não poderá na plenitude ser empregado para determinar a emitância $\epsilon(s)$. Observe que, no presente modelo Lagrangeano, diferentemente da Seção 3.3, as derivadas axiais da magnitude da não-homogeneidade η são não-nulas. Logo, tanto a energia média \mathcal{E}_F armazenada no campo elétrico E_r como o raio RMS R_b do feixe possuirão expressões para as suas derivadas axiais distintas daquelas calculadas na Seção 3.3, devendo-se assim recalculá-las. Considerando o reescalonamento dado pela equação (6.3) conjuntamente com a equação (6.43), ao se derivar a equação (3.16) com relação à coordenada axial s constata-se que

$$\frac{d}{ds} \mathcal{E}_F = \left(\frac{\eta}{6} - \frac{1}{3} \right) \frac{\eta'}{4}. \quad (6.65)$$

Ou seja, para um feixe não-homogêneo inicialmente casado, a variação da energia média \mathcal{E}_F armazenada no campo elétrico é apenas uma função da magnitude da não-homogeneidade η e de sua derivada η' . Com os recentes resultados, a obtenção de uma expressão para a emitância ϵ é imediata. Derivando axialmente a equação (6.64) anterior para o raio RMS R_b e inserindo o resultado obtido juntamente com a equação (6.65) para \mathcal{E}_F na equação (2.37) produz

$$\frac{d}{ds} \epsilon^2 = -\frac{1}{18} \eta(\eta + 1) \eta', \quad (6.66)$$

a qual é uma equação diferencial ordinária de 1ª ordem não-linear. A equação (6.66) para a emitância ϵ depende da magnitude da não-homogeneidade η e de sua derivada η' , devendo portanto ser resolvida numericamente em conjunto com a equação (6.61). Destaca-se que a equação (6.66) deve ser integrada como apresentada, extraindo a raiz quadrada para obtenção da emitância ϵ somente após a série numérica completa ser obtida. Caso contrário, ao se considerar $\epsilon(s=0) = 0$ como condição inicial, o termo à direita da equação (6.66) divergirá ao infinito. Salienta-se que na obtenção da equação (6.66) também se utilizou as condições de simetria azimutal e confinamento magnético constante, características próprias do presente sistema, descritas na equação (3.1).

Os resultados proporcionados pelas simulações numéricas autoconsistentes e pelo modelo Lagrangeano para o raio RMS R_b e para a emitância ϵ do feixe são apresentados na Figura 39. Os resultados para o raio RMS R_b constam na Figura 39a enquanto os resultados para a emitância ϵ são expostos na Figura 39b. Nestas figuras, pode-se constatar que o modelo Lagrangeano descreve de forma acurada a amplitude máxima e mínima de tanto o raio RMS R_b quanto da emitância ϵ observada nas simulações numéricas autoconsistentes. Apenas um dos mínimos da emitância ϵ não é fielmente descrito, por problemas de resolução numérica, haja vista que a integração nesta região é um tanto morosa. Complementarmente, da Figura 39, também se infere que os períodos de oscilação de R_b e de ϵ são razoavelmente descritos pelo modelo Lagrangeano.

Ressalva deve ser efetuada para o progressivo aumento do período de oscilação das quantidades calculadas mediante ou simulações numéricas autoconsistentes ou modelo Lagrangeano. Observa-se na Figura 39 que o raio RMS R_b e a emitância ϵ do feixe simulado têm seu período de oscilação decrescido à medida que a coordenada axial s aumenta. Pode-se afirmar com segurança que são as quantidades simuladas do feixe que sofrem esta progressiva diminuição de seu período de oscilação, pois as mesmas quantidades computadas através do modelo Lagrangeano são obrigatoriamente periódicas, uma vez que η e assim η' , das quais são exclusivamente dependentes, são também funções periódicas, conforme constatado na Figura 36. Esta observação macroscópica envolvendo a diminuição do período de oscilação das quantidades simuladas em questão é um indício de que, individualmente, cada um dos anéis infinitesimais que compõe a densidade n_b do feixe também estão sofrendo uma gradual alteração no seu período de oscilação. Entretanto, esta alteração no período de oscilação não é igual para todos os anéis infinitesimais, pois o feixe em questão é espacialmente não-homogêneo. A alteração do período de oscilação de cada anel infinitesimal é portanto dependente do tamanho de seu raio.

A diminuição no período de oscilação das quantidades simuladas acima comentada não se perpetua indefinidamente. O fato do período de oscilação de cada anel infinitesimal que forma a densidade n_b simulada ser fracamente dependente da coordenada axial s determinará que, em algum momento, dois anéis infinitesimais adjacentes colapsem, proporcionando os jatos de

partículas observados na seqüência de espaços de fase da Figura 28, já extensamente discutidos no princípio deste Capítulo. Por conseguinte, o modelo Lagrangeano descreverá mais fielmente a redistribuição de carga observada nas simulações numéricas autoconsistentes quão mais distante estiver da coordenada axial s na qual ocorre a primeira quebra de onda de densidade n_b . Realmente, como o instante τ_{qo} no qual ocorre a quebra é função crescente da magnitude da não-homogeneidade η , verifica-se que quando $\eta \rightarrow 0$ uma longeva correspondência é obtida entre modelo Lagrangeano e as simulações numéricas autoconsistentes. Inversamente, quando $\eta \rightarrow 1$, precocemente discrepâncias são percebidas. Estes comportamentos assintóticos podem ser avaliados no APÊNDICE I, no qual o raio RMS R_b e a emitância ϵ do feixe calculados mediante o modelo Lagrangeano são comparados com as simulações numéricas autoconsistentes considerando diversas outras condições iniciais, pertencentes ao intervalo $0 < \eta_o < 1$ e amostradas com passos discretos $\Delta\eta_o = 0,1$.

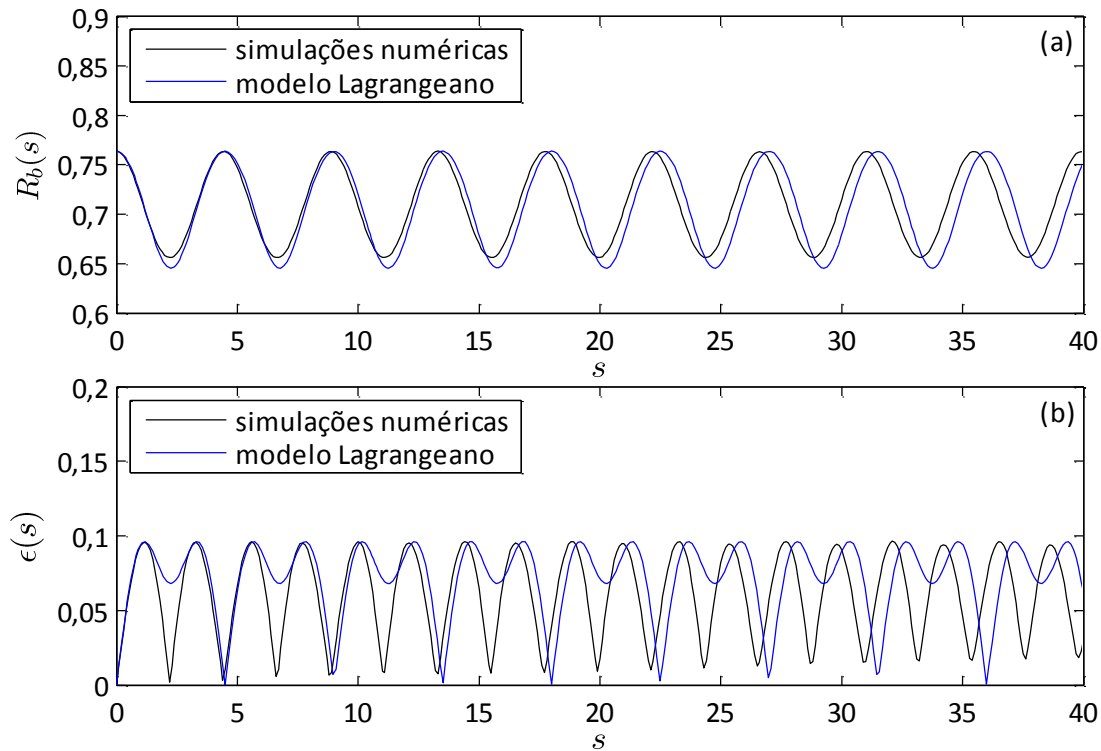


Figura 39: Comparação no estado inicial não-estacionário do feixe entre os resultados obtidos mediante simulações numéricas autoconsistentes e os preditos pelo modelo Lagrangeano desenvolvido. Consta em (a) o raio RMS R_b do feixe e em (b) a sua emitância ϵ . Feixe composto por $N_b = 10.000$ partículas com $\eta = 0,5$.

Deve-se reforçar que após a primeira ejeção de partículas, o feixe não pode mais ser descrito como um fluido ideal, sendo necessário investigá-lo segundo a Teoria Cinética. No entanto, informações importantes podem ser obtidas mediante o desenvolvimento de um modelo dinâmico microscópico das interações entre o feixe e partículas individuais, semelhante ao construído na Seção 4.6 para um feixe inicialmente homogêneo. Esse é o mote da próxima e última Seção deste trabalho.

6.6 Descrição por partícula-teste

A magnitude da não-homogeneidade η que caracteriza inicialmente a densidade não-homogênea parabólica n_b do feixe é a quantidade associada à escala de tempo τ_{qo} na qual se formam os jatos de partículas. Do ponto de vista do modelo Lagrangeano desenvolvido na Seção 6.5 anterior, é o seu valor inicial η_o que determina em qual escala τ_{qo} o primeiro jato de partículas ocorrerá. Quão maior ou menor for o valor de η_o , respectivamente menor ou maior será o valor observado de τ_{qo} para a primeira quebra de onda de densidade n_b nas simulações numéricas autoconsistentes.

No entanto, a escala de tempo τ , na qual o feixe inicialmente não-homogêneo atinge seu estado de equilíbrio, não é exatamente idêntica a escala τ_{qo} , na qual ocorre a formação do primeiro jato de partículas no espaço de fase. Inferir a escala de tempo τ do feixe inicialmente não-homogêneo mediante a escala na qual ocorre a primeira quebra de onda τ_{qo} trata-se de uma aproximação satisfatória apenas no limite $\eta \rightarrow 0$,²⁸ haja vista que tanto $\tau_{qo} \rightarrow \infty$ como $\tau \rightarrow \infty$. Para magnitudes da não-homogeneidade $\eta \rightarrow 1$, progressivamente a escala de tempo τ_{qo} distingui-se consideravelmente da escala de tempo τ . Entretanto, como estimativa inicial da ordem da escala de tempo τ na qual o feixe não-homogêneo atinge o seu equilíbrio, a escala de tempo τ_{qo} na qual ocorre a primeira ejeção de partículas pode ser utilizada indistintamente do valor da magnitude da não-homogeneidade η de interesse.

De fato, embora a formação dos jatos seja o fator proporcionador, a efetiva termalização do presente feixe inicialmente não-homogêneo somente ocorre pois há outras variáveis dinâmicas que atuam determinantemente no processo. Segundo o exposto no Capítulo 5, de forma absolutamente geral, os jatos ou os microjatos de partículas são o mecanismo precursor da termalização, haja vista que propiciam certa fração f de partículas que compõe a densidade n_b do feixe serem influenciadas por estruturas dinâmicas pertinentes a topologia do feixe de partículas carregadas em questão. A formação dos jatos de partículas, intrínsecos tanto aos feixes homogêneos ou não-homogêneos pelos motivos já esclarecidos, permite que interações a níveis microscópicos, entre partículas individuais e o conjunto formado pelas demais outras constituintes do feixe, surjam e se tornem relevantes. São as interações microscópicas que direcionam o feixe ao seu estado de equilíbrio, que neste trabalho, tanto no caso homogêneo quanto no não-homogêneo, confluem para a formação do halo. Ademais, o feixe somente atinge o equilíbrio quando as interações microscópicas se estabilizam, permitindo que o fluxo de energia entre a microscopia e a macroscopia do sistema cesse e que o espaço de fase do feixe se torne geometricamente invariante para qualquer posterior instante de tempo s da dinâmica.

Um feixe de partículas carregadas arbitrário possui certa quantidade limitada de energia macroscópica livre disponível para transferência às partículas individuais. Conquanto esta quantidade de energia existente é dependente das características iniciais do feixe, a forma como esta última é absorvida pelas interações envolvendo partículas individuais depende diretamente de qual mecanismo físico dinâmico esteja envolvido. Haja vista a complexidade presente, entenda-se por mecanismo físico dinâmico aquele que é dominante no sistema em questão.

O mecanismo físico indutor do equilíbrio está diretamente associado às características iniciais imputadas ao feixe de partículas carregadas. No Capítulo 4, o descasamento inicial r_o do envelope era responsável pela formação de ressonâncias dinâmicas estruturais que afetavam fortemente o comportamento do feixe. Partículas oriundas dos microjatos tornavam-se aptas a interagir com a dinâmica oscilatória das demais outras representadas pelo envelope do feixe $r_b(s)$, recebendo considerável soma de energia. Topologicamente tais partículas eram capturadas pelas ressonâncias estruturais proporcionadas pelo descasamento do envelope r_o . Quanto maior fosse o valor de r_o , maiores eram as influências das ressonâncias, transferindo — mais e de uma forma mais veloz — energia às partículas individuais. No presente Capítulo, indícios em relação ao mecanismo físico indutor recaem sobre o processo de redistribuição de carga descrito na Seção 6.5 imediatamente anterior e ilustrado na Figura 35. Após o primeiro jato, partículas individuais tornam-se aptas a interagir com a remanescente dinâmica de redistribuição de carga desenvolvida pelas demais outras constituintes do feixe. Segundo a égide do modelo Lagrangeano desenvolvido na Seção 6.5, muito provavelmente as interações entre o feixe inicialmente não-homogêneo e casado e as partículas individuais ocorram mediante a dinâmica obtida na equação (6.61) para a magnitude da não-homogeneidade η . Estando o envelope do feixe casado, o comportamento oscilatório de $\eta(s)$ identificado na Figura 36 potencialmente torna-se o mecanismo físico excitador das partículas individuais ejetadas no presente caso não-homogêneo. Estabelecida a hipótese, visando verificar sua veracidade, impõe-se o seu teste.

É sugestivo descrever então, em analogia direta ao efetuado na Seção 4.6, a interação feixe-partícula individual acima comentada mediante partícula-teste.⁵⁷ As equações dinâmicas de uma partícula-teste submetida à ação de um feixe não-homogêneo com densidade n_b parabólica já foram obtidas na Seção 3.3. Embora sejam equações para um feixe cujo formato de densidade n_b é invariante no tempo, pois a magnitude da não-homogeneidade η havia sido considerada constante na Seção 3.3, estas podem ter sua utilização estendida ao presente caso apenas inserindo o modelo introduzido pela equação (6.43). Assim procedendo, da equação (3.21), considerando-se o envelope do feixe inicialmente casado obtém-se que

$$\frac{d^2}{ds^2}R + R = \begin{cases} \eta(s)R^3 + (1 - \eta(s))R, & \text{para } 0 \leq R \leq 1 \\ 1/R, & \text{para } 1 < R \leq r_w' \end{cases} \quad (6.67)$$

na qual adicionalmente o reescalonamento descrito no APÊNDICE B e sintetizado pelas equações (6.3) e (6.4) foi adotado. Note que o ato de casar inicialmente o envelope r_b do feixe não-homogêneo torna a equação (6.67) independente da equação (3.19). A órbita da partícula-teste sob ação do feixe não-homogêneo casado é apenas função da magnitude da não-homogeneidade η , que segundo o modelo Lagrangeano da Seção 6.5 é função da coordenada axial s e descrita pela equação (6.61). A descrição matemática das influências do fenômeno de redistribuição de carga sobre a dinâmica de partículas individuais do feixe proposta é então completa.

A equação (6.67) é não-linear tanto na região interna quanto na região externa do feixe, condição esta que, aliada à dependência da coordenada axial s mediante $\eta(s)$, torna as órbitas das partículas-testes, para qualquer condição inicial atribuída, potencialmente caóticas. Esta observação é relevante uma vez que, no caso do feixe inicialmente homogêneo e descasado da Seção 4.6, para que as partículas-testes observassem a ação de uma força não-linear, estas últimas obrigatoriamente deveriam ser inicializadas em uma região externa ao feixe. Neste sentido, para o presente caso não-homogêneo casado, as partículas-testes podem ser dispersas homogeneamente em sua região interna, formalmente definida pelo intervalo

$$\mathcal{R} \in [0,1], \quad (6.68)$$

na qual recorda-se que o reescalonamento adotado implica em o raio de equilíbrio r_{b0} simplificar-se à expressão presente na equação (6.4). Ainda, dispersar partículas na região \mathcal{R} da equação (6.68) logo acima é plenamente compatível com a constatação efetuada nesta Seção de que qualquer interação feixe-partícula individual não-linear pode ocorrer na região interna do feixe. Em harmonia com o caráter inicial frio do feixe, a velocidade inicial de cada partícula-teste necessariamente deve assumir $dR/ds|_{s=0} = 0$.

A Figura 40 apresenta a estrutura do espaço de fase resultante da dinâmica de uma população de partículas-testes em comparação com o obtido por simulações numéricas autoconsistentes. Por conveniência, o espaço de fase obtido mediante simulações numéricas autoconsistentes é rerepresentado na Figura 40a, sendo o provido pela população de partículas-testes inicialmente dispersas na região \mathcal{R} da equação (6.68) exposto na Figura 40b. Uma adequada representação do espaço de fase presente na Figura 40b foi obtida com um número de $N_p = 15$ partículas-testes, sendo o tempo final de integração do sistema de equações (6.61)-(6.67) para cada partícula-teste mantido fixo em $s = 1000$. Salienta-se que a Figura 40b foi obtida mediante seções cumulativas de Poincaré³⁷ quando $d\eta/ds = 0$ com $d^2\eta/ds^2 < 0$, ou seja, as variáveis dinâmicas R e dR/ds de cada partícula-teste somente foram plotadas quando a magnitude da não-homogeneidade $\eta(s)$ atingiu seu valor máximo. Segundo o modelo Lagrangeano desenvolvido, quando a magnitude da não-homogeneidade é máxima, o raio RMS R_b , expresso pela equação (6.64), também é máximo. Isto permite compatibilizar dinamicamente o espaço de fase extraído das simulações numéricas

autoconsistentes da Figura 40a com o confeccionado mediante uma população de partículas-testes da Figura 40b. Convém recordar que, enquanto o espaço de fase computado na Figura 40a corresponde a um instante específico da dinâmica do feixe, o espaço de fase provido pelas partículas-testes são seções de Poincaré cumulativas da dinâmica. Tornar cumulativas as seções de Poincaré propiciou resolver razoavelmente o espaço de fase do feixe mesmo utilizando um número reduzido de entidades dinâmicas, neste caso $N_p = 15$ partículas-testes.

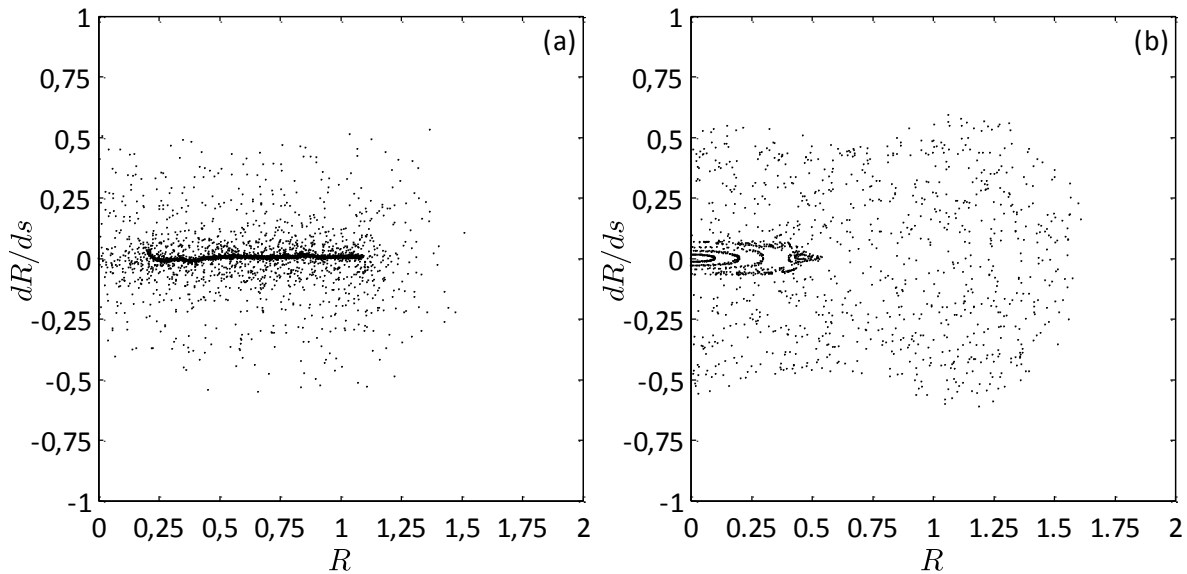


Figura 40: Estrutura do espaço de fase obtida por (a) simulações numéricas autoconsistentes de $N_b = 10.000$ partículas e com $\eta = 0,5$ e por (b) seções cumulativas de Poincaré de $N_p = 15$ partículas inicialmente dispersas homogeneamente na região \mathcal{R} e sobre influência de $\eta(s)$ ao considerar $\eta_o = 0,5$ e $\eta'_o = 0$.

Pode-se observar razoável similitude entre a estrutura do espaço de fase simulada numericamente e aquela obtida mediante integração do modelo descrito pelo sistema de equações (6.61)-(6.67) envolvendo partículas-testes, inicializadas na região \mathcal{R} especificada na equação (6.68). Particularmente, a dinâmica das partículas-testes no espaço de fase se assemelha muito com aquelas partículas anteriormente na Seção 6.2 definidas como mornas. As dimensões da região retangular, definidas no espaço de fase da Figura 32 extraído das simulações numéricas autoconsistentes, são razoavelmente previstas pela dinâmica das partículas-testes. Isto é de suma importância pois permite extrair o comprimento da região retangular r_m , necessária na Seção 6.3 para a predição das quantidades de equilíbrio do feixe de interesse, mediante apenas a integração das órbitas de $N_p = 15$ partículas-testes, ao invés de simular numericamente e autoconsistentemente um sem-número de N_b partículas. Naturalmente, não sendo uma quantidade definida no modelo envolvendo partículas-testes, a diferença marcante entre a Figura 40a e a Figura 40b reside na presença de uma região filamentar disposta sobre o eixo R representativa das partículas que compõem o núcleo do feixe simulado numericamente.

Mais do que o exposto acima, o acordo satisfatório entre as simulações numéricas autoconsistentes e a descrição por partículas-testes denota que realmente as interações microscópicas, existentes no feixe após a ocorrência do primeiro jato, realmente podem ser descritas como um acoplamento entre um processo de redistribuição de carga e partículas individuais. A hipótese enunciada anteriormente logo se confirma. As oscilações de $\eta(s)$ representativas do fenômeno de redistribuição de carga são o mecanismo excitador da dinâmica das partículas individuais. No presente feixe não-homogêneo casado, o descasamento inicial do envelope r_o é substituído pela magnitude da não-homogeneidade inicial η_o como mecanismo físico que conduz o feixe ao seu equilíbrio. O progressivo acoplamento entre as oscilações de redistribuição de carga $\eta(s)$ e as partículas individuais do feixe concede a estas últimas uma quantidade considerável de energia, causando a difusão de suas órbitas no espaço de fase. Haja vista a natureza caótica da interação descrita pelo sistema de equações (6.61)-(6.67), o povoamento da região retangular do espaço de fase pela população de partículas-testes tende a ser homogênea, possuindo um aspecto de nuvem difusa muito semelhante ao observado nas simulações numéricas autoconsistentes. Formalmente então, tal qual realizado na equação (4.89) para o feixe inicialmente homogêneo, pode-se explicitar dependência funcional da escala de tempo das não-homogeneidades como

$$\tau_\eta = \tau_\eta(\eta_o), \quad (6.69)$$

na qual destaca-se que η_o é o valor inicial atribuído à magnitude da não-homogeneidade $\eta(s)$ no processo de integração de sua equação (6.61).

Note que o presente acoplamento entre a redistribuição de carga $\eta(s)$ e as partículas-testes é muito menos intenso que aquele observado entre estas últimas e o descasamento do envelope $r_b(s)$ na Seção 4.6. Tal fato ocorre por que para feixes inicialmente homogêneos e descasados o acoplamento das partículas-testes com o envelope r_b é do tipo ressonante, permitindo que as partículas individualmente absorvam grandes quantidades de energia. No espaço de fase, esta grande absorção de energia pelas partículas individuais se traduz em órbitas de grande amplitude em uma região curva muito distante das demais outras. Segundo a classificação desenvolvida na Seção 4.2, enquanto no presente caso não-homogêneo casado as partículas tornam-se no máximo mornas no decorrer da dinâmica, no feixe homogêneo descasado as partículas podem tornar-se quentes.

Por final, destaca-se que o modelo de baixa dimensionalidade desenvolvido nesta Seção 6.6 para a interação entre o processo de redistribuição de carga $\eta(s)$ e partículas-testes é dinamicamente complexo. A investigação realizada no presente trabalho é preliminar, havendo ainda muita informação para ser extraída do modelo desenvolvido visando o melhor entendimento da física intrínseca às simulações numéricas autoconsistentes e aos experimentos.

CONCLUSÃO

Feixes não-neutros ultra-intensos de partículas carregadas usualmente atingem seu estado de equilíbrio mediante formação de uma população difusa de partículas no seu entorno delimitado no espaço de configuração. Embora tênue, esta população difusa de partículas — comumente definida de halo — tal como demonstrado congrega parte considerável da energia total do feixe, não podendo ser desprezada em sua descrição. O halo não somente influencia fortemente a dinâmica do feixe de partículas carregadas como é também bastante representativo na determinação de suas quantidades macroscópicas — médias em relação à sua função distribuição de partículas — de equilíbrio tais como o raio RMS e a emitância. A formação do halo é decorrente do incremento da amplitude das órbitas de certas partículas constituintes do feixe, podendo estas colidir com a estrutura de confinamento. Trata-se de um problema corrente e que deve ser mitigado na engenharia moderna de aceleradores. Adicionalmente, o halo deteriora a qualidade do feixe final obtido, requisito este imprescindível em certas aplicações.

Diversas são as instabilidades iniciais que podem propiciar a formação do halo, estando estas diretamente associadas à característica inicialmente atribuída a função distribuição que caracteriza o feixe. Neste trabalho, investigou-se o comportamento transversal de um feixe de partículas carregadas em confinamento a campo magnético constante em relação à coordenada axial s sob a influência de duas instabilidades iniciais específicas, uma proporcionada pelo descasamento inicial do seu envelope e outra pela magnitude da não-homogeneidade. As partículas constituintes inicialmente possuíam velocidade nula, o feixe foi considerado inicialmente frio. Para fomentar o desenvolvimento da primeira instabilidade anteriormente comentada, considerou-se o feixe inicialmente homogêneo espacialmente e descasado em termos de seu envelope. Para intensificar os efeitos da segunda, ao feixe foi imposto ser inicialmente não-homogêneo, em formato parabólico, mas com seu envelope casado. Em ambos os casos, para simplificação da descrição matemática, ao feixe foi atribuído o vínculo de simetria azimutal.

As quantidades macroscópicas de interesse do feixe puderam ser obtidas mediante direta inspeção da estrutura geométrica de seu espaço de fase. Qualitativamente, durante sua dinâmica no canal de confinamento magnético, tanto o feixe homogêneo quanto o não-homogêneo possuem dois estados distintos: um inicial não-estacionário, com aspecto filamentar no espaço de fase, e um final estacionário, na qual as instabilidades iniciais conduzem a difusão de certa quantidade de suas partículas no espaço de fase, compondo o halo. Topologicamente, o estado final estacionário pode ser identificado como um de equilíbrio dinâmico, haja vista que as novas órbitas executadas pelas partículas difundidas são geometricamente invariantes no tempo. Assim sendo, no equilíbrio, toda a complexidade observada no espaço de fase pode ser descrita compactamente mediante uma

densidade espacial de partículas adicional n_h , representativa das partículas ditas do halo. Modelar o halo em ambos os casos mediante uma densidade de partículas n_h permitiu que quantidades espaciais como o envelope, raio RMS e a emitância pudessem ser simplesmente expressas como funções de parâmetros obtidos do espaço de fase e da fração f de partículas do halo, determinável diretamente mediante conservação de energia em relação ao estado inicial não-estacionário. Os resultados providos pelos modelos desenvolvidos acordaram satisfatoriamente com os computados mediante simulações numéricas autoconsistentes para diversos valores dos parâmetros livres analisados, a dizer, no caso homogêneo, o descasamento inicial r_0 e, no não-homogêneo, a magnitude da não-homogeneidade η . A introdução da fração de partículas f propiciou melhor compreender o impacto da população das partículas que compõe halo nas quantidades de equilíbrio do feixe, sendo eficiente na descrição da física envolvida nas complexas simulações numéricas autoconsistentes. A fração f de partículas é um escalar que quantifica — de forma sintética — seja no feixe homogêneo ou não-homogêneo a população de uma determinada região do espaço de fase na qual se identifica as partículas que constituem o halo, fenômeno este de origem microscópica presente nas simulações numéricas autoconsistentes e experimentos. Por este motivo a fração f eventualmente apresenta pequenas flutuações em seus valores, diferentemente das demais quantidades estimadas como o envelope e a emitância, as quais são por definição macroscópicas.

Destaca-se que, embora fundamental na compreensão da escala de decaimento do feixe, para computar as quantidades espaciais macroscópicas do feixe no equilíbrio é completamente desimportante o mecanismo físico pelo qual partículas individualmente absorvem energia do movimento oscilatório das demais outras e, assim, populem regiões no espaço de fase distintas das iniciais. De outra forma, é completamente irrelevante a velocidade \mathbf{V}_\perp de cada partícula difundida que compõe o halo em cada instante s de sua dinâmica no canal de confinamento. Basta-se identificar a região no espaço de fase na qual sua órbita se desenvolve e, sendo esta detentora de uma geometria regular, convertê-la a uma expressão analítica, a qual se torna representativa de sua densidade espacial. O aspecto geométrico da região convertida no espaço de fase diretamente implica no formato de densidade espacial n_h obtida para as partículas do halo. Sendo o sistema físico em questão Hamiltoniano, infere-se que qualquer diminuição substancial no raio RMS do feixe está diretamente associada com um incremento de sua velocidade RMS. Como conseqüência, quantidades macroscópicas dependentes de médias envolvendo a velocidade \mathbf{V}_\perp de cada partícula podem ser indiretamente computadas mediante conservação energia. De fato, este é o caso da emitância, cujo crescimento está diretamente relacionado ao incremento de quantidades médias envolvendo as velocidades \mathbf{V}_\perp das partículas constituintes.

No caso do feixe homogêneo, constatou-se que a escala de tempo τ característica de decaimento do feixe é composta por duas outras escalas com significado físico distinto, uma τ_η ,

associada a não-homogeneidade intrinsecamente presente, e outra τ_λ , pertencente às ressonâncias não-lineares estruturais existentes e induzidas pelo descasamento inicial do envelope r_o . De fato, em feixes reais, a não-homogeneidade espúria, conquanto indesejada, é uma característica não-suprimível, tornando-se o mecanismo precursor do halo em feixes ultra-intensos de partículas carregadas como demonstrado. O descasamento inicial r_o é assim o mecanismo formador do halo, pois ressonantemente transfere energia pertinente a oscilação do envelope $r_b(s)$ a partículas individuais, propiciando a população da região curva identificada no espaço de fase. Salienta-se que, embora as flutuações de densidade δn_b — produto da não-homogeneidade inicial espúria — impactem na escala de decaimento τ , estas não alteram as características de equilíbrio do feixe, as quais são topológicas e assim decorrentes do descasamento do envelope r_o . A região ocupada pelas partículas mornas no feixe não-homogêneo é muito semelhante a aquela por estas ocupada no feixe homogêneo, fato este que indubitavelmente identifica a não-homogeneidade como responsável pela formação desta qualidade — morna — de partículas. A estrutura central do espaço de fase do feixe homogêneo com envelope descasado apresenta forte correspondência com o espaço de fase do feixe não-homogêneo com envelope casado.

Mediante o desenvolvimento de um modelo Lagrangeano, o processo de redistribuição de carga observado nas simulações numéricas autoconsistentes de um feixe inicialmente não-homogêneo foi adequadamente contabilizado através de apenas uma entidade dinâmica, a magnitude da não-homogeneidade $\eta(s)$. Note que nas simulações numéricas autoconsistentes a magnitude da não-homogeneidade η é apenas definida em $s = 0$, momento no qual é externamente arbitrada para especificar a densidade de partículas parabólica estabelecida como condição inicial ao feixe. Portanto, permitir que a magnitude da não-homogeneidade torne-se uma função da coordenada axial s é um atributo do modelo. Enquanto o feixe comporta-se como um fluido ideal, toda e qualquer quantidade macroscópica do feixe pode ser obtida como função de $\eta(s)$, quantidade determinável por integração numérica direta de sua equação diferencial ordinária obtida. Os resultados particularmente perduram mais tempo válidos para valores de magnitude da não-homogeneidade $\eta_o \rightarrow 0$. Após a primeira quebra de onda de densidade, algumas partículas são ejetadas no espaço de fase, devendo então obrigatoriamente o feixe ser descrito segundo a Teoria Cinética. No entanto, o processo não-linear de redistribuição de carga representado por $\eta(s)$ permanece sendo o mecanismo responsável pelo progressivo aquecimento e difusão das partículas ejetadas no espaço de fase.

Sendo o halo uma população de partículas de tênue dispersão no espaço de fase, uma aproximação envolvendo uma população de partículas não-interagentes pôde ser adotada. Esta descrição por partícula-teste torna-se ainda mais acurada ao observar que a fração f de partículas do halo é uma quantidade pequena, no caso de um feixe homogêneo, para todos os valores de

descasamento r_o analisados e, no caso do feixe não-homogêneo, para a maioria das magnitudes da não-homogeneidade η . Adotar esta aproximação é de grande valia, pois permitiu descrever as interações microscópicas existentes nas simulações numéricas autoconsistentes mediante um sistema envolvendo o feixe propriamente dito e uma partícula-teste. Haja vista a grande semelhança entre a geometria do espaço de fase simulado e o modelado mediante um conjunto de partículas-testes, pode-se afirmar que são estas as interações majoritárias existentes nas simulações numéricas autoconsistentes que conduzem o feixe ao estado de equilíbrio. Enquanto no feixe inicialmente homogêneo e descasado as partículas individualmente acoplam ressonantemente com a oscilação de seu envelope $r_b(s)$, em feixes inicialmente não-homogêneos e casados é o processo de redistribuição de carga $\eta(s)$ o mecanismo excitador. É importante frisar que o acoplamento experimentado pelas partículas com o feixe homogêneo descasado é ressonante, enquanto com o não-homogêneo casado não o é. Esta constatação é corroborada pela magnitude do crescimento de emitância observado em ambos os casos, sendo substantiva no feixe homogêneo e inexpressiva no feixe não-homogêneo. Para exemplificação, compare a Figura 5b com a Figura 27b.

A identificação de que partículas do halo são oriundas de interações do feixe — através das oscilações do seu envelope devido ao descasamento r_o ou do processo de redistribuição de carga resultante da magnitude η_o — com partículas individuais expandiu o entendimento qualitativo e quantitativo do processo de formação do halo em feixes de partículas carregadas. A similitude do espaço de fase proporcionado pela população de partículas-testes com o computado mediante simulações numéricas autoconsistentes permite extrair com acuracidade os parâmetros necessários ao cômputo da fração f de partículas e, por conseqüência, das quantidades do feixe de interesse no equilíbrio. De outra forma, para extração dos parâmetros necessários, é factível substituir o espaço de fase resultante de simulações numéricas autoconsistentes de N_b partículas pelo oriundo da integração de um modelo de baixa dimensionalidade envolvendo N_p partículas-testes. Destaca-se que as simulações numéricas autoconsistentes são muito mais onerosas computacionalmente, haja vista que o número de entidades dinâmicas é muito maior que o presente no modelo de baixa dimensionalidade desenvolvido, pois $N_b \gg N_p$. Adicionalmente, o ato de descrever o halo por uma população de N_p partículas-testes propicia efetuar a conexão dinâmica entre as quantidades macroscópicas de interesse do feixe, as quais no estado inicial não-estacionário são determinadas em decorrência da imposição de uma densidade de partículas ao feixe e, no estado de equilíbrio, são plenamente calculadas mediante os modelos analíticos desenvolvidos baseados na fração f de partículas do halo.

De forma geral, os modelos desenvolvidos no presente trabalho foram eficientes e possuíram sucesso ao que inicialmente se dispunham. Os mecanismos físicos envolvidos na formação

do halo presente na dinâmica complexa observada nas simulações numéricas autoconsistentes foram adequadamente segregados e reproduzidos pelos modelos. Aliás, esta é a finalidade de qualquer modelo desenvolvido em Física: representar de forma compacta um fenômeno complexo observado ou em experimentos ou mediante simulações numéricas completas de um determinado sistema. A representação do halo mediante partículas-testes excitadas pelos mecanismos físicos modelados — o descasamento do envelope e a redistribuição de carga — em cada circunstância, cuja influência sobre o restante das partículas do núcleo é determinada pela fração f de partículas do halo, isolaram razoavelmente o complexo comportamento observado nas simulações numéricas autoconsistentes. Este é um forte indicativo de que são estes os mecanismos físicos associados ao processo de formação do halo que conduz o feixe ao seu estado de equilíbrio.

Por final, ressalta-se que o fenômeno de formação do halo possui relevantes implicações na engenharia de aceleradores. Assim sendo, talvez, em um futuro próximo, os modelos desenvolvidos neste trabalho também possam ser embarcados em um sistema eletrônico para controle robusto da dinâmica do feixe. Devido à baixa dimensionalidade dos modelos desenvolvidos, respostas de tempo real podem ser obtidas deste sistema eletrônico. Isto é de grande valia ao considerar-se o grande impacto computacional da realização de simulações numéricas autoconsistentes de um feixe de partículas carregadas. O tempo de resposta é de fundamental importância no controle de sistemas complexos, principalmente nos descritos por equações não-lineares, situação na qual obter convergência aos valores de referência desejados é consideravelmente mais árduo. Quanto menor for tempo de resposta do circuito de controle associado, mais rapidamente pode-se atuar no feixe de partículas carregadas para minimizar a extensão do halo formado, fenômeno este, conforme extensivamente comentado ao longo do presente trabalho, indesejado nos aceleradores atuais.

TRABALHOS FUTUROS

Inúmeros são os trabalhos que adicionalmente podem ser desenvolvidos visando complementar todos os assuntos aqui abordados. De forma geral, seria muito útil obter uma expressão analítica que descrevesse os parâmetros que caracterizam o espaço de fase, tanto do feixe inicialmente homogêneo quanto o do não-homogêneo, como função, respectivamente, do descasamento inicial r_o e da magnitude da não-homogeneidade η_o . Assim, no procedimento desenvolvido para determinar as quantidades de equilíbrio desejadas, seria desnecessário computar o espaço de fase do feixe seja mediante simulações numéricas autoconsistentes ou através do modelo de baixa dimensionalidade envolvendo partículas-testes. Bastaria utilizar as expressões analíticas para estimar os parâmetros do espaço de fase.

Os modelos que descrevem a interação entre o feixe e partículas-testes, embora matematicamente compactos, possuem um comportamento complexo, contendo ainda muita informação para ser extraída vislumbrando um melhor entendimento dos fenômenos observados. De outro modo, tais modelos podem ser suficientemente mais explorados com objetivo direto de prever e descrever a física intrinsecamente existente tanto nas simulações numéricas autoconsistentes quanto nos experimentos.

Objetivamente, no caso específico de um feixe inicialmente homogêneo e descasado, para uma melhor compreensão da escala de tempo τ_λ , e por conseqüência da escala de decaimento τ , os seguintes tópicos são relevantes em uma análise posterior:

- 1) Computar os autovalores dos pontos fixos elípticos e hiperbólicos, identificados no espaço de fase obtido mediante seções cumulativas de Poincaré do modelo de baixa dimensionalidade envolvendo partículas-testes, para cada valor de descasamento r_o atribuído inicialmente ao envelope $r_b(s)$ do feixe;
- 2) Calcular o expoente de Lyapunov das órbitas caóticas desenvolvidas pelas partículas-testes como função do descasamento inicial r_o ;
- 3) Utilizar a expressão analítica obtida na Seção 4.6 para a fração $f(s)$ de partículas do halo para estimar as quantidades médias originalmente obtidas mediante uma população de partículas-testes na Seção 4.6. Assim, pode-se calcular o envelope e a emitância do feixe como uma função da coordenada axial s mediante apenas $f(s)$.

A não-homogeneidade é, mesmo que presente de forma espúria, conforme demonstrado ao longo do presente trabalho, o fator precursor da formação do halo e da conseqüente termalização de feixes ultra-intensos de partículas carregadas. Desta forma, seria não somente interessante como importante investigar, mediante simulações numéricas autoconsistentes, as influências da magnitude da não-homogeneidade em um feixe inicialmente quase-homogêneo. A não-

homogeneidade pode ser introduzida na densidade de partículas n_b mediante uma pequena perturbação de amplitude ξ sobre a coordenada espacial das partículas que compõem o feixe, as quais inicialmente são dispostas de forma eqüidistante. Esta perturbação imposta pode ser convenientemente implementada mediante um ruído do tipo branco. O ruído introduzido na localização espacial de cada partícula macroscopicamente induzirá o surgimento de flutuações espaciais de densidade δn_b , ou então, de outra forma, o surgimento de não-homogeneidades espúrias cuja magnitude relaciona-se diretamente com a amplitude ξ inicialmente especificada. Para amplitudes do ruído $\xi \rightarrow 0$, é esperado que a escala de decaimento do feixe $\tau \rightarrow \infty$, haja vista que o fator precursor da termalização, a não-homogeneidade, está ausente, implicando que $\tau_\eta \rightarrow \infty$. Inversamente, quão maior for a amplitude ξ do ruído, menor deve ser a escala de tempo τ na qual o feixe decai ao seu estado de equilíbrio. No entanto, este comportamento não deve ocorrer continuamente, existindo possivelmente uma amplitude de ruído crítica ξ_c após a qual variações expressivas em τ não são observadas. A obtenção desta curva que descreve o comportamento da escala de termalização τ como uma função da amplitude de ruído ξ é extremamente profícua ao estabelecimento de uma correspondência com os resultados obtidos neste trabalho ao feixe inicialmente não-homogêneo e casado.

Destaca-se que a análise apresentada na Seção 6.6 para a interação entre o processo de redistribuição de carga, descrito por $\eta(s)$ mediante o modelo desenvolvido, e partículas individuais do feixe é completamente preliminar. Uma investigação mais profunda torna-se necessária para efetivamente avaliar a sua potencialidade. Há comportamentos assintóticos que foram antecipadamente preditos pelos modelos e que somente posteriormente foram detectados nas simulações numéricas autoconsistentes. Dentre estes, cita-se as circunstâncias nas quais as redistribuições de cargas são intensas, quando $\eta_o \rightarrow 1$. Para tempos longos $s \gg \tau$, da ordem de centenas de escalas de tempo de termalização τ , há o surgimento de uma interação ressonante entre $\eta(s)$ e partículas-testes, constatada mediante a formação de uma região curva tal qual aquela observada no Capítulo 4. No limite $\eta_o \rightarrow 1$, o processo de redistribuição de carga é mais proeminente, propiciando que topologicamente estruturas ressonantes sejam criadas no sistema feixe e partículas-testes, da mesma forma que o descasamento r_o originava no caso homogêneo. Reforça-se, o acoplamento entre o processo de redistribuição de carga e partículas individuais do feixe aparentemente torna-se ressonante, ao invés de simplesmente excitador. Este comportamento ressonante também foi verificado posteriormente nas simulações numéricas autoconsistentes.

Finalmente, pretendendo o desenvolvimento de modelos mais compatíveis com as características dos feixes atualmente implementados, torna-se interessante incluir o descasamento do envelope r_o na abordagem Lagrangeana elaborada, propiciando a investigação da dinâmica não-linear de um feixe inicialmente não-homogêneo e inicialmente descasado.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ¹ **Wangler, T. P.** *RF Linear Accelerators*. 2nd Edition. Darmstadt : Wiley-VCH, 2008. 9783527406807.
- ² **Ising, Gustaf.** Prinzip einer Methode zur Herstellung von Kanalstrahlen Hoher Voltzahl. *Arkiv för Matematik, Astronomi och*. 1924, Vol. 18, 30.
- ³ **Wideröe, Rolf.** Über ein neues Prinzip zur Herstellung hoher. *Archiv für Elektrotechnik*. 1928, Vol. 21.
- ⁴ *Conventional and superconducting RF LINAC designs for the APT project.* **Lawrence, G., et al.** Geneva : CERN-PS, 1996. Proceedings of the XVIII International Linear Accelerator Conference. p. 710. 92-9083-098-0.
- ⁵ **Lawrence, E. O. e Edlefsen, N. E.** On the production of high speed protons. *Science*. 1930, Vol. 72, 10.
- ⁶ **Veksler, V. I.** A new method of accelerating relativistic particles. *Comptes Rendus (Dokaldy) de l'Academie Sciences de l'URSS*. 1944, Vol. 43, 8.
- ⁷ **McMillan, E. M.** The Synchrotron — A Proposed High Energy Particle Accelerator. *Physical Review*. 1945, Vol. 68, 6.
- ⁸ **Reiser, M.** *Theory and Design of Charged Particle Beams*. Weinheim : Wiley-VCH, 1994. 0471306169.
- ⁹ *Design for low beam in accelerators for intense neutron source applications.* **Jameson, R. A.** Washington : IEEE, 1993. Proceedings of the 1993 Particle Accelerator Conference. p. 3926.
- ¹⁰ *Compendium of Scientific Linacs.* **Clendenin, J., et al.** Geneva : CERN - PS Division, 1996. Proceedings of the XVIII International Linear Accelerator Conference . 92-9083-098-0.
- ¹¹ **Moraes, J. S.** Dinâmica de um Feixe de Partículas Periodicamente Focalizado. Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Física, Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2006.
- ¹² **Fiuza, K.** Efeito de Carga Imagem na Dinâmica de Feixes Intensos de Partículas Carregadas. Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Física, Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008.
- ¹³ **Lagniel, J. M.** On halo formation from space-charge dominated beams. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A*. 1994, Vol. 345, pp. 46-53.
- ¹⁴ *Beam halo formation from space-charge dominated beams in uniform focusing channels.* **O'Connell, J. S., et al.** New York : IEEE, 1993. Proceedings of the 1993 Particle Accelerator Conference. p. 3657.
- ¹⁵ **Lagniel, J. M.** Chaotic behaviour and halo formation from 2D space-charge dominated beams. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A*. 1994, Vol. 345, pp. 405-410.

- ¹⁶ *Halos of intense proton beams*. **Ryne, R. D., Habib, S. e Wangler, T. P.** New York : IEEE, 1996. Proceedings of the 1995 Particle Accelerator Conference. p. 3149.
- ¹⁷ *New high power linacs and beam physics*. **Wangler, T. P., et al.** Vancouver : IEEE, 1998. Proceedings of the 1997 Particle Accelerator Conference. p. 915.
- ¹⁸ *Models and simulation of beam halo dynamics in high power proton linacs*. **Wangler, T. P.** Monterey : s.n., 1998. International Computational Accelerator Physics Conference.
- ¹⁹ **Okamoto, H. e Ikegami, M.** Simulation study of halo formation in breathing round beams. *Physical Review E*. 1997, Vol. 55, 4.
- ²⁰ **Davidson, R. C.** *Physics of nonneutral plasmas*. Singapore : World Scientific, 2001. 1860943020.
- ²¹ **Krall, N. A. e Trivelpiece, A. W.** *Principles of Plasma Physics*. New York : McGraw-Hill, 1973. 0070353468.
- ²² **Bittencourt, J. A.** *Fundamentals of plasma physics*. 3rd Edition. New York : Springer, 2004. 0387209751.
- ²³ **Lifshitz, E. M. e Pitaevskii, L. P.** *Physical Kinetics*. Oxford : Butterworth-Heinemann, 1979. 0750626356.
- ²⁴ **Chen, F. F.** *Introduction to plasma physics and controlled fusion*. 2nd Edition. New York : Springer, 2006. 0306413329.
- ²⁵ **Landau, L. D. e Lifshitz, E. M.** *Mechanics*. 3rd Edition. Oxford : Butterworth-Heinemann, 1976. 0750628960.
- ²⁶ **Thornton, S. T. e Marion, J. B.** *Classical Dynamics of Particles and Systems*. 3rd Edition. Belmont : Thomsom, 2004. 0534408966.
- ²⁷ **Goldstein, H., Poole, C. e Safko, J.** *Classical Mechanics*. 3rd Edition. New York : Addison Wesley, 2000. 0201657023.
- ²⁸ **Rizzato, F. B., Pakter, R. e Levin, Y.** Wave breaking and particle jets in intense inhomogeneous charged beams. *Physics of Plasmas*. 2007, Vol. 14, 11.
- ²⁹ **Jackson, J. D.** *Classical Electrodynamics*. 3rd Edition. Danvers : John Wiley & Sons, 1998. 047130932x.
- ³⁰ **Frenkel, J.** *Princípios de Eletrodinâmica Clássica*. São Paulo : EDUSP, 1996. 8531403278.
- ³¹ **Reitz, J. R., Milford, F. J. e Christy, R. W.** *Fundamentos da Teoria Eletromagnética*. Rio de Janeiro : Campus, 1982. 8570011032.
- ³² **Hayt, W. H.** *Eletromagnetismo*. 4a. Edição. Rio de Janeiro : LTC, 1994.
- ³³ **Davidson, R. C. e Qin, H.** *Physics of intense charged particle beams in high energy accelerators*. Singapore : World Scientific, 2001. 1860943004.

- ³⁴ **Davidson, R. C. e Chen, C.** Kinetic description of intense nonneutral beam propagation through a periodic solenoidal focusing field based on the nonlinear Vlasov-Maxwell equations. *Particle Accelerators*. 1998, Vol. 59, 175.
- ³⁵ **Davidson, R. C., Lee, W. W. e Stoltz, P.** Statistically-averaged rate equations for intense nonneutral beam propagation through a periodic solenoidal focusing field based on the nonlinear Vlasov-Maxwell equations. *Physics of Plasmas*. 1998, Vol. 5, 279.
- ³⁶ **Allen, C. K., et al.** Beam-Halo Measurements in High-Current Proton Beams. *Physical Review Letters*. 2002, Vol. 89, 21.
- ³⁷ **Almeida, A. M. O.** *Sistemas Hamiltonianos: Caos e Quantização*. 3a. Edição. Campinas : UNICAMP, 1995. 8226801856.
- ³⁸ **Lichtenberg, A. J. e Lieberman, M. A.** *Regular and Chaotic Dynamics*. Berlin : Springer-Verlag , 1992. 3540977457.
- ³⁹ **Halliday, D., Resnick, R. e Walker, J.** *Fundamentos de Física 3 - Eletromagnetismo*. 4a. Edição. Rio de Janeiro : LTC, 1996.
- ⁴⁰ **Jameson, R. A.** *Beam halo from collective core/single-particle interactions*. Los Alamos : University of California, 1993. LA-UR-93-1209.
- ⁴¹ **Wangler, T. P., et al.** Particle-core model for transverse dynamics of beam halo. *Physical Review Special Topics - Accelerators and Beams*. 1998, Vol. 1, 8.
- ⁴² **Monteiro, L. H. A.** *Sistemas Dinâmicos*. 2a. Edição. São Paulo : Livraria da Física, 2006. 858832508x.
- ⁴³ **Haykin, S.** *Communication Systems*. 4th Edition. New York : John Wiley & Sons, 2001. 0471178691.
- ⁴⁴ **Lathi, B. P.** *Modern Digital and Analog Communication Systems*. 3rd Edition. 1998 : Oxford University Press, New York. 0195110099.
- ⁴⁵ *An analytical model to determine equilibrium quantities of mismatched charged particle beams in linear accelerators.* **Nunes, R. P., Pakter, R. e Rizzato, F. B.** São Pedro : SBF, 2007. Proceedings of 9th Brazilian Meeting on Plasma Physics. p. 25.
- ⁴⁶ **Nunes, R. P., Pakter, R. e Rizzato, F. B.** An analytical model to determine equilibrium quantities of azimuthally symmetric and mismatched charged particle beams under linear focusing. *Journal of Applied Physics*. 2008, Vol. 104, 1.
- ⁴⁷ *Halo characterization of initially mismatched beams through phase-space modeling.* **Nunes, R. P. e Rizzato, F. B.** Genoa : EPS-AG, 2008. Proceedings of 11th European Particle Accelerator Conference. p. 3206.
- ⁴⁸ *Simplified self-consistent model for emittance growth in charged beams with mismatched envelopes.* **Nunes, R. P.** São José dos Campos : s.n., 2006. Livro de Resumos do II Encontro de Verão de Física do ITA.
- ⁴⁹ **Nunes, R. P., Pakter, R. e Rizzato, F. B.** Simplified self-consistent model for emittance growth in

charged beams with mismatched envelopes. *Physics of Plasmas*. 2007, Vol. 14, 2.

- ⁵⁰ *A self-consistent model for emittance growth of mismatched charged particle beams in linear accelerators.* **Nunes, R. P., Pakter, R. e Rizzato, F. B.** Albuquerque : IEEE, 2008. Proceedings of the 2007 Particle Accelerator Conference. p. 3220.
- ⁵¹ *A full analytical method to determine equilibrium quantities of mismatched charged particle beams in linear channels.* **Nunes, R. P. e Rizzato, F. B.** Genoa : EPS-AG, 2008. Proceedings of 11th European Particle Accelerator Conference. p. 3203.
- ⁵² **Ott, E.** *Chaos in Dynamical Systems*. 2nd Edition. Cambridge : Cambridge University Press, 2002. 0521811961.
- ⁵³ **Beale, R. e Jackson, T.** *Neural Computing: an Introduction*. Philadelphia : Institute of Physics, 1990. 0852742622.
- ⁵⁴ **Gluckstern, R. L.** Analytic model for halo formation in high current ion linacs. *Physical Review Letters*. 1994, Vol. 73, 9.
- ⁵⁵ *Wave Breaking and Particle Jets in Inhomogeneous Beams.* **Rizzato, F. B., et al.** Albuquerque : IEEE, 2008. Proceedings of 2007 Particle Accelerator Conference. p. 3886.
- ⁵⁶ *Wave breaking and particle jets in intense inhomogeneous charged beams.* **Nunes, R. P., et al.** São Pedro : SBF, 2007. Proceedings of 9th Brazilian Meeting on Plasma Physics. p. 13.
- ⁵⁷ *Wave breaking and test particle dynamics in inhomogeneous beams.* **Nunes, R. P., et al.** Genoa : EPS-AG, 2008. Proceedings of 11th European Particle Accelerator Conference. p. 3218.
- ⁵⁸ **Landau, L. D. e Lifshitz, E. M.** *Fluid Mechanics*. 2nd Edition. Oxford : Butterworth-Heinemann, 1987. 0750627670.

APÊNDICE A — Simulação numérica autoconsistente de um feixe de partículas carregadas com simetria azimutal

As densidades de partículas que descrevem o feixe em seu estado inicial foram representadas nos Capítulos anteriores do presente trabalho como funções analíticas de suas coordenadas espaciais. Ou seja, para qualquer coordenada R do espaço, a densidade de partículas n_b não somente é uma função definida como se altera suavemente sob qualquer variação infinitesimal dR considerada, implicando que então a quantidade dn_b/dR exista e seja finita.

É dispensável comentar a versatilidade e a utilidade em assim representar matematicamente qualquer quantidade, permitindo que procedimentos analíticos concisos e completos possam ser adotados na descrição do sistema em questão. Contudo, tanto experimentalmente quanto em simulações numéricas, a analiticidade espacial não é uma característica pertencente às densidades de partículas que representam o feixe. Em maior ou menor grau, uma quantização espacial é — inevitavelmente — inserida na descrição de um feixe de partículas carregadas. De fato, em experimentos e em simulações numéricas, a densidade de partículas n_b não é uma função contínua e analítica da coordenada R , mas sim varia de forma quantizada a cada quantidade finita ΔR , a qual intrinsecamente depende da forma como n_b é implementada. A quantização fundamental é a unidade, haja vista que a densidade de partículas n_b varia em, no mínimo, uma partícula quando o intervalo $\Delta R \rightarrow 0$. Ou seja, enquanto na física ideal uma densidade n_b é unívoca, na física real a densidade idealizada n_b não o é, sendo dependente da forma como é implementada, condição esta que pode impactar consideravelmente no comportamento do feixe posteriormente observado. Mais, no presente caso, implementação implica em quantização espacial, a qual, por sua vez, propicia o surgimento de não-homogeneidades espúrias, precursoras da formação do halo tal qual discutido no Capítulo 5. Constatções como esta, em um âmbito mais geral da física, remetem a característica intrínseca da natureza, se esta é contínua ou quantizada, sendo fator motivador de muitas discussões atuais envolvendo qual abordagem matemática (contínua ou quantizada) deva realmente ser utilizada na descrição de qualquer sistema físico.

A discussão efetuada no parágrafo anterior é ilustrada na Figura 41. Na Figura 41a, a seção transversal do sistema físico objeto de estudo deste trabalho é reproduzida. Trata-se de um feixe azimutalmente simétrico, muito longo, focalizado por um campo indução magnética constante e confinado em um canal linear encapsulado por um duto circular condutor de raio r_w . Este sistema é idêntico àquele apresentado na Figura 3, extraída a partícula-teste. Todas as variáveis estão no referencial de Larmor. Na Figura 41a, um pequeno elemento que constitui o feixe é selecionado e amplificado para análise na Figura 41b. Nesta última, o comportamento granular da densidade de partículas n_b que compõe o feixe é evidenciado. Cada deslocamento ΔR na coordenada radial

engloba uma quantidade quantizada de partículas. Ou seja, em qualquer coordenada R analisada, a variação do número de partículas $\Delta N_b = 2\pi n_b R \Delta R$, para um ΔR finito, representará adição de uma ou qualquer número inteiro de partículas. Salienta-se que a grandeza quantizada em questão é a densidade de partículas n_b .

Feixe com densidade homogênea ou não-homogênea $n_b(R,s)$ e simetria azimutal

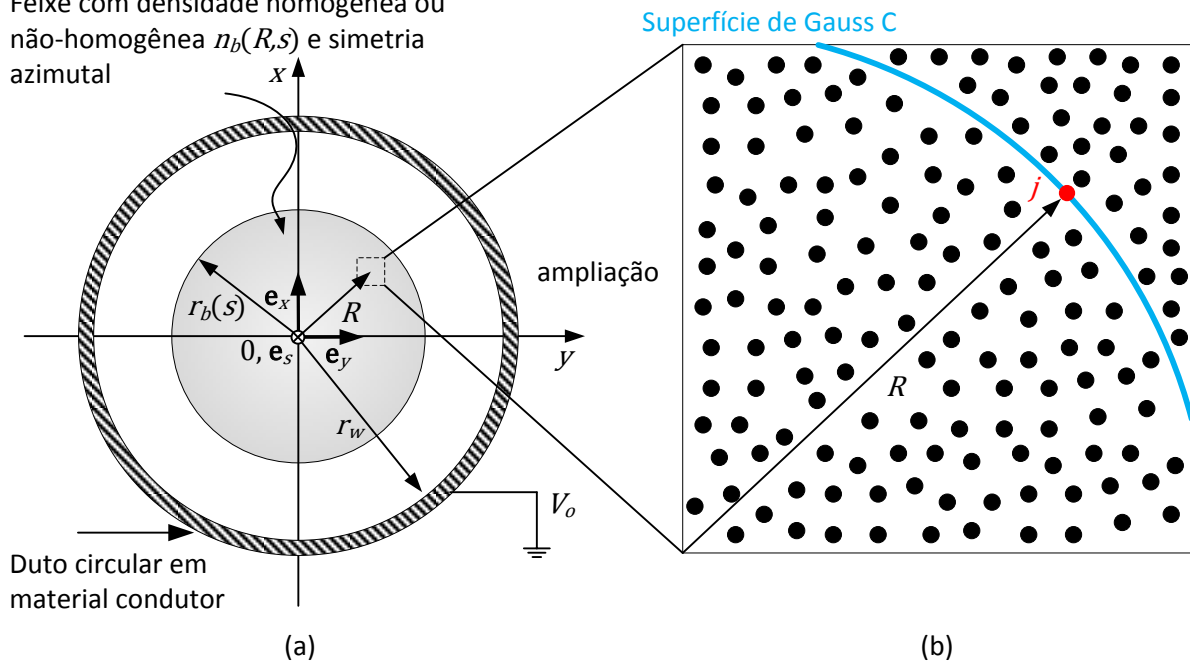


Figura 41: (a) A geometria do canal linear de confinamento magnético do feixe, encapsulado por um duto condutor em r_w . Um elemento da densidade de partículas n_b na coordenada espacial R é selecionado e em (b) inspecionado, evidenciando o comportamento quantizado natural presente neste tipo de sistema. Para cada partícula j , destacada em vermelho, há uma equação dinâmica, sendo a força exercida pelo feixe obtida pela Lei de Gauss. As variáveis estão no referencial de Larmor.

Sendo de natureza quantizada, cada elemento constituinte de n_b , cada partícula, está sujeita a interações não somente com o campo magnético focalizador como também com as demais partículas. Considerando o vínculo de simetria azimutal, as partículas interatuam apenas segundo a coordenada radial R . Mais, em analogia com a abordagem por partícula-teste desenvolvida no Capítulo 3, cada partícula do feixe está sujeita à uma força que pode ser diretamente obtida mediante a Lei de Gauss, haja vista que as demais partículas internas podem ser interpretadas macroscopicamente como um feixe com carga fracionada.

O procedimento desenvolvido no Capítulo 3 pode ser então utilizado com apenas algumas ressalvas. Conforme a Figura 41b, à cada partícula constituinte do feixe localizada na coordenada espacial R pode ser atribuído um rótulo j , sendo sua dinâmica radial descrita então por R_j . O rótulo j é um número natural pertencente ao intervalo $1 \leq j \leq N_b$, sendo N_b o número total de partículas que compõe o feixe. A força exercida pelo feixe de carga fracionada sobre tal partícula j é idêntica a da equação (3.4)

$$\frac{\partial \psi}{\partial R} = -\frac{K_b}{N_b R_j} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_j} R' dR' d\theta n_b(R', s), \quad (\text{A.1})$$

na qual

$$Q(R_j) \equiv -\frac{K_b}{N_b} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_j} R' dR' d\theta n_b(R', s), \quad (\text{A.2})$$

é a fração adimensional de carga aprisionada por uma superfície (ou um contorno, devido a dimensionalidade do problema) de Gauss C em R_j , podendo esta última ser identificada como a coordenada Lagrangeana de cada partícula j do feixe, em analogia com a abordagem desenvolvida no Capítulo 6. Portanto, sobre os resultados providos pela equação (3.12), cada partícula j pode ser perfeitamente descrita por

$$\frac{d^2}{ds^2} R_j + \kappa_{z0} R_j - \frac{Q(R_j)}{R_j} = 0, \quad (\text{A.3})$$

na qual o termo linear $\kappa_{z0} R_j$ representa a ação do campo magnético focalizador e o termo não-linear $Q(R_j)/R_j$ reproduz a ação do feixe com carga fracionada sobre cada partícula j com coordenada espacial R_j . Convém salientar que n_b não agrega nenhuma informação a respeito da velocidade de cada partícula. De fato, por simplificação imposta no Capítulo 4, as partículas não possuem inicialmente velocidade, constituindo assim um feixe inicialmente frio. Caso uma distribuição fosse atribuída inicialmente ao feixe, um termo não-linear adicional envolvendo o momento angular de cada partícula $P_{\theta j}/R_j^3$ deveria ser adicionado na equação (A.3). O momento angular P_{θ} de cada partícula j corresponde a aquele canônico presente da equação (2.13).

Utilizar o vínculo de simetria azimutal e deste modo avaliar a força exercida pelo feixe sobre cada partícula j através da Lei de Gauss é muito conveniente na análise presente neste trabalho. Determinar a força sobre cada partícula j mediante um contorno de Gauss permite que apenas os efeitos coletivos sejam quantificados, haja vista que as partículas interagem apenas através do campo elétrico macroscópico autoconsistente gerado pela dinâmica da densidade de partículas carregadas n_b . Este procedimento de simulação intrinsecamente exclui os efeitos oriundos das interações binárias existentes em outros métodos, tal como o baseado na Lei de Newton. Isto é muito adequado, pois o sistema em questão trata-se de um plasma não-neutro, satisfazendo a equação de Liouville (1.5) e, por conseguinte, as órbitas das partículas individualmente conservando energia. Mais, além do método de simulação pela Lei de Gauss ser mais realístico na descrição do sistema de interesse neste trabalho, pois não descreve eventuais interações binárias entre as partículas constituintes, é menos complexo, pois a força exercida pelo feixe sobre cada partícula é obtida de forma direta, sendo desnecessário avaliar as $N_b - 1$ interações binárias para cada partícula j existentes nos métodos baseados nas Leis de Newton.

Torna-se importante também discorrer a respeito da natureza do ente constituinte do feixe — a partícula — pertinente ao método de simulação numérica neste trabalho adotado. Conforme comentado, devido à simetria azimutal imposta ao feixe, as interações entre as partículas que constituem o feixe ocorrem mediante apenas o campo elétrico autoconsistentemente gerado pelas demais outras, estando presente assim somente os efeitos coletivos. Desta forma, as partículas podem ser consideradas infinitesimais, sendo, por conseguinte, tanto sua forma quanto suas dimensões irrelevantes na descrição da evolução do feixe no canal de confinamento magnético. Destaca-se que esta é uma constatação importante, uma vez que os métodos de simulação baseados nas Leis de Newton devem obrigatoriamente atribuir certa dimensão às partículas, pois as forças interagentes escalam com $1/R_{ij}^2$, na qual R_{ij} denota a distância entre duas partículas constituintes do feixe. O ato de tornar finitas as partículas nos métodos por Lei de Newton remove a singularidade natural existente quando a distância $R_{ij} \rightarrow 0$, condição esta possível de ocorrer ao se considerar as partículas infinitesimais, introduzindo um amaciamento das interações entre partículas muito próximas e evitando as quase-colisões.

Obtida a equação dinâmica para cada partícula constituinte do feixe, torna-se possível avaliar e simular o comportamento do sistema como todo mediante integração numérica. Considerando que o feixe é composto de N_b partículas e que cada uma destas é descrita por uma equação diferencial ordinária de 2ª ordem, então o sistema total a ser integrado numericamente possui $2 \cdot N_b$ equações. Diferentes simulações do feixe podem ser realizadas alterando-se tanto o coeficiente de focalização magnética κ_{z0} quanto a densidade inicial $n_b(s=0)$. Considerando o reescalonamento descrito pelas equações (4.4) e (6.3), o qual será abordado em detalhe no APÊNDICE B, no presente trabalho é apenas relevante o formato da densidade n_b que representa o feixe inicialmente. Definir o formato da densidade inicial do feixe n_b significa atribuir para cada partícula j suas condições iniciais, isto é, atribuir o valor de suas variáveis de estado R_j e dR_j/ds em $s=0$. Sendo o feixe abordado neste trabalho frio, as velocidades de cada partícula j são diretamente resolvidas por

$$dR_j/ds|_{s=0} \equiv V_{j0} = 0. \quad (\text{A.4})$$

Conforme comentado anteriormente, o feixe inicialmente torna-se então completamente representado apenas pelas coordenadas espaciais. Assim sendo, para cada partícula j

$$R_j(s=0) = R_{j0}. \quad (\text{A.5})$$

O valor R_{j0} atribuído a cada partícula j determinará qual o formato espacial da densidade de partículas n_b que inicialmente representará o feixe de partículas carregadas, podendo esta última ser homogênea ou não-homogênea, com qualquer forma de dependência radial R . A única restrição imposta é a necessidade de n_b ser azimutalmente simétrica. As N_b equações presentes na expressão

(A.4) bem como o igual número presente (A.5), completam o número de $2 \cdot N_b$ condições iniciais necessárias à solução de um total de N_b equações diferenciais ordinárias de 2ª ordem presentes na equação (A.3) para cada partícula j . O sistema assim torna-se completamente resolvível numericamente.

A integração numérica do sistema de equações (A.3) inicializado pelas equações (A.4) e (A.5) permite que a órbita de cada partícula j seja determinada para qualquer instante de tempo s . Desta forma, quantidades médias da densidade de partículas n_b podem ser avaliadas durante a evolução do feixe no canal de confinamento magnético. O conceito de média é idêntico ao apresentado na equação (2.1), devendo-se apenas considerar o carácter quantizado atual de n_b . Desta forma, qualquer quantidade χ de cada partícula j tem sua média definida na seção transversal do feixe por

$$\langle \chi \rangle (s) = \frac{1}{N_b} \sum_{j=1}^{N_b} \chi_j (s). \quad (\text{A.6})$$

Através da equação acima, as quantidades macroscópicas de interesse descritas no Capítulo 3 tais como o raio RMS R_b , presente na equação (2.32), e a emitância do feixe ϵ , definida na equação (2.33), podem ser avaliadas dinamicamente.

Em sistemas complexos, compostos por um grande número de constituintes, sempre é de interesse utilizar alguma quantidade para monitoração do desempenho da simulação com relação à variável de integração. Sendo o feixe de interesse neste trabalho um sistema Hamiltoniano, esta quantidade de interesse imediatamente pode ser reconhecida como a energia, permitindo que a dissipação numérica seja avaliada no decorrer da simulação. A energia transversal de cada partícula j pode ser obtida multiplicando a equação (A.3) pela variável de estado dR_j/ds e integrando a expressão resultante na coordenada axial s . Assim procedendo, obtém-se

$$E_{\perp j} = \frac{1}{2} V_j^2 + \frac{1}{2} \kappa_{zo} R_j^2 - Q(R_j) \ln(R_j) = \text{constante}, \quad (\text{A.7})$$

para qualquer coordenada s , adequado ao carácter conservativo (em relação à energia) do sistema. Note que $Q(R_j)$ é a fração de carga aprisionada por um contorno de Gauss C em R_j , formalmente descrita na equação (A.2). Na abordagem discreta, determinar $Q(R_j)$ significa — contar — o número de partículas que compõem o feixe com coordenadas espaciais menores que R_j . A energia total do feixe E_{\perp} é obtida simplesmente inserindo a equação (A.7) para cada partícula j na equação (A.6)

$$E_{\perp} \equiv \langle E_{\perp j} \rangle = \frac{1}{N_b} \sum_{j=1}^{N_b} E_{\perp j} = \frac{1}{2} \langle V_j^2 \rangle + \frac{1}{2} \kappa_{zo} \langle R_j^2 \rangle - \langle Q(R_j) \ln(R_j) \rangle = \text{constante}. \quad (\text{A.8})$$

Comparando a equação (A.8) acima com aquela equação (4.1) ou (6.1) obtida na abordagem analítica de n_b , observa-se o termo $\langle Q(R_j) \ln(R_j) \rangle$ é o equivalente a energia média armazenada no campo

elétrico autoconsistentemente gerado pela dinâmica das partículas constituintes, o qual foi formalmente designado por $\mathcal{E}_F(s)$ na Seção 2.3.

Integração numérica do sistema de equações

A equação (A.3) que descreve a dinâmica de cada partícula j possui um termo, $Q(R_j)/R_j$, que diverge ao infinito na origem do sistema de coordenadas. Sendo assim, à medida que o algoritmo de integração se aproxima de $R_j = 0$, não somente a quantidade $Q(R_j)/R_j$ torna-se grande como também a sua variação espacial mais acentuada. Caso a tolerância de integração ε seja fixada, o algoritmo de integração se restringe inevitavelmente a diminuir fortemente o passo de integração adotado. Caso não haja uma limitação neste processo, o passo de integração será diminuído sucessivamente, permanecendo em um laço infinito de execução no limite $R_j \rightarrow 0$. É um processo de realimentação positiva. Uma forma de tornar este comportamento em um de realimentação negativa é inserir uma escala espacial característica Δ na equação (A.3), que elimine a irregularidade natural existente em $R_j = 0$. Desta forma, a força original exercida pelo feixe sobre cada partícula j pode ser aproximada por

$$\frac{Q(R_j)}{R_j} \approx \frac{Q(R_j)R_j}{R_j^2 + \Delta^2}. \quad (\text{A.9})$$

A equação acima impõe uma suavização no comportamento original da força que o feixe exerce sobre cada partícula j quando $R_j \cong 0$. Quando R_j for pequeno, a força exercida pelo feixe sobre cada partícula j ao invés de divergir ao infinito será da $O(QR_j/\Delta^2)$.

Há algoritmos que não lidam adequadamente com a integração de termos irregulares, tornando-se muito morosos quando se aproximam da coordenada na qual há divergência, mesmo que uma estratégia de amaciamento como a presente na equação (A.9) seja adotada. Neste caso se incluem os algoritmos baseados no método de Runge-Kutta. Algoritmos de integração multipassos do tipo preditor-corretor superam estas dificuldades intrínsecas à natureza do problema físico de uma forma muito mais satisfatória e veloz. Por este motivo, como algoritmo de integração adotou-se o DLSODE (Double Livermore Solver for Ordinary Differential Equations)^a. Como parâmetro de suavização, utilizou-se $\Delta = 10^{-5}$. Uma tolerância no valor de $\varepsilon = 10^{-9}$ foi suficiente nas simulações de todos os descasamentos r_o do feixe analisados neste trabalho. Para o caso exemplo explorado no decorrer deste trabalho de um descasamento inicial de $r_o = 1,5$ e um tempo de simulação até $s = 1000$, utilizando os parâmetros anteriores, a flutuação de energia máxima observada durante a evolução do feixe no canal de confinamento foi de $\Delta E_{\perp}/E_{\perp} \cong -0,0131\%$, denotando pequena dissipação numérica. Este valor aumenta consideravelmente para descasamentos r_o maiores, pois os

^aRadhakrishnan, K. e Hindmarsh, A. C. *Description and Use of LSODE, the Livermore Solver for Ordinary Differential Equations*. Livermore : LLNL, 1993. UCRL-ID-113855.

tempos de decaimento τ são menores. No entanto, a tolerância ε ainda pode ser mantida em patamares razoáveis, de forma que algoritmos de integração que não sejam simpléticos possam ainda ser adotados.

Implementação numérica da densidade homogênea com simetria azimutal

Conforme abordado na Seção 3.2, a emitância ε de um feixe inicialmente frio e com densidade de partículas inicial idealmente homogênea não observa nenhum crescimento. A equação (3.10) obtida nesta Seção corrobora a afirmativa anterior. Contudo, o ato de implementar uma densidade idealmente homogênea introduz imperfeições, as quais podem ser identificadas como não-homogeneidades espúrias, estopim da formação do halo tal qual discutido no Capítulo 5. Implementar a densidade inicial n_b significa atribuir a cada partícula j uma condição inicial, formalmente representada pelas equações (A.4) e (A.5).

Uma forma de intensificar a não-homogeneidade inicial é utilizar um gerador de números aleatórios na definição da condição inicial para a coordenada espacial de cada partícula j presente na equação (A.5). Todo gerador de número aleatório idealmente deve ser não-tendencioso, possuindo cada número gerado igual probabilidade de ocorrência. Contudo, geradores de números aleatórios ideais são algo ainda muito perseguido na área de Ciências da Computação. Mesmo os mais recentes algoritmos desenvolvidos para geração de números aleatórios são tendenciosos, não fornecendo assim uma frequência uniforme de números no intervalo desejado. Caso um número aleatório destes geradores reais seja atribuído a cada partícula j através da equação (A.5), então a não uniformidade de sua distribuição de números gerados implicará em uma não-homogeneidade espúria inicial à densidade de partículas n_b , suficiente para induzir o crescimento da emitância ε do feixe de partículas carregadas.

Devido à simetria azimutal do feixe em questão, torna-se interessante gerar as condições de cada partícula j diretamente por atribuição de valores à coordenada radial R , conforme a equação (A.5). Contudo, distribuir partículas de forma quase-homogênea na coordenada radial R não gerará uma distribuição de partículas quase-homogênea no espaço xy . Note que n_b é uma densidade superficial de partículas, sendo esta a densidade inicialmente homogênea. A geração de números aleatórios pode ser compatibilizada utilizando a equação (4.22), a qual relaciona uma densidade superficial n_b com uma densidade linear λ mediante a conservação de partículas

$$dR_{j0}^2 = \frac{\lambda(R_a)}{\pi n_b(R_{j0})} \cdot dR_a \quad (\text{A.10})$$

sendo para cada partícula j de n_b atribuído um número aleatório R_a segundo uma densidade homogênea λ . Desta equação, como tanto λ quanto n_b são uniformes, infere-se então que

$$R_{j0} \propto \sqrt{R_a}, \quad (\text{A.11})$$

pois $\lambda(R_a)/\pi n_b(R_{j_o}) = \text{constante}$. Ou seja, extrair a raiz quadrada de um número aleatório R_a gerado homogeneamente na coordenada R implicará em uma densidade superficial também homogênea de partículas n_b .

Através da equação (A.11), torna-se direta a implementação numérica da densidade n_b . Sendo R_a um número gerado aleatoriamente no intervalo $[0,1]$ então R_{j_o} também o será. Supondo um feixe com descasamento inicial arbitrário r_o , então a condição inicial (A.5) para a coordenada radial de cada partícula j pode ser obtida pelo procedimento

$$R_a = \text{rand}(s_o), R_{j_o} = r_o \sqrt{R_a}. \quad (\text{A.12})$$

na qual a função geradora de números aleatórios $\text{rand}()$ foi implementada pelo tradicional método da função módulo unitário e s_o é a semente inicial utilizada. O histograma de uma densidade n_b simétrica implementada numericamente segundo a equação (A.12) é apresentada na Figura 42a com quantização $\Delta_b \cong 0,0737$, na qual, para comparação, sua expressão analítica foi adicionalmente exposta. Note a presença das flutuações espaciais δn_b espúrias na densidade n_b .

Cabe salientar-se que neste trabalho a geração da condição inicial para as coordenadas espaciais foi aleatória visando intensificar a não-homogeneidade inicial. Salienta-se que atribuir a cada partícula j um valor de $R_a = j/N_b$, múltiplo da quantização espacial do sistema físico em questão, também propiciaria o decaimento do feixe, haja vista a precisão numérica finita de cálculo dos microprocessadores. Contudo, o decaimento seria muito mais lento, tendendo ao infinito para um r_o aproximadamente fixo, conforme aumenta o número de partículas N_b que constitui o feixe.

Implementação numérica da densidade não-homogênea com simetria azimutal

A densidade não-homogênea selecionada para ser investigada neste trabalho encontra-se descrita na equação (3.13). Procedendo de forma análoga ao caso homogêneo anterior, a compatibilização de uma geração de R_a homogênea segundo λ com uma de R_{j_o} não-homogênea parabolicamente segundo n_b pode ser obtida mediante a equação (4.22)

$$d\zeta = \lambda(R_a) \cdot dR_a \quad (\text{A.13})$$

na qual ζ é definida por

$$\zeta = 2\pi \int n_b(R_{j_o}) R_{j_o} dR_{j_o} \quad (\text{A.14})$$

pois n_b é agora função de R_{j_o} , diferentemente do caso homogêneo.

Inserindo a equação (3.13) — recordando que $r_b(s=0) = r_o$ — na equação (A.14), integrando a expressão resultante e inserindo o resultado obtido na equação (A.13) atinge-se

$$d[\eta \bar{R}^2 + (1 - \eta) \bar{R}] = \frac{\lambda(R_a)}{N_b} \cdot dR_a, \quad (\text{A.15})$$

da qual infere-se que

$$\eta \bar{R}^2 + (1 - \eta) \bar{R} \propto R_a, \quad (\text{A.16})$$

sendo

$$\bar{R} \equiv R_{j_0}^2 / r_0^2, \quad (\text{A.17})$$

pois $\lambda(R_a)/N_b = \text{constante}$ da mesma forma que no caso homogêneo. Resolvendo-se a equação (A.16) para \bar{R} e inserindo o resultado obtido na equação (A.17) logo acima finalmente constata-se

$$R_{j_0} \propto \pm r_0 \sqrt{\frac{-(1 - \eta) \pm \sqrt{(1 - \eta)^2 + 4\eta R_a}}{2\eta}}. \quad (\text{A.18})$$

Como a densidade de partículas n_b já é naturalmente não-homogênea, torna-se desnecessário atribuir à R_a valores gerados aleatoriamente. Neste caso, os valores de R_a podem ser múltiplos da unidade fundamental de quantização $1/N_b$ da densidade de partículas n_b . Assim sendo, para um feixe com descasamento inicial r_0 , a condição inicial (A.5) para a coordenada radial de cada partícula j de um feixe não-homogêneo parabolicamente pode ser obtida pelo procedimento

$$R_a = \frac{j}{N_b}, R_{j_0} = r_0 \sqrt{\frac{-(1 - \eta) + \sqrt{(1 - \eta)^2 + 4\eta R_a}}{2\eta}}. \quad (\text{A.19})$$

na qual o sinal positivo externo à raiz foi selecionado para obtenção de uma densidade assimétrica e o sinal positivo interno à raiz também o foi pois a condição inicial atribuída à R_{j_0} deve ser um número Real, já que necessariamente a magnitude da não-homogeneidade encontra-se no intervalo $0 \leq \eta \leq 1$. A implementação numérica de uma densidade n_b assimétrica segundo a equação (A.19) é apresentada na Figura 42b com quantização $\Delta_b = 0,05$, na qual, para comparação, também é exibida a sua versão analítica.

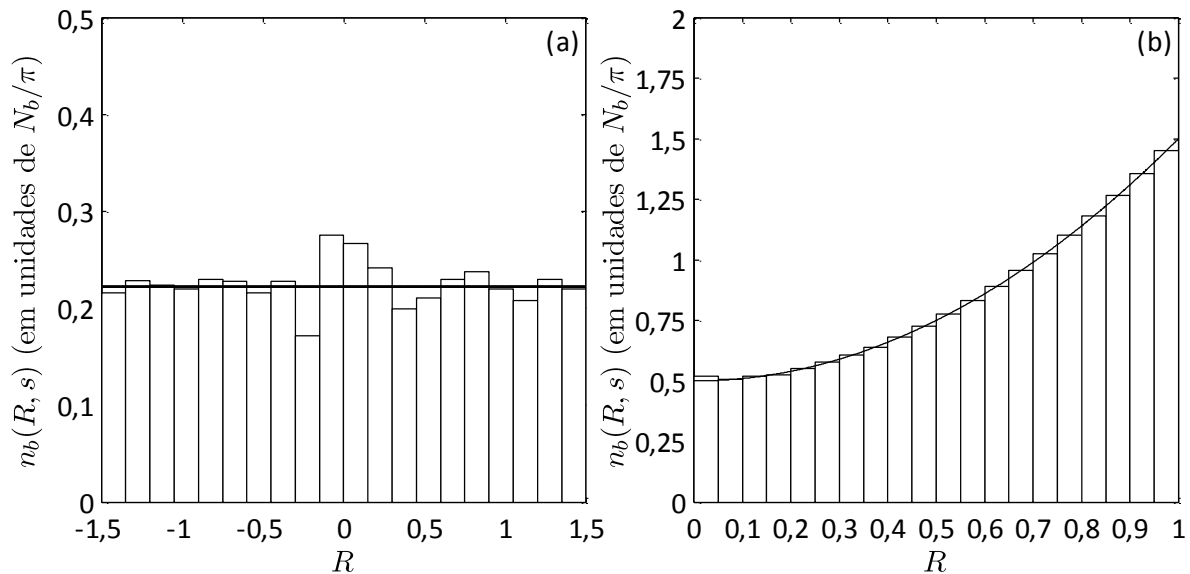


Figura 42: Implementação numérica de uma densidade n_b inicialmente espacialmente (a) homogênea com $\Delta_b \approx 0,0737$ e (b) não-homogênea parabolicamente com $\Delta_b = 0,05$. Para comparação, em cada um dos casos as expressões analíticas de n_b são também apresentadas mediante uma linha sólida.

APÊNDICE B — Escalonamento adotado nas equações que descrevem quantidades de interesse do feixe de partículas carregadas

Para tornar o conjunto de equações que descreve o feixe de partículas carregadas única e exclusivamente dependente de características iniciais da densidade n_b , a dizer o seu descasamento r_o e, no caso não-homogêneo, a magnitude da não-homogeneidade η , torna-se necessário efetuar um reescalonamento em todas as suas variáveis espaciais. O fator adequado a ser utilizado no reescalonamento das coordenadas transversais é o envelope de equilíbrio r_{bo} do feixe descrito pela equação (3.22). Para o feixe inicialmente frio — $\epsilon(s=0) = 0$ — de interesse neste trabalho a equação (3.22) torna-se

$$r_{bo} = \sqrt{K_g/\kappa_{zo}}. \quad (\text{B.1})$$

Para a coordenada longitudinal, é muito conveniente expressá-la em unidades do fator $\kappa_{zo}^{-1/2}$.

Impondo-se que o envelope inicial do feixe seja a unidade, isto é, $r_o = 1$, então o envelope do feixe deve ser reescalonado pela equação (B.1), conforme a equação (4.5). Considerando a relação (3.15) generalizada em η entre o envelope do feixe r_b e o seu raio RMS R_b , o procedimento de reescalonamento das coordenadas espaciais se resume então a

$$r_b \rightarrow r_{bo} r_b, \quad \mathbf{R}_\perp \rightarrow r_{bo} \mathbf{R}_\perp, \quad s \rightarrow \sqrt{\kappa_{zo}} \cdot s. \quad (\text{B.2})$$

Para compatibilização com as equações envolvendo o potencial elétrico adimensional ψ , deve-se ainda impor o seguinte reescalonamento a este último e a energia armazenada no campo elétrico \mathcal{E}_F

$$\psi \rightarrow \kappa_{zo} \cdot \psi, \quad \mathcal{E}_F \rightarrow \kappa_{zo} \cdot \mathcal{E}_F. \quad (\text{B.3})$$

Por conseqüência da equação (B.2), qualquer grandeza μ dependente funcionalmente de r_b , \mathbf{R}_\perp e s será também reescalonada por

$$\frac{\partial \mu}{\partial r_b} \rightarrow r_{bo} \frac{\partial \mu}{\partial r_b}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{R}_\perp} \rightarrow r_{bo} \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{R}_\perp}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial s} \rightarrow \sqrt{\kappa_{zo}} \frac{\partial \mu}{\partial s}. \quad (\text{B.4})$$

Inserindo as equações (B.2) na equação (2.33) para a emitância ϵ observa-se que

$$\epsilon(s) = r_{bo}^2 \sqrt{\kappa_{zo}} \sqrt{4(\langle \mathbf{V}_\perp^2 \rangle \langle \mathbf{R}_\perp^2 \rangle - \langle \mathbf{R}_\perp \cdot \mathbf{V}_\perp \rangle^2)}. \quad (\text{B.5})$$

Portanto, segundo a equação (B.2), a emitância ϵ incondicionalmente deve também ser reescalonada por

$$\epsilon \rightarrow r_{bo}^2 \sqrt{\kappa_{zo}} \cdot \epsilon. \quad (\text{B.6})$$

Estabelecidas as condições do reescalonamento, cabe então aplicá-las às demais equações de interesse. As equações que devem ser reescalonadas são a equação de Poisson, a equação da partícula-teste, a equação para o envelope r_b generalizado e a equação para a energia transversal total E_\perp do feixe, extensivamente utilizadas nos Capítulos 3, 4, 5 e 6 no desenvolvimento do presente

trabalho. Inserindo as equações (B.2), (B.3) e (B.4) na equação de Poisson (2.5) considerando simetria azimutal

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \psi}{\partial R} \right) = -\frac{2\pi}{N_b} n_b(\mathbf{R}_\perp, s). \quad (\text{B.7})$$

obtém-se a sua forma reescalada. Realizando a mesma ação sobre a equação (3.2) para a dinâmica da partícula-teste constata-se que

$$\frac{d^2}{ds^2} R = -R - \frac{\partial \psi}{\partial R}. \quad (\text{B.8})$$

Inserindo as equações (B.2) e (B.4) na equação (3.19) generalizada para o envelope r_b do feixe prontamente obtém-se

$$\frac{d^2}{ds^2} r_b(s) + r_b(s) - \frac{1}{r_b(s)} - \frac{\epsilon_g^2}{r_b^3(s)} = 0. \quad (\text{B.9})$$

Finalmente, agindo de forma idêntica com a equação (4.1) ou (6.1) que contabiliza a energia total transversal do feixe E_\perp

$$\frac{1}{2} \langle \mathbf{V}_\perp^2 \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathbf{R}_\perp^2 \rangle + \mathcal{E}_F(s) = E_\perp, \quad (\text{B.10})$$

na qual a energia armazenada no campo elétrico presente na equação (2.22) assume

$$\mathcal{E}_F(s) = \frac{1}{4\pi} \int d\mathbf{R}_\perp |\nabla_\perp \psi|^2. \quad (\text{B.11})$$

Ao se efetuar uma comparação direta entre as equações (B.7), (B.8), (B.9), (B.10) e (B.11) com, respectivamente, as equações (2.5), (3.2), (3.19), (4.1) ou (6.1) e (2.22), observa-se que adotar nestas o reescalamento descrito pelas equações (B.2), (B.3) e (B.4) é exatamente o mesmo que impor

$$K_g \rightarrow 1 \text{ e } \kappa_{z0} \rightarrow 1 \quad (\text{B.12})$$

em todas as equações apresentadas neste trabalho nas quais estes parâmetros aparecem. Nestas condições de reescalamento, salienta-se que o raio de equilíbrio do feixe torna-se

$$r_{b0} \rightarrow 1. \quad (\text{B.13})$$

Portanto, qualquer valor de $r_o \neq r_{b0} = 1$ determinará que $d^2 r_b / ds^2 \neq 0$, havendo dinâmica do envelope r_b ao longo da excursão do feixe no canal de confinamento magnético.

APÊNDICE C — Obtenção de uma solução analítica quase-exata para o modelo desenvolvido na aproximação semicircular de feixes inicialmente homogêneos

A obtenção de uma solução analítica exata para as integrais presentes na equação (4.67) é árdua caso seja possível. Isto se deve ao fato de ambas integrais possuírem integrandos dependentes do quadrado dos módulos dos campos elétricos do núcleo $E_{r\tau,0-c}^c$ e do halo $E_{r\tau,c-h}^c$, quantidades estas dependentes por sua vez de funções trigonométricas do tipo arco-tangente. Matematicamente, segundo o campo elétrico da equação (4.41), estes integrandos são expressos na região do núcleo por

$$|E_{r\tau,0-c}^c|^2 = \frac{(1-f)^2 R^2}{r_c^4} + \frac{4f(1-f)}{\pi r_c^2} \arctan\left(\frac{R}{\sqrt{r_h^2 - R^2}}\right) + \frac{4f^2}{\pi^2 R^2} \arctan^2\left(\frac{R}{\sqrt{r_h^2 - R^2}}\right) \quad (C.1)$$

e na região do halo por

$$|E_{r\tau,c-h}^c|^2 = \frac{4f^2}{\pi^2 R^2} \arctan^2\left(\frac{R}{\sqrt{r_h^2 - R^2}}\right) + \frac{4f(1-f)}{\pi R^2} \arctan\left(\frac{R}{\sqrt{r_h^2 - R^2}}\right) + \frac{(1-f)^2}{R^2}. \quad (C.2)$$

Os termos que dificultam a integração radial das equações (C.1) e (C.2) residem nas funções arco-tangente. Assim sendo, uma forma de remover esta dificuldade intrínseca é aproximar esta função arco-tangente por alguma expressão preferencialmente algébrica, cuja integração é facilmente assegurada. Em geral, este é um procedimento extensamente empregado no projeto de circuitos de processamento dedicado, haja vista que variados tipos de funções — no caso digital — podem ser implementadas mediante apenas operações aritméticas simples e — no caso analógico — mediante componentes discretos ativos e passivos. Obviamente, ao adotar este procedimento, a acuracidade do cálculo é depreciada, pois se trata de uma aproximação. Entretanto, o erro sempre pode ser minimizado, pouco assim influenciando o resultado final.

Geometricamente, a função arco-tangente nestas expressões é equivalente a

$$\arctan\left(\frac{R}{\sqrt{r_h^2 - R^2}}\right) = \arcsen\left(\frac{R}{r_h}\right). \quad (C.3)$$

Realizada esta constatação, pode-se aplicar uma aproximação à função arco-seno presente no lado direito da equação logo acima. Uma aproximação algébrica possível para a função arco-seno é^b

$$\arcsen\left(\frac{R}{r_h}\right) \approx \frac{3R/r_h}{2 + \sqrt{1 - R^2/r_h^2}}. \quad (C.4)$$

^b**Benammar, M.** Precise, wide-range approximations to arcsine function suitable for analog implementation in sensors and instrumentation applications. *IEEE transactions on circuits and systems*. 2005, Vol. 52, 2.

Na Figura 43 uma comparação gráfica entre a função arco-seno e sua aproximação da equação (C.4) é apresentada. Pode-se observar que tanto a função arco-seno quanto sua aproximação coincidem muito para valores de $R < 0,8r_h$. Mais, nesta região, as curvas são quase lineares. Um distanciamento visível entre as curvas ocorre apenas para coordenadas $R > 0,8r_h$, denotando que a aproximação algébrica torna-se não mais exatamente fidedigna à função arco-seno. A diferença máxima entre as curvas ocorre em $R = r_h$, percentualmente correspondendo a um valor de 4,5%. Considerando que as quantidades de interesse envolvem integrais radiais do quadrado da expressão (C.4), torna-se então também interessante avaliar quantitativamente a diferença envolvendo estas integrais no intervalo $0 < R < r_h$. Integrando radialmente a equação (C.4) e normalizando pelo valor exato $\int_0^{r_h} \arcsen^2(R/r_h) R dR$ obtém-se uma diferença de

$$\frac{\int_0^{r_h} \left[\arcsen^2(R/r_h) - \frac{9R^2/r_h^2}{\left(2 + \sqrt{1 - R^2/r_h^2}\right)^2} \right] R dR}{\int_0^{r_h} \arcsen^2(R/r_h) R dR} \cong 0,0143 \cong 1,4\% \quad (C.5)$$

entre os valores obtidos mediante integração numérica envolvendo a função exata arco-seno e a sua aproximação adotada na equação (C.4). Observe que a equação (C.5) independe do parâmetro r_h em questão. O desvio de 1,4% obtido na equação logo acima é menor que o existente na comparação direta entre a função exata e a aproximada na coordenada $R = r_h$.

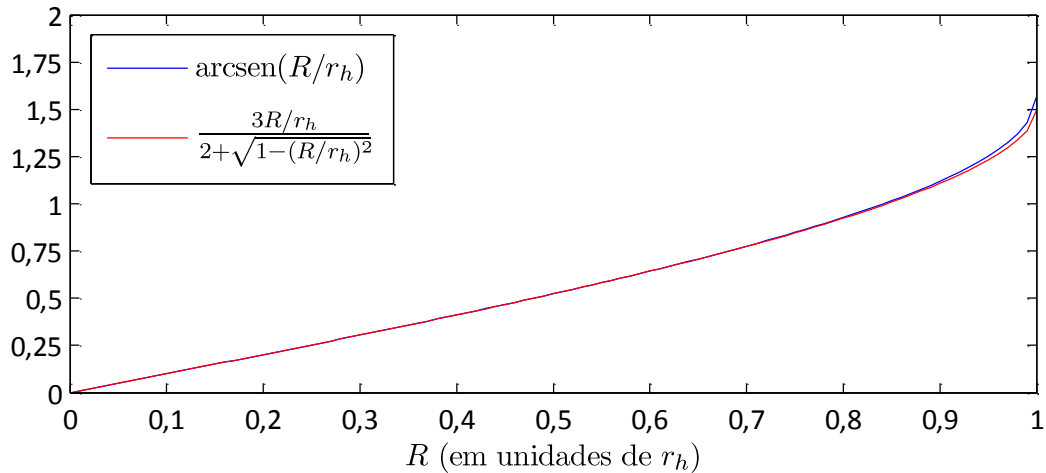


Figura 43: Comparação entre a função arco-seno e sua aproximação adotada para solução analítica das integrais envolvendo os campos elétricos no núcleo $E_{rr,0-c}^c$ e no halo $E_{rr,c-h}^c$ do feixe.

Os integrandos $|E_{rr,0-c}^c|^2$ e $|E_{rr,c-h}^c|^2$ podem então ser diretamente aproximados.

Inserindo a equação (C.4) na equação (C.1)

$$|E_{rr,0-c}^c|^2 \approx \frac{(1-f)^2 R^2}{r_c^4} + \frac{12f(1-f)}{\pi r_c^2 r_h} \frac{R}{2 + \sqrt{1 - R^2/r_h^2}} + \frac{36f^2}{\pi^2 r_h^2} \frac{1}{\left(2 + \sqrt{1 - R^2/r_h^2}\right)^2} \quad (C.6)$$

obtém-se o integrando do núcleo em sua versão aproximada. Procedendo igualmente com o integrando da região do halo, inserindo a equação (C.4) na equação (C.2) obtém-se

$$|E_{r\tau,c-h}^c|^2 = \frac{36f^2}{\pi^2 r_h^2} \frac{1}{\left(2 + \sqrt{1 - R^2/r_h^2}\right)^2} + \frac{12f(1-f)}{\pi r_h R} \frac{1}{2 + \sqrt{1 - R^2/r_h^2}} + \frac{(1-f)^2}{R^2}. \quad (\text{C.7})$$

As equações (C.6) e (C.7) são funções racionais da coordenada radial R , sendo perfeitamente integráveis analiticamente segundo esta última. Assim sendo, inserindo estas equações na expressão (4.67) que conecta a energia total inicial do feixe $E_{\perp}(s=0) = E_{\perp}$ com sua energia total final $E_{\perp}(s \geq \tau) = E_{\perp}$, resolvendo as integrais presentes na expressão resultante e fatorando os termos obtidos segundo o grau da fração f de partículas do halo, diretamente determina-se as expressões analíticas quase-exatas para cada um dos coeficientes A , B e C do polinômio da equação (4.68). Estas expressões já foram apresentadas oportunamente no decorrer do trabalho, mais especificamente na Seção 4.3.1, mediante a equação (4.69) auxiliada pela equação (4.70).

APÊNDICE D — Quantidades de equilíbrio obtidas para os valores de descasamento inicial r_o de interesse

Tabela 1: Comparação entre os resultados providos pelos modelos desenvolvidos na aproximação semicircular e semi-elíptica com os computados através de simulações numéricas autoconsistentes. Os resultados obtidos mediante a solução quase-analítica da aproximação semicircular também são apresentados. Descasamentos analisados pertencem ao intervalo $1,0 \leq r_o \leq 1,5$, com discretização de $\Delta r_o = 0,1$.

		$r_o = 1,0$	$r_o = 1,2$	$r_o = 1,3$	$r_o = 1,4$	$r_o = 1,5$
	r_c	= 1	≅ 1,05	≅ 1,05	≅ 1,10	≅ 1,10
	r_h	= 0	≅ 1,68	≅ 1,75	≅ 1,88	≅ 1,95
	r'_h	= 0	≅ 1,5	≅ 1,55	≅ 1,65	≅ 1,75
Aproximação semicircular Solução numérica	$A(r_c, r_h)$	= 0	≅ -0,294569	≅ -0,314595	≅ -0,375183	≅ -0,379299
	$B(r_c, r_h)$	= 1	≅ -2,283698	≅ -2,617262	≅ -3,334149	≅ -3,707238
	$C(r_o, r_c, r_h)$	= 0	≅ 0,012674	≅ 0,057851	≅ 0,15639	≅ 0,222528
	f	= 0	≅ 0,00566	≅ 0,02204	≅ 0,04666	≅ 0,05966
	r_b	= 1	≅ 1,03474	≅ 1,07037	≅ 1,11179	≅ 1,16376
	ϵ	= 0	≅ 0,27512	≅ 0,40858	≅ 0,54021	≅ 0,69276
Aproximação semicircular Solução analítica quase-exata	$A(r_c, r_h)$	= 0	≅ -0,297147	≅ -0,317171	≅ -0,377793	≅ -0,381910
	$B(r_c, r_h)$	= 1	≅ -2,273592	≅ -2,607387	≅ -3,324011	≅ -3,697099
	$C(r_o, r_c, r_h)$	= 0	≅ 0,012674	≅ 0,057851	≅ 0,156393	≅ 0,222528
	f	= 0	≅ 0,00557	≅ 0,02212	≅ 0,04680	≅ 0,05982
	r_b	= 1	≅ 1,03475	≅ 1,07045	≅ 1,11194	≅ 1,16394
	ϵ	= 0	≅ 0,27515	≅ 0,40883	≅ 0,54067	≅ 0,69327
Aproximação semi-elíptica Solução numérica	$A(r_c, r_h, r'_h)$	= 0	≅ -0,276495	≅ -0,28958	≅ -0,344800	≅ -0,353784
	$B(r_c, r_h, r'_h)$	= 1	≅ -2,186927	≅ -2,49346	≅ -3,173640	≅ -3,559734
	$C(r_o, r_c, r_h, r'_h)$	= 0	≅ 0,023492	≅ 0,05785	≅ 0,156393	≅ 0,222528
	f	= 0	≅ 0,01072	≅ 0,02313	≅ 0,04901	≅ 0,06212
	r_b	= 1	≅ 1,03381	≅ 1,07037	≅ 1,11181	≅ 1,16378
	ϵ	= 0	≅ 0,27111	≅ 0,40857	≅ 0,54026	≅ 0,69280
Simulação numérica	f	= 0	≅ 0,02080	≅ 0,03440	≅ 0,05181	≅ 0,06320
	r_b	= 1	≅ 1,02893	≅ 1,04938	≅ 1,08063	≅ 1,12243
	ϵ	= 0	≅ 0,23535	≅ 0,32675	≅ 0,45312	≅ 0,60383

Tabela 2: Comparação entre os resultados providos pelos modelos desenvolvidos na aproximação semicircular e semi-elíptica com os computados através de simulações numéricas autoconsistentes. Os resultados obtidos mediante a solução quase-analítica da aproximação semicircular também são apresentados. Descasamentos analisados pertencem ao intervalo $1,6 \leq r_o \leq 2,0$, com discretização de $\Delta r_o = 0,1$.

		$r_o = 1,6$	$r_o = 1,7$	$r_o = 1,8$	$r_o = 1,9$	$r_o = 2,0$
	r_c	$\cong 1,10$	$\cong 1,15$	$\cong 1,20$	$\cong 1,20$	$\cong 1,20$
	r_h	$\cong 2,00$	$\cong 2,05$	$\cong 2,13$	$\cong 2,18$	$\cong 2,25$
	r_h'	$\cong 1,85$	$\cong 1,90$	$\cong 2,00$	$\cong 2,10$	$\cong 2,15$
Aproximação semicircular Solução numérica	$A(r_c, r_h)$	$\cong -0,377568$	$\cong -0,363001$	$\cong -0,404318$	$\cong -0,392861$	$\cong -0,402654$
	$B(r_c, r_h)$	$\cong -3,974192$	$\cong -4,216036$	$\cong -4,805143$	$\cong -5,046202$	$\cong -5,505915$
	$C(r_o, r_c, r_h)$	$\cong 0,324309$	$\cong 0,404950$	$\cong 0,640634$	$\cong 0,785696$	$\cong 0,985397$
	f	$\cong 0,08098$	$\cong 0,09526$	$\cong 0,13185$	$\cong 0,15385$	$\cong 0,17668$
	r_b	$\cong 1,21944$	$\cong 1,28017$	$\cong 1,33770$	$\cong 1,40211$	$\cong 1,46636$
	ϵ	$\cong 0,85104$	$\cong 1,02322$	$\cong 1,18855$	$\cong 1,37803$	$\cong 1,57264$
Aproximação semicircular Solução analítica quase-exata	$A(r_c, r_h)$	$\cong -0,380178$	$\cong -0,365596$	$\cong -0,406936$	$\cong -0,395465$	$\cong -0,405272$
	$B(r_c, r_h)$	$\cong -3,964053$	$\cong -4,206142$	$\cong -4,794997$	$\cong -5,036299$	$\cong -5,495769$
	$C(r_o, r_c, r_h)$	$\cong 0,324308$	$\cong 0,404950$	$\cong 0,640634$	$\cong 0,785696$	$\cong 0,985397$
	f	$\cong 0,08118$	$\cong 0,09548$	$\cong 0,13212$	$\cong 0,15414$	$\cong 0,17699$
	r_b	$\cong 1,21967$	$\cong 1,28041$	$\cong 1,33801$	$\cong 1,40245$	$\cong 1,46672$
	ϵ	$\cong 0,85168$	$\cong 1,02390$	$\cong 1,18946$	$\cong 1,37902$	$\cong 1,573773$
Aproximação semi-elíptica Solução numérica	$A(r_c, r_h, r_h')$	$\cong -0,359118$	$\cong -0,345476$	$\cong -0,388094$	$\cong -0,388299$	$\cong -0,391348$
	$B(r_c, r_h, r_h')$	$\cong -3,860055$	$\cong -4,096857$	$\cong -4,691961$	$\cong -5,012286$	$\cong -5,415561$
	$C(r_o, r_c, r_h, r_h')$	$\cong 0,324308$	$\cong 0,404950$	$\cong 0,640634$	$\cong 0,785696$	$\cong 0,985397$
	f	$\cong 0,08336$	$\cong 0,09803$	$\cong 0,13503$	$\cong 0,15489$	$\cong 0,17962$
	r_b	$\cong 1,21946$	$\cong 1,28018$	$\cong 1,33772$	$\cong 1,40212$	$\cong 1,46638$
	ϵ	$\cong 0,85108$	$\cong 1,02323$	$\cong 1,18862$	$\cong 1,37804$	$\cong 1,57270$
Simulação numérica	f	$\cong 0,08353$	$\cong 0,10040$	$\cong 0,13286$	$\cong 0,15450$	$\cong 0,17792$
	r_b	$\cong 1,16717$	$\cong 1,22081$	$\cong 1,28389$	$\cong 1,34461$	$\cong 1,40507$
	ϵ	$\cong 0,76491$	$\cong 0,92421$	$\cong 1,12057$	$\cong 1,29849$	$\cong 1,50450$

APÊNDICE E — Densidades de equilíbrio obtidas para os valores de descasamento inicial r_o de interesse

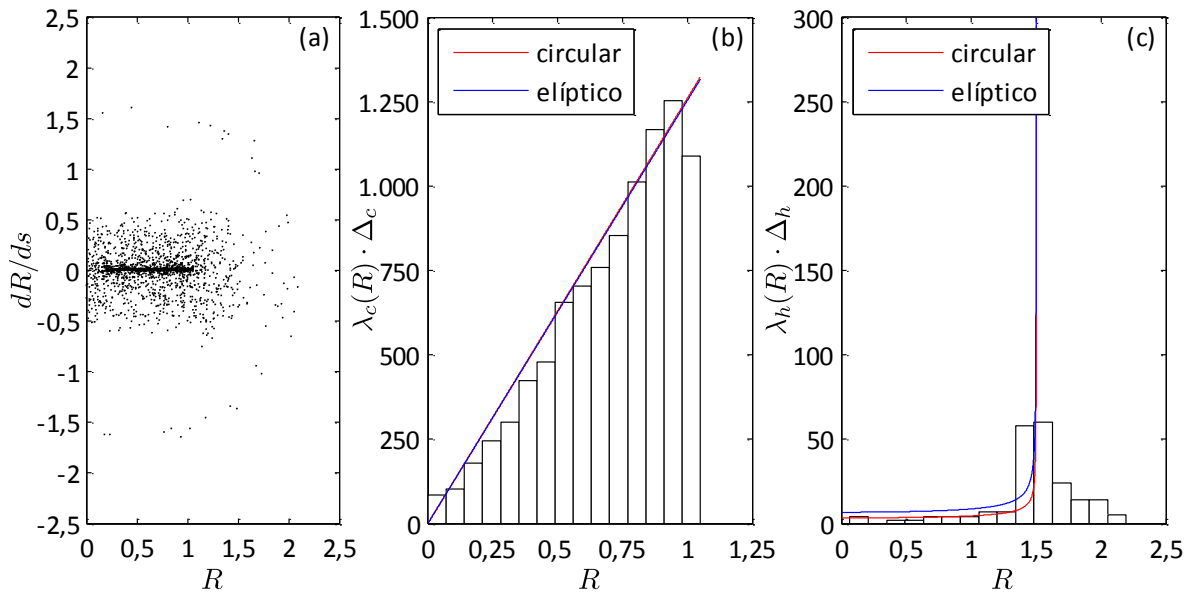


Figura 44: Espaço de fase capturado das simulações numéricas autoconsistentes em $s = 1597,4$ para (a) $N_b = 10.000$ partículas e $r_o = 1,2$. Os histogramas das partículas que compõem o núcleo e o halo do feixe computados mediante as simulações numéricas autoconsistentes são comparados com os modelos desenvolvidos para suas densidades respectivamente em (b) com $\Delta_c \cong 0,0873$ e em (c) com $\Delta_h \cong 0,1418$.

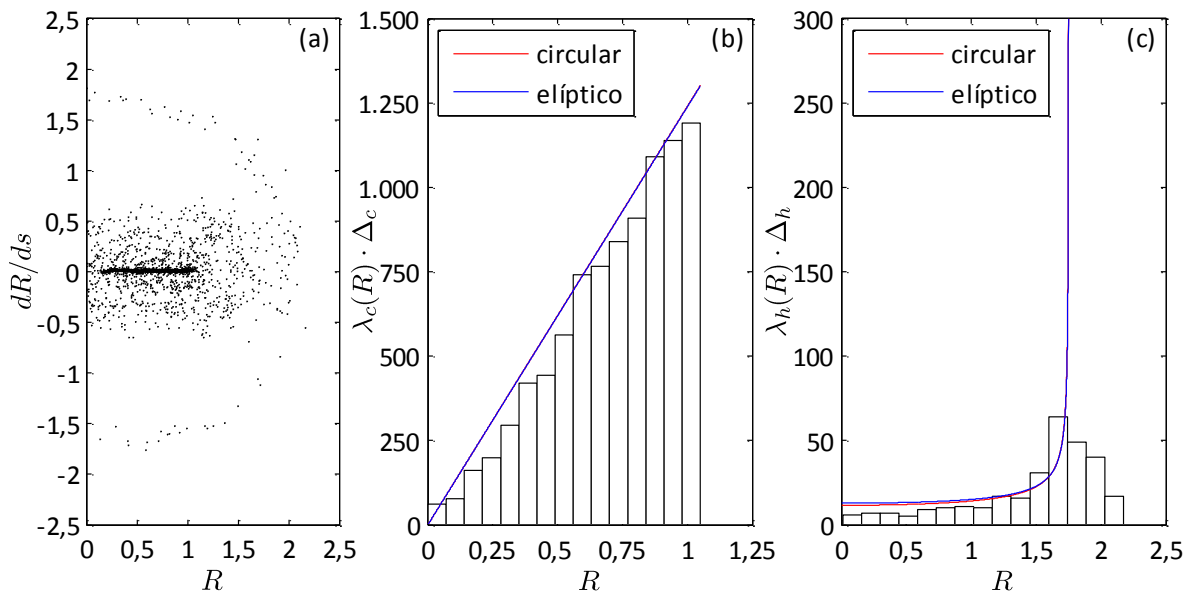


Figura 45: Espaço de fase capturado das simulações numéricas autoconsistentes em $s = 1596,2$ para (a) $N_b = 10.000$ partículas e $r_o = 1,3$. Os histogramas das partículas que compõem o núcleo e o halo do feixe computados mediante as simulações numéricas autoconsistentes são comparados com os modelos desenvolvidos para suas densidades respectivamente em (b) com $\Delta_c \cong 0,0699$ e em (c) com $\Delta_h \cong 0,1441$.

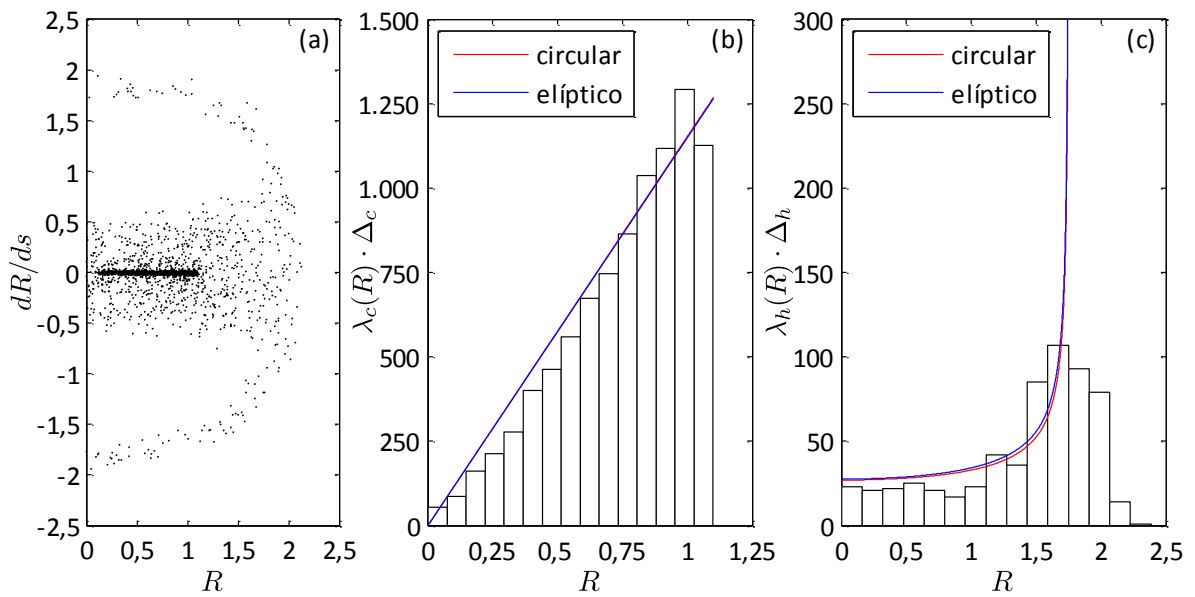


Figura 46: Espaço de fase capturado das simulações numéricas autoconsistentes em $s = 797,4$ para (a) $N_b = 10.000$ partículas e $r_o = 1,4$. Os histogramas das partículas que compõem o núcleo e o halo do feixe computados mediante as simulações numéricas autoconsistentes são comparados com os modelos desenvolvidos para suas densidades respectivamente em (b) com $\Delta_c \cong 0,0731$ e em (c) com $\Delta_h \cong 0,1589$.

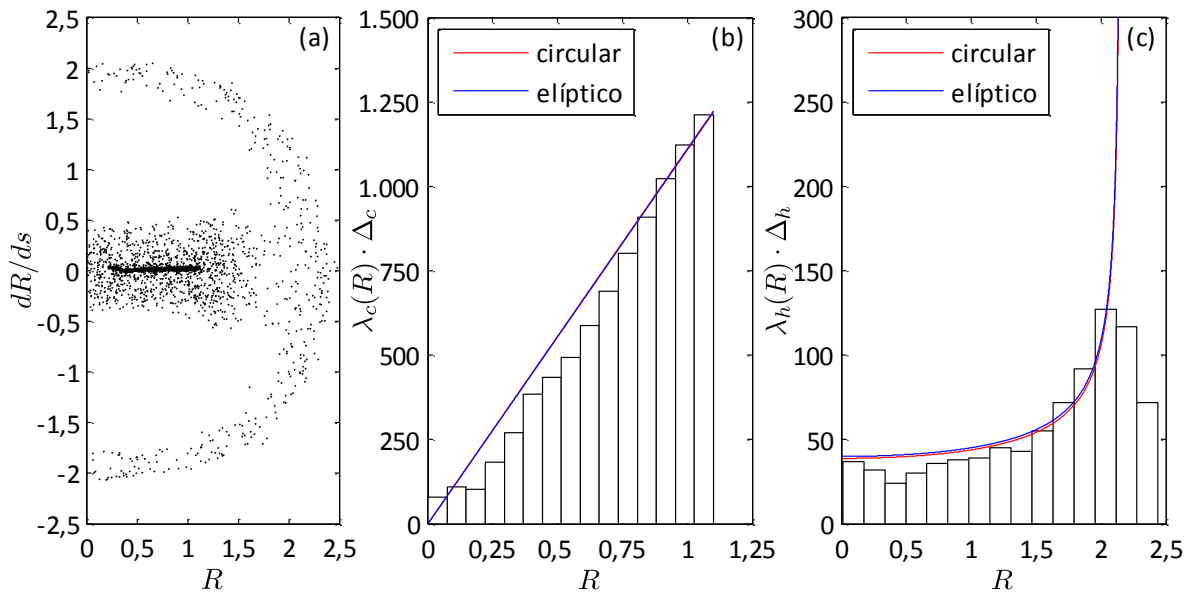


Figura 47: Espaço de fase capturado das simulações numéricas autoconsistentes em $s = 796,8$ para (a) $N_b = 10.000$ partículas e $r_o = 1,6$. Os histogramas das partículas que compõem o núcleo e o halo do feixe computados mediante as simulações numéricas autoconsistentes são comparados com os modelos desenvolvidos para suas densidades respectivamente em (b) com $\Delta_c \cong 0,0732$ e em (c) com $\Delta_h \cong 0,1653$.

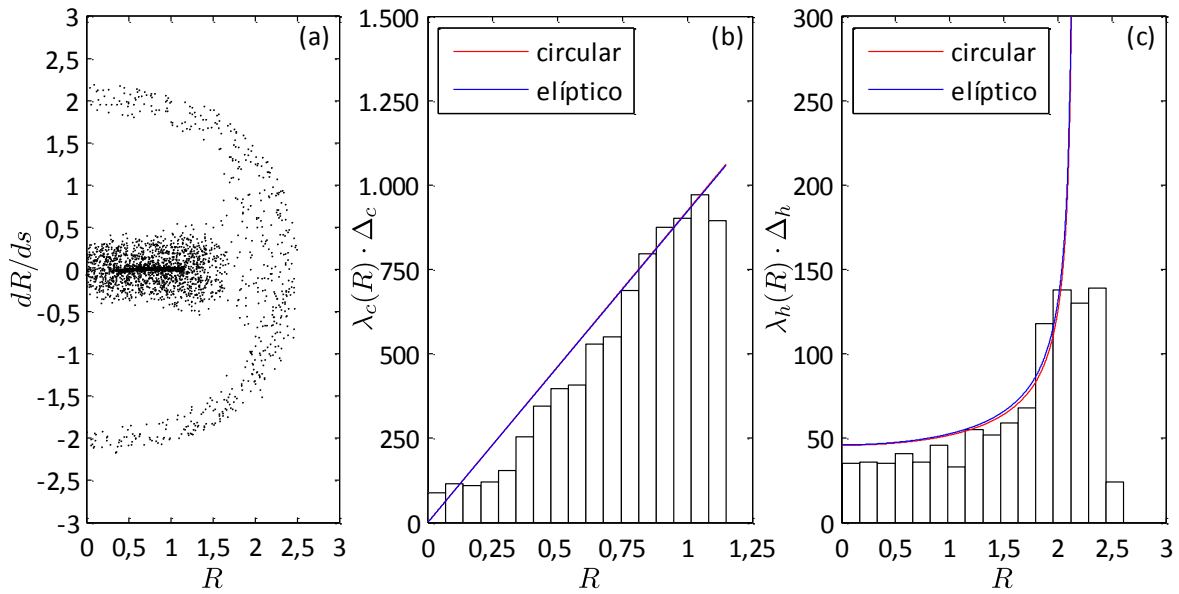


Figura 48: Espaço de fase capturado das simulações numéricas autoconsistentes em $s = 798$ para (a) $N_b = 10.000$ partículas e $r_o = 1,7$. Os histogramas das partículas que compõem o núcleo e o halo do feixe computados mediante as simulações numéricas autoconsistentes são comparados com os modelos desenvolvidos para suas densidades respectivamente em (b) com $\Delta_c \cong 0,0675$ e em (c) com $\Delta_h \cong 0,1625$.

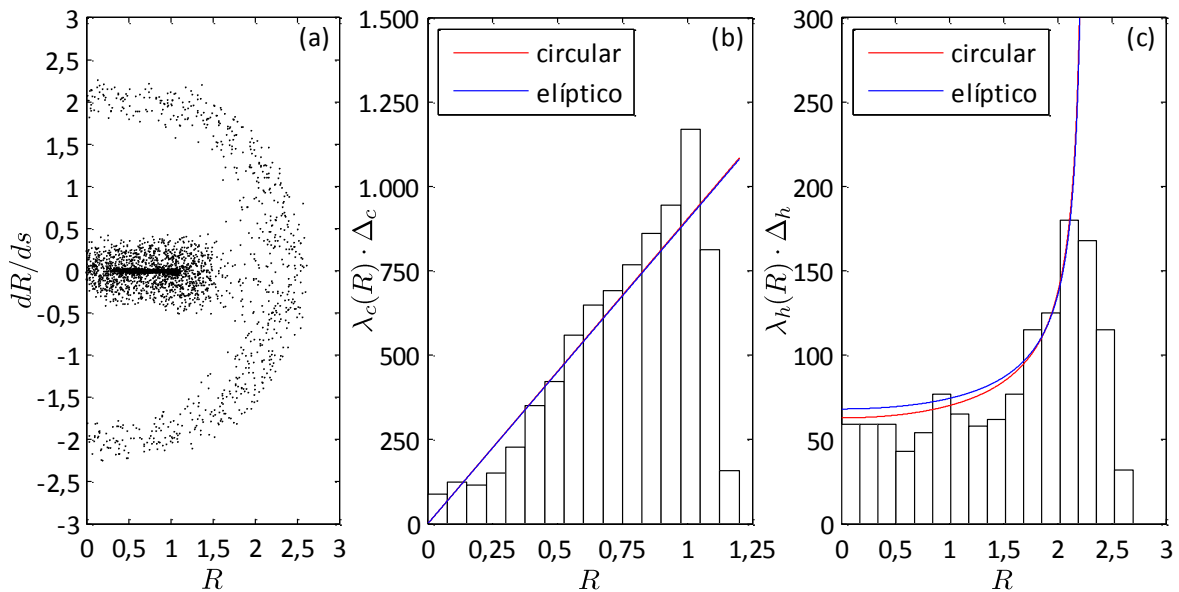


Figura 49: Espaço de fase capturado das simulações numéricas autoconsistentes em $s = 781,8$ para (a) $N_b = 10.000$ partículas e $r_o = 1,8$. Os histogramas das partículas que compõem o núcleo e o halo do feixe computados mediante as simulações numéricas autoconsistentes são comparados com os modelos desenvolvidos para suas densidades respectivamente em (b) com $\Delta_c \cong 0,0799$ e em (c) com $\Delta_h \cong 0,1683$.

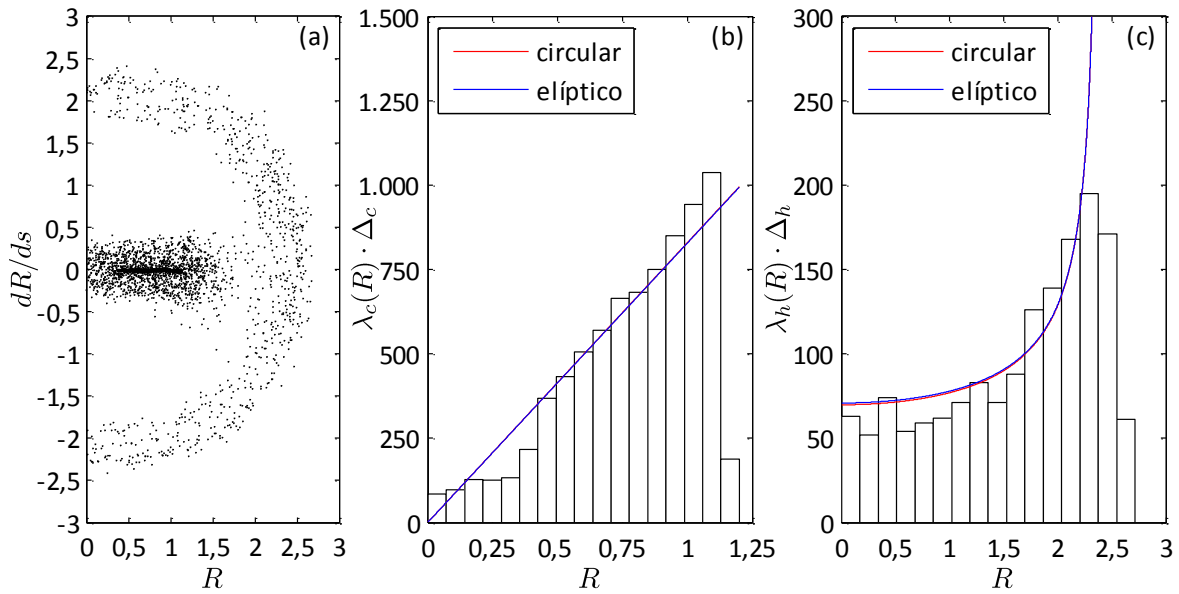


Figura 50: Espaço de fase capturado das simulações numéricas autoconsistentes em $s = 795,6$ para (a) $N_b = 10.000$ partículas e $r_o = 1,9$. Os histogramas das partículas que compõem o núcleo e o halo do feixe computados mediante as simulações numéricas autoconsistentes são comparados com os modelos desenvolvidos para suas densidades respectivamente em (b) com $\Delta_c \cong 0,0705$ e em (c) com $\Delta_h \cong 0,1696$.

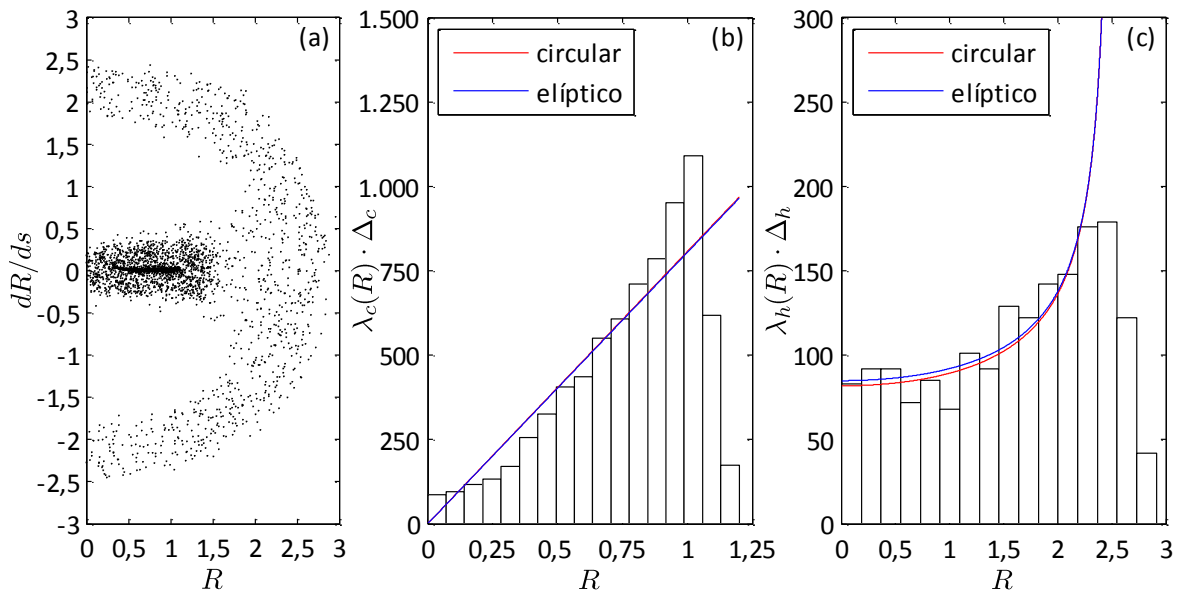


Figura 51: Espaço de fase capturado das simulações numéricas autoconsistentes em $s = 774,2$ para (a) $N_b = 10.000$ partículas e $r_o = 2,0$. Os histogramas das partículas que compõem o núcleo e o halo do feixe computados mediante as simulações numéricas autoconsistentes são comparados com os modelos desenvolvidos para suas densidades respectivamente em (b) com $\Delta_c \cong 0,0705$ e em (c) com $\Delta_h \cong 0,1818$.

APÊNDICE F — Escalas de decaimento obtidas para os valores de descasamento inicial r_o de interesse

Tabela 3: Parâmetros b e c determinados para a descrição dinâmica da fração de partículas f e as escalas de tempo τ obtidas como função do descasamento inicial r_o . Parâmetros obtidos com 95% de confiança em um pequeno intervalo de variabilidade.

	b	c	SQE	R-quadrado	$\tau = \tau_\eta + \tau_\lambda$	τ_η	τ_λ
$r_o = 1,0$	= 750	= 0	= 0	= 1	$\rightarrow \infty$	$\rightarrow \infty$	= 0
$r_o = 1,2$	Não computado para este descasamento devido às restrições computacionais.						
$r_o = 1,3$	= 750	= 0,01089	$\cong 0,0050$	$\cong 0,8493$	$\cong 809,80$	$\cong 211,44$	$\cong 598,36$
$r_o = 1,4$	= 750	= 0,01665	$\cong 0,0063$	$\cong 0,9489$	$\cong 529,65$	$\cong 138,29$	$\cong 391,36$
$r_o = 1,5$	= 750	= 0,02198	$\cong 0,0019$	$\cong 0,9873$	$\cong 401,21$	$\cong 104,75$	$\cong 296,46$
$r_o = 1,6$	= 750	= 0,03212	$\cong 0,0014$	$\cong 0,9927$	$\cong 274,55$	$\cong 71,68$	$\cong 202,87$
$r_o = 1,7$	= 750	= 0,04142	$\cong 0,0034$	$\cong 0,9848$	$\cong 213,01$	$\cong 55,59$	$\cong 157,32$
$r_o = 1,8$	= 750	= 0,05244	$\cong 0,0011$	$\cong 0,9969$	$\cong 168,16$	$\cong 43,90$	$\cong 124,26$
$r_o = 1,9$	= 750	= 0,06613	$\cong 0,0119$	$\cong 0,9664$	$\cong 133,35$	$\cong 34,81$	$\cong 98,53$
$r_o = 2,0$	= 750	= 0,07516	$\cong 0,0090$	$\cong 0,9795$	$\cong 117,33$	$\cong 30,63$	$\cong 86,69$

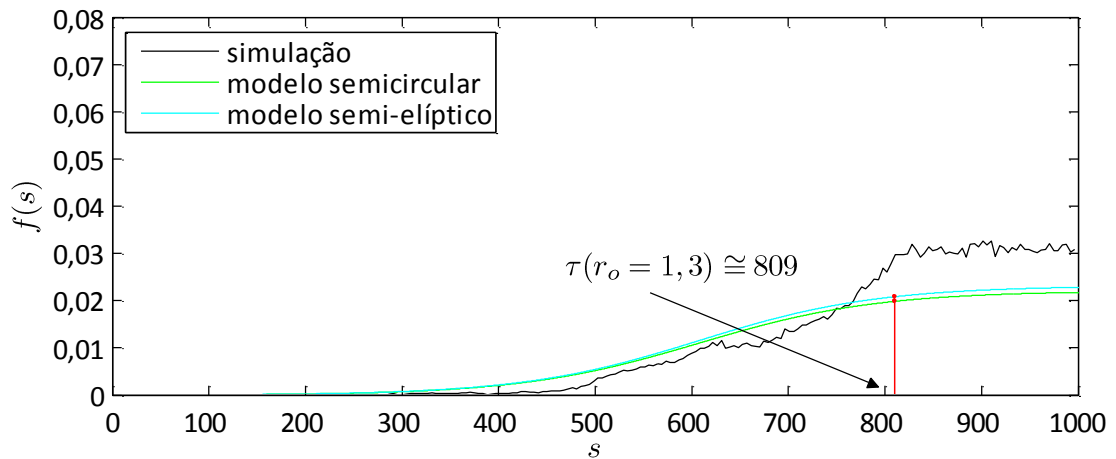


Figura 52: Comparação entre o resultado obtido através das simulações numéricas autoconsistentes e o propiciado pelo modelo analítico proposto tanto na aproximação semicircular como na semi-elíptica. Resultados referentes a um descasamento inicial de $r_o = 1,3$.

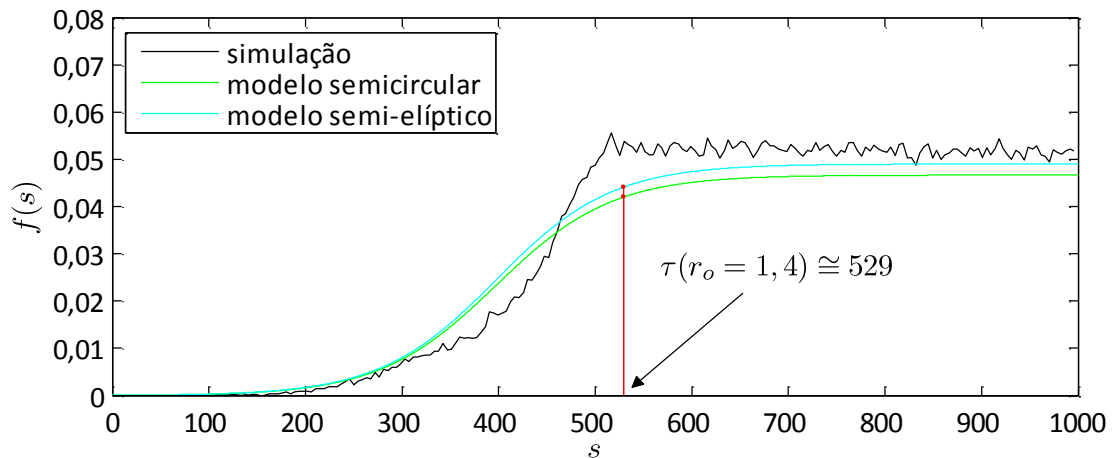


Figura 53: Comparação entre o resultado obtido através das simulações numéricas autoconsistentes e o propiciado pelo modelo analítico proposto tanto na aproximação semicircular como na semi-elíptica. Resultados referentes a um descasamento inicial de $r_o = 1,4$.

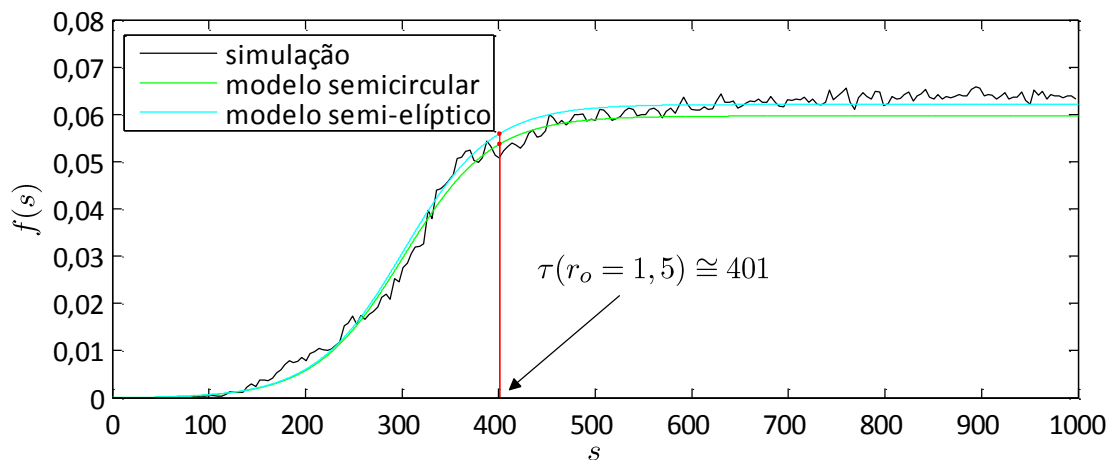


Figura 54: Comparação entre o resultado obtido através das simulações numéricas autoconsistentes e o propiciado pelo modelo analítico proposto tanto na aproximação semicircular como na semi-elíptica. Resultados referentes a um descasamento inicial de $r_o = 1,5$.

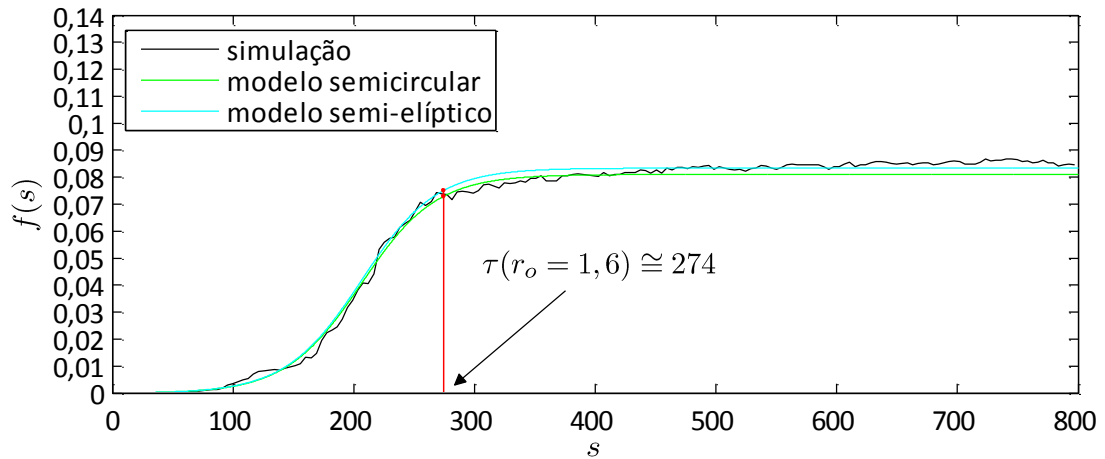


Figura 55: Comparação entre o resultado obtido através das simulações numéricas autoconsistentes e o propiciado pelo modelo analítico proposto tanto na aproximação semicircular como na semi-elíptica. Resultados referentes a um descasamento inicial de $r_0 = 1,6$.

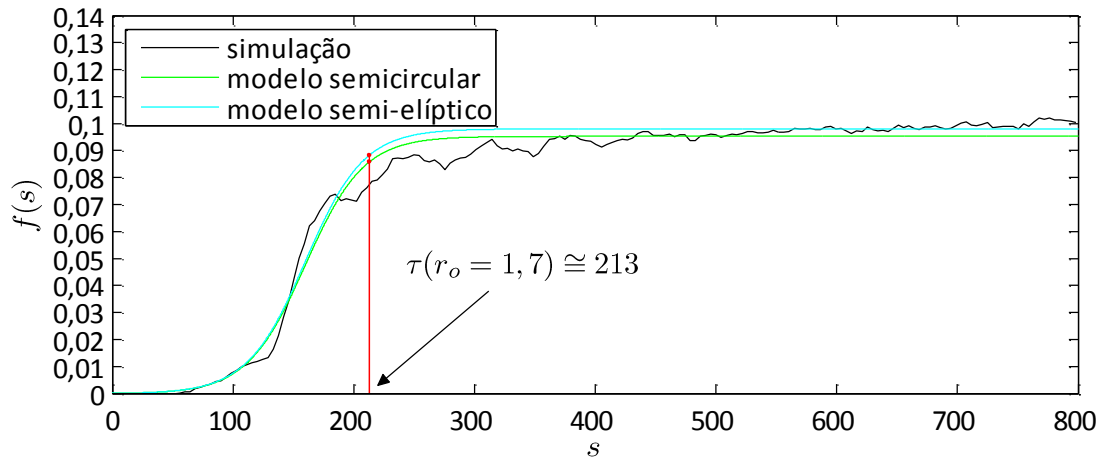


Figura 56: Comparação entre o resultado obtido através das simulações numéricas autoconsistentes e o propiciado pelo modelo analítico proposto tanto na aproximação semicircular como na semi-elíptica. Resultados referentes a um descasamento inicial de $r_0 = 1,7$.

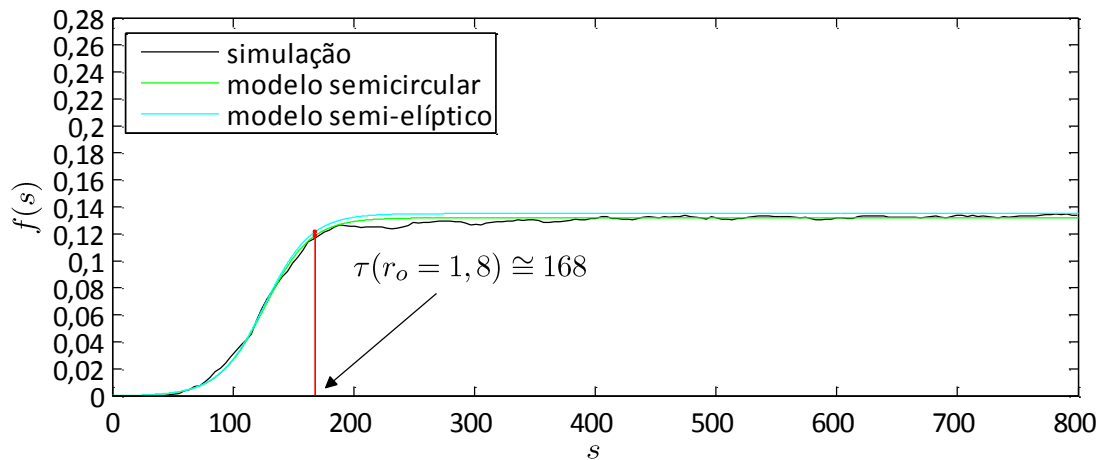


Figura 57: Comparação entre o resultado obtido através das simulações numéricas autoconsistentes e o propiciado pelo modelo analítico proposto tanto na aproximação semicircular como na semi-elíptica. Resultados referentes a um descasamento inicial de $r_0 = 1,8$.

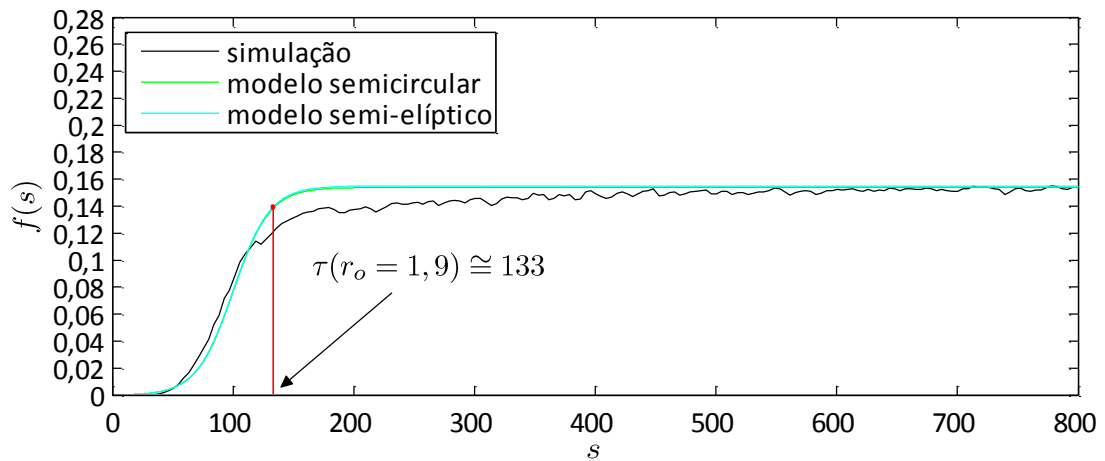


Figura 58: Comparação entre o resultado obtido através das simulações numéricas autoconsistentes e o propiciado pelo modelo analítico proposto tanto na aproximação semicircular como na semi-elíptica. Resultados referentes a um descasamento inicial de $r_o = 1,9$.

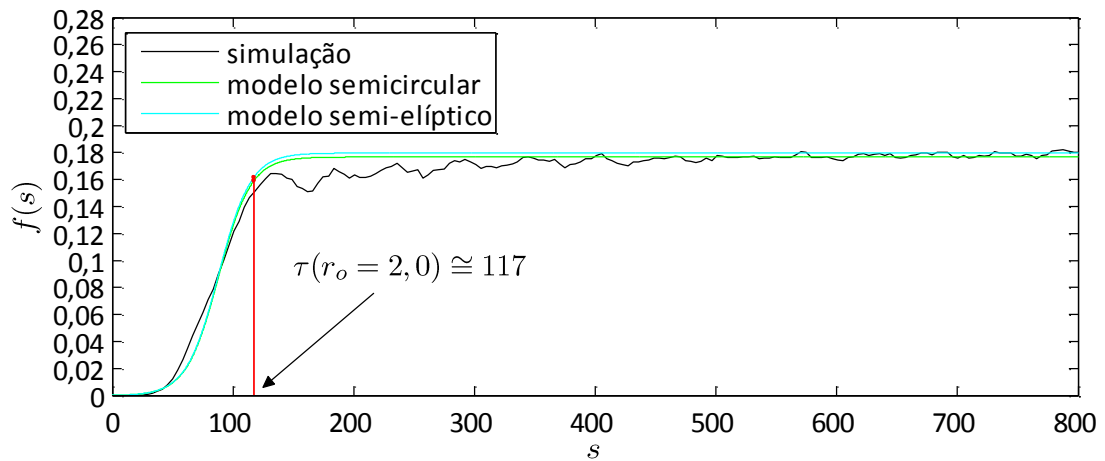


Figura 59: Comparação entre o resultado obtido através das simulações numéricas autoconsistentes e o propiciado pelo modelo analítico proposto tanto na aproximação semicircular como na semi-elíptica. Resultados referentes a um descasamento inicial de $r_o = 2,0$.

APÊNDICE G— Quantidades de equilíbrio obtidas para valores de magnitude da não-homogeneidade η de interesse

Tabela 4: Comparação entre os resultados providos pelo modelo analítico exato desenvolvido e os computados através de simulações numéricas autoconsistentes. Magnitudes da não-homogeneidade analisadas pertencem ao intervalo $0 \leq \eta \leq 1$ com discretização de $\Delta\eta = 0,1$.

		$\eta = 0$	$\eta = 0,2$	$\eta = 0,3$	$\eta = 0,4$	$\eta = 0,5$
	r_c	= 1	= 1	= 1	= 1	= 1
	r_m	= 1	$\cong 1,3$	$\cong 1,3$	$\cong 1,3$	$\cong 1,3$
Solução analítica exata	$D(r_c, r_m)$	= 1/24	$\cong 0,019002$	$\cong 0,019002$	$\cong 0,019002$	$\cong 0,019002$
	$E(r_c, r_m)$	= -1/12	$\cong 0,038148$	$\cong 0,038148$	$\cong 0,019002$	$\cong 0,019002$
	$F(r_c, \eta)$	= 0	$\cong -0,000833$	$\cong -0,001875$	$\cong -0,003333$	$\cong -0,005208$
	f	= 0	$\cong 0,02161$	$\cong 0,04800$	$\cong 0,08387$	$\cong 0,12832$
	R_b	= $1/\sqrt{2}$	$\cong 0,70807$	$\cong 0,70925$	$\cong 0,71085$	$\cong 0,71283$
	ϵ	= 0	$\cong 0,05239$	$\cong 0,07821$	$\cong 0,10361$	$\cong 0,12852$
Simulação numérica	f	= 0	$\cong 0,02630$	$\cong 0,04980$	$\cong 0,08490$	$\cong 0,12440$
	R_b	= $1/\sqrt{2}$	$\cong 0,71283$	$\cong 0,72113$	$\cong 0,73364$	$\cong 0,75065$
	ϵ	= 0	$\cong 0,05475$	$\cong 0,07912$	$\cong 0,09961$	$\cong 0,12371$
		$\eta = 0,6$	$\eta = 0,7$	$\eta = 0,8$	$\eta = 0,9$	$\eta = 1,0$
	r_c	= 1	= 1	= 1	= 1	= 1
	r_m	$\cong 1,3$	$\cong 1,3$	$\cong 1,3$	$\cong 1,3$	$\cong 1,3$
Solução analítica exata	$D(r_c, r_m)$	$\cong 0,018919$	$\cong 0,019002$	$\cong 0,019002$	$\cong 0,019002$	$\cong 0,019002$
	$E(r_c, r_m)$	$\cong 0,043100$	$\cong 0,038148$	$\cong 0,038148$	$\cong 0,038148$	$\cong 0,038148$
	$F(r_c, \eta)$	$\cong -0,00750$	$\cong -0,010208$	$\cong -0,013333$	$\cong -0,016875$	= -1/48
	f	$\cong 0,18039$	$\cong 0,23911$	$\cong 0,30359$	$\cong 0,37303$	$\cong 0,44671$
	R_b	$\cong 0,71513$	$\cong 0,71773$	$\cong 0,72057$	$\cong 0,72361$	$\cong 0,72683$
	ϵ	$\cong 0,15287$	$\cong 0,17664$	$\cong 0,19983$	$\cong 0,22244$	$\cong 0,24450$
Simulação numérica	f	$\cong 0,17010$	$\cong 0,22200$	$\cong 0,28090$	$\cong 0,34700$	$\cong 0,40110$
	R_b	$\cong 0,76578$	$\cong 0,77900$	$\cong 0,79441$	$\cong 0,80522$	$\cong 0,81434$
	ϵ	$\cong 0,14447$	$\cong 0,16280$	$\cong 0,18314$	$\cong 0,20488$	$\cong 0,22734$

APÊNDICE H— Densidades de equilíbrio obtidas para valores de magnitude da não-homogeneidade η de interesse

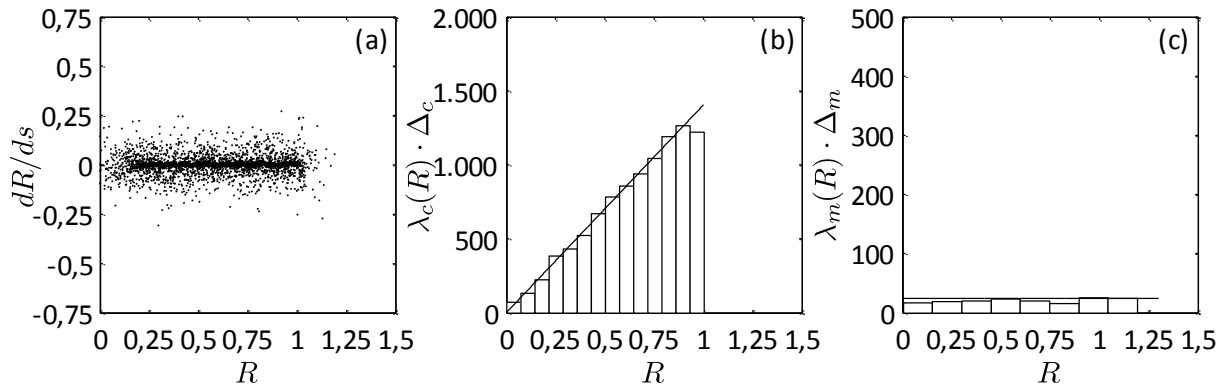


Figura 60: Espaço de fase capturado das simulações numéricas autoconsistentes em $s = 11997,41$ para (a) $N_b = 10.000$ partículas e $\eta = 0,2$. Os histogramas das partículas do núcleo e do halo do feixe providos pelas simulações numéricas autoconsistentes são respectivamente comparados com os modelos desenvolvidos para suas densidades em (b) com $\Delta_c \cong 0,0717$ e em (c) com $\Delta_m \cong 0,1485$.

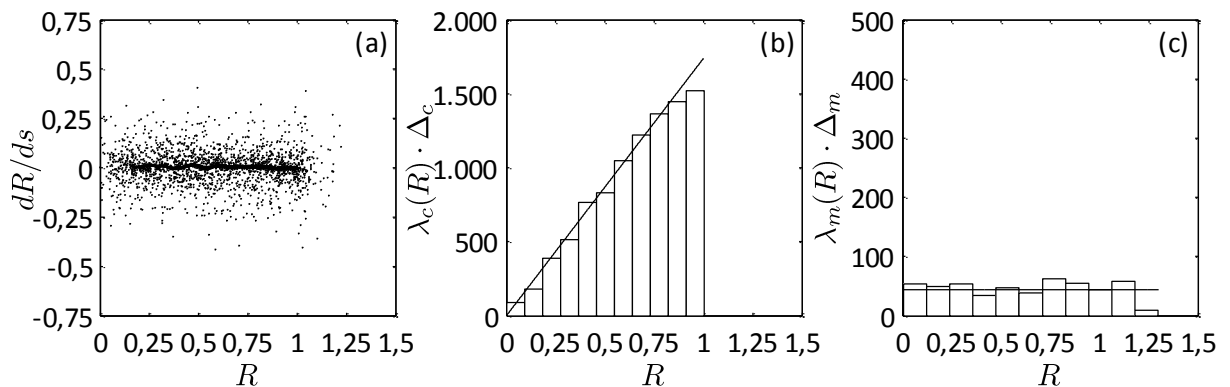


Figura 61: Espaço de fase capturado das simulações numéricas autoconsistentes em $s = 3001,4$ para (a) $N_b = 10.000$ partículas e $\eta = 0,3$. Os histogramas das partículas do núcleo e do halo do feixe providos pelas simulações numéricas autoconsistentes são respectivamente comparados com os modelos desenvolvidos para suas densidades em (b) com $\Delta_c \cong 0,0913$ e em (c) com $\Delta_m \cong 0,1176$.

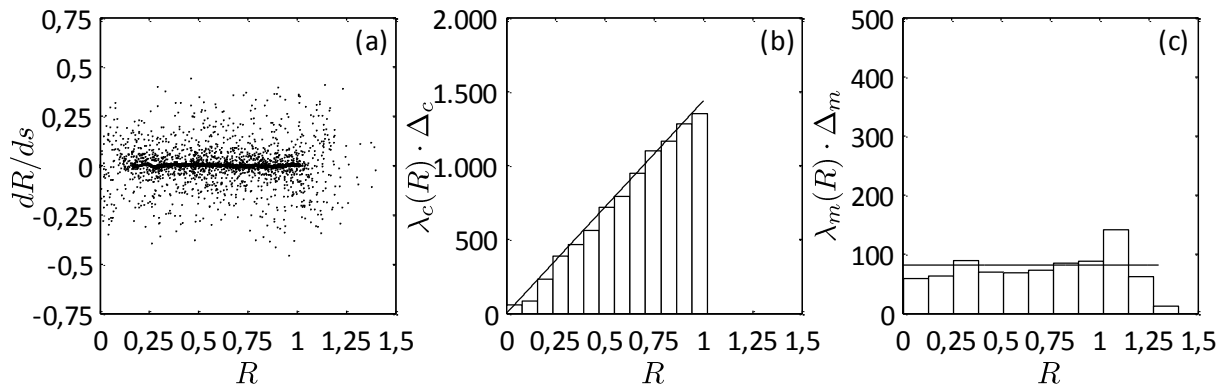


Figura 62: Espaço de fase capturado das simulações numéricas autoconsistentes em $s = 1595,4$ para (a) $N_b = 10.000$ partículas e $\eta = 0,4$. Os histogramas das partículas do núcleo e do halo do feixe providos pelas simulações numéricas autoconsistentes são respectivamente comparados com os modelos desenvolvidos para suas densidades em (b) com $\Delta_c \cong 0,0784$ e em (c) com $\Delta_m \cong 0,1269$.

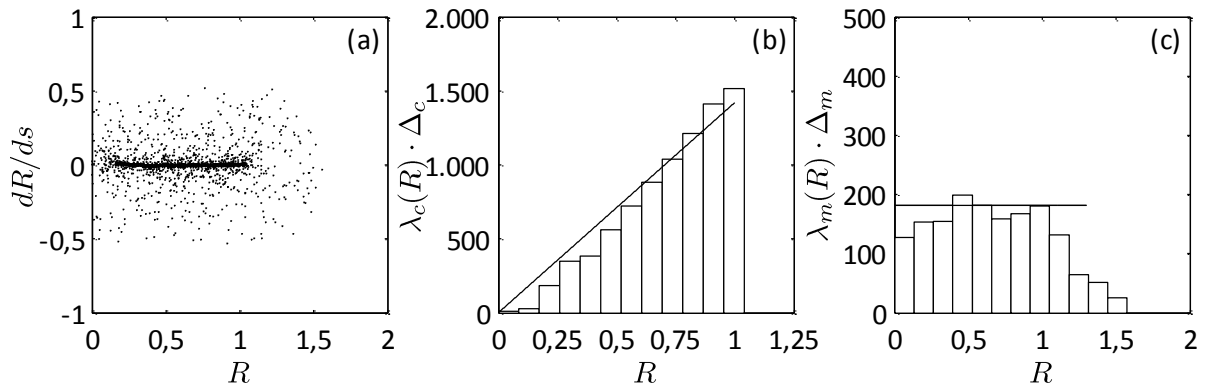


Figura 63: Espaço de fase capturado das simulações numéricas autoconsistentes em $s = 798,2$ para (a) $N_b = 10.000$ partículas e $\eta = 0,6$. Os histogramas das partículas do núcleo e do halo do feixe providos pelas simulações numéricas autoconsistentes são respectivamente comparados com os modelos desenvolvidos para suas densidades em (b) com $\Delta_c \cong 0,0866$ e em (c) com $\Delta_m \cong 0,1310$.

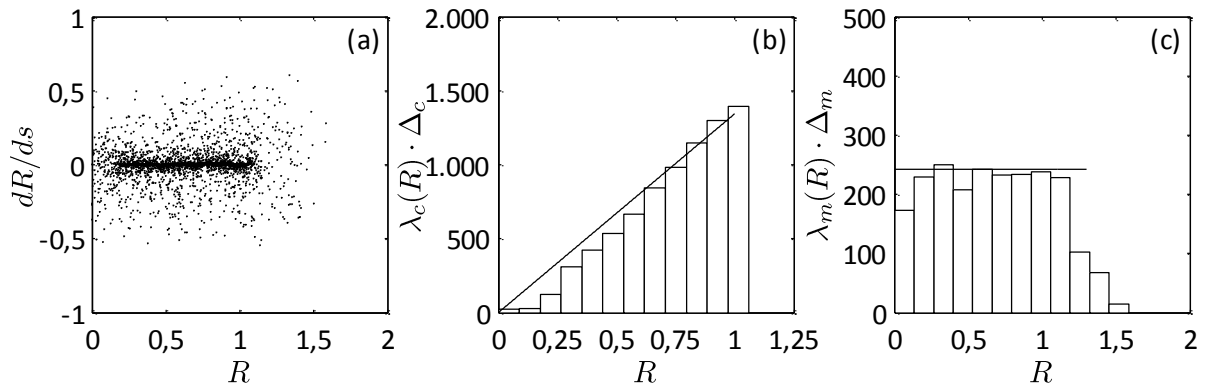


Figura 64: Espaço de fase capturado das simulações numéricas autoconsistentes em $s = 796,13$ para (a) $N_b = 10.000$ partículas e $\eta = 0,7$. Os histogramas das partículas do núcleo e do halo do feixe providos pelas simulações numéricas autoconsistentes são respectivamente comparados com os modelos desenvolvidos para suas densidades em (b) com $\Delta_c \cong 0,0883$ e em (c) com $\Delta_m \cong 0,1319$.

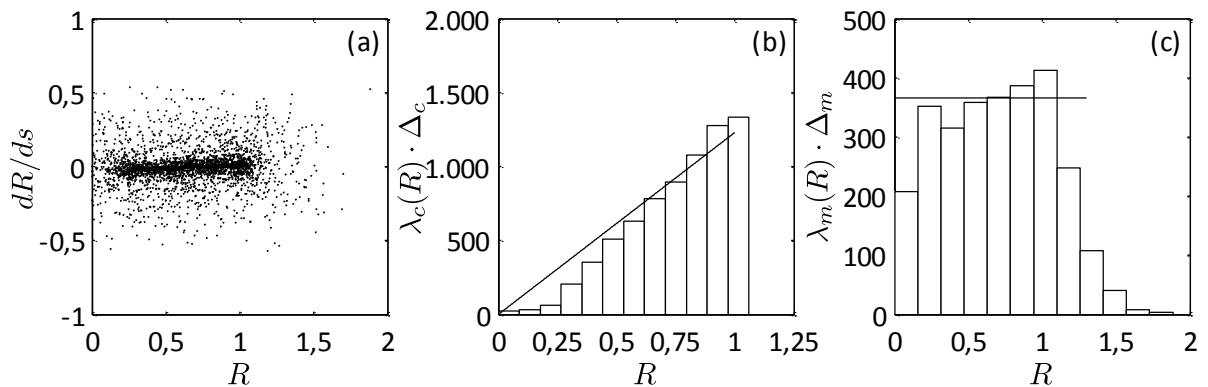


Figura 65: Espaço de fase capturado das simulações numéricas autoconsistentes em $s = 798,57$ para (a) $N_b = 10.000$ partículas e $\eta = 0,8$. Os histogramas das partículas do núcleo e do halo do feixe providos pelas simulações numéricas autoconsistentes são respectivamente comparados com os modelos desenvolvidos para suas densidades em (b) com $\Delta_c \cong 0,0882$ e em (c) com $\Delta_m \cong 0,1569$.

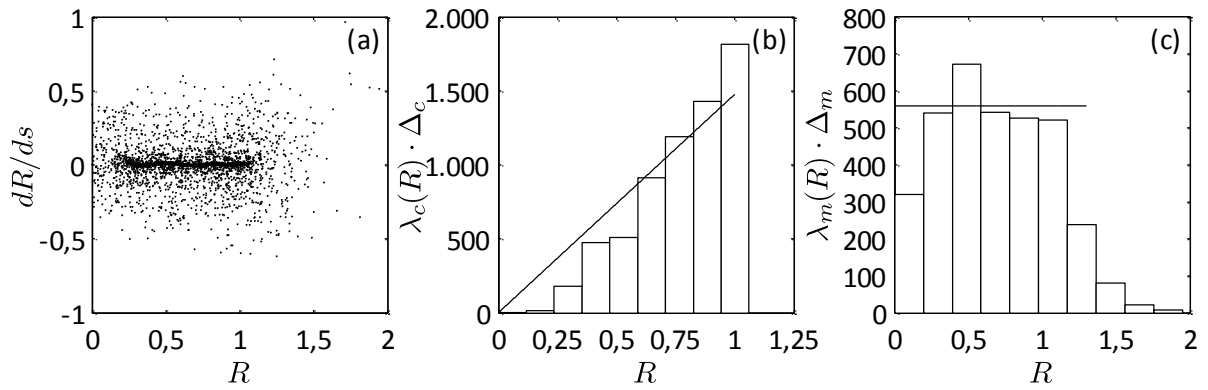


Figura 66: Espaço de fase capturado das simulações numéricas autoconsistentes em $s = 795,99$ para (a) $N_b = 10.000$ partículas e $\eta = 0,9$. Os histogramas das partículas do núcleo e do halo do feixe providos pelas simulações numéricas autoconsistentes são respectivamente comparados com os modelos desenvolvidos para suas densidades em (b) com $\Delta_c \cong 0,1177$ e em (c) com $\Delta_m \cong 0,1948$.

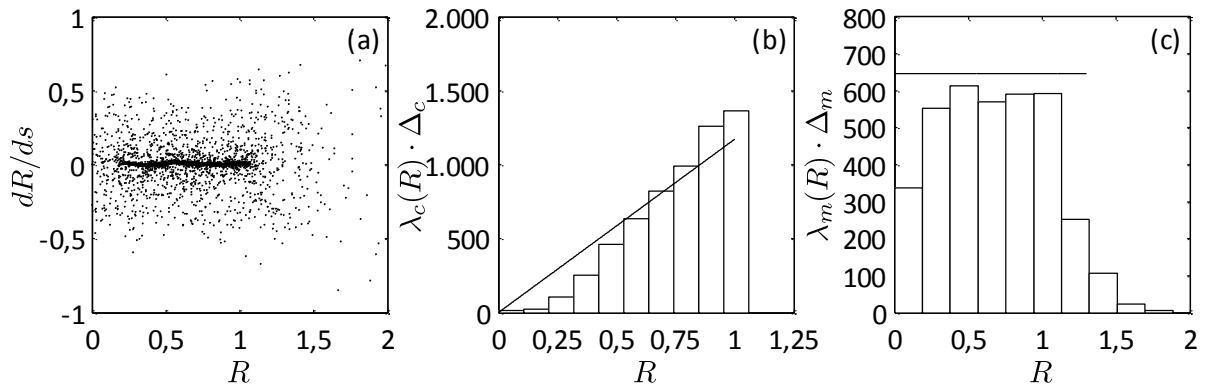


Figura 67: Espaço de fase capturado das simulações numéricas autoconsistentes em $s = 798,11$ para (a) $N_b = 10.000$ partículas e $\eta = 1,0$. Os histogramas das partículas do núcleo e do halo do feixe providos pelas simulações numéricas autoconsistentes são respectivamente comparados com os modelos desenvolvidos para suas densidades em (b) com $\Delta_c \cong 0,1049$ e em (c) com $\Delta_m \cong 0,1734$.

APÊNDICE I — Dinâmica do raio RMS R_b e da emitância ϵ durante o estado inicial não-estacionário para valores de magnitude da não-homogeneidade η de interesse

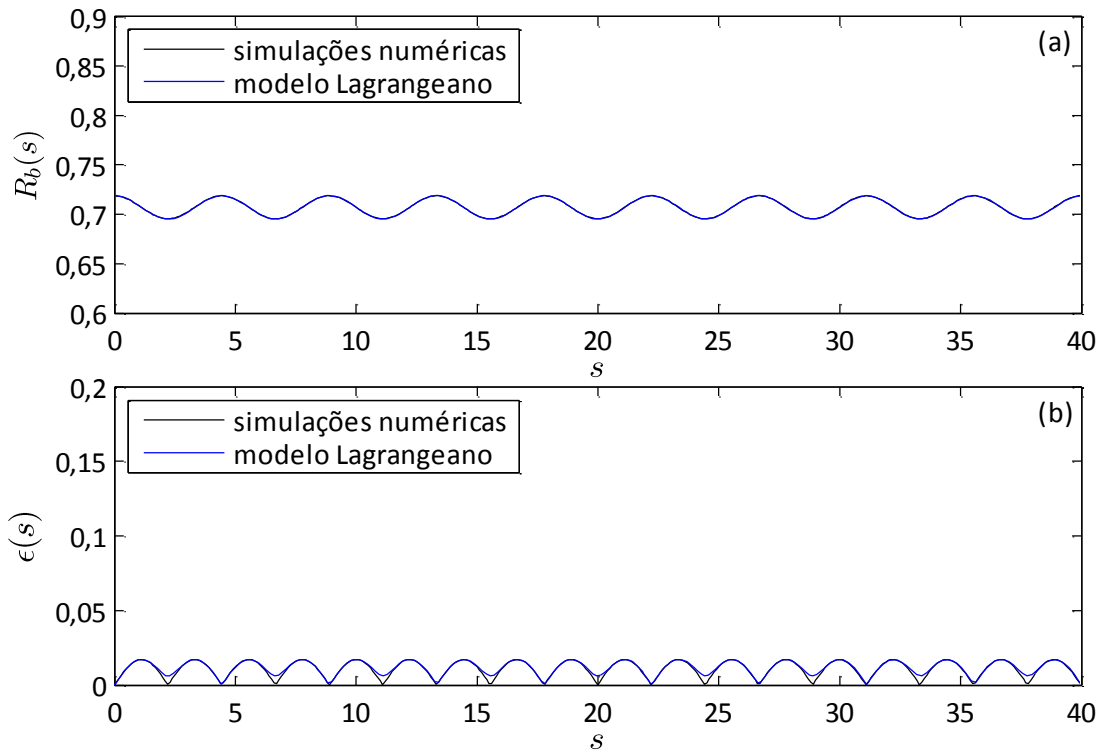


Figura 68: Comparação no estado inicial não-estacionário do feixe entre os resultados obtidos mediante simulações numéricas autoconsistentes e os preditos pelo modelo Lagrangeano desenvolvido. Consta em (a) o raio RMS R_b do feixe e em (b) a sua emitância ϵ . Feixe composto por $N_b = 10.000$ partículas com $\eta = 0,1$.

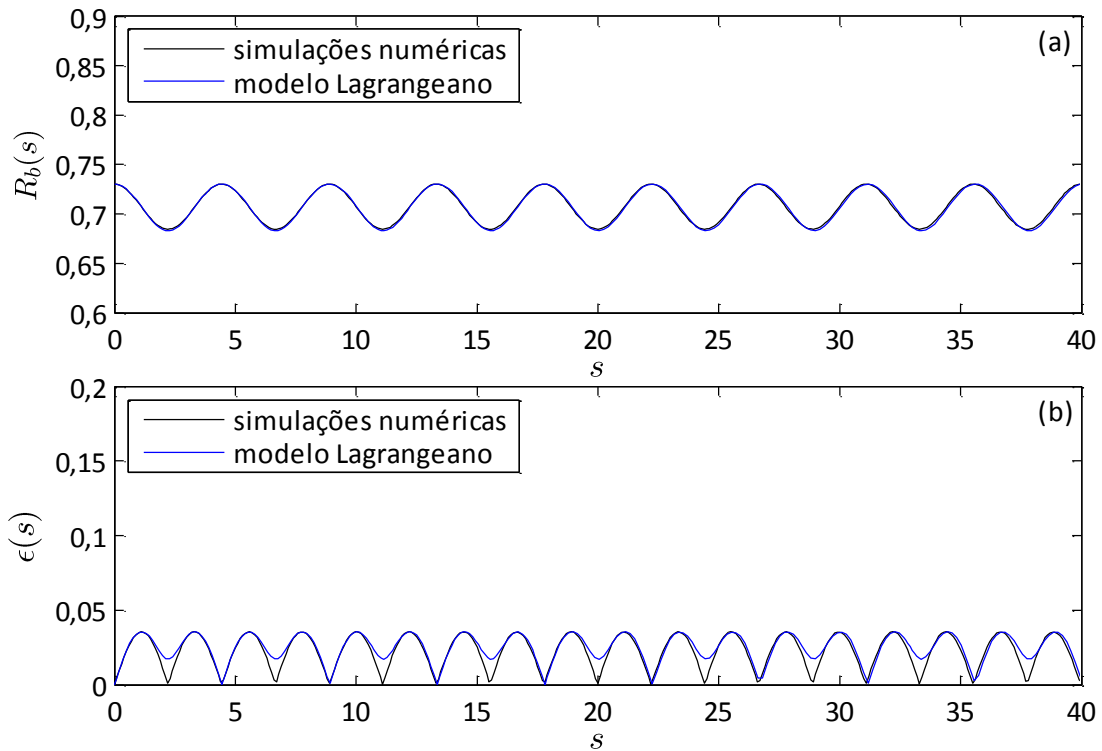


Figura 69: Comparação no estado inicial não-estacionário do feixe entre os resultados obtidos mediante simulações numéricas autoconsistentes e os preditos pelo modelo Lagrangeano desenvolvido. Consta em (a) o raio RMS R_b do feixe e em (b) a sua emitância ϵ . Feixe composto por $N_b = 10.000$ partículas com $\eta = 0,2$.

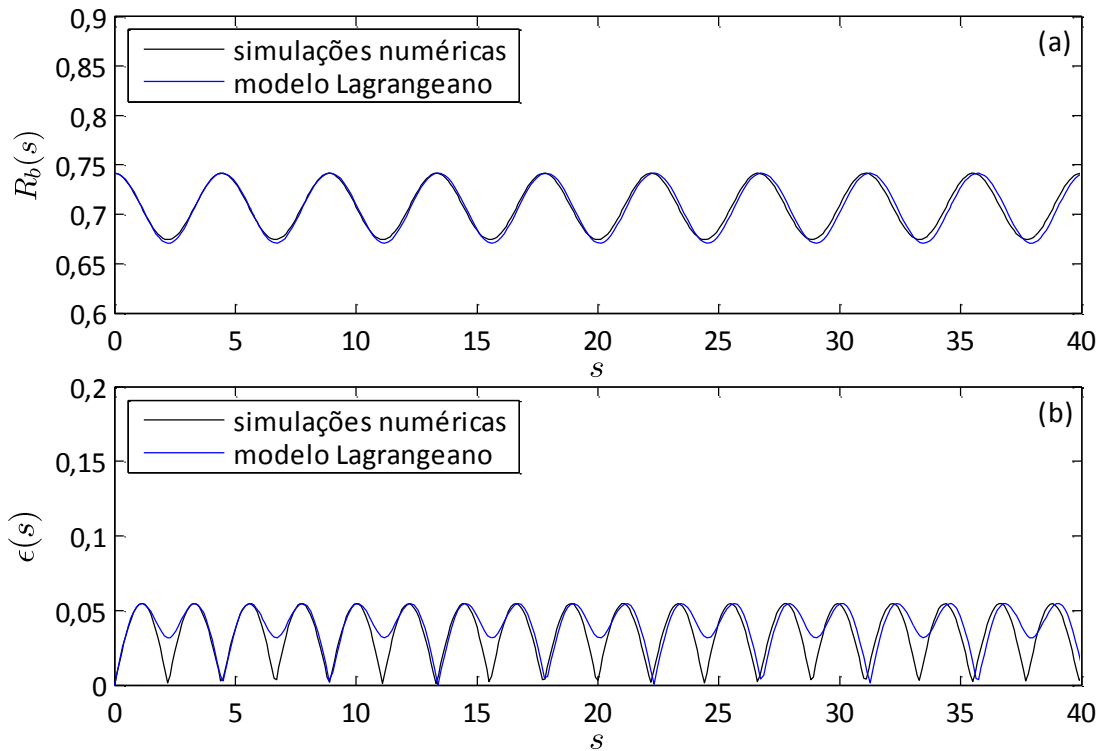


Figura 70: Comparação no estado inicial não-estacionário do feixe entre os resultados obtidos mediante simulações numéricas autoconsistentes e os preditos pelo modelo Lagrangeano desenvolvido. Consta em (a) o raio RMS R_b do feixe e em (b) a sua emitância ϵ . Feixe composto por $N_b = 10.000$ partículas com $\eta = 0,3$.

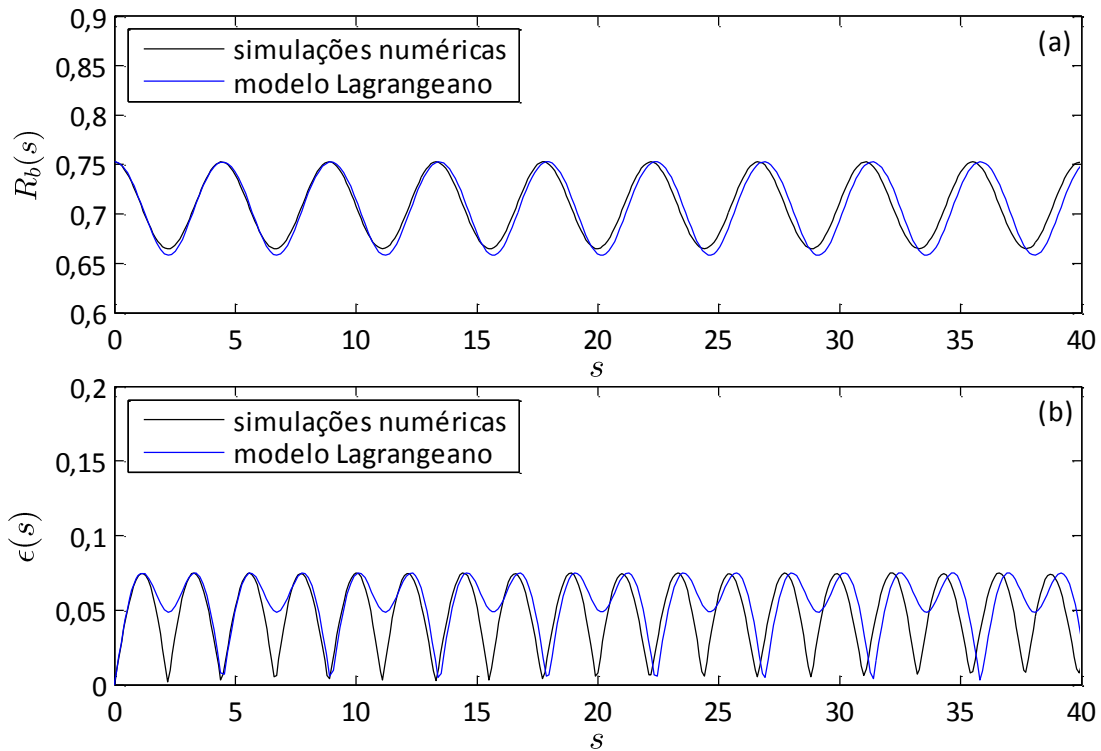


Figura 71: Comparação no estado inicial não-estacionário do feixe entre os resultados obtidos mediante simulações numéricas autoconsistentes e os preditos pelo modelo Lagrangeano desenvolvido. Consta em (a) o raio RMS R_b do feixe e em (b) a sua emitância ϵ . Feixe composto por $N_b = 10.000$ partículas com $\eta = 0,4$.

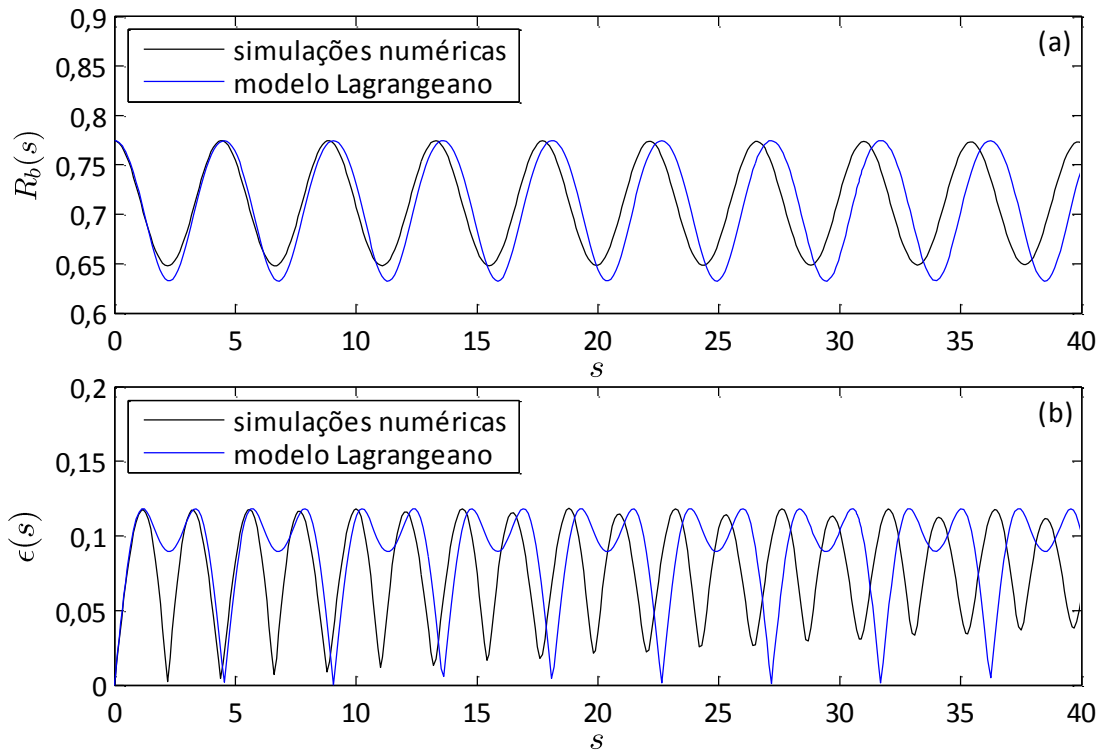


Figura 72: Comparação no estado inicial não-estacionário do feixe entre os resultados obtidos mediante simulações numéricas autoconsistentes e os preditos pelo modelo Lagrangeano desenvolvido. Consta em (a) o raio RMS R_b do feixe e em (b) a sua emitância ϵ . Feixe composto por $N_b = 10.000$ partículas com $\eta = 0,6$.

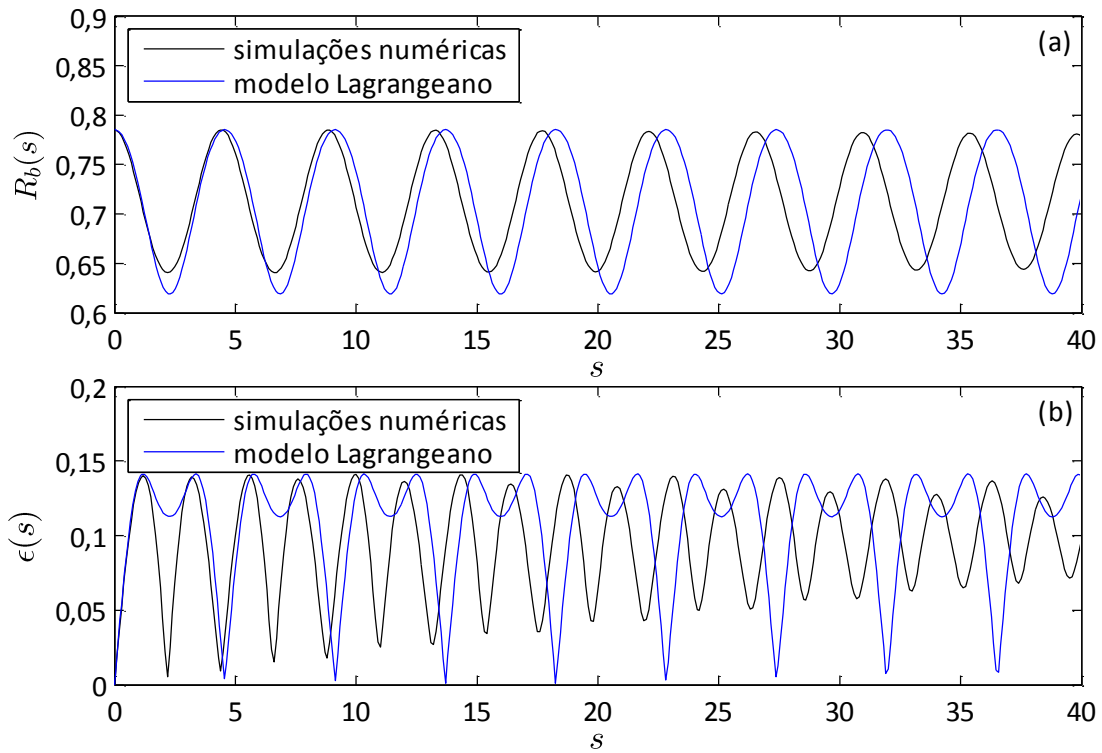


Figura 73: Comparação no estado inicial não-estacionário do feixe entre os resultados obtidos mediante simulações numéricas autoconsistentes e os preditos pelo modelo Lagrangeano desenvolvido. Consta em (a) o raio RMS R_b do feixe e em (b) a sua emitância ϵ . Feixe composto por $N_b = 10.000$ partículas com $\eta = 0,7$.

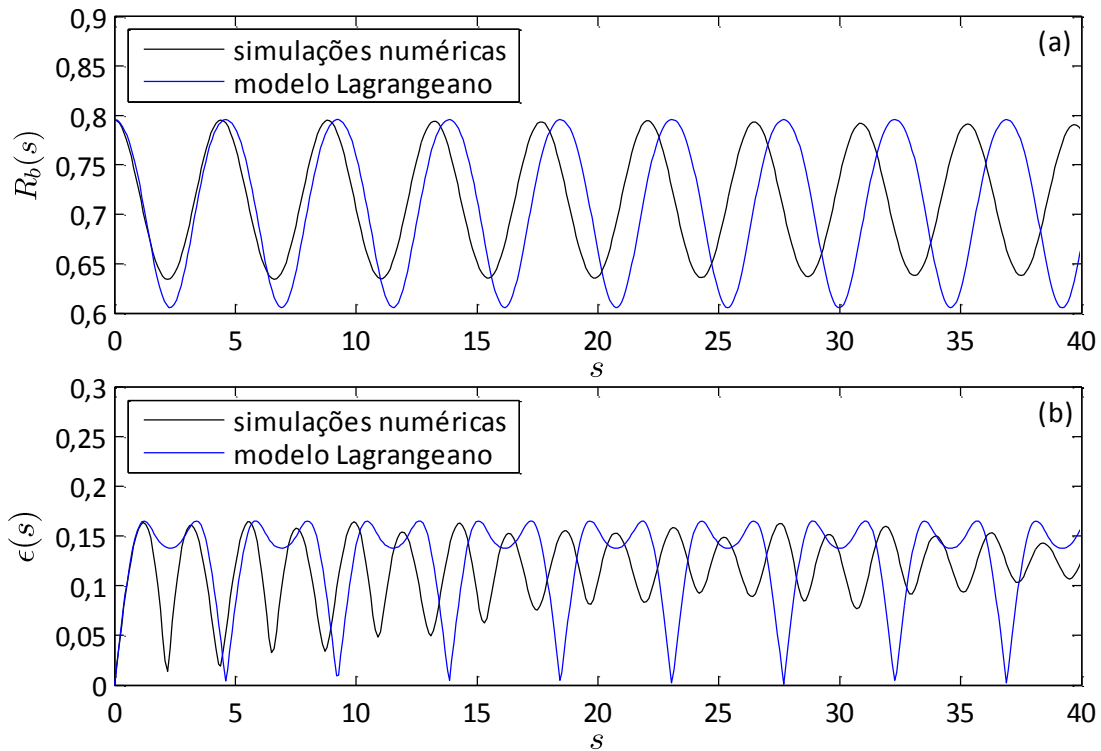


Figura 74: Comparação no estado inicial não-estacionário do feixe entre os resultados obtidos mediante simulações numéricas autoconsistentes e os preditos pelo modelo Lagrangeano desenvolvido. Consta em (a) o raio RMS R_b do feixe e em (b) a sua emitância ϵ . Feixe composto por $N_b = 10.000$ partículas com $\eta = 0,8$.

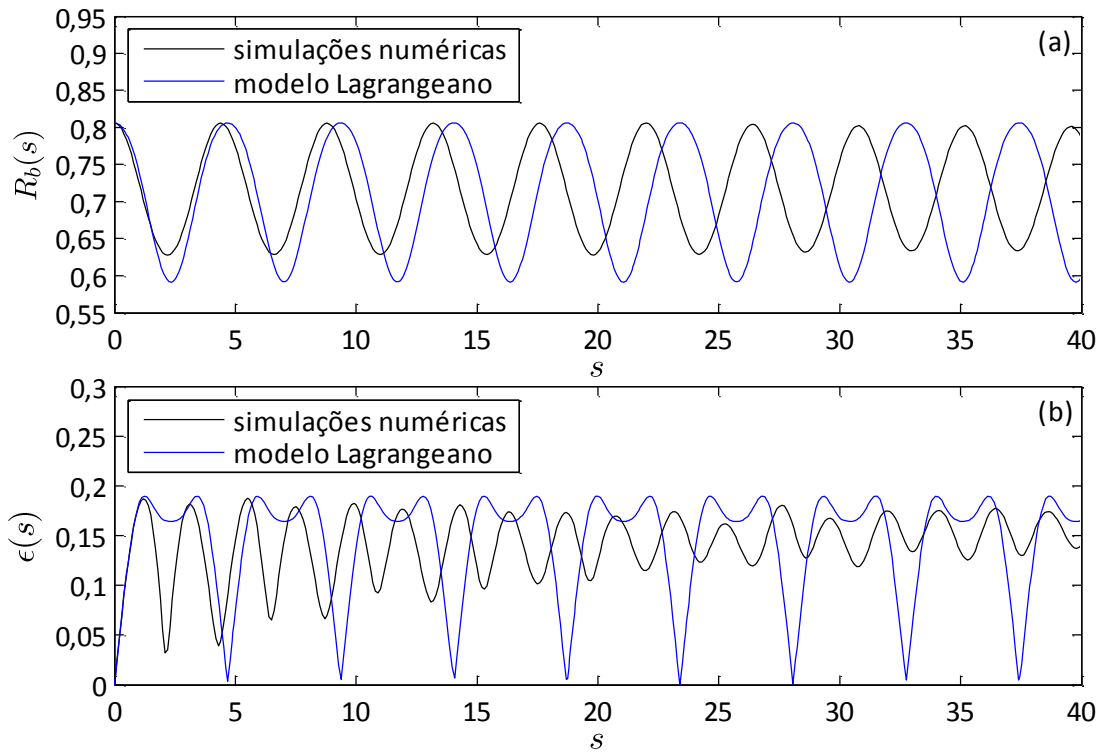


Figura 75: Comparação no estado inicial não-estacionário do feixe entre os resultados obtidos mediante simulações numéricas autoconsistentes e os preditos pelo modelo Lagrangeano desenvolvido. Consta em (a) o raio RMS R_b do feixe e em (b) a sua emitância ϵ . Feixe composto por $N_b = 10.000$ partículas com $\eta = 0,9$.