

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ADMINISTRAÇÃO

ANÁLISE DO RETORNO DE AÇÕES PELO
MODELO DE MISTURA DISCRETA DE NORMAIS

Aluno: FLAVIO H. B. BRANDÃO
Orientador: JOÃO LUIZ BECKER
Co-orientador: EDUARDO F. LEMGRUBER

Porto Alegre, 10 de dezembro de 1992.

SUMÁRIO

1) INTRODUÇÃO	5
2) MODELOS DE DISTRIBUIÇÕES DE PREÇOS	13
2.1) DISTRIBUIÇÃO NORMAL PADRÃO	13
2.2) DISTRIBUIÇÃO ESTÁVEL PARETIANA	15
2.3) DISTRIBUIÇÃO DE STUDENT	17
2.4) DISTRIBUIÇÃO DOS EVENTOS COMPOSTOS	19
2.5) PROCESSO ESTOCÁSTICO SUBORDINADO	21
3) MODELO DE MISTURA DISCRETA DE NORMAIS	24
3.1) DESCRIÇÃO DO MODELO	24
3.2) ESTIMATIVA DOS PARÂMETROS DO MODELO	34
3.3) OPERACIONALIZAÇÃO	37
4) PROCEDIMENTOS DE PESQUISA	39
4.1) PROBLEMA	39
4.2) OBJETIVO DO ESTUDO	39
4.3) METODOLOGIA	39
4.3.1) CLASSIFICAÇÃO	39
4.3.2) ALGORITMO	40
4.3.3) DESCRIÇÃO DA AMOSTRA	40
5) ANÁLISE E INTERPRETAÇÃO DOS DADOS	42
6) IMPLICAÇÕES DO ESTUDO COM RESPEITO AO PROCESSO DE APREÇAMENTO DE OPÇÕES	49
7) CONSIDERAÇÕES FINAIS	55
8) BIBLIOGRAFIA	57
9) APÊNDICES	60
A) MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON	
B) ALGORITMO	
C) DERIVADAS DE 1 ^a E 2 ^a ORDEM	
D) PROGRAMA	

RESUMO

O presente trabalho tem o objetivo de testar a hipótese de log-normalidade de retornos de ações no Mercado Brasileiro de Ações, através do Modelo de Mistura Discreta de Normais (MDN). É utilizado o método de Newton-Raphson para resolver numericamente as equações não-lineares do modelo, geradas por estimadores de máxima verossimilhança. Refuta-se a hipótese de log-normalidade de retornos para as ações analisadas. Considerações quanto ao apereamento de opções são apresentadas com base nos resultados obtidos.

ABSTRACT

The objective of this work is to test the log-normality hypothesis of stock returns in the Brazilian Stock Market, through the Normal Discrete Mixture Model. The Newton-Raphson's method is used to numerically solve the non-linear equations of the model, generated by maximum likelihood estimators. The Log-normality hypothesis is refused for the stocks analysed. Considerations about options pricing are presented, based on the results obtained.

1) INTRODUÇÃO

Uma das questões mais controversas da teoria econômico-financeira atual, é a suposição de normalidade e estacionaridade dos retornos de ativos. Inicialmente formulada por OSBORNE (1959), esta tem sido seriamente discutida e criticada por diversos autores. Esta questão torna-se central para a teoria financeira porque a suposição de normalidade e estacionaridade de retornos de ativos é pressuposto básico para os principais modelos existentes neste campo de estudo como CAPM (Modelo de Precificação de Ativos), Black e Scholes (Modelo de Apreçamento de Opções), etc. PRAETZ (1972) argumenta que a teoria dos movimentos Brownianos que embasa o movimento dos preços das ações vem de uma analogia com o movimento de uma molécula de gás, onde a variância dos retornos num intervalo de tempo é proporcional à temperatura do gás, que é constante. Esta analogia com o mercado de ações é inconsistente, porque este tem períodos de atividade variáveis ao longo do tempo.

FAMA (1965) testando a hipótese de normalidade de retornos diários, nota que a distribuição revelava mais curtoses (caudas mais gordas) do que a distribuição Normal. Fama conclui que a distribuição dos preços das ações se ajusta melhor à distribuição estável Paretiana com característica exponencial (α) extritamente menor que 2, baseado nos estudos de MANDELBROT (1963).

Por outro lado, PRAETZ (1972) critica a distribuição

proposta por Mandelbrot por esta apresentar desvantagens como: variância infinita; desconhecimento de suas funções densidade, exceto em alguns casos especiais; e a imprecisão de seus métodos de estimação de parâmetros.

Estudos de OFFICER (1972) indicam que os retornos têm algumas mas não todas as propriedades de um processo estável. As distribuições têm caudas gordas comparadas com a distribuição Normal e os retornos mensais (analisados num intervalo de tempo de aproximadamente 42 anos) somente se comportam consistentemente com as propriedades de estabilidade para somas de retornos mensais maiores que 5 meses. HAGERMAN (1978) conclui que a hipótese de simetria estável pode ser rejeitada como uma aproximação para a distribuição de retornos, e coloca como alternativas para a melhor aderência à distribuição verdadeira, a mistura de distribuições normais e a distribuição de Student, mesmo que estas distribuições tragam dificuldades tanto na pesquisa empírica quanto teórica em finanças. BLATTBERG e GONEDES (1974) provam a superioridade descritiva da distribuição de Student, a qual não é estável, em relação à distribuição estável Paretiana. Neste estudo foi utilizada a função densidade de Student padronizada, a qual tem as seguintes propriedades: (1) possuir caudas mais gordas do que a função densidade Normal padronizada (com média igual a zero e variância igual à unidade), e (2) ser mais alta que a densidade Normal padronizada nas vizinhanças da sua média (zero). A distribuição de Student apresenta uma aproximação maior com os estudos relatados por MANDELBROT (1963), trazendo vantagens em

relação à distribuição estável Paretiana, devido às propriedades associadas às somas de variáveis randômicas geradas em cada modelo.

HSU *et alii* (1974) notam que a distribuição de retornos da amostra analisada em seus estudos não é estacionária ao longo do tempo e que dentro de períodos de comportamento homogêneo, distribuições com variâncias finitas (distribuição Normal e mistura de Normais) podem ser adequadas. Estes autores propõem como mais descritiva a distribuição de probabilidades Normal com variância não estacionária sujeita a mudanças em pontos irregulares no tempo, causadas possivelmente por mudanças ambientais como desenvolvimentos de tecnologias, políticas governamentais, etc. CLARK (1973) na sua proposição do modelo do Processo Estocástico Subordinado, onde os retornos são normalmente distribuídos e direcionados por um processo Log-normal independentemente distribuído com a função de medir a velocidade do processo, prova a superioridade deste em relação às distribuições estáveis.

Por outro lado, autores como LEMGRUBER *et alii* (1988) no Brasil, e GIBBONS e HESS (1981) estudaram as variações nos retornos de ações de acordo com o dia da semana, especialmente o efeito segunda-feira, o qual é calculado com base em três dias da semana. Os estudos de GIBBONS e HESS (1981) evidenciam a forte persistência de retornos negativos para as ações nas segundas-feiras, corroborando o trabalho de FRENCH (1988) que caracterizou o efeito de fim de semana no mercado acionário

americano, examinando duas hipóteses para o processo de geração de retornos: geração por dias-calendário e geração por dias de negócio (Capud LEMGRUBER *et alii*, 1988). FAMA (1965) nota que a variância dos retornos nas segundas-feiras é aproximadamente 20% maior que dos outros dias da semana. AHARONY e SWARY (1980) estudando a influência de anúncios de dividendos e ganhos de capital nos retornos de ações concluem que há fortes evidências de que anúncios de dividendos proporcionam informações mais valiosas que os anúncios de ganhos de capital, e que o mercado de ações se ajusta de forma eficiente às novas informações disponíveis. BONES *et alii* (1974) mostram que os retornos variam com as mudanças na estrutura de capital das empresas, evidenciando assim o caráter sazonal das distribuições de retornos observadas.

KON (1984) em um estudo do comportamento dos retornos diários de ações no Mercado Americano, propõe uma Mistura Discreta de Normais para explicar as curtoses e as inclinações positivas nas distribuições observadas. O autor prova através de testes de coeficientes de verossimilhança a superioridade do método em relação à distribuição de Student, a qual poderia explicar as curtoses observadas. Rejeita-se assim, simultaneamente, as hipóteses de normalidade e estacionaridade das distribuições de retornos, o que significa uma alteração relevante em suposições básicas da teoria financeira, como na teoria dos portfólios, modelos teóricos de apreçamento de opções, etc.

O processo da Mistura Discreta de Normais considera como subconjuntos todas as informações estruturais que afetam os preços

das ações como aquisições, decisões de investimentos, mudanças na estrutura de capital da empresa, e informações cíclicas como o efeito segunda-feira e anúncios de lucros e dividendos, tendo cada um destes subconjuntos uma média e um desvio-padrão associados. O número de Normais associadas varia de acordo com cada empresa e deve ser determinado de forma empírica, ou seja, o algoritmo reparte o conjunto total de informações em subconjuntos correspondentes ao número de Normais associadas. O número de subconjuntos é incrementado até o momento em que a nova distribuição não apresente superioridade descritiva em relação à anterior.

O estudo da normalidade e estacionaridade de retornos pode trazer também contribuições importantes para um dos mais significativos desenvolvimentos da teoria financeira dos últimos anos, que é o trabalho de BLACK e SHOLES (1972) sobre apreçamento de opções. Eles propuseram uma fórmula para o apreçamento de opções, baseada num processo estocástico de evolução de preços da ação-objeto, o qual assume que a distribuição dos logaritmos dos retornos da ação-objeto obedece a uma distribuição Normal, com média (μ) e desvio-padrão (σ), constantes através do tempo. Apesar de reconhecido como uma grande contribuição teórica, o modelo é suscetível a críticas de ordem empírica.

BLACK e SHOLES (1972) baseados em predições de variâncias usando informações passadas, observam que o modelo sobre-avalia opções com altas volatilidades e sub-avalia opções com baixas volatilidades, causando erros sistemáticos no processo

de apreçamento de opções. Evidências encontradas de não estacionariedade das variâncias mostram a necessidade de obter mais acurácia nas estimativas de variâncias baseadas em informações disponíveis (HSU *et alli*, 1974). MACBETH e MERVILLE (1985) observam que o modelo sobre-avalia opções muito dentro do preço (*in-the-money*), ou seja, quando o valor futuro do preço da ação é maior que o preço de exercício, e sub-avalia opções muito fora do preço (*out-of-the-money*). GESKE *et alli* (1983) mostram os vieses ocorridos em contratos de opções protegidos de dividendos (*cover-the-counter*), diferindo dos valores encontrados pela fórmula de Black e Scholes que se refere a ações que não pagam dividendos (tipo Europeu). MERTON (1973) afirma que os pressupostos críticos na derivação do modelo de Black e Scholes são a operação contínua do mercado e a continuidade do caminho percorrido pelo preço da ação-objeto ao longo do tempo (apud CANABARRO, 1988). MERTON (1976) propõe um modelo de precificação de opções que explicitamente admite saltos no processo de distribuição dos retornos, o qual poderia resolver as discrepâncias observadas no modelo de Black e Scholes. Conforme o autor, a chegada de informações normais leva a uma distribuição de retornos modelada por um processo de difusão Log-normal, enquanto que a chegada de informações anormais (onde estas produziriam saltos que seguiriam uma distribuição Log-normal), seria modelada por um processo de Poisson. BALL e TOROUS (1985) comparando o modelo de Black e Scholes e de Merton, confirmam a presença de saltos estatisticamente significantes na maioria dos retornos analisados; entretanto as diferenças

encontradas nos preços de opções entre os dois modelos não foram operacionalmente significativas .

Apesar das críticas ao modelo de Black e Scholes acima citadas, nota-se que a questão da distribuição dos retornos no tempo é anterior a qualquer crítica quanto aos erros observados no processo de apreçamento de opções.

No Brasil, poucos trabalhos a este respeito têm sido feitos. CANABARRO (1988), num estudo do Mercado Brasileiro de Opções, rejeita a hipótese de Log-normalidade da distribuição de preços das ações. Torna-se relevante assim, estudar o comportamento dos retornos de ações no Mercado Brasileiro de Ações, onde existem grandes instabilidades estruturais causadas principalmente por políticas governamentais e volatilidades associadas bastante elevadas, o que pode causar pronunciados vieses nos modelos de apreçamento de opções existentes.

O presente trabalho se propõe a estudar o Mercado Brasileiro de Ações, através do modelo de Mistura Discreta de Normais, o qual tem a potencialidade de acomodar todas as assimetrias e sazonalidades acima relacionadas. A dissertação organiza-se da seguinte forma: no capítulo 2 são relatados os procedimentos de pesquisa a serem utilizados; o capítulo 3 apresenta os principais modelos de distribuições de retornos de ações encontrados na literatura; o modelo da Mistura Discreta de Normais, bem como o método de estimativa de parâmetros e operacionalização deste são mostrados no capítulo 4; a análise e interpretação dos resultados é feita no capítulo 5; algumas

considerações do estudo com relação à formulação de Black e Scholes são propostas no capítulo 6; e o capítulo 7 apresenta as considerações finais do trabalho. O método iterativo de Newton-Raphson para a resolução de sistemas não-lineares, o algoritmo do programa, as derivadas de 1^a e 2^a ordem constituintes dos sistemas de equações e o programa computacional propriamente dito são apresentados em apêndices.

2) MODELOS DE DISTRIBUIÇÕES DE PREÇOS

2.1) DISTRIBUIÇÃO NORMAL PADRÃO ¹

A teoria da distribuição dos preços de ações começou com o trabalho de OSBORNE (1959), inspirada nos movimentos Brownianos de partículas. Se $p(t)$ representa o preço de uma ação no tempo t , então $y = \ln [p(t+\tau)/p(t)]$ é a mudança no logaritmo do preço do tempo t para $t+\tau$. Conforme Osborne, os preços podem ser interpretados como um conjunto de decisões em equilíbrio estatístico com propriedades semelhantes às das partículas na mecânica estatística. A distribuição de equilíbrio de y é dada por

$$f(y) = \frac{\exp(-y^2/2\sigma^2\tau)}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \quad (1)$$

onde σ^2 é a variância de y ao longo do intervalo unitário de tempo.

A quantidade y , a mudança no logaritmo do preço no intervalo de tempo τ , é a variável estudada na teoria dos movimentos randômicos nos preços de ações. A teoria dos movimentos Brownianos implica que valores de y ao longo de intervalos de tempo não sobrepostos constituem um movimento randômico, ou seja, a seqüência de valores de y é constituída de membros que são mutuamente independentes e têm uma função de distribuição probabilística comum.

¹ Extraído de PRAETZ (1972).

O modelo de Osborne implica que a distribuição dos retornos de ações deve ser normalmente distribuída e conseqüentemente estacionária, onde a média e a variância dos retornos são constantes ao longo do tempo.

Para a estimação dos parâmetros média e variância populacionais, as estatísticas \bar{x} e \bar{s}^2 podem ser utilizados.

No caso de retornos mensais, testes empíricos constatam boa capacidade descritiva do modelo Normal de distribuições, o mesmo não ocorrendo com retornos diários.

2.2) DISTRIBUIÇÃO ESTÁVEL PARETIANA ²

A distribuição estável Paretiana foi proposta originalmente por MANDELBROT (1963), como possível candidata a descrever o comportamento dos retornos de ações. A família de distribuições estáveis Paretianas é definida pela sua função característica, a qual é necessária porque funções densidade explícitas são conhecidas somente em três casos. O logaritmo natural da função característica é

$$\begin{aligned} \ln f(t) &= \ln E(e^{iyt}) & (2) \\ &= i\delta t - \gamma |t|^\alpha \{1 + i\beta(t/|t|) \omega(t, \alpha)\}, \end{aligned}$$

onde y é a variável randômica; $i = \sqrt{-1}$; t é qualquer número real; $\omega(t, \alpha) = \text{tg}(\pi\alpha/2)$ se $\alpha \neq 1$; e $\omega(t, \alpha) = (2/\pi) (\text{tg}|t|)$ se $\alpha = 1$.

As distribuições estáveis Paretianas têm quatro parâmetros: α , β , δ e γ . O parâmetro α é chamado de característica exponencial da distribuição e determina a probabilidade total contida nas caudas extremas da distribuição. Os valores de α podem variar dentro do intervalo $0 < \alpha \leq 2$. Quando $\alpha = 2$, a distribuição estável Paretiana é a distribuição Normal pois $\ln f(t) = i\mu t - (\sigma^2/2)t^2$ é o logaritmo natural da função característica da distribuição estável Paretiana com os parâmetros $\alpha = 2$, $\delta = \mu$, e $\gamma = \sigma^2/2$. Os parâmetros μ e σ^2 são a média e a variância da distribuição Normal. Quando α está no intervalo $0 < \alpha < 2$, as caudas da distribuição são mais altas do que as da

² Extraído de FIELITZ e ROZELLE (1983).

distribuição Normal, e a probabilidade total nas caudas extremas são maiores quanto menores forem os valores de α .

O parâmetro β é um índice de assimetria definido no intervalo $-1 \leq \beta \leq 1$. Quando $\beta = 0$, a distribuição é simétrica. Quando $\beta > 0$, a distribuição é assimétrica à esquerda, e o grau de assimetria é maior quanto maior for o valor de β . Quando β é negativo, a distribuição é assimétrica à direita.

O parâmetro δ é o parâmetro de localização, e quando $\alpha > 1$, δ é a média da distribuição. Quando $\alpha \leq 1$, a média não é definida e δ é uma outra medida de localidade, por exemplo, a mediana quando $\beta=0$.

A escala da distribuição estável Paretiana é definida por γ . Quando $\alpha = 2$, γ é $1/2$ vezes a variância. Quando $\alpha < 2$, a variância é infinita. A versão mais conhecida do parâmetro de escala é c , que guarda com γ a seguinte relação: $\gamma = c^\alpha$.

A estimação dos principais parâmetros (c de escala, e α , característica exponencial) pode ser feita baseada no método proposto por FAMA e ROSS (1971) e através do método proposto por PRESS (1967), que fornece os estimadores para os quatro parâmetros desconhecidos.

FAMA (1963) testa a distribuição estável Paretiana para as 30 ações do índice Dow Jones em sua dissertação, e conclui que a hipótese de estabilidade Paretiana é mais consistente do que a distribuição Normal.

2.3) DISTRIBUIÇÃO DE STUDENT ³

A função densidade de Student é representada por

$$f(x, m, H, v) = \frac{v^{(1/2)v} [v + H(x-m)^2]^{-(1/2)(v+1)} H}{B(1/2, 1/2v)} \quad (3)$$

onde m é o parâmetro de localização, H é o parâmetro de escala e v é o parâmetro de forma. $B(\cdot, \cdot)$ é a função beta, que é, $B(a, b) = \Gamma(a) \Gamma(b) / \Gamma(a+b)$, onde $\Gamma(\cdot)$ é a função gama. De acordo com BLATTBERG e GONEDES (1974), a distribuição de Student tem as seguintes propriedades:

- (1) $E(x) = m$, para $v > 1$ e $\text{var}(x) = H^{-1}v/(v-2)$, para $v > 2$;
- (2) em geral, todos os momentos de ordem $r < v$ são finitos;
- (3) quando $v=1$, a função densidade de Student é igual à função densidade de Cauchy. Quando $v \rightarrow \infty$, a distribuição de Student converge para a distribuição Normal.

Quando uma variável randômica de Student x com $v > 2$, é padronizada pela divisão de $x - E(x)$ por $\sqrt{\text{var}(x)}$ então a função densidade resultante desta padronização segue as seguintes propriedades: (1) esta tem caudas mais gordas do que a função de densidade Normal padronizada (isto é, com média zero e variância unitária), e (2) esta é mais alta do que a função densidade Normal padronizada nas vizinhanças da média comum, zero.

Para a estimação dos três parâmetros desconhecidos m, v e H , geralmente são utilizados os estimadores de máxima

³ Extraído de BLATTBERG e GONEDES (1974).

verossimilhança (EMV), que numa dada amostra de n elementos podem ser traduzidos pela seguinte fórmula :

$$L(m, H, v; x_1, \dots, x_n) = \frac{\prod_{i=1}^n v^{(1/2)v} \cdot [v + H(x_i - m)^2]^{-(1/2)(v+1)} H}{B(1/2, 1/2v)} \quad (4)$$

O método usual para encontrar o EMV para m, v e H é diferenciar a função de verossimilhança em relação a cada parâmetro, igualando o resultado das três equações a zero, e resolvendo-se para m, v e H. Entretanto, soluções analíticas para estas três equações são difíceis, fazendo com que as soluções numéricas sejam preferenciais para a maximização da função de verossimilhança (ver LUENBERGER, 1973).

Os resultados do estudo de BLATTBERG e GONEDES (1974), onde são comparadas as distribuições Simétrica-Estável (uma simplificação da distribuição estável-Paretiana) e Student referentes a retornos diários, mostram que o modelo de Student tem maior capacidade descritiva.

2.4) DISTRIBUIÇÃO DOS EVENTOS COMPOSTOS ⁴

O modelo de Eventos Compostos proposto por PRESS (1967) assume que os logaritmos dos preços de ações seguem uma distribuição que é uma mistura Poisson de distribuições Normais, a qual mostra-se em geral assimétrica, com caudas mais gordas, mais alta próximo à média e com maior massa de probabilidade nas caudas em comparação com a distribuição Normal. Por este motivo, o preço de uma ação pode ser calculado agregando-se um número randômico de mudanças de preços de tamanho randômico (representado por um processo composto de Poisson), que ocorre durante o intervalo de tempo existente entre as observações, e então sobrepondo-se um movimento Browniano.

Assume-se que $Z(t)$ é um processo estacionário e com incrementos independentes cujo mecanismo básico é um processo composto de Poisson e aumentado por um processo Wiener. Chamando-se $Z(t)$ como o logaritmo natural do preço de uma dada ação a um determinado tempo t , tem-se:

$$Z(t) = C + \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k + X(t) , \quad (5)$$

onde $C = Z(0)$ é conhecido; $(Y_1, Y_2, \dots, Y_k, \dots)$ é uma seqüência de variáveis randômicas mutuamente independentes obedecendo a uma distribuição comum $N(0, \sigma_2^2)$; $N(t)$ é um processo de Poisson com

⁴ Extraído de PRESS (1967).

parâmetro λt , que representa o número de eventos randômicos ocorrendo no tempo t , $\langle N(t), t \geq 0 \rangle$ é independente de Y_k ; e $\langle X(t), t \geq 0 \rangle$ é um processo de Wiener independente de $N(t)$ e de (Y_1, Y_2, \dots) , e $X(t)$ segue a distribuição $N(0, \sigma_1^2 t)$ (note-se que $X(t)$ tem por definição incrementos estacionários e independentes).

Diferençando-se a equação (5), obtém-se o equivalente modelo

$$Z(t) \equiv Z(t) - Z(t-1)$$

$$= \sum_{k=N(t-1)+1}^{N(t)} Y_k + e(t) \quad , \quad (6)$$

$$t=1, 2, \dots$$

onde $e(t) = X(t) - X(t-1)$ é o processo Normal estacionário independente $N(0, \sigma_1^2)$, ou seja, $E[e(t) - e(t+\tau)] = 0$ para todo número inteiro $\tau \neq 0$. O modelo produz uma distribuição não Gaussiana $Z(t)$ pela presença do processo composto de Poisson, dado por $\sum_1^{N(t)} Y_k$.

Para a estimação dos parâmetros desconhecidos, PRESS (1967) propõe uma variante do método dos momentos, devido a inadequação de métodos de estimação tais como os estimadores de máxima verossimilhança e mínimos quadrados.

Press testou o modelo dos Eventos Compostos em 10 ações que compõem o índice Dow Jones, plotando os logaritmos naturais dos preços das ações de 1926 até 1960. A regressão baseada no método proposto apresentou uma aproximação satisfatória do comportamento dos preços.

2.5) PROCESSO ESTOCÁSTICO SUBORDINADO ⁵

A principal motivação de CLARK (1973) para a proposição do modelo do Processo Estocástico Subordinado foi baseada nas diferentes taxas de evolução de preços de ações observadas em idênticos intervalos de tempo. A argumentação deste autor é que as diferenças nas evoluções de séries de preços são devidas ao fato de que as informações são acessíveis aos investidores a uma taxa variável. Em dias onde nenhuma informação nova chega ao mercado, o movimento de transações é lento e os preços evoluem lentamente. Nos dias em que as novas informações alteram as expectativas anteriores, o processo de preços desenvolve-se muito mais rapidamente.

Para a formulação do modelo do Processo Estocástico Subordinado, considera-se $X(t)$ como um processo estocástico discreto indexado por um conjunto de números (t_1, t_2, t_3, \dots) , onde estes são a realização de um processo estocástico (com incrementos positivos, $t_1 < t_2 < t_3, \dots$). Isto é, se $T(t)$ (geralmente tempo) é um processo estocástico positivo, um novo processo $X(T(t))$ pode ser formado. Este processo é dito ser subordinado a $X(t)$; $T(t)$ é chamado de processo de direção. A distribuição de $\Delta X(T(t))$ é dita subordinada a $X(t)$.

Note-se que sendo o processo de preços representado por $X(T(t))$, $\Delta X(t)$ assume a função de efeitos individuais no

⁵ Extraído de CLARK (1973).

processo, enquanto $T(t)$ é um medidor de velocidade da evolução, expressa em função do volume de transação diário.

Considere-se $X(t)$ e $T(t)$ processos com incrementos independentes e estacionários, sendo que os incrementos de $X(t)$ obedecem a uma distribuição com média 0 e variância finita σ^2 ; e os incrementos de $T(t)$ obedecem a uma distribuição positiva com média α , e $(T(s+t)-T(s)) \geq 0$, $t > 0$ (s é um valor particular no tempo). Então o Processo Estocástico Subordinado $X(T(t))$ tem incrementos independentes estacionários com média zero e variância $\alpha\sigma^2$. Para ilustrar o modelo proposto, mostra-se um caso especial de distribuições subordinadas, que considera um processo $X(t)$ cujos incrementos independentes $\Delta X(t)$ são normalmente distribuídos $(N(0, \sigma_2^2))$, dirigidos por um processo $T(t)$, cujos incrementos são log-normalmente distribuídos $(LN(\mu, \sigma_1^2))$:

$$f_{LNN}(y) = \frac{1}{2\pi \sigma_1^2 \sigma_2^2} \int_0^\alpha \frac{v^{-3/2} \exp(-(\log v - \mu)^2)}{2\sigma_1^2} \cdot \frac{\exp(-y^2)}{2v \sigma_2^2} dv \quad (7)$$

Para a estimativa dos parâmetros μ , σ_1^2 e σ_2^2 , são utilizados estimadores de máxima verossimilhança.

O autor testou o modelo em duas amostras de 1000 observações de cotações de preços de algodão, nos períodos JAN/1947-AGO/1950 e MAR/1951-FEV/1955. Os resultados obtidos

apresentaram fortes evidências em favor do Processo Estocástico Subordinado com variância finita. Preferências pela distribuição log-Normal-Normal ao invés da estável para os retornos, também foram constatados no referido estudo.

3) MODELO DE MISTURA DISCRETA DE NORMAIS

3.1) DESCRIÇÃO DO MODELO

Baseando-se em evidências empíricas descritas no trabalho de PRESS (1967), admite-se que a verdadeira distribuição dos retornos das ações pode ser Normal, mas que seus parâmetros (média e variância) modificam-se para cada subconjunto finito de valores. Estes subconjuntos estão associados às mudanças da estrutura de capital da empresa, aquisições, desdobramentos de ações, e fatores cíclicos como anúncio de lucros e dividendos, efeito do dia da semana, etc.

O modelo da Mistura Discreta de Normais é capaz de acomodar as diferentes descontinuidades (estruturais e cíclicas) que ocorrem nas distribuições observadas como subconjuntos de informações (não sendo estes discriminados) que não são necessariamente consecutivas no tempo, o que resulta numa distribuição não-Normal, não-estacionária e que pode descrever as possíveis assimetrias nas distribuições dos retornos. O modelo assume que cada retorno observado da ação, r_t , é gerado por uma das N seguintes equações:

$$\begin{aligned}
r_t &= \alpha_1 + \mu_{1t} & t \in I_1 \\
r_t &= \alpha_2 + \mu_{2t} & t \in I_2 \\
\cdot & & \\
\cdot & & \\
\cdot & & \\
r_t &= \alpha_N + \mu_{Nt} & t \in I_N
\end{aligned}
\tag{8}$$

onde I_i , $i=1,2,\dots,N$ são as informações dos subconjuntos com T_i informações em cada subconjunto. μ_{it} é normalmente distribuído com média zero e com variância σ_i^2 , $0 < \sigma_i^2 < \alpha$, $i=1,2,\dots,N$.

$\sum_{i=1}^N T_i = T$. α_i é a média da função densidade Normal de probabilidade $p(r_t | \underline{\gamma}_i)$, onde $\underline{\gamma}_i = (\alpha_i, \sigma_i^2)$.

Para efeitos didáticos, pode-se mostrar que uma distribuição de frequências complexa pode resultar de uma mistura de duas distribuições Normais, que são bastante simples e bem definidas. Como exemplificação, simulou-se a geração de 3 bancos de dados composto por misturas de duas Normais, sendo estas $NC(1,1), NC(10,1)$; $NC(1,1), NC(5,1)$ e $NC(1,1), NC(3,1)$ cada uma contendo 1200 informações de retornos. A proporção da mistura para os 3 bancos de dados foi de 50% para cada Normal ⁶. As distribuições Normais observadas têm médias 5,50, 2,97, 1,99 e desvios-padrão 4,57, 2,28, 1,42 respectivamente, e estão plotadas nas figuras 1, 2 e 3. Para os bancos de dados relativos às figuras 1 e 2, onde as Normais têm médias bastante diferentes, fica fácil visualizar a

⁶ Na simulação das Normais citadas, ocorreram diferenças pouco significativas em relação às médias e desvios-padrão, que podem ser atribuídas ao gerador de números aleatórios utilizado.

mistura das duas Normais simuladas, mas quando os valores das médias se aproximam (figura 3), torna-se difícil identificar as Normais envolvidas no processo. Além das distribuições com diferentes médias, foram simuladas distribuições com médias iguais mas com desvios-padrão diferentes, sendo estas: $N(1,1), N(1,10)$; $N(1,1), N(1,5)$ e $N(1,1), N(1,3)$. Neste caso, as distribuições amostrais observadas teriam médias de 0,94, 0,95 e 0,97, e desvios-padrão de 7,07, 3,56 e 2,27 respectivamente. Nota-se pelas figuras 4, 5 e 6, a mesma dificuldade de identificar as duas normais envolvidas no processo, quando os desvios-padrão se aproximam.

O processo de estimativa do modelo da Mistura Discreta de Normais (MDN) faz a operação inversa, qual seja, a partir das distribuições de frequências observadas, obter as distribuições verdadeiras de retornos que são mistura de duas Normais: $N(1,1), N(10,1)$; $N(1,1), N(5,1)$; $N(1,1), N(3,1)$; $N(1,1), N(1,10)$; $N(1,1), N(1,5)$ e $N(1,1), N(1,3)$; à proporção (λ) de 50% cada.

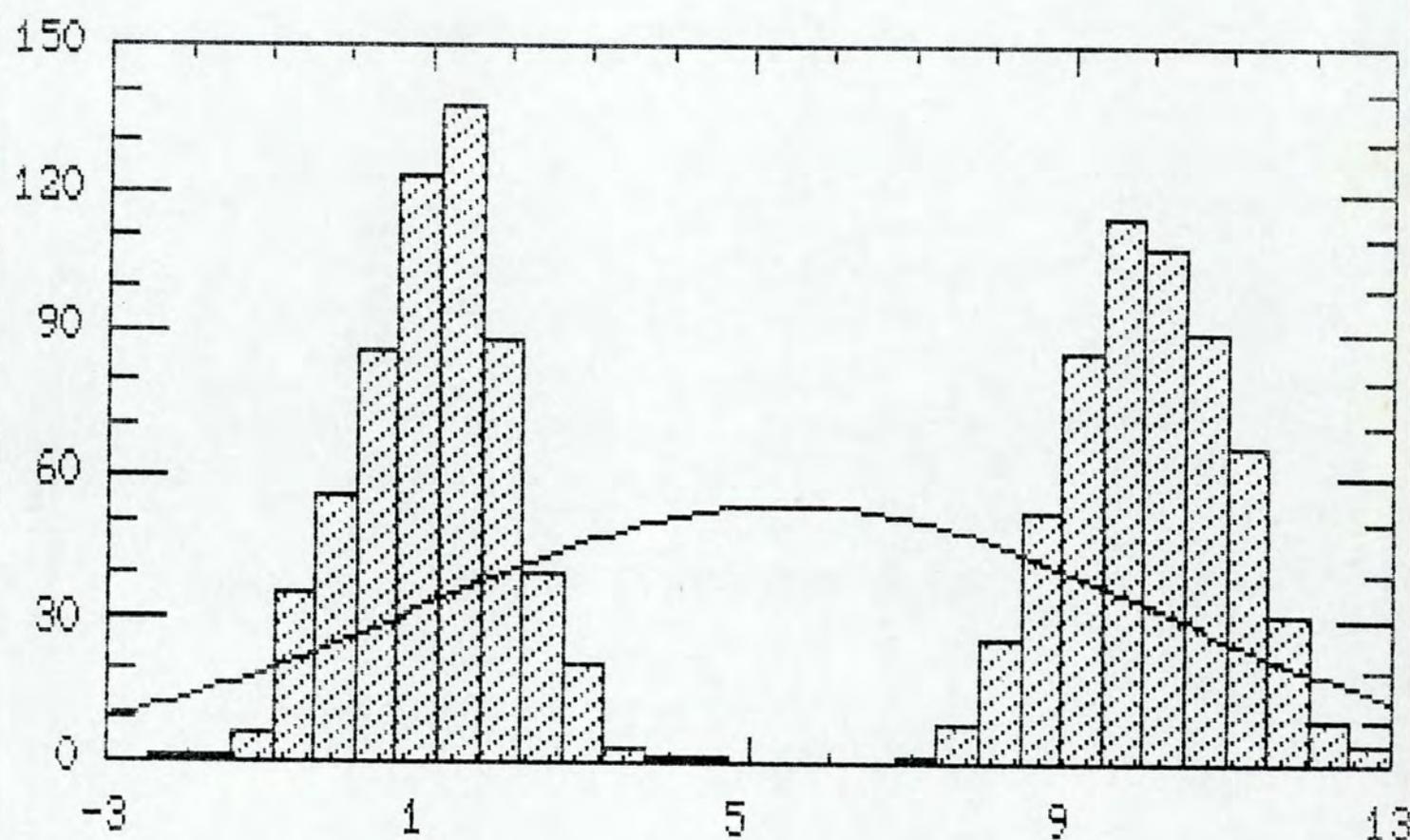


FIGURA 1 - Representação gráfica da mistura de duas distribuições Normais $NC(1,1)$ e $NC(10,1)$, e da distribuição total observada.

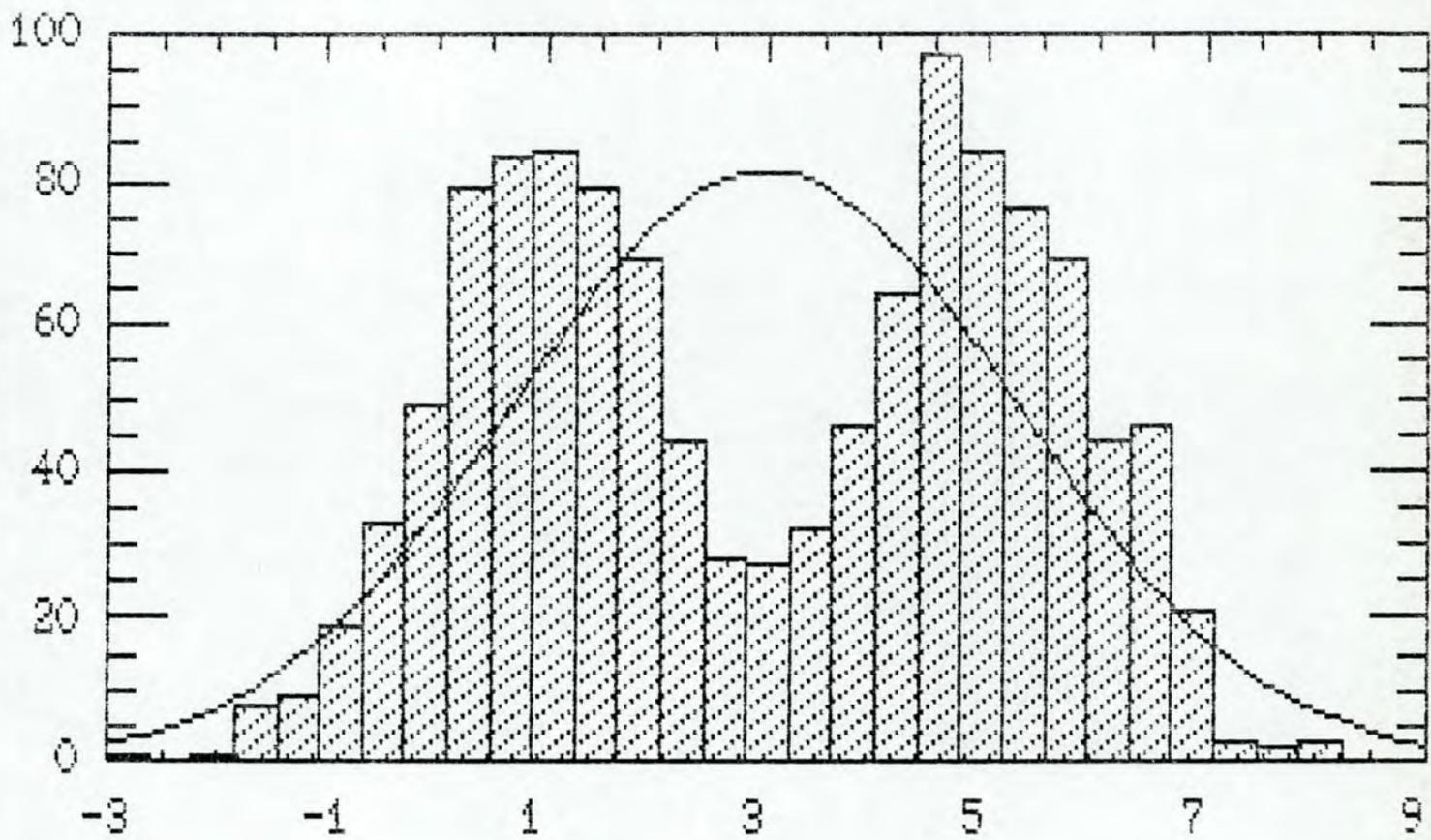


FIGURA 2 - Representação gráfica da mistura de duas distribuições Normais $NC(1,1)$ e $NC(5,1)$, e a distribuição total observada.

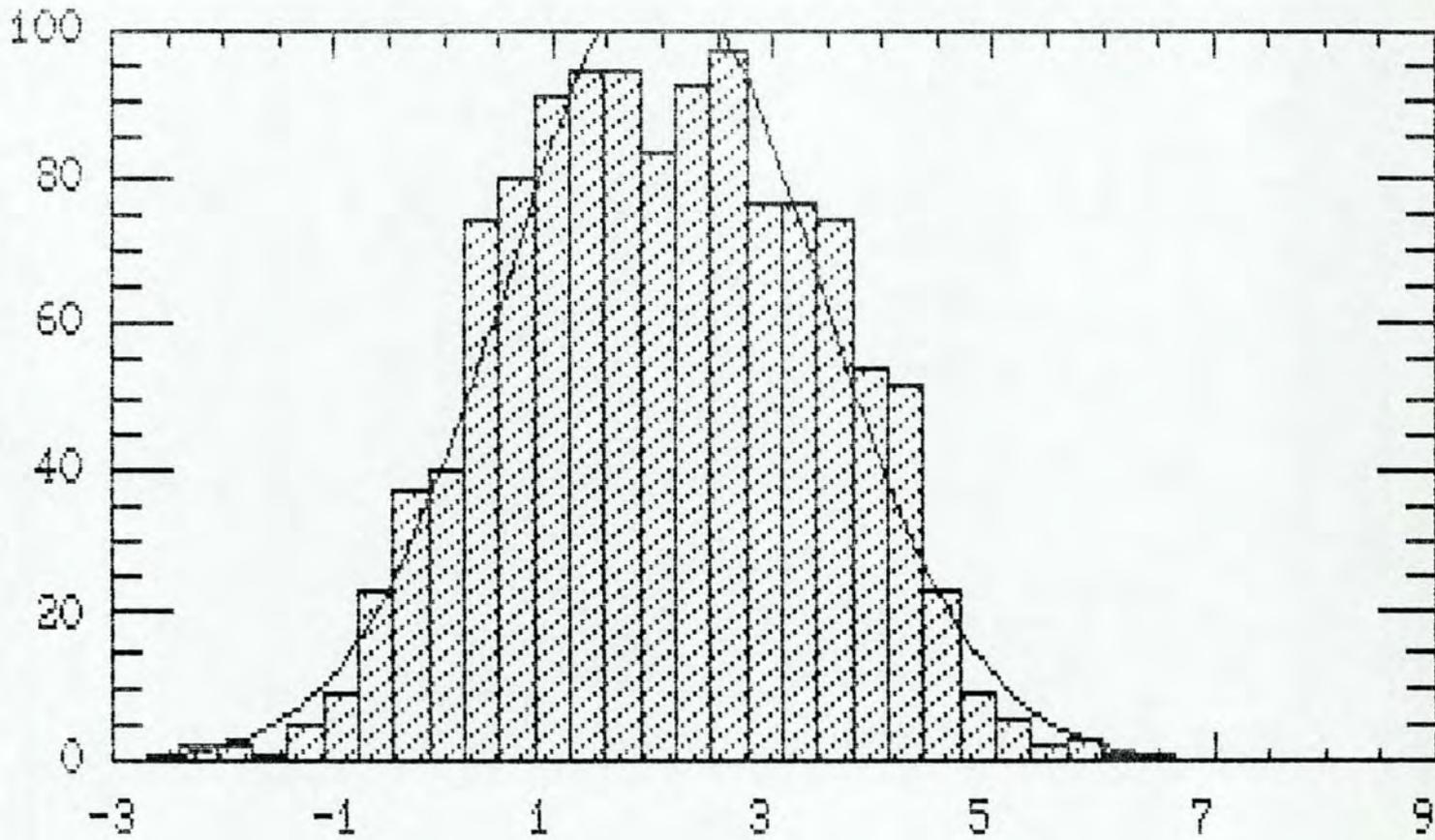


FIGURA 3 - Representação gráfica da mistura de duas distribuições Normais $N(1,1)$ e $N(3,1)$, e da distribuição total observada.

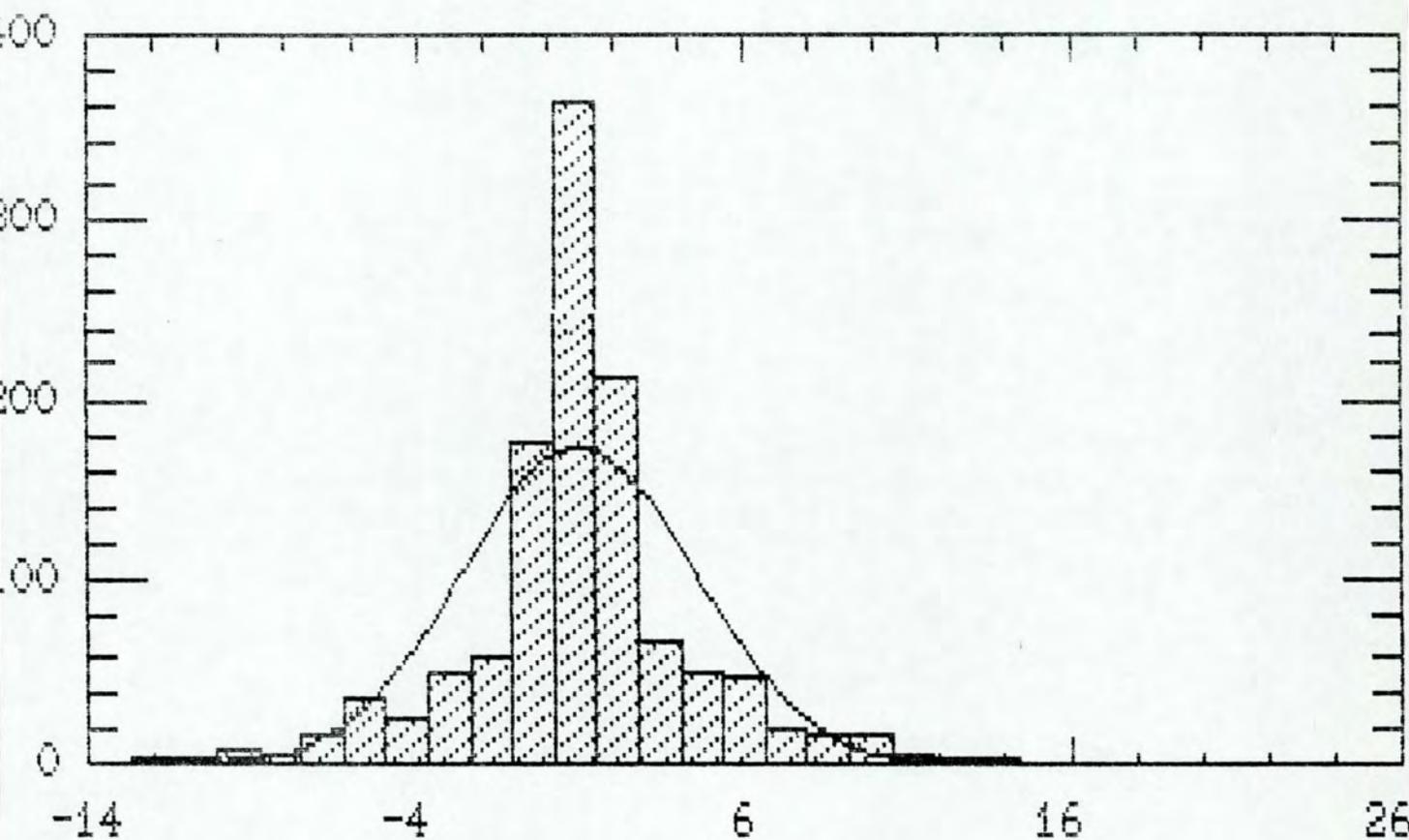


FIGURA 5 - Representação gráfica da mistura de duas distribuições Normais $N(1,1)$ e $N(1,5)$, e da distribuição total observada.

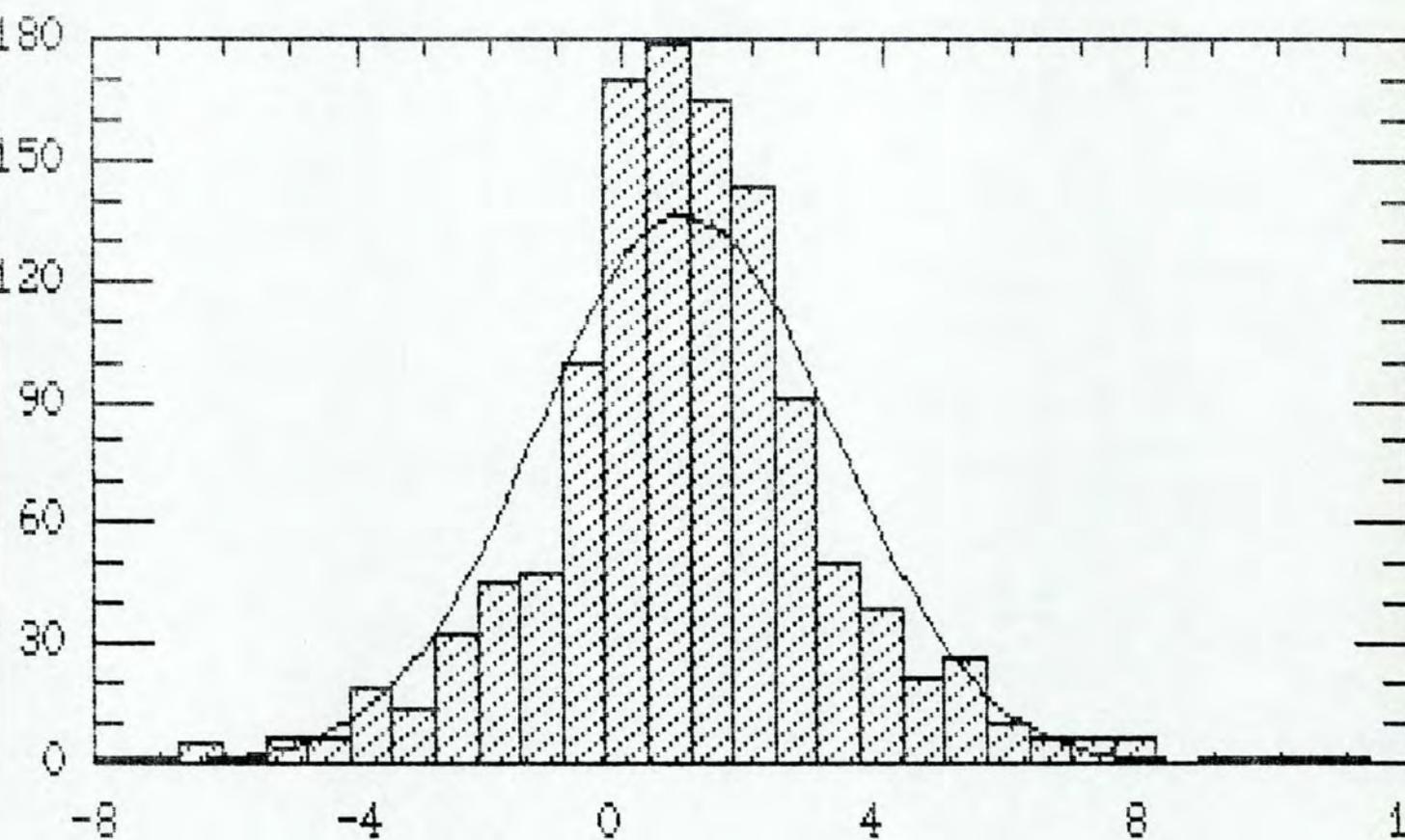


FIGURA 6 - Representação gráfica da mistura de duas distribuições Normais $N(1,1)$ e $N(1,3)$, e da distribuição total observada.

Note-se que as médias resultantes multiplicadas pela quantidade de observações ($\lambda_i = T_i/T$), são exatamente iguais à média da distribuição total observada. A relação entre os desvios-padrão, não é trivial, entretanto. Tal relação entre o desvio-padrão observado (σ_T) e os resultantes da mistura de duas Normais (σ_1) e (σ_2), pode ser deduzida da seguinte forma:

$$\text{Var}[X_T] = E[X_T^2] - (E[X_T])^2 \quad (9)$$

onde $E[X_T] = \lambda_1 E[X_1] + \lambda_2 E[X_2], \quad (10)$

$$E[X_T^2] = \lambda_1 E[X_1^2] + \lambda_2 E[X_2^2], \quad (11)$$

$$E[X_1^2] = \text{Var}[X_1] + (E[X_1])^2, \quad (12)$$

$$E[X_2^2] = \text{Var}[X_2] + (E[X_2])^2, \quad (13)$$

$$\text{Var}[X_1] = E[X_1^2] - (E[X_1])^2, \quad (14)$$

$$\text{Var}[X_2] = E[X_2^2] - (E[X_2])^2. \quad (15)$$

Fazendo-se as substituições de (10) a (15) em (9) chega-se a

$$\begin{aligned} \text{Var}[X_T] &= \lambda_1 \text{Var}[X_1] + \lambda_2 \text{Var}[X_2] + \lambda_1 (E[X_1])^2 \\ &+ \lambda_2 (E[X_2])^2 - (E[X_T])^2 \end{aligned} \quad (16)$$

3.2) ESTIMATIVA DOS PARÂMETROS DO MODELO

Definindo $\lambda_i = T_i/T$, $i = 1, 2, \dots, N$, como a proporção de observações T_i associadas com o subconjunto I_i de informações, sendo $0 < \lambda_i < 1$, então, para um dado N , o vetor $\underline{\theta} = (\alpha_i, \sigma_i^2, \lambda_i)$, pode ser estimado maximizando a função de verossimilhança, como visto em CANABARRO (1988):

$$l(\underline{\theta} | \underline{r}) = \prod_{t=1}^T \left[\sum_{i=1}^N \lambda_i p(r_t | \underline{\gamma}_i) \right], \quad (17)$$

onde $\underline{r} = (r_1, r_2, \dots, r_T)'$, e $p(r_t | \underline{\gamma}_i)$ é uma densidade de probabilidade Normal com média α_i e variância σ_i^2 , com $\underline{\gamma}_i = (\alpha_i, \sigma_i^2)$.

Para um dado N e T , o estimador de máxima verossimilhança $\hat{\underline{\theta}}_T$ de $\underline{\theta}$ é definido implicitamente pelo máximo da verossimilhança logarítmica:

$$LM(\underline{\theta}) = \sum_{t=1}^T \log f_t(r_t | \underline{\theta}) \quad (18)$$

$$\text{onde } f_t(r_t | \underline{\theta}) = \sum_{i=1}^N \lambda_i p(r_t | \underline{\gamma}_i) \quad (19)$$

Então o estimador de máxima verossimilhança $\hat{\underline{\theta}}_T$ é a solução para as equações de verossimilhança:

$$\frac{\partial LM(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}} = \sum_{t=1}^T \frac{1}{f_t(r_t | \underline{\theta})} \cdot \frac{\partial f_t(r_t | \underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}} = \underline{0} \quad (20)$$

A condição suficiente para a existência dos estimadores $\hat{\theta}_T$ é a de que a matriz Hessiana $H(\underline{\theta})$ seja negativa definida, sendo esta expressa por

$$H(\underline{\theta}) = \frac{\partial^2 L_T(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}^2} \quad (21)$$

Para a maximização do logaritmo da função de verossimilhança, resolve-se o sistema de equações não-lineares formado pelas equações descritas em (20) sob as condições de suficiência expressas em (21).

O método de estimação de máxima verossimilhança (EMV), apesar de ter restrições comuns a todos os métodos de otimização quando aplicados a sistemas de equações não-lineares, possui propriedades importantes tais como:

1) Se $\hat{\theta}$ é um estimador de máxima verossimilhança para um parâmetro θ , então o estimador de máxima verossimilhança para qualquer parâmetro que é uma função $h(\theta)$ é a função $h(\hat{\theta})$.

2) O método de EMV produz estimadores cujas distribuições são assintoticamente Normais com média e variância facilmente computáveis.

3) O método da EMV é consistente, o qual produz estimadores assintoticamente sem viés e com variância que tende a zero.

4) O método da EMV é eficiente, ou seja, ele é assintoticamente tão bom quanto qualquer outro método de estimação existente, produzindo estimativas de parâmetros com os menores

intervalos de confiança possíveis.

O método da EMV também oferece a possibilidade do teste da razão de máxima verossimilhança. Dado o valor de N , o processo da máxima verossimilhança estima $3N$ parâmetros $(\alpha, \sigma^2 \text{ e } \lambda)$. A fim de determinar N empiricamente, o modelo pode ser estimado para cada valor de N e fazer comparações via teste da razão de verossimilhança:

$$r\chi_{ij} = \frac{1(\underline{\theta}_i | \underline{r})}{1(\underline{\theta}_j | \underline{r})}, \quad i < j \quad (22)$$

Baseado em KON (1984), testes de significância da capacidade descritiva entre duas hipóteses de distribuição podem ser feitas, sabendo-se que a distribuição assintótica de $-2 \log \chi$ é qui-quadrada com graus de liberdade iguais à diferença entre o número de parâmetros dos dois modelos. Por exemplo, se as hipóteses de distribuição em questão são uma e duas Normais, o número de graus de liberdade é 3.

3.3) OPERACIONALIZAÇÃO

Para a operacionalização do estudo proposto, foi feito um programa computacional em linguagem TURBO PASCAL (apêndice D) onde são resolvidas as equações não-lineares descritas acima (equação 20) no modelo de MDN, através do método multidimensional de Newton-Raphson (apêndice A), sendo o número de dimensões determinado pela dimensão do parâmetro θ ($3N-1$) associado ao número N de Normais requerido (LUENBERGER, 1973). O processo de Newton-Raphson é iterativo de ponto inicial, onde o parâmetro θ é inicialmente arbitrado, havendo a convergência iterativamente, dentro de limites de número de iterações pré-fixados. O diagrama de blocos do programa encontra-se explicitado no apêndice B deste trabalho.

A precisão utilizada (a qual pode ser alterada no programa) para assegurar a convergência para o parâmetro θ foi de $1/1000$ para a norma de θ . O programa somente considera a convergência quando os incrementos relativos da norma aritmética (definida como o somatório dos módulos dos incrementos relativos dos componentes dividido pela dimensão) de θ forem inferiores a $1/1000$.

Nos testes de razão de verossimilhança, foram fixados os valores de 1% e 5% para medir o grau de significância da capacidade descritiva do modelo de MDN, onde os valores críticos de r_χ necessários para a negação da hipótese H_0 (a hipótese que explica a distribuição dos retornos com um menor número de

Normais), são respectivamente 11,34 e 7,81. Os valores de 1% e 5% aqui assumidos podem ser modificados de acordo com a necessidade do usuário, sendo estes adotados por motivos de similaridade com pesquisas já realizadas (KON, 1984).

No cálculo das derivadas de 1^a e 2^a ordem da função de verossimilhança (apêndice C), foram substituídos os parâmetros σ_i^2 (variância) pelos σ_i (desvios-padrão) devido a facilidades de diferenciação e de convergência, sabendo-se que se o ponto que maximiza a função de verossimilhança em relação a σ_i também a maximiza em relação a σ_i^2 . (propriedade 1, pg 36).

4) PROCEDIMENTOS DE PESQUISA

4.1) PROBLEMA

Modelagem matemática do retorno de ações no Mercado Brasileiro de Ações.

4.2) OBJETIVO DO ESTUDO

O objetivo do presente trabalho é testar a capacidade descritiva do processo da Mistura Discreta de Normais para o Mercado Brasileiro de Ações, com vistas a uma adequação dos modelos de apreamento de opções aos resultados obtidos.

4.3) METODOLOGIA

4.3.1) CLASSIFICAÇÃO

O estudo em questão classifica-se de acordo com KERLINGER (1979), na linha dos Estudos Quantitativo-Descritivos, relacionado com a verificação de uma hipótese de trabalho. Procura-se por meio deste, verificar a hipótese de que o modelo proposto da Mistura Discreta de Normais gera a distribuição dos retornos observada, estabelecendo-se assim uma relação de causa-efeito implícita.

4.3.2) ALGORITMO

A modelagem matemática do estudo proposto será feita através da aplicação do método da máxima verossimilhança para a estimação de parâmetros, sendo para isto elaborado um programa computacional.

4.3.3) DESCRIÇÃO DA AMOSTRA

A pesquisa foi baseada em séries históricas das ações PARANAPANEMA, PETROBRÁS, SHARP e VALE DO RIO DOCE, as quais são negociadas no Mercado Brasileiro de Opções, num período de aproximadamente 5 anos . O banco de dados, contendo 1260 informações, foi obtido a partir dos bancos de dados de CANABARRO (1988) e LEMGRUBER *et alii* (1988), abrangendo o período de Agosto de 1983 até Setembro de 1988. Todas as informações relevantes para o cálculo dos retornos, como dividendos, bonificações e desdobramentos foram incluídas no banco de dados.

Para o cálculo dos retornos será utilizada a seguinte fórmula:

$$RC(j) = \ln \frac{[PC(j) + DIV(j)] * SPLIT(j)}{PC(j-1)}$$

onde

$$j = 2, \dots, N$$

N = número total de dias da amostra

RC(j) = retorno da ação em j

$P(j)$ = preço da ação

$DIV(j)$ = dividendos pagos

$SPLIT(j)$ = desdobramentos

$P(j-1)$ = preço da ação no dia anterior

Com o objetivo de acurar a análise e testar a hipótese de estacionaridade dos retornos, o banco de dados integral foi dividido em duas partes, de cerca de 2,5 anos cada (Ago/83-Fev/86 e Mar/86-Set/88). Uma das motivações para tal procedimento é a especulação de que se a hipótese de estacionaridade é verificada, então com o particionamento do banco de dados, não seriam observadas grandes variações nos parâmetros (μ) e (σ), sendo estes praticamente constantes ao longo do tempo. A outra razão desta divisão é testar o grau de sensibilidade do algoritmo numérico, ou seja, a sua capacidade de convergência com um número menor de informações.

5) ANÁLISE E INTERPRETAÇÃO DOS RESULTADOS

Conforme evidenciado nas tabelas 1, 2 e 3, todas as ações analisadas (PETROBRÁS, VALE DO RIO DOCE, SHARP e PARANAPANEMA) apresentam-se como uma mistura discreta de duas Normais, a um nível de significância bem menor que 1% , o que denota uma superioridade descritiva deste tipo de distribuição em relação à distribuição Normal padrão. O quadro referente à ação da PETROBRÁS contido na primeira tabela mostra bem o ocorrido em todo o intervalo de análise, onde a distribuição observada de retornos apresenta uma média de 0,0063 e um desvio-padrão de 0,0502, diferindo bastante da mistura discreta de duas Normais encontrada. A primeira Normal apresentou média de 0,0037 e desvio-padrão de 0,0296, enquanto que a segunda apresentou média de 0,0091 e desvio-padrão de 0,0651, com a percentagem de observações (λ_1) de 51,4% para a primeira Normal e 48,6% (λ_2) para a segunda. A razão de verossimilhança encontrada $r\chi_{12}$ de 32,26 mostra que a mistura de duas Normais adere-se bem mais à distribuição real dos retornos do que a distribuição Normal a um nível bem menor que 1% (onde é necessário uma razão de verossimilhança $r\chi_{12}$ de 11,34).

Com a divisão do banco de dados pela metade feita com o objetivo de acurar a análise, a predominância da distribuição da mistura de duas Normais permaneceu, em relação aos dois períodos analisados. Os níveis de significância da razão de verossimilhança $r\chi_{12}$ foram inferiores a 1% com exceção das séries PARANAPANEMA 2 e VALE DO RIO DOCE 2, onde as razões de verossimilhança encontradas

TABELA 1 - Apresentação dos parâmetros para os modelos de 1 Normal e Mistura Discreta de 2 Normais, relativos aos bancos de dados das ações PETROBRÁS, VALE DO RIO DOCE, SHARP e PARANAPANEMA.

PETROBRÁS	
1N	$\alpha = 0.0063$ $\sigma = 0.0502$
2N	$\alpha_1 = 0.0037$ $\alpha_2 = 0.0091$ $\sigma_1 = 0.0296$ $\sigma_2 = 0.0651$ $\lambda = 0.5140$ $r\chi = 32.26^*$

VALE DO RIO DOCE	
1N	$\alpha = 0.0060$ $\sigma = 0.0520$
2N	$\alpha_1 = 0.0051$ $\alpha_2 = 0.0071$ $\sigma_1 = 0.0639$ $\sigma_2 = 0.0299$ $\lambda = 0.5700$ $r\chi = 21.93^*$

SHARP	
1N	$\alpha = 0.0046$ $\sigma = 0.0737$
2N	$\alpha_1 = 0.0032$ $\alpha_2 = 0.0122$ $\sigma_1 = 0.0524$ $\sigma_2 = 0.1410$ $\lambda = 0.8438$ $r\chi = 84.78^*$

PARANAPANEMA	
1N	$\alpha = 0.0067$ $\sigma = 0.0566$
2N	$\alpha_1 = 0.0073$ $\alpha_2 = 0.0015$ $\sigma_1 = 0.0444$ $\sigma_2 = 0.1194$ $\lambda = 0.9005$ $r\chi = 67.11^*$

- * Significante a 1%
- ** Significante a 5%
- *** Significante a 10%

TABELA 2 - Apresentação dos parâmetros para os modelos de 1 Normal e Mistura Discreta de 2 Normais, relativos às metades dos bancos de dados das ações PETROBRÁS e VALE DO RIO DOCE.

PETROBRAS 1	
1N	$\alpha = 0.0086$ $\sigma = 0.0501$
2N	$\alpha_1 = 0.0139$ $\alpha_2 = 0.0003$ $\sigma_1 = 0.0216$ $\sigma_2 = 0.0610$ $\lambda = 0.6137$ $r\chi = 22.87^*$

PETROBRAS 2	
1N	$\alpha = 0.0040$ $\sigma = 0.0503$
2N	$\alpha_1 = 0.0047$ $\alpha_2 = 0.0030$ $\sigma_1 = 0.0345$ $\sigma_2 = 0.0681$ $\lambda = 0.6143$ $r\chi = 12.26^*$

VALE DO RIO DOCE 1	
1N	$\alpha = 0.0082$ $\sigma = 0.0474$
2N	$\alpha_1 = 0.0093$ $\alpha_2 = 0.0055$ $\sigma_1 = 0.0333$ $\sigma_2 = 0.0704$ $\lambda = 0.7076$ $r\chi = 18.09^*$

VALE DO RIO DOCE 2	
1N	$\alpha = 0.0038$ $\sigma = 0.0564$
2N	$\alpha_1 = 0.0031$ $\alpha_2 = 0.0064$ $\sigma_1 = 0.0620$ $\sigma_2 = 0.0236$ $\lambda = 0.7953$ $r\chi = 05.65^{***}$

* Significante a 1%
 ** Significante a 5%
 *** Significante a 10%

TABELA 3 - Apresentação dos parâmetros para os modelos de 1 Normal e Mistura Discreta de 2 Normais, relativos às metades dos bancos de dados das ações SHARP e PARANAPANEMA.

SHARP 1	
1N	$\alpha = 0.0106$ $\sigma = 0.0719$
2N	$\alpha_1 = 0.0088$ $\alpha_2 = 0.0291$ $\sigma_1 = 0.0521$ $\sigma_2 = 0.1740$ $\lambda = 0.9122$ $r\chi = 63.06^*$

SHARP 2	
1N	$\alpha = -0.0011$ $\sigma = 0.0750$
2N	$\alpha_1 = -0.0027$ $\alpha_2 = 0.0027$ $\sigma_1 = 0.0494$ $\sigma_2 = 0.1146$ $\lambda = 0.7039$ $r\chi = 27.32^*$

PARANAPANEMA 1	
1N	$\alpha = 0.0084$ $\sigma = 0.0604$
2N	$\alpha_1 = 0.0089$ $\alpha_2 = 0.0052$ $\sigma_1 = 0.0423$ $\sigma_2 = 0.1264$ $\lambda = 0.8690$ $r\chi = 54.40^*$

PARANAPANEMA 2	
1N	$\alpha = 0.0046$ $\sigma = 0.0516$
2N	$\alpha_1 = 0.0058$ $\alpha_2 = -0.0029$ $\sigma_1 = 0.0445$ $\sigma_2 = 0.0827$ $\lambda = 0.8624$ $r\chi = 06.98^{**}$

* Significante a 1%
 ** Significante a 5%
 *** Significante a 10%

(6,98 e 5,65) indicam níveis de significância de aproximadamente 7,7% e 14,2%.

Para analisar a estacionariedade das distribuições dos retornos, foram aplicados o teste t modificado (utilizado em amostras cujas variâncias são diferentes), que diz respeito à homogeneidade das médias, e o de Bartlett, para testar a homogeneidade das variâncias (DIXON, 1985). Para tal, foram tomados os valores das médias e variâncias referentes às duas Normais encontradas em todo o banco de dados analisado. Conforme os resultados obtidos (tabela 4), a estacionariedade dos retornos é refutada pela não homogeneidade das variâncias relativas à mistura discreta das duas Normais, sendo que para todas as amostras analisadas os valores das estatísticas F correspondentes foram bem maiores que os valores críticos a um nível de significância de 1%. Quanto às médias, a maioria dos valores das estatísticas t , não permite a refutação da hipótese de homogeneidade a um nível de significância de 1% (distribuições similares às exemplificadas nas figuras 4, 5 e 6 do capítulo 4).

A mistura discreta de três Normais foi tentada para todo o banco de dados, mas os resultados encontrados não permitiram provar a sua superioridade descritiva. As ações SHARP, PETROBRÁS e VALE DO RIO DOCE apresentaram respectivamente razões de verossimilhança $r\chi_{12}$ de apenas 1,16, 0,53, 0,003, e para a ação PARANAPANEMA não foi assegurada a convergência para nenhum ponto de máximo local, o que denota o insignificante ganho na capacidade descritiva em relação à distribuição da mistura discreta de duas

Normais, embora o método utilizado não possa garantir a não existência de máximos globais melhores.

TABELA 4 - Resultados dos testes de homogeneidade das médias (t) e homogeneidade das variâncias (Bartlett).

SERIES	TESTE t	GL	BARTLETT (F)	GL 1	GL 2
PETROBRAS	1,87 **	843	360,05 ***	1	1258
VALE	0,73 *	1076	306,53 ***	1	1258
SHARP	0,88 *	206	465,59 ***	1	1258
PARANAPANEMA	0,53 *	128	357,13 ***	1	1258
PETROBRAS 1	3,34 ***	281	316,59 ***	1	628
PETROBRAS 2	0,36 *	321	141,38 ***	1	628
VALE 1	0,70 *	218	164,49 ***	1	628
VALE 2	0,95 *	546	126,65 ***	1	628
SHARP 1	0,86 *	55	264,09 ***	1	626
SHARP 2	0,61 *	215	208,94 ***	1	628
PARANAPANEMA 1	0,26 *	84	265,26 ***	1	628
PARANAPANEMA 2	0,95 *	94	74,88 ***	1	628

* Não significante a 5%
 ** Significante a 5%
 *** Significante a 1%

6) IMPLICAÇÕES DO ESTUDO COM RESPEITO AO PROCESSO DE APREÇAMENTO DE OPÇÕES

A formulação de Black & Scholes está baseada num processo estocástico de evolução de preços de ações, que segue uma distribuição log-Normal ao longo do tempo. Para a dedução formal desta, assume-se que a taxa de retorno de uma determinada ação pode ser descrita por

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz \quad (23)$$

onde

μ = taxa de retorno instantânea esperada,

σ = desvio-padrão da taxa de retorno esperada,

dt = pequeno incremento de tempo, e

dz = um processo Wiener.

O valor da opção de compra de uma ação é função do preço da ação e do tempo ($C = C(S,t)$). Utilizando-se do cálculo estocástico, BLACK & SCHOLES (1973) derivaram a fórmula do valor de compra de uma opção utilizando a técnica conhecida por Lema de Itô (ARNOLD, 1974). Chega-se então à seguinte equação diferencial estocástica :

$$dC = \frac{\partial C}{\partial S} dS + \frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 dt. \quad (24)$$

Quando o processo de difusão de preços é bi-Normal, o valor da opção da Mistura Discreta de Normais (C_{2N}) pressupõe que a taxa de retorno de uma determinada ação seja descrita pela seguinte equação:

$$\frac{dS}{S} = I_1 \frac{dS_1}{S_1} + (1-I_1) \frac{dS_2}{S_2} \quad (25)$$

onde I_1 é um processo estocástico com as seguintes propriedades:

$$I_1 = \begin{cases} 1, & \text{com } E(I_1) = \lambda_1 \\ 0 \end{cases}$$

Como a resolução desta equação estocástica foge do escopo deste trabalho, pode-se apresentar para efeito de especulação, a dedução do valor médio da opção de compra de uma ação (C_M), o qual torna-se uma soma ponderada dos valores de opções de compra para cada Normal associada. O valor da opção de compra continua função de S (preço da ação) e t (tempo), mas a taxa de retorno da ação passa a ser descrita por:

$$\frac{dS}{S} = \lambda_1 \frac{dS_1}{S_1} + \lambda_2 \frac{dS_2}{S_2} \quad (26)$$

onde

$$\frac{dS_1}{S_1} = \mu_1 dt + \sigma_1 dz \quad (27)$$

$$\frac{dS_2}{S_2} = \mu_2 dt + \sigma_2 dz \quad (28)$$

Note-se que $C_M = C_M(S, t)$ é igual a $C_M = C_M(S_1, S_2, t)$ pois S é um processo estocástico formado pela soma ponderada de dois outros processos estocásticos independentes. Sendo assim, quando diferencia-se parcialmente C_M em relação a qualquer um dos processos estocásticos, a derivada em relação ao outro processo (constante) torna-se nula .

Com isto a fórmula de apreçamento de opções para a média ponderada de duas Normais resulta em

$$dC_M = \lambda_1 \left\{ \frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{\partial C}{\partial S_1} dS_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S_1^2} (\sigma_1 S_1)^2 dt \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \lambda_2 \left\{ \frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{\partial C}{\partial S_2} dS \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S_2^2} (\sigma_2 S_2)^2 dt \right\} \quad (29)
\end{aligned}$$

que representa a soma ponderada de duas opções de compra de uma determinada ação:

$$C_M = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 \quad (30)$$

Para comparar os resultados obtidos pela fórmula de Black e Scholes e pela média ponderada de duas Normais, foi formado um banco de dados artificial com diversos valores de preços de ações, preços de exercício, taxa de juros e tempo. As variâncias utilizadas foram as apresentadas neste trabalho, referidas no capítulo 5. As diferenças mais significativas encontradas foram relativas às variações nos valores de k (preço de exercício), envolvendo indiretamente os fatores t (tempo) e i (taxa de juros) que afetam a diferença relativa entre k e S (preço da ação). Para ilustrar os resultados obtidos, mostra-se um exemplo a seguir:

t (tempo de vencimento) = 21 dias

i (taxa de juros) = 8,5 % ao mês

S = 99

$\sigma_0 = 0,6094$

$\sigma_1 = 0,8$

$\sigma_2 = 0,3$

$\lambda = 0,5$

	K=80	K=100	K=120	K=140
C _{BS}	24,02	9,45	2,43	0,44
C _M	24,20	8,88	2,27	0,68

Nota-se que para valores muito altos ou muito baixos de K o valor da opção de compra relativa a uma Normal é inferior ao valor desta opção relativa à média ponderada de duas Normais, o que pode significar um ganho descritivo em relação à fórmula de Black & Scholes original. Os resultados obtidos pelo modelo de precificação de opções para a média ponderada de duas Normais, podem sinalizar uma correção parcial relativa às observações de MACBETH e MERVILLE (1985) com respeito ao modelo de B & S, onde ocorria uma sub-avaliação para opções muito fora do preço (*out-of-the-money*). Estes desvios podem ocorrer devido às diferenças observadas nos valores das variâncias encontradas pelo Modelo da Mistura Discreta de Normais.

Comparando-se as fórmulas que regem a taxa de retorno de uma determinada ação, descritas pelo modelo da média ponderada de duas Normais (fórmula 29) e pelo modelo da Mistura Discreta de Normais (fórmula 25), nota-se que o último possui uma variância maior que o primeiro, visto que o processo estocástico I_1 possui uma variância e os termos λ_1 e λ_2 são constantes. Com isto, pode-se inferir que o valor da opção $C_{2N} \geq C_M$, pois quanto maior for o valor da variância de um determinado ativo, maior o valor da opção neste ativo.

7) CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com base nos resultados obtidos, pode-se verificar que a hipótese de log-normalidade da distribuição dos retornos das ações analisadas é rejeitada com probabilidades de erro bem menores que 1%, e que a função densidade resultante da mistura discreta de duas Normais apresenta-se como mais descritiva das distribuições de frequências observadas. Trata-se de uma modificação estrutural no comportamento das ações-objeto ao longo do tempo. Além disto, nota-se que a suposição de estacionariedade atrelada à idéia de normalidade ou bi-normalidade fica ameaçada, pois, com a divisão do banco de dados pela metade, encontraram-se valores de médias de retornos bastante diferentes das encontradas com o banco de dados inteiro, apesar de os desvios-padrão não terem apresentado grandes variações. Isto implica que não há estacionariedade ao longo do tempo apenas quando os parâmetros se modificam para cada subconjunto de informações, mas que também analisando-se intervalos menores, parâmetros diferentes são encontrados.

Pode-se antever problemas com respeito à utilização dos resultados obtidos neste trabalho em modelos de apreçamento de opções como o de Black & Scholes. O modelo da MDN foi aplicado a bancos de dados de 5 e 2,5 anos, sendo que em bancos de dados menores há dificuldades de convergência.

Baseado no presente estudo, não é possível qualquer suposição quanto a estacionariedade semanal, quinzenal e mensal dos retornos, porque para tal, seria necessário reorganizar e

recalcular toda a base de dados sobre a qual foi aplicado o modelo da MDN, o que foge do escopo deste trabalho.

Com respeito à elaboração teórica dos modelos existentes na teoria financeira como CAPM, Black & Scholes, etc, nota-se sérios impedimentos quanto às suas suposições básicas. Estes modelos admitem que a distribuição dos retornos é log-Normal e estacionária, o que foi rejeitado em todo o intervalo de análise deste trabalho, corroborando os resultados obtidos por KON (1984) em relação ao mercado americano de ações. Como objeto de investigações futuras, sugere-se que sejam dispendidos esforços (similares aos propostos neste trabalho com relação ao mercado de opções) no sentido da adaptação dos modelos existentes aos resultados de pesquisas mais recentes, com o objetivo de aumentar sua eficácia e poder de previsão.

8) BIBLIOGRAFIA

1) AHARONY, Joseph e SWARY, I. Quarterly Dividend and Earnings Announcements and Stockholders Returns: An Empirical Analysis. The Journal of Finance, 35:1-12, Mar 1980.

2) ARNOLD, Arnold. Stochastic Differential Equations: Theory and Applications. John Wiley & Sons, Inc 1974.

3) BALL, Clifford e TOROUS, Walter N. On Jumps in Common Stock Prices and Their Impact on Call Option Pricing. The Journal of Finance, 11:155-173, Mar 1985.

4) BONES, A. , CHEN A. e JATUSIPITAK, S. Investigations of Nonstationarity in Prices. Journal of Business, 47:518-537, Oct 1974.

5) BLACK, Fischer e SCHOLES, M. The Valuation of Option Contracts and a Test of Market Efficiency. The Journal of Finance, 27:399-417, May 1972.

6) BLATTBERG, R. e GONEDES, N. A Comparison of The Stable and Student Distributions as Statistical Models of Stock Prices. Journal of Business, 47:244-80, Apr 1974.

7) CANABARRO, Eduardo . Avaliação de Opções de Compra quando o Processo de Preços da Ação-Objeto é Descontínuo: Evidência Empírica no Brasil. Porto Alegre , UFRGS, Jul 1988, 97 pg, Dissertação de Mestrado.

8) LEMGRUBER, E. , BECKER, J. L. e CHAVES, Tânia . O Efeito Fim de Semana no Comportamento dos Retornos Diários de Índices de Ações. Anais da XII Reunião da ANPAD, Vol 2:873-78, Set 1988.

9) CLARK, Peter K. A Subordinated Stochastic Process Model with Finite Variance for Speculative Prices. Econometrica, 41:135-155, Jan 1973.

10) DIXON, W. J. (Organizador). BMDP Statistical Software. University of California Press, 1985.

11) FAMA, Eugene . Mandelbrot and the Stable-Paretian Hypothesis. Journal of Business, 36:420-29, Out 1963.

12) _____ . The Behavior of Stock Prices. Journal of Business, 37:34-105, Jan 1965.

- 13) _____ e ROSS, R. Parameter Estimates for Symmetric Stable Distributions. Journal of the American Statistical Association, 66:331-38, Jun 1971.
- 14) FIELITZ, Bruce D. e ROZELLE, P. Stable Distributions and the Mixtures of Distributions Hypotheses for Common Stock Returns. Journal of the American Statistical Association, 78:28-36, Mar 1983.
- 15) FRENCH, Kenneth R. Stock Returns and the Weekend Effect. Journal of Financial Economics 8:55-69, 1980.J
- 16) GESKE, Robert , ROLL, Richard e SHASTRI, Kuldeep. Over-the-Counter Option Market Dividend Protection and "Biases" in the Black-Scholes Model: A Note. The Journal of Finance, 38:1271-77, Set 73.
- 17) GIBBONS, M. e HESS, P. Day of the Week Effects and Assets Returns. Journal of Business, 54:579-96, Oct 1981.
- 18) HAGERMAN, R. More Evidence on the Distribution of Security Returns. The Journal of Finance, 33:1213-20, Set 1978.
- 19) HSU, Der-Ann , MILLER, R. e WICHERN, D. On the Stable Paretian Behavior of Stock-Market Prices. Journal of the American Statistical Association, 69:108-13, Mar 1974.
- 20) KERLINGER, Fred . Metodologia da Pesquisa em Ciências Sociais . São Paulo, EPV - EDUSP, 1979.
- 21) KON, Stanley . Models of Stock Returns - A Comparison. The Journal of Finance, 39:147-65, Mar 1984.
- 22) LUENBERGER, David G. Introducion to Linear and Non-Linear Programming. Menlo Park, CA, Addison Wesley, 1973.
- 23) MACBETH, J. e MERVILLE, L. An Empirical Examination of the Black-Scholes Call Option Pricing Model. The Journal of Finance, 34:1173-86, Dec 1979.
- 24) MANDELBROT, Benoit . The Variation of Certain Speculative Prices. The Journal of Business, 36:394-419, 1963.
- 25) MERTON, Robert . The Theory of Rational Option Pricing. The Bell Journal of Economics and Management Science, 4 (1):141-83, Spring 1973.
- 26) _____. Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous. Journal of Financial Economics 3:125-44, Jan-Mar 1976.

27) OFFICER, Robert . The Distribution of Stock Returns. Journal of the American Statistical Association, 67:807-12, Dec 1972.

28) OSBORNE, M. Brownian Motion in the Stock Market. Operations Research, 7:145-73, 1959.

29) PRAETZ, Peter . The Distribution of Share Price Changes. Journal of Business, 45:49-55, Jan 1972.

30) PRESS, S. James . A Compound Events Model of Security Prices. Journal of Business, 40:317-35, Jul 1967.

9) APÊNDICES

A) MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON (1)

O método de Newton-Raphson tem por objetivo a resolução de sistemas de equações não-lineares a n dimensões.

Trata-se de um processo iterativo que apresenta-se bastante rápido quanto à convergência local em relação aos outros métodos de convergência como o método da Falsa Posição, método do Gradiente, etc (LUENBERGER, 1973). Quanto à convergência global, é impossível a garantia desta, pois o máximo que se pode dizer é que atingiu-se um ponto de máximo local (quando a matriz Hessiana é negativa), escolhendo-se a partir daí o maximum maximorum.

Seja o problema maximizar $f(\theta)$, onde θ é o vetor de variáveis independentes. Num ponto de máximo local $\hat{\theta}$:

$$1) G(\theta) = 0; \quad (1)$$

$$2) H(\theta) \text{ é definida negativa}; \quad (2)$$

onde G é o vetor de derivadas de primeira ordem de $f(\theta)$ e $H(\theta)$ é a matriz Hessiana (matriz simétrica de derivadas de segunda ordem da função f).

(1) Extraído de CANABARRO (1988).

$$\frac{[\lambda_1 p(rt|\gamma_1) (rt-\alpha_1)^2/\sigma_1^3 - 1/\sigma_1]}{[DEN]^2}$$

$$\frac{\partial^2 LT}{\partial \alpha_1 \partial \sigma_2} = \frac{\sum_{t=1}^T - [(\lambda_1 p(rt|\gamma_1) (rt-\alpha_1)/\sigma_1^2)] \times [\lambda_2 p(rt|\gamma_2) (rt-\alpha_2)^2/\sigma_2^3 - 1/\sigma_2]}{[DEN]^2}$$

$$\frac{\partial^2 LT}{\partial \alpha_1 \partial \lambda} = \frac{\sum_{t=1}^T [DEN] \times [\lambda_1 p(rt|\gamma_1) (rt-\alpha_1)/\sigma_1^2] - \lambda_1 p(rt|\gamma_1) (rt-\alpha_1)/\sigma_1^2 \times [p(rt|\gamma_1) - p(rt|\gamma_1)]}{[DEN]^2}$$

$$\frac{\partial^2 LT}{\partial \alpha_2^2} = \frac{\sum_{t=1}^T [DEN] \times [\lambda_2 p(rt|\gamma_2) (rt-\alpha_2)/\sigma_2^2] - [\lambda_2 p(rt|\gamma_2) (rt-\alpha_2)/\sigma_2^2]^2}{[DEN]^2}$$

$$\frac{\partial^2 LT}{\partial \alpha_2 \partial \sigma_1} = \frac{\sum_{t=1}^T - [\lambda_2 p(rt|\gamma_2) (rt-\alpha_2)/\sigma_2^2] \times [\lambda_1 p(rt|\gamma_1) (rt-\alpha_1)^2/\sigma_1^3 - 1/\sigma_1]}{[DEN]^2}$$

$$\frac{\partial^2 LT}{\partial \alpha_2 \partial \sigma_2} = \frac{\sum_{t=1}^T [DEN] \times [\lambda_2 p(rt|\gamma_2) (rt-\alpha_2) (rt-\alpha_2)^2/\sigma_2^5 - 3/\sigma_2^3] - [\lambda_2 p(rt|\gamma_2) (rt-\alpha_2)/\sigma_2^2] \times [\lambda_2 p(rt|\gamma_2) (rt-\alpha_2)^2/\sigma_2^3 - 1/\sigma_2]}{[DEN]^2}$$

$$\frac{\partial LT}{\partial \alpha_2} = \sum_{t=1}^T \frac{\lambda_2 p(rt|\gamma_2) (rt-\alpha_2)/\sigma_2^2}{[DEN]}$$

$$\frac{\partial LT}{\partial \sigma_1} = \sum_{t=1}^T \frac{\lambda_1 p(rt|\gamma_1) [(rt-\alpha_1)/\sigma_1^3 - 1/\sigma_1]}{[DEN]}$$

$$\frac{\partial LT}{\partial \sigma_2} = \sum_{t=1}^T \frac{\lambda_2 p(rt|\gamma_2) [(rt-\alpha_2)^2/\sigma_2^3 - 1/\sigma_2]}{[DEN]}$$

$$\frac{\partial LT}{\partial \lambda} = \sum_{t=1}^T \frac{[p(rt|\gamma_1) - p(rt|\gamma_2)]}{[DEN]}$$

DERIVADAS DE 2^o ORDEN

$$\frac{\partial^2 LT}{\partial \alpha_1^2} = \frac{\sum_{t=1}^T [DEN] \times [\lambda_1 p(rt|\gamma_1) ((rt-\alpha_1)/\sigma_1^2 - 1/\sigma_1) - [\lambda_1 p(rt|\gamma_1) \cdot (rt-\alpha_1)/\sigma_1^2]^2]}{[DEN]^2}$$

$$\frac{\partial^2 LT}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} = \frac{\sum_{t=1}^T - [\lambda_1 p(rt|\gamma_1) (rt-\alpha_1)/\sigma_1^2] \times [\lambda_2 p(rt|\gamma_2) (rt-\alpha_2)/\sigma_2^2]}{[DEN]^2}$$

$$\frac{\partial^2 LT}{\partial \alpha_1 \partial \sigma_1} = \sum_{t=1}^T [DEN] \times [\lambda_1 p(rt|\gamma_1) (rt-\alpha_1) ((rt-\alpha_1)^2/\sigma_1^5 - 3/\sigma_1^3) - [\lambda_1 p(rt|\gamma_1) (rt-\alpha_1)/\sigma_1^2] \times$$

C) DERIVADAS DE 1ª E 2ª ORDEM

Para o cálculo das 1ª e 2ª derivadas, serão explicitadas somente as relativas à mistura discreta de duas Normais, sendo que as restantes podem ser calculadas como uma extensão das aqui apresentadas.

Seja o problema calcular as 1ª e 2ª derivadas da função de verossimilhança

$$Lr(\theta) = \sum_{t=1}^N \log \sum_{i=1}^N \lambda_i p(r_t | \gamma_i),$$

onde a função $p(r_t | \gamma_i)$, é a função de densidade gaussiana condicionada às informações γ_i :

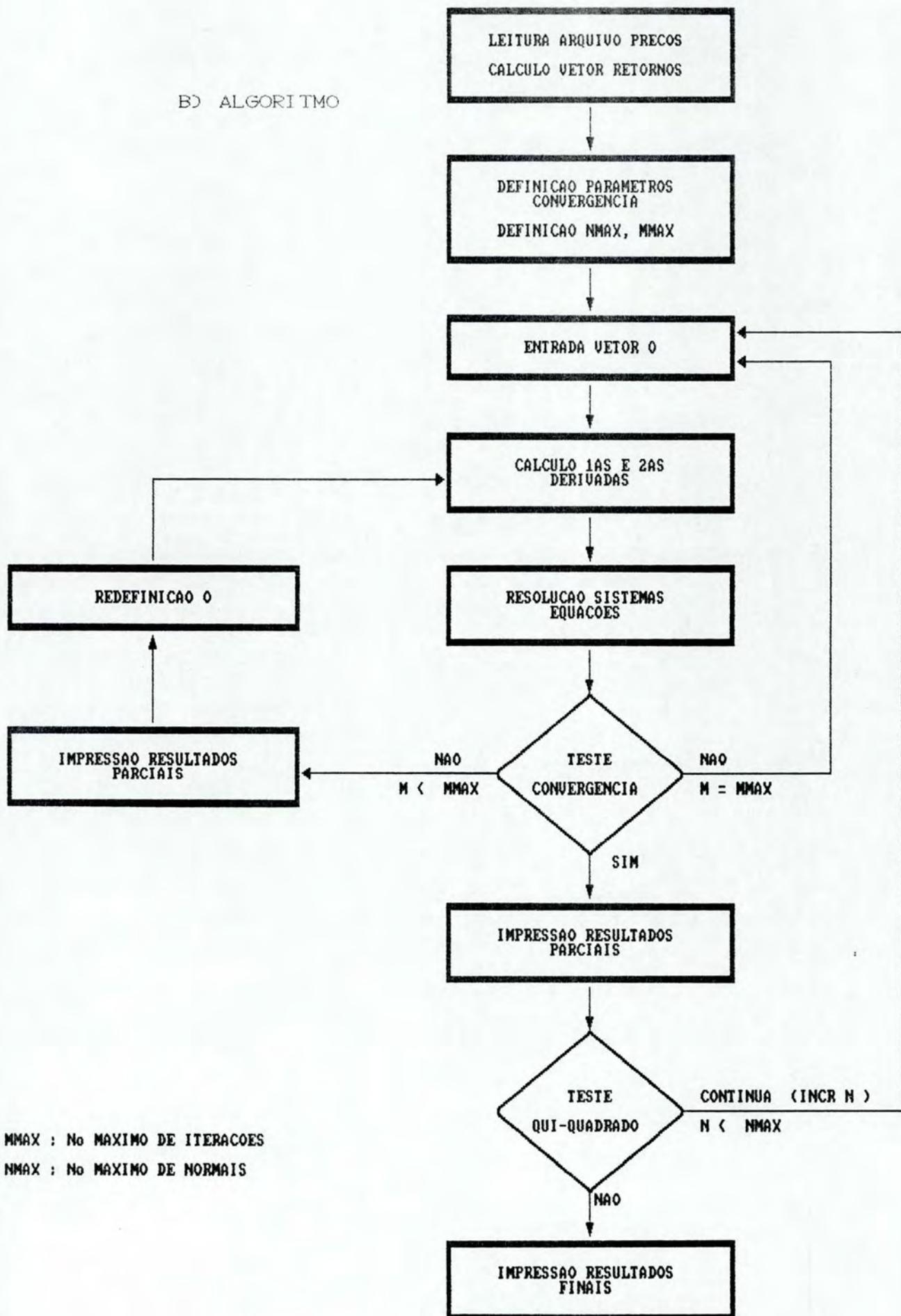
$$p(r_t | \gamma_i) = \frac{e^{-1/2 ((r_t - \alpha_i) / \sigma)^2}}{\sigma \sqrt{2\pi}}$$

DERIVADAS DE 1ª ORDEM

$$\frac{\partial LI}{\partial \alpha_1} = \sum_{t=1}^T \lambda \frac{p(rt | \gamma_1) (rt - \alpha_1) / \sigma_1^2}{[DEN]}$$

$$\text{onde DEN} = \sum_{i=1}^2 \lambda_i p(rt | \gamma_i)$$

B) ALGORITMO



O próximo ponto da sequência θ_k é calculado pela fórmula de recorrência (3) na qual é introduzida a expressão (4):

$$\theta_{k+1} = \theta_k - u_k \quad (9)$$

Se $\hat{\theta}$ é a solução de (1), então $\hat{\theta} = \lim \theta_k$, tal que

$$\theta_{k+1} = \theta_k - H_k \cdot G_k \quad (3)$$

Para calcular H_k , utiliza-se o artifício

$$u_k = H_k \cdot G_k \quad (4)$$

onde u_k é a solução do sistema

$$H_k \cdot u_k = G_k \quad (5)$$

A solução do sistema de equações (5) pode ser obtida pela decomposição de H através de eliminação gaussiana:

$$H_k = L \cdot U \quad (6)$$

onde

L : matriz triangular inferior;

U : matriz triangular superior.

A solução de (3) obtém-se resolvendo

$$L \cdot y = G_k \quad (7)$$

$$U \cdot u_k = y \quad (8)$$

BEGIN

```
WRITELNC ' QUAL A SERIE DESEJADA ? ' );  
READLNC LEITURA );  
WRITELNC LST, LEITURA );  
J:=0;  
WRITELNC ' LENDO ARQUIVO DE PRECOS ' );  
ASSIGNC ARQPRECOS, 'B:' + LEITURA );  
RESETC ARQPRECOS );
```

```
WHILE NOT EOF(ARQPRECOS) DO  
BEGIN  
INCCJ);  
READLN ( ARQPRECOS, DATA[ J ], DIVIDENDOS[ J ], SPLITI[ J ], P[ J ] );  
END;  
CLOSE ( ARQPRECOS );  
NR:=J-1;  
WRITELNC ' CALCULANDO RETORNOS ' );  
FOR J:=NR DOWNT0 2 DO BEGIN  
RET[ J ]:=LNC( P[ J ] + DIVIDENDOS[ J ] ) * SPLITI[ J ] / P[ J-1 ] );  
END;  
END; < PROCEDURE RETORNOS >
```

```
PROCEDURE PARAMETROS( VAR CONV1: EXTENDED; VAR NMAX, MMAX: INTEGER );  
< SUBROTINA QUE ESTABELECE OS PARAMETROS DE CONVERGENCIA CONV1,  
O NUMERO MAXIMO DE NORMAIS NMAX E O NUMERO MAXIMO DE ITERACOES  
MMAX >
```

BEGIN

```
WRITEC ' QUAL A PRECISAO DESEJADA ? ' );  
READLNC CONV1 );  
WRITEC ' QUAL O NUMERO MAXIMO DE NORMAIS ? ' );  
READLNC NMAX );  
WRITEC ' QUAL O NUMERO MAXIMO DE ITERACOES ? ' );  
READLNC MMAX );  
WRITEC ' QUAL O NIVEL DE SIGNIFICANCIA QUI ? ( 1 OU 5% ) ' );  
READLNC NSIG );
```

END; < PROCEDURE PARAMETROS >

DD PROGRAMA

```

PROGRAM NORMAIS ;

USES NORM, PRINTER;

TYPE

MA= ARRAY[1..14,1..28] OF EXTENDED;

VAR
    P, RET: RT;
VAR
    FIM, I, J, NN, NP, NR, NMAX, M, MMAX, NSIG: INTEGER;
VAR
    ALFA, ALFA1, ALFA2, ALFA3, ALFA4, ALFA5, SIG, SIG1, SIG2, SIG3,
    SIG4, SIG5, LAMB, LAMB1, LAMB2, LAMB3, LAMB4, CONV1, QUI,
    VER1, VER2, VER3, VER4, VER5, DET: EXTENDED;
VAR
    LEITURA: STRING;
VAR
    ARQIMPRESS, PMA, PETRO, VALE: TEXT;
VAR
    D1, V, X, X1: DER1;
VAR
    D2, F, L, U: DER2;
VAR
    TETA: DER1;
VAR
    CONTINUA: INTEGER;
LABEL
    FINAL;

PROCEDURE RETORNOSC VAR RET, P: RT; VAR NR: INTEGER;
VAR LEITURA: STRING);

< SUBROTINA QUE LE O ARQUIVO DE PRECOS E CALCULA OS RETORNOS >

< DECLARACAO DE VARIAVEIS >

VAR
    ARQPRECOS, PMA, PETRO, SHARP, VALE: TEXT;
VAR
    J: INTEGER;
VAR
    SPLIT, DIVIDENDOS: ARRAY[1..1500] OF EXTENDED;
VAR
    DATA: ARRAY[1..1500] OF STRING[10];

```

$$[\sigma_2^3 - 1 / \sigma_2]^2$$

$$[\text{DEN}]^2$$

$$\frac{\partial^2 \text{LT}}{\partial \sigma_2 \partial \lambda} = \frac{\sum_{t=1}^T [\text{DEN}] \times [- p(\text{rt} | \gamma_2) ((\text{rt} - \alpha_2)^2 / \sigma_2^3 - 1 / \sigma_2)] - [\lambda_2 p(\text{rt} | \gamma_2) ((\text{rt} - \alpha_2)^2 / \sigma_2^3 - 1 / \sigma_2)] \times [p(\text{rt} | \gamma_1) - p(\text{rt} | \gamma_2)]}{[\text{DEN}]^2}$$

$$\frac{\partial^2 \text{LT}}{\partial \lambda^2} = \sum_{t=1}^T - \frac{[p(\text{rt} | \gamma_1) - p(\text{rt} | \gamma_2)]^2}{[\text{DEN}]^2}$$

$$\frac{\partial^2 \text{LT}}{\partial \alpha_2 \partial \lambda} = \frac{\sum_{t=1}^T [\text{DEN}] \times [-\lambda_2 p(\text{rt}|\gamma_2) (\text{rt}-\alpha_2)/\sigma_2^2] - [\lambda_2 p(\text{rt}|\gamma_2) ((\text{rt}-\alpha_2)/\sigma_2^2)] \times [p(\text{rt}|\gamma_1) - p(\text{rt}|\gamma_2)]}{[\text{DEN}]^2}$$

$$\frac{\partial^2 \text{LT}}{\partial \sigma_1^2} = \frac{\sum_{t=1}^T [\text{DEN}] \times [\lambda_1 p(\text{rt}|\gamma_1) (2/\sigma_1^2 - 4(\text{rt}-\alpha_1)^2/\sigma_1^4) + \lambda_1 p(\text{rt}|\gamma_1) ((\text{rt}-\alpha_1)^2/\sigma_1^3) ((\text{rt}-\alpha_1)^2/\sigma_1^3 - 1/\sigma_1)] - [\lambda_1 p(\text{rt}|\gamma_1) ((\text{rt}-\alpha_1)^2/\sigma_1^3 - 1/\sigma_1)]^2}{[\text{DEN}]^2}$$

$$\frac{\partial^2 \text{LT}}{\partial \sigma_1 \partial \sigma_2} = \frac{\sum_{t=1}^T - [\lambda_1 p(\text{rt}|\gamma_1) ((\text{rt}-\alpha_1)^2/\sigma_1^3 - 1/\sigma_1)] \times [\lambda_2 p(\text{rt}|\gamma_2) ((\text{rt}-\alpha_2)^2/\sigma_2^3 - 1/\sigma_2)]}{[\text{DEN}]^2}$$

$$\frac{\partial^2 \text{LT}}{\partial \sigma_1 \partial \lambda} = \frac{\sum_{t=1}^T [\text{DEN}] \times [p(\text{rt}|\gamma_1) ((\text{rt}-\alpha_1)^2/\sigma_1^3 - 1/\sigma_1)] - [\lambda_1 p(\text{rt}|\gamma_1) ((\text{rt}-\alpha_1)^2/\sigma_1^3 - 1/\sigma_1)] \times [p(\text{rt}|\gamma_1) - p(\text{rt}|\gamma_2)]}{[\text{DEN}]^2}$$

$$\frac{\partial^2 \text{LT}}{\partial \sigma_2^2} = \frac{\sum_{t=1}^T [\text{DEN}] \times [\lambda_2 p(\text{rt}|\gamma_2) (2/\sigma_2^2 - 4(\text{rt}-\alpha_2)^2/\sigma_2^4) + \lambda_2 p(\text{rt}|\gamma_2) ((\text{rt}-\alpha_2)^2/\sigma_2^3) \cdot ((\text{rt}-\alpha_2)^2/\sigma_2^3 - 1/\sigma_2)] - [\lambda_2 p(\text{rt}|\gamma_2) ((\text{rt}-\alpha_2)^2/\sigma_2^3 - 1/\sigma_2)]^2}{[\text{DEN}]^2}$$

```
FOR J:=5 DOWNTO 2 DO BEGIN
FOR I:=1 TO J-1 DO
D2[J,J-I]:=D2[J-I,J]
END;
```

```
END;< PROCEDURA NORMAIS2 >
```

```
PROCEDURA NORMAIS3(CNR: INTEGER; TETA: DER1;
RET: RT; VAR D1: DER1; VAR D2: DER2);
```

```
< SUBROTINA NUMERO DE NORMAIS N=3 >
```

```
< DECLARACAO DE VARIAVEIS >
```

```
VAR
  I, J, T: INTEGER;
VAR
  E1, E2, E3, C1, C2, C3: EXTENDED;
VAR
  SQ, L1, L2, L3, MS11, MS22, MS33, AUX1, AUX2, AUX3,
  DEN3, DEN32, S1, S2, S3, S11, S22, S33,
  SI12, SI22, SI32, SI13, SI23, SI33, SI14, SI24, SI34, SI15, SI25,
  SI35, SI16, SI26, SI36, ALFA1, ALFA2, ALFA3, SIG1,
  SIG2, SIG3, LAMB1, LAMB2: EXTENDED;
```

```
BEGIN
AUX1:=0; AUX2:=0; AUX3:=0;
```

```
FOR J:=1 TO 14 DO BEGIN
FOR I:=1 TO 14 DO
D2[I,J]:=0;
D1[J]:=0;
END;
```

```
ALFA1:=TETA[1]; ALFA2:=TETA[2]; ALFA3:=TETA[3]; SIG1:=TETA[4];
SIG2:=TETA[5]; SIG3:=TETA[6]; LAMB1:=TETA[7]; LAMB2:=TETA[8];
```

```
< CALCULO DAS CONSTANTES >
```

```
BEGIN
SQ:=SQRT(2*PI);
L1:=LAMB1/SQ;
L2:=LAMB2/SQ;
L3:=(C1-LAMB1-LAMB2)/SQ;
SI12:=SQR(SIG1);
```

```

FOR I:=2 TO NR DO BEGIN
E1:=EXP(-0.5*SQR(RET[I]-ALFA1)/SI12);
E2:=EXP(-0.5*SQR(RET[I]-ALFA2)/SI22);
C1:=RET[I]-ALFA1;
C2:=RET[I]-ALFA2;
DEN2:=(L1/SIG1)*E1+(L2/SIG2)*E2;
DEN22:=SQR(DEN2);
MS11:=2/(SI13)-4*SQR(C1)/(SI15);
MS22:=2/(SI23)-4*SQR(C2)/(SI25);
S1:=SQR(C1)/(SI14)-1/(SI12);
S2:=SQR(C2)/(SI24)-1/(SI22);
S11:=SQR(C1)/(SI16)-3/(SI14);
S22:=SQR(C2)/(SI26)-3/(SI24);

```

< CALCULO DAS DERIVADAS DE 1a ORDEM >

```

D1[1]:=D1[1]+(L1*E1*C1/SI13)/DEN2;
D1[2]:=D1[2]+(L2*E2*C2/SI23)/DEN2;
D1[3]:=D1[3]+(L1*E1*S1)/DEN2;
D1[4]:=D1[4]+(L2*E2*S2)/DEN2;
D1[5]:=D1[5]+(E1/(SIG1*SQ)-E2/(SIG2*SQ))/DEN2;

```

< CALCULO DAS DERIVADAS DE 2a ORDEM >

```

D2[1,1]:=D2[1,1]+(DEN2*(L1*E1*(SQR(C1/SI12)-1/SI12)/SIG1)-
SQR(L1*E1*C1/SI13))/DEN22;
D2[1,2]:=D2[1,2]+((-1)*(L1*E1*C1/SI13)*(L2*E2*C2/SI23))/DEN22;
D2[1,3]:=D2[1,3]+(DEN2*(L1*C1*E1*S11)-(L1*E1*C1/SI13)*(L1*E1*S1))/
DEN22;
D2[1,4]:=D2[1,4]+((-1)*(L1*E1*C1/SI13)*(L2*E2*S2))/DEN22;
D2[1,5]:=D2[1,5]+(DEN2*(E1/SQ*C1/SI13)-(L1*E1*C1/SI13)*
(E1/(SQ*SIG1)-E2/(SQ*SIG2)))/DEN22;
D2[2,2]:=D2[2,2]+(DEN2*(L2*E2*(SQR(C2/SI22)-1/SI22)/SIG2)-
SQR(L2*E2*C2/SI23))/DEN22;
D2[2,3]:=D2[2,3]+((-1)*(L2*E2*C2/SI23)*(L1*E1*S1))/DEN22;
D2[2,4]:=D2[2,4]+(DEN2*(L2*E2*C2*S22)-(L2*E2*C2/SI23)*(L2*E2*S2))/
DEN22;
D2[2,5]:=D2[2,5]+(DEN2*((-1)*E2*C2/(SQ*SIG23))-(L2*E2*C2/SI23*(E1/
(SIG1*SQ)-E2/(SIG2*SQ)))/DEN22;
AUX1:=(DEN2*(L1*E1*MS11)+(L1*E1*S1*SQR(C1)/SI13))-SQR(L1*E1*S1);
D2[3,3]:=D2[3,3]+AUX1/DEN22;
D2[3,4]:=D2[3,4]+((-1)*(L1*E1*S1)*(L2*E2*S2))/DEN22;
D2[3,5]:=D2[3,5]+(DEN2*(E1/SQ*S1)-(L1*E1*S1)*(E1/(SQ*SIG1)-
E2/(SQ*SIG2)))/DEN22;
AUX2:=(DEN2*(L2*E2*MS22)+(L2*E2*S2*SQR(C2)/SI23))-SQR(L2*E2*S2);
D2[4,4]:=D2[4,4]+AUX2/DEN22;
D2[4,5]:=D2[4,5]+(DEN2*((-1)*E2*S2/SQ)-(L2*E2*S2)*(E1/(SIG1*SQ)-
E2/(SIG2*SQ)))/DEN22;
D2[5,5]:=D2[5,5]+((-1)*SQR(E1/(SIG1*SQ)-E2/(SIG2*SQ)))/DEN22;
END;

```

```

FOR I:=2 TO NR DO BEGIN
ALFA:=ALFA+RET[I];
END;
ALFA:=ALFA/(NR-1);

```

```

FOR J:=2 TO NR DO
SIG:=SIG+SQR(RET[J]-ALFA);
SIG:=SQR(SIG/((NR-1)-1));
END;

```

```

PROCEDURE NORMAIS2(NR: INTEGER; TETA: DER1;
RET: RT; VAR D1: DER1; VAR D2: DER2);

```

```

< SUBROTINA NUMERO DE NORMAIS N=2 >

```

```

VAR
E1, E2, C1, C2: EXTENDED;
VAR
I, J, T: INTEGER;
VAR
SQ, L1, L2, MS11, MS22, DEN2, DEN22,
S1, S2, SI1, S22, SI12, SI22, SI13, SI23, AUX1, AUX2,
ALFA1, ALFA2, SIG1, SIG2, LAMB, SI14, SI24, SI15,
SI25, SI16, SI26: EXTENDED;

```

```

BEGIN
AUX1:=0; AUX2:=0;
FOR J:=1 TO 14 DO BEGIN
FOR I:=1 TO 14 DO
D2[I, J]:=0;
D1[J]:=0;
END;

```

```

ALFA1:=TETA[1]; ALFA2:=TETA[2]; SIG1:=TETA[3];
SIG2:=TETA[4]; LAMB:=TETA[5];

```

```

< CALCULO DAS CONSTANTES >

```

```

BEGIN
SQ:=SQR(2*PI);
L1:=LAMB/SQ;
L2:=(1-LAMB)/SQ;
SI12:=SQR(SIG1);
SI22:=SQR(SIG2);
SI13:=SI12*SIG1; SI14:=SI13*SIG1; SI15:=SI14*SIG1; SI16:=SI15*SIG1;
SI23:=SI22*SIG2; SI24:=SI23*SIG2; SI25:=SI24*SIG2; SI26:=SI25*SIG2;
END;

```

```
PROCEDURE ENTRADA (NN:INTEGER; VAR TETA:DER1);
```

```
< SUBROTINA QUE DEFINE OS PARAMETROS DE ENTRADA DO
```

```
PROGRAMA ALFA,SIGMA E LAMBDA >
```

```
BEGIN
```

```
FOR I:=1 TO 14 DO
```

```
TETA[I]:=0;
```

```
CASE NN OF
```

```
2: BEGIN
```

```
WRITELNC 'ALFA1= ,ALFA2= ,SIG1= ,SIG2= ,LAMB= ');
```

```
READLNC TETA[1],TETA[2],TETA[3],TETA[4],TETA[5];
```

```
END;
```

```
3: BEGIN
```

```
WRITELNC 'ALFA1= ,ALFA2= ,ALFA3= ,SIG1= ,SIG2= ,SIG3= ,LAMB1= ,
```

```
LAMB2= ');
```

```
READLNC TETA[1],TETA[2],TETA[3],TETA[4],TETA[5],TETA[6],TETA[7],TETA[8];
```

```
END;
```

```
4: BEGIN
```

```
WRITELNC 'ALFA1= ,ALFA2= ,ALFA3= ,ALFA4= ,SIG1= ,SIG2= ,SIG3= ,
```

```
SIG4= ,LAMB1= ,LAMB2= ,LAMB3= ');
```

```
READLNC TETA[1],TETA[2],TETA[3],TETA[4],TETA[5],TETA[6],TETA[7],
```

```
TETA[8],TETA[9],TETA[10],TETA[11];
```

```
END;
```

```
5: BEGIN
```

```
WRITELNC 'ALFA1= ,ALFA2= ,ALFA3= ,ALFA4= ,ALFA5= ,SIG1= ,
```

```
SIG2= ,SIG3= ,SIG4= ,SIG5= ');
```

```
WRITELNC 'LAMB1= ,LAMB2= ,LAMB3= ,LAMB4= ');
```

```
READLNC TETA[1],TETA[2],TETA[3],TETA[4],TETA[5],
```

```
TETA[6],TETA[7],TETA[8],TETA[9],TETA[10],
```

```
TETA[11],TETA[12],TETA[13],TETA[14];
```

```
END;
```

```
END;
```

```
END; < PROCEDURE ENTRADA >
```

```
PROCEDURE NORMAIS1 (RET:RT;NR:INTEGER;VAR SIG,ALFA:EXTENDED);
```

```
VAR
```

```
I,J:INTEGER;
```

```
BEGIN
```

```
ALFA:=0.0;SIG:=0.0;
```

```
END; < PROCEDURE NORMAIS3 >
```

```
PROCEDURE GAUSSC(NN: INTEGER; F: DER2; VAR L, U: DER2);
```

```
< SUBROTINA DE ELIMINACAO GAUSSIANA - DECOMPOSICAO F=LU >
```

```
< DECLARACAO DE VARIAVEIS >
```

```
VAR  
    I, J, K: INTEGER;
```

```
BEGIN
```

```
FOR I:=1 TO NP DO BEGIN  
FOR J:=1 TO NP DO BEGIN  
U[I, J]:=F[I, J];  
L[I, J]:=0;  
END;  
L[I, I]:=1;  
END;
```

```
FOR I:=1 TO NP DO BEGIN  
FOR K:=I+1 TO NP DO BEGIN  
L[K, I]:=U[K, I]/U[I, I];  
FOR J:=I TO NP DO  
U[K, J]:=U[K, J]-L[K, I]*U[I, J];  
END;  
END;
```

```
END; < PROCEDURE ELIMINACAO GAUSSIANA >
```

```
PROCEDURE CALCVCNP: INTEGER; G: DER1; L, U: DER2; VAR V: DER1);
```

```
< RESOLUCAO DE V PARA FV=G >
```

```
< DECLARACAO DE VARIAVEIS >
```

```
VAR  
    I, J: INTEGER;  
VAR  
    Y: ARRAY[1..14] OF EXTENDED;  
VAR  
    S: EXTENDED;
```

```

/DEN32;
D2[ 2, 2]: =D2[ 2, 2]+(DEN3*(L2*E2*(SQRC C2/SI 22)-1/SI 22)/SI G2)-
SQRC(L2*E2*C2/SI 23))/DEN32;
D2[ 2, 3]: =D2[ 2, 3]+(( -1)*(L2*E2*C2/SI 23)*(L3*E3*C3/SI 33))/DEN32;
D2[ 2, 4]: =D2[ 2, 4]+(( -1)*(L2*E2*C2/SI 23)*(L1*E1*S1))/DEN32;
D2[ 2, 5]: =D2[ 2, 5]+(DEN3*(L2*E2*C2*S22)-(L2*E2*C2/SI 23)*(L2*E2*S2))/
/DEN32;
D2[ 2, 6]: =D2[ 2, 6]+(( -1)*(L2*E2*C2/SI 23)*(L3*E3*S3))/DEN32;
D2[ 2, 7]: =D2[ 2, 7]+(( -1)*(L2*E2*C2/SI 23)*(E1/(SI G1*SQ)-E3/(SI G3*SQ)))/
/DEN32;
D2[ 2, 8]: =D2[ 2, 8]+(DEN3*(E2/SQ*C2/SI 23)-(L2*E2*C2/SI 23)*(E2/
(SQ*SI G2)-E3/(SQ*SI G3)))/DEN32;
D2[ 3, 3]: =D2[ 3, 3]+(DEN3*(L3*E3*(SQRC C3/SI 32)-1/SI 32)/SI G3)-
SQRC(L3*E3*C3/SI 33))/DEN32;
D2[ 3, 4]: =D2[ 3, 4]+(( -1)*(L3*E3*C3/SI 33)*(L1*E1*S1))/DEN32;
D2[ 3, 5]: =D2[ 3, 5]+(( -1)*(L3*E3*C3/SI 33)*(L2*E2*S2))/DEN32;
D2[ 3, 6]: =D2[ 3, 6]+(DEN3*(L3*E3*C3*S33)-(L3*E3*C3/SI 33)*(L3*E3*S3))/
/DEN32;
D2[ 3, 7]: =D2[ 3, 7]+(DEN3*( -1)*(E3/SQ*C3/SI 33)-(L3*E3*C3/SI 33)*
(E1/(SI G1*SQ)-E3/(SI G3*SQ)))/DEN32;
D2[ 3, 8]: =D2[ 3, 8]+(DEN3*( -1)*(E3/SQ*C3/SI 33)-(L3*E3*C3/SI 33)*
(E2/(SI G2*SQ)-E3/(SI G3*SQ)))/DEN32;
AUX1: =(DEN3*(L1*E1*MS11)+(L1*E1*S1*SQRC C1)/SI 13)-SQRC(L1*E1*S1));
D2[ 4, 4]: =D2[ 4, 4]+AUX1/DEN32;
D2[ 4, 5]: =D2[ 4, 5]+(( -1)*(L1*E1*S1)*(L2*E2*S2))/DEN32;
D2[ 4, 6]: =D2[ 4, 6]+(( -1)*(L1*E1*S1)*(L3*E3*S3))/DEN32;
D2[ 4, 7]: =D2[ 4, 7]+(DEN3*(E1/SQ*S1)-(L1*E1*S1)*(E1/(SQ*SI G1)-
E3/(SQ*SI G3)))/DEN32;
D2[ 4, 8]: =D2[ 4, 8]+(( -1)*(L1*E1*S1)*(E2/(SQ*SI G2)-E3/(SQ*SI G3)))/
DEN32;
AUX2: =(DEN3*(L2*E2*MS22)+(L2*E2*S2*SQRC C2)/SI 23)-SQRC(L2*E2*S2));
D2[ 5, 5]: =D2[ 5, 5]+AUX2/DEN32;
D2[ 5, 6]: =D2[ 5, 6]+(( -1)*(L2*E2*S2)*(L3*E3*S3))/DEN32;
D2[ 5, 7]: =D2[ 5, 7]+(( -1)*(L2*E2*S2)*(E1/(SI G1*SQ)-E3/(SI G3*SQ)))/
DEN32;
D2[ 5, 8]: =D2[ 5, 8]+(DEN3*(E2/SQ*S2)-(L2*E2*S2)*(E2/(SQ*SI G2)-
E3/(SQ*SI G3)))/DEN32;
AUX3: =(DEN3*(L3*E3*MS33)+(L3*E3*S3*SQRC C3)/SI 33)-SQRC(L3*E3*S3));
D2[ 6, 6]: =D2[ 6, 6]+AUX3/DEN32;
D2[ 6, 7]: =D2[ 6, 7]+(DEN3*( -1)*(E3/SQ*S3)-(L3*E3*S3)*(E1/(SI G1*SQ)-
E3/(SI G3*SQ)))/DEN32;
D2[ 6, 8]: =D2[ 6, 8]+(DEN3*( -1)*(E3/SQ*S3)-(L3*E3*S3)*(E2/(SI G2*SQ)-
E3/(SI G3*SQ)))/DEN32;
D2[ 7, 7]: =D2[ 7, 7]+(( -1)*SQRC(E1/(SI G1*SQ)-E3/(SI G3*SQ)))/DEN32;
D2[ 7, 8]: =D2[ 7, 8]+(( -1)*(E1/(SI G1*SQ)-E3/(SI G3*SQ))*(E2/(SI G2*SQ)-
E3/(SI G3*SQ)))/DEN32;
D2[ 8, 8]: =D2[ 8, 8]+(( -1)*SQRC(E2/(SI G2*SQ)-E3/(SI G3*SQ)))/DEN32;
END;

FOR J:=8 DOWNT0 2 DO BEGIN
FOR I:=1 TO J-1 DO
D2[ J, J-I]: =D2[ J-I, J]
END;

```

```

SI 22: =SQRC(SI G2);
SI 32: =SQRC(SI G3);
SI 13: =SI 12*SI G1; SI 14: =SI 13*SI G1; SI 15: =SI 14*SI G1; SI 16: =SI 15*SI G1;
SI 23: =SI 22*SI G2; SI 24: =SI 23*SI G2; SI 25: =SI 24*SI G2; SI 26: =SI 25*SI G2;
SI 33: =SI 32*SI G3; SI 34: =SI 33*SI G3; SI 35: =SI 34*SI G3; SI 36: =SI 35*SI G3;
END;

```

```

FOR I: =2 TO NR DO BEGIN

```

```

E1: =EXPC(-0.5*SQRC(RET[I]-ALFA1)/SI 12);
E2: =EXPC(-0.5*SQRC(RET[I]-ALFA2)/SI 22);
E3: =EXPC(-0.5*SQRC(RET[I]-ALFA3)/SI 32);
C1: =RET[I]-ALFA1;
C2: =RET[I]-ALFA2;
C3: =RET[I]-ALFA3;
MS11: =2/(SI 13)-4*SQRC(C1)/(SI 15);
MS22: =2/(SI 23)-4*SQRC(C2)/(SI 25);
MS33: =2/(SI 33)-4*SQRC(C3)/(SI 35);
DEN3: =(L1/SI G1)*E1+(L2/SI G2)*E2+(L3/SI G3)*E3;
DEN32: =SQRC(DEN3);
S1: =SQRC(C1)/(SI 14)-1/(SI 12);
S2: =SQRC(C2)/(SI 24)-1/(SI 22);
S3: =SQRC(C3)/(SI 34)-1/(SI 32);
S11: =SQRC(C1)/(SI 16)-3/(SI 14);
S22: =SQRC(C2)/(SI 26)-3/(SI 24);
S33: =SQRC(C3)/(SI 36)-3/(SI 34);

```

```

< CALCULO DAS DERIVADAS DE 1a ORDEM >

```

```

D1[1]: =D1[1]+(L1*E1*C1/SI 13)/DEN3;
D1[2]: =D1[2]+(L2*E2*C2/SI 23)/DEN3;
D1[3]: =D1[3]+(L3*E3*C3/SI 33)/DEN3;
D1[4]: =D1[4]+(L1*E1*S1)/DEN3;
D1[5]: =D1[5]+(L2*E2*S2)/DEN3;
D1[6]: =D1[6]+(L3*E3*S3)/DEN3;
D1[7]: =D1[7]+(E1/(SI G1*SQ)-E3/(SI G3*SQ))/DEN3;
D1[8]: =D1[8]+(E2/(SI G2*SQ)-E3/(SI G3*SQ))/DEN3;

```

```

< CALCULO DAS DERIVADAS DE 2a ORDEM >

```

```

D2[1,1]: =D2[1,1]+(DEN3*(L1*E1*(SQRC(C1/SI 12)-1/SI 12)/SI G1)-
SQRC(L1*E1*C1/SI 13))/DEN32;
D2[1,2]: =D2[1,2]+((-1)*(L1*E1*C1/SI 13)*(L2*E2*C2/SI 23))/DEN32;
D2[1,3]: =D2[1,3]+((-1)*(L1*E1*C1/SI 13)*(L3*E3*C3/SI 33))/DEN32;
D2[1,4]: =D2[1,4]+(DEN3*(L1*E1*C1*S11)-(L1*E1*C1/SI 13)*(L1*E1*S1))/
DEN32;
D2[1,5]: =D2[1,5]+((-1)*(L1*E1*C1/SI 13)*(L2*E2*S2))/DEN32;
D2[1,6]: =D2[1,6]+((-1)*(L1*E1*C1/SI 13)*(L3*E3*S3))/DEN32;
D2[1,7]: =D2[1,7]+(DEN3*(E1/SQ*C1/SI 13)-(L1*E1*C1/SI 13)*
(E1/(SQ*SI G1)-E3/(SQ*SI G3)))/DEN32;
D2[1,8]: =D2[1,8]+((-1)*(L1*E1*C1/SI 13)*(E2/(SQ*SI G2)-E3/(SQ*SI G3)))/
DEN32;

```

```
PROCEDURE QUIQUADRADO (NR, NSIG: INTEGER; RET: RT; NN: INTEGER; ALFA,  
SIG: EXTENDED; TETA: DER1; VAR QUI: EXTENDED; VAR CONTINUA: INTEGER);
```

```
VAR
```

```
  I: INTEGER;
```

```
VAR
```

```
  AUX1, AUX2, AUX3, AUX4, AUX5: EXTENDED;
```

```
BEGIN
```

```
  AUX1 := 0; AUX2 := 0; AUX3 := 0; AUX4 := 0; AUX5 := 0;
```

```
  VER1 := 1;
```

```
  FOR I := 2 TO NR DO BEGIN
```

```
    AUX1 := (EXPC - 0.5 * SQRC RET[I] - ALFA) / SQRC (SIG) / (SQRTC (2 * PI) * SIG);
```

```
    VER1 := VER1 * AUX1;
```

```
  END;
```

```
CASE NN OF
```

```
  2: BEGIN
```

```
    ALFA1 := TETA[1]; ALFA2 := TETA[2]; SIG1 := TETA[3];
```

```
    SIG2 := TETA[4]; LAMB := TETA[5];
```

```
    VER2 := 1;
```

```
    FOR I := 2 TO NR DO BEGIN
```

```
      AUX2 := (LAMB * (EXPC - 0.5 * SQRC RET[I] - ALFA1) / SQRC (SIG1) / (SQRTC (2 * PI) * SIG1) +  
        (1 - LAMB) * (EXPC - 0.5 * SQRC RET[I] - ALFA2) / SQRC (SIG2) / (SQRTC (2 * PI) * SIG2));
```

```
      VER2 := VER2 * AUX2;
```

```
    END;
```

```
    QUI := VER1 / VER2;
```

```
    QUI := -2 * (LNC QUI) / LNC (10);
```

```
  END;
```

```
  3: BEGIN
```

```
    ALFA1 := TETA[1]; ALFA2 := TETA[2]; ALFA3 := TETA[3]; SIG1 := TETA[4];
```

```
    SIG2 := TETA[5]; SIG3 := TETA[6]; LAMB1 := TETA[7]; LAMB2 := TETA[8];
```

```
    VER3 := 1;
```

```
    FOR I := 2 TO NR DO BEGIN
```

```
      AUX3 := (LAMB1 * (EXPC - 0.5 * SQRC RET[I] - ALFA1) / SQRC (SIG1) / (SQRTC (2 * PI) * SIG1) +  
        LAMB2 * (EXPC - 0.5 * SQRC RET[I] - ALFA2) / SQRC (SIG2) / (SQRTC (2 * PI) * SIG2) +  
        (1 - LAMB1 - LAMB2) * (EXPC - 0.5 * SQRC RET[I] - ALFA3) / SQRC (SIG3) / (SQRTC (2 * PI) * SIG3));
```

```
      VER3 := VER3 * AUX3;
```

```
    END;
```

```
    QUI := VER2 / VER3;
```

```
    QUI := -2 * (LNC QUI) / LNC (10);
```

```
  END;
```

```
  4: BEGIN
```

```
    ALFA1 := TETA[1]; ALFA2 := TETA[2]; ALFA3 := TETA[3]; ALFA4 := TETA[4];
```

```
    SIG1 := TETA[5]; SIG2 := TETA[6]; SIG3 := TETA[7]; SIG4 := TETA[8];
```

```
    LAMB1 := TETA[9]; LAMB2 := TETA[10]; LAMB3 := TETA[11];
```

```
    VER4 := 1;
```

```

VAR
    NA, NP1, J, I, K: INTEGER;
VAR
    TEMP: ARRAY[1..14] OF EXTENDED;
VAR
    MAT: MA;
VAR
    PIVOT: EXTENDED;

```

< CONSTRUCAO DA MATRIZ AUMENTADA >

BEGIN

```

NA: =N*2;
NP1: =N+1;
FOR J: =1 TO N DO BEGIN
FOR I: =1 TO N DO
MAT[J,I]: =D2[J,I];
END;

FOR J: =1 TO N DO BEGIN
FOR I: =NP1 TO NA DO BEGIN
MAT[J,I]: =0. ;
IF (I-N-J)=0. THEN MAT[J,I]: =1. ;
END;
END;

```

< CALCULO DA INVERSA E DO DETERMINANTE >

```

DET: =MAT[1,1];
FOR K: =1 TO N DO BEGIN
PIVOT: =MAT[K,K];
IF PIVOT=0 THEN PIVOT: =0.0001;
FOR I: =1 TO N DO
TEMP[I]: =MAT[I,K];
FOR J: =K TO NA DO BEGIN
MAT[K,J]: =MAT[K,J]/PIVOT;
FOR I: =1 TO N DO BEGIN
IF (I-K) <> 0 THEN MAT[I,J]: =MAT[I,J]-TEMP[I]*MAT[K,J];
END;
END;
IF (K-N) < 0 THEN BEGIN
DET: =DET*MAT[K+1,K+1];
END;
END;

```

END; < PROCEDURE DETERMINANTE >

BEGIN

```
FOR I:=1 TO NP DO BEGIN
S:=0;
FOR J:=1 TO (I-1) DO
S:=S+L[I,J]*Y[J];
Y[I]:=G[I]-S;
END;
```

```
FOR I:=NP DOWNTO 1 DO BEGIN
S:=0;
FOR J:=NP DOWNTO (I+1) DO
S:=S+U[I,J]*V[J];
V[I]:=(Y[I]-S)/U[I,I];
END;
```

END; < PROCEDURE CALCV >

PROCEDURE TETAPOST (NP: INTEGER; CONV1: EXTENDED; X, V: DER1; VAR X1: DER1; VAR FIM: INTEGER);

< SUBROTINA DE CALCULO DE XK+1 >

< CONV1=PARAMETRO DE CONVERGENCIA DEFINIDO >

< DECLARACAO DE VARIAVEIS >

```
VAR
  I: INTEGER;
VAR
  NORM: EXTENDED;
```

```
BEGIN
NORM:=0;
FOR I:=1 TO NP DO BEGIN
X1[I]:=X[I]-V[I]*0.5;
NORM:=NORM+ABS(X1[I]/X[I]-1);
END;
IF (NORM/NP) > CONV1 THEN FIM:=0
ELSE FIM:=1;
WRITELN('FIM ', FIM:6);
END;< PROCEDURE TETAPOST >
```

PROCEDURE DETERMINANTE (N: INTEGER; D2: DER2; VAR DET: EXTENDED);

< SUBROTINA QUE RESOLVE O DETERMINANTE FORMADO PELAS

DERIVADAS DE SEGUNDA ORDEM PARA A DETERMINACAO DO MAXIMO LOCAL >

```
WRI TELNC ARQI MPRESS) ;  
END;  
END;
```

```
CLOSE (ARQI MPRESS)  
END; < PROCEDURE IMPRESSAO >
```

```
PROCEDURE PROG (NN, NR: INTEGER; RET: RT; VAR QUI: EXTENDED;  
VAR CONTINUA: INTEGER);
```

```
VAR  
    TETA: DER1;  
LABEL  
    INICIO1, INICIO2;
```

```
BEGIN
```

```
INICIO1:
```

```
M:=0;  
NP:=3*NN-1;  
ENTRADA ( NN, TETA );  
INICIO2:  
CASE NN OF  
2: NORMAIS2 ( NR, TETA, RET, D1, D2 );  
3: NORMAIS3 ( NR, TETA, RET, D1, D2 );  
4: NORMAIS4 ( NR, TETA, RET, D1, D2 );  
5: NORMAIS5 ( NR, TETA, RET, D1, D2 );  
END;  
FOR I:=1 TO 8 DO  
INCCMD;  
GAUSS ( NP, D2, L, U );  
CALCV ( NP, D1, L, U, V );  
TETAPOST ( NP, CONV1, TETA, V, TETA, FIM );  
IF FIM=0 THEN BEGIN  
IF M<MMAX THEN GOTO INICIO2  
ELSE BEGIN  
WRITELNC ' NAO CONVERGIU ' );  
GOTO INICIO1;  
END  
END  
ELSE  
DETERMINANTE (NP, D2, DET);  
IF DET > 0 THEN GOTO INICIO1  
ELSE  
QUIQUADRADO ( NR, NSIG, RET, NN, ALFA, SIG, TETA, QUI, CONTINUA);  
WRITELNCLST, ' QUI ', QUI:6:4);  
IMPRESSAO (NN, LEITURA, TETA);  
  
END; < PROCEDURE PROGRAM >
```

```
I: INTEGER;  
VAR  
  IMPRESS: STRING;
```

```
BEGIN
```

```
IF LEITURA='PMA.TEX' THEN IMPRESS:='PMAIMP.TEX'  
ELSE IF LEITURA='PETRO.TEX' THEN IMPRESS:='PETROIIMP.TEX'  
ELSE IF LEITURA='SHARP.TEX' THEN IMPRESS:='SHARPIIMP.TEX'  
ELSE IF LEITURA='VALE.TEX' THEN IMPRESS:='VALEIMP.TEX';
```

```
ASSIGNCARQIMPRESS, 'B: '+IMPRESS);  
REWRI TECARQIMPRESS);
```

```
CASE NN OF
```

```
2: BEGIN
```

```
WRI TELNCARQIMPRESS);  
WRI TELNCARQIMPRESS, 'ALFA1=', TETA[1], 'ALFA2=', TETA[2]);  
WRI TELNCARQIMPRESS, 'SIG1=', TETA[3], 'SIG2=', TETA[4]);  
WRI TELNCARQIMPRESS, 'LAMB=', TETA[5]);  
WRI TELNCARQIMPRESS);  
END;
```

```
3: BEGIN
```

```
WRI TELNCARQIMPRESS);  
WRI TELNCARQIMPRESS, 'ALFA1=', TETA[1], 'ALFA2=', TETA[2], 'ALFA3=',  
TETA[3]);  
WRI TELNCARQIMPRESS, 'SIG1=', TETA[4], 'SIG2=', TETA[5], 'SIG3=',  
TETA[6]);  
WRI TELNCARQIMPRESS, 'LAMB1=', TETA[7], 'LAMB2=', TETA[8]);  
WRI TELNCARQIMPRESS);  
END;
```

```
4: BEGIN
```

```
WRI TELNCARQIMPRESS);  
WRI TELNCARQIMPRESS, 'ALFA1=', TETA[1], 'ALFA2=', TETA[2], 'ALFA3=',  
TETA[3], 'ALFA4=', TETA[4]);  
WRI TELNCARQIMPRESS, 'SIG1=', TETA[5], 'SIG2=', TETA[6], 'SIG3=',  
TETA[7], 'SIG4=', TETA[8]);  
WRI TELNCARQIMPRESS, 'LAMB1=', TETA[9], 'LAMB2=', TETA[10], 'LAMB3=',  
TETA[11]);  
WRI TELNCARQIMPRESS);  
END;
```

```
5: BEGIN
```

```
WRI TELNCARQIMPRESS);  
WRI TELNCARQIMPRESS, 'ALFA1=', TETA[1], 'ALFA2=', TETA[2],  
'ALFA3=', TETA[3], 'ALFA4=', TETA[4], 'ALFA5=', TETA[5]);  
WRI TELNCARQIMPRESS, 'SIG1=', TETA[6], 'SIG2=', TETA[7], 'SIG3=',  
TETA[8], 'SIG4=', TETA[9], 'SIG5=', TETA[10]);  
WRI TELNCARQIMPRESS, 'LAMB1=', TETA[11], 'LAMB2=', TETA[12],  
'LAMB3=', TETA[13], 'LAMB4=', TETA[14]);
```

```

FOR I:=2 TO NR DO BEGIN
AUX4:=(LAMB1*(EXPC(-0.5*SQR(RET[I]-ALFA1))/SQR(SIG1)))/(SQRT(2*PI)*SIG1))
+LAMB2*(EXPC(-0.5*SQR(RET[I]-ALFA2))/SQR(SIG2)))/(SQRT(2*PI)*SIG2))
+LAMB3*(EXPC(-0.5*SQR(RET[I]-ALFA3))/SQR(SIG3)))/(SQRT(2*PI)*SIG3))
+(1-LAMB1-LAMB2-LAMB3)*(EXPC(-0.5*SQR(RET[I]-ALFA4))/SQR(SIG4)))/(SQRT(2*
*SIG4))));
VER4:=VER4*AUX4;
END;
QUI:=VER3/VER4;
QUI:=-2*(LNC(QUI)/LNC(10));
END;

```

```

5: BEGIN
ALFA1:=TETA[1];ALFA2:=TETA[2];ALFA3:=TETA[3];ALFA4:=TETA[4];
ALFA5:=TETA[5];SIG1:=TETA[6];SIG2:=TETA[7];SIG3:=TETA[8];
SIG4:=TETA[9];SIG5:=TETA[10];LAMB1:=TETA[11];LAMB2:=TETA[12];
LAMB3:=TETA[13];LAMB4:=TETA[14];
VER5:=1;
FOR I:=2 TO NR DO BEGIN
AUX5:=(LAMB1*(EXPC(-0.5*SQR(RET[I]-ALFA1))/SQR(SIG1)))/(SQRT(2*PI)*
SIG1)))+(LAMB2*(EXPC(-0.5*SQR(RET[I]-ALFA2)
/SQR(SIG2)))/(SQRT(2*PI)*SIG2))
+LAMB3*(EXPC(-0.5*SQR(RET[I]-ALFA3))/SQR(SIG3)))/(SQRT(2*PI)*SIG3))
+LAMB4*(EXPC(-0.5*SQR(RET[I]-ALFA4))/SQR(SIG4)))/(SQRT(2*PI)*SIG4))
+(1-LAMB1-LAMB2-LAMB3-LAMB4)*(EXPC(-0.5*SQR(RET[I]-ALFA5))/SQR(SIG5))
/(SQRT(2*PI)*SIG5))));
VER5:=VER5*AUX5;
END;
QUI:=VER4/VER5;
QUI:=-2*(LNC(QUI)/LNC(10));
END;

```

```

END;

IF NSIG=5 THEN BEGIN
IF QUI>7.81 THEN CONTINUA:=1
ELSE CONTINUA:=0;
END;
IF NSIG=1 THEN BEGIN
IF QUI>11.34 THEN CONTINUA:=1
ELSE CONTINUA:=0;
END;

END; { PROCEDURE QUIQUADRADO }

```

```

PROCEDURE IMPRESSAO (NN: INTEGER; LEITURA: STRING;
TETA: DER1);

```

```

VAR
ARQIMPRESS, PMA, PETRO, SHARP1, SHARP2: TEXT;
VAR

```

$E4/(SI\ G4*SQ)))/DEN42;$
 $D2[3,11]:=D2[3,11]+(DEN4*(E3/SQ*C3/SI\ 33)-(L3*E3*C3/SI\ 33)*(E3/(SQ*SI\ G3)-E4/(SQ*SI\ G4)))/DEN42;$
 $D2[4,4]:=D2[4,4]+(DEN4*(L4*E4*(SQ(C4/SI\ 42)-1/SI\ 42)/SI\ G4)-SQ(L4*E4*C4/SI\ 43))/DEN42;$
 $D2[4,5]:=D2[4,5]+((-1)*(L4*E4*C4/SI\ 43)*(L1*E1*S1))/DEN42;$
 $D2[4,6]:=D2[4,6]+((-1)*(L4*E4*C4/SI\ 43)*(L2*E2*S2))/DEN42;$
 $D2[4,7]:=D2[4,7]+((-1)*(L4*E4*C4/SI\ 43)*(L3*E3*S3))/DEN42;$
 $D2[4,8]:=D2[4,8]+(DEN4*(L4*E4*C4*S44)-(L4*E4*C4/SI\ 43)*(L4*E4*S4))/DEN42;$
 $D2[4,9]:=D2[4,9]+((-1)*DEN4*(E4/SQ*C4/SI\ 43)-(L4*E4*C4/SI\ 43)*(E1/(SI\ G1*SQ)-E4/(SI\ G4*SQ)))/DEN42;$
 $D2[4,10]:=D2[4,10]+((-1)*DEN4*(E4/SQ*C4/SI\ 43)-(L4*E4*C4/SI\ 43)*(E2/(SI\ G2*SQ)-E4/(SI\ G4*SQ)))/DEN42;$
 $D2[4,11]:=D2[4,11]+((-1)*DEN4*(E4/SQ*C4/SI\ 43)-(L4*E4*C4/SI\ 43)*(E3/(SI\ G3*SQ)-E4/(SI\ G4*SQ)))/DEN42;$
 $AUX1:=(DEN4*(L1*E1*MS11)+(L1*E1*S1*SQ(C1)/SI\ 13))-SQ(L1*E1*S1);$
 $D2[5,5]:=D2[5,5]+AUX1/DEN42;$
 $D2[5,6]:=D2[5,6]+((-1)*(L1*E1*S1)*(L2*E2*S2))/DEN42;$
 $D2[5,7]:=D2[5,7]+((-1)*(L1*E1*S1)*(L3*E3*S3))/DEN42;$
 $D2[5,8]:=D2[5,8]+((-1)*(L1*E1*S1)*(L4*E4*S4))/DEN42;$
 $D2[5,9]:=D2[5,9]+(DEN4*(E1/SQ*S1)-(L1*E1*S1)*(E1/(SQ*SI\ G1)-E4/(SQ*SI\ G4)))/DEN42;$
 $D2[5,10]:=D2[5,10]+((-1)*(L1*E1*S1)*(E2/(SQ*SI\ G2)-E4/(SQ*SI\ G4)))/DEN42;$
 $D2[5,11]:=D2[5,11]+((-1)*(L1*E1*S1)*(E3/(SQ*SI\ G3)-E4/(SQ*SI\ G4)))/DEN42;$
 $AUX2:=(DEN4*(L2*E2*MS22)+(L2*E2*S2*SQ(C2)/SI\ 23))-SQ(L2*E2*S2);$
 $D2[6,6]:=D2[6,6]+AUX2/DEN42;$
 $D2[6,7]:=D2[6,7]+((-1)*(L2*E2*S2)*(L3*E3*S3))/DEN42;$
 $D2[6,8]:=D2[6,8]+((-1)*(L2*E2*S2)*(L4*E4*S4))/DEN42;$
 $D2[6,9]:=D2[6,9]+((-1)*(L2*E2*S2)*(E1/(SQ*SI\ G1)-E4/(SQ*SI\ G4)))/DEN42;$
 $D2[6,10]:=D2[6,10]+(DEN4*(E2/SQ*S2)-(L2*E2*S2)*(E2/(SQ*SI\ G2)-E4/(SQ*SI\ G4)))/DEN42;$
 $D2[6,11]:=D2[6,11]+((-1)*(L2*E2*S2)*(E3/(SQ*SI\ G3)-E4/(SQ*SI\ G4)))/DEN42;$
 $AUX3:=(DEN4*(L3*E3*MS33)+(L3*E3*S3*SQ(C3)/SI\ 33))-SQ(L3*E3*S3);$
 $D2[7,7]:=D2[7,7]+AUX3/DEN42;$
 $D2[7,8]:=D2[7,8]+((-1)*(L3*E3*S3)*(L4*E4*S4))/DEN42;$
 $D2[7,9]:=D2[7,9]+((-1)*(L3*E3*S3)*(E1/(SQ*SI\ G1)-E4/(SQ*SI\ G4)))/DEN42;$
 $D2[7,10]:=D2[7,10]+((-1)*(L3*E3*S3)*(E2/(SQ*SI\ G2)-E4/(SQ*SI\ G4)))/DEN42;$
 $D2[7,11]:=D2[7,11]+(DEN4*(E3/SQ*S3)-(L3*E3*S3)*(E3/(SQ*SI\ G3)-E4/(SQ*SI\ G4)))/DEN42;$
 $AUX4:=(DEN4*(L4*E4*MS44)+(L4*E4*S4*SQ(C4)/SI\ 43))-SQ(L4*E4*S4);$
 $D2[8,8]:=D2[8,8]+AUX4/DEN42;$
 $D2[8,9]:=D2[8,9]+(DEN4*(-1)*(E4/SQ*S4)-(L4*E4*S4)*(E1/(SI\ G1*SQ)-E4/(SI\ G4*SQ)))/DEN42;$
 $D2[8,10]:=D2[8,10]+(DEN4*(-1)*(E4/SQ*S4)-(L4*E4*S4)*(E2/(SI\ G2*SQ)-E4/(SI\ G4*SQ)))/DEN42;$
 $D2[8,11]:=D2[8,11]+(DEN4*(-1)*(E4/SQ*S4)-(L4*E4*S4)*(E3/(SI\ G3*SQ)$

$D1[5] := D1[5] + (L1 * E1 * S1) / DEN4;$
 $D1[6] := D1[6] + (L2 * E2 * S2) / DEN4;$
 $D1[7] := D1[7] + (L3 * E3 * S3) / DEN4;$
 $D1[8] := D1[8] + (L4 * E4 * S4) / DEN4;$
 $D1[9] := D1[9] + (E1 / (SI G1 * SQ) - E4 / (SI G4 * SQ)) / DEN4;$
 $D1[10] := D1[10] + (E2 / (SI G2 * SQ) - E4 / (SI G4 * SQ)) / DEN4;$
 $D1[11] := D1[11] + (E3 / (SI G3 * SQ) - E4 / (SI G4 * SQ)) / DEN4;$

< CALCULO DAS DERIVADAS DE 2a ORDEM >

$D2[1,1] := D2[1,1] + (DEN4 * (L1 * E1 * (SQ(C1 / SI12) - 1 / SI12) / SI G1) - SQ(L1 * E1 * C1 / SI13)) / DEN42;$
 $D2[1,2] := D2[1,2] + ((-1) * (L1 * E1 * C1 / SI13) * (L2 * E2 * C2 / SI23)) / DEN42;$
 $D2[1,3] := D2[1,3] + ((-1) * (L1 * E1 * C1 / SI13) * (L3 * E3 * C3 / SI33)) / DEN42;$
 $D2[1,4] := D2[1,4] + ((-1) * (L1 * E1 * C1 / SI13) * (L4 * E4 * C4 / SI43)) / DEN42;$
 $D2[1,5] := D2[1,5] + (DEN4 * (L1 * E1 * C1 * S1) - (L1 * E1 * C1 / SI13) * (L1 * E1 * S1)) / DEN42;$
 $D2[1,6] := D2[1,6] + ((-1) * (L1 * E1 * C1 / SI13) * (L2 * E2 * S2)) / DEN42;$
 $D2[1,7] := D2[1,7] + ((-1) * (L1 * E1 * C1 / SI13) * (L3 * E3 * S3)) / DEN42;$
 $D2[1,8] := D2[1,8] + ((-1) * (L1 * E1 * C1 / SI13) * (L4 * E4 * S4)) / DEN42;$
 $D2[1,9] := D2[1,9] + (DEN4 * (E1 / SQ * C1 / SI13) - (L1 * E1 * C1 / SI13) * (E1 / (SQ * SI G1) - E4 / (SQ * SI G4))) / DEN42;$
 $D2[1,10] := D2[1,10] + ((-1) * (L1 * E1 * C1 / SI13) * (E2 / (SQ * SI G2) - E4 / (SQ * SI G4))) / DEN42;$
 $D2[1,11] := D2[1,11] + ((-1) * (L1 * E1 * C1 / SI13) * (E3 / (SQ * SI G3) - E4 / (SQ * SI G4))) / DEN42;$
 $D2[2,2] := D2[2,2] + (DEN4 * (L2 * E2 * (SQ(C2 / SI22) - 1 / SI22) / SI G2) - SQ(L2 * E2 * C2 / SI23)) / DEN42;$
 $D2[2,3] := D2[2,3] + ((-1) * (L2 * E2 * C2 / SI23) * (L3 * E3 * C3 / SI33)) / DEN42;$
 $D2[2,4] := D2[2,4] + ((-1) * (L2 * E2 * C2 / SI23) * (L4 * E4 * C4 / SI43)) / DEN42;$
 $D2[2,5] := D2[2,5] + ((-1) * (L2 * E2 * C2 / SI23) * (L1 * E1 * S1)) / DEN42;$
 $D2[2,6] := D2[2,6] + (DEN4 * (L2 * E2 * C2 * S2) - (L2 * E2 * C2 / SI23) * (L2 * E2 * S2)) / DEN42;$
 $D2[2,7] := D2[2,7] + ((-1) * (L2 * E2 * C2 / SI23) * (L3 * E3 * S3)) / DEN42;$
 $D2[2,8] := D2[2,8] + ((-1) * (L2 * E2 * C2 / SI23) * (L4 * E4 * S4)) / DEN42;$
 $D2[2,9] := D2[2,9] + ((-1) * (L2 * E2 * C2 / SI23) * (E1 / (SI G1 * SQ) - E4 / (SI G4 * SQ))) / DEN42;$
 $D2[2,10] := D2[2,10] + (DEN4 * (E2 / SQ * C2 / SI23) - (L2 * E2 * C2 / SI23) * (E2 / (SQ * SI G2) - E4 / (SQ * SI G4))) / DEN42;$
 $D2[2,11] := D2[2,11] + ((-1) * (L2 * E2 * C2 / SI23) * (E3 / (SI G3 * SQ) - E4 / (SI G4 * SQ))) / DEN42;$
 $D2[3,3] := D2[3,3] + (DEN4 * (L3 * E3 * (SQ(C3 / SI32) - 1 / SI32) / SI G3) - SQ(L3 * E3 * C3 / SI33)) / DEN42;$
 $D2[3,4] := D2[3,4] + ((-1) * (L3 * E3 * C3 / SI33) * (L4 * E4 * C4 / SI43)) / DEN42;$
 $D2[3,5] := D2[3,5] + ((-1) * (L3 * E3 * C3 / SI33) * (L1 * E1 * S1)) / DEN42;$
 $D2[3,6] := D2[3,6] + ((-1) * (L3 * E3 * C3 / SI33) * (L2 * E2 * S2)) / DEN42;$
 $D2[3,7] := D2[3,7] + (DEN4 * (L3 * E3 * C3 * S3) - (L3 * E3 * C3 / SI33) * (L3 * E3 * S3)) / DEN42;$
 $D2[3,8] := D2[3,8] + ((-1) * (L3 * E3 * C3 / SI33) * (L4 * E4 * S4)) / DEN42;$
 $D2[3,9] := D2[3,9] + ((-1) * (L3 * E3 * C3 / SI33) * (E1 / (SI G1 * SQ) - E4 / (SI G4 * SQ))) / DEN42;$
 $D2[3,10] := D2[3,10] + ((-1) * (L3 * E3 * C3 / SI33) * (E2 / (SI G2 * SQ) - E4 / (SI G4 * SQ))) / DEN42;$

< CALCULO DAS CONSTANTES >

BEGIN

```
SQ: =SQRC(2*PI);
L1: =LAMB1/SQ;
L2: =LAMB2/SQ;
L3: =LAMB3/SQ;
L4: =(1-LAMB1-LAMB2-LAMB3)/SQ;
SI12: =SQRC(SIG1);
SI22: =SQRC(SIG2);
SI32: =SQRC(SIG3);
SI42: =SQRC(SIG4);
SI13: =SI12*SIG1; SI14: =SI13*SIG1; SI15: =SI14*SIG1; SI16: =SI15*SIG1;
SI23: =SI22*SIG2; SI24: =SI23*SIG2; SI25: =SI24*SIG2; SI26: =SI25*SIG2;
SI33: =SI32*SIG3; SI34: =SI33*SIG3; SI35: =SI34*SIG3; SI36: =SI35*SIG3;
SI43: =SI42*SIG4; SI44: =SI43*SIG4; SI45: =SI44*SIG4; SI46: =SI45*SIG4;
END;
```

FOR I:=2 TO NR DO BEGIN

```
E1: =EXPC(-0.5*SQRC(RETI I)-ALFA1)/SI12);
E2: =EXPC(-0.5*SQRC(RETI I)-ALFA2)/SI22);
E3: =EXPC(-0.5*SQRC(RETI I)-ALFA3)/SI32);
E4: =EXPC(-0.5*SQRC(RETI I)-ALFA4)/SI42);
C1: =RETI I)-ALFA1;
C2: =RETI I)-ALFA2;
C3: =RETI I)-ALFA3;
C4: =RETI I)-ALFA4;
MS11: =2/(SI13)-4*SQRC(C1)/(SI15);
MS22: =2/(SI23)-4*SQRC(C2)/(SI25);
MS33: =2/(SI33)-4*SQRC(C3)/(SI35);
MS44: =2/(SI43)-4*SQRC(C4)/(SI45);
DEN4: =(L1/SIG1)*E1+(L2/SIG2)*E2+(L3/SIG3)*E3+(L4/SIG4)*E4;
DEN42: =SQRC(DEN4);
S1: =SQRC(C1)/(SI14)-1/(SI12);
S2: =SQRC(C2)/(SI24)-1/(SI22);
S3: =SQRC(C3)/(SI34)-1/(SI32);
S4: =SQRC(C4)/(SI44)-1/(SI42);
S11: =SQRC(C1)/(SI16)-3/(SI14);
S22: =SQRC(C2)/(SI26)-3/(SI24);
S33: =SQRC(C3)/(SI36)-3/(SI34);
S44: =SQRC(C4)/(SI46)-3/(SI44);
```

< CALCULO DAS DERIVADAS DE 1a ORDEM >

```
D1[1]: =D1[1]+(L1*E1*C1/SI13)/DEN4;
D1[2]: =D1[2]+(L2*E2*C2/SI23)/DEN4;
D1[3]: =D1[3]+(L3*E3*C3/SI33)/DEN4;
D1[4]: =D1[4]+(L4*E4*C4/SI43)/DEN4;
```

UNIT NORM;

INTERFACE

TYPE

RT=ARRAY[1..1500] OF EXTENDED;
DER1=ARRAY[1..14] OF EXTENDED;
DER2=ARRAY[1..14,1..14] OF EXTENDED;

PROCEDURE NORMAIS4(NR: INTEGER; TETA: DER1; RET: RT;
VAR D1: DER1; VAR D2: DER2);

PROCEDURE NORMAIS5(NR: INTEGER; TETA: DER1; RET: RT;
VAR D1: DER1; VAR D2: DER2);

IMPLEMENTATION

PROCEDURE NORMAIS4;

< SUBROTINA NUMERO DE NORMAIS N=4 >

< DECLARACAO DE VARIAVEIS >

VAR

L1, L2, L3, L4, MS11, MS22, MS33, MS44, C1, C2, C3, C4, DEN4, DEN42,
E1, E2, E3, E4, S1, S2, S3, S4, SI1, S22, S33, S44, SI12, SI22, SI32,
SI42, SI13, SI23, SI33, SI43, SQ, ALFA1, ALFA2, ALFA3, ALFA4, SIG1,
SIG2, SIG3, SIG4, LAMB1, LAMB2, LAMB3, AUX1, AUX2, AUX3, AUX4,
SI14, SI24, SI34, SI44, SI15, SI25, SI35,
SI45, SI16, SI26, SI36, SI46: EXTENDED;

VAR

I, J, T: INTEGER;

BEGIN

AUX1:=0; AUX2:=0; AUX3:=0; AUX4:=0;

FOR J:=1 TO 14 DO BEGIN

FOR I:=1 TO 14 DO

D2[I, J]:=0;

D1[J]:=0;

END;

ALFA1:=TETA[1]; ALFA2:=TETA[2]; ALFA3:=TETA[3]; ALFA4:=TETA[4];

SIG1:=TETA[5]; SIG2:=TETA[6]; SIG3:=TETA[7]; SIG4:=TETA[8];

LAMB1:=TETA[9]; LAMB2:=TETA[10]; LAMB3:=TETA[11];

BEGIN

RETORNOS (RET,P,NR,LEITURA);
NORMAIS1 (RET,NR,SIG,ALFA);
PARAMETROS (CONV1,NMAX,MMAX);

CONTINUA:=1;

NN:=1;

REPEAT

REPEAT

INCCNN);

PROG (NN,NR,RET,QUI,CONTINUA);

WRI TELNC ' CONTINUA ',CONTINUA:4);

UNTIL CONTINUA=0;

BEGIN

WRI TELNCLST, ' NAO HA VANTAGENS EM INCREMETAR No NORMAIS ');

GOTO FINAL;

END;

UNTIL NN > NMAX;

WRI TELNCLST, ' LIMITE DO NUMERO DE NORMAIS ');

FINAL:

END.

```

D2[9,10]:=D2[9,10]+((-1)*(L4*E4*S4)*(L5*E5*S5))/DEN52;
D2[9,11]:=D2[9,11]+((-1)*(L4*E4*S4)*(E1/(SQ*SI G1)-E5/(SQ*SI G5)))/
DEN52;
D2[9,12]:=D2[9,12]+((-1)*(L4*E4*S4)*(E2/(SQ*SI G2)-E5/(SQ*SI G5)))/
DEN52;
D2[9,13]:=D2[9,13]+((-1)*(L4*E4*S4)*(E3/(SQ*SI G3)-E5/(SQ*SI G5)))/
DEN52;
D2[9,14]:=D2[9,14]+(DEN5*(E4/SQ*S4)-(L4*E4*S4)*(E4/(SQ*SI G4)-
E5/(SQ*SI G5)))/DEN52;
AUX5:=(DEN5*(L5*E5*S5)+L5*E5*S5*SQR(C5)/SI 53)-SQR(L5*E5*S5);
D2[10,10]:=D2[10,10]+AUX5/DEN52;
D2[10,11]:=D2[10,11]+(DEN5*(-1)*(E5/SQ*S5)-(L5*E5*S5)*
(E1/(SI G1*SQ)-E5/(SI G5*SQ)))/DEN52;
D2[10,12]:=D2[10,12]+(DEN5*(-1)*(E5/SQ*S5)-(L5*E5*S5)*
(E2/(SI G2*SQ)-E5/(SI G5*SQ)))/DEN52;
D2[10,13]:=D2[10,13]+(DEN5*(-1)*(E5/SQ*S5)-(L5*E5*S5)*
(E3/(SI G3*SQ)-E5/(SI G5*SQ)))/DEN52;
D2[10,14]:=D2[10,14]+(DEN5*(-1)*(E5/SQ*S5)-(L5*E5*S5)*
(E4/(SI G4*SQ)-E5/(SI G5*SQ)))/DEN52;
D2[11,11]:=D2[11,11]+((-1)*SQR(E1/(SI G1*SQ)-E5/(SI G5*SQ)))/
DEN52;
D2[11,12]:=D2[11,12]+((-1)*(E1/(SI G1*SQ)-E5/(SI G5*SQ))*
(E2/(SI G2*SQ)-E5/(SI G5*SQ)))/DEN52;
D2[11,13]:=D2[11,13]+((-1)*(E1/(SI G1*SQ)-E5/(SI G5*SQ))*
(E3/(SI G3*SQ)-E5/(SI G5*SQ)))/DEN52;
D2[11,14]:=D2[11,14]+((-1)*(E1/(SI G1*SQ)-E5/(SI G5*SQ))*
(E4/(SI G4*SQ)-E5/(SI G5*SQ)))/DEN52;
D2[12,12]:=D2[12,12]+((-1)*SQR(E2/(SI G2*SQ)-E5/(SI G5*SQ)))/
DEN52;
D2[12,13]:=D2[12,13]+((-1)*(E2/(SI G2*SQ)-E5/(SI G5*SQ))*
(E3/(SI G3*SQ)-E5/(SI G5*SQ)))/DEN52;
D2[12,14]:=D2[12,14]+((-1)*(E2/(SI G2*SQ)-E5/(SI G5*SQ))*
(E4/(SI G4*SQ)-E5/(SI G5*SQ)))/DEN52;
D2[13,13]:=D2[13,13]+((-1)*SQR(E3/(SI G3*SQ)-E5/(SI G5*SQ)))/DEN52;
D2[13,14]:=D2[13,14]+((-1)*(E3/(SI G3*SQ)-E5/(SI G5*SQ))*
(E4/(SI G4*SQ)-E5/(SI G5*SQ)))/DEN52;
D2[14,14]:=D2[14,14]+((-1)*SQR(E4/(SI G4*SQ)-E5/(SI G5*SQ)))/DEN52;
END;

```

```

FOR J:=14 DOWNTO 2 DO BEGIN
FOR I:=1 TO J-1 DO
D2[J,J-I]:=D2[J-I,J];
END;

```

END; <PROCEDURE NORMAIS5>

END. <UNIT NORM>

$D2[5,8] := D2[5,8] + ((-1) * (L5 * E5 * C5 / SI53) * (L3 * E3 * S3)) / DEN52;$
 $D2[5,9] := D2[5,9] + ((-1) * (L5 * E5 * C5 / SI53) * (L4 * E4 * S4)) / DEN52;$
 $D2[5,10] := D2[5,10] + (DEN5 * (L5 * E5 * C5 * S5) - (L5 * E5 * C5 / SI53) * (L5 * E5 * S5)) / DEN52;$
 $D2[5,11] := D2[5,11] + ((-1) * DEN5 * (E5 / SQ * C5 / SI53) - (L5 * E5 * C5 / SI53) * (E1 / (SI G1 * SQ) - E5 / (SI G5 * SQ))) / DEN52;$
 $D2[5,12] := D2[5,11] + ((-1) * DEN5 * (E5 / SQ * C5 / SI53) - (L5 * E5 * C5 / SI53) * (E2 / (SI G2 * SQ) - E5 / (SI G5 * SQ))) / DEN52;$
 $D2[5,13] := D2[5,13] + ((-1) * DEN5 * (E5 / SQ * C5 / SI53) - (L5 * E5 * C5 / SI53) * (E3 / (SI G3 * SQ) - E5 / (SI G5 * SQ))) / DEN52;$
 $D2[5,14] := D2[5,14] + ((-1) * DEN5 * (E5 / SQ * C5 / SI53) - (L5 * E5 * C5 / SI53) * (E4 / (SI G4 * SQ) - E5 / (SI G5 * SQ))) / DEN52;$
 $AUX1 := (DEN5 * ((L1 * E1 * MS11) + (L1 * E1 * S1 * SQ * C1) / SI13)) - SQ * (L1 * E1 * S1);$
 $D2[6,6] := D2[6,6] + AUX1 / DEN52;$
 $D2[6,7] := D2[6,7] + ((-1) * (L1 * E1 * S1) * (L2 * E2 * S2)) / DEN52;$
 $D2[6,8] := D2[6,8] + ((-1) * (L1 * E1 * S1) * (L3 * E3 * S3)) / DEN52;$
 $D2[6,9] := D2[6,9] + ((-1) * (L1 * E1 * S1) * (L4 * E4 * S4)) / DEN52;$
 $D2[6,10] := D2[6,10] + ((-1) * (L1 * E1 * S1) * (L5 * E5 * S5)) / DEN52;$
 $D2[6,11] := D2[6,11] + (DEN5 * (E1 / SQ * S1) - (L1 * E1 * S1) * (E1 / (SQ * SI G1) - E5 / (SQ * SI G5))) / DEN52;$
 $D2[6,12] := D2[6,12] + ((-1) * (L1 * E1 * S1) * (E2 / (SQ * SI G2) - E5 / (SQ * SI G5))) / DEN52;$
 $D2[6,13] := D2[6,13] + ((-1) * (L1 * E1 * S1) * (E3 / (SQ * SI G3) - E5 / (SQ * SI G5))) / DEN52;$
 $D2[6,14] := D2[6,14] + ((-1) * (L1 * E1 * S1) * (E4 / (SQ * SI G4) - E5 / (SQ * SI G5))) / DEN52;$
 $AUX2 := (DEN5 * ((L2 * E2 * MS22) + (L2 * E2 * S2 * SQ * C2) / SI23)) - SQ * (L2 * E2 * S2);$
 $D2[7,7] := D2[7,7] + AUX2 / DEN52;$
 $D2[7,8] := D2[7,8] + ((-1) * (L2 * E2 * S2) * (L3 * E3 * S3)) / DEN52;$
 $D2[7,9] := D2[7,9] + ((-1) * (L2 * E2 * S2) * (L4 * E4 * S4)) / DEN52;$
 $D2[7,10] := D2[7,10] + ((-1) * (L2 * E2 * S2) * (L5 * E5 * S5)) / DEN52;$
 $D2[7,11] := D2[7,11] + ((-1) * (L2 * E2 * S2) * (E1 / (SQ * SI G1) - E5 / (SQ * SI G5))) / DEN52;$
 $D2[7,12] := D2[7,12] + (DEN5 * (E2 / SQ * S2) - (L2 * E2 * S2) * (E2 / (SQ * SI G2) - E5 / (SQ * SI G5))) / DEN52;$
 $D2[7,13] := D2[7,13] + ((-1) * (L2 * E2 * S2) * (E3 / (SQ * SI G3) - E5 / (SQ * SI G5))) / DEN52;$
 $D2[7,14] := D2[7,14] + ((-1) * (L2 * E2 * S2) * (E4 / (SQ * SI G4) - E5 / (SQ * SI G5))) / DEN52;$
 $AUX3 := (DEN5 * ((L3 * E3 * MS33) + (L3 * E3 * S3 * SQ * C3) / SI33)) - SQ * (L3 * E3 * S3);$
 $D2[8,8] := D2[8,8] + AUX3 / DEN52;$
 $D2[8,9] := D2[8,9] + ((-1) * (L3 * E3 * S3) * (L4 * E4 * S4)) / DEN52;$
 $D2[8,10] := D2[8,10] + ((-1) * (L3 * E3 * S3) * (L5 * E5 * S5)) / DEN52;$
 $D2[8,11] := D2[8,11] + ((-1) * (L3 * E3 * S3) * (E1 / (SQ * SI G1) - E5 / (SQ * SI G5))) / DEN52;$
 $D2[8,12] := D2[8,12] + ((-1) * (L3 * E3 * S3) * (E2 / (SQ * SI G2) - E5 / (SQ * SI G5))) / DEN52;$
 $D2[8,13] := D2[8,13] + (DEN5 * (E3 / SQ * S3) - (L3 * E3 * S3) * (E3 / (SQ * SI G3) - E5 / (SQ * SI G5))) / DEN52;$
 $D2[8,14] := D2[8,14] + ((-1) * (L3 * E3 * S3) * (E4 / (SQ * SI G4) - E5 / (SQ * SI G5))) / DEN52;$
 $AUX4 := (DEN5 * ((L4 * E4 * MS44) + (L4 * E4 * S4 * SQ * C4) / SI43)) - SQ * (L4 * E4 * S4);$
 $D2[9,9] := D2[9,9] + AUX4 / DEN52;$

$D2[2,6] := D2[2,6] + ((-1) * (L2 * E2 * C2 / SI23) * (L1 * E1 * S1)) / DEN52;$
 $D2[2,7] := D2[2,7] + (DEN5 * (L2 * E2 * C2 * S22) - (L2 * E2 * C2 / SI23) * (L2 * E2 * S2)) / DEN52;$
 $D2[2,8] := D2[2,8] + ((-1) * (L2 * E2 * C2 / SI23) * (L3 * E3 * S3)) / DEN52;$
 $D2[2,9] := D2[2,9] + ((-1) * (L2 * E2 * C2 / SI23) * (L4 * E4 * S4)) / DEN52;$
 $D2[2,10] := D2[2,10] + ((-1) * (L2 * E2 * C2 / SI23) * (L5 * E5 * S5)) / DEN52;$
 $D2[2,11] := D2[2,11] + ((-1) * (L2 * E2 * C2 / SI23) * (E1 / (SI61 * SQ) - E5 / (SI65 * SQ))) / DEN52;$
 $D2[2,12] := D2[2,12] + (DEN5 * (E2 / SQ * C2 / SI23) - (L2 * E2 * C2 / SI23) * (E2 / (SQ * SI62) - E5 / (SQ * SI65))) / DEN52;$
 $D2[2,13] := D2[2,13] + ((-1) * (L2 * E2 * C2 / SI23) * (E3 / (SI63 * SQ) - E5 / (SI65 * SQ))) / DEN52;$
 $D2[2,14] := D2[2,14] + ((-1) * (L2 * E2 * C2 / SI23) * (E4 / (SI64 * SQ) - E5 / (SI65 * SQ))) / DEN52;$
 $D2[3,3] := D2[3,3] + (DEN5 * (L3 * E3 * (SQ(C3 / SI32) - 1 / SI32) / SI63) - SQ(L3 * E3 * C3 / SI33)) / DEN52;$
 $D2[3,4] := D2[3,4] + ((-1) * (L3 * E3 * C3 / SI33) * (L4 * E4 * C4 / SI43)) / DEN52;$
 $D2[3,5] := D2[3,5] + ((-1) * (L3 * E3 * C3 / SI33) * (L5 * E5 * C5 / SI53)) / DEN52;$
 $D2[3,6] := D2[3,6] + ((-1) * (L3 * E3 * C3 / SI33) * (L1 * E1 * S1)) / DEN52;$
 $D2[3,7] := D2[3,7] + ((-1) * (L3 * E3 * C3 / SI33) * (L2 * E2 * S2)) / DEN52;$
 $D2[3,8] := D2[3,8] + (DEN5 * (L3 * E3 * C3 * S33) - (L3 * E3 * C3 / SI33) * (L3 * E3 * S3)) / DEN52;$
 $D2[3,9] := D2[3,9] + ((-1) * (L3 * E3 * C3 / SI33) * (L4 * E4 * S4)) / DEN52;$
 $D2[3,10] := D2[3,10] + ((-1) * (L3 * E3 * C3 / SI33) * (L5 * E5 * S5)) / DEN52;$
 $D2[3,11] := D2[3,11] + ((-1) * (L3 * E3 * C3 / SI33) * (E1 / (SI61 * SQ) - E5 / (SI65 * SQ))) / DEN52;$
 $D2[3,12] := D2[3,12] + ((-1) * (L3 * E3 * C3 / SI33) * (E2 / (SI62 * SQ) - E5 / (SI65 * SQ))) / DEN52;$
 $D2[3,13] := D2[3,13] + (DEN5 * (E3 / SQ * C3 / SI33) - (L3 * E3 * C3 / SI33) * (E3 / (SQ * SI63) - E5 / (SQ * SI65))) / DEN52;$
 $D2[3,14] := D2[3,14] + ((-1) * (L3 * E3 * C3 / SI33) * (E4 / (SI64 * SQ) - E5 / (SI65 * SQ))) / DEN52;$
 $D2[4,4] := D2[4,4] + (DEN5 * (L4 * E4 * (SQ(C4 / SI42) - 1 / SI42) / SI64) - SQ(L4 * E4 * C4 / SI43)) / DEN52;$
 $D2[4,5] := D2[4,5] + ((-1) * (L4 * E4 * C4 / SI43) * (L5 * E5 * C5 / SI53)) / DEN52;$
 $D2[4,6] := D2[4,6] + ((-1) * (L4 * E4 * C4 / SI43) * (L1 * E1 * S1)) / DEN52;$
 $D2[4,7] := D2[4,7] + ((-1) * (L4 * E4 * C4 / SI43) * (L2 * E2 * S2)) / DEN52;$
 $D2[4,8] := D2[4,8] + ((-1) * (L4 * E4 * C4 / SI43) * (L3 * E3 * S3)) / DEN52;$
 $D2[4,9] := D2[4,9] + (DEN5 * (L4 * E4 * C4 * S44) - (L4 * E4 * C4 / SI43) * (L4 * E4 * S4)) / DEN52;$
 $D2[4,10] := D2[4,10] + ((-1) * (L4 * E4 * C4 / SI43) * (L5 * E5 * S5)) / DEN52;$
 $D2[4,11] := D2[4,11] + ((-1) * (L4 * E4 * C4 / SI43) * (E1 / (SI61 * SQ) - E5 / (SI65 * SQ))) / DEN52;$
 $D2[4,12] := D2[4,12] + ((-1) * (L4 * E4 * C4 / SI43) * (E2 / (SI62 * SQ) - E5 / (SI65 * SQ))) / DEN52;$
 $D2[4,13] := D2[4,13] + ((-1) * (L4 * E4 * C4 / SI43) * (E3 / (SQ * SI63) - E5 / (SQ * SI65))) / DEN52;$
 $D2[4,14] := D2[4,14] + (DEN5 * (E4 / SQ * C4 / SI43) - (L4 * E4 * C4 / SI43) * (E4 / (SI64 * SQ) - E5 / (SI65 * SQ))) / DEN52;$
 $D2[5,5] := D2[5,5] + (DEN5 * (L5 * E5 * (SQ(C5 / SI52) - 1 / SI52) / SI65) - SQ(L5 * E5 * C5 / SI53)) / DEN52;$
 $D2[5,6] := D2[5,6] + ((-1) * (L5 * E5 * C5 / SI53) * (L1 * E1 * S1)) / DEN52;$
 $D2[5,7] := D2[5,7] + ((-1) * (L5 * E5 * C5 / SI53) * (L2 * E2 * S2)) / DEN52;$

$S11 = \text{SQR}(C1) / (SI16) - 3 / (SI14)$;
 $S22 = \text{SQR}(C2) / (SI26) - 3 / (SI24)$;
 $S33 = \text{SQR}(C3) / (SI36) - 3 / (SI34)$;
 $S44 = \text{SQR}(C4) / (SI46) - 3 / (SI44)$;
 $S55 = \text{SQR}(C5) / (SI56) - 3 / (SI54)$;

< CALCULO DAS DERIVADAS DE 1a ORDEM >

$D1[1] = D1[1] + (L1 * E1 * C1 / SI13) / DEN5$;
 $D1[2] = D1[2] + (L2 * E2 * C2 / SI23) / DEN5$;
 $D1[3] = D1[3] + (L3 * E3 * C3 / SI33) / DEN5$;
 $D1[4] = D1[4] + (L4 * E4 * C4 / SI43) / DEN5$;
 $D1[5] = D1[5] + (L5 * E5 * C5 / SI53) / DEN5$;
 $D1[6] = D1[6] + (L1 * E1 * S1) / DEN5$;
 $D1[7] = D1[7] + (L2 * E2 * S2) / DEN5$;
 $D1[8] = D1[8] + (L3 * E3 * S3) / DEN5$;
 $D1[9] = D1[9] + (L4 * E4 * S4) / DEN5$;
 $D1[10] = D1[10] + (L5 * E5 * S5) / DEN5$;
 $D1[11] = D1[11] + (E1 / (SI G1 * SQ) - E5 / (SI G5 * SQ)) / DEN5$;
 $D1[12] = D1[12] + (E2 / (SI G2 * SQ) - E5 / (SI G5 * SQ)) / DEN5$;
 $D1[13] = D1[13] + (E3 / (SI G3 * SQ) - E5 / (SI G5 * SQ)) / DEN5$;
 $D1[14] = D1[14] + (E4 / (SI G4 * SQ) - E5 / (SI G5 * SQ)) / DEN5$;

< CALCULO DAS DERIVADAS DE 2a ORDEM >

$D2[1,1] = D2[1,1] + (DEN5 * (L1 * E1 * (SQR(C1 / SI12) - 1 / SI12) / SI G1) - SQR(L1 * E1 * C1 / SI13)) / DEN52$;
 $D2[1,2] = D2[1,2] + ((-1) * (L1 * E1 * C1 / SI13) * (L2 * E2 * C2 / SI23)) / DEN52$;
 $D2[1,3] = D2[1,3] + ((-1) * (L1 * E1 * C1 / SI13) * (L3 * E3 * C3 / SI33)) / DEN52$;
 $D2[1,4] = D2[1,4] + ((-1) * (L1 * E1 * C1 / SI13) * (L4 * E4 * C4 / SI43)) / DEN52$;
 $D2[1,5] = D2[1,5] + ((-1) * (L1 * E1 * C1 / SI13) * (L5 * E5 * C5 / SI53)) / DEN52$;
 $D2[1,6] = D2[1,6] + (DEN5 * (L1 * E1 * C1 * S11) - (L1 * E1 * C1 / SI13) * (L1 * E1 * S1)) / DEN52$;
 $D2[1,7] = D2[1,7] + ((-1) * (L1 * E1 * C1 / SI13) * (L2 * E2 * S2)) / DEN52$;
 $D2[1,8] = D2[1,8] + ((-1) * (L1 * E1 * C1 / SI13) * (L3 * E3 * S3)) / DEN52$;
 $D2[1,9] = D2[1,9] + ((-1) * (L1 * E1 * C1 / SI13) * (L4 * E4 * S4)) / DEN52$;
 $D2[1,10] = D2[1,10] + ((-1) * (L1 * E1 * C1 / SI13) * (L5 * E5 * S5)) / DEN52$;
 $D2[1,11] = D2[1,11] + (DEN5 * (E1 / SQ * C1 / SI13) - (L1 * E1 * C1 / SI13) * (E1 / (SQ * SI G1) - E5 / (SQ * SI G5))) / DEN52$;
 $D2[1,12] = D2[1,12] + ((-1) * (L1 * E1 * C1 / SI13) * (E2 / (SQ * SI G2) - E5 / (SQ * SI G5))) / DEN52$;
 $D2[1,13] = D2[1,13] + ((-1) * (L1 * E1 * C1 / SI13) * (E3 / (SQ * SI G3) - E5 / (SQ * SI G5))) / DEN52$;
 $D2[1,14] = D2[1,14] + ((-1) * (L1 * E1 * C1 / SI13) * (E4 / (SQ * SI G4) - E5 / (SQ * SI G5))) / DEN52$;
 $D2[2,2] = D2[2,2] + (DEN5 * (L2 * E2 * (SQR(C2 / SI22) - 1 / SI22) / SI G2) - SQR(L2 * E2 * C2 / SI23)) / DEN52$;
 $D2[2,3] = D2[2,3] + ((-1) * (L2 * E2 * C2 / SI23) * (L3 * E3 * C3 / SI33)) / DEN52$;
 $D2[2,4] = D2[2,4] + ((-1) * (L2 * E2 * C2 / SI23) * (L4 * E4 * C4 / SI43)) / DEN52$;
 $D2[2,5] = D2[2,5] + ((-1) * (L2 * E2 * C2 / SI23) * (L5 * E5 * C5 / SI53)) / DEN52$;

```
D1 [ J ] : = 0 ;  
END ;
```

```
ALFA1 : = TETA [ 1 ] ; ALFA2 : = TETA [ 2 ] ; ALFA3 : = TETA [ 3 ] ; ALFA4 : = TETA [ 4 ] ;  
ALFA5 : = TETA [ 5 ] ; SI G1 : = TETA [ 6 ] ; SI G2 : = TETA [ 7 ] ; SI G3 : = TETA [ 8 ] ;  
SI G4 : = TETA [ 9 ] ; SI G5 : = TETA [ 10 ] ; LAMB1 : = TETA [ 11 ] ; LAMB2 : = TETA [ 12 ] ;  
LAMB3 : = TETA [ 13 ] ; LAMB4 : = TETA [ 14 ] ;
```

```
( CALCULO DAS CONSTANTES )
```

```
SQ : = SQRC ( 2 * PI ) ;  
L1 : = LAMB1 / SQ ;  
L2 : = LAMB2 / SQ ;  
L3 : = LAMB3 / SQ ;  
L4 : = LAMB4 / SQ ;  
L5 : = ( 1 - LAMB1 - LAMB2 - LAMB3 - LAMB4 ) / SQ ;  
SI 12 : = SQRC ( SI G1 ) ;  
SI 22 : = SQRC ( SI G2 ) ;  
SI 32 : = SQRC ( SI G3 ) ;  
SI 42 : = SQRC ( SI G4 ) ;  
SI 52 : = SQRC ( SI G5 ) ;  
SI 13 : = SI 12 * SI G1 ; SI 14 : = SI 13 * SI G1 ; SI 15 : = SI 14 * SI G1 ; SI 16 : = SI 15 * SI G1 ;  
SI 23 : = SI 22 * SI G2 ; SI 24 : = SI 23 * SI G2 ; SI 25 : = SI 24 * SI G2 ; SI 26 : = SI 25 * SI G2 ;  
SI 33 : = SI 32 * SI G3 ; SI 34 : = SI 33 * SI G3 ; SI 35 : = SI 34 * SI G3 ; SI 36 : = SI 35 * SI G3 ;  
SI 43 : = SI 42 * SI G4 ; SI 44 : = SI 43 * SI G4 ; SI 45 : = SI 44 * SI G4 ; SI 46 : = SI 45 * SI G4 ;  
SI 53 : = SI 52 * SI G5 ; SI 54 : = SI 53 * SI G5 ; SI 55 : = SI 54 * SI G5 ; SI 56 : = SI 55 * SI G5 ;
```

```
FOR I : = 2 TO NR DO BEGIN
```

```
E1 : = EXPC ( -0.5 * SQRC ( RET [ I ] - ALFA1 ) / SI 12 ) ;  
E2 : = EXPC ( -0.5 * SQRC ( RET [ I ] - ALFA2 ) / SI 22 ) ;  
E3 : = EXPC ( -0.5 * SQRC ( RET [ I ] - ALFA3 ) / SI 32 ) ;  
E4 : = EXPC ( -0.5 * SQRC ( RET [ I ] - ALFA4 ) / SI 42 ) ;  
E5 : = EXPC ( -0.5 * SQRC ( RET [ I ] - ALFA5 ) / SI 52 ) ;  
C1 : = RET [ I ] - ALFA1 ;  
C2 : = RET [ I ] - ALFA2 ;  
C3 : = RET [ I ] - ALFA3 ;  
C4 : = RET [ I ] - ALFA4 ;  
C5 : = RET [ I ] - ALFA5 ;  
DEN5 : = ( L1 / SI G1 ) * E1 + ( L2 / SI G2 ) * E2 + ( L3 / SI G3 ) * E3 + ( L4 / SI G4 ) * E4 +  
( L5 / SI G5 ) * E5 ;  
DEN52 : = SQRC ( DEN5 ) ;  
MS11 : = 2 / ( SI 13 ) - 4 * SQRC ( C1 ) / ( SI 15 ) ;  
MS22 : = 2 / ( SI 23 ) - 4 * SQRC ( C2 ) / ( SI 25 ) ;  
MS33 : = 2 / ( SI 33 ) - 4 * SQRC ( C3 ) / ( SI 35 ) ;  
MS44 : = 2 / ( SI 43 ) - 4 * SQRC ( C4 ) / ( SI 45 ) ;  
MS55 : = 2 / ( SI 53 ) - 4 * SQRC ( C5 ) / ( SI 55 ) ;  
S1 : = SQRC ( C1 ) / ( SI 14 ) - 1 / ( SI 12 ) ;  
S2 : = SQRC ( C2 ) / ( SI 24 ) - 1 / ( SI 22 ) ;  
S3 : = SQRC ( C3 ) / ( SI 34 ) - 1 / ( SI 32 ) ;  
S4 : = SQRC ( C4 ) / ( SI 44 ) - 1 / ( SI 42 ) ;  
S5 : = SQRC ( C5 ) / ( SI 54 ) - 1 / ( SI 52 ) ;
```

```

-E4/(SIG4*SQ)))/DEN42;
D2[9,9]:=D2[9,9]+(( -1)*SQR(E1/(SIG1*SQ)-E4/(SIG4*SQ)))/DEN42;
D2[9,10]:=D2[9,10]+(( -1)*(E1/(SIG1*SQ)-E4/(SIG4*SQ))*(E2/(SIG2*SQ)
-E4/(SIG4*SQ)))/DEN42;
D2[9,11]:=D2[9,11]+(( -1)*(E1/(SIG1*SQ)-E4/(SIG4*SQ))*(E3/(SIG3*SQ)
-E4/(SIG4*SQ)))/DEN42;
D2[10,10]:=D2[10,10]+(( -1)*SQR(E2/(SIG2*SQ)-E4/(SIG4*SQ)))/DEN42;
D2[10,11]:=D2[10,11]+(( -1)*(E2/(SIG2*SQ)-E4/(SIG4*SQ))*
(E3/(SIG3*SQ)-E4/(SIG4*SQ)))/DEN42;
D2[11,11]:=D2[11,11]+(( -1)*SQR(E3/(SIG3*SQ)-E4/(SIG4*SQ)))/DEN42;
END;

```

```

FOR J:=11 DOWNTO 2 DO BEGIN
FOR I:=1 TO J-1 DO
D2[J,J-I]:=D2[J-I,J]
END;

```

```

END;< PROCEDURE NORMAIS4 >

```

```

PROCEDURE NORMAIS5;

```

```

< SUBROTINA NUMERO DE NORMAIS N=5 >

```

```

< DECLARACAO DE VARIAVEIS >

```

```

VAR
I, J, T: INTEGER;

```

```

VAR
L1, L2, L3, L4, L5, SQ, DEN5, DEN52, E1, E2, E3, E4, E5, C1, C2, C3, C4, C5,
MS11, MS22, MS33, MS44, MS55, S1, S2, S3, S4, S5, S11, S22, S33, S44, S55,
SI12, SI22, SI32, SI42, SI52, SI13, SI23, SI33, SI43, SI53,
SI14, SI24, SI34, SI44, SI54, SI15, SI25, SI35, SI45, SI55,
SI16, SI26, SI36, SI46, SI56, AUX1, AUX2, AUX3, AUX4, AUX5,
ALFA1, ALFA2, ALFA3, ALFA4, ALFA5, SIG1, SIG2, SIG3, SIG4, SIG5,
LAMB1, LAMB2, LAMB3, LAMB4: EXTENDED;

```

```

BEGIN

```

```

AUX1:=0; AUX2:=0; AUX3:=0; AUX4:=0; AUX5:=0;

```

```

FOR J:=1 TO 14 DO BEGIN
FOR I:=1 TO 14 DO
D2[I,J]:=0;

```