

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE BACHARELADO EM ESTATÍSTICA

LUCAS BOGDANOV SCHMIDT

**Estimação de Máxima Verossimilhança
em Processos $AR(p) - \mathcal{S}_\alpha(0, \gamma, 0)$**

Trabalho de Conclusão apresentado como
requisito parcial para a obtenção do grau de
Bacharel em Estatística

Prof. Dr. Marcio Valk
Orientador

Prof^a. Dr^a. Sílvia Regina Costa Lopes
Co-orientador

Porto Alegre, julho de 2014

CIP – CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Schmidt, Lucas Bogdanov

Estimação de Máxima Verossimilhança em Processos $AR(p) - \mathcal{S}_\alpha(0, \gamma, 0)$ / Lucas Bogdanov Schmidt. – Porto Alegre: Curso de Bacharelado em Estatística da UFRGS, 2014.
70 f.: il.

Orientador: Marcio Valk

Co-orientadora: Sílvia Regina Costa Lopes.

Trabalho de Conclusão de curso (Graduação)– Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Matemática, Curso de Bacharelado em Estatística, Porto Alegre, BR–RS, 2014.

1. Séries Temporais. 2. Propriedades dos Estimadores.
3. Distribuição Alfa-estável. I. Valk, Marcio, orient. II. Lopes, Sílvia Regina Costa, coorient.
III. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

Reitor: Prof. Carlos Alexandre Netto

Vice-Reitor: Prof. Rui Vicente Oppermann

Pró-Reitor de Graduação: Prof. Sérgio Roberto Kieling Franco

Diretor do Instituto de Matemática: Prof^a. Suzi Alves Camey

Coordenador do Curso: Prof. Álvaro Vigo

Bibliotecária-Chefe do Instituto de Matemática: Sibila Binotto

Dedico esse trabalho aos meus mestres, amantes da estatística, que me ensinam e me motivam.

*“Se alguém julga saber alguma coisa, com efeito,
não aprendeu ainda como convém saber.”*

1ª Coríntios 8 : 2

*“Pois, que adianta ao homem ganhar
o mundo inteiro e perder a sua alma?”*

Marcos 8 : 36

Agradecimentos

Agradeço primeiramente ao SENHOR, Deus altíssimo, criador dos céus e da terra. A Ele seja todo domínio e toda glória para sempre.

Agradeço aos meus pais e família que me deram todo apoio e sustento necessário.

Agradeço especialmente a professora Sílvia pela oportunidade de aprendizado, por acreditar no meu potencial, pelo convite à Iniciação Científica e por todo acompanhamento e dedicação em nossos trabalhos.

Agradeço ao Instituto de Matemática pelo Laboratório Computacional de Pesquisa em Matemática, onde executamos nossa pesquisa, e à Pró-Reitoria de Pesquisa pela Bolsa de Iniciação Científica.

Agradeço a Taiane Prass por conceder o programa de simulação e por jamais me negar um pedido de ajuda.

Agradeço aos demais bons exemplos de mestres que obtive durante a graduação. Um agradecimento especial a Márcio Valk, Cleber Bisognin, Fernando Sabino, Flávio Ziegelmann, Guilherme Pumi, Hudson Torrent e Luciana Nunes.

Agradeço às professoras Angela Coelho e Márcia Godoy que desde o colégio me despertaram o interesse e facilidade em matemática.

Agradeço aos colegas de trabalho Marilene Dias Bandeira, Pedro Zuanazzi, Rafael Bernardini e Renan Xavier Cortes em que no tempo de estágio não foi apenas experiência profissional adquirida, mas também amizades.

Pelo tempo da graduação que passou ligeiro, agradeço porque não estive sozinho. Um salve especial aos colegas Felipe Grillo, João Lucas, Lucas Serafim e Vinícius Roglio. Sem vocês, a Estatística não teria tanta graça.

Sumário

Lista de Figuras	7
Lista de Tabelas	9
Resumo	10
Abstract	11
Introdução	12
1 Conceitos Preliminares	13
1.1 Processos Estocásticos e Séries Temporais	13
1.2 Estimadores e suas Propriedades	17
2 Estimador de Máxima Verossimilhança para Processos ARMA(p, q) Gaussianos	19
2.1 Processo AR(1)	19
2.2 Notação Matricial para a Função de Verossimilhança de um AR(1)	23
2.3 Processo Gaussiano AR(p)	26
2.4 Processo Gaussiano ARMA(p, q)	30
3 Critérios de Seleção de Modelos	35
3.1 Caso Gaussiano	35
4 Estimador de Máxima Verossimilhança para Processos AR(p) α -estáveis	36
4.1 Distribuições α -estáveis	36
4.2 Processos AR(p) com Inovações α -estáveis	38
5 Simulações de Monte Carlo	41
Conclusões	45
Referências	46
Apêndice A Tabelas	48
Apêndice B Gráficos	67

Lista de Figuras

1.1	Evolução do estimador de μ conforme o acréscimo amostral para $k = 1, \dots, 130$	18
2.1	(a) Série temporal $\{X_t\}_{t=1}^{300}$ referente ao processo AR(1) dado na expressão (2.1.9); (b) Função de autocorrelação amostral; (c) Função de autocorrelação parcial amostral.	22
2.2	Função de log-verossimilhança de $\{X_t\}_{t=1}^{300}$ em função de $\hat{\phi}_1$ supondo c e σ_ε^2 conhecidos.	23
2.3	(a) Série temporal $\{Z_t\}_{t=1}^{300}$ referente ao processo AR(2) dado na expressão (2.3.5); (b) Função de autocorrelação amostral; (c) Função de autocorrelação parcial amostral.	29
2.4	(a) Série temporal $\{Y_t\}_{t=1}^{1000}$ referente ao processo ARMA(1,1) dado na expressão (2.4.12); (b) Função de autocorrelação amostral; (c) Função de autocorrelação parcial amostral.	34
4.1	Função densidade de uma α -estável para os valores de $\alpha \in \{0.5, 1.0, 2.0\}$	38
4.2	(a) Série temporal $\{W_t\}_{t=1}^{300}$, referente ao processo AR(1) dado na expressão (4.2.1); (b) Função de autocorrelação amostral; (c) Função de autocorrelação parcial amostral.	40
5.1	Frequências das estimativas de α quando seu valor verdadeiro é 0.5, para os valores de $\tilde{\alpha} \in \{0.40; 0.50; 0.55; 0.60; 1.99\}$	42
5.2	(a) Frequências das estimativas de α quando seu valor verdadeiro é 0.8, para os valores de $\tilde{\alpha} \in \{0.55; 0.80; 0.85\}$; (b) Frequências das estimativas de α quando seu valor verdadeiro é 1.0, para os valores de $\tilde{\alpha} \in \{0.55; 0.90; 1.05; 1.15; 1.99\}$	43
5.3	Frequências das estimativas de α quando seu valor verdadeiro é 1.5, para os valores de $\tilde{\alpha} \in \{1.25; 1.50; 1.75; 1.99\}$	43
5.4	Frequências das estimativas de α quando seu valor verdadeiro é 1.8, para os valores de $\tilde{\alpha} \in \{1.20; 1.60; 1.80; 1.99\}$	44
B.1	Box-plot das estimativas de α quando seu valor verdadeiro é 1.0, para $\gamma \in \{1, 2, 3\}$, $\phi = 0.5$, $burn-in = 100$ e $re = 500$ fixos e $n \in \{1000, 3000\}$ dispostos em (a) e (b) respectivamente.	68
B.2	Box-plot das estimativas de ϕ quando seu valor verdadeiro é 0.5, para $\gamma \in \{1, 2, 3\}$, $\alpha = 1.2$, $burn-in = 100$ e $re = 500$ fixos e $n \in \{1000, 3000\}$ dispostos em (a) e (b) respectivamente.	68

B.3	Box-plot das estimativas de γ quando seu valor verdadeiro é 2.0, para $\phi \in \{0.2, 0.5, 0.8\}$, $\alpha = 1.2$, $burn-in = 100$ e $re = 500$ fixos e $n \in \{1000, 3000\}$ dispostos em (a) e (b) respectivamente.	68
B.4	Box-plot das estimativas de α quando seu valor verdadeiro é 1.5, para $\gamma \in \{1; 2; 3\}$, $\phi = 0.8$, $n = 1000$ e $re = 500$ fixos e $burn-in \in \{100; 500\}$ dispostos em (a) e (b) respectivamente.	69
B.5	Box-plot das estimativas de ϕ quando seu valor verdadeiro é 0.8, para $\gamma \in \{1; 2; 3\}$, $\alpha = 1.5$, $n = 1000$ e $re = 500$ fixos e $burn-in \in \{100; 500\}$ dispostos em (a) e (b) respectivamente.	69
B.6	Box-plot das estimativas de γ quando seu valor verdadeiro é 3.0, para $\phi \in \{0.2; 0.5; 0.8\}$, $\alpha = 1.5$, $n = 1000$ e $re = 500$ fixos e $burn-in \in \{100; 500\}$ dispostos em (a) e (b) respectivamente.	69
B.7	Box-plot das estimativas de α quando seu valor verdadeiro é 1.8, para $\gamma \in \{1; 2; 3\}$, $\phi = 0.2$, $n = 1000$ e $burn-in = 100$ fixos e $re \in \{500; 1000\}$ dispostos em (a) e (b) respectivamente.	70
B.8	Box-plot das estimativas de ϕ quando seu valor verdadeiro é 0.2, para $\gamma \in \{1; 2; 3\}$, $\alpha = 1.8$, $n = 1000$ e $burn-in = 100$ fixos e $re \in \{500; 1000\}$ dispostos em (a) e (b) respectivamente.	70
B.9	Box-plot das estimativas de γ quando seu valor verdadeiro é 1.0, para $\phi \in \{0.2; 0.5; 0.8\}$, $\alpha = 1.8$, $n = 1000$ e $burn-in = 100$ fixos e $re \in \{500; 1000\}$ dispostos em (a) e (b) respectivamente.	70

Lista de Tabelas

5.1	Cenários para o processo de geração de dados	41
A.1	Estimativas e suas estatísticas de simulação para o caso AR(1) - $S_\alpha(0, \gamma, 0)$ com $n = 1000$, $burn-in = 100$, $re = 500$	49
A.2	Estimativas e suas estatísticas de simulação para o caso AR(1) - $S_\alpha(0, \gamma, 0)$ com $n = 1000$, $burn-in = 500$, $re = 500$	51
A.3	Estimativas e suas estatísticas de simulação para o caso AR(1) - $S_\alpha(0, \gamma, 0)$ com $n = 3000$, $burn-in = 100$, $re = 500$	53
A.4	Estimativas e suas estatísticas de simulação para o caso AR(1) - $S_\alpha(0, \gamma, 0)$ com $n = 3000$, $burn-in = 500$, $re = 500$	55
A.5	Estimativas e suas estatísticas de simulação para o caso AR(1) - $S_\alpha(0, \gamma, 0)$ com $n = 1000$, $burn-in = 100$, $re = 1000$	57
A.6	Estimativas e suas estatísticas de simulação para o caso AR(2) - $S_\alpha(0, \gamma, 0)$ com $n = 1000$, $burn-in = 100$, $re = 500$	59
A.7	Estimativas e suas estatísticas de simulação para o caso AR(2) - $S_\alpha(0, \gamma, 0)$ com $n = 1000$, $burn-in = 500$, $re = 500$	61
A.8	Estimativas e suas estatísticas de simulação para o caso AR(2) - $S_\alpha(0, \gamma, 0)$ com $n = 3000$, $burn-in = 100$, $re = 500$	63
A.9	Estimativas e suas estatísticas de simulação para o caso AR(2) - $S_\alpha(0, \gamma, 0)$ com $n = 3000$, $burn-in = 500$, $re = 500$	65

Resumo

Em análise de séries temporais, utilizam-se ferramentas estatísticas de modelagem para descrever características de um processo gerador de séries, tais como estimação de seus parâmetros e identificação de sua ordem. Discutimos técnicas de estimação e identificação da ordem de séries temporais autorregressivas com erros normalmente distribuídos e ampliamos para o caso de inovações α -estáveis. Simulações de Monte Carlo apresentam o comportamento dos estimadores.

Palavras-chave: Séries Temporais, Propriedades dos Estimadores, Distribuição Alfa-estável.

Abstract

In time series analysis, statistical modeling tools are used to describe the process of generating series, the performance of estimated parameters and to identify the model order. We discussed techniques for estimating and identifying the order of autoregressive time series with normally distributed errors and we extended to the α -stable innovations case. Monte Carlo simulations show the behavior of estimators.

Keywords: Time Series, Estimators Properties, Alpha-stable Distribution.

Introdução

Neste trabalho, apresentaremos uma síntese das técnicas de estimação e identificação de ordem de processos autorregressivos quando o processo de erros aleatórios advém da classe de distribuições α -estáveis, visando dispor um referencial teórico para estimar sua ordem de identificação. O Capítulo 1 apresenta conceitos iniciais de processos estocásticos, séries temporais, estimadores e suas propriedades que são empregados ao longo deste trabalho. O Capítulo 2 descreve os estimadores de máxima verossimilhança para processos ARMA(p,q) Gaussianos. O Capítulo 3 nos mostra os critérios de seleção de modelos gaussianos. O Capítulo 4 apresenta os estimadores de máxima verossimilhança para processos AR(p) com inovações α -estáveis, salientando características dessa classe de distribuições. Por fim, o Capítulo 5 apresenta o estudo de simulações de Monte Carlo analisando o desempenho dos estimadores.

1 Conceitos Preliminares

1.1 Processos Estocásticos e Séries Temporais

Neste capítulo apresentamos algumas definições básicas necessárias para um estudo de séries temporais. Uma *série temporal* é um conjunto de observações ordenadas no tempo. Exemplos de séries temporais são o registro das marés no porto de Rio Grande, a temperatura média diária do Rio de Janeiro, o índice da Bolsa de Valores de São Paulo e a precipitação pluviométrica em Porto Alegre.

Dentre os vários motivos que nos levam a analisar séries temporais, podemos destacar os seguintes:

- investigar o mecanismo gerador da série temporal, de modo a descobrir como ela foi gerada;
- fazer previsões dos valores futuros da série temporal, para podermos nos precaver a respeito do comportamento que ela poderá vir a assumir no futuro;
- descrever o comportamento da série temporal através da análise de seu gráfico para identificar características como tendência, ciclos e variações sazonais;
- através da análise espectral, procurar periodicidades relevantes nos dados.

Tais análises são baseadas na utilização de *modelos probabilísticos* ou *modelos estocásticos*, constituindo o desafio de encontrar o modelo mais simples que melhor descreva a série temporal analisada.

Ao iniciarmos a análise de uma série temporal, devemos estabelecer um método de como lidar com a natureza aleatória do fenômeno a ser modelado. A maneira natural de permitir que isto aconteça é supor que cada observação da série temporal seja uma variável aleatória X_t . Assim, a série temporal $\{X_t\}_{t=1}^n$ nada mais é do que a realização (ou parte de uma realização) de um processo estocástico.

A partir de agora, introduzimos algumas definições preliminares, necessárias para o estudo que realizamos neste trabalho. Os conceitos de estacionariedade, função de distribuição n -dimensional e as definições das funções de autocovariância e autocorrelação são de grande importância para encontrarmos modelos para séries temporais. Para mais detalhes e outras informações aqui não expostas, recomendamos ao leitor a dissertação de mestrado do aluno M.A. Nunes (ver Nunes, 2005). Iniciamos com a definição de processo estocástico.

Definição 1.1.1. Seja T um conjunto numérico qualquer. Um *processo estocástico* é uma família de variáveis aleatórias $\{X_t\}_{t \in T}$ em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$,

em que Ω é o espaço amostral, \mathcal{A} é a σ -álgebra da classe de eventos aleatórios e $\mathbb{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ é a função que associa a probabilidade a um evento qualquer.

Observação 1.1.1. a) Em geral, consideramos o conjunto T como sendo o conjunto dos inteiros \mathbb{Z} ou dos reais \mathbb{R} .

b) Neste trabalho, consideramos o conjunto T como sendo \mathbb{Z} , ou seja, os processos são à tempo discreto.

c) Quando $T = \{1, \dots, n\}$, $\{X_t\}_{t=1}^n$ é uma amostra do processo estocástico $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ e é chamada de *série temporal*.

Definição 1.1.2. Um espaço de probabilidade $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ é um espaço de Hilbert se satisfizer as seguintes condições:

a) $\mathbb{E}(X^2) = \int_{\Omega} X(w)^2 \mathbb{P}(dw) < \infty$, para todo $X \in \mathcal{H}$,

b) a multiplicação por escalar e adição de vetores é a usual,

c) $\mathbb{E}(\alpha X)^2 = \alpha^2 \mathbb{E}(X^2)$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e $X \in \mathcal{H}$,

d) $\mathbb{E}(X + Y)^2 \leq 2\mathbb{E}(X^2) + 2\mathbb{E}(Y^2)$, para todo $X, Y \in \mathcal{H}$.

Definimos o produto interno em \mathcal{H} como sendo

$$\langle X, Y \rangle = \mathbb{E}(XY), \quad \text{para todo } X, Y \in \mathcal{H}.$$

A seguir, definimos a *função de distribuição n-dimensional* (ou *função de distribuição conjunta*) para um vetor aleatório $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})'$, onde o símbolo \mathbf{x}' significa o transposto do vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Definição 1.1.3. Seja $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})'$ um vetor aleatório (ou variável aleatória n-dimensional), cujas componentes são variáveis aleatórias definidas no mesmo espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. A *função de distribuição n-dimensional* (ou *função de distribuição conjunta*) do vetor é definida por

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}(X_{t_1} \leq x_1, \dots, X_{t_n} \leq x_n), \quad (1.1)$$

quaisquer que sejam $n \in \mathbb{N}$, $t_i \in \mathbb{Z}$, $x_i \in \mathbb{R}$, para todo $i = 1, 2, \dots, n$.

Um processo estocástico $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ estará especificado se conhecermos as distribuições finito-dimensionais (1.1) para todo $n \geq 1$.

As *funções de autocovariância* e de *autocorrelação* de um processo estocástico são definidas a seguir. Estas duas funções fornecem o grau de interdependência entre as variáveis aleatórias e são importantes na identificação de um modelo para uma série temporal.

Definição 1.1.4. Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo estocástico tal que $\text{Var}(X_t) < \infty$, para todo $t \in \mathbb{Z}$. A *função de autocovariância* do processo, denotada por $\gamma_X(\cdot, \cdot)$, é dada por

$$\gamma_X(r, s) \equiv \text{Cov}(X_r, X_s) = \mathbb{E}[(X_r - \mathbb{E}(X_r))(X_s - \mathbb{E}(X_s))], \quad r, s \in \mathbb{Z},$$

onde $\mathbb{E}(X_t) \equiv \mu_t$ é a *esperança matemática* da variável aleatória X_t , para todo $t \in \mathbb{Z}$.

Definição 1.1.5. Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo estocástico tal que $\text{Var}(X_t) < \infty$, para todo $t \in \mathbb{Z}$. A *função de autocorrelação* do processo, denotada por $\rho_X(\cdot, \cdot)$, é dada por

$$\rho_X(r, s) = \frac{\gamma_X(r, s)}{\sqrt{\text{Var}(X_r)}\sqrt{\text{Var}(X_s)}}, \quad r, s \in \mathbb{Z},$$

onde $\text{Var}(X_t) \equiv \gamma_X(t, t)$, para todo $t \in \mathbb{Z}$.

Ao procurarmos modelos para descrever séries temporais, é necessário utilizar suposições que nos permitam simplificar as séries temporais analisadas. Dentre as suposições que devem ser realizadas, a mais comum diz respeito à estacionariedade do processo.

Intuitivamente, um processo estacionário $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é aquele no qual a origem temporal ($t = 0$) não é importante. Em outras palavras, as características de X_{t+h} são as mesmas de X_t , para todo $t, h \in \mathbb{Z}$.

A literatura nos apresenta dois tipos de estacionariedade: *estacionariedade forte* e *estacionariedade fraca*. As definições destas propriedades são dadas a seguir.

Definição 1.1.6. Um processo estocástico $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é *fortemente estacionário* (ou *estritamente estacionário*) se todas as distribuições n -dimensionais (1.1) permanecem as mesmas sob translações do tempo, ou seja,

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{t_1+h, \dots, t_n+h}(x_1, \dots, x_n),$$

para todo t_1, \dots, t_n, h em \mathbb{Z} .

Definição 1.1.7. Um processo estocástico $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é *fracamente estacionário* (ou somente *estacionário*) se

- a) $\mathbb{E}|X_t|^2 < \infty$, para todo $t \in \mathbb{Z}$;
- b) $\mathbb{E}(X_t) = \mu_X$, uma constante independente de t ;
- c) $\gamma_X(r, s) = \gamma_X(r + t, s + t)$, para quaisquer $r, s, t \in \mathbb{Z}$.

Definição 1.1.8. Um processo estocástico $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é *Gaussiano* se, para qualquer conjunto $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{Z}$, as variáveis aleatórias X_{t_1}, \dots, X_{t_n} têm distribuição normal n -dimensional.

Observação 1.1.2. a) Um processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ ser fracamente estacionário não necessita, necessariamente, ser fortemente estacionário, mas a recíproca é sempre verdadeira. Como um processo Gaussiano com variância finita é determinado pela média e pela matriz de variâncias-covariâncias, se ele for fracamente estacionário, será também fortemente estacionário.

b) Se o processo estocástico $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ for estacionário, temos que $\gamma_X(r, s) = \gamma_X(r - s, 0)$, para todo $r, s \in \mathbb{Z}$. Assim, podemos redefinir a função de autocovariância de um processo estocástico estacionário em termos de apenas uma variável

$$\gamma_X(r, s) = \gamma_X(r - s, s - s) = \gamma_X(r - s, 0) \equiv \gamma_X(h), \text{ para todo } r, s, h \in \mathbb{Z}.$$

A função $\gamma_X(h)$ será chamada de *função de autocovariância* de ordem h (ou de *lag* h). De forma análoga, definimos a função de autocorrelação de ordem h como sendo

$$\rho_X(h) \equiv \frac{\gamma_X(h)}{\gamma_X(0)}, \quad \text{para todo } h \in \mathbb{Z},$$

onde $\gamma_X(0) = \text{Cov}(X_t, X_t) = \text{Var}(X_t)$, para todo $t \in \mathbb{Z}$.

c) As funções de autocovariância e de autocorrelação de um processo estocástico $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ possuem as seguintes propriedades

- i) $\gamma_X(h) = \text{Cov}(X_{t+h}, X_t) = \text{Cov}(X_t, X_{t-h})$, para todo $t, h \in \mathbb{Z}$;
- ii) $\gamma_X(h) = \gamma_X(-h)$, para todo $h \in \mathbb{N}$;
- iii) $|\gamma_X(h)| \leq \gamma_X(0)$, para todo $h \in \mathbb{N}$;
- iv) $\rho_X(h) = \rho_X(-h)$, para todo $h \in \mathbb{N}$;
- v) $|\rho_X(h)| \leq \rho_X(0) = 1$, para todo $h \in \mathbb{N}$.

Definição 1.1.9. Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo estocástico estacionário com média zero e com função de autocovariância $\gamma_X(\cdot)$ tal que $\gamma_X(h) \rightarrow 0$, quando $|h| \rightarrow \infty$. A *função de autocorrelação parcial*, denotada por $\phi_X(k, j)$, $j = 1, \dots, k$, $k \in \mathbb{N}$, é o coeficiente na equação

$$\mathcal{P}_{\overline{sp}(X_1, \dots, X_k)}(X_{k+1}) = \sum_{j=1}^k \phi_X(k, j) X_{k+1-j},$$

onde $\mathcal{P}_{\overline{sp}(X_1, \dots, X_k)}(X_{k+1})$ é a projeção ortogonal de X_{k+1} no subespaço fechado $\overline{sp}(X_1, \dots, X_k)$ gerado pelas k observações anteriores.

A partir da equação

$$\langle X_{k+1} - \mathcal{P}_{\overline{sp}(X_1, \dots, X_k)}(X_{k+1}), X_j \rangle = 0, \quad \text{para } j = 1, \dots, k,$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno definido na Observação 1.1.2, obtemos o sistema de equações

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_X(1) & \rho_X(2) & \cdots & \rho_X(k-1) \\ \rho_X(1) & 1 & \rho_X(1) & \cdots & \rho_X(k-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_X(k-1) & \rho_X(k-2) & \rho_X(k-3) & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_X(k, 1) \\ \phi_X(k, 2) \\ \vdots \\ \phi_X(k, k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_X(1) \\ \rho_X(2) \\ \vdots \\ \rho_X(k) \end{bmatrix}, \quad (1.2)$$

onde $\rho_X(\cdot)$ é a função de autocorrelação do processo estocástico $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ dada pela Definição 1.1.5. Os coeficientes $\phi_X(\cdot, \cdot)$ são unicamente determinados pelo sistema (1.2).

Utilizando a regra de Cramér sucessivamente para $k \in \mathbb{N}$, obtemos a *função de autocorrelação parcial de ordem k* do processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ dada por

$$\phi_X(k, k) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_X(1) & \rho_X(2) & \cdots & \rho_X(k-2) & \rho_X(1) \\ \rho_X(1) & 1 & \rho_X(1) & \cdots & \rho_X(k-3) & \rho_X(2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_X(k-1) & \rho_X(k-2) & \rho_X(k-3) & \cdots & \rho_X(1) & \rho_X(k) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_X(1) & \cdots & \rho_X(k-2) & \rho_X(k-1) \\ \rho_X(1) & 1 & \cdots & \rho_X(k-3) & \rho_X(k-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_X(k-1) & \rho_X(k-2) & \cdots & \rho_X(1) & 1 \end{vmatrix}}.$$

Um dos processos estocásticos mais simples é aquele cujas variáveis aleatórias são independentes e identicamente distribuídas. Definimos os processos independentes e identicamente distribuídos e ruído branco a seguir.

Definição 1.1.10. O processo estocástico $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é dito ser composto por *variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas* (i.i.d.), denotado por $X_t \sim IID(0, \sigma^2)$, se valer para toda variável X_{t_1}, \dots, X_{t_n} , a condição

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{t_1}(x_1) \cdot \dots \cdot F_{t_n}(x_n)$$

e se as variáveis aleatórias X_1, \dots, X_n possuírem a mesma distribuição.

Definição 1.1.11. O processo estocástico $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um *ruído branco* com média zero e variância σ_ε^2 , denotado por $\varepsilon_t \sim RB(0, \sigma_\varepsilon^2)$, se for i.i.d. e se

$$\mathbb{E}(\varepsilon_t) = 0 \quad \text{e} \quad \gamma_\varepsilon(h) = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2, & h = 0, \\ 0, & h \neq 0. \end{cases}$$

1.2 Estimadores e suas Propriedades

Nesta seção, introduzimos alguns critérios básicos para avaliação de estimadores e propriedades das estimativas que serão levados em conta na avaliação do desempenho das estimativas nas simulações de Monte Carlo apresentadas no Capítulo 5.

Seja $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)'$ uma amostra aleatória i.i.d. e $T(\mathbf{X}) = \hat{\theta}$ uma função da amostra para estimar o parâmetro desconhecido θ .

Definição 1.2.1. O *erro quadrático médio* (eqm) de um estimador $\hat{\theta}$ é definido por

$$\mathbb{E}_\theta(\hat{\theta} - \theta)^2.$$

Note que o eqm mede a diferença média quadrática entre o estimador e o parâmetro, o que é uma medida razoável de desempenho de um estimador pontual. Utiliza-se o eqm em vez do erro médio absoluto $\mathbb{E}_\theta(|\hat{\theta} - \theta|)$ por duas vantagens: primeiramente, é analiticamente melhor tratável; em segundo, pela sua interpretação

$$\mathbb{E}_\theta(\hat{\theta} - \theta)^2 = \text{Var}_\theta(\hat{\theta}) + \left(\mathbb{E}_\theta(\hat{\theta}) - \theta\right)^2 = \text{Var}_\theta(\hat{\theta}) + \left(\text{Bias}_\theta(\hat{\theta})\right)^2,$$

em que Bias_θ é definido abaixo.

Definição 1.2.2. O *viés* de um estimador pontual $\hat{\theta}$ para o parâmetro θ é a diferença entre o valor esperado de $\hat{\theta}$ e θ , isto é,

$$\text{Bias}_\theta(\hat{\theta}) = \mathbb{E}_\theta(\hat{\theta}) - \theta.$$

Um estimador cujo viés é identicamente (em θ) igual a zero é chamado *não-viesado* ou *não-viciado* e satisfaz $\mathbb{E}_\theta(\hat{\theta}) = \theta$, para todo θ .

Vieses podem ser encontrados quando o tamanho da amostra não for satisfatório ou, também, quando o estimador não for consistente.

Definição 1.2.3. Seja $T_n(X_1, \dots, X_n)$ um estimador para θ sendo n suficientemente grande. A estatística T_n é dita ser *consistente* se e somente se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[|T_n(X_1, \dots, X_n) - \theta| \geq \epsilon] = 0$$

para todo $\epsilon > 0$.

Exemplo 1.2.1. Considere k amostras aleatórias i.i.d. de tamanho 1 com distribuição $\mathcal{N}(50, 3)$. Seja \bar{X}_k a média das k -ésimas primeiras amostras e k suficientemente grande, como por exemplo, $k = 130$. Sendo \bar{X}_k um estimador para média $\mu = 50$, observa-se que conforme k aumenta, \bar{X}_k tende ao valor verdadeiro do parâmetro, ilustrado na Figura 1.1.

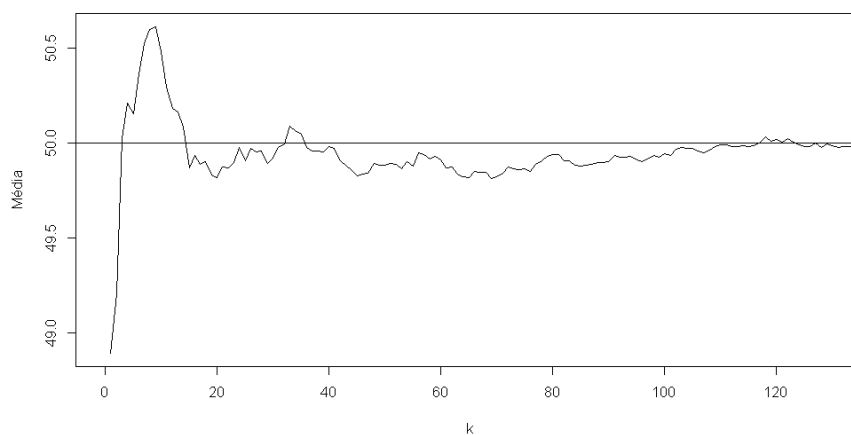


Figura 1.1: Evolução do estimador de μ conforme o acréscimo amostral para $k = 1, \dots, 130$.

2 Estimador de Máxima Verossimilhança para Processos ARMA(p, q) Gaussianos

2.1 Processo AR(1)

Define-se um processo AR(1) como

$$X_t = c + \phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{Z},$$

onde $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) e $\boldsymbol{\eta} = (c, \phi_1, \sigma_\varepsilon^2)$ é o vetor de parâmetros.

Sendo μ a média do processo, observe que

$$\mathbb{E}(X_t) = c + \phi_1 \mathbb{E}(X_{t-1}) + 0 \iff \mu = \mathbb{E}(X_t) = \frac{c}{1 - \phi_1}, \quad (2.1.1)$$

desde que

$$\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(X_1), \quad \text{para todo } t \in \mathbb{Z},$$

e

$$\text{Var}(X_t) = \mathbb{E}(X_t - \mu)^2, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{Z}.$$

Como

$$\begin{aligned} X_t &= (c + \varepsilon_t) + \phi_1(c + \varepsilon_{t-1}) + \phi_1^2(c + \varepsilon_{t-2}) + \phi_1^3(c + \varepsilon_{t-3}) + \dots \\ &= (c + c\phi_1 + c\phi_1^2 + c\phi_1^3 + \dots) + \varepsilon_t + \phi_1\varepsilon_{t-1} + \phi_1^2\varepsilon_{t-2} + \phi_1^3\varepsilon_{t-3} + \dots \\ &= \frac{c}{1 - \phi_1} + (\varepsilon_t + \phi_1\varepsilon_{t-1} + \phi_1^2\varepsilon_{t-2} + \phi_1^3\varepsilon_{t-3} + \dots), \end{aligned}$$

da expressão (2.1.1) temos que

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_t) &= \mathbb{E}(X_t - \mu)^2 = \mathbb{E}(\varepsilon_t + \phi_1\varepsilon_{t-1} + \phi_1^2\varepsilon_{t-2} + \phi_1^3\varepsilon_{t-3} + \dots)^2 \\ &= \sigma_\varepsilon^2(1 + \phi_1^2 + \phi_1^4 + \phi_1^6 + \dots) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_1^2}. \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

Como $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo Gaussiano, então $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ também é Gaussiano. A função de densidade de X_1 é dada por

$$f_{X_1}(x_1; \boldsymbol{\eta}) = f_{X_1}(x_1; c, \phi_1, \sigma_\varepsilon^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_1^2}}} \exp \left\{ -\frac{(x_1 - \frac{c}{1 - \phi_1})^2}{\frac{2\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_1^2}} \right\}. \quad (2.1.3)$$

Agora, precisamos da observação condicional de X_2 dado $X_1 = x_1$. Uma vez que

$$X_2 = c + \phi_1 X_1 + \varepsilon_2$$

temos

$$(X_2 | X_1 = x_1) \sim \mathcal{N}(c + \phi_1 x_1, \sigma_\varepsilon^2)$$

e

$$f_{X_2|X_1}(x_2 | x_1; \boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\varepsilon^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} (x_2 - c - \phi_1 x_1)^2 \right\}.$$

A função de densidade conjunta de (X_1, X_2) é dada por

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2; \boldsymbol{\eta}) = f_{X_2|X_1}(x_2 | x_1; \boldsymbol{\eta}) \times f_{X_1}(x_1; \boldsymbol{\eta}).$$

Do mesmo modo, $(X_3 | X_1, X_2) \sim \mathcal{N}(c + \phi_1 x_2, \sigma_\varepsilon^2)$ e

$$f_{X_3|X_1, X_2}(x_3 | x_1, x_2; \boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\varepsilon^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} (x_3 - c - \phi_1 x_2)^2 \right\}.$$

Sabemos que

$$f_{X_1, X_2, X_3}(x_1, x_2, x_3; \boldsymbol{\eta}) = f_{X_3|X_1, X_2}(x_3 | x_1, x_2; \boldsymbol{\eta}) \times f_{X_1, X_2}(x_1, x_2; \boldsymbol{\eta}).$$

Observe que os valores de X_1, X_2, \dots, X_{t-1} importam para X_t apenas através do valor de X_{t-1} , ou seja, trata-se de um processo Markoviano. A função de densidade da observação t condicional às $t-1$ observações precedentes é dada por

$$\begin{aligned} f_{X_t|X_1, \dots, X_{t-1}}(x_t | x_1, \dots, x_{t-1}; \boldsymbol{\eta}) &= f_{X_t|X_{t-1}}(x_t | x_{t-1}; \boldsymbol{\eta}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\varepsilon^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} (x_t - c - \phi_1 x_{t-1})^2 \right\}. \end{aligned}$$

Portanto, para uma amostra (X_1, \dots, X_n) , a função de verossimilhança é dada por

$$L(\boldsymbol{\eta}; \mathbf{x}) = f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n; \boldsymbol{\eta}) = f_{X_1}(x_1; \boldsymbol{\eta}) \times \prod_{t=2}^n f_{X_t|X_{t-1}}(x_t | x_{t-1}; \boldsymbol{\eta}). \quad (2.1.4)$$

Usando as expressões (2.1.3) e (2.1.4), e sendo a função logaritmo uma função monótona usualmente utilizada para melhor organizar funções de verossimilhança, o logaritmo da função de verossimilhança é dada por

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\boldsymbol{\eta}) &= \log(L(\boldsymbol{\eta}; \mathbf{x})) = \log(f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n; \boldsymbol{\eta})) \\
&= \log(f_{X_1}(x_1; \boldsymbol{\eta})) + \sum_{t=2}^n \log(f_{X_t|X_{t-1}}(x_t | x_{t-1}; \boldsymbol{\eta})) \\
&= -\frac{1}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log\left(\frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_1^2}\right) - \frac{\left(x_1 - \frac{c}{1 - \phi_1}\right)^2}{\frac{2\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_1^2}} - \left(\frac{n-1}{2}\right) \log(2\pi) - \\
&\quad - \left(\frac{n-1}{2}\right) \log(\sigma_\varepsilon^2) - \sum_{t=2}^n \left[\frac{(x_t - c - \phi_1 x_{t-1})^2}{2\sigma_\varepsilon^2}\right] \\
&= -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log(\sigma_\varepsilon^2) + \frac{1}{2} \log(1 - \phi_1^2) - \frac{1 - \phi_1^2}{2\sigma_\varepsilon^2} \left(x_1 - \frac{c}{1 - \phi_1}\right)^2 - \\
&\quad - \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \sum_{t=2}^n (x_t - c - \phi_1 x_{t-1})^2. \tag{2.1.5}
\end{aligned}$$

Solucionando

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\boldsymbol{\eta})}{\partial c} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}(\boldsymbol{\eta})}{\partial \phi_1} = 0 \quad e \quad \frac{\partial \mathcal{L}(\boldsymbol{\eta})}{\partial \sigma_\varepsilon^2} = 0 \tag{2.1.6}$$

encontramos os estimadores de máxima verossimilhança para $\boldsymbol{\eta}$. De fato,

$$\begin{aligned}
\hat{c} &= \frac{1 - \hat{\phi}_1}{n(1 - \hat{\phi}_1) + 2\hat{\phi}_1} \left[x_1(\hat{\phi}_1 + 1) + \sum_{t=2}^n (x_t - \hat{\phi}_1 x_{t-1}) \right] \\
\frac{-\hat{\sigma}_\varepsilon^2 \hat{\phi}_1}{1 - \hat{\phi}_1^2} + \hat{\phi}_1 \left(x_1 - \frac{\hat{c}}{1 - \hat{\phi}_1} \right)^2 + \frac{1 + \hat{\phi}_1}{1 - \hat{\phi}_1} \left(x_1 - \frac{\hat{c}}{1 - \hat{\phi}_1} \right) \hat{c} + \sum_{t=2}^n x_{t-1} (x_t - \hat{c} - \hat{\phi}_1 x_{t-1}) &= 0 \\
\hat{\sigma}_\varepsilon^2 &= \frac{1 - \hat{\phi}_1^2}{n} \left(x_1 - \frac{\hat{c}}{1 - \hat{\phi}_1} \right)^2 + \frac{1}{n} \sum_{t=2}^n (x_t - \hat{c} - \hat{\phi}_1 x_{t-1})^2. \tag{2.1.7}
\end{aligned}$$

Observação 2.1.1. Ao solucionar

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\boldsymbol{\eta})}{\partial \phi_1} = 0 \tag{2.1.8}$$

nota-se que essa parcela, diferente das demais estimativas, não pode ser descrita facilmente como uma única expressão das demais estimativas. Ela não possui solução única pelo fato de ser uma função de quarto grau. McLeod e Zhang (2006) apontam que o estimador de máxima verossimilhança por Mínimos Quadrados Ordinários é o mais eficiente e confiável para estimar ϕ_1 , e também citam a utilização de autocorrelações parciais.

Exemplo 2.1.1. Para ilustrar um processo AR(1) Gaussiano, suponhamos $\{X_t\}_{t=1}^n$ uma amostra de tamanho $n = 300$ gerada pelo *software* estatístico R de um processo AR(1) Gaussiano dado por

$$X_t = 5 + 0.5X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, 300, \tag{2.1.9}$$

onde $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é o processo de variáveis aleatórias i.i.d. também gerados pelo *software* com distribuição normal de média 0 e variância 1, ou seja, $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$, para cada $t \in \mathbb{Z}$.

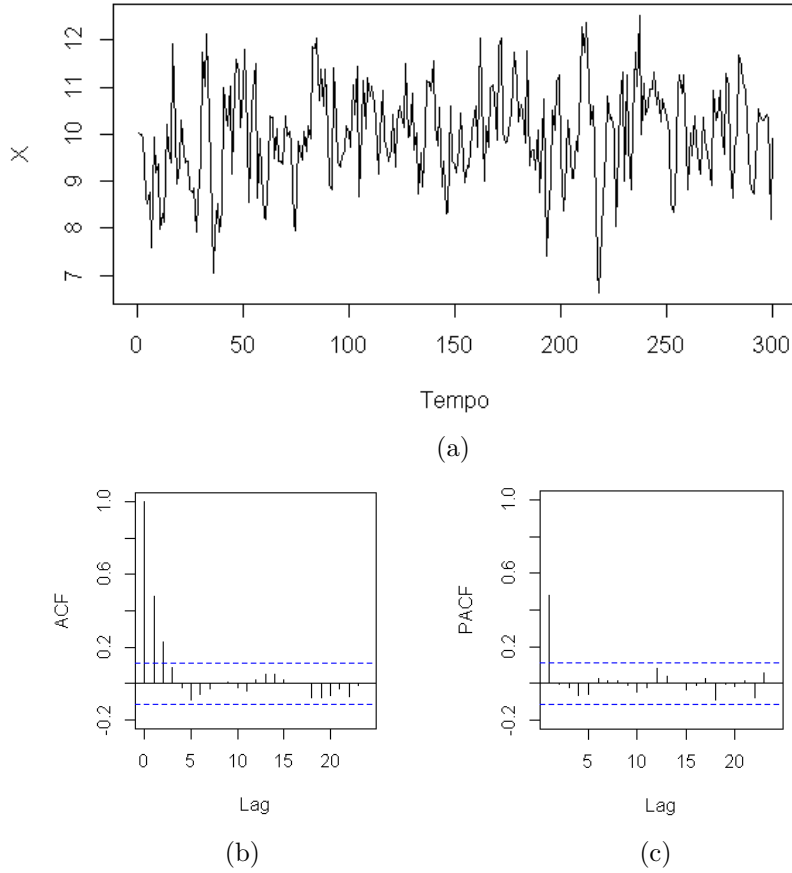


Figura 2.1: (a) Série temporal $\{X_t\}_{t=1}^{300}$ referente ao processo AR(1) dado na expressão (2.1.9); (b) Função de autocorrelação amostral; (c) Função de autocorrelação parcial amostral.

Dado o fato de que desconhecemos os parâmetros da série temporal $\{X_t\}_{t=1}^{300}$, mas sabendo que se trata de uma amostra de um modelo autorregressivo de ordem 1 - AR(1) - (no Capítulo 3 são abordados os métodos de identificação da ordem de um processo) a estimação do vetor de parâmetros $\boldsymbol{\eta} = (c, \phi_1, \sigma_\varepsilon^2)'$, utilizando a expressão (2.1.7), é dada por

$$\hat{c} = 4.9917, \quad \hat{\phi}_1 = 0.4802 \quad \text{e} \quad \hat{\sigma}_\varepsilon^2 = 0.8428. \quad (2.1.10)$$

Podemos notar que, para um tamanho amostral $n = 300$, os parâmetros foram bem estimados, pois, de acordo com a equação (2.1.9), seus valores são dados por

$$c = 5, \quad \phi_1 = 0.5 \quad \text{e} \quad \sigma_\varepsilon^2 = 1. \quad (2.1.11)$$

Conforme (2.1.1) e (2.1.2), podemos estimar a média e a variância do processo por

$$\hat{\mu} = \frac{\hat{c}}{1 - \hat{\phi}_1} = \frac{4.9917}{1 - 0.4802} = 9.6034$$

e

$$\hat{\gamma}_X(0) = \frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2}{1 - \hat{\phi}_1^2} = \frac{0.8428}{1 - 0.4802^2} = 1.0954$$

cujos valores teóricos são

$$\mu = \frac{c}{1 - \phi_1} = \frac{5}{1 - 0.5} = 10 \quad \text{e} \quad \gamma_X(0) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_1^2} = \frac{1}{1 - 0.5^2} = 1.33.$$

Analisando o correlograma (ver Figura 2.1(b)), podemos notar que entre valores de espaçamento igual a 1 (a este espaçamento damos o nome de *lag*), a série possui uma autocorrelação próxima a 0.5. No caso de amostras provindas de processos AR(1), como neste exemplo, a magnitude de ϕ_1 pode também ser estimada através dessa abordagem - estimativa da autocorrelação de $lag1$.

A melhor estimativa de ϕ_1 é aquela que maximiza a função de log-verossimilhança. Supondo que os parâmetros c e σ_ε^2 sejam dados e conhecidos, segue o gráfico da função de log-verossimilhança para a amostra $\{X_t\}_{t=1}^{300}$ em relação a cada provável valor de ϕ_1 . Nota-se que o pico da função de log-verossimilhança está próximo a $\phi_1 = 0.5$.

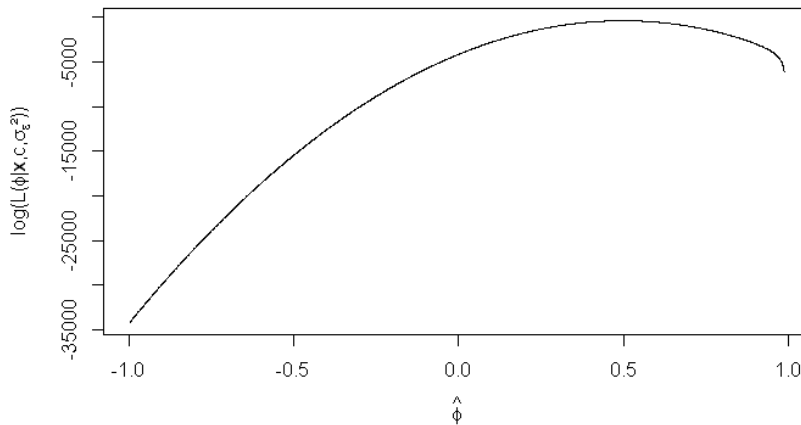


Figura 2.2: Função de log-verossimilhança de $\{X_t\}_{t=1}^{300}$ em função de $\hat{\phi}_1$ supondo c e σ_ε^2 conhecidos.

2.2 Notação Matricial para a Função de Verossimilhança de um AR(1)

Considere $\mathbf{X}_{(n \times 1)} = (X_1, X_2, \dots, X_n)'$ uma amostra aleatória de n observações. Sabemos que $\mathbb{E}(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\mu}$, onde $\boldsymbol{\mu} = \left(\frac{c}{1-\phi_1}, \frac{c}{1-\phi_1}, \dots, \frac{c}{1-\phi_1} \right)'$ é o vetor $(n \times 1)$ de médias e

$$\mathbb{E}[(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})'] = \boldsymbol{\Omega} \quad (2.2.1)$$

é a matriz de variâncias e covariâncias de \mathbf{X} em que os elementos dessa matriz correspondem às variâncias de \mathbf{X} na sua diagonal principal e às autocovariâncias de \mathbf{X} fora dessa diagonal. Lembramos que a j -ésima autocovariância de um processo AR(1) é dada por

$$\mathbb{E}[(X_t - \mu)(X_{t-j} - \mu)] = \sigma_\varepsilon^2 \frac{\phi_1^j}{1 - \phi_1^2}, \quad (2.2.2)$$

onde $\mu = \frac{c}{1-\phi_1}$.

Essa matriz pode ser escrita em função de ϕ_1 e σ_ε^2 . A partir de (2.2.1) e (2.2.2), temos que

$$\mathbf{\Omega} = \sigma_\varepsilon^2 \mathbf{V} \quad (2.2.3)$$

onde a matriz \mathbf{V} é dada por

$$\mathbf{V} = \frac{1}{1-\phi_1^2} \begin{pmatrix} 1 & \phi_1 & \phi_1^2 & \cdots & \phi_1^{n-1} \\ \phi_1 & 1 & \phi_1 & \cdots & \phi_1^{n-2} \\ \phi_1^2 & \phi_1 & 1 & \cdots & \phi_1^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1^{n-1} & \phi_1^{n-2} & \phi_1^{n-3} & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.2.4)$$

Se \mathbf{X} for uma amostra advinda de uma distribuição $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{\Omega})$, a função de verossimilhança pode ser escrita como

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\eta}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n (\det(\mathbf{\Omega}^{-1}))^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \mathbf{\Omega}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right\}$$

e o logaritmo da função de verossimilhança como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\boldsymbol{\eta}; \mathbf{x}) &= \log(f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\eta})) \\ &= -\frac{n}{2} \log(2\pi) + \frac{1}{2} \log(\det(\mathbf{\Omega}^{-1})) - \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \mathbf{\Omega}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}). \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

As expressões (2.2.5) e (2.1.5) devem representar exatamente a mesma função $\mathcal{L}(\boldsymbol{\eta})$ para os dados $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)'$. A seguir, utilizando algumas propriedades matriciais, verificamos isso. Definida a matriz

$$\mathbf{L}_{n \times n} = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\phi_1^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\phi_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\phi_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\phi_1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.2.6)$$

podemos decompor \mathbf{V}^{-1} em função de \mathbf{L} da forma $\mathbf{L}'\mathbf{L} = \mathbf{V}^{-1}$.

A partir das expressões (2.2.3) e (2.2.6), temos que

$$\mathbf{\Omega}^{-1} = \sigma_\varepsilon^{-2} \mathbf{L}'\mathbf{L}. \quad (2.2.7)$$

A partir da propriedade de que $\det(\alpha \mathbf{A}) = \alpha^n \det(\mathbf{A})$, onde \mathbf{A} é uma matriz $(n \times n)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, torna-se fácil ver que $\det(\sigma_\varepsilon^{-2} \mathbf{L}'\mathbf{L}) = \sigma_\varepsilon^{-2n} \det(\mathbf{L}'\mathbf{L})$. Sendo assim, a partir de (2.2.7), podemos reescrever a expressão (2.2.5) como

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\eta}) = -\frac{n}{2} \log(2\pi) + \frac{1}{2} \log(\sigma_\varepsilon^{-2n} \det(\mathbf{L}'\mathbf{L})) - \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \sigma_\varepsilon^{-2} \mathbf{L}'\mathbf{L} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}). \quad (2.2.8)$$

Defina o vetor

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{L}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \\ &= \mathbf{L}_{(n \times n)} \times \begin{pmatrix} x_1 - \mu \\ x_2 - \mu \\ \vdots \\ x_n - \mu \end{pmatrix}_{n \times 1} = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \phi_1^2} (x_1 - \mu) \\ (x_2 - \mu) - \phi_1(x_1 - \mu) \\ \vdots \\ (x_n - \mu) - \phi_1(x_{n-1} - \mu) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

Substituindo $\mu = \frac{c}{1 - \phi_1}$, a expressão de (2.2.9) é dada por

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \phi_1^2} \left(x_1 - \frac{c}{1 - \phi_1} \right) \\ x_2 - \phi_1 x_1 - c \\ x_3 - \phi_1 x_2 - c \\ \dots \\ x_n - \phi_1 x_{n-1} - c \end{pmatrix}.$$

O último termo da expressão (2.2.8) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \sigma_\varepsilon^{-2} \mathbf{L}' \mathbf{L} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) = \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \mathbf{x}' \mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} (1 - \phi_1^2) \left[x_1 - \frac{c}{1 - \phi_1} \right]^2 + \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \sum_{t=2}^n (x_t - c - \phi_1 x_{t-1})^2. \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

pois

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' \mathbf{x} &= [\mathbf{L}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})]' \mathbf{L}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \\ &= (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \mathbf{L}' \mathbf{L} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

O termo central de (2.2.8) é analogamente reescrito como

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \log(\det(\sigma_\varepsilon^{-2} \mathbf{L}' \mathbf{L})) &= \frac{1}{2} \log(\sigma_\varepsilon^{-2n} \det(\mathbf{L}' \mathbf{L})) = -\frac{1}{2} \log(\sigma_\varepsilon^2) + \frac{1}{2} \log(\det(\mathbf{L}' \mathbf{L})) \\ &= -\frac{n}{2} \log(\sigma_\varepsilon^2) + \log(\det(\mathbf{L})) \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

desde que $\det(\mathbf{L}' \mathbf{L}) = \det(\mathbf{L}') \times \det(\mathbf{L}) = \det(\mathbf{L} \times \mathbf{L}) = \det(\mathbf{L})^2$, $\log(\det(\mathbf{L}' \mathbf{L})) = 2 \log(\det(\mathbf{L}))$ e $\det(\alpha \mathbf{L}) = \alpha^n \det(\mathbf{L})$.

Visto que \mathbf{L} é uma matriz triangular inferior, seu determinante é dado pelo produto dos elementos da sua diagonal. Portanto, $\det(\mathbf{L}) = \sqrt{1 - \phi_1^2}$. Dessa maneira, a expressão (2.2.12) pode ser escrita como

$$\frac{1}{2} \log(\sigma_\varepsilon^{-2n} \det(\mathbf{L}' \mathbf{L})) = -\frac{n}{2} \log(\sigma_\varepsilon^2) + \frac{1}{2} \log(1 - \phi_1^2).$$

Por consequência, a expressão (2.2.10) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\boldsymbol{\eta}) &= -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log(\sigma_\varepsilon^2) + \frac{1}{2} \log(1 - \phi_1^2) - \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} (1 - \phi_1^2) \left[x_1 - \frac{c}{1 - \phi_1} \right]^2 \\ &\quad - \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \sum_{t=2}^n (x_t - c - \phi_1 x_{t-1})^2. \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

Ambas as expressões (2.1.5) e (2.2.13) descrevem precisamente o logaritmo da função de verossimilhança de um processo AR(1).

Observação 2.2.1. A expressão (2.1.5) é claramente preferível na computação de dados porque ela evita inversões de matrizes ($n \times n$) como em (2.2.13). Na expressão (2.1.5), X_t é escrito como a soma de uma previsão ($c + \phi_1 X_{t-1}$) e um erro de previsão (ε_t). Por construção, o erro de previsão é independente das observações anteriores. O logaritmo da sua função de densidade é incluído ao logaritmo da verossimilhança das observações precedentes. Isso é conhecido como a decomposição do erro de previsão da função de verossimilhança.

2.3 Processo Gaussiano AR(p)

Um processo AR(p) com inovações Gaussianas é dado por

$$X_t = c + \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{Z},$$

onde $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é i.i.d. com distribuição $\mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$. Neste caso, o vetor de parâmetros é $\boldsymbol{\eta} = (c, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p, \sigma_\varepsilon^2)'$.

Da amostra $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_p, X_{p+1}, \dots, X_n)'$, consideramos as primeiras p observações e coletamos da amostra um vetor \mathbf{X}_p de tamanho $(p \times 1)$, o qual é visto como uma realização p -dimensional da variável Gaussiana. A média desse vetor é o vetor $\boldsymbol{\mu}_p$ com dimensão $(p \times 1)$ cujos elementos são dados por

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{c}{1 - \phi_1 - \phi_2 - \cdots - \phi_p}. \quad (2.3.1)$$

Considere a matriz $\sigma_\varepsilon^2 \mathbf{V}_p$ de tamanho $(p \times p)$ como sendo uma matriz de variâncias e covariâncias de \mathbf{X}_p , que é dada por

$$\sigma_\varepsilon^2 \mathbf{V}_p = \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_{p-1} \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_{p-2} \\ \gamma_2 & \gamma_1 & \gamma_0 & \cdots & \gamma_{p-3} \\ \cdots & & & \ddots & \vdots \\ \gamma_{p-1} & \gamma_{p-2} & \gamma_{p-3} & \cdots & \gamma_0 \end{pmatrix} \quad (2.3.2)$$

onde

$$\gamma_j = \mathbb{E}[(Y_j - \mu)(Y_{j+1} - \mu)], \quad \text{para } j = 0, 1, \dots, p,$$

é a j -ésima autocovariância de um processo AR(p).

A função densidade das p primeiras observações é, então, uma variável aleatória com distribuição $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_p, \sigma_\varepsilon^2 \mathbf{V}_p)$, dada por

$$\begin{aligned} f_{X_1, \dots, X_p}(x_1, \dots, x_p; \boldsymbol{\eta}) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{p}{2}} \det(\sigma_\varepsilon^{-2} \mathbf{V}_p^{-1})^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} (\mathbf{X}_p - \boldsymbol{\mu})' \mathbf{V}_p^{-1} (\mathbf{X}_p - \boldsymbol{\mu})\right\} \\ &= (2\pi)^{-\frac{p}{2}} (\sigma_\varepsilon^{-2})^{\frac{p}{2}} \det(\mathbf{V}_p^{-1})^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} (\mathbf{X}_p - \boldsymbol{\mu})' \mathbf{V}_p^{-1} (\mathbf{X}_p - \boldsymbol{\mu})\right\} \end{aligned}$$

remetendo novamente que seja válida a propriedade $\det(\alpha \mathbf{A}) = \alpha^n \det(\mathbf{A})$, onde \mathbf{A} é uma matriz $(n \times n)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Para as observações restantes da amostra, (X_{p+1}, \dots, X_n) , a decomposição do erro de previsão pode ser usada. Condicional às primeiras $t-1$ observações, a t -ésima observação é Gaussiana com média

$$c + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p}$$

e com variância σ_ε^2 . Apenas as p mais recentes observações importam para essa distribuição. Consequentemente, para $t > p$,

$$\begin{aligned} f_{X_t|X_1, \dots, X_{t-1}}(x_t | x_1, \dots, x_{t-1}; \boldsymbol{\eta}) &= f_{X_t|X_{t-1}, \dots, X_{t-p}}(x_t | x_{t-p}, x_{t-p+1}, \dots, x_{t-1}; \boldsymbol{\eta}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\varepsilon^2}} \exp \left\{ -\frac{(x_t - c - \phi_1 x_{t-1} - \dots - \phi_p x_{t-p})^2}{2\sigma_\varepsilon^2} \right\}. \end{aligned}$$

Para a amostra completa $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_p, X_{p+1}, \dots, X_n)'$, a função de verossimilhança é dada por

$$\begin{aligned} f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n; \boldsymbol{\eta}) &= f_{X_1, \dots, X_p}(x_1, \dots, x_p; \boldsymbol{\eta}) \\ &\quad \times \prod_{t=p+1}^n f_{X_t|X_{t-1}, \dots, X_{t-p}}(x_t | x_{t-1}, \dots, x_{t-p}; \boldsymbol{\eta}). \end{aligned}$$

Assim, o logaritmo da função de verossimilhança é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\boldsymbol{\eta}) &= \log(f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n; \boldsymbol{\eta})) = -\frac{p}{2} \log(2\pi) - \frac{p}{2} \log(\sigma_\varepsilon^2) + \frac{1}{2} \log(\det(\mathbf{V}_p^{-1})) \\ &\quad - \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} (\mathbf{X}_p - \boldsymbol{\mu})' \mathbf{V}_p^{-1} (\mathbf{X}_p - \boldsymbol{\mu}) - \frac{n-p}{2} \log(2\pi) - \frac{n-p}{2} \log(\sigma_\varepsilon^2) \\ &\quad - \sum_{t=p+1}^n \frac{(x_t - c - \phi_1 x_{t-1} - \phi_2 x_{t-2} - \dots - \phi_p x_{t-p})^2}{2\sigma_\varepsilon^2} = \\ &= -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log(\sigma_\varepsilon^2) + \frac{1}{2} \log(\det(\mathbf{V}_p^{-1})) - \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} (\mathbf{X}_p - \boldsymbol{\mu})' \mathbf{V}_p^{-1} (\mathbf{X}_p - \boldsymbol{\mu}) - \\ &\quad - \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \sum_{t=p+1}^n (x_t - c - \phi_1 x_{t-1} - \phi_2 x_{t-2} - \dots - \phi_p x_{t-p})^2. \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Estimativas da expressão (2.3.3) necessitam da inversão da matriz \mathbf{V}_p de ordem $(p \times p)$. Denote o (i, j) -ésimo elemento de \mathbf{V}_p^{-1} por $v^{ij}(p)$. Galbraith e Galbraith (1974) mostraram que

$$v^{ij}(p) = \sum_{k=0}^{i-1} \phi_k \phi_{k+j-i} - \sum_{k=p+1-j}^{p+i-j} \phi_k \phi_{k+j-i}, \quad \text{para } 1 \leq i \leq j \leq p, \quad (2.3.4)$$

onde $\phi_0 = -1$. Valores de $v^{ij}(p)$, para $i > j$, podem ser facilmente calculados, já que \mathbf{V}_p^{-1} é uma matriz simétrica e, portanto, $v^{ij}(p) = v^{ji}(p)$.

Para um processo AR(1), \mathbf{V}_p^{-1} é um escalar. Seu valor é encontrado tomando-se $i = j = p = 1$ e usando (2.3.4). Portanto,

$$\mathbf{V}_1^{-1} = \sum_{k=0}^0 \phi_k \phi_k - \sum_{k=1}^1 \phi_k \phi_k = \phi_0^2 - \phi_1^2 = 1 - \phi_1^2.$$

Deste modo,

$$\sigma_\varepsilon^2 \mathbf{V}_1 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_1^2}$$

o que, de fato, reproduz a fórmula (2.1.2) para a variância de um processo AR(1).

Voltando ao Exemplo 2.1.1: Aplicando à série temporal $\{X_t\}_{t=1}^{300}$ do Exemplo 2.1.1 em que $\phi_1 = 0.5$, temos

$$\mathbf{V}_1^{-1} = (-1) \times (-1) - 0.5 \times 0.5 = 1 - 0.25 = 0.75.$$

Para um processo AR(2), a expressão (2.3.4) implica

$$\begin{aligned} v^{11}(2) &= \sum_{k=0}^0 \phi_k \phi_{k+1-1} - \sum_{k=2+1-1}^{2+1-1} \phi_k \phi_{k+1-1} = \phi_0^2 - \phi_2^2 = 1 - \phi_2^2; \\ v^{12}(2) &= \sum_{k=0}^0 \phi_k \phi_{k+2-1} - \sum_{k=2+1-2}^{2+1-2} \phi_k \phi_{k+2-1} = -\phi_1 - \phi_1 \phi_2 = -\phi_1(1 + \phi_2) = v^{21}(2); \\ v^{22}(2) &= \sum_{k=0}^1 \phi_k \phi_k - \sum_{k=2+1-2}^2 \phi_k \phi_k = \phi_0^2 + \phi_1^2 - \phi_1^2 - \phi_2^2 = \phi_0^2 - \phi_2^2 = 1 - \phi_2^2. \end{aligned}$$

Assim,

$$\mathbf{V}_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 - \phi_2^2 & -\phi_1(1 + \phi_2) \\ -\phi_1(1 + \phi_2) & 1 - \phi_2^2 \end{pmatrix} = (1 + \phi_2) \begin{pmatrix} 1 - \phi_2 & -\phi_1 \\ -\phi_1 & 1 - \phi_2 \end{pmatrix}.$$

Por conseguinte,

$$\det(\mathbf{V}_2^{-1}) = (1 + \phi_2)^2 \det \begin{pmatrix} 1 - \phi_2 & -\phi_1 \\ -\phi_1 & 1 - \phi_2 \end{pmatrix} = (1 + \phi_2)^2 [(1 - \phi_1)^2 - \phi_1^2]$$

e

$$\begin{aligned} (\mathbf{X}_2 - \boldsymbol{\mu}_2)' \mathbf{V}_2^{-1} (\mathbf{X}_2 - \boldsymbol{\mu}_2) &= [(X_1 - \mu) \quad (X_2 - \mu)]_{1 \times 2} (1 + \phi_2) \times \\ &\quad \times \begin{pmatrix} 1 - \phi_2 & -\phi_1 \\ -\phi_1 & 1 - \phi_2 \end{pmatrix}_{2 \times 2} \begin{pmatrix} X_1 - \mu \\ X_2 - \mu \end{pmatrix}_{2 \times 1} = \\ &= (1 + \phi_1) \left\{ (1 - \phi_2)(X_1 - \mu) - \phi_1(X_2 - \mu) - \phi_1(X_1 - \mu) + (1 - \phi_2)(X_2 - \mu) \right\} \begin{pmatrix} X_1 - \mu \\ X_2 - \mu \end{pmatrix} \\ &= (1 + \phi_2^2)(X_1 - \mu)^2 - 2\phi_1(1 + \phi_2)(X_1 - \mu)(X_2 - \mu) + (1 - \phi_2^2)(X_2 - \mu)^2. \end{aligned}$$

O logaritmo da função de verossimilhança exata para um processo AR(2) Gaussiano é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\boldsymbol{\eta}) &= -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log(\sigma_\varepsilon^2) + \frac{1}{2} \log \left\{ (1 - \phi_2)^2 [(1 + \phi_2)^2 - \phi_1^2] \right\} - \\ &\quad - \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \left\{ (1 + \phi_2^2)(X_1 - \mu)^2 - 2\phi_1(1 + \phi_2)(X_1 - \mu)(X_2 - \mu) + (1 - \phi_2^2)(X_2 - \mu)^2 \right\} - \\ &\quad - \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \sum_{t=3}^n (X_t - c - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2})^2, \quad \text{onde} \quad \mu = \frac{c}{1 - \phi_1 - \phi_2}. \end{aligned}$$

Observação 2.3.1. Visto que as estimativas mostradas em (2.1.7) não dependem de uma estatística mínima, suficiente e completa, mas das demais estimativas ainda desconhecidas, utiliza-se, como alternativa mais eficaz, o método de estimação dos parâmetros pela maximização, em termos numéricos e iterativos, da função de verossimilhança, conforme apresentamos na seção 2.4.

Exemplo 2.3.1. Seja agora $\{Z_t\}_{t=1}^{300}$ uma amostra gerada pelo software estatístico R de uma série temporal advinda de um processo AR(2) definido por

$$Z_t = 16 - 0.4Z_{t-1} + 0.5Z_{t-2} + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, 300, \quad (2.3.5)$$

onde $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo formado por variáveis aleatórias i.i.d. sendo o vetor de erros aleatórios com distribuição normal de média 0 e variância 1.

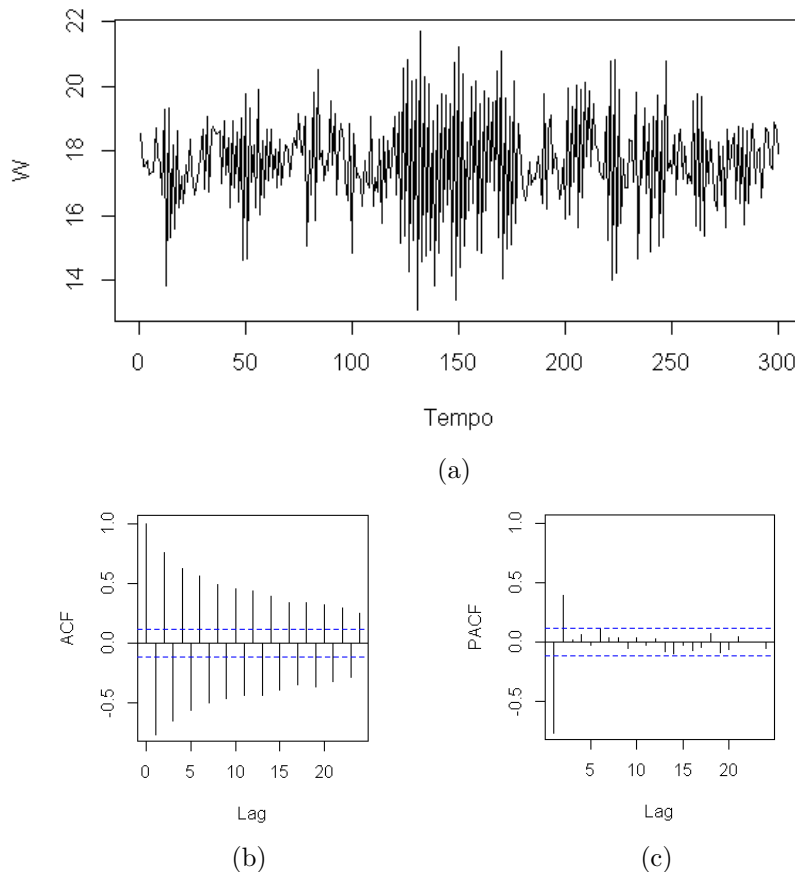


Figura 2.3: (a) Série temporal $\{Z_t\}_{t=1}^{300}$ referente ao processo AR(2) dado na expressão (2.3.5); (b) Função de autocorrelação amostral; (c) Função de autocorrelação parcial amostral.

As estimativas para o intercepto, ϕ_1 , ϕ_2 e variância do erro são dadas por

$$\hat{c} = 17.6246, \quad \hat{\phi}_1 = -0.4637, \quad \hat{\phi}_2 = 0.3955 \quad e \quad \hat{\sigma}_\varepsilon^2 = 0.9075. \quad (2.3.6)$$

Dessa forma, conforme (2.3.1), a média estimada é

$$\hat{\mu} = \frac{\hat{c}}{1 - \hat{\phi}_1 - \hat{\phi}_2} = \frac{17.6246}{1 + 0.4637 - 0.3955} = 16.4993.$$

Encontrando \mathbf{V}_2^{-1} , para o presente caso, utilizando (2.3.4), temos

$$\begin{aligned} v^{11}(2) &= 1 - 0.3955^2 = 1 - 0.1564 = 0.8436 \\ v^{12}(2) &= -(-0.4637) \times (1 + 0.3955) = 0.6471 = v^{21}(2) \\ v^{22}(2) &= 1 - 0.3955^2 = 1 - 0.1564 = 0.8436. \end{aligned}$$

Por conseguinte, conforme (2.3.2), temos que

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 \hat{\mathbf{V}}_2 = \begin{pmatrix} \hat{\gamma}_0 & \hat{\gamma}_1 \\ \hat{\gamma}_1 & \hat{\gamma}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8436 & 0.6471 \\ 0.6471 & 0.8436 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2.8795 & -2.2086 \\ -2.2086 & 2.8795 \end{pmatrix}. \quad (2.3.7)$$

Comparados aos valores teóricos, temos

$$\mu = \frac{c}{1 - \phi_1 - \phi_2} = \frac{16}{1 + 0.4 - 0.5} = 17.77$$

e

$$\sigma_\varepsilon^2 \mathbf{V}_2 = \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 \\ \gamma_1 & \gamma_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.7037 & -2.9630 \\ -2.9630 & 3.7037 \end{pmatrix}. \quad (2.3.8)$$

2.4 Processo Gaussiano ARMA(p, q)

O processo Gaussiano ARMA(p, q) é dado por

$$X_t = c + \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}, \quad \text{para } t \in \mathbb{Z},$$

onde $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo estocástico formado por variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição $\mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$, isto é, $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$, para todo $t \in \mathbb{Z}$.

O objetivo é estimar o vetor $\boldsymbol{\eta} = (c, \phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q, \sigma_\varepsilon^2)'$ de parâmetros. Aqui iremos apresentar somente a função de verossimilhança condicional (ver Hamilton, 1994). Uma aproximação comum para a função de verossimilhança de um processo ARMA(p, q) é obtida através das condicionais a ambos X 's e ε 's. Tomando valores iniciais para $X_0 = (X_0, X_{-1}, \dots, X_{-p+1})'$ e $\varepsilon_0 = (\varepsilon_0, \varepsilon_{-1}, \dots, \varepsilon_{-q+1})'$, a sequência $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)'$ pode ser calculada a partir de $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)'$ por iteração sobre

$$\varepsilon_t = -c - \phi_1 X_{t-1} - \cdots - \phi_p X_{t-p} - \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}, \quad (2.4.1)$$

para $t \in \{1, \dots, n\}$. O logaritmo da função de verossimilhança condicional é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\boldsymbol{\eta}; \mathbf{x}) &= \log(f_{X_1, \dots, X_n | \mathbf{x}_0, \varepsilon_0}(\mathbf{x} | \mathbf{x}_0, \varepsilon_0; \boldsymbol{\eta})) \\ &= -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log(\sigma_\varepsilon^2) - \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2. \end{aligned}$$

Uma opção é estabelecer X 's e ε 's iniciais iguais aos seus valores esperados, determinando $X_t = \frac{c}{1 - \phi_1 - \phi_2 - \dots - \phi_p}$ para todo $t \in \{0, 1, \dots, -p + 1\}$, $\varepsilon_t = 0$ para todo $t \in \{0, 1, \dots, -q + 1\}$ e então proceder com a iteração dada na expressão (2.4.1), para $t \in \{1, \dots, n\}$.

Box e Jenkins (1976) recomendam estabelecer os ε 's como sendo zero e X 's iguais a seus valores reais. Assim, a iteração (2.4.1) inicia no período $t = p + 1$ com X_1, X_2, \dots, X_p definidos como valores observados e $\varepsilon_p = \varepsilon_{p-1} = \dots = \varepsilon_{p-q+1} = 0$. Logo, a função de log-verossimilhança condicional é dada por

$$\begin{aligned} & \log(f(X_{p+1}, \dots, X_n) \mid X_1, \dots, X_p, \varepsilon_p = 0, \dots, \varepsilon_{p-q+1} = 0) \\ &= - \left(\frac{n-p}{2} \right) \log(2\pi) - \left(\frac{n-p}{2} \right) \log(\sigma_\varepsilon^2) - \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \sum_{t=p+1}^n \varepsilon_t^2. \end{aligned}$$

Considere o algoritmo de inovações, dado na proposição a seguir, que determina a previsão a um passo a frente para um processo estocástico Gaussiano. Esta proposição será útil na descrição da função de verossimilhança de um processo ARMA(p, q).

Proposição 2.4.1. *Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo estacionário com média zero e função de autocovariância dada por $\mathbb{E}(X_i X_j) = \kappa(i, j)$, onde a matriz $[\kappa(i, j)]_{i, j=1}^n$ é não singular para cada $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. Então os preditores \hat{X}_{n+1} a um passo à frente, para $n \in \mathbb{N}$, e seus erros quadráticos médios v_n , $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, são dados por*

$$\hat{X}_{n+1} = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0 \\ \sum_{j=1}^n \theta_{nj}(X_{n+1-j} - \hat{X}_{n+1-j}), & \text{se } n \geq 1 \end{cases} \quad (2.4.2)$$

e

$$\begin{aligned} v_0 &= \kappa(1, 1) \\ \theta_{n, n-k} &= v_k^{-1} \left(\kappa(n+1, k+1) - \sum_{j=0}^{k-1} \theta_{k, k-j} \theta_{n, n-j} v_j \right), \quad 0 \leq k < n-1, \\ v_n &= \kappa(n+1, n+1) - \sum_{j=0}^{n-1} \theta_{n, n-j}^2 v_j. \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

Observação 2.4.1. a) É fácil resolver o sistema (2.4.3), recursivamente, na ordem $v_0; \theta_{11}, v_1; \theta_{22}, \theta_{22}, v_2; \theta_{33}, \theta_{32}, \theta_{31}, v_3; \dots$.

b) Na Proposição 2.4.1, obtemos os preditores \hat{X}_{i+1} e seus respectivos erros quadráticos médios para um processo ARMA(p, q) causal, que são dados por

$$\begin{cases} \hat{X}_{i+1} = \sum_{j=1}^i \theta_{ij} (X_{i+1-j} - \hat{X}_{i+1-j}), & 1 \leq i < m = \max(p, q) \\ \hat{X}_{i+1} = \phi_1 X_i + \dots + \phi_p X_{i+1-p} + \sum_{j=1}^q \theta_{ij} (X_{i+1-j} - \hat{X}_{i+1-j}), & i \geq m \end{cases}$$

e

$$\mathbb{E}(X_{i+1} - \hat{X}_{i+1})^2 = \sigma_\varepsilon^2 r_i,$$

onde θ_{ij} e r_i são obtidos aplicando a Proposição 2.4.1 à função de autocovariância

$$\kappa(i, j) = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^{-2} \gamma_X(i-j), & 1 \leq i, j \leq m, \\ \sigma_\varepsilon^{-2} [\gamma_X(i-j) - \sum_{r=1}^p \phi_r \gamma_X(r - |i-j|)], & \min(i, j) \leq m < \max(i, j) \leq 2m, \\ \sum_{r=0}^q \theta_r \theta_{r+|i-j|}, & \min(i, j) > m, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (2.4.4)$$

onde $\theta_j = 0$ sempre que $j < q$.

c) Relembrando que θ_{ij} e r_i são independentes de σ_ε^2 .

A expressão geral da função de verossimilhança Gaussiana para o vetor de observações $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)'$ é dada por

$$L(\Phi, \Theta, \sigma_\varepsilon^2) = (2\pi\sigma_\varepsilon^2)^{-\frac{n}{2}} (r_0, \dots, r_{n-1})^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \hat{X}_i)^2}{r_{i-1}} \right\}. \quad (2.4.5)$$

Sua respectiva função de log-verossimilhança é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Phi, \Theta, \sigma_\varepsilon^2) &= \log(L(\Phi, \Theta, \sigma_\varepsilon^2)) \\ &= -\frac{n}{2} \log(2\pi\sigma_\varepsilon^2) - \frac{1}{2} \log(r_0 \cdots r_{n-1}) - \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \hat{X}_i)^2}{r_{i-1}}. \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

Derivamos a expressão (2.4.6) com respeito a σ_ε^2 , lembrando que r_i independe de σ_ε^2 , obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \mathcal{L}(\Phi, \Theta, \sigma_\varepsilon^2)}{\partial \sigma_\varepsilon^2} = -\frac{n}{2} \frac{2\pi}{2\pi\sigma_\varepsilon^2} - \frac{(-2)}{4(\sigma_\varepsilon^2)^2} \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \hat{X}_i)^2}{r_{i-1}} \\ &= -\frac{n}{2\sigma_\varepsilon^2} + \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^4} \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \hat{X}_i)^2}{r_{i-1}} \\ &\Leftrightarrow \hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \hat{X}_i)^2}{r_{i-1}} = \frac{1}{n} \mathbf{S}(\hat{\Phi}, \hat{\Theta}). \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

Além disso, os estimadores $\hat{\Phi}$ e $\hat{\Theta}$ são os valores de Φ e Θ que minimizam a função de verossimilhança reduzida dada por

$$l(\Phi, \Theta) = \log \left(\frac{\mathbf{S}(\Phi, \Theta)}{n} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \log(r_{i-1}) \quad (2.4.8)$$

Observação 2.4.2. a) A expressão (2.4.6) deveria ser maximizada em relação ao vetor $\boldsymbol{\eta} = (c, \phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q, \sigma_\varepsilon^2)'$ onde $c = 0$ (se o processo não tem média zero, consideramos o novo processo $Y_t = X_t - c$ que terá média zero). Essa maximização é feita primeiro considerando a derivada parcial em relação a σ_ε^2 para obter a expressão

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{n} \mathbf{S}(\hat{\Phi}, \hat{\Theta}) \quad (2.4.9)$$

que é o estimador de máxima verossimilhança para σ_ε^2 . Depois, através da função de verossimilhança reduzida, dada na expressão (2.4.8), maximizamos em relação ao vetor de parâmetros $\tilde{\boldsymbol{\eta}} = (\phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q)'$.

b) Observe que $\mathbf{S}(\hat{\Phi}, \hat{\Theta}) \equiv \sum_{j=1}^n \frac{(X_j - \hat{X}_j)^2}{r_{j-1}}$ que independe de σ_ε^2 .

c) O cálculo da função de verossimilhança reduzida $l(\Phi, \Theta)$, dada na expressão (2.4.8), pode ser obtido recursivamente para $\theta_{i-1,j}, r_{i-1}$ e \hat{X}_i usando a Proposição 2.4.1.

Utilizando notação matricial, Brockwell e Davis (1987) apresentam o estimador de máxima verossimilhança de σ_ε^2 usando a expressão (2.4.9). A função de verossimilhança de $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)'$, onde $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo ARMA(p, q), é dada por

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\eta}; \mathbf{x}) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \det(\boldsymbol{\Gamma}_n)^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{X}' \boldsymbol{\Gamma}_n^{-1} \mathbf{X} \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n v_0 \times \dots \times v_{n-1}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \hat{X}_i)^2}{v_{i-1}} \right\}, \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

onde cada valor v_i da matriz $\boldsymbol{\Gamma}_n$ é dado por $v_i = \sigma_\varepsilon^2 r_i$, $\det(\boldsymbol{\Gamma}_n) = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_{n-1}$ (produto da diagonal principal da matriz) e $\mathbf{X}' \boldsymbol{\Gamma}_n^{-1} \mathbf{X} = \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \hat{X}_i)^2}{v_{i-1}}$. Brockwell e Davis (2002) denotam

$$\mathbf{S}(\hat{\boldsymbol{\Phi}}, \hat{\boldsymbol{\Theta}}) = \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \hat{X}_i)^2}{v_{i-1}}. \quad (2.4.11)$$

Com base na maximização da função de verossimilhança reduzida dada na expressão (2.4.8), são definidos os critérios de informação que selecionam a ordem (p, q) do processo ARMA(p, q).

Exemplo 2.4.1. Seja $\{Y_t\}_{t=1}^{1000}$ uma amostra de uma série temporal advinda de um processo ARMA(1,1) definido por

$$Y_t = 0.1Y_{t-1} + 0.62\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \text{para } t = 1, 2, \dots, 1000, \quad (2.4.12)$$

onde $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é o processo formado por variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição normal de média 0 e variância 1.

As estimativas para o vetor de parâmetros $\boldsymbol{\eta} = (\phi_1, \theta_1, \sigma_\varepsilon^2)'$ que maximizam a função de verossimilhança são dadas por

$$\hat{\phi}_1 = 0.1018, \quad \hat{\theta}_1 = 0.6254 \quad \text{e} \quad \hat{\sigma}_\varepsilon^2 = 1.0002. \quad (2.4.13)$$

Os respectivos valores verdadeiros, a partir da expressão (2.4.12), são

$$\phi_1 = 0.1, \quad \theta_1 = 0.62 \quad \text{e} \quad \sigma_\varepsilon^2 = 1. \quad (2.4.14)$$

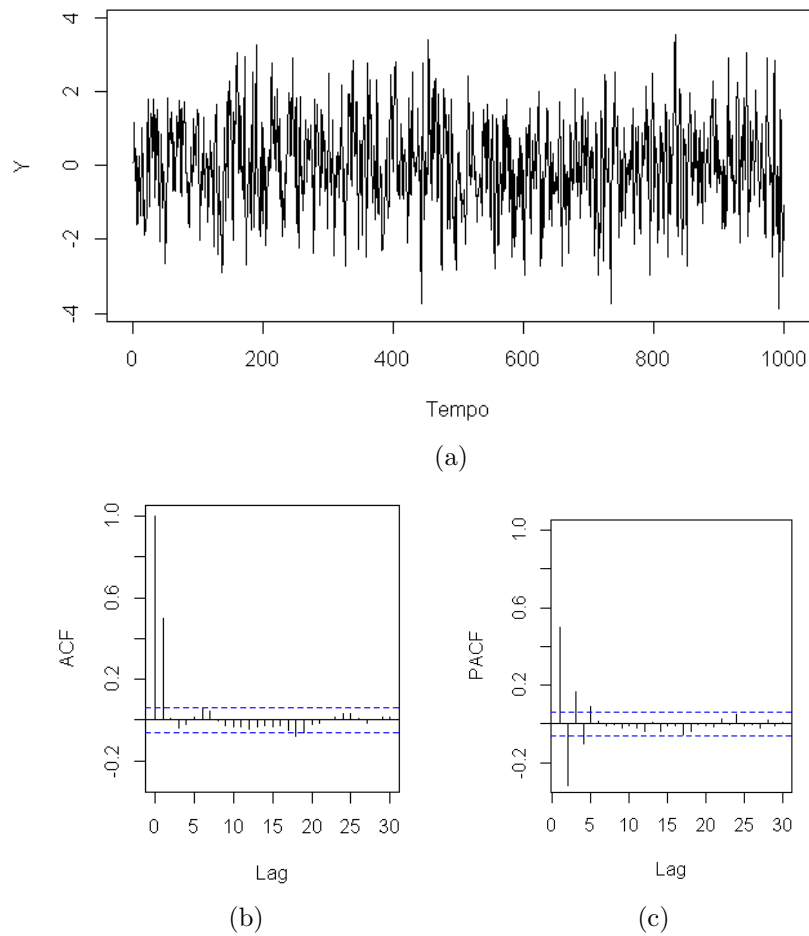


Figura 2.4: (a) Série temporal $\{Y_t\}_{t=1}^{1000}$ referente ao processo ARMA(1,1) dado na expressão (2.4.12); (b) Função de autocorrelação amostral; (c) Função de autocorrelação parcial amostral.

3 Critérios de Seleção de Modelos

3.1 Caso Gaussiano

Em busca da identificação de modelos de processos geradores de séries temporais, torna-se necessário, primeiramente, identificar a natureza e a ordem do processo. Um processo pode possuir características de Média Móvel (MA), ou ser Autorregressivo (AR), possuir ambas as componentes autorregressiva e média móvel (ARMA), e inclusive, necessitar de diferenciação (ARIMA), possuir sazonalidade (SARIMA), entre outros (por exemplo, ARFIMA, SARFIMA, GARCH, FIEGARCH, etc). Para este fim, diversos autores apresentam estatísticas para comparar modelos e identificar sua ordem de dependência.

Este capítulo destina-se a apresentar os principais critérios de seleção e suas expressões numéricas para modelos autorregressivos. O principal objetivo é verificar o desempenho e as propriedades estatísticas desses critérios de seleção de modelos quando aplicados ao caso de processos com inovações α -estável.

Apresentamos os critérios AIC de Akaike (1974), BIC de Schwarz (1978), HQC de Hannan e Quinn (1979) e EDC de Dorea e Zhao (2006), cujos termos seguem a forma geral

$$\text{critério} = -2\mathcal{L}(k) + \vartheta(k) c_n, \quad (3.1.1)$$

onde $\mathcal{L}(k)$ é a função de log-verossimilhança advinda de uma amostra de tamanho n , $k \in \{1, 2, \dots, p\}$ são os possíveis valores da ordem do processo $\text{AR}(p)$, $\vartheta(k)$ é uma constante associada a k e c_n é uma função penalizadora que depende de n . Em resumo, os critérios dependem da função de log-verossimilhança da amostra e de uma parcela ponderada pela ordem suposta e pelo tamanho amostral.

As expressões para cada um dos quatro critérios são dadas por

$$\text{AIC}(k) = -2\mathcal{L}(k) + 2 \vartheta(k) c_n = n \log(\hat{\sigma}_k^2) + 2k, \quad (3.1.2)$$

$$\text{BIC}(k) = -2\mathcal{L}(k) + 2 \frac{1}{2} \vartheta(k) \log(n) = n \log(\hat{\sigma}_k^2) + k \log(n), \quad (3.1.3)$$

$$\text{HQC}(k) = -2\mathcal{L}(k) + 2 c k \log(\log(n)) = n \log(\hat{\sigma}_k^2) + 2 c k \log(\log(n)), \quad (3.1.4)$$

$$\text{EDC}(k) = -2\mathcal{L}(k) + 2 \vartheta(k) c_n = n \log(\hat{\sigma}_k^2) + 2k \log(\log(n)), \quad (3.1.5)$$

onde c , na expressão (3.1.4), é uma constante real maior do que 1 e $\hat{\sigma}_k^2$ é uma estimativa da variância.

4 Estimador de Máxima Verossimilhança para Processos AR(p) α -estáveis

4.1 Distribuições α -estáveis

As distribuições α -estáveis formam uma classe de distribuições de probabilidade que admitem assimetria e maior densidade nas caudas, além de outras propriedades matemáticas interessantes. Essa classe foi caracterizada por Paul Lévy em meados de 1920. A falta de fórmulas fechadas para as funções de distribuição e densidade, exceto para três casos, tem sido o maior inconveniente no uso dessa classe. Hoje, possuímos programas confiáveis que calculam funções densidades, funções de distribuição e quantis, os quais são utilizados numa variedade de problemas práticos.

A nomenclatura *estável* provém do parâmetro de estabilidade $\alpha \in (0, 2]$, em que quanto maior for este valor, menor será a probabilidade de valores extremos na distribuição e vice-versa. Este parâmetro também é chamado de *índice de estabilidade* ou *expoente característico*.

A nomenclatura utilizada para denominar uma distribuição α -estável segue a forma $S_\alpha(\beta, \gamma, \delta)$. O parâmetro $\beta \in [-1, 1]$ refere-se a simetria, onde valores positivos indicam assimetria à direita. De forma análoga, valores negativos indicam assimetria à esquerda, e nulo ($\beta = 0$) indica simetria. O parâmetro $\gamma > 0$ designa a escala da distribuição (exercendo papel semelhante ao da variância) e semelhantemente a média, $\delta \in \mathbb{R}$ é o parâmetro de locação.

Há uma diversidade de parametrizações que foram sendo utilizadas ao longo dos anos por diferentes autores em diferentes aplicações, de acordo com suas especificidades, sejam elas cálculo numérico, ajuste dos dados, propriedades algébricas ou analíticas. Para deixar explícito qual parametrização está sendo utilizada e evitar confusão, o parâmetro inteiro k , por fim, indica a parametrização em uso. Aqui, iremos utilizar a parametrização 1 (ver Nolan, 2009).

Usaremos γ para o parâmetro de escala e δ para o parâmetro de locação para evitar confusão com os símbolos σ e μ que estão associados ao desvio padrão e a média, respectivamente.

Uma consequência das distribuições α -estáveis é que nem todos os momentos existem. Isso decorre que, quando $0 < \alpha < 2$, não temos segundo momento finito, e se $\alpha \leq 1$, a média é infinita. Dessa forma, podemos entender que o parâmetro de locação δ não será necessariamente a média do processo. O mesmo aplica-se ao parâmetro γ de escala.

Uma propriedade importante de variáveis aleatórias Gaussianas consiste em que a soma de duas delas próprias é também uma variável aleatória normal. Proveniente

disso, se X é normal, para X_1 e X_2 cópias independentes de X e para quaisquer constantes positivas a e b ,

$$aX_1 + bX_2 \stackrel{d}{=} cX + d, \quad (4.1.1)$$

para c positivo e $d \in \mathbb{R}$. O símbolo $\stackrel{d}{=}$ denota igualdade em distribuição, isto é, ambas as expressões têm a mesma lei de distribuição. Em outras palavras, a equação (4.1.1) afirma que a forma de X é preservada (em escala e locação) sob adição. Na classe de distribuições α -estáveis, essa propriedade permanece, como segue.

Definição 4.1.1. Uma variável aleatória X é *estável* ou *fracamente estável* se para X_1 e X_2 sendo cópias independentes de X e para quaisquer constantes positivas a e b , a equação (4.1.1) for válida para qualquer valor positivo de c e $d \in \mathbb{R}$. A variável aleatória é *estritamente estável* ou *fortemente estável* se a equação (4.1.1) for válida para $d = 0$ e para qualquer valor de a e b . Uma variável aleatória é *simetricamente estável* se for estável e simetricamente distribuída em torno de 0, ou seja, $X \stackrel{d}{=} -X$.

A seguir, apresentamos definições de variáveis aleatórias $X \sim S_\alpha(\beta, \gamma, \delta)$ e sua função característica.

Definição 4.1.2. Uma variável aleatória não-degenerativa X é α -estável se e somente se para todo $n > 1$ existirem constantes $c_n > 0$ e $d_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$X_1 + \cdots + X_n \stackrel{d}{=} c_n X + d_n, \quad (4.1.2)$$

onde X_1, \dots, X_n são cópias idênticas e independentes de X .

Definição 4.1.3. Uma variável aleatória X é α -estável se e somente se $X \stackrel{d}{=} aZ + b$, onde $0 < \alpha \leq 2$, $-1 \leq \beta \leq 1$, $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ e Z é uma variável aleatória com função característica dada por

$$\varphi_Z(t) = \mathbb{E}(e^{itZ}) = \begin{cases} \exp(-|t|^\alpha [1 - i\beta \tan(\frac{\pi\alpha}{2})(\text{sign}(t))]), & \alpha \neq 1, \\ \exp(-|t| [1 + i\beta \frac{2}{\pi}(\text{sign}(t)) \ln |t|]), & \alpha = 1, \end{cases} \quad (4.1.3)$$

onde a função sinal $\text{sign}(\cdot)$ é definida por

$$\text{sign}(u) = \begin{cases} -1, & u < 0, \\ 0, & u = 0 \\ 1, & u > 0. \end{cases} \quad (4.1.4)$$

Estas distribuições são simétricas em torno de zero quando $\beta = 0$ e $b = 0$. Neste caso, a função característica de aZ tem uma expressão mais simples dada por

$$\varphi(t) = \exp(-a^\alpha |t|^\alpha). \quad (4.1.5)$$

Pode-se mostrar que, se $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ então $X \sim S_2(0, \frac{\sigma}{\sqrt{2}}, \mu)$. Da mesma forma, uma distribuição de Cauchy $\mathcal{C}(\gamma, \delta)$ é estável $S_1(0, \gamma, \delta)$ e uma distribuição de Lévy $\mathcal{L}(\gamma, \delta)$ é também estável $S_{0.5}(1, \gamma, \delta)$. Apenas nestes três casos a variável aleatória α -estável tem função de distribuição com forma fechada e conhecida, ilustradas na Figura 4.1. Para qualquer outra situação, não existe fórmula explícita para as funções de distribuição e densidade de uma α -estável geral. Nessas situações, torna-se necessário utilizar integração numérica.

Como se sabe, as distribuições de Cauchy e de Lévy não possuem média nem variância finitas, pois $\alpha \leq 1$ em ambos os casos. Samorodnitsky e Taqqu (1994) provam este resultado através da seguinte proposição.

Proposição 4.1.1. *Seja $X \sim S_\alpha(\beta, \gamma, \delta)$, com $\alpha \in (0, 2)$. Então,*

$$\mathbb{E}(|X^r|) < \infty, \text{ para todo } 0 < r < \alpha$$

$$\mathbb{E}(|X^r|) = \infty, \text{ para todo } r \geq \alpha.$$

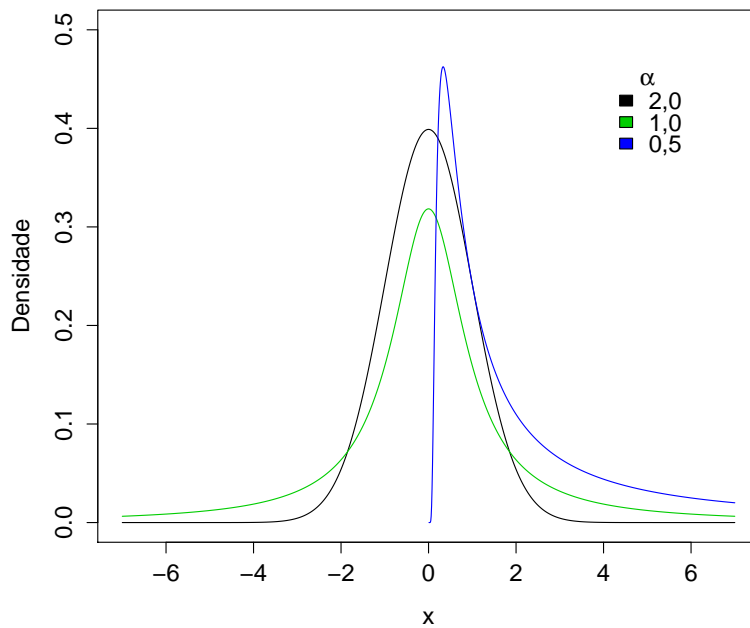


Figura 4.1: Função densidade de uma α -estável para os valores de $\alpha \in \{0.5, 1.0, 2.0\}$.

4.2 Processos AR(p) com Inovações α -estáveis

Um processo AR(p) com inovações α -estáveis é dado por

$$X_t = c + \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{Z},$$

onde $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. seguindo distribuição $\mathcal{S}_\alpha(\beta, \gamma, \delta)$, onde α , β , γ e δ são, respectivamente, os parâmetros de estabilidade, assimetria, escala e locação. Neste caso, o vetor de parâmetros do modelo é dado por $\boldsymbol{\eta} = (c, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p, \alpha, \beta, \gamma, \delta)'$.

Nas simulações de Monte Carlo apresentadas no Capítulo 5, consideramos processos simétricos em torno da origem, ou seja, β e δ são iguais a zero. Para determinar os estimadores de máxima verossimilhança correspondentes ao vetor de parâmetros $\boldsymbol{\eta} = (c, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p, \alpha, \gamma)'$, precisamos da função de verossimilhança completa

baseada na distribuição α -estável do processo das inovações. Para uma amostra $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$, a função de verossimilhança é dada por

$$L(\boldsymbol{\eta} \mid \mathbf{x}) = \prod_{t=1}^n f(\varepsilon_t \mid \boldsymbol{\eta})$$

e a função de log-verossimilhança é dada por

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\eta} \mid \mathbf{x}) = \sum_{t=1}^n \log(f(\varepsilon_t \mid \boldsymbol{\eta}))$$

onde $f(\varepsilon_t \mid \boldsymbol{\eta})$ é a função densidade do processo

$$\varepsilon_t = X_t - c - \phi_1 X_{t-1} - \dots - \phi_p X_{t-p}$$

que é composto por variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição $\mathcal{S}_\alpha(0, \gamma, 0)$.

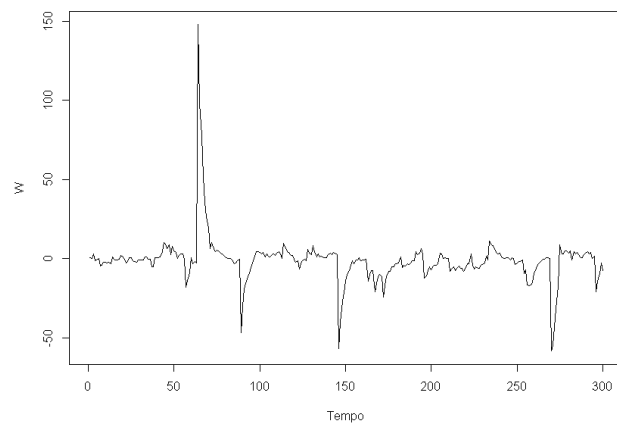
Para geração e estimação desses processos, utilizamos um programa em linguagem *Fortran 95* acoplado ao *R-project*. Os resultados das simulações de Monte Carlo estão no Apêndice A.

Exemplo 4.2.1. Seja $\{W_t\}_{t=1}^{300}$ uma amostra de uma série temporal advinda de um processo AR(1) definido por

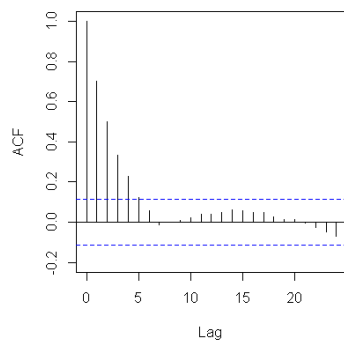
$$W_t = 0.7W_{t-1} + a_t, \quad \text{para } t = 1, 2, \dots, 300, \quad (4.2.1)$$

onde $\{a_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é uma sequência constituída por variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição de Cauchy padrão, ou seja, com parâmetros de escala 1 e de locação 0, isto é, $a_t \sim \mathcal{C}(1, 0) = \mathcal{S}_1(0, 1, 0)$.

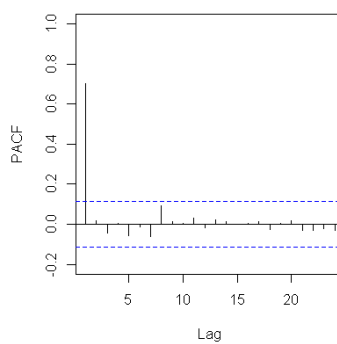
Utilizando a autocorrelação de *lag* 1 através das equações de Yule-Walker para estimar ϕ_1 , como sugerido por McLeod and Zhang (2006) e discutido na seção 2.1, temos $\hat{\rho}(1) = 0.702$, próximo ao valor verdadeiro $\phi_1 = 0.7$.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.2: (a) Série temporal $\{W_t\}_{t=1}^{300}$, referente ao processo AR(1) dado na expressão (4.2.1); (b) Função de autocorrelação amostral; (c) Função de autocorrelação parcial amostral.

5 Simulações de Monte Carlo

Neste capítulo, apresentamos um estudo de simulações de Monte Carlo envolvendo os processos $AR(p) - \mathcal{S}_\alpha(0, \gamma, 0)$. Primeiramente simulamos o processo de inovação α -estável com parâmetros α de estabilidade e γ de escala. Nas simulações, supomos simetria e locação iguais a zero, isto é, $\beta = 0$ e $\delta = 0$. Lembrando que os parâmetros γ e δ não se referem diretamente à variância e à média do processo, pois variáveis aleatórias da classe de distribuições α -estáveis possuem a seguinte propriedade

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \infty, \text{ para todo } 0 < \alpha \leq 1 \\ \mathbb{E}(X) &< \infty, \text{ para todo } 1 < \alpha \leq 2 \\ \text{Var}(X) &= \infty, \text{ para todo } 0 < \alpha < 2.\end{aligned}$$

A seguir, a partir do processo de inovações α -estáveis, geramos processos autorregressivos de ordem $p = 1$ e $p = 2$ com parâmetros ϕ_1 , ϕ_2 e ϕ_3 respectivamente, e simulamos os processos com diversos parâmetros conhecidos e ajustamos os modelos através das estimativas dos parâmetros. Estipulamos os seguintes cinco cenários.

Tabela 5.1: Cenários para o processo de geração de dados

Cenário	n	<i>burn-in</i>	<i>re</i>
(i)	1000	100	500
(ii)	1000	500	500
(iii)	3000	100	500
(iv)	3000	500	500
(v)	1000	100	1000

Em cada cenário, variou-se o vetor dos parâmetros de acordo com os possíveis valores: $\alpha \in \{0.5; 1.0; 1.2; 1.5; 1.8; 2.0\}$, $\phi_1 \in \{0.2; 0.5; 0.8\}$ e $\gamma \in \{1; 2; 3\}$. Consideramos o tamanho amostral $n \in \{1000; 3000\}$, as replicações $re \in \{500; 1000\}$ e *burn-in* $\in \{100; 500\}$. Para estas simulações, geramos processos autorregressivos $AR(p)$, $p = 1$ e 2 , com inovações Gaussianas (quando $\alpha = 2$) e não-Gaussianas (quando $\alpha \in \{0.5; 1.0; 1.2; 1.5; 1.8\}$). Estimativas e suas estatísticas de simulação encontram-se nas tabelas no Apêndice A e uma breve análise das propriedades das estimativas encontram-se no Apêndice B.

Analisando os resultados do caso $AR(1) - \mathcal{S}_\alpha(0, \gamma, 0)$, nota-se que a maioria das estimativas de α apresentam viés na primeira casa decimal para $\alpha \in \{0.5; 1.0\}$, na segunda casa decimal para $\alpha \in \{0.8; 1.2\}$ e vieses menos significativos para

$\alpha \in \{1.2; 1.5; 1.8; 2.0\}$. Estimativas de γ apresentam considerado viés quando acompanhadas de estimativas inconsistentes de α . Estimativas de ϕ_1 são sempre consistentes.

Analisando os resultados do caso AR(2) - $\mathcal{S}_\alpha(0, \gamma, 0)$, nota-se que a maioria das estimativas de α apresentam alto viés quando $\alpha \in \{0.8; 1.2; 1.5\}$ e vieses menos significativos somente quando $\alpha \in \{1.8; 2.0\}$. Estimativas de γ permanecem apresentando considerado viés quando acompanhadas de estimativas inconsistentes de α . Estimativas de ϕ_1 e ϕ_2 conservam-se sempre consistentes.

Na estimação dos valores de α , utilizamos o método de integração numérica de Nelder-Mead que necessita de valores iniciais $\tilde{\alpha}$ para o processo de iteração. Entretanto, as estimativas são fortemente influenciadas pelas escolhas dos valores iniciais tanto quanto menor for o parâmetro α a ser estimado. Sob uma análise em modelos autorregressivos de ordem 1, as Figuras 5.1-5.4 ilustram essa influência mostrando que chutes iniciais próximos aos valores verdadeiros de α , quando $\alpha \leq 1$, apresentam maior proporção de estimativas consistentes. Nos casos em que $\alpha > 1$, os melhores desempenhos ocorrem para $\tilde{\alpha} = 1.99$.

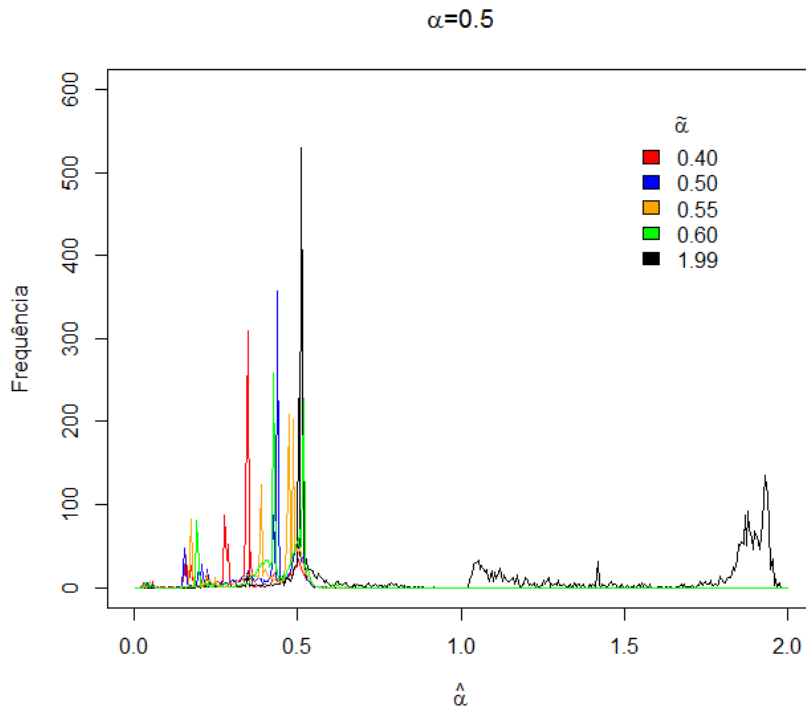


Figura 5.1: Frequências das estimativas de α quando seu valor verdadeiro é 0.5, para os valores de $\tilde{\alpha} \in \{0.40; 0.50; 0.55; 0.60; 1.99\}$.

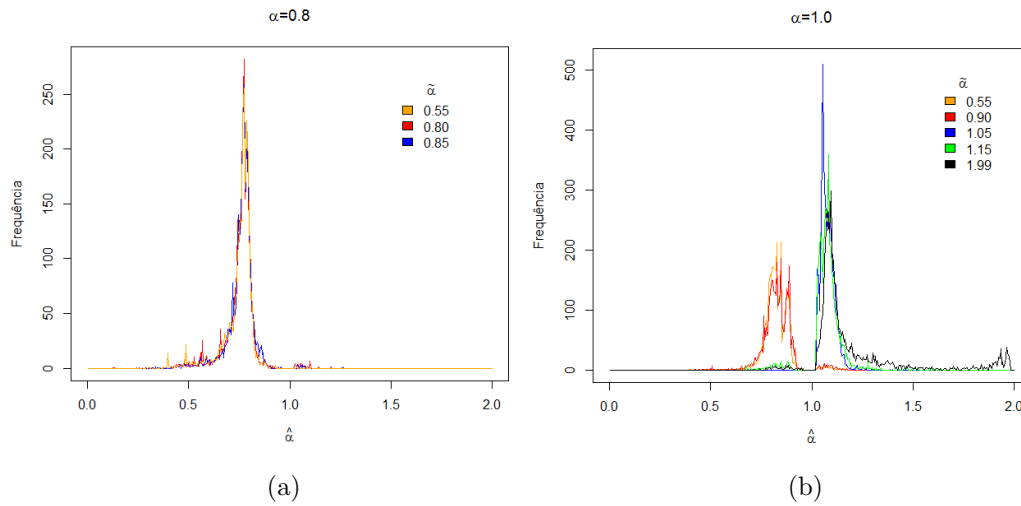


Figura 5.2: (a) Frequências das estimativas de α quando seu valor verdadeiro é 0.8, para os valores de $\tilde{\alpha} \in \{0.55; 0.80; 0.85\}$; (b) Frequências das estimativas de α quando seu valor verdadeiro é 1.0, para os valores de $\tilde{\alpha} \in \{0.55; 0.90; 1.05; 1.15; 1.99\}$.

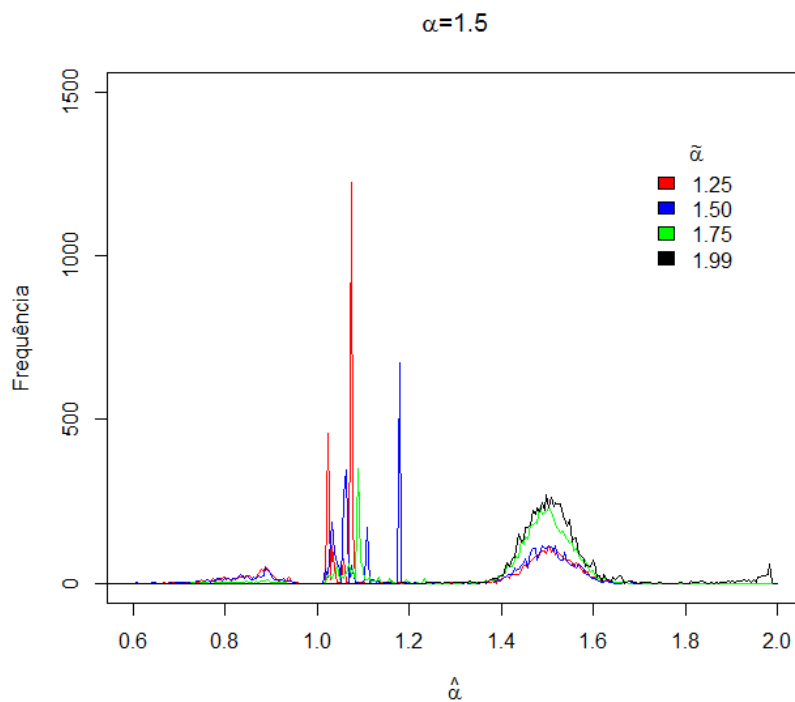


Figura 5.3: Frequências das estimativas de α quando seu valor verdadeiro é 1.5, para os valores de $\tilde{\alpha} \in \{1.25; 1.50; 1.75; 1.99\}$.

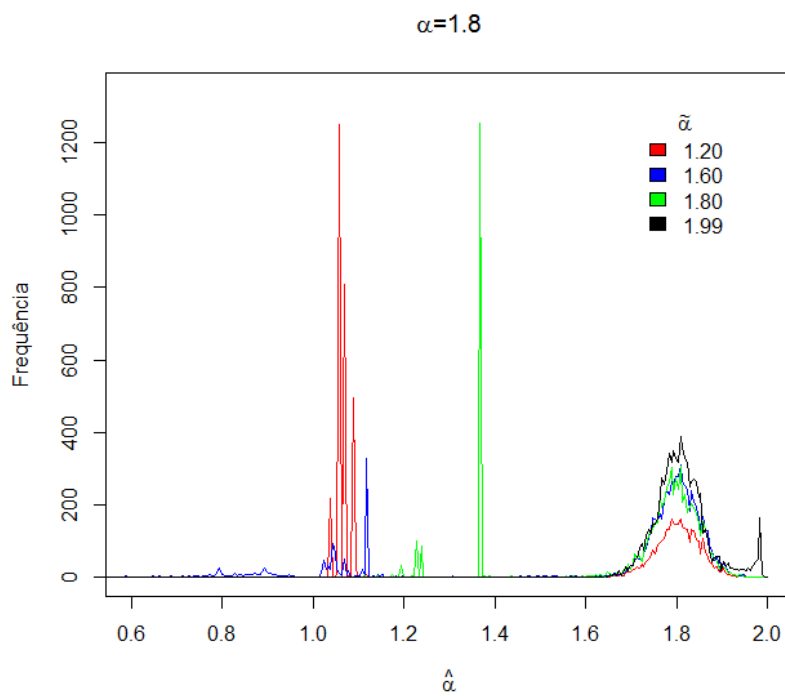


Figura 5.4: Frequências das estimativas de α quando seu valor verdadeiro é 1.8, para os valores de $\tilde{\alpha} \in \{1.20; 1.60; 1.80; 1.99\}$.

Conclusões

Com base no estudo realizado e nos seus resultados, apresentamos um suficiente referencial teórico e uma exposição do ferramental necessário para analisar e modelar séries temporais $AR(p)$ com o objetivo de identificar a ordem do processo gerador. Apresentamos conceitos básicos de processos estocásticos, de séries temporais e de propriedades de um estimador. Definimos os principais modelos lineares propostos por Box e Jenkins (1976). Apresentamos também o estimador de máxima verossimilhança para os processos Gaussianos $ARMA(p,q)$ com ênfase nos processos autorregressivos $AR(1)$ e $AR(p)$ e estendemos para o caso de processos $AR(p)$, quando suas inovações advém da classe $\mathcal{S}_\alpha(\beta, \gamma, \delta)$. Realizamos diversas simulações de Monte Carlo baseadas em processos $AR(1)$ e $AR(2)$, com inovações Gaussianas e α -estáveis, com o objetivo de estimar os vetores de parâmetros $\boldsymbol{\eta}_1 = (\phi_1, \gamma, \alpha)'$ e $\boldsymbol{\eta}_2 = (\phi_1, \phi_2, \gamma, \alpha)'$, respectivamente. Os resultados destas simulações são bastantes bons para os processos $AR(p)$ com inovações α -estáveis, incorporando boas propriedades de estimação quando $\alpha \geq 1.2$ nos processos $AR(1)$ e quando $\alpha \geq 1.8$ nos processos $AR(2)$.

Referências

- Akaike, H. (1969). "Fitting Autoregressive Models for Prediction". *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, Vol. **21**(1), 243-247.
- Akaike, H. (1971). "Autoregressive Model Fitting for Control". *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, Vol. **23**(2), 163-180.
- Box, G.E.P. e G.M. Jenkins (1976). *Time Series Analysis: forecasting and control*. San Francisco: Holden-Day.
- Brockwell, P.J. e R.A. Davis (1991). *Time Series: Theory and Methods*. New York: Springer-Verlag.
- Brockwell, P.J. e R.A. Davis (2002). *Introduction to Time Series and Forecasting*. New York: Springer-Verlag.
- Crato, N., R.R. Linhares e S.R.C. Lopes (2011). " α -stable laws for noncoding regions in DNA sequences". *Journal of Applied Statistics*, Vol. **38**(2), 261-271.
- Dorea, C.C.Y. e L.C. Zhao (2006). "Exponential bounds for the probability of wrong determination of the order of a Markov chain by using the EDC criterion". *Journal of Statistical Planning and Inference*, Vol. **136**, 3689-3697.
- Galbraith, R.F. e J.I. Galbraith (1974). "On the Inverses of Some Patterned Matrices Arising in the Theory of Stationary Time Series". *Journal of Applied Probability*, Vol. **11**, 63-71.
- Hamilton, J.D. (1994). *Time Series Analysis*. Princeton: Princeton University Press.
- Hannan, E.J. e B.G. Quinn (1979). "The Determination of the Order of an Autoregression". *Journal of the Royal Statistical Society. Series B*, Vol. **41**(2), 190-195.
- McLeod, A. I., Zhang, Y., (2006). "Partial autocorrelation parameterization for subset autoregression". *Journal of Time Series Analysis* Vol. **27** (4), 599-612.
- Morettin, P.A. e C.M.C. Toloi (2004). *Análise de Séries Temporais*. ABE - Projeto Fisher. São Paulo: Edgard Blücher.
- Nolan, J.P. (2009). *Stable Distributions: Models for Heavy Tailed Data*. Available at www.academic2.american.edu/~jpnolan.

Nunes, M.A. (2005). *Processos de longa dependência com parâmetro fracionário variando no tempo*. Dissertação de Mestrado no Programa de Pós-Graduação em Matemática, UFRGS, Porto Alegre.

Samorodnitsky, G. e M.S. Taqqu (1994). *Stable Non Gaussian Random Processes*. London: Chapman & Hall.

Schwarz, G.E. (1978). "Estimating the dimension of a model". *Annals of Statistics*, Vol. **6**(2), 461-464.

Wei, W.W.S. (1990). *Time Series Analysis: Univariate and Multivariate Methods*. Philadelphia: Temple University.

Apêndice A Tabelas

As tabelas A.1-A.9 apresentam as estimativas e suas estatísticas das simulações dos cenários descritos no Capítulo 5, contendo os valores originais dos parâmetros e suas estimativas médias, viés, erro-padrão e erro quadrático médio para os vetores de parâmetros $\boldsymbol{\eta}_1 = (\phi_1, \gamma, \alpha)'$ e $\boldsymbol{\eta}_2 = (\phi_1, \phi_2, \gamma, \alpha)'$.

Tabela A.1: Estimativas e suas estatísticas de simulação para o caso AR(1) - $S_\alpha(0, \gamma, 0)$ com $n = 1000$, $burn-in = 100$, $re = 500$.

α	$\bar{\alpha}$	$bias_\alpha$	sd_α	mse_α	γ	$\bar{\gamma}$	$bias_\gamma$	sd_γ	mse_γ	ϕ_1	$\bar{\phi}_1$	$bias_{\phi_1}$	sd_{ϕ_1}	mse_{ϕ_1}
0.5	0.483	0.017	0.016	0.001	1.0	1.081	-0.081	0.069	0.011	0.2	0.200	-0.000	0.000	0.000
0.5	0.314	0.186	0.128	0.051	1.0	1.388	-0.388	0.386	0.299	0.5	0.500	0.000	0.000	0.000
0.5	0.353	0.147	0.181	0.054	1.0	0.823	0.177	0.477	0.258	0.8	0.800	-0.000	0.000	0.000
0.5	0.466	0.034	0.032	0.002	2.0	1.214	0.786	0.267	0.689	0.2	0.200	0.000	0.000	0.000
0.5	0.253	0.247	0.130	0.078	2.0	1.886	0.114	0.659	0.447	0.5	0.500	0.000	0.000	0.000
0.5	0.299	0.201	0.175	0.071	2.0	1.073	0.927	0.724	1.381	0.8	0.800	0.000	0.000	0.000
0.5	0.425	0.075	0.050	0.008	3.0	1.420	1.580	0.625	2.886	0.2	0.200	0.000	0.000	0.000
0.5	0.287	0.213	0.132	0.062	3.0	1.768	1.232	0.810	2.172	0.5	0.500	0.000	0.000	0.000
0.5	0.272	0.228	0.166	0.079	3.0	1.260	1.740	2.218	7.934	0.8	0.800	-0.000	0.000	0.000
0.8	0.740	0.060	0.061	0.007	1.0	0.937	0.063	0.122	0.019	0.2	0.200	0.000	0.003	0.000
0.8	0.739	0.061	0.079	0.010	1.0	0.980	0.020	0.191	0.037	0.5	0.499	0.001	0.009	0.000
0.8	0.753	0.047	0.055	0.005	1.0	0.943	0.057	0.261	0.071	0.8	0.800	0.000	0.002	0.000
0.8	0.742	0.058	0.076	0.009	2.0	1.752	0.248	0.361	0.191	0.2	0.200	0.000	0.003	0.000
0.8	0.672	0.128	0.142	0.036	2.0	2.028	-0.028	0.528	0.279	0.5	0.500	0.000	0.003	0.000
0.8	0.752	0.048	0.058	0.006	2.0	1.776	0.224	0.375	0.190	0.8	0.800	-0.000	0.002	0.000
0.8	0.726	0.074	0.102	0.016	3.0	2.516	0.484	0.757	0.807	0.2	0.200	-0.000	0.004	0.000
0.8	0.759	0.041	0.059	0.005	3.0	2.820	0.180	0.476	0.258	0.5	0.500	0.000	0.002	0.000
0.8	0.748	0.052	0.085	0.010	3.0	2.672	0.328	0.669	0.554	0.8	0.800	-0.000	0.001	0.000
1.0	0.823	0.177	0.046	0.033	1.0	0.919	0.081	0.102	0.017	0.2	0.200	-0.000	0.011	0.000
1.0	0.813	0.187	0.055	0.038	1.0	0.897	0.103	0.173	0.040	0.5	0.498	0.002	0.021	0.000
1.0	0.822	0.178	0.076	0.037	1.0	1.090	-0.090	0.408	0.174	0.8	0.800	-0.000	0.015	0.000
1.0	0.829	0.171	0.050	0.032	2.0	1.727	0.273	0.298	0.163	0.2	0.199	0.001	0.013	0.000
1.0	0.817	0.183	0.046	0.036	2.0	1.856	0.144	0.306	0.114	0.5	0.500	0.000	0.007	0.000
1.0	0.827	0.173	0.062	0.034	2.0	1.601	0.399	0.368	0.295	0.8	0.800	0.000	0.005	0.000
1.0	0.823	0.177	0.057	0.035	3.0	2.753	0.247	0.408	0.227	0.2	0.202	-0.002	0.013	0.000
1.0	0.809	0.191	0.088	0.044	3.0	2.762	0.238	0.596	0.411	0.5	0.499	0.001	0.012	0.000
1.0	0.830	0.170	0.066	0.033	3.0	2.423	0.577	0.628	0.727	0.8	0.800	0.000	0.005	0.000
1.2	1.232	-0.032	0.105	0.012	1.0	1.053	-0.053	0.153	0.026	0.2	0.204	-0.004	0.027	0.001
1.2	1.252	-0.052	0.150	0.025	1.0	1.058	-0.058	0.164	0.030	0.5	0.504	-0.004	0.019	0.000
1.2	1.261	-0.061	0.185	0.038	1.0	1.073	-0.073	0.184	0.039	0.8	0.801	-0.001	0.010	0.000
1.2	1.237	-0.037	0.126	0.017	2.0	2.115	-0.115	0.339	0.128	0.2	0.200	0.000	0.028	0.001
1.2	1.243	-0.043	0.137	0.021	2.0	2.110	-0.110	0.309	0.108	0.5	0.500	-0.000	0.018	0.000
1.2	1.255	-0.055	0.156	0.027	2.0	2.120	-0.120	0.290	0.098	0.8	0.801	-0.001	0.008	0.000
1.2	1.230	-0.030	0.113	0.014	3.0	3.118	-0.118	0.396	0.170	0.2	0.201	-0.001	0.025	0.001
1.2	1.260	-0.060	0.165	0.031	3.0	3.182	-0.182	0.537	0.321	0.5	0.502	-0.002	0.018	0.000
1.2	1.220	-0.020	0.091	0.009	3.0	3.085	-0.085	0.267	0.078	0.8	0.801	-0.001	0.005	0.000
1.5	1.514	-0.014	0.096	0.009	1.0	1.011	-0.011	0.064	0.004	0.2	0.202	-0.002	0.028	0.001
1.5	1.518	-0.018	0.093	0.009	1.0	1.011	-0.011	0.062	0.004	0.5	0.501	-0.001	0.020	0.000
1.5	1.507	-0.007	0.062	0.004	1.0	1.005	-0.005	0.039	0.002	0.8	0.801	-0.001	0.010	0.000
1.5	1.523	-0.023	0.121	0.015	2.0	2.029	-0.029	0.139	0.020	0.2	0.201	-0.001	0.031	0.001
1.5	1.510	-0.010	0.094	0.009	2.0	2.019	-0.019	0.120	0.015	0.5	0.501	-0.001	0.020	0.000
1.5	1.517	-0.017	0.098	0.010	2.0	2.024	-0.024	0.115	0.014	0.8	0.801	-0.001	0.012	0.000
1.5	1.536	-0.036	0.131	0.019	3.0	3.058	-0.058	0.264	0.073	0.2	0.201	-0.001	0.030	0.001
1.5	1.512	-0.012	0.086	0.008	3.0	3.013	-0.013	0.138	0.019	0.5	0.502	-0.002	0.015	0.000
1.5	1.512	-0.012	0.078	0.006	3.0	3.015	-0.015	0.135	0.018	0.8	0.803	-0.003	0.010	0.000

α	$\bar{\alpha}$	bias_α	sd_α	mse_α	γ	$\bar{\gamma}$	bias_γ	sd_γ	mse_γ	ϕ_1	$\bar{\phi}_1$	bias_{ϕ_1}	sd_{ϕ_1}	mse_{ϕ_1}
1.8	1.806	-0.006	0.058	0.003	1.0	1.004	-0.004	0.035	0.001	0.2	0.204	-0.004	0.030	0.001
1.8	1.806	-0.006	0.055	0.003	1.0	1.002	-0.002	0.033	0.001	0.5	0.503	-0.003	0.024	0.001
1.8	1.802	-0.002	0.048	0.002	1.0	1.001	-0.001	0.031	0.001	0.8	0.803	-0.003	0.016	0.000
1.8	1.821	-0.021	0.073	0.006	2.0	2.020	-0.020	0.077	0.006	0.2	0.204	-0.004	0.030	0.001
1.8	1.810	-0.010	0.059	0.004	2.0	2.008	-0.008	0.070	0.005	0.5	0.501	-0.001	0.025	0.001
1.8	1.806	-0.006	0.051	0.003	2.0	2.005	-0.005	0.061	0.004	0.8	0.802	-0.002	0.016	0.000
1.8	1.816	-0.016	0.065	0.004	3.0	3.020	-0.020	0.121	0.015	0.2	0.199	0.001	0.033	0.001
1.8	1.808	-0.008	0.057	0.003	3.0	3.007	-0.007	0.098	0.010	0.5	0.500	-0.000	0.025	0.001
1.8	1.801	-0.001	0.046	0.002	3.0	3.000	-0.000	0.092	0.008	0.8	0.800	0.000	0.015	0.000
2.0	1.996	0.004	0.007	0.000	1.0	0.998	0.002	0.022	0.001	0.2	0.200	-0.000	0.030	0.001
2.0	1.995	0.005	0.009	0.000	1.0	0.998	0.002	0.023	0.001	0.5	0.499	0.001	0.027	0.001
2.0	1.994	0.006	0.013	0.000	1.0	0.998	0.002	0.023	0.001	0.8	0.797	0.003	0.020	0.000
2.0	1.994	0.006	0.007	0.000	2.0	1.997	0.003	0.043	0.002	0.2	0.196	0.004	0.032	0.001
2.0	1.995	0.005	0.008	0.000	2.0	1.998	0.002	0.043	0.002	0.5	0.497	0.003	0.027	0.001
2.0	1.994	0.006	0.013	0.000	2.0	1.999	0.001	0.044	0.002	0.8	0.796	0.004	0.019	0.000
2.0	1.991	0.009	0.010	0.000	3.0	2.993	0.007	0.068	0.005	0.2	0.192	0.008	0.037	0.001
2.0	1.994	0.006	0.008	0.000	3.0	2.996	0.004	0.068	0.005	0.5	0.497	0.003	0.027	0.001
2.0	1.994	0.006	0.014	0.000	3.0	2.998	0.002	0.070	0.005	0.8	0.797	0.003	0.020	0.000

Tabela A.2: Estimativas e suas estatísticas de simulação para o caso AR(1) - $S_\alpha(0, \gamma, 0)$ com $n = 1000$, $burn-in = 500$, $re = 500$.

α	$\bar{\alpha}$	$bias_\alpha$	sd_α	mse_α	γ	$\bar{\gamma}$	$bias_\gamma$	sd_γ	mse_γ	ϕ_1	$\bar{\phi}_1$	$bias_{\phi_1}$	sd_{ϕ_1}	mse_{ϕ_1}
0.5	0.534	-0.034	0.054	0.004	1.0	1.192	-0.192	0.199	0.076	0.2	0.200	0.000	0.005	0.000
0.5	0.386	0.114	0.112	0.025	1.0	1.307	-0.307	0.536	0.381	0.5	0.500	0.000	0.000	0.000
0.5	0.365	0.135	0.202	0.059	1.0	1.163	-0.163	0.525	0.302	0.8	0.800	0.000	0.000	0.000
0.5	0.498	0.002	0.053	0.003	2.0	1.473	0.527	0.314	0.376	0.2	0.200	0.000	0.007	0.000
0.5	0.365	0.135	0.131	0.035	2.0	1.355	0.645	0.499	0.665	0.5	0.500	0.000	0.000	0.000
0.5	0.325	0.175	0.203	0.072	2.0	1.532	0.468	0.590	0.566	0.8	0.800	0.000	0.000	0.000
0.5	0.484	0.016	0.065	0.004	3.0	1.687	1.313	0.602	2.086	0.2	0.200	0.000	0.007	0.000
0.5	0.302	0.198	0.131	0.056	3.0	1.617	1.383	0.739	2.457	0.5	0.500	0.000	0.000	0.000
0.5	0.320	0.180	0.198	0.072	3.0	1.936	1.064	0.911	1.961	0.8	0.800	0.000	0.000	0.000
0.8	0.744	0.056	0.043	0.005	1.0	0.992	0.008	0.130	0.017	0.2	0.192	0.008	0.034	0.001
0.8	0.750	0.050	0.060	0.006	1.0	1.050	-0.050	0.215	0.049	0.5	0.495	0.005	0.046	0.002
0.8	0.745	0.055	0.092	0.011	1.0	1.104	-0.104	0.297	0.099	0.8	0.798	0.002	0.016	0.000
0.8	0.743	0.057	0.060	0.007	2.0	1.762	0.238	0.352	0.181	0.2	0.200	-0.000	0.002	0.000
0.8	0.763	0.037	0.049	0.004	2.0	1.841	0.159	0.321	0.128	0.5	0.500	-0.000	0.002	0.000
0.8	0.730	0.070	0.094	0.014	2.0	1.773	0.227	0.490	0.291	0.8	0.800	0.000	0.004	0.000
0.8	0.757	0.043	0.056	0.005	3.0	2.878	0.122	0.390	0.167	0.2	0.200	0.000	0.003	0.000
0.8	0.759	0.041	0.053	0.004	3.0	2.788	0.212	0.475	0.270	0.5	0.500	0.000	0.002	0.000
0.8	0.735	0.065	0.129	0.021	3.0	2.593	0.407	0.871	0.923	0.8	0.800	0.000	0.004	0.000
1.0	0.808	0.192	0.042	0.039	1.0	0.907	0.093	0.123	0.024	0.2	0.179	0.021	0.050	0.003
1.0	0.804	0.196	0.062	0.042	1.0	0.963	0.037	0.268	0.073	0.5	0.480	0.020	0.085	0.008
1.0	0.824	0.176	0.119	0.045	1.0	0.963	0.037	0.309	0.097	0.8	0.798	0.002	0.026	0.001
1.0	0.818	0.182	0.048	0.036	2.0	1.748	0.252	0.285	0.145	0.2	0.199	0.001	0.009	0.000
1.0	0.834	0.166	0.075	0.033	2.0	1.686	0.314	0.345	0.217	0.5	0.500	0.000	0.023	0.001
1.0	0.804	0.196	0.093	0.047	2.0	1.632	0.368	0.515	0.400	0.8	0.797	0.003	0.020	0.000
1.0	0.831	0.169	0.061	0.032	3.0	2.735	0.265	0.395	0.226	0.2	0.200	-0.000	0.017	0.000
1.0	0.832	0.168	0.070	0.033	3.0	2.482	0.518	0.536	0.555	0.5	0.500	-0.000	0.010	0.000
1.0	0.830	0.170	0.083	0.036	3.0	2.676	0.324	0.554	0.411	0.8	0.801	-0.001	0.009	0.000
1.2	1.230	-0.030	0.104	0.012	1.0	1.053	-0.053	0.166	0.030	0.2	0.202	-0.002	0.026	0.001
1.2	1.241	-0.041	0.115	0.015	1.0	1.050	-0.050	0.141	0.022	0.5	0.502	-0.002	0.020	0.000
1.2	1.276	-0.076	0.192	0.042	1.0	1.078	-0.078	0.195	0.044	0.8	0.801	-0.001	0.011	0.000
1.2	1.245	-0.045	0.130	0.019	2.0	2.128	-0.128	0.335	0.128	0.2	0.202	-0.002	0.028	0.001
1.2	1.249	-0.049	0.140	0.022	2.0	2.113	-0.113	0.316	0.112	0.5	0.501	-0.001	0.018	0.000
1.2	1.260	-0.060	0.157	0.028	2.0	2.126	-0.126	0.313	0.114	0.8	0.801	-0.001	0.009	0.000
1.2	1.231	-0.031	0.091	0.009	3.0	3.158	-0.158	0.444	0.222	0.2	0.199	0.001	0.023	0.001
1.2	1.252	-0.052	0.144	0.023	3.0	3.164	-0.164	0.498	0.275	0.5	0.503	-0.003	0.019	0.000
1.2	1.221	-0.021	0.087	0.008	3.0	3.096	-0.096	0.274	0.084	0.8	0.801	-0.001	0.007	0.000
1.5	1.511	-0.011	0.078	0.006	1.0	1.011	-0.011	0.058	0.003	0.2	0.203	-0.003	0.024	0.001
1.5	1.513	-0.013	0.083	0.007	1.0	1.008	-0.008	0.055	0.003	0.5	0.501	-0.001	0.018	0.000
1.5	1.506	-0.006	0.064	0.004	1.0	1.005	-0.005	0.050	0.003	0.8	0.801	-0.001	0.011	0.000
1.5	1.524	-0.024	0.117	0.014	2.0	2.034	-0.034	0.142	0.021	0.2	0.202	-0.002	0.029	0.001
1.5	1.509	-0.009	0.085	0.007	2.0	2.010	-0.010	0.100	0.010	0.5	0.501	-0.001	0.018	0.000
1.5	1.505	-0.005	0.080	0.006	2.0	2.010	-0.010	0.091	0.008	0.8	0.801	-0.001	0.011	0.000
1.5	1.532	-0.032	0.128	0.017	3.0	3.060	-0.060	0.233	0.058	0.2	0.202	-0.002	0.030	0.001
1.5	1.508	-0.008	0.079	0.006	3.0	3.028	-0.028	0.156	0.025	0.5	0.502	-0.002	0.018	0.000
1.5	1.511	-0.011	0.074	0.006	3.0	3.020	-0.020	0.124	0.016	0.8	0.803	-0.003	0.012	0.000

α	$\bar{\alpha}$	bias_α	sd_α	mse_α	γ	$\bar{\gamma}$	bias_γ	sd_γ	mse_γ	ϕ_1	$\bar{\phi}_1$	bias_{ϕ_1}	sd_{ϕ_1}	mse_{ϕ_1}
1.8	1.810	-0.010	0.063	0.004	1.0	1.004	-0.004	0.038	0.001	0.2	0.202	-0.002	0.030	0.001
1.8	1.806	-0.006	0.056	0.003	1.0	1.003	-0.003	0.035	0.001	0.5	0.501	-0.001	0.026	0.001
1.8	1.803	-0.003	0.052	0.003	1.0	1.001	-0.001	0.032	0.001	0.8	0.802	-0.002	0.016	0.000
1.8	1.824	-0.024	0.073	0.006	2.0	2.021	-0.021	0.082	0.007	0.2	0.201	-0.001	0.032	0.001
1.8	1.807	-0.007	0.056	0.003	2.0	2.007	-0.007	0.064	0.004	0.5	0.500	0.000	0.026	0.001
1.8	1.807	-0.007	0.054	0.003	2.0	2.008	-0.008	0.061	0.004	0.8	0.801	-0.001	0.016	0.000
1.8	1.814	-0.014	0.068	0.005	3.0	3.014	-0.014	0.117	0.014	0.2	0.199	0.001	0.030	0.001
1.8	1.808	-0.008	0.058	0.003	3.0	3.011	-0.011	0.109	0.012	0.5	0.501	-0.001	0.024	0.001
1.8	1.800	-0.000	0.047	0.002	3.0	3.003	-0.003	0.098	0.010	0.8	0.800	0.000	0.015	0.000
2.0	1.996	0.004	0.007	0.000	1.0	0.997	0.003	0.023	0.001	0.2	0.200	-0.000	0.031	0.001
2.0	1.995	0.005	0.009	0.000	1.0	0.997	0.003	0.023	0.001	0.5	0.499	0.001	0.027	0.001
2.0	1.994	0.006	0.013	0.000	1.0	0.997	0.003	0.023	0.001	0.8	0.797	0.003	0.020	0.000
2.0	1.994	0.006	0.007	0.000	2.0	1.997	0.003	0.044	0.002	0.2	0.198	0.002	0.032	0.001
2.0	1.995	0.005	0.007	0.000	2.0	1.998	0.002	0.044	0.002	0.5	0.498	0.002	0.028	0.001
2.0	1.994	0.006	0.013	0.000	2.0	1.999	0.001	0.046	0.002	0.8	0.797	0.003	0.019	0.000
2.0	1.991	0.009	0.010	0.000	3.0	2.996	0.004	0.068	0.005	0.2	0.192	0.008	0.038	0.002
2.0	1.994	0.006	0.008	0.000	3.0	2.998	0.002	0.068	0.005	0.5	0.497	0.003	0.028	0.001
2.0	1.995	0.005	0.014	0.000	3.0	3.002	-0.002	0.069	0.005	0.8	0.797	0.003	0.020	0.000

Tabela A.3: Estimativas e suas estatísticas de simulação para o caso AR(1) - $S_\alpha(0, \gamma, 0)$ com $n = 3000$, $burn-in = 100$, $re = 500$.

α	$\bar{\alpha}$	$bias_\alpha$	sd_α	mse_α	γ	$\bar{\gamma}$	$bias_\gamma$	sd_γ	mse_γ	ϕ_1	$\bar{\phi}_1$	$bias_{\phi_1}$	sd_{ϕ_1}	mse_{ϕ_1}
0.5	0.532	-0.032	0.087	0.009	1.0	1.275	-0.275	1.299	1.760	0.2	0.189	0.011	0.042	0.002
0.5	0.386	0.114	0.113	0.026	1.0	1.323	-0.323	0.523	0.377	0.5	0.500	0.000	0.000	0.000
0.5	0.421	0.079	0.154	0.030	1.0	0.976	0.024	0.427	0.183	0.8	0.800	-0.000	0.000	0.000
0.5	0.502	-0.002	0.069	0.005	2.0	1.430	0.570	0.351	0.448	0.2	0.199	0.001	0.012	0.000
0.5	0.383	0.117	0.121	0.028	2.0	1.254	0.746	0.512	0.818	0.5	0.500	-0.000	0.000	0.000
0.5	0.384	0.116	0.163	0.040	2.0	1.370	0.630	0.633	0.797	0.8	0.800	0.000	0.000	0.000
0.5	0.484	0.016	0.073	0.006	3.0	1.563	1.437	0.531	2.347	0.2	0.200	-0.000	0.000	0.000
0.5	0.314	0.186	0.132	0.052	3.0	1.585	1.415	0.980	2.960	0.5	0.499	0.001	0.016	0.000
0.5	0.348	0.152	0.177	0.055	3.0	1.808	1.192	0.968	2.355	0.8	0.800	-0.000	0.000	0.000
0.8	0.716	0.084	0.046	0.009	1.0	1.019	-0.019	0.192	0.037	0.2	0.159	0.041	0.070	0.007
0.8	0.711	0.089	0.060	0.012	1.0	1.084	-0.084	0.399	0.166	0.5	0.485	0.015	0.077	0.006
0.8	0.707	0.093	0.073	0.014	1.0	1.213	-0.213	0.512	0.307	0.8	0.798	0.002	0.015	0.000
0.8	0.715	0.085	0.058	0.011	2.0	1.638	0.362	0.392	0.284	0.2	0.194	0.006	0.031	0.001
0.8	0.726	0.074	0.054	0.008	2.0	1.770	0.230	0.426	0.234	0.5	0.497	0.003	0.030	0.001
0.8	0.714	0.086	0.076	0.013	2.0	1.700	0.300	0.435	0.279	0.8	0.799	0.001	0.008	0.000
0.8	0.725	0.075	0.064	0.010	3.0	2.657	0.343	0.539	0.407	0.2	0.198	0.002	0.017	0.000
0.8	0.735	0.065	0.048	0.007	3.0	2.660	0.340	0.531	0.397	0.5	0.498	0.002	0.023	0.001
0.8	0.684	0.116	0.126	0.029	3.0	2.345	0.655	0.966	1.360	0.8	0.800	0.000	0.002	0.000
1.0	0.760	0.240	0.037	0.059	1.0	0.965	0.035	0.119	0.015	0.2	0.110	0.090	0.080	0.015
1.0	0.758	0.242	0.060	0.062	1.0	1.000	0.000	0.338	0.114	0.5	0.408	0.092	0.174	0.039
1.0	0.770	0.230	0.093	0.062	1.0	1.050	-0.050	0.545	0.299	0.8	0.786	0.014	0.093	0.009
1.0	0.769	0.231	0.056	0.056	2.0	1.576	0.424	0.361	0.309	0.2	0.187	0.013	0.042	0.002
1.0	0.775	0.225	0.060	0.054	2.0	1.634	0.366	0.492	0.376	0.5	0.497	0.003	0.033	0.001
1.0	0.764	0.236	0.075	0.061	2.0	1.589	0.411	0.536	0.456	0.8	0.796	0.004	0.039	0.002
1.0	0.779	0.221	0.048	0.051	3.0	2.550	0.450	0.559	0.514	0.2	0.198	0.002	0.027	0.001
1.0	0.779	0.221	0.057	0.052	3.0	2.191	0.809	0.636	1.058	0.5	0.495	0.005	0.042	0.002
1.0	0.776	0.224	0.066	0.054	3.0	2.690	0.310	0.775	0.696	0.8	0.799	0.001	0.018	0.000
1.2	1.225	-0.025	0.092	0.009	1.0	1.045	-0.045	0.141	0.022	0.2	0.203	-0.003	0.026	0.001
1.2	1.228	-0.028	0.103	0.011	1.0	1.049	-0.049	0.137	0.021	0.5	0.502	-0.002	0.018	0.000
1.2	1.288	-0.088	0.211	0.052	1.0	1.085	-0.085	0.203	0.048	0.8	0.801	-0.001	0.010	0.000
1.2	1.246	-0.046	0.131	0.019	2.0	2.150	-0.150	0.334	0.134	0.2	0.203	-0.003	0.032	0.001
1.2	1.250	-0.050	0.149	0.025	2.0	2.121	-0.121	0.310	0.110	0.5	0.500	-0.000	0.020	0.000
1.2	1.257	-0.057	0.164	0.030	2.0	2.121	-0.121	0.300	0.104	0.8	0.801	-0.001	0.008	0.000
1.2	1.228	-0.028	0.103	0.011	3.0	3.116	-0.116	0.346	0.133	0.2	0.201	-0.001	0.022	0.000
1.2	1.278	-0.078	0.195	0.044	3.0	3.196	-0.196	0.500	0.288	0.5	0.502	-0.002	0.022	0.000
1.2	1.217	-0.017	0.082	0.007	3.0	3.077	-0.077	0.228	0.058	0.8	0.801	-0.001	0.005	0.000
1.5	1.498	0.002	0.068	0.005	1.0	1.008	-0.008	0.051	0.003	0.2	0.203	-0.003	0.021	0.000
1.5	1.501	-0.001	0.059	0.003	1.0	1.004	-0.004	0.039	0.002	0.5	0.500	-0.000	0.013	0.000
1.5	1.502	-0.002	0.044	0.002	1.0	1.003	-0.003	0.025	0.001	0.8	0.801	-0.001	0.007	0.000
1.5	1.516	-0.016	0.096	0.009	2.0	2.025	-0.025	0.119	0.015	0.2	0.203	-0.003	0.024	0.001
1.5	1.510	-0.010	0.082	0.007	2.0	2.015	-0.015	0.087	0.008	0.5	0.502	-0.002	0.015	0.000
1.5	1.510	-0.010	0.076	0.006	2.0	2.012	-0.012	0.075	0.006	0.8	0.800	-0.000	0.007	0.000
1.5	1.547	-0.047	0.141	0.022	3.0	3.087	-0.087	0.259	0.074	0.2	0.203	-0.003	0.026	0.001
1.5	1.510	-0.010	0.072	0.005	3.0	3.019	-0.019	0.116	0.014	0.5	0.500	-0.000	0.012	0.000
1.5	1.514	-0.014	0.074	0.006	3.0	3.024	-0.024	0.111	0.013	0.8	0.802	-0.002	0.008	0.000

α	$\bar{\alpha}$	bias_α	sd_α	mse_α	γ	$\bar{\gamma}$	bias_γ	sd_γ	mse_γ	ϕ_1	$\bar{\phi}_1$	bias_{ϕ_1}	sd_{ϕ_1}	mse_{ϕ_1}
1.8	1.812	-0.012	0.056	0.003	1.0	1.004	-0.004	0.026	0.001	0.2	0.205	-0.005	0.021	0.000
1.8	1.813	-0.013	0.054	0.003	1.0	1.005	-0.005	0.029	0.001	0.5	0.505	-0.005	0.018	0.000
1.8	1.808	-0.008	0.043	0.002	1.0	1.003	-0.003	0.021	0.000	0.8	0.805	-0.005	0.010	0.000
1.8	1.831	-0.031	0.074	0.007	2.0	2.025	-0.025	0.076	0.006	0.2	0.204	-0.004	0.025	0.001
1.8	1.813	-0.013	0.057	0.003	2.0	2.009	-0.009	0.058	0.003	0.5	0.500	0.000	0.017	0.000
1.8	1.819	-0.019	0.057	0.004	2.0	2.015	-0.015	0.051	0.003	0.8	0.802	-0.002	0.011	0.000
1.8	1.828	-0.028	0.072	0.006	3.0	3.033	-0.033	0.093	0.010	0.2	0.202	-0.002	0.023	0.001
1.8	1.809	-0.009	0.046	0.002	3.0	3.012	-0.012	0.071	0.005	0.5	0.502	-0.002	0.016	0.000
1.8	1.807	-0.007	0.030	0.001	3.0	3.007	-0.007	0.054	0.003	0.8	0.802	-0.002	0.009	0.000
2.0	1.995	0.005	0.005	0.000	1.0	0.998	0.002	0.013	0.000	0.2	0.199	0.001	0.018	0.000
2.0	1.995	0.005	0.009	0.000	1.0	0.998	0.002	0.013	0.000	0.5	0.499	0.001	0.017	0.000
2.0	1.993	0.007	0.013	0.000	1.0	0.997	0.003	0.014	0.000	0.8	0.797	0.003	0.014	0.000
2.0	1.993	0.007	0.007	0.000	2.0	1.995	0.005	0.025	0.001	0.2	0.198	0.002	0.019	0.000
2.0	1.993	0.007	0.007	0.000	2.0	1.996	0.004	0.025	0.001	0.5	0.499	0.001	0.016	0.000
2.0	1.993	0.007	0.014	0.000	2.0	1.996	0.004	0.028	0.001	0.8	0.798	0.002	0.012	0.000
2.0	1.990	0.010	0.009	0.000	3.0	2.992	0.008	0.040	0.002	0.2	0.194	0.006	0.025	0.001
2.0	1.994	0.006	0.007	0.000	3.0	2.995	0.005	0.039	0.002	0.5	0.499	0.001	0.017	0.000
2.0	1.992	0.008	0.015	0.000	3.0	2.995	0.005	0.043	0.002	0.8	0.798	0.002	0.013	0.000

Tabela A.4: Estimativas e suas estatísticas de simulação para o caso AR(1) - $S_\alpha(0, \gamma, 0)$ com $n = 3000$, $burn-in = 500$, $re = 500$.

α	$\bar{\alpha}$	$bias_\alpha$	sd_α	mse_α	γ	$\bar{\gamma}$	$bias_\gamma$	sd_γ	mse_γ	ϕ_1	$\bar{\phi}_1$	$bias_{\phi_1}$	sd_{ϕ_1}	mse_{ϕ_1}
0.5	0.523	-0.023	0.047	0.003	1.0	1.103	-0.103	0.154	0.034	0.2	0.200	0.000	0.007	0.000
0.5	0.273	0.227	0.100	0.062	1.0	1.824	-0.824	0.409	0.846	0.5	0.500	0.000	0.000	0.000
0.5	0.344	0.156	0.190	0.060	1.0	0.983	0.017	0.582	0.338	0.8	0.800	0.000	0.000	0.000
0.5	0.464	0.036	0.031	0.002	2.0	1.278	0.722	0.255	0.586	0.2	0.200	0.000	0.000	0.000
0.5	0.392	0.108	0.097	0.021	2.0	1.336	0.664	0.684	0.908	0.5	0.500	-0.000	0.000	0.000
0.5	0.381	0.119	0.161	0.040	2.0	1.275	0.725	0.653	0.951	0.8	0.800	0.000	0.000	0.000
0.5	0.453	0.047	0.033	0.003	3.0	1.354	1.646	0.425	2.888	0.2	0.200	-0.000	0.000	0.000
0.5	0.410	0.090	0.070	0.013	3.0	1.420	1.580	1.062	3.620	0.5	0.500	0.000	0.000	0.000
0.5	0.386	0.114	0.148	0.035	3.0	1.693	1.307	1.058	2.825	0.8	0.800	0.000	0.000	0.000
0.8	0.713	0.087	0.051	0.010	1.0	0.935	0.065	0.128	0.021	0.2	0.198	0.002	0.015	0.000
0.8	0.688	0.112	0.092	0.021	1.0	1.042	-0.042	0.318	0.103	0.5	0.497	0.003	0.033	0.001
0.8	0.697	0.103	0.089	0.019	1.0	1.107	-0.107	0.335	0.124	0.8	0.801	-0.001	0.005	0.000
0.8	0.704	0.096	0.069	0.014	2.0	1.657	0.343	0.364	0.250	0.2	0.200	-0.000	0.001	0.000
0.8	0.733	0.067	0.049	0.007	2.0	1.700	0.300	0.306	0.183	0.5	0.500	-0.000	0.001	0.000
0.8	0.715	0.085	0.071	0.012	2.0	1.583	0.417	0.455	0.381	0.8	0.800	-0.000	0.003	0.000
0.8	0.711	0.089	0.078	0.014	3.0	2.423	0.577	0.683	0.798	0.2	0.200	-0.000	0.003	0.000
0.8	0.743	0.057	0.042	0.005	3.0	2.597	0.403	0.541	0.454	0.5	0.500	-0.000	0.002	0.000
0.8	0.693	0.107	0.114	0.024	3.0	2.408	0.592	0.955	1.261	0.8	0.800	0.000	0.003	0.000
1.0	0.757	0.243	0.055	0.062	1.0	0.868	0.132	0.141	0.037	0.2	0.182	0.018	0.045	0.002
1.0	0.752	0.248	0.059	0.065	1.0	0.992	0.008	0.333	0.111	0.5	0.468	0.032	0.099	0.011
1.0	0.762	0.238	0.067	0.061	1.0	0.925	0.075	0.238	0.062	0.8	0.800	-0.000	0.013	0.000
1.0	0.776	0.224	0.051	0.053	2.0	1.669	0.331	0.321	0.212	0.2	0.199	0.001	0.009	0.000
1.0	0.753	0.247	0.078	0.067	2.0	1.889	0.111	0.418	0.187	0.5	0.497	0.003	0.032	0.001
1.0	0.781	0.219	0.068	0.053	2.0	1.571	0.429	0.415	0.356	0.8	0.800	-0.000	0.007	0.000
1.0	0.778	0.222	0.050	0.052	3.0	2.579	0.421	0.521	0.449	0.2	0.198	0.002	0.016	0.000
1.0	0.796	0.204	0.070	0.047	3.0	2.181	0.819	0.627	1.062	0.5	0.499	0.001	0.010	0.000
1.0	0.779	0.221	0.072	0.054	3.0	2.516	0.484	0.591	0.582	0.8	0.799	0.001	0.010	0.000
1.2	1.228	-0.028	0.098	0.010	1.0	1.049	-0.049	0.140	0.022	0.2	0.203	-0.003	0.025	0.001
1.2	1.240	-0.040	0.129	0.018	1.0	1.057	-0.057	0.149	0.025	0.5	0.504	-0.004	0.020	0.000
1.2	1.286	-0.086	0.205	0.049	1.0	1.077	-0.077	0.201	0.046	0.8	0.801	-0.001	0.009	0.000
1.2	1.245	-0.045	0.127	0.018	2.0	2.127	-0.127	0.343	0.134	0.2	0.201	-0.001	0.030	0.001
1.2	1.234	-0.034	0.114	0.014	2.0	2.097	-0.097	0.300	0.100	0.5	0.501	-0.001	0.017	0.000
1.2	1.253	-0.053	0.152	0.026	2.0	2.110	-0.110	0.302	0.103	0.8	0.802	-0.002	0.008	0.000
1.2	1.232	-0.032	0.113	0.014	3.0	3.136	-0.136	0.415	0.190	0.2	0.202	-0.002	0.021	0.000
1.2	1.272	-0.072	0.190	0.041	3.0	3.233	-0.233	0.544	0.349	0.5	0.501	-0.001	0.023	0.001
1.2	1.215	-0.015	0.078	0.006	3.0	3.063	-0.063	0.208	0.047	0.8	0.800	-0.000	0.004	0.000
1.5	1.503	-0.003	0.052	0.003	1.0	1.010	-0.010	0.050	0.003	0.2	0.201	-0.001	0.016	0.000
1.5	1.504	-0.004	0.058	0.003	1.0	1.007	-0.007	0.043	0.002	0.5	0.502	-0.002	0.016	0.000
1.5	1.503	-0.003	0.048	0.002	1.0	1.003	-0.003	0.026	0.001	0.8	0.801	-0.001	0.006	0.000
1.5	1.521	-0.021	0.107	0.012	2.0	2.026	-0.026	0.137	0.019	0.2	0.199	0.001	0.023	0.001
1.5	1.507	-0.007	0.079	0.006	2.0	2.012	-0.012	0.089	0.008	0.5	0.503	-0.003	0.014	0.000
1.5	1.507	-0.007	0.067	0.005	2.0	2.010	-0.010	0.070	0.005	0.8	0.801	-0.001	0.006	0.000
1.5	1.547	-0.047	0.144	0.023	3.0	3.087	-0.087	0.284	0.088	0.2	0.200	0.000	0.027	0.001
1.5	1.508	-0.008	0.071	0.005	3.0	3.019	-0.019	0.119	0.014	0.5	0.500	-0.000	0.011	0.000
1.5	1.512	-0.012	0.070	0.005	3.0	3.017	-0.017	0.099	0.010	0.8	0.802	-0.002	0.008	0.000

α	$\bar{\alpha}$	bias_α	sd_α	mse_α	γ	$\bar{\gamma}$	bias_γ	sd_γ	mse_γ	ϕ_1	$\bar{\phi}_1$	bias_{ϕ_1}	sd_{ϕ_1}	mse_{ϕ_1}
1.8	1.813	-0.013	0.057	0.003	1.0	1.005	-0.005	0.028	0.001	0.2	0.204	-0.004	0.021	0.000
1.8	1.814	-0.014	0.055	0.003	1.0	1.004	-0.004	0.026	0.001	0.5	0.505	-0.005	0.018	0.000
1.8	1.810	-0.010	0.048	0.002	1.0	1.004	-0.004	0.023	0.001	0.8	0.805	-0.005	0.010	0.000
1.8	1.831	-0.031	0.075	0.007	2.0	2.027	-0.027	0.075	0.006	0.2	0.205	-0.005	0.023	0.001
1.8	1.815	-0.015	0.058	0.004	2.0	2.015	-0.015	0.061	0.004	0.5	0.500	-0.000	0.015	0.000
1.8	1.813	-0.013	0.050	0.003	2.0	2.010	-0.010	0.049	0.003	0.8	0.803	-0.003	0.010	0.000
1.8	1.830	-0.030	0.073	0.006	3.0	3.039	-0.039	0.106	0.013	0.2	0.202	-0.002	0.024	0.001
1.8	1.811	-0.011	0.048	0.002	3.0	3.013	-0.013	0.072	0.005	0.5	0.501	-0.001	0.016	0.000
1.8	1.804	-0.004	0.029	0.001	3.0	3.005	-0.005	0.054	0.003	0.8	0.802	-0.002	0.009	0.000
2.0	1.995	0.005	0.005	0.000	1.0	0.998	0.002	0.013	0.000	0.2	0.199	0.001	0.018	0.000
2.0	1.995	0.005	0.008	0.000	1.0	0.998	0.002	0.014	0.000	0.5	0.499	0.001	0.016	0.000
2.0	1.994	0.006	0.013	0.000	1.0	0.999	0.001	0.014	0.000	0.8	0.796	0.004	0.014	0.000
2.0	1.994	0.006	0.007	0.000	2.0	1.996	0.004	0.026	0.001	0.2	0.198	0.002	0.020	0.000
2.0	1.993	0.007	0.007	0.000	2.0	1.996	0.004	0.026	0.001	0.5	0.500	0.000	0.016	0.000
2.0	1.992	0.008	0.015	0.000	2.0	1.997	0.003	0.028	0.001	0.8	0.798	0.002	0.012	0.000
2.0	1.991	0.009	0.009	0.000	3.0	2.993	0.007	0.040	0.002	0.2	0.195	0.005	0.025	0.001
2.0	1.993	0.007	0.007	0.000	3.0	2.995	0.005	0.040	0.002	0.5	0.499	0.001	0.017	0.000
2.0	1.994	0.006	0.013	0.000	3.0	2.997	0.003	0.043	0.002	0.8	0.799	0.001	0.013	0.000

Tabela A.5: Estimativas e suas estatísticas de simulação para o caso AR(1) - $S_\alpha(0, \gamma, 0)$ com $n = 1000$, $burn-in = 100$, $re = 1000$.

α	$\bar{\alpha}$	$bias_\alpha$	sd_α	mse_α	γ	$\bar{\gamma}$	$bias_\gamma$	sd_γ	mse_γ	ϕ_1	$\bar{\phi}_1$	$bias_{\phi_1}$	sd_{ϕ_1}	mse_{ϕ_1}
0.5	0.528	-0.028	0.042	0.003	1.0	1.096	-0.096	0.118	0.023	0.2	0.200	-0.000	0.001	0.000
0.5	0.299	0.201	0.117	0.054	1.0	1.689	-0.689	0.507	0.731	0.5	0.500	-0.000	0.000	0.000
0.5	0.333	0.167	0.201	0.068	1.0	1.061	-0.061	0.592	0.354	0.8	0.800	-0.000	0.000	0.000
0.5	0.470	0.030	0.030	0.002	2.0	1.288	0.712	0.268	0.578	0.2	0.200	0.000	0.000	0.000
0.5	0.380	0.120	0.111	0.027	2.0	1.426	0.574	0.673	0.783	0.5	0.500	-0.000	0.000	0.000
0.5	0.333	0.167	0.202	0.069	2.0	1.469	0.531	0.647	0.700	0.8	0.800	-0.000	0.000	0.000
0.5	0.455	0.045	0.035	0.003	3.0	1.491	1.509	0.590	2.625	0.2	0.200	-0.000	0.000	0.000
0.5	0.389	0.111	0.102	0.023	3.0	1.525	1.475	1.058	3.294	0.5	0.500	-0.000	0.000	0.000
0.5	0.332	0.168	0.191	0.065	3.0	1.769	1.231	0.976	2.467	0.8	0.800	0.000	0.000	0.000
0.8	0.746	0.054	0.052	0.006	1.0	0.958	0.042	0.114	0.015	0.2	0.199	0.001	0.010	0.000
0.8	0.713	0.087	0.101	0.018	1.0	1.034	-0.034	0.233	0.055	0.5	0.500	0.000	0.006	0.000
0.8	0.743	0.057	0.084	0.010	1.0	1.085	-0.085	0.344	0.125	0.8	0.800	-0.000	0.004	0.000
0.8	0.735	0.065	0.073	0.010	2.0	1.730	0.270	0.380	0.217	0.2	0.200	-0.000	0.002	0.000
0.8	0.757	0.043	0.051	0.004	2.0	1.851	0.149	0.312	0.119	0.5	0.500	-0.000	0.002	0.000
0.8	0.736	0.064	0.081	0.011	2.0	1.695	0.305	0.471	0.314	0.8	0.800	-0.000	0.003	0.000
0.8	0.740	0.060	0.083	0.011	3.0	2.618	0.382	0.657	0.577	0.2	0.200	0.000	0.003	0.000
0.8	0.763	0.037	0.054	0.004	3.0	2.812	0.188	0.467	0.253	0.5	0.500	-0.000	0.003	0.000
0.8	0.725	0.075	0.131	0.023	3.0	2.469	0.531	0.945	1.175	0.8	0.800	-0.000	0.003	0.000
1.0	0.811	0.189	0.046	0.038	1.0	0.889	0.111	0.128	0.029	0.2	0.196	0.004	0.020	0.000
1.0	0.819	0.181	0.062	0.036	1.0	0.964	0.036	0.235	0.057	0.5	0.489	0.011	0.049	0.003
1.0	0.828	0.172	0.102	0.040	1.0	0.928	0.072	0.274	0.080	0.8	0.799	0.001	0.025	0.001
1.0	0.822	0.178	0.048	0.034	2.0	1.787	0.213	0.286	0.127	0.2	0.199	0.001	0.010	0.000
1.0	0.802	0.198	0.077	0.045	2.0	1.900	0.100	0.369	0.146	0.5	0.498	0.002	0.016	0.000
1.0	0.821	0.179	0.077	0.038	2.0	1.610	0.390	0.459	0.362	0.8	0.800	-0.000	0.008	0.000
1.0	0.832	0.168	0.052	0.031	3.0	2.714	0.286	0.422	0.260	0.2	0.200	0.000	0.014	0.000
1.0	0.844	0.156	0.082	0.031	3.0	2.431	0.569	0.576	0.655	0.5	0.500	-0.000	0.010	0.000
1.0	0.839	0.161	0.098	0.036	3.0	2.651	0.349	0.570	0.447	0.8	0.800	-0.000	0.009	0.000
1.2	1.233	-0.033	0.128	0.017	1.0	1.060	-0.060	0.177	0.035	0.2	0.203	-0.003	0.030	0.001
1.2	1.243	-0.043	0.126	0.018	1.0	1.044	-0.044	0.147	0.024	0.5	0.503	-0.003	0.022	0.000
1.2	1.275	-0.075	0.195	0.044	1.0	1.077	-0.077	0.197	0.045	0.8	0.802	-0.002	0.014	0.000
1.2	1.251	-0.051	0.150	0.025	2.0	2.128	-0.128	0.359	0.145	0.2	0.202	-0.002	0.030	0.001
1.2	1.246	-0.046	0.152	0.025	2.0	2.112	-0.112	0.324	0.118	0.5	0.500	-0.000	0.019	0.000
1.2	1.238	-0.038	0.133	0.019	2.0	2.096	-0.096	0.266	0.080	0.8	0.801	-0.001	0.008	0.000
1.2	1.234	-0.034	0.113	0.014	3.0	3.145	-0.145	0.450	0.224	0.2	0.201	-0.001	0.023	0.001
1.2	1.260	-0.060	0.167	0.031	3.0	3.167	-0.167	0.471	0.250	0.5	0.502	-0.002	0.021	0.000
1.2	1.220	-0.020	0.090	0.009	3.0	3.077	-0.077	0.255	0.071	0.8	0.801	-0.001	0.006	0.000
1.5	1.509	-0.009	0.082	0.007	1.0	1.008	-0.008	0.055	0.003	0.2	0.202	-0.002	0.026	0.001
1.5	1.513	-0.013	0.094	0.009	1.0	1.007	-0.007	0.060	0.004	0.5	0.502	-0.002	0.018	0.000
1.5	1.503	-0.003	0.059	0.003	1.0	1.002	-0.002	0.038	0.001	0.8	0.801	-0.001	0.010	0.000
1.5	1.524	-0.024	0.118	0.015	2.0	2.034	-0.034	0.144	0.022	0.2	0.200	-0.000	0.030	0.001
1.5	1.511	-0.011	0.085	0.007	2.0	2.020	-0.020	0.113	0.013	0.5	0.501	-0.001	0.019	0.000
1.5	1.510	-0.010	0.087	0.008	2.0	2.018	-0.018	0.105	0.011	0.8	0.801	-0.001	0.011	0.000
1.5	1.535	-0.035	0.136	0.020	3.0	3.069	-0.069	0.255	0.070	0.2	0.201	-0.001	0.028	0.001
1.5	1.504	-0.004	0.071	0.005	3.0	3.015	-0.015	0.135	0.019	0.5	0.501	-0.001	0.017	0.000
1.5	1.506	-0.006	0.070	0.005	3.0	3.018	-0.018	0.122	0.015	0.8	0.802	-0.002	0.011	0.000

α	$\bar{\alpha}$	bias_α	sd_α	mse_α	γ	$\bar{\gamma}$	bias_γ	sd_γ	mse_γ	ϕ_1	$\bar{\phi}_1$	bias_{ϕ_1}	sd_{ϕ_1}	mse_{ϕ_1}
1.8	1.809	-0.009	0.059	0.004	1.0	1.002	-0.002	0.037	0.001	0.2	0.204	-0.004	0.029	0.001
1.8	1.809	-0.009	0.057	0.003	1.0	1.001	-0.001	0.034	0.001	0.5	0.503	-0.003	0.025	0.001
1.8	1.805	-0.005	0.052	0.003	1.0	1.000	-0.000	0.031	0.001	0.8	0.803	-0.003	0.016	0.000
1.8	1.818	-0.018	0.068	0.005	2.0	2.013	-0.013	0.076	0.006	0.2	0.203	-0.003	0.031	0.001
1.8	1.811	-0.011	0.063	0.004	2.0	2.008	-0.008	0.068	0.005	0.5	0.501	-0.001	0.025	0.001
1.8	1.808	-0.008	0.055	0.003	2.0	2.006	-0.006	0.062	0.004	0.8	0.801	-0.001	0.016	0.000
1.8	1.816	-0.016	0.066	0.005	3.0	3.023	-0.023	0.108	0.012	0.2	0.200	-0.000	0.030	0.001
1.8	1.807	-0.007	0.054	0.003	3.0	3.011	-0.011	0.095	0.009	0.5	0.500	-0.000	0.025	0.001
1.8	1.802	-0.002	0.045	0.002	3.0	3.005	-0.005	0.086	0.007	0.8	0.800	0.000	0.015	0.000
2.0	1.996	0.004	0.006	0.000	1.0	0.998	0.002	0.022	0.000	0.2	0.200	-0.000	0.030	0.001
2.0	1.996	0.004	0.008	0.000	1.0	0.998	0.002	0.023	0.001	0.5	0.499	0.001	0.027	0.001
2.0	1.996	0.004	0.011	0.000	1.0	0.999	0.001	0.022	0.000	0.8	0.797	0.003	0.019	0.000
2.0	1.994	0.006	0.008	0.000	2.0	1.993	0.007	0.046	0.002	0.2	0.198	0.002	0.031	0.001
2.0	1.995	0.005	0.008	0.000	2.0	1.994	0.006	0.046	0.002	0.5	0.498	0.002	0.027	0.001
2.0	1.993	0.007	0.013	0.000	2.0	1.995	0.005	0.047	0.002	0.8	0.796	0.004	0.020	0.000
2.0	1.991	0.009	0.010	0.000	3.0	2.987	0.013	0.068	0.005	0.2	0.192	0.008	0.040	0.002
2.0	1.994	0.006	0.008	0.000	3.0	2.990	0.010	0.067	0.005	0.5	0.496	0.004	0.029	0.001
2.0	1.996	0.004	0.012	0.000	3.0	2.993	0.007	0.068	0.005	0.8	0.796	0.004	0.021	0.000

Tabela A.6: Estimativas e suas estatísticas de simulação para o caso AR(2) - $S_\alpha(0, \gamma, 0)$ com $n = 1000$, $burn-in = 100$, $re = 500$.

α	$\bar{\alpha}$	$bias_\alpha$	mse_α	γ	$\bar{\gamma}$	$bias_\gamma$	mse_γ	ϕ_1	$\bar{\phi}_1$	$bias_{\phi_1}$	mse_{ϕ_1}	ϕ_2	$\bar{\phi}_2$	$bias_{\phi_2}$	mse_{ϕ_2}
0.8	1.895	-1.095	1.266	1.0	2.287	-1.287	2.099	0.5	0.499	0.001	0.000	0.4	0.401	-0.001	0.000
0.8	1.743	-0.943	1.072	1.0	2.687	-1.687	3.735	0.9	0.900	-0.000	0.000	-0.4	-0.400	-0.000	0.000
0.8	1.846	-1.046	1.184	1.0	2.287	-1.287	2.675	-0.4	-0.402	0.002	0.001	0.5	0.498	0.002	0.001
0.8	1.962	-1.162	1.379	1.0	3.182	-2.182	5.359	-0.5	-0.500	-0.000	0.000	-0.9	-0.900	-0.000	0.000
0.8	1.890	-1.090	1.252	2.0	4.815	-2.815	9.762	0.5	0.501	-0.001	0.000	0.4	0.399	0.001	0.000
0.8	1.722	-0.922	0.975	2.0	5.152	-3.152	12.151	0.9	0.909	-0.009	0.014	-0.4	-0.402	0.002	0.001
0.8	1.716	-0.916	0.995	2.0	4.369	-2.369	10.903	-0.4	-0.401	0.001	0.003	0.5	0.499	0.001	0.003
0.8	1.947	-1.147	1.343	2.0	5.477	-3.477	20.070	-0.5	-0.500	-0.000	0.000	-0.9	-0.900	-0.000	0.000
0.8	1.852	-1.052	1.194	3.0	7.312	-4.312	23.800	0.5	0.501	-0.001	0.001	0.4	0.399	0.001	0.001
0.8	1.632	-0.832	0.820	3.0	8.528	-5.528	57.613	0.9	1.086	-0.186	0.329	-0.4	-0.467	0.067	0.049
0.8	1.672	-0.872	0.946	3.0	6.232	-3.232	26.390	-0.4	-0.397	-0.003	0.003	0.5	0.502	-0.002	0.002
0.8	1.928	-1.128	1.299	3.0	9.950	-6.950	994.169	-0.5	-0.496	-0.004	0.012	-0.9	-0.902	0.002	0.005
1.2	1.676	-0.476	0.349	1.0	1.340	-0.340	0.213	0.5	0.501	-0.001	0.001	0.4	0.400	0.000	0.001
1.2	1.509	-0.309	0.218	1.0	1.240	-0.240	0.160	0.9	0.903	-0.003	0.001	-0.4	-0.400	-0.000	0.001
1.2	1.820	-0.620	0.468	1.0	1.508	-0.508	0.335	-0.4	-0.394	-0.006	0.001	0.5	0.506	-0.006	0.001
1.2	1.865	-0.665	0.518	1.0	1.601	-0.601	0.519	-0.5	-0.500	0.000	0.000	-0.9	-0.899	-0.001	0.000
1.2	1.656	-0.456	0.333	2.0	2.620	-0.620	0.713	0.5	0.501	-0.001	0.001	0.4	0.399	0.001	0.001
1.2	1.654	-0.454	0.329	2.0	2.628	-0.628	0.771	0.9	0.902	-0.002	0.000	-0.4	-0.401	0.001	0.000
1.2	1.822	-0.622	0.466	2.0	2.992	-0.992	1.277	-0.4	-0.399	-0.001	0.001	0.5	0.501	-0.001	0.001
1.2	1.910	-0.710	0.553	2.0	3.299	-1.299	2.044	-0.5	-0.499	-0.001	0.000	-0.9	-0.899	-0.001	0.000
1.2	1.715	-0.515	0.384	3.0	4.036	-1.036	1.768	0.5	0.499	0.001	0.001	0.4	0.401	-0.001	0.000
1.2	1.658	-0.458	0.330	3.0	3.995	-0.995	1.656	0.9	0.901	-0.001	0.001	-0.4	-0.398	-0.002	0.000
1.2	1.839	-0.639	0.478	3.0	4.451	-1.451	2.752	-0.4	-0.402	0.002	0.004	0.5	0.499	0.001	0.003
1.2	1.929	-0.729	0.563	3.0	4.855	-1.855	3.838	-0.5	-0.499	-0.001	0.000	-0.9	-0.899	-0.001	0.000
1.5	1.834	-0.334	0.155	1.0	1.182	-0.182	0.053	0.5	0.496	0.004	0.001	0.4	0.404	-0.004	0.001
1.5	1.680	-0.180	0.084	1.0	1.100	-0.100	0.029	0.9	0.900	-0.000	0.001	-0.4	-0.401	0.001	0.001
1.5	1.847	-0.347	0.164	1.0	1.198	-0.198	0.061	-0.4	-0.389	-0.011	0.001	0.5	0.509	-0.009	0.001
1.5	1.900	-0.400	0.194	1.0	1.278	-0.278	0.114	-0.5	-0.499	-0.001	0.000	-0.9	-0.899	-0.001	0.000
1.5	1.748	-0.248	0.113	2.0	2.239	-0.239	0.118	0.5	0.505	-0.005	0.001	0.4	0.396	0.004	0.001
1.5	1.656	-0.156	0.070	2.0	2.152	-0.152	0.078	0.9	0.902	-0.002	0.001	-0.4	-0.399	-0.001	0.001
1.5	1.865	-0.365	0.170	2.0	2.400	-0.400	0.235	-0.4	-0.396	-0.004	0.002	0.5	0.503	-0.003	0.001
1.5	1.886	-0.386	0.185	2.0	2.460	-0.460	0.306	-0.5	-0.499	-0.001	0.000	-0.9	-0.899	-0.001	0.000
1.5	1.757	-0.257	0.117	3.0	3.357	-0.357	0.269	0.5	0.502	-0.002	0.001	0.4	0.399	0.001	0.001
1.5	1.772	-0.272	0.121	3.0	3.339	-0.339	0.263	0.9	0.908	-0.008	0.001	-0.4	-0.405	0.005	0.001
1.5	1.832	-0.332	0.146	3.0	3.512	-0.512	0.395	-0.4	-0.394	-0.006	0.001	0.5	0.505	-0.005	0.001
1.5	1.902	-0.402	0.193	3.0	3.774	-0.774	0.805	-0.5	-0.498	-0.002	0.000	-0.9	-0.898	-0.002	0.000
1.8	1.918	-0.118	0.021	1.0	1.051	-0.051	0.005	0.5	0.498	0.002	0.001	0.4	0.402	-0.002	0.001
1.8	1.903	-0.103	0.019	1.0	1.045	-0.045	0.005	0.9	0.899	0.001	0.001	-0.4	-0.398	-0.002	0.001
1.8	1.931	-0.131	0.024	1.0	1.060	-0.060	0.007	-0.4	-0.391	-0.009	0.001	0.5	0.508	-0.008	0.001
1.8	1.945	-0.145	0.028	1.0	1.076	-0.076	0.010	-0.5	-0.500	-0.000	0.000	-0.9	-0.898	-0.002	0.000
1.8	1.895	-0.095	0.015	2.0	2.068	-0.068	0.014	0.5	0.503	-0.003	0.001	0.4	0.398	0.002	0.001
1.8	1.898	-0.098	0.017	2.0	2.073	-0.073	0.016	0.9	0.900	-0.000	0.001	-0.4	-0.399	-0.001	0.001
1.8	1.914	-0.114	0.020	2.0	2.096	-0.096	0.021	-0.4	-0.395	-0.005	0.001	0.5	0.503	-0.003	0.001
1.8	1.940	-0.140	0.026	2.0	2.126	-0.126	0.028	-0.5	-0.499	-0.001	0.000	-0.9	-0.899	-0.001	0.000

α	$\bar{\alpha}$	bias_{α}	mse_{α}	γ	$\bar{\gamma}$	bias_{γ}	mse_{γ}	ϕ_1	$\bar{\phi}_1$	bias_{ϕ_1}	mse_{ϕ_1}	ϕ_2	$\bar{\phi}_2$	bias_{ϕ_2}	mse_{ϕ_2}
1.8	1.888	-0.088	0.014	3.0	3.096	-0.096	0.029	0.5	0.503	-0.003	0.001	0.4	0.396	0.004	0.001
1.8	1.908	-0.108	0.018	3.0	3.108	-0.108	0.031	0.9	0.902	-0.002	0.001	-0.4	-0.401	0.001	0.001
1.8	1.905	-0.105	0.018	3.0	3.127	-0.127	0.041	-0.4	-0.399	-0.001	0.001	0.5	0.499	0.001	0.001
1.8	1.940	-0.140	0.026	3.0	3.200	-0.200	0.071	-0.5	-0.499	-0.001	0.000	-0.9	-0.900	-0.000	0.000
2.0	1.987	0.013	0.000	1.0	0.996	0.004	0.001	0.5	0.502	-0.002	0.001	0.4	0.396	0.004	0.001
2.0	1.989	0.011	0.000	1.0	0.996	0.004	0.001	0.9	0.899	0.001	0.001	-0.4	-0.400	-0.000	0.001
2.0	1.990	0.010	0.000	1.0	0.997	0.003	0.001	-0.4	-0.404	0.004	0.001	0.5	0.494	0.006	0.001
2.0	1.995	0.005	0.000	1.0	1.000	-0.000	0.001	-0.5	-0.499	-0.001	0.000	-0.9	-0.898	-0.002	0.000
2.0	1.982	0.018	0.000	2.0	1.991	0.009	0.002	0.5	0.499	0.001	0.001	0.4	0.398	0.002	0.001
2.0	1.989	0.011	0.000	2.0	1.994	0.006	0.002	0.9	0.896	0.004	0.001	-0.4	-0.398	-0.002	0.001
2.0	1.988	0.012	0.000	2.0	1.995	0.005	0.002	-0.4	-0.403	0.003	0.001	0.5	0.495	0.005	0.001
2.0	1.992	0.008	0.000	2.0	2.001	-0.001	0.002	-0.5	-0.499	-0.001	0.000	-0.9	-0.899	-0.001	0.000
2.0	1.976	0.024	0.001	3.0	2.982	0.018	0.005	0.5	0.498	0.002	0.001	0.4	0.398	0.002	0.001
2.0	1.977	0.023	0.001	3.0	2.982	0.018	0.005	0.9	0.896	0.004	0.001	-0.4	-0.399	-0.001	0.001
2.0	1.988	0.012	0.000	3.0	2.993	0.007	0.005	-0.4	-0.404	0.004	0.001	0.5	0.494	0.006	0.001
2.0	1.991	0.009	0.000	3.0	3.000	0.000	0.004	-0.5	-0.500	0.000	0.000	-0.9	-0.899	-0.001	0.000

Tabela A.7: Estimativas e suas estatísticas de simulação para o caso AR(2) - $S_\alpha(0, \gamma, 0)$ com $n = 1000$, $burn-in = 500$, $re = 500$.

α	$\bar{\alpha}$	$bias_\alpha$	mse_α	γ	$\bar{\gamma}$	$bias_\gamma$	mse_γ	ϕ_1	$\bar{\phi}_1$	$bias_{\phi_1}$	mse_{ϕ_1}	ϕ_2	$\bar{\phi}_2$	$bias_{\phi_2}$	mse_{ϕ_2}
0.8	1.883	-1.083	1.249	1.0	2.294	-1.294	2.099	0.5	0.499	0.001	0.001	0.4	0.402	-0.002	0.000
0.8	1.771	-0.971	1.104	1.0	2.679	-1.679	3.559	0.9	0.900	0.000	0.000	-0.4	-0.400	0.000	0.000
0.8	1.834	-1.034	1.163	1.0	2.309	-1.309	2.761	-0.4	-0.403	0.003	0.001	0.5	0.496	0.004	0.001
0.8	1.952	-1.152	1.364	1.0	3.219	-2.219	5.520	-0.5	-0.500	-0.000	0.000	-0.9	-0.900	-0.000	0.000
0.8	1.883	-1.083	1.242	2.0	4.723	-2.723	9.374	0.5	0.500	-0.000	0.000	0.4	0.400	0.000	0.000
0.8	1.698	-0.898	0.953	2.0	5.122	-3.122	14.748	0.9	0.905	-0.005	0.008	-0.4	-0.403	0.003	0.002
0.8	1.732	-0.932	1.017	2.0	4.380	-2.380	11.804	-0.4	-0.401	0.001	0.002	0.5	0.499	0.001	0.002
0.8	1.942	-1.142	1.339	2.0	6.017	-4.017	189.843	-0.5	-0.505	0.005	0.016	-0.9	-0.903	0.003	0.005
0.8	1.861	-1.061	1.201	3.0	7.172	-4.172	22.611	0.5	0.499	0.001	0.001	0.4	0.401	-0.001	0.001
0.8	1.635	-0.835	0.824	3.0	8.991	-5.991	67.582	0.9	1.117	-0.217	0.385	-0.4	-0.478	0.078	0.061
0.8	1.656	-0.856	0.933	3.0	6.523	-3.523	28.791	-0.4	-0.397	-0.003	0.005	0.5	0.503	-0.003	0.004
0.8	1.927	-1.127	1.305	3.0	8.759	-5.759	144.218	-0.5	-0.506	0.006	0.008	-0.9	-0.903	0.003	0.003
1.2	1.651	-0.451	0.332	1.0	1.294	-0.294	0.183	0.5	0.501	-0.001	0.001	0.4	0.400	0.000	0.001
1.2	1.511	-0.311	0.220	1.0	1.228	-0.228	0.154	0.9	0.901	-0.001	0.001	-0.4	-0.400	0.000	0.001
1.2	1.804	-0.604	0.452	1.0	1.505	-0.505	0.331	-0.4	-0.393	-0.007	0.001	0.5	0.507	-0.007	0.001
1.2	1.855	-0.655	0.510	1.0	1.613	-0.613	0.567	-0.5	-0.500	-0.000	0.000	-0.9	-0.900	-0.000	0.000
1.2	1.658	-0.458	0.338	2.0	2.640	-0.640	0.721	0.5	0.501	-0.001	0.001	0.4	0.399	0.001	0.001
1.2	1.654	-0.454	0.326	2.0	2.633	-0.633	0.807	0.9	0.902	-0.002	0.001	-0.4	-0.402	0.002	0.000
1.2	1.841	-0.641	0.486	2.0	2.955	-0.955	1.195	-0.4	-0.398	-0.002	0.001	0.5	0.502	-0.002	0.001
1.2	1.916	-0.716	0.558	2.0	3.279	-1.279	1.981	-0.5	-0.499	-0.001	0.000	-0.9	-0.900	-0.000	0.000
1.2	1.675	-0.475	0.351	3.0	3.980	-0.980	1.730	0.5	0.499	0.001	0.001	0.4	0.401	-0.001	0.001
1.2	1.630	-0.430	0.306	3.0	3.908	-0.908	1.474	0.9	0.902	-0.002	0.001	-0.4	-0.400	-0.000	0.001
1.2	1.828	-0.628	0.472	3.0	4.466	-1.466	2.980	-0.4	-0.403	0.003	0.007	0.5	0.497	0.003	0.006
1.2	1.927	-0.727	0.562	3.0	4.856	-1.856	3.865	-0.5	-0.499	-0.001	0.000	-0.9	-0.899	-0.001	0.000
1.5	1.847	-0.347	0.161	1.0	1.186	-0.186	0.052	0.5	0.499	0.001	0.001	0.4	0.402	-0.002	0.001
1.5	1.698	-0.198	0.092	1.0	1.109	-0.109	0.031	0.9	0.902	-0.002	0.001	-0.4	-0.401	0.001	0.001
1.5	1.850	-0.350	0.164	1.0	1.200	-0.200	0.063	-0.4	-0.389	-0.011	0.001	0.5	0.509	-0.009	0.001
1.5	1.900	-0.400	0.194	1.0	1.277	-0.277	0.109	-0.5	-0.499	-0.001	0.000	-0.9	-0.899	-0.001	0.000
1.5	1.741	-0.241	0.110	2.0	2.224	-0.224	0.109	0.5	0.502	-0.002	0.001	0.4	0.399	0.001	0.001
1.5	1.662	-0.162	0.072	2.0	2.151	-0.151	0.086	0.9	0.900	-0.000	0.001	-0.4	-0.400	-0.000	0.001
1.5	1.851	-0.351	0.165	2.0	2.370	-0.370	0.211	-0.4	-0.395	-0.005	0.001	0.5	0.504	-0.004	0.001
1.5	1.896	-0.396	0.192	2.0	2.483	-0.483	0.319	-0.5	-0.499	-0.001	0.000	-0.9	-0.898	-0.002	0.000
1.5	1.766	-0.266	0.119	3.0	3.374	-0.374	0.288	0.5	0.501	-0.001	0.001	0.4	0.400	-0.000	0.001
1.5	1.774	-0.274	0.122	3.0	3.351	-0.351	0.264	0.9	0.906	-0.006	0.001	-0.4	-0.402	0.002	0.001
1.5	1.835	-0.335	0.148	3.0	3.534	-0.534	0.413	-0.4	-0.394	-0.006	0.002	0.5	0.506	-0.006	0.002
1.5	1.922	-0.422	0.203	3.0	3.761	-0.761	0.754	-0.5	-0.498	-0.002	0.000	-0.9	-0.898	-0.002	0.000
1.8	1.913	-0.113	0.020	1.0	1.048	-0.048	0.005	0.5	0.495	0.005	0.001	0.4	0.404	-0.004	0.001
1.8	1.913	-0.113	0.021	1.0	1.048	-0.048	0.006	0.9	0.897	0.003	0.001	-0.4	-0.397	-0.003	0.001
1.8	1.935	-0.135	0.025	1.0	1.060	-0.060	0.006	-0.4	-0.392	-0.008	0.001	0.5	0.506	-0.006	0.001
1.8	1.945	-0.145	0.028	1.0	1.072	-0.072	0.009	-0.5	-0.499	-0.001	0.000	-0.9	-0.899	-0.001	0.000
1.8	1.892	-0.092	0.016	2.0	2.070	-0.070	0.015	0.5	0.502	-0.002	0.001	0.4	0.399	0.001	0.001
1.8	1.888	-0.088	0.015	2.0	2.071	-0.071	0.017	0.9	0.898	0.002	0.001	-0.4	-0.397	-0.003	0.001
1.8	1.924	-0.124	0.022	2.0	2.104	-0.104	0.022	-0.4	-0.396	-0.004	0.001	0.5	0.502	-0.002	0.001
1.8	1.941	-0.141	0.026	2.0	2.130	-0.130	0.030	-0.5	-0.500	-0.000	0.000	-0.9	-0.899	-0.001	0.000

α	$\bar{\alpha}$	bias_α	mse_α	γ	$\bar{\gamma}$	bias_γ	mse_γ	ϕ_1	$\bar{\phi}_1$	bias_{ϕ_1}	mse_{ϕ_1}	ϕ_2	$\bar{\phi}_2$	bias_{ϕ_2}	mse_{ϕ_2}
1.8	1.883	-0.083	0.013	3.0	3.092	-0.092	0.030	0.5	0.501	-0.001	0.001	0.4	0.398	0.002	0.001
1.8	1.913	-0.113	0.018	3.0	3.117	-0.117	0.033	0.9	0.902	-0.002	0.001	-0.4	-0.402	0.002	0.001
1.8	1.903	-0.103	0.018	3.0	3.131	-0.131	0.043	-0.4	-0.399	-0.001	0.001	0.5	0.500	0.000	0.001
1.8	1.937	-0.137	0.026	3.0	3.205	-0.205	0.072	-0.5	-0.500	-0.000	0.000	-0.9	-0.898	-0.002	0.000
2.0	1.987	0.013	0.000	1.0	0.995	0.005	0.001	0.5	0.502	-0.002	0.001	0.4	0.396	0.004	0.001
2.0	1.990	0.010	0.000	1.0	0.995	0.005	0.001	0.9	0.899	0.001	0.001	-0.4	-0.399	-0.001	0.001
2.0	1.990	0.010	0.000	1.0	0.996	0.004	0.001	-0.4	-0.404	0.004	0.001	0.5	0.494	0.006	0.001
2.0	1.995	0.005	0.000	1.0	1.000	0.000	0.001	-0.5	-0.499	-0.001	0.000	-0.9	-0.898	-0.002	0.000
2.0	1.982	0.018	0.000	2.0	1.992	0.008	0.002	0.5	0.500	0.000	0.001	0.4	0.398	0.002	0.001
2.0	1.988	0.012	0.000	2.0	1.993	0.007	0.002	0.9	0.898	0.002	0.001	-0.4	-0.398	-0.002	0.001
2.0	1.989	0.011	0.000	2.0	1.996	0.004	0.002	-0.4	-0.402	0.002	0.001	0.5	0.496	0.004	0.001
2.0	1.992	0.008	0.000	2.0	2.004	-0.004	0.003	-0.5	-0.499	-0.001	0.000	-0.9	-0.898	-0.002	0.000
2.0	1.976	0.024	0.001	3.0	2.984	0.016	0.005	0.5	0.499	0.001	0.001	0.4	0.397	0.003	0.001
2.0	1.978	0.022	0.001	3.0	2.985	0.015	0.005	0.9	0.896	0.004	0.001	-0.4	-0.399	-0.001	0.001
2.0	1.988	0.012	0.000	3.0	2.996	0.004	0.005	-0.4	-0.403	0.003	0.001	0.5	0.495	0.005	0.001
2.0	1.991	0.009	0.000	3.0	3.002	-0.002	0.004	-0.5	-0.500	0.000	0.000	-0.9	-0.899	-0.001	0.000

Tabela A.8: Estimativas e suas estatísticas de simulação para o caso AR(2) - $S_\alpha(0, \gamma, 0)$ com $n = 3000$, $burn-in = 100$, $re = 500$.

α	$\bar{\alpha}$	$bias_\alpha$	mse_α	γ	$\bar{\gamma}$	$bias_\gamma$	mse_γ	ϕ_1	$\bar{\phi}_1$	$bias_{\phi_1}$	mse_{ϕ_1}	ϕ_2	$\bar{\phi}_2$	$bias_{\phi_2}$	mse_{ϕ_2}
0.8	1.887	-1.087	1.256	1.0	2.141	-1.141	1.685	0.5	0.500	0.000	0.000	0.4	0.400	-0.000	0.000
0.8	1.813	-1.013	1.159	1.0	2.834	-1.834	3.898	0.9	0.900	0.000	0.000	-0.4	-0.400	-0.000	0.000
0.8	1.886	-1.086	1.239	1.0	2.167	-1.167	2.359	-0.4	-0.402	0.002	0.001	0.5	0.498	0.002	0.000
0.8	1.960	-1.160	1.379	1.0	3.124	-2.124	4.861	-0.5	-0.500	-0.000	0.000	-0.9	-0.900	-0.000	0.000
0.8	1.888	-1.088	1.248	2.0	4.718	-2.718	9.241	0.5	0.499	0.001	0.000	0.4	0.401	-0.001	0.000
0.8	1.748	-0.948	0.999	2.0	5.161	-3.161	11.724	0.9	0.899	0.001	0.000	-0.4	-0.401	0.001	0.000
0.8	1.777	-0.977	1.079	2.0	4.108	-2.108	10.525	-0.4	-0.401	0.001	0.002	0.5	0.499	0.001	0.001
0.8	1.957	-1.157	1.362	2.0	4.832	-2.832	10.722	-0.5	-0.500	0.000	0.000	-0.9	-0.900	0.000	0.000
0.8	1.886	-1.086	1.249	3.0	7.265	-4.265	22.802	0.5	0.500	-0.000	0.000	0.4	0.400	0.000	0.000
0.8	1.735	-0.935	0.966	3.0	8.698	-5.698	60.459	0.9	1.036	-0.136	0.219	-0.4	-0.454	0.054	0.036
0.8	1.687	-0.887	0.973	3.0	6.197	-3.197	28.125	-0.4	-0.400	0.000	0.005	0.5	0.500	0.000	0.004
0.8	1.956	-1.156	1.346	3.0	7.738	-4.738	30.831	-0.5	-0.500	0.000	0.000	-0.9	-0.900	0.000	0.000
1.2	1.780	-0.580	0.433	1.0	1.393	-0.393	0.237	0.5	0.501	-0.001	0.000	0.4	0.399	0.001	0.000
1.2	1.558	-0.358	0.259	1.0	1.269	-0.269	0.169	0.9	0.898	0.002	0.001	-0.4	-0.398	-0.002	0.000
1.2	1.848	-0.648	0.493	1.0	1.518	-0.518	0.329	-0.4	-0.396	-0.004	0.000	0.5	0.504	-0.004	0.000
1.2	1.902	-0.702	0.550	1.0	1.614	-0.614	0.484	-0.5	-0.500	0.000	0.000	-0.9	-0.900	-0.000	0.000
1.2	1.732	-0.532	0.399	2.0	2.707	-0.707	0.742	0.5	0.499	0.001	0.001	0.4	0.401	-0.001	0.001
1.2	1.753	-0.553	0.407	2.0	2.741	-0.741	0.837	0.9	0.900	-0.000	0.000	-0.4	-0.400	0.000	0.000
1.2	1.866	-0.666	0.509	2.0	3.020	-1.020	1.279	-0.4	-0.401	0.001	0.002	0.5	0.499	0.001	0.002
1.2	1.930	-0.730	0.571	2.0	3.318	-1.318	1.985	-0.5	-0.499	-0.001	0.000	-0.9	-0.900	-0.000	0.000
1.2	1.762	-0.562	0.423	3.0	4.133	-1.133	1.812	0.5	0.500	0.000	0.000	0.4	0.401	-0.001	0.000
1.2	1.756	-0.556	0.412	3.0	4.104	-1.104	1.706	0.9	0.900	-0.000	0.000	-0.4	-0.401	0.001	0.000
1.2	1.874	-0.674	0.517	3.0	4.498	-1.498	2.775	-0.4	-0.403	0.003	0.003	0.5	0.498	0.002	0.002
1.2	1.931	-0.731	0.569	3.0	4.878	-1.878	3.862	-0.5	-0.499	-0.001	0.000	-0.9	-0.899	-0.001	0.000
1.5	1.908	-0.408	0.192	1.0	1.218	-0.218	0.059	0.5	0.496	0.004	0.000	0.4	0.405	-0.005	0.000
1.5	1.691	-0.191	0.091	1.0	1.107	-0.107	0.028	0.9	0.901	-0.001	0.000	-0.4	-0.401	0.001	0.000
1.5	1.850	-0.350	0.167	1.0	1.189	-0.189	0.054	-0.4	-0.393	-0.007	0.000	0.5	0.508	-0.008	0.000
1.5	1.930	-0.430	0.211	1.0	1.290	-0.290	0.103	-0.5	-0.499	-0.001	0.000	-0.9	-0.899	-0.001	0.000
1.5	1.782	-0.282	0.131	2.0	2.264	-0.264	0.126	0.5	0.501	-0.001	0.000	0.4	0.400	-0.000	0.000
1.5	1.660	-0.160	0.073	2.0	2.156	-0.156	0.071	0.9	0.900	-0.000	0.000	-0.4	-0.399	-0.001	0.000
1.5	1.919	-0.419	0.198	2.0	2.467	-0.467	0.258	-0.4	-0.398	-0.002	0.001	0.5	0.502	-0.002	0.001
1.5	1.929	-0.429	0.209	2.0	2.524	-0.524	0.333	-0.5	-0.499	-0.001	0.000	-0.9	-0.899	-0.001	0.000
1.5	1.802	-0.302	0.139	3.0	3.429	-0.429	0.309	0.5	0.501	-0.001	0.000	0.4	0.400	0.000	0.000
1.5	1.852	-0.352	0.160	3.0	3.449	-0.449	0.315	0.9	0.906	-0.006	0.000	-0.4	-0.402	0.002	0.000
1.5	1.890	-0.390	0.173	3.0	3.598	-0.598	0.424	-0.4	-0.394	-0.006	0.000	0.5	0.506	-0.006	0.000
1.5	1.950	-0.450	0.217	3.0	3.926	-0.926	1.002	-0.5	-0.496	-0.004	0.000	-0.9	-0.898	-0.002	0.000
1.8	1.960	-0.160	0.029	1.0	1.068	-0.068	0.006	0.5	0.495	0.005	0.000	0.4	0.406	-0.006	0.000
1.8	1.957	-0.157	0.029	1.0	1.068	-0.068	0.006	0.9	0.899	0.001	0.000	-0.4	-0.399	-0.001	0.000
1.8	1.972	-0.172	0.032	1.0	1.072	-0.072	0.007	-0.4	-0.395	-0.005	0.000	0.5	0.506	-0.006	0.000
1.8	1.977	-0.177	0.034	1.0	1.087	-0.087	0.010	-0.5	-0.500	-0.000	0.000	-0.9	-0.899	-0.001	0.000
1.8	1.948	-0.148	0.025	2.0	2.106	-0.106	0.016	0.5	0.502	-0.002	0.000	0.4	0.399	0.001	0.000
1.8	1.947	-0.147	0.025	2.0	2.118	-0.118	0.020	0.9	0.898	0.002	0.000	-0.4	-0.396	-0.004	0.000
1.8	1.966	-0.166	0.030	2.0	2.131	-0.131	0.023	-0.4	-0.395	-0.005	0.000	0.5	0.504	-0.004	0.000
1.8	1.982	-0.182	0.035	2.0	2.161	-0.161	0.031	-0.5	-0.500	-0.000	0.000	-0.9	-0.899	-0.001	0.000

α	$\bar{\alpha}$	bias_α	mse_α	γ	$\bar{\gamma}$	bias_γ	mse_γ	ϕ_1	$\bar{\phi}_1$	bias_{ϕ_1}	mse_{ϕ_1}	ϕ_2	$\bar{\phi}_2$	bias_{ϕ_2}	mse_{ϕ_2}
1.8	1.922	-0.122	0.019	3.0	3.134	-0.134	0.028	0.5	0.500	-0.000	0.000	0.4	0.400	0.000	0.000
1.8	1.951	-0.151	0.025	3.0	3.159	-0.159	0.032	0.9	0.907	-0.007	0.000	-0.4	-0.405	0.005	0.000
1.8	1.944	-0.144	0.025	3.0	3.168	-0.168	0.042	-0.4	-0.396	-0.004	0.000	0.5	0.502	-0.002	0.000
1.8	1.969	-0.169	0.032	3.0	3.234	-0.234	0.068	-0.5	-0.498	-0.002	0.000	-0.9	-0.899	-0.001	0.000
2.0	1.984	0.016	0.000	1.0	0.994	0.006	0.000	0.5	0.505	-0.005	0.000	0.4	0.394	0.006	0.000
2.0	1.988	0.012	0.000	1.0	0.996	0.004	0.000	0.9	0.899	0.001	0.000	-0.4	-0.399	-0.001	0.000
2.0	1.990	0.010	0.000	1.0	0.996	0.004	0.000	-0.4	-0.412	0.012	0.000	0.5	0.487	0.013	0.001
2.0	1.995	0.005	0.000	1.0	1.000	0.000	0.000	-0.5	-0.500	0.000	0.000	-0.9	-0.900	0.000	0.000
2.0	1.975	0.025	0.001	2.0	1.986	0.014	0.001	0.5	0.502	-0.002	0.000	0.4	0.397	0.003	0.000
2.0	1.981	0.019	0.000	2.0	1.987	0.013	0.001	0.9	0.899	0.001	0.000	-0.4	-0.400	-0.000	0.000
2.0	1.987	0.013	0.000	2.0	1.992	0.008	0.001	-0.4	-0.401	0.001	0.000	0.5	0.498	0.002	0.000
2.0	1.995	0.005	0.000	2.0	1.999	0.001	0.001	-0.5	-0.500	-0.000	0.000	-0.9	-0.900	-0.000	0.000
2.0	1.967	0.033	0.001	3.0	2.972	0.028	0.003	0.5	0.499	0.001	0.000	0.4	0.400	0.000	0.000
2.0	1.969	0.031	0.001	3.0	2.971	0.029	0.002	0.9	0.899	0.001	0.000	-0.4	-0.400	0.000	0.000
2.0	1.987	0.013	0.000	3.0	2.986	0.014	0.002	-0.4	-0.401	0.001	0.000	0.5	0.498	0.002	0.000
2.0	1.992	0.008	0.000	3.0	2.992	0.008	0.002	-0.5	-0.500	-0.000	0.000	-0.9	-0.900	0.000	0.000

Tabela A.9: Estimativas e suas estatísticas de simulação para o caso AR(2) - $S_\alpha(0, \gamma, 0)$ com $n = 3000$, $burn-in = 500$, $re = 500$.

α	$\bar{\alpha}$	$bias_\alpha$	mse_α	γ	$\bar{\gamma}$	$bias_\gamma$	mse_γ	ϕ_1	$\bar{\phi}_1$	$bias_{\phi_1}$	mse_{ϕ_1}	ϕ_2	$\bar{\phi}_2$	$bias_{\phi_2}$	mse_{ϕ_2}
0.8	0.488	0.312	0.118	1.0	0.928	0.072	0.093	0.5	0.500	0.000	0.000	0.4	0.400	-0.000	0.000
0.8	0.608	0.192	0.048	1.0	1.233	-0.233	0.299	0.9	0.893	0.007	0.005	-0.4	-0.396	-0.004	0.001
0.8	0.669	0.131	0.019	1.0	1.203	-0.203	0.054	-0.4	-0.514	0.114	0.016	0.5	0.393	0.107	0.014
0.8	0.628	0.172	0.043	1.0	2.752	-1.752	3.939	-0.5	-0.496	-0.004	0.001	-0.9	-0.901	0.001	0.000
0.8	0.407	0.393	0.163	2.0	0.936	1.064	1.220	0.5	0.500	0.000	0.000	0.4	0.400	-0.000	0.000
0.8	0.605	0.195	0.048	2.0	1.586	0.414	0.404	0.9	0.899	0.001	0.000	-0.4	-0.399	-0.001	0.000
0.8	0.629	0.171	0.034	2.0	1.197	0.803	0.702	-0.4	-0.461	0.061	0.008	0.5	0.443	0.057	0.007
0.8	0.598	0.202	0.056	2.0	3.368	-1.368	3.485	-0.5	-0.498	-0.002	0.000	-0.9	-0.900	0.000	0.000
0.8	0.393	0.407	0.171	3.0	0.961	2.039	4.293	0.5	0.500	0.000	0.000	0.4	0.400	-0.000	0.000
0.8	0.582	0.218	0.057	3.0	2.129	0.871	1.202	0.9	0.900	0.000	0.000	-0.4	-0.400	0.000	0.000
0.8	0.584	0.216	0.055	3.0	1.327	1.673	3.082	-0.4	-0.421	0.021	0.003	0.5	0.480	0.020	0.002
0.8	0.646	0.154	0.033	3.0	3.836	-0.836	1.980	-0.5	-0.498	-0.002	0.000	-0.9	-0.900	0.000	0.000
1.2	1.784	-0.584	0.437	1.0	1.401	-0.401	0.237	0.5	0.500	-0.000	0.000	0.4	0.400	-0.000	0.000
1.2	1.565	-0.365	0.264	1.0	1.256	-0.256	0.159	0.9	0.901	-0.001	0.001	-0.4	-0.400	0.000	0.000
1.2	1.847	-0.647	0.493	1.0	1.509	-0.509	0.321	-0.4	-0.395	-0.005	0.000	0.5	0.505	-0.005	0.000
1.2	1.916	-0.716	0.560	1.0	1.652	-0.652	0.535	-0.5	-0.500	0.000	0.000	-0.9	-0.900	-0.000	0.000
1.2	1.729	-0.529	0.392	2.0	2.713	-0.713	0.755	0.5	0.500	0.000	0.001	0.4	0.401	-0.001	0.001
1.2	1.761	-0.561	0.417	2.0	2.760	-0.760	0.837	0.9	0.901	-0.001	0.000	-0.4	-0.401	0.001	0.000
1.2	1.866	-0.666	0.506	2.0	3.021	-1.021	1.256	-0.4	-0.402	0.002	0.001	0.5	0.499	0.001	0.001
1.2	1.934	-0.734	0.573	2.0	3.364	-1.364	2.104	-0.5	-0.499	-0.001	0.000	-0.9	-0.900	-0.000	0.000
1.2	1.725	-0.525	0.393	3.0	4.052	-1.052	1.717	0.5	0.499	0.001	0.000	0.4	0.401	-0.001	0.000
1.2	1.762	-0.562	0.416	3.0	4.116	-1.116	1.724	0.9	0.902	-0.002	0.000	-0.4	-0.400	-0.000	0.000
1.2	1.892	-0.692	0.528	3.0	4.588	-1.588	3.074	-0.4	-0.404	0.004	0.006	0.5	0.496	0.004	0.005
1.2	1.948	-0.748	0.582	3.0	4.945	-1.945	4.065	-0.5	-0.500	-0.000	0.000	-0.9	-0.899	-0.001	0.000
1.5	1.893	-0.393	0.185	1.0	1.213	-0.213	0.058	0.5	0.496	0.004	0.000	0.4	0.405	-0.005	0.000
1.5	1.686	-0.186	0.089	1.0	1.105	-0.105	0.029	0.9	0.902	-0.002	0.000	-0.4	-0.402	0.002	0.000
1.5	1.832	-0.332	0.157	1.0	1.187	-0.187	0.054	-0.4	-0.391	-0.009	0.001	0.5	0.509	-0.009	0.001
1.5	1.927	-0.427	0.209	1.0	1.292	-0.292	0.102	-0.5	-0.499	-0.001	0.000	-0.9	-0.899	-0.001	0.000
1.5	1.806	-0.306	0.142	2.0	2.284	-0.284	0.141	0.5	0.501	-0.001	0.000	0.4	0.400	0.000	0.000
1.5	1.664	-0.164	0.075	2.0	2.160	-0.160	0.076	0.9	0.902	-0.002	0.000	-0.4	-0.402	0.002	0.000
1.5	1.927	-0.427	0.202	2.0	2.471	-0.471	0.259	-0.4	-0.397	-0.003	0.000	0.5	0.502	-0.002	0.000
1.5	1.938	-0.438	0.214	2.0	2.521	-0.521	0.329	-0.5	-0.500	-0.000	0.000	-0.9	-0.899	-0.001	0.000
1.5	1.807	-0.307	0.141	3.0	3.434	-0.434	0.300	0.5	0.500	-0.000	0.000	0.4	0.400	-0.000	0.000
1.5	1.849	-0.349	0.158	3.0	3.435	-0.435	0.306	0.9	0.905	-0.005	0.000	-0.4	-0.403	0.003	0.000
1.5	1.897	-0.397	0.177	3.0	3.597	-0.597	0.422	-0.4	-0.396	-0.004	0.001	0.5	0.503	-0.003	0.001
1.5	1.954	-0.454	0.219	3.0	3.916	-0.916	0.976	-0.5	-0.496	-0.004	0.000	-0.9	-0.897	-0.003	0.000
1.8	1.958	-0.158	0.029	1.0	1.068	-0.068	0.006	0.5	0.495	0.005	0.000	0.4	0.406	-0.006	0.000
1.8	1.952	-0.152	0.028	1.0	1.063	-0.063	0.006	0.9	0.899	0.001	0.000	-0.4	-0.398	-0.002	0.000
1.8	1.973	-0.173	0.032	1.0	1.073	-0.073	0.007	-0.4	-0.394	-0.006	0.000	0.5	0.506	-0.006	0.000
1.8	1.979	-0.179	0.035	1.0	1.090	-0.090	0.010	-0.5	-0.499	-0.001	0.000	-0.9	-0.899	-0.001	0.000
1.8	1.950	-0.150	0.025	2.0	2.111	-0.111	0.016	0.5	0.501	-0.001	0.000	0.4	0.400	0.000	0.000
1.8	1.940	-0.140	0.024	2.0	2.116	-0.116	0.020	0.9	0.898	0.002	0.000	-0.4	-0.397	-0.003	0.000
1.8	1.960	-0.160	0.029	2.0	2.128	-0.128	0.022	-0.4	-0.396	-0.004	0.000	0.5	0.503	-0.003	0.000
1.8	1.982	-0.182	0.034	2.0	2.162	-0.162	0.031	-0.5	-0.499	-0.001	0.000	-0.9	-0.900	-0.000	0.000

α	$\bar{\alpha}$	bias_α	mse_α	γ	$\bar{\gamma}$	bias_γ	mse_γ	ϕ_1	$\bar{\phi}_1$	bias_{ϕ_1}	mse_{ϕ_1}	ϕ_2	$\bar{\phi}_2$	bias_{ϕ_2}	mse_{ϕ_2}
1.8	1.918	-0.118	0.019	3.0	3.121	-0.121	0.026	0.5	0.502	-0.002	0.000	0.4	0.398	0.002	0.000
1.8	1.953	-0.153	0.025	3.0	3.156	-0.156	0.032	0.9	0.907	-0.007	0.000	-0.4	-0.405	0.005	0.000
1.8	1.950	-0.150	0.027	3.0	3.179	-0.179	0.044	-0.4	-0.397	-0.003	0.000	0.5	0.502	-0.002	0.000
1.8	1.967	-0.167	0.032	3.0	3.236	-0.236	0.071	-0.5	-0.498	-0.002	0.000	-0.9	-0.899	-0.001	0.000
2.0	1.985	0.015	0.000	1.0	0.995	0.005	0.000	0.5	0.504	-0.004	0.000	0.4	0.395	0.005	0.000
2.0	1.988	0.012	0.000	1.0	0.995	0.005	0.000	0.9	0.899	0.001	0.000	-0.4	-0.400	-0.000	0.000
2.0	1.990	0.010	0.000	1.0	0.996	0.004	0.000	-0.4	-0.412	0.012	0.000	0.5	0.486	0.014	0.001
2.0	1.995	0.005	0.000	1.0	0.999	0.001	0.000	-0.5	-0.500	-0.000	0.000	-0.9	-0.900	-0.000	0.000
2.0	1.975	0.025	0.001	2.0	1.986	0.014	0.001	0.5	0.501	-0.001	0.000	0.4	0.397	0.003	0.000
2.0	1.980	0.020	0.000	2.0	1.986	0.014	0.001	0.9	0.900	0.000	0.000	-0.4	-0.401	0.001	0.000
2.0	1.987	0.013	0.000	2.0	1.990	0.010	0.001	-0.4	-0.402	0.002	0.000	0.5	0.498	0.002	0.000
2.0	1.995	0.005	0.000	2.0	1.997	0.003	0.001	-0.5	-0.499	-0.001	0.000	-0.9	-0.898	-0.002	0.000
2.0	1.967	0.033	0.001	3.0	2.973	0.027	0.003	0.5	0.500	-0.000	0.000	0.4	0.398	0.002	0.000
2.0	1.969	0.031	0.001	3.0	2.973	0.027	0.002	0.9	0.900	0.000	0.000	-0.4	-0.400	0.000	0.000
2.0	1.987	0.013	0.000	3.0	2.985	0.015	0.002	-0.4	-0.400	-0.000	0.000	0.5	0.499	0.001	0.000
2.0	1.992	0.008	0.000	3.0	2.989	0.011	0.002	-0.5	-0.500	-0.000	0.000	-0.9	-0.900	-0.000	0.000

Apêndice B Gráficos

Analisando as propriedades das estimativas apresentadas nas tabelas quanto a variação do tamanho da amostra n , do número de replicações re e dos valores descartados no início do modelo - *burn-in*, concluímos que não houve diferença notória na precisão e na variabilidade das estimativas. Abre-se uma exceção para casos em que o parâmetro de estabilidade é muito baixo, onde encontramos vieses na estimação de α . Nos demais casos, as medianas dos gráficos nos mostram que as estimativas são consistentes.

As Figuras B.1-B.3 apresentam box-plots comparando a dispersão das estimativas de α , ϕ e γ , respectivamente, em relação à mudança de tamanho amostral $n \in \{1000, 3000\}$. Visualmente, nestes casos, apenas as estimativas de γ apresentaram uma leve diminuição da sua variabilidade.

Analogamente, os box-plots das Figuras B.4-B.6 comparam a dispersão das estimativas de α , ϕ e γ em relação à mudança de *burn-in* $\in \{100, 500\}$. Percebe-se que esse ajuste não provocou grandes alterações nas estimativas, indicando dentro do escopo estudado, que valores não tão grandes de *burn-ins* já são suficientes.

Por fim, as Figuras B.7-B.9 apresentam box-plots comparando a dispersão das estimativas de α , ϕ e γ em relação à mudança do número de replicações $re \in \{500; 1000\}$. Visualmente, não notamos alterações significantes.

A partir das variações de $\phi \in \{0.2, 0.5, 0.8\}$ e $\gamma \in \{1, 2, 3\}$ em cada caso, podemos notar que as estimativas dos demais parâmetros não é afetada, pois a locação e a variação desses permanecem de forma semelhante.

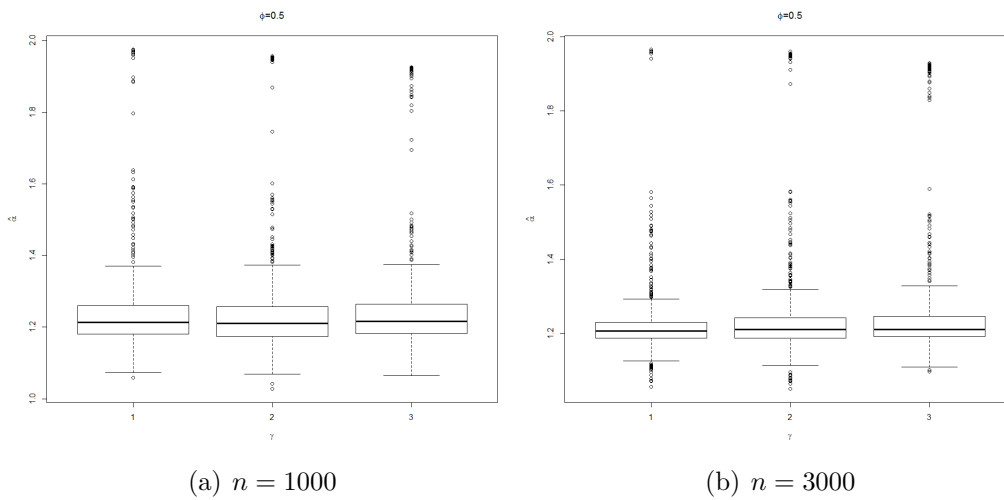


Figura B.1: Box-plot das estimativas de α quando seu valor verdadeiro é 1.0, para $\gamma \in \{1, 2, 3\}$, $\phi = 0.5$, $burn-in = 100$ e $re = 500$ fixos e $n \in \{1000, 3000\}$ dispostos em (a) e (b) respectivamente.

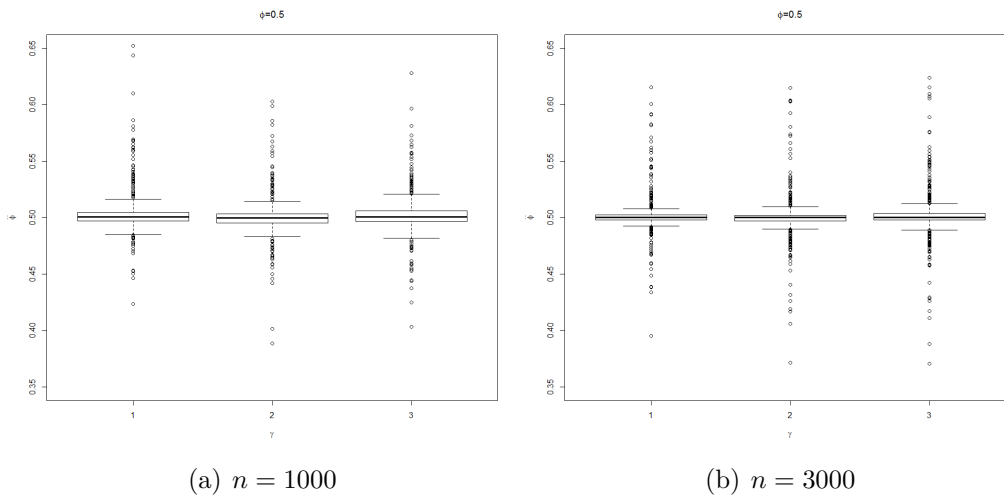


Figura B.2: Box-plot das estimativas de ϕ quando seu valor verdadeiro é 0.5, para $\gamma \in \{1, 2, 3\}$, $\alpha = 1.2$, $burn-in = 100$ e $re = 500$ fixos e $n \in \{1000, 3000\}$ dispostos em (a) e (b) respectivamente.

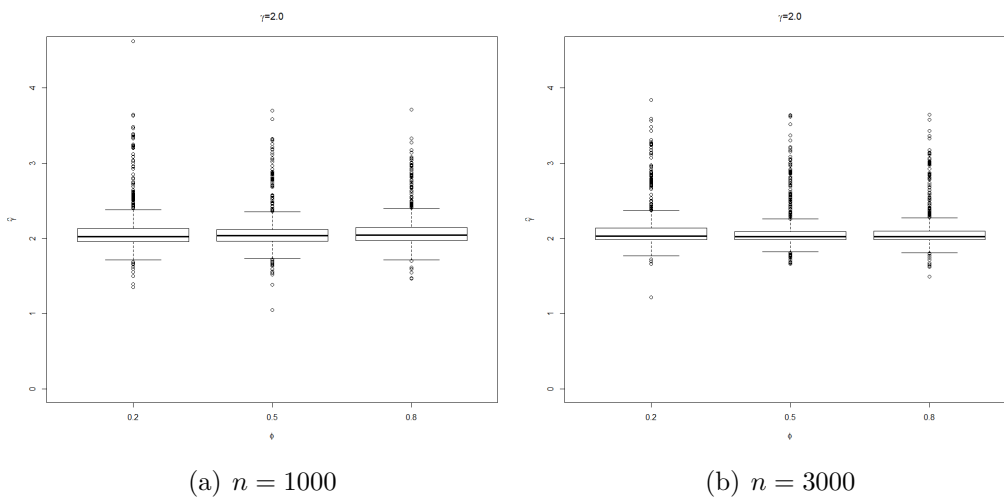


Figura B.3: Box-plot das estimativas de γ quando seu valor verdadeiro é 2.0, para $\phi \in \{0.2, 0.5, 0.8\}$, $\alpha = 1.2$, $burn-in = 100$ e $re = 500$ fixos e $n \in \{1000, 3000\}$ dispostos em (a) e (b) respectivamente.

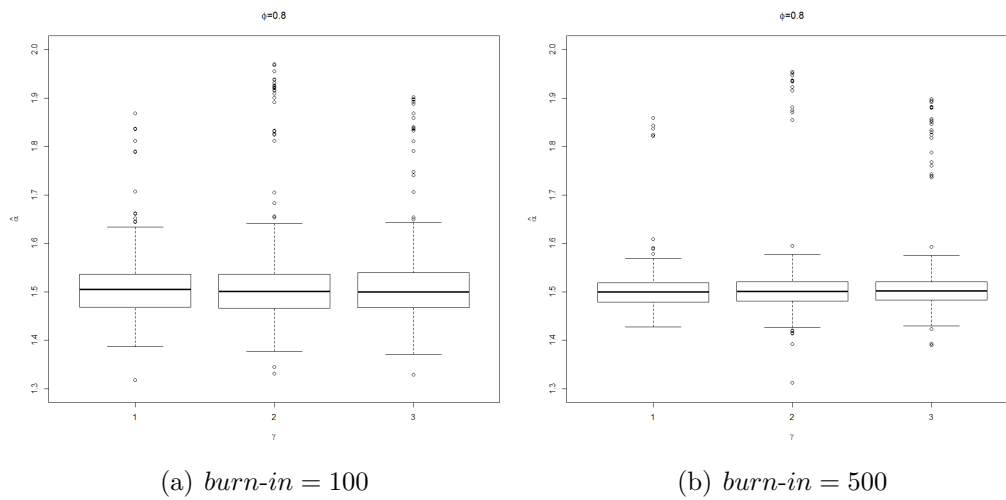


Figura B.4: Box-plot das estimativas de α quando seu valor verdadeiro é 1.5, para $\gamma \in \{1; 2; 3\}$, $\phi = 0.8$, $n = 1000$ e $re = 500$ fixos e $burn-in \in \{100; 500\}$ dispostos em (a) e (b) respectivamente.

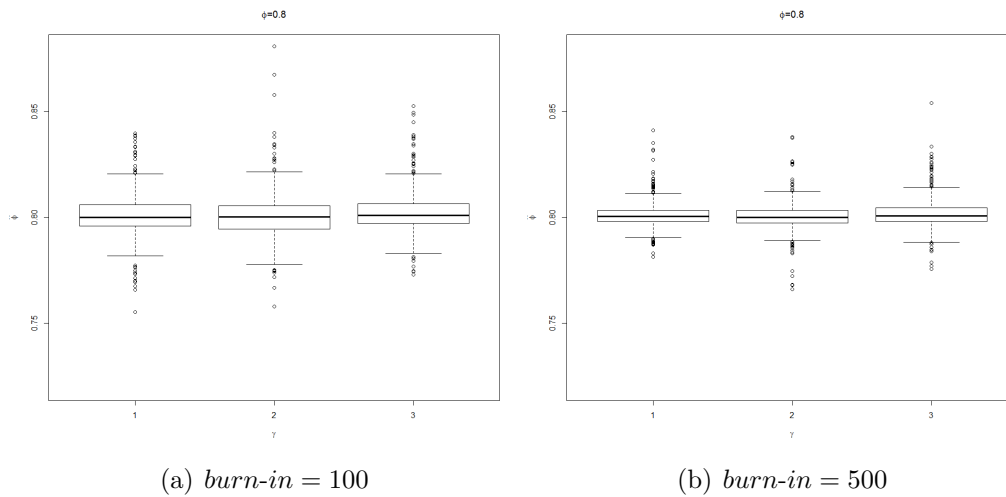


Figura B.5: Box-plot das estimativas de ϕ quando seu valor verdadeiro é 0.8, para $\gamma \in \{1; 2; 3\}$, $\alpha = 1.5$, $n = 1000$ e $re = 500$ fixos e $burn-in \in \{100; 500\}$ dispostos em (a) e (b) respectivamente.

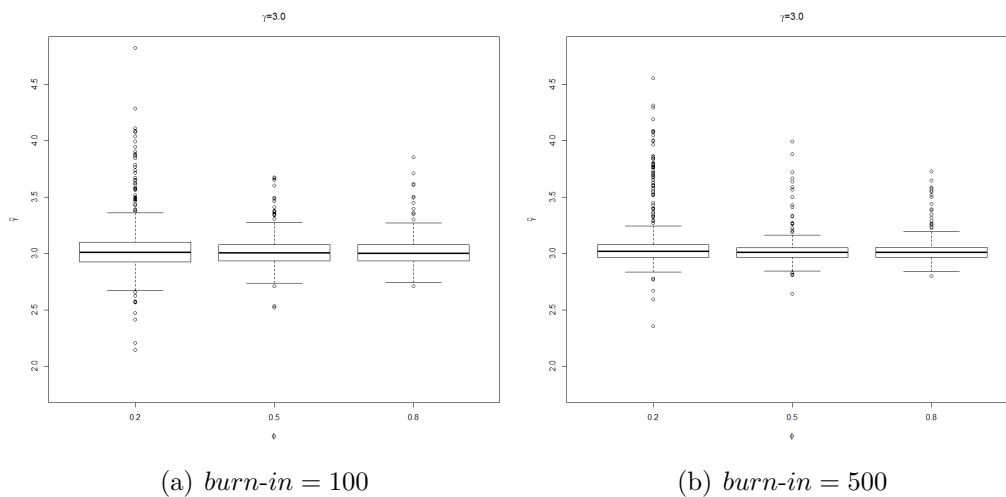


Figura B.6: Box-plot das estimativas de γ quando seu valor verdadeiro é 3.0, para $\phi \in \{0.2; 0.5; 0.8\}$, $\alpha = 1.5$, $n = 1000$ e $re = 500$ fixos e $burn-in \in \{100; 500\}$ dispostos em (a) e (b) respectivamente.

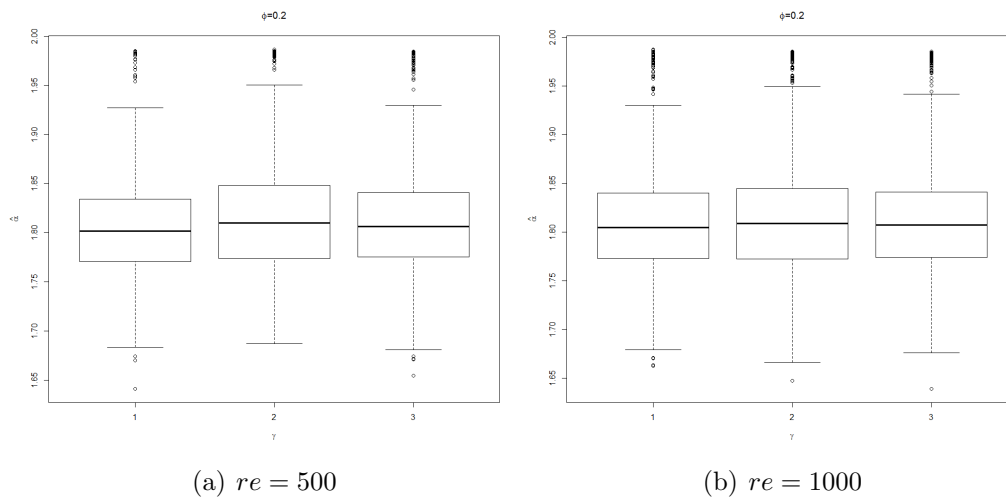


Figura B.7: Box-plot das estimativas de α quando seu valor verdadeiro é 1.8, para $\gamma \in \{1; 2; 3\}$, $\phi = 0.2$, $n = 1000$ e $burn-in = 100$ fixos e $re \in \{500; 1000\}$ dispostos em (a) e (b) respectivamente.

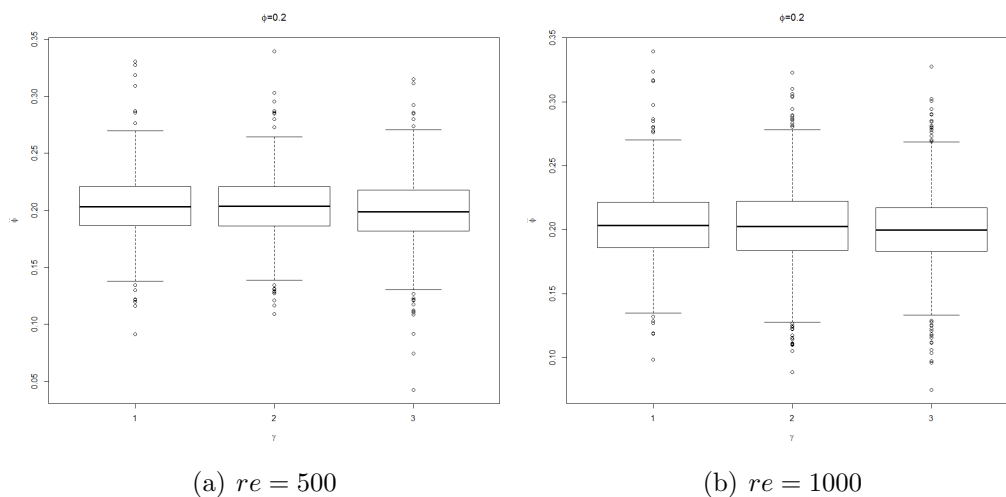


Figura B.8: Box-plot das estimativas de ϕ quando seu valor verdadeiro é 0.2, para $\gamma \in \{1; 2; 3\}$, $\alpha = 1.8$, $n = 1000$ e $burn-in = 100$ fixos e $re \in \{500; 1000\}$ dispostos em (a) e (b) respectivamente.

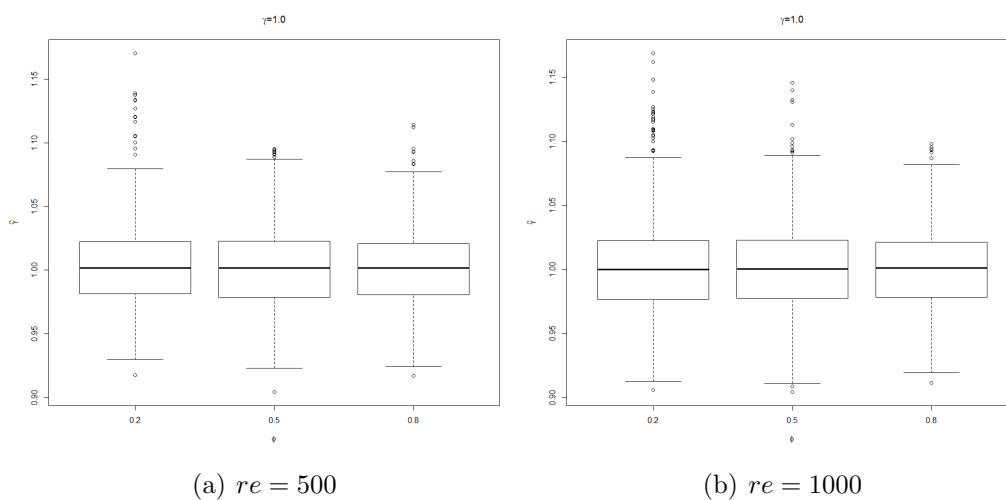


Figura B.9: Box-plot das estimativas de γ quando seu valor verdadeiro é 1.0, para $\phi \in \{0.2; 0.5; 0.8\}$, $\alpha = 1.8$, $n = 1000$ e $burn-in = 100$ fixos e $re \in \{500; 1000\}$ dispostos em (a) e (b) respectivamente.