UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

SOBRE A IMERSÃO DE MÓDULOS COM COMPRIMENTO FINITO EM MÓDULOS INJETIVOS COM COMPRIMENTO FINITO

JOHN FREDDY MORENO LOZADA

PORTO ALEGRE, AGOSTO DE 2016

Dissertação submetida por John Freddy Moreno Lozada [1] como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Banca Examinadora

Profa. Dra. Bárbara Seelig Pogorelsky (UFRGS)

Profa. Dra. Thaísa Raupp Tamusiunas (UFCSPA)

Profa. Dra. Virgínia Silva Rodrigues (UFSC)

Prof. Dr. Alveri Alves Sant'Ana (orientador, UFRGS)

Data de Defesa: 05/08/2016.

[1] Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CNPq).

Agradecimentos

A Dios por guiar mi caminar, permitirme alcanzar un logro más en mi vida y poner en mi camino a tantas personas valiosas.

A Olga Cecilia Aguirre por su amistad y su apoyo incondicional.

A mi familia, porque siempre me han ayudado en lo posible.

A la familia Bustos Ríos, por su gran apoyo, no solo en la Maestría.

A mi orientador, por su ejemplo como profesional y ser humano. Por encauzarme de manera precisa y prudente en un tópico de las Matemáticas antes desconocido para mi.

A Leonardo Duarte, por su amistad y por haber leído el borrador de este trabajo, aportado importantes correcciones en el Portugués y dado sugerencias en la presentación del contenido.

A los colegas de la Pos-Graduación en Matemáticas de la UFRGS, por su compañía en las salas de estudio.

A las profesoras que hicieron parte de mi banca, por sus correcciones y sugerencias, las cuales contribuyeron a una notable mejora de este trabajo.

A todas las personas que aportaron, de un modo u otro, para materializar el sueño de hacer esta Maestría.

A el programa de Pos-Graduación en Matemática de la UFRGS y a los profesores con quienes tuve clase.

A el CNPq, por el apoyo financiero.

Resumo

Nesta dissertação estudamos sob que condições um módulo de comprimento finito pode ser imerso em um módulo injetivo de comprimento finito. Também apresentamos a caracterização, dada por Hirano em [8], para os anéis sobre os quais todo módulo de comprimento finito tem um fecho injetivo de comprimento finito, os chamados de π-V-anéis. Além disso, mostramos que as extensões normais finitas de π-V-anéis são também π-V-anéis.

Palavras-chave: Módulos de comprimento finito; Fecho injetivo; π-V-anéis; Extensões normais finitas.

Abstract

In this dissertation we study under what conditions a module of finite length can be embedded in an injective module of finite length. Also, we present a charactization, given by Hirano in [8], for the rings over which all module of finite length has an injective hull of finite length, the so called π-V-rings. Moreover, we show that finite normalizing extensions of π-V-rings are also π-V-rings.

Keywords: Modules of finite length; Injective hull; π-V-rings; Finite normalizing extensions.

Sumário

Introdução

B. Eckman e A. Schopf mostraram em [6] que todo módulo pode ser imerso em um módulo injetivo. Azumaya em [3] deixou como problema aberto a seguinte questão:

Problema 1. *Se R é um anel artiniano à esquerda e ${}_RM$ é um módulo que tem comprimento finito, existe um R-módulo injetivo de comprimento finito que contém ${}_RM$?*

Rosenberg e Zelinsky estudaram este problema em [17]. Eles conseguiram mostrar que, para anéis arbitrários com unidade, um módulo que tem comprimento finito pode ser imerso num módulo injetivo com comprimento finito se, e somente se, o seu fecho injetivo tem comprimento finito (Proposição 2.1.1). Logo, eles observaram que quando R é o anel dos números inteiros $\mathbb{Z}$, o seu fecho injetivo, os números racionais $\mathbb{Q}$, não tem comprimento finito como $\mathbb{Z}$-módulo. Assim, ficou claro que o Problema 1 não tem uma resposta positiva sobre anéis arbitrários. Retornando ao problema original, quando o anel R é artiniano à esquerda, conseguiram mostrar que o problema não tinha uma resposta afirmativa (ver Teorema 2.2.7 e Exemplo 2.2.9). Contudo, eles provaram que o Problema 1 era equivalente a uma generalização do seguinte problema, formulado por Artin alguns anos antes, em [10]:

Problema 2. *Um anel de divisão finito dimensional à direita sobre um subanel de divisão, também é finito dimensional à esquerda?*

A generalização deste problema é dada quando substituímos as hipóteses sobre o anel e o subanel, trocando o anel de divisão finitamente gerado à direita por um anel simples artiniano finitamente gerado à direita e o subanel de divisão por um subanel semissimples artiniano (Teorema 2.2.14). Rosenberg e Zelinsky conjeturaram que, ainda para anéis semissimples, o Problema 1 e sua equivalência nem sempre iriam ter uma resposta afirmativa; porém, não conseguiram apresentar nenhum contra-exemplo. Na última seção de [17] os autores caracterizam alguns anéis sobre os quais um módulo simples tem fecho injetivo com comprimento finito.

No ano de 1971, Michler e Villamayor estudaram em [14] os anéis sobre os quais um módulo simples é injetivo. Neste artigo, eles conseguem fazer uma caracterização de tais anéis. Posteriormente, estes anéis foram chamados de V-anéis em homenagem a Villamayor.

Y. Hirano, no ano de 2000, fez em [8] uma caracterização dos anéis sobre os quais todo módulo com comprimento finito tem fecho injetivo com comprimento finito, chamando tais anéis de π-V-anéis. Além disso, Hirano provou que algumas extensões normais finitas dos π-V-anéis são também π-V-anéis.

Nesta dissertação estudamos as contribuições de Rosenberg e Zelinsky ao Problema 1, bem como as caracterizações de Hirano dos π-V-anéis. A dissertação está dividida em três capítulos. No Capítulo 1 apresentamos os pré-requisitos necessários para o desenvolvimento detalhado dos capítulos posteriores.

No Capítulo 2 discutimos os resultados obtidos por Rosenberg e Zelinsky, os quais aparecem na segunda seção de [17]. Este Capítulo está dividido em duas seções: na primeira, apresentamos algumas equivalências para quando um R-módulo de comprimento finito é imerso num R-módulo injetivo de comprimento finito, exigindo que o anel R apenas tenha unidade; a segunda seção está dividida em duas subseções e nelas assumimos, além da unidade, que R seja artiniano à esquerda, enquanto que na segunda, R é um anel artiniano. Para encerrar esta seção mostramos dois resultados nos quais um anel ser finitamente gerado à direita sobre um subanel, implica que também é finitamente gerado à esquerda sobre o mesmo subanel.

No Capítulo 3 discutimos os resultados de Hirano sobre os π-V-anéis e os n-V-anéis. Na primeira seção apresentamos a caracterização dos π-V-anéis e os n-V-anéis, como também algumas propriedades deles. Na última seção mostramos que uma extensão normal finita de um π-V-anel também é um π-V-anel.

Capítulo 1

Pré-requisitos

Neste capítulo, além de fixar notações, apresentamos alguns conceitos e resultados da Teoria de Anéis e da Teoria de Módulos necessários para a compreensão dos Capítulos 2 e 3. A maioria dos resultados aqui apresentados não são demonstrados no texto, por serem resultados clássicos e para evitar que a dissertação se torne muito extensa. O leitor interessado pode consultar as respectivas demonstrações nas referências citadas.

Assumimos familiaridade com os seguintes conceitos: anel, ideal, ideal à esquerda, ideal à direita, módulo, submódulo e bimódulo. Dados dois anéis com unidade R e T, como é usual na Teoria de Módulos, um R-módulo à esquerda M será denotado por ${}_RM$; um T-módulo à direita N, por N_T; e um (R,T)-bimódulo P, por ${}_RP_T$.

1.1 Módulos, R-homomorfismos e Sequências Exatas

Embora vários resultados apresentados neste capítulo valem para anéis sem unidade, no que segue, R sempre denotará um anel com unidade.

Definição 1.1.1. *Seja M um R-módulo à esquerda. O **anulador** de M, denotado $AnnM$, é definido como sendo o conjunto:*

$$AnnM := \{r \in R : rM = 0\}.$$

Não é difícil verificar, diretamente da definição, que $AnnM$ é um ideal de R.

Proposição 1.1.2. *Seja I um ideal do anel R.*

1. *Se ${}_RM$ é um R-módulo e $I \subseteq Ann_R M$, então M é um R/I-módulo à esquerda com a operação definida pela correspondência $\cdot : R/I \times M \longrightarrow M$ dada por $(\bar{r}, m) \longmapsto \bar{r} \cdot m = rm$.*

2. *Se M_R é um R-módulo e $I \subseteq Ann M_R$, então M é um R/I-módulo à direita com a operação definida pela correspondência $\cdot : M \times R/I \longrightarrow M$ dada por $(m, \bar{r}) \longmapsto m \cdot \bar{r} = mr$.*

Em outras palavras, o que diz a proposição anterior é que se $I \subseteq Ann_R M$ (resp. $I \subseteq Ann M_R$) então a ação à esquerda (resp. à direita) do anel R/I sobre M é a mesma do anel R sobre M.

Demonstração. Vamos provar o item *1*, pois a prova do item *2* é análoga. Como ${}_RM$ é R-módulo, é suficiente mostrar que a operação está bem definida. Se $\bar{r_1} = \bar{r} \in R/I$, então $r_1 - r \in I$. Logo, $(r_1 - r)m = 0$ para todo $m \in M$; e então $\bar{r_1} \cdot m = r_1 m = rm = \bar{r} \cdot m$, para todo $m \in M$. □

Definição 1.1.3. *Se M e N são R-módulos à esquerda, uma aplicação $f : M \longrightarrow N$ é um R-**homomorfismo** se é uma função que satisfaz:*

1. *$f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2)$, para todos $m_1, m_2 \in M$;*

2. *$f(rm) = rf(m)$, para todo $m \in M$ e para todo $r \in R$.*

Analogamente, define-se um R-homomorfismo de R-módulos à direita.

Denotaremos por 1_M o R-homomorfismo identidade de um R-módulo M. Um R-homomorfismo $f : M \longrightarrow M$ será chamado de R-endomorfismo. Dado um R-homomorfismo de módulos $f : M \longrightarrow N$, o *núcleo* de f, denotado por $Ker(f)$, é o conjunto $\{m \in M : \ f(m) = 0\} \subseteq M$ e a imagem de f, denotada por $Im(f)$, é o conjunto $\{f(m) : \ m \in M\} \subseteq N$. Note que $Ker(f)$ é R-submódulo de M e $Im(f)$ é R-submódulo de N. Um R-monomorfismo é um R-homomorfismo injetor, e um R-epimorfismo é dito um R-homomorfismo sobrejetor. Um R-homomorfismo que é injetor e sobrejetor é um R-isomorfismo.

Observação 1.1.4. *Vamos usar o símbolo "$\cong$" para indicar um isomorfismo entre duas estruturas algébricas, não somente de R-módulos. Assim, quando escrevemos $V \cong W$, queremos dizer que V e W possuem a mesma estrutura algébrica com suas respectivas propriedades.*

Para dois R-módulos M e N, o grupo de todos os R-homomorfismos (à direita ou à esquerda) de M em N será denotado por $Hom_R(M, N)$ e tal grupo é abeliano (aditivo). Quando $M = N$, em lugar de $Hom_R(M, N)$ escreveremos $End_R(M)$, ou simplesmente $End(M)$, para denotar o grupo de R-endomorfismos de M.

Um problema de interesse na teoria é proporcionar uma estrutura de módulo para o grupo $Hom_R(M, N)$. Não é difícil verificar que se o anel R é comutativo, de fato, $Hom_R(M, N)$ tem uma estrutura de R-módulo. O seguinte teorema apresenta outras formas de proporcionar uma estrutura de módulo para o grupo $Hom_R(M, N)$.

Teorema 1.1.5. *([7], Chapter IV, Theorem 4.8) Sejam R e T anéis com unidade. Então:*

1. *Dados um (R, T)-bimódulo ${}_RM_T$ e um R-módulo ${}_RN$, $Hom_R({}_RM_T, {}_RN)$ é um T-módulo à esquerda definindo a ação, para todo $f \in Hom_R({}_RM_T, {}_RN)$ e todo $t \in T$:*
$$(tf)(m) = f(mt), \text{ para cada } m \in M;$$

2. *Dados um R-módulo ${}_RM$ e um (R, T)-bimódulo ${}_RN_T$, $Hom_R({}_RM, {}_RN_T)$ é um T-módulo à direita definindo a ação, para todo $f \in Hom_R({}_RM, {}_RN_T)$ e todo $t \in T$:*
$$(ft)(m) = f(m)t, \text{ para cada } m \in M.$$

Fixando um R-módulo S, para cada R-homomorfismo $f \in Hom_R(M, N)$ pode-se associar um homomorfismo de grupos

$$\begin{array}{rccc} f^*: & Hom_R(N, S) & \longrightarrow & Hom_R(M, S) \\ & \varphi & \longmapsto & \varphi \circ f. \end{array}$$

Quando $Hom_R(N, S)$ e $Hom_R(M, S)$ são R-módulos à direita (resp. à esquerda), então f^* é um R-homomorfismo de módulos à direita (resp. à esquerda). A seguinte proposição tem algumas propriedades deste homomorfismo.

Proposição 1.1.6. *([16], pgs. 134 e 135) Sejam $f \in Hom_R(N,P)$ e $g \in Hom_R(M,N)$. Então*

1. $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$;

2. $(1_N)^* = 1_{Hom_R(N,S)}$;

3. $(0_N)^* = 0_{Hom_R(N,S)}$.

Definição 1.1.7. *Seja $\{f_i : M_i \longrightarrow M_{i+1}\}_{i\in I}$ uma família de R-homomorfismos. Dizemos que a sequência:*

$$\cdots \xrightarrow{f_{i-2}} M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \cdots$$

*é **exata em** M_i se $Ker(f_i) = Im(f_{i-1})$. Se a sequência é exata para todo M_i, então dizemos esta é uma **sequência exata**.*

Note que, se $f : M \longrightarrow N$ é um R-homomorfismo, então:

- $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N$ é exata se, e somente se, f é um R-monomorfismo;
- $M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$ é exata se, e somente se, f é um R-epimorfismo.

Definição 1.1.8. *1. Uma sequência exata de R-módulos*

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

*é chamada de **sequência exata curta**.*

2. *Dizemos que uma sequência $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N$ **cinde**, se existe um R-homomorfismo $f' : N \longrightarrow M$ tal que $f' \circ f = 1_M$.*

3. *Dizemos que uma sequência $P \xrightarrow{g} Q \longrightarrow 0$ **cinde**, se existe um R-homomorfismo $g' : Q \longrightarrow P$ tal que $g \circ g' = 1_Q$.*

Pode-se mostrar que numa sequência exata curta $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$, $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N$ cinde se, e somente se, $N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ cinde.

Proposição 1.1.9. *Se a sequência de R-módulos $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ é uma sequência exata, então a sequência*

$$0 \longrightarrow Hom_R(P,S) \xrightarrow{g^*} Hom_R(N,S) \xrightarrow{f^*} Hom_R(M,S),$$

também é exata para todo R-módulo S, isto é, $Im(g^*) = Ker(f^*)$ e g^* é R-monomorfismo.

Demonstração. Seja $\varphi \in Hom_R(P,S)$ tal que $g^*(\varphi) = \varphi \circ g = 0$. Como g é epimorfismo, $\varphi(P) = 0$. Logo $\varphi = 0$ e então $Ker(g^*) = 0$. Resta mostrar que $Im(g^*) = Ker(f^*)$.

Como $Ker(g) = Im(f)$, segue que $g \circ f = 0$. Então, dado $g^*(\varphi) = \varphi \circ g \in Im(g^*)$, temos $f^*(g^*(\varphi)) = f^*(\varphi \circ g) = \varphi \circ (g \circ f) = \varphi \circ 0 = 0$. Logo $Im(g^*) \subseteq Ker(f^*)$.

Por outro lado, se $\psi \in Ker(f^*)$, então $f^*(\psi) = \psi \circ f = 0$.

Vamos mostrar que $\phi : P \longrightarrow S$ dada pela correspondência $y \longmapsto \psi(x)$, onde $g(x) = y$, está bem definida. De fato, como g é epimorfismo, para cada $y \in P$, existe $x \in N$ tal que $g(x) = y$. Além disso, se $\phi(y_1) = \phi(y_2)$ então $\psi(x_1) = \psi(x_2)$, sendo $y_1 = g(x_1)$ e $y_2 = g(x_2)$. Note que para concluir que $y_1 = y_2$ é suficiente mostrar que $Ker(g) \subseteq Ker(\psi)$. Logo por hipótese, para cada $x \in Ker(g)$ existe $z \in M$ tal que $f(z) = x$. Dado que $\psi \circ f = 0$, então para cada $x \in Ker(g)$ existe $z \in M$ tal que $\psi(x) = \psi(f(z)) = 0$. Logo $Ker(g) \subseteq Ker(\psi)$ e ϕ está bem definida.

Além disso, como ψ e g são R-homomorfismos, também ϕ o é. Por último, da definição de ϕ segue que $\psi = \phi \circ g = g^*(\phi)$. Então $Ker(f^*) \subseteq Im(g^*)$. □

Proposição 1.1.10. *([16], Proposição V.1.5) Seja $\{M_j\}_{j \in J}$ uma família de R-módulos à esquerda e S um R-módulo à esquerda dado. Então:*

1. $Hom_R(S, \prod_{j\in J} M_j) \cong \prod_{j \in J} Hom_R(S, M_j)$;
2. $Hom_R(\bigoplus_{j\in J} M_j, S) \cong \prod_{j\in J} Hom_R(M_j, S)$.

Definição 1.1.11. *Dado um anel R define-se o anel oposto, denotado por R^{op}, como sendo a estrutura algébrica $(R, +, \cdot_{op})$ onde $(R, +)$ é a estrutura de grupo abeliano de R e $\cdot_{op}$ é o produto definido por $x \cdot_{op} y := yx$, para todos $x, y \in R$.*

Proposição 1.1.12. *Para qualquer anel R, $R^{op} \cong End(_RR)$ como anéis.*

Demonstração. Definindo a aplicação ψ como segue

$$\begin{aligned} \psi : R^{op} &\longrightarrow End(_RR) \\ x &\longmapsto \psi(x) : R \longrightarrow R \\ &\qquad\qquad r \longmapsto \psi(x)(r) = rx \end{aligned}$$

temos que:

- ψ é um homomorfismo de anéis: pois para todos $x, y \in R^{op}$, tem-se $\psi(x + y)(r) = r(x + y) = rx + ry = \psi(x)(r) + \psi(y)(r)$, para cada $r \in R$; isto é, $\psi(x+y) = \psi(x)+\psi(y)$. Também, para todos $x, y \in R^{op}$, tem-se $\psi(x \cdot_{op} y)(r) = r(x \cdot_{op} y) = r(yx) = (ry)x = \psi(x)(ry) = \psi(x)[\psi(y)(r)]$, para cada $r \in R$; isto é, $\psi(x \cdot_{op} y) = \psi(x) \circ \psi(y)$.

- ψ é injetor: se $\psi(x) = \psi(y)$, então $rx = ry$, para todo $r \in R$. Logo, para $r = 1$, obtemos que $x = y$.

- ψ é sobrejetor: dado $f \in End(_RR)$, seja $f(1) = x_0$. Logo, para todo $r \in R$ temos $f(r) = rf(1) = rx_0 = \psi(x_0)(r)$; isto é, $f = \psi(x_0)$.

Portanto, ψ é isomorfismo de anéis. $\square$

1.2 Sequências de Composição

Definição 1.2.1. *Seja M um R-módulo. Dadas duas cadeias finitas de R-submódulos de M:*

$$(i) \quad M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_r = 0$$

$$(ii) \quad M = M_0' \supset M_1' \supset \ldots \supset M_{r'}' = 0,$$

*diz-se que (ii) é um **refinamento** de (i) se todo sumódulo que figura em (i) está em (ii), e que (ii) é um **refinamento próprio** de (i) se (ii) é um refinamento de (i) e, além disso, (ii) possui submódulos distintos dos que figuram em (i).*

*Uma cadeia finita $M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_r = 0$ que não admite nenhum refinamento próprio é uma **sequência de composição**. O inteiro **r** é chamado de **comprimento** da sequência.*

Definição 1.2.2. *Duas sequências de composição:*

$$(i) \quad M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_r = 0$$

$$(ii) \quad M = M_0' \supset M_1' \supset \ldots \supset M_{r'}' = 0$$

*são ditas **sequências equivalentes** se $r = r'$ e existe uma permutação σ do conjunto $\{0, 1, \ldots, r-1\}$ tal que $(M_i/M_{i+1}) \cong (M'_{\sigma(i)}/M'_{\sigma(i)+1})$, $0 \leq i \leq r-1$.*

Lema 1.2.3. *[Zassenhaus]([16], p.170, Lema 1.) Seja M um R-módulo. Se $N \subset P$ e $N' \subset P'$ são R-submódulos de M, então*

$$\frac{N + (P \cap P')}{N + (P \cap N')} \cong \frac{P \cap P'}{(N \cap P') + (N' \cap P)} \cong \frac{N' + (P \cap P')}{N' + (P' \cap N)}$$

Lema 1.2.4. *[Schreier]([16], p.171, Lema 2.) Para quaisquer duas sequências*

$$(i) \quad M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_r = 0$$

$$(ii) \quad M = M_0^{'} \supset M_1^{'} \supset \ldots \supset M_{r'}^{'} = 0,$$

existem refinamentos $(i)'$ e $(ii)'$, respectivamente para (i) e (ii), que são equivalentes.

Teorema 1.2.5. *[Jordan-Holder]([16], Proposição VI.3.1.) Seja M um R-módulo que admite uma sequência de composição. Então:*

1. *Toda cadeia de submódulos estritamente descendente é finita e admite um refinamento, que é uma sequência de composição;*

2. *Duas sequências de composição de M são equivalentes.*

Corolário 1.2.6. *Se M admite uma sequência de composição, então todo submódulo de M admite uma sequência de composição.*

O item *2* do Teorema *1.2.5* permite dar a seguinte definição.

Definição 1.2.7. *Se um módulo M admite uma sequência de composição, o* ***comprimento de*** *M, denotado por $\ell_R(M)$, é o comprimento desta sequência de composição.*

Definição 1.2.8. *Um R-módulo à esquerda M é dito* ***artiniano*** *se toda cadeia decrescente de R-submódulos à esquerda*

$$M_0 \supseteq M_1 \supseteq \ldots \supseteq M_n \supseteq \ldots$$

é estacionária, isto é, existe n_0 tal que $M_{n_0} = M_{n_0+t}$ para todo inteiro $t \geq 0$. Um R-módulo à esquerda M é dito ***noetheriano****, se toda cadeia crescente de R-submódulos à esquerda*

$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq \ldots \subseteq M_n \subseteq \ldots$$

é estacionária, isto é, existe n_0 tal que $M_{n_0} = M_{n_0+t}$ para todo inteiro $t \geq 0$.

Analogamente, pode-se definir um R-módulo artiniano (resp. noetheriano) à direita. Um módulo é artiniano (resp. noetheriano) se é artiniano (resp. noetheriano) à esquerda e à direita.

Observação 1.2.9. *Na literatura matemática algumas vezes para fazer referência a um R-módulo artiniano à esquerda (resp. à direita) se diz que o módulo satisfaz a condição de cadeia descendente (DCC) à esquerda (resp. à direita). Analogamente, se diz que um R-módulo é noetheriano à esquerda (resp. à direita) se satisfaz a condição de cadeia ascendente (ACC) à esquerda (resp. à direita).*

Proposição 1.2.10. *([7], Chapter IV, Theorem 1.11) Seja M um R-módulo à esquerda (resp. à direita). Então M é artiniano e noetheriano se, e somente se, M tem uma sequência de composição.*

Proposição 1.2.11. *Sejam N, M e L R-módulos à esquerda (resp. à direita). Se $0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0$ é uma sequência exata, então M é artiniano (resp. noetheriano) se, e somente se, N e L são artinianos (resp. noetherianos).*

Demonstração. Vamos fazer a prova só para o caso de R-módulos artinianos, pois o caso de R-módulos noetherianos é análogo.

($\Rightarrow$) Assumimos que M é artiniano. Sejam $L_1 \supseteq L_2 \supseteq \dots$ e $N_1 \supseteq N_2 \supseteq \dots$ cadeias descendentes de R-submódulos de L e N, respectivamente. Logo, $g^{-1}(L_1) \supseteq g^{-1}(L_2) \supseteq \dots$ e $f(N_1) \supseteq f(N_2) \supseteq \dots$ são cadeias descendentes de R-submódulos de M. Como M é R-módulo artiniano, existem inteiros positivos t_1 e t_2 tais que $g^{-1}(L_{t_1+j}) = g^{-1}(L_{t_1})$ e $f(N_{t_2+j}) = f(N_{t_2})$, para todo inteiro $j \geq 0$. Então, como g é sobrejetora, $L_{t_1+j} = L_{t_1}$ e, como f é injetora, $N_{t_2+j} = N_{t_2}$ para todo inteiro $j \geq 0$. Portanto, L e N são R-módulos artinianos.

($\Leftarrow$) Assumimos que N e L são R-módulos artinianos. Seja $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \dots$ uma cadeia descendente de R-submódulos de M. Daí, obtemos as cadeias descendentes de R-submódulos, $f^{-1}(M_1) \supseteq f^{-1}(M_2) \supseteq \dots$ e $g(M_1) \supseteq g(M_2) \supseteq \dots$, de N e L, respectivamente. Como N e L são artinianos, existem inteiros positivos t_1 e t_2 tais que $f^{-1}(M_{t_1+j}) = f^{-1}(M_{t_1})$ e $g(M_{t_2+j}) = g(M_{t_2})$ para todo inteiro $j \geq 0$. Agora, se $t = max\{t_1, t_2\}$, obtemos que $f^{-1}(M_{t+j}) = f^{-1}(M_t)$ e $g(M_{t+j}) = g(M_t)$ para todo inteiro $j \geq 0$.

Dado $j \geq 0$ um inteiro fixo, vamos mostrar que $M_t = M_{t+j}$. Para isto, como $M_t \supseteq M_{t+j}$, é suficiente mostrar que $M_t \subseteq M_{t+j}$. Seja $x \in M_t$. Temos então que $g(x) \in g(M_t) = g(M_{t+j})$ e, assim, existe $y \in M_{t+j}$ tal que $g(x) = g(y)$. Logo, $x - y \in Ker(g) = Im(f)$ e, como $x - y \in M_t$, obtemos que $f(z) = x - y$ para algum $z \in f^{-1}(M_t) = f^{-1}(M_{t+j})$. Daí, segue que $x = f(z) + y \in M_{t+j}$. $\square$

Proposição 1.2.12. *Se $M_1, \ldots, M_t$ são R-módulos à esquerda (resp. à direita) então $M = \overset{t}{\underset{j=1}{\oplus}} M_j$ é um R-módulo finitamente gerado à esquerda (resp. à direita) se, e somente se, cada M_j é finitamente gerado à esquerda (resp. à direita).*

Demonstração. Vamos fazer a prova para R-módulos à esquerda, pois a prova para os R-módulos à direita é análoga.

Se ${}_R M$ é finitamente gerado, existem $m_1, \ldots, m_k \in M$ tais que para todo $m \in M$ fixo:

$$m = \sum_{l=1}^{k} r_l m_l, \quad \text{para alguns}, \quad r_1, \ldots, r_k \in R.$$

Como $M = \overset{t}{\underset{j=1}{\oplus}} M_j$ então, para cada $l = 1, \ldots, k$, temos $m_l = \sum_{j=1}^{t} m_{lj}$ com $m_{lj} \in M_j$. Daí, segue que:

$$m = \sum_{l=1}^{k} r_l \left(\sum_{j=1}^{t} m_{lj} \right) = \sum_{l=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{t} r_l m_{lj} \right) = \sum_{j=1}^{t} \left(\sum_{l=1}^{k} r_l m_{lj} \right).$$

Observamos que para $j = 1, \ldots, t$, $\sum_{l=1}^{k} r_l m_{lj} \in {}_R M_j$. Em particular, se $m \in {}_R M_j$, então

$$m = \sum_{j=1}^{t} \left(\sum_{l=1}^{k} r_l m_{lj} \right) \text{ e daí } m - \sum_{l=1}^{k} r_l m_{li} = \sum_{i \neq j=1}^{t} \left(\sum_{l=1}^{k} r_l m_{lj} \right) \in M_i \bigcap \sum_{i \neq j=1}^{t} M_j = (0).$$

Logo, $m = \sum_{l=1}^{k} r_l m_{lj}$. Portanto, para cada $i = 1, \ldots, t$, ${}_R M_i = {}_R < m_{1i}, \ldots, m_{ki} >$.

Reciprocamente, se os R-módulos ${}_R M_1, \ldots, {}_R M_t$ são finitamente gerados, não é difícil ver que a união de todos geradores dos ${}_R M_j$ é um conjunto gerador de ${}_R M$. $\square$

Definição 1.2.13. *Um anel R é artiniano (resp. noetheriano) à esquerda se o módulo regular ${}_R R$ é artiniano (resp. noetheriano) à esquerda. Analogamente, pode-se definir um anel artiniano (resp. noetheriano) à direita. Um anel artiniano (resp. noetheriano) é um anel artiniano (resp. noetheriano) à esquerda e à direita.*

1.3 Radical de Jacobson e Semissimplicidade

Definição 1.3.1. *O **radical de Jacobson** do anel R, denotado por $J(R)$, é definido como a interseção de todos os ideais maximais à esquerda de R.*

Definição 1.3.2. *Sejam R um anel e M um R-módulo à esquerda.*

1. *M é dito um R-módulo **simples** (ou irredutível), se $M \neq 0$ e os únicos R-submódulos de M são 0 e M.*

2. *M é dito um R-módulo **semissimples** (ou completamente redutível), se cada submódulo de M é um somando direto de M.*

É imediato da definição anterior que todo R-módulo simples é semissimples, mas a recíproca não é verdadeira. Por exemplo, o módulo nulo é semissimples e não é simples.

Lema 1.3.3. *([13], Lemma 4.1) Seja R um anel. Para cada $y \in R$, as seguintes condições são equivalentes:*

1. *$y \in J(R)$;*

2. *$1 - xy$ é inversível à esquerda, para qualquer $x \in R$;*

3. *$yM = 0$, para qualquer R-módulo simples à esquerda ${}_RM$.*

Corolário 1.3.4. *Seja $\boldsymbol{S}$ a família de todos os R-módulos à esquerda simples. Então*

$$J(R) = \bigcap_{M \in \boldsymbol{S}} AnnM.$$

Em particular, $J(R)$ é um ideal de R.

Demonstração. Aplicando o Lema *1.3.3* temos que: $y \in J(R)$ se, e somente se, $yM = 0$, para todo R-módulo à esquerda $M \in \boldsymbol{S}$.

Como, para cada $M \in \boldsymbol{S}$, $AnnM$ é um ideal e a interseção de ideais é um ideal, segue que $J(R)$ é um ideal de R. □

Proposição 1.3.5. *${}_RM$ é um R-módulo simples se, e somente se, $M \cong R/I$ como R-módulos à esquerda, para algum ideal à esquerda maximal I de R.*

Proposição 1.3.6. *([16], Teorema VI.3.1.) Seja M um R-módulo à direita ou à esquerda. A cadeia*

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_r = 0,$$

é uma sequência de composição se, e somente se, cada quociente M_i/M_{i+1}, é um R-módulo simples, para $i = 0, \ldots, r-1$.

Proposição 1.3.7. *([7], Chapter IV, Theorem 1.8) Se o anel R é noetheriano (artiniano) à direita, e M_R é um R-módulo à direita finitamente gerado, então M_R também é noetheriano (artiniano).*

Proposição 1.3.8. *Sejam R um anel e M um R-módulo à esquerda. Se N e K são R-submódulos de ${}_RM$ tais que $\ell_R(M/N) = r < \infty$ e $\ell_R(M/K) = r' < \infty$, então $\ell_R\left(\frac{M}{N \cap K}\right) \leq r' + r$.*

Demonstração. Por hipótese, existem as sequências de composição:

$$M/N = M_0/N \supset \ldots \supset M_r/N = 0 \;\text{ e }\; M/K = M'_0/K \supset \ldots \supset M'_{r'}/K = 0$$

dos R-módulos à esquerda M/N e M/K, respectivamente. Assim, pela Proposição 1.3.6, segue que os quocientes $\frac{M_i/N}{M_{i+1}/N}$ e $\frac{M'_j/K}{M'_{j+1}/K}$ são simples para $i = 0, \ldots, r-1$ e $j = 0, \ldots, r'-1$. Como $\frac{M_i/N}{M_{i+1}/N} \cong \frac{M_i}{M_{i+1}}$ e $\frac{M'_j/K}{M'_{j+1}/K} \cong \frac{M'_j}{M'_{j+1}}$ como R-módulos à esquerda, obtemos que $\frac{M_i}{M_{i+1}}$ e $\frac{M'_j}{M'_{j+1}}$ são simples, para $i = 0, \ldots, r-1$ e $j = 0, \ldots, r'-1$. Com os fatos anteriores, vamos construir uma sequência de composição para o R-módulo à esquerda $\frac{M}{N \cap K}$.

Na cadeia de R-módulos

$$\frac{M}{N \cap K} = \frac{M_0}{N \cap K} \supset \ldots \supset \frac{M_r}{N \cap K} = \frac{N}{N \cap K} \tag{1.1}$$

temos que, para $i = 0, \ldots, r-1$, $\frac{M_i/(N \cap K)}{M_{i+1}/(N \cap K)} \cong \frac{M_i}{M_{i+1}}$ como R-módulos à esquerda. Logo, como cada R-módulo à esquerda $\frac{M_i}{M_{i+1}}$ é simples, segue que cada quociente $\frac{M_i/(N \cap K)}{M_{i+1}/(N \cap K)}$ é um R-módulo à esquerda simples. Consideramos a cadeia de R-módulos à esquerda:

$$\frac{N}{N \cap K} = \frac{M'_0 \cap N}{N \cap K} \supseteq \ldots \supseteq \frac{M'_{r'} \cap N}{N \cap K} = 0. \tag{1.2}$$

Temos, para cada $j = 0, \ldots, r'-1$, que a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi_j : M'_j \cap N &\longrightarrow M'_j/M'_{j+1} \\ x &\longmapsto x + M'_{j+1} \end{aligned}$$

é um R-homomorfismo. Observamos que $x \in Ker(\varphi_j)$ se, e somente se, $x \in M'_j \cap N$ e $x \in M'_{j+1}$ se, e somente se, $x \in M'_{j+1} \cap N$. Daí, pelo Teorema dos R-homomorfismos, existe um R-monomorfismo $\bar{\varphi}_j : \frac{M'_j \cap N}{M'_{j+1} \cap N} \longrightarrow \frac{M'_j}{M'_{j+1}}$. Logo, como $\frac{M'_j}{M'_{j+1}}$ é um R-módulo à esquerda simples, segue que $\frac{M'_j \cap N}{M'_{j+1} \cap N} \cong \frac{M'_j}{M'_{j+1}}$ ou $\frac{M'_j \cap N}{M'_{j+1} \cap N} = 0$. Assim, temos

$$\frac{M'_j \cap N}{N \cap K} = \frac{M'_{j+1} \cap N}{N \cap K} \quad \text{ou} \quad \frac{(M'_j \cap N)/(N \cap K)}{(M'_{j+1} \cap N)/(N \cap K)} \cong \frac{M'_j \cap N}{M'_{j+1} \cap N} \cong \frac{M'_j}{M'_{j+1}}$$

como R-módulos à esquerda. Assim, se tirarmos da cadeia (1.2) os submódulos repetidos $\frac{M'_j \cap N}{N \cap K} = \frac{M'_{j+1} \cap N}{N \cap K}$, obtemos uma cadeia

$$\frac{N}{N \cap K} = \frac{M''_1 \cap N}{N \cap K} \supsetneq \ldots \supsetneq \frac{M''_{r''} \cap N}{N \cap K} = 0, \tag{1.3}$$

onde cada quociente $\frac{M''_l \cap N}{N \cap K}$ é um R-módulo à esquerda simples, para $l = 0, \ldots, r''-1$. Logo, juntando as cadeias (1.1) e (1.3), obtemos que a cadeia

$$\frac{M}{N \cap K} = \frac{M_0}{N \cap K} \supset \ldots \supset \frac{M_r}{N \cap K} = \frac{N}{N \cap K} = \frac{M''_1 \cap N}{N \cap K} \supsetneq \ldots \supsetneq \frac{M''_{r''} \cap N}{N \cap K} = 0$$

é uma sequência de composição para o R-módulo à esquerda $M/(N \cap K)$, pela Proposição 1.3.6. Como $r'' \leq r'$, obtemos que $\ell_R\left(\frac{M}{N \cap K}\right) \leq r' + r$. □

Proposição 1.3.9. *([13], Observação 2.2) Todo submódulo e todo quociente de um módulo semissimples também é semissimples. Também a imagem por um R-homomorfismo de um R-módulo semissimples é semissimples.*

Teorema 1.3.10. *([13], Theorem 4.12) Seja R um anel artiniano à esquerda. Então $J(R)$ é o maior ideal à esquerda nilpotente de R, e também o maior ideal à direita nilpotente.*

Proposição 1.3.11. *([13], Proposition 4.6) Seja U um ideal de R tal que $U \subseteq J(R)$. Então*
$J(R/U) = J(R)/U$.

Teorema 1.3.12. *([13], Theorem 2.4) Para todo R-módulo ${}_RM$, as seguintes propriedades são equivalentes:*

1. *M é semissimples;*

2. *M é uma soma direta de uma família de submódulos simples;*

3. *M é a soma de uma família de submódulos simples.*

Proposição 1.3.13. *Seja M um R-módulo à esquerda (resp. à direita) semissimples. Então M é noetheriano à esquerda (resp. à direita) se, e somente se,é artiniano à esquerda (resp. à direita) se, e somente se, é finitamente gerado à esquerda (resp. à direita).*

Demonstração. Como M é semissimples, pelo item 2 do Teorema 1.3.12, M tem que ser soma direta de R-módulos simples, isto é, $M = \bigoplus_{j \in J} S_j$, com S_j um R-módulo simples. Daí, basta observar que tomando só uma das três hipóteses, M artiniano, ou M noetheriano ou M um R-módulo finitamente gerado, obtemos que $M = \bigoplus_{j=1}^{k} S_j$. Logo, obtemos que M é um R-módulo artiniano, noetheriano e finitamente gerado. $\square$

Proposição 1.3.14. *([16], Proposição VI.5.3) Um R-módulo à esquerda, ou à direita, semissimples é finitamente gerado se, e somente se, é de comprimento finito.*

Proposição 1.3.15. *(Lema de Schur) Seja M um R-módulo simples à esquerda ou à direita. Então $End_R(M)$ é um anel de divisão.*

Demonstração. Vamos fazer a prova para quando M é R-módulo à esquerda pois a prova do outro caso é análogo. Seja $f \in End({}_RM)$ não-nulo. Como ${}_RM$ é simples e o núcleo e a imagem de R-homomorfismos são R-submódulos de ${}_RM$, então $Ker(f) = 0$ e $f({}_RM) = {}_RM$. Assim, f é um R-isomorfismo. Logo, existe $f^{-1} \in End({}_RM)$ e, então, $End({}_RM)$ é de fato um anel de divisão. $\square$

Teorema 1.3.16. *([13], Theorem 2.5) Para um anel R as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *Toda sequência exata curta de R-módulos à esquerda cinde;*

2. *Todos os R-módulos à esquerda são semissimples;*

3. *Todos os R-módulos à esquerda finitamente gerados são semissimples;*

4. *Todos os R-módulos à esquerda cíclicos são semissimples;*

5. *O R-módulo regular ${}_RR$ é semissimples.*

Definição 1.3.17. *Um anel que satisfaz uma das condições anteriores (e portanto todas) é dito um* ***anel semissimples*** *à esquerda.*

Teorema 1.3.18. *[Wedderburn-Artin]([13], Theorem 3.5) Seja R um anel semissimples. Então $R \cong \mathbb{M}_{n_1}(D_1) \times \cdots \times \mathbb{M}_{n_r}(D_r)$ para alguns anéis de divisão adequados $D_1, \ldots, D_r$ e números inteiros positivos $n_1, \ldots, n_r$. O número r é unicamente determinado como também o são, a menos de isomorfismo, os pares $(n_1, D_1), \ldots, (n_r, D_r)$.*

Corolário 1.3.19. *([13], Corollary 3.7) Um anel R é semissimples à esquerda se, e somente se, é semissimples à direita.*

Proposição 1.3.20. *Todo anel semissimples é finitamente gerado.*

Demonstração. Se R é semissimples, pelo item 5 do Teorema 1.3.16 e o item 2 do Teorema 1.3.12, segue que $R = \bigoplus\limits_{i \in I} \mathbb{U}_i$, onde cada $\mathbb{U}_i$ é ideal à esquerda minimal de R. Como $1 \in R$, então $1 = u_1 + \cdots + u_n$ com $u_j \in \mathbb{U}_{ij}$, $1 \leq j \leq n$. Logo, R é gerado pelo conjunto $\{u_1, \ldots, u_n\}$. □

Definição 1.3.21. *O* ***socle*** *de um R-módulo M é a soma de todos os R-submódulos simples de M.*

Proposição 1.3.22. *Seja ${}_RN$ um R-módulo semissimples e ${}_RM$ um R-módulo com socle S. Então $Hom_R(N, M) = Hom_R(N, S)$.*

Demonstração. Do Teorema 1.3.12 e da Definição 1.3.21, segue que o socle S é o maior submódulo semissimples de M. Pela Proposição 1.3.9 toda imagem por um R-homomorfismo de um módulo semissimples é também semissimples. Assim

$$Hom_R(N, M) = Hom_R(N, S).$$

□

Definição 1.3.23. *Um anel R é dito* ***Jacobson semissimples*** *(ou J-semissimples) se $J(R) = 0$.*

Corolário 1.3.24. *Para todo anel R, $R/J(R)$ é J-semissimples.*

Demonstração. É imediato da Proposição *1.3.11.* □

Teorema 1.3.25. *([13], Theorem 4.14) Para qualquer anel R, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *R é semissimples;*
2. *R é J-semissimples e artiniano à esquerda.*

Corolário 1.3.26. *$R/J(R)$ é semissimples se R é artiniano à esquerda.*

Demonstração. É imediato do Corolário 1.3.24 e o item 2 do Teorema 1.3.25. □

Teorema 1.3.27. *([13], Theorem 3.3) Seja D um anel de divisão e seja $R = \mathbb{M}_n(D)$ o anel de matrizes $n \times n$ com entradas em D. Então:*

1. *R é simples, semissimples à esquerda, artiniano à esquerda e noetheriano à esquerda;*
2. *R tem, a menos de isomorfismo, um único módulo à esquerda simples V. Além disso, R age fielmente sobre V e $R \cong nV$;*
3. *O anel de endomorfismos $End({}_RV)$, visto como um anel de operadores à direita sobre V, é isomorfo a D.*

Observação 1.3.28. *Com respeito ao item 1 do Teorema 1.3.27, também é possível provar que o anel R é artiniano à direita e noetheriano à direita.*

1.4 Anéis Triangulares

Proposição 1.4.1. *Seja M um R-bimódulo. Então*

$$A := \left\{ \begin{pmatrix} r & m \\ 0 & r \end{pmatrix} : \ r \in R, \ m \in M \right\},$$

é um anel com as operações usuais de matrizes. Além disso:

1. *Os ideais à esquerda de A são da forma $I = \left\{ \begin{pmatrix} r & m \\ 0 & r \end{pmatrix} : \ r \in I_1, \ m \in I_2 \right\}$, com I_1 um ideal à esquerda de R e I_2 um R-submódulo à esquerda de M que contém MI_1.*

2. *Os ideais à direita de A são da forma* $J = \left\{ \begin{pmatrix} r & m \\ 0 & r \end{pmatrix} : \ r \in J_1, \ m \in J_2 \right\}$, *com* J_1 *um ideal à direita de* R *e* J_2 *um* R*-submódulo à direita de* M *que contém* J_1M.

Demonstração. A verificação de que A é anel não é difícil. Vamos fazer a prova do item 1. A prova do item 2 é análoga.

Se $I = \left\{ \begin{pmatrix} r & m \\ 0 & r \end{pmatrix} : \ r \in I_1, \ m \in I_2 \right\}$, com I_1 um ideal à esquerda de R e I_2 um R-submódulo à esquerda de M que contém MI_1, é imediato que I é ideal à esquerda de A.

Reciprocamente, se I é um ideal à esquerda de A, definimos

$$I_1 := \left\{ r \in R : \ \begin{pmatrix} r & m \\ 0 & r \end{pmatrix} \in I \right\} \ \text{e} \ I_2 := \left\{ m \in M : \ \begin{pmatrix} r & m \\ 0 & r \end{pmatrix} \in I \right\}.$$

Não é difícil verificar que I_1 é um ideal à esquerda de R, I_2 é um R-submódulo à esquerda de M que contém MI_1 e $I = \left\{ \begin{pmatrix} r & m \\ 0 & r \end{pmatrix} : \ r \in I_1, \ m \in I_2 \right\}$. □

Apresentamos um outro resultado que é uma generalização da Proposição 1.4.1, cuja demonstração é análoga à anterior e não será apresentada aqui.

Proposição 1.4.2. *Sejam* R *e* S *anéis e* ${}_RM_S$ *um* (R, S)*-bimódulo. Então,*

$$A := \begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix} : \ r \in R, \ m \in M, \ s \in S \right\},$$

é um anel com a soma e o produto usual de matrizes. Além disso:

1. *Os ideais à esquerda de A são da forma*

$$I := \begin{pmatrix} I_1 & I_2 \\ 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

com I_1 *um ideal à esquerda de* R*,* I_3 *um ideal à esquerda de* S *e* I_2 *um* R*-submódulo de* ${}_RM$ *que contém* MI_3.

2. *Os ideais à direita de A são da forma*

$$I := \begin{pmatrix} I_1 & I_2 \\ 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

com I_1 *um ideal à direita de* R*,* I_3 *um ideal à direita de* S *e* I_2 *um* S*-submódulo de* M_S *que contém* I_1M.

3. Os ideais de A são da forma

$$I := \begin{pmatrix} I_1 & I_2 \\ 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

com I_1 um ideal de R, I_3 um ideal de S e I_2 um R-subbimódulo de ${}_RM_S$ que contém tanto MI_3 quanto I_1M.

1.5 Módulos Injetivos

Nesta seção, diremos apenas que M é um R-módulo para significar que M é um R-módulo à esquerda. Cabe observar que todos os resultados valem para R-módulos à direita de forma análoga.

Definição 1.5.1. *Um R-módulo ${}_RI$ é injetivo se, para todo R-homomorfismo injetor $g : A \longrightarrow B$ de R-módulos à esquerda e todo R-homomorfismo $h : A \longrightarrow I$ existe um R-homomorfismo $h^{'} : B \longrightarrow I$ que faz comutar o seguinte diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
 & I & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[u, "h"] \arrow[r, "g"] & B \arrow[ul, dotted, "h^{'}"']
\end{tikzcd}$$

Proposição 1.5.2. *([5], Lemma 3-1.2) Seja $\{M_j\}_{j\in J}$ uma família de módulos. Então $\prod\limits_{j\in J} M_j$ é injetivo se, e somente se, M_j é injetivo, para cada $j \in J$.*

Proposição 1.5.3. *Um R-módulo à esquerda I é injetivo se, e somente se, para cada R-monomorfismo $f : {}_RM \longrightarrow {}_RN$, o homomorfismo de grupos $f^* : Hom_R(N, I) \longrightarrow Hom_R(M, I)$ é um epimorfismo.*

Demonstração. Seja $\varphi \in Hom_R(M, I)$. Temos que I é injetivo se, e somente se, para cada R-monomorfismo $f : M \longrightarrow N$ existe um R-homomorfismo $f' : N \longrightarrow I$ tal que $\varphi = f' \circ f = f^*(f')$ se, e somente se, f^* é um epimorfismo para cada R-monomorfismo $f : M \longrightarrow N$. □

Corolário 1.5.4. *Um R-módulo ${}_RI$ é injetivo se, e somente se, para cada sequência exata curta de R-módulos à esquerda $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ a sequência de grupos*

$$0 \longrightarrow Hom_R(P, I) \xrightarrow{g^*} Hom_R(N, I) \xrightarrow{f^*} Hom_R(M, I) \longrightarrow 0,$$

também é uma sequência exata.

Demonstração. É consequência imediata das Proposições 1.1.9 e 1.5.3. □

Definição 1.5.5. *Um R-módulo $_RE \supseteq {_RM}$ é uma* ***extensão essencial*** *do módulo $_RM$ se cada submódulo não nulo de E tem interseção não nula com M; se $_RE$ é uma extensão essencial de $_RM$, escrevemos $M \subseteq_e E$. Uma extensão $M \subseteq_e {_RE}$ é dita* ***maximal*** *se nenhum módulo, que contém propriamente E, é extensão essencial de M.*

Teorema 1.5.6. *([12], Theorem 3.30) Sejam I um R-módulo e M um R-submódulo. As seguintes propriedades são equivalentes:*

1. *$M \subseteq_e I$ maximal;*
2. *I é injetivo e essencial de M;*
3. *I é o menor injetivo contendo M.*

Definição 1.5.7. *Se os R-módulos M e I satisfazem uma das três propriedades (e portanto todas) do Teorema 1.5.6, então I é um* ***fecho injetivo*** *de M.*

Lema 1.5.8. *([12], Lemma 3.28) Um R-módulo M é injetivo se, e somente se, não tem extensões essenciais próprias.*

Lema 1.5.9. *([12], Lemma 3.29) Qualquer R-módulo M tem uma extensão essencial maximal.*

Do Lema 1.5.9 e Teorema 1.5.6, segue que todo módulo tem um fecho injetivo.

Proposição 1.5.10. *([12], Corollary 3.32) Dois fechos injetivos de um módulo são isomorfos.*

A Proposição *1.5.10* permite falar, a menos de isomorfismo, de um único fecho injetivo para um módulo. A partir de agora, o fecho injetivo de um módulo M será denotado por $E(M)$.

Proposição 1.5.11. *([12], Corollary 3.33) Sejam M, N e I R-módulos. Então:*

1. *Se I é um módulo injetivo que contém o módulo M, então $I \supseteq E(M)$;*

2. Se $M \subseteq_e N$ então $E(M) = E(N)$.

Proposição 1.5.12. *Sejam M_j, $j = 1, \ldots, n$, R-módulos. Se $M = \overset{n}{\underset{j=1}{\oplus}} M_j$ então $E(M) = \overset{n}{\underset{j=1}{\oplus}} E(M_j)$.*

Demonstração. Como $M_j \subseteq E(M_j)$, da Proposição *1.5.2* e o item *3* do Teorema *1.5.6*, segue que $E(M) = E(\overset{n}{\underset{j=1}{\oplus}} M_j) \subseteq E\left(\overset{n}{\underset{j=1}{\oplus}} E(M_j)\right) = \overset{n}{\underset{j=1}{\oplus}} E(M_j)$.

Por outro lado, $M_j \subseteq M \subseteq E(M)$, para cada $j = 1 \ldots, n$. Logo, do item *1* da Proposição *1.5.11*, obtemos que $E(M_j) \subseteq E(M)$. Então, $E(M) \supseteq \overset{n}{\underset{j=1}{\oplus}} E(M_j)$. $\square$

Proposição 1.5.13. *Seja M um R-módulo. Se $E(M)$ tem comprimento finito então M também tem comprimento finito.*

Demonstração. Como $M \subseteq E(M)$, basta aplicar o Corolário *1.2.6*. $\square$

Proposição 1.5.14. *Seja ${}_RM$ um R-módulo de comprimento com socle S e $\ell_R(M)$ finito. Então:*

1. $S \subseteq_e M$;

2. $E(S) = E(M)$.

Demonstração.

1. Se N é um submódulo não nulo de M, pelo item *1* do Teorema *1.2.5*, podemos obter a partir de $0 \subseteq N \subseteq M$ um refinamento $M = M_0 \supset \ldots \supseteq N \supset \ldots \supset M_{r-1} \supset M_r = 0$ que é sequência de composição. Logo, M_{r-1} é um submódulo simples contido em N. Assim, $0 \neq M_{r-1} \subseteq N \cap S$. Então $S \subseteq_e M$.

2. Utilizando o item *2* da Proposição *1.5.11* e o item *1* anterior, concluímos então que $E(S) = E(M)$.

$\square$

Finalizamos esta seção com o seguinte lema.

Lema 1.5.15. *Seja R um anel com unidade. Se $x \in R$ é um elemento não nulo e I um ideal maximal de R que contém o anulador de x, então $xE(R/I) \neq 0$.*

Demonstração. Temos que o anulador de x, $Ann(x) := \{r \in R : \ rx = 0\}$, é um ideal à esquerda de R e a aplicação $f : R \longrightarrow Rx$, definida pela correspondência $r \longmapsto rx$, é um R-epimorfismo de módulos à esquerda com $Ker(f) = Ann(x)$. Logo, pelo teorema de R-homomorfismos, temos que existe um único R-isomorfismo de R-módulos à esquerda, $\bar{f} : R/Ann(x) \longrightarrow Rx$, que faz comutar o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Rx \\ R/Ann(x) \arrow[ur, dotted, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Agora, como $Ann(x) \subseteq I$, temos que a aplicação $h : R/Ann(x) \longrightarrow R/I$, definida pela correspondência $r + Ann(x) \longmapsto r + I$, é um R-homomorfismo de R-módulos à esquerda não nulo, pois I é ideal maximal de R. Agora, se $i : R/I \longrightarrow E(R/I)$ é a inclusão do R-módulo à esquerda R/I em seu fecho injetivo $E(R/I)$, então $g := i \circ h \circ \bar{f}^{-1} : Rx \longrightarrow E(R/I)$ é um R-homomorfismo não nulo, pois $g(x) \neq 0$.

Como $E(R/I)$ é injetivo, segue que existe um R-homomorfismo de R-módulos à esquerda $\bar{i'} : R \longrightarrow E(R/I)$ que faz comutar o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} & E(R/I) & \\ 0 \arrow[r] & Rx \arrow[u, "g"] \arrow[r, "i'"'] & R \arrow[ul, dotted, "\bar{i'}"'] \end{tikzcd}$$

sendo $i' : Rx \longrightarrow R$ a inclusão. Agora, note que $0 \neq g(x) = \bar{i'} \circ i'(x) = \bar{i'}(x) = x\bar{i'}(1)$. Assim, $x(E(R/I)) \neq 0$. $\square$

1.6 Produto Tensorial de Módulos

Definição 1.6.1. *Sejam M_R, ${}_RN$ R-módulos e C um grupo (aditivo) abeliano. Uma função $f : M \times N \longrightarrow C$ é dita balanceada se:*

- *$f(m_1 + m_2, n) = f(m_1, n) + f(m_2, n)$, para todos $m_1, m_2 \in M$ e todo $n \in N$;*
- *$f(m, n_1 + n_2) = f(m, n_1) + f(m, n_2)$, para todo $m \in M$ e todos $n_1, n_2 \in N$;*
- *$f(mr, n) = f(m, rn)$, para todo $m \in M$, todo $n \in N$ e todo $r \in R$.*

Definição 1.6.2. *Sejam M_R e ${}_RN$ R-módulos. Se L é o grupo abeliano livre gerado pelo conjunto $M \times N$ e H é o seu subgrupo gerado pelos elementos:*

$$(m_1+m_2,n)-(m_1,n)-(m_2,n), \;\; (m,n_1+n_2)-(m,n_1)-(m,n_2) \;\; e \;\; (mr,n)-(m,rn),$$

sendo $m, m_1, m_2 \in M$, $n, n_1, n_2 \in N$ e $r \in R$ arbitrários, então o ***produto tensorial*** *dos R-módulos M_R e ${}_RN$, denotado $M \otimes_R N$, é o grupo quociente L/H. Para cada $m \in M$ e cada $n \in N$ vamos denotar a classe de equivalência $(m,n)+H$ por $m \otimes n$.*

Observação 1.6.3.

1. *Seja $\rho : L \longrightarrow M \otimes_R N$ a projeção canônica e defina $\pi = \rho|_{M\times N}$. Então π é uma função balanceada;*

2. *Como L é gerado pelos elementos $(m,n) \in M \times N$, segue que $M \otimes_R N$ é gerado pelas classes de equivalência $m \otimes n$. Assim, os elementos de $M \otimes_R N$ são da forma*
$$\sum_{i=1}^{t} z_i(m_i \otimes n_i), \;\; com\; t \in \mathbb{N}, \;\; z_i \in \mathbb{Z}, \;\; n_i \in N, \;\; m_i \in M.$$

3. *Quando M é um R-módulo à direita e N é um (R,T)-bimódulo temos que $M \otimes_R N$ tem estrutura de T-módulo à direita, dada pela ação definida por: $(m \otimes n)t = m \otimes (nt)$, para quaisquer $m \otimes n \in M \otimes_R N$ e $t \in T$. Analogamente, se M é um (T,R)-bimódulo e N é um R-módulo à esquerda, então $M \otimes_R N$ é um T-módulo à esquerda com a ação definida por: $t(m \otimes n) = (tm) \otimes n$, para quaisquer $m \otimes n \in M \otimes_R N$ e $t \in T$.*

Proposição 1.6.4. *[Propriedade Universal]([5], Proposition 4-1.7) Com as mesmas notações das Definições 1.6.1, 1.6.2 e as Observações em 1.6.3, se G é um grupo abeliano e $\varphi : M \times N \longrightarrow G$ é uma função balanceada, então existe um único homomorfismo de grupos $\bar{\varphi} : M \otimes_R N \longrightarrow G$ que faz comutar o seguinte diagrama:*

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\varphi"'] & M \otimes_R N \arrow[dl, dotted, "\bar{\varphi}"] \\ G & \end{tikzcd}$$

Proposição 1.6.5. *Sejam M_R e ${}_RN$ R-módulos, e sejam $M'_R \subseteq M_R$ e $N'_R \subseteq N_R$ R-submódulos. Se C é o subgrupo de $M \otimes_R N$ gerado pelos elementos $a' \otimes b$ e $a \otimes b'$ com $a \in M$, $b \in N$, $a' \in M'$ e $b' \in N'$ então,*

$$(M/M' \otimes_R N/N') \cong [(M \otimes_R N)/C]$$

como grupos.

Demonstração. Definimos $\varphi : M/M' \times N/N' \longrightarrow (M \otimes_R N)/C$ pela correspondência $(m + M', n + N') \longmapsto (m \otimes n) + C$. Temos que:
1. φ está bem definida. Se $(m_1 + M', n_1 + N') = (m_2 + M', n_2 + N')$, então segue que $m_1 - m_2 \in M'$ e $n_1 - n_2 \in N'$. Logo, obtemos que $m_1 \otimes n_1 - m_2 \otimes n_2 = m_1 \otimes n_1 - m_2 \otimes n_1 + m_2 \otimes n_1 - m_2 \otimes n_2 = (m_1 - m_2) \otimes n_1 + m_2 \otimes (n_1 - n_2) \in C$. Assim, $m_1 \otimes n_1 + C = m_2 \otimes n_2 + C$.
2. φ é balanceada. De fato,

- Para todos $m_1, m_2 \in M$ e todo $n \in N$, $\varphi[(m_1 + M') + (m_2 + M'), n + N'] = \varphi[(m_1 + m_2) + M', n + N'] = [(m_1 + m_2) \otimes n] + C = (m_1 \otimes n + m_2 \otimes n) + C = (m_1 \otimes n + C) + (m_2 \otimes n + C) = \varphi(m_1 + M', n + N') + \varphi(m_2 + M', n + N')$;
- Para todo $m \in M$ e todos $n_1, n_2 \in N$, $\varphi[m + M', (n_1 + N') + (n_2 + N')] = \varphi[m + M', (n_1 + n_2) + N'] = [m \otimes (n_1 + n_2] + C = (m \otimes n_1 + m \otimes n_2) + C = (m \otimes n_1 + C) + (m \otimes n_2 + C) = \varphi(m + M', n_1 + N') + \varphi(m + M', n_2 + N')$;
- Para todo $m \in M$, todo $n \in N$ e todo $r \in R$, $\varphi[(m + M')r, n + N'] = \varphi(mr + M', n + N') = (mr \otimes n) + C = (m \otimes rn) + C = \varphi[m + M', r(n + N')]$.

Agora, pela Proposição 1.6.4, existe um único homomorfismo de grupos

$$\bar{\varphi} : M/M' \otimes N/N' \longrightarrow (M \otimes_R N)/C,$$

que faz comutar o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
M/M' \times N/N' \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\varphi"'] & M/M' \otimes_R N/N' \arrow[dl, dotted, "\bar{\varphi}"] \\
(M \otimes_R N)/C &
\end{tikzcd}$$

onde π é a restrição da projeção canônica como na Observação 2 de 1.6.3.

Por outro lado, definindo $\eta : M \times N \longrightarrow M/M' \otimes_R N/N'$ por $(m, n) \longmapsto (m + M') \otimes (n + N')$, temos que η é função. Além disso η é balanceada:

- Para todos $m \in M$ e $n_1, n_2 \in N$, $\eta(m, n_1 + n_2) = (m + M') \otimes [(n_1 + n_2) + N'] = [(m + M') \otimes (n_1 + N')] + [(m + M') \otimes (n_2 + N')] = \eta(m, n_1) + \eta(m, n_2)$;

- Para todos $m_1, m_2 \in M$ e todo $n \in N$ temos que $\eta(m_1 + m_2, n) = [(m_1 + m_2) + M'] \otimes (n + N') = (m_1 + M') \otimes (n + N') + (m_2 + M') \otimes (n + N') = \eta(m_1, n) + \eta(m_2, n)$;

- Para todo $m \in M$, todo $n \in N$ e todo $r \in R$, $\eta(mr, n) = (mr+M')\otimes(n+N') = [(m + M')r] \otimes (n + N') = (m + M') \otimes [r(n + N')] = (m + M') \otimes (rn + N') = \eta(m, rn)$.

Novamente, pela Proposição 1.6.4, existe um único homomorfismo de grupos

$$\bar{\eta} : M \otimes_R N \longrightarrow M/M' \otimes_R N/N',$$

que faz comutar o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\pi'"] \arrow[d, "\eta"'] & M \otimes_R N \arrow[dl, dotted, "\bar{\eta}"] \\ M/M' \otimes_R N/N' & \end{tikzcd}$$

onde π' é a restrição da projeção canônica como na Observação 2 de 1.6.3.

Vamos mostrar agora que $Ker(\bar{\eta}) \supseteq C$. Dado, $g \in C$, pela Observação 2 de 1.6.3, temos que

$$g = \sum_{i=1}^{t_1} z_i(m_i' \otimes n_i) + \sum_{j=1}^{t_2} z_j(m_j \otimes n_j')$$

com $t_1, t_2 \in \mathbb{N}$, $z_i, z_j \in \mathbb{Z}$, $m_i' \in M'$, $m_j \in M$, $n_j' \in N$ e $n_i \in N$; para todo $i = 1, \ldots, t_1$ e todo $j = 1 \ldots, t_2$. Logo,

$$\begin{aligned} \bar{\eta}(g) &= \sum_{i=1}^{t_1} z_i\bar{\eta}(m_i' \otimes n_i) + \sum_{j=1}^{t_2} z_j\bar{\eta}(m_j \otimes n_j') \\ &= \sum_{i=1}^{t_1} z_i[(m_i' + M') \otimes (n_i + N')] + \sum_{j=1}^{t_2} z_j[(m_j + M') \otimes (n_j' + N')] \\ &= \sum_{i=1}^{t_1} z_i[0 \otimes (n_i + N')] + \sum_{j=1}^{t_2} z_j[(m_j + M') \otimes 0] = 0 \end{aligned}$$

Isto é, $Ker(\bar{\eta}) \supseteq C$. Agora, se $J : M \otimes_R N \longrightarrow (M \otimes_R N)/C$ é a projeção canônica, segue que, existe um único homomorfismo de grupos

$$\bar{\bar{\eta}} : (M \otimes_R N)/C \longrightarrow M/M' \otimes_R N/N',$$

que faz comutar o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} & M \otimes_R N \arrow[dl, "\bar{\eta}"'] \arrow[d, "J"] \\ M/M' \otimes_R N/N' & (M \otimes_R N)/C \arrow[l, dotted, "\bar{\bar{\eta}}"] \end{tikzcd}$$

Por último, observando que

$$(M \otimes_R N)/C \underset{\bar{\varphi}}{\overset{\bar{\bar{\eta}}}{\rightleftarrows}} M/M' \otimes_R N/N'$$

e que, $\quad \bar{\varphi} \circ \bar{\bar{\eta}} = 1_{((M \otimes_R N)/C)} \quad$ e $\quad \bar{\bar{\eta}} \circ \bar{\varphi} = 1_{(M/M' \otimes_R N/N')}, \quad$ concluímos que

$$(M/M' \otimes_R N/N') \cong [(M \otimes_R N)/C],$$

como grupos. $\square$

Utilizando as estruturas dadas pelo Teorema 1.1.5, temos o seguinte resultado.

Proposição 1.6.6. *([4], Chapter II, Proposition 5.2) Sejam R e A anéis, M um R-módulo à esquerda, N um (A, R)-bimódulo e P um A-módulo à esquerda. Então existe um único homomorfismo de grupos*

$$Hom_R(M, Hom_A(N, P)) \longrightarrow Hom_A(N \otimes_R M, P).$$

Observação 1.6.7. *Nas hipóteses da Proposição 1.6.6 quando o módulo M é um (R, A)-bimódulo, temos que $Hom_R(M, Hom_A(N, P))$ e $Hom_A(N \otimes_R M, P)$ são A-módulos à esquerda. Daí segue que o homomorfismo de grupos da Proposição 1.6.6 é um A-homomorfismo de A-módulos à esquerda.*

1.7 Geradores e Cogeradores

Seja $\mathfrak{U}$ uma família de módulos. Um módulo M é **gerado** por $\mathfrak{U}$ se existe um conjunto indexado $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$, de elementos de $\mathfrak{U}$, e um epimorfismo

$$\bigoplus_{\alpha \in \Omega} U_\alpha \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0.$$

Quando Ω é um conjunto finito, dizemos que M é **finitamente gerado** por $\mathfrak{U}$. Quando $\mathfrak{U} = \{U\}$ dizemos que U gera M. Dizemos que um módulo M é **cogerado** por $\mathfrak{U}$ se existe um conjunto indexado $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$, de elementos de $\mathfrak{U}$, e um monomorfismo

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} \prod_{\alpha\in\Omega} U_\alpha.$$

Quando Ω é um conjunto finito, dizemos que M é **finitamente cogerado** por $\mathfrak{U}$. Quando $\mathfrak{U} = \{U\}$ dizemos que U cogera M. A família de todos os módulos gerados por $\mathfrak{U}$ é denotada por $\mathbf{Gen}(\mathfrak{U})$ e a família de todos os módulos cogerados por $\mathfrak{U}$ é denotada por $\mathbf{Cog}(\mathfrak{U})$.

Um subconjunto $\mathfrak{U}' \subseteq \mathfrak{U}$ é uma **classe de representantes** de $\mathfrak{U}$, se todo elemento de $\mathfrak{U}$ é isomorfo a um elemento de $\mathfrak{U}'$. Se além disso, cada dois elementos de $\mathfrak{U}'$ não são isomorfos, $\mathfrak{U}'$ é uma **classe irredundante de representantes** de $\mathfrak{U}$. É claro que se $\mathfrak{U}'$ é uma classe de representantes de $\mathfrak{U}$, então $\mathbf{Gen}(\mathfrak{U}') = \mathbf{Gen}(\mathfrak{U})$ e $\mathbf{Cog}(\mathfrak{U}') = \mathbf{Cog}(\mathfrak{U})$. Um módulo G é um **gerador** para $\mathfrak{U}$ se $\mathbf{Gen}(\mathfrak{U}) = \mathbf{Gen}(G)$. Um módulo C é um **cogerador** para $\mathfrak{U}$ se $\mathbf{Cog}(\mathfrak{U}) = \mathbf{Cog}(C)$.

Proposição 1.7.1. *([2], Corollary 18.16) Sejam $\mathfrak{T}$ uma classe irredundante de representantes da família todos os R-módulos simples à esquerda e ${}_R\boldsymbol{M}$ a família de todos os R-módulos à esquerda. Então,*

$$C_0 = \bigoplus_{T\in\mathfrak{T}} E(T)$$

é um cogerador para ${}_R\boldsymbol{M}$. Além disso, para um R-módulo ${}_RC$, as seguintes condições são equivalentes:

1. *C é cogerador de ${}_R\boldsymbol{M}$;*
2. *$E(T)$ é isomorfo a um somando direto de C, para cada R-módulo simples T;*
3. *C_0 é isomorfo a um submódulo de C.*

1.8 T-nilpotência e Localização

Definição 1.8.1. *Seja R um anel comutativo com unidade. Um subconjunto $\mathcal{S}$ de R é um* ***sistema multiplicativo*** *se:*

1. $1 \in \mathcal{S}$, $0 \notin \mathcal{S}$*;*

2. $xy \in \mathcal{S}$*, para todos* $x, y \in \mathcal{S}$*.*

Seja R um anel comutativo com unidade e $\mathcal{S}$ um sistema multiplicativo de R. Temos que a relação em $R \times \mathcal{S}$, denotada por $\approx$, e definida como segue:

$$(a, s) \approx (b, t) \Leftrightarrow u(ta - sb) = 0, \text{ para algum } u \in \mathcal{S},$$

é uma relação de equivalência. Denotamos por $R_{\mathcal{S}}$, o conjunto de todas as classes de equivalência, e por a/s, a classe de equivalência de (a, s). Definindo para todos $a/s, b/t \in R_{\mathcal{S}}$ as seguintes operações, soma e produto respectivamente:

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{ta + sb}{st}, \quad \text{e} \quad \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st},$$

obtemos uma estrutura de anel comutativo e com unidade para $R_{\mathcal{S}}$. Com estas operações, $R_{\mathcal{S}}$ é chamado de **anel de frações** do anel R com respeito a $\mathcal{S}$. A aplicação $f : R \longrightarrow R_{\mathcal{S}}$ definida pela correspondência $r \longmapsto \frac{r}{1}$, é um homomorfismo de anéis, como é fácil ver.

Proposição 1.8.2. *([1], Proposition 3.1) Sejam R e A anéis comutativos com unidade, $\mathcal{S}$ um sistema multiplicativo de R e $g : R \longrightarrow A$ um homomorfismo de anéis tal que $g(s)$ é invertível em A, para todo $s \in \mathcal{S}$. Então, existe um único homomorfismo de anéis $h : R_{\mathcal{S}} \longrightarrow A$, definido pela correspondência $h(r/s) = g(r)g(s)^{-1}$, que faz comutar o seguinte diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & A \\
R_{\mathcal{S}} \arrow[ur, dotted, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

Dado um ideal maximal I de R, sempre temos que $\mathcal{S} = R \setminus I$ é um sistema multiplicativo. Neste caso particular, em lugar de escrever $R_{\mathcal{S}}$, escrevemos R_I.

Corolário 1.8.3. *Seja R um anel comutativo com unidade, I um ideal maximal de R e M um R-módulo. Se para todo elemento $s \in \mathcal{S} = R \setminus I$, a correspondência $m \longmapsto sm$ define um R-automorfismo de M, então M é um R_I-módulo.*

Demonstração. Por hipótese, para cada $s \in \mathcal{S}$, a correspondência $r \longmapsto sr$ define um R-automorfismo de M. Logo,

$$\begin{aligned} \varphi : R &\longrightarrow End(_R M) \\ r &\longmapsto \quad \varphi(r) \quad : M \longrightarrow M \\ &\qquad\qquad\qquad x \longmapsto \varphi(r)(x) = rx \end{aligned}$$

é um R-homomorfismo de anéis tal que, para cada $s \in \mathcal{S}$, $\varphi(s)$ é invertível no anel $End(_R M)$. Pela Proposição *1.8.2*, existe um único homomorfismo de anéis $h : R_I \longrightarrow End(_R M)$, definido pela correspondência $r/s \longmapsto \varphi(r)\varphi(s)^{-1}$. Logo, não é difícil verificar que M é um R_I-módulo com a ação definida por:

$$\frac{r}{s} \cdot m = h\left(\frac{r}{s}\right)(m) = [\varphi(r)\varphi(s)^{-1}](m), \quad \text{para quaisquer} \quad \frac{r}{s} \in R_I, m \in M.$$

$\square$

Proposição 1.8.4. *Seja R um anel comutativo com unidade e I um ideal maximal de R. Então R_I tem um único ideal maximal.*

Demonstração. Temos que $\mathfrak{m} = \{\frac{a}{s} : \ a \in I, \ s \in S = R \setminus I\}$ é um ideal de R_I. Além disso, se $\mathfrak{n}$ é ideal de R_I tal que $\mathfrak{n} \not\subseteq \mathfrak{m}$, então existe $\frac{b}{s}$ tal que $\frac{b}{s} \in \mathfrak{n}$ e $\frac{b}{s} \notin \mathfrak{m}$. Assim, $b \notin I$ e então, $b \in S$. Logo, $(\frac{s}{b})(\frac{b}{s}) = 1 \in \mathfrak{n}$ e assim, $\mathfrak{n} = R_I$. Portanto, $\mathfrak{m}$ é o único ideal maximal de R_I. $\square$

Lema 1.8.5. *Seja R um anel comutativo com unidade, I um ideal maximal de R e $M = R/I$. Então:*

1. *M e $E(M)$ são R_I-módulos;*
2. *M, como R_I-módulo, é simples;*
3. *$E(M)$ como R_I-módulo é o fecho injetivo de M como R_I-módulo;*
4. *$\ell_R(E(M)) < \infty$ se, e somente se, $\ell_{R_I}(E(M)) < \infty$;*
5. *$\ell_R(E(M)) \leq n$ se, e somente se, $\ell_{R_I}(E(M)) \leq n$.*

Demonstração. 1. Pelo Corolário 1.8.3, é suficiente mostrar que as correspondências $m \longmapsto sm$ e $x \longmapsto sx$, para cada $s \in \mathcal{S} = R \setminus I$, definem R-automorfismos de ${}_RM$ e $E({}_RM)$, respectivamente. Não difícil verificar que, de fato, estas correspondências definem R-endomorfismos. Vamos então apenas mostrar que os R-endomorfismos definidos por estas correspondências são invertíveis.

Seja $s \in \mathcal{S}$. Como M é corpo, temos que existe $s' \in \mathcal{S}$ tal que $(s+I)(s'+I) = ss' + I = 1 + I$. Logo, podemos ver que o R-endomorfismo inverso do R-endomorfismo definido pela correspondência $m \longmapsto sm$ é o R-endomorfismo definido pela correspondência $m \longmapsto s'm$. De fato, para cada $m = a + I \in M$ temos que:

$$s'(sm) = s(s'm) = s[s'(a+I)] = ss'a+I = a(ss'+I) = a(1+I) = a+I = m.$$

Assim, a correspondência $m \longmapsto sm$ define um R-automorfismo de M. Com isto completamos a prova de que M é um R_I-módulo.

Sejam $s \in \mathcal{S}$ e $f : E(M) \longrightarrow E(M)$ o R-endomorfismo definido pela correspondência $x \longmapsto sx$. Se $a = (y + I) \in Ker(f) \cap M$, então $0 = f(a) = sa = sy+I$. Logo $y \in I$ e então $a = 0$. Disto segue que $Ker(f) \cap M = 0$ e, como $M \subseteq_e E(M)$, obtemos que $Ker(f) = 0$. Então f é um R-monomorfismo e então segue que $f(E(M)) = sE(M)$ é injetivo. Além disso, pelo que provamos acima, temos que a restrição de f a M é um R-automorfismo e então $f(M) = M \subseteq f(E(M)) = sE(M)$. Temos então que $sE(M)$ é injetivo e contém M, daí pelo item 3 do Teorema 1.5.6 segue que $E(M) \subseteq sE(M)$. Obtemos assim que $E(M) = sE(M)$ e então f é uma bijeção. Portanto f é invertível e, com isto, concluímos que $E(M)$ também é um R_I-módulo.

2. Seja $\varphi : M \longrightarrow End({}_RM)$ o homomorfismo de anéis definido na prova do Corolário 1.8.3. Vimos, na prova deste corolário, que M é um R_I-módulo com a ação definida por $\frac{r}{s} \cdot m = \varphi(r)\varphi(s)^{-1}(m)$. Temos que $\mathcal{R} = \{\frac{r}{1} : r \in R\}$ é um subanel de R_I. Agora, para quaisquer $r \in R$ e $m \in M$, temos que

$$\frac{r}{1} \cdot m = \varphi(r)\varphi(1)^{-1}(m) = \varphi(r)(m) = rm.$$

Isto é, as ações dos anéis $\mathcal{R}$ e R sobre M coincidem. Segue que todo R_I-submódulo de M é um $\mathcal{R}$-submódulo de M e, portanto, também um R-submódulo de M. Então, como M é R-módulo simples, também é R_I-módulo simples.

3. Vamos mostrar que ${}_{R_I}M \subseteq_e {}_{R_I}E(M)$. Então, do Corolário 1.8.3 e sua prova, temos que $E(M)$ é um R_I-módulo com a ação dada por:

$$\frac{r}{s} \cdot y = \varphi(r)\varphi(s)^{-1}(y), \quad \text{para quaisquer } \ \frac{r}{s} \in R_I, \ y \in E(M),$$

onde φ é o homomorfismo de anéis:

$$\begin{array}{rcl} \varphi : R & \longrightarrow & End({}_R E(M)) \\ r & \longmapsto & \varphi(r) \quad : E(M) \longrightarrow E(M) \\ & & \qquad\qquad y \quad \longmapsto \varphi(r)(y) = ry. \end{array}$$

Novamente, se $\mathcal{R}$ é o subanel de R_I definido no item anterior, temos que as ações de $\mathcal{R}$ e R sobre $E(M)$ coincidem. De fato,

$$\frac{r}{1} \cdot y = \varphi(r)\varphi(1)^{-1}(y) = \varphi(r)(y) = ry, \quad \text{para quaisquer } \ r \in R, \ y \in E(M).$$

Disto segue que, se Q é um R_I-submódulo de $E(M)$ então Q também é um R-submódulo de $E(M)$. Como ${}_R M \subseteq_e {}_R E(M)$, obtemos o que queríamos mostrar: ${}_{R_I}M \subseteq_e {}_{R_I}E(M)$.

Vamos mostrar agora que $E(M)$ é um R_I-módulo injetivo. Seja Q um R_I-módulo arbitrário. Segue que Q também é um $\mathcal{R}$-módulo, pois $\mathcal{R}$ é subanel de R_I. Logo, definindo a ação $r \cdot x := \frac{r}{1}x$, para todos $r \in R$ e $x \in Q$, temos que Q é um R-módulo. Como as ações dos anéis $\mathcal{R}$ e R sobre $E(M)$ coincidem, obtemos que todo R_I-homomorfismo $f : Q \longrightarrow E(M)$ é um R-homomorfismo. Daí segue que $Hom_{R_I}(Q, E(M)) \subseteq Hom_R(Q, E(M))$. Por outro lado, se $f \in Hom_R(Q, E(M))$ temos que $f(\frac{r}{1}x) = f(r \cdot x) = rf(x) = \frac{r}{1}f(x)$, para quaisquer $r \in R$, $x \in Q$. Além disso, para quaisquer $s \in \mathcal{S}$, $x \in Q$, temos

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{s}x\right) &= \frac{s}{s}f\left(\frac{1}{s}x\right) = \frac{1}{s}\left(\frac{s}{1}f\left(\frac{1}{s}x\right)\right) = \frac{1}{s}\left(sf\left(\frac{1}{s}x\right)\right) = \frac{1}{s}f\left(s \cdot \left(\frac{1}{s}x\right)\right) \\ &= \frac{1}{s}f\left(\frac{s}{1}\left(\frac{1}{s}x\right)\right) = \frac{1}{s}f(x). \end{aligned}$$

Daí segue que $f\left(\frac{r}{s}x\right) = \frac{r}{s}f(x)$, para todos $\frac{r}{s} \in R_I$, $x \in Q$. Obtemos então que $f \in Hom_{R_I}(Q, E(M))$ e, assim, segue que $Hom_R(Q, E(M)) = Hom_{R_I}(Q, E(M))$. Como ${}_R E(M)$ é injetivo, temos pela Proposição 1.5.3, que para todo R-monomorfismo $g : {}_R P \longrightarrow {}_R L$ então o homomorfismo $g^* : Hom_R(L, E(M)) \longrightarrow Hom_R(P, E(M))$ é um epimorfismo. Dado que $Hom_{R_I}(L, E(M)) = Hom_R(L, E(M))$ e $Hom_R(P, E(M)) = Hom_{R_I}(P, E(M))$ obtemos, pela Proposição 1.5.3, que também ${}_{R_I}E(M)$ é módulo injetivo.

4. Suponhamos que ${}_RE(M)$ tem comprimento finito. Neste caso, pela Proposição 1.2.10, temos que ${}_RE(M)$ é artiniano e noetheriano. Assim, toda cadeia estritamente ascendente e toda cadeia estritamente descendente de submódulos de ${}_RE(M)$ é estacionária. Como todo R_I-submódulo de $E(M)$ é um $\mathcal{R}$-submódulo e, além disso, como as ações dos anéis R e $\mathcal{R}$ sobre $E(M)$ coincidem, temos que cada cadeia estritamente ascendente e cada cadeia estritamente descendente de R_I-submódulos de $E(M)$ é, respectivamente, uma cadeia estritamente ascendente e cadeia estritamente descendente de R-submódulos de $E(M)$. Segue que toda cadeia estritamente ascendente e toda cadeia estritamente descendente de R_I-submódulos de $E(M)$ é estacionária. Assim $E(M)$ é um R_I-módulo artiniano e noetheriano. Então, novamente pela Proposição 1.2.10, obtemos que $E(M)$ é um R_I-módulo com comprimento finito.

   Para a prova no sentido contrário, vamos mostrar que toda sequência de composição de ${}_{R_I}E(M)$ é uma sequência de composição do módulo ${}_RE(M)$. Seja $E(M) = L_0 \supset L_1 \supset \ldots \supset L_n = 0$ uma sequência de composição de ${}_{R_I}E(M)$. Logo, pela Proposição 1.3.6, temos que cada quociente L_i/L_{i+1}, $i = 0, \ldots, n-1$, é um R_I-módulo simples. Além disso, pela Proposição 1.8.4, existe um único ideal maximal $\mathfrak{m}$ de R_I e daí, pela Proposição 1.3.5, segue que para cada $i = 0 \ldots, n-1$, $L_i/L_{i+1} \cong R_I/\mathfrak{m}$ como R_I-módulos.

   Vimos no item *2* acima que M, como R_I-módulo, é simples. Assim, novamente pela Proposição 1.3.5, temos que $M \cong R_I/\mathfrak{m}$ como R_I-módulos. Logo, para cada $i = 0, \ldots, n-1$, temos que $L_i/L_{i+1} \cong M$ como R_I-módulos. Daí segue que $L_i/L_{i+1} \cong M$ como $\mathcal{R}$-módulos e, como as ações dos anéis R e $\mathcal{R}$ sobre o módulo $E(M)$ coincidem, então $L_i/L_{i+1} \cong M$ como R-módulos. Agora, como M é R-módulo simples, obtemos que para cada $i = 0, \ldots, n-1$, o quociente L_i/L_{i+1} é R-módulo simples. Então, pela Proposição 1.3.6, temos que $E(M) = L_0 \supset L_1 \supset \ldots \supset L_n = 0$ é uma sequência de composição do módulo ${}_RE(M)$, e com isso completamos a prova.

5. A prova é análoga à do item anterior.

$\square$

Para finalizar este capítulo, apresentamos duas definições nas quais introduzimos os conceitos de anel T-nilpotente e de módulo supérfluo. Também apresentamos um lema, no qual se relacionam estes conceitos e, que usaremos na prova do Corolário 3.1.5.

Definição 1.8.6. *Um subconjunto I do anel R é T-nilpotente à esquerda se, para toda sequência $a_1, a_2, \ldots$ em I, existe um inteiro positivo n tal que $a_1 \cdots a_n = 0$.*

Definição 1.8.7. *Um R-submódulo N de um R-módulo à esquerda M é supérfluo (ou pequeno) em M, denotado $N << M$, se para todo submódulo K de M, $N + K = M$ implica $K = M$.*

Lema 1.8.8. *([2], Lemma 28.3) Seja J um ideal à esquerda do anel R. Então as seguintes condições são equivalentes:*

1. *J é T-nilpotente à esquerda;*
2. *$JM \neq M$, para cada R-módulo à esquerda não nulo M;*
3. *$JM << M$, para cada R-módulo à esquerda não nulo M;*
4. *$JF << F$, para o R-módulo livre $F = R^{(\mathbb{N})} = \bigoplus_{\mathbb{N}} R$.*

Capítulo 2

Finitude do Fecho Injetivo

O objetivo deste capítulo é estudar, com detalhes, os resultados que Rosenberg e Zelinsky obtiveram em [17]. Discutiremos aqui algumas condições sobre as quais podemos assegurar que um módulo de comprimento finito pode ser imerso em um módulo injetivo de comprimento finito, considerando algumas hipóteses sobre o anel base.

2.1 Anéis com Unidade

Nesta seção vamos exigir como única hipótese sobre o anel R, que ele possua unidade. Mostramos que um módulo ${}_RM$ é imerso em um módulo injetivo de comprimento finito se, e somente se, o seu fecho injetivo tem comprimento finito (ver Proposição *2.1.1*). Além disso, apresentamos dois resultados nos quais se estabelecem algumas condições necessárias e suficientes para que uma tal imersão aconteça (ver Lema 2.1.4 e Teorema 2.1.6).

Proposição 2.1.1. *Seja ${}_RM$ um R-módulo tal que $\ell_R(M) < \infty$. As seguintes propriedades são equivalentes:*

1. *${}_RM$ é imerso em um R-módulo à esquerda injetivo que tem comprimento finito.*

2. *$\ell_R(E(M)) < \infty$.*

3. *$\ell_R(E(N)) < \infty$, para todo R-submódulo simples ${}_RN$ de ${}_RM$.*

Demonstração. $1 \Rightarrow 2$. Se ${}_RM$ é imerso em um módulo injetivo ${}_RI$, segue pelo item

1 da Proposição 1.5.11, que $E({}_RM) \subseteq {}_RI$. Assim, se $\ell_R(I) < \infty$ obtemos, pelo Corolário 1.2.6, que $\ell_R(E({}_RM)) < \infty$.

$1 \Leftarrow 2$. É imediata, pois ${}_RM$ é imerso em seu fecho injetivo ${}_RE(M)$.

$2 \Leftrightarrow 3$. Seja S o socle de ${}_RM$. Como $\ell_R(M) < \infty$, segue pelo item 2 da Proposição 1.5.14, que $E({}_RM) = E(S)$. Assim, $\ell_R E({}_RM)) < \infty$ se, e somente se, $\ell_R E(S)) < \infty$.

Como $\ell_R(M) < \infty$, então $S = \bigoplus\limits_{j=1}^{n} N_j$, onde cada N_j é um R-submódulo simples de ${}_RM$. Logo, pela Proposição 1.5.12, $E(S) = \bigoplus\limits_{j=1}^{n} E(N_j)$. Agora, como $\ell_R(E(S)) = \bigoplus\limits_{j=1}^{n} \ell_R(E(N_j))$ e cada R-submódulo simples de ${}_RM$ é isomorfo a um somando direto de S, obtemos $\ell_R(E(S)) < \infty$ se, e somente se, o fecho injetivo de todo R-submódulo simples de ${}_RM$ tem comprimento finito. $\square$

Observação 2.1.2. *1. Um anel R é dito um V-anel à esquerda se todo R-módulo à esquerda simples é injetivo. Segue do item 3 da Proposição 2.1.1 que módulos de comprimento finito sobre V-anéis são imersos em módulos injetivos de comprimento finito.*

2. Existe um teorema de Kaplanski que diz que um anel comutativo A é von Neumann regular se, e somente se, A é um V-anel [17]. Nenhuma das implicações deste teorema vale no caso comutativo. Em [9] Cozzens construiu um exemplo, não trivial, de um V-anel não comutativo.

Definição 2.1.3. *Seja R um anel. Para um R-módulo à esquerda ${}_RM$ define-se sua série de Loewy correspondente a uma cadeia de ideais de R, $R = N_0 \supseteq N_1 \supseteq \ldots \supseteq N_k = 0$, como sendo a cadeia de R módulos à esquerda $0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \ldots \subseteq M_k = M$ onde $M_i = \{x \in M : \ nx = 0, \ \textit{para todo } n \in N_i\}$.*

Lema 2.1.4. *Seja R um anel. Para cada R-módulo à esquerda ${}_RM$ com série de Loewy $0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \ldots \subseteq M_k = M$, correspondente à cadeia de ideais $R = N_0 \supseteq N_1 \supseteq \ldots \supseteq N_k = 0$, existe um R-monomorfismo natural à esquerda*

$$M_{i+1}/M_i \longrightarrow Hom_R(N_i/N_{i+1}, M).$$

Além disso, se M é injetivo, então este R-homomorfismo é um isomorfismo.

Demonstração. Para cada $i = 1, \dots, k$, temos que R/N_i é um R-bimódulo. Logo, pelo item 1 do Teorema 1.1.5, obtemos que $Hom_R(R/N_i, M)$ é um R-módulo à esquerda com a ação definida por:

$$(rf)(\bar{n}) = f(\bar{n}r), \text{ para quaisquer } f \in Hom_R(R/N_i, M),\ r \in R \text{ e } \bar{n} \in R/N_i.$$

Agora, para cada i, definimos a aplicação $\varphi_i : M_i \longrightarrow Hom_R(R/N_i, M)$, pela correspondência:

$$\begin{array}{rl} x \longmapsto \varphi_i(x) \ : \ R/N_i & \longrightarrow M \\ \bar{n} = n + N_i & \longmapsto \varphi_i(x)(\bar{n}) = nx. \end{array}$$

Não é difícil ver que φ_i é um R-homomorfismo de módulos à esquerda. Vamos ver que φ_i também é injetora e sobrejetora. De fato, se $\varphi_i(x) = \varphi_i(y)$, então $nx = ny$, para todo $n \in R$. Em particular, para $n = 1$, obtemos $x = y$, e segue que φ_i é injetora. Dado $f \in Hom_R(R/N_i, M)$, se $f(1 + N_i) = x_0$, temos $f(n + N_i) = nx_0$ para todo $n \in R$. Assim, $\varphi_i(x_0)(n + N_i) = nx_0 = f(n + N_i)$, ou seja, $\varphi_i(x_0) = f$ e segue que φ_i é sobrejetora.

Por outro lado, temos que

$$0 \longrightarrow \frac{N_i}{N_{i+1}} \xrightarrow{f} \frac{R}{N_{i+1}} \xrightarrow{g} \frac{R}{N_i} \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata de R-módulos à esquerda, sendo f e g definidas pelas correspondências $n + N_{i+1} \longmapsto n + N_{i+1}$ e $r + N_{i+1} \longmapsto r + Ni$, respectivamente. Como cada N_i é um ideal de R, N_i/N_{i+1} também é um R-bimódulo, e segue do item 1 do Teorema 1.1.5, que $Hom_R(N_i/N_{i+1}, M)$ é um R-módulo à esquerda, para cada $i = 0, \dots, k-1$. Logo, pela Proposição 1.1.9, segue que

$$0 \to Hom_R(R/N_i, M) \xrightarrow{g^*} Hom_R(R/N_{i+1}, M) \xrightarrow{f^*} Hom_R(N_i/N_{i+1}, M)$$

também é uma sequência exata de R-módulos à esquerda. Assim, pelo Teorema de R-homomorfismos, existe um R-monomorfismo

$$\bar{f^*} : Hom_R(R/N_{i+1}, M)/Hom_R(R/N_i, M) \longrightarrow Hom_R(N_i/N_{i+1}, M).$$

Temos $M_{i+1}/M_i \cong (Hom_R(R/N_{i+1}, M)/Hom_R(R/N_i, M))$ como R-módulos à esquerda, dado que φ_i é R-isomorfismo. Logo, obtemos que existe um R-monomorfismo de módulos à esquerda

$$M_{i+1}/M_i \longrightarrow Hom_R(N_i/N_{i+1}, M).$$

Além disso, quando M é injetivo, pelo Corolário 1.5.4, temos que

$$0 \to Hom_R(R/N_i, M) \xrightarrow{g^*} Hom_R(R/N_{i+1}, M) \xrightarrow{f^*} Hom_R(N_i/N_{i+1}, M) \to 0$$

é sequência exata. Assim, pelo Teorema dos R-homomorfismos, $\bar{f}^*$ é um R-isomorfismo e, então

$$M_{i+1}/M_i \longrightarrow Hom_R(N_i/N_{i+1}, M)$$

é um R-isomorfismo. □

Lema 2.1.5. *Sejam M um R-módulo à esquerda de comprimento finito com socle S e $R = N_0 \supseteq N_1 \supseteq \ldots \supseteq N_k = 0$ uma cadeia de ideais de R tais que N_i/N_{i+1} é semissimples como R-módulo à esquerda, $0 \leq i \leq k-1$. Então, ${}_RM$ é imerso em um R-módulo à esquerda injetivo que tem comprimento finito se, e somente se, $Hom_R(N_i/N_{i+1}, S)$ tem comprimento finito como R-módulo à esquerda, para cada $i = 0, \ldots, k-1$.*

Demonstração. Definindo $B_i := \{x \in E(M) : nx = 0 \text{ para todo } n \in N_i\}$, com $i = 0, \ldots, k-1$, obtemos a série de Loewy $0 = B_0 \subseteq B_1 \subseteq \ldots \subseteq B_k = E(M)$. Pelo Lema 2.1.4, segue que $B_{i+1}/B_i \cong Hom_R(N_i/N_{i+1}, E(M))$. Assim, $E(M)$ tem comprimento finito se, e somente se, $Hom_R(N_i/N_{i+1}, E(M))$ tem comprimento finito para todo i, $0 \leq i \leq k-1$.

Seja S' é o socle de $E(M)$. Pela Proposição 1.3.22 obtemos para cada i, $i = 0, \ldots, k-1$, que $Hom_R(N_i/N_{i+1}, E(M)) = Hom_R(N_i/N_{i+1}, S')$.

Como S e S' são somas diretas de submódulos simples de M e $E(M)$, respectivamente, segue que $T = {}_R< S' \setminus S >$[1] é um R-submódulo à esquerda de $E(M)$. Como $\ell_R(M) < \infty$ segue, do item 1 da Proposição 1.5.14, que $S \subseteq_e M$. Como $T \cap S = 0$, obtemos $T = 0$ e portanto $S = S'$, o que conclui a demonstração. □

Uma consequência, quase direta, do Lema 2.1.5 é o seguinte resultado:

Teorema 2.1.6. *Sejam ${}_RM$ um R-módulo à esquerda com comprimento finito e socle S, N um ideal de R tal que $R = N^0 \supseteq N^1 \supseteq \ldots \supseteq N^k = 0$ e R/N é semissimples. Então ${}_RM$ é imerso num R-módulo à esquerda injetivo com comprimento*

[1]Dado um R-módulo à esquerda M e B um subconjunto de M, escrevemos ${}_R< B >$ para denotar o R-submódulo à esquerda de M gerado por B. Quando $B = \{b\}$ é um conjunto unitário, escrevemos ${}_R< b >$ em lugar de ${}_R< \{b\} >$.

finito se, e somente se, o R-módulo $Hom_R(N^i/N^{i+1}, S)$ tem comprimento finito para cada $i = 0, 1, \ldots, k-1$, se, e somente se, o R/N-módulo $Hom_{R/N}(N^i/N^{i+1}, S)$ tem comprimento finito para cada $i = 0, 1, \ldots, k-1$.

Demonstração. Fixe $i = 0, 1, \ldots, k-1$. Como o anel R/N é semissimples, segue que o módulo ${}_{R/N}(N^i/N^{i+1})$ é semissimples. Por outro lado, como $N \subseteq Ann_R(N^i/N^{i+1})$, obtemos pela Proposição 1.1.2, que as ações à esquerda dos anéis R e R/N sobre o módulo N^i/N^{i+1} coincidem. Assim, o módulo ${}_R(N^i/N^{i+1})$ é também semissimples. Agora, para obter a prova da primeira equivalência, é suficiente aplicar o Lema 2.1.5.

Como $(N^i/N^{i+1})N = 0$, novamente pela Proposição 1.1.2, segue que as ações à direita dos anéis R e R/N sobre N^i/N^{i+1} coincidem. Assim, $Hom_R(N^i/N^{i+1}, S) = Hom_{R/N}(N^i/N^{i+1}, S)$. Com isto obtemos a prova da segunda equivalência. $\square$

Proposição 2.1.7. *Seja N é um ideal nilpotente de R tal que $R = N^0 \supseteq N^1 \supseteq \ldots \supseteq N^k = 0$ e R/N é semissimples. Então, para $i = 1, \ldots, k-1$, $Hom_R(N^i/N^{i+1}, S)$ tem comprimento finito para todo R-módulo à esquerda simples S se, e somente se, $Hom_R(N/N^2, S)$ tem comprimento finito para todo R-módulo à esquerda simples S.*

Demonstração. Assumimos que $Hom_R(N/N^2, S)$ tem comprimento finito para todo R-módulo à esquerda simples S. Vamos mostrar que $Hom_R(N^i/N^{i+1}, S)$ tem comprimento finito para todo R-módulo à esquerda simples S, para cada $i = 1, \ldots, k-1$, fazendo indução sobre i. Assim, nossa hipótese de indução é que $Hom_R(N^{i-1}/N^i, S)$ tem comprimento finito para todo R-módulo à esquerda simples S.

Agora, temos que a correspondência $(n, m) \longmapsto nm$ define uma função balanceada $\delta : N \times N^{i-1} \longrightarrow N^i$. Logo, pela Proposição 1.6.4, existe um único homomorfismo de grupos $\delta' : N \otimes_R N^{i-1} \longrightarrow N^i$ que faz comutar o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} N \times N^{i-1} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\delta"'] & N \otimes_R N^{i-1} \arrow[dl, dotted, "\delta'"] \\ N^i & \end{tikzcd}$$

É claro que δ' é um epimorfismo. Além disso, como $N \otimes_R N^{i-1}$ é um R-módulo à esquerda, segue que δ' é um R-epimorfismo de módulos à esquerda. Agora, se

$\rho : N^i \longrightarrow N^i/N^{i+1}$ é a projeção canônica, segue que a composição de R-homomorfismos $\eta = \rho \circ \delta' : N \otimes_R N^{i-1} \longrightarrow N^i/N^{i+1}$ é também um R-epimorfismo à esquerda. Observamos que, dado um elemento arbitrário $x = \sum_{j=1}^{t} n_j \otimes m_j \in N \otimes_R N^{i-1}$ temos que

$$\eta(x) = \eta\left(\sum_{j=1}^{t} n_j \otimes m_j\right) = \sum_{j=1}^{t} \eta(n_j \otimes m_j) = \sum_{j=1}^{t} \rho \circ \delta'(n_j \otimes m_j) = \sum_{j=1}^{t} \rho(n_j m_j)$$
$$= \sum_{j=1}^{t} \left(n_j m_j + N^{i+1}\right) = \left(\sum_{j=1}^{t} n_j m_j\right) + N^{i+1}.$$

Logo, $x \in Ker(\eta)$ se, e somente se, $\sum_{j=1}^{t} n_j m_j \in N^{i+1}$. Agora, se C é o R-módulo gerado pelo conjunto $\{n' \otimes m,\ n \otimes m' |\ n' \in N^2,\ n \in N,\ m' \in N^i,\ m \in N^{i-1}\}$ é claro que $C \subseteq Ker(\eta)$. Assim, se $\pi' : N \otimes_R N^{i-1} \longrightarrow \frac{N \otimes_R N^{i-1}}{C}$ é a projeção canônica, então existe um único R-epimorfismo $\bar{\eta} : \frac{N \otimes_R N^{i-1}}{C} \longrightarrow N^i/N^{i+1}$. Por outro lado, pela Proposição 1.6.5, temos que existe um R-isomorfismo $\epsilon : \frac{N}{N^2} \otimes_R \frac{N^{i-1}}{N^i} \longrightarrow \frac{N \otimes_R N^{i-1}}{C}$. Assim, existe um R-epimorfismo $\phi = \bar{\eta} \circ \epsilon : \frac{N}{N^2} \otimes_R \frac{N^{i-1}}{N^i} \longrightarrow N^i/N^{i+1}$. Logo, pela Proposição 1.1.9 para todo R-módulo simples à esquerda S, obtemos que:

$$\phi^* : Hom_R\left(N^i/N^{i+1}, S\right) \longrightarrow Hom_R\left(\frac{N}{N^2} \otimes_R \frac{N^{i-1}}{N^i}, S\right)$$

é um R-monomorfismo à esquerda. Como S é um R-módulo à esquerda, N/N^2 e N^{i-1}/N^i são R-bimódulos, segue pela Proposição 1.6.6 e a Observação 1.6.7, que existe um R-isomorfismo de módulos à esquerda

$$\psi : Hom_R\left(\frac{N}{N^2} \otimes_R \frac{N^{i-1}}{N^i}, S\right) \longrightarrow Hom_R\left(\frac{N^{i-1}}{N^i}, Hom_R\left(\frac{N}{N^2}, S\right)\right).$$

Assim, existe um R-monomorfismo

$$\varphi = \psi \circ \phi^* : HomR\left(\frac{N^i}{N^{i+1}}, S\right) \longrightarrow Hom_R\left(\frac{N^{i-1}}{N^i}, Hom_R\left(\frac{N}{N^2}, S\right)\right).$$

Daí, para concluir nossa prova, é suficiente mostrar que o R-módulo à esquerda $Hom_R\left(\frac{N^{i-1}}{N^i}, Hom_R\left(\frac{N}{N^2}, S\right)\right)$ tem comprimento finito.

Seja $S' = Hom_R\left(\frac{N}{N^2}, S\right)$. Por hipótese, S' tem comprimento finito. Por outro lado, como as ações à direita de R e R/N coincidem sobre N/N^2, temos que as ações à esquerda de R e R/N coincidem sobre S'. Como R/N é semissimples, temos que S' é um R-módulo à esquerda semissimples. Assim, $S' = \overset{k}{\underset{j=1}{\oplus}} S_j$ com S_j um R-módulo simples, para cada $j = 1, \ldots, k$. Logo, pela Proposição 1.1.10, temos que

$$Hom_R\left(\frac{N^{i-1}}{N^i}, Hom_R\left(\frac{N}{N^2}, S\right)\right) = Hom_R\left(\frac{N^{i-1}}{N^i}, \overset{k}{\underset{j=1}{\oplus}} S_j\right) = \bigoplus_{j=1}^{k} Hom_R\left(\frac{N^{i-1}}{N^i}, S_j\right).$$

Agora, pela hipótese de indução, para cada $j = 1 \ldots, k$, temos que $Hom_R\left(\frac{N^{i-1}}{N^i}, S_j\right)$ tem comprimento finito. Daí, segue que $\bigoplus_{j=1}^{k} Hom_R\left(\frac{N^{i-1}}{N^i}, S_j\right)$ também tem comprimento finito, e assim concluímos a nossa prova. □

2.2 Finitude do Fecho Injetivo de um R-módulo Simples e a Artianidade de R

Para melhor apresentar nossos resultados, esta seção será dividida em duas subseções. Na primeira subseção vamos exigir que o anel R, além de ter unidade, seja um anel artiniano à esquerda. Na segunda subseção exigimos que o anel R seja um anel artiniano com unidade.

2.2.1 Anéis Artinianos à Esquerda

Como dissemos, nesta subseção R será um anel artiniano à esquerda com unidade. Vamos começar fazendo certas observações nas quais introduzimos algumas notações.

Observação 2.2.1. *1. Como R é um anel artiniano à esquerda, se $N = J(R)$ então, pelo Teorema 1.3.10, existe o menor inteiro $k \geq 0$ tal que $R = N^0 \supseteq N^1 \supseteq \cdots \supseteq N^k = 0$.*

2. Seja ${}_RM$ um R-módulo simples arbitrário. Para cada i, $0 \leq i \leq k-1$, definimos o R-módulo V_i [2] como sendo:

$$V_i := \sum \left\{M_\alpha : M_\alpha \text{ é } R\text{-submódulo à esquerda de } N^i/N^{i+1} \text{ e } M_\alpha \cong {}_RM\right\}.$$

Como, para cada α, $M_\alpha \cong M$ como R-módulos à esquerda e ${}_RM$ é simples, então todo M_α é simples. Assim, V_i é semissimples, e então,

$$V_i := \oplus \left\{M_{\alpha'} : M_{\alpha'} \text{ é } R\text{-submódulo à esquerda de } N^i/N^{i+1} \text{ e } M_{\alpha'} \cong {}_RM\right\}.$$

[2] V_i é chamada de componente homogênea do módulo ${}_R(N^i/N^{i+1})$ correspondente ao módulo ${}_RM$. Quando não existem R-submódulos de N^i/N^{i+1} isomorfos ao módulo ${}_RM$, $V_i = 0$

3. *Pelo Corolário 1.3.4, $N = J(R)$ é um ideal de R. Logo, este fato induz uma estrutura de R-bimódulo em N^i/N^{i+1} para $i = 0, \ldots, k-1$.*

Para os próximos resultados, vamos manter as notações acima.

Proposição 2.2.2. *Seja M um R-módulo à esquerda simples e $N = J(R)$. Então $V_i = \overset{t}{\underset{j=1}{\oplus}} M_j$ onde, para $j = 1, \ldots, t$, M_j é R-submódulo à esquerda de N^i/N^{i+1} e $M_j \cong M$ como R-módulos à esquerda.*

Demonstração. Como R é um anel artiniano à esquerda, segue que N^i/N^{i+1} também é anel artiniano à esquerda. Seja

$$\mathfrak{F} = \left\{ M_\alpha : \ M_\alpha \text{ é um } R\text{-submódulo à esquerda de } N^i/N^{i+1} \text{ e } {}_RM_\alpha \cong {}_RM \right\}.$$

Se $\mathfrak{F}$ é uma família infinita, existe uma subfamília infinita enumerável $\{M_l\}_{l\in\mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{F}$ tal que $M_{l_1} \neq M_{l_2}$ se $l_1 \neq l_2$. Logo, $V_i \supsetneqq \overset{\infty}{\underset{l=1}{\oplus}} M_l \supsetneqq \overset{\infty}{\underset{l=2}{\oplus}} M_l \supsetneqq \ldots$ é uma cadeia descendente de R-submódulos à esquerda de V_i, e portanto, de N^i/N^{i+1}. Como esta cadeia não é estacionária, obtemos uma contradição com o fato de N^i/N^{i+1} ser artiniano à esquerda. Assim, $\mathfrak{F}$ é finita e, portanto,

$$V_i = \overset{t}{\underset{j=1}{\oplus}} M_j.$$

□

Proposição 2.2.3. *Para cada $i = 0, \ldots, k-1$, V_i é um R-bimódulo.*

Demonstração. V_i é um R-módulo à esquerda, pois é soma direta de R-módulos à esquerda. Assim, para completar a demonstração é suficiente mostrar que V_i é um R-módulo à direita. Mais precisamente, é suficiente mostrar que para todo $v \in V_i$ e todo $r \in R$, $vr \in V_i$.

Como N^i/N^{i+1} é um R-bimódulo, para cada $i = 0, \ldots, k-1$ e $V_i \subseteq N^i/N^{i+1}$, segue que $\phi_r : V_i \longrightarrow N^i/N^{i+1}$, definida pela correspondência $v \longmapsto vr$, para cada $r \in R$, é um R-homomorfismo de R-módulos à esquerda. Então para mostrar que $vr \in V_i$, para todo $v \in V_i$ e todo $r \in R$, é suficiente mostrar que $\phi_r(V_i) \subseteq V_i$.

Seja $\phi \in Hom_R(V_i, N^i/N^{i+1})$. Como $\phi(V_i) = \overset{t}{\underset{j=1}{\oplus}} \phi(M_j)$, onde $M_j \cong M$ é um R-módulo à esquerda simples, pela Proposição 2.2.2, temos então $\phi(M_j) = 0$ ou $\phi(M_j) \cong M$, para qualquer $j = 1, \ldots, t$. Isto completa a nossa demonstração. □

Para cada $i = 0, \ldots, k-1$, seja $E_i = End({}_RV_i)$ o anel de R-homomorfismos à esquerda de V_i. Da Proposição 2.2.3, para cada $r \in R$, $f_r : V_i \longrightarrow V_i$ definido pela correspondência $v \longmapsto vr$, é um R-homomorfismo à esquerda. Vamos denotar por R_i o conjunto de todos estes R-homomorfismos.

Proposição 2.2.4. *Para cada $i = 0, \ldots, k-1$, R_i é subanel de E_i.*

Demonstração. Fixamos $i \in \{0, \ldots, k-1\}$. Como $0 \in R$ e $v0 = 0$, para todo $v \in V_i$, então $0 \in R_i$. Para todos $r_1, r_2 \in R$, temos $f_{r_1}(v) - f_{r_2}(v) = vr_1 - vr_2 = v(r_1 - r_2) = f_{r_1 - r_2}(v)$, para cada $v \in V_i$, isto é, $f_{r_1} - f_{r_2} = f_{r_1 - r_2} \in R_i$. Agora, dados $r_1, r_2 \in R$, temos $f_{r_1} \circ f_{r_2}(v) = f_{r_1}(vr_2) = (vr_2)r_1 = v(r_2 r_1) = f_{r_2 r_1}(v)$, para cada $v \in V_i$, isto é, $f_{r_1} \circ f_{r_2} = f_{r_2 r_1} \in R_i$. $\square$

Proposição 2.2.5. *Para cada $i = 0, \ldots, k-1$, o anel E_i é simples, artiniano à esquerda e artiniano à direita.*

Demonstração. Fixamos $i \in \{0, \ldots, k-1\}$. Das Proposições 2.2.2 e 1.1.10 obtemos que:
$$E_i = Hom_R(\overset{t}{\underset{j=1}{\oplus}} M_j, \overset{t}{\underset{l=1}{\oplus}} M_l) = \overset{t}{\underset{j=1}{\oplus}} \left(\overset{t}{\underset{l=1}{\oplus}} Hom_R(M_j, M_l) \right).$$
Logo, E_i é isomorfo ao anel de matrizes de ordem $t \times t$ com entradas no anel $End({}_RM)$. Como o anel $End({}_RM)$ é um anel de divisão, pela Proposição 1.3.15, temos então pelo Teorema 1.3.27 e pela Observação 1.3.28 que o anel E_i é simples, artiniano à esquerda e artiniano à direita, como queríamos mostrar. $\square$

Proposição 2.2.6. *Para cada $i = 0, \ldots, k-1$, o anel R_i é semissimples. Além disso, R_i é artininiano à direita e noetheriano à direita.*

Demonstração. Vamos mostrar que o anel ${R_i}^{op}$ é semissimples.

Temos que a aplicação $\varphi : R \longrightarrow {R_i}^{op}$ definida pela correspondência $r \longmapsto f_r$, é um homomorfismo de anéis sobrejetor. Logo, pelo Teorema dos homomorfismos para anéis, ${R_i}^{op} \cong R/Ker(\varphi)$. Assim, para mostrar que ${R_i}^{op}$ é semissimples, é suficiente mostrar que $R/Ker(\varphi)$ é semissimples.

Dado $r \in N$, como $V_i \subseteq N^i/N^{i+1}$, temos $f_r(v) = vr = 0$ para cada $v \in V_i$. Então $N \subseteq Ker(\varphi)$ e assim, a aplicação $\psi : R/N \longrightarrow R/Ker(\varphi)$, definida pela correspondência $r+N \longmapsto r+Ker(\varphi)$, é um homomorfismo de R-módulos à esquerda e também à direita.

Como R/N é semissimples e $N(R/N) = 0$, obtemos pelo item 1 da Proposição 1.1.2, que ${}_R(R/N)$ é semissimples. Como ψ é sobrejetor e a imagem de R-módulos semissimples por R-homomorfismos é semissimples, então ${}_R(R/Ker(\varphi))$ é semissimples. Como $Ker(\varphi)(R/Ker(\varphi)) = 0$, novamente pela Proposição 1.1.2, obtemos que ${}_{R/Ker(\varphi)}(R/Ker(\varphi))$ é semissimples.

Vamos mostrar agora que R_i é artiniano à direita. De fato, como $\varphi : R \longrightarrow {R_i}^{op}$ é um homomorfismo de anéis sobrejetor e R é artiniano à esquerda, segue que ${R_i}^{op}$ também é artiniano à esquerda. Assim, obtemos que R_i é artiniano à direita.

Por último, como R_i é semissimples e artiniano à direita segue, pela Proposição 1.3.13, que R_i é noetheriano à direita. $\square$

No próximo resultado, com as notações e resultados desta subseção, estabelecemos condições necessárias e suficientes para que um módulo simples, sobre um anel artiniano à esquerda, seja imerso em um módulo injetivo com comprimento finito.

Teorema 2.2.7. *Seja M um R-módulo à esquerda simples. Então M pode ser imerso em um R-módulo à esquerda injetivo de comprimento finito se, e somente se, E_i é um R_i-módulo à direita finitamente gerado, para cada $i = 0, \dots, k-1$.*

Demonstração. Como V_i é um R-bimódulo, pelo Teorema 1.1.5 temos que E_i é um R-módulo à esquerda com a ação definida por $(rf)(v) = f(vr)$, para todo $f \in E_i$, todo $r \in R$ e todo $v \in V_i$. Segue então das Proposições 2.2.2 e 1.1.10 que:

$$E_i = Hom_R(V_i, V_i) = \bigoplus_{j=1}^{t} Hom_R(V_i, M_j).$$

Afirmamos que $Hom_R(V_i, M_j) = Hom_R(N^i/N^{i+1}, M_j)$, para cada $j = 0, \dots, t$. De fato, pois R é artiniano à esquerda e $J(R) = N$, temos então que R/N é um anel semissimples pelo Teorema 1.3.25, de onde segue que N^i/N^{i+1} é um R/N-módulo semissimples. Como as ações de R e R/N sobre N^i/N^{i+1} coincidem, obtemos que N^i/N^{i+1} é um R-módulo semissimples.

Daí, como V_i é R-submódulo de ${}_R(N^i/N^{i+1})$, existe um R-submódulo à esquerda P de N^i/N^{i+1} tal que $N^i/N^{i+1} = V_i \oplus P$. Agora, se $f \in Hom_R(V_i, M_j)$, basta estender f definindo $f(P) = 0$ para obter que $f \in Hom_R(N^i/N^{i+1}, M_j)$.

Para concluir que $Hom_R(V_i, M_j) = Hom_R(N^i/N^{i+1}, M_j)$, é suficiente mostrar que $f(P) = 0$, para todo $f \in Hom_R(N^i/N^{i+1}, M_j)$.

Seja $f \in Hom_R(N^i/N^{i+1}, M_j)$. Suponhamos que existe $x \in P$ tal que $f(x) \neq 0$. Logo, a restrição de f a Rx, $h : Rx \longrightarrow M_j$, é um R-homomorfismo à esquerda. Como N^i/N^{i+1} é semissimples e Rx é um R-submódulo à esquerda de N^i/N^{i+1}, então pela Proposição 1.3.9, segue que Rx é semissimples também. Logo, temos que $Rx = Q \oplus ker(h)$, para algum R-submódulo à esquerda Q de Rx. Como M_j é simples e $h(x) = f(x) \neq 0$, obtemos que $h(Rx) = M_j$, isto é, h é um epimorfismo. Daí, pelo Teorema de R-homomorfismos, segue que

$$Q \cong \frac{Q \oplus ker(h)}{ker(h)} = \frac{Rx}{ker(h)} \cong h(Rx) = M_j,$$

como R-módulos à esquerda. Por definição de V_i obtemos que ${}_RQ$ é um submódulo de V_i. Daí, obtemos que ${}_RQ \subseteq V_i \cap P = 0$, o que é uma contradição pois ${}_RQ$ é simples. Portanto, $f(P) = 0$ e completamos a prova da afirmação.

Como ${}_RM_j \cong {}_RM$, da afirmação anterior, obtemos que:

$$(i) \quad \ell_R(E_i) < \infty \text{ se, e somente se, } \ell_R(Hom_R(N^i/N^{i+1}, {}_RM)) < \infty.$$

Temos que $Hom_R(N^i/N^{i+1}, {}_RM)$ é R-módulo à esquerda com a ação definida por: $(rf)(x) = f(xr)$, para quaisquer $f \in Hom_R(N^i/N^{i+1}, {}_RM)$, $r \in R$ e $x \in N^i/N^{i+1}$. Assim, para quaisquer $f \in E_i$, $r \in R$ e $v \in V_i$, temos $(rf)(v) = f(vr) = f \circ f_r(v)$. Então, a ação à esquerda de R sobre E_i coincide com a ação à direita de R_i sobre E_i. Logo, de *(i)* segue que

$$(ii) \quad \ell(E_{iR_i}) < \infty \text{ se, e somente se, } \ell_R(Hom_R(N^i/N^{i+1}, {}_RM)) < \infty.$$

Na Proposição 2.2.6 vimos que R_i é um anel semissimples. Logo, E_i como R_i-módulo à direita também é semissimples. Assim, pela Proposição 1.3.14, obtemos que $\ell\left(E_{iR_i}\right) < \infty$ se, e somente se, $(E_i)_{R_i}$ é finitamente gerado. Então,

$$(iii) \quad (E_i)_{Ri} \text{ é finitamente gerado se, e somente se, } \ell_R(Hom_R(N^i/N^{i+1}, {}_RM)) < \infty.$$

Daí, pelo Teorema 2.1.6, obtemos que o módulo simples ${}_RM$ é imerso em um módulo injetivo de comprimento finito se, e somente se, E_{iRi} é finitamente gerado.

□

Observação 2.2.8. *Temos que o produto no anel E_i é dado pela composição usual de R-endomorfismos de V_i. Na Proposição 2.2.5 vimos que E_i é simples, artiniano à esquerda e artiniano à direita. Assim, também ${E_i}^{op}$ é simples, artiniano à direita e artiniano à esquerda. Logo, o Teorema 2.2.7 pode ser enunciado de forma equivalente, como segue:*

Teorema 2.2.7.$'$ *Seja M um R-módulo à esquerda simples. Então M pode ser imerso em um R-módulo à esquerda injetivo de comprimento finito se, e somente se, E_i^{op} é um R_i^{op}-módulo à esquerda finitamente gerado, para cada $i = 0, \ldots, k-1$.*

No seguinte exemplo, mostramos que a hipótese de R ser artiniano à esquerda não é suficiente para que E_i seja um R_i-módulo finitamente gerado à direita. Assim, pelo Teorema 2.2.7, não é suficiente que o anel R seja artiniano à esquerda para que todo R-módulo simples $_RM$ seja imerso num R-módulo injetivo de comprimento finito.

Exemplo 2.2.9. *Seja K um corpo com um homomorfismo de corpos injetor $\sigma : K \longrightarrow K$ tal que $[K : \sigma(K)] = \infty$, isto é, a dimensão de K sobre $\sigma(K)$ é infinita, o que acontece por exemplo quando tomamos $K = F(x_1, x_2, \ldots)$, com F um corpo qualquer, $\sigma(x_i) = x_{i+1}$ e $\sigma|_F = id$.*

Escolhemos um K-módulo à esquerda N tal que $K \cong N$ como K-módulos à esquerda. Agora, definindo $nk = \sigma(k)n$, para todo $k \in K$ e todo $n \in N$, obtemos que esta é uma ação à direita de K sobre N. Não é difícil verificar que estas ações fazem de N um K-bimódulo. Definindo,

$$R := \left\{ \begin{pmatrix} k & n \\ 0 & k \end{pmatrix} : \ k \in K, \ n \in N \right\},$$

temos que R é um anel artiniano à esquerda que possui um R-módulo simples à esquerda que não é imerso em um R-módulo à esquerda injetivo de comprimento finito. Além disso, temos que R não é um anel artiniano à direita.

De fato, iniciamos lembrando a estrutura dos ideais à esquerda e à direita de R. Pela Proposição *1.4.1*, segue que R é um anel com a soma e o produto usual de matrizes onde:

- Os ideais à esquerda de R são da forma $I = \left\{\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & r \end{pmatrix} : \ r \in I_1, \ m \in I_2\right\}$ com I_1 um ideal de K e I_2 um K-submódulo à esquerda de N que contém NI_1.
- Os ideais à direita de R são da forma $J = \left\{\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & r \end{pmatrix} : \ r \in J_1, \ m \in J_2\right\}$ com J_1 um ideal de K e J_2 um K-submódulo à direita de N que contém J_1N.

Além disto, não é difícil verificar que:

$$K \cong K' =: \left\{k' = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} : \ k \in K\right\}$$

como corpos,

$$N \cong N' =: \begin{pmatrix} 0 & N \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =: \left\{n' = \begin{pmatrix} 0 & n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \ n \in N\right\}$$

como grupos, e $(N')^2 = 0$.

Discutiremos agora a artinianidade do anel R:

Afirmação (1): O único K-submódulo à esquerda próprio de R é $N' \cong R/K'$. Em particular, R é artiniano à esquerda.

De fato, como K é corpo, os únicos ideais à esquerda de K são 0 e K. Logo, como ${}_KK \cong {}_KN$ então, os únicos K-submódulos à esquerda de N são 0 e N. Assim, da caracterização dos ideais à esquerda de R, segue que o único ideal à esquerda próprio de R é $N' = \begin{pmatrix} 0 & N \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cong {}_R(R/K')$. Então N' é o único R-submódulo à esquerda de R e, assim, R é artiniano à esquerda.

Em contraste com a Afirmação 1, temos:

Afirmação (2): R não é artiniano à direita.

De fato, por definição do K-bimódulo N, temos que $N_K := {}_{\sigma(K)}N$. Como ${}_KN \cong {}_KK$ e $[K : \sigma(K)] = \infty$, existe um K-isomorfismo $\delta : {}_KK \longrightarrow {}_KN$ e existe uma base infinita $\mathcal{A}$ para o espaço vetorial K sobre $\sigma(K)$. Se $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \dots\} \subseteq \mathcal{A}$, então

$$\mathbb{U}_1 = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \sigma(K)b_i \supsetneqq \mathbb{U}_2 = \bigoplus_{i=2}^{\infty} \sigma(K)b_i \supsetneqq \dots$$

é uma cadeia estritamente decrescente de $\sigma(K)$-subespaços de K. Logo,

$$\delta(\mathbb{U}_1) \supsetneqq \delta(\mathbb{U}_2) \supsetneqq \dots$$

é uma cadeia estritamente decrescente de $\sigma(K)$-submódulos à esquerda de N e, portanto, uma cadeia estritamente decrescente de K-submódulos à direita de N_K. Então, pela caracterização dos ideais à direita de R, temos que:

$$\begin{pmatrix} 0 & \delta(\mathbb{U}_1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \supsetneq \begin{pmatrix} 0 & \delta(\mathbb{U}_2) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \supsetneq \dots$$

é uma cadeia de ideais à direita estritamente decrescente de R. Assim, R não é artiniano à direita.

Temos que $J(R) = N'$ pois, como vimos na Afirmação (1), N' é o único ideal próprio à esquerda de R. Agora, tomamos o R-módulo simples ${}_RN' \cong {}_RM = {}_R(R/K')$, temos que $V_1 = {}_RN'$ e $E_1 = End({}_RN')$.

Além disso, N' é um R-bimódulo, pois N é um K-bimódulo. Como as ações à esquerda de R e K' sobre N' coincidem, segue que $E_1 = End({}_RN') = End({}_{K'}N')$. Pelo Teorema 1.1.5, E_1 tem estrutura de R-módulo à esquerda com a ação definida por: $(rf)(n') = f(n'r)$, para quaisquer $f \in E_1$, $n \in N'$ e $r \in R$. Dado que as ações à direita de R e K' sobre N' também coincidem, temos então que E_1 tem estrutura de K'-módulo à esquerda e esta estrutura coincide com a estrutura de E_1 como R-módulo à esquerda.

Por outro lado, por definição de R_1, temos que

$$\begin{aligned} R_1 &:= \{f_r : {}_RV_1 \longrightarrow {}_RV_1 | \ f_r(v) = vr, \ r \in R\} \\ &= \{f_r : {}_RN' \longrightarrow {}_RN' | \ f_r(n') = n'r, \ r \in R\}. \end{aligned}$$

Novamente, do fato de que as ações à direita de R e K' sobre N' coincidem, segue que:

$$R_1 = \{f_{k'} : {}_{K'}N' \longrightarrow {}_{K'}N' | \ k' \in K', \ f_{k'}(n') = n'k'\}.$$

Denotamos por $\sigma(K)'$ o subcorpo $\left\{\begin{pmatrix} \sigma(k) & 0 \\ 0 & \sigma(k) \end{pmatrix} : \ k \in K\right\}$ de K e por $\sigma(k')$ o elemento $\begin{pmatrix} \sigma(k) & 0 \\ 0 & \sigma(k) \end{pmatrix}$. Logo, obtemos que

$$R_1 = \{f_{k'} : {}_{K'}N' \longrightarrow {}_{K'}N' | \ k' \in K', \ f_{k'}(n') = n'k' = \sigma(k')n'\}$$

e que K' não é finitamente gerado sobre $\sigma(K)'$, pois ${}_{\sigma(K)}K$ não é finitamente gerado.

Dados $k' \in K'$ e $f \in E_1$ temos: $(k'f)(n') = f(n'k') = f(f_{k'}(n')) = (f \circ f_{k'})(n')$, para todo $n' \in N'$. Isto é, a ação à esquerda de K' sobre E_1 coincide com a ação à direita de R_1 sobre E_1. Vamos mostrar que E_{1R_1} não é finitamente gerado.

Lembre que $\delta : {}_K K \longrightarrow {}_K N$ é um K-isomorfismo. Logo, a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \bar{\delta} : \quad {}_{K'}K' & \longrightarrow & {}_{K'}N' \\ \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 0 & \delta(k) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

é um K'-isomorfismo. Como K é corpo, temos que $N = {}_K < \delta(1_K) >$, de onde segue que $N' = {}_{K'} < \bar{\delta}(1_{K'}) >$.

Seja $f \in E_1$. Temos então que $f(\bar{\delta}(1)) = k'_0\bar{\delta}(1)$, para algum $k'_0 \in K'$. Então, dado $n' = k'\bar{\delta}(1) \in N'$, temos que $f(n') = f(k'\bar{\delta}(1)) = k'f(\bar{\delta}(1)) = k'(k'_0\bar{\delta}(1)) = (k'k'_0)\bar{\delta}(1) = (k'_0k')\bar{\delta}(1) = k'_0(k'\bar{\delta}(1)) = k'_0n'$. Isto é, f está definido pelo elemento $k'_0 \in K'$. Podemos ver que, por definição de R_1, todo elemento de R_1 está definido por algum $\sigma(k') \in \sigma(K)'$. Não é difícil verificar também que todo $k' \in K'$ define um elemento de E_1. Além disto, temos que se $f_1, f_2 \in E_1$ são definidas por k'_1 e k'_2, respectivamente, então, para todo $n' \in N'$, $f_1(f_2(n')) = f_1(k'_2n') = k'_1(k_2n') = (k'_1k'_2)n' = (k'_2k'_1)n' = k'_2(k'_1n') = f_2(k'_1n') = f_2(f_1(n'))$. Isto é, $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$. Então, E_1 é um anel comutativo.

Suponhamos que E_{1R_1} é finitamente gerado. Então existem $f_1, \ldots, f_t \in E_1$, definidos por $k'_1, \ldots, k'_t \in K'$, respectivamente, tais que, para todo $f \in E_1$:

$$f = f_1 \circ g_1 + \ldots + f_t \circ g_t, \quad \text{para alguns} \quad g_1, \ldots, g_t \in R_1.$$

Sejam $0 \neq k' \in K'$ e f o endomorfismo de ${}_{K'}N'$ definido pela correspondência $n' \longmapsto k'n'$. Então, $f = f_1 \circ g_1 + \ldots + f_t \circ g_t$, para alguns $g_1, \ldots, g_t \in R_1$. Logo, se $g_1, \ldots, g_t \in R_1$ são definidos por $\sigma(y'_1), \ldots, \sigma(y'_t) \in \sigma(K)'$ respectivamente, então temos que, para todo $n' \in N'$:

$$\begin{aligned} f(n') &= f_1(g_1(n')) + \ldots + f_t(g_t(n')) \\ &= f_1(\sigma(y'_1)n') + \ldots + f_t(\sigma(y'_t)n') \\ &= k'_1(\sigma(y'_1)n') + \ldots + k'_t(\sigma(y'_t)n') \\ &= (k'_1\sigma(y'_1) + \ldots + k'_t\sigma(y'_t))n'. \end{aligned}$$

Isto é, para todo $n' \in N'$, $k'n' = f(n') = (k'_1\sigma(y'_1) + \ldots + k'_t\sigma(y'_t))n'$. Daí segue que $(k' - (k'_1\sigma(y'_1) + \ldots + k'_t\sigma(y'_t)))n' = 0$, para todo $n' \in N'$. Então concluímos que $k' - (k'_1\sigma(y'_1) + \ldots + k'_t\sigma(y'_t) = 0$. Como $k' \in K'$ é arbitrário e $\sigma(y'_1) + \ldots + \sigma(y'_t) \in \sigma(K)'$, obtemos que K' é finitamente gerado sobre $\sigma(K')$, uma contradição.

Vimos que o anel R do Exemplo 2.2.9 é artiniano à esquerda, mas não é artiniano à direita. O primeiro lema da próxima subseção mostra que é suficiente que o anel R seja artiniano à esquerda e à direita para que E_i^{op} seja um R_i^{op}-módulo à direita finitamente gerado, para todo $i = 0, 1, \ldots$.

2.2.2 Anéis Artinianos

Nesta subseção nosso anel R é um anel artiniano com unidade.

Lema 2.2.10. *Com as mesmas notações dadas no início da subseção anterior, se o anel R for artiniano à esquerda e à direita então, para cada $i = 0, 1, \ldots$, E_i^{op} é um R_i^{op}-módulo finitamente gerado à direita.*

Antes de fazer a prova do Lema *2.2.10*, vejamos uma observação e uma proposição que usaremos na prova deste lema.

Observação 2.2.11. *V_i pode ser visto como um E_i^{op}-módulo à direita se em lugar de $f(v)$ escrevemos vf, para quaisquer $f \in E_i^{op}$ e $v \in V_i$. De fato, desta forma, para quaisquer $f, g \in E_i^{op}$ e $u, v \in V_i$, temos que:*

- $(u + v)f = uf + vf$;
- $v(f + g) = vf + vg$;
- $v(gf) = (vg)f$;
- $v1_{E_i^{op}} = v$.

Além disso, temos que V_i é um (R, E_i^{op})-bimódulo. De fato, dados $r \in R$ e $f \in E_i^{op}$ arbitrários, temos que

$$(rv)f = r(vf), \quad \textit{para todo} \quad v \in V_i.$$

Proposição 2.2.12. *Com as mesmas notações desta subseção, temos que:*

1. *E_i^{op} como E_i^{op}-módulo à direita é uma soma direta finita de cópias de V_i como E_i^{op}-módulo à direita;*
2. *V_i é simples como E_i^{op}-módulo à direita.*

Demonstração. 1. Como ${}_RM$ é simples, pela Proposição 1.3.5 segue que $M \cong R/I$ como R-módulos à esquerda, para algum ideal à esquerda maximal I de R. Como $V_i = \overset{t}{\underset{j=1}{\oplus}} M_j$ com $M_j \cong {}_RM$, segue que $V_i = \overset{t}{\underset{j=1}{\oplus}} {}_R\bar{R}_j$, com ${}_R\bar{R}_j = {}_R(R/I)$. Como $I \subseteq Ann_R(R/I)$, segue pela Proposição 1.1.2, que as ações à esquerda de R e R/I sobre R/I coincidem. Então, ${}_RV_i = {}_{R/I}V_i = \overset{t}{\underset{j=1}{\oplus}} {}_{R/I}\bar{R}_j$. Logo, $E_i = End({}_{R/I}V_i) = End\left(\overset{t}{\underset{j=1}{\oplus}} {}_{R/I}\bar{R}_j\right) = \mathbb{M}_t(R/I)$, isto é, E_i é o conjunto de todas as matrizes de ordem $t \times t$ com entradas no anel de divisão R/I. Vamos ver que a aplicação $\phi : V_i \longrightarrow E_i^{op}$ definida pela correspondência:

$$v = (\bar{r}_1, \quad \dots, \quad \bar{r}_t) \longmapsto \phi(v) = \begin{pmatrix} \bar{r}_1 & 0 & \dots & 0 \\ \bar{r}_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{r}_t & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

é um E_i^{op}-monomorfismo. É claro que ϕ é uma função injetora. Além disso, dados $v = (\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_t) \in V_i$ e $f = (\bar{r}_{jl}) \in E_i^{op}$, temos que:

$$\phi(vf) = \phi\left(f(v)\right) = \phi\left(\begin{pmatrix} \bar{r}_{11} & \dots & \bar{r}_{1t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{r}_{t1} & \dots & \bar{r}_{tt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{r}_1 \\ \vdots \\ \bar{r}_t \end{pmatrix}\right) = \phi\left(\begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{t} \bar{r}_{1j}\bar{r}_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{t} \bar{r}_{tj}\bar{r}_j \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{t} \bar{r}_{1j}\bar{r}_j & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{t} \bar{r}_{tj}\bar{r}_j & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{r}_{11} & \bar{r}_{12} & \dots & \bar{r}_{1t} \\ \bar{r}_{21} & \bar{r}_{22} & \dots & \bar{r}_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{r}_{t1} & \bar{r}_{t2} & \dots & \bar{r}_{tt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{r}_1 & 0 & \dots & 0 \\ \bar{r}_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{r}_t & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$= f \circ \phi(v) = \phi(v)f.$$

Não é difícil ver também que $\phi(v_1 + v_2) = \phi(v_1) + \phi(v_2)$, para todos $v_1, v_2 \in V_i$. Assim, ϕ é um E_i^{op}-monomorfismo, como queríamos mostrar.

Por outro lado, se E_{ik} é o E_i^{op}-módulo à direita formado por todas as matrizes coluna

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \bar{r}_{1k} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \bar{r}_{2k} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \bar{r}_{tk} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

temos que $E_{ik} \cong E_{i\bar{k}}$, para todos $k, \bar{k} = 1, \dots, t$, como E_i^{op}-módulos à direita. Como $E_i^{op} = \overset{t}{\underset{k=1}{\oplus}} E_{ik}$, obtemos que E_i como E_i^{op}-módulo é uma soma direta finita de cópias de V_i, como E_i^{op}-módulo à direita. Com isto completamos a prova do item 1.

2. Segue do fato que cada E_{ik}, $k = 1, \ldots, t$, é um E_i^{op}-submódulo simples de E_i^{op}, como E_i^{op}-módulo à direita, e do fato de que $V_i \cong E_{i1}$ como E_i^{op}-módulos à direita.

□

Agora estamos em condições de demonstrar o Lema 2.2.10.

Demonstração do Lema 2.2.10. Como R é artiniano à direita e $R = N^0 \supseteq N \supseteq \ldots \supseteq N^l = 0$, então $N^i{}_R$, $(N^i/N^{i+1})_R$ e V_{iR} também são artinianos à direita. Dado que $N \subseteq Ann(N^i/N^{i+1})_R$, pela Proposição 1.1.2, segue que as ações à direita dos anéis R e R/N sobre N^i/N^{i+1} coincidem. Como R/N é semissimples, $(N^i/N^{i+1})_R$ é semissimples e assim V_{iR} também o é. Como V_{iR} é semissimples e artiniano, temos pela Proposição 1.3.13, que V_{iR} é finitamente gerado.

Por definição, $R_i := \{f_r : V_i \longrightarrow V_i |\ f_r(v) = vr,\ r \in R\}$. Observamos que, para todo $x \in V_i$ e todos $r', r'' \in R$, $x(r'r'') = (xr')r'' = (xr')f_{r''} = (xf_{r'})f_{r''} = x(f_{r'}f_{r''})$, isto é, a ação à direita de R e R_i^{op} sobre V_i coincidem. Como V_{iR} é finitamente gerado, então também V_i é finitamente gerado como R_i^{op}-módulo à direita. Pelo item 1 da Proposição 2.2.12, temos que E_i^{op} como E_i^{op}-módulo à direita é uma soma direta finita de cópias do E_i^{op}-módulo à direita V_i. Como R_i^{op} é subanel de E_i^{op}, segue que E_i^{op} como R_i^{op}-módulo à direita também é uma soma direta finita de cópias de V_i como R_i^{op}-módulo à direita. Daí, pela Proposição 1.2.12, segue que E_i^{op} é finitamente gerado como R_i^{op}-módulo à direita.

□

A seguinte proposição é uma versão fraca da recíproca do Lema 2.2.10. Lembremos que fixando um R-módulo simples ${}_RM$ definimos o R-módulo V_i correspondente a ${}_RM$. Assim, os anéis $E_i = End({}_RV_i)$ e R_i, e seus respectivos anéis opostos, são também definidos a partir do R-módulo simples ${}_RM$, escolhido inicialmente.

Proposição 2.2.13. *Se para cada R-módulo à esquerda simples ${}_RM$ o módulo ${E_i^{op}}_{R_i^{op}}$, definido a partir de ${}_RM$, é finitamente gerado, para cada $i = 0, 1, \ldots, k$, então o anel R é artiniano à direita.*

Demonstração. Como o anel R/N é semissimples, também o módulo ${}_{R/N}(N^i/N^{i+1})$ é semissimples. Observamos que as ações à esquerda dos anéis R e R/N sobre N^i/N^{i+1} coincidem. Daí, segue que o módulo ${}_R(N^i/N^{i+1})$ é semissimples também. Assim, ${}_R(N^i/N^{i+1}) = \bigoplus\limits_{j\in J} S_j$, onde cada S_j é um submódulo simples de ${}_R(N^i/N^{i+1})$.

Como o anel R é artiniano à esquerda temos que para cada $i = 0, 1, \ldots, k$, o módulo ${}_R(N^i/N^{i+1})$ é artiniano à esquerda. Logo, isto implica que J tem que ser um conjunto finito. Então, ${}_R(N^i/N^{i+1}) = \bigoplus\limits_{j=1}^{q} S_j$. Assim, se $S'_1, \ldots, S'_p$ são todos os submódulos dois a dois não isomorfos da família $S_1, \ldots, S_q$, podemos definir as componentes homogêneas ${}_RV_{ij}$ do módulo ${}_R(N^i/N^{i+1})$, que correspondem a cada submódulo simples S'_j, $1 \leq j \leq q$. Daí, segue que ${}_R(N^i/N^{i+1}) = \bigoplus\limits_{j=1}^{p} {}_RV_{ij}$. Pela Proposição 2.2.3, temos que cada V_{ij} é um R-bimódulo. Desta forma, obtemos também que $(N^i/N^{i+1})_R = \left(\bigoplus\limits_{j=1}^{p} {}_RV_{ij}\right)_R$.

Vimos na prova do Lema 2.2.10 que as ações à direita dos anéis R e R_{ij}^{op} sobre V_{ij} coincidem, para cada $j = 1, \ldots, p$. Por outro lado, do item 1 da Proposição 2.2.12, temos que E_{ij}^{op} como E_{ij}^{op}-módulo à direita é uma soma direta finita de cópias do E_{ij}^{op}-módulo à direita V_{ij}. Logo, como R_{ij}^{op} é subanel de E_{ij}^{op}, segue que E_{ij}^{op} como R_{ij}^{op}-módulo à direita também é uma soma direta finita de cópias de V_{ij} como R_{ij}^{op}-módulo à direita. Por hipótese, para cada $j = 1, \ldots, p$, $(E_{ij}^{op})_{R_{ij}^{op}}$ é finitamente gerado. Então, pela Proposição 1.2.12, segue que V_{ij} é finitamente gerado como R_{ij}^{op}-módulo à direita e, assim, o módulo $(V_{ij})_R$ também é finitamente gerado. Portanto, para cada $i = 0, 1, \ldots, k$, o módulo $(N^i/N^{i+1})_R$ também é finitamente gerado.

Como R/N é anel semissimples, também temos que $(N^i/N^{i+1})_{R/N}$ é módulo semissimples. Logo, dado que $N \subseteq Ann_R(N^i/N^{i+1})_R$, segue pela Proposição *1.1.2*, que as ações à direita dos anéis R e R/N sobre N^i/N^{i+1} coincidem. Assim, $(N^i/N^{i+1})_R$ também é semissimples.

Temos então que $(N^i/N^{i+1})_R$ é finitamente gerado e semissimples para cada $i = 0, \ldots, k$. Daí, obtemos pela Proposição *1.3.13*, que para cada $i = 0, 1, \ldots, k$, $(N^i/N^{i+1})_R$ é artiniano à direita. Agora, como $(N^{k-1}/N^k)_R = (N^{k-1}/0)_R \cong (N^{k-1})_R$, segue que $(N^{k-1})_R$ é artiniano à direita. Logo, se $\rho : N^{k-1} \longrightarrow N^{k-2}$ é a inclusão e $\pi : N^{k-2} \longrightarrow N^{k-2}/N^{k-1}$ é a projeção canônica, temos que

$$0 \longrightarrow N^{k-1} \xrightarrow{\rho} N^{k-2} \xrightarrow{\pi} N^{k-2}/N^{k-1} \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata de R-módulos à direita. Daí, pela Proposição 1.2.11, obtemos que $(N^{k-2})_R$ é artiniano à direita. Logo, continuando com este processo de forma indutiva, obtemos que $N^0 = R$ é artiniano à direita. Assim concluímos a prova. $\square$

O seguinte teorema nos fornece informação sobre a imersão de um R-módulo à esquerda simples de comprimento finito num módulo injetivo de comprimento finito, quando R é um anel artiniano à esquerda e à direita.

Teorema 2.2.14. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *Existe um anel R artiniano à direita e à esquerda, que possui um R-módulo à esquerda simples que não é imerso num módulo injetivo de comprimento finito.*

2. *Existe um anel E simples e artiniano, à direita e à esquerda, com um subanel semissimples T que também é artiniano, à direita e à esquerda, e que contém a unidade de E, tal que E_T é finitamente gerado e ${}_TE$ não é finitamente gerado.*

Demonstração. $1 \Rightarrow 2$. Esta implicação é consequência do Teorema 2.2.7 e do Lema 2.2.10. De fato, se R é artiniano à direita, pelo Lema 2.2.10, E_i^{op} é um R_i^{op}-módulo à direita finitamente gerado. Por outro lado, se R é artiniano à esquerda, pelo Teorema 2.2.7, segue que um módulo ${}_RM$ simples é imerso em um módulo injetivo de comprimento finito se, e somente se, E_i^{op} é um R_i^{op}-módulo à esquerda finitamente gerado.

$2 \Rightarrow 1$. Sejam E e T como em *2.*

- **Passo 1.** Vamos construir o anel R.

  Seja N_E um E-módulo simples. Então, pela Proposição 1.3.15, $D = End(N_E)$ é um anel de divisão. Além disso, N_E é um D-módulo à esquerda com a ação dada por:

  $$dn := d(n), \quad \text{para quaisquer} \quad d \in D \quad \text{e} \quad n \in N_E.$$

  Como para todo $d \in D$, todo $n \in N_E$ e todo $e \in E$, tem-se $d(ne) = (dn)e$, segue que N é um (D, E)-bimódulo e em particular, é um (D, T)-bimódulo. Logo, pela Proposição 1.4.2, obtemos que

  $$R := \begin{pmatrix} D & N \\ 0 & T \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} d & n \\ 0 & t \end{pmatrix} : \ d \in D, \ n \in N, \ t \in T \right\}$$

é um anel com a soma e o produto usual de matrizes.

Vamos mostrar agora que R é artiniano à esquerda e artiniano à direita. Começamos provando que ${}_DN$ é um D-módulo simples. Fixando $n_0 \in N$ não nulo, temos $< n_0 >_E = N_E$ pois, N_E é simples. Logo, dado qualquer $n \in N$, existe $d_n \in D$ definido pela correspondência $n_0 \longmapsto n$. Isto é, para todo $n \in N$, existe $d_n \in D$ tal que $d_n n_0 = n$. Assim $N = {}_D < n_0 >$ e, como n_0 é arbitrário, isto significa que ${}_DN$ não tem D-submódulos distintos do 0 e N. Daí, concluímos que ${}_DN$ é simples.

Afirmamos que o anel R é artiniano à esquerda. De fato, como D é um anel de divisão, ${}_DN$ é simples e T é artiniano à esquerda, segue, pelo item 1 da Proposição 1.4.2, que R é artiniano à esquerda.

Afirmamos que o anel R é artiniano à direita. De fato, como N_E é simples e E_T é finitamente gerado, obtemos que N_T é finitamente gerado. Assim, como D é um anel de divisão e T é artiniano à direita, pelo item 2 da Proposição 1.4.2, segue que R é artiniano à direita.

- **Passo 2.** Vamos mostrar que existe um R-módulo à esquerda simples ${}_RM$ que não pode ser imerso em um módulo injetivo de comprimento finito.

  Começamos observando que se:

$$D' := \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \ d \in D \right\},$$

$$N' := \begin{pmatrix} 0 & N \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \ n \in N \right\},$$

$$T' := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} : \ t \in T \right\},$$

  temos que $D' \cong D$ como anéis, $N' \cong N$ como grupos e $T' \cong T$ como anéis. Também é fácil verificar que: a ação à esquerda de R sobre D' é a mesma de D' sobre D'; a ação à esquerda de R sobre N' é a mesma de D' sobre N'; a ação à direita de R sobre N' é a mesma de T' sobre N'; e a ação à direita de R sobre T' é a mesma de T' sobre T'.

  Vamos calcular agora o radical de Jacobson $J(R)$ do anel R. Por definição, $J(R)$ é a interseção de todos os ideais maximais à esquerda de R. Vamos ver como são os ideais maximais à esquerda de R. Usando a Proposição *1.4.2* podemos verificar que um ideal à esquerda de R

$$I := \begin{pmatrix} I_1 & I_2 \\ 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

é um ideal à esquerda maximal de R se, e somente se, $I_1 = D$, $I_2 = N$ e I_3 é ideal maximal à esquerda de T. Como T é semissimples e artinaino à esquerda, então $T = \bigoplus\limits_{l=1}^{q} T_l$, onde cada T_l é um T-submódulo simples à esquerda de T, ou um ideal minimal à esquerda de T. Podemos verificar que os ideais à esquerda de T dados por: $T_{l_1} \oplus \cdots \oplus T_{l_{q-1}}$, onde $T_{l_j} \in \{T_1, \ldots, T_q\}$, para cada $j = 1, \ldots, q-1$, são ideais maximais à esquerda de T. Como a interseção de estes ideais maximais à esquerda de T é nula, isto implica que a interseção de todos os ideais maximais à esquerda de T é nula. Daí, por definição do radical de Jacobson, segue que $J(R) = \begin{pmatrix} D & N \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ou $J(R) = N'$. Da Proposição 1.3.10 obtemos que $J(R)$ é um ideal nilpotente. Então só podemos ter $J(R) = N'$.

Agora vamos mostrar que o R-módulo ${}_RM = R/(T' \oplus N')$ é simples e não pode ser imerso em um R-módulo injetivo com comprimento finito. Já vimos acima que as ações à esquerda de R e D' sobre D' coincidem, e também vimos que $D' \cong D$ como anéis. Logo, como D é um anel de divisão e ${}_RM \cong {}_RD'$, obtemos que ${}_RM$ é simples.

Vimos que $J(R) = N'$. Agora, se definimos a ação à esquerda de D sobre N' por:

$$d\begin{pmatrix} 0 & n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 & dn \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{para quaisquer} \quad d \in D, n \in N,$$

temos que esta ação coincide com a ação à esquerda de D' sobre N'. Logo, como a função $\phi : {}_DN' \longrightarrow {}_DN$ definida pela correspondência $\begin{pmatrix} 0 & n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longmapsto n$ é um D-isomorfismo e ${}_DN$ é simples, obtemos que ${}_{D'}N'$ é simples. Logo, como as ações à esquerda de R e D' sobre N' coincidem, temos que ${}_RN' = {}_{D'}N'$. Portanto $J(R) = {}_RN'$ é simples.

Como $J(R) = {}_RN'$ é simples e $J(R)^2 = 0$ segue por definição de V_1, que $V_1 = {}_RN' = J(R)$. Vimos no paragrafo anterior que o módulo ${}_RN'$ tem a mesma estrutura do módulo ${}_DN$. Assim, podemos escrever $V_1 = {}_DN$. Daí, por definição, teríamos $E_1 = End({}_DN)$.

Por outro lado, definindo a ação à direita de T sobre N' por:

$$\begin{pmatrix} 0 & n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} t := \begin{pmatrix} 0 & nt \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{para quaisquer} \quad n \in N, t \in T,$$

temos que esta ação coincide com a ação à direita de T' sobre N'. Segue então que a função $\Theta : N'_T \longmapsto N_T$, definida pela correspondência $\begin{pmatrix} 0 & n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longmapsto n$, é um T-isomorfismo à direita. Além disso, dado que a ação á direita de R e T' sobre N' coincidem, temos que $N'_R = N'_{T'}$. Então temos que o módulo V_i, como R-módulo à direita, tem a mesma estrutura do módulo N_T. Assim, por definição de R_1, temos:

$$R_1 := \{f_t : {}_DN \longrightarrow {}_DN | \ \ f_t(n) = nt, \quad \text{para todos} \quad t \in T, \quad n \in N\}.$$

Agora, pelo Teorema 2.2.7, para provar que o módulo simples ${}_RM$ não é imerso num módulo injetivo de comprimento finito é suficiente mostrar que E_1 não é um R_1-módulo à direita finitamente gerado. Para isto, começamos provando que $E^{op} \cong End({}_DN)$ como anéis. De fato, temos que $\varphi : E^{op} \longrightarrow End({}_DN)$ definida pela correspondência $e \longmapsto \varphi(e)$ onde $\varphi(e)(n) = ne$, para todo $n \in N$, é um homomorfismo de anéis. Além disso:

(i) φ é injetora. Se $\varphi(e_1) = \varphi(e_2)$ então $ne_1 = ne_2$ para todo $n \in N$. Logo $n(e_1 - e_2) = 0$ para todo $n \in N$ e, como E é simples, então $e_1 = e_2$.

(ii) φ é sobrejetora. Observamos que N é um $End({}_DN)$-módulo à direita com a ação definida por $ng := g(n)$, para todo $n \in N$ e todo $g \in End({}_DN)$. Agora, seja $f \in End({}_DN)$. Fixando $n_0 \in N$ não nulo, como N_E é simples, temos $N =< n_0 >_E$. Assim, existe $e_0 \in E$ tal que $n_0 f = n_0 e_0$. Logo, como também ${}_D < n_0 >= N$, para todo $n \in N$, temos $nf = (dn_0)f = d(n_0 f) = d(n_0 e_0) = (dn_0)e_0 = ne_0 = \varphi(e_0)(n)$, isto é, $f = \varphi(e_0)$ e então φ é sobrejetora.

Na argumentação usada para mostrar que $E^{op} \cong End({}_DN)$, mostramos que todo D-endomorfismo $f \in E_1$ é definido por um elemento $e \in E$. Também vimos que, para cada elemento $e \in E$, a correspondência $n \longmapsto ne$ define um D-endomorfismo $f \in E_1$. Mais precisamente: $f \in E_1$ se, e somente se, existe um $e \in E$ tal que $f(n) = ne$, para todo $n \in N$.

Suponhamos agora que E_1 é um R_1-módulo à direita finitamente gerado. Neste caso, existem $f_1, \ldots, f_l \in E_1$, definidos por $e_1, \ldots, e_l \in E$ respectivamente, tais que, para qualquer $f \in E_1$, temos

$$f = f_1 \circ f_{t_1} + \cdots + f_l \circ f_{t_l}, \quad \text{onde}, \quad f_{t_1}, \ldots, f_{t_l} \in R_1.$$

Seja $e \in E$. Então existe $f \in E_1$ tal que $f(n) = ne$, para todo $n \in N$. Logo, para todo $n \in N$, temos:

$$\begin{aligned}
ne = f(n) &= f_1 \circ f_{t_1}(n) + \cdots + f_l \circ f_{t_l}(n) \\
&= f_1(nt_1) + \cdots + f_l(nt_l) \\
&= (nt_1)e_1 + \cdots + (nt_l)e_l \\
&= n(t_1e_1) + \cdots + n(t_le_l) \\
&= n(t_1e_1 + \cdots + t_le_l)
\end{aligned}$$

Assim, para todo $n \in N$, temos que $n\left(e - (t_1e_1 + \cdots + t_le_l)\right) = 0$. Daí, como $Ann_E(N_E)$ é um ideal de E e E é um anel simples, obtemos então que $e = t_1e_1 + \cdots + t_le_l$. Como e é arbitrário estamos mostrando que E_T é finitamente gerado, o que é um absurdo. Então E_1 não é um R_1-módulo finitamente gerado à direita e, portanto, ${}_RM$ não é imerso num módulo injetivo de comprimento finito.

$\square$

Definição 2.2.15. *Sejam A um anel e R um anel comutativo. Dizemos que A é uma R-álgebra, se A é um R-módulo tal que:*

$$r(a_1a_2) = (a_1r)a_2 = a_1(ra_2) = (a_1a_2)r, \quad \textit{para quaisquer} \ \ r \in R, \quad a_1, a_2 \in A.$$

Definição 2.2.16. *Seja R um anel. O centro de R é o conjunto*

$$\{r \in R : \ rx = xr \ \textit{para todo} \ x \in R\}.$$

Lema 2.2.17. *Sejam $\mathcal{Z}$ um anel comutativo e E uma $\mathcal{Z}$-álgebra finitamente gerada. Seja R um subanel de E noetheriano à direita com a mesma unidade de E. Se E é um R-módulo à direita finitamente gerado, então E também é um R-módulo à esquerda finitamente gerado.*

Demonstração. Temos que $\mathcal{Z}R \subseteq E$ é um R-submódulo de E_R. Como R é anel noetheriano à direita e E_R é finitamente gerado segue, pela Proposição *1.3.7*, que E_R também é noetheriano. Logo, como todo submódulo de um módulo noetheriano é noetheriano, obtemos que $(\mathcal{Z}R)_R$ é noetheriano. Dado que um módulo é noetheriano se, e somente se, todos os seus submódulos são finitamente gerados, obtemos que $(\mathcal{Z}R)_R$ é finitamente gerado. Assim, temos que

$$\mathcal{Z}R = z_1R + \ldots + z_tR = Rz_1 + \cdots + Rz_t$$

com $z_1, \ldots, z_t \in \mathcal{Z}$; isto é, ${}_R(\mathcal{Z}R)$ também é finitamente gerado.

Agora, por hipótese, ${}_{\mathcal{Z}}E$ é finitamente gerado. Assim, existem $e_1, \ldots, e_n \in E$ tais que, para todo $x \in E$,

$$x = \sum_{i=1}^{n} z_i e_i = \sum_{i=1}^{n} z_i(1_E e_i) = \sum_{i=1}^{n} (z_i 1_E) e_i, \quad \text{para alguns} \quad z_1, \ldots, z_n \in \mathcal{Z}.$$

Como $1_E \in R$, segue que $z_i 1_E \in \mathcal{Z}R$. Logo, ${}_{\mathcal{Z}R}E$ é finitamente gerado e, como ${}_R(\mathcal{Z}R)$ é finitamente gerado, então ${}_RE$ é finitamente gerado. □

Teorema 2.2.18. *Sejam R um anel artiniano à direita e à esquerda, ${}_RM$ um R-módulo simples e U o anulador de ${}_RM$ em R. Se $R' = R/U$ é finitamente gerado sobre o seu centro, então $\ell_R\,(E(M)) < \infty$.*

Antes de provar o teorema vamos fazer algumas observações mantendo as notações do Teorema 2.2.18.

Observações 2.2.19. *1. Como $R'U = 0 = MU$, segue pela Proposição 1.1.2, que as ações à esquerda de R sobre R' e M são as mesmas de R' sobre R' e M. Assim, como ${}_RM$ é simples, também ${}_{R'}M$ o é. Além disso, temos que*

$$\begin{array}{rcl} \psi : \ {}_{R'}R' & \longrightarrow & {}_{R'}M \ = \ {}_{R'}< m_0 > \\ x + U & \longmapsto & \psi(x+U) = (x+U)m_0 = xm_0 \end{array}$$

é um R'-isomorfismo de módulos. De fato, para todos $x+U, y+U \in R'$, temos: que $x+U = y+U$ se, se somente se, $x - y \in U$, e somente se, $(x-y)m_0 = 0$ se, e somente se, $\psi(x) = xm_0 = ym_0 = \psi(y)$. Isto é, ψ está bem definida e é injetora. Também $\psi[(x+U)+(y+U)] = [(x+U)+(y+U)]m_0 = (x+U)m_0+(y+U)m_0 = \psi(x+U) + \psi(y+U)$. Logo, ψ é um homomorfismo de grupos. Como $\psi[(x+U)(y+U)] = [(x+U)(y+U)]m_0 = (x+U)[(y+U)m_0] = (x+U)\psi(y+U)$, então ψ é um R'-homomorfismo à esquerda. Por último, dado $m \in M$, existe $x + U \in R'$ tal que $m = (x+U)m_0 = \psi(x+U)$, isto é, ψ é sobrejetor.

2. *Com as mesmas notações do Teorema 2.2.7, temos pela Proposição 2.2.2 que* $V_i = \overset{t}{\underset{j=1}{\oplus}} M_j$ *onde* M_j *é* R*-submódulo de* ${}_R(N^i/N^{i+1})$ *e* $M_j \cong {}_R M$*. Vimos no item 1 acima que* ${}_{R'}R' \cong {}_{R'}M = {}_R M$*. Logo, obtemos então que* ${}_R V_i = {}_{R'} V_i \cong \overset{t}{\underset{j=1}{\oplus}} {}_{R'}R'_j$ *sendo* $R'_j \cong R'$*, para todo* j*.*

3. *Novamente, com as mesmas notações do Teorema 2.2.7, da Proposição 1.1.10 e item 1 acima segue que:*

$$E_i = End({}_{R'}V_i) \cong End\left(\overset{t}{\underset{j=1}{\oplus}} {}_{R'}R'_j\right) = \overset{t}{\underset{j=1}{\oplus}} \left(\overset{t}{\underset{l=1}{\oplus}} End({}_{R'}R'_{lj})\right).$$

Então, E_i *é isomorfo ao anel de matrizes* $\mathbb{M}_t\left(End({}_{R'}R')\right)$*. Logo, pela Proposição 1.1.12,* $R'^{op} \cong End({}_{R'}R')$ *é um isomorfismo de anéis. Assim, fazendo um abuso de notação, podemos escrever* $E_i = \mathbb{M}_t(R'^{op})$*.*

4. *Sejam* $\mathcal{Z}$ *o centro do anel* E_i *e* C *o centro do anel* R'*. É claro que* C *também é o centro de* R'^{op}*. Vamos determinar o centro de* $E_i = \mathbb{M}_t(R'^{op})$*.*

   Se $(c_{xs}) \in \mathcal{Z}$*, então para toda matriz elementar* E_{pp} [3]*, devemos ter* $(c_{xs})(E_{pp}r) = (E_{pp}r)(c_{xs})$ *para todo* $r \in R'$*. Como*

$$(c_{xs})(E_{pp}r) = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{t1} & \dots & c_{tt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & r & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \dots & c_{1p}r & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & c_{pp}r & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & c_{tp}r & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

   e, por outro lado

$$(E_{pp}r)(c_{xs}) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & r & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{t1} & \dots & c_{tt} \end{pmatrix}$$

[3] A matriz elementar E_{pq} é a matriz com $1_{R'}$ na entrada pq e 0 em todas as outras entradas.

$$= \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ rc_{p1} & \dots & rc_{pp} & \dots & rc_{pt} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

observamos que a igualdade $(c_{xs})(E_{pp}r) = (E_{pp}r)(c_{xs})$ vale se, e somente se, $rc_{pp} = c_{pp}r$ e $rc_{pj} = c_{jp}r = 0$ para $j \neq p$, $j = 1, \dots, t$. Como isto vale para todo $p = 1, \dots, t$ e todo $r \in R'$, concluímos que

$$\left\{ \begin{pmatrix} c & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & c \end{pmatrix} = \mathbb{I}_t c : \; c \in C \right\} \supseteq \mathcal{Z}.$$

Por outro lado, como para toda matriz $(a_{xs}) \in E_i = \mathbb{M}_t(R'^{op})$ vale que $(a_{xs})\mathbb{I}_t c = \mathbb{I}_t c(a_{xs})$, temos que

$$\left\{ \begin{pmatrix} c & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & c \end{pmatrix} = \mathbb{I}_t c : \; c \in C \right\} \subseteq \mathcal{Z}.$$

5. *Uma das hipóteses do Teorema 2.2.18 é que $R' =< r_1, \dots, r_n >_C$. Vamos ver que se $\mathbb{B} := \{r_k E_{pq} : \; E_{pq}$ é matriz elementar e $r_k \in \{r_1, \dots, r_n\}\}$ então $E_i =< \mathbb{B} >_{\mathcal{Z}}$, isto é, E_i é finitamente gerado sobre seu centro $\mathcal{Z}$.*

   Seja $(m_{sl}) \in E_i = \mathbb{M}_t(R'^{op})$. Então

$$(m_{sl}) = \sum_{s=1}^{t}\sum_{l=1}^{t} m_{sl}E_{sl} = \sum_{s=1}^{t}\sum_{l=1}^{t} E_{sl}(\mathbb{I}m_{sl}).$$

   Agora, como $m_{sl} \in R'^{op}$, então $m_{sl} \in R'$. Assim, $m_{sl} = \sum_{j}^{n} r_j c_{slj}$ com $c_{slj} \in C$. Logo,

$$(m_{sl}) = \sum_{s=1}^{t}\sum_{l=1}^{t} E_{sl}(\mathbb{I}m_{sl}) = \sum_{s=1}^{t}\sum_{l=1}^{t}\sum_{j=1}^{n} r_j E_{sl}(\mathbb{I}c_{slj}).$$

   Logo, como $\mathbb{I}c_{slj} \in \mathcal{Z}$, obtemos o que queríamos mostrar, que E_i é finitamente gerado sobre o seu centro $\mathcal{Z}$.

Agora estamos aptos para apresentar a prova do Teorema 2.2.18.

Demonstração do Teorema 2.2.18 Como R é artiniano à direita e à esquerda, segue pelo Lema 2.2.10 que ${E_i^{op}}_{R_i^{op}}$ é finitamenge gerado. Vimos no item 5 da

Observação 2.2.19 que E_i é finitamente gerado sobre seu centro $\mathcal{Z}$, logo também E_i^{op} é finitamente gerado sobre seu centro $\mathcal{Z}$. Observamos que falta mostrar que R_i^{op} é noetheriano à direita para aplicar o Lema 2.2.17 e obter que ${}_{R_i^{op}}E_i^{op}$ é finitamente gerado.

Temos que a aplicação $\varphi : R \longrightarrow {R_i}^{op}$ definida pela correspondência $r \longmapsto f_r$, onde $f_r(v) = vr$ para todo $v \in V_i$, é um homomorfismo de anéis sobrejetor. Como R é artiniano à direita, segue que ${R_i}^{op}$ também é artiniano à direita. Pela Proposição 2.2.6, temos que R_i é semissimples. Assim R_i^{op} é semissimples e artiniano à direita e então, pela Proposição 1.3.13, segue que R_i^{op} é noetheriano à direita.

Daí, pelo Teorema 2.2.17, obtemos que ${}_{R_i^{op}}E_i^{op}$ é finitamente gerado. Logo, pelo Teorema 2.2.7, segue que ${}_RM$ é imerso num R-módulo à esquerda injetivo com comprimento finito. Por último, pela Proposição 2.1.1, segue que $\ell_R(E(M)) < \infty$; como queríamos mostrar.

$\square$

Capítulo 3

π-V-Anéis

Em [14] Michler e Villamayor caraterizaram os anéis sobre os quais todo módulo simples é injetivo. Posteriormente estes anéis foram chamados de V-Anéis em homenagem a Villamayor. Neste capítulo apresentamos uma generalização, para tais anéis. Mais precisamente, vamos estudar a caracterização dada por Hirano em [8] para os anéis sobre os quais cada módulo à esquerda, de comprimento finito, tem fecho injetivo de comprimento finito. Além disso, vamos ver que as extensões normais finitas destes anéis também têm esta propriedade [17].

3.1 Caracterização e propriedades dos π-V-anéis

Definição 3.1.1. *Seja R um anel. Então:*

1. *R é chamado π-V-anel à esquerda (resp. à direita) se, para cada R-módulo à esquerda (resp. à direita) simples M, o fecho injetivo $E(M)$ tem comprimento finito;*

2. *R é um n-V-anel à esquerda (resp. à direita) se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que, para cada R-módulo à esquerda (resp. à direita) simples M, $\ell_R(M) \leq n$.*

Lembrando que um anel R é um V-anel à esquerda (resp. à direita) se cada R-módulo à esquerda (resp. à direita) simples é injetivo, segue que um V-anel é um caso particular dos n-V-anéis, pois um 1-V-anel é justamente um V-anel. Também vemos que os n-V-anéis são um caso particular dos π-V-anéis.

Exemplo 3.1.2. *Sejam R um anel artiniano comutativo, A uma R-álgebra finito* *dimensional e M um A-módulo à esquerda simples. Então $k = A/U$, onde $U = Ann_A(M)$, é um anel de divisão finito dimensional sobre seu centro. Daí, segue do Teorema 2.2.18 que A é um π-V-anel. Em particular, se K é um corpo, então toda K-álgebra finito dimensional é um π-V-anel.*

No seguinte resultado apresentamos uma caracterização para os π-V-anéis à esquerda.

Teorema 3.1.3. *As seguintes condições são equivalentes para um anel R:*

1. *R é um π-V-anel à esquerda;*
2. *Cada R-módulo à esquerda M de comprimento finito tem um fecho injetivo de comprimento finito;*
3. *Para cada R-módulo à esquerda M, a interseção de todos os submódulos N de M tais que $\ell_R(M/N) < \infty$, é nula.*

Demonstração. (1) $\Leftrightarrow$ (2). De fato, o sentido (1) $\Leftarrow$ (2) é consequência da Proposição 2.1.1. Por outro lado, é claro que (2) $\Rightarrow$ (1).

(1) $\Rightarrow$ (3). Seja ω o uma classe irredundante de representantes da família de todos os R-módulos à esquerda simples e ${}_R\boldsymbol{M}$ a família de todos os R-módulos à esquerda. Pela Proposição 1.7.1,

$$C = \bigoplus_{T\in\omega} E(T)$$

é um cogerador de ${}_R\boldsymbol{M}$. Assim, dado um R-módulo à esquerda ${}_RM$, existe um R-monomorfismo

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} \prod_{\alpha\in A} C_\alpha, \quad \text{com} \quad C_\alpha = C, \quad \text{para todo} \quad \alpha \in A.$$

Para α' e T' fixos, sejam $p_{\alpha'}$ a projeção $\prod_{\alpha\in A} C_\alpha \xrightarrow{p_{\alpha'}} C_{\alpha'}$, e $p_{\alpha',T'}$ a projeção $\bigoplus_{T\in\omega} E(T) \xrightarrow{p_{\alpha',T'}} E(T')$. Assim, para cada $\alpha \in A$ e cada $T \in \omega$,

$$p_{\alpha,T} \circ p_\alpha \circ f : M \longrightarrow E(T) \quad \text{é um } R\text{-homomorfismo.}$$

Logo, pelo Teorema de R-homomorfismos, para cada $\alpha \in A$ e cada $T \in \omega$, existe um único R-monomorfismo

$$\varphi : M/Ker(p_{\alpha,T} \circ p_\alpha \circ f) \longrightarrow E(T).$$

Daí, como R é π-V-anel, então $M/Ker(p_{\alpha,T} \circ p_\alpha \circ f)$ tem comprimento finito. Como para qualquer composição de R-homomorfismos $h \circ g$, $Ker(h \circ g) = g^{-1}(Ker(h))$ e, para todo $\alpha \in A$ e todo $T \in \omega$, $\bigcap\limits_{\alpha \in A} Ker(p_\alpha) = 0$ e $\bigcap\limits_{T \in \omega} Ker(p_{\alpha,T}) = 0$, temos:

$$\begin{aligned}
\bigcap_{\alpha \in A, T \in \omega} Ker(p_{\alpha,T} \circ p_\alpha \circ f) &= \bigcap_{\alpha \in A, T \in \omega} f^{-1}[Ker(p_{\alpha,T} \circ p_\alpha)] \\
&= f^{-1}\left[\bigcap_{\alpha \in A, T \in \omega} p_\alpha^{-1}(Ker(p_{\alpha,T}))\right] \\
&= f^{-1}\left[\bigcap_{\alpha \in A} p_\alpha^{-1}(\bigcap_{T \in \omega} p_{\alpha,T})\right] \\
&= f^{-1}\left[\bigcap_{\alpha \in A} p_\alpha^{-1}(0)\right] \\
&= f^{-1}\left[\bigcap_{\alpha \in A} Ker(p_\alpha)\right] \\
&= f^{-1}(0) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Como $\{Ker(p_{\alpha,T} \circ p_\alpha \circ f) : \ \alpha \in A, \ \ T \in \omega\}$ é uma subfamília da família de todos os R-módulos à esquerda N de M tais que $\ell_R(M/N) < \infty$, concluímos que vale *(3)*.

(1) $\Leftarrow$ (3). Seja T um R-módulo simples à esquerda. Por hipótese, a interseção de todos os R-submódulos N de $E(T)$, tal que $\ell_R(E(T)/N) < \infty$, é nula. Logo, como T é simples, existe um submódulo U de $E(T)$ tal que $\ell_R(E(T)/U) < \infty$ e $U \cap T = 0$. Mas como $T \subseteq_e E(T)$, então $U = 0$. Assim $\ell_R(E(T)) < \infty$ e, portanto, R é um π-V-anel. □

O seguinte teorema é uma versão do Teorema 3.1.3 para n-V-anéis. A prova é análoga e portanto será omitida.

Teorema 3.1.4. *Seja n um inteiro positivo. Então as seguintes condições são equivalentes para um anel R:*

1. *R é um n-V-anel à esquerda;*

2. *Para cada R-módulo à esquerda M, a interseção de todos os submódulos N de M tais que $\ell_R(M/N) \leq n$ é nula.*

Corolário 3.1.5. *Se R é um π-V-anel à esquerda, o radical de Jacobson $J(R)$ é T-nilpotente à esquerda.*

Demonstração. Seja M um R-módulo à esquerda não nulo. Como R é π-V-anel, do Teorema *3.1.3* segue que existe um R-submódulo $N \subset M$ tal que $\ell_R(M/N) < \infty$. Logo, existe uma sequência de composição para o R-módulo M/N:

$$0 = M_0/N \subset M_1/N \subset \cdots \subset M_r/N = M/N.$$

Assim, temos que não existem R-módulos entre os módulos M_{r-1}/N e M/N. Logo, isto implica também que $M_{r-1} \subset M$ e que não existem R-módulos entre M_{r-1} e M. Em outras palavras, provamos que, se R é π-V-anel, todo R-módulo à esquerda M não nulo, tem um submódulo maximal.

Por outro lado, temos que para todo R-módulo à esquerda N de M, este é submódulo maximal de M se, e somente se, M/N é um R-módulo simples se, e somente se, existe um ideal maximal I de R tal que $M/N \cong R/I$ como R-módulos à esquerda.

Assim, para todo R-módulo à esquerda M não nulo e todo submódulo maximal N de M, $(J(R)M)/N = J(R)(M/N) = 0 \neq M/N$. Daí, temos que $J(R)M \neq M$, de onde segue pelo Lema 1.8.8 que $J(R)$ é T-nilpotente. □

Proposição 3.1.6. *Seja R um π-V-anel. Se, a menos de isomorfismo, só existe uma quantidade finita de R-módulos simples, então o radical de Jacobson $J(R)$ é nilpotente.*

Demonstração. Seja ${}_RB$ um R-módulo simples qualquer. Então, pela Proposição 1.3.5, existe um ideal maximal I de R, tal que $B \cong R/I$ como R-módulos à esquerda. Assim obtemos que $J(R)B = 0$. Como ${}_RB$ é arbitrário, segue que $J(R)$ anula todos os R-módulos simples à esquerda.

Agora, seja C um R-módulo tal que $\ell_R(C) = n$. Então, como $J(R)C$ é um R-submódulo à esquerda de C e $J(R)$ anula todos os R-submódulos simples de C, obtemos que $\ell_R(J(R)C) < \ell_R(C)$. Logo, repetindo uma vez mais este processo, obtemos que $\ell_R(J(R)^2C) < \ell_R(J(R)C)$. Assim, depois de repetir este processo no máximo n vezes, segue que $\ell_R(J(R)^nC) = 0$, isto é, ${}_RJ(R)^nC = 0$. Mostramos assim que, para cada R-módulo ${}_RC$ com comprimento finito, existe um inteiro positivo n tal que $J(R)^n$ anula ${}_RC$.

Como só existe uma quantidade finita de R-módulos simples à esquerda não isomorfos, também existe só uma quantidade finita de fechos injetivos de R-módulos simples à esquerda, não isomorfos. Sejam $E(B_1), \cdots, E(B_m)$ todos estes fechos injetivos, não isomorfos, de R-módulos simples à esquerda. Como R é um π-V-anel, cada um destes fechos injetivos tem comprimento finito. Assim, para cada $i = 1, \cdots, m$, existe n_i tal que $J(R)^{n_i}E(B_i) = 0$. Logo, se $n' = max\{n_1, \cdots, n_m\}$, segue que $J(R)^{n'}$ anula todos os módulos $E(B_i)$, isto é, $J(R)^{n'}$ anula todos os fechos injetivos de R-módulos simples à esquerda. Daí, aplicando o Lema 1.5.15, segue que $J(R)^{n'} = 0$, isto é, $J(R)$ é nilpotente. □

Proposição 3.1.7. *Seja R um anel comutativo com unidade e I um ideal maximal de R. Então o fecho injetivo $E(R/I)$, do R-módulo simples R/I, tem comprimento finito se, e somente se, R_I é um anel artiniano.*

Demonstração. Assumimos que $\ell_R(E(R/I)) < \infty$. Logo, pelo item 4 do Lema 1.8.5, segue que também $\ell_{R_I}(E(R/I)) < \infty$. Como I é ideal maximal de R, segue pela Proposição 1.8.4, que R_I tem um único ideal maximal $\mathfrak{m}$. Daí, pela Proposição 1.3.5, todo R_I-módulo simples é isomorfo ao R_I-módulo simples $R_I/\mathfrak{m}$. Pelo item 2 do Lema 1.8.5, temos que R/I é simples como R_I-módulo. Então todo R_I-módulo simples é isomorfo ao R_I-módulo simples R/I.

Como $\ell_R(E(R/I)) < \infty$ e todo R_I-módulo simples é isomorfo ao R_I-módulo simples R/I, temos que R_I é um π-V-anel. Como todos os fechos injetivos de R_I-módulos simples são isomorfos ao fecho injetivo $E(R/I)$, segue pela Proposição 3.1.6, que o radical de Jacobson $J(R_I)$ é nilpotente. Como o único ideal maximal de R_I é $\mathfrak{m}$, temos $J(R_I) = \mathfrak{m}$. Logo, existe um inteiro positivo k tal que $R_I = \mathfrak{m}^0 \supseteq \mathfrak{m} \supseteq \ldots \supseteq \mathfrak{m}^k = 0$. Como $\mathfrak{m}(\mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}) = 0$, para cada $i = 0, \ldots, k-1$, segue pela Proposição 1.1.2 que as ações dos anéis $R_I/\mathfrak{m}$ e R_I sobre cada quociente $\mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}$, coincidem. Como $R_I/\mathfrak{m}$ é um corpo, em particular, $R_I/\mathfrak{m}$ é um anel semissimples. Daí, cada quociente $\mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}$ também é um R_I-módulo semissimples. Então, para cada $i = 0\dots,k-1$,

$$\mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1} = \bigoplus_{l\in L_i} {}_{R_I}M_{il}, \quad \text{onde} \quad {}_{R_I}M_{il} \cong {}_{R_I}R/I.$$

Agora, pela Proposição 1.1.10, temos

$$Hom_{R_I}(\mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}, R/I) = \prod_{l\in L_i} Hom_{R_I}(M_{il}, R/I).$$

Como o socle do R_I-módulo R/I é ele mesmo, os quocientes $\mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}$ são R_I-módulos semissimples e $\ell_{R_I}(E(R/I)) < \infty$, obtemos pelo Lema 2.1.5, que $Hom_{R_I}(\mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}, R/I)$ tem comprimento finito para cada $i = 0,\dots,k-1$. Daí segue que cada conjunto de índices L_i é finito. Então, para cada $i = 0,\dots,k-1$, temos

$$\mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1} = \bigoplus_{l=1}^{t_i} {}_{R_I}M_{il}, \quad \text{onde} \quad {}_{R_I}M_{il} \cong {}_{R_I}R/I.$$

Como cada R_I-módulo M_{il} é finitamente gerado, pois é simples, segue pela Proposição 1.2.12 que cada quociente $\mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}$ é um R_I-módulo finitamente gerado. Como cada quociente $\mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}$ é um R_I-módulo semissimples, obtemos pela Proposição 1.3.13 que cada quociente $\mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}$ é um R_I-módulo artiniano.

Logo, como $\mathfrak{m}^k = 0$, temos que $\mathfrak{m}^{k-1}$ é artiniano. Agora, se $\rho : \mathfrak{m}^{k-1} \longrightarrow \mathfrak{m}^{k-2}$ é a inclusão e $\pi : \mathfrak{m}^{k-2} \longrightarrow \mathfrak{m}^{k-2}/\mathfrak{m}^{k-1}$ é a projeção canônica, obtemos a seguinte sequência exata de R_I-módulos:

$$0 \longrightarrow \mathfrak{m}^{k-1} \xrightarrow{\rho} \mathfrak{m}^{k-2} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{m}^{k-2}/\mathfrak{m}^{k-1} \longrightarrow 0.$$

Daí, pela Proposição 1.2.11, segue que $\mathfrak{m}^{k-2}$ é artiniano. Continuando com este processo de forma indutiva, obtemos que $\mathfrak{m}^0 = R_I$ é artiniano, como queríamos mostrar.

Vamos mostrar a implicação recíproca, para isto assumimos que R_I é um anel artiniano. Temos que R/I é um R_I-módulo simples com anulador $Ann_{R_I}(R/I) = \mathfrak{m}$, pois $R_I/\mathfrak{m} \cong R/I$ como R_I-módulos. Como R_I é comutativo e $\mathfrak{m}$ é um ideal maximal de R_I, temos que $R_I/\mathfrak{m}$ é um corpo. Então, o centro de $R_I/\mathfrak{m}$ é ele mesmo e assim, obtemos que $R_I/\mathfrak{m}$ é finitamente gerado sobre seu centro. Logo, pelo Teorema 2.2.18, temos que o fecho injetivo ${}_{R_I}E(R/I)$ tem comprimento finito. Daí segue, pelo item 4 do Lema 1.8.5, que o fecho injetivo ${}_RE(R/I)$ também tem comprimento finito. $\square$

Uma consequência da Proposição 3.1.7 é o seguinte resultado.

Corolário 3.1.8. *Um anel comutativo R é um π-V-anel se, e somente se, R_I é artiniano para qualquer ideal maximal I de R.*

Finalizamos esta seção com dois resultados que mostram algumas propriedades dos ideais à esquerda dos n-V-anéis.

Proposição 3.1.9. *Seja R um n-V-anel à esquerda. Para qualquer ideal à esquerda I de R se tem $I^n = I^{n+1}$.*

Demonstração. Seja $I \neq R$ um ideal à esquerda de R. Suponhamos que $I^n \supsetneq I^{n+1}$. Pelo Teorema 3.1.4 a interseção de todos os submódulos N do R-módulo à esquerda $M = R/I^{n+1}$ tais que $\ell_R(M/N) \leq n$, é nula. Então existe um ideal à esquerda L de R tal que $N' = L/I^{n+1}$, $I^n \nsubseteq L$ e $\ell_R(M/N') \leq n$. Como

$$R/L \cong \frac{R/I^n}{R/L} = M/N$$

temos que $\ell_R(R/L) \leq n$.

Considerando que $R = I^0$, se $I^i + L = I^{i+1} + L$ para algum $i = 0, \dots, n-1$, então $I^n \subseteq I^{n-i}(I^i + L) \subseteq I^{n+1} + L = L$, o que é uma contradição. Segue então que $I^{i+1} + L \subsetneq I^i + L$ para todo $i = 0, \dots, n$. Logo, para todo $i = 0, \dots, n$, temos que

$$\ell_R\left(\frac{M}{(I^i + L)/I^{n+1}}\right) < \ell_R\left(\frac{M}{(I^{i+1} + L)/I^{n+1}}\right);$$

e como

$$\frac{M}{(I^i + L)/I^{n+1}} = \frac{R/I^{n+1}}{(I^i + L)/I^{n+1}} \cong R/(I^i + L),$$

então

$$\ell_R\left(\frac{M}{(I^i + L)/I^{n+1}}\right) = \ell_R\left(R/(I^i + L)\right).$$

Assim, obtemos que

$$0 = \ell_R\left(\frac{R}{R + L}\right) < \ell_R\left(\frac{R}{I + L}\right) < \cdots < \ell_R\left(\frac{R}{I^{n+1} + L}\right) = \ell_R\left(\frac{R}{L}\right),$$

de onde segue que $\ell_R\left(\frac{R}{L}\right) \geq n+1$, uma contradição, pois $\ell_R(R/L) \leq n$. Portanto, $I^n = I^{n+1}$. $\square$

Como consequência da Proposição 3.1.9 segue o seguinte corolário.

Corolário 3.1.10. *Se o anel R é um n-V-anel à esquerda, então $J(R)^n = 0$.*

Demonstração. Pela Proposição 3.1.9, temos que $J(R)^n = J(R)^{n+1}$. Além disso, pelo Corolário 3.1.5, segue que $J(R)$ é T-nilpotente. Logo, pelo Lema 1.8.8, concluímos que $J(R)^n = 0$. $\square$

3.2 Extensões Normais Finitas

Definição 3.2.1. *Sejam R e E anéis. Dizemos que o anel E é uma extensão normal finita do anel R, se R é subanel de E e além disso*

$$E = \sum_{j=1}^{k} e_j R, \quad \text{com} \quad e_j R = R e_j \quad \text{para cada} \quad j = 1, \ldots, k.$$

Exemplo 3.2.2. *Seja R um anel com unidade. Então:*

1. *O anel de matrizes quadradas $\mathbb{M}_n(R)$ com entradas no anel R é uma extensão normal finita do anel R. Pois neste caso:*

$$\mathbb{M}_n(R) = \sum_{1 \leq p,q \leq n} E_{pq} R, \quad \text{e} \quad E_{pq} R = R E_{pq} \quad \text{para todos} \quad p, q = 1, \ldots, n.$$

2. *Se G é um grupo finito, então o anel de grupo RG é uma extensão normal finita do anel R.*

No seguinte teorema mostramos que uma extensão normal finita arbitrária de um π-V-anel à esquerda é um π- V-anel à esquerda.

Teorema 3.2.3. *Seja E uma extensão normal finita de um anel R. Se R é um π-V-anel à esquerda, então E também o é.*

Antes de provar o Teorema 3.2.3, vamos mostrar um resultado auxiliar que será muito útil.

Lema 3.2.4. *Sejam $E = \sum_{j=1}^{k} e_j R$ uma extensão normal finita do anel R, ${}_E M$ um módulo e ${}_R N$ um submódulo de ${}_R M$. Então,*

1. *O conjunto $e_j^{-1} N := \{m \in M |\ e_j m \in N\}$ é um R-submódulo de ${}_R M$.*

2. A aplicação

$$\begin{aligned}\phi : M/e_j^{-1}N &\longrightarrow M/N\\ m+e_j^{-1}N &\longmapsto e_jm+N\end{aligned}$$

é um monomorfismo de grupos.

3. A aplicação ϕ induz uma imersão reticular dos submódulos do R-módulo à esquerda $M/e_j^{-1}N$ nos submódulos do R-módulo à esquerda M/N, isto é, se ${}_RP \subsetneq {}_RL$ são submódulos de $M/e_j^{-1}N$, então $\phi({}_RP) \subsetneq \phi({}_RL)$ são submódulos de M/N.

Demonstração. 1. Não é difícil ver que $e_j^{-1}N$ é R-submódulo à esquerda de M.

2. Temos que ϕ é uma função injetora pois, para quaisquer $m_1, m_2 \in M$, temos $m_1 + e_j^{-1}N = m_2 + e_j^{-1}N$ se, e somente se, $(m_1 - m_2) \in e_j^{-1}N$ se, e somente se, $e_j(m_1 - m_2) \in N$ se, e somente se, $\phi(m_1 + e_j^{-1}N) = e_jm_1 + N = e_jm_2 + N = \phi(m_2 + e_j^{-1}N)$. Além disso, ϕ é um homomorfismo de grupos. De fato, para quaisquer $m_1, m_2 \in M$, temos:

$$\begin{aligned}\phi\left[(m_1 + e_j^{-1}N) + (m_2 + e_j^{-1}N)\right] &= \phi\left[(m_1 + m_2) + e_j^{-1}N\right]\\ &= e_j(m_1 + m_2) + N\\ &= (e_jm_1 + N) + (e_jm_2 + N)\\ &= \phi\left(m_1 + e_j^{-1}N\right) + \phi\left(m_2 + e_j^{-1}N\right).\end{aligned}$$

3. Seja ${}_RQ$ um submódulo arbitrário de $M/e_j^{-1}N$. Como ϕ é monomorfismo de grupos, segue que $\phi(Q)$ é um subgrupo abeliano de M/N. Além disso, do fato que $e_jR = Re_j$, pois E é extensão normal finita de R, obtemos, para todo $r \in R$ e todo $m \in M$, que: $r\phi\left(m + e_j^{-1}N\right) = r\left(e_jm + N\right) = r(e_jm) + N = (re_j)m + N = (e_jr')m + N = e_j(r'm) + N = \phi(r'm + e_j^{-1}N)$. Assim, temos que $\phi({}_RQ)$ é um R-submódulo à esquerda de M/N. Daí, como ϕ é uma função injetora, segue que: se ${}_RP \subsetneq {}_RL$ são submódulos de $M/e_j^{-1}N$, então $\phi({}_RP) \subsetneq \phi({}_RL)$ são submódulos de M/N.

□

Demonstração do Teorema 3.2.3 Por hipótese, existem elementos $e_1, \ldots, e_k \in E$ tais que $E = \sum_{i=1}^{k} e_iR$ e $e_iR = Re_i$, para todo $i = 1, \ldots, k$. Pelo Teorema 3.1.3 é suficiente mostrar que para cada E-módulo ${}_EM$ a interseção de todos os submódulos ${}_EN$ de ${}_EM$, tais que $\ell_E(M/N) < \infty$, é nula.

Então, seja M um E-módulo à esquerda não nulo e seja ${}_RN$ um submódulo de ${}_RM$ tal que $\ell_R(M/N) < \infty$. Para cada e_i, seja $e^{-1}N$ o R-submódulo do item 1 do Lema 3.2.4. Logo, pelo item 3 do mesmo Lema 3.2.4, segue que $\ell_R(M/e_i^{-1}N) \leq \ell_R(M/N) = m < \infty$.

Seja $b(N) = \bigcap\limits_{i=1}^{k} e_i^{-1}N$. Vamos mostrar que $b(N)$ é um E-submódulo de ${}_EM$. De fato, para quaisquer $e = e_1r_1 + \cdots + e_kr_k \in E$ e $x \in b(N)$ temos

$$ex = (e_1r_1 + \cdots + e_kr_k)x = (e_1r_1)x + \cdots + (e_kr_k)x = e_1(r_1x) + \cdots + e_k(r_kx).$$

Daí, fixando $i = 1, \ldots, k$, como $r_ix \in b(N)$, então $e_i(r_ix) \in N$ e, assim, obtemos que $ex \in N$. Logo, observamos então que para concluir $ex \in b(N)$ é suficiente mostrar que $e_j(ex) \in N$, para todo $j = 1, \ldots, k$. Agora, fixando $j = 1, \ldots, k$, temos

$$e_j(ex) = e_j\left(e_1(r_1x) + \cdots + e_k(r_kx)\right) = (e_je_1)(r_1x) + \cdots + (e_je_k)(r_kx).$$

Como $e_je_i = e_1r_{ij1} + \cdots + e_kr_{ijk}$, então

$$(e_je_i)(r_ix) = (e_1r_{ij1} + \cdots + e_kr_{ijk})(r_ix) = e_1\left(r_{ij1}(r_ix)\right) + \cdots + e_k\left(r_{ijk}(r_ix)\right).$$

Logo, para um $l = 1, \ldots, k$, fixo como $r_{ijl}(r_ix) \in b(N)$, então $e_l\left(r_{ijl}(r_ix)\right) \in N$. Assim, $(e_je_i)(r_ix) \in N$ e então $e_j(ex) \in N$. Com isto, obtemos então que $ex \in b(N)$. Além disso, como a interseção de grupos abelianos é um grupo abeliano, concluímos então que $b(N)$ é um E-submódulo de ${}_EM$.

Vamos mostrar agora que $b(N) \subseteq N$. Seja $x \in b(N)$. Como $1 = e_1r_1 + \cdots + e_kr_k$ então $x = 1x = e_1(r_1x) + \cdots + e_k(r_kx)$. Como $b(N)$ é um R-submódulo de ${}_RM$, então $r_ix \in b(N)$, para cada $i = 1, \ldots, k$. Então, para cada $i = 1, \ldots, k$, $e_i(r_ix) \in N$ e, assim, segue que $x \in N$.

Vamos mostrar que $\ell_E(M/b(N)) \leq km$. Dado que todo E-módulo é um R-módulo, é suficiente mostrar que $\ell_R(M/b(N)) \leq km$. Mas, como $\ell_R(M/e_j^{-1}N) \leq \ell_R(M/N) = m$, obtemos que $\ell_R(M/b(N)) \leq km$, pela Proposição 1.3.8.

Temos mostramos acima que todo R-submódulo N de ${}_RM$, com $\ell_R(M/N) < \infty$, contém um S-submódulo $b(N)$ de ${}_SM$ tal que $\ell_S(M/b(N)) < \infty$. Logo, como R é um π-V-anel então a interseção de todos os R-submódulos N de ${}_RM$, com $\ell_R(M/N) <$

∞, é nula. Assim, a interseção dos $b(N)$ é nula. Como $\ell_S(M/b(N)) < \infty$, segue que a interseção de todos os E-submódulos Q de ${}_EM$, com $\ell_S(M/Q) < \infty$, é nula. Portanto, E também é um π-V-anel; como queríamos mostrar.

$\square$

Corolário 3.2.5. *Seja R um π-V-anel comutativo. Então toda R-álgebra finitamente gerada E é um π-V-anel à esquerda e à direita.*

Demonstração. Basta observar que E é uma extensão normal finita de R. $\square$

Da prova do Teorema 3.2.3, se obtém uma prova semelhante para o seguinte resultado sobre os n-V-anéis.

Teorema 3.2.6. *Seja $E = \sum_{i=1}^{k} e_i R$ uma extensão normal finita do anel R e seja n um inteiro positivo. Se R é um n-V-anel à esquerda então E é um kn-V-anel à esquerda.*

Bibliografia

[1] M. F. Atiyah, I. G. Macdonald; Introduction to Commutative Algebra. Addison-Wesley, 1969.

[2] F. W. Anderson, K. R. Fuller; Rings and Categories of Modules. New York: Springer-Verlag, 1992.

[3] Azumaya, G.; A Duality Theory for Injective Modules. American Journal of Mathematics, 1959. Vol. 81, 249-278.

[4] Cartan, H., Eilenberg S.; Homological Algebra. Princeton University Press, 1956.

[5] Dauns, J.; Modules and Rings. Cambridge University Press, 1994.

[6] B. Eckman, A. Schopf; Über Injektive Module. Archiver der Mathematik, 1953. 4, 75-78.

[7] Hungerford, Thomas W.; Algebra. New York: Springer-Verlag, 1974.

[8] Hirano, Y.; On Injective Hulls of Simple Modules. Journal of Algebra, 2000. 225, 299-308.

[9] J. Cozzens; Homological Properties of the Rings of Differential Polinomials. Bull. Amer. Math. Soc., 1970. 76, 75-79.

[10] Jacobson, N.; Structure of Rings. Amer. Math. Soc. Colloquium Publications 37, Providence, 1956.

[11] J. Bit-David, J. C. Robson; Normalizing Extensions in Lectures Notes in Mathematics. New York, Springer-Verlag/Berlin, 1980. Vol. 825, 1-5.

[12] Lam T. Y.; Lectures on Modules and Rings. Springer, 1998.

[13] Lam T. Y.; A First Course in Noncommutative Rings. Springer, 2000.

[14] Michler G. O., Villamayor O. E.; On Rings whose Simple Modules are Injective. Journal of Algebra, 1973. 25, 185-201.

[15] Parmenter M. M., Stewart P. N.; Excellent Extensions. Comm. Algebra, 1988. 16, 703-713.

[16] Polcino Milies F. C.; Anéis e Módulos. Publicações do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, 1972.

[17] Rosenberg, A., Zelinsky, D.; Finiteness of the Injective Hull. Math. Zeitschr, 1959. 70, 372-280.