



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA



Séries temporais funcionais aplicadas a dados criminais

Autor: *Artur Mattia Ongaratto*
Orientador: *Prof. Dr. Eduardo de Oliveira Horta*

Porto Alegre, 24 de junho de 2016.

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática e Estatística

Departamento de Estatística

Séries temporais funcionais aplicadas a dados criminais

Autor: *Artur Mattia Ongaratto*

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado para obtenção
do grau de Bacharel em Estatística.

Banca Examinadora:
Professor Dr. Eduardo de Oliveira Horta
Professor Dr. Fernando Hepp Pulgati
Ten. Cel. Luís Fernando de Oliveira Linch

Porto Alegre, 24 de junho de 2016.

Dedico este trabalho aos meus pais, pelo apoio que sempre me deram.

‘After all this time?’

‘Always”, said Snape.’

(Harry Potter and the Deathly Hallows, p. 687)

Agradeço ao acaso, que torna a vida tão bela.

Agradeço aos meus pais, Eneir e Gilberto, por terem desde cedo me incentivado, acreditado em mim e estado ao meu lado quando precisei.

Agradeço ao meu orientador, Eduardo, por ser o melhor orientador que alguém pode ter, tendo me ajudado inclusive aos finais de semana.

Agradeço ao meu ex-chefe, Ten. Cel. Linch, pelos inúmeros e valiosos ensinamentos ao longo de um ano de estágio.

Agradeço à minha melhor amiga, Andiara, com a qual tenho morado nos últimos anos, por todos os bons momentos que passamos.

Agradeço aos meus demais parentes, pelas inúmeras vezes nas quais ouvi 'Quando tu te formas?'.
'Quando tu te formas?'

Agradeço aos meus ex-colegas de trabalho na SSP, pelas horas prazerosas de convivência.

Agradeço ao Cão, pela compreensão e (nem sempre) silenciosa companhia.

Agradeço aos professores que me acompanharam ao longo dessa jornada, principalmente à Lisi, que me indicou o Eduardo como orientador.

Agradeço ao Tiago, 756 pontos no vestibular de Letras, pela revisão da escrita.

Agradeço a todos meus amigos e demais pessoas que de alguma forma contribuíram para que eu me graduasse.

Resumo

Neste trabalho, serão utilizadas técnicas do método de séries temporais funcionais para prever variações no mapa de intensidade de roubo de veículo no município de Porto Alegre. Acredita-se que essa informação terá muita utilidade à Segurança Pública, que poderá, através de seus agentes, realizar ações pró-ativas em localidades-alvo.

O período das ocorrências vai de 01/01/2005 a 29/02/2016. Os dados a serem analisados são os endereços onde ocorreram os roubos de veículo. Para possibilitar a análise, esses dados foram convertidos em coordenadas de latitude e longitude e agrupados mensalmente.

Posteriormente, geraram-se as previsões, às quais foram comparadas com as *ex post*.

Palavras-chave: roubo de veículo, mapas de intensidade, séries temporais funcionais, estatística criminal.

Sumário

1	Introdução	8
2	Amostra	9
2.1	Coleta de dados	9
2.2	Aspectos legais	10
2.3	Transformação dos dados	10
3	Séries temporais de superfícies aleatórias	12
3.1	Metodologia	12
3.1.1	Processos pontuais não-homogêneos	12
3.1.2	Séries temporais funcionais	14
4	Aplicação	20
4.1	Aspectos computacionais	20
4.2	Análises	20
4.2.1	Previsão	27
4.2.1.1	Resultados	27
5	Considerações finais	32
6	Referências Bibliográficas	33
7	Anexos	35

Capítulo 1

Introdução

A Secretaria da Segurança Pública do Rio Grande do Sul (SSP-RS) possui um setor de inteligência chamado de Departamento de Gestão da Estratégia Operacional (DGEO), dentro do qual opera a Divisão de Estatística Criminal (DEC). Esta divisão está encarregada de analisar, de maneira multidisciplinar, diversos indicadores criminais de todo o RS, como homicídios, roubos, furtos, entre outros. Técnicas estatísticas, essencialmente descritivas, são aplicadas aos dados para que se possa resumir e descrever de maneira eficiente a grande quantidade de informação disponível. Além disso, realiza-se, no campo da geografia, a elaboração de mapas de intensidade de roubo de veículo e homicídios (delitos consumados) no município de Porto Alegre.

Para este estudo, definiu-se como crime-alvo o roubo de veículo, e se restringiu a análise a Porto Alegre, devido à extensão territorial do RS e ao fato do município ter concentrado 52,2% do total do Estado para essas ocorrências em 2015, enquanto sua população representava, segundo estimativas do IBGE, apenas 13,1% do total do Estado no mesmo período. Seria também interessante realizar a análise com o crime de homicídio, contudo, a quantidade de ocorrências é imensamente menor que a de roubo de veículo, o que comprometeria, pela natureza das técnicas empregadas, a qualidade da análise.

No DEC, com sede no 8º andar da SSP-RS, localizada na Avenida Voluntários da Pátria, nº 1358, no Centro de Porto Alegre, foram obtidos os dados a serem analisados. Para cada ocorrência há um endereço vinculado, que pode ser convertido em coordenadas espaciais. Utilizaremos técnicas de séries temporais funcionais para prever espacialmente possíveis variações na intensidade de ocorrências desse crime de um mês para o outro.

Capítulo 2

Amostra

2.1 Coleta de dados

Este capítulo abordará o processo de obtenção da amostra, assim como apresentará alguns conceitos básicos dentro da estatística criminal.

Para explicar esta etapa, é importante descrever o processo de notificação de uma ocorrência de Roubo de Veículo. Esse processo se dá através da abertura de um Boletim de Ocorrência (BO) em uma Delegacia de Polícia (DP). No instante em que o comunicante registra a ocorrência, a mesma é armazenada no Sistema de Consultas Integradas (CSI).

O CSI se autodefine como 'uma iniciativa da Secretaria da Segurança Pública e da Companhia de Processamento de Dados do Rio Grande do Sul (PROCERGS). O objetivo é facilitar o acesso às informações de todas as bases de dados mantidas pelos órgãos subordinados à SSP (Brigada Militar, Polícia Civil, Superintendência dos Serviços Penitenciários e Instituto Geral de Perícias). O CSI disponibiliza, de forma padronizada, aos órgãos públicos, instituições e organizações da sociedade civil responsáveis pela segurança dos cidadãos as informações de segurança pública do RS, armazenadas nas diferentes bases de dados do Estado.'

Segundo o Art. 157 da Lei 2848/40 se considera roubo de veículo o ato de 'subtrair coisa móvel alheia, para si ou para outrem, mediante grave ameaça ou violência a pessoa, ou depois de havê-la, por qualquer meio, reduzido à impossibilidade de resistência.' Ou seja, ele se diferencia do furto de veículo, pois além de necessária a presença da vítima, a mesma deve ter sofrido grave ameaça.

2.2 Aspectos legais

Dentro de cada ocorrência de roubo de veículo, as variáveis importantes para o estudo são:

Fato: são agregados todos os fatos caracterizados como roubo de veículo, exceto o roubo de veículo seguido de morte, pois nesse caso, o crime é tratado pela SSP como latrocínio.

Tipo do fato: o fato pode ser consumado, quando se efetivou o ato do roubo, ou tentado, quando por alguma razão o ato não foi completado. Em nossas análises, utilizaremos apenas os fatos consumados.

Data do fato: detalhada em ano, mês, dia e hora, esta variável nos é importante por possibilitar um agrupamento temporal das ocorrências.

Localidade do fato: município, bairro e logradouro onde ocorreu o delito. É a informação mais preciosa, por ser a que possibilita uma análise georeferenciada, e também a mais imprecisa, pelo fato de o comunicante muitas vezes não saber o endereço exato da ocorrência, tornando o registro incompleto.

Dito isso, realizou-se a coleta dos dados na SSP no dia 01/04/2016. Foram coletados dados de 75.133 ocorrências, representando o censo das ocorrências registradas entre 01/01/2005 a 29/02/2016, totalizando 134 meses.

2.3 Transformação dos dados

Já mencionamos que muitas ocorrências possuem falhas no registro do endereço, sejam elas falta de número, falta da rua ou até mesmo o não-registro da localidade do fato. Como não há razões para acreditar que essa falta de informação ocorre de maneira não-aleatória, uma vez que ela acontece quando o comunicante não sabe informar o local do fato precisamente, e pela impossibilidade de serem utilizadas, essas ocorrências foram retiradas do estudo. Realizada a primeira triagem, procedeu-se à transformação dos endereços para coordenadas geográficas, através do software online Batch Geocode, como exemplificado na Fig. 2.1 abaixo:

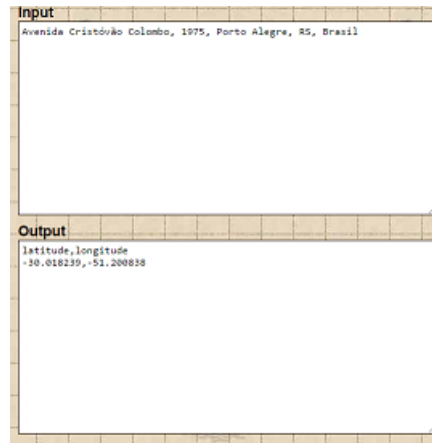


Figura 2.1: Entrada e saída no Batch Geocode

Após a transformação de todos os endereços em coordenadas, restaram 40.185 ocorrências (53,49% do total inicial).

Capítulo 3

Séries temporais de superfícies aleatórias

3.1 Metodologia

A metodologia que usaremos no presente trabalho combina dois campos metodológicos distintos: de um lado, temos a teoria de processos pontuais e superfícies (mapas) de intensidade. De outro, a teoria de séries temporais funcionais. Antes de prosseguir, é conveniente introduzir alguma notação. No que segue, utilizaremos o sinal de igualdade ‘:=’ para definições. S denota a região geográfica onde concentraremos nossa análise, isto é, $S := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2$, onde a_1 , a_2 , b_1 e b_2 são números reais (latitudes e longitudes) com $a_1 < b_1$ e $a_2 < b_2$. Elementos de S serão denotados por \mathbf{u} , \mathbf{v} , \mathbf{w} , ..., isto é, tem-se por exemplo $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, com $a_j \leq u_j \leq b_j$, etc. Denotaremos a integral dupla $\int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} g(u_1, u_2) du_1 du_2$ de uma função real g de duas variáveis reais por $\int_S g(\mathbf{u}) d\mathbf{u}$. Dadas funções reais f e g de duas variáveis reais, $\langle f, g \rangle := \int_S f(\mathbf{u}) g(\mathbf{u}) d\mathbf{u}$ denota o produto interno entre f e g . A norma de uma função g é denotada por $\|g\| := \sqrt{\langle g, g \rangle}$. No que segue, t , s e k são números inteiros; i e j são números naturais.

3.1.1 Processos pontuais não-homogêneos

Seja $\mathbf{x}^{(ti)}$ = ‘coordenada geográfica da i -ésima ocorrência no mês t ’, onde $t = 1, \dots, n$ e $i = 1, \dots, n_t$. Isto é, $\mathbf{x}^{(ti)} = (x_1^{(ti)}, x_2^{(ti)})$, onde $x_1^{(ti)}$ e $x_2^{(ti)}$ são, respectivamente, a latitude e a longitude da i -ésima ocorrência amostrada no mês t .

No que segue, consideramos que o processo $(\mathbf{x}^{(ti)})$ é modelado por um Processo de Cox (Diggle, 2013), ou seja, para cada tempo t ,

$$(\lambda_t(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in S)$$

é superfície aleatória¹ tal que, condicional em λ_t , $(n_t, \mathbf{x}^{(ti)}, i = 1, \dots, n_t)$ é um Processo de Poisson não-homogêneo. Isto é, condicional em λ_t , a variável aleatória

$$n_t := \text{número de ocorrências na região } S$$

tem distribuição Poisson com parâmetro $\int_S \lambda_t(\mathbf{u}) d\mathbf{u}$ e, condicional em (λ_t, n_t) , os vetores aleatórios $\mathbf{x}^{(ti)} \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, \dots, n_t$ tem densidade $\lambda_t(\cdot) / \int_S \lambda_t(\mathbf{u}) d\mathbf{u}$.

Na linguagem de processos pontuais, a superfície aleatória λ_t é dita o mapa de intensidade. Note que, em geral, os mapas de intensidade associados a um processo pontual não são observáveis. Definimos o estimador *kernel* de λ_t por

$$\hat{\lambda}_t(\mathbf{u}) := \sum_{i=1}^{n_t} \gamma_h(\mathbf{u} - \mathbf{x}^{(ti)}) / \int_S \gamma_h(\mathbf{v} - \mathbf{x}^{(ti)}) d\mathbf{v}. \quad (3.1)$$

Na equação acima, $\gamma_h(\mathbf{u}) := h^{-2}\gamma(\mathbf{u}/h)$, onde γ é uma função densidade de probabilidade bivariada radialmente simétrica; e também $h > 0$. Neste trabalho, utilizamos $h = 0.025$. O kernel γ utilizado é dado por $\gamma(\mathbf{u}) = \gamma_0(|\mathbf{u}|)$, onde $|\mathbf{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$ e

$$\gamma_0(u) = \begin{cases} \frac{3}{\pi} (1 - u^2)^2 & \text{se } 0 \leq u \leq 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

O ‘fator de correção’ $1 / \int_S \gamma_h(\mathbf{v} - \mathbf{x}^{(ti)}) d\mathbf{v}$ na Eq. 3.1 serve para garantir que $\int_S \hat{\lambda}_t(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = n_t$ mas, através da escolha de uma região S suficientemente grande, podemos garantir que $\int_S \gamma_h(\mathbf{v} - \mathbf{x}^{(ti)}) d\mathbf{v} \approx 1$. Por ser aproximadamente 1, omitimos esse fator no cômputo de $\hat{\lambda}_t$ durante nossas aplicações, pois o custo computacional para calculá-lo é relativamente alto.

¹por hipótese, $\lambda_t(\mathbf{u}) \geq 0$

3.1.2 Séries temporais funcionais

Quanto à teoria de séries temporais funcionais, será utilizada a metodologia proposta em Bathia et al. (2010). Consideremos o seguinte modelo

$$\widehat{\lambda}_t(\mathbf{u}) = \lambda_t(\mathbf{u}) + \varepsilon_t(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in S$$

lembrando que $\widehat{\lambda}_t$ é o mapa de intensidade observável, λ_t é o mapa de intensidade verdadeiro e ε_t é o ruído de observação. Tem-se $\widehat{\lambda}_t, \lambda_t$ e ε_t *superfícies aleatórias*. O índice t representa o tempo (discreto). Logo, estudaremos *séries temporais de superfícies aleatórias*. É importante ressaltar que a estrutura temporal está sendo considerada apenas de mês para mês: a estrutura temporal dentro de cada mês é ignorada. Inicialmente, supomos:

- A1 para todo t , λ_t e $\widehat{\lambda}_t$ são funções contínuas de \mathbf{u} .
- A2 $\mathbb{E}(\varepsilon_t(\mathbf{u})) = 0$ para qualquer \mathbf{u} em S e qualquer t .
- A3 $\text{cov}(\varepsilon_t(\mathbf{u}), \varepsilon_s(\mathbf{v})) = 0$ para quaisquer \mathbf{u} e \mathbf{v} em S sempre que $t \neq s$.
- A4 a série temporal λ_t é estacionária.
- A5 $\text{cov}(\lambda_t(\mathbf{u}), \varepsilon_s(\mathbf{v})) = 0$ para quaisquer \mathbf{u} e \mathbf{v} em S e quaisquer t e s .
- A6 p é um inteiro positivo.

O item A4 acima nos permite definir a superfície média

$$\mu(\mathbf{u}) := \mathbb{E}(\lambda_t(\mathbf{u})), \quad \mathbf{u} \in S$$

e as funções de autocovariância

$$C_k(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \text{cov}(\lambda_0(\mathbf{u}), \lambda_k(\mathbf{v})), \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in S, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

O inteiro p da suposição A6 foi introduzido por razões técnicas. Na aplicação da Seção 4.2 foi utilizado $p = 1$. Para mais detalhes, ver Bathia et al. (2010).

A seguir, é definida a função

$$K(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \sum_{k=1}^p \int_S C_k(\mathbf{u}, \mathbf{w}) C_k(\mathbf{v}, \mathbf{w}) d\mathbf{w}, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in S.$$

Notemos que K é um kernel positivo. Se as suposições acima forem satisfeitas, juntamente com as hipóteses da Proposição 1 em Bathia et al. (2010), então a decomposição espectral de K irá capturar toda a estrutura dinâmica do processo λ_t .

Faremos uma suposição adicional, seja ela:

A7 a decomposição espectral de K é finito-dimensional.

Em outras palavras, isso significa que existe um número inteiro positivo d , números $\theta_1 \geq \theta_2 \geq \dots \geq \theta_d > 0$, e funções contínuas ψ_1, \dots, ψ_d , onde $\psi_j : S \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$K(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{j=1}^d \theta_j \psi_j(\mathbf{u}) \psi_j(\mathbf{v}),$$

com

$$\text{K1 } \int_S K(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \psi_j(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = \theta_j \psi_j(\mathbf{u}).$$

$$\text{K2 } \langle \psi_i, \psi_j \rangle = 0 \text{ se } i \neq j.$$

$$\text{K3 } \|\psi_j\| = 1.$$

O parâmetro d é chamado a dimensão de K .

Pela Proposição 1 em Bathia et al. (2010), cada λ_t pode ser representada pela soma

$$\lambda_t(\mathbf{u}) = \mu(\mathbf{u}) + \sum_{j=1}^d \eta_{tj} \psi_j(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in S, \quad (3.2)$$

onde $\eta_{tj} := \langle \lambda_t - \mu, \psi_j \rangle$ são variáveis aleatórias escalares tais que $\mathbb{E}(\eta_{tj}) = 0$.

A principal consequência da equação (3.2) é que a dinâmica da série temporal de superfícies (λ_t) é conduzida por uma série temporal vetorial, ou seja, escrevendo $\boldsymbol{\eta}_t := (\eta_{t1}, \dots, \eta_{td})$, temos que a evolução estocástica das superfícies λ_t é inteiramente determinada pela evolução estocástica da série temporal $(\boldsymbol{\eta}_t)$. De fato, em cada instante de tempo t , o mapa de intensidade λ_t se exprime como uma soma da função determinística μ mais uma combinação linear das

funções determinísticas ψ_1, \dots, ψ_d , onde os coeficientes da combinação linear são as variáveis aleatórias $\eta_{t1}, \dots, \eta_{td}$.

O objetivo da metodologia é utilizar uma amostra $\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_n$ para

- 1 estimar a superfície média μ .
- 2 inferir a dimensão, d .
- 3 estimar as autofunções ψ_1, \dots, ψ_d .
- 4 recuperar a série temporal latente $(\boldsymbol{\eta}_t)$.
- 5 modelar essa série para gerar previsões.

Agora introduzimos o estimador

$$\hat{K}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \sum_{k=1}^p \int_S \hat{C}_k(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \hat{C}_k(\mathbf{v}, \mathbf{w}) d\mathbf{w} \quad (3.3)$$

que, de acordo com o argumento exposto em Bathia et al. (2010, p. 3355–3356), é um estimador legítimo de $K(\mathbf{u}, \mathbf{v})$. Na definição acima, as funções \hat{C}_k são estimadores de C_k dadas por

$$\hat{C}_k(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \frac{1}{n-p} \sum_{t=1}^{n-p} \left(\hat{\lambda}_t(\mathbf{u}) - \hat{\mu}(\mathbf{u}) \right) \cdot \left(\hat{\lambda}_{t+k}(\mathbf{v}) - \hat{\mu}(\mathbf{v}) \right),$$

onde $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in S$ e $k = 1, \dots, p \in \mathbb{Z}$, e

$$\hat{\mu}(\mathbf{u}) := \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \hat{\lambda}_t(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in S.$$

Novamente, como $\hat{K}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ é um Kernel positivo, segue que admite uma decomposição espectral, ou seja, existem números $\hat{\theta}_1 \geq \hat{\theta}_2 \geq \dots \geq \hat{\theta}_D > 0$, com $D \leq n-p$ e funções contínuas $\hat{\psi}_1, \dots, \hat{\psi}_D$ tais que

$$\hat{K}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{j=1}^D \hat{\theta}_j \hat{\psi}_j(\mathbf{u}) \hat{\psi}_j(\mathbf{v}),$$

com

$$\text{K1}' \int_S \widehat{K}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \widehat{\psi}_j(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = \widehat{\theta}_j \widehat{\psi}_j(\mathbf{u}).$$

$$\text{K2}' \langle \widehat{\psi}_i, \widehat{\psi}_j \rangle = 0 \text{ se } i \neq j.$$

$$\text{K3}' \|\widehat{\psi}_j\| = 1.$$

Pelo Teorema 1 em Bathia et al. (2010), os estimadores $\widehat{\theta}_j$ e $\widehat{\psi}_j$ são consistentes para θ_j e ψ_j , respectivamente.

Abaixo mostraremos uma maneira de computar $\widehat{\theta}_j$ e $\widehat{\psi}_j$ através da decomposição espectral de uma matriz $(n-p) \times (n-p)$. Supondo que já se saiba como eles são obtidos, definimos

$$\widehat{\eta}_{tj} := \langle \widehat{\lambda}_t - \widehat{\mu}, \widehat{\psi}_j \rangle \quad (3.4)$$

e

$$\widehat{\lambda}_t^*(\mathbf{u}) := \widehat{\mu}(\mathbf{u}) + \sum_{j=1}^{\widehat{d}} \widehat{\eta}_{tj} \widehat{\psi}_j(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in S \quad (3.5)$$

onde $\widehat{d} \leq D$ é um estimador de d , cuja obtenção será discutida mais à frente.

Para obter os $\widehat{\theta}_j$ e os $\widehat{\psi}_j$, definimos a matriz

$$\mathbf{M} := \frac{1}{(n-p)^2} \sum_{k=1}^p \mathbf{A}_k \mathbf{A}_0,$$

onde cada \mathbf{A}_k , $k = 0, 1, \dots, p$ é uma matriz $(n-p) \times (n-p)$ cuja entrada (t, s) é igual a $\langle \widehat{\lambda}_{t+k} - \widehat{\mu}, \widehat{\lambda}_{s+k} - \widehat{\mu} \rangle$.

Seguindo, pela Proposição 2 em Bathia et al. (2010), os autovalores não-nulos da matriz \mathbf{M} são precisamente $\widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2, \dots, \widehat{\theta}_D$. Além disso, denotando por $\widehat{\Psi}_j := (\Psi_{1j}, \Psi_{2j}, \dots, \Psi_{n-p,j})$ o autovetor de \mathbf{M} associado ao autovalor $\widehat{\theta}_j$, então vale que a função

$$\widetilde{\psi}_j(\mathbf{u}) := \sum_{t=1}^{n-p} \Psi_{tj} \times (\lambda_t(\mathbf{u}) - \widehat{\mu}(\mathbf{u})), \quad \mathbf{u} \in S$$

é autofunção de \widehat{K} associada ao autovalor $\widehat{\theta}_j$: isto é, vale o item K1', com $\widetilde{\psi}_j$ no lugar de $\widehat{\psi}_j$. Todavia, as funções $\widetilde{\psi}_1, \dots, \widetilde{\psi}_D$ podem não satisfazer os itens K2' e K3'. Para obter funções $\widehat{\psi}_1, \dots, \widehat{\psi}_D$ tais que valham K2' e K3', aplica-se o método de Gram-Schmidt nas $\widetilde{\psi}_1, \dots, \widetilde{\psi}_D$.

Voltando à estimação de d , sabemos que K tem exatamente d autovalores não-nulos, enquanto \widehat{K} possui D autovalores não-nulos. Note que D é aleatório, e, portanto, pode ser muito maior que d . Então, apesar de ser um estimador consistente para d , ele não é muito parcimonioso.

Bathia et al. (2010) propõe um método de bootstrap para determinar \widehat{d} como estimador de d , a ser apresentado a seguir. Sejam θ_j os autovalores de K . Digamos que a verdadeira dimensão de K seja d_0 , ou seja $\theta_1 \geq \dots \geq \theta_{d_0} > 0$ e $\theta_{d_0+j} = 0$ para $j \geq 1$. Então, queremos rejeitar a hipótese nula de que $\theta_{d_0} = 0$, e não rejeitar a hipótese nula de que $\theta_{d_0+1} = 0$. Se a hipótese nula for escrita como

$$H_0: \theta_{d_0+1} = 0$$

com d_0 sendo um inteiro que pode ser conhecido, por exemplo, olhando para o gráfico dos autovalores estimados $\widehat{\theta}_1 \geq \widehat{\theta}_2 \geq \dots \geq 0$ de \widehat{K} , então nós rejeitamos H_0 se $\widehat{\theta}_{d_0+1} > \iota_\alpha$, onde ι_α é o valor crítico a um nível de significância $\alpha \in (0, 1)$.

O método de bootstrap a seguir permite que este valor crítico seja avaliado:

B1 Defina $\widehat{\varepsilon}_t(x) = \widehat{\lambda}_t - \widehat{\lambda}_t^*$, com d na Eq. 3.5 sendo igual a d_0 .

B2 Gere observações de bootstrap $\widehat{\lambda}_t^{[b]}$ definidas como

$$\widehat{\lambda}_t^{[b]}(x) := \widehat{\lambda}_t^* + \varepsilon_t^{[b]}, \quad t = 1, \dots, n$$

onde $\varepsilon_t^{[b]}$, $t = 1, \dots, n$ é uma amostra aleatória, com reposição, de $\{\widehat{\varepsilon}_1, \dots, \widehat{\varepsilon}_n\}$.

B3 Para cada b , construa uma matriz $\mathbf{M}_{[b]}$ do mesmo modo que \mathbf{M} , com $\widehat{\lambda}_t^{[b]}$ no lugar de $\widehat{\lambda}_t$, e sendo $\widehat{\theta}_{d_0+1}^{[b]}$ o (d_0+1) -ésimo maior autovalor de $\mathbf{M}_{[b]}$.

Agora a distribuição condicional de $\widehat{\theta}_{d_0+1}^{[b]}$ dadas as observações $(\widehat{\lambda}_1, \dots, \widehat{\lambda}_n)$ é tomada como a distribuição de $\widehat{\theta}_{d_0+1}^{[b]}$ sob H_0 , de modo que

$$\frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \mathbb{I}_{[\widehat{\theta}_{d_0+1}^{[b]}, \infty)} \left(\widehat{\theta}_{d_0+1}^{[b]} \right)$$

é considerada como a probabilidade de se obter uma estimativa maior ou igual a $\widehat{\theta}_{d_0+1}^{[b]}$ quando $\theta_{d_0+1}^{[b]}$ é igual a 0. Assim, sempre que essa magnitude for igual ou menor que α , rejeitamos H_0 .

É importante ressaltar que a metodologia apresentada em Bathia et al. (2010) considera o caso em que S é um intervalo. A validade da teoria para o caso em que S é uma região (e também para casos mais gerais) é estabelecida em Horta e Ziegelmann (2016). Concluída a explicação da metodologia, passaremos à aplicação.

Capítulo 4

Aplicação

A partir deste capítulo, será explicada passo-a-passo a utilização da metodologia discutida acima para a obtenção da estimativa dos mapas de intensidade.

4.1 Aspectos computacionais

Para a realização deste trabalho, utilizou-se o programa R, na versão 3.2.0, sendo este um software livre.

Utilizamos o pacote *spatstat* de maneira preliminar, em uma análise exploratória dos dados. Para testar a estacionariedade das $\hat{\eta}_{tj}$, foi usado o pacote *fractal*. Já o pacote *vars* foi necessário para estimarmos os parâmetros de um modelo VAR(R) que foi aplicado às $\hat{\eta}_{tj}$, à fim de verificarmos a significância de seus coeficientes, e na geração das previsões. Além disso, um código previamente implementado serviu para estimar os objetos apresentados na metodologia de séries temporais funcionais. Na sessão a seguir, iremos discutir as saídas do R.

4.2 Análises

Conforme descrito anteriormente, nossa amostra do processo pontual de ocorrência de crimes é denotada por $\mathbf{x}^{(ti)}, i = 1, \dots, n_t$ e $t = 1, \dots, n$. Os mapas de intensidade $\hat{\lambda}_t$ foram estimados de acordo com a Eq. 3.1, com o parâmetro de suavização h e o kernel γ apresentados na seção 3.1.1.

Temos no painel à esquerda da Fig. 4.1 o mapa de intensidade médio $\hat{\mu}$, no qual quanto mais quente a coloração, maior a intensidade. Na mesma figura, no

painel à direita, temos as curvas de nível de $\hat{\mu}$ em preto, e curvas de nível das intensidades estimadas $\hat{\lambda}_t$ em azul, sobrepostas ($t = 1, \dots, 134$).

Convém aqui descrever a interpretação da coloração espectral dos mapas de intensidade. Essa interpretação vale para a Fig. 4.1 e todas as subsequentes. A coloração é padronizada para cada mapa, de forma que tonalidades azul-escuras representam os menores valores (vales), e tonalidades avermelhadas os maiores valores (picos), das superfícies representadas.

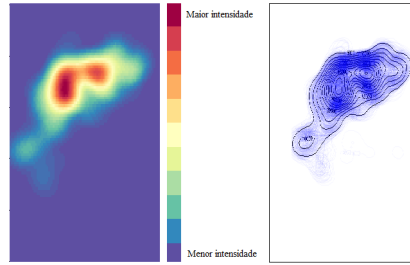


Figura 4.1: Superfície média $\hat{\mu}(\mathbf{u})$ e $\hat{\mu}(\mathbf{u})$ acrescida dos mapas de níveis

Obtida a superfície média, no passo seguinte, estimamos \hat{d} através do procedimento de bootstrap. O procedimento consiste em escolher um valor para d , e testar a hipótese nula de que d é igual ao valor escolhido. Buscaremos na Fig. 4.2, os logs dos autovalores $\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_n$ que aparentem um agrupamento distinto dos demais. Através de uma inspeção visual, aparentemente os 6 primeiros logs se destacam dos outros. Assim, testamos $H_0: d = 6$ e não rejeitamos a hipótese nula, pois $p = 0,56$. A partir disso, tem-se que $d \leq 6$, então testamos $H_0: d = 5$, rejeitada a 5% de significância pois $p = 0,048$. Portanto, utilizamos $\hat{d} = 6$. Tendo em vista essa escolha, a Fig. 4.3 mostra as autofunções estimadas $\hat{\psi}_1, \dots, \hat{\psi}_6$, e a Fig. 4.4 as séries temporais $\hat{\eta}_{tj}$.

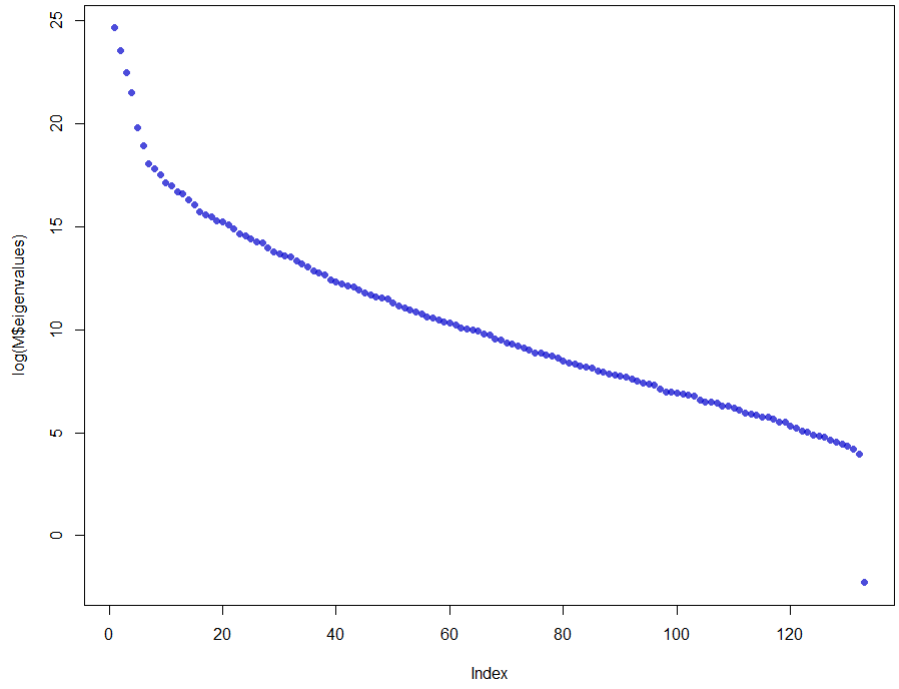


Figura 4.2: Log dos autovalores da matriz M

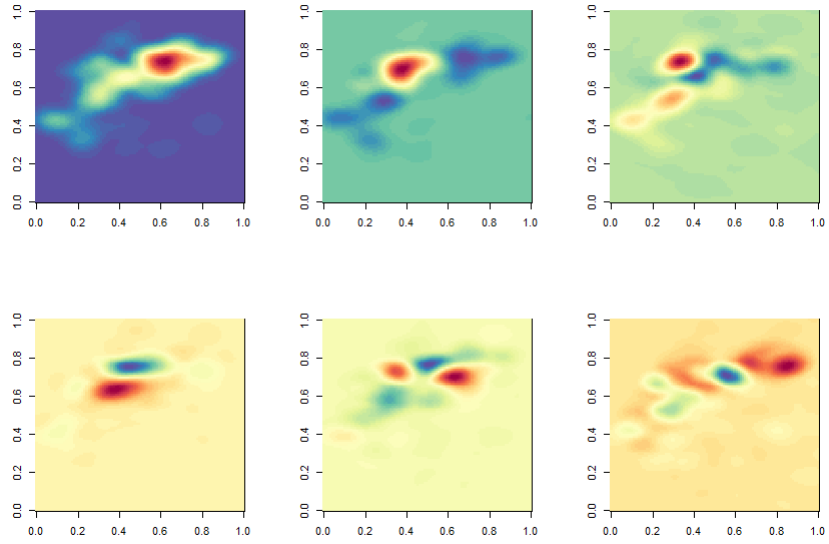


Figura 4.3: Autofunções ψ_a

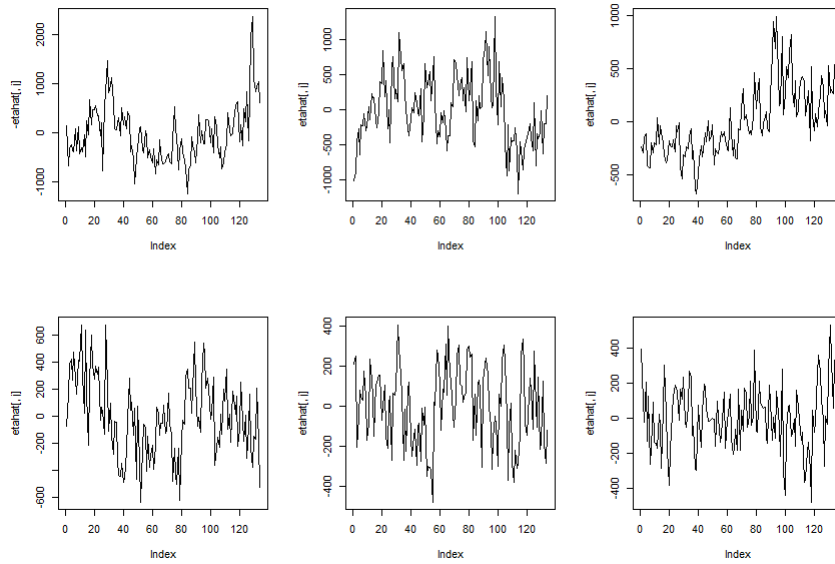


Figura 4.4: Séries resultantes $\hat{\eta}_{tj}$

Nota-se que essas séries temporais foram obtidas ao se utilizar a amostra completa ($n = 134$). No procedimento de previsão apresentado mais abaixo, para cada sub-amostra obteremos séries estimadas para os η . Cabe aqui observar que o inteiro p da suposição A6 foi definido como 1. Essa definição ocorreu pelo fato de não termos uma amostra grande: pela Eq. 3.3 o valor de p afeta o tamanho da amostra utilizada para estimar \widehat{K} . Além disso, é bastante razoável supormos que no *lag* 1 a estrutura de correlação da superfícies é bastante alta (o processo de ocorrência de roubos de veículos no mês corrente possivelmente depende desse mesmo processo no mês anterior).

Estamos interessados em saber se os $\widehat{\eta}_{tj}$ possuem dependência dinâmica, ou seja, se eles não são Ruído Branco (RB). Realizamos então o teste Ljung-Box, que, a 5% de significância, rejeitou a hipótese nula de que as séries são RB conforme se vê na Tab. 4.1.

j	p -valor	
	Ljung-Box	Priestley-Subba Rao
1	$6,6e^{-16}$	0,108
2	$4,8e^{-11}$	0,002
3	$2,2e^{-16}$	0,069
4	$8,6e^{-11}$	0,302
5	$1,1e^{-7}$	0,817
6	$1,9e^{-3}$	0,088

Tabela 4.1: p -valores para os testes de Ljung-Box e Priestley-Subba Rao nas $\widehat{\eta}_{tj}$

Além disso, para verificar o pressuposto A4 da metodologia¹, realizou-se o teste de Priestley-Subba Rao para estacionariedade nas séries $\widehat{\eta}_{tj}$. Ao olharmos novamente para a Tab. 4.1, a uma significância de 5% rejeitamos a hipótese nula de estacionariedade apenas em $\widehat{\eta}_{t2}$. Contudo, como veremos mais à frente, nossas previsões para as superfícies λ_t parecem bastante satisfatórias, o que pode ser um indício de que nossa metodologia é robusta ao pressuposto de estacionariedade das $\widehat{\eta}_{tj}$.

Analisaremos agora na Fig. 4.5 o comportamento dos gráficos de dispersão das $\widehat{\eta}_{tj}$ contra as $\widehat{\eta}_{t-1,j}$, ou seja, com uma defasagem. Já na Fig. 4.6 veremos os gráficos de dispersão das 6 séries $\widehat{\eta}_{tj}$ contra as demais.

¹observe que a série (λ_t) é estacionária se, e somente se, a série (η_t) é estacionária

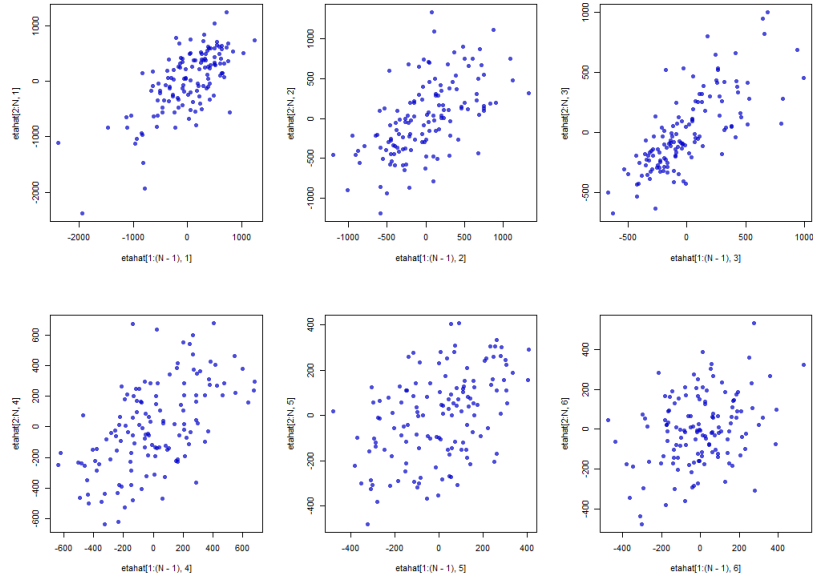


Figura 4.5: $\hat{\eta}_{t,j}$ vs $\hat{\eta}_{t-1,j}$

Observa-se na Fig. 4.5 que cada uma das $\hat{\eta}_{t,j}$ parece ter uma certa correlação linear consigo mesma defasada.

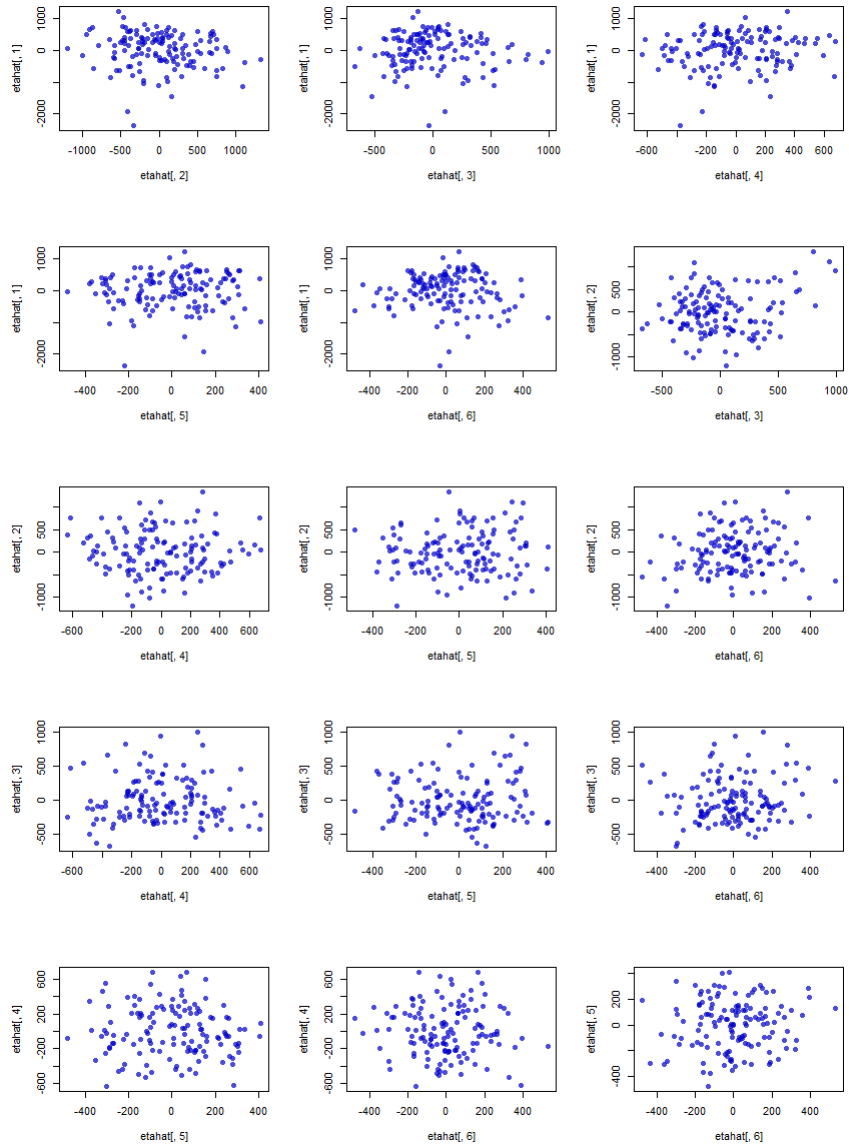


Figura 4.6: $\hat{\eta}_{ti}$ vs $\hat{\eta}_{tj}$, com $i \neq j$

Já na Fig. 4.6 vemos que as $(\hat{\eta}_{tj}, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ não parecem correlacionadas umas com as outras. Tendo em vista esta observação, é razoável supor que a série $(\hat{\eta}_t)$ siga um modelo VAR(R), possivelmente com cada componente $(\hat{\eta}_{tj})$ seguindo um AR de forma autônoma. A mesma observação também é apoiada

pela significância dos coeficientes em um ajuste VAR(1), que se encontra disponível nos anexos. Nesse anexo, de maneira geral, os coeficientes cruzados não são significantes. A ordem do VAR utilizado para descrever a série $\hat{\boldsymbol{\eta}}_t$ foi escolhida pelo critério AIC utilizando a amostra completa ($n = 134$). Essa mesma ordem foi usada para modelar as séries obtidas de sub-amostras, para obter as previsões um passo à frente.

4.2.1 Previsão

A partir daqui, daremos início à 2ª etapa, que consiste em utilizar sub-amostras para fazer previsões. Para fins práticos, denotaremos agora nossa amostra de 134 meses por N , e usaremos $\hat{\mu}_{|n}$, $\hat{\psi}_{j|n}$ e $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{tj|n}$ para denotar as estimativas obtidas em cada uma das sub-amostras de tamanho n ($2 \leq n \leq N$). Então, $\hat{\mu}_{|N}$ por exemplo é o que chamávamos de $\hat{\mu}$ na antiga notação.

Desse modo, utilizaremos a Eq. 3.5 para obter a previsão um-passo-a-frente dos mapas de intensidade, definida por

$$\hat{\lambda}_{n+1|n}^*(\mathbf{u}) := \hat{\mu}_{|n}(\mathbf{u}) + \sum_{j=1}^{\hat{d}} \hat{A}_{|n} \hat{\boldsymbol{\eta}}_{n|n} \hat{\psi}_{j|n}(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in S \quad (4.1)$$

onde $\hat{\lambda}_{n+1|n}^*(\mathbf{u})$ é a previsão para a superfície de intensidade no mês $n+1$ dada a sub-amostra de n meses, e $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{n|n}$ é a estimativa do vetor $\boldsymbol{\eta}_t = (\eta_{t1}, \dots, \eta_{td})$ dado a sub-amostra n . Agora, a matriz $\hat{A}_{|n}$ é obtida ajustando um VAR(1) aos dados $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{1|n}, \dots, \hat{\boldsymbol{\eta}}_{n|n}$.

As previsões foram obtidas utilizando-se sub-amostras de tamanhos $n_0, n_0 + 1, \dots, N$, onde $n_0 = 100$, de modo que obtemos previsões para 34 superfícies de intensidade. A comparação qualitativa de cada superfície prevista $\hat{\lambda}_{n+1|n}^*$ com a superfície realizada $\hat{\lambda}_{n+1}$ é bastante difícil e, possivelmente, pouco informativa. Por outro lado, ao se comparar a variação prevista $\hat{\lambda}_{n+1|n}^* - \hat{\lambda}_n$ com a variação disponível *ex post* $\hat{\lambda}_{n+1} - \hat{\lambda}_n$, torna-se mais fácil identificar, através de semelhanças e diferenças nas colorações espectrais, a qualidade das previsões geradas. Essas comparações serão realizadas a seguir.

4.2.1.1 Resultados

Nesta subseção, discutiremos algumas das previsões das variações $\hat{\lambda}_{n+1|n}^* - \hat{\lambda}_n$ geradas, comparando-as com as variações *ex post* $\hat{\lambda}_{n+1} - \hat{\lambda}_n$. Para cada subamostra de tamanho n , a comparação dos mapas será feita qualitativamente.

Entretanto, existem inúmeras métricas para quantificar a qualidade de cada previsão individual. Duas delas são

$$\rho_{t,\infty} := \sup_{\mathbf{u} \in S} \left| \widehat{\lambda}_{t|t-1}^*(\mathbf{u}) - \widehat{\lambda}_t(\mathbf{u}) \right|$$

e

$$\rho_{t,2} := \sqrt{\int_S \left| \widehat{\lambda}_{t|t-1}^*(\mathbf{u}) - \widehat{\lambda}_t(\mathbf{u}) \right|^2 d\mathbf{u}}.$$

Para quantificar a qualidade geral das previsões, pode-se utilizar médias empíricas como, por exemplo

$$\rho_\infty := \frac{1}{N - n_0} \sum_{t=n_0+1}^N \rho_{t,\infty}$$

e semelhantemente podemos definir ρ_2 . Essas métricas, contudo, são de difícil interpretação sem um padrão para se comparar. A Fig. 4.7 mostra as séries $\rho_{t,\infty}$ e $\rho_{t,2}$, $t = n_0 + 1, \dots, N$.

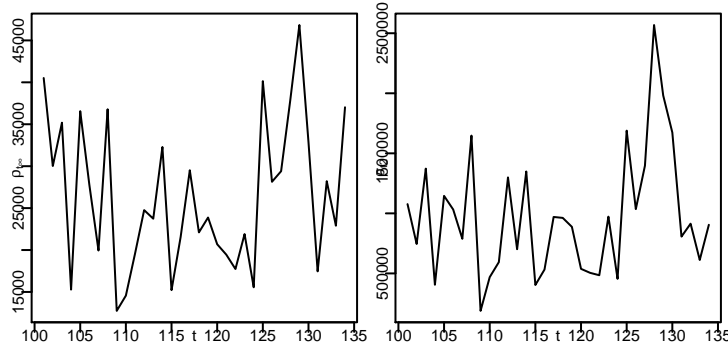


Figure 4.7: ρ 's

Embora não tenhamos um padrão para dizermos quais previsões são boas e quais não são, percebe-se que, na análise qualitativa, aquelas previsões que foram consideradas (subjetivamente) como boas, coincidem, de um modo geral, com valores menores de $\rho_{t,\infty}$ e $\rho_{t,2}$, por exemplo $t = 109$, e, analogamente, as piores previsões estão associadas a valores altos dessas métricas, por exemplo $t = 129$.

Começaremos analisando a 1ª previsão $n = 101$. Ao olharmos para a diferença entre a coloração periférica do previsto e *ex post* na Fig. 4.8, fica evidenciado um pequeno viés de previsão. Contudo, os picos e vales estão pro-

ximamente localizados no mapa, como na região em vermelho localizada entre $x = (0, 25; 0, 45)$ e $y = (0, 6; 0, 8)$. Se levarmos em conta a série $\rho_{t,\infty}$, essa teria sido a segunda pior entre as 34 previsões. Por outro lado, se olharmos para $\rho_{t,2}$, $n = 101$ estaria em uma colocação mediana.

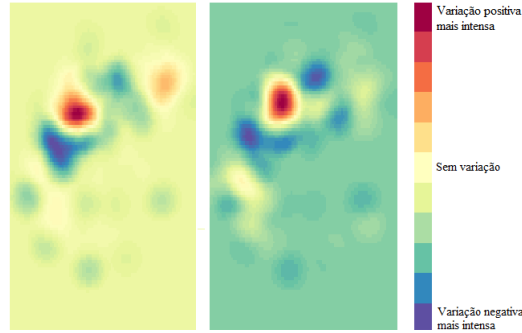


Figura 4.8: $\hat{\lambda}_{101|100}^* - \hat{\lambda}_{100}$ versus $\hat{\lambda}_{101} - \hat{\lambda}_{100}$

Para $n = 108$, nosso método parece não ter produzido uma boa previsão, pois, como vemos na Fig. 4.9, os picos e vales são muito distintos no previsto e *ex post*. Olhando para as séries $\rho_{t,\infty}$ e $\rho_{t,2}$, vemos que ambas classificaram $n = 108$ como uma das piores superfícies de intensidade.

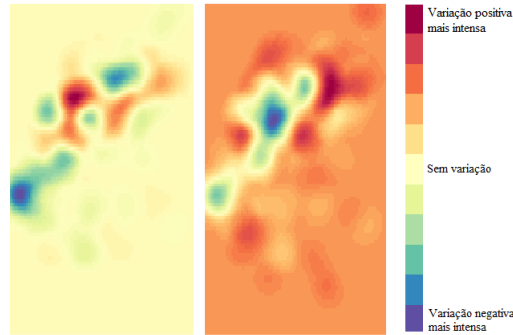


Figura 4.9: $\hat{\lambda}_{108|107}^* - \hat{\lambda}_{107}$ versus $\hat{\lambda}_{108} - \hat{\lambda}_{107}$

A Fig. 4.10 nos mostra a previsão para $n = 109$, considerada tanto por $\rho_{t,\infty}$ quanto por $\rho_{t,2}$ a melhor entre as 34 previsões, como se vê na Fig. 4.7. Apesar de a coloração periférica da previsão e *ex post* serem novamente um pouco distintas, representando um pequeno viés de previsão, os picos e vales da superfície prevista e *ex post* estão situados mais precisamente nas mesmas

regiões do mapa. Assim, a superfície prevista anteviu com precisão as regiões em que ocorreriam aumentos e quedas substanciais na intensidade de ocorrências de roubos de veículos. Por exemplo, a mancha avermelhada no mapa de intensidade previsto possui o mesmo formato que o do mapa *ex post*, com uma tonalidade levemente mais forte. Ademais, as manchas azuladas também se parecem, como na região que vai de $x = (0, 6; 0, 8)$ a $y = (0, 7; 0, 9)$ e na região compreendida entre $x = (0, 5; 0, 6)$ e $y = (0, 55; 0, 65)$.

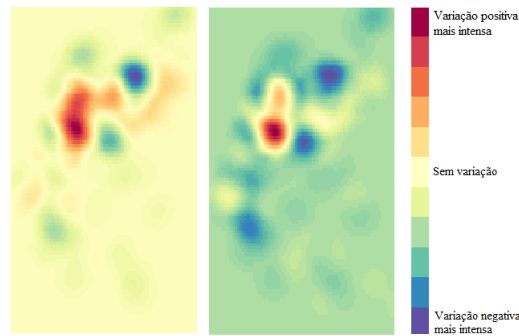


Figura 4.10: $\hat{\lambda}_{109|108}^* - \hat{\lambda}_{109}$ versus $\hat{\lambda}_{109} - \hat{\lambda}_{108}$

Podemos perceber que tanto $\rho_{t,\infty}$ quanto $\rho_{t,2}$ classificam a Fig. 4.11, que representa $n = 115$, como a segunda melhor previsão entre as 34. Aqui não vemos diferença na coloração periférica, e, como em $n = 109$, os picos e vales da previsão e *ex post* estão situados praticamente nas mesmas regiões, valendo as mesmas interpretações.

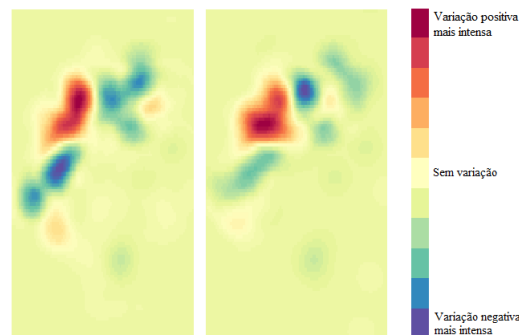


Figura 4.11: $\hat{\lambda}_{115|114}^* - \hat{\lambda}_{114}$ versus $\hat{\lambda}_{115} - \hat{\lambda}_{114}$

Por fim, para mostrarmos mais uma previsão ruim, olharemos para a Fig.

4.12, que representa $n = 129$ e por $\rho_{t,\infty}$ e $\rho_{t,2}$ é considerada a pior da série. Além da coloração periférica bastante diferente, comparando o mapa de intensidade da previsão e *ex post*, os picos e vales se localizam em regiões distintas, significando que nossa previsão para a variação na intensidade de roubos de veículos não foi boa para $n = 129$. Aqui, cabe ressaltar que, de 31/08/2015 a 11/09/2015, os servidores da segurança pública do RS estiveram em paralisação. Essa observação é importante pois a previsão para $n = 129$ engloba justamente a variação entre agosto e setembro do ano citado, sendo esse um possível fator que levou a uma previsão tão diferente do *ex post*.

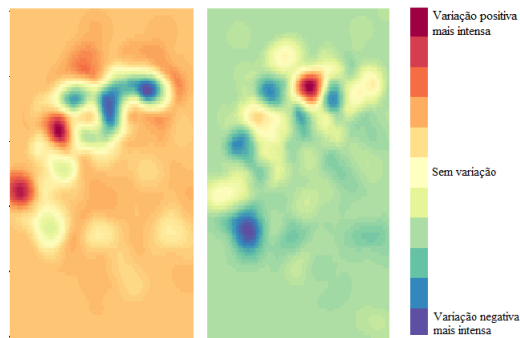


Figura 4.12: $\hat{\lambda}_{129|128}^* - \hat{\lambda}_{128}$ versus $\hat{\lambda}_{129} - \hat{\lambda}_{128}$

Assim, após analisarmos algumas das previsões, e considerando a complexidade do crime estudado, vemos que há potencial para se utilizar a metodologia sugerida no trabalho. As demais previsões podem ser encontradas nos anexos.

Capítulo 5

Considerações finais

Dado o objetivo inicial de prever variações na intensidade de ocorrências de roubo de veículo em Porto Alegre através de técnicas de séries temporais funcionais, pode-se dizer que o resultado foi satisfatório.

Nosso trabalho foi desenvolvido em etapas, iniciando-se na coleta e na transformação dos dados. Na segunda etapa, estimamos a superfície média μ , utilizamos um método de bootstrap para estimar o parâmetro d e estimamos também as autofunções ψ_d . Nas séries $\hat{\eta}_{tj}$, foram testados pressupostos importantes em séries temporais, como o de estacionariedade e o de que as séries eram RB, além de ser usada modelagem por VAR.

Após a realização da 2ª etapa, seguimos para as previsões dos mapas de intensidade utilizando sub-amostras. Embora algumas das previsões tenham parecido bastante distantes do *ex post*, muitas delas se mostraram bastante similares, o que nos faz acreditar que há potencial para aprimorar essa técnica de modo a produzir resultados ainda melhores.

Como sugestão para futuros trabalhos nesse campo de pesquisa, é possível aplicar a mesma metodologia para outros crimes, como furto de veículos. Também é possível realizar uma parceria entre a SSP e a Estatística da UFRGS, de modo que haja suporte para realização de análises mais complexas que as realizadas habitualmente.

Por fim, acreditamos que esse trabalho trouxe uma contribuição importante à Segurança Pública do Rio Grande do Sul, tendo mostrado que é possível aplicar técnicas estatísticas atuais e sofisticadas para melhorar a situação da segurança no Estado.

Capítulo 6

Referências Bibliográficas

BATHIA, N.; YAO, Q; ZIEGELMANN, F. **Identifying the Finite Dimensionality of Curve Time Series**. The Annals of Statistics 2010, vol. 38, n. 6, p. 3352–3386. Institute of Mathematical Statistics, 2010.

HORTA, H.; ZIEGELMANN, F. **Dynamics of Financial Returns Densities: A Functional Approach Applied to the Bovespa Intraday Index**. Working Paper. Departamento de Estatística, UFRGS, 2010.

DIGGLE, P.J. **Statistical Analysis of Spatial and Spatio-Temporal Point Patterns**. 3ª edição. CRC Press, 2013.

GELFAND, F.; DIGGLE, P.J.; FUENTES, M.; GUTTORP, P. **Handbook of Spatial Statistics**. CRC Press, 2010.

BADDELEY, A. **Analysing spatial point patterns in R**. Workshop Notes. CSIRO, 2008.

PIQUERO, R. A.; WEISBURD, D. **Handbook of Quantitative Criminology**. Springer, 2010.

BIVAND, R.S.; PEBESMA, E.J.; GÓMEZ-RÚBIO, V. **Applied Spatial Data Analysis with R**. Springer, 2008.

HORTA, H.; ZIEGELMANN, F. **Identifying the spectral representation of Hilbertian time series**. Departamento de Estatística, UFRGS, 2016.

Home-page do **Sistema de Consultas Integradas (CSI)** Disponível em:

<https://www.consultasintegradas.rs.gov.br/csi/csi/INTERFACE/soe/PRSoeLogon.jsp>.

Acessado em 06/04/2016.

Capítulo 7

Anexos

```
VAR Estimation Results:
=====
Endogenous variables: etal, eta2, eta3, eta4, eta5, eta6
Deterministic variables: none
Sample size: 133
Log Likelihood: -5471.277
Roots of the characteristic polynomial:
0.8601 0.6987 0.5796 0.4843 0.4843 0.3695
Call:
VAR(y = var_input, type = "none", lag.max = 10, ic = "AIC")

Estimation results for equation etal:
=====
etal = etal.l1 + eta2.l1 + eta3.l1 + eta4.l1 + eta5.l1 + eta6.l1
      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
etal.l1  0.72746    0.06327  11.497  <2e-16 ***
eta2.l1  0.10542    0.07644   1.379   0.1703
eta3.l1 -0.02120    0.11307  -0.187   0.8516
eta4.l1 -0.21188    0.12576  -1.685   0.0945 .
eta5.l1 -0.11404    0.18363  -0.621   0.5357
eta6.l1  0.05599    0.20045   0.279   0.7804
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 405 on 127 degrees of freedom
Multiple R-Squared:  0.5103,    Adjusted R-squared:  0.4872
F-statistic: 22.06 on 6 and 127 DF,  p-value: < 2.2e-16

Estimation results for equation eta2:
=====
eta2 = etal.l1 + eta2.l1 + eta3.l1 + eta4.l1 + eta5.l1 + eta6.l1
      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
etal.l1  0.06525    0.05929   1.101   0.2732
eta2.l1  0.61483    0.07163   8.583  2.78e-14 ***
eta3.l1 -0.21754    0.10595  -2.053   0.0421 *
eta4.l1  0.02331    0.11785   0.198   0.8436
eta5.l1 -0.07416    0.17208  -0.431   0.6672
eta6.l1 -0.16538    0.18784  -0.880   0.3803
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 379.5 on 127 degrees of freedom
Multiple R-Squared:  0.3681,    Adjusted R-squared:  0.3383
F-statistic: 12.33 on 6 and 127 DF,  p-value: 6.609e-11

Estimation results for equation eta3:
=====
eta3 = etal.l1 + eta2.l1 + eta3.l1 + eta4.l1 + eta5.l1 + eta6.l1
      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
etal.l1 -0.009636    0.033605  -0.287   0.775
eta2.l1 -0.064250    0.040597  -1.583   0.116
eta3.l1  0.774566    0.060049  12.899  <2e-16 ***
eta4.l1 -0.024132    0.066791  -0.361   0.718
eta5.l1 -0.050101    0.097525  -0.514   0.608
eta6.l1 -0.096764    0.106459  -0.909   0.365
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 215.1 on 127 degrees of freedom
Multiple R-Squared:  0.5683,    Adjusted R-squared:  0.5479
F-statistic: 27.86 on 6 and 127 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

```

Estimation results for equation eta4:
=====
eta4 = eta1.l1 + eta2.l1 + eta3.l1 + eta4.l1 + eta5.l1 + eta6.l1

      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
eta1.l1  0.02116   0.03734   0.567   0.572
eta2.l1 -0.02412   0.04511  -0.535   0.594
eta3.l1  0.02725   0.06672   0.408   0.684
eta4.l1  0.57366   0.07421  7.730 2.86e-12 ***
eta5.l1  0.05371   0.10836   0.496   0.621
eta6.l1  0.06674   0.11829   0.564   0.574
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 239 on 127 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.3299,    Adjusted R-squared:  0.2982
F-statistic: 10.42 on 6 and 127 DF,  p-value: 2.234e-09

Estimation results for equation eta5:
=====
eta5 = eta1.l1 + eta2.l1 + eta3.l1 + eta4.l1 + eta5.l1 + eta6.l1

      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
eta1.l1  0.008228   0.027115   0.303   0.762
eta2.l1  0.032062   0.032756   0.979   0.330
eta3.l1  0.009412   0.048452   0.194   0.846
eta4.l1  0.004668   0.052891   0.087   0.931
eta5.l1  0.437730   0.078690   5.817 4.59e-08 ***
eta6.l1 -0.043564   0.085898  -0.507   0.613
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 173.5 on 127 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.2205,    Adjusted R-squared:  0.1837
F-statistic: 5.988 on 6 and 127 DF,  p-value: 1.545e-05

Estimation results for equation eta6:
=====
eta6 = eta1.l1 + eta2.l1 + eta3.l1 + eta4.l1 + eta5.l1 + eta6.l1

      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
eta1.l1 -0.04296   0.02602  -1.651 0.101147
eta2.l1  0.01162   0.03143   0.370 0.712187
eta3.l1 -0.01083   0.04649  -0.233 0.816170
eta4.l1 -0.05720   0.05171  -1.106 0.270762
eta5.l1 -0.03562   0.07351  -0.483 0.628992
eta6.l1  0.32684   0.08242   3.965 0.000122 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 166.5 on 127 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.1462,    Adjusted R-squared:  0.1059
F-statistic: 3.624 on 6 and 127 DF,  p-value: 0.002367

Covariance matrix of residuals:
      eta1  eta2  eta3  eta4  eta5  eta6
eta1 164011 -50986 -1604 17986 2811 5392
eta2 -50985 143977 41825 -1128 2374 12432
eta3 -1604 41825 46239 -2962 1702 7332
eta4 17985 -1128 -2962 57113 -3426 658
eta5 2811 2374 1702 -3426 30114 2741
eta6 5392 12432 7332 658 2741 27729

Correlation matrix of residuals:
      eta1  eta2  eta3  eta4  eta5  eta6
eta1 1.00000 -0.33179 -0.01842 0.18583 0.04000 0.07995
eta2 -0.33179 1.00000 0.51260 -0.01244 0.03605 0.19675
eta3 -0.01842 0.51260 1.00000 -0.05764 0.04560 0.20476
eta4 0.18583 -0.01244 -0.05764 1.00000 -0.08261 0.01653
eta5 0.04000 0.03605 0.04560 -0.08261 1.00000 0.09487
eta6 0.07995 0.19675 0.20476 0.01653 0.09487 1.00000

```

Figura 7.1: Ajuste VAR(1) para as $\hat{\eta}_{tj}$

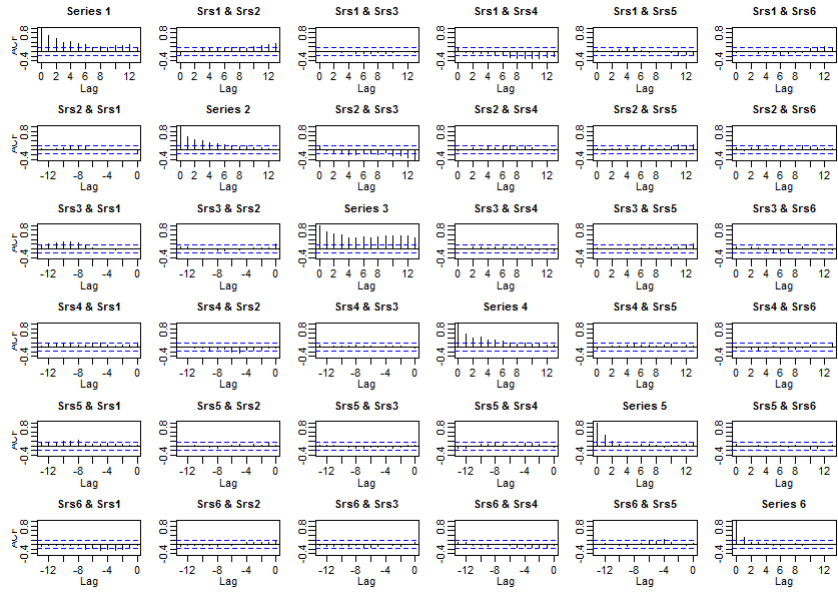


Figura 7.2: Correlograma das $\hat{\eta}_{tj}$, $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

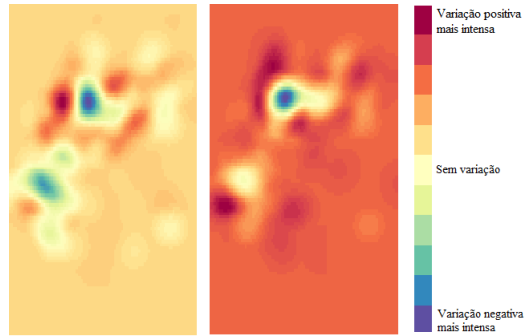


Figura 7.3: $\hat{\lambda}_{102|101}^* - \hat{\lambda}_{101}$ versus $\hat{\lambda}_{102} - \hat{\lambda}_{101}$

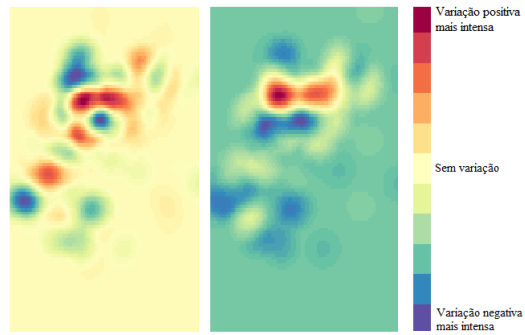


Figura 7.4: $\hat{\lambda}_{103|102}^* - \hat{\lambda}_{102}$ versus $\hat{\lambda}_{103} - \hat{\lambda}_{102}$

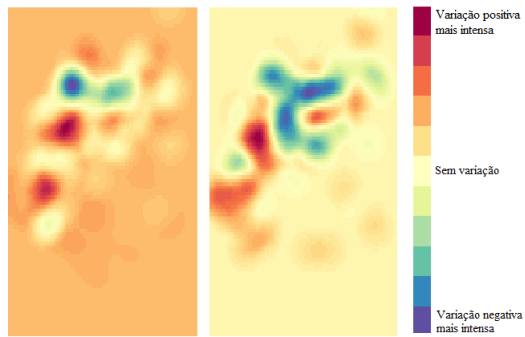


Figura 7.5: $\hat{\lambda}_{104|103}^* - \hat{\lambda}_{103}$ versus $\hat{\lambda}_{104} - \hat{\lambda}_{103}$

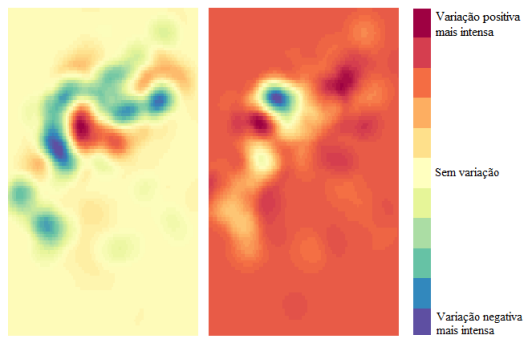


Figura 7.6: $\hat{\lambda}_{105|104}^* - \hat{\lambda}_{104}$ versus $\hat{\lambda}_{105} - \hat{\lambda}_{104}$

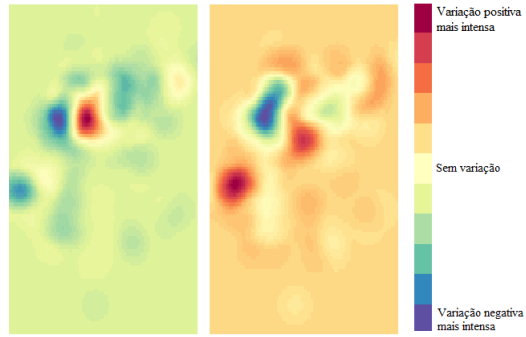


Figura 7.7: $\hat{\lambda}_{106|105}^* - \hat{\lambda}_{105}$ versus $\hat{\lambda}_{106} - \hat{\lambda}_{105}$

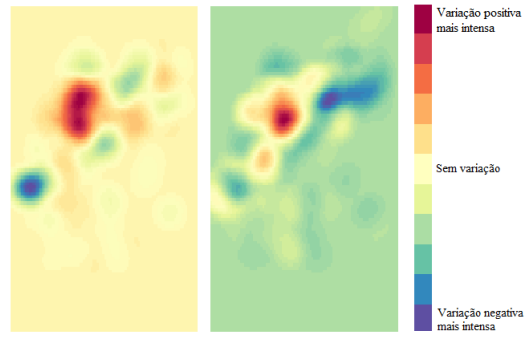


Figura 7.8: $\hat{\lambda}_{107|106}^* - \hat{\lambda}_{106}$ versus $\hat{\lambda}_{107} - \hat{\lambda}_{106}$

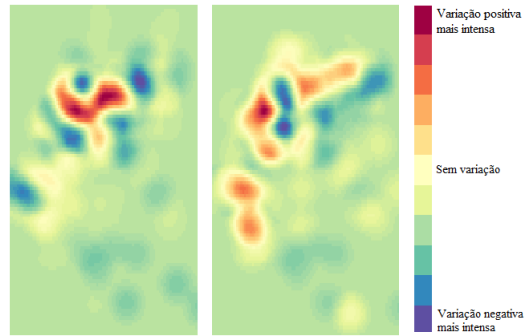


Figura 7.9: $\hat{\lambda}_{110|109}^* - \hat{\lambda}_{109}$ versus $\hat{\lambda}_{110} - \hat{\lambda}_{109}$

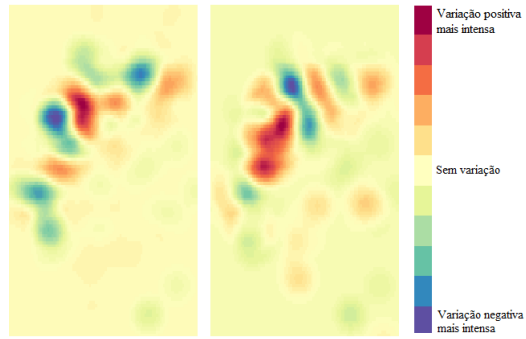


Figura 7.10: $\hat{\lambda}_{111|110}^* - \hat{\lambda}_{110}$ versus $\hat{\lambda}_{111} - \hat{\lambda}_{110}$

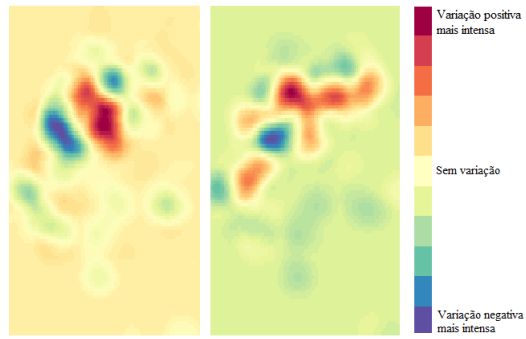


Figura 7.11: $\hat{\lambda}_{112|111}^* - \hat{\lambda}_{111}$ versus $\hat{\lambda}_{112} - \hat{\lambda}_{111}$

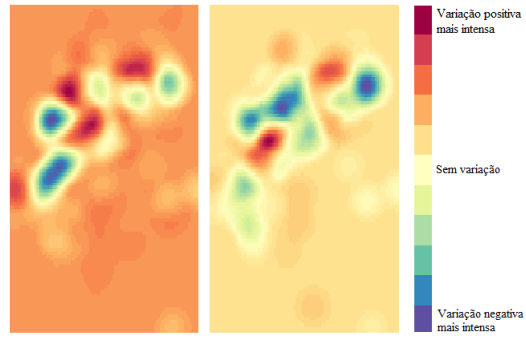


Figura 7.12: $\hat{\lambda}_{113|112}^* - \hat{\lambda}_{112}$ versus $\hat{\lambda}_{113} - \hat{\lambda}_{112}$

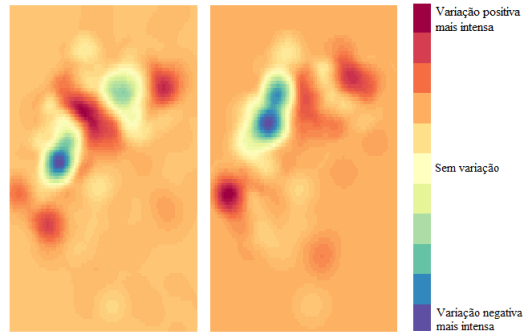


Figura 7.13: $\hat{\lambda}_{114|113}^* - \hat{\lambda}_{113}$ versus $\hat{\lambda}_{114} - \hat{\lambda}_{113}$

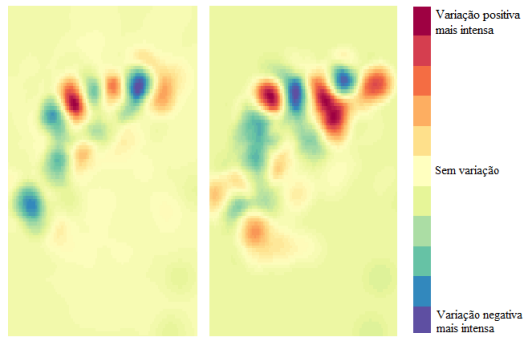


Figura 7.14: $\hat{\lambda}_{116|115}^* - \hat{\lambda}_{115}$ versus $\hat{\lambda}_{116} - \hat{\lambda}_{115}$

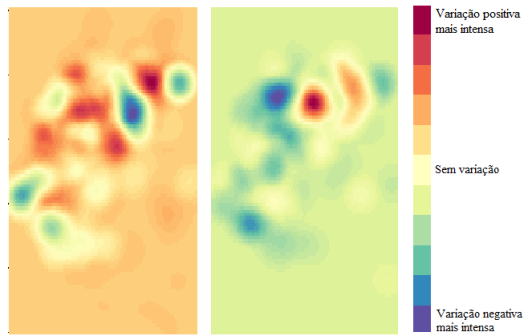


Figura 7.15: $\hat{\lambda}_{117|116}^* - \hat{\lambda}_{116}$ versus $\hat{\lambda}_{117} - \hat{\lambda}_{116}$

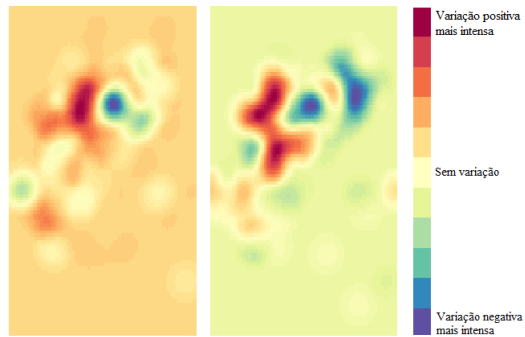


Figura 7.16: $\hat{\lambda}_{118|117}^* - \hat{\lambda}_{117}$ versus $\hat{\lambda}_{118} - \hat{\lambda}_{117}$

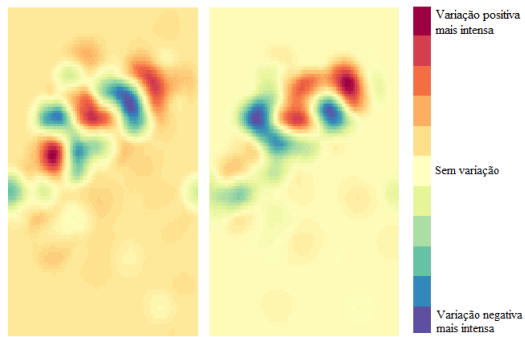


Figura 7.17: $\hat{\lambda}_{119|118}^* - \hat{\lambda}_{118}$ versus $\hat{\lambda}_{119} - \hat{\lambda}_{118}$

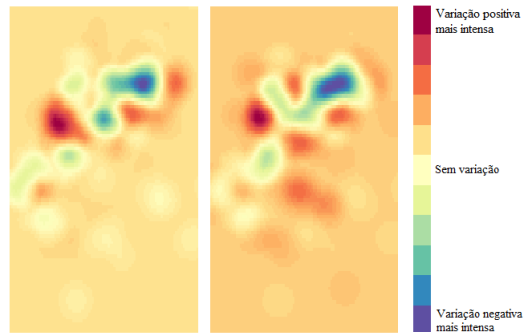


Figura 7.18: $\hat{\lambda}_{120|119}^* - \hat{\lambda}_{119}$ versus $\hat{\lambda}_{120} - \hat{\lambda}_{119}$

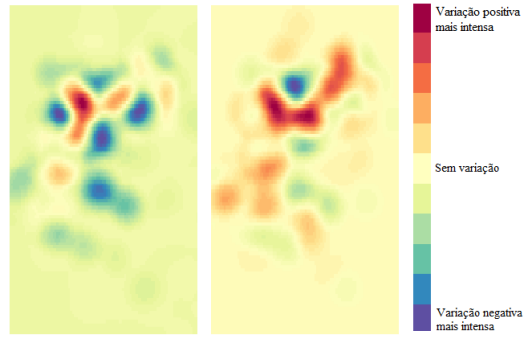


Figura 7.19: $\hat{\lambda}_{121|120}^* - \hat{\lambda}_{120}$ versus $\hat{\lambda}_{121} - \hat{\lambda}_{120}$

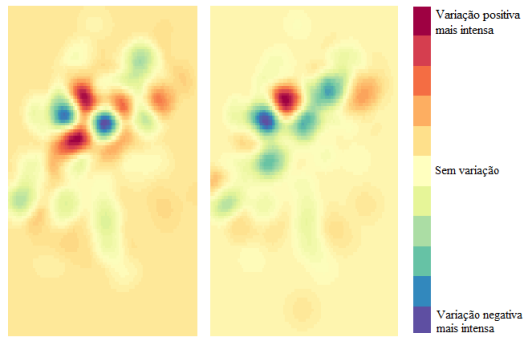


Figura 7.20: $\hat{\lambda}_{122|121}^* - \hat{\lambda}_{121}$ versus $\hat{\lambda}_{122} - \hat{\lambda}_{121}$

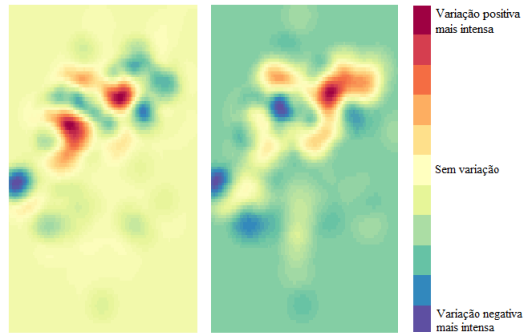


Figura 7.21: $\hat{\lambda}_{123|122}^* - \hat{\lambda}_{122}$ versus $\hat{\lambda}_{123} - \hat{\lambda}_{122}$

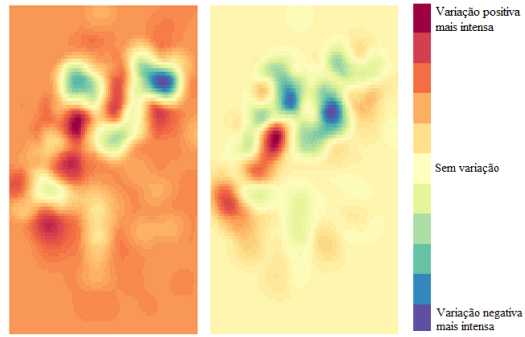


Figura 7.22: $\hat{\lambda}_{124|123}^* - \hat{\lambda}_{123}$ versus $\hat{\lambda}_{124} - \hat{\lambda}_{123}$

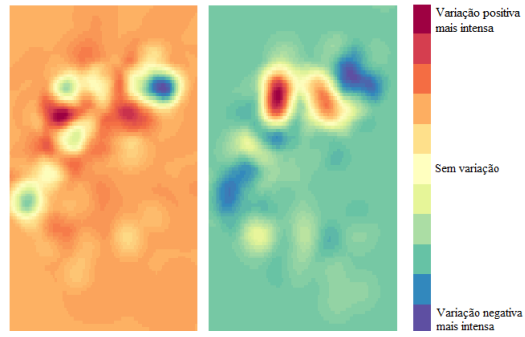


Figura 7.23: $\hat{\lambda}_{125|124}^* - \hat{\lambda}_{124}$ versus $\hat{\lambda}_{125} - \hat{\lambda}_{124}$

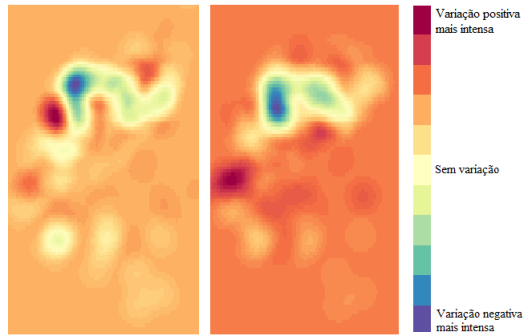


Figura 7.24: $\hat{\lambda}_{126|125}^* - \hat{\lambda}_{125}$ versus $\hat{\lambda}_{126} - \hat{\lambda}_{125}$

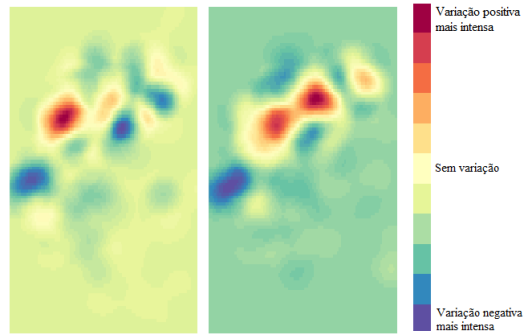


Figura 7.25: $\hat{\lambda}_{127|126}^* - \hat{\lambda}_{126}$ versus $\hat{\lambda}_{127} - \hat{\lambda}_{126}$

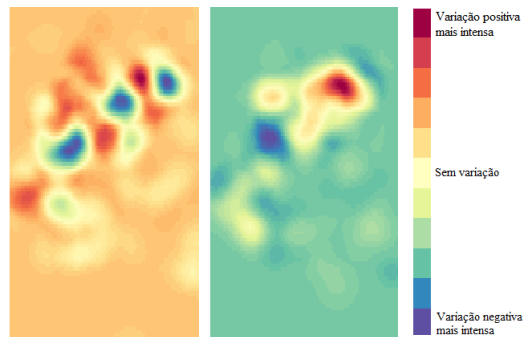


Figura 7.26: $\hat{\lambda}_{128|127}^* - \hat{\lambda}_{127}$ versus $\hat{\lambda}_{128} - \hat{\lambda}_{127}$

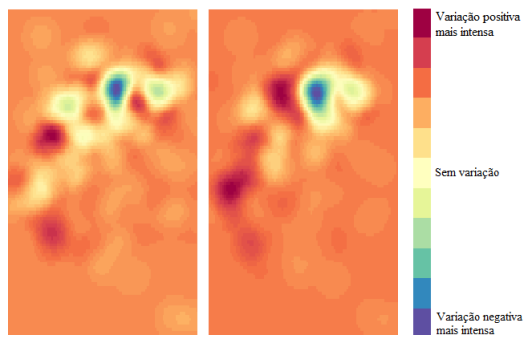


Figura 7.27: $\hat{\lambda}_{130|129}^* - \hat{\lambda}_{129}$ versus $\hat{\lambda}_{130} - \hat{\lambda}_{129}$

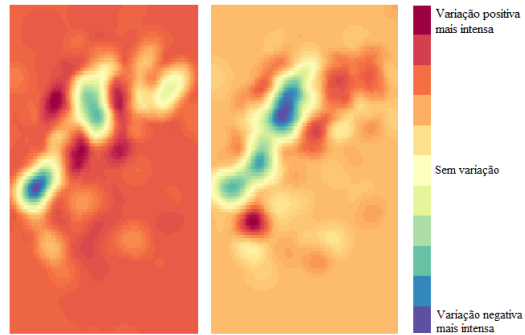


Figura 7.28: $\hat{\lambda}_{131|130}^* - \hat{\lambda}_{130}$ versus $\hat{\lambda}_{131} - \hat{\lambda}_{130}$

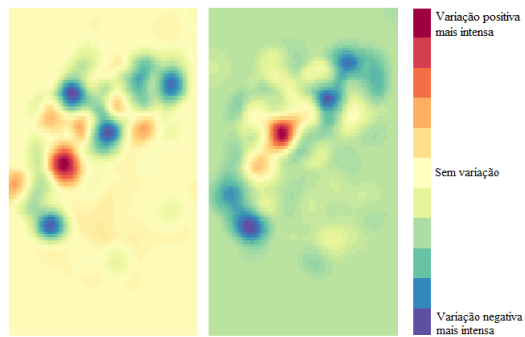


Figura 7.29: $\hat{\lambda}_{132|131}^* - \hat{\lambda}_{131}$ versus $\hat{\lambda}_{132} - \hat{\lambda}_{131}$

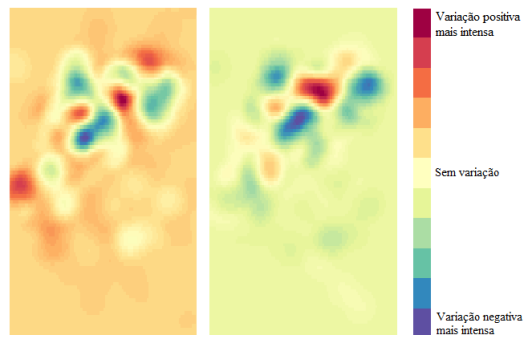


Figura 7.30: $\hat{\lambda}_{133|132}^* - \hat{\lambda}_{132}$ versus $\hat{\lambda}_{133} - \hat{\lambda}_{132}$

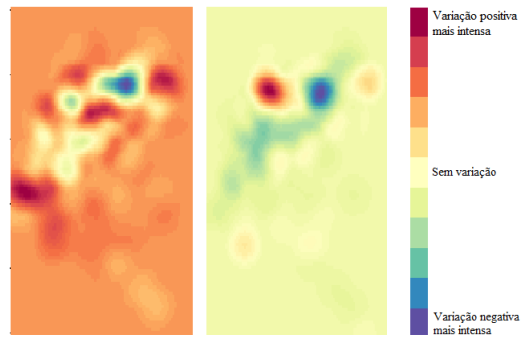


Figura 7.31: $\hat{\lambda}_{134|133}^* - \hat{\lambda}_{133}$ versus $\hat{\lambda}_{134} - \hat{\lambda}_{133}$